Ungdomsskoleelevers perspektiv på lineære likninger

Hvordan forklarer ungdomsskoleelever lineære likninger for hverandre, når læreren er fraværende?

KRISTIAN NYHUS

VEILEDER
Niclas Larson

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for Teknologi og Realfag
Institutt for matematiske fag
Emnekode: MA 506

Master

Forord

Etter 5 år på Universitet i Agder, markerer denne masteroppgaven slutten på studietiden. Det er har vært en innholdsrik studietid som har gitt meg mange livserfaringer og læring.

Først vil jeg takke Niclas Larson som veileder, spesielt for tålmodigheten og kompetansen han innehaver. Dette har vært en god trygghet under arbeidet med denne masteroppgaven. Deretter vil jeg takke elever som deltok i datainnsamlingen og deres lærere som ønsket å delta.

Tusen takk til medstudenter som har sittet time inn og time ut på lesesalen med masteroppgaver samme med meg, dere har vært gode å ha og god støtte i skrivingen.

Tilslutt vil jeg takke familie og nære venner som har støttet meg og hatt forståelse for at jeg tidvis har vært utilgjengelig under arbeidet med denne masteroppgaven.

Kristiansand, mai, 2024

Kristian Nyhus

Sammendrag

I denne masteroppgaven innenfor matematikkdidaktikk, har algebra og likninger som hovedtema. I studien undersøker jeg lineære likninger i matematikkundervisningen på ungdomsskoleelever. Hensikten med studien er å undersøke elever forståelse av likninger. Av denne grunn kom jeg frem til forskningsspørsmålet:

«Hvordan forklarer ungdomsskoleelever stegene i lineære likninger for hverandre, når læreren er fraværende?»

Studien er en kvalitativ studie. Denne bygger på teoretisk rammeverk som er basert på drøfting av algebra, ulike forståelser, likningsløsning og likhetstegnet. Analyseverktøyet benyttet i denne oppgaven består av 17 konkrete koder som er en videreutvikling av analyseverktøyet til Larson (2024), som er tidligere benyttet i flere relaterte studier (Andrews & Xenofontos, 2017; Andrews & Larson, 2019).

I studien har jeg gjennomført datainnsamling i to klasser på ungdomstrinnet.
Datainnsamlingen bestod av en skriftlig besvarelse fra hver elev, og deretter gruppeintervju i etterkant av den skriftlige besvarelsen. Gruppeintervjuene bestod av tre elever fra hver klasse.
Oppgaven elevene fikk bestod av likningen $x + 5 = 4x - 1$.
Elevene fikk i oppgave å forklare skriftlig hvordan de ville forklart likningsløsningen til en medelev, hvis læreren var fraværende.
Gruppeintervjuene var semi-strukturerte, hvor hensikten var å få mer utfyllende svar fra elevene og deres tankegang. Datainnsamlingen ble gjort ved elevbesvarelser og lydopptak.

Fra resultatene ser jeg mangel på forklaring ved hensikten av likningsløsning, og hva den ukjente representerer hos en stor andel av elevene. For å få til en større grad av helhetlig forståelse er det behov for større grad av dybdelæring og konseptuell forståelse for likninger og likningsløsning. Dette krever tid og ressurser i starten av nye emner, men vil lønne seg på lang sikt.

Nøkkelord: Algebra, lineære likninger, likningsløsning, likhetstegn, elevbesvarelser, kvalitativ forskning

Abstract

In this master's thesis, the focus is on algebra and equations within the field of mathematics education. The study investigates linear equations in the mathematics education of secondary school students in Norway. The purpose of the study is to examine students' understanding of equations. For this reason, I arrived at the research question:

"How do secondary school students explain the steps in linear equations to each other when the teacher is absent?"

The study is qualitative, built upon a theoretical framework discussing algebra, various understandings, equation solving, and the equal sign. The analysis tool used in this study consists of 17 low-inference codes, which are an adaptation of Larson's analysis tool (2024), previously employed in several related studies (Andrews & Xenofontos, 2017; Andrews & Larson, 2019).

Data collection for the study involved two secondary school classes in Norway. Data collection included a written response from each student followed by a group interview after the written response. Each group interview consisted of three students from each class. The task given to the students was the equation x+5=4x-1. The students were tasked with explaining in writing how they would explain the solution of the equation to a classmate if the teacher were absent. The group interviews were semi-structured with the aim of obtaining more detailed answers from the students and understanding their thought processes. Data collection was conducted through student responses and audio recordings.

From the results, I observe a lack of explanation regarding the purpose of equation solving and what the unknown represents among a significant portion of the students. To achieve a higher level of comprehensive understanding, there is a need for greater depth of learning and conceptual understanding of equations and equation solving. This requires time and resources at the outset of new topics but will pay off in the end.

Keywords: Algebra, linear equations, equation solving, equal sign, student responses, qualitative research

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av matematikk

Elever i den norske skolen gjorde det gjennomsnittlig dårligere i matematikk fra 2018 til 2022. Elevene har gått fra 501 poeng til 468 poeng på PISA statistikken, dette er nedgang på 33 poeng på 4 år. Statistikken fra 2022 er en samling over 15-åringer fra 81 forskjellige land sine ferdigheter i lesing, matematikk og naturfag. Poengene er basert på en skala som landene måles ut fra, hvor gjennomsnittet er 500 poeng. Et aspekt som kommer frem i rapporten fra PISA er at andelen norske elever som presenterer lavt i matematikk har økt fra 19% til 31% i perioden fra 2018-2022. Tendensene i PISA undersøkelsene er at norske elever stadig presterer svakere i matematikk (Jensen et al., 2023).

1.2 En del av fagmiljø i skolen og støtte elever

Å skrive en masteroppgave i matematikk gir meg dybde, kunnskap og tilskudd til fagmiljø på skolen/skoler som jeg vil arbeide på i fremtiden. Det å være deltakende og kunne gi et annet perspektiv på undervisning i læreryrket vil være med på å gi meg mestringsfølelse. Sistnevnte er noe jeg ser på som viktig i skolen og for elever, det å oppleve mestringsfølelse. Å være med på å forske og undersøke hvordan elever tenker matematikk, er en mulighet jeg har for å lage treffende undervisningsopplegg som igjen kan være til at elevene får mer læring, og opplever mestringsfølelse. Jeg ønsker å være med på å løfte elever i deres matematiske forståelse og uttrykkelse. Av denne grunn skriver jeg en mastergrad i matematikk. Dette er et fag som har gitt meg mestringsfølelse og vært givende, både i form av teoretisk og praktisk matematikk.

Matematikk er et fag som er viktig i dagliglivet, tilnærmet på lik linje som å lese og skrive. Hver gang vi er på butikken for å handle, sjekket været eller lager mat så blir vi møtt av tall, og det er viktig med en god forståelse av tall. Matematikk innebærer forståelse og uttrykkelse. I den nye læreplanen står det «Matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi dem kompetanse i utforskning og problemløsning», det sier med andre ord at skolen skal være med på å «ruste» elevene for livet etter grunnskolen. (Kunnskapsdepartementet, 2019).

1.3 Tilknytning læreplanen

I læreplanen for matematikk (MA01-05) som ble fastsatt i 2019, kommer det frem i kjerneelementene flere aspekter som jeg ser på som relevante og passende for algebra og likninger. Dette kommer frem i både «Utforskning og problemløsning» hvor det sies «Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk (…) Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

I kjerneelementene er det et større fokus på at elevene skal forstå hva de gjør i matematikk og hvorfor de gjør det. Elevene forståelse for matematikk skal løftes frem, regler og resultater skal ha klare begrunnelser og ikke oppfattes som tilfeldige. Det løftes også frem at elevene skal uttrykke seg matematisk med matematisk språk, dette innebærer å bruke begreper, uttrykke sammenhenger og problemer (Kunnskapsdepartementet, 2019). Disse kjerneelementene kan overføres til algebra og likninger, noe som denne oppgaven vil handle om.

1.4 Valg av tema og problemstilling

Noe som har fenget meg innenfor matematikk på lærerstudiet er forklaring og forståelse av likninger. Etter litt undersøkelse dukket det opp flere studier som har undersøkt likninger og likningsforståelse. Det kom flere likheter og ulikheter blant studiene som omhandlet likningsløsning og likningsforståelse (Andrews, 2020; Andrews & Larson, 2019; Andrews & Öhman, 2019; Andrews & Xenofontos, 2017). Felles for studiene var likningen som deltakerne arbeidet med og at de skulle de forklare stegene i likningsløsning for en medstudent. Disse har undersøkt i hovedsak lærerstudenter, disse utvalgene var relevante, men ikke veldig treffende for meg som skal ut i lærerprofesjonen på ungdomstrinnet. Dette motiverte meg til å undersøke dette på ungdomsskoleelever.

I denne oppgaven ønsker jeg å gå i dybden på hvordan ungdomsskoleelever arbeider med algebra, nærmere bestemt lineære likninger. Av dette kom jeg frem til forskningsspørsmålet mitt,

«Hvordan forklarer elever på ungdomstrinnet stegene i lineære likninger for hverandre, når læreren er fraværende».

Det jeg undersøkte var hvilke matematiske formuleringer elevene hadde, hvilke løsningsmetoder elevene benyttet seg av og om dette kan si noe om deres forståelse av lineære likninger.

1.5 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven vil først presentere teoretisk rammeverk som er relevant for tema av denne oppgaven. I teoretisk rammeverk vil jeg deretter trekke frem nærliggende studier som jeg ser på som relevante. Etter dette vil jeg presentere metode, i dette kapittelet vil jeg først redegjøre for kontekst og deltakere, undervisningsopplegg, analyseverktøy for data, troverdighet, gyldighet og tilslutt etiske aspekter.
I resultater vil jeg legge frem funn fra undersøkelsen. I drøfting vil jeg reflektere rundt funnene som kommer frem i oppgaven og avslutningsvis drøfte disse funnene opp mot tidligere forskning. I avslutningen kommer det en konklusjon hvor jeg oppsummerer hovedfunnene i studien, hvilken betydning disse funnene har for min fremtidige lærerpraksis og hva som kan være interessant å undersøke i videre forskning. Tilslutt kommer egne refleksjoner om masteroppgaven, og arbeidet med denne.

2. Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet legger jeg frem teoretiske rammeverk for studien. Først redegjør for algebra og likninger. Deretter redegjør jeg for overgangen aritmetikk til algebra, ulike typer kunnskap, kognitiv belastning og likhetstegnet. Etter dette redegjør jeg for ulike typer forståelse og læring før jeg tilslutt trekker frem nærliggende studier.

2.1 Algebra

Det er flere ulike tolkninger om hva algebra er, Kongelf (2015) har i sine litteraturstudie samlet sammen en tolkning av flere definisjoner. Han har samlet sammen essensen av forklaringene til flere forskere innenfor matematikk (Jakobsson-Åhl, 2006; Kieran, 1996, 2004; Lins, 1990 i Kongelf, 2015). Her har han resonnert seg frem til at vi kan dele det i fire hovedgrupper. Det er operasjonell symbolisme, tenkemåte, generalisert tallære og strukturer. Kieran (2004) legger også frem at finnes det flere forskjellige forklaringer for hva algebra kan være. Blant de ulike formuleringene for hva algebra kan være trekker Kieran (2004) frem først Usiskin (1988) som mener det består av fire aspekter. Disse fire aspektene er «generalized arithmetic, the set of procedures used for solving certain problems, the study of relationships among quantities, and the study of structures». Kaput (1995) derimot deler opp algebra i fem deler. Disse er «generalization and formalization; syntactically guided manipulations; the study of structure; the study of functions, relations, and joint variation; and a modeling language» (Kaput, 1995).

Det som spesielt trekkes frem som felles av disse forskerne er at generalisering er en viktig del av algebra. Generalisering utdyper Mason (1996) til å også omhandler å oppdage likheter, å repetere, å klassifisere og å kategorisere (Kongelf, 2015).

Kieran (2004) deler opp og definerer selv algebra i skolen til «generational activites, transformitonal activites og global meta-level activities. Disse vil jeg utdype meg mer om.

Det første aspektet som Kieran (2004) ser på er «generational activities», som jeg vil kalle genererende aktiviteter. Dette aspektet innebærer utformingen av uttrykk og likninger. Her mener hun at generende aktiviteter står for store deler av forståelsen i algebra. Eksempler på dette som Kieran(2004) nevner er:

- Likning med en ukjent, hvor den ukjente er problemet.
- Generelle uttrykk fra geometriske mønstre eller rekker.
- Uttrykk som styrer reglene ved nummeriske forhold.

Det andre aspektet er, «Transformatial activities», som jeg vil kalle transformerende aktiviteter. Denne omhandler regelbaserte aktiviteter (Kieran, 2004). Dette aspektet handler om å endre på form og uttrykk for å beholde likhet på begge sider av likningen. Eksempler er:

- Faktorisering
- Utvidelser
- Addisjon og subtraksjon
- Multiplikasjon og divisjon

Det tredje aspektet er «global meta-level activities», som jeg vil kalle algebraisk tenking. Dette siste aspektet innebærer å bruke algebra som er verktøy for å løse andre matematiske aktiviteter (Kieran, 2004). Her fremheves det at dette er matematiske oppgaver som kunne vært løst uten algebra, men algebra er en viktig del av meningen bak oppgaven. Algebraen alene uten kontekst vil stå uten mening. Eksempler på dette:

- Problemløsing
- Modellering
- Identifisering av mønstre og prediksjoner

Det er ikke et nytt fenomen at algebra drøftes i forbindelse med skolen slik som Kaput ser på algebra i skolen med bekymringsfullt blikk (2008, s.5). Han argumenterer for at elever i den amerikanske skolen ikke starter med algebra tidlig nok, og at det er en viktig del av matematikk. Her mener han at elever ikke kan nok når de er ferdige med grunnskolen. Av flere forslag legges det frem at elever må bli introdusert til algebra tidligere. Algebra må bli en større del av mattepensum, og brukes mer på tvert av fag i grunnskolen. For å oppnå dette trengs er den omveltning og rekonstruksjon av algebra i skolen. Kaput (2008) kommer med flere forslag for å rette dette «algebraproblemet». Først og fremst trengs det er reorganisering av pensum, endring av praktisering av algebra i klasserommene og tilslutt endring i utdanningen av lærere. Dette kan i større grad overføres til den norske skolen ved å se på tallene fra PISA undersøkelsen i 2022 (Jensen et al., 2023).

2.2 Likninger

Likninger er en viktig del av algebra. Likninger brukes for å uttrykke matematiske forhold med variabler og tall. Definisjonen av likninger varierer. I Matematikk for lærere 1 (Birkeland et al., 2005, s.268) forklares det så kort som to uttrykk som er satt lik hverandre. Borowski og Borwein (1989) skriver noe liknende, men i større grad utfyllende ved at de legger til at det er enten matematiske ekvivalente uttrykk på begge sider som gir like verdier på begge sider, eller en betinget likning i form av at det kun sant for visse verdier av en variabel. Hensikten med likningsløsning er å finne verdien for den ukjente. Denne studien holder seg til lineære likninger for å begrense omfanget.

I denne oppgaven er det i hovedsak to metoder for likningsløsning som brukes. Disse to metodene har flere navn, disse blir kalt inversmetoden og balansemetoden eller swap side swap sign og do same to both sides (Andrews & Larson, 2019; Ngu & Phan, 2016). Inversmetoden, også kalt swap side swap sign, kjennetegnes ved at ledd flyttes fra en side av likhetstegnet til den andre, samtidig i denne prosessen endrer leddet fortegn.

$$x + 3 = 5$$
$$x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

Balansemetoden, også kalt do same to both sides, kjennetegnes ved at det samme gjøres på begge sider for å løse likningen. Med dette menes f.eks subtrahere eller addere likt på begge sider av likhetstegnet.

$$x + 3 = 5$$
$$x + 3 - 3 = 5 - 3$$
$$x = 2$$

2.3 Aritmetikk til algebra i forbindelse med likninger

Filloy og Rojano (1989) ser på overgangen fra aritmetikk til algebra. I artikkelen deres tar de for seg likninger med en ukjent på en side av likhetstegnet, deretter likning med en ukjent på begge sider av likhetstegnet. Først og fremst er det ikke mulig å løse en likning med ukjent på begge sider av likhetstegnet uten å bruke algebraiske regneregler (Filloy & Rojano, 1989, s.19). En generell likning som f.eks $ax + b = c$ kan løses ved å bruke invers aritmetikk, det vil si at det er mulig å «se svaret». Eksempel på dette er $x + 2 = 6$, her kan vi ved aritmetikk se at svaret blir 4 uten å måtte bruke algebraiske regneregler. Dette gjelder ikke en likning generell likning som $ax + b = cx + d$, fordi her må man gjennomføre regneoperasjoner på de ukjente. Filloy & Rojano (1989) argumenterer for at hvis man ønsker å innføre grunnleggende algebraiske prinsipper og regler ved å bruke modeller, så består modelleringen av to fundamentale prinsipper. (Filloy & Rojano, 1989, s.24)

Den første er oversettelse. Med dette menes at objekter og operasjoner blir i abstrakte situasjoner blir gitt konkrete uttrykk. Det vil med andre ord si å gi gjøre om abstrakte ideer mer forståelige og konkrete.

Den andre er seperasjon. Dette omhandler at man løsriver seg igjen fra det veldig konkrete og går videre på mer abstrakte situasjoner. Målet er ikke nødvendigvis å finne løsningen, men utregningen. Det å løsrive seg er viktig for å ikke blir for opphengt i det konkrete da det skal bygges på videre for å arbeide med enda mer abstrakte operasjoner i generelle problemer (Filloy & Rojano, 1989, s.25). Det er viktig med god undervisning som støtter elevene og gir de nødvendig støtte/veiledning da det kan oppstå misforståelse og kompetanse «hull» i arbeidet ved å gå fra den ene modelleringen til den andre (Filloy & Rojano, 1989, s.25).

De Lima og Tall (2008, s.17) fremhever at blant det viktigste en lærer kan gjøre i overgangen fra aritmetikk til algebra er å bygge videre på elevers erfaringer. Dette krever at læreren har god kjennskap til elevene sine kunnskaper og erfaringer. Dette kan være krevende, spesielt ved å gå tilbake til tidligere matematikk hvor det er mulighet for å blottgjøre elever sine misoppfatninger.

De Lima og Tall (2008) påpeker viktigheten ved å samle sammen tidligere kunnskap til tenkbare konsepter av ny kunnskap, ved å fokusere på relevante aspekter. Eksempel på dette er ved å samle prosedyrer som får samme svar til en enkel prosess som kan utføres på flere måter. Slik som i algebra at «flytte bytte» og «side side» metoden er to forskjellige prosedyrer som kan få samme svar. Begge to er en prosess av likningsløsning (de Lima & Tall, 2008, s.17).

Å bruke synonymer for den ukjente i læringen fra aritmetikk til algebra kan i noen tilfeller føre til misoppfatninger. Bruke frukt som eksempler i læring av likninger kan være en mulighet for misoppfatninger, da fra elevene sitt perspektiv på det konkrete i tilfeller ser for seg at størrelsen på frukt varierer, og overføre dette til den ukjente (eller x). (de Lima & Tall, 2008, s.7).

I overgangen fra aritmetikk til algebraiske tenking er det viktig å gi mening til de algebraiske symbolene. Bruke dem i praktiske situasjoner slik at det gir mening for oss. Hva det ligger i at det gir mening for oss individuelt, dette er på bakgrunn av at vi har ulike tankeganger, og forskjellige erfaringer og kunnskaper vi bygger videre på samtidig relaterer til (de Lima & Tall, 2008, s.9).

2.4 Konseptuell og prosedyrekunnskap innenfor likninger

Ngu & Phan (2016, s.64) ser på hva som er konseptuell kunnskap, og hva som er prosedyrekunnskap innenfor likninger. Ved å dele inn likningsløsing i 2 deler, metoder, bruker de disse to til å forklare hvordan vi kan skille på forståelse (Ngu & Phan, 2016, s.66). Disse to metodene som Ngu & Phan (2016) deler inn i er balansemetoden og inversmetoden (inversmetoden er det som ofte blir kalt for «flyttebyttemetoden). For å forklare dette bruker de eksemplet $y + 3 = 1$.

Balansemetoden går ut på å gjøre det samme på begge sider. Her i dette tilfelle vil det bety å sette «-3» inn på begge sider av er lik tegnet slik at det vil stå $y + 3 - 3 = 1 - 3$. Deretter vil likningen stå igjen som $y = -2$

Inversmetoden går ut på at ved å flytte ett tall eller ledd over på andre siden av er lik tegnet, vil dette bytte fortegn. Her vil det bety at mellomregningen vil bli $y = 1 - 3$ som etter sammentrekking vil bli $y = -2$

Table 1. Type 1 of one-step equation involving one operational and two relational lines.

Balance method			Inverse method		
Line 1	$y + 3 = 1$	(-3) on both sides	Line 1	$y + 3 = 1$	
Line 2	$-3 \quad -3$		Line 2	$y = 1 - 3$	$(+3$ becomes $-3)$
Line 3	$y = -2$		Line 3	$y = -2$	

Figur 1: hentet fra: Ngu, B. H., & Phan, H. P. (2016). Comparing balance and inverse methods on learning conceptual and procedural knowledge in equation solving: a cognitive load perspective. Pedagogies (Mahwah, N.J.), 11(1), s.67. https://doi.org/10.

Det er ikke tydelig å skille de to ulike forståelsene (Ngu & Phan, 2016, s.64). Gjennom å bruke eksempelet $x + 2 = 5$ forklarer Ngu & Phan hvordan disse forståelsene kan være vanskelig å skille. Det å balansere likningen ved å gjøre samme på begge sider vil Ngu & Phan kategorisere prosedyrekunnskap, samtidig som at hvis elevene forstår at $x + 2 - 2 = 5 - 2$ og viser til at det er en relasjon på begge sider av er likhetstegnet er det samme, vil dette kategoriseres som konseptuell forståelse (Nhu & Phan, 2016, s.64).

Ved inversmetoden vil det å flytte over $+2$ fra venstre side til å bli -2 på høyre side ett tegn på prosedyreforståelse. Hvis elevene viser til, og viser en forståelse for at $x + 2 = 5$ er det samme som $x = 5 - 2$ vil dette bli sett på som konseptuell forståelse (Ngu & Phan, 2016, s.65).

Ngu & Phan (2016) peker på at forskjellen ligger i prosedyre steget for hvilken metode som gir elevene best forståelse av likninger. Dette steger er hvor man endrer på likningen men fortsatt beholder likheten på begge sider av er lik tegnet (-2 på begge sider eller skifter fra +2 på ene siden til -2 på den andre).

Ngu et al. (2015, s.272) belyser også vanskeligheten ved å sette metodene i bås, ved forbindelse av konseptuell og prosedyrekunnskap. Ngu et al. (2015) henviser til Star og Rittle-Johnson (2008) sin fordeling av hva som kan klassifiseres som prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap. Dette er blant annet fordi begge disse metodene har elementer som antyder og viser begge formene for kunnskap.

«Side side» gjør vi operasjoner på begge sider av likhetstegnet for å beholde balansen, noe som indikerer konseptuell kunnskap. Dette steget endrer på likningen, samtidig beholder som nevnt balansen i likningen, dette indikerer prosedyrekunnskap (Star & Rittle-Johnson, 2008).

«Flytte bytte» har en regneoperasjon som omtales som prosedural (prosedyrekunnskap) ved at f.eks ett positivt tall på høyre side av likhetstegnet flyttes til venstre side av likhetstegnet, og endrer fortegn i prosessen. Samtidig endres likningen, men likningen beholder likheten/balansen. (Star & Rittle-Johnson, 2008).

2.5 Kognitiv belastning i likninger

Når likninger involverer flere ledd så krever det en høyere kognitiv belastning, enn likninger med få ledd (Kieran, 1981; Ngu et al., 2015, s.271). Ngu et al. (2015) ser nøyere på hvordan «flytte bytte» og «side side» metoden brukes og hva det kreves av elevene for løse dette. Elever som brukte «flytte bytte» metoden gjorde det bedre på likninger enn elever som benyttet seg av «side side». Ngu et al. (2015) argumenter for at dette er i hovedsak fordi «flytte bytte» metoden ikke krever like stor kognitiv belastning hos elevene slik som «side side» metoden gjør. At «side side» krever mer kognitiv aktivitet påstår Ngu et al. (2015) er i hovedsak fordi «side side» utfører regneoperasjoner på begge sider av likhetstegnet, i motsetning til «flytte bytte» metoden som kun gjør regneoperasjon på en side av likhetstegnet. I likninger med flere steg fremhever Ngu et al. (2015, s.286) «flytte bytte» som den «beste» metoden basert på resultatene fra elevene de undersøkte.

I følge Ngu et al. (2015) øker den kognitive belastningen proporsjonalt, eller i takt med mengden elementer og ledd som er i likningen. Ngu et al. (2015) fremhever viktigheten med å begrense antall elementer i «bevegelse» for å ikke overarbeide eleven slik at eleven føler det som for mye, og ikke løse likningen. Dette er blant annet en av grunnen til at Ngu et al. (2015) trekker frem «flytte bytte» som den optimale metoden for likningsløsning. Det er begrunnet ved at denne har som tidligere nevnt færre elementer og operasjoner i bevegelse samtidig under likningsløsning. (Ngu et al., 2015, s.272). Kieran (1981) argumenterer også at det er viktig å begrense den kognitive belastningen i arbeid med algebra.

2.6 Likhetstegnet og balanse i likningen

Likhetstegnet er en viktig del av algebra, hvor det viser til likhet. Likhetstegnet brukes også mye i aritmetikk som betydning å finne svaret (Webb & Abels, 2011). Overgangen fra aritmetikk til algebra ved likhetstegnet vil jeg gå inn på i dette delkapittelet.

Kieran (1981) belyser tematikken om misoppfatning av likhetstegnet. Innføringen av likhetstegnet kommer tidlig i skolen, ofte har elever en formening om hva likhetstegnet betyr før de starter på skolen (Kieran, 1981, s.317). Dette henger sammen tidligere erfaringer ved bruk av likhetstegnet. Elever forbinder likhetstegnet med et symbol for «signalet for å gjøre noe». Dette støttes også opp av Pirie & Martin (1997, s.159) som sier at mange elevers første møte med likhetstegnet er at «det indikerer resultatet av en operasjon». Likhetstegnet er et symbol på at det skal komme etter svar, eksempel for dette er $2 + 2 =$

Blant funnene som Kieran (1981) fremhever er at likhetstegnet ikke alltid er tolket som «balansetegn». En vanlig forståelse for likhetstegnet hos elever, er at det skiller problemet og svaret. Å legge sammen kunnskapen at likhetstegnet indikerer likhet og kan brukes som et symbol for å vise svaret ikke alltid er like lett for elevene å sammenkoble. Dette er en misoppfatning som dukker opp flere steder gjennom skoleløpet hos elever (Kieran, 1981). Kieran (1981) fremhever viktigheten ved å utvide begrepet likhetstegnet innenfor rammene til aritmetikken før elevene introduseres til algebra og skal bruke likhetstegnet her.

Pirie & Martin (1997) undersøker undervisning og læring av likninger på ungdomsskolen. I deres artikkelen samles informasjon om undervisningsmetoder, kognitive utfordringer og hindringer i læringen av lineære likninger inn fra flere forskningsartikler som grunnlag for resultatene som kommer frem. Pirie og Martin (1997) har basert på informasjonen de har hentet inn så undersøker de funn fra en artikkel til Awlyn som undersøker hvordan lære bort matematikk med mening til mindre dyktige elever.

Pirie & Martin (1997, s.159) påpeker viktigheten ved ha god kjennskap til likhetstegnet. Det som jeg vil trekke frem i denne artikkelen er kritikken Pirie og Martin (1997, s.162) legger frem i forbindelse med introduksjon til likhetstegnet ved å bruke balansevekt som referanse. Balansemetoden illustrerer godt at det må være likevekt og balanse på begge sider av likhetstegnet, balansevekten har også sine ulemper. Å bruke balansevekt kan lede til flere hindringer, slik som at den er ikke egnet til å finne vekten til et objekt alene. En annen hindring Pirie og Martin (1997) påpeker er at «elever i dag kjenner ikke til balansevekter som tidligere». I dette utsagnet legges det balansevekt er noe fra fortiden, og elevers forbindelse med ordet balanse i større grad handler om «å holde balansen» som ved å stå på et ben blant annet. Denne artikkelen kom ut i 1997, og dette argumentet er enda mer aktuelt i dag (2024), da balansevekter i enda større grad har blitt faset ut. En hindring ved å bruke balansevekt som introduksjon til likninger er også ved å gå fra symboler og objekter som relateres til virkeligheten og over til tall. Symbolismen ved at tall har forskjellig tyngde, og overføres til vekter/gis tyngde kan føre til misoppfatninger (Pirie & Martin, 1997). Å bygge konseptet likningsløsning ved hjelp av balansevekt er ikke fordelaktig og har sine hindringer (Pirie & Martin, 1997, s.164).

2.7 Ulike typer forståelse

Kilpatrick deler matematisk dyktighet i 5 deler (2001, s.116), eller aspekter som han også vil kalle det. Disse består av: «*conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning og productive disposition*». Som tidligere nevnt så er hver av disse 5 aspektene bare en del av hva som han kjennetegner er god dyktighet i matematikk etter å ha gjort flere undersøkelser, lest seg opp på teori og diskutert seg imellom med en rekke anerkjente matematikere (s.115). Her blir disse 5 aspektene visualisert gjennom ett tau som er flettet, hvor hver tråd er en av aspektene for det tjukke tauet som er en metafor for dyktighet i matematikk. Jeg vil gå inn på temaet «conceptual understanding», dette vil jeg kalle for konseptuell forståelse og «procedural fluency», som jeg ville kalle for prosedyreforståelse.

Konseptuell forståelse er en integrert, og et funksjonelt grep rundt matematiske ideer (Kilpatrick et al., 2001, s.118). Her sier Kilpatrick et al.(2001) at dette en forståelse hvor man har oversikt over helheten. Denne måten å tenke matematikk på bygge på tidligere kunnskaper og teorier for å utvide sin matematiske horisont. Det argumenteres for at denne metoden også gjør det lettere å huske matematikken, noe som Skemp (1987, s.153) også kommer inn på, og gjør det lettere å hente frem kunnskapen igjen. Kjennetegn her er at elever forsøker å skape en forklaring selv (Kilpatrick et al., 2001, s.118). Dette kan sammenlignes med Piaget sin kognitive læringsteori, ved å bygge videre på skjemaer som elever allerede har.

Det trekkes frem at en indikator for denne type forståelse er at elevene klarer å sette metoder i kontekst. Det vil si å ha en forståelse når det er behov for å bruke en bestemt metode i matematikken. Ett eksempel som er hvordan elever legger sammen to brøker med ulik nevner. Kjennetegn på konseptuell forståelse her ifølge Kilpatrick et al. (2001, s.119) er at oppgaven blir satt i en kontekst, slik som så lage en historie eller illustrere ved hjelp av figur.
For å få best utbytte ved konseptuell forståelse er å bygge videre på relaterte oppgaver, eller arbeide innenfor det samme tema for å skape en sammenheng og bygge videre på relatert og eksisterende kunnskap (Kilpatrick et al., 2001, s.120)
Ved en grundig og god forståelse vil denne type forståelse kunne gi overførbarhet til andre urelaterte oppgaver. Dette gjennom å finne likheter hvor man kan utnytte tidligere kunnskap. Ett eksempel på dette er god kunnskap i addering gjør arbeidet med å forstå multiplikasjon. Overføre kunnskapen ved at 5+5+5+5+5+5=5x6 fordi 5 addert med seg selv 6 ganger vil gi det samme resultatet.
Prosedyreforståelse omtales i Kilpatrick et al. (2001, s.121) som måten elever tar til seg læring gjennom metoder og prosedyrer. Ved å bruke denne kan man løse matematikk effektivt og nøyaktig. Denne typen læring blir omtalt som å lære matematikk i isolerte biter (Kilpatrick et al., 2001, s.123), i stor kontrast til kjennetegn for konseptuell forståelse som er å forstå helheten og matematiske ideer. I matematikk vektlegger Kilpatrick et al. (2001, s.121) at store deler av matematisk regning består av prosedyrer. Dette er begrunnet med at matematikk består av mye struktur, forutsigbart og fylt med mønstre. Enkle regneoperasjoner kan gjøres fort og effektivt, hvor det ikke er behov for noe kontekst eller forklaring på oppgaven. Eksempler på dette er mer praktiske regnesituasjoner, slik som priser på butikken eller å finne ut hvor mange hvor mange stoler det er på ett møterom hvis hver pult har plass til 3 stoler.
Det kan komme frem som at konseptuell forståelse og prosedyreforståelse er rake motsetninger, og at den ene er bedre enn den andre. Her argumenterer Kilpatrick et al. (2001, s.122) at disse er avhengige av hverandre, og henviser til at dette er to av 5 aspekter ved god dyktighet i matematisk forståelse. Prosedyreforståelse kan være med på forsterke læring i konseptuell forståelse ved at man repeterer mye, og lager prosedyrer ut fra forståelsen for matematikk.
Ved prosedyreforståelse som grunnlag for ett emne i matematikk, kan det være vanskelig å forsøke lære seg hvorfor man bruker de ulike prosedyrene. Det kan skapes problemer med å skape en dypere mening og forståelse ved et matematisk emne hvis denne matematikken er lært gjennom prosedyreforståelse. Kilpatrick et al. (2001, s.122) trekker frem at hvis elever øver inn matematikk ved prosedyreforståelse er det mer utsatt for gjøre feil, ved at de lærer

inn prosedyrene feil eller ikke har forståelsen for å kunne se feil i regnestykker selv. Ved å fokusere på dette aspektet ved læring er det behov for å bruke mer tid på repetisjon for å huske alle steg, og en jevnlig oppfriskning i temaet, for igjen unngå å gjøre feil steg i prosedyrene.
I problemstillingen ved å ha lært matematikk ved prosedyreforståelse vektlegges det at det ikke er rett frem i lære noe ved hjelp av konseptuell forståelse. Det er av den grunn at den forrige metoden ikke helt skrinlegges og fjernes helt. Begge metodene vil bli brukt situasjonsbasert. Av denne grunn påpekes det viktigheten ved korrekt forståelse i startekurven av læringen.
Skemp (1987, s.153) hørte først om relasjonell og instrumentell forståelse fra Stieg Mellin-Olsen ved Universitetet i Bergen. Det som omtales som instrumentell forståelse, er en annen måte å si «regler uten mening», og Skemp så på dette tidligere som ikke læring i det hele tatt. Han trekker frem dette ved at vi kan få en elev til å forklare areal av et rektangel, og eleven kan forklare hva svaret er, men ikke hvorfor dette svaret er riktig. Eleven kan forklare løsningen, men bare i overflaten ved hjelp av formelen og figur.
Skemp (1987) argumenterer for at elever og lærere må være på samme forståelse på hvordan de ønsker å lære matematikk. Enighet for hvordan man ønsker å gå frem for å lære matematikk. Hvis læreren forsøker å lære bort relasjonell forståelse, men elevene har en instrumentell tilnærming, vil det bli en interessekonflikt som er lite nyttig. Både lærer og elev vil møte motgang i form av lite effektivitet, som at læreren vil at elevene skal forstå hvorfor vi gjør en utregning, samtidig som elevene bare ønsker en formel eller prosedyre for å løse oppgaven fort og effektivt (Skemp, 1987, s.156). Tidligere var Skemp en stor tilhenger til at kun relasjonell læring var ekte læring, men har siste årene åpnet mer til at de finnes flere måter å lære på. Derav har han formulert «*Devil's advocate*» (Skemp, 1987, s.158). Her har han forsøkt på en oversiktlig og punktvis måte å legge frem fordeler og ulemper ved både instrumentell og relasjonell forståelse av matematikk.
Først tar Skemp for seg fordelene ved instrumentell forståelse punktvis, deretter fordelene ved relasjonell forståelse (1987, s.158)
Den første er at instrumentell forståelse i sin egen kontekst ofte er lettere å forstå. Dette vil med andre ord si prosedyrer som at negativ gange negativ gir ett positivt resultat. Dette er ikke like lett å forklare og forstå ved relasjonell forståelse, men en relativt enkel huskeregel, slik som «negativ gange negativ gir postivt svar».
Den andre er at svarene er mer direkte og tydelige. Med dette går Skemp (1987) på mestringsfølelsen ved å løse oppgaver fort. Han peker på at instrumentell tilnærming av

oppgaver gir som sagt mestringsfølelse og fører til større selvtillit innenfor matematikk som han ser på som viktig.

Den tredje er at ved denne tilnærmingen kan man ofte få korrekt svar på en rask og pålitelig måte.

Som en motreaksjon på disse fordelene på instrumentell forståelse, så argumenterer Skemp (1987) for fordelene ved relasjonell forståelse i matematikk.

Det første argumentet for relasjonell forståelse er at det er lettere å tilpasse seg nye oppgaver i matematikk. Har man en god forståelse for desimaler og ganging kan man med en relasjonell forståelse lettere kombinere disse metodene for å lære seg å gange med desimaltall.

Det andre argumentet er at relasjonell forståelse gjør det lettere å huske hvordan man løser oppgaver. Skemp (1987, s.159) omtaler dette som paradoksalt, men begrunner dette ved at hvis man se alt i kontekst og ser helheten vil det være lettere å huske. Han sier at selv om det tar lengre tid å lære, vil læringen sitte bedre ved at de er sammensatt med annen matematikk. (Skemp, 1987, s.158)

Tredje argumentet ved å bruke relasjonell forståelse i læring er at relasjonell læring kan være et mål i seg selv (Skemp, 1987, s.158). Dette er basert på forskning Skemp har gjennomført selv. Her viser han til at det var mindre behov for ytre motivasjon og straff.

Fjerde argumentet er at relasjonelle skjemaer er organiske i kvaliteten, dette punktet henger også delvis sammen med det tredje argumentet. Elever vil nå tilfredstillelse/mestringsfølelse som igjen fører til at de selv ønsker å finne ut mer. Finne mer informasjon og utforske nye området (Skemp, 1987, s.158) Dette sammenlignes med ett tre som utvider røttene sine for å bli større og kraftigere.

En kort og god formulering for de ulike tilnærmingene av læring Skemp (1987, s.166) sier seg enig med er formuleringene til Byers og Herscovics (1977). Disse er:

Instrumentell forståelse er evnen til å bruke en passende innøvd regel for en løsning for et problem, uten å forstå hvorfor regelen fungerer.

Relasjonell forståelse er evnen til å utlede en spesifikk regel eller prosedyre fra generelle matematiske forhold.

Formell (Skemp, 1987, kaller dette for logisk) forståelse er evnen til å koble matematiske symboler og notater med relevant matematiske ideer og kombinere disse ideene til en kjede med logisk argumentering.

Skemp sammenligner relasjonell og instrumentell forståelse i matematikk med hvordan noen får forklart veien. Han påstår at hvis en person med instrumentell forståelse gjør en feil ved ett av stegene for å komme seg rundt i byen, vil være «lost». Ved f.eks at personen tar til høyre

ved posthuset, når instruksjonene var å ta til venstre. Da vil vedkommende ikke komme videre fordi dette er basert på en prosedyreforståelse. Ved å gjøre en feil underveis er ikke forståelsen der til å hente seg inn igjen. Ved relasjonell forståelse vil personen kunne hente seg inn igjen ved å f.eks ha forstått hvilken retning hoveddestinasjonen er, og gjøre endringer underveis for å komme i samme retning, eller tilbake på veien/samme retning igjen ved en feil avkjøring. Tilpasse seg underveis, fordi denne personen med relasjonell forståelse har forstått destinasjonen og kan tilpasse seg underveis. (Skemp, 1987, s.163).
Denne relasjonelle tilnærming i matematikk kan sammenlignes med sitering fra NCTM (1989) av Schoenfeld (1992, s.335) sin tilnærming for hvordan elever burde forstå faget, og utvide sin matematiske horisont. Her peker han på at elever må:

- Søke løsninger, ikke bare huske prosedyrer
- Utforske mønstre, ikke bare huske for formler
- Formulere hypoteser, ikke bare gjøre oppgaver

Instrumentell læring er viktig for relasjonell læring da disse bygger litt på hverandre. Å bruke instrumentell læring for å få noe til å «sitte» eller mengde, slik at man har dette godt før man bygger videre på det.

2.8 Dybdelæring og overflatelæring

I forbindelse med stortingsmeldingen om at det skulle komme en ny fagfornyelse og ny læreplan kom det frem at det dybdelæring skulle vektlegges mer (Meld St. 28 (2015-2016)). Stortinget sin definisjon av dybdelæring er at elevene over tid og gradvis utvikler sin forståelse for begreper og sammenhenger innenfor et fag. Overflatelæring er innlæring av faktakunnskap uten at det settes inn i sammenheng (Meld.St. 28 (2015-2016)). I dette delkapittelet ser jeg på hvordan Sawyer (2005) betegner dybdelæring og overflatelæring. Sawyer kategoriserer læring i to aspekter, «Learning Knowledge Deeply» og «Traditional Claasroom Practices» (Sawyer, 2005, s.4). Han mener at det er viktig å fokusere på dybdeforståelse. Han viser til at forskere på 1980-tallet hadde oppdaget at elever som hadde lært gjennom dybdelæring, klarte å anvende matematikk på ett større område matematikk enn elever som hadde lært mer med konvensjonell overflatelæring (Sawyer, 2005, s.4). Elever som hadde lært mer gjennom dybdeforståelse klarte i større grad å overføre det de hadde lært også til hverdagen og praktiske situasjoner.

Sawyer mener at dybdelæring er det viktigste formen for læring og forståelse. Noen av punktene som Sawyer (2005) påpeker er viktig for dybdelæring er at elevene aktivt involvert i læringen ved hjelp av undersøking, diskusjon og kritisk tenkning.

Dybdelæring	**Overflatelæring**
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaring.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende konklusjoner.	Elever memorer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier

Tabell 1: Oversatt fra: Sawyer, R. K. (2005). Introduction: The New Science of Learning. In R. K. Sawyer (Ed.), The Cambridge Handbook of the Learning Sciences (pp. 1–16). chapter, s.4, Cambridge: Cambridge University Press.

Sawyer (2005, s.11) peker på hvordan konstruksjonisten beskriver dybdelæring. Her bruker de metaforen stillas. At vi kan sammenligne kunnskapsbygging med stillas. Ved å bygge stillaset stabilt, og høyere som støtte til bygget av kunnskap de produserer. Målet er at elevene tilslutt kan stillaset fjernes, fordi bygget (læringen) er ferdig. Stillaset blir også hele tiden modifisert og bygget fordi bygget og kunnskapen blir høyere. Helt tilslutt er bygget og kunnskapen stabilt og stort nok til at stillaset tilslutt fjernes.

Hensikten med stillaset er at elevene selv skal være delaktig i læringen, fremfor at de blir fortalt hvordan de skal utføre noe (Sawyer, 2005, s.11).

2.9 Nærliggende studier

I dette delkapittelet redegjør jeg for tidligere studier, som er relevante og nærliggende.

2.9.1 Lærerstudenters perspektiv på lineære likninger

Begge disse studiene ser på første års studenter sitt perspektiv på likninger, og undersøker deres kunnskap om likningsløsning. Spørsmålet studentene fikk i disse studiene (Andrews, 2020; Larson, 2024) var at elevene skulle se for seg at en medelev var borte i timen foreleseren gikk gjennom likningsløsning. Studentene skulle deretter forklare skriftlig hvordan de ville hjulpet denne medstudenten løse og forstå en likning. Analyseverktøyet for begge disse artiklene er basert på analyseverktøyet laget av Andrews og Larson (2019), hvor det ble utviklet ett sett med «low-inference codes» (konkrete og lavinferens koder) for forståelse av likninger og likningsløsning.

Andrews (2020) har undersøkt hvordan svenske lærerstudenter forståelse for likninger, da han trekker frem at dette ikke er tidligere undersøkt. Av funnene Andrews (2020) fant var blant annet at studentene hadde god kjennskap til likninger og klarte i stor grad å løse likninger samtidig få frem likningsløsningsmetoder. Strategiene som kom frem var «doing the same to both sides», og «swapping the side and swapping the sign», også kombinasjoner av begge metodene.

Larson (2024) har undersøkt hvordan første års lærerstudenter i Norge sitt perspektiv på lineære likninger. I denne studien ble det undersøkt om lærerstudentene utviste kompetanse i mer enn bare likningsløsning, men også viste kompetanse i hensikten med å løse likninger og forståelsen rundt likningsløsning. Blant funnene som frem i denne studien var bruken av «Swap Side Swap Sign particular additive» (flytte bytte spesifikk addisjon) i de første stegene i likningsløsningen, majoriteten av studentene benytte seg av denne metoden i de to første stegene av likningsløsningen. Det neste som kom frem var hvordan studentene endret løsningsmetode fra «SSSS» til «DSBS» (Do Same Both Sides») når elevene skulle forklare divisjonen på 3 når likningen var $6 = 3x$.

En av konklusjonene Larson (2024) trekker frem er hvis målet innebærer mer enn å løse likningen, men samtidig utvise forståelse og mening ved likningsløsning er DSBS metoden som burde foretrekkes. Hvis målet med læringsutbyttet er å bli trygg og øke ferdigheter i likningsløsning er SSSS metoden å foretrekke.

2.9.2 Videregåendeelever sitt perspektiv på lineære likninger

Andrews og Öhman (2019) intervjuet elever ved videregående skole for å undersøkes deres forståelse av likninger. Deltakerne skulle forklare likningen $x + 5 = 4x - 1$ som var løst i 4 steg, men denne var uten forklaring eller mellomregninger. Elevene sin oppgave var å forklare hvordan denne var løst. I denne studien gjennomførte Andrews og Öhman (2019) tolv gruppeintervjuer på til sammen 39 elever fra to ulike skoler. Av funn i denne studien trekker de frem elevenes syn på «SSSS» metoden. Ifølge elevene i denne studien viste ikke denne metoden forståelse for likninger og kunne skape vanskeligheter i likningsløsningen. «SSSS» er en videreutvikling av «DSBS», men lene seg kun på denne vil være problematisk ifølge elevene. Et annet funn i denne studien elevene sitt syn på hvordan «DSBS» var den bedre metoden for å forklare likninger. «DSBS» var bedre på å sikre forståelsen av balansen i likningen ved forklaring til medelever og tydeliggjorde stegene for å løse likningen, ifølge elevene som deltok i studien.

Grunnen til at jeg har valgt disse artiklene er basert på likheter slik som likningen, og at jeg benytter meg både av skriftlige besvarelser og gruppeintervju som metode.

Deltakerne i disse artiklene er i lærerstudenter med unntak av Andrews og Öhman (2019) som har intervjuet svenske elever ved videregående. Lærerstudentene er naturligvis eldre enn deltakerne i denne studien, men fortsatt relevante å se på da de som nevnt er basert på samme likning og ikke nødvendigvis har hatt så mye matematikk etter ungdomsskolen.

På videregående er det selvsagt matematikkundervisning, men det er ikke nødvendigvis elevene arbeider med likninger eller vanskeligere likninger enn det de har opplevd på ungdomsskolen. Læreplanen til 1P, som er matematikk på videregående i Norge, er mye mer praktisk rettet. Denne har fokus på prosent, tabeller, statistikk og tilknytning til samfunnsliv (Kunnskapsdepartementet, 2019).

3. Metode

I dette kapittelet legger jeg frem hvordan jeg har arbeidet for å kunne svare på forskningsspørsmålet: Hvordan forklarer ungdomsskoleelever lineære likninger for hverandre, når læreren er fraværende?
I denne delen vil jeg beskrive hvilken type studie jeg har gjennomført. Deretter vil jeg gå inn på informanter, og hvordan jeg kom i kontakt med denne skolen. Etter dette vil jeg gå inn på datainnsamlingsmetode, analysemetode og forskningskvalitet.

3.1 Forskningsparadigme og forskningsstrategi

Studien ble gjennomført i to klasser, begge disse på en skole i begrenset rom og tid. Da faller det innenfor kriteriene for case-studie (Postholm & Jacobsen, 2018, s.62). I denne studien samlet jeg inn informasjon fra to klasser. Dataene fra disse klassene blir først sett på separat, deretter vil jeg se på disse samlet som en gruppe. Avgrensingen er naturlig at blir til to timene jeg gjennomførte datainnsamlingene, og intervjuene som ble gjennomført rett i etterkant av timen. Jeg vil se på denne studien som en enkeltcase studie.
Ved innsamling av data forekom det stor interesse fra involverte lærere hvilke resultater som ville komme frem i studien, da disse hadde en tett relasjon til skolen og klassene involvert. For at denne studien kan være overførbar og relevant for andre, er det viktig å legge frem kjennetegn og beskrivelse av disse klassene. Her er det viktig å få frem likheter og ulikheter som eventuelt skiller denne elevsammensetningen fra andre klasser (Postholm & Jacobsen, 2018, s.64.)

3.2 Kontekst og deltakere

Deltakerne i denne studien var to klasser på samme skole. Dette var en 8.klasse og en 9.klasse. Disse klassene var på en ungdomsskole, med beliggenhet på Sørlandet. I området skolen ligger, er det en større sammensetning med høy grad av variasjon på det sosioøkonomiske spekteret. Dette reflekteres i skoleklassene. Klassene består av en variert sammensetning av elever med ulike bakgrunner. Opplegget ble gjennomført først i klassen på 9.trinn, deretter i klassen på 8.trinn. Universitet i Agder tilbyr muligheten til å få tildelt skoler for å gjennomføre forskning i forbindelse med masteroppgavene. Denne muligheten benyttet jeg meg av. Disse skolene som UiA tilbyr er allerede positive til å delta. Denne skolen har jeg også hatt en praksisperiode tidligere, av denne grunn jeg hadde litt kjentskap til noen av

elevene. Dette vil jeg komme inn på senere i dette kapitelet under validitet og relabilitet. Klassene bestod av 25 og 26 elever, hvor 12 og 24 elever valgte å delta i prosjektet.
Det ble gjennomført ett møte med faglærere i forkant av undervisningsopplegget. På 8.trinn hadde de ikke enda vært gjennom algebra i matematikk. I følge årshjulet til 8.trinn skulle ikke de ha algebra før flere uker etter tidsrommet jeg hadde til å samle inn data. Her ble årshjulet endret for at disse skulle ha kompetanse i algebra, slik at både jeg som forsker, og elevene ville få utbytte av opplegget.
På 9.trinn hadde elevene vært gjennom algebra da de gikk på 8.trinn. Disse elevene hadde ikke algebra på årshjulet sitt for 9.trinn, men det ble vurdert fra faglærer at deres kompetanse var tilstrekkelig nok til å være med på opplegget uten oppfriskning i forkant, og nok til å svare på oppgavene.

3.3 Datainnsamling

Datainnsamlingen for studien var delt i to. Innsamlet data består av elevbesvarelser og gruppeintervju. Oppgaven elevene skulle gjøre var å vise skriftlig hvordan de ville forklart stegene i en likning til en venn, hvis vennen var fraværende da læreren gikk gjennom likningsløsning. Innsamlingen av data var delt i to deler. Først en skriftlig elevbesvarelse, og deretter gruppeintervju av tre elever fra hver klasse. Datainnsamlingen ble gjennomført i matematikktimene til klassene.

3.3.1 Skriftlige elevbesvarelsen

Oppgavearket elevene fikk utdelt var i størrelse A4. Øvre fjerdedel bestod av først en tabell hvor de valgfritt kunne fylle inn kjønn, alder og ønskede pseudonym. Deretter bestod omtrent en fjerdedel av A4-arket av likning med løsningen, og oppgavetekst. Likningen i oppgaven var $x + 5 = 4x - 1$. Denne løsningen bestod av 4 steg. Disse stegene var:

$$x + 5 = 4x - 1$$
$$5 = 3x - 1$$
$$6 = 3x$$
$$2 = x$$

Deretter stod det «Anta at du har en venn som var fraværende da læreren viste hvordan man kan løse likninger som denne. Skriv ned hva du ville sagt og vist din venn for å hjelpe han eller henne med å forstå hva likningen innebar og hvordan denne ble løst». Omtrent halvparten av A4 arket bestod av tabell og tekst. Dette resulterte at elevene hadde rom skriftlig besvarelse på nedre halvdel halv A4-siden. Se vedlegg 3 for oppgaveark.

Likningen $x + 5 = 4x - 1$ er tidligere brukt i studier i forbindelse med likninger (Andrews, 2020; Andrews & Xenofontos, 2017; Larson, 2024). Denne likningen inneholder en ukjent, x, på begge sider av er lik tegnet. Dette medfører at løsningen ikke kan gjennomføres ved aritmetisk matematikk, men eleven må gjennomføre algebraiske steg for å løse likningen. Denne likningen er brukt med tilfredsstillende svar i tidligere studier, for å få data fra elevene. Likningen kan også løses ved flere metoder i algebra (Filloy & Rojano, 1989). På bakgrunn av dette valgte jeg å videreføre denne likningen i denne studien.

I denne studien var første del av datainnsamlingen skriftlige elevbesvarelser. I hver klasse fikk elevene utdelt den skriftlige oppgaven, med en lineær likning på.

I begge klassene ble oppgaven presentert tilnærmet likt. I plenum ble det forklart for elevene at det var frivillig å svare på tabellen som stod øverst. Oppgaven ble lest høyt etter at alle elevene fikk hvert sitt eksemplar. Hensikten med oppgaven ble forklart felles for elevene. Det jeg ønsket at elevene skulle få frem var hvordan de ville forklart likningsløsning for en medelev hvis eleven ikke hadde vært tilstede i timen, da dette ble gått gjennom. Hvordan de ville gjort dette skulle ned skriftlig på arket, under tabellen og teksten.

I hver klasse ble gjennomførte alle elever den skriftlige besvarelsen, uavhengig om de hadde takket ja til å være med på forskningsprosjektet eller ikke. Deretter fikk jeg elevbesvarelsene fra elevene som hadde takket ja til å delta i forskningsprosjektet, disse hadde læreren for hver klasse sortert for meg for å unngå feil besvarelse som ikke skulle med.

3.3.2 Intervjuet med elevene

For å utforske videre på temaer og aspekter underveis i intervjuet ble det benyttet et semi-strukturert intervju. Formålet var å forstå elevene sitt perspektiv og få ut mer informasjon om hvordan disse hadde tenkt (Postholm & Jacobsen, s.121). Postholm og Jacobsen (2018, s. 126) påpeker at det er viktig at forskeren skaper en god, trygg og åpen atmosfære for intervjudeltakerne, i dette tilfelle elevene. Intensjonen ved å ha flere elever samlet er fordi disse har en relasjon til hverandre, hvor jeg er den ukjente. Ved å ha medelever tilstede vil de ha en større form for trygghet. Gruppeintervjuer er med på å lette deltakelse og ved å la deltakere får prate fritt, og er med på å redusere maktavstand. I tillegg argumenteres dette som tidsbesparende (Parker & Tritter, 2006). Et annet aspekt for å få bedre flyt i intervju er å la

deltakere selv skal velge lokale for intervjuet for å øke følelsen av trygghet (Postholm & Jacobsen, 2018).
I gruppeintervjuet med informantene benyttet jeg meg av metoden stimulated recall intervju. Kjennetegnene for denne type intervju er å «stimulerer» informantene som blir intervjuet ved å hente frem informasjon i form av bilde, lyd eller i som i dette tilfelle, oppgavene (Hichman & Monaghan, 2013). Bjørn Haglund (2003) sier at det ikke er noen klar mal på hvordan stimulated recall intervju skal foregå. Ofte forbindes stimulated recall med taleopptak og video (Hickman & Monaghan, 2013), som brukes til som nevnt å stimulerer frem flere svar, og mer informasjon fra informantene som blir intervjuet. Påstandene fra Haglund blir også støttet opp av Keith (1988) som sier at stimulated recall burde heller se på det som en metodologi, fremfor en fast metode. Studien jeg har gjennomført er en case studie, hvor jeg hadde behov for å dypere forståelse av informantene sier Haglund (2003) seg enig med utsagnet til Jensen (2002) at stimulated recall passer bra til en case studie hvor hensikten er å få frem flere detaljer av den kognitive prosessen, selv om dette krever mer tid og energi fra forskeren og informantene. En intervjuguide ble brukt som støtte og utgangspunkt for intervjuet (se vedlegg 4). Intervjuguide er med på støtte forskeren å få svar på forskningens problemstilling, oppfølgingsspørsmål og støtte for å oppnå dybde i intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018, s.122).
I denne studien ble tre elever fra hver klasse tatt ut til gruppeintervju etter gjennomføringen av den skriftlige elevbesvarelsen. Valget av elever for gruppeintervjuet var basert på samtale med lærere for klassene i forkant. Dette ble basert på hvem som takket ja til å være med på forskningsprosjektet, og hvilke elever som lærerne mente hadde forutsetning for å formulere omfattende svar. I dette tilfelle valgte jeg å bruke rom de hadde kjennskap til. Det ble lagt frem som at elevene var med på å bestemme hvor vi skulle, selv om dette hadde allerede vært diskutert og avklart med faglærerne til elevene. Grupperommene som ble benyttet hadde umiddelbar nærhet til klasserommene deres.
I begge gruppeintervjuene hadde elevene fremme besvarelsen deres. Dette ble brukt som et utgangspunkt for å få frem litt mer informasjon fra elevene i hvordan de har tenkt, eller om det var informasjon elevene ikke hadde fått frem skriftlig.

3.4 Metode for datanalyse

Da jeg skulle gjennomgå datamateriale, var det viktig å gjøre dette på en strukturert og oversiktlig måte. Jeg valgte å ta utgangspunkt i artikkelen til Braun og Clarke (2006). Disse har kommet frem til 6 faser, eller punkter med andre ord (Braun & Clarke, 2006, s.87). Disse punktene kan bli sett på som grunnleggende prinsipper, og ikke regler. Braun og Clark (2006) påpeker at tematisk analyse ikke er lineær. Disse sier at det er ofte grunn til å gå frem og tilbake i analysen, og dette er en prosess som ikke burde forhastes. Tematisk analyse er en metode for identifisere, analysere, og rapportere mønstre(data) innenfor dataene (Braun & Clark, 2006, s.80). Det er ifølge Braun og Clark (2006, s.80) en metode for å organisere og beskrive data i detalj. Det er ingen konkret oppskrift eller tydelig enighet på hva en tematisk analyse, selv om den er mye brukt i forskning (Braun & Clark, 2006, s.80).

Punktene/fasene under er hentet fra Braun og Clark, 2006, s.87:

1. Bli kjent med datamateriale. (Denne fasen handler i hovedsak om å transkribere, lese data og notere ned ideer)
2. Utvikle fortløpende/tidligere koder. (Kode interessante aspekter ved dataen, sette opp systematiske koder for hele datasettet. Samle inn og sortere data som passer til de ulike kodene.)
3. Se etter kategorier (Samle inn koder, som igjen kan benyttes for å sette opp ulike kategorier eller temaer. Systematisere og sortere data til hver relevante kategori/tema.)
4. Gjennomgå kategorier (Sjekke om kategoriene/temaene fungerer i relasjon til kodene som ble utviklet i fase 1 og hele datasettet i fase 2.)
   Utvikle det som Braun og Clark (2006) omtaler som et kart for analysen.
5. Definere og navngi kategorier (Pågående analyse for å raffinere det spesifikke for hvert tema og helheten analysen forteller. Lage tydelige definisjoner og navn for hver kategori/tema)
6. Produsere rapporten (Siste fase/del av analysen. Utvalgt av gode eksempler. Siste analyse av utdrag som igjen knyttes opp mot forskningsspørsmålet, litteratur og produsere en tydelig rapport av analysen.)

Siste fase av den tematiske analysen skjer etter at temaer er funnet og organisert. Dette er en tekst som oppsummerer analysen. Denne burde være konsis, samsvarende, logisk, ikke repetitiv og interessant (Braun & Clark, 2006, s.92). De sier også at det er viktig å være nøye med hvilke utdrag og eksempler som velges, for å fange essensen i dataen.

Modellen for tematisk analyse av Braun & Clark (2006) passer ikke helt for min analyse, jeg velger å rette meg mot tidligere studier, og se på deres analyseverktøy.

Andrews & Larson (2019) utviklet et sett med «low-inference codes» for å analyse svar fra svenske lærerstudenter sin forståelse om likninger. I oversettelsen til norsk velger jeg å tolke det som konkrete og lav inferens-koder. Formålet deres var å lette analyse av elevbesvarelser slik at det var enklere å sammenligne resultater. Ved hjelp av disse kodene er det mulig å metodisk analyse besvarelser og sette disse inn i en oversiktlig tabell.

Andrews & Larson (2019, s.37) sammenligner og bygger videre på koder fra tidligere artikler som også omhandler hvordan lærerstudenter forklarer likninger for hverandre skriftlig (Andrews & Xenofontos, 2017). Kodene bestod i hovedsak av en kombinasjon av tidligere forskning (Andrews & Xenotonos, 2017) og kjennetegn på en tematiske analyse (Braun & Clark, 2006). Disse artiklene ligger veldig nært til forskningsspørsmålet i denne masteroppgaven. Analyseverktøyet jeg vil benyttet meg av kommer i sterk grad fra Larson (2024). Jeg har oversatt tabellen til norsk, da jeg skriver denne oppgaven på norsk. Analyseverktøyet i denne oppgaven bestod av 17 ulike koder. Ved gjennomgang av datamateriale for denne studien så jeg et behov for å legge til en kode som skilte seg fra analyseverktøyet til Larson (2024). Slik som beskrevet i steg 3 av Braun og Clark (2006, s.87). Denne koden var «Sjekker hva som passer», som innebærer at elevene i steg 3 forsøkte å se hvilket tall som passet inn for den ukjente (x) slik at det ble balanse på begge sider av likhetstegnet. I analyseverktøyet har kodene en kort beskrivelse om hvilke kriterier elevbesvarelsene må inneholde for å bli registrert. Hvis kodene forekom gjentatte ganger i elevbesvarelsene, vil disse bare bli registrert en gang i analyseverktøyet.

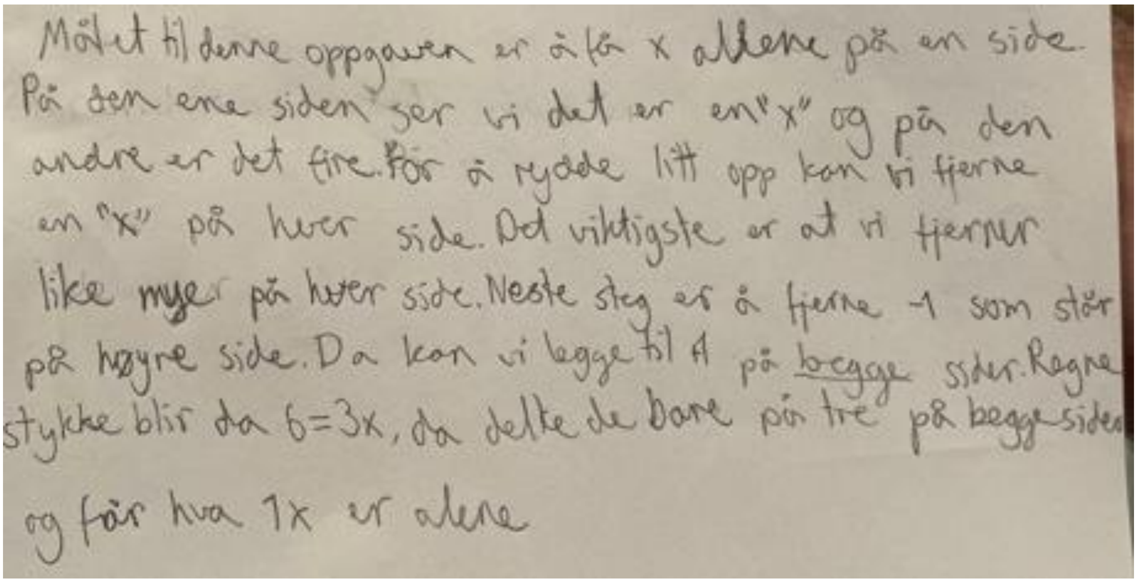
De første fire kodene omhandlet målet med løse en likning, og forståelsen av en likning. Kode fem til elleve handlet om løsningsprosedyre. Disse syv kodene var fordelt på «side side» og «flytte bytte» metodene. Disse var igjen delt opp i om handlingen var generell eller spesifikk for likningsløsningen. De to siste kodene i analyseverktøyet handlet om å sjekke at verdien for ukjente var korrekt, og sjekke dette ved å sette verdien inn i et av stegene i likningsløsningen. Flere av kodene i analyseverktøyet er et resultat av at det naturlig å ha korresponderende beskrivelser for begge løsningsmetoder. Slik som «flytte bytte spesifikt med multiplikasjon» og «side side med spesifikk multiplikasjon». Det kommer frem i kapittel 4.1.2 at «flytte bytte spesifikt med multiplikasjon» ikke får noen registeringer på elevbesvarelsene.

Dette analyseverktøyet ble også benyttet i analysen av gruppeintervjuene. Den ble anvendt annerledes enn i forbindelse med de skriftlige besvarelsene. Forskjellen var at for hver kode elevene nevnte i gruppeintervjuet, ble dette registrert ved hver anledning dette ble nevnt. Ved andre ord har elevene fått flere registreringer på samme kode i intervjuet, i motsetning til i de skriftlige besvarelsene hvor en elev kun fikk en registering per kode i sin besvarelse. Analyseverktøyet legges frem på neste side.

Navn på kode	**Eleven skriver noe om…**	**Til stede i besvarelsen**	**Ikke til stede i besvarelsen**	**Prosentandel med registreringer i besvarelsen**
Drøfter karakter av x	x er en variabel eller en ukjent og representerer et vilkårlig tall			
Balanse i likhetstegnet	Balanse i likningen og begge sider av likhetstegnet er likt			
Overordnet mål	finner "verdien av x" (peker på meningen ved likningsløsning)			
Operasjonelt mål	Får x alene, eller x på en side (peker på prosessen av likningsløsning)			
Flytte bytte generell	Generelt flytte bytte bevegelsen av objekt			
Flytte bytte med addisjon	Flyttebytte bevegelsen uten henvisning til likningen som undersøkes			
Flytte bytte spesifikt med addisjon	Flyttebytte bevegelsen med addisjon av objekter i likningen			
Flyttebytte med generell multiplikasjon	Flyttebytte bevegelsen med multiplikasjon uten henvisning til likningen som undersøkes			
Flytte bytte med spesifikk multiplikasjon	Flyttebytte bevegelsen med objekter av likningen som undersøkes			
Side Side generelt	Prinsippet ved å løse likningen ved å gjøre det samme på begge sider av likningen			
Side side generelt addisjon	Løser likningen ved å addere eller subtrahere det samme objektet på begge siden uten referanse til likningen som undersøkes			
Side side spesifikt addisjon	Løser likningen ved å addere eller subtrahere det samme objektet på begge sider med referanse til likningen som undersøkes			
Side side generell multiplikasjon	Løser likningen ved å multiplisere eller dividere på begge sider av det samme objektet uten henvisning til likningen som undersøkes			
Side Side spesifikk multiplikasjon	Løser likningen ved å multiplisere eller dividere på begge sider av likningen med referanse til likningen som undersøkes			
Uspesifisert handling på en koeffisient	En multiplikativ operasjon på ligningen basert på verdien av koeffisienten uten henvisning til verken flytte bytte eller side side			
Setter prøve	Sjekker eller nevner muligheten for å sette prøve på løsningen			
Sjekker hva som passer	Sjekker ut hvilket tall som passer for x slik at likningen er lik på begge sider av er lik tegnet			
Totalt				

Tabell 2: Analyseverktøy med koder

I tabell 3, nedre halvdel av denne siden er resultatet av analyse av figur 2: elevbesvarelse 1


Målet til denne oppgaven er å få x alene på en side. På den ene siden ser vi det er en "x" og på den andre er det fire. For å rydde litt opp kan vi fjerne en "x" på hver side. Det viktigste er at vi fjerner like mye på hver side. Neste steg er å fjerne -1 som står på høyre side. Da kan vi legge til 1 på begge sider. Regnestykke blir da 6=3x, da delte de bare på tre på begge sider og får hva 1x er alene

Figur 2: Elevbesvarelse 1

Utdrag elevbesvarelse	Registrert kode
Målet til denne oppgaven er å få x alene på en side.	Overordnet mål (Peker på målet med oppgaven er, som er å få x alene)
På den ene siden ser vi at det er en «x» og på den andre er det fire. For å rydde opp litt kan vi fjerne en «x» på hver side.	Side side spesifikk addisjon (Subtraherer på begge sider av likhetstegnet)
Det viktigste er at vi fjerne like mye på hver side	Balanse i likhetstegnet (Poengterer balansen på begge sider av likhetstegnet)
Neste steg er å fjerne -1 som står på høyre side. Da kan vi legge til +1 på begge sider.	Side side spesifikk addisjon (Flytter ett ledd til andre siden av likhetstegnet, samtidig som fortegnet endres)
Regnestykket blir da 6=3x, da delte vi på tre på begge sider	Side side spesifikk multiplikasjon (Dividerer på begge sider av likhetstegnet)
og får hva 1x er alene	Operasjonelt mål (får x alene på en side av likhetstegnet)

Tabell 3: Analyse av Figur 2 (Elevbesvarelse 1)

3.5 Forskningskvalitet

Forskning handler om å legge frem og utvide ny kunnskap, samtidig tydeliggjøre hva som det er ett behov for mer kunnskap på. Kunnskap som kanskje ikke er sett på som nyttig i dag, kan være nyttig på ett senere tidspunkt (Postholm & Jacobsen, 2018, s.219). Dette vil si at kunnskap ikke nødvendigvis kan bli sett på som direkte god eller dårlig forskning, og av den grunn er det viktig å legge frem hvordan forskningen er produsert. At en forsker er kritisk til egen og andres forskning er viktig for å kvalitetssikring (Postholm & Jacobsen, 2018). I dette avsnittet vil jeg gå inn på hvilke begrensninger jeg har gjort for min forskning, og hvordan jeg som forsker kan ha vært med på å påvirke resultatene i forskningen i denne oppgaven.

3.5.1 Gyldighet

Indre gyldighet (også kalt indre validitet) i kvalitativ forskning, handler om at de abstrakte begrepene er meningsfulle for deltaker og andre forskere. Med abstrakte begreper menes matematiske konsepter, teorier eller prinsipper som ikke er matematiske målbare eller observerbare. At deltakerne kjenner seg igjen i begrepene er også viktig, en deltakervalidering (Lincoln & Cuba, 1985). Her er deltakerne med på å bekrefte, eller gjøre endinger for sitasjonen. Dette er med på å styrke troverdigheten ved at fakta og uttalelser kan bli korrigert.

I følge Postholm og Jacobsen (2018, s.230) handler dette om at leseren selv kan bedømme hvor meningsfylt dette er, ved å ha mulighet til å se forskningen fra hvordan forskeren som gjennomførte dette gjorde. Det må være en bekreftelse slik som Lincoln og Guba (usikker på referering her) definerer det, at referering til datamateriale danner troverdighet. Analyse, beskrivelser og tolkninger er grunnet i datamateriale (Postholm & Jacobsen, s.230).

Ytre gyldighet (også kalt for overførbarhet) handler om det er mulig å generalisere funnene (Postholm & Jacobsen, s.238).

3.5.2 Troverdighet

Da denne studien er en case-studie, i et spesifikt tilfelle innenfor ett spesifikt tidsrom vil det ikke være mulighet til å reprodusere studien helt identisk. Det er av den grunn viktig at forskeren (Postholm & Jacobsen, 2018, s.224):

- Reflekterer over egen påvirkning
- Gjøre forskningsprosessen synlig slik at andre kan reflektere over den

For å kunne ha troverdig forskning har Postholm & Jacobsen (2018) pekt inn på 5 ulike aspekter som forskeren må legge tydelig frem:

1. Relasjon mellom forsker og forskningsdeltaker

I forskningsinnhenting i samfunns- og atferdsvitenskap vil det være en relasjon mellom mennesker ifølge Postholm & Jacobsen (2018, s.225). Ved en gang forsker er i nærhet av forskningsdeltakerene skapes det en relasjon. Ett fenomen som trekkes frem under forskning av (Hox, 1994; West & Blom, 2017 i Postoholm & Jacobsen, 2018) er at forskningsdeltakerne tilpasser svarene. Av denne grunn er det viktig at forskeren er ærlig om innsamlingen slik at andre forskere selv kan vurdere troverdigheten (Postholm & Jacobsen, 2018, s.225).

2. Forhold mellom problemstilling og forskningsdeltaker

Ved å se på et spesielt fenomen, slik som i dette tilfelle med algebra, er det viktig å stille spørsmål med elevenes kompetanse. Hvis elevene ikke skulle ha noe kompetanse i algebra vil deres svar være lite innholdsrike og «være av mindre interesse» (Postholm & Jacobsen, 2018, s.226).

3. Forskningens kontekst

Forskning vil være i en kontekst, innenfor tid og rom. Det er viktig at forskeren beskriver konteksten ved for eksempel skolen. (Postholm & Jacobsen, 2018, s.226)

4. Hvem har vi ikke fått tak i?

I kvalitativ forskning og kvantitativ forsking kan det være former for frafall. Her er det viktig for forskeren å frem hvilke kilder som ikke er med, og hvorfor (Postholm & Jacobsen, 2018, s.227).

5. Har vi fått registrert alt det viktige?

En del av kvalitativ forskning er å ta med vedlegg og datainnsamling til oppgaven, da vi som mennesker ikke alltid husker alt. Mennesker gjør også feil, ved å overse noe eller ikke få med seg alt. (Postholm & Jacobsen, 2018, s.228).

På skolen hvor jeg innhentet informasjon, har jeg tidligere vært i regi av Universitetet i Agder. Av den grunn hadde jeg kjennskap til flere av elevene på 9.trinn. Flere husket meg, og jeg husket dem. Flere av elevene hadde jeg allerede en relasjon, noe som gir en mulighet for å påvirke elevene. Jeg hadde ikke vært på denne skolen på over et år, og elevene jeg gjorde undersøkelser hos hadde jeg undervist minst av klassene jeg underviste (Postholm & Jacobsen, 2018, s.225). På 8.trinn hadde jeg ikke vært før, og ikke hadde jeg noe relasjon til dem før vi møttes i klasserommet. Som nevnt i kapittel 3.2 endret 8.trinn på årshjulet i matematikk for å ha kunnskaper til å kunne svare på studien de deltok i. 9.trinn hadde vært gjennom algebra og likninger da de gikk på 8.trinn.

Et viktig aspekt å trekke frem i regi av studiens troverdighet er min egen erfaring med forskning. Jeg har i liten grad erfaring fra tidligere forskning, noe som kan føre til feil og misforståelser. Dette er den første forskningsstudien som jeg gjennomfører. Uerfarenhet og begrenset tid vil naturligvis føre til etterpåklokskap. Studien gjennomføres alene, noe som kan føre til feil ved forskningsinnhenting. Masteroppgaven skrives med støtte fra veileder, men jeg selv henter inn data og bearbeider data.

I denne studien benyttet jeg meg av to måter for datainnsamling. Disse var oppgavebesvarelser og intervju. Dette kalles for triangulering, og er med på å styrke troverdigheten til studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s.236). Triangulering handler om å fange opp informasjon fra flere perspektiver og datainnsamlinger for å sikre kvaliteten på studien. Intensjonen er ifølge Postholm & Jacobsen (2018) for å se på det som en prosedyre som kan beskrive virkeligheten fra flere vinkler for å skape en større helhet av virkeligheten. I denne studien er hensikten med intervjuene er med på å styrke forklaringene fra elevene som kommer frem i oppgavebesvarelsene.

3.5.3 Etiske aspekter

Frivillighet og anonymitet er verdier som er sett på som viktige når man skal samle inn informasjon til forskning. Ifølge Postholm og Jacobsen (s. 246) er det tre aspekter som er særdeles viktig ved innhenting av forskningsdata i Norge, det er informert samtykke, krav til privatliv og krav til riktig presentasjon av data. Grunnet studiens utforming søkte jeg til Sikt før jeg gjennomførte informasjonsinnhenting. Jeg ønsket å ta vare på skriftlige besvarelser fra elevene og jeg ville behandle lydfiler fra intervjuet. Lydfilene ble deretter flyttet over på datamaskinen.

Informert samtykke, handler om at deltakeren skal vite hva det innebærer å delta i forskningen (Postholm & Jacobsen, s.247). Da dette er ungdomsskoleelever, og er under 16 år, er det foresatte for elever som gir samtykke om de kan delta på forskningsprosjektet (Personopplysningsloven, 2016, Artikkel 8). Som en del av samtykke, fikk også elevene ett informasjonsskriv. Dette inneholdt hva jeg ønsket å forske på, formålet med forskningen, hvilken informasjon jeg hadde behov for, og oppbevaring av informasjon. Jeg benyttet meg av malen til NSD. Denne var ryddig og oversiktlig, noe som jeg så på som viktig for at foresatte ville føle seg ivaretatt og formidlet informasjonen tydelig. Det kommer frem i skjema at det var helt frivillig, med mulighet for å trekke seg når som helst fra prosjektet. I informasjonsskjema var også kontaktinformasjon til meg og veileder for masteroppgaven. Samtykkeskjema og informasjonsskriv ble sendt ut på den digitale plattformen Visma. Dette er en plattform som brukes av flere skoler for å ha direkte kontakt med hjemmene. Denne plattformen brukes i hovedsak til å gi ut informasjon eller personlige beskjeder til foresatte fra skolen og lærere. Foresatte kunne velge mellom å svare direkte i Visma, eller levere tilbake lappen med underskrift til timen.

Oppgaven jeg brukte i klassen for å samle inn data, gjennomførte alle elever uavhengig om de hadde samtykket til forskningsprosjektet eller ikke. Faglærer for 9.trinn hadde laget en liste over elever som var med på prosjektet. Ingen fikk levere før han hadde sjekket, og lagt besvarelsen i riktig bunke. En for å være med, og en annen for de som ikke ønsket å være med. På 8.trinn ble også besvarelsene fordelt til to bunker. Her ble det også dobbeltsjekket før elevene fikk levere.

Krav til privatliv er viktig, og det er viktig å ikke krenke dette. Under gruppeintervjuene satt jeg sammen med 9.trinn på et eget grupperom. På 8.trinn satt vi i et tomt klasserom. I begge intervjuene låste vi døra, slik at ingen skulle komme inn og forstyrre eller se hvem som var med på gruppeintervjuene. Det ble ikke brukt noen navn under intervjuet for å beholde anonymiteten til deltakerne.

Øverst på oppgavearket elevene fikk utdelt var det en tabell hvor elevene kunne fylle ut kjønn, alder og ønskede pseudonym. Dette fikk alle elevene beskjed om at var valgfritt å svare, og ikke en del av datainnsamlingen.

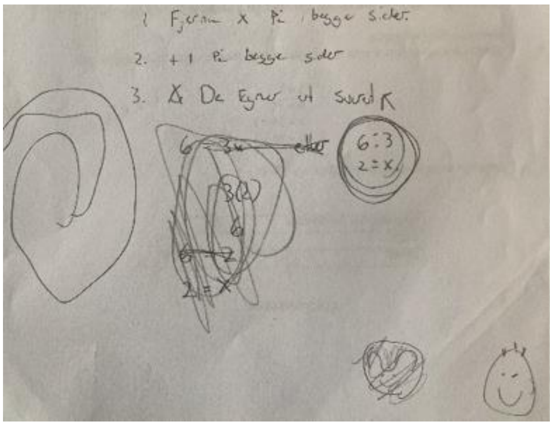
Fysiske besvarelser fra elevene blir oppbevart av masterstudenten frem til prosjektslutt. Elever vil bli gitt fiktive navn, da det ikke er skrevet navn på besvarelsene, og for å beskytte elevene sitt personvern. Intervjuene er tatt opp gjennom diktafon-appen til Nettskjema, et undersøkelsesverktøy utviklet av Universitetet i Oslo. Nettskjema er sammen med Tjenester for Sensitive Data (TSD) godkjent av REK og sikt til å samle inn strengt fortrolige data (Universitetet i Oslo, 2023). Etter endt prosjekt vil data bli fjernet fra denne lagringen.

4. Resultater

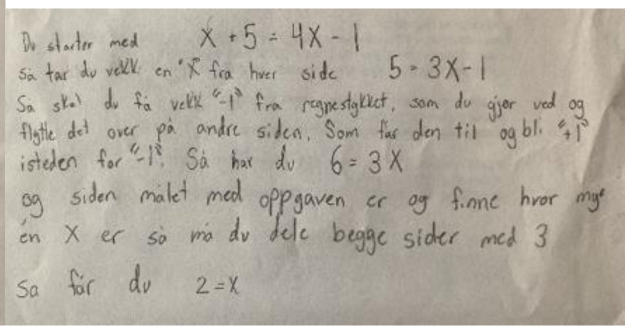
I dette kapittelet vil jeg legge frem resultater som kom frem etter en analyse av oppgavebesvarelsene og gruppeintervjuene. Oppbygningen av dette kapittelet er at jeg vil først snakke om resultatene fra de skriftlige oppgavebesvarelsene, deretter vil jeg snakke om resultatene fra gruppeintervjuene. På slutten av dette kapitelet vil jeg sammenligne resultatene fra disse to kildene for informasjon.

4.1 Oppgavebesvarelse

De skriftlige besvarelsene fra elevene varierer i stor grad. Noen elever svarer i lange og forklarende setninger hvordan de ville utført løsningen av likningen, slik som Figur 3 under til venstre. Andre elever svarer kort og konsist for hvordan de ville gjort det, se Figur 4, under til høyre.

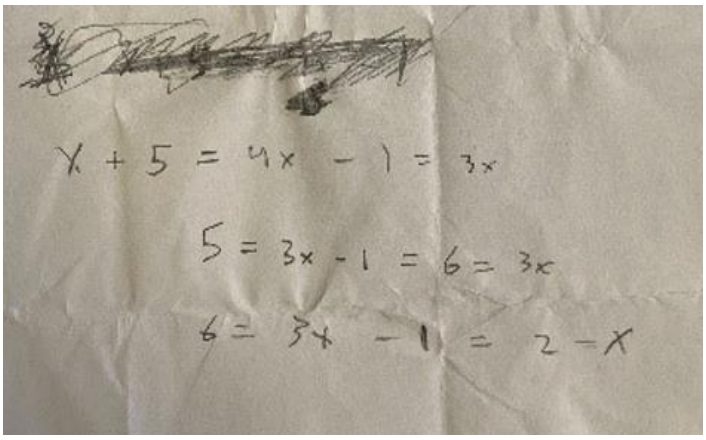


Figur 3: Elevbesvarelse 2



Figur 4: Elevbesvarelse 3

Andre elevbesvarelser var regelrett vanskelige å tolke og inneholdt ingen forklarende tekst, slik som Figur 5 under.



Figur 5: Elevbesvarelse 4

Gruppe 1 var det totalt 12 ungdomsskoleelever som deltok. I gruppe 2 deltok 22 ungdomsskole elever. Til sammen var det 34 ungdomsskoleelever som deltok på forskningsprosjektet.
I Gruppe 1 var median for antall koder registrert i besvarelsen 3 per elev, for gruppe 2 var median for antall koder registrert i besvarelsen 2 per elev. Se kapittel 3.4, tabell 2 eller vedlegg 5 for analyseverktøy benyttet i denne studien.
Størst antall koder og minste antall koder en elev hadde var likt for begge gruppe, disse var henholdsvis maksimum 6 koder og minimum 0 koder. Av 34 elever som deltok, var det 7 som hadde 0 koder i sin besvarelse.

Antall koder i besvarelsen:	**0 Koder**	**1 Kode**	**2 Koder**	**3 Koder**	**4 Koder**	**5 Koder**	**6 Koder**
Antall elever i gruppe 1 (N=12):	2	1	2	2	3	0	2
Antall elever i gruppe 2 (N=22):	5	4	5	1	5	1	1

Tabell 4: Fordeling antall registrerte koder

Kodene som ble nevnt i oppgavebesvarelsen til elevene når vi ser på begge gruppene som en hel var «drøfter karakter av x», «balanse i likhetstegnet», «overordnet mål», «operasjonelt mål», «flyttebytte generell», «flytte bytte med addisjon», «flytte bytte spesifikt med addisjon», «side side spesifikt addisjon», «side side generell multiplikasjon», «sette prøve» og «sjekker hva som passer til x». Dette var 11 av 17 koder.
Ved å se på gruppene hver for seg ser vi at Gruppe 1 fikk registrering på 9 ulike koder. Gruppe 2 fikk registrering på 12 ulike koder. Gruppe 2 hadde registeringer på alle kodene som Gruppe 1 hadde, og i tillegg hadde Gruppe 2 registering på «flytte bytte generell», «side side generell multiplikasjon» og «sjekker løsningen».
Av kodene som ble benyttet i analyseverktøyet var det 5 av 17 koder hvor ingen elever fra noen av gruppene benyttet seg av, dette var 29% av kodene. Dette var kodene «flytte bytte med generell multiplikasjon», «flytte bytte med spesifikk multiplikasjon», «Side side

generelt», «side side generelt addisjon» og «uspesifisert handling på en koeffisient». Ved å legge sammen koder med 0 registeringer og koder med 1 registreringer, er dette til sammen 7 koder. Dette er til sammen 41% av kodene som ikke ble brukt, eller bare hadde en registering.

4.1.1 Likningen og drøfting av x generelt

De første 4 kodene omhandler forståelse og elevenes forklaringer av hva likninger er. Totalt var det 21 av 34 ulike elever som nevnte noe om egenskapene ved likning og likningsløsning. Dette utgjør omtrent 53 % av elevene som deltok i forskningsprosjektet. I gruppe 1 var det 7 ulike elever, og i Gruppe 2 var det 14 elever. I begge gruppene var det en elev som hadde registering på alle kodene og en annen som hadde registrering på både «balanse i likhetstegnet» og «operasjonelt mål». Resten av elevene var kun innom en av disse 4 kodene. I tabellen under er andel svar i prosent fra hver gruppe lagt frem. Her ser vi at elever i begge gruppene har vært innom alle punktene. Det er store likheter i andeler slik som ved «overordnet mål» hvor andelene er 8 % og 9 %, samtidig som vi må legge merke til at forskjellen er kun en elev. En større andel i gruppe 1 har skrevet om eller drøftet karakter av x. Antall elever som har drøftet dette er samtidig det samme, med 2 fra hver gruppe. I prosent vil det se ut som dette vil bety at flere personer har drøftet karakter av x i gruppe 1 enn i gruppe 2, men det er samme antall personer.

Kode	Eleven skriver noe om…	Antall elever i Gruppe 1	Andel av: Gruppe 1	Antall elever i Gruppe 2	Andel av: Gruppe 2
Drøfter karakter av x	x er en variabel eller en ukjent og representerer et vilkårlig tall	2	17 %	2	9 %
Balanse i likhetstegnet	Balanse i likningen og begge sider av likhetstegnet er likt	3	25 %	4	18 %
Overordnet mål	finner "verdien av x" (peker på meningen ved likningsløsning)	1	8 %	2	9 %
Operasjonelt mål	Får x alene, eller x på en side (peker på prosessen av likningsløsning)	6	50 %	10	45 %

Tabell 5: Første 4 koder med fordeling grupper

Forholdet mellom registeringer på «overordnet mål» og «operasjonelt mål» er relativt likt mellom gruppene. Gruppe 1 er forholdet 1:6 og for Gruppe 2 er forholdet 1:5 (2:10). En større andel fikk da til å få x alene, eller skrev noe om dette. Det var en betydelig mindre mengde elever som pekte på eller skrev noe om meningen ved likningsløsning. Skrive noe om «meningen med x» innebærer at eleven har poengtert grunnen ved likningsløsning, som er å få x alene, og få en verdi for x.

I Gruppe 1 var det 2 av 12 elever som «Drøfter karakter x», noe som er det samme antallet i Gruppe 2. Det var flere elever som fikk registering på koden «Drøfter karakter av x» enn som hadde registering på koden «Overordnet mål» i Gruppe 1 (2:1). Dette henger ofte sammen da begge disse kodene kan vise til en dypere forståelse av likninger og likningsløsning. I Gruppe 2 har samme antall elever truffet på «Drøfter karakter av x» og «Overordnet mål» (2:2). Selv om Gruppe 1 hadde flere deltakere i gruppen, har ikke denne Gruppen flere registeringer enn Gruppe 1, som er færre elever.

Elever totalt		
Navn på kode	**Totalt**	**Totalt i %**
Drøfter karakter av x	4	12 %
Balanse i likhetstegnet	7	21 %
Overordnet mål	3	9 %
Operasjonelt mål	16	47 %

Tabell 6: Første 4 koder gruppene samlet

Totalt av alle elevene som deltok i forskningsprosjektet registrerte størstedelen av elevene (16) på koden «operasjonelt mål» (47%). Dette var den koden som fikk flest registeringer av alle koder ved unntak av «side side spesifikt» som kommer senere i kapitelet. Denne koden handler om at eleven skriver noe om å få x alene eller x på en side.

Koden «balanse i likhetstegnet» var det 7 elever til sammen som hadde registering på denne koden, dette utgjorde 21% av alle elevene som deltok i prosjektet.

4.1.2 Løsningsprosedyre

I dette avsnittet vil jeg ta for meg analysen av kodene som innebar hvordan elevene løste likningen. Kodene i tabellen under er i hovedsak skilt i forskjellige variasjoner av «flytte bytte» og «Side side» metoden. Siste kode er om noen elever har utført en uspesifisert operasjon på en koeffisient, noe som ingen nevnte.

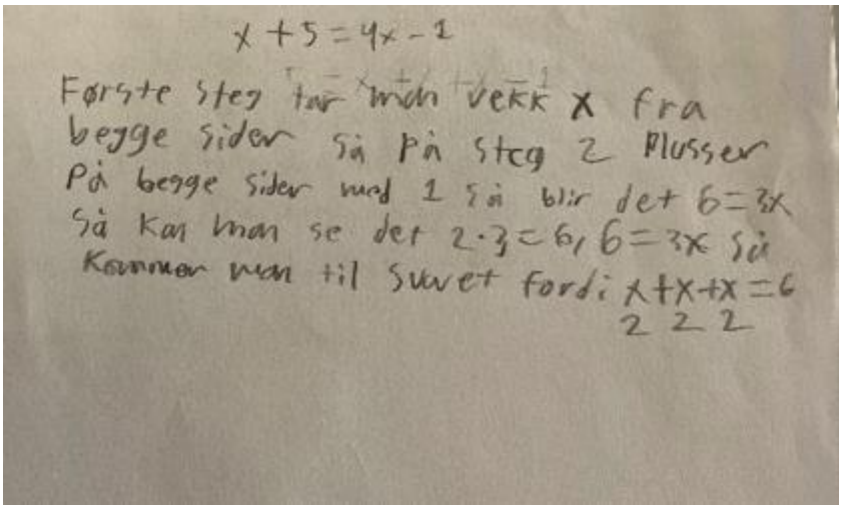
Kode	Antall elever i Gruppe 1:	Andel av: Gruppe 1	Antall elever i Gruppe 2:	Andel av: Gruppe 2
Flytte bytte generell	0	0 %	1	5 %
Flytte bytte med addisjon	1	8 %	1	5 %
Flytte bytte spesifikt med addisjon	7	58 %	3	14 %
Flyttebytte med generell multiplikasjon	0	0 %	0	0 %
Flytte bytte med spesifikk multiplikasjon	0	0 %	0	0 %
Side Side generelt	0	0 %	0	0 %
Side side generelt addisjon	0	0 %	0	0 %
Side side spesifikt addisjon	7	58 %	10	45 %
Side side generell multiplikasjon	0	0 %	1	5 %
Side Side spesifikk multiplikasjon	5	42 %	7	32 %
Uspesifisert operasjon på en koeffisient	0	0 %	0	0 %

Tabell 7: Koder 5-15 med fordeling grupper

I Gruppe 1 benyttet 7 elever (58%) av elevene «flytte bytte spesifikt med addisjon». Det samme antallet elever benyttet seg av «Side side spesifikt addisjon». I denne tabellen kan det se ut som tendenser til at elever i Gruppe 1 har benyttet seg av både «flytte bytte spesifikt addisjon» og «side side spesifikt addisjon» for å forklare likningen. «Side side spesifikk multiplikasjon» var det litt færre elever som registeringer, med 5 elever (42%). Dette er 2 færre enn både «Flyttebytte spesifikt med addisjon» og «Side side spesifikt addisjon».

Det var flere koder som ingen i denne gruppen hadde registering på. Blant disse kodene uten registeringer ser vi at en gjenganger er at det gjelder kodene som omhandler å forklare stegene i likningen generelt. Av elevene som har forklart stegene for likningen i den skriftlige besvarelsen, har elevene i Gruppe 1 forklart stegene ved å bruke tall og forklaringer som er spesifikt til likningen de fikk i oppgavearket.
Gruppe 2 var det kun 3 elever (14%) som benyttet seg av «flytte bytte spesifikt med addisjon». Metoden som ble mest brukt av denne gruppen er «side side spesifikt addisjon». 10 elever (45%) fra denne gruppen brukte denne metoden. Dette kommer frem som metoden flest i Gruppe 2 benyttet seg av.

Analysen har ikke tatt hensyn til hvor mange ganger en metode har blitt brukt i en besvarelse. Ett eksempel på dette er Figur 6. Her er «Side side spesifikt addisjon» gjort to ganger, men i tabellen etter analysen vil dette kun få en registering. I denne besvarelsen har også eleven truffet på koden «Sjekker hva som passer til x» ved å se hvor mange ganger man må ha 2 på venstre side for å få 6, som står på høyre side.



Figur 6: Elevbesvarelse 5

I Gruppe 2 var det også en nedgang fra «side side spesifikt addisjon» til «side side» spesifikk multiplikasjon». Nedgangen i dette tilfelle var fra 10 elever (45%) til den sistnevnte koden som hadde 7 registering (32%).
I denne gruppen var registeringene fordelt på relativt få koder, da 5 koder ikke hadde noen registeringer. Disse kodene uten registering var i stor grad kodene som omhandlet at eleven skrev noe generelt om løsningsprosedyren, mye likt som Gruppe 1. I motsetning til Gruppe 1,

hadde Gruppe 2 registering på «flytte bytte generell». Gruppe 2 hadde 1 registrering på denne koden. Dette var et veldig lavt utslag, men verdt å nevne.

Elever totalt		
Navn på kode	**Totalt**	**Totalt i %**
Flytte bytte generell	1	3 %
Flytte bytte med addisjon	2	6 %
Flytte bytte spesifikt med addisjon	10	29 %
Flyttebytte med generell multiplikasjon	0	0 %
Flytte bytte med spesifikk multiplikasjon	0	0 %
Side Side generelt	0	0 %
Side side generelt addisjon	0	0 %
Side side spesifikt addisjon	17	50 %
Side side generell multiplikasjon	1	3 %
Side Side spesifikk multiplikasjon	12	35 %
Uspesifiser operasjon på en koeffisient	0	0 %

Tabell 8: Kode 5-15 gruppene samlet

Begge gruppene samlet ga noen spennende svar, «Side side spesifikt addisjon» er koden som flest elever fikk registering og benyttet seg av. Dette var i både form av utregning og forklaring av hvordan de ønsket å løse likningen. Totalt benyttet 17 av 34 elever seg av denne metoden, noe som utgjorde 50% av elevene.

10 elever benyttet seg på et tidspunkt i besvarelsene seg av «flytte bytte spesifikt med addisjon», dette utgjorde 29% av alle elevene som deltok i undersøkelsen.

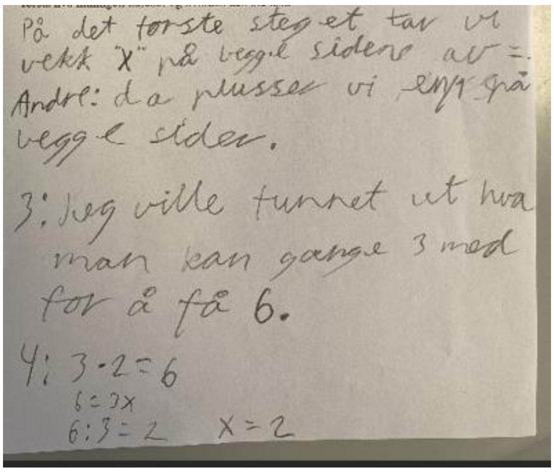
Ved å se på alle elevene som en samlet gruppe var det som nevnt tidligere litt færre som fikk registering på koden «side side spesifikk multiplikasjon» enn den metoden som flest i gruppen benyttet for å løse likningen. Ved å sammenligne «Side side spesifikt addisjon» med «Side side spesifikk multiplikasjon» ser vi at det går fra 17 til 12 elever, noe som utgjør en nedgang i 15% fra 50% til 35%. Felles for alle besvarelsene var at metoden «side side spesifikk multiplikasjon» ble benyttet da de kom til trinn 3 ($6 = 3x$). På dette steget delte de likningen med 3 på begge sider ($\frac{6}{3} = \frac{3x}{3}$).

4.1.3 Sjekke svaret

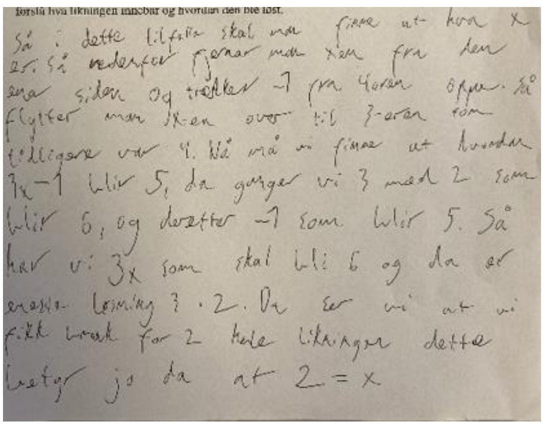
Kode:	Eleven skriver noe om…	Antall elever i Gruppe 1:	Andel av: Gruppe 1	Antall elever i Gruppe 2	Andel av: Gruppe 2
Setter prøve	Sjekker eller nevner muligheten for å sette prøve på løsningen	0	0 %	2	9 %
Sjekker hva som passer til x	Sjekker hvilket tall som passer for x slik at likningen er lik på begge sider av er lik tegnet	3	25 %	5	23 %

Tabell 9: Kode 16 og 17 med gruppene fordelt

At eleven satt prøve, eller nevnte noe i retning å sette prøve på likningen for å sjekke om de hadde fått korrekt x-verdi, var det kun 2 elever i Gruppe 2 som gjorde. I Gruppe 1 var det ingen elever som nevnte dette. Det som derimot dukket opp var at flere elever forsøkte å «sjekke hva som passer til x». Dette var det elever i både Gruppe 1 og Gruppe 2 som gjorde. I Gruppe 1 var dette 3 elever, og i Gruppe 2 var dette 5 deltakere. Dette var 25% og 23% noe som er tilnærmet lik fordeling for begge gruppene i forhold til antall elever som var deltakere. Noe som viste seg å være gjentagende, var at elever undersøkte hvilken verdi som passet inn for x da de kom til trinn 3 i likningen ($6 = 3x$). I et tilfelle ble dette forsøkt sjekket og resonnert frem til i trinn 2 ($5 = 3x - 1$).



Figur 7: Elevbesvarelse 6



Figur 8: Elevbesvarelse 7

Elever totalt		
Navn på kode	**Totalt**	**Totalt i %**
Sjekker løsningen	2	6 %
Sjekker hva som passer til x	8	24 %

Tabell 10: Kode 16 og 17 gruppene samlet

Totalt 8 av 34 elever i undersøkelsen forsøkte å sjekke hva x-verdien kunne være, dette tilsvarer 24% av alle deltakerne. I motsetning til «flytte bytte spesifikt addisjon» og «side side spesifikt addisjon» som er relativt konkrete og tydelige fremgangsmåter, så er «sjekker hva som passer til x» en kode som er mer åpne. Det kom frem at elevene benyttet seg av flere forskjellige metoder, hvor disse «falt» under koden «sjekker hva som passer til x». Eksempler på dette er å gå fra linje 3, hvor det står $3x = 6$. Her har elever satt inn $3 * 2 = 6$, deretter sett at $x = 2$. Et annet tilfelle er ved se på steg 3: $3x = 6$. Deretter sette inn $3 * 2 = 6$. Etterfulgt av $x + x + x = 6$ og $2 + 2 + 2 = 6$. Avsluttet med $x = 2$
Koden «sjekker løsningen» er det som ofte blir kalt «å sette prøve». Det var to personer som satte prøve som en del av forklaringen for hvordan løse likningen. Begge disse var i Gruppe 2. En av disse elevene har kombinert å «sjekker løsningen» og «sjekker hva som passer til x». Dette indikerer at eleven viste en helhetlig vurdering av hva x kan være

4.2 Gruppeintervjuene

I gruppeintervjuene er det brukt det samme analyseverktøyet som den skriftlige besvarelsen. Det som skiller analysen av elevbesvarelsene fra analysen til gruppeintervjuene er hvordan antall koder er notert.

Ved til stede i besvarelsen, er det notert ned hver gang en kode som er treffende er nevnt. Gruppe 1 hadde til sammen 15 registeringer i intervjuet med ett gjennomsnitt på 2,5 registeringer per kode av de som ble benyttet. Gruppe 2 hadde til sammen 18 registeringer, med ett snitt på 2,25 registering per kode av kodene som ble benyttet.

Navn på kode	**Til stede i besvarelsen Gruppe 1**	**Til stede i besvarelsen Gruppe 2**
Drøfter karakter av x	0	0
Balanse i likhetstegnet	1	0
Overordnet mål	0	0
Operasjonelt mål	2	3
Flytte bytte generell	1	1
Flytte bytte med addisjon	0	0
Flytte bytte spesifikt med addisjon	2	2
Flyttebytte med generell multiplikasjon	0	0
Flytte bytte med spesifikk multiplikasjon	0	0
Side Side generelt	0	1
Side side generelt addisjon	0	0
Side side spesifikt addisjon	5	3
Side side generell multiplikasjon	0	0
Side Side spesifikk multiplikasjon	4	4
Uspesifisert operasjon på en koeffisient	0	0
Setter prøve	0	2
Sjekker hva som passer til x	0	2

Tabell 11: Registreringer koder intervjuet. Begge gruppene fordelt

Gruppe 1 var innom 6 ulike koder i løpet av intervjuet, disse var «balanse i likhetstegnet», «operasjonelt mål», «flytte bytte generelt», «flytte bytte spesifikt med addisjon», «side side spesifikt addisjon» og «side side spesifikt multiplikasjon». Disse 6 kodene kom også frem i de skriftlige besvarelsene. I intervjuet i Gruppe 1 kom det ikke frem noen flere koder/registeringer i intervjuet i forhold til de skriftlige besvarelsene fra samme gruppe. Gruppe 2 var innom 8 ulike koder i løpet av intervjuet. Noe som er 2 flere enn maksimum antall koder noen i Gruppe 2 (6) oppnådde skriftlig. En kode som fikk registeringer i intervjuet og ikke i de skriftlige besvarelsene var «side side generelt».
Noe som er verdt å legge merke til ved Gruppe 1 er at de har ikke registret på så mange forskjellige koder, men flere registeringer på de samme kodene. «Side side spesifikt addisjon» hadde 5 registeringer i løpet av intervjuet. Gruppe 2 hadde registeringer på litt flere koder, men ikke like stor maksimum mengde på en kode med 4 registeringer.

4.2.1 Gruppe 1

I intervjuet med elevene spurte jeg hvordan de ville gå fra likningen til første trinn. Fremgangsmåten elevene i denne gruppen var meget lik med hva som kom frem i de skriftlige besvarelsene. Dette kom frem i intervjuet fra Informant 5:

> Først må du fjerne x fra den ene siden, så du må ta minus 1x fra begge sider for å gjøre det likt.
> Så da går du fram til 5x minus 1. (…)
> Først hadde du lyst på alle x-ene på en side, så da tar du minus 1 av på den andre siden.
> Og når du har minus 1 og flytter den på den andre siden ved liktegnet, så blir det pluss.
> Så da tar du 5 pluss 1.

Her har eleven i intervjuet først benyttet seg av «side side spesifikk», «balanse i likhetstegnet» og «flytte bytte med spesifikk addisjon». For å få x alene benyttet Informant 5 seg av både «side side spesifikk multiplikasjon» og «sjekke hva som passer til x».

> I5
> Så man kan ta 6 delt av 3, sånn da blir 2, så da har du 2 er like x.
> Eller så kan du ta 3 ganger noe, som da blir 6.
> Så 3 ganger 2 blir jo 6, så da er det 2 er like x.

F

Ja, så du så på hvor mange x-er det var, og du tok det delt på 3.

I5

Nei, jeg bare tok 6 delt på 3, så fjernet jeg 3 av den, og så står jeg igjen med 6 og 2.

De andre elevene var enige i måten å løse likningen på. I spørsmålet om hvilken metode de foretrakk svarte I4:

«Jeg synes det er lettere hvis vi gjør det samme på begge sider.».

Dette utsagnet blir ikke kommentert av noen av de andre i intervjuet, og fikk mer inntrykket av at dette støttes. Elevene har lært begge metodene for å løse likninger, som er «flytte bytte» og «side side».

4.2.2 Gruppe 2

Denne gruppen forklarte også denne oppgaven med store likheter til hva som kom frem i de skriftlige besvarelsene.

I1

Jeg vet ikke om det er riktig, men jeg begynte med å ta minus x på begge sider.
Fordi da blir det 5.

F

Var det noen av dere som gjorde det annerledes?

I2

Jeg pleier å gjøre det helt venstre, men siden jeg ser at det er mer x på høyre,
så tar jeg heller x på høyre, så tar jeg x minus x på venstre side,
så tar jeg x pluss på høyre side, og så flytter jeg minus 1,
så tar jeg minus 1 pluss 1, så tar jeg pluss 1 på venstre side,
så plusser jeg sammen, og så finner jeg ut svaret.»

F

Men hvordan går dere fra 5, er lik 3x minus 1 til 6 er lik 3x?

I2

Fordi du tar da, fra denne siden her, så flytter du jo over til 5.

Ja, fra høyre side, minus 1.

1 pluss 5, jeg liker 6, så da tar du bare ned 6.

Så du beholder bare 3, og så går du ned. Så tar du 3 delt på 3,

og så tar du 6 delt på 3, som blir 2.

Her har eleven forklart hvordan han ville løst likningen, noe som de andre på intervjuet var enig i.

Eleven brukte av «side side spesifikk», «balanse i likhetstegnet» og «flytte bytte med spesifikk addisjon». For å få x alene benyttet elev seg av både «side side spesifikk multiplikasjon».

Det er som skilte seg ut i dette intervjuet var da vi drøftet «flytt og bytt metoden» i forbindelse med å fjerne -1 fra høyre side i likningen, da sa I2:

«Det er egentlig en måte, men siden vi skal forklare til profesjonelle,
må vi jo si pluss pluss på begge sider.»

Som tillegg til «flytt og bytt metoden» legges det til fra I2:

«Jeg hadde gjort enkelt flyttebytte, men siden vi må jo forklare hvordan vi har gjort det.
Så hadde jeg sagt en pluss en og en pluss på venstre side.»

Begge gruppeintervjuene løser oppgaven med likhetstrekk til hva deres gruppe har fått frem i tabellen. I intervjuet svarer elevene i størst grad hvordan de ville løst likningen, fremfor å si hvordan de ville forklart likninger og stegene for andre ungdomsskoleelever.

5. Drøfting

I dette kapittelet vil jeg drøfte funnene fra resultatkapittelet. Først vil jeg ta for meg funnene som skiller seg ut, deretter se på disse i lys av nærliggende studier hvor jeg vil se på likheter og ulikheter. Etter dette vil jeg ta for meg noen pedagogiske implikasjoner som kommer frem fra oppgaven. Avslutningsvis vil jeg nevne begrenseringer og svakheter med oppgaven.

5.1 Funnene som skiller seg ut

I de innsamlede dataene for denne oppgaven var det en lav andel av elevene som skrev noe om de første kodene som omhandlet generelt x og hva meningen med likningsløsning er. På første kode var det kun 4 av 34 elever som drøftet karakter av x, noe som utgjør 12% av elevene. Å drøfte karakter av x indikerer at elevene ser mer helheten av likningsløsning. Ved å se helheten antyder at disse elevene har en konseptuell forståelse av likninger (Skemp, 1987, s.156). En gjenganger blant elevene som hadde registering på denne koden, var at disse også hadde over snittet registeringer på koder i besvarelsen sin. 4 av disse 4 elevene hadde registrert 6 koder i sine besvarelser. At disse elevene hadde registeringer på flere koder viser til en større grad av konseptet. Ifølge Sawyer (2005, s.11) kan det være en mulighet at disse elevene har lært likningen i form av dybdelæring. Med dette menes at elevene har relatert den nye kunnskapen til tidligere ideer og erfaring. Da vil elevene i større grad reflektere over likninger og skape en større helhetlig forståelse som kan kobles til relasjonell forståelse (Skemp, 1987, s.159).

At denne andelen elever som registrerte på koden «drøfter karakter av x» er så lav kan ha flere forklaringer. Det er ikke nødvendigvis slik at disse elevene er bedre eller flinkere i matematikk enn resterende 30 elevene som ikke registrerte på denne koden (Skemp, 1987, s.158). God matematikk består av mer enn bare relasjonell forståelse, dette er en av aspektene for dyktighet i matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s.116).

16 av 34 elever (47%) nådde det operasjonelle målet, altså x alene eller på en side. Å komme frem til x alene eller på en side, da har man «løst likningen». Dette vil i de fleste sammenhenger i skolen være riktig svar, slik som ved tester og prøver. Utregning blir ofte sett på som «forklaring» for hvordan likningen ble løst. Dette resulterer i at det ikke vil være nødvendig for eleven selv å forklare hva hensikten med likningssløsning er, og hva den ukjente står for.

I denne oppgaven som elevene fikk, skulle de forklare hvordan de ville forklart likningsløsningen for en medelev. Oppgaven er har ikke lagt noen føringer eller antydet

hvilke kunnskaper eleven som var borte innehaver. Da er det viktig å ha med hensikten med likningsløsning i forklaringen, for å legge frem et helhetlig bilde.
Ofte er relasjonell kunnskap nok for at eleven kan vise at de har mestret ett tema i matematikk, og kan ha sine fordeler (Skemp, 1987, s.158). Blant fordelene Skemp (1987) trekker frem ved relasjonell kunnskap, er blant annet direkte og konkrete svar. Et annet aspekt han trekker frem er korrekte og raske svar. Oppgaver hvor det står «løs likningen og vis utregning» vil det som oftest være tilstrekkelig med å gjennomføre innøvde metoder og prosedyrer, derav prosedyrekunnskap. Uten å tallfeste er det ofte oppgaver som er konkrete og kan løses med kjente prosedyrer uten stor grad av refleksjon.
Elevene som deltok i forskningsprosjektet benyttet seg av flere metoder. I oppgaven var det ikke lagt noen føringer for hvilke metoder eller hvordan elevene skal forklare stegene i likningen. Dette var helt åpent, da er det helt naturlig at elevene metoden de liker best. Hvilken metode som elevene behersker best kan også spille inn på hvordan de ønsket å forklare stegene i likningsløsningen.
I hovedsak var det tre koder som kom frem med flest registreringer. Disse var «flytte bytte spesifikk addisjon», «side side spesifikk addisjon» og «side side spesifikk multiplikasjon». Som Ngu og Phan (2016, s.64) poengterer er det ikke alltid like lett å skille om elevene sitter med konseptuell kunnskap eller prosedyrekunnskap basert på hvilken metode de benytter seg av. Det vektlegges i større grad at vi må se på at elevene klarer å vise relasjon mellom sidene i likningen. I Gruppe 1 har elevene brukt både «Flytte bytte spesifikk» og «Side side spesifikk addisjon», disse fikk like mange svar på begge kodene, 7 på hver kode.
Gruppe 2 var fordelingen annerledes ved at «Side side spesifikk addisjon» ble brukt av flertallet med 20 personer og kun 3 personer brukte «flytte bytte spesifikk addisjon». Selv om disse elevene i denne gruppen holdt seg mer til en kode, betyr ikke det nødvendigvis at disse elevene har mindre forståelse for likninger. Ved å bruke «side side» metoden viser elevene gjennom likningsløsningen at det skal være balanse, noe som tyder på at elevene har en relasjonell forståelse for likninger (Ngu & Phan, 2016; Skemp, 1987).
I intervjuet med Gruppe 2 ble det nevnt at en grunn til at side side metoden ble mye benyttet var for å vise tydelig hvordan man løste likningen. Eleven så på dette som den «riktige» metoden for å forklare likningen, samtidig som eleven uttrykte god kjennskap til flytte bytte metoden.
Sitat fra I2:

> Det er egentlig en måte, men siden vi skal forklare til profesjonelle,

må vi jo si pluss pluss på begge sider. (…) Jeg hadde gjort enkelt flyttebytte, men siden vi må jo forklare hvordan vi har gjort det.
Så hadde jeg sagt en pluss en og en pluss på venstre side.

Når eleven vil forklare likninger blir «side side» sett på som en bedre metode for å tydeliggjøre hvordan likningen løses ved å vise at det blir gjort likt på begge sider gjennom stegene. Her fremlegger eleven likheter med at flytte bytte blir sett på som en «mystisk operasjon» (de Lima & Tall, 2008, s.8). Dette kan være en sammenheng med resultatene fra Gruppe 2. Resultatene fra denne gruppen har som nevnt hovedvekt på «side side spesifikk». Få elever setter prøve på likningen når vi ser alle samlet, med kun 2 som nevnte noe om dette. Det som kommer frem er at flere sjekker hva som passer inn for x slik at det er likt på begge sider. Denne måten å sjekke likningen baserer seg på at elevene har kontroll på konseptet med likhetstegnet. Her en fallgruve å misbruke likhetstegnet i mellomregninger eller støtteregninger (Webb & Abels, 2011). Begge gruppene viser god forståelse for funksjonen av likhetstegnet, med kun ett unntak. Som Kieran (1981) og (Pirie & Martin, 1997) påpeker er god forståelse av likhetstegnet en kritisk del av likningsløsning.
En mulig innfallsvinkel å belyse resultatene til denne studien er at elevene har jobbet så mye med likninger, at forståelsen for likhetstegnet fortsatt kan kjennetegnes som prosedyrekunnskap. Dette medfører at i dette tilfelle kunnskapen kommer frem som relasjonell kunnskap. Likningen som var utgangspunkt for datainnsamlingen var en relativt enkel likning da denne var lineær og alle tall under 10.
Kilpatrick et al mener at god forståelse for matematikk består av 5 deler, disse er «*conceptual understanding, preocedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning og productive dispotion”* (2001, s.128). Ved å se resultatene i lys av denne teorien vil man kunne si at elevene er i prosessen å forstå likninger. Noen få elever har truffet flere koder (6) som antyder en god forståelse for likninger i matematikk, samtidig har elevene jevnt over truffet på få, men flere koder (median for Gruppe 1 var 3 registeringer og median for Gruppe 2 var 2 registeringer). Spesielt konseptuell forståelse og prosedyreforståelse bygger på hverandre, og er tett flettet sammen i de 5 tidligere nevnte delene. Det vil med andre ord si at den ene ikke utkonkurrerer den andre og vi kan til en viss grad si at elevene
Dette kan også være en sammenheng ved at elevene i størst grad har forsøkt å forklare stegene i likningsløsningen med matematiske steg og utregninger. Det var i liten grad utfyllende setninger som forklarte tankegangen.

5.2 Resultater i lys av nærliggende studier

Funnene i denne studien hadde flere likheter og ulikheter til tidligere forskning. Ved å starte med de skriftlige besvarelsene. Det må selvsagt tas hensyn til at antall deltakere i denne oppgaven er betraktelig færre enn tidligere artikler (Larson, 2024; Andrews, 2020; Andrews & Öhman, 2017).

I denne oppgaven var den mest brukte metoden for å likningsløsning «side side spesifikk addisjon» med 17 registeringer, noe som utgjorde 50% av deltakerne. Deretter fulgte «flytte bytte spesifikk addisjon» med 10 registeringer som utgjorde 30%. Fordelingen på disse metodene skiller seg fra Norwegian student teachers' perspective on linear equations (Larson, 2024), her brukte majoriteten (64%) «swap side swap sign particular additive». «Do same to both sides particular additive» ble identifisert i 21% av besvarelsene. Svenske lærerstudenter antydet også å fortrekke «Do same to both sides particular additive» (Andrews, 2020), da 65 % av besvarelsene i den artikkelen inne minst en form for denne metoden.

Noe annet som dukket opp og skilte seg fra disse tidligere artiklene var «conceptual objektive», det jeg har kalt for «overordnet mål». Andrews (2020) undersøkte svenske lærerstudenter, hos disse inneholdt 38% av besvarelsene «conceptual objektive». Enda større andel hadde Larson (2024) i sin artikkel, her inneholdt 45% av besvarelsene «conceptual objektive». At gruppen til Larson (2024) og Andrews (2020) viser mer til meningen ved å finne x er naturlig å resonnere seg frem til da disse deltakerne er eldre enn deltakerne i denne studien. Deltakerne til Larson (2024) hadde en medianalder på henholdsvis 20 år for lærerstudenter på linjen for 1-7 og medianalder for 5-10 linjen på 21 år. Deltakerne til Andrews (2020) var enda eldre, hvor 63% var 22 år eller eldre.

I denne oppgaven inneholdt 9% av de skriftlige besvarelsene noe som fikk registering på «overordnet» mål, dette er markant lavere enn de to nevnte artiklene.

I intervjuet i Gruppe 2 som var den største gruppen, kom det frem at den foretrukne metoden for likningsløsning er «flytte og bytte», selv om denne gruppen hadde flest registeringer på «side side». Det er ikke grunnlag for å generalisere et intervju for hele denne gruppen, men det er mulig å antyde.

Som tidligere nevnt kom det frem i intervjuet at elever i Gruppe 2 uttrykte at de i hovedsak foretrekker å benytte seg av «flytte bytte» metoden. I sammenheng med dette ble det lagt til at fordi elevene skulle forklare stegene i likningsløsning var det hensiktsmessig å bruke «side side» metoden. Blant annet på grunn av denne var tydeligere på stegene, og at «flytte bytte» metoden i hovedsak var en den samme metoden, men ikke viste tilstrekkelig. Her er det flere

likhetstrekk til Andrews og Öhman (2017). I studien deres kommer det frem at elevene ser på «side side» metoden som den «riktige» metoden for å vise likningsløsning. Her trekkes det også frem at elever har påpekt at «flytte bytte» metoden er bygd videre på «side side» metoden, noe som nevnes i gruppeintervjuet for Gruppe 2.
Det vil ikke være passende å trekke for mange paralleller og lene seg for mye på disse tidligere artiklene basert på denne oppgaven. Det er flere grunner til dette, blant annet da det er store forskjeller i antall deltakere. I denne undersøkelsen deltok 34 ungdomsskoleelever på den skriftlige besvarelsen, og 6 elever av disse fordelt på 2 gruppeintervju. Dette står i sterk kontrast til Andrews (2020) sine 156 deltakere og Larson (2024) med 164 deltakere til å besvare skriftlig, og Andrews & Öhman (2017) som hadde 39 deltakere på gruppeintervju. Allikevel kan det trekkes indikasjoner fra denne oppgaven til disse artiklene at denne gruppen ungdomsskoleelever har visse likhetstrekk.

5.3 Pedagogiske implikasjoner

Drøftingen av funnene antyder at elevene har god kunnskap på hvordan de skal løse likninger og anvendelse av metoder. Begge metodene for likningsløsning blir benyttet av elevene, og det er naturlig at elevene benytter seg av den de føler seg mest trygg på. Det er fordeler og ulemper ved både «flytte bytte» og «side side» metodene (Larson, 2024; Andrews & Öhman, 2017). I likhet med Larson (2024) må det læres bort begge metodene slik at alle har kjennskap til disse. Elever er ulike og har egne preferanser.
Å få elevene til å forklare likningsløsning utfordrer eleven til å uttrykke seg matematisk
I Læreplanen står det, i MAT01-05, under representasjon og kommunikasjon at «Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. (Utdanningsdirektoratet, 2022)
Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2022).
Uten å generalisere for mye ut i fra det begrensede utvalget jeg har forsket på, ser jeg på det som viktig å trekke frem mer fokus på hva likninger representerer, og hva meningen med likningsløsning er. Ved å la elevene være med på læringsprosessen slik at de i større grad relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap (Sawyer, 2005).

Det er fortsatt viktig å trekke frem at relasjonell forståelse ikke nødvendigvis alltid er bedre enn instrumentell forståelse av matematikk (Skemp, 1987, s.158). Fra resultatene i denne oppgaven antyder at det er et fåtall som har forstått helheten og hva hensikten med likningsløsning.

Dette ligger per i dag i overordnet del av læreplanen, «Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger» (Kunnskapsdepartementer, 2017, s.11), og kan implementeres i større grad.

5.4 Begrensninger og svakheter ved studien

Da dette er en casestudie, og første masteroppgaven jeg skriver vil det selvsagt være rom for forbedringer. Studien har diverse svakheter og begrensninger som jeg vil belyse.

Noe av det første jeg vil påpeke som en begrensing og svakhet ved denne oppgaven er mangelen på et pilotprosjekt i forkant av hovedinnsamlingen av data. Dette ville jeg gjort for å kunne gjort de endringene jeg ser på nå i etterkant kunne vært fordelaktig. Det er ingen garanti for at et pilotprosjekt ville vært løsningen for å øke kvaliteten på studien, men sannsynligheten er stor. Ved en gjennomføring av pilotprosjekt i forkant ville jeg nok sannsynligvis sittet i ettertid med diverse begrensinger og svakheter ved studien, men disse kunne vært mindre markante enn det som er situasjonen etter denne oppgaven, slik den ble gjennomført nå.

Som tidligere nevnt i kapittel «Metode» var jeg inne på relasjon til tidligere elever da jeg har hatt praksis på denne skolen tidligere. Elevene kan ha tilpasset svarene til det de tror jeg ønsker å få som svar.

Ett annet aspekt ved datagrunnlaget er antall elever. Ett større utvalg elever kunne åpnet en mulighet for flere svar, og flere mer utfyllende svar. Dette vil med andre ord gid mer bredde for oppgaven. Til gjengjeld var svarene fra elevene i denne forskningen til en viss grad variert i form av korte og mer utfyllende svar. En skoleklasse består av unike elever, hvor de har ulike kunnskaper og motivasjon for å svare på oppgavene.

En annen innfallsvinkel på temaet om antall elever i undersøkelsen er at mer bredde kan gi mindre dybde. Dette er en casestudie som er kvalitativ forskning, og da er dybde viktig for oppgaven. Noe som bør poengteres er ved å ta for seg flere skoleklasser og/eller flere elever vil også mengden data som må analyseres, øke. Da jeg skrev denne masteroppgaven alene vil arbeidet falle på meg, noe som kan føre litt lavere kvalitet i analysen av data.

I lys av datainnsamlingen er oppgaveteksten veldig presis samtidig et annet «språk» en ungdomsskoleelever er vant til. Denne oppgaven var tidligere gitt til lærerstudenter på sitt første år på universitet og høyskole. Disse har mer erfaring og en annen forståelse for tekst enn det ungdomsskoleelever har. Jeg har ikke norsk som undervisningsfag, og dette er mulighet for å utforskes i en annen studie.

6. Avslutning

I dette kapittelet legger jeg frem en oppsummering av studien og deretter kommer med forslag til videre forskning.

6.1 Oppsummering av studien

Denne studien undersøkte «Hvordan forklarer ungdomsskoleelever lineære likninger for hverandre, når læreren er fraværende?».

I studien deltok to klasser fra en ungdomsskole i en studie om likninger, først svarte skriftlig hvor de hadde fått utdelt et ark med likningen $x + 5 = 4x - 1$. På dette arket var stegene for løsningen av likningen men ingen utregning. Elevene skulle skrive hvordan de ville forklart stegene i likningsløsning til en medelev, hvis læreren var fraværende. Deretter ble 3 elever fra hver klasse med på gruppeintervju, hvor hensikten var å få ut mer informasjon om hvordan elevene tenkte, eller om det var noe de ikke hadde fått med i den skriftlige besvarelsen.

Det kom tydelig frem at elevene i studien jevnt over brukte både «flytte bytte» og «side side» metoden for å løse likninger. De bruker som nevnt tidligere, metoden som de foretrekker mest. En større andel av elevene brukte begge metodene i sine forklaringer for likningsløsing. Det er vanskelig å si noe om hvilken metode som er best for læring og forståelse hos ungdomsskoleelever (Ngu & Phan, 2016).

Formålet med likningsløsningen er av betydning for valg av løsningsmetode. Hvis formålet er å løse likningen hurtig og komme frem til et korrekt svar, er det tydelig at elevene benytter seg av metoden de er mest komfortable med. Dersom formålet er å forklare likninger for andre elever, kom det frem i intervjuet at «side side» metoden ble sett på som foretrukket likningsløsningsmetoden fra elevenes perspektiv.

Det som kommer frem er at det viktig at eleven har god forståelse for likhetstegnet og dets funksjon (Kieran, 1981; Ngu et al., 2015; Pirie & Martin, 1997).

Elevene hadde størst fokus på å vise hvordan likningen ble løst matematisk, og ikke like stort fokus på hvordan de ville forklart stegene i likningsløsning til en medelev. Dette kan ha en sammenheng ved at få elever forklarte eller viste forståelse for hensikten med likningsløsning og hva den ukjente representerer.

Resultatene fra denne studien antyder at elevene hadde i stort grad prosedyreforståelse fremfor konseptuell forståelse (Kilpatrick et al., 2015). Å jobbe i større grad med dybdelæring fremover vil være med på å løfte forståelsen rundt likningsløsning og være med på å gi elevene et helthetlig bilde av hva likningsløsning er og hensikten med å få den ukjente alene (Sawyer, 2005).

I læreplanen er det fokus på at elevene skal ha rom for dybdelæring slik at de utvikler forståelse for sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette bør i større grad implementeres i algebraundervisningen og arbeid med likninger.

6.2 Videre forskning

Denne studien hadde store muligheter for å undersøke i flere retninger, men på grunn av oppgaven sitt omfang måtte begrenses. Innhentet informasjon var rikt i form av det er mye informasjon som kunne vært bearbeidet på andre måter og nye aspekter å undersøke. Erfaringen fra denne studien er at det er mye som kan forskes på videre innenfor algebra og likninger.

Likninger omfatter mer enn bare likningsløsning, slik som problemløsningsoppgaver og tekstoppgaver. Noe som kan og ville vært interessant å se på i fremtiden er hvordan elever løser tekstoppgaver ved hjelp av likninger. En annen retning å undersøke er kvaliteten på elever sine besvarelser i forbindelse med likninger, som Larson (2024) forslår.

7. Egne refleksjoner

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært givende og lærerik, samtidig krevende. Jeg har hatt en stor personlig utvikling innenfor matematikk fagdidaktikk. Under prosessen med denne masteroppgaven har jeg hatt en stor progresjon innenfor lese og tolke akademiske tekster.

Å skrive en mastergrad alene har vært mer krevende enn det jeg forestilte meg før semesteret startet. Belastningen denne oppgaven har påført meg, har gitt meg en større grad av respekt og annerkjennelse for akademikere. Det har vært en god erfaring å få tilbakemeldinger fra veileder, men jeg ser på det som fordelaktig å ha en medstudent for å diskutere avgjørelser og retninger innenfor oppgavens omfang.

Erfaringene jeg har fått under dette arbeidet har i stor grad påvirket meg og min kompetanse innenfor forskning. Dette tar jeg med meg inn i lærerprofesjonen og skoleutviklingen.

8. Litteraturliste

Andrews, P. (2020). Swedish primary teacher education students' perspectives on linear equations. *Nordisk matematikkdidaktikk, NOMAD:* 25.2 (2020): 29-48

Andrews, P., & Larson, N. (2019). The development of a set of low-inference codes for uncovering students' understanding of linear equations: Facilitating comparative analysis. In *Proceedings of the Seventh Conference on Research in Mathematics Education in Ireland* (pp. 35-42).

Andrews, P., & Xenofontos, C. (2017). Beginning teachers' perspectives on linear equations: A pilot quantitative comparison of Greek and Cypriot students. In *CERME 10*.

Andrews, P., & Öhman, S. (2017). Don't 'swap the side and swap the sign', you won't understand what you are doing: Swedish students' perspectives on linear equations. In *Eighth Nordic Conference on Mathematics Education, Stockholm University* (Vol. 30).

Andrews, P., & Öhman, S. (2019). Swedish Upper Secondary Students' Understanding of Linear Equations: An Enigma?. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(1), 117-129.

B Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159-181.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere 1* (4. utgave.). Universitetsforl.

Borowski, E. J. & Borwein, J. M. (1989). Dictionary of mathematics. . UK: Collins.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding School Mathematics. *Mathematics Teaching*, No. *81*, 24-27.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, *9*(2), 19-25.

Haglund, B. (2003). Stimulated recall: Några anteckningar om en metod att generera data. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, *8*(3), 145.

Hickman, M., & Monaghan, J. (2013). Networking methodologies: issues arising from a research study employing a multi-media artefact. In 8th conference for European research in mathematics education (CERME 8).

Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing. Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/noasp.205

Jensen, J.W. 2002: Exploring preservice teacher thinking: A comparison of five measures. ERIC: ED 464 956.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the Early Grades*. Routledge.

Keith, M. 1988: Stimulated recall and teachers' thought processes: A critical review of the methodology and an alternative perspective. Paper presented at the Annual Meeting of the Mid-South Educational Research Association, 17th, Louisville, KY, November 9–11

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2004). Algebraic thinkning in the early grades: What is it? The Mathematics Educator 2004, Vol.8, 139-151: https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kongelf , T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. Nordic Studies in Mathematics Education, 20(3-4), 83–109: https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/20_34_083110_kongelf.pdf

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 praktisk (MAT08-01).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/MAT08-01

Kunnskapsdepartementet. (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Larson, N. (2024). Norwegian student teachers' perspectives on linear equations. Nordic Studies in Mathematics Education, 29(1), 5–24

Meld.St.28 (2015-2016). *Fag-Fordypning-Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

National Research Council. 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822.

Ngu, B. H., & Phan, H. P. (2016). Comparing balance and inverse methods on learning conceptual and procedural knowledge in equation solving: a cognitive load perspective. *Pedagogies (Mahwah, N.J.)*, *11*(1), 63–83. https://doi.org/10.1080/1554480X.2015.1047836

Ngu, B. H., Chung, S. F., & Yeung, A. S. (2015). Cognitive load in algebra: element interactivity in solving equations. *Educational Psychology*, *35*(3), 271–293. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.878019

Parker, A., & Tritter, J. (2006). Focus group method and methodology: current practice and recent debate. *International Journal of Research & Method in Education*, *29*(1), 23-37.

Personopplysningsloven. (2018). *Lov om behandling av personopplysninger* (LOV-2018-06-15-38). Lovdata. https://lovdata.no/lov/2018-06-15-38

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen* (p. 300). Cappelen Damm akademisk.

Sawyer, R. K. (2005). Introduction: The New Science of Learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1–16). chapter, Cambridge: Cambridge University Press.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics* (Expanded American edition., pp. ix, 218). Lawrence Erlbaum.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565–579. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

Strong, T. & Lock, A. (2014). *Sosial konstruksjonisme – teorier og tradisjoner*. Fagbokforlaget

Universitetet i Oslo. (2023, 3 juli). *Informasjonssikkerhet og risikovurdering for Nettskjema*. https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/mer-om/informasjonssikkerhet/

Webb, D., & Abels, M. (2011). Restrictions in Algebra. In *Secondary Algebra Education* (pp. 101–118). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-334-1_5)

9. Vedlegg

Vedlegg 1 – Godkjenning Sikt

Godkjenning sikt

18.05.2024, 15:18 Meldeskjema for behandling av personopplysninger

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer **Vurderingstype** **Dato**

339475 Standard 26.01.2024

Tittel

Hvordan forklarer elever på ungdomsskolen stegene i enkle likninger for hverandre, når læreren ikke er tilstede?

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Avdeling for lærerutdanning

Prosjektansvarlig

Niclas Larson

Student

Kristian Nyhus

Prosjektperiode

01.01.2024 - 31.12.2024

Kategorier personopplysninger

Alminnelige

Lovlig grunnlag

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2024.

Meldeskjema

Kommentar

OM VURDERINGEN

Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. Vi har nå vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene.

FORELDRE SAMTYKKER FOR BARN
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt og hvilke databehandlere du kan bruke. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el.) .

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2 - Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

Hvordan forklarer elever på ungdomsskolen stegene i enkle likninger for hverandre, når læreren ikke er tilstede?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever forklarer stegene i enkle likninger for hverandre. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Algebra er en viktig del av matematikkfaget. Her ønsker jeg å forske på hvordan elever i ungdomsskolen forklarer stegene i enkle likninger for hverandre, når læreren er fraværende. Å undersøke hvordan elever forklarer likninger for hverandre vil være med på å øke kompetansen til lærere i mattefaget og undersøke hvordan vi kan skape økt læring hos elevene innenfor algebra og likninger. Denne studien er en del av en masteroppgave ved grunnskolelærerutdanningen 5-10 ved Universitet i Agder. Først vil klassene få utdelt ett ark med en enkel likning, her skal de forklare hvordan de ville formidlet dette til en medelev. Etter at klassene har gjennomført oppgaven vil jeg intervjue 3 elever fra hver klasse jeg gjennomfører opplegget. Intervjuene vil ha som formål å forsøke undersøke tankegang og få frem mer informasjon om hvordan de løste oppgaven. Oppgaven i klasserommet vil ta omtrent 20 minutter, gruppeintervjuene etter oppgaven vil ta omtrent 20 minutter.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om du vil delta i denne studien fordi du er foresatt til en elev i en klasse vi ønsker å gjennomføre en undervisningstime med tenkende klasserom i matematikk. Det bør også komme frem at en av studentene som er med på studien har en relasjon hos elevene fra før, og er også en grunn til hvorfor vi har valgt ut nettopp denne klassen.

Hva innebærer det for deg å delta?

Å delta vil innebære deltakelse i en undervisningstime i matematikk-faget med en lærerstudent tilstede i undervisningen, lærerstudenten vil gi dere oppgaven og samle det inn når elevene er ferdige.

Vi vil også ta ut en gruppe elever i etterkant av undervisningstimen for å holde et intervju med utgangspunkt i oppgavene de har jobbet med, der vi ser på blant annet: løsningsstrategier, forklaring av tankegang og utdypelse av svar. Gruppeintervjuet vil ta ca. 20 minutter, og det vil bli tatt lydopptak av gruppeintervjuet.

Dersom det er ønskelig vil det være mulig å få se intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt med forfatteren av dette skrivet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger om barnet ditt vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Dersom du ikke ønsker at barnet ditt skal delta i prosjektet vil barnet følge vanlig undervisning sammen med resten av klassen. Under undervisningen vil det ikke kunne komme frem informasjon som bryter med personvernet.

Jeg ønsker også å ta ut en gruppe elever på 3 stykker i etterkant av undervisningen til et gruppe-intervju. Dersom du ikke ønsker at barnet skal kunne delta i dette intervjuet vil barnet ditt følge vanlig undervisning.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lydopptak fra intervjuene vil kun være tilgjengelig for forskerne i prosjektet - samt veileder - så lenge prosjektet varer.
- Lydopptakene vil lagres på krypterte minnepinner, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data

Det vil kun bli gjort lydopptak i gruppeintervjuet i etterkant av undervisningsøkten.
Alt av personopplysninger vil anonymiseres ved publikasjon, og vi vil gjøre dette på en måte der ingen elever vil kunne bli gjenkjent.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes når oppgaven blir godkjent [31.12.2024]. Da vil lydopptakene bli slettet, og vi vil kunne ta vare på anonymiserte transkripsjoner fra intervjuet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved *Niclas Larson*, tlf: 38142404, e-post: niclas.larson@uia.no
- Universitetet i Agder ved *Kristian Nyhus*, tlf: 95921875, e-post: kristianny@uia.no
- Vårt personvernombud: *Trond Hauso,* e-post: Personvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til vurderingen som er gjort av personverntjenestene fra Sikt, kan du ta kontakt via:

- Epost: personverntjenester@sikt.no eller telefon: 73 98 40 40.

Med vennlig hilsen

Niclas Larson (Forsker/veileder)

Kristian Nyhus (Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Oppgaver i tenkende klasserom*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ At mitt barn kan delta i undervisningstimen
☐ At mitt barn kan delta i et gruppeintervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3 – Skriftlige oppgaven med likningen

Likningsoppgave

Kjønn	
Alder	
Mitt ønskede pseudonym	

Nedenfor er en løsning på likningen, $x + 5 = 4x - 1$

$$\begin{aligned} x + 5 &= 4x - 1 \\ 5 &= 3x - 1 \\ 6 &= 3x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Anta at du har en venn som var fraværende da læreren viste hvordan man kan løse likninger som denne.

Skriv ned hva du ville sagt og vist din venn for å hjelpe ham eller henne med å forstå hva likningen innebar og hvordan den ble løst.

Vedlegg 4 - Intervjuguide

Intervjuguide

- Semi-strukturert intervju med 3 elever fra hver gruppe som informanter

Formål
Jeg ønsker å gjennomføre gruppeintervjuer med 3 elever fra hver klasse som jeg gjennomfører opplegget/oppgaven i. Her vil jeg stille spørsmål om hvilke valg og forsøke å undersøke hvorfor de tok de valgene de gjorde. Spørsmålene nedenfor vil være ett utgangspunkt og fungere mer som veiledende for intervjuene.
Spørsmål om oppgavene

1. Hvorfor valgte du denne fremgangsmåten?
2. Var det en grunn til at du ikke valgte «den andre» metoden
3. Forklar så godt du kan hvordan du tenkte her
4. Hvorfor valgte du å bruke flytte/bytte fremfor side mot side

Vedlegg 5 - Analyseverktøy

Navn på kode	**Eleven skriver noe om…**
Drøfter karakter av x	x er en variabel eller en ukjent og representerer et vilkårlig tall
Balanse i likhetstegnet	Balanse i likningen og begge sider av likhetstegnet er likt
Overordnet mål	finner "verdien av x" (peker på meningen ved likningsløsning)
Operasjonelt mål	Får x alene, eller x på en side (peker på prosessen av likningsløsning)
Flytte bytte generell	Generelt flytte bytte bevegelsen av objekt
Flytte bytte med addisjon	Flyttebytte bevegelsen uten henvisning til likningen som undersøkes
Flytte bytte spesifikt med addisjon	Flyttebytte bevegelsen med addisjon av objekter i likningen
Flyttebytte med generell multiplikasjon	Flyttebytte bevegelsen med multiplikasjon uten henvisning til likningen som undersøkes
Flytte bytte med spesifikk multiplikasjon	Flyttebytte bevegelsen med objekter av likningen som undersøkes
Side Side generelt	Prinsippet ved å løse likningen ved å gjøre det samme på begge sider av likningen
Side side generelt addisjon	Løser likningen ved å addere eller subtrahere det samme objektet på begge siden uten referanse til likningen som undersøkes
Side side spesifikt addisjon	Løser likningen ved å addere eller subtrahere det samme objektet på begge sider med referanse til likningen som undersøkes
Side side generell multiplikasjon	Løser likningen ved å multiplisere eller dividere på begge sider av det samme objektet uten henvisning til likningen som undersøkes
Side Side spesifikk multiplikasjon	Løser likningen ved å multiplisere eller dividere på begge sider av likningen med referanse til likningen som undersøkes
Uspesifisert handling på en koeffisient	En multiplikativ operasjon på ligningen basert på verdien av koeffisienten uten henvisning til verken flytte bytte eller side side
Setter prøve	Sjekker eller nevner muligheten for å sette prøve på løsningen
Sjekker hva som passer	Sjekker ut hvilket tall som passer for x slik at likningen er lik på begge sider av er lik tegnet
Totalt	