

## Risiko til porteføljer i kraftmarkedet

Strømprisene har hatt dramatiske endringer de siste årene og temaet har vært hyppig diskutert. Strømprisen avhenger av mange forskjellige faktorer som gjør det tilnærmet umulig å si sikkert hva de fremtidige prisene vil være. Denne oppgaven tar for seg en blanding av teori og praksis, og viser hvordan avansert matematikk kan brukes til å takle reelle utfordringer innenfor finans og risikostyring - nærmere bestemt knyttet til Value at Risk.

ELISE RØISELAND STRØMME

### VEILEDERE

Torstein Kastberg Nilssen  
Trygve Kastberg Nilssen

**Universitetet i Agder, 2023-2024**

Fakultet for teknologi og realfag  
Institutt for matematiske fag

## Publiseringsavtale

Fullmakt til elektronisk publisering av oppgaven Forfatter har opphavsrett til oppgaven. Det betyr blant annet enerett til å gjøre verket tilgjengelig for allmennheten (Åndsverkloven. §2).

Oppgaver som er unntatt offentlighet eller taushetsbelagt/konfidensiell vil ikke bli publisert.

Vi gir herved Universitetet i Agder en vederlagsfri rett til å gjøre oppgaven tilgjengelig for elektronisk publisering:	Ja
Er oppgaven båndlagt (konfidensiell)?	Nei
Er oppgaven unntatt offentlighet?	Nei

# Forord

Etter mine seks studieår ved Universitet i Agder, leveres denne masteroppgaven som en avslutning på en god studietid fylt med mye lærdom. Studietiden har vært givende og jeg er takknemlig for kunnskapen jeg har tilegnet meg underveis i studieløpet. Matematikkstudiet ved UiA har gitt meg en mulighet til opparbeide en analytisk ferdighet som jeg mener er viktig for å løse både praktiske og teoretiske problemer. Den har gitt meg mulighet til å kombinere flere fagområder og har latt meg erfare hvordan tverrfaglig kunnskap bidrar til bedre løsninger.

Min avsluttendeoppgave har gitt meg god mulighet til å kombinere min breddekunnskap innenfor IT og informasjonssystemer med det matematiske fagområdet. Oppgaven har latt meg inkludere den tekniske utdanningen innenfor programmering som jeg har tatt ved UiA. Det har vært en lærerik prosess og jeg har hatt gleden av å kunne bruke elementer fra flere fagområder for å løse en praktisk problemstilling. Jeg ønsker å takke mine veiledere Torstein Kastberg Nilssen og Trygve Kastberg Nilssen for god hjelp gjennom året som har vært, og rette en takk til Le Quyen, Robin Aalmen og Stian Tollefsen for datamateriale som er blitt tilsendt og brukt i denne oppgaven.

Jeg vil også rette en takk til min tidligere videregående lærerer Stein Aanensen som inspirerte meg til å undersøke matematikkuniverset videre i min utdanning. Jeg vil også takke venner og familie som hele veien har stilt opp og støttet meg gjennom studieløpet.

Jeg er stolt over min utdanning ved universitetet og ser tilbake på min studietid som innholdsrik og fylt med både faglig lærdom og sosiale opplevelser med mine medstudenter. Takk til UiA for nyttig kunnskap, gode erfaringer, og ikke minst en god studietid.

Elise R. Strømme

Kristiansand, mai 2024

# Abstrakt

Strømprisen har hatt dramatiske endringer de siste årene og temaet har vært hyppig diskutert. Strømpriser avhenger av mange forskjellige faktorer som gjør det tilnærmet umulig å si sikkert hva de fremtidige prisene vil være. Denne oppgaven tar for seg en blanding av teori og praksis, og viser hvordan avansert matematikk kan brukes til å takle reelle utfordringer innenfor finans og risikostyring - nærmere bestemt knyttet til Value at Risk.

Formålet med oppgaven er å estimere reservekapitalbehovet for en portefølje bestående av stokastiske Ornstein-Uhlenbeck prosesser gitt på formen

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t$$

Oppgaven utforsker konseptet VaR i en finansiell kontekst, med fokus på de matematiske aspektene. Vi går dypt inn i risikoberegninger for usikre inntekter, og bruker verktøy for stokastiske prosesser og brownske bevegelser for å løse oppgavens problemstilling. Selv om oppgaven berører elementer av finansteori, ligger hovedfokuset på de matematiske metodene som brukes for å kvantifisere og håndtere risiko i usikre økonomiske miljøer.

# Abstract

In recent years, the cost of electricity has gone through significant fluctuations, sparking widespread discussion. The unpredictability of future electricity prices is due to a multitude of influencing factors. This project intertwines theory and practical application, demonstrating the use of advanced mathematics to address real-world challenges in finance and risk management, particularly in relation to Value at Risk.

The purpose of the task is to estimate the capital reserve requirement for a portfolio consisting of stochastic Ornstein-Uhlenbeck processes given in the form

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t$$

This project explores the concept of VaR within a financial context, with an emphasis on the mathematical aspects. We delve deep into risk calculations for uncertain revenues, employing tools related to stochastic processes and Brownian motions to address the problem at hand. While the project does touch upon elements of financial theory, the primary focus lies in the mathematical methodologies employed to quantify and manage risk in volatile economic environments.

# Innhold

<b>Forord</b>	<b>ii</b>
<b>Abstrakt</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Liste av figurer</b>	<b>viii</b>
<b>Liste av tabeller</b>	<b>ix</b>
<b>1 Datagrunnlag</b>	<b>1</b>
1.1 Nord Pool . . . . .	1
1.2 Nasdaq OMX . . . . .	2
1.3 Grafisk fremstilling av observasjonene . . . . .	2
1.4 Volatilitet $\sigma$ . . . . .	4
1.5 Gjennomsnittshastighet $\theta$ . . . . .	4
1.6 Gjennomsnitt $\mu$ . . . . .	5
1.7 EURNOK . . . . .	5
1.8 Volum $v_i$ . . . . .	5
<b>2 Stømt teori</b>	<b>7</b>
2.1 Snittreverserende prosesser . . . . .	7
2.2 Spot . . . . .	8
2.3 Futureskontrakter . . . . .	8
<b>3 Konesjonskraft IKS</b>	<b>9</b>
3.1 Risiko til porteføljen . . . . .	9
3.2 Sikringsgraden . . . . .	11
3.3 Volum . . . . .	11
3.4 Korrelasjon og kovarians mellom produktene . . . . .	12
3.5 Porteføljens varians . . . . .	12
<b>4 Risiko</b>	<b>14</b>
4.1 VAR - Value at Risk . . . . .	14
4.1.1 Historisk VaR . . . . .	15
4.1.2 Monte-Carlo VaR . . . . .	17
4.1.3 Varians-kovarians VaR . . . . .	17
4.2 Skjevhet . . . . .	19
4.3 Kurtose . . . . .	19
4.4 Testing av porteføljens observasjoner . . . . .	20
4.4.1 Histogram . . . . .	20
4.4.2 QQ-plot . . . . .	23
4.4.3 Statistisk analyse av fordelingen . . . . .	26

4.4.4	Jarque Bera, JB-test . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Statistisk Analyse</b>	<b>29</b>
5.1	Volatilitet . . . . .	29
5.2	Varians . . . . .	29
5.3	Standardavvik . . . . .	29
5.4	Kovarians . . . . .	30
5.5	Korrelasjon . . . . .	30
5.6	Konfidensintervall . . . . .	30
5.7	Z-verdi og signifikantnivå . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Stokastiske prosesser</b>	<b>33</b>
6.1	Markovkjeder . . . . .	33
6.2	Brownian Motion . . . . .	34
6.3	Geometrisk Brownian Motion . . . . .	35
6.4	Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Itô kalkulus</b>	<b>39</b>
7.1	Itô intergal . . . . .	39
7.2	Itô prosess . . . . .	39
7.3	Itô formel . . . . .	40
7.4	Itô isometri . . . . .	41
7.5	Martingale . . . . .	42
7.6	Lèvy . . . . .	42
7.7	4-dimensjonalt itô system . . . . .	44
7.8	Varians-Kovarians . . . . .	45
7.8.1	Gjennomsnittlig pris . . . . .	45
7.8.2	Varians . . . . .	47
7.8.3	Kovarians . . . . .	48
7.8.4	Kontrollsjekk av utregningene . . . . .	50
7.9	Standardavvik $\sigma$ . . . . .	52
7.9.1	Begrunnelse for å justere matrisen . . . . .	53
7.9.2	Konvertering av kovariansmatrise . . . . .	55
7.10	Implementering i Python . . . . .	56
7.10.1	Varians . . . . .	57
7.10.2	Kovarians . . . . .	57
7.10.3	Kovariansmatrise . . . . .	57
7.10.4	Volum . . . . .	58
7.11	Konfidensnivå 95% gitt normale markedsforhold . . . . .	62
7.12	Konfidensnivå 99% gitt normale markedsforhold . . . . .	63
7.13	Konfidensnivå 95% med historisk gjentakelse . . . . .	64
7.14	Konfidensnivå 99% med historisk gjentakelse . . . . .	65
7.15	Vurdering av resultatet . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Oppsummering</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Python Skript</b>	<b>68</b>
A.1	Konfidensintervall . . . . .	68
A.2	Historisk signifikantnivå . . . . .	69
A.3	Z-verdi . . . . .	69
A.4	VaR definisjon . . . . .	70
A.5	Historikk . . . . .	71
A.6	BrownianMotion . . . . .	72

A.7 GeometriskBrownianMotion . . . . .	73
A.8 Ornstein-Ulhenbeck . . . . .	74
A.9 Grunddata . . . . .	75
A.10 QQ-plot . . . . .	76
A.11 Fordelingstest . . . . .	76
A.12 ValueAtRisk . . . . .	77



# Figurer

1.1	Spotprisen fra 2007 til 2022 . . . . .	3
1.2	Prisen på 1-årskontrakt fra 2007 til 2022 . . . . .	3
1.3	Prisen på 2-årskontrakt fra 2007 til 2022 . . . . .	4
1.4	Prisen på 3-årskontrakt fra 2007 til 2022 . . . . .	4
1.5	Månesrapport hentet fra KIKS hjemmesider . . . . .	6
2.1	Spotpris over en ti års-periode 2010-2020 . . . . .	8
3.1	Volumet fordelt på de forskjellige produktene ved ulikt salgsår . . . . .	11
3.2	Volumet fordelt på de forskjellige produktene ved ulikt salgsår . . . . .	11
3.3	Volumet spesifisert for perioden 2023-2026 . . . . .	12
4.1	Grafisk fremtiling av VaR illustrert gjennom Python A.4 . . . . .	15
4.2	Histogram for spot . . . . .	21
4.3	Histogram for 1-årskontrakt . . . . .	21
4.4	Histogram for 2-årskontrakt . . . . .	22
4.5	Histogram for 3-årskontrakt . . . . .	22
4.6	QQ-plot for spot . . . . .	24
4.7	QQ-plot for 1-årskontrakt . . . . .	24
4.8	QQ-plot for 2-årskontrakt . . . . .	25
4.9	QQ-plot for 3-årskontrakt . . . . .	25
4.10	Deskriptiv data for spot . . . . .	27
4.11	Deskriptiv data for 1-årskontrakt . . . . .	27
4.12	Deskriptiv data for 2-årskontrakt . . . . .	28
4.13	Deskriptiv data for 3-årskontrakt . . . . .	28
5.1	Illustasjon av tosidig konfidensintervall . . . . .	31
6.1	Brownsk bevegelse simulert i Python . . . . .	35
6.2	Geometrisk brownsk bevegelse simulert i python . . . . .	36
6.3	Ornstein-Uhlenbeck prosess simulert i python . . . . .	38
7.1	Grafisk fremstilling av variabelskifte . . . . .	46

# Tabeller

4.1	$Z_\alpha$ for porteføljens historiske fordeling . . . . .	17
5.1	$Z_\alpha$ for standard normalfordeling . . . . .	32
7.1	Parameter ved $Z_{0,05}$ . . . . .	62
7.2	Resultat ved $Z_{0,05}$ . . . . .	62
7.3	Parameter ved $Z_{0,01}$ . . . . .	63
7.4	Resultat ved $Z_{0,01}$ . . . . .	63
7.5	Parameter ved $Z_{0,05}$ . . . . .	64
7.6	Resultat ved $Z_{0,05}$ . . . . .	64
7.7	Parameter ved $Z_{0,01}$ . . . . .	65
7.8	Resultat ved $Z_{0,01}$ . . . . .	65

# Datagrunnlag

Strømprisene som er brukt i oppgaven er opprinnelig historisk data hentet fra Nordpool og Nastaq. Kontraktsprisene fra Nastaq er oppgitt i EUR/MWh mens spotprisene solgt over Nordpool er gitt for NOK/MWh. I oppgaven er det blitt tilsendt ferdig bearbeidet estimerer for de ulike variablene i den sammensatte porteføljen som analyseres. Det er tidligere medstudent Le Quyen som har beregnet og sendt disse estimatene [22]. Hennes beregninger er basert på tilstedte bearbeidede priser fra Robin Aalmen og Stian Tollefsen. Strømprisene for års-kontraktene er de samme som er brukt i denne oppgaven og spotprisene fra Nordpool er omgjort til euro. Dette medfører at alle estimatene brukt i denne oppgaven er basert på input i euro og energiprisene er oppgitt i EUR/MWh.

Data brukt i denne oppgaven er som tidligere nevnt mottatt av Aalmen og Tollefsen, men disse er ikke justert for ekstreme verdier. Ved test av fordelingen og egenskaper til de daglige prisendringene er ikke ekstremverdier i prisene ekskludert. Dette vil ikke ha en praktisk betydning for hovedresultatet men vil påvirke utfall knyttet til skjevhet, kurtose og deskriptiv data. Ved beregning av hovedresultatet er det de estimerte verdiene fra Le Quyen Vu som blir brukt. I hennes data, som er bearbeidet av Aalmen og Tollefsen, er ekstremverdier tatt høyde for.

## 1.1 Nord Pool

Nord Pool er den nordiske kraftbørs og er en handelsplass for både fysiske og rent finansielle kraftkontrakter. Transaksjonskostnadene ved kraftbørsen gjør det ikke lønnsomt for mindre forbrukere å benytte seg av Nord Pool. Det er derfor i dag kun store aktører i kraftmarkeder som handler direkte på Nord Pool eller gjennom bilaterale kraftkontrakter [16]. Som privatkunde eller som liten forbruker oppretter du derfor strømvtaale hos større energileverandører som finnes på markedet, eksempelvis Norges-energi eller Å energi.

	DatoSpot	Spot
0	02.01.2007	32.4075
1	03.01.2007	32.3279
2	04.01.2007	30.6196
3	05.01.2007	30.0246
4	06.01.2007	28.3267
	...	...
5835	24.12.2022	136.0067
5836	25.12.2022	123.6413
5837	26.12.2022	106.7154
5838	27.12.2022	135.0213
5839	28.12.2022	116.4204

[5840 rows x 2 columns]

## 1.2 Nasdaq OMX

Nasdaq OMX er børsen som benyttes ved kjøp og salg av energi med levering lengre frem i tid enn intadag og tilbyr blant annet handel tilknyttet strømderivater. Med strømderivater menes da finansielle instrumenter som gir mulighet for sikring knyttet til svingningene i markedsprisen på strøm.

	Dato	1-års	2-års	3-års
0	02.01.2007	40.25	42.00	42.40
1	03.01.2007	39.90	41.50	42.20
2	04.01.2007	39.90	41.25	42.00
3	05.01.2007	39.30	40.55	41.38
4	08.01.2007	37.90	38.90	40.00
...	...	...	...	...
4006	21.12.2022	137.55	75.50	64.50
4007	22.12.2022	134.00	75.25	64.50
4008	23.12.2022	132.00	78.61	64.00
4009	27.12.2022	131.00	80.00	64.00
4010	28.12.2022	126.25	80.00	63.50

[4011 rows x 4 columns]

## 1.3 Grafisk fremstilling av observasjonene

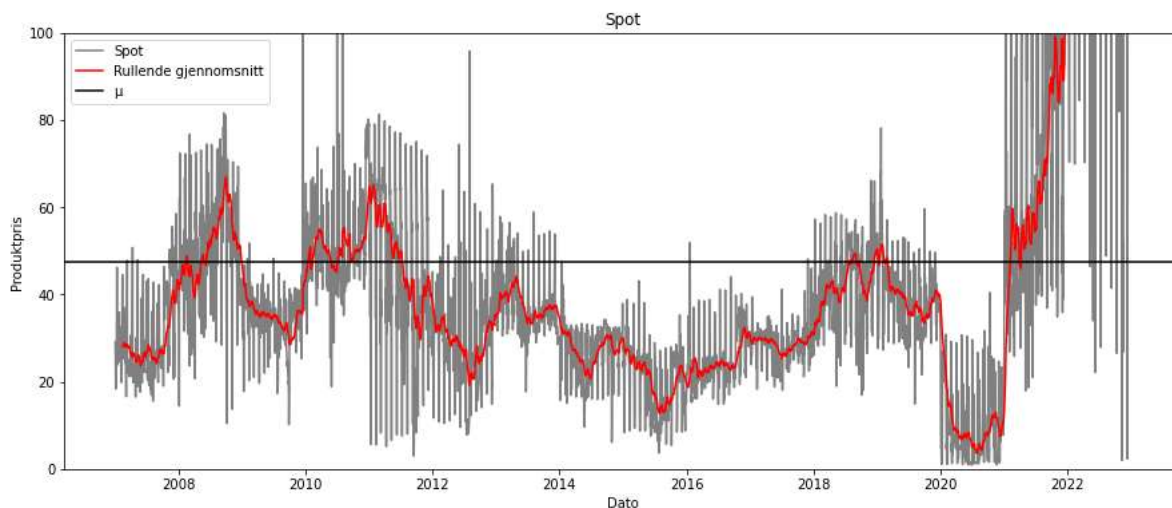
Python skriptet under gir en grafisk fremstilling av dataen gitt over. Den grå grafen i 1.1 til 1.4 representerer de faktiske utfallene, mens rød funksjon gir et mer oversiktlig bilde av prisens variasjon med rullende gjennomsnitt over 45 dager. Svart linje representerer gjennomsnittsverdien for de ulike prisene.

---

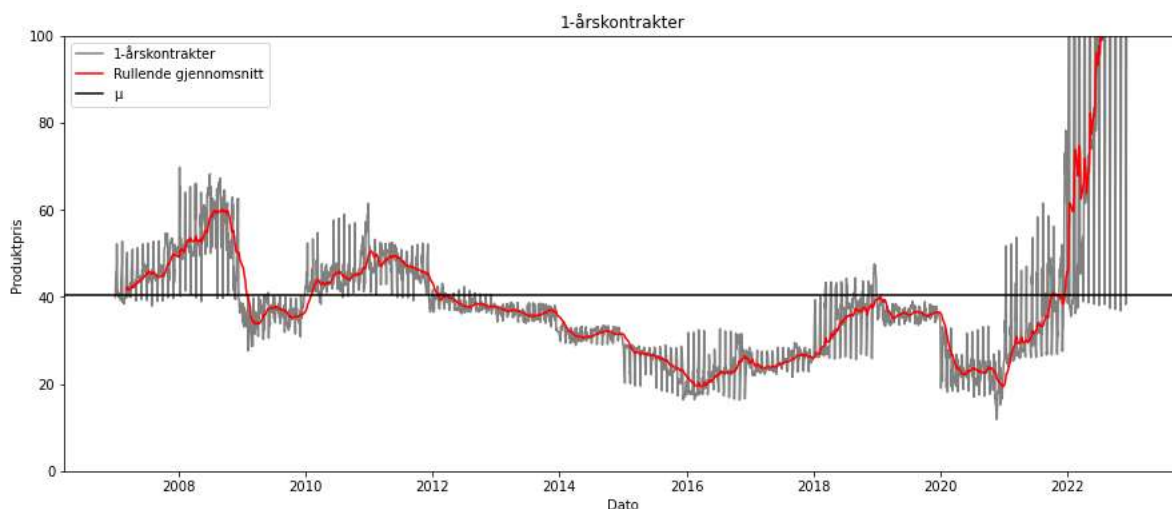
```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import pandas as pd
3
4 def historikk(csv_fil,dato,produkt):
5     data = pd.read_csv(csv_fil,usecols=[dato,produkt],sep=';',decimal=',')
6     data = data.dropna()
7     print(data)
8
9     # Konverter 'dato' kolonnen til datetime
10    data[dato] = pd.to_datetime(data[dato])
11
12    # Sorter data etter dato
13    data = data.sort_values(by=dato)
14    gjennomsnitt=data[produkt].mean()
15    data['Rullende gjennomsnitt'] = data[produkt].rolling(window=45).mean()
16
17    # Plot det rullende gjennomsnittet mot dato
18    plt.figure(figsize=(15, 6))
19    plt.plot(data[dato], data[produkt] ,color="gray", label= produkt)
20    plt.plot(data[dato], data['Rullende gjennomsnitt'], color="red", label="Rullende ...
    gjennomsnitt")
21    plt.axhline(y= gjennomsnitt ,color="black", linestyle="-",label="\u03BC")
22    plt.xlabel('Dato')
23    plt.ylim(0, 100)
24    plt.ylabel('Produktpris')
25    plt.title(produkt)
26    plt.legend()
27    plt.show()
```

---

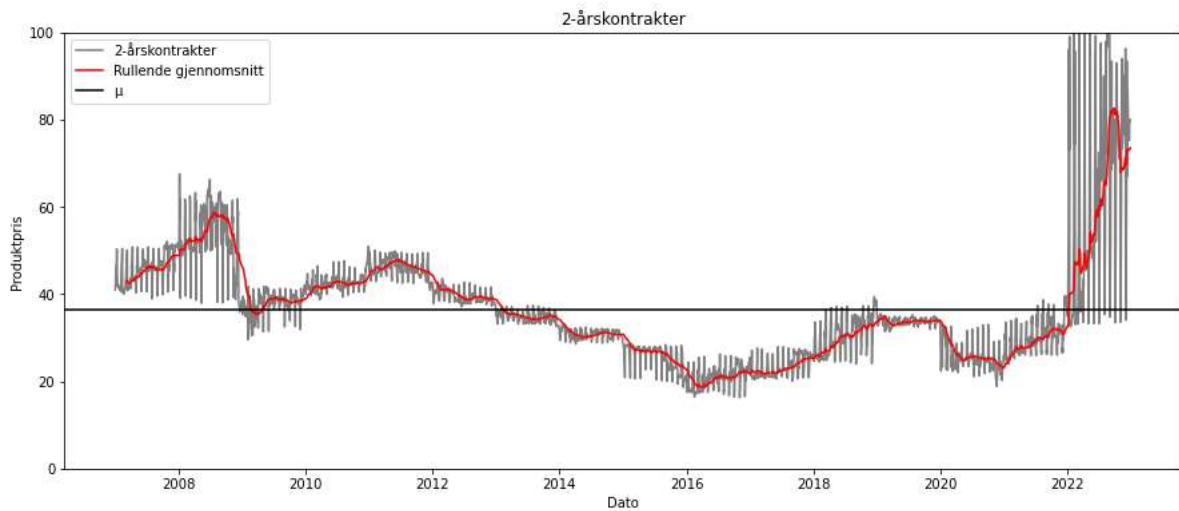
Den grafiske fremstillingen viser mindre variasjon for de langsiktige kontraktene hvor den gjennomsnittlige prisen  $\mu$  ser ut til å ligger rundt samme nivå for alle produktene. For spot er prisen enda mer stokastisk. Sesongvariasjonen kombinert med den stokastiske prosessen gjør prisen for spot mer uforutsigbar. Den gjennomsnittlige prisen ser ut til å ligge høyere, noe som kan påvirkes av den ekstreme prisendringen som inntraff i 2022. For estimatene i oppgaven blir ikke disse inkludert og de gjennomsnittlige nivåene fra Le Quyen tenkes derfor å være lavere.



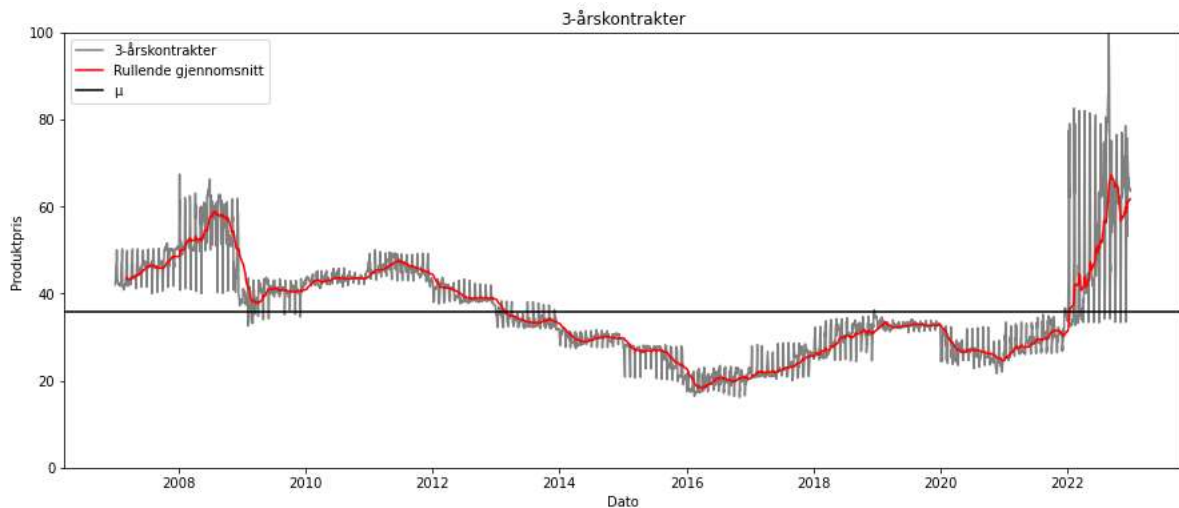
Figur 1.1: Spotprisen fra 2007 til 2022



Figur 1.2: Prisen på 1-årskontrakt fra 2007 til 2022



Figur 1.3: Prisen på 2-årskontrakt fra 2007 til 2022



Figur 1.4: Prisen på 3-årskontrakt fra 2007 til 2022

## 1.4 Volatilitet $\sigma$

Det er i denne oppgaven blitt tilsendt kovariansmatrise fra tidligere medstudent Le Quyen Vu som skal representere porteføljens volatilitet i form av standardavvik [22]. Dette er en  $4 \times 4$ -matrise som er utarbeidet for Konesjonskraft IKS sin portefølje. Matrisen er beregnet ved bruk av kovarians og kvadratisk variasjon langs diagonalen og det vil i oppgaven vises at den må justeres for oppgavens formål.

```
sigma = [[41.04296765, -0.07172793, -0.09372714, -0.09403635],
         [-0.07172793, 0.85720196, 0.58126776, 0.45597803],
         [-0.09372714, 0.58126776, 0.52561022, 0.40912495],
         [-0.09403635, 0.45597803, 0.40912495, 0.37393444]]
```

## 1.5 Gjennomsnittshastighet $\theta$

Estimat for  $\theta$  er tilsendt fra Le Quyen Vu[22]. Denne er lik for både 1-dimensjonale og flerdimensjonale tilfeller. Den beskriver hastigheten som funksjonen returnerer til sitt gjennomsnittsnivå  $\mu$ .

theta = [0.03824143, 0.0037009, 0.00263384, 0.00202072]

## 1.6 Gjennomsnitt $\mu$

Estimat for  $\mu$  er tilsendt fra Le Quyen Vu [22]. Denne parameteren er fast for kontraktsproduktene hvor nivåene ikke har store differanser fra hverandre. Quyen Vu bruker en funksjon  $m(t)$  for å håndtere svingningsegenskapen som spotpriser har under sesongvariasjoner. For å beregne value at risk for KIKS sin portefølje velges det i oppgaven å ta en snittverdi av gjennomsnittsverdiene for de langsiktige kontraktene for å sette en gjennomsnittlig markedsverdi  $MV$  til porteføljen.

mu = [3.568469293376401, 3.5380112638971624, 3.5333447299835687]

$$MV = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} = 3,54660842908571$$

## 1.7 EURNOK

Bergeningene i oppgaven utføres gjennom EUR. For å konvertere resultatet til NOK er det pr. 10.05.24 innhentet EURNOK kurs på 11,66 gjennom Nordnet [13].

## 1.8 Volum $v_i$

For å kunne beregne et estimat i risikoanalysen trengs det et bestemt volum av kraft som skal selges. I denne oppgaven er Konesjonskraft IKS sitt totale salgsvolum fra og med 2023 til og med 2026 som anvendes. I KIKS's sin månedsrapport for mars 2023 fremkommer en oversikt over det totale volum av kraft som skal selges[8]. Disse verdiene er oppgitt i GWh verdier. Denne oppgaven har fokus på de usikra inntektene av porteføljen. Analyseperioden er på 4 år og det vil derfor ikke være hele volumet som skal inkluderes for alle årene. De ulike produktene vektet også ulikt og volumparametere er derfor senere i oppgaven justert for sikringsgraden som KIKS har satt..



<b>mars 2023</b>	<b>2022</b>	<b>2023</b>	<b>2024</b>	<b>2025</b>	<b>2026</b>
<b>Totalt volum i GWh</b>	<b>889</b>	<b>958</b>	<b>1 036</b>	<b>1 122</b>	<b>1 122</b>
% av systempris sikra	88 %	68 %	36 %	13 %	0 %
% av områdepris sikra	92 %	69 %	40 %	14 %	0 %
<b>NØKKELTALL PR. MÅNADSSLUTT</b>					
Kjøpskostnad i øre/kwh	5,9	12,10	12,3	12,5	12,7
Systempris i øre/kwh	142,4	70,8	81,9	62,0	52,2
Områdepris i øre/kwh	144,7	25,3	33,4	32,0	29,9
Snitt sikringspris øre/kwh	112,0	122,9	87,9	85,0	-
<b>PROGNOSE INNTEKTER OG KOSTNADER (ALLE TAL I 1 000)</b>					
Sikra/levert systeminntekt	647 825	557 995	247 083	101 476	-
Estimert usikra systeminntekt	-	227 350	549 606	613 828	596 331
Sikra/levert områdeinntekt	237 885	332 886	93 184	26 635	-
Estimert usikra områdeinntekt	-	75 494	207 971	308 523	335 594
Kjøpskostnad kraft	-52 300	-115 952	-127 354	-140 145	-142 948
Driftskostnader	-7 393	-7 463	-7 728	-8 004	-8 289
Netto finans	3 000	25 000	25 000	25 000	25 000
<b>Estimert resultat</b>	<b>829 018</b>	<b>1 095 310</b>	<b>987 762</b>	<b>927 313</b>	<b>805 688</b>

Figur 1.5: Måndsrapport hentet fra KIKS hjemmesider



# Stømteori

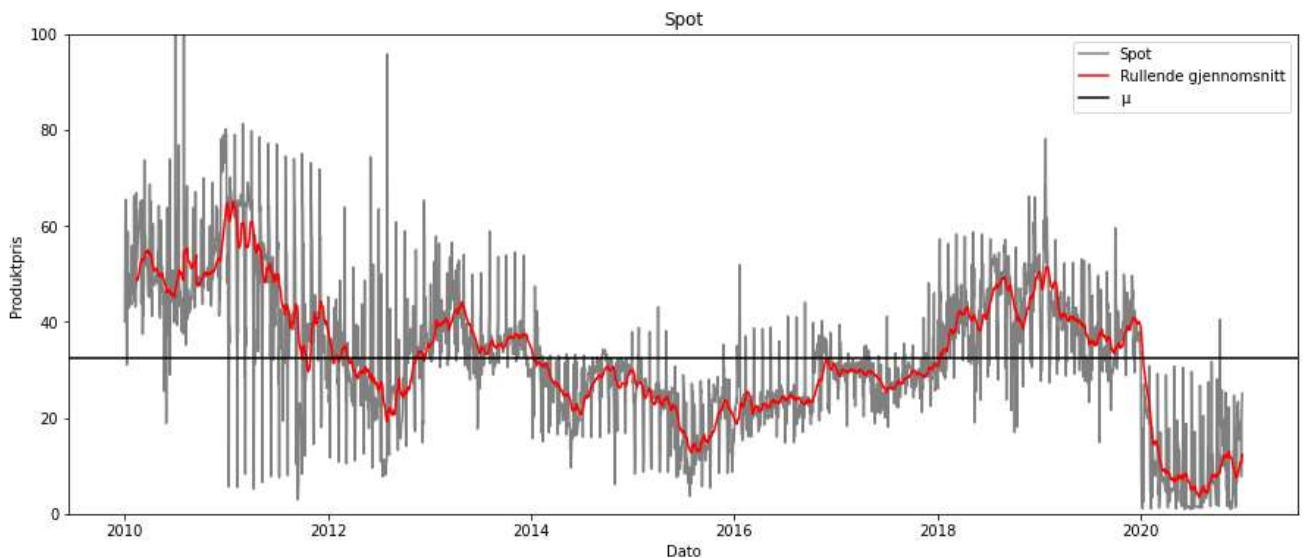
Strømprisen har hatt drastiske endringer de siste årene og både forbrukere og produsenter har kunne kjenne på et usikkert kraftmarked. Mediebilde har florert med strømdiskusjoner og forbrukere har stilt spørsmål med landets kraftpolitikk. Kraftprisen påvirkes av mange faktorer og det vil derfor være vanskelig å forutsi hva den fremtidige kraftprisen vil være, men en vesentlig variabel som kan gi oss store endringsutslag i prisnivået er basert på egenskapene til den elektriske energien.

De fleste varer og produkter som vi forholder oss til i hverdagen kan lagres og selges når det er behov for dem. Strøm som er en av de mest brukte energikildene har dessverre ikke denne egenskapen og egner seg dårlig til lagring. Elektrisk energi krever en momentan balanse mellom energiproduksjonen og kraftforbruket [21]. Det vil si at til enhver tid må produseres like mye kraft inn på det elektriske nettet som det blir tatt ut. For å sikre denne momentane balansen spiller derfor etterspørselen inn på strømprisen.

## 2.1 Snittreverserende prosesser

Markedsprisen for kraft varierer og gjenspeiler forbruk-, produksjons- og overføringsforholdene i det nordiske kraftmarkedet [16]. Været er som kjent en faktor som påvirker strømprisen og variasjoner i nedbør og temperatur bidrar til at spotprisen kan variere mye. Været er notorisk vanskelig å modellere og er med på å gjøre det nærmest umulig å kunne forutse den fremtidige prisen. I motsetning til aksjepriser som kan endre seg noe fra dag til dag, men mye over en lengre periode, kan strømpriser endre seg mye fra dag til dag, men lite over en lengre periode.

Historikken til kraftpriser viser et bilde av såkalte snittreverserende prosesser. Det vil si at på lengre sikt vil de høye eller lave strømprisene bevege seg mot et likevektsnivå. Er prisen veldig høy/lav kan man tenke seg at innen en viss periode vil prisen synke/øke mot snittet. En lineær regresjonsmodell for strømpriser vil med andre ord være en horisontal linje i gjennomsnittsprisen. Grunnen til denne snittreverserende prosessen kan også forklares gjennom etterspørsel og produksjonsfaktorene som påvirker energiprisen. Grunnet dårlig lagringskapasitet vil man ved høy strømpris få redusert etterspørsel, men for stor produksjon. Prisen blir da redusert for å kvitte seg med overproduksjonen. Når prisen igjen blir lav øker etterspørselen. Produksjonsnivået tilsvarer ikke etterspørselen og prisen vil derfor igjen øke. Slik gjentar den snittreverserende prosessen seg og vi kan derfor se et gjennomsnitt i kraftprisene ved observasjon av datauttrekk av en viss størrelse.



Figur 2.1: Spotpris over en ti års-periode 2010-2020

## 2.2 Spot

Spotpris på strøm fastsettes av Nord Pool time for time og ved spotpris betaler du den faktiske markedsprisen som er satt på denne kraftbørsen[16]. Ofte tenker man at spot viser til prisen på nåværende tidspunkt, noe den forståvidt gjør, men vi kan også sammenligne spotprisen til med en futurkontrakt med tidshorisont på 1 time.

Spotprisen er lik på tvers av strømleverandørene i Norge, men nettleie, avgifter og påslag fra de ulike strømselskapene gjør at avtalen som hver enkelt forbruker har inngått med sin leverandør kan variere. Når vi snakker om den store variasjonen i markedsprisen på kraft er det selve spotprisen vi referer til.

## 2.3 Futureskontrakter

Grunnet den store variasjonen i markedsprisen på strøm er det stor økonomisk risiko knyttet til kraftmarkedet. For å redusere denne risikoen kan produsenter, forbrukere og andre aktører i markedet inngå langsiktig finansielle kontrakter for å redusere risikoen for pris-variasjon og derav få økt prissikkerhet [16]. Futureskontraktene handles over Nasdaq OMX og er en bilateral finansiell kontrakt som etablerer rettigheter og forpliktelse mellom kjøper og selger. Kontrakten omfatter både daglig kontantoppgjør i leveringsperioden og et endelig kontantoppgjør ved avtalens slutt[7]. En futureskontrakt er en avtale om et fremtidig kjøp eller salg av et underliggende objekt hvor både pris, mengde og leveringstidspunkt er forhåndsbestemt. Begge parter har inngått en gjensidig forpliktelse og det vi kaller en bilateral avtale hvor den ene part er forpliktet til kjøp og den andre part i motsatt salgsposisjon. Avtalen inkluderer daglig markedsoppgjør basert på daglig avregnet gevinst eller tap[14].

# Konsesjonskraft IKS

Agder fylkeskommune har sammen med 19 andre Agder kommuner inngått et samarbeid knyttet til omsetning og prissikring av konsesjonskraften de ulike kommunene mottar og har sammen opprettet det interkommunale selskapet Konsesjonskraft IKS, også kjent som KIKS. Selskapets formål er å løse den felles oppgaven kommunene har i forbindelse med videresalget av konsesjonskraft og sørge for et tilfredstillende resultat og stabile utbytter til alle deltakerkommunene etter den fastsatte risikostrategien som selskapet har fastsatt. [9].

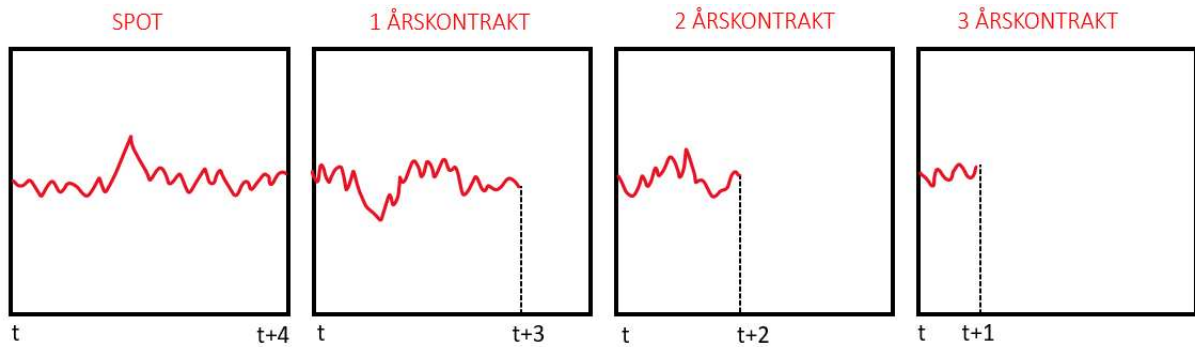
Hva er så konsesjonskraft? Når en kommune er berørt av kraftutbygging har kommunen krav på en viss andel energi. Eiere av større vannkraftverk som produserer elektrisk energi, er altså pliktig i å levere en viss andel til de ulike kommunene som er berørt av produksjonen. Denne energien får kommunene til en avtalt pris som er rimeligere enn markedsprisen og kalles da for konsesjonskraft. [18] Meningen med konsesjonskraft er da å sikre utbyggingskommunene kraft til en alminnelig forsyning og rimelig pris. Det viser seg å være mer lønnsomt å videreselge denne energien til høyre utsalgspris på markedene enn å bruke den selv. KIKS videreselger derfor denne energien på vegne av kommunene mens kommunene heller kjøper den energien de bruker på det offentlige kraftmarkedet.

KIKS selger energien på 4 ulike måter som til sammen utgjør en portefølje på 4 elementer. De 4 energiproduktene er da spotpris og futureskontrakter på henholdsvis ett-, to- og tre år. KIKS selger konsesjonskraften til spotpris gjennom Nord Pool og fysiske bilaterale avtaler, og futureskontraktene gjennom Nasdaq OMX og/eller ved bilaterale finansielle avtaler [10].

## 3.1 Risiko til porteføljen

Ett-, to- og treårskontraktene som KIKS selger har jevn levering av energi hver time fra og med 1. januar til og med 31 desember året etter avtale/handelstidspunktet [10]. Siden KIKS har en portefølje hvor den lengste futurekontrakten ligger på 3 år, vil det være relevant å se på de usikre inntektene til kiks sin portefølje med et 4 års perspektiv. Selges det en 3-årskontrakt 20 november i 2022 starter ikke avtalen før 1 januar 2023 og avsluttes 31 desember 2026 hvor kontantoppgjøret gjennomføres. Når 3-årskontrakten inngås i år  $t$  vil inntekten for den kontrakten være låst fra 1. januar påfølgende år og 3 år frem i tid. De usikre inntekten til KIKS i løpet av en 4 årsperiode kan derfor fremstilles på følgende måte hvor  $t$  er det første året i perioden man undersøker:

$t$	Spotpris solgt i løpet av $t$
$t + 1$	Spotpris solgt i løpet av $t$ og $t + 1$ . Ettårskontrakt solgt i år $t$ .
$t + 2$	Spotpris solgt i løpet av $t, t + 1$ og $t + 2$ . Ettårskontrakt solgt i år $t$ og $t + 1$ . Toårskontrakt solgt i år $t$ .
$t + 3$	Spotpris solgt i løpet av $t, t + 1, t + 2$ og $t + 3$ . Ettårskontrakt solgt i år $t, t + 1$ og $t + 2$ . Toårskontrakt solgt i år $t$ og $t + 1$ . Treårskontrakt solgt i år $t$ .



For å kunne beregne risikoen til denne sammensatte porteføljen er det nødvendig å finne den forventete avkastningen for produktene som selges de ulike årene. Risikoanalysen i denne oppgaven innebærer å beregne hvor stort et potensielt tap på porteføljen kan være gitt et bestemt signifikantnivå. Ved å ta gjennomsnittet av produktenes prosess vil vi få et mer nøyaktig bilde av hva som kan forventes av avkastning i fremtiden. Dette utføres matematisk ved å ta integralet av de ulike produktprosessene over den tidsperioden som er relevant for de usikre inntektene. Matematisk kan vi tenke oss at det er følgende usikre inntekter som vil bli registrert i den 4 år lange perioden ved startår  $t$ .

$$\int_0^4 \text{spot} + \int_0^3 \text{1-årskontrakt} + \int_0^2 \text{2-årskontrakt} + \int_0^1 \text{3-årskontrakt}$$

$$\int_0^4 X_t^0 + \int_0^3 X_t^1 + \int_0^2 X_t^2 + \int_0^1 X_t^3$$

Ettersom det er de usikre inntektene vi er på jakt etter og ikke alle produktene som selges skal inkluderes for hele analyse perioden vil det være hensiktsmessig å splitte opp integralet slik at vi blir stående med gjennomsnittsverdier på produktene pr. år. De ulike leddene kan da uttrykkes hver for seg på følgende måte

$$X_i = \int_0^1 X_t^i dt \quad i = 0, 1, 2, 3$$

$$X_{i+4} = \int_1^2 X_t^i dt \quad i = 0, 1, 2$$

$$X_{i+7} = \int_2^3 X_t^i dt \quad i = 0, 1$$

$$X_9 = \int_3^4 X_t^i dt$$

$X_0, X_4, X_7, X_9$  beskriver den gjennomsnittlige spotprisen de ulike årene i perioden,  $X_1, X_5, X_8$  den gjennomsnittlig prisen på 1-årskontrakter,  $X_2, X_6$  den gjennomsnittlig prisen på 2-årskontrakter, og til slutt  $X_3$  den gjennomsnittlig prisen på 3-årskontraktene. For å kunne anslå hvor stor inntekt de ulike salgsproduktene vil føre med seg må vi inkludere volumet som omsettes av de ulike produktene på markedet. På samme måte som vi kan tenke oss at de usikrede inntektene kan deles inn i 10 gjennomsnittspriser kan også salgsvolumet av de ulikeproduktene deles inn i 10 tilhørende volumsverdier med tilsvarende indeksverdier.  $v_0, v_4, v_7, v_9$  beskriver salgsvolumet av spot de ulike årene i perioden,  $v_1, v_5, v_8$  volumet for 1-årskontrakter,  $v_2, v_6$  for 2-årskontrakter, og til slutt  $v_3$  for 3-årskontraktene.

	2023	2024	2025	2026
<b>Spot</b>	$X_0$	$X_4$	$X_7$	$X_9$
<b>1-årskontrakt</b>	$X_1$	$X_5$	$X_8$	
<b>2-årskontrakt</b>	$X_2$	$X_6$		
<b>3-årskontrakt</b>	$X_3$			

Figur 3.1: Volumet fordelt på de forskjellige produktene ved ulikt salgår

	2023	2024	2025	2026
<b>Spot</b>	$V_0$	$V_4$	$V_7$	$V_9$
<b>1-årskontrakt</b>	$V_1$	$V_5$	$V_8$	
<b>2-årskontrakt</b>	$V_2$	$V_6$		
<b>3-årskontrakt</b>	$V_3$			

Figur 3.2: Volumet fordelt på de forskjellige produktene ved ulikt salgår

Ved å multiplisere salgsvolumet med den gjennomsnittlige produktprisen vil man finne den totale verdien av de usikrede inntektene i den 4 år lange perioden.

$V_t$	$v_0 X_0$	Verdien av Spot solgt i løpet av $t$
$V_{t+1}$	$\sum_{i \in \{0,1,4\}} v_i X_i$	Verdien av spot solgt i løpet av $t$ og $t+1$ . Ettårskontrakt solgt i år $t$ .
$V_{t+2}$	$\sum_{i \in \{0,1,2,4,5,7\}} v_i X_i$	verdien av spot solgt i løpet av $t, t+1$ og $t+2$ . Ettårskontrakt solgt i år $t$ og $t+1$ . Toårskontrakt solgt i år $t$ .
$V_{t+3}$	$\sum_{i=0}^9 v_i X_i$	Verdien av spot solgt i løpet av $t, t+1, t+2, t+3$ . Ettårskontrakt solgt i år $t, t+1$ og $t+2$ . Toårskontrakt solgt i år $t$ og $t+1$ . Treårskontrakt solgt i år $t$ .

## 3.2 Sikringsgraden

Sikringsgrad forteller hvor stor prosentdel av det totale konsesjonskraftvolumet som skal sikres for å gi større forutsigbar inntekt. Ved en sikringsgrad på 0% vil all kraft selges på spotmarkedet og motsatt ved en sikringsgrad på 100% hvor alt ville blitt solgt gjennom finansielle terminkontrakter. I KIKS's sin risikostrategi fremkommer det at pr. dags dato at opererer med en sikringsgrad på totalt 80% [10]. Det vil si at 80% av kraften skal omsettes på det finansielle markedet slik at 80% av inntekten er sikret før selve leveringsåret. Denne sikringsgraden er da fordelt med 40% på 1-årskontrakt, 20% på 2-årskontrakt og 20% på 3-årskontrakt. Sikringsgraden styrer selve sikringen i inntekt, og volumet solgt i spot tilsvarer derfor de resterende 20%-ene som er utenfor sikringsgraden.

## 3.3 Volum

For å kunne beregne faktiske tall i risikoanalysen trengs det et bestemt volum av kraft som skal selges. I denne oppgaven er da KIKS's totale salgsvolum for år fra og med 2023 til og med 2026 brukt. I KIKS's sin månedsrapport for mars 2023 fremkommer en oversikt over totalt volum av kraft som skal selges, da målt ved GWh verdier. Ved å koble sikringsgraden oppmot det totale volumet kan man enkelt finne leveransen av de ulike produktene de forskjellige årene. Da vi i dette tilfellet skal beregne risiko til de usikra inntektene vil det naturligvis ikke bli beregnet volum for 3-årskontrakter som skal selges i år 2024, 2025 og 2026, 2-årskontrakter i år 2025 og 2026 og 1-årskontrakter i år 2026.

GWh	2023	2024	2025	2026
Spot	191,6	207,2	224,4	224,4
1-årskontrakt	383,2	414,4	448,8	
2-årskontrakt	191,6	207,2		
3-årskontrakt	191,6			

MWh	2023	2024	2025	2026
Spot	191 600	207 200	224 400	224 400
1-årskontrakt	383 200	414 400	448 800	
2-årskontrakt	191 600	207 200		
3-årskontrakt	191 600			

Figur 3.3: Volumet spesifisert for perioden 2023-2026

### 3.4 Korrelasjon og kovarians mellom produktene

Produktene som KIKS tilbyr kan ha stor påvirkning på hverandre og  $X_0, \dots, X_9$  kan derfor regnes som korrelerte størrelser. Ved produkter som er solgt i samme år eller ved samme salgstidpunkt vil denne korrelasjonen være betydelig, men ved ulike salgsår vil korrelasjonen kunne være betydelig lavere og neglisjerbar. I denne oppgaven antar vi at de gjennomsnittsprisene solgt i ulikt år er ukorrelerte. Dette vil si at  $Corr(X_i, X_j) = 0 = Cov(X_i, X_j)$  for  $X_i$  OG  $x_j$  solgt ulikt år.

### 3.5 Porteføljens varians

De totale usikrede inntektene er beskrevet til  $\sum_{i=0}^9 v_i x_i$ . Ved å anta at produktene solgt ulikt år er ukorrelerte og derfor har en korrelasjon lik eller tilnærmet lik nær 0, kan vi tenke oss at de er stokastiske prisene med ulik salgsår er uavhengige av hverandre. Med dette som antatt betingelse kan vi derfor uttrykke variansen til den totale porteføljen.

**Definisjon 1.** Dersom to stokastiske begivenheter  $X$  og  $Y$  er uavhengige er følgende tilfellet for forventning og varians:

1.  $E[XY] = E[X]E[Y]$
2.  $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$

Dette medfører at vi enten kan separere variansen for de ulike salgsårene i porteføljen og manuelt skrive ut resultatet for dette spesifikke tilfellet eller velge å forenkle prosessen ved å bevise hvordan man kan utforme et uttrykk for variansen gjennom kovariansmatrisen mer generelt.

$$Var \left[ \sum_{i=0}^9 v_i x_i \right] = Var \left[ \sum_{i=0}^3 v_i x_i \right] + Var \left[ \sum_{i=4}^6 v_i x_i \right] + Var \left[ \sum_{i=7}^8 v_i x_i \right] + Var [v_9 x_9]$$

**Definisjon 2.** Variansen til en sum av flere stokastiske variabler  $x_0, \dots, x_i$ , kan skrives på følgende måte hvor  $a_i \in \mathbb{R}$

$$Var \left( \sum_{i=0}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \cdot Cov(x_i, x_j)$$

$$Var \left[ \sum_{i=0}^n a_i x_i \right] = E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i x_i - E \left[ \sum_{i=0}^n a_i x_i \right] \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i x_i - \sum_{i=0}^n a_i E[x_i] \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n (a_i x_i - a_i E[x_i]) \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i (x_i - E[x_i]) \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i (x_i - E[x_i]) \right) \left( \sum_{j=0}^n a_j (x_j - E[x_j]) \right) \right] \quad (3.5)$$

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j (x_i - E[x_i]) (x_j - E[x_j]) \right) \right] \quad (3.6)$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \cdot E [(x_i - E[x_i]) (x_j - E[x_j])] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \cdot Cov(x_i, x_j) \quad (3.7)$$

Som det kommer frem i beviset over kan den totalvariansen til de usikrede inntektene til KIKS sin portefølje med  $n = 9$  skrives som:

$$Var \left[ \sum_{i=0}^9 v_i x_i \right] = \sum_{i=0}^9 \sum_{j=0}^9 v_i v_j \cdot Cov(x_i, x_j)$$

Ettersom at vi antar uavhengighet mellom produkter solgt ulikt år kan vi forvente at flere ledd vil være lik 0 i kovariansmatrisen. Dette vil gjøre at flere ledd utlignes og vi vil bli stående igjen med følgende ledd:

$$\begin{aligned} Var \left[ \sum_{i=0}^9 v_i x_i \right] &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 v_i v_j \cdot Cov(x_i, x_j) + \sum_{i=4}^6 \sum_{j=4}^6 v_i v_j \cdot Cov(x_i, x_j) \\ &\quad + \sum_{i=7}^8 \sum_{j=7}^8 v_i v_j \cdot Cov(x_i, x_j) + v_9^2 \cdot Var(x_9) \end{aligned}$$

# Risiko

Risiko er et begrep som innenfor matematikk kan definere til sannsynligheten for at et ikke-ønskelig utfall inntreffer. Innenfor finansteori kan vi nærmere spesifisere begrepet som sannsynligheten for at en investering gir en avkastning som er ulik det som kan forventes. Risiko er ikke bare et begrep knyttet til tap av penger men også knyttet til å ikke kunne få det forventede utbytte av en investering og dermed oppnå lavere avkastning enn det som er forventet.

På markedet i dag kan variasjonen i pris på finansielleprodukter være stor. Det kan derfor være lurt å vite hvor stort tap man potensielt kan risikere ved salg eller kjøp av et eller flere produkter. Det eksisterer i dag ulike metoder for hvordan man i praksis beregner dette og en av dem kalls Value at Risk.

## 4.1 VAR - Value at Risk

Til å beregne risiko til en portefølje brukes ofte Value at risk- VAR. VaR er en statistisk metode og et mål på risikon for tapet av investeringer knyttet til en portefølje. Den estimerer hvor mye et sett med investeringer kan tape, gitt normale markedsforhold i en bestemt tidsperiode, i vårt tilfelle 4 år. Metoden er et verktøy for å kvantifiserer risiko og danne et bilde på en enkel eller en portoføle av ulike investeringer. Som oftest er VAR knyttet til det finansiellemarkedet innenfor aksjeteori hvor vi finner en matematisk irrasjonell struktur, men i dette tilfellet skal den overføres på krafsprisen som viser den samme matematiske oppbygningen.

Fordeler mer VaR:

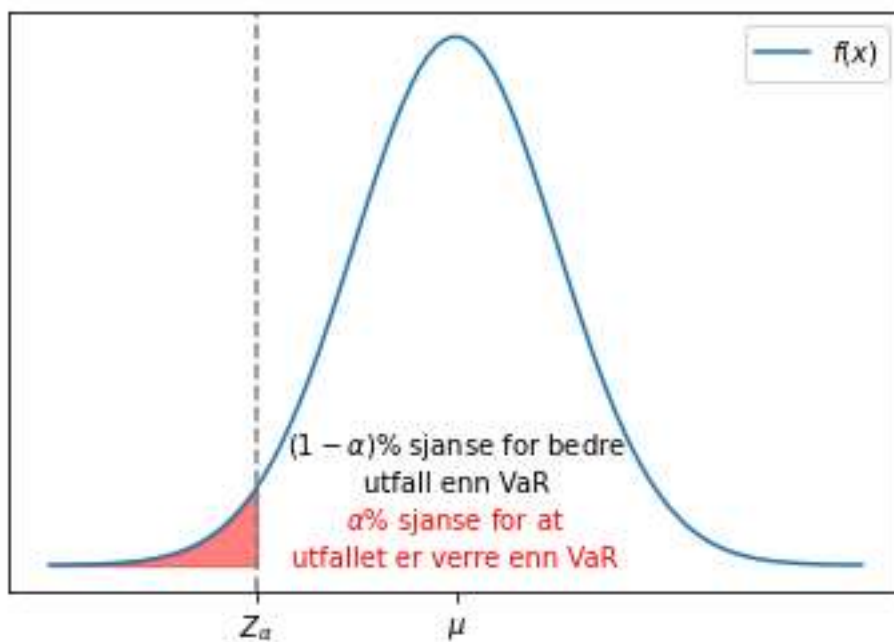
- En enkel og lett forståelig metode for å sammenligne risiko for ulike type inversteringer.
- Kan brukes for å kontrollere markedseksponering
- Hjelper til å lage en risiko -håndteringsstrategi

Ulemper:

- Det er ingen standardisert prosess for innsamling av data som trengs for å bestemmer VaR. Dette betyr at forskjellige value at risk metoder kan føre til forskjellige resultater.
- Porteføljens risiko kan være høyere enn det VAR resultatet vi får. Det er mulig at utfallet vil gå utenfor signifikantnivået vi setter og metoden gir ingen informasjon om hvor mye tapet eventuelt kan overstige VaR nivået.
- Analysen tar ikke hensyn til store unormale endringer i datamatriel med mindre du manuelt tar hensyn til disse.

VaR avgjør omfanget og sannsynligheten for potensielle tap i porteføljer og beregnes ut fra to nøkkelelementene: en fast tidsperiode som risikoen skal vurderes over og et konfidensnivå.





Figur 4.1: Grafisk fremtiling av VaR illustrert gjennom Python A.4

Konfindensnivået er i hovedsak da sannsynligheten for at den tapsskapende hendelsen inn-treffer.

Matematisk formulert kan man beskrive VaR som:

**Definisjon 3** (Value at Risk). *La  $X$  være en stokastisk variabel som representerer avkastningen til en portefølje over en gitt tidsperiode og  $F(x)$  den kumulative fordelingsfunksjonen for  $X$  og  $0 \leq \alpha \leq 1$ .*

*Da er  $VaR_\alpha$  for porteføljen definert som det maksimale tapet som kan forventes å oppstå i  $100(1 - \alpha)\%$  av tilfellene i løpet av tidsperioden  $t$ :*

$$VaR_\alpha = \inf\{x | P(X) \geq 1 - \alpha\}$$

Når vi beregner VaR spør vi oss egentlig:

**Hva er det største tapet jeg med  $100(1 - \alpha)\%$  sannsynlighet ikke vil overstige i løpet av en  $t$ -års periode med visse bestemte forhold?**

med andre ord:

**Med  $100(1 - \alpha)\%$  sannsynlighet vil ikke tapet for investeringen overstige  $VaR_\alpha$  i løpet av perioden  $t$ .**

**Eksempel:** La oss si  $\alpha = 0,05$  og  $VaR = 100000$ . Det forteller oss at det er 5% sjansse for at tapet vil være mer en 100 000 i løpet av perioden  $t$ . Eller sagt omvendt: det er 95% sannsynlig at tapet ikke vil overstige mer enn 100 000 i løpet av perioden  $t$  gitt normale markedsforhold.

#### 4.1.1 Historisk VaR

Historikkmetoden beregner VaR ved å reorganisere faktiske historiske funn og organisere resultatet fra dårligst til best. Deretter antas det at historien gjentar seg fra et risiko perspektiv. Ved å sortere de historiske avkastningene i stigende rekkefølge vil vi kunne identifisere

avkastningen på et bestemt persentilnivå. Ved bruk av denne empiriske metoden kan vi se bort fra normale markedsforhold og inkludere faktiske tap som ha inntrefft tidligere.

**Eksempel:** Dersom vi har 100 observasjoner av dagligeavkastning på en investering og sorterer disse fra lavest til høyest, vil value at risk ved en 95% konfidensnivå over en tidsperiode på 1 dag, være lik avkastningen vi finner på 5.persentilen.

Historikkbasert VaR krever store mengder data og kan derfor være en krevende metode å bruke, også med tanke på tid. Den historiske kalkulasjonen kan også variere mye med hensyn på utvalget av observasjoner vi sitter med. Ved store variasjoner i data kan to ulike tidsperiode gi betydeligere forskjeller på resultatet. Likvill er metoden en av de enkleste og mest transparente metodene å kalkulere. Historisk valute at risk antar også som tidligere nevnt, ikke normalfordelte data og kan derfor implementeres for en rekke avanserte observasjoner.

Med bruk av historisk data kan vi kalkulerer value at risk på følgende måte:

$$VaR = MV \times \sigma \sqrt{d} \times Z_{\alpha}$$

hvor  $MV$  er markedsverdien til porteføljen,  $\sigma$  er den historiske volatiliteten til porteføljen,  $d$  er antall dager vi har i analyseperioden og  $Z_{\alpha}$  som gir oss verdien tilhørende signifikantnivået som velges.[19]

## Historisk Persentil

For å beregne historisk persentilen til hele porteføljen er det i denne oppgaven først funnet avkastningene for hvert enkelt produkt. Deretter juster den daglige avkastningen etter sikringsgraden som er fastsatt - henholdsvis 40% på 1-årskontraktene og 20% for resterende produkter. For å finne den daglige persentilene for det enkelte produktet slik den er definert over, er det brukt for-løkke for å iterere over ønskede signifikantnivå. Videre velges det å runde av hver persentil til 4 desimaler. Ved å addere persentilene for samtlige produkter står vi igjen med den samlede persentilfunksjonen til hele porteføljen.

---

```
1 def HistoriskZ(csv_fil, kolonne, vekt):
2     alpha = [0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05]
3     # Les data fra csv-fil
4     data = pd.read_csv(csv_fil, usecols=[kolonne], sep=';', decimal=',')
5
6     # Beregn daglige avkastninger og sorter dem i stigende rekkefølge
7     data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)*vekt
8
9     # Beregn rangen for hvert alpha-persentil og velg datapunktet som tilsvarende denne ...
10    rangen
11    vars = {str(a): [round(data.iloc[int(a * len(data))][kolonne], 4)] for a in alpha}
12
13    return pd.DataFrame(vars)
14
15 Var_Spot=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "Spot",0.2)
16 Var_1=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "1-årskontrakter",0.4)
17 Var_2=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "2-årskontrakter",0.2)
18 Var_3=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "3-årskontrakter",0.2)
19 TotalZ=Var_Spot+Var_1+Var_2+Var_3
20 print(TotalZ)
```

---

Produkt	Vekt	$\alpha$ :	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
Spot	0,2		-7,6964	-3,6535	-2,635	-1,9419	-1,5067
1-årskontrakt	0,4		-1,7	-0,96	-0,7	-0,56	-0,5
2-årskontrakt	0,2		-0,4	-0,28	-0,226	-0,192	-0,17
3-årskontrakt	0,2		-0,31	-0,22	-0,18	-0,15	-0,13
<b>Total</b>			-10,1064	-5,1135	-3,741	-2,8439	-2,3067

Tabell 4.1:  $Z_\alpha$  for porteføljens historiske fordeling

#### 4.1.2 Monte-Carlo VaR

Monte-Carlo simulasjon er en omfattende klasse av beregningsalgoritmer som primært fokuserer på å utføre gjentatte tilfeldige simuleringer for å oppnå numeriske resultater. Det grunnleggende konseptet er å modellere alle de mulige utfallene av en usikker hendelse og deretter kjøre flere hypotetiske scenarier gjennom disse modellene[19].

Hver simulering representerer en mulig fremtidig tilstand av markedet relatert til de produktene i porteføljen. Ved å kjøre et stort antall av disse simuleringene, kan vi danne et bilde av sannsynlige fremtidige scenarier. Dette gir oss en fordel ved å gi oss et spekter av mulige utfall i stedet for bare ett punkttestimat slik vi får ved beregning av den historikkbaserte risikoen.

Ulempen med denne metoden er at den krever en rekke antagelsen og kan føre til betydelig usikkerhet i beregningene. Metoden er basert på tilfeldige variabler og resultatet vil derfor varierer for hver simulering som kjøres. Det vil si at metoden estimerer risiko basert på allerede estimerte verdier av usikre variabler og det er derfor vanskelig å fastslå hva som egentlig vil være riktig risikovurdering. Den historiske metoden, i motsetning til Monte Carlo-simulering, bruker faktiske historiske data for å beregne VaR, og kan derfor være mer nøyaktig i enkelte situasjoner. På grunn av strømprisenens snittreverserende prosess er det i denne oppgaven valgt å gå videre med den historiske risikoberegningen fremfor Monte-Carlo. Metoden estimerer risiko basert på allerede estimerte verdier på usikre variabler og anses i dette tilfelle som mindre passende enn den historiske metoden for denne oppgaven.

#### 4.1.3 Varians-kovarians VaR

Varians - kovarians metoden bruker som navnet tilsier varians og kovarians som elementer og er derfor en parametrisk metode da den avhenger av parametre for sannsynlighetsfordelinger for prisendringene. Den grunnleggende ideen til varians-kovarians metoden er å estimere gjennomsnittet og standardavviket til porteføljens endringer basert på historisk data og videre bruke disse til å estimere porteføljens VaR verdi. Man antar også at porteføljens avkastning er normalfordelt rundt gjennomsnittet til den normale sannsynlighetsfordelingen[19].

Beregningen av value at risk ved bruk av varians-kovarians metoden ligner mye på den historiske metoden, men forskjellen ligger i at man tar utgangspunkt i en kjent normalfordelt kurve fremfor faktisk data. Man plotter den standardnormalfordelte kurven opp mot de faktiske avkastningene som observasjonene viser. I vårt tilfelle hvor vi skal anvende value at risk på energipriser kan det tenkes at denne metoden ikke vil være tilstrekkelig grunnet dens forutsetninger om normalfordelte data. Det vil derfor være mer gunstig å ta i bruk den historiske metoden for å beregne value at risk, men med inspirasjon fra varians-kovariansmetoden.

For et enkelt produkt er VaR relativt enkelt ved å multiplisere sammen produktets verdi, standardavvik og z-verdi til valgt konfidensintervall. Ofte velger man en konfidensnivå på 95% som tilsvarer en z-verdi på 1,645.

$$VaR = \text{produktverdi} \times \text{standardavvik} \times z - \text{verdi}$$

Ved flere produkter blir utregningen straks mer komplisert. Salg av ulike produkter i samme kategori, slik som aksjer, kan påvirke hverandre og gå opp og ned sammen eller i motsatt retning av hverandre. Vi trenger derfor kovariansen av prisen på de ulike produktene oppimot hverandre og danne en kovariansmatrise som skal brukes i VaR-kalkulasjonene.

Modellen i denne oppgaven vil som tidligere nevnt ta i bruk følgende utledning for varians

$$Var \left( \sum_{i=0}^9 v_i X_i \right) = \sum_{i=0}^9 \sum_{j=0}^9 v_i v_j \cdot Cov(X_i, X_j)$$

For å beregne ut resultatet av value at risk, er det den historiske definisjonen som blir brukt, men vi bruker ikke historisk standardavvik. Basert på mottatt data beregner vi den faktiske variasjonen og kovariansen til porteføljen og inkluderer den i beregningene for å avgjøre hvor stort standardavvik som vil gjelde for den usikra porteføljen. Det er derfor følgende formel for value at risk som blir anvendt i oppgaven for å kvantifisere porteføljens risiko:

$$VaR = MV \times \sqrt{Var \left( \sum_{i=0}^9 v_i X_i \right)} \times \sqrt{d} \times Z_\alpha$$

# Normalfordeling

For å kunne bruke varians-kovarians metoden for å kalkulere porteføljens risiko antas det i første omgang at de daglige endringene i dataresultatet er normalfordelt. Ved det menes at de daglige endringene har en symmetrisk tetthetsfunksjon rundt det forventede utfallet. For en stokastisk variabel styres normalfordelingskurven av forventningsverdien og det tilhørende standardavviket for datasettet.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

**Definisjon 4** (Normalfordeling). *En tilfeldig variabel  $X$  er normalfordelt dersom dens observasjonen følger sannsynlighetstetthetsfunksjon  $f(x)$*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

hvor  $\mu$  er forventningsverdien og  $\sigma^2$  er lik variansen til variabelen.

Som definisjonen viser er  $f(x)$  variabelens tetthetsfunksjonen og beskriver sannsynlighetsfordelingen for en kontinuerlig tilfeldig variabel som følger normalfordelte forhold. Tetthetsfunksjonen avhenger av standardavviket og forventningsverdien til fordeling. Funksjonens midtpunkt ligger i  $\mu$ , men  $\sigma$  styrer spredningene i funksjonen og reduserer antall observasjoner ved  $\mu$  dersom  $\sigma$  er voksende [11].

## 4.2 Skjevhet

For å kunne utføre statistiske beregninger som baserer seg på normaltfordelt data er det nødvendig at det ikke er store skjevheter i stikkprøvene man tar for at resultatet skal være gyldig og kvalitetssikret. En normalfordelt variabel skal ha en symmetrisk tetthetsfunksjon og skal derfor ha skjevhet lik null.

**Definisjon 5** (Skjevhet). *Den empiriske skjevheten til en tilfeldig variabel  $X$  som inneholder  $n$  antall observasjoner  $x_i$  med gjennomsnitt  $\mu$  og standardavvik  $\sigma$  defineres som [11]:*

$$\text{Skjevhet}(X) = \frac{1}{n\sigma^3} \sum (x_i - \mu)^3$$

Skjevhet beskriver altså asymmetrien til sannsynlighetsfordelingen i data og ved positiv skjevhet vil fordelingen strekkes seg mot høyere verdier og motsatt ved negativ skjevhet.

## 4.3 Kurtose

Kurtose beskriver hvor tett dataene befinner seg rundt forventningsverdien og sammenligner fordelings spissitet med en normalfordeling styrt av samme standardavvik. Hvilken verdi kurtosen skal ha i et normalfordelt tilfellet avhenger av hvilken utregningsdefinisjonen man velger å bruke. I denne oppgaven er det senere valgt å bruke Fisher's versjon og kurtosen skal derfor ikke overstige en verdi på 3. Utregningsmodellen som brukes i funksjonen brukt senere ved testing kan også settes til Persons versjon. I et slikt tilfelle skal kurtosen for normaltfordelt data ikke skal overstige en verdi på 3 [4].

**Definisjon 6** (Kurtose). Den empiriske kurtosen til en tilfeldig variabel  $X$  som inneholder  $n$  antall observasjoner  $x_i$  med gjennomsnitt  $\mu$  og standardavvik  $\sigma$  defineres som [11]:

$$\text{Kurtosen}(X) = \frac{1}{n\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^4 - 3$$

Ved høyere kurtose eksisterer det en større mengde av ekstremverdier i dataene enn det som bør foreligge i en normalfordelt situasjon.

## 4.4 Testing av porteføljens observasjoner

Datamengden vi forholder oss til er stor og det vil derfor være mer hensiktsmessig å produsere fordelingen til de daglige endringene gjennom python. Det lar oss kjøre flere prosesser under en og sammen gjennomkjøring fremfor ved bruk av flere prosesser i Excel. I oppgaven er det, i den grad det er mulig, forsøkt å gjøre kodene mest mulig generelle i testingen for å kunne anvende den ved flere anledninger. Koden baserer seg derfor på funksjonsdefinerings.

### 4.4.1 Histogram

For å få et inntrykk av fordelingen til observasjonsmaterialet startes det med å grafisk skissere fordelingskurven til de daglige endringene i datasettet. Som forklart over skal vi ved normalfordelte forhold få en symmetrisk tetthetsfunksjon med toppunkt i  $\mu$ . I denne oppgaven er det valgt å skissere dette ved bruk av histogram for de ulike produktene.

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import pandas as pd
3 import seaborn as sns
4
5 def HistogramFordeling(csv_fil, kolonne, xlim, produkt):
6     data = pd.read_csv(csv_fil, usecols=[kolonne], sep=';', decimal=',')
7     data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
8     print(type(data))
9
10    # Fordelingen til daglig endringer
11    sns.set()
12    sns.histplot(data)
13    plt.xlim(-xlim, xlim)
14    plt.xlabel('Daglig endring')
15    plt.ylabel('Observasjoner')
16    plt.title(f'Fordeling av daglig prisendringer for {produkt}')
17    plt.show()
```

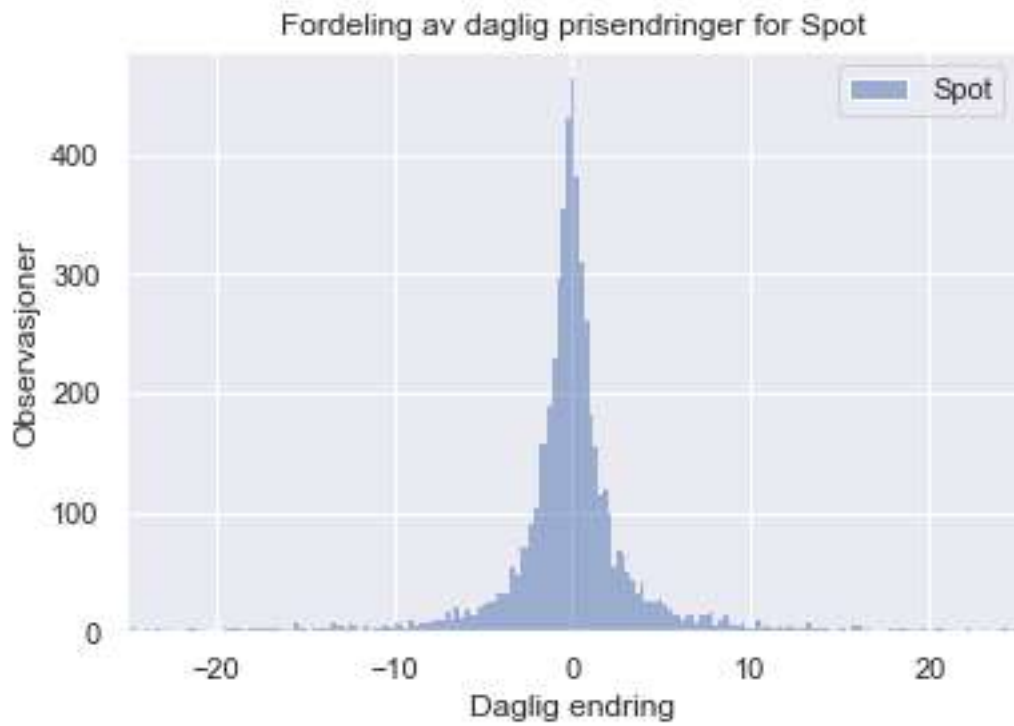
---

Figur 4.2 til 4.5 viser de ulike fordelingshistogrammene for de forskjellige produktene, henholdsvis spot, 1-, 2-, og 3- årskontrakter. Ved å se på fordelingen til de daglige endringen på de ulike produktene kan det tenkes at den daglige endringen i kraftprisen følger normalfordelte forutsetninger. Ved strømprisens irregulære struktur vil det likevell være hensiktsmessig å gjennomføre flere tester av data for å kartlegge om det faktisk er tilfellet. Det er for de ulike fordelingene brukt disse parameterene i Python-skriptet:

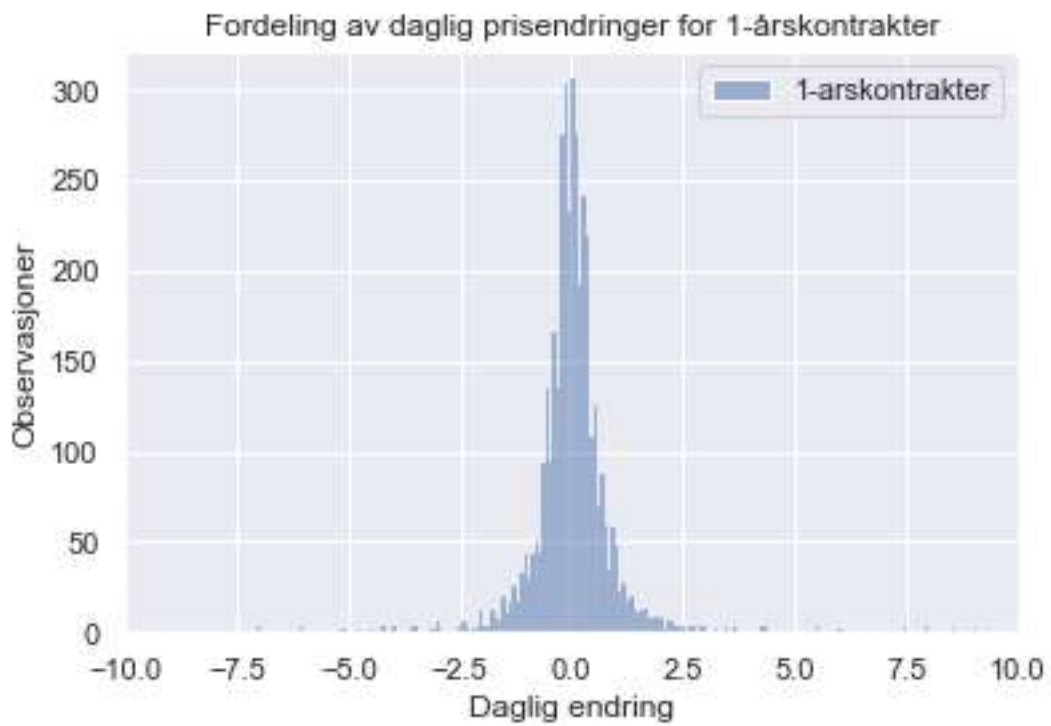
---

```
1 HistogramFordeling("Priser_EUR.csv", "Spot", 25, "Spot")
2 HistogramFordeling("Priser_EUR.csv", "1-årskontrakter", 10, "1-årskontrakter")
3 HistogramFordeling("Priser_EUR.csv", "2-årskontrakter", 5, "2-årskontrakter")
4 HistogramFordeling("Priser_EUR.csv", "3-årskontrakter", 5, "3-årskontrakter")
```

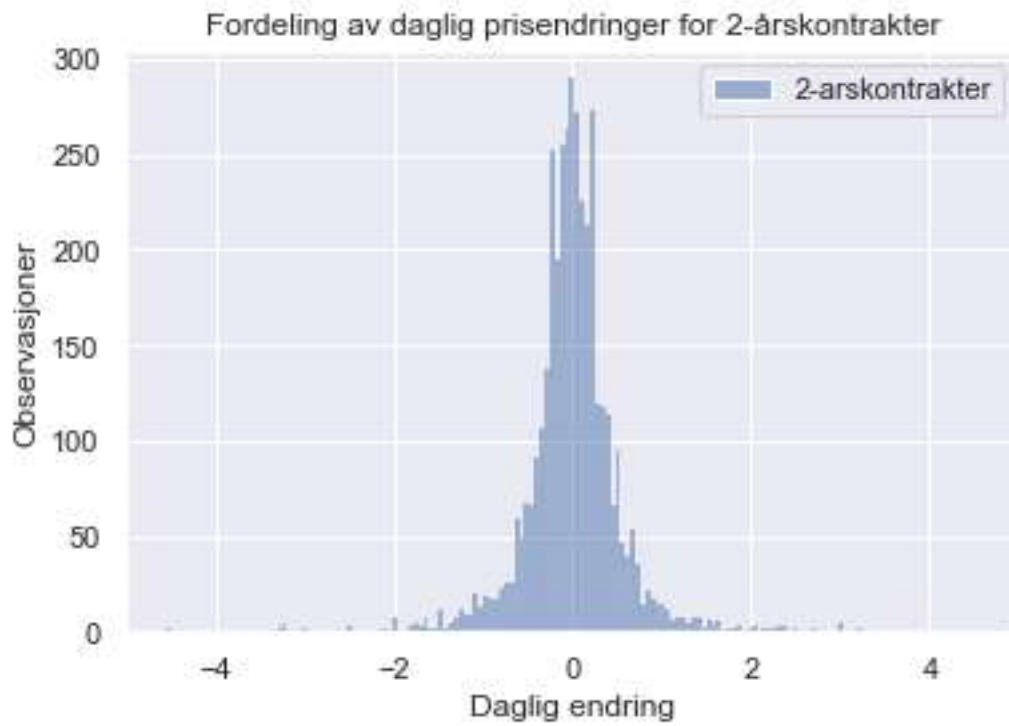
---



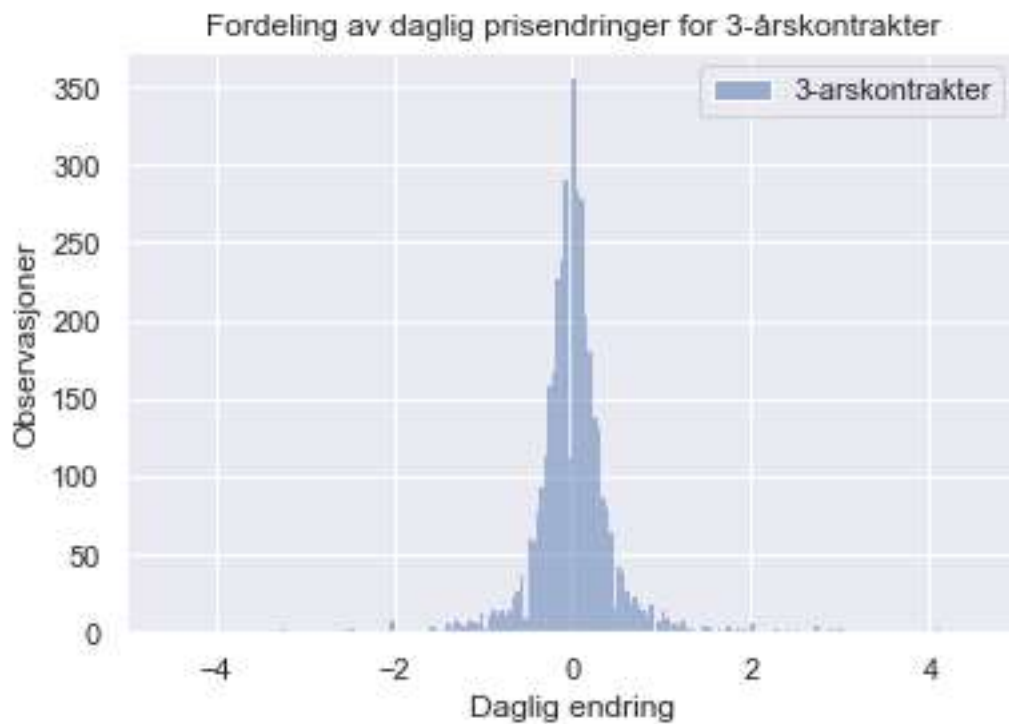
Figur 4.2: Histogram for spot



Figur 4.3: Histogram for 1-årskontrakt



Figur 4.4: Histogram for 2-årskontrakt



Figur 4.5: Histogram for 3-årskontrakt



## 4.4.2 QQ-plot

Kvantiler er som tidligere nevnt kritiske punkter i en distribusjon som korresponderer med en gitt prosentandel av observasjonene. For en standardnormalfordeling vil  $\mu$  tilsvare den 50. percentilen hvor 1 prosentil tilsvarer datasettet dividert på 100 like store deler. Som tidligere diskutert kalles  $Z_\alpha$  for  $\alpha$ -kvantilen til fordelingen og kan defineres som

$$P(X > Z_\alpha) = \alpha$$

QQ-plot, eller kvantil - kvantil plot, er en grafisk fremstilling som kan brukes for å vurdere om et datasett følger en bestemt teoretisk fordeling, i dette tilfelle normalfordelingen. Den plottet datasettets kvantiler og sammenligner disse med kvantilene for den angitte fordelingen som skal være ønskelig. Dersom kvantilpunktene i qq-plottet ligger langs den røde diagonalen, kan testen indikere at datauttrekkets kvantiler ligger nær de normalfordelte kvantilene som vi tester for i denne oppgaven.

For å gjennomkjøre QQ-plot i python er det tatt i bruk innebygde funksjoner i statsmodels.api pakken [6]. Koden er generelt den samme for alle produktene men ved ulikt utfall er de ulike aksene endret for å fremvise resultatet best mulig. I funksjonen brukes derfor ylim og xlim som ekstra parametre i funksjonen.

---

```
1 import statsmodels.api as sm
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import seaborn as sns
5
6 def qqplot(csv_fil, kolonne, produkt, xlim, ylim):
7     data = pd.read_csv(csv_fil, usecols=[kolonne], sep=';', decimal=',')
8     data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
9     sm.qqplot(data, stats.norm, line='45')
10
11     sns.set()
12     plt.ylim(-ylim, ylim)
13     plt.xlim(-xlim, xlim)
14     plt.grid(True)
15     plt.xlabel('Forventet kvantil')
16     plt.ylabel('Observervert kvantil')
17     plt.title(f'QQ-plot {produkt}, daglig prisendringer')
18     plt.show()
```

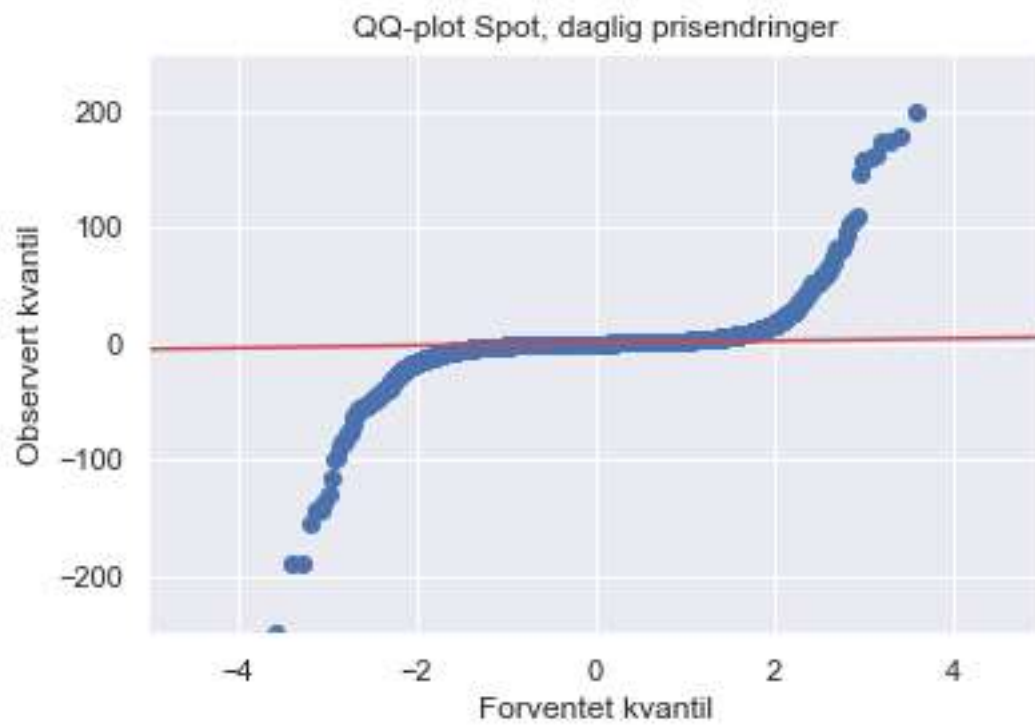
---

På grunn av den økte variasjonen vi finner blant spot observasjonene er det naturlig at dette produktet vil gi større avviksresultat fra de normalfordelte kvantilene. Y-aksen er også derfor ved testing måtte blitt justert opp i forhold til de langsiktige produktene. De ulike datauttrekkene er kjørt med disse parametrene i koden:

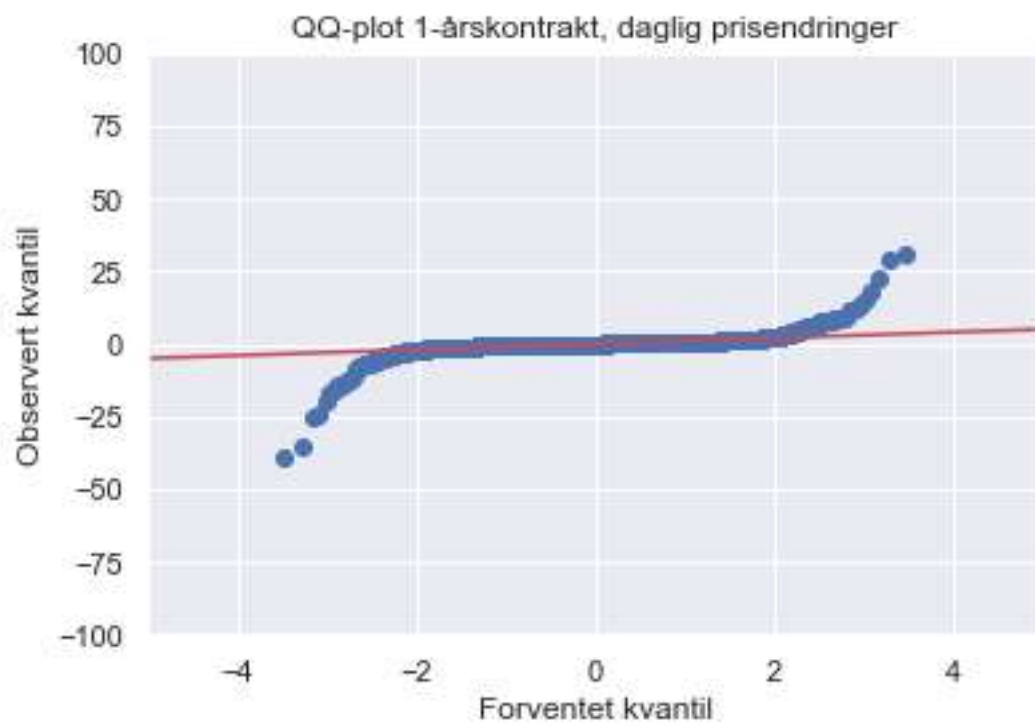
---

```
1 qqplot("Priser_EUR.csv", "Spot", "Spot", 5, 250)
2 qqplot("Priser_EUR.csv", "1-årskontrakter", "1-årskontrakt", 5, 100)
3 qqplot("Priser_EUR.csv", "2-årskontrakter", "2-årskontrakt", 5, 100)
4 qqplot("Priser_EUR.csv", "3-årskontrakter", "3-årskontrakt", 5, 100)
```

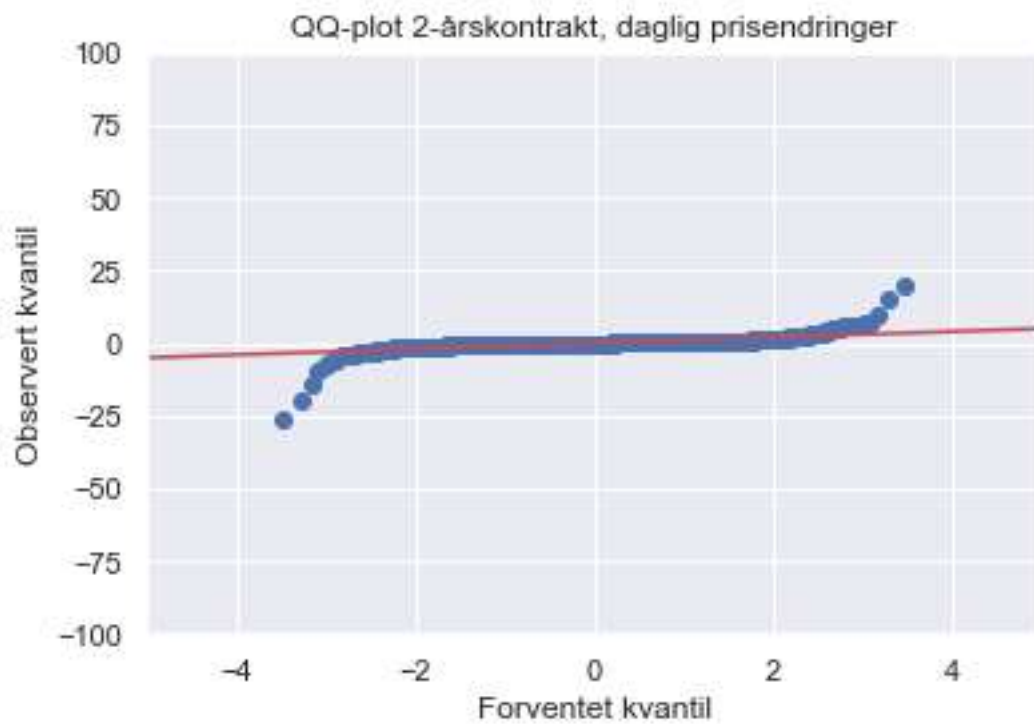
---



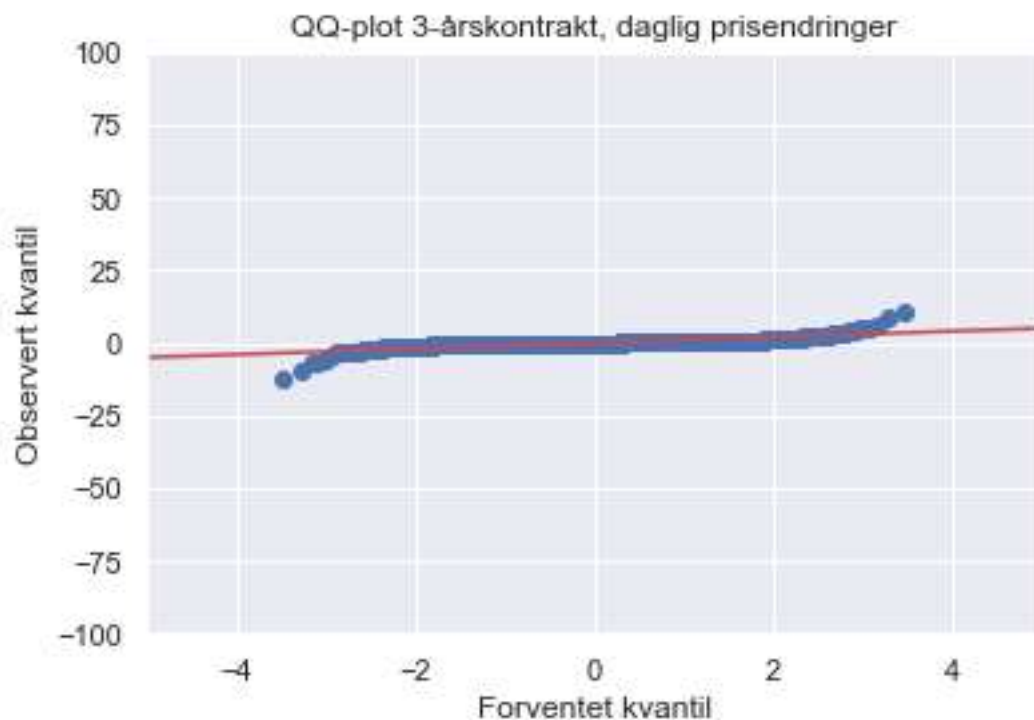
Figur 4.6: QQ-plot for spot



Figur 4.7: QQ-plot for 1-årskontrakt



Figur 4.8: QQ-plot for 2-årskontrakt



Figur 4.9: QQ-plot for 3-årskontrakt

QQ-plottet for spot viser antydning til en stor mengde av ekstremverdier i prisendringene og er ikke tilfredsstillende sammenlignet med normalfordelingen. Resultatene for kontraktsproduktene viser at store deler av datauttrekket har potensialet for å følge en normalfordelt fordeling, likvill ser vi antydning til ekstremverdier i begge kanter og det vil være usikkerhet knyttet til fordelingen.

### 4.4.3 Statistisk analyse av fordelingen

For å kunne bestemme hvilken fordeling de daglige prisendringene har basert på et mer signifikant resultat, finnes det en rekke analysemetode som kan anvendes. I denne oppgaven er det valg statistisk analyse av datauttrekkets deskriptive parametre. I python brukes samme innhenting av data som tidligere men funksjonen *Grunndata* innhenter informasjon om uttrekkets observasjoner og variasjon, i tillegg til å beregne skjevheten og kurtosen til prisendringene. Den fullfører også en Jaque-Bera test som forklares nærmere i 4.4.4.

For å beregne både skjevhet og kurtose er det i denne oppgaven brukt funksjonene *skew(data)* og *kurtosis(data, fisher=True)* som ligger innebygd i pakken *scipy.stats* i python[4]. Jarque-Bera test ligger også som en innebygd funksjon i *scipy* biblioteket og siste del av koden visualiserer resultatet gjennom en tabellformatering.

---

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import scipy.stats
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 def Grunndata(csv_fil,kolonne,produkt):
7     data = pd.read_csv(csv_fil,usecols=[kolonne],sep=';',decimal=',')
8     maksimum = np.max(data).item()
9     minimum = np.min(data).item()
10    data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
11
12    observasjoner = len(data)
13
14    skjevhet = scipy.stats.skew(data).item()
15    # Fisher=True trekker fra 3 slik at resultatet skal gi 0 dersom data er ...
16    normalfordelt
17    kurtose = scipy.stats.kurtosis(data, fisher=True).item()
18    JarqueBera = scipy.stats.jarque_bera(data)
19
20    #Splitte opp de to tallresultatene for åenklere plotte en tabell
21    JB, JB_p = JarqueBera
22    # Oppretter en tabell med alle verdiene
23    df = pd.DataFrame({'Parameter': ['Observasjoner', 'Maksimum', 'Minimum', ...
24    'Skjevhet', 'Kurtose', 'JarqueBera Verdi', 'JarqueBera P-verdi'],'Verdi': ...
25    [observasjoner, maksimum, minimum, skjevhet, kurtose, JB, JB_p]})
26
27    # Plotter tabellen
28    figur, akse =plt.subplots(1,1)
29    tabell_data = []
30
31    for row in df.itertuples(index=False):
32        tabell_data.append(row)
33    tabell = plt.table(cellText=tabell_data, collabels=df.columns, cellLoc = 'left', ...
34        loc = 'center')
35    tabell.auto_set_font_size(False)
36    tabell.set_fontsize(10,)
37    tabell.scale(1, 1.5)
38    cells = tabell.get_celld()
39
40    #Formater øverste Rad
41    for i in range(len(df.columns)):
42        cells[(0, i)].set_facecolor('lightgray')
43
44    akse.set_title(produkt)
45    akse.axis('off')
46    plt.show()
```

---

Oversiktene nedenfor 4.10 til 4.13 viser resultatet av python-funksjonen angitt over. Differansen i min- og maksimumsverdiene er betraktelig større for spot-produktet, noe som kan tyde på større irregularet ekstremverdier. Oversikten viser også at lengden på gjennomkjørt data i de ulike testen er lik for alle kontraktprodukter men vesentlig høyere for spot. Grunnen til dette ligger i at det flere salgsdatoer for spot enn for kontraktprodukter. Dette vil naturligvis påvirke både kurtosen og skjevheten i data, men ikke i den grad at utfallet ville blitt betydelig anderledes.

Som resultatet er kurtosen betraktelig mye høyere enn ønskelig for samtlige produkter, og resultatet indikerer derfor flere ekstremverdier. Skjevheten er også ulik 0. For store datasett kan skjevheten i fordelingen avvike noe, men bør som hovedregel ligge nær null. Testen viser samme resultat som tidligere og det ligger derfor god grunn til sterk usikkerhet knyttet til normalfordelte prisendringer for samtlige produkter.

Spot

Parameter	Verdi
Observasjoner	5839.0
Maksimum	660.0604
Minimum	0.8992
Skjevhet	0.23762370991855072
Kurtose	96.49420224015937
JarqueBera Verdi	2265375.5454729577
JarqueBera P-verdi	0.0

Figur 4.10: Deskriptiv data for spot

1-årskontrakt

Parameter	Verdi
Observasjoner	4010.0
Maksimum	279.0
Minimum	11.85
Skjevhet	-2.627910616746602
Kurtose	136.40608940447714
JarqueBera Verdi	3113471.7492782166
JarqueBera P-verdi	0.0

Figur 4.11: Deskriptiv data for 1-årskontrakt

2-årskontrakt

Parameter	Verdi
Observasjoner	4010.0
Maksimum	155.0
Minimum	16.25
Skjevhet	-3.742031733115024
Kurtose	207.37092323304898
JarqueBera Verdi	7194392.964335816
JarqueBera P-verdi	0.0

Figur 4.12: Deskriptiv data for 2-årskontrakt

3-Årskontrakt

Parameter	Verdi
Observasjoner	4010.0
Maksimum	102.0
Minimum	16.15
Skjevhet	-0.8615902837525609
Kurtose	83.52557608094908
JarqueBera Verdi	1186156.6564916577
JarqueBera P-verdi	0.0

Figur 4.13: Deskriptiv data for 3-årskontrakt

#### 4.4.4 Jarque Bera, JB-test

Jarque-Bera baserer seg på både skjevheten og kurtosen til utvalget. Som det tidligere er påpekt tilfredsstillende verken skjevheten og kurtosen til samtlige produkter kravene for normalfordelte forhold. Det vil derfor være naturlig at JB-testen vil vise lignende resultat. Versjonen brukt i denne oppgaven bygger på Pearson's versjon hvor kurtosen ikke skal overstige en verdi på 3. Testen beregner forskjellene mellom den observerte skjevheten og kurtosen i datasettet sammenlignet med hva vi kan forvente under en normalfordelt modell. Ved for store avvik vil testen kunne indikere at datauttrekket ikke er normalfordelt [3].

$$JB = n \left( \frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right)$$

Den statistiske testen er en hypotesetest hvor man forkaster hypotesen om normalfordelt data dersom testobservatoren  $JB$  er større enn den kritiske verdien til data. Jo nærmere testobservatoren går mot null, desto vanskeligere vil det være å forkaste  $H_0$ . Dersom datauttrekket avviker fra normalfordelingen vil vi kunne forvente at  $JB$  er forskjellig fra null, og  $|JB|$  vil forklar hvor mye uttrekket avviker fra normalfordelte forhold. P-verdien i testen beskriver sannsynligheten for at at det observerte uttrekket ville ha inntreffe dersom nullhypotesen er sann. Ideelt sett ønsker vi derfor en  $JB$  nær null og P-verdien nærmere 1. Som resultatet i tabellene 4.10 til 4.13 viser er ikke dette tilfellet for samtlige produkter. Sannsynligheten for at utfallsrommet er normalfordelt er lik 0 etter testens resultat. Vi kan derfor forkaste  $H_0$  og derfor forkaste normalfordelt antagelse.

# Statistisk Analyse

## 5.1 Volatilitet

Volatilitet er et statistisk mål som gir oss en beskrivelse av risikoen en investering bærer med seg og gir derfor en viss ide om hvor store svingninger vi kan forvente i finansiell data. Målet blir ofte brukt innen for aksjekurs og valuta men også i forbindelse med strømpriser.[12]

Dersom dataen vi måler viser stor spredning vil volatiliteten naturligvis være høy og lav for motsatt tilfellet. Volatilitet kan måles etter ulike definisjoner, deriblant etter det vi i matematikken kjenner til som standardavvik. En vesentlig grunnforståelse som må nevnes her, er at vi innenfor det finansielle fagområde bør bruke ordet volatilitet fremfor standardavvik selv om det er standardavvikets beregningsdefinisjoner som ligger til grunn. Hvorfor? Avkastningen på et finansielt instrument kan anses som en stokastisk variabel [1]. Dersom avkastningen på det finansielle produktet hadde vært forutsigbare ville det vært mulig å systematisk kunne tjene penger på de ulike instrumentene. Det er mulig å tenke seg at en potensiell spekulasjon i instrumentet ville gitt deg en sikker gevinst. Dette vet vi derimot at ikke stemmer og avkastningen på et finansielt produkt baserer seg på utallige faktorer som gjør det vanskelig å forutsi fremtidig avkastning. Finansiell avkastning er derfor ustabile og det vil være vanskelig å finne et spesifikt standardavvik som kan beskrive den eksakte avkastningen til et produkt eller en portefølje. Volatilitet er derfor et begrep som anvendes fremfor standardavvik innenfor finansteori. Hovedargumentet for dette er da at volatiliteten varierer med tiden og er i konstant endring. I en periode med politisk usikkerhet eller økonomiske problemer kan volatiliteten blir høy, noe vi også har sett blant strømprisene de siste årene[1].

## 5.2 Varians

Volatiliteten kan som tidligere nevnt uttrykkes i form av standardavvik og varians. Varians er et mål som på samme måte som volatiliteten beskriver spredningen eller variasjonen i observert datamateriell. Målet er definert som gjennomsnittet av den kvadrerte avstanden fra observasjonene og datamaterialets forventning.

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$

## 5.3 Standardavvik

Standardavviket er kvadratroten av variansen og de kan derfor beskrives som to forskjellige mål på det samme. Standardavvik gir oss informasjon bak sannsynlighetsfordelingen og gjennomsnittsverdiene. Vi kan med andre ord få innblikk i hvor mye observasjonene beveger seg bort fra gjennomsnittet eller om datamaterialet har mye til felles og samler seg rundt det estimerte gjennomsnittet. Ved å bruke standardavvik som mål undersøker man den historiske volatiliteten og det er også dette som blir gjort i denne oppgaven. Mellom de ulike

produktene som skal analyseres beskrives volatiliteten  $\sigma$  i form av gitt standardavvik som er en avhengig av analyseperioden.

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}$$

## 5.4 Kovarians

Kovarians beskriver hvordan to tilfeldige variabler er koblet sammen. Det er et statistisk mål som gir informasjon om en endring i den ene variabelen gir en endring i den andre. Dersom begge øker og minsker sammen vil kovariansen være positiv. Dersom det ser ut til at det ikke eksisterer en samvariasjon mellom variablene og det ikke eksisterer lineært forhold mellom dem er kovariansen lik 0.

**Definisjon 7.** *Kovariansen mellom to stokastiske prosesser  $X$  og  $Y$  er definert som*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

hvor  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$  og  $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$ . For uavhengige  $X$  og  $Y$  vil  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

## 5.5 Korrelasjon

Korrelasjonen beskriver hvordan to prosesser samsvarer med hverandre. Den gir oss en indikasjon på om prosessene beveger seg i samme retning av hverandre eller om de beveger seg motstridene. Dersom vi har en sterk korrelasjon innebærer det at prosessene samvarierer i samme retning, ved svak korrelasjon vil en endring i en prosess gi motsatt endring i den andre. Dersom korrelasjonene eller kovariansen har en verdi lik 0, er det ingen lineær sammenheng mellom prosessene og derfor vil begge de statistiske målene være lik 0.  $\text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \text{Corr}(X, Y) = 0$

**Definisjon 8.** *Korrelasjonen mellom to stokastiske prosesser  $X$  og  $Y$  er definert som*

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

hvor  $-1 \leq p(X, Y) \leq 1$ . En korrelasjonskoeffisient  $p$  nær 1 indikerer en sterk positiv korrelasjon, mens  $p$  nær -1 indikerer en sterk negativ korrelasjon. En korrelasjonskoeffisient nær 0 indikerer ingen korrelasjon mellom prosessene.

## 5.6 Konfidensintervall

Som tidligere kjent beskriver  $\mu$  den gjennomsnittlige verdien som analysedata samler seg rundt. Dette er god informasjon inn i analysearbeidet men det vil være urimelig å anta at et slikt punkttestimat vil holde for de fleste observasjonene. Resultatene vil heller befinne seg i en intervall rundt gjennomsnittet. Konfidensintervall går ut på å teste data innenfor et vist intervall  $[a, b]$  med en gitt sannsynlighet. Ved et slikt tilfellet kalles  $a$  og  $b$  for konfidensgrenser og intervallgrensene settes etter hvilken sannsynlighet vi ønsker at observasjonene skal ligge i intervallet med[11].

**Definisjon 9.** *La  $\mu$  være en parameter som fremkommer blant stokastiske utfall  $X_1, \dots, X_n$ . La  $a$  og  $b$  være funksjoner av  $X_1, \dots, X_n$ , slik at*

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$$

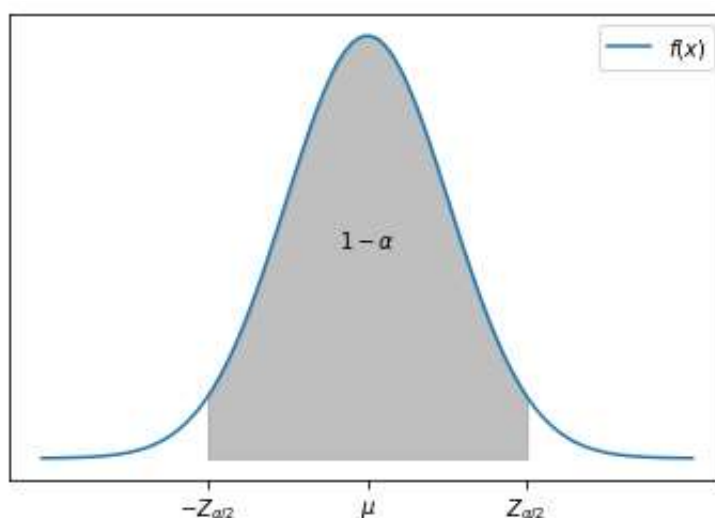
Da er  $[a, b]$  et  $100(1 - \alpha)\%$  konfidensintervall for  $\mu$



Dette innebærer at vi med  $100(1 - \alpha)\%$  sannsynlighet kan si at gjennomsnittsverdien  $\mu$  ligger i intervallet  $[a, b]$ .

La oss tenke at  $\mu$  ikke er den gjennomsnittlige verdien for observasjonene men at vi basert på en sannsynlighetsprosent ønsker å finne et intervall som vil dekke over en annen parameter  $\lambda$ . Vi ønsker at  $\lambda$  skal beskrive et beløp vi kan risikere å tape i forbindelse med et finansielt instrument. Definisjonene over sier at vi kan finne et intervall som sannsynligvis inkluderer denne ukjente populasjonsparameteren og vi kan begynne å risikovurdere finansielle produkter. Vi kan produsere et konfidensintervall som med  $100(1 - \alpha)\%$  inneholder det maksimale tapet man kan risikere på et enkelt instrument eller en samling av en større portefølje. Med andre ord kan vi produsere et intervall hvor man med  $100(1 - \alpha)\%$  sannsynlighet kan si at det maksimale tapet ikke vil overstige  $\lambda$  i perioden.

Grafisk fremstilt kan man skissere fordelingskurven til observasjonene, i dette tilfellet en normalfordelt kurve.



Figur 5.1: Illustrasjon av tosidig konfidensintervall  
A.1

## 5.7 Z-verdi og signifikantnivå

Som figur A.1 viser kan man sette intervallgrensene til å være et bestemt antall standardavvik  $\sigma$  fra gjennomsnittet  $\mu$ . Figur A.1 viser i tilfellet over en tosidig situasjon hvor feltet  $(1 - \alpha)$  ligger plassert over en spredning med total lengde lik  $\sigma$  og lik fordeling av spredningen på begge siden av  $\mu$ .  $Z_{\alpha/2}$  er den kritiske verdiene som korresponderer med det valgte signifikantnivået  $\alpha$  for intervallet. I denne oppgaven er et ensidig bruk av signifikantnivå som vil ha betydning og det vil derfor være  $Z_{\alpha}$  som er den kritiske verdien.  $(1 - \alpha)$ -kvantilen til en normalfordeling beskriver avstanden mellom et datapunkt og gjennomsnittet av observasjonene. Den angir hvor mange standardavvik  $\sigma$  det er i avstanden mellom datapunktet og gjennomsnittet  $\mu$ . Dersom z-verdien er lik 0, er datapunktet du analyserer identisk med gjennomsnittet  $\mu$ . Ved en z-verdi lik 1 er avstanden mellom datapunktet og  $\mu$  tilsvarende  $1 \times \sigma = \sigma$ .

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Når vi snakker om signifikantnivå i forbindelse med en standard normalfordeling med gjennomsnitt  $\mu = 0$  og  $\sigma = 1$  er  $Z_{\alpha}$  kritiske punkter langs fordelingskurven. Dersom vi ønsker

et konfidensintervall på 95% har vi at  $100(1 - \alpha) = 95$  som gi en  $\alpha$ -verdi på 0,05 ved ensidig tilfellet.

I oppgaven har vi valgt å bruke ulike signifikantnivå for å gi et flersidig resultat av det maksimalt forventet tap av porteføljen. Vi trenger da z-verdien for de ulike tilfellene. Her kunne det blitt brukt flere kjente z-verditabeller å funnet en og en verdi, men i oppgavne er det valgt å produsere et skript som kan gi flere z-verdier til den normale fordelingen. Skriptet kan enkelt justeres for å tilpasses en tosidig intervall, men ettersom vi er interessert i å vite om en parameter for å kartlegge det potensiale tapet til porteføljen brukes  $(1 - \alpha)$  direkte for å finne z-verdiene tilørende de ulike signifikantnivåene.

Funksjon `norm.ppf(1-a)` beregner z-verdien for den gitte alpha-verdien ved å bruke percent point function fra “norm”-funksjonen [15]. Persentilpunkt-funksjonen er den inverse kumulative fordelingsfunksjonen og gir oss z-verdien gitt sansynligheten  $\alpha$ . Resultatet rundes deretter av av til fire desimaler ved bruk av `rounds()`.

---

```
1 import pandas as pd
2 from scipy.stats import norm
3
4 def z_verdi(alpha):
5     data = {}
6     for a in alpha:
7         z_value = round(norm.ppf(1 - a), 4)
8         data[str(a)] = [z_value]
9     df = pd.DataFrame(data)
10    return df
11
12 alpha_values = [0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05]
13 z_values_df = z_verdi(alpha_values)
14
15 print("Z-verdier for gitt alpha-verdier er:")
16 print(z_values_df)
```

---

$\alpha$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$Z_\alpha$	2,3263	2,0537	1,8808	1,7507	1,6449

Tabell 5.1:  $Z_\alpha$  for standard normalfordeling

# Stokastiske prosesser

Stokastisk analyse kombinerer analytiske verktøy og sannsynlighetsteori for å studere og modellere ulike fenomener som underliggende blir påvirket av tilfeldigheter. En stokastisk prosess er et matematisk objekt som brukes for å beskrive den stokastiske endringen som påvirker fenomenet over tid. Det er utallige mange eksempler på stokastiske prosesser både innenfor fysikk, biologi, økonomi og finans. Den ordinære kalkulusen som gjelder for deterministiske prosesser vil ikke være tilfredsstillende og gyldig for slike fenomener. Stokastisk statistikk er en sentral byggekloss innen finansiell matematikk og det derfor viktig å ha verktøy tilgjengelig for å kunne håndtere situasjoner som er underlagt slike tilfeldigheter. Ved bruk av videreutviklet itô-kalkulus er dette mulig.

En stokastisk prosess er som tidligere nevnt en matematisk modell for å beskrive tilfeldige forandringer og består av en samling av stokastiske variabler som er definert i samme sannsynlighetsrom. Mer konkret er en stokastisk prosess  $X$  en parametrisert samling  $X = x_{t \in T}$  av stokastiske variabler  $x_t : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$  som er definert i samme sannsynlighetsrom  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dersom indeksemengden  $T$  er diskret sier man at  $x$  er en stokastisk prosess i en diskret tid, dersom indeksemengden derimot er kontinuerlig sier man at  $X$  er en stokastisk prosess i kontinuerlig tid. En Stokastisk differensialligning er en differensialligning hvor minst et av leddene er en stokastisk prosess. Ved stokastiske differensialligninger kan vi kombinere deterministiske prosesser med tilfeldig og usikkerhet, og lar oss modellere komplekse fenomener som også inkluderer stokastiske komponenter.

Tidligere er det vist at strømprisene har en irregulær struktur som konsekvens av prisens kompleksitet av påvirkningsfaktorer. For å kunne beskrive den matematiske strukturen til strømprisene for de ulike produktene i denne oppgaven, vil det være relevant å se nærmere på hvordan vi kan uttrykke en stokastisk endring og hvordan en slik komponent kan defineres.

## 6.1 Markovkjeder

Markovkjeder er inne i matematikk en stokastisk sannsynlighetsmodell hvor man beveger seg fra et stadium til et annet i en tilfeldig prosess med mangel på hukommelse. Hva som skjer i neste steg avhenger derfor kun av den nåværende tilstanden og ikke av sekvensen som har skjedd foran. Trinnet fra det ene til det andre er angitt med sannsynligheter. For strømprisene vil ikke denne prosessen være tilfredsstillende da prisen påvirkes av flere faktorer, inkludert historisk data. Markovkjedens forenklete måte å modellere tilfeldige prosesser på, kan være god for å bygge den stokastiske forståelsen knyttet til strømpriser men vil ikke fungere som en tilfredsstillende modell.

## 6.2 Brownian Motion

En brownisk bevegelse kan minne om Markovkjeder og er den viktigste stokastiske prosessen innen finansiell matematikk. Bevegelsen har en irregulær struktur som påvirkes av uregelmessighet og tilfeldighet og egner seg derfor svært godt i beskrivelsen av finansielle markeder hvor prisendringene også er stokastiske. Brownske bevegelser er kontinuerlige men den irregulære strukturen gjør at den ikke er differensierbar. Prosesser som inneholder en slik struktur kan derfor ikke behandles ved den ordinære kalkulusen vi kjenner til. Vi trenger spilleregler for å håndtere ikke-differensierbare stokastiske prosesser og browniske bevegelser er derfor med å danner et grunnleggende behov for det vi dag kaller Itô kalkulus.

En brownisk bevegelse  $B_t$  er mer konkret definert som en stokastisk prosess som tilfredsstillere tre egenskaper[2]:

1. Uavhengige inkremitter: Den stokastiske variabelen  $B_t - B_s$  er uavhengig av variabelen  $B_u - B_v$  når  $t > s \geq u > v \geq 0$ .
2. Stasjonære inkremitter: Fordelingen til  $B_t - B_s$  er kun avhengig av  $t - s$  og ikke  $t$  og  $s$  separat.
3. Normale inkremitter: Fordelingen til  $B_t - B_s$  er en normalfordeling med forventning 0 og varians  $t - s$

Matematisk vil dette være det samme som følgende definisjon:

**Definisjon 1** (Brownisk bevegelse). La  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sannsynlighetsrom hvor  $\forall \omega \in \Omega \wedge t \geq 0$  eksisterer en kontinuerlig funksjon  $B_t$  og som tilfredsstillere  $P(B_0 = x) = 1 \forall x \in \mathbf{R}^d$ .  $B_t$  er en brownisk bevegelse dersom  $\forall t \in [0, \infty)$

1.  $B_t - B_s$  er uavhengige av  $\mathcal{F}_s \forall t \geq s$
2.  $E[\Delta B] = E(B_t - B_s) = 0$
3.  $Var[\Delta B] = Var[B_t - B_s] = t - s$

I python kan vi generere Brownske bevegelser ved bruk av matrise funksjonalitet. I funksjonen brukes  $N =$  antall tidssteg,  $T =$  den totale tidsperioden og  $S =$  antall simuleringen vi ønsker å generere. I koden opprettes en  $(N \times S)$  matrise hvor hver enkelt simulering representeres av en rad og de tilhørende kolonneverdier representerer en verdi bevegelsen har på et gitt tidspunkt. For representasjonens enkelhet er det i dette tilfellet valgt å bruke en standardnormalt fordeling med forventningsverdien lik 0 og variansen lik 1. For å generere bevegelsene i python går den browniske bevegelsen over et tidsintervall fra 0 til  $T$  og hvor tidsintervaller inneholder  $N$  antall observasjoner og derfor deles inn i  $N$  like delintervaller kalt  $dt$ . I en brownisk bevegelse er variasjonen av prosessen over et gitt tidsintervall normalfordelt. Variasjonen til en normalfordelt variabel er pr. definisjon lik kvadratet av standardavviket. Standardavviket av prosessen over en gitt tidsintervall er derfor lik kvadratroten av tidsintervallet. Dette betyr at størrelsen på de stokastiske endringene i prosessen øker med kvadratroten av tiden som går. I skriptet multipliserer vi derfor kvadratroten av tidsinkrementet med en normalfordelt tilfeldig variabel for å la funksjonen fortsette sin irregulære struktur gjennom prosessens levetid.

---

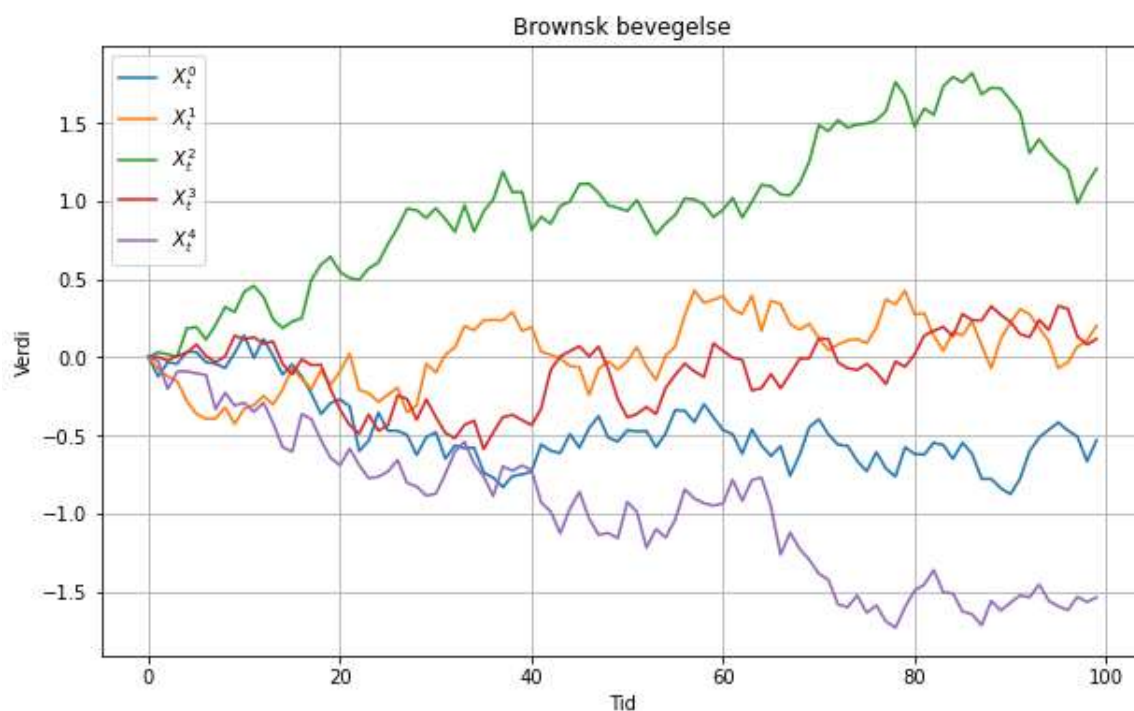
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def simuler_BM(N,T,S):
4     BM = np.zeros([N, S])
5     dt=T/N
6     for i in range(1, N):
7         BM[i, :] = BM[i-1, :] + np.sqrt(dt) * np.random.normal(0, 1, S)
8     # Plotter simuleringene
9     plt.figure(figsize=(10, 6))
10    for j in range(S):
11        plt.plot(BM[:, j], label=f"$X_t^{\{j\}}$")
12    plt.title("Brownsk bevegelse")
13    plt.legend()
14    plt.grid(True)
15    plt.xlabel("Tid")
16    plt.ylabel("Verdi")
17    plt.show()

```

---

6.1 viser en generering av 5 brownske simuleringer, hvor vi har en tidsperiode  $T = 1$  og tidssteg  $N = 100$ .



Figur 6.1: Brownsk bevegelse simulert i Python

### 6.3 Geometrisk Brownian Motion

I aksjemarkedet brukes ofte en videreutvikling av en brownske bevegelse av eksponentiell karakter som kalles en geometrisk brownsk bevegelse. Når du eksempelvis investerer i en fondsportefølje er ofte tanken at verdien du setter inn skal gi deg økende avkastning på sikt og på den måten ha en økende drift for et høyere resultat. En geometrisk brownsk bevegelse inkluderer denne eksponentielle driften samtidig som den bringer med seg de stokastiske forstyrrelsene som en brownsk bevegelse har. Matematisk beskrevet vil

$$x_t = x_0 e^{\mu t + \alpha B_t},$$

hvor  $\mu$  og  $\alpha$  er konstanter, være en geometrisk brownsk bevegelse.

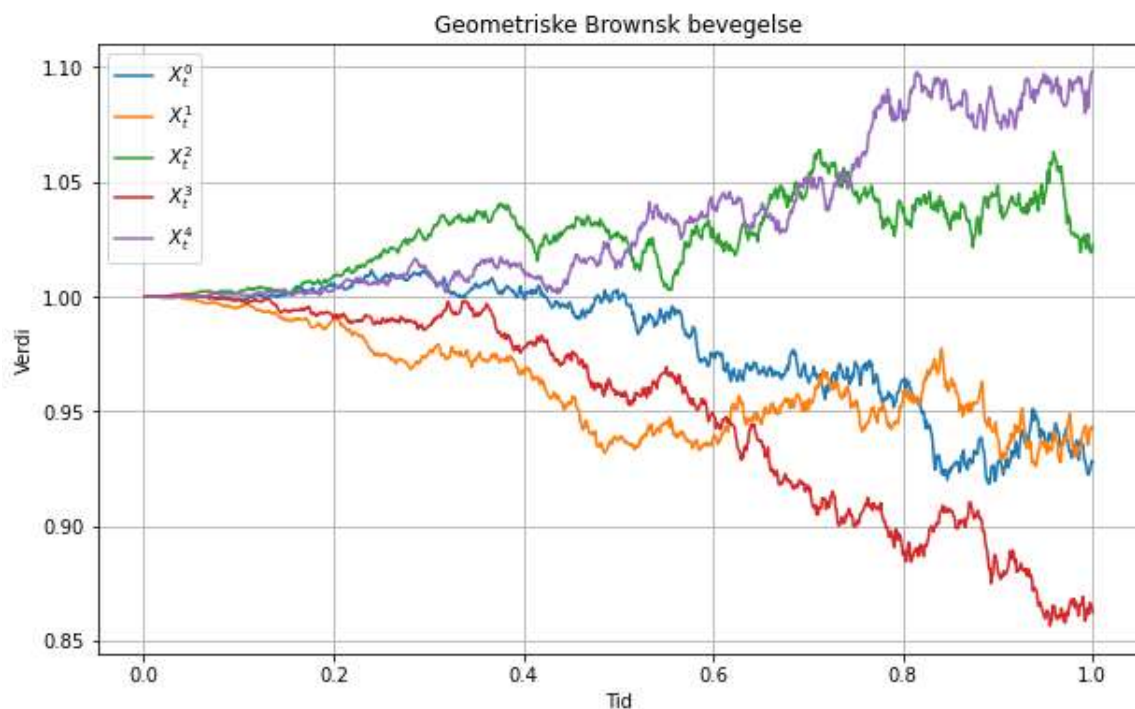
For å generere en geometrisk brownsk bevegelse i python følger vi samme skript som tidligere men vi må inkludere den eksponentielle driften til prosessen og bruke  $\mu$  og  $\sigma$  som to ekstra parametre for forventningsverdi og standardavvik. dB representerer den browniske strukturen, og GBM den stokastiske delen av en geometrisk brownsk bevegelse. Videre inkluderes den eksponentiale veksten som inngår i den geometriske versjonen.

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def simuler_GBM(N,T,mu,sigma,S):
4     dt = T/N# Tidssteg
5     X = np.zeros([S, N])
6
7     # Gjennomgå de gjenværende tidsstegene for hver bevegelse
8     for i in range(S):
9         dB=np.sqrt(dt)*np.random.normal(size=N)#Genererer en BM
10        GB=np.cumsum(dB) #Konverterer BM til en GBM som inkluderer drift.
11        f=(mu-0.5*sigma**2)*np.linspace(dt,T,N)*sigma*GB
12        X[i]=np.exp(f)
13
14    plt.figure(figsize=(10, 6))
15    for i in range(S):
16        plt.plot(np.linspace(dt,T,N),X[i], label= f"$X_t^{i}$")
17
18    plt.title("Geometriske Brownsk bevegelse")
19    plt.legend()
20    plt.grid(True)
21    plt.xlabel("Tid")
22    plt.ylabel("Verdi")
23    plt.show()
```

---

6.2 viser en simulering med 1000 tidsteg, den totale tidsperioden på 1 år, en forventningsverdi på 05, standardavvik på 0,2 og 5 simuleringer.



Figur 6.2: Geometrisk brownsk bevegelse simulert i python

## 6.4 Ornstein-Uhlenbeck

I likhet med en geometrisk brownsk bevegelse styres også en Ornstein-Uhlenbeck av en drift og kan kalles en snittreverserende prosess. Driften er altså ikke eksponentiell som ved en geometrisk brownsk bevegelse men snittreverserende på samme måte som strømprisene historisk sett viser andtydning til. En Ornstein-Uhlenbeck prosess blir derfor ofte brukt for å modellere strømprisene.

Ornstein-Uhlenbeck prosessen er en løsning av den stokastisk differensialligningen

$$dx_t = \theta(\mu - x_t)dt + \sigma dB_t$$

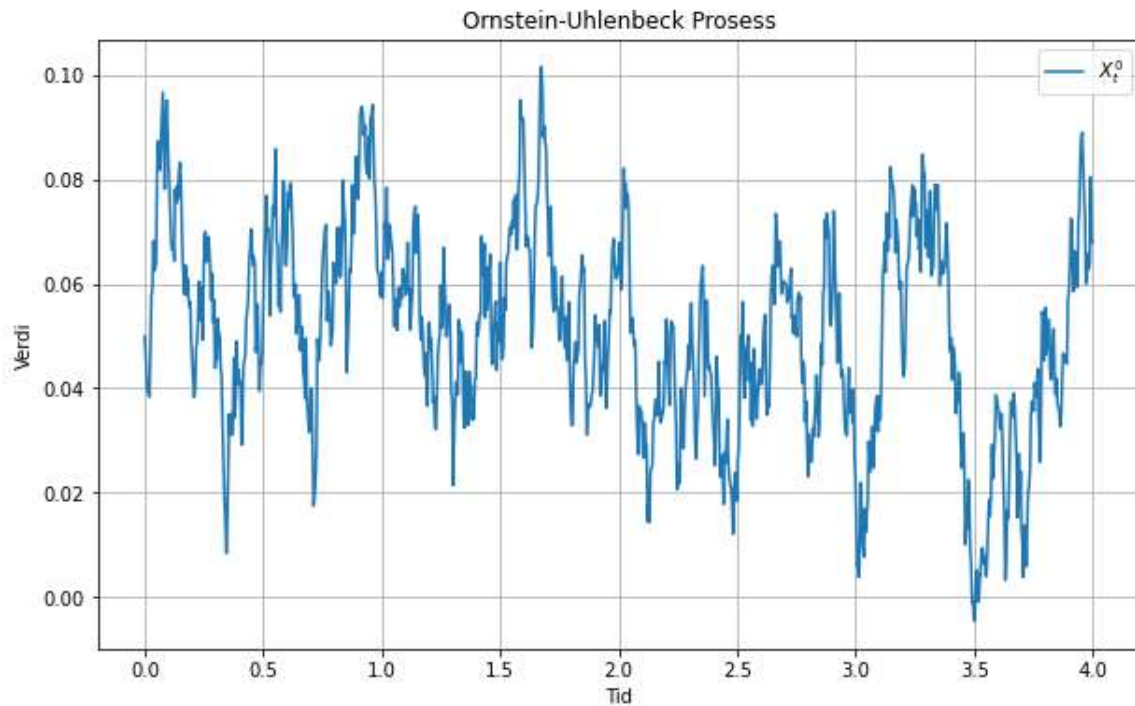
og viser den samme typen irregulær struktur som vi også kan observere i strømprisene.  $x_t$  er strømprisen,  $\theta$  er hastigheten funksjonen returnerer til sitt likevektsnivå som da representeres av  $\mu$ ,  $\sigma$  er volatiliteten i form av standardavvik og  $B_t$  er den brownske bevegelsen som er tilknyttet prisen.

I python kan vi igjen viderutvikle den tidligere koden og koble på en snittreverserende ledd fremfor den eksponentiale driften til den geometriske brownske bevegelsen. I figur 6.3 er simuleringen basert på 1000 tidsteg, driftsledd  $\mu = 0,05$ , standardavvik på 0,1, reverse-ringshastighet  $\theta = 10$ , og statverdi for funksjonen på 0,05.

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def simuler_OU(N,T,mu,sigma,theta,X0,S):
5     dt = T/N# Tidssteg
6     OU = np.zeros([S, N])
7
8     # Gjennomgå de gjenværende tidsstegene for hver bevegelse
9     for i in range(S):
10        X = np.zeros(N)
11        X[0] = X0
12        for t in range(1, N):
13            dB = np.sqrt(dt) * np.random.normal() #Genererer en BM
14            dX = theta * (mu - X[t-1]) * dt + sigma * dB
15            X[t] = X[t-1] + dX
16        OU[i] = X
17
18 plt.figure(figsize=(10, 6))
19 for i in range(S):
20     plt.plot(np.linspace(0, T, N), OU[i],label= f"$X_t^{\{i\}}$")
21
22 plt.title("Ornstein-Uhlenbeck Prosess")
23 plt.legend()
24 plt.grid(True)
25 plt.xlabel("Tid")
26 plt.ylabel("Verdi")
27 plt.show()
```

---



Figur 6.3: Ornstein-Uhlenbeck prosess simulert i python

Strømprisene og ornstein-uhlenbeck prosessen, har den samme strukturen, men vi kan se en vesentlig forskjell fra de to. OU-prosessen tar ikke hensyn til den sesongbaserte prisforskjellen mellom sommer og vinter månedene vi finner i spotprisen. Spotprisen ser ut til å være høyere på vinteren enn på sommeren. For å kunne modellere en best mulig modell for strømprisene burde derfor OU-prosessen videreutvikles for spot tilfellet. For å gjøre dette kunne den gjennomsnittlige faste verdien  $\mu$  byttes ut med den best mulige tilpassende gjennomsnittsfunksjonen  $\phi(t)$  som fanger med seg de sesongbaserte svingningene.

$$dx_t = \theta(\phi(t) - x_t)dt + \sigma dB_t$$

Likvill er det slik at analyseperioden i denne oppgaven går over 4 hele år, og inkluderer derfor begge sesongvariasjonene for hele perioden. På grunn av den snittreverserende prosessen kan det derfor bruke en fast gjennomsnittsverdi  $\mu$ . I tillegg vil ikke den  $\phi(t)$  ha påvirket variansen og til prosessen som er sentralt i beregningen av risikoen til porteføljen. Det velges derfor å beholde  $\mu$  for denne oppgaven

Etttersom KIKS selger en portefølje med 4 produkter vil det trenger vi 4 funksjoner som hver for seg beskriver de ulike produktene. Futurekontraktene skal naturligvis ikke ha en funksjonsbasert gjennomsnittsverdi, men ved å behandle  $\phi(t)$  som en funksjon for alle produktene kan utregningene gjelde for begge tilfeller. Utregningene vil da være mer generelle og vi kan tilpasse funksjonen for kontraktene i ettertid.

$$dx_t^i = \theta^i(\mu^i - x_t^i)dt + \sigma^i dB(t)^i$$



# Itô kalkulus

Ito-kalkulus er som et kompass som hjelper oss å navigere i det uforutsigbare landskapet av stokastiske prosesser. Det gir oss en matematisk ramme for å modellere systemer som er påvirket av tilfeldigheter og stokastisk støy. For å kunne utføre analyser på de stokastiske prosessene trengs itô-kalkulus for å kunne løse de stokastiske differensialligningene som har iboende tilfeldighet. Innenfor finansteori hvor vi kan se store påvirkninger av støy vil denne formen for matematikk være viktig knyttet til risikostyring. Den gir oss verktøy til å kunne beregne iboende risiko på komplekse finansielle instrumenter, eksempelvis knyttet til KIKS's portefølje av kraftprodukter.

## 7.1 Itô intergal

Itô-integralet er grunnsteinen til stokastisk analyse og har som formål å integrere en stokastisk prosess med hensyn på en brownsk bevegelse. Itô integralet skal altså gi uttrykket

$$\int_0^t X_s dB_s$$

matematisk mening.  $X$  er da en stokastisk prosess og  $B$  en brownsk bevegelse. Med andre ord er Itô integralet et stokastisk integral som brukes for å integrere over en stokastisk prosess med hensyn på en annen stokastisk prosess. Selve konstrueringen av itô integralet vil ikke ha en hensikt i denne oppgaven, men det er enkelte egenskaper ved integralet som ligger til grunn for videre itô kalkulus som er brukt i oppgaven.

**Theorem 10** (Egenskaper til Itô integral). *La  $f, g$  være*

- $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$
- $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$
- $E \left[ \int_S^T f dB_t \right] = 0$
- $\int_S^T f dB_t$  er  $\mathcal{F}_T$ -målbar

[23]

## 7.2 Itô prosess

Et itô integralet og en itô prosess kommer fra to relaterte konsepter men er ikke det samme. Mens et itô integral er en tilfeldig variabel som avhenger av to underliggende stokastiske prosesser hvor den ene er en brownsk bevegelse, er en itô prosess en stokastisk prosess som tilfredsstiller den stokastisk differensial ligningen:

$$dX_t = u(t, X_t)dt + v(t, X_t)dB_t$$

En itô prosess er altså en adaptert stokastisk prosess  $X_{t \in [0, T]}$  som kan uttrykkes som en sum av et stokastisk integral med hensyn på en brownsk bevegelse og et integral med hensyn på tiden. Mer matematisk definert[23]:

**Theorem 11** (1-dimensjonal itô prosess). *Dersom  $B_t$  er en 1-dimensjonal brownsk bevegelse på sannsynlighetsrommet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Så er en Itô prosess en stokastisk prosess  $X_t$  på samme sannsynlighetsrom på formen*

$$(X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s,$$

hvor i

$$P \left( \int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \forall t \geq 0 \right) = 1,$$

$$P \left( \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \forall t \geq 0 \right) = 1,$$

og som på kortere form kan skrives som

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

$F_t$  er filtrasjonen generert av den brownske bevegelsen  $B_t$

### 7.3 Itô formel

Da en brownsk bevegelse ikke er differensierbar grunnet dens uendelige variasjon, vil det ikke være mulig å bruke de vanlige kalkulus metodene kjent fra tidligere. Det kreves derfor nye integreringsnotasjoner når stokastiske prosesser er inkludert. Itô's formel gjør det mulig å beregne den totale endringen som skjer i en stokastisk prosess og åpner derfor for mulighet til å derivere brownske bevegelse. Kort fortalt er Itô's formelen en versjon av kjerneregelen som vi kjenner til fra integralregning men inkluderer den stokastiske støyen en brownsk bevegelse har. For en 1-dimensjonal itô-prosess defineres formelen som følger[23]:

**Theorem 12** (1-dimensjonal Itô formel). *La  $g(t, x) \in C^{1,2}([0, \infty] \times \mathbb{R})$  og*

$$dX_t = U_t dt + V_t dB_t$$

. Ved å definere

$$Y_t = g(t, X_t)$$

så er

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial X_t}(t, X_t) U_t + \frac{\partial g}{\partial X_t}(t, X_t) V_t dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2}(t, X_t) V_t^2 dt$$

hvor siste ledd kalles itô korreksjonsleddet som oppstår ved bruk av kjerneregelen på en stokastisk prosess.  $g(t, x)$  er også med andre ord deriverbar og kontinuerlig to ganger. Formelen kan også forenkles ned til formen:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial X_t}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

hvor

$$\begin{array}{c|c|c} \cdot & dt & dB_t \\ dt & 0 & 0 \\ dB_t & 0 & dt \end{array}$$

I mange tilfeller, særlig innen finans, er det ofte flere tilfeldigheter som påvirker en og samme variabel og er noe som spesielt vises gjennom strømprisen. I en sammensatt portefølje påvirker ofte ulike variabler hverandre og det er derfor nødvendig å håndtere mer enn en dimensjon for å kunne overføre direkte innhentet data til viktig informasjon. Det vil derfor være relevant å utvide den endimensjonale modellen til et multi-dimensjonalt perspektiv. En flerdimensjonal Itô prosess har følgende definisjon [23]:

**Theorem 13** (n-dimensjonal itô prosess). La  $B = (B^1, \dots, B^m) \in \mathbb{R}^m$  være en m-dimensjonal brownisk bevegelse hvor  $B^i$  og  $B^j$  er uavhengige. La  $u : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$   $v : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  være tilpasset slik at

$$E\left[\int_0^\tau |u_s^j| ds\right] < \infty$$

$$E\left[\int_0^\tau |v_s^{i,j}|^2 ds\right] < \infty$$

Da er følgende en n-dimensjonale itô prosess  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$  slik at

$$dX_t^1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_t^m$$

$$\vdots$$

$$dX_t^n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_t^m$$

Hvor man enklere kan sette sammen  $dX_t = u_t dt + v_T dB_t$  hvor da  $X_t, u_t, v_t$  er matriser og  $B_t$  en vektor.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}, dB(t) = \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{bmatrix}$$

Den flerdimensjonale itô formelen er som en sølfølge en videregenerisering av den endimensjonale. Fordelen er at vi med denne kan analysere og modelere større og mer komplekse stokastiske systemer. Ved risikoanalysen i denne oppgaven er det også den flerdimensjonale itô formelen som brukes og som vil være relevant i en sammensatt portefølje som inkluderer stokastisk støy. Øksendal definerer denne på følgende form [23]:

**Theorem 14** (Multi-dimensjonal itô formel). La  $g \in C^{1,2}([0, \tau] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^D)$ . Ved å definere  $Y_t^k = g_k(t, x_t^k)$  så er

$$dY_t^k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t^k) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial X_t^i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_k}{\partial X_t^i \partial X_t^j}(t, X_t^k) dX_t^i dX_t^j$$

med produkt tabell:

·	dt	$dB_t^i$	$dB_t^j$
$dt$	0	0	0
$dB_t$	0	dt	0
$dB_t^j$	0	0	dt

## 7.4 Itô isometri

Itô isometri er et fundamentalt resultat innen stokastisk kalkulus og gjør det mulig å estimere forventningen til et kvadrert stokastisk integral. Ito isometri gjør det derfor mulig å kalkulere variansen til den stokastiske prosessen og skaper på den måten en kobling mellom stokastisk kalkulus og vanlig sannynlighetsteori. Dette spiller en stor rolle innen det finansielle aspektet da variansen til den stokastiske prosessen er en essensiell del innen risikoanalyse. Også i denne oppgaven hvor varians står sentralt vil Itô isometri bli brukt i utregningene og har derfor en stor betydning for oppgavens resultat.

**Lemma 15** (Itô isometri). *Dersom  $\phi(t, w)$  en deterministisk funksjon i  $L^2([0, T])$  gjelder*

$$E \left[ \left( \int_S^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left[ \int_S^T \phi(t, w)^2 dt \right]$$

## 7.5 Martingale

En martingaler en sekvens av stokastiske variabler hvor den betingende forventningen til den stokastiske prosessen på tidspunkt  $s$  er lik den nåværende verdien til prosessen [23]. Den betingende forventningen er derfor uavhengig av hele prosesses løpetid og tidligere verdier. Dette innebærer at vår beste gjettning for fremtidige verdier alltid vil være lik den nåværende verdien til prosessen uavhengig av tidligere informasjon. En marginaler er uforutsigbar men også derfor en analytisk fordel når fremtidige utfall for en stokastisk prosess skal modelleres.

**Definisjon 2** (Martingaler). *En stokastisk prosess  $X_t$  er en martingaler med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_t$  dersom følgende kriterier er oppfylt:*

- $X_t$  er målbar med hensyn på  $\mathcal{F}_t$
- $E[|X_t|] < \infty \forall t \geq 0$ , endelig forventning
- $E[X_T | \mathcal{F}_t] = X_s \forall s \geq t$

En brownisk bevegelse krevet normalfordelte inkremitter med forventning lik 0. Dette medfører at en slik prosess også tilfredsstillter kravene for å være en martingaler. Beviset for dette er relativt enkelt å bygge nettopp på egenskapen hvor  $E[B_t - B_s] = 0$

$$E[B_t | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s$$

I denne oppgaven er det også behov for å nevne at en sum av flere martingaler også er en martingal. Dette vil ha betydning for enkelte egenskaper som blir brukt i videre utregninger. Prosessene som brukes i denne oppgaven er avhengig av flere browniske bevegelser. Dette er derfor et avgjørende element for deler av utregningene i oppgavene.

**Lemma 16** (Martingaler). *Dersom vi har to stokastiske prosesser  $X_t$  og  $Y_t$  som begge er en martingal med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_t$  og  $a \in \mathbf{R}$  gjelder det at:*

- $X_t + Y_t$  også er en martingal med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_t$
- $X_t + a$  også er en martingal med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_t$

*Bevis:*

- $E[Y_t | \mathcal{F}_s] = E[X_t + Y_t | \mathcal{F}_s] = E[X_t | \mathcal{F}_s] + E[Y_t | \mathcal{F}_s] = X_s + Y_s = Z_s$
- $E[Y_t | \mathcal{F}_s] = E[X_t + a | \mathcal{F}_s] = E[X_t | \mathcal{F}_s] + E[a | \mathcal{F}_s] = X_s + a = Z_s$

## 7.6 Lèvy

I forbindelse med kvadratisk variasjon og kovarians nevnes det også at Lèvys to karakteriserings theoremer.

**Theorem 17** (Lèvy's karakteriserings theoremer for 1-dimensjonal brownisk bevegelse). *La  $t > 0$  og  $M_t$  være en stokastiske prosesse som tilfredsstillter kravene for å være en martingaler med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_T$ . Dersom  $M_0 = 0$ ,  $M_t$  har kontinuerlige bane og den kvadratiske variasjonen  $< M, M >_t = t \forall t \geq 0$ , er  $M_t$  er browniske bevegelse.*

En brownisk bevegelse  $B_t$  er en martingaler med kontinuerlige stier og kvadratiske variasjon  $\langle B, b \rangle_t = t$ . [20]

**Theorem 18** (Lèvy's karakteriseringserings theorem for 2-dimensjonal brownisk bevegelse).  
La  $t > 0$  og  $M_t^i, M_t^j$  være to stokastiske prosesser som tilfredsstiller kravene for å være en martingaler med hensyn på filtrasjonen  $\mathcal{F}_t$ . Dersom  $M_0^{i,j} = 0$ ,  $M_t^{i,j}$  har kontinuerlige bane og den kvadratiske variasjonen  $\langle M, M \rangle_t^{i,j} = t \forall t \geq 0$ , er begge prosessene er browniske bevegelse. Dersom korelasjonen  $\langle M^i, M^j \rangle_t = 0 \forall t \geq 0$  så er  $M_t^i$  og  $M_t^j$  to uavhengige browniske bevegelse. [20]

# Utregning av varians og kovariansmatrise

## 7.7 4-dimensjonalt itô system

Porteføljen til KIKS består av 4 stokastiske prosesser som tilfredstiller kravene for en 4 dimensjonal ito prosess. Etersom alle prosessene er på samme form og vi er interesert i å finne kovariansen mellom hvert de ulike produktene kan vi løse systemet 2 dimensjonalt med generelleverdier som tilpasses de ulike prosessene i ettertid.

$$dX_t = \begin{bmatrix} dx_t^1 \\ dx_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(\mu_t^1 - x_t^1) \\ \theta_2(\mu_t^2 - x_t^2) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{bmatrix}$$

Velger  $Y_t = \begin{bmatrix} x_t^1 e^{\theta_1 t} \\ x_t^2 e^{\theta_2 t} \end{bmatrix} = g_i(t, x_i)$  som vil gi oss følgene partiellderiverte ledd ved bruk av itô formel.

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \theta_1 x_t^1 e^{\theta_1 t} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_t^1} = e^{\theta_1 t} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_t^2} = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = \theta_2 x_t^2 e^{\theta_2 t} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_t^2} = e^{\theta_2 t} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_t^1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial^2 x_t^1} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial^2 x_t^2} = 0$$

Løsning av første ledd. Ved bruk av den flerdimensjonale itô formelen får vi følgende for første itoprosess i systemet og tilsvarende for  $dy_t^2$  hvor  $g_1(t, x_1^1)$  skiftes ut med  $g_2(t, x_t^2)$ :

$$dy_t^1 = \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, x_t^1)dt + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g_1}{\partial x_t^i}(t, x_t^1)dx_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_t^i \partial x_t^j}(t, x_t^1)dx_t^i dx_t^j$$

$$dy_t^1 = \theta_1 x_t^1 e^{\theta_1 t} dt + e^{\theta_1 t} dx_t^1 + 0 \cdot dx_t^2 + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= \theta_1 x_t^1 e^{\theta_1 t} dt + e^{\theta_1 t} (\theta_1 (\mu_1 - x_t^1) dt + \sigma_{11} dB_t^1 + \sigma_{12} dB_t^2)$$

$$= \theta_1 x_t^1 e^{\theta_1 t} dt + e^{\theta_1 t} \theta_1 \mu_1 dt - \theta_1 x_t^1 e^{\theta_1 t} dt + \sigma_{11} e^{\theta_1 t} dB_t^1 + \sigma_{12} e^{\theta_1 t} dB_t^2$$

$$= \theta_1 \mu_1 e^{\theta_1 t} dt + \sigma_{11} e^{\theta_1 t} dB_t^1 + \sigma_{12} e^{\theta_1 t} dB_t^2$$

$$y_t^1 = y_0^1 + \theta_1 \int_0^t \mu_1 e^{\theta_1 s} ds + \sigma_{11} \int_0^t e^{\theta_1 s} dB_s^1 + \sigma_{12} \int_0^t e^{\theta_1 s} dB_s^2$$

$$\Rightarrow x_t^1 e^{\theta_1 t} = x_0^1 + \theta_1 \int_0^t \mu_1 e^{\theta_1 s} ds + \sigma_{11} \int_0^t e^{\theta_1 s} dB_s^1 + \sigma_{12} \int_0^t e^{\theta_1 s} dB_s^2$$

$$\Rightarrow x_t^1 = x_0^1 e^{-\theta_1 t} + \theta_1 \int_0^t \mu_1 e^{-\theta_1(t-s)} ds + \sigma_{11} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^1 + \sigma_{12} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^2$$

Løsningen av  $X_t^1$  hvor  $\mu_1$  kan både være uavhengig av tiden eller ikke. Dersom  $\mu_1$  er uavhengig av tiden  $t$  kan den behandles som er skalar og utregningen av det deterministiske integralet blir enkelt. Uavhengig om  $\mu_1$  avhenger av  $t$  eller ikke vil variansen være den samme.

Løsningen av  $X_t^2$  vil følge samme prosedyre.

$$\begin{aligned} dy_t^2 &= \theta_2 x_t^2 e^{\theta_2 t} dt + 0 + e^{\theta_2 t} dx_t^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \\ &\vdots \\ \Rightarrow x_t^2 &= x_0^2 e^{-\theta_2 t} + \theta_2 \int_0^t \mu_2 e^{-\theta_2(t-s)} ds + \sigma_{21} \int_0^t e^{-\theta_2(t-s)} dB_s^1 + \sigma_{22} \int_0^t e^{-\theta_2(t-s)} dB_s^2 \end{aligned}$$

## 7.8 Varians-Kovarians

Som nevnt tidligere i oppgaven er varians er et statistisk mål som beskriver hvor stor spredning det befinner seg i data omkring forventningsverdien. Kovarians er en utvidelse av begrepet og forteller hvor stor samvariasjon to størrelser har med hverandre. Med andre ord er det måte å måle hvordan 2 variabler varierer i henhold til hverandre. Variansen til en stokastisk variabel  $X$  defineres som  $\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2]$ , mens kovariansen mellom to stokastiske variabler defineres som  $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

Dersom kovariansen er positiv vil det si at variablene øker og synker i sammen i lik retning, og motsatt ved negativt utfall hvor de beveger seg i motsatt retning av hverandre. Vi kan derimot ikke si noe om hvor mye hver av dem beveger seg i henhold til den andre, det er korrelasjons oppgave å vise hvor sterk bånd to variabler har. For å beregne risikoen til KIKS porteføle som er sammensatt av mer en to stokastiske variabler trenger vi å beregne selve kovariansmatrisen  $Q$  til hele porteføljen.

$$Q = \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_1) & \cdots & Cov(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(x_n, x_1) & \cdots & Cov(x_n, x_n) \end{bmatrix} \text{ hvor } Cov(x, x) = Var(x).$$

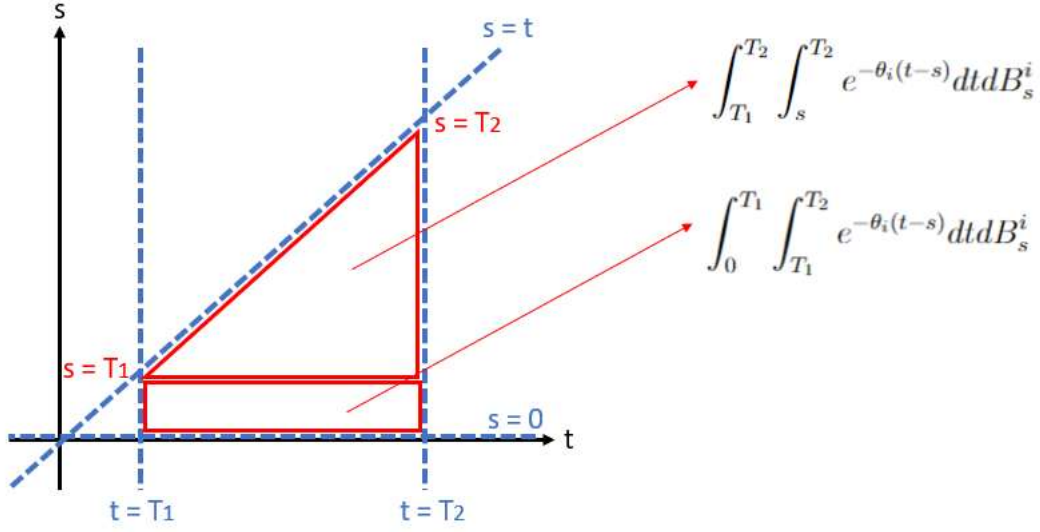
### 7.8.1 Gjennomsnittlig pris

I oppgaven er vi på jakt etter å estimere risiko til de usikrede inntektene. Vi benytter oss derfor å gjennomsnittlig pris på de ulike produktene. Ettersom at vi tenker oss at det kun er produkter som selges i samme tidsperiode som har en viss korrelasjon, vil det være naturlig å dele inn kovariansmatrisen basert på de ulike tidsperiodene hvor vi definerer  $T_1$  som startpunktet i perioden og  $T_2$  slutten.

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} x_t^1 &= \int_{T_1}^{T_2} \left( x_0^1 e^{-\theta_1 t} + \theta_1 \int_0^t \mu_1 e^{-\theta_1(t-s)} ds + \sigma_{11} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^1 + \sigma_{12} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^2 \right) dt \\ &\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{11} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^1 dt + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{12} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^2 dt \\ &= \sigma_{11} \int_{T_1}^{T_2} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^1 dt + \sigma_{12} \int_{T_1}^{T_2} \int_0^t e^{-\theta_1(t-s)} dB_s^2 dt \end{aligned}$$

Begge leddene løses på samme måte men med hensyn på to ulike brownske bevegelser. For å kunne løse det doble integralet er det nødvendig å gjennomføre et variabelskifte.

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^t e^{-\theta_i(t-s)} dB_s^i dt = \int_0^{T_1} \int_{T_1}^{T_2} e^{-\theta_i(t-s)} dt dB_s^i + \int_{T_1}^{T_2} \int_s^{T_2} e^{-\theta_i(t-s)} dt dB_s^i$$



Figur 7.1: Grafisk fremstilling av variabelskifte

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_{T_1}^{T_2} e^{-\theta_i t} \cdot e^{\theta_i s} dt dB_s^i &= \int_0^{T_1} e^{\theta_i s} \left[ -\frac{1}{\theta_i} e^{-\theta_i t} \right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{\theta_i} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i \\ \int_{T_1}^{T_2} \int_s^{T_2} e^{-\theta_i(t-s)} dt dB_s^i &= \frac{1}{\theta_i} \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \end{aligned}$$

Sett bort fra deterministiske verdier som ikke påvirker varians kan man derfor i dette tilfelle skrive  $\int_{T_1}^{T_2} x_t^1$  og tilsvarene for  $x_t^2$  som

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt &= \frac{\sigma_{11}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_{12}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \\ \int_{T_1}^{T_2} x_t^2 dt &= \frac{\sigma_{21}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_{22}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \end{aligned}$$



## 7.8.2 Varians

Ved å inkludere utregningene over med selve definisjonen av varians vil man videre ved bruk av itô kalkulus og integrasjonsregning kunne uttrykke en generell formel for variansen til de ulike produktene. Når vi beregner variansen til det enkelte produktet er det vesentlig å nevne at de browniske bevegelsene som inngår i de andre produktene utgår fra den stokastiske prosessen vi skal beregne variansen til.

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt &= \int_{T_1}^{T_2} \left( x_0^i e^{-\theta_i t} + \theta_i \int_0^t \mu_i e^{-\theta_i(t-s)} ds \right) dt \\ &+ \frac{\sigma_{11}}{\theta_i} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \right) \end{aligned}$$

De to første leddene er deterministiske verdier og vil derfor påvirke verken variansen eller kovariansen. For å begrunne at de deterministiske verdiene kan ekskluderes, kan det nevnes at de stokastiske leddene i uttrykket er itô-integraler. Etterom at forventingsverdi har lineær egenskap og forventningen til et itô-integralet er lik 0,  $E[\int_s^T f dB_t] = 0$ , vil vi stå igjen med de deterministiske verdiene i uttrykket som igjen subtraheres fra  $\int_{T_1}^{T_2} x_t dt$ . Deterministiske verdier er ikke-varierende og det vil være selvforklarende at disse elementene utgår, likvel kan vi matematisk begrunne påstanden:

$$E \left[ \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt \right] = \int_{T_1}^{T_2} x_0^i e^{-\theta_i t} ds + \theta_i \int_{T_1}^{T_2} \int_0^t \mu_i e^{\theta_i(t-s)} ds dt$$

$$\begin{aligned} Var \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt \right) &= E \left[ \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt - E \left[ \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \frac{\sigma_{ii}}{\theta_i} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \right) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Det midte leddet i kvadratsetningen vil som konsekvens av  $dB_i dB_j = 0 \forall i \neq j$  kanselleres. I tillegg vil vi stå med et produkt av integraller med samme differensial og at et dobbeltintegral uten felles integreringsareal vil gi 0 i verdi. Varians til  $\int_{T_1}^{T_2} x_t^1$  kan derfor forenkles til :

$$\begin{aligned} Var \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt \right) &= E \left[ \left( \frac{\sigma_{ii}}{\theta_i} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left( \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)}) dB_s^i \right)^2 + \left( \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_i(T_2-s)} - 1) dB_s^i \right)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Ved bruk av itô isometri og forventningsverdiens lineære egenskaper kan vi erstatte  $dB_s^i$  med  $ds$  og separere de to forventningsleddene.

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^i dt \right) \\
&= \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left[ E \left[ \int_0^{T_1} (e^{-\theta_i(T_1-s)} - e^{-\theta_i(T_2-s)})^2 ds \right] + E \left[ \int_{T_1}^{T_2} (1 - e^{-\theta_i(T_2-s)})^2 ds \right] \right] \\
&= \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left[ \int_0^{T_1} e^{-2\theta_i(T_1-s)} ds - 2 \int_0^{T_1} e^{-\theta_i(T_1+T_2-2s)} ds + \int_0^{T_1} e^{-2\theta_i(T_2-s)} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{T_1}^{T_2} 1 ds - 2 \int_{T_1}^{T_2} e^{-\theta_i(T_2-s)} ds + \int_{T_1}^{T_2} e^{2\theta_i(T_2-s)} ds \right] \\
&= \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left[ \frac{(e^{2\theta_i T_1} - 1)}{2\theta_i} (e^{-2\theta_i T_1} - 2e^{-\theta_i(T_1+T_2)} + e^{-2\theta_i T_2}) + (T_2 - T_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2e^{-\theta_i T_2}}{\theta_i} (e^{\theta_i T_2} - e^{\theta_i T_1}) + e^{-2\theta_i T_2} \cdot \frac{1}{2\theta_i} (e^{2\theta_i T_2} - e^{2\theta_i T_1}) \right] \\
&= \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left[ \frac{(e^{2\theta_i T_1} - 1) (e^{-2\theta_i T_1} - 2e^{-\theta_i(T_1+T_2)} + e^{-2\theta_i T_2})}{2\theta_i} + (T_2 - T_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(1 - e^{-\theta_i(T_2-T_1)})}{\theta_i} + \frac{(1 - e^{-2\theta_i(T_2-T_1)})}{2\theta_i} \right] \\
&= \frac{\sigma_{ii}^2}{\theta_i^2} \left[ \frac{(e^{2\theta_i T_1} - 1) (e^{-\theta_i T_1} - e^{-\theta_i T_2})^2}{2\theta_i} + (T_2 - T_1) - \frac{2(1 - e^{-\theta_i(T_2-T_1)})}{\theta_i} + \frac{(1 - e^{-2\theta_i(T_2-T_1)})}{2\theta_i} \right]
\end{aligned}$$

### 7.8.3 Kovarians

For å kunne bergene kovariansen mellom to ulike produkter må vi gå bort fra den endimensjonale løsningen av  $x_t^i$  og bruke den 4 dimensjonale løsningen vi ha kalkulert ved bruk av itô kalkulus. For å beregne kovariansen mellom to produkter er det bare nødvendig å inkludere de faktorene som har en påvirkningskraft. Vi kan ekskludere de påvirkningsfaktorene som stammer fra andre solgte produkter enn de vi skal beregne kovariansen utifra. Vi bruker derfor den to-dimensjonale løsningen og tilpasser modellens resultat etter de estimatene som tilhører hvert enkelt produkt som kovariansen skal estimeres utifra.

På samme måte som ved variansen kan vi til å starte med bruke samme begrunnelse for at de deterministiske verdiene i uttrykket ikke vil påvirke kovariansen. I kapittel 7.7 vises den matematiske begrunnelsen hvor forventningsverdien til produktet vil gjøre at de deterministiske leddene blir ekskludert. Vi fortsetter derfor beregningene med de stokastiske verdiene. For ordensskyld settes  $i = 1$  og  $j = 2$  i utregningene.

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt, \int_{T_1}^{T_2} x_t^2 dt \right) = \\
E \left[ \left( \frac{\sigma_{11}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \right. \right. \\
+ \frac{\sigma_{12}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \\
\cdot \left( \frac{\sigma_{21}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \right. \\
\left. \left. + \frac{\sigma_{22}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

I likhet med variansen vil vi kunne benytte oss av itô-integralets egenskaper og multipliseringsreglene mellom to browniske differensialer som er ulike som derfor vil gi et null utslag å eliminere disse ledene fra beregningen. Mer matematisk beskrevet er det  $dB_t^i \cdot dB_t^j = 0 \forall i \neq j$  som legges til grunn. Videre brukes den grunnleggende matematiske forståelsen av dobbelintegralets egenskaper. Det oppstår dobbeltintegral som følge av multipliseringen av to integraler som har lik differensial. Et dobbeltintegral hvor det ikke fremkommer noe felles integralareal vil gi 0 i verdi og leddene det gjelder vil derfor kansaleres.

$$\begin{aligned}
= E \left[ \left( \frac{\sigma_{11}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \right) \right. \\
\cdot \left( \frac{\sigma_{21}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^1 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^1 \right) \right) \\
+ \left( \frac{\sigma_{12}}{\theta_1} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \right) \\
\left. \cdot \left( \frac{\sigma_{22}}{\theta_2} \left( \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^2 + \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) dB_s^2 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= E \left[ \frac{\sigma_{11}}{\theta_1} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^1 \cdot \frac{\sigma_{21}}{\theta_2} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^1 \quad (7.1)
\right.$$

$$+ \frac{\sigma_{11}}{\theta_1} \int_{T_1}^{T_2} (1 - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^1 \cdot \frac{\sigma_{21}}{\theta_2} \int_{T_1}^{T_2} (1 - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^1 \quad (7.2)$$

$$+ \frac{\sigma_{12}}{\theta_1} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^2 \cdot \frac{\sigma_{22}}{\theta_2} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^2 \quad (7.3)$$

$$+ \left. \frac{\sigma_{12}}{\theta_1} \int_{T_1}^{T_2} (1 - e^{-\theta_1(T_2-s)}) dB_s^2 \cdot \frac{\sigma_{22}}{\theta_2} \int_{T_1}^{T_2} (1 - e^{-\theta_2(T_2-s)}) dB_s^2 \right] \quad (7.4)$$

(7.1) og (7.3) løses på samme måte og (7.2) og (7.4) også tilsvarende som hverandre. Vi står igjen med multipliseringer av integraller som har lik brownsk differensial og etter multipliseringsreglene som fremgår av itô integralets definisjon kan vi på dette punktet bruke  $dB_t^i \cdot dB_t^j = dt \forall i = j$ . Vi står igjen med skalarprodukt og etter egenskapen til forventningsverdi, vil forventningen til en skalar alltid være lik skalarens egne verdi. Vi har derfor:

$$\begin{aligned}
(7.1) &= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \int_0^{T_1} (e^{-\theta_1(T_1-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)}) (e^{-\theta_2(T_1-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)}) ds \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \int_0^{T_1} \left( e^{-(\theta_1+\theta_2)(T_1-s)} - e^{s(\theta_1+\theta_2)-\theta_1T_1-\theta_2T_2} - e^{s(\theta_1+\theta_2)-\theta_1T_2-\theta_2T_1} + e^{-(\theta_1+\theta_2)(T_2-s)} \right) ds \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \left( (e^{-(\theta_1+\theta_2)T_1} - e^{-\theta_1T_1-\theta_2T_2} - e^{-\theta_1T_2-\theta_2T_1} + e^{-(\theta_1+\theta_2)T_2}) \cdot \left[ \frac{1}{\theta_1+\theta_2} e^{(\theta_1+\theta_2)s} \right]_0^{T_1} \right) \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \left( \frac{e^{(\theta_1+\theta_2)T_1} - 1}{\theta_1+\theta_2} (e^{-(\theta_1+\theta_2)T_1} - e^{-\theta_1T_1-\theta_2T_2} - e^{-\theta_1T_2-\theta_2T_1} + e^{-(\theta_1+\theta_2)T_2}) \right) \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \left( \frac{(e^{(\theta_1+\theta_2)T_1} - 1) (e^{-\theta_1T_2} - e^{-\theta_1T_1}) (e^{-\theta_2T_2} - e^{-\theta_2T_1})}{\theta_1+\theta_2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7.2) &= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \int_{T_1}^{T_2} (e^{-\theta_1(T_2-s)} - 1) (e^{-\theta_2(T_2-s)} - 1) ds \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \int_{T_1}^{T_2} (e^{-(\theta_1+\theta_2)(T_2-s)} - e^{-\theta_1(T_2-s)} - e^{-\theta_2(T_2-s)} + 1) ds \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \left( e^{-(\theta_1+\theta_2)T_2} \left[ \frac{1}{\theta_1+\theta_2} e^{(\theta_1+\theta_2)s} \right]_{T_1}^{T_2} - e^{-\theta_1T_2} \left[ \frac{1}{\theta_1} e^{\theta_1s} \right]_{T_1}^{T_2} - e^{-\theta_2T_2} \left[ \frac{1}{\theta_2} e^{\theta_2s} \right]_{T_1}^{T_2} + T_2 - T_1 \right) \\
&= \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{\theta_1\theta_2} \left( \frac{1 - e^{-(\theta_1+\theta_2)(T_2-T_1)}}{\theta_1+\theta_2} - \frac{1 - e^{-\theta_1(T_2-T_1)}}{\theta_1} - \frac{1 - e^{-\theta_2(T_2-T_1)}}{\theta_2} + T_2 - T_1 \right)
\end{aligned}$$

Ved å inkludere (7.3) og (7.4) også vil vi få følgende covarians mellom gjennomsnittet av to produktet solgt i samme periode fra  $T_1$  til  $T_2$

$$\begin{aligned}
Cov \left( \int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt, \int_{T_1}^{T_2} x_t^2 dt \right) &= \left( \frac{\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}}{\theta_1\theta_2} \right) \left( \frac{(e^{(\theta_1+\theta_2)T_1} - 1) (e^{-\theta_1T_2} - e^{-\theta_1T_1}) (e^{-\theta_2T_2} - e^{-\theta_2T_1})}{\theta_1+\theta_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - e^{-(\theta_1+\theta_2)(T_2-T_1)}}{\theta_1+\theta_2} - \frac{1 - e^{-\theta_1(T_2-T_1)}}{\theta_1} - \frac{1 - e^{-\theta_2(T_2-T_1)}}{\theta_2} + T_2 - T_1 \right)
\end{aligned}$$

#### 7.8.4 Kontrollsjekk av utregningene

For å vurde og kvalitetsikre om utregningene er korrekte, er det vesentlig å teste funksjonene opp mot hverandre. Som tidligere nevnt vet vi at  $Cov(x, x) = Var(x)$ . Når vi har to identiske prosesser som bygger på samme browniske bevegelse vil vi kunne skrive de to prosessene slik:

$$dX_t = \begin{bmatrix} dx_t^1 \\ dx_t^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(\mu_t^1 - x_t^1) \\ \theta_1(\mu_t^1 - x_t^1) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} [dB_t^1]$$

Vi kan legge til en enda en brownisk bevegelse til prosessene og skalere prosessen med 0 for å beholde prosessenes verdier og struktur.

$$dX_t = \begin{bmatrix} dx_t^1 \\ dx_t^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(\mu_t^1 - x_t^1) \\ \theta_1(\mu_t^1 - x_t^1) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{bmatrix}$$

Da prosessene er identisklike vil  $\sigma_{11} = \sigma_{21}$  og vi kan inkludere følgende parametre i beregningen av kovariansen mellom to identiske prosesser:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \sigma_{11} = \sigma_{21} \quad \sigma_{12} = 0 = \sigma_{22}$$

$$\begin{aligned} & Cov\left(\int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt, \int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt\right) \\ &= \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{11} + 0}{\theta_1\theta_1}\right) \left(\frac{(e^{(\theta_1+\theta_1)T_1} - 1)(e^{-\theta_1 T_2} - e^{-\theta_1 T_1})(e^{-\theta_1 T_2} - e^{-\theta_1 T_1})}{\theta_1 + \theta_1}\right) \\ &+ \left(\frac{1 - e^{-(\theta_1+\theta_1)(T_2-T_1)}}{\theta_1 + \theta_1} - \frac{1 - e^{-\theta_1(T_2-T_1)}}{\theta_1} - \frac{1 - e^{-\theta_1(T_2-T_1)}}{\theta_1} + T_2 - T_1\right) \\ &= \frac{\sigma_{11}^2}{\theta_1^2} \left(\frac{(e^{(2\theta_1)T_1} - 1)(e^{-\theta_1 T_2} - e^{-\theta_1 T_1})^2}{2\theta_1} + \frac{1 - e^{-(2\theta_1)(T_2-T_1)}}{2\theta_1} - \frac{2(1 - e^{-\theta_1(T_2-T_1)})}{\theta_1} + T_2 - T_1\right) \\ &= Var\left(\int_{T_1}^{T_2} x_t^1 dt\right) \end{aligned}$$

Matematisk skal vi få samme resultat. For å sjekke at implementeringen i python også er ført korrekt kan vi kjøre en resultatstest i python for å sjekke om utfallet av testen gir oss samme resultat.

Python kode:

---

```

1  def Kovarianssjekk(n, sigma, theta, T1, T2):
2  varians_test = var(T1, T2, sigma[n][n], theta[n])
3  kovarians_test = covarians(T1, T2, sigma[n][n], 0, sigma[n][n], 0, theta[n], ...
      theta[n])
4
5  print(f"Varians for n={n}: {varians_test}")
6  print(f"Kovarians for n={n}: {kovarians_test}")
7
8  for n in range(4):
9      Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 0, 1)
10 for n in range(3):
11     Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 1, 2)
12 for n in range(2):
13     Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 2, 3)
14 for n in range(1):
15     Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 3, 4)

```

---

N representerer de ulike produktene hvor 0 står for spot, og 1,2,3 for de ulike årskontraktene. Resultatet vi får ut er gitt under og basert på det matematiske beviset kombinert med funksjonstest i python kan beregningene legges til grunn for videre risikovurdering.

```

Varians   for n=0: 1.02021049756
Kovarians for n=0: 1.02021049756
Varians   for n=1: 0.01650357057
Kovarians for n=1: 0.01650357057
Varians   for n=2: 0.00745675336
Kovarians for n=2: 0.00745675336
Varians   for n=3: 0.00518376072
Kovarians for n=3: 0.00518376072
Varians   for n=0: 3.93875402736
Kovarians for n=0: 3.93875402736
Varians   for n=1: 0.06578589093
Kovarians for n=1: 0.06578589093

```

Varians for n=2: 0.02975351328  
 Kovarians for n=2: 0.02975351328  
 Varians for n=0: 6.64240167179  
 Kovarians for n=0: 6.64240167179  
 Varians for n=1: 0.11470478010  
 Kovarians for n=1: 0.11470478010  
 Varians for n=0: 9.14697647446  
 Kovarians for n=0: 9.14697647446

## 7.9 Standardavvik $\sigma$

Sigma matrisen til hele porteføljen skal uttrykke hvor stor påvirkning hver enkelt produkts irregulære struktur har på hverandre. Det er som tidligere nevnt ofte slik prisen på ulike produkter, spesielt innen energi, påvirker gjerne hverandre. Spottprisen påvirker naturligvis også kontraktprisene noe som også gjør at den brownske bevegelsen som er med å styre spottprisen også i seg selv har en påvirkning på kontraktprisene. Hvor stor betydning de ulike brownske bevegelse har på hverandre uttrykkes da gjennom sigma matrisen som kan skrives som:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

Når vi måler kovariansmatrisen til hele porteføljen vil naturligvis også sigmamatrisen være i endring når produktene vi måler mellom byttes. Det vil derfor være følgende sigma verdier som vil bli brukt når de ulike kovariansselementet blir beregnet

$$\begin{aligned}
 (X_1, X_2) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \\
 (X_1, X_3) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \\
 (X_1, X_4) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{14} \\ \sigma_{41} & \sigma_{44} \end{bmatrix} & (X_1, X_1) &\rightarrow \sigma_{11} \\
 (X_2, X_3) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} & (X_2, X_2) &\rightarrow \sigma_{22} \\
 (X_2, X_4) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{42} & \sigma_{44} \end{bmatrix} & (X_3, X_3) &\rightarrow \sigma_{33} \\
 (X_3, X_4) &\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix} & (X_4, X_4) &\rightarrow \sigma_{44}
 \end{aligned}$$

Det er i denne oppgaven blitt tilsendt kovariansmatrise fra tidligere medstudent Le Quy-en som utarbeidet for KIKS sin portefølje. Denne er produsert ved bruk av kovarians og kvadratisk variasjon langs diagonalen [22]. Kvadratisk variasjon brukes for å måle stokastisk variasjon og er derfor et verktøy som ofte brukes for analysere spredning og volatilitet til finansielleinstrumenter. Den kvadratiske variasjonen er definert som summen av den kvadrerte avstanden fra observasjonene og gjennomsnittet dividert på det totale antallet av observasjoner. Det vil si at kvadratisk variasjon beskriver variansen til en stokastisk prosess over tid. Matematisk kan vi ved inspirasjon fra Øksendal definere kvadratisk variasjon følgende:

**Definisjon 19** (P-ende variasjon for stokastisk prosess). For en kontinuerlig stokastisk prosess  $X_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  over en partisjon  $\tau = t_0, t_1, \dots, t_n$  gjelder det for  $p > 0$  at den p-ende variasjonsprosessen av  $X_t$  er definert som

$$\langle X, X \rangle_t^p(\omega) = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq \tau} |X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)|^p$$

hvor  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  og  $k = t_{k+1} - t_k$   
 For  $p=2$  har vi den kvadratiske variasjonen for  $X_t$

Kovariansmatrisen bygger på alle kryssvariasjoner og kovariansen mellom de ulike leddene er basert på samme type matematikk som den p-ende variasjonen. Forskjellen her at det vi ikke har en eksplisitt p-verdi i definisjonen. Det er en direkte beregning av produktene av to forskjellige stokastiske prosesser  $X_t$  og  $Y_t$  over tid. Som vi kjenner fra vanlig sannsynlighetsteri gjelder  $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ . Kovariansen vil ha sammenheng når vi behandler kvadratisk variasjon og er et analysemaal vi kan bruke for å vite hvordan prosessene varierer sammen over et tidsintervall. På samme måte som over kan vi matematisk skrive kovariansen som [20]:

**Definisjon 20** (Kovarians mellom to stokastiske prosesser). For to kontinuerlige stokastiske prosesser  $X_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  og  $Y_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  over en partisjon  $\tau = t_0, t_1, \dots, t_n$  er kovariansen mellom  $X_t$  og  $Y_t$  er definert som

$$\langle X, Y \rangle_t(\omega) = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq T} (X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)) (Y_{t_{k+1}}(\omega) - Y_{t_k}(\omega))$$

hvor  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  og  $k = t_{k+1} - t_k$ .  
 Kovariansen er symmetrisk og  $\langle X, Y \rangle_t(\omega) = \langle Y, X \rangle_t(\omega)$

For  $p = 2$  kan vi også se at kovariansen tilsvare den kvadratiske variansen for  $X = Y$ :

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_t(\omega) &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq T} (X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)) (X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)) \\ &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq T} (X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega))^2 \\ &= \langle X \rangle_t^2(\omega) \end{aligned}$$

I denne oppgaven volatiliteten definert som standardavviket av prosessen. Volatiliteten er kvadratrotten av den kvadratiske variasjonen per tidsenhet for 1-dimensjonalt tilfellet. For flere dimensjoner gjelder det samme men vi må uttrykke oss litt anderledes da kovariansleddene må også justeres tilsvarende som diagonalen. Det er den totale kovariansmatrisen som tilsvare den kvadrerte volatilitene multiplisert med tiden.

### 7.9.1 Begrunnelse for å justere matrisen

På samme måte som tidligere er det kun de stokastiske ledd som vil påvirke den kvadratiske variasjonen og kovariansen da de deterministiske leddene blir ekskludert som en konsekvens av at  $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$  går mot null. Ved bruk av kvadratisk varians og kovarians er det kun for 2 dimensjonalt tilfellet vi trenger å utføre beregningene. Vi har fra tidligere at den todimensjonale itô-prosessen kan settes opp som følgende:

$$dX_t = \begin{bmatrix} dx_t^i \\ dx_t^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(\mu_t^i - x_t^i) \\ \theta_2(\mu_t^j - x_t^j) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_t^i \\ dB_t^j \end{bmatrix}$$

Hvor det da er de stokastiske leddene vi skal undersøke nærmere for å vite hvordan LeQuyen sin matrise skal brukes til vårt formål i denne oppgaven. Vi må vite hvordan matrisen skal

skaleres for å kunne avgjøre hva den toatle  $\sigma$ -matrisen skal være. For å kunne forenkle resultatet vil det være hensiktsmessig å nevne at kryssvariasjonen mellom to uavhengige browniske bevegelser er etter Lèvy to-dimensjonale teorem lik 0. Bakgrunnen for dette er at en brownisk bevegelse tilfredsstillter kravene for å være en 1 og tilfredsstillter derfor også kravene som fremgår ved Lèvy's theorem. Det vil si  $\langle B^i, B^j \rangle = 0$ . (Sheve, s.168). For en browniske bevegelse er den kvadratiske variasjonen over en tidsperiode lik tiden t [20][23].

$$\begin{aligned}\langle B^i, B^j \rangle_t(\omega) &= \langle B, B \rangle_t^2(\omega) = t \forall i \neq j \\ \langle B \rangle_t(\omega) &= \langle B, B \rangle_t^2(\omega) = 0 \forall i = j\end{aligned}$$

Ved å kombinere disse to egenskapene med kovariansens lineære operatorfunksjon vil vi kunne beregne den kvadratiske variasjonen og kovariansen mellom prosessene.

$$\begin{aligned}\langle X_i \rangle_t^2 &= \langle \sigma_{ii}B^i + \sigma_{ij}B^j \rangle \\ &= (\sigma_{ii}B_{t+1}^i + \sigma_{ij}B_{t+1}^j - \sigma_{ii}B_t^i - \sigma_{ij}B_t^j)^2 \\ &= (\sigma_{ii}(B_{t+1}^i - B_t^i) + \sigma_{ij}(B_{t+1}^j - B_t^j))^2 \\ &= (\sigma_{ii} \langle B^i \rangle_t^1 + \sigma_{ij} \langle B^j \rangle_t^1)^2 \\ &= \sigma_{ii}^2 \langle B^i \rangle_t^2 + 2\sigma_{ii}\sigma_{ij} \langle B^i \rangle_t^1 \langle B^j \rangle_t^1 + \sigma_{ij}^2 \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ii}^2 \langle B^i \rangle_t^2 + 2\sigma_{ii}\sigma_{ij} \langle B^i, B^j \rangle_t + \sigma_{ij}^2 \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ii}^2 t + \sigma_{ij}^2 t = (\sigma_{ii}^2 + \sigma_{ij}^2) t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X_j \rangle_t^2 &= \langle \sigma_{ji}B^i + \sigma_{jj}B^j \rangle \\ &= (\sigma_{ji}B_{t+1}^i + \sigma_{jj}B_{t+1}^j - \sigma_{ji}B_t^i - \sigma_{jj}B_t^j)^2 \\ &= (\sigma_{ji}(B_{t+1}^i - B_t^i) + \sigma_{jj}(B_{t+1}^j - B_t^j))^2 \\ &= (\sigma_{ji} \langle B^i \rangle_t^1 + \sigma_{jj} \langle B^j \rangle_t^1)^2 \\ &= \sigma_{ji}^2 \langle B^i \rangle_t^2 + 2\sigma_{ji}\sigma_{jj} \langle B^i \rangle_t^1 \langle B^j \rangle_t^1 + \sigma_{jj}^2 \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ji}^2 \langle B^i \rangle_t^2 + 2\sigma_{ji}\sigma_{jj} \langle B^i, B^j \rangle_t + \sigma_{jj}^2 \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ji}^2 t + \sigma_{jj}^2 t = (\sigma_{ji}^2 + \sigma_{jj}^2) t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X_i, X_j \rangle_t &= \langle \sigma_{ii}B^i + \sigma_{ij}B^j, \sigma_{ji}B^i + \sigma_{jj}B^j \rangle \\ &= (\sigma_{ii}B_{t+1}^i + \sigma_{ij}B_{t+1}^j - \sigma_{ii}B_t^i - \sigma_{ij}B_t^j) (\sigma_{ji}B_{t+1}^i + \sigma_{jj}B_{t+1}^j - \sigma_{ji}B_t^i - \sigma_{jj}B_t^j) \\ &= (\sigma_{ii}(B_{t+1}^i - B_t^i) + \sigma_{ij}(B_{t+1}^j - B_t^j)) (\sigma_{ji}(B_{t+1}^i - B_t^i) + \sigma_{jj}(B_{t+1}^j - B_t^j)) \\ &= (\sigma_{ii} \langle B^i \rangle_t^1 + \sigma_{ij} \langle B^j \rangle_t^1) (\sigma_{ji} \langle B^i \rangle_t^1 + \sigma_{jj} \langle B^j \rangle_t^1) \\ &= \sigma_{ii}\sigma_{ji} \langle B^i \rangle_t^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj} \langle B^i \rangle_t^1 \langle B^j \rangle_t^1 + \sigma_{ij}\sigma_{ji} \langle B^j \rangle_t^1 \langle B^i \rangle_t^1 + \sigma_{ij}\sigma_{jj} \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ii}\sigma_{ji} \langle B^i \rangle_t^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj} \langle B^i, B^j \rangle_t + \sigma_{ij}\sigma_{ji} \langle B^j, B^i \rangle_t + \sigma_{ij}\sigma_{jj} \langle B^j \rangle_t^2 \\ &= \sigma_{ii}\sigma_{ji} t + \sigma_{ij}\sigma_{jj} t = (\sigma_{ii}\sigma_{ji} + \sigma_{ij}\sigma_{jj}) t\end{aligned}$$

Vi ser tydelig avhengighet av tiden for alle elementene i matrisen, og den må derfor skaleres med  $(1/t)$  før vi kan fokusere på de selve  $\sigma$  elementene. Det kan også være en fordel at matrisen vår er symmetrisk som vil si at  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .



Kvadratrotten av en matrise er mer komplisert enn ved skalering av matrisen. Matrise multiplikasjon kan defineres som følger:

**Definisjon 21** (Matriseprodukt av like størrelser). *Dersom vi har to matriser av lik størrelse  $A_{n \times n}$  og  $B_{n \times n}$  vil matriseproduktet mellom dem  $C_{n \times n}$  være:*

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk}$$

Da vi har en symmetrisk matrise tilsvarende dette det samme som resultatene regnet ut over og vi kan derfor tenke oss at:

$$\ll X \gg_t = \begin{bmatrix} \langle x^i \rangle_t & \langle x^i, x_j \rangle_t \\ \langle x^j, x^i \rangle_t & \langle x^j \rangle_t \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$= \begin{bmatrix} (\sigma_{ii}^2 + \sigma_{ij}^2) t & (\sigma_{ii} \sigma_{ji} + \sigma_{ij} \sigma_{jj}) t \\ (\sigma_{jj} \sigma_{ij} + \sigma_{ji} \sigma_{ii}) t & (\sigma_{ji}^2 + \sigma_{jj}^2) t \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{ii} \sqrt{t} & \sigma_{ij} \sqrt{t} \\ \sigma_{ji} \sqrt{t} & \sigma_{jj} \sqrt{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ii} \sqrt{t} & \sigma_{ij} \sqrt{t} \\ \sigma_{ji} \sqrt{t} & \sigma_{jj} \sqrt{t} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

I dette tilfellet har vi fått tilsendt en matrise av tallverdier og vi vet derfor ikke hva de ulike  $\sigma$  verdiene er. Vi kan løse dette ved bruk av Schur's dekomponering som er en

**Theorem 22.** *La  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  da eksisterer det en unitær matrise  $Q$  og en øvre triangulær matrise  $U$  slik at*

$$X = QUQ^{-1}$$

Med unitær matrise menes en kvadratisk matrise hvor dens inverse også tilsvarende den konjugerte transponerte matrisen. Egenverdien til matrisen  $X$  vil være lik diagonalen til den unitære matrisen  $U$  [17]

I python bygger funksjonen `scipy.linalg.sqrtm()` på denne funksjonaliteten og vi kan bruke funksjonen til å få tilnærmet korrekt sigma matrise. [5] Funksjonen gjennomfører dette for hele matrisen vår som er  $n \times n$

## 7.9.2 Konvertering av kovariansmatrise

For å konvertere matrisen vi har fått tilsendt til volatiliteten må vi ta kvadratrotten av av variasjonen dividert med antall tidssteg i beregningene. Vi vil da få den daglige volatiliteten for prosessen og derfor også det daglige standardavviket. Den kvadratiske variasjonen er beregnet utifra 3258 tidssteg/dager. For å finne volatiliteten til porteføljen av de 4 produktene må vi derfor ta kvadratrotten til LeQuyen sin matrise dividert med tiden

---

```

1 import numpy as np
2 import scipy
3
4 sigma=[[41.04296765, -0.07172793, -0.09372714, -0.09403635],
5        [-0.07172793, 0.85720196, 0.58126776, 0.45597803],
6        [-0.09372714, 0.58126776, 0.52561022, 0.40912495],
7        [-0.09403635, 0.45597803, 0.40912495, 0.37393444]]
8 sigma=np.array(sigma)
9 sigma = scipy . linalg . sqrtm (sigma/3258)
10 print(sigma)

```

---

Dette gir oss en daglig sigma med verdi:

```
[[ 0.11223847 -0.00015466 -0.0002181 -0.00022423]
 [-0.00015466 0.01409231 0.00646873 0.00475871]
 [-0.0002181 0.00646873 0.00946879 0.00545703]
 [-0.00022423 0.00475871 0.00545703 0.007893  ]]
```

De gjennomsnittligere prisene vi har i porteføljen har vi valgt å separere ned til årsprodukter for å berenge risiko på de usikra inntektene. Det er derfor relevant å bruke den årligere volatilitene til prosessen i beregningene. For å konvertere volatilitetene til en årlig parameter, må vi skalere standardavviket med kvadratroten av antall handelsdager av produktet i løpet av et år. Antall handelsdager i et år ligger normalt på 252 dager. [19] For å finne den årlige volatiliteten må vi derfor justere standardavviket med tiden  $t = 252$ .

---

```
1 import numpy as np
2 import scipy
3
4 sigma=[[41.04296765, -0.07172793, -0.09372714, -0.09403635],
5        [-0.07172793, 0.85720196, 0.58126776, 0.45597803],
6        [-0.09372714, 0.58126776, 0.52561022, 0.40912495],
7        [-0.09403635, 0.45597803, 0.40912495, 0.37393444]]
8 sigma = np.array(sigma)
9 sigma = scipy . linalg . sqrtm (sigma/3258)*np.sqrt(252)
10 print(sigma)
```

---

Dette gir oss en en årlig volatilitet med tilsvarende verdier:

---

```
1 [[ 1.78173048 -0.00245512 -0.00346221 -0.00355954]
2  [-0.00245512 0.22370844 0.10268786 0.07554218]
3  [-0.00346221 0.10268786 0.15031234 0.08662766]
4  [-0.00355954 0.07554218 0.08662766 0.1252975  ]]
```

---

De gjennomsnittlige prisene vi bruker i denne oppgaven går over 1 år mens den totale porteføljen går over 4 år. Vi må derfor justere med antall år i beregningene når vi skal kalkulere value at risk for porteføljen. Bakgrunnen for at dette ikke gjøres nå er fordi det ikke alle produktene går over samme tidsperiode, kun de gjennomsntligere inntektene går over 1 år, selv om analysens tidsperiode ligger på 4 år. Volatiliteten er som tidligere nevnt proporsjonal med kvadratoroten av tiden.

## 7.10 Implementering i Python

Beregningen implementeres i python for å enklere kunne justere parametrene tilknyttet analysen. Differansen  $T_2 - T_1 = 1$  er for alle våre tilfeller lik 1 når vi ser på 1 års periode og ikke en som strekker seg over flere år. I funksjonen er det valgt å se bort i fra dette, men det ville være mulig å forenkle noen få ledd i prosesse. Likvell ville da formelen blitt mindre generell og ikke brukbar når en lengre års-periode ønsker å bli brukt.

Ved implementering i Python er det disse parameterene som blir brukt: I dette skriptet er følgende parametre brukt:

1. t1 og t2 som referer til start og slutt tidspunkt vi ønsker gjennomsnittsprisene fra.
2. s11, s12, s21, s22 som sigmamatrisen mellom de ulike produktene
3. theta1 og theta2 for nettopp  $\theta_1$  og  $\theta_2$

### 7.10.1 Varians

Vi starter med implementering av variansfunksjon for modellen.

---

```
1 def var(t1, t2, s11, theta1):
2     return ((s11 ** 2) / (theta1 ** 2)) * (((math.exp(2 * theta1 * t1) - 1) * ...
        ((math.exp(-theta1 * t1) - math.exp(-theta1 * t2)) ** 2)) / (2 * theta1) + ...
        (1 - math.exp(-2 * theta1 * (t2 - t1))) / (2 * theta1) - (2 * (1 - ...
        math.exp(-theta1 * (t2 - t1)))) / theta1 + (t2 - t1))
```

---

### 7.10.2 Kovarians

Utrykket for kovarians er på samme måte som variansuttrykket viderutviklet til en funksjon i python. Det gjør det enklere og mer effektivt å kjøre igjennom utregningene med forskjellige input verdier. Her vil alle parameterne knyttet til  $\theta\sigma$  være i bruk på samme måte som ved implementering av variansfunksjonen.

---

```
1 def covarians(t1, t2, s11, s12, s21, s22, theta1, theta2):
2     return ((s11 * s21 + s12 * s22) / (theta1 * theta2)) * (((math.exp(-(theta1 + ...
        theta2) * t1) - 1) * (math.exp(-theta1 * t2) - math.exp(-theta1 * t1)) * ...
        (math.exp(-theta2 * t2) - math.exp(-theta2 * t1))) / (theta1 + theta2) - (1 ...
        - math.exp(-theta2 * (t2 - t1))) / theta2 - (1 - math.exp(-theta1 * (t2 - ...
        t1))) / theta1 + (1 - math.exp(-(theta1 + theta2) * (t2 - t1))) / (theta1 + ...
        theta2) + t2 - t1))
```

---

### 7.10.3 Kovariansmatrise

For å utvikle kovariansmatrisen for de ulike gjennomsnittsprisene er det blitt brukt nøstet for-løkke for å iterere over matrisen. Det er valgt å kombinere kovariansen og salgsvolumet under samme løkke-kjøring og for å ekskludere beregning på felt som skal ha 0 i verdi, kjøres det 4 ulike løkker. Ved å endre indeksen i de 4 ulike for-løkkene står vi likevell igjen med en  $10 \times 10$  matrise som kan brukes i videre VaR beregninger.

---

```
1 kov = np.zeros((10, 10))
2 vol = np.zeros((10,10))
3 for n in range(4):
4     for m in range(4):
5         if n == m:
6             kov[n][n] = var(0, 1, sigma[n][n], theta[n])
7             vol[n][n] = volum[n] * volum[n]
8         else:
9             kov[n][m] = covarians(0, 1, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
                sigma[n][n], theta[n], theta[m])
10            vol[n][m] = volum[n] * volum[m]
11
12 for n in range(3):
13     for m in range(3):
14         if n == m:
15             kov[n+4][n+4] = var(1, 2, sigma[n][n], theta[n])
16             vol[n+4][n+4] = volum[n+4] * volum[n+4]
17         else:
18             kov[n+4][m+4] = covarians(1, 2, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
                sigma[n][n], theta[n], theta[m])
19             vol[n+4][m+4] = volum[n+4] * volum[m+4]
20
21 for n in range(2):
22     for m in range(2):
23         if n == m:
24             kov[n+7][n+7] = var(2, 3, sigma[n][n], theta[n])
```

```

25     vol[n+7][n+7] = volum[n+7] * volum[n+7]
26     else:
27         kov[n+7][m+7] = covarians(2, 3, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
                sigma[n][n], theta[n], theta[m])
28         vol[n+7][m+7] = volum[n+7] * volum[m+7]
29
30 kov[9][9] = var(3,4,sigma[0][0], theta[0])
31 vol[9][9] = volum[9] * volum[9]

```

---

Som resultat av koden får vi 4 symmetriske kovariansmatriser.

---

```

1 Kovariansmatrisen år t:
2 [[ 1.02837218 -0.00161566 -0.0021959 -0.00222891]
3 [-0.00161566 0.0166356 0.0127721 0.00876939]
4 [-0.0021959 0.0127721 0.00751641 0.0079446 ]
5 [-0.00222891 0.00876939 0.0079446 0.00522523]]
6
7 Kovariansmatrisen år t+1:
8 [[ 3.97026406 -0.00633765 -0.00861798]
9 [-0.00633765 0.06631218 0.05093706]
10 [-0.00861798 0.05093706 0.02999154]]
11
12 Kovariansmatrisen år t+2:
13 [[ 6.69554089 -0.01086569]
14 [-0.01086569 0.11562242]]
15
16 Kovariansmatrisen år t+3:
17 [[9.22015229]]

```

---

#### 7.10.4 Volum

Volumet som KIKS selger er angitt i 3.3. For å beregne den totale variansen til porteføljen trenger vi multiplisert volum mellom produktene i en kombinasjon med produktenes kovariansen. Under er volumet mellom produktene multiplisert med hverandre og laget på samme form som kovariansmatrisen. Dette er for å enklere kombinerer de to variablene i forbindelse med bergening av den totale variansen til porteføljen.

---

```

1 Salgsvolum år t
2 [[ 36710.56 73421.12 36710.56 36710.56]
3 [ 73421.12 146842.24 73421.12 73421.12]
4 [ 36710.56 73421.12 36710.56 36710.56]
5 [ 36710.56 73421.12 36710.56 36710.56]]
6
7 Salgsvolum år t+1
8 [[ 42931.84 85863.68 42931.84]
9 [ 85863.68 171727.36 85863.68]
10 [ 42931.84 85863.68 42931.84]]
11
12 Salgsvolum år t+2
13 [[ 50355.36 100710.72]
14 [100710.72 201421.44]]
15
16 Salgsvolum år t+3
17 [[100710.72]]

```

---

Den totale kovariansmatrisen og volumet vil være en  $10 \times 10$  matrise som gitt under. Her fremkommer også de prosesskombinasjonene som vil gi 0 i utslag på kovariansen og volumet.

---

```

1 Kovariansmatrisen:
2 [[ 1.02837218e+00 -1.61565937e-03 -2.19589657e-03 -2.22890570e-03 0.00000000e+00
3    0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
4
5 [-1.61565937e-03 1.66355991e-02 1.27720973e-02 8.76939296e-03 0.00000000e+00
6    0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
7
8 [-2.19589657e-03 1.27720973e-02 7.51640739e-03 7.94460205e-03 0.00000000e+00
9    0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
10
11 [-2.22890570e-03 8.76939296e-03 7.94460205e-03 5.22523081e-03 0.00000000e+00
12    0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
13
14 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 3.97026406e+00
15   -6.33765350e-03 -8.61797618e-03 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
16
17 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 -6.33765350e-03
18    6.63121781e-02 5.09370568e-02 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
19
20 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 -8.61797618e-03
21    5.09370568e-02 2.99915414e-02 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
22
23 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00
24    0.00000000e+00 0.00000000e+00 6.69554089e+00 -1.08656921e-02 0.00000000e+00]
25
26 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00
27    0.00000000e+00 0.00000000e+00 -1.08656921e-02 1.15622418e-01 0.00000000e+00]
28
29 [ 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00
30    0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 9.22015229e+00]]

```

---

```

1 Volumsmatrisen:
2 [[36710.56 73421.12 36710.56 36710.56    0    0    0    0    0    0 ]
3 [73421.12 146842.24 73421.12 73421.12    0    0    0    0    0    0 ]
4 [36710.56 73421.12 36710.56 36710.56    0    0    0    0    0    0 ]
5 [36710.56 73421.12 36710.56 36710.56    0    0    0    0    0    0 ]
6 [ 0    0    0    0  42931.84 85863.68 42931.84    0    0    0 ]
7 [ 0    0    0    0  85863.68 171727.36 85863.68    0    0    0 ]
8 [ 0    0    0    0  42931.84 85863.68 42931.84    0    0    0 ]
9 [ 0    0    0    0    0    0    0  50355.36 100710.72    0 ]
10 [ 0    0    0    0    0    0    0  100710.72 201421.44    0 ]
11 [ 0    0    0    0    0    0    0    0    0  50355.36]]

```

---

# VaR - resultat

For å komme frem til et resultat av VaR-analysen må det multipliserte salgsvolumet multipliseres med kovariansen og deretter summeres over alle ledd. Kodene angitt i de to tidligere underkapitlene er derfor satt sammen til en felles matrise over de 4 år lange salgsperioden i python koden under. Det brukes også if-betingelse for å hindre beregning av kovariansverdier på ukorrelerte elementer.

---

```
1 ValueAtRisk=0
2 totalvar=0
3 for n in range(3):
4     for m in range(3):
5         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
6         ValueAtRisk = 1.645*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(1))
7 print("Totalvariansen for år t er:",totalvar)
8 print("VaR analyse t:",ValueAtRisk)
9 totalvar=0
10
11 for n in range(6):
12     for m in range(6):
13         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
14         ValueAtRisk = 1.645*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(2))
15 print("Totalvariansen for år t+1 er:",totalvar)
16 print("VaR analyse t+1:",ValueAtRisk)
17 totalvar=0
18
19 for n in range(8):
20     for m in range(8):
21         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
22         ValueAtRisk = 1.645*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(3))
23 print("Totalvariansen for år t+2 er:",totalvar)
24 print("VaR analyse t+2:",ValueAtRisk)
25 totalvar=0
26
27 for n in range(9):
28     for m in range(9):
29         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
30         ValueAtRisk = 1.645*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(4))
31 print("Totalvariansen for år t+3 er:",totalvar)
32 print("VaR analyse t+3:",ValueAtRisk)
```

---

Den totale variansen til hele porteføljen vil derfor være:

$$Var \left[ \sum_{i=0}^3 v_i x_i \right] = 41947869988.208954$$

$$Var \left[ \sum_{i=0}^6 v_i x_i \right] = 224597069404.54724$$

$$Var \left[ \sum_{i=0}^8 v_i x_i \right] = 571048348263.8021$$

$$Var \left[ \sum_{i=0}^9 v_i x_i \right] = 592148598915.3892$$

Som tidligere nevnt kan strømprisene variere mye fra dag til dag men generelt lite over en lengre tidsperiode. Det kan derfor være fornuftig å bruke den gjennomsnittlige prisen  $\mu$  på produktene fremfor dagens markedspris i forbindelse med value at risk beregningene. Ved å bruke gjennomsnittsprisen som er angitt over en lengre periode vil gjøre beregningene mer stabile og den totale verdien av porteføljen vil være mer signifikant med tanke på det volatile markedet som kan gjøre store endringer på kort tidshorisont. I oppgaven er det snittverdien av det gjennomsnittsprisene for kontraktene som legges til grunn for gjennomsnittsprisen til hele porteføljen vi beregner over. Denne verdien tilsvarer:  $\mu = 3,54660842908571$

For å beregne VaR er det tidligere nevnt at vi skal ta i det totalt standardavviket til porteføljen multiplisert med porteføljens verdi og valgt konfidensintervall. Ofte velger man en konfidensnivå på 95% som tilsvarer en z-verdi på 1,6449.

$$VaR = \text{produktverdi} \times \text{standardavvik} \times z - \text{verdi}$$

Resultatet av VaR analysen vil derfor være:

$$VaR_t = \mu \times z_\alpha \times \sqrt{Var \left[ \sum_{i=0}^3 v_i x_i \right]} \times \sqrt{1}$$

$$VaR_{t+1} = \mu \times z_\alpha \times \sqrt{Var \left[ \sum_{i=0}^6 v_i x_i \right]} \times \sqrt{2}$$

$$VaR_{t+2} = \mu \times z_\alpha \times \sqrt{Var \left[ \sum_{i=0}^8 v_i x_i \right]} \times \sqrt{3}$$

$$VaR_{t+3} = \mu \times z_\alpha \times \sqrt{Var \left[ \sum_{i=0}^9 v_i x_i \right]} \times \sqrt{4}$$

## 7.11 Konfidensnivå 95% gitt normale markedsforhold

Gitt normale markedsforhold er det z-verdien gitt i 5.1 som anvendes. Det er viktig å merke at antagelsen med normale markedsforhold ikke inkluderer ekstreme tilfeller og derfor kan avvike fra det som faktisk inntreffer. Ved et konfidensnivå på 95% vil vi ha følgende parametre med inn i estimeringen av VaR:

År	$\alpha$	$Z_\alpha$	$\sigma$	$\mu$
2023	0,05	1,6446	204 811,79	3,5466
2024	0,05	1,6446	473 916,73	3,5466
2025	0,05	1,6446	755 677,41	3,5466
2026	0,05	1,6446	769 511,92	3,5466

Tabell 7.1: Parameter ved  $Z_{0,05}$

Dette gir oss et resultat på:

$$VaR_t = 336894,91_{EUR}$$

$$VaR_{t+1} = 3909937,20_{EUR}$$

$$VaR_{t+2} = 7635716,75_{EUR}$$

$$VaR_{t+3} = 8978382,24_{EUR}$$

Basert på den valgte sikringsgraden som KIKS har satt, kombinert med volumet som skal selges for den 4 år lange perioden, er det estimert en value at risk på EUR 8.978.382,24. Dette er igjen ved et konfidensintervall på 95% med tilhørende signifikantnivå  $\alpha = 0.05$ . Med kurs satt 10.05.2024 tilsvarer dette NOK 104.687.936,-.

VaR-metodikken, med et konfidensnivå på 95%, gir oss en kvantitativ vurdering av det potensielle tapet i porteføljen under normale markedsforhold over en bestemt tidsramme på 4 år. Modellen er bygget opp med forhåndsbestemt data for 2023 til 2026 og ved bytte av analyseperiode må sikringsgrad og volum justeres. 7.2 viser en oversikt over resultatet fordelt på årene som inkluderes i analyseperioden fra 2023 til 2026. Første året har naturligvis en lavere risiko, men desto lengre analyseperioden er øker det potensielle tapet. Analysen er på de usikre inntektene og økningen pr. år vil reduseres utover i analyseperioden da det er færre produkter som inkluderes. Siste året er det kun spot relatert volum som inkluderes i risikoberegningen.

År	$Z_\alpha$	$\sigma$	VaR oppgitt i EUR
2023	1,6446	204 811,79	336 894,91
2024	1,6446	473 916,73	3 909 937,20
2025	1,6446	755 677,41	7 635 716,75
2026	1,6446	769 511,92	8 978 382,24

Tabell 7.2: Resultat ved  $Z_{0,05}$



## 7.12 Konfidensnivå 99% gitt normale markedsforhold

Et konfidensnivå på 99% betyr at det er en 1% sjanse for at det faktiske tapet vil overstige det estimerte VaR beløpet. Med andre ord, vil tapet være mindre en VaR i 99 av 100 tilfeller. Ved et konfidensnivå på 99 prosent vil alle parametrene være like utenom signifikantnivået. Vi vil ha følgende parametre med inn i estimeringen av VaR:

År	$\alpha$	$Z_\alpha$	$\sigma$	$\mu$
2023	0,01	2,3263	204 811,79	3,5466
2024	0,01	2,3263	473 916,73	3,5466
2025	0,01	2,3263	755 677,41	3,5466
2026	0,01	2,3263	769 511,92	3,5466

Tabell 7.3: Parameter ved  $Z_{0,01}$

Dette gir oss et resultat på:

$$VaR_t = 476453.67_{EUR}$$

$$VaR_{t+1} = 5529629.11_{EUR}$$

$$VaR_{t+2} = 10798813.22_{EUR}$$

$$VaR_{t+3} = 12697678.04_{EUR}$$

Basert på de samme betingelseene som tidligere rundt sikringsgraden, er det estimert en value at risk på EUR 12 697 678,04 ved et konfidensintervall på 99% med tilhørende signifikantnivå  $\alpha = 0.01$ . Med kurs satt 10.05.2024 tilsvarende dette NOK 148.054.925,-.

Vi ser naturligvis igjen en økende trend i det potensielle tapet over tid. Dette er forventet da risikoen generelt øker med lengden av analyseperioden. Differensen i konfidensnivået gir en jevn økning av risikoen med normale markedsforhold. Forskjellen på 95% og 99% konfidensnivå er derfor ikke betraktelig stor gitt at sannsynligheten øker.

År	$Z_\alpha$	$\sigma$	VaR oppgitt i EUR
2023	2,3263	204 811,79	476 453,67
2024	2,3263	473 916,73	5 529 629,11
2025	2,3263	755 677,41	10 798 813,22
2026	2,3263	769 511,92	12 697 678,04

Tabell 7.4: Resultat ved  $Z_{0,01}$

### 7.13 Konfidensnivå 95% med historisk gjentakelse

Som tidligere testet er det klare signaler på at produktene i porteføljen ikke følger disse normalfordelte betingelser og derfor kan man ta i bruk historiske persentiler til å sjekke potensielt risiko basert på observert datamateriell. 4.1 viser en oversikt over z-verdiene for porteføljen basert på gjentakelse av historisk data. Ved å bruke et konfidensnivå på 95% hvor vi antar historisk gjentakelses vil historisk value at risk er definert vi ha følgende parametre med inn i beregningene:

År	$\alpha$	$Z_\alpha$	$\sigma$	$\mu$
2023	0,05	2,3067	204 811,79	3,5466
2024	0,05	2,3067	473 916,73	3,5466
2025	0,05	2,3067	755 677,41	3,5466
2026	0,05	2,3067	769 511,92	3,5466

Tabell 7.5: Parameter ved  $Z_{0,05}$

Dette gir oss et resultat på:

$$VaR_t = 472439,35_{EUR}$$

$$VaR_{t+1} = 5483039,79_{EUR}$$

$$VaR_{t+2} = 10707828,94_{EUR}$$

$$VaR_{t+3} = 12590695,07_{EUR}$$

Basert på den valgte sikringsgraden som KIKS har satt kombinert med volumet er det estimert en value at risk på EUR 12.590.695,07 ved et konfidensintervall på 95% med tilhørende signifikantnivå  $\alpha = 0.05$ . Med kurs satt 10.05.2024 tilsvarer dette NOK 146.807.504,-. Her gir den historiske persentilen lavere resultat enn ved normalfordelte markedsforhold.

År	$Z_\alpha$	$\sigma$	<b>VaR oppgitt i EUR</b>
2023	1,6446	204 811,79	472 439,35
2024	1,6446	473 916,73	5 483 039,79
2025	1,6446	755 677,41	10 707 828,94
2026	1,6446	769 511,92	12 590 695,07

Tabell 7.6: Resultat ved  $Z_{0,05}$

## 7.14 Konfidensnivå 99% med historisk gjentakelse

Ved et konfidensnivå på 99 prosent vil alle parametrene være like utenom signifikantnivået. Vi vil ha følgende parametre med inn i estimeringen av VaR:

År	$\alpha$	$Z_\alpha$	$\sigma$	$\mu$
2023	0,01	10,1064	204 811,79	3,5466
2024	0,01	10,1064	473 916,73	3,5466
2025	0,01	10,1064	755 677,41	3,5466
2026	0,01	10,1064	769 511,92	3,5466

Tabell 7.7: Parameter ved  $Z_{0,01}$

Dette gir oss et resultat på:

$$VaR_t = 2069909.89_{EUR}$$

$$VaR_{t+1} = 24022973.67_{EUR}$$

$$VaR_{t+2} = 46914467.60_{EUR}$$

$$VaR_{t+3} = 55163914.12_{EUR}$$

Basert på de samme betingelseene som tidligere rundt sikringsgraden, er det estimert en value at risk på EUR 55 163 914.12 ved et konfidensintervall på 99% med tilhørende signifikantnivå  $\alpha = 0.01$ . Med kurs satt 10.05.2024 tilsvarer dette NOK 643.211.237,-. Her vil det være nødvendig å påpeke at ekstrem verdi i data ikke er ekskludert i beregningene av den historiske persentilen. Når signifikantnivået da øker vil vi inkludere de verste tenkelige utfallene. Dette gjør at ekstremverdiene i dette tilfellet vil ha stor betydning for risikoresultatet.

År	$Z_\alpha$	$\sigma$	<b>VaR oppgitt i EUR</b>
2023	10.1064	204 811,79	2 069 909,89
2024	10.1064	473 916,73	24 022 973,67
2025	10.1064	755 677,41	46 914 467,60
2026	10.1064	769 511,92	55 163 914,12

Tabell 7.8: Resultat ved  $Z_{0,01}$

## 7.15 Vurdering av resultatet

Vi ser tydelig forskjell ved bruk av ulike antagelsene knyttet til de fremtidige markedsforholdene. Ved normale markedsforhold og fordeling av data vil vi få et lavere estimat i alle tilfellene for  $\alpha$ . Ved bruk av historisk persentil vil vi ha noe usikkerhet da vi antar gjentakelse av den stokastiske prosessen. Basert på at vi tidligere har vist at prosessen er uten hukommelse av tidligere utfall, kan den historiske fordelingen ha en viss usikkerhet ved seg. Likvill gir begge et tallbasert resultat som kan gi en indikasjon på potensiell risiko av porteføljen.

I oppgaven er det testet for to ulike signifikantnivåer  $\alpha = 0,05$  og  $\alpha = 0,01$  som vil si en konfidensnivå på tilhørende 95% og 99%. Valget av konfidensnivå er en balanse mellom presisjon og sikkerhet. Et høyere konfidensnivå gir mer sikkerhet fordi det reduserer sannsynligheten for at det faktiske tapet vil overstige det estimerte VaR. Likvill kan det også føre til overestimering av risiko. Ved lavere signifikantnivå tar vi hensyn til mer ekstreme utfall i beregningene og det potensielle tapet gitt i VaR er derfor høyere og kan gi overestimering som en konsekvens av økt sikkerhet.

I beregningene av den historiske persentilen er det ikke tatt høyde for ekstrem verdier. Dette vil naturligvis påvirke resultatet. Spotpersentilen vil naturligvis gi økt totalpersentil for porteføljen og gi merkbar økning på den totale value at risk beregningen. Avkastningen til produktene viser økt spredning i observasjonene og ved økt konfidensnivå hvor vi antar mer ekstreme tilfeller vil dette ha stor betydning for beregningens resultat.

Ettersom at de ekstreme tilfellene ikke er tatt høyde for i beregningene av historiske persentiler anbefales det å bruke et signifikantnivå på  $\alpha = 0,05$  for å ikke inkludere ekstremverdiene som du finner i observasjonenes spredning og derfor forhindre overestimering. Gitt at observasjonene viser antydning til å ikke være normalfordelte er det den historiske persentilen som anbefales. Dette gir en differanse på EUR 3 612 312,83 som med en kurs på 11,66 gir en forskjell på NOK 42 119 567,59. Dette er en merkbar forskjell men du inkluderer større potensiale for spredning i data. Dersom det ikke er ønskelig å anta historisk gjentakelse anbefales det et økt konfidensnivå ved antagelse av normale markedsforhold. Ved valg av 99% konfidensnivå på normalfordelt antagelse og 95% på historisk, vil vi stå med den differansen på EUR 106 982,97 som tilsvarer NOK 1 247 421,43. Det er da normalfordelt antagelse som gir høyest VaR resultat.

# Oppsummering

I denne oppgaven har vi gjennom en kombinasjon av teori og praksis vist hvordan avansert matematikk kan brukes til å takle reelle utfordringer innen for risikovurdering av finansielle instrumenter, i vårt tilfelle knyttet til KIKS sin kraft portefølje. Det er gitt en innføring i grunnleggende sannsynlighetsteori kombinert med stokastisk analyse for å kunne utføre risikovurderinger for en 4 dimensjonal portefølje bestående av stokastiske Ornstein-Uhlenbeck. Prosesser er gitt på formen:

$$dX_t = \theta(\mu_t - X_t)dt + \sigma dB_t$$

hvor  $X_t, \mu, B_t \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  og  $\sigma \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Ved bruk av Itô kalkulus er det utarbeidet matematiske definisjoner og formeler for variansen og kovariansens mellom gjennomsnittet av to Ornstein-Uhlenbeck prosesser som kan anvendes uavhengige av parameterenes verdi.

Oppgaven har itillegg gitt en anvendelse av de matematiske beskrivelsene i python. Den har hatt fokus på å kombinere det matematiske språket med programmeringsmulighetene som teknologi gir.

Det er gitt en matematisk innføring i risikoanalyser som brukes innenfor finansteori knyttet til value at risk og ved bruk av ulike konfidensnivå er det basert på resultatene gitt en anbefaling om å bruke en kombinasjon av historisk- og varians-kovarians metode for å estimere risiko relatert til kraftmarkedet. Basert på analysens resultat anbefales det å bruke historisk persentil men med lavere konfidensnivå for å unngå overestimering som en konsekvens av å inkludere ekstremtilfeller. Dersom det ikke er ønskelig å anta historisk gjentakelse anbefales det et økt konfidensnivå ved antagelse av normale markedsforhold i forbindelse med risikovurdering på kraftpriser. 95% historisk persentil og 99% normalpersentil gir henholdsvis et resultat på EUR 12 590 645,07 og EUR 12 697 678,04. Ved kurs satt 10.05.2024 til 11,66 gir dette et resultat på NOK 146.807.504,- og NOK 148.054.925,-. Ved valg av 99% konfidensnivå på normalfordelt antagelse og 95% på historisk, vil vi stå med den differanse på EUR 106 982,97 som tilsvarer NOK 1 247 421,43. Totalt sier analysen at reservekapitalbehovet bør ligge på omlag EUR 12 600 000.

Det kunne blitt inkludert en forward kurs på EURNOK for å gi et mer nøyaktig NOK resultat, men da oppgaven har det matematiske hovedfokus er sluttresultatet gitt i samme valuta som produktprisen. For å estimere en markedsverdi på porteføljen er det gjennomsnittet av  $\mu$  for de langsiktige avtalene som er brukt. For å inkludere den sesongbaserte variasjonene som vi finne ved spotprisen kunne dette være inkludert i analysen for et mer nøyaktig resultat. Basert på at det totale gjennomsnittet av spot også ligger nærme årskontraktene, og at analyseperioden går over 4 år, inkluderes sesongvariasjonen for hele året og derfor er det valgt å se bort fra dette i denne oppgaven. Likvill finnes det rom for forbedringer i analysen ved å inkludere dette.

# Python Skript

## A.1 Konfidensintervall

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.stats import norm
4
5 mu = 0
6 sigma = 1
7 conf_int = 0.95
8
9 # Generer data for normalfordelingen
10 x = np.linspace(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, 100)
11 y = norm.pdf(x, mu, sigma)
12
13 # Beregn konfidensintervallet
14 ki_venstre = mu - sigma * norm.ppf((1 + conf_int) / 2)
15 ki_høyre = mu + sigma * norm.ppf((1 + conf_int) / 2)
16
17 # Generer data for konfidensintervallet
18 x_ki = np.linspace(ki_venstre, ki_høyre, 100)
19 y_ki = norm.pdf(x_ki, mu, sigma)
20
21 # Tegn normalfordelingen
22 plt.plot(x, y, label='$f(x)$')
23
24 # Fyll konfidensintervallet med grått
25 plt.fill_between(x_ki, y_ki, color='gray', alpha=0.5)
26
27 # Legg til tekst i det grå området
28 plt.text(mu, max(y)/2, '$1-\\alpha$', ha='center')
29
30 # Legg til merkelapper for  $-Z_{\\alpha/2}$ ,  $Z_{\\alpha/2}$  og  $\\mu$ 
31 plt.xticks([ki_venstre, mu, ki_høyre], ['$-Z_{\\alpha/2}$', '$\\mu$', '$Z_{\\alpha/2}$'])
32
33 # Fjern y-aksen
34 plt.gca().get_yaxis().set_visible(False)
35
36 # Legg til legenden
37 plt.legend()
38
39 # Vis grafen
40 plt.show()
```

---

## A.2 Historisk signifikantnivå

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import pandas as pd
3
4
5
6 def HistoriskZ(csv_fil, kolonne, vekt):
7     alpha = [0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05]
8     # Les data fra csv-fil
9
10    data = pd.read_csv(csv_fil, usecols=[kolonne], sep=';', decimal=',')
11
12    # Beregn daglige avkastninger og sorter dem i stigende rekkefølge
13    data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)*vekt
14
15    # Beregn rangen for hvert alpha-percentil og velg datapunktet som tilsvarer denne ...
16    # rangen
17    vars = {str(a): [round(data.iloc[int(a * len(data))][kolonne], 4)] for a in alpha}
18
19    return pd.DataFrame(vars)
20
21 Var_Spot=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "Spot",0.2)
22 Var_1=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "1-årskontrakter",0.4)
23 Var_2=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "2-årskontrakter",0.2)
24 Var_3=HistoriskZ("Priser_EUR.csv", "3-årskontrakter",0.2)
25 TotalZ=Var_Spot+Var_1+Var_2+Var_3
26 print(TotalZ)
```

---

## A.3 Z-verdi

---

```
1 import pandas as pd
2 from scipy.stats import norm
3
4 def z_verdi(alpha):
5     data = {}
6     for a in alpha:
7         #Dette beregner z-verdien for den gitte alpha-verdien ved åbruke percent point
8         #function (ppf) fra norm -funksjonen. PPF er inversen til den kumulative ...
9         #fordelingsfunksjonen. Resultatet rundes av til tre desimaler.
10        z_value = round(norm.ppf(1 - a), 4) # Beregn z-verdien for hvert alpha
11        data[str(a)] = [z_value]
12    df = pd.DataFrame(data)
13    return df
14
15 alpha_values = [0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05,0.1]
16 z_values_df = z_verdi(alpha_values)
17 print("Z-verdier for gitt alpha-verdier er:")
18 print(z_values_df)
```

---

## A.4 VaR definisjon

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.stats import norm
4
5 mu = 0
6 sigma = 1
7 alpha = 0.95
8
9 # Generer data for normalfordelingen
10 x = np.linspace(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, 100)
11 y = norm.pdf(x, mu, sigma)
12
13 # Beregn konfidensintervallet
14 ki_venstre = mu - sigma * norm.ppf((1 + alpha) / 2)
15 ki_høyre = mu + sigma * norm.ppf((1 + alpha) / 2)
16
17 # Generer data for konfidensintervallet
18 x_ki = np.linspace(mu - 4*sigma, ki_venstre, 100)
19 y_ki = norm.pdf(x_ki, mu, sigma)
20
21 # Tegn normalfordelingen
22 plt.plot(x, y, label='$f(x)$')
23
24 # Fyll konfidensintervallet med rød farge
25 plt.fill_between(x_ki, y_ki, color='red', alpha=0.5)
26
27 # Legg til en vertikallinje på venstrekvantilen
28 plt.axvline(x=ki_venstre, color='gray', linestyle='--')
29
30 # Legg til tekst i det røde området
31 plt.text(mu, min(y), '$\alpha$ sjanse for at\nutfallet er verre enn VaR', ...
32         ha='center', color='red')
33
34 # Legg til tekst på høyresiden av kvantilen
35 plt.text(mu, max(y)/7, '$(1-\alpha)$ sjanse for bedre\nutfall enn VaR', ha='center')
36
37 # Legg til merkelapper for  $-Z_{\alpha/2}$  og  $\mu$ 
38 plt.xticks([ki_venstre, mu], ['$Z_{\alpha}$', '$\mu$'])
39
40 # Fjern y-aksen
41 plt.gca().get_yaxis().set_visible(False)
42
43 # Legg til legenden
44 plt.legend()
45
46 # Vis grafen
47 plt.show()
```

---



## A.5 Historikk

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import pandas as pd
3
4 def historikk(csv_fil,dato,produkt):
5     data = pd.read_csv(csv_fil,usecols=[dato,produkt],sep=';',decimal=',')
6     data = data.dropna()
7     print(data)
8
9     # Konverter 'dato' kolonnen til datetime
10    data[dato] = pd.to_datetime(data[dato])
11
12    # Sorter data etter dato
13    data = data.sort_values(by=dato)
14    gjennomsnitt=data[produkt].mean()
15    data['Rullende gjennomsnitt'] = data[produkt].rolling(window=45).mean()
16
17    # Plot det rullende gjennomsnittet mot dato
18    plt.figure(figsize=(15, 6))
19
20    plt.plot(data[dato], data[produkt] ,color="gray", label= produkt)
21    plt.plot(data[dato], data['Rullende gjennomsnitt'], color="red", label="Rullende ...
22           gjennomsnitt")
23    plt.axhline(y= gjennomsnitt ,color="black", linestyle="-",label="\u03BC")
24    plt.xlabel('Dato')
25    plt.ylabel('Produktpris')
26    plt.title(produkt)
27    plt.legend()
28    plt.show()
```

---

## A.6 BrownianMotion

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 N = 1000 #Antall tidssteg
5
6 T = 4# Total tidsperiode (år)
7 mu = 0.05# Driftledd
8 sigma = 0.1# Standardavviket /volatilitet
9 theta = 10 # mean reversion rate
10 X0 = 0.05 # initial value
11 S=1# Antall simuleringer
12
13 def simuler_OU(N,T,mu,sigma,theta,X0,S):
14     dt = T/N# Tidssteg
15     OU = np.zeros([S, N])
16
17     # Gjennomgå de gjenværende tidsstegene for hver bevegelse
18     for i in range(S):
19         X = np.zeros(N)
20         X[0] = X0
21         for t in range(1, N):
22             dB = np.sqrt(dt) * np.random.normal() #Genererer en BM
23             dX = theta * (mu - X[t-1]) * dt + sigma * dB
24             X[t] = X[t-1] + dX
25         OU[i] = X
26
27     plt.figure(figsize=(10, 6))
28     for i in range(S):
29         plt.plot(np.linspace(0, T, N), OU[i],label= f"$X_t^{{i}}$")
30
31     plt.title("Ornstein-Uhlenbeck Proses")
32     plt.legend()
33     plt.grid(True)
34     plt.xlabel("Tid")
35     plt.ylabel("Verdi")
36     plt.show()
```

---

## A.7 GeometriskBrownianMotion

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 N = 1000 #Antall tidssteg
5
6 T = 1# Total tidsperiode (år)
7 mu = 0.5# Driftledd
8 sigma = 0.2# Standardavviket /volatilitet
9 S=5# Antall simuleringer
10
11
12 def simuler_GBM(N,T,mu,sigma,S):
13
14     dt = T/N# Tidssteg
15     X = np.zeros([S, N])
16
17     # Gjennomgå de gjenværende tidsstegene for hver bevegelse
18     for i in range(S):
19         dB=np.sqrt(dt)*np.random.normal(size=N)#Genererer en BM
20         GB=np.cumsum(dB) #Konverterer BM til en GBM som inkluderer drift.
21         f=(mu-0.5*sigma**2)*np.linspace(dt,T,N)*sigma*GB
22         X[i]=np.exp(f)
23
24
25     plt.figure(figsize=(10, 6))
26     for i in range(S):
27         plt.plot(np.linspace(dt,T,N),X[i], label= f"$X_t^{\{i\}}$")
28
29
30     plt.title("Geometriske Brownsk bevegelse")
31     plt.legend()
32     plt.grid(True)
33     plt.xlabel("Tid")
34     plt.ylabel("Verdi")
35     plt.show()
```

---

## A.8 Ornstein-Uhlenbeck

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 N = 1000 #Antall tidssteg
5
6 T = 4# Total tidsperiode (år)
7 mu = 0.05# Driftledd
8 sigma = 0.1# Standardavviket /volatilitet
9 theta = 10 # mean reversion rate
10 X0 = 0.05 # initial value
11 S=1# Antall simuleringer
12
13 def simuler_OU(N,T,mu,sigma,theta,X0,S):
14     dt = T/N# Tidssteg
15     OU = np.zeros([S, N])
16
17     # Gjennomgå de gjenværende tidsstegene for hver bevegelse
18     for i in range(S):
19         X = np.zeros(N)
20         X[0] = X0
21         for t in range(1, N):
22             dB = np.sqrt(dt) * np.random.normal() #Genererer en BM
23             dX = theta * (mu - X[t-1]) * dt + sigma * dB
24             X[t] = X[t-1] + dX
25         OU[i] = X
26
27     plt.figure(figsize=(10, 6))
28     for i in range(S):
29         plt.plot(np.linspace(0, T, N), OU[i],label= f"$X_t^{{i}}$")
30
31     plt.title("Ornstein-Uhlenbeck Proses")
32     plt.legend()
33     plt.grid(True)
34     plt.xlabel("Tid")
35     plt.ylabel("Verdi")
36     plt.show()
```

---

## A.9 Grunndata

---

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import scipy.stats
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6
7 def Grunndata(csv_fil,kolonne,produkt):
8     data = pd.read_csv(csv_fil,usecols=[kolonne],sep=';',decimal=',')
9     maksimum = np.max(data).item()
10    minimum = np.min(data).item()
11    data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
12
13
14    observasjoner = len(data)
15
16    skjevhet = scipy.stats.skew(data).item()
17    # False gir Pearson's defenisjon på kurtose.
18    kurtose = scipy.stats.kurtosis(data, fisher=False).item()
19    JarqueBera = scipy.stats.jarque_bera(data)
20
21    #Splitte opp de to tallresultatene
22    JB, JB_p = JarqueBera
23    # Oppretter en tabell med alle verdiene
24    df = pd.DataFrame({'Parameter': ['Observasjoner', 'Maksimum', 'Minimum', ...
25        'Skjevhet', 'Kurtose', 'JarqueBera Verdi', 'JarqueBera P-verdi'], 'Verdi': ...
26        [observasjoner, maksimum, minimum, skjevhet, kurtose, JB, JB_p]})
27
28    # Plotter tabellen
29    figur, akse =plt.subplots(1,1)
30    tabell_data = []
31
32    for row in df.itertuples(index=False):
33        tabell_data.append(row)
34    tabell = plt.table(cellText=tabell_data, colLabels=df.columns, cellLoc = 'left', ...
35        loc = 'center')
36    tabell.auto_set_font_size(False)
37    tabell.set_fontsize(10,)
38    tabell.scale(1, 1.5)
39    cells = tabell.get_celld()
40
41    #Formater øverste Rad
42    for i in range(len(df.columns)):
43        cells[(0, i)].set_facecolor('lightgray')
44
45    akse.set_title(produkt)
46    akse.axis('off')
47    plt.show()
```

---

## A.10 QQ-plot

---

```
1 import statsmodels.api as sm
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import seaborn as sns
5 def qqplot(csv_fil,kolonne,produkt,xlim,ylim):
6     data = pd.read_csv(csv_fil,usecols=[kolonne],sep=';',decimal=',')
7     data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
8     sm.qqplot(data, stats.norm,line='45')
9
10    sns.set()
11    plt.ylim(-ylim, ylim)
12    plt.xlim(-xlim, xlim)
13    plt.grid(True)
14    plt.xlabel('Forventet kvantil')
15    plt.ylabel('Observert kvantil')
16    plt.title(f'QQ-plot {produkt}, daglig prisendringer')
17
18    plt.show()
```

---

## A.11 Fordelingstest

---

```
1 import statsmodels.api as sm
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import seaborn as sns
5 import scipy.stats as stats
6 def qqplotlognorm(csv_fil,kolonne,produkt):
7     data = pd.read_csv(csv_fil)
8     data = data.diff().dropna().sort_values(by=[kolonne], ascending=True)
9     sm.qqplot(data, stats.lognorm, fit=True, line='45')
10
11    sns.set()
12
13    plt.grid(True)
14    plt.xlabel('Forventet kvantil')
15    plt.ylabel('Observert kvantil')
16    plt.title(f'QQ-plot {produkt}, daglig prisendringer')
17
18    plt.show()
```

---

## A.12 ValueAtRisk

---

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import math
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import tabulate
6 import scipy
7
8
9 sigma=[[41.04296765, -0.07172793, -0.09372714, -0.09403635],
10        [-0.07172793, 0.85720196, 0.58126776, 0.45597803],
11        [-0.09372714, 0.58126776, 0.52561022, 0.40912495],
12        [-0.09403635, 0.45597803, 0.40912495, 0.37393444]]
13 sigma = np.array(sigma) # Konverterer listen til en NumPy-matrise
14
15 sigma = scipy . linalg . sqrtm (sigma/3258)*np.sqrt(252)
16 print(sigma)
17
18 theta = [0.03824143, 0.0037009, 0.00263384, 0.00202072]
19
20 print(theta)
21
22
23
24 volum = [191600, 383200, 191600, 191600, 207200, 414400, 207200, 224400, 448800, 224400]
25
26
27
28 def var(t1, t2, s11, theta1):
29     return (((s11 ** 2) / (theta1 ** 2)) * (((math.exp(2 * theta1 * t1) - 1) * ...
30         ((math.exp(-theta1 * t1) - math.exp(-theta1 * t2)) ** 2)) / (2 * theta1) + ...
31         (1 - math.exp(-2 * theta1 * (t2 - t1))) / (2 * theta1) - (2 * (1 - ...
32         math.exp(-theta1 * (t2 - t1)))) / theta1 +(t2 - t1)))
33
34 def covarians(t1, t2, s11, s12, s21, s22, theta1, theta2):
35     return ((s11 * s21 + s12 * s22) / (theta1 * theta2)) * (((math.exp((theta1 + ...
36         theta2) * t1) - 1) * (math.exp(-theta1 * t2) - math.exp(-theta1 * t1)) * ...
37         (math.exp(-theta2 * t2) - math.exp(-theta2 * t1))) / (theta1 + theta2) - (1 ...
38         - math.exp(-theta2 * (t2 - t1))) / theta2 - (1 - math.exp(-theta1 * (t2 - ...
39         t1))) / theta1 + (1 - math.exp(-(theta1 + theta2) * (t2 - t1))) / (theta1 + ...
40         theta2) + t2 - t1)
41
42 kov = np.zeros((10, 10))
43 vol = np.zeros((10,10))
44 for n in range(4):
45     for m in range(4):
46         if n == m:
47             kov[n][n] = var(0, 1, sigma[n][n], theta[n])
48             vol[n][n] = volum[n] * volum[n]
49         else:
50             kov[n][m] = covarians(0, 1, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
51                 sigma[n][n], theta[n], theta[m])
52             vol[n][m] = volum[n] * volum[m]
53
54 for n in range(3):
55     for m in range(3):
56         if n == m:
57             kov[n+4][n+4] = var(1, 2, sigma[n][n], theta[n])
58             vol[n+4][n+4] = volum[n+4] * volum[n+4]
```

```

50     else:
51         kov[n+4][m+4] = covarians(1, 2, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
                    sigma[n][n], theta[n], theta[m])
52         vol[n+4][m+4] = volum[n+4] * volum[m+4]
53
54     for n in range(2):
55         for m in range(2):
56             if n == m:
57                 kov[n+7][n+7] = var(2, 3, sigma[n][n], theta[n])
58                 vol[n+7][n+7] = volum[n+7] * volum[n+7]
59             else:
60                 kov[n+7][m+7] = covarians(2, 3, sigma[m][m], sigma[m][n], sigma[n][m], ...
                    sigma[n][n], theta[n], theta[m])
61                 vol[n+7][m+7] = volum[n+7] * volum[m+7]
62
63     kov[9][9] = var(3,4,sigma[0][0], theta[0])
64     vol[9][9] = volum[9] * volum[9]
65
66     def Kovarianssjekk(n, sigma, theta,T1,T2):
67         varians_test = var(T1, T2, sigma[n][n], theta[n])
68         kovarians_test = covarians(T1, T2, sigma[n][n], 0, sigma[n][n], 0, theta[n], ...
                    theta[n])
69
70         print(f"Varians for n={n}: {varians_test}")
71         print(f"Kovarians for n={n}: {kovarians_test}")
72
73     for n in range(4):
74         Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 0, 1)
75     for n in range(3):
76         Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 1, 2)
77     for n in range(2):
78         Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 2, 3)
79     for n in range(1):
80         Kovarianssjekk(n, sigma, theta, 3, 4)
81
82
83
84     print("Kovariansmatrisen:")
85     print(kov)
86     print('')
87     print("Volumsmatrisen:")
88     print(vol)
89     MV=3.54660842908571
90     konf=2.3263
91     ValueAtRisk=0
92     totalvar=0
93     for n in range(3):
94         for m in range(3):
95             totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
96             ValueAtRisk = konf*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(1))
97     print("Totalvariansen for år t er:",totalvar)
98     print("Standardavvik for år t er:",math.sqrt(totalvar))
99     print("VaR analyse t:",ValueAtRisk)
100    totalvar=0
101
102    for n in range(6):
103        for m in range(6):
104            totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
105            ValueAtRisk =MV* konf*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(2))
106    print("Totalvariansen for år t+1 er:",totalvar)
107    print("Standardavvik for år t+1 er:",math.sqrt(totalvar))

```



```

108 print("VaR analyse t+1:",ValueAtRisk)
109 totalvar=0
110
111 for n in range(8):
112     for m in range(8):
113         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
114         ValueAtRisk =MV* konf*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(3))
115 print("Totalvariansen for år t+2 er:",totalvar)
116 print("Standardavvik for år t+2 er:",math.sqrt(totalvar))
117 print("VaR analyse t+2:",ValueAtRisk)
118 totalvar=0
119
120 for n in range(9):
121     for m in range(9):
122         totalvar = totalvar + vol[n][m]*kov[n][m]
123         ValueAtRisk = MV*konf*(math.sqrt(totalvar)*math.sqrt(4))
124 print("Totalvariansen for år t+3 er:",totalvar)
125 print("Standardavvik for år t +3 er:",math.sqrt(totalvar))
126 print("VaR analyse t+3:",ValueAtRisk)
127
128
129
130 # ValueAtRisk1 = 1.645*(math.sqrt(totalvar1)*math.sqrt(1))
131 # ValueAtRisk2 = 1.645*(math.sqrt(totalvar2)*math.sqrt(2))
132 # ValueAtRisk3 = 1.645*(math.sqrt(totalvar3)*math.sqrt(3))
133 # ValueAtRisk4 = 1.645*(math.sqrt(totalvar4)*math.sqrt(4))
134
135 # print("Totalvariansen for år t er:",totalvar1)
136 # print("VaR analyse t:",ValueAtRisk1)
137
138 # print("Totalvariansen for år t-t+1 er:",totalvar2)
139 # print("VaR analyse t+1:",ValueAtRisk2)
140
141 # print("Totalvariansen for år t+2 er:",totalvar3)
142 # print("VaR analyse: t+2",ValueAtRisk3)
143
144 # print("Totalvariansen for år t+3 er:",totalvar4)
145 # print("VaR analyse:t+3",ValueAtRisk4)
146
147
148
149 # totalvar1=math.sqrt(totalvar1)*math.sqrt(1)
150 # valueAtRisk5=1.645*totalvar1
151 # print(valueAtRisk5)
152
153 # totalvar2=math.sqrt(totalvar2)*math.sqrt(2)
154 # valueAtRisk6=1.645*totalvar2
155 # print(valueAtRisk6)
156
157 # totalvar3=math.sqrt(totalvar3)*math.sqrt(3)
158 # valueAtRisk7=1.645*totalvar3
159 # print(valueAtRisk7)
160
161 # totalvar4=math.sqrt(totalvar4)*math.sqrt(4)
162 # valueAtRisk8=1.645*totalvar4
163 # print(valueAtRisk8)

```

---

# Bibliografi

- [1] S. Bell. *Quantitative Finance for dummies*. John Wiley Sons,Ltd, 2016. ISBN: 978-1-118-76946-1.
- [2] F. E. Benth. *Matematisk finans: innføring i opsjonsteori med stokastisk analyse*. Universitetsforlaget AS, 2001. ISBN: 82-15-00187-4.
- [3] Gary Strangman SciPy developers. *Scipy v1.13.0: scipy/stats/\_stats\_py.py*. 2016. URL: [https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/\\_stats\\_py.py#L1960-L2121](https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/_stats_py.py#L1960-L2121) (sjekket 10.02.2024).
- [4] Gary Strangman SciPy developers. *Scipy.stats.\_stats\_py*. 2016. URL: [https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/\\_stats\\_py.py#L1194-L1302](https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/_stats_py.py#L1194-L1302) (sjekket 10.02.2024).
- [5] SciPy developers. *scipy.linalg.\_matfuncs\_sqrtm*. 2021. URL: [https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.9.0/scipy/linalg/\\_matfuncs\\_sqrtm.py#L117-L194](https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.9.0/scipy/linalg/_matfuncs_sqrtm.py#L117-L194).
- [6] Statsmodels developers. *Source code for Statsmodels.graphics.gofplots*. 2023. URL: [5Curl%7Bhttps://www.statsmodels.org/stable/\\_modules/statsmodels/graphics/gofplots.html#qqplot%7D](https://www.statsmodels.org/stable/_modules/statsmodels/graphics/gofplots.html#qqplot%7D) (sjekket 10.02.2024).
- [7] Elektra Energy. *Det finansielle kraftmarkedet - hva er det egentlig?* [2024-05-10]. URL: <https://www.elektra-energy.com/no/magasinet/fakta-om-elektrisitet/det-finansielle-kraftmarkedet-hva-er-det-egentlig/>.
- [8] Konesjonskraft IKS. *Måndesrapport mars 2023*. 2023. URL: <https://konesjonskraft.no/okonomi-og-rapportar/manadsrapportar/arkiv-2023/> (sjekket 15.04.2023).
- [9] Konesjonskraft. *Om KIKS: Organisering*. 2021. URL: <https://konesjonskraft.no/om-kiks/organisering/> (sjekket 20.05.2023).
- [10] Konesjonskraft. *Om KIKS: Styringsdokument - Risikostrategi*. 2020. URL: <https://konesjonskraft.no/om-kiks/styringsdokument/risikostrategi/> (sjekket 20.05.2023).
- [11] A. Kristiansen Ø. Wikan. *Sannsynlighetsregning og statistikk for høyrere utdanning*. Fagbokforlaget, 2016. ISBN: 978-82-450-1938-4.
- [12] Store norske leksikon. *Volatilitet - finans*. 2024. URL: [https://snl.no/volatilitet\\_-\\_finans](https://snl.no/volatilitet_-_finans) (sjekket 10.02.2024).
- [13] Nordnet. *EUR/NOK*. URL: <https://www.nordnet.no/market/indicator/eur-nok> (sjekket 10.05.2024).
- [14] Nordnet. *Slik fungerer futurekontrakter*. 2022. URL: <https://www.nordnet.no/blogg/slik-fungerer-futurekontrakter/> (sjekket 14.05.2024).
- [15] Travis Oliphant og SciPy Developers. *SciPy 1.13.0: Continuous Distributions*. 2002–2011. URL: [https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/\\_continuous\\_distns.py](https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.13.0/scipy/stats/_continuous_distns.py) (sjekket 10.04.2024).
- [16] Regjeringen. *7. Kraftmarkedet*. 2008. URL: <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/fakta-2008-om-energi-og-vannressurser-i-/id536186/>.
- [17] Margaret Myers Robert van de Geijn. *Chapter 09: Schur's Spectral Decomposition*. 2024. URL: <https://www.cs.utexas.edu/users/flame/laff/alaff/chapter09-schur-spectral-decomposition.html>.

- [18] Knut A. Rosvold. *Konsesjonskraft*. 2022. URL: <https://snl.no/konsesjonskraft> (sjekket 20.05.2023).
- [19] J. R. M. Röman. *Analytical Finance Volume 1*. Palgrave Macmillan Cham, 2017. ISBN: 978-3-319-34026-5.
- [20] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. Springer, 2000. ISBN: 0-387-40101-6.
- [21] Statnett. *Slik fungerer kraftsystemet*. 2024-05-14. 2018. URL: <https://www.statnett.no/om-statnett/bli-bedre-kjent-med-statnett/slik-fungerer-kraftsystemet/>.
- [22] Le Quyen. Vu. *Variasjon i strømpriser*. 2023.
- [23] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. sixth. Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-04758-2.