Universitetet i Agder

Master

Matematikkspill som en Algebra Learning – Teaching Activity

En kvalitativ casestudie om algebraisk aktivitet i realisingen av en Algebra Learning – Teaching Activitiy på et 7. trinn

JON SON HA
SANDER NILSEN OPPBERGET

VEILEDER
David Alexander Reid

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår periode ved Universitet i Agder. Gjennom arbeidet med denne oppgaven har vi fått mulighet til å fordype oss i et spennende og givende tema. Det har vært en utfordrende, men også lærerik prosess.

Vi vil spesielt rette en takk til Hector. Takk for alle de fantastiske turene vi har delt. Takk til Yana Smirnova og Marte Qvalben for god moralsk støtte og for at dere har holdt ut med oss i denne prosessen.

Vil også vi takke for at vi fikk bidra til ALGEBRA-prosjektet. Det har vært givende og interessant å bli inkludert i det faglige felleskap blant dyktige lærere og forskere på UiA. Videre vil vi takke læreren som realiserte *ALTA kortspill* og elevene som valgte å delta.

Sist, men ikke minst, vil vi rette en takk til vår veileder, David Alexander Reid, som har kommet med gode tilbakemeldinger, støtte og innspill dette semesteret.

Jon Son Ha
Sander Nilsen Oppberget

Kristiansand, mai 2024.

Sammendrag

I denne studien har vi undersøkt hvilke algebraiske aktiviteter som kommer til syne i realisering av en *Algebra Learning-Teaching activities* (*ALTA*) på 7.trinn, og hvilke momenter som var hensiktsmessige for å tilrettelegge for algebraisk aktivitet. Vi har utviklet en *ALTA* kalt *ALTA kortspill* som er et undervisningsopplegg utviklet i forbindelse med et forskningsprosjekt kalt *Algebra Learning: Generalising, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation* (ALGEBRA). ALGEBRA er et prosjekt i regi av Universitetet i Agder (UiA) med hensikt i å skape kunnskap om effektive læringsmiljøer, oppgaver og verktøy for å utvikle algebraisk tenkning på 5 – 7.trinn (Universitetet i Agder, u. å).

Studien er en kvalitativ casestudie hvor vi har valgt fire matematiske kunnskaper som er identitetselementene til addisjon og multiplikasjon (IE), variabler, behovet for et notasjonssystem og re-fokus av likhetstegnet. Disse målkunnskapene er grunnlaget for *ALTA kortspill*. *ALTA kortspill* tar utgangspunkt i matematikkspill og oppbyggingen er inspirert av designprinsipper fra teorien for didaktiske situasjoner (TDS) hvor vi bruker didaktisk ingeniørvirksomhet (DI).

ALTA kortspill ble realisert i et 7.trinn med 15 elever fordelt på tre økter. I realiseringen samlet vi data med feltnotater, video- og taleopptak og spillark. Dataen ble analysert gjennom en teoretisk tematisk analyse ved hjelp av et analyseverktøy. Analyseverktøyet ble utviklet med utgangspunkt i teori fra Kieran (2004), Blanton et al. (2015) og Russell et al. (2011) og innebærer: fokus på strategier, variabler, notasjon med mening, re-fokus på likhetstegnet og generalisert aritmetikk. Resultatene av analysen brukte vi til å undersøke hva slags algebraisk aktivitet som kom til syne, samt hvilke momenter knyttet til realiseringen som var hensiktsmessig for å tilrettelegge for algebraisk aktivitet. Vi så tegn til algebraisk aktivitet i alle kategoriene fra analyseskjemaet, og momenter som spill, sosial organisering og meningsfull kontekst er hensiktsmessige i tilrettelegningen av algebraiske aktiviteter.

Abstract

In this study we have investigated which algebraic activities that become apparent in the realization of an *Algebra Learning-Teaching activities* (*ALTA*) in a 7th grade, and which elements were favorable to promote algebraic activities. We have developed an *ALTA* called *ALTA kortspill*, which is a teaching program developed in connection with a research project called *Algebra Learning: Generalising, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation* (ALGEBRA). ALGEBRA is a project organized by the University of Agder (UiA) with the aim to creating knowledge about effective learning environments, tasks and tools to develop algebraic thinking in grade 5-7.

The study is a qualitative case study where we have chosen four mathematical knowledges which are the identity elements of addition and multiplication (IE), variables, the need for a notation system and re-focus of the equal sign. These target knowledges form the foundation of *ALTA kortspill*. *ALTA kortspill* are based on mathematics games and the structure is inspired by design principles from the theory of didactical situations (TDS) where we use didactical engineering (DI).

The *ALTA kortspill* was realized in a 7th grade with 15 students spread over three sessions. In the realization, we collected data with field notes, video and voice recordings and game sheets. The data was analyzed through a theoretical thematic analysis using an analysis tool. The analysis tool was developed based on theory from Kieran (2004), Blanton et al. (2015) and Russell et al. (2011) and involves: focus on strategies, variables, notation with meaning, re-focus of the equals sign and generalized arithmetic. We used the results of the analysis to investigate what kind of algebraic activity become apparent, as well as which elements related to the realization were favorable to promote algebraic activity. We saw signs of algebraic activity in all of the categories from the analysis tool, and elements such as games, social organization and meaningful context are favorable elements to promote algebraic activities.

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

1 Innledning

I dette kapittelet vil vi starte med å redegjøre for bakgrunnen og aktualiteten av studien vår (1.1). Videre vil vi i 1.2 presentere formålet med oppgaven og forskningsspørsmålene. 1.3 vil forklare oppgavens struktur.

1.1 Bakgrunn og aktualitet

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) viser at norske elever i grunnskolen presterer svakt i algebra, og at det er en negativ trend knyttet til prestasjonene (Grønmo et al., 2017, s. 40). I de nyeste tilgjengelige resultatene reflekteres dette i TIMSS 2019 da det kommer frem at norske elever presterer dårligere enn de andre nordiske landende innenfor algebra (Kaarstein et al., 2020, s. 18). Videre viser resultater fra Nasjonalt organ for kvalitet i utdanninga (NOKUT) sin nasjonale deleksamen for grunnskolelærerutdanningen at lærerstudenter deler de svake prestasjonene i algebraisk tenkning. Dette inkluderer også didaktiske og metodiske aspekter (Haakens & Bråten, 2023, s. 6). Det er bekymringsverdig ettersom algebra er et av de matematiske kompetanseområdene i Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20) og er viktig for videre læring i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Ifølge Birkeland et al. (2019, s. 279) er algebra en port til høyere utdanning, men kan også være en barriere i elevers utdanning. Forskning viser at algebra og matematikkferdigheter også er en suksessfaktor videre i livet utenfor skolen (Evang, 2020, s. 283; Knuth et al., 2016, s. 65). Matematikkdidaktikere argumenterer for innføringen av tidlig algebra og algebraisk tenkning i skolen som et essensielt aspekt for videre suksess i algebra (Blanton et al., 2015; Kaput, 2008; Kieran et al., 2016). Kieran (2004) sin definisjon av algebraisk tenkning bygger på å utvikle tenkemåter i aktiviteter som blant annet generalisering, problemløsning, modellering, begrunne og å bevise (2.1.2). Ser vi dette i lys av LK20, harmonerer dette med kjerneelementene i matematikk som inkluderer å utvikle tankemåter innenfor utforskning og problemløsning, generalisering og abstraksjon, resonnering og argumentasjon og representasjon. Kjerneelementene representerer det mest sentrale faglige innholdet som elevene skal arbeide med i sin utdanning (Kunnskapsdepartementet, 2019; Utdanningsdirektoratet, 2019). På bakgrunn av dette kan det argumenteres for at det er et behov for å innføre tidlig algebra og algebraisk tenkning i grunnskolen, og at lærere og lærerstudenter trenger mer kompetanse i undervisningen knyttet til algebra.

Algebra Learning: Generalizing, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation (ALGEBRA) er et prosjekt i regi av Universitet i Agder (UiA) som skal bidra til å finne generell kunnskap om effektive læringsmiljøer, oppgaver og verktøy for å utvikle algebraisk tenkning på mellomtrinnet. En del av prosjektet involverer utvikling av *Algebra Learning-Teaching Activities* (*ALTA*), som er et undervisningsopplegg med fokus på algebraisk læring (Universitetet i Agder, u. å). Da vi fikk mulighet til å ta del i prosjektet gjennom å utvikle og realisere en *ALTA* ønsket vi å bruke matematikkspill som utgangspunkt. I et systematisk overblikk om tidlig algebraundervisning knyttet til algebraisk tenkning fra 2022, fant Sibgatullin et al. (2022, s. 11) blant annet ut at ikke-tradisjonelle aktiviteter, som spill, har en positiv effekt på elevers algebraiske tenkning. Vi har positive erfaringer med matematikkspill fra skolen, og har skrevet en forskning og utviklingsarbeid (FoU) oppgave om det. I tillegg hadde vi et ønske om å bruke teorien for didaktiske situasjoner (TDS) som didaktisk modell, ettersom vi synes teorien er spennende og utfordrende, og kan ha verdi for oss som fremtidige lærere.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Hovedformålet med denne studien er å bidra til *ALGEBRA*-prosjektet ved å utvikle en *ALTA* og realisere denne i en klasseromssituasjon på 7. trinn, samt å undersøke den for algebraisk tenkning gjennom algebraisk aktivitet. Vi er også interessert i å øke vår egen kompetanse om utviklingen av algebraisk tenking gjennom algebraiske aktiviteter i klasseromsituasjoner. Dette kan komme elevene til gode, ved at vi som fremtidige lærere har økt vår kunnskap om algebraiske aktiviteter og hvordan vi kan tilrettelegge for disse i klasserommet. I den forbindelse har vi formulert to forskningsspørsmål:

1. *Hva slags algebraiske aktiviteter kommer til syne gjennom realiseringen av ALTA kortspill på et 7. trinn?*
2. *Hvilke momenter ved realiseringen av ALTA kortspill opplevde vi som hensiktsmessig for å legge opp til algebraisk aktivitet?*

1.3 Oppgavens oppbygning

I kapittel 2 skal vi først presenterer teorien vi bruker til å undersøke algebraisk aktivitet, deretter vil vi presenterer teori om TDS og DI (didaktisk ingeniørvirksomhet) og avslutningsvis presentere spillteori. Kapittel 3 og kapittel 4 vil ta for seg metoden. Metode del 1 (kapittel 3) handler om utviklingen av *ALTA kortspill* og er basert på tre av fire faser av DI. I metode del 2 (kapittel 4) beskriver vi forskningsmetodologien vi har brukt til å undersøke algebraisk aktivitet. Kapittel 5 vil være en fremleggelse av analysen av resultater. Kapittelet vil starte med et sammendrag fra realiseringen, inkludert avvik fra *ALTA kortspill*. Vi vil deretter presentere resultater fra analysen i kategorier for algebraisk aktivitet. I kapittel 6 vil vi drøfte resultatene opp imot kjent teori gjennom forskningsspørsmålene. Kapittel 7 vil presentere våre konklusjoner, implikasjoner og egne refleksjoner.

2 Teori

I dette kapittelet vil vi presentere det teoretiske grunnlaget for forskningen. I 2.1 vil vi starte med å presentere teori om algebraisk tenkning. I 2.2 vil vi presentere relevant teori fra teorien for didaktiske situasjoner (TDS) og i 2.3 didaktisk ingeniørvirksomhet (DI). Avslutningsvis, vil vi i 2.4 presentere relevant spillteori.

2.1 Algebraisk tenkning

I 2.1.1 skal vi få en oversikt over hvordan algebraisk tenking kan operasjonaliseres og argumentere for hvor vi befinner oss i oversikten. Videre i 2.1.2 skal vi redegjøre for en definisjon av algebraisk tenking. 2.1.3 handler om algebraiske aktiviteter i overgangen mellom aritmetikk og algebraisk tenkning. Avslutningsvis vil vi redegjøre for sammenhengen mellom vår definisjon på algebraisk tenkning og algebraisk aktivitet i 2.1.4.

2.1.1 Algebraiske tradisjoner

Det kan være utfordrende å navigere blant forskningslitteraturen innenfor feltet tidlig algebra og algebraisk tenkning. Ifølge Radford (2010, s. 2) var det umulig å finne enighet om karakteristikkene av algebraisk tenkning i forskningsfeltet på 1980-tallet og 1990-tallet. Det er variasjon mellom hvordan algebraisk tenkning bør bli undervist, hva slags aldersgruppe som kjennetegner tidlig algebra og hvordan algebraisk tenking kan operasjonaliseres i undervisning (Eriksson, 2022, s. 1). Eriksson (2022, s. 1) har gjennomført en litteraturstudie hvor hun foreslår en måte å organisere hvordan man kan operasjonalisere algebraisk tenkning i aldersspennet 5 – 12 år. Eriksson (2022) presenterer tre tradisjoner: aritmetikk først, algebra og aritmetikk samtidig, og algebra først. Disse tradisjonene blir igjen delt opp i seks kategorier (figur 1).

Tradition	**Category**
1. Arithmetic thinking tradition (arithmetic first)	1.a) Algebraized elementary mathematics 1.b) Pre-algebra
2. Algebra and arithmetic at the same time	2.a) Early algebraization
	2.b) Arithmetico-algebraic thinking
	2.c) Emergent algebraic thinking
3. Algebraic thinking tradition (algebra first)	3.a) Algebraic work

Figur 1: Forskjellige kategorier knyttet til operasjonalisering innenfor tidlig algebra (hentet fra Eriksson, 2022, s. 3)

På bakgrunn av dette vil vi forsøke å avgrense hvor vi befinner oss i landskapet om teori om algebraiske tenking. I *ALTA*-en vi skal designe er aritmetikken sentral for få flest mulig poeng i matematikkspillet. Med utgangspunkt i problemstillingen er vi interessert i å se om elevene er i algebraiske aktiviteter som kan bidra til å utvikle algebraisk tenkning. Vi vil derfor argumentere for at vi befinner oss innenfor den andre tradisjonen, som baserer seg på å utvikle algebraisk tenkning samtidig som elevene bruker aritmetikk. Innenfor denne tradisjonen befinner vi oss hovedsakelig i kategorien *Early algebraization*. Ideen om *early algebraization* baserer seg på at aritmetikk kan være mer enn instrumentell kunnskap og undervisningen fokuserer ofte på å gi elevene mulighet til å analysere relasjoner mellom mengder, generalisere, problemløsing, identifisere strukturer, modellere, bevise, argumentere og prediktere (Blanton & Kaput, 2011; Kieran, 2004, referert i Eriksson, 2022, s. 4). På grunnlag av denne tradisjonen og kategorien, vil vi hovedsakelig, men ikke utelukkende, ta utgangspunkt i teori som sammenfaller med *early algebraization*. Dette betyr at teori fra blant annet Kieran (2004), Blanton et al. (2015) og Russell et al. (2011) vil være fremtredende i denne oppgaven. For enkelhetens skyld vil vi forholde oss til Eriksson (2022) sin avgrensing om tidlig algebra som er fra 5 – 12 år, som faller innenfor aldersspennet på mellomtrinnet.

2.1.2 Definisjon på algebraisk tenkning

Som vi har sett fra Eriksson (2022) er det stor variasjon i hvordan algebraisk tenkning operasjonaliseres i forskningslitteraturen. Dette betyr også at det finnes ulike måter å definere algebraisk tenkning på. Ifølge Hodgen et al. (2018) er algebraisk tenkning en menneskelig aktivitet som algebraen er et resultat av og, viser til at forskning på algebraisk tenkning blant annet fokuserer på elevers handlinger knyttet til hvordan de utfører, tenker på og diskuterer algebra. Radford (2010, s. 15-16) argumenterer for at tenkning er en kompleks refleksjonsform og blir formidlet gjennom sansene, kroppen, tegn og gjenstander. Videre hevder han at omfanget av den algebraiske tenkning som oppstår defineres av hvordan vi løser matematiske situasjoner på en analytisk måte og hvordan vi bruker semiotiske ressurser. Både Hodgen et al. (2018) og Radford (2010) beskriver algebraisk tenking på forskjellige måter, men knytter dem til menneskelige aktiviteter. For å forholde oss til én definisjon, vil vi gå nærmere inn på Kieran (2004) sin definisjon på algebraisk tenkning og hvordan hun redegjør for algebraiske aktiviteter.

Kierans definisjon på algebraisk tenkning

Kieran (2004, s. 141-142) sier at det finnes algebraisk aktivitet i tre former: generasjonell algebra, transformasjonell algebra og global meta-nivå algebra. Generasjonell algebra innebærer dannelse av uttrykk og ligninger som er objekter av algebra. Den andre formen for algebra, transformasjonell algebra, innebærer regelbaserte handlinger som endrer formen på en algebraisk ligning eller uttrykk, uten å endre dens verdi. Global meta-nivå matematikkaktiviteter er den tredje formen for algebraisk aktivitet i skolen. Denne kategorien innebærer aktiviteter der algebra blir brukt som et verktøy, men som ikke er begrenset til algebra alene. Dette inkluderer aktivitetene problemløsing, generalisering, modellering, begrunne, bevise, forutse, analysere sammenhenger, undersøke endringer og oppdage strukturerer (Kieran, 2004, s. 142). Kieran (2004) argumenterer for at global meta-nivå aktiviteter innen algebra kan bidra til at elevene finner algebra mer meningsfullt. Videre argumenterer hun for at denne formen er avgjørende for å utvikle måter å tenke på som er nødvendig for å mestre algebra. Gjennom dette argumenterer Kieran (2004, s. 148) for at det tillater oss å ha en idé om algebraisk tenking tidlig i skolen, som fortsatt er passende med algebraisk aktivitet på høyere trinn. Global meta-nivå matematikkaktiviteter er derfor utgangspunktet for Kieran (2004, s. 148) sin definisjon av algebraisk tenking på de tidligere trinnene i grunnskolen.

> Algebraisk tenkning i de tidligere klassetrinnene involverer utvikling av tenkemåter innenfor aktiviteter hvor symbolsk algebra kan bli bruk som et verktøy, men som ikke er eksklusive for algebra og som kan gjennomføres uten å bruke symbolsk algebra i det hele tatt, slik som, å analysere forhold mellom mengder, legge merke til strukturer, studere endring, generalisere, problemløsning, modellering, begrunne, bevise og forutsi. (Kieran, 2004, s. 148, vår oversettelse).

Vi vil bruke Kieran (2004) sin definisjon for å undersøke algebraisk tenkning gjennom global meta-nivå aktiviteter. Ettersom definisjonen bygger på å utvikle måter å tenke på innenfor disse algebraiske aktivitetene, vil vi nå gå dypere inn på hva vi mener faller innenfor disse aktivitetene.

2.1.3 Algebraisk aktivitet

I dette delkapittelet skal vi redegjøre for Russell et al. (2011) sine fire matematiske aktiviteter som er bindeledd mellom aritmetikk og algebraisk tenkning, Kieran (2004) sine fem fokusområder i overgangen fra aritmetisk tenkning til algebraisk tenkning, og tre av Blanton et al. (2015) sine fem store ideer som gir mulighet for å utvikle algebraisk tenkning.

Fire bindeledd mellom aritmetikk og algebraisk tenkning

Russell et al. (2011) presenterer fire matematiske aktiviteter som består av både aritmetiske og algebraiske aktiviteter. Videre argumenterer Russell et al. (2011) for at disse aktivitetene er bindeleddet mellom aritmetikk og algebraisk tenkning. De fire matematiske aktivitetene er:

- Forstå atferden til operasjonene
- Generalisere og begrunne
- Utvide nummersystem
- Bruke notasjon med mening (Russell et al., 2011, s. 43, vår oversettelse)

Disse bindeleddene har to formål: Elevene skal få mulighet til å utvikle seg fra aritmetikk mot algebra, og elevene skal få mulighet til å utvikle sin forståelse av aritmetiske operasjoner og utvikle sine regneferdigheter (Russell et al., 2011, s. 44). Ved å utforske disse matematiske aktivitetene vil elevene få en grundigere forståelse for betydningen av aritmetiske operasjoner og utvikle måter å tenke på i matematikken (Russell et al., 2011, s. 67).

Å arbeide med å forstå atferden til operasjonene er en sentral aktivitet i overgangen fra aritmetikk til algebraisk tenkning. Ifølge Russell et al. (2011, s. 45-46) handler denne aktiviteten om å utforske hvordan de grunnleggende aritmetiske operasjonene fungerer, og hvordan deres atferd og egenskaper kan forstås og anvendes i algebraiske kontekster. Det er viktig at elevene gjennom tidlig innføring og erfaring får utforske og reflektere over operasjoners natur. Dette kan bidra til elevenes evne til å bruke og manipulere disse konseptene i de senere trinnene.

Russell et al. (2011, s. 51) argumenterer for at elevene må få mulighet til å generalisere og begrunne i matematikkundervisningen. Dette handler om å formulere, representere og begrunne generaliseringer om operasjoner. Aktiviteten kan deles i to aspekter: artikulering av generelle påstander, og utvikling av et matematisk argument for å rettferdiggjøre en generell påstand (Russell et al., 2011, s. 51, vår oversettelse). Artikulering av generelle påstander handler om at elevene utforsker atferden og egenskapene til operasjoner og lærer å artikulere dette på en tydelig og generell måte (Russell et al., 2011, s. 53). Utviklingen av et matematisk argument for å rettferdiggjøre en generell påstand innebærer bruk av logisk resonnering og bevis for å forklare hvorfor en generalisering er sann, og er noe som skjer gjennom elevarbeid (Russell et al., 2011, s. 54-55).

Den tredje av Russell et al. (2011) sine matematisk bindeledd er utvidelse av nummersystemet. Denne aktiviteten involverer utforskningen om hvordan elevenes allerede kjente operasjoner og generaliseringer oppfører seg når man utvider til nye typer tall eller tallmengder, slik som negative tall, brøker eller desimaler (Russell et al., 2011, s. 59).

Det siste bindeleddet mellom aritmetikk og algebra handler om at elevene må kunne utvikle en forståelse for å bruke notasjonen med mening. Ifølge Russell et al. (2011, s. 63) bør dette gjøres gjennom å først la elevene få tid til å uttrykke sine påstander med ord, for så å koble disse uttalelsene til argumenter basert på representasjoner. Russell et al. (2011, s. 64) argumenterer for at når elevene modellerer generelle påstander ved bruken av representasjoner og kontekster, hjelper dette elevene med å utvide bruken av symbolene i aritmetikken. Videre poengterer (Russell et al., 2011, s. 66-67) at overgangen til bruk av algebraisk notasjon krever å både koble nye symboler til det de representerer, samt å lære nye konvensjoner. Ettersom dette kan være utfordrende for elevene på de lavere trinnene, krever det at lærer bør være oppmerksom på dette i arbeid med tidlig innføring av algebraisk notasjon.

Fem fokusområder i utviklingen av algebraisk tenkning

Kieran (2004, s. 140) argumenterer for en tidlig innføring av algebraisk tenking i skolen gjennom aktiviteter som fremmer algebraisk tenkning. Elever som har en aritmetisk referanseramme, fokuserer ofte på å regne ut instrumentelt uten å se de relasjonelle aspektene ved operasjonene. Kieran (2004) presenterer fem punkter som kan hjelpe elever som har en aritmetisk referanseramme til å utvikle algebraisk tenking:

1. Fokusere på relasjoner og ikke kun kalkulering av numeriske svar;
2. Fokusere på operasjoner, samt deres inverse, og den relaterte ideen om å gjøre / reversere;
3. Fokusere på å både representere og løse et problem fremfor det å kun løse det;
4. Et fokus på både tall og bokstaver, i stedet for bare tall. Dette inkluderer:
   (i) å arbeide med bokstaver som noen ganger kan være ukjente, variabler, eller parametere;
   (ii) å akseptere svar som er utelukkende bokstavuttrykk;
   (iii) å sammenligne uttrykk for likhet basert på egenskaper snarere enn numerisk evaluering;

5. Et re-fokus på betydningen av likhetstegnet. (Kieran, 2004, s. 140, vår oversettelse)

Store ideer som legger opp til algebraisk tenkning

Blanton et al. (2015) argumenterer for at tidlig innføring av algebraiske aktivitet på barneskolen kan bidra til å mestre algebra senere i skolen. Kaput (2008, s. 10-13) presenterer to kjerneaspekter ved algebra, disse kjerneaspektene består av tre innholdstråder og mye av forskning om tidlig algebra har utviklet seg fra disse innholdstrådene (Blanton et al., 2015, s. 43). Blanton et al. (2015, s. 43) presenterer fem store ideer som blant annet baserer seg på Kaput (2008) sine innholdstråder som gir mulighet for å utvikle algebraisk tenkning i de tidligere trinnene på grunnskolen:

1. Ekvivalens, uttrykk, likninger og ulikheter
2. Generalisert aritmetikk
3. Funksjonell tenkning
4. Variabel
5. Proporsjonal resonnering (Blanton et al., 2015, s. 43, vår oversettelse)

Disse fem store ideene er fundamentale for å forstå algebra gjennom å tilrettelegge for kontekster som algebraisk tenking kan oppstå (Blanton et al., 2015, s. 44). Vi har valgt å se bort ifra ideene om ulikheter, funksjonell tenking og proporsjonal resonnering, ettersom disse ideene ikke er i vårt fokusområde.

Ifølge (Blanton et al., 2015, s. 43) handler den store ideen ekvivalens, uttrykk og likninger om tre aspekter: «å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet, resonnere og representere med uttrykk og likninger i deres symbolske form, og beskrive forhold mellom og rundt generaliserte mengder som kan være eller ikke være ekvivalente» (Blanton et al., 2015, s. 43, vår oversettelse).

Videre beskriver de at generalisert aritmetikk handler om å generalisere aritmetiske sammenhenger. Dette inkluderer fundamentalegenskaper til tall og operasjoner, og resonnering rundt aritmetiske uttrykk, heller enn deres instrumentelle del av dem (Blanton et al., 2015, s. 43).

Den tredje store ideen vi vil fokusere på er variabel. Denne ideen handler om å bruke «symbolsk notasjon som et språklig verktøy for å representere matematiske ideer på en kortfattet måte og inkluderer de forskjellige rollene en variabel spiller i ulike matematiske kontekster» (Blanton et al., 2011, referet i Blanton et al., 2015, s. 43, vår oversettelse).

2.1.4 Algebraisk aktivitet og algebraisk tenkning

Ser vi de algebraiske aktivitetene i 2.1.3 i lys av Kieran (2004) sin definisjon av algebraisk tenkning (se 2.1.2), argumenterer vi for at disse algebraiske aktivitetene harmonerer med aktivitetene i definisjonen til Kieran (2004, s. 142), som blant annet inkluderer problemløsing, generalisering, begrunne, bevise, analysere sammenhenger, og oppdage strukturerer. Definisjonen bygger på å utvikle tankemåter innenfor disse aktivitetene, men ettersom dette er vanskelig å måle, vil vi ta utgangspunkt i at algebraisk tenkning utvikles når elevene er i aktivitetene presentert i 2.1.3. Videre når vi henviser til algebraisk aktivitet er det aktivitetene vi har gjort rede for i 2.1.3 som vi viser til.

2.2 Teorien for didaktiske situasjoner

I dette kapittelet vil vi presentere vårt teoretiske rammeverk for utviklingen av *ALTA kortspill*, som er teorien for didaktiske situasjoner (TDS). I 2.2.1 vil vi presentere generelle aspekter ved teorien. Videre i 2.2.2 skal vi gjøre rede for sentrale begreper i TDS og i 2.2.3 skal vi presentere en modellering av didaktiske situasjoner.

2.2.1 TDS som teoretisk rammeverk

Ifølge Strømskag (2022, s. 25) er teorien for didaktiske situasjoner en vitenskapelig tilnærming til læring og undervisning i matematikk, som også inneholder metodologi for å designe undervisning. TDS kan dermed bli brukt til å designe læringssituasjoner, gjøre analyse av klasserommet og utvikle lærerpraksis (Mangiante-Orsola et al., 2018). TDS har røtter tilbake til 1960-tallet i Frankrike, hvor Guy Brousseau ledet forskningen som siden den gang har vært i en stadig utvikling (Strømskag, 2022, s. 25). Vi vil videre i denne studien hovedsakelig fokusere på TDS-teori fra Strømskag (2022) og Artigue (2014).

Sentralt i TDS er hypotesen som antar at et hvert matematisk begrep eller resultat, er en løsning på minst ett sett av matematiske forutsetninger. Forutsetningene er en del av et større didaktisk system og rettet mot å løse et bestemt problem (Strømskag, 2022, s. 28). Ifølge Strømskag (2022, s. 28) kan det didaktiske systemet kan sees på som en triplett: En person eller gruppe (lærer eller lærerne), gjør noe for å hjelpe en annen gruppe (elevene) til å lære eller studere en kunnskap. TDS sitt overordnede mål er å forstå hvordan forutsetninger muliggjør, og begrensninger hindrer læring i disse didaktiske systemene, og hvordan funksjonene i disse systemene kan forbedres. Videre definerer det didaktiske systemet strukturen i en didaktisk situasjon, som i TDS-sammenheng er et verktøy for å hjelpe elever å oppnå kunnskap som de vet hensikten med og brukbarheten av. I en didaktisk situasjon er det matematiske konseptet sentralt i problemløsningen. Elever bruker dette systemet av forutsetninger til å løse problemet og få en forståelse av kunnskapen (Strømskag, 2022, s. 29). Ifølge Strømskag (2022, s. 72) betyr dette at en undervisningssituasjon med en didaktisk situasjon har to prinsipper:

1. Målkunnskapen er en slags optimal løsning på problemet i et miljø.
2. Elevene som gruppe skal være i stand til å finne denne optimale løsningen gjennom samspill med miljøet og uten betydelig lærerhjelp.

Vi vil gå grundigere inn på hvordan didaktiske situasjoner kan modelleres i 2.2.2.

2.2.2 Sentrale begreper

I dette delkapittelet vil vi redegjøre for sentrale begreper innenfor TDS. Dette innebærer målkunnskapen og epistemologisk hindring, miljø, adidaktisk og fundamentalsituasjon, didaktiske variabler og didaktisk kontrakt og regulering.

Målkunnskap og epistemologisk hindring

Målkunnskapen innenfor TDS refererer til den bestemte matematiske kunnskapen som er læringsmålet for undervisningssituasjonen (Strømskag, 2022, s. 27). Ser vi dette i lys av didaktiske situasjoner skal målkunnskapen være et redskap for å ta avgjørelser og løse problemer. Målkunnskapen skal være en anbefalt eller en slags optimal løsning på problemet (Strømskag, 2022, s. 27).

Ettersom målkunnskapen spiller en avgjørende rolle i design og analyseprosessen av didaktiske situasjoner, er målkunnskapens epistemologi viktig. Dette handler om målkunnskapens natur, opprinnelse, funksjon og gyldighet. Relatert til dette er begrepet epistemologisk hindring, som er en form for kunnskap som har vært nyttig i visse sammenhenger, men som viser seg å være feil eller utilstrekkelig i andre situasjoner (Strømskag, 2022, s. 26).

Miljø

Miljøet i TDS er en modell av de materielle og intellektuelle elementene som elevene samhandler med i den didaktiske situasjonen (Strømskag, 2022, s. 36). Dette inkluderer de fysiske ressursene som materiell og verktøy, samt de sosiale og kognitive aspektene som påvirker situasjonen som samarbeid, konkurranse, erfaringer og forkunnskaper. Disse elementene skal være organisert slik at miljøet fungerer som et system som skal virke sammen etter en bestemt plan (Strømskag, 2022, s. 36).

Ifølge Strømskag (2022, s. 36) er den viktigste egenskapen til miljøet at det opptrer som noe naturlig som gir tilbakemelding til elevene uten at lærer er delaktig. Dette betyr at det må ha egenskaper som gjør det mulig for elevene å vite om deres resonnementer og handlinger er hensiktsmessige for å løse problemet de står overfor. Et hensiktsmessig miljø fungerer altså som en slags motspiller som synliggjør problemet i situasjonen og behovet for målkunnskapen. De elementene i miljøet som fungerer som motstander kalles for adidaktiske elementer. De adidaktiske elementene har igjen et adidaktisk potensiale, som er en egenskap i elementene som gir objektiv tilbakemelding fra miljøet (Strømskag, 2020, s. 115).

Adidaktisk situasjon og fundamental situasjon

Adidaktisk betyr at det ikke er noen intensjon om å undervise i situasjon om den valgte målkunnskapen. En adidaktisk situasjon er en situasjon der elevene, uten betydelig hjelp fra læreren, finner en løsning på et problem i samspill med miljøet. Gjennom denne situasjonen skal miljøets egenskaper gi elevene mulighet til å overta problemet, uten forsøk på å avsløre lærerens didaktiske intensjon (Strømskag, 2022, s. 37).

Som tidligere nevnt, fungerer miljøet som et system (Strømskag, 2022, s. 36). Elevenes handlinger i en adidaktisk situasjon er også organisert etter en bestemt plan, dermed utgjør elevene også et system. Dette systemet innebærer eksempelvis lagsammensetninger eller hvem som kommuniserer med hvem (Strømskag, 2022, s. 38). Elevene og miljøet er hvert sitt system og hvor samhandlingen mellom dem er en adidaktisk situasjon (Strømskag, 2022, s. 38).

En fundamental situasjon er en type adidaktisk situasjon som er utformet for å bevare meningen med målkunnskapen i en didaktisk situasjon (Brousseau, 2002, s. 30; Strømskag, 2022, s. 38).

Didaktiske variabler

Didaktiske variabler i TDS referer til de variablene som både innvirker på læringsutbyttet og dynamikken i en læringskontekst, og som er under lærerens kontroll. De didaktiske variablene får verdi etter at den didaktiske intensjonen er bestemt (Strømskag, 2022, s. 48). Dette inkluderer for eksempel hvilke konkreter som brukes i en situasjon, gruppesammensetning og hjelpeark.

Didaktisk kontrakt og regulering

I en didaktisk situasjon finnes det regler. I samspillet mellom elevene og læreren utformes det en didaktisk kontrakt bestående av implisitte og eksplisitte regler og forventninger i den didaktiske situasjonen (Strømskag, 2022, s. 48).

Hvis den didaktiske kontrakten ikke blir ivaretatt eller skal utvides, kan lærer intervenere og skape endring i situasjonen. En slik endring i miljøet kalles i TDS-sammenheng for regulering og finnes i to former (Strømskag, 2022, s. 52):

En regulering ved å henvise til den didaktiske kontrakten er en lærerintervensjoner der lærer henviser til reglene og forventningene i den didaktiske situasjonen. Å regulere med et informasjonssprang innebærer at lærer underveis intervenerer ved å legge til informasjon eller flere krav i den adidaktiske situasjonen (Strømskag, 2022, s. 52).

2.2.3 En modellering av didaktiske situasjoner

Ettersom vi ønsker å konstruere en didaktisk situasjon i designet av *ALTA kortspill*, vil vi videre redegjøre for Strømskag (2022, s. 50) sin modellering av didaktiske situasjoner. Modelleringen består av fem faser, hvor den første og den siste fasen er didaktiske faser, mens de tre andre er adidaktiske faser.

Devolusjonsfasen

Den første fasen i en didaktisk situasjon kalles devolusjonsfasen. I denne fasen utformes en didaktisk kontrakt for situasjonen mellom lærer og elevene. Dette innebærer at lærer informerer om «problemet som skal løses, betingelsene for situasjonen, reglene for handling og kriteriet for suksess» (Strømskag, 2022, s. 50). Læreren skal overlevere en adidaktisk situasjon med et miljø og et problem til elevene. Overtakelsen av problemet skal gi elevene mulighet til å løse problemet uten lærerens hjelp (Strømskag, 2022, s. 50).

Aksjonsfasen

Aksjonsfasen er den andre fasen i en didaktisk situasjon. I denne adidaktiske fasen er målet at elevene selv skal komme frem til en implisitt løsning på problemet. Elevene skal få utforske og lære gjennom eksperimentering på det materielle miljøet, uten en eksplisitt forklaring på handlingene de utfører. Om devolusjonen går som forventet vil lærer ta en observatørrolle. (Strømskag, 2022, s. 51).

Formuleringsfasen

Den tredje fasen er formuleringsfasen. I denne fasen skal elevene formulere en eksplisitt løsning på problemet. Målet er at denne løsningen skal gjøre det mulig for en annen elev å samhandle direkte med det materielle miljøet og løse det gitte problemet. Lærers jobb er å gjøre løsningene synlig for de andre elevene (Strømskag, 2022, s. 51).

Valideringsfasen

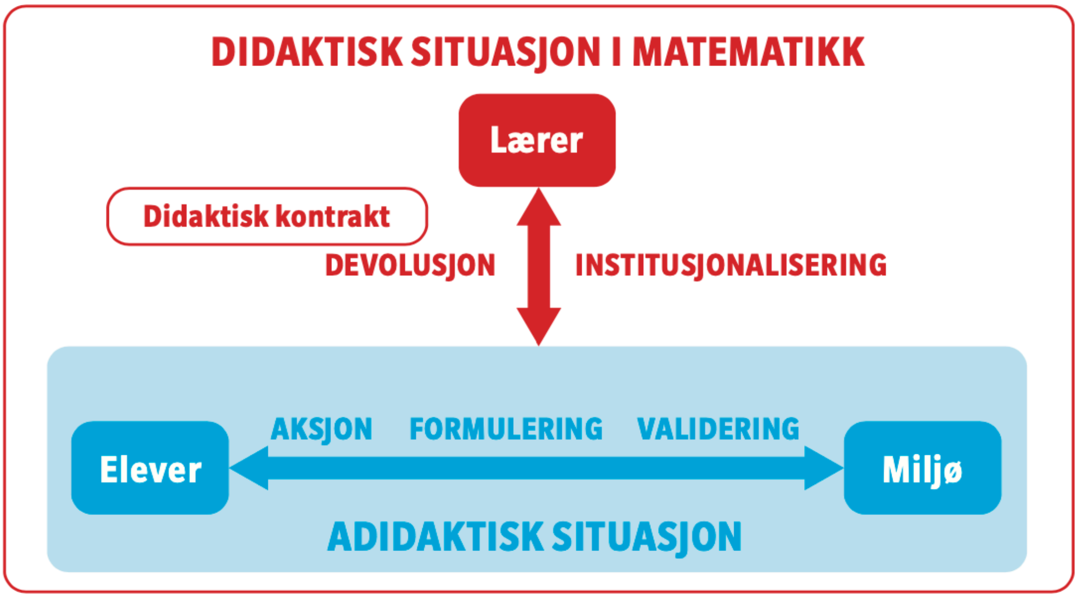
Valideringsfasen er den fjerde fasen. I denne fasen skal elevene få validere løsningene sine. Ifølge Strømskag (2022, s. 51) gjøres dette ved at elevene prøver å gjøre rede for sine løsninger eller undersøker og bekrefter hypotesen de har kommet med. Det er ønskelig at lærerens rolle i denne fasen er å være en slags vitenskapelig debattleder som kun griper inn for å strukturere debatten og få elevene til å formulere seg mer matematisk korrekt. For mye lærerintervensjon kan føre til at behovet for begrunnelse kommer fra læreren fremfor miljøet og elevene. Samtidig er det lærerens ansvar å sørge for at kunnskapen som elevene skal bruke i samspillet med miljøet utvikler seg fra å være en implisitt løsning til en eksplisitt løsning. Dette er derfor ikke uvanlig at valideringsfasen blir en didaktisk fase og ikke en adidaktisk fase (Strømskag, 2022, s. 51).

Institusjonaliseringsfasen

Institusjonaliseringsfasen er den siste fasen. I denne fasen trekkes elevene ut av den adidaktiske situasjonen og inn i en didaktisk fase. Lærer anerkjenner elevenes læring og elevene anerkjenner kunnskapen og læringen i de adidaktiske fasene (Strømskag, 2022, s. 53). Intensjonen i institusjonaliseringsfasen er at kunnskapen elevene har utviklet i de adidaktiske fasene blir de-kontekstualisert (Strømskag, 2022, s. 53). Dette innebærer at læreren informer om rollen til, betydningen av og fremtiden for den kunnskapen som er utviklet. Kunnskapen skal altså endre status fra å være en løsning på et problem arrangert av læreren med didaktisk intensjon, til å bli referansekunnskap som kan brukes i andre situasjoner uten didaktisk intensjon. Lærer gjør dette ved å presentere konvensjonell matematisk notasjon og sammenligne spørsmål og svar som har oppstått underveis, og plassere disse i forhold til lærerplan eller kulturen (Strømskag, 2022, s. 53).

Samspillet i en didaktisk situasjon

I den didaktiske situasjonen skaper læreren et miljø der elevene selv kan samhandle med miljøet og få tilbakemelding fra det. Læreren gir ikke direkte instruksjoner om hvordan man løser problemet, men er fortsatt en aktiv del av situasjonen. Lærer observerer og veileder elevenes læring gjennom samspillet mellom elevene og det adidaktiske miljøet (Strømskag, 2022, s. 53). Dette vil si at elevene samhandler med hverandre og miljøet, og læreren samhandler med hvordan elevene samhandler med hverandre og miljøet som illustrert i Figur 2. Strømskag (2022, s. 53) definerer en didaktisk situasjon slik: «En didaktisk situasjon er den totale situasjonen – regulert av den didaktiske kontrakten – der læreren er involvert i et samspill med samspillet mellom elevene og det adidaktiske miljøet». (Strømskag, 2022, s. 53).



Figur 2: Didaktisk situasjon (Hentet fra Strømskag, 2022, s. 54)

2.3 Didaktisk ingeniørvirksomhet

I dette kapittelet vil vi redegjøre for tre av de fire fasene i didaktisk ingeniørvirksomhet (DI). DI er en forskningsmetodologi som er utviklet for å designe og studere didaktiske situasjoner innenfor TDS (Strømskag, 2020, s. 83; 2022, s. 74). I vår studie ønsker vi kun å designe og realisere et undervisningsopplegg, for så å se etter algebraisk aktivitet. Relatert til dette bruker vi kun de tre første fasene av DI i designprosessen av *ALTA kortspill*.

2.3.1 Fase 1 – Forberedende analyse

Den forberedende analysen har tre dimensjoner, der hver av dem har sine metodiske egenskaper og behov: epistemologisk analyse, institusjonell analyse og didaktisk analyse (Artigue, 2014, s. 472). Analysen har som mål å identifisere begrensingene og faktorene som vil påvirke den didaktiske situasjonen med tanke på målkunnskapen (Strømskag, 2022, s. 70).

I den epistemologiske analysen undersøkes det hva målkunnskapen består av, dens opprinnelse og hva slags funksjon den har. Dette skal hjelpe med å finne målet med DI-en, avdekke potensielle epistemologiske hindringer og kan hjelpe med å formulere fundamentalsituasjoner (Artigue, 2014, s. 472).

I den institusjonelle analysen identifiseres kontekst for undervisningsopplegget. Dette omhandler blant annet karakteristiske trekk ved lærer og elever, forhold knyttet til undervisningspraksiser, tilgjengelige ressurser, skolen som organisasjon og læreplan. Målet med å identifisere konteksten er å skape nødvendig avstand fra den, slik at undervisningsopplegget kan skilles fra konteksten av realiseringen (Artigue, 2014, s. 472; Strømskag, 2022, s. 71).

Den forberedende analysen inneholder også en didaktisk analyse, som innebærer å undersøke om det finnes forskningslitteratur for tidligere resultater om undervisning og læring av målkunnskapen (Strømskag, 2022, s. 71). Den didaktiske analysen vil sannsynlig guide designet av undervisningsopplegget (Artigue, 2014, s. 472).

2.3.2 Fase 2 – Design og a priori-analyse av målkunnskapen

Fase 2 er en sammensatt prosess av design og a-priori-analyse. A priori-analysen tydeliggjør valgene i designet og hvordan de relaterer til den forberedende analysen og forskningshypotesene (Artigue, 2014, s. 473). Målet med denne analysen er å forutsi hvilke læringer elever har mulighet til å lære gjennom den didaktiske situasjonen. Dette betyr at elevene blir sett på som generiske elever som har de nødvendige forkunnskapene og viljen til å spille den rollen læreren gir dem i devolusjonen (Strømskag, 2022, s. 72).

Hvis et undervisningsopplegg skal være en didaktisk situasjon, vil de to grunnprinsippene for didaktisk design være gjeldende (Strømskag, 2022, s. 72). Prinsippene kommer til uttrykk gjennom spørsmålet: «Hva er nødvendige betingelser for at en situasjon skal implementere den matematiske kunnskapen den sikter til?» (Strømskag, 2022, s. 72).

Spørsmålet er knyttet til de didaktiske variablene og handler om hva som skal til for at elevene får bruk for den bestemte kunnskapen for å ta avgjørelser. De didaktiske variablene hjelper med å formulere problemet som skal løses, de adidaktiske elementene i miljøet og den sosiale organiseringen av elevenes samspill med miljøet (Strømskag, 2022, s. 72). Disse variablene velges for å forme miljøet, slik at samspillet mellom elevene, kunnskapen og elevene, og elevene og læreren gir mulighet for læring (Artigue, 2014, s. 473).Den didaktiske kontrakten må også ses i lys av spørsmålet knyttet til design av den didaktiske situasjonen, slik at kunnskapens progresjon i de adidaktiske fasene kan sikres. Dette skal bidra til at resultatet skal institusjonaliseres og bli referansekunnskap hos elevene. Hypoteser om mulige utviklingene av miljøet, elevens strategier og kunnskapens progresjon blir formulert fra betingelsene av problemet, miljøet og den sosiale organiseringen (Strømskag, 2022, s. 72).

2.3.3 Fase 3 – Realisering, observasjon og datainnsamling

Ifølge Strømskag (2022, s. 73) er den tredje fasen av DI knyttet til realisering*,* observasjon datainnsamling og in vivo-analyse. I realiseringen har forskeren hovedsakelig rollen som observatør og samler inn data (Artigue, 2014, s. 474). Hva slags data som skal samles inn avhenger av forskningshypotesene som er formulert, formålet med DI-en og hva som er antatt i a priori-analyse. Ettersom vi ikke har mulighet til å justere opplegget underveis, ser vi bort i fra en in vivo-analyse i vår studie.

2.4 Spillteori

I 2.4.1 vil vi gjøre rede for kriterier for matematikkspillene vi ønsker å bruke. Deretter i 2.4.2 vil vi presenterer fire prinsipper for pedagogisk rike matematikkspill.

2.4.1 Spill i matematikkundervisningen

Matematikkspill kan være et verdifullt verktøy for å utvikle algebraisk tenkning i matematikkundervisningen. Et systematisk overblikk om algebraisk aktivitet viser at utradisjonelle aktiviteter, slik som spill, kan ha en positiv effekt på utviklingen av algebraisk tenkning. (Sibgatullin et al., 2022, s. 11). Ernest (1986, s. 2-3) argumenterer også for matematikkspill som pedagogisk verktøy. Han argumenterer for at spill både naturlig legger opp til at elevene kan diskutere trekk og løsninger, samt øke motivasjonen til å diskutere matematikk med lærer.

Russo et al. (2024) har gjennomført en systematisk oversikt om bruken av ikke-digitale spill i matematikkundervisningen fra 2003 til 2022, hvor de blant annet undersøkte hvordan ikke-digitale matematikkspill påvirker eleven og læreren i barneskolen. De fant blant annet ut at ikke-digitale matematikkspill kan føre til økt motivasjon og engasjement, bidra til en positiv holdning til matematikk og redusere matematikkangst. Spillene fremmer også kritisk tenkning og kommunikasjon (Russo et al., 2024, s. 13).

Den systematiske oversikten til Russo et al. (2024, s. 13) viser at ikke-digitale matematikkspill kan være et verdifullt pedagogisk verktøy som bidrar til sosial og matematisk læring. Definisjonen av de ikke-digitale matematikkspillene til studien følger disse kriteriene:

- Har spesifikke kognitive matematiske mål;
- Krever at elevene bruker matematisk kunnskap for å vinne spillet;
- Er underholdende og har potensiale til å engasjere elevene;
- Styres av et definert sett med regler og har en klar underliggende struktur;
- Involverer en utfordring mot enten en oppgave eller en mostander(e) og interaktivitet mellom motstandere;
- Inkluderer elementer av kunnskap, ferdigheter, strategi og/eller flaks, men ikke flaks alene;
- Har et tydelig sluttpunkt. (Russo et al., 2024, s. 3, vår oversettelse).

I valget av matematikkspill, vil vi ta utgangspunkt i disse kriteriene.

2.4.2 Prinsipper for pedagogisk rike matematikkspill

For å lykkes med spill i matematikkundervisningen bør spillene både velges og videreutvikles med et pedagogisk utgangspunkt. Russo et al. (2018) presenterer fem prinsipper for pedagogisk rike matematikkspill i undervisningen:

- Elevene er engasjerte
- Ferdigheter og flaks er balansert
- Matematikken er sentral
- Fleksibilitet for læring
- Skole-hjem muligheter (Russo et al., 2018, s. 30, vår oversettelse)

Vi vil ikke fokusere på skole-hjem muligheter i denne studien.

Russo et al. (2018, s. 31) argumenterer for at elevene er engasjerte når spill både er underholdene og utfordrende, slik at det motiverer elevene til aktiv deltakelse og matematisk diskusjon. I følge Moneroe og Nelson (2003, referert i Russo et al., 2018, s. 31) gir meningsfulle matematiske diskusjoner også muligheten for sosialt samspill som kan fremme glede og engasjement i matematikken.

I pedagogisk rike matematikkspill er ferdigheter og flaks balansert (Russo et al., 2018, s. 30). Gough (2001, referert i Russo et al., 2018, s. 31) argumenterer for at spill som kun baserer seg på flaks ikke har like stor pedagogisk verdi som spill der deltaker må være bevisst på sine valg. På den andre siden, vil spill som kun er basert på ferdigheter ofte gi faglig sterke elever rom for å dominere. Dette kan være demotiverende fordi elevene føler at de allerede vet hva utfallet av spillet vil bli (Russo et al., 2018, s. 30).Ved å sikre at spillet har et element av flaks i seg, gir det elevene mulighet til å oppleve både å vinne og tape som bidrar til sosial og emosjonell utvikling (Russo et al., 2018, s. 32).

Matematikken er sentral i pedagogisk rike matematikkspill. Dette prinsippet understreker at utforskning av matematiske konsepter og øving på viktige ferdigheter bør være en sentral del av spillets strategi og regler (Russo et al., 2018, s. 30). Spill skaper et konkurransepreget læringsmiljø som er engasjerende og energisk (Russo et al., 2018, s. 32). På den andre siden kan konkurranseaspektet avlede fokuset vekk fra matematikken (Gough, 1999, referert i Russo et al., 2018, s. 30). Spill kan på denne måten bli brukt som en mulighet for å øve på ferdigheter eller som en måte å utforske nye matematiske ideer gjennom strategiutvikling.

Matematikkspill bør enkelt kunne modifiseres og differensieres for å gi fleksibilitet for læring og undervisning (Russo et al., 2018, s. 30). Spillene bør kunne reguleres til å gi elevene hensiktsmessig utfordring. Et veldesignet matematikkspill kan altså tilpasses slik at alle elever får mulighet til å spille, tenke strategisk og resonnere matematisk (Buchheister, Jackson & Taylor, 2017, referert i Russo et al., 2018, s. 32). Videre argumenterer Russo et al. (2018, s. 33) for at matematikkspill bør ha et sett med regler som kan brukes til forskjellige versjoner av spillet, som muliggjør utviklingen av forskjellige matematiske konsepter og ideer. I tillegg bør man investere nok tid i oppstarten til å lære spillereglene, ettersom uenigheter om regler kan være en barriere for å oppnå matematisk læring (Badham, 1999, referert i Russo et al., 2018, s. 33).

Disse prinsippene vil vi prøve å ivareta i valget og utviklingen av matematikkspillet i *ALTA kortspill*.

3 Metode del 1 - Didaktisk ingeniørvirksomhet

I dette delkapittelet skal vi gjøre rede for valg av innhold i *ALTA kortspill* og målkunnskaper som vil være utgangspunktet for aktiviteter som kan bidra til algebraisk aktivitet. Vi ønsker å bruke de tre første fasene av didaktisk ingeniørvirksomhet (DI) inspirert av Strømskag (2022) og Artigue (2014). I fase 1 (se 3.1) vil gjøre rede for valg av målkunnskap og gjennomføre en forberedende analyse som innebærer en epistemologisk analyse, institusjonell analyse og en didaktisk analyse. I fase 2 (se 3.2) vil vi bruke den forberedende analysen til å gjøre rede for design og en a priori-analyse av *ALTA kortspill*. Til slutt i fase 3 (se 3.3) skal vi ta for oss momenter knyttet til realiseringen, observasjoner og datainnsamling av *ALTA kortspill*.

3.1 Fase 1 - Forberedende analyse av målkunnskapene

Vi har valgt fire målkunnskaper som vi ønsker skal fremme algebraisk aktivitet og dermed mulig utvikle algebraisk tenkning. Disse valgene har vi basert på teori fra kapittel 2.1 og tatt i samarbeid med vår veileder i lys av *Algebra Learning: Generalizing, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation* (*ALGEBRA*) prosjektet. Målkunnskapene er identitetselementer, variabler, behov for felles notasjonssystem og et re-fokus på likhetstegnet.

3.1.1 Epistemologisk analyse

I dette avsnittet skal vi gjennomføre en epistemologisk analyse hvor vi undersøker hva målkunnskapene består av, deres opprinnelse, hva slags funksjon de har og hvordan de kan bevises.

Identitetselementer

Den første målkunnskapen er bruk og forståelse knyttet til identitetselementene til addisjon og multiplikasjon (IE). For å få en forståelse av IE kan det være nyttig å se på hva en operasjon er. Operasjoner kan definerer slik: «En operasjon på en mengde S er en relasjon (regel, korrespondanse) som tildeler til hvert ordnet par av elementer i S et entydig bestemt element av S» (Durbin, 2008, s. 20, vår oversettelse).

Gitt en tallmengde S, er en operasjon på S en regel som forteller hvordan vi kan ta to elementer i S, (a, b), gjøre noe med elementene, og så være sikker på at resultatet er innenfor S. Addisjon av tallmengden heltall er et eksempel på en operasjon: For et hvert par av heltall

(a, b), er summen $a + b$ også et heltall. Operasjonen addisjon av heltall blir dermed definert slik $(a, b) \rightarrow a + b$ (Durbin, 2008, s. 20).

Ifølge Durbin (2008, s. 21) er det de operasjonene i algebra som har spesielle egenskaper som er av interesse. En av egenskapene til operasjoner som Durbin (2008, s. 21) trekker frem som interessant er identitetselementer. Et identitetselement er et element e i en mengde S som ikke endrer verdien på et annet element a når det kombineres i en matematisk operasjon. Dette kan uttrykkes slik: $e * a = a * e = a$, der $a \in S$. I dette eksemplet representerer * en generisk kommutativ binær operasjon på mengden S. Dette betyr at vi kan si følgende om IE:

Identitetselement til addisjon (IE+) er 0, fordi $a + 0 = 0 + a = a$ der $a \in \mathbb{Z}$
Identitetselement til multiplikasjon (IE×) er 1, fordi $a \times 1 = 1 \times a = a$, der $a \in \mathbb{Z}$

Relatert til addisjon som en operasjon av heltall, har et hvert heltall en invers (Durbin, 2008, s. 22). Av relevans for oss betyr dette:
Den additive inverse av a er $-a$ fordi, $a + (-a) = (-a) + a = 0$, der $a \in \mathbb{Z}$.
Den multiplikative inverse av a er $\frac{1}{a}$ fordi, $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$, $a \in \mathbb{Z}$, hvor a ikke kan være 0.

Variabler

Den andre målkunnskapen er forståelse knyttet til variabler. Å resonnere, begrunne og generalisere er sentrale aktiviteter i matematikken, og variabler kan hjelpe med disse aktivitetene (Birkeland et al., 2019, s. 276). Ifølge Radford (2010, s. 2) er variabler, ukjente og parametere ubestemte objekter, og er en del av essensiell del av algebra. Arbeide med disse ubestemte objektene må behandles på en analytisk måte. Dette betyr at variabler er objekter som ikke har en bestemt verdi, men i matematikken behandler vi disse ubestemte objektene som om de var spesifikke tall.

Ideene knyttet om å bruke ukjente i matematikk har røtter langt tilbake i tid og det har blitt funnet spor av egyptiske papyruser med algebra fra rundt 1850 f.Kr. François Viète (1540-1603) var den første matematikeren som brukte bokstaver for å representere ukjente størrelser. Dette skjedde relativt seint i den historiske utviklingen av matematikk, som antyder at det å kunne bruke algebraiske symboler fritt og meningsfullt krever en omfattende modningsprosess (Birkeland et al., 2019, s. 278)

Det er i midlertidig viktig å bemerke seg at algebra ikke kun handler om symbolsk algebra. Selv om algebraiske objekter må betegnes, kan ikke algebra og algebraisk tenkning reduseres til bruk av bokstaver (Radford, 2010, s. 2). Radford (2010, s. 2) argumenterer for at semiotiske ressurser også kan være algebraiske tegn, slik som gestikulering eller ord. Det kan derfor argumenters for at semiotiske ressurser kan benyttes i algebraiske aktiviteter for å utvikle algebraisk tenkning.

Kilpatrick et al. (2001, s. 262-263) henviser til to vanlige bruksområder av variabler, representert av en bokstav eller et symbol. Variabelen kan brukes til å representere en plassholder i form av en numerisk verdi som gjør en likning sann eller en rekke tallverdier. Begge disse oppfatningene av variabler er viktig innenfor algebra og kan bidra til å utvikle forståelse av variabler og likhet. En variabel som en plassholder for et ukjent tall kan være $x + 3 = 5$. I dette tilfellet er x en plassholder for et ukjent tall. En variabel som en rekke tallverdier kan eksempelvis være variabelen r = radius. For-eksempel ved likningen for omkretsen av en sirkel er $O = 2\pi r$, der 2 og π er konstanter, mens r kan representere ulike verdier med hensyn til omkrets.

Behov for felles notasjonssystem

For å uttrykke seg presist i matematikken, og kunne forstå og løse matematiske problemer, trenger elevene et matematikkspråk. Dette fagspråket har egne ord, begreper og ordningsmåter som skal gjøre eleven i stand til å uttrykke seg korrekt og presist. God matematikkompetanse innebærer blant annet å kunne oversette mellom dette matematikkspråket og hverdagsspråk (Ulland et al., 2018). Basert på dette er et felles notasjonssystem essensielt for å uttrykke seg presist og korrekt i matematikk.

Birkeland et al. (2019, s. 294) påpeker at lærer må gjøre elevene oppmerksomme på bruken av konvensjoner, og viser til konvensjonene prioriteringsregelen og parentes som essensielle for arbeid med algebra. Han forklarer dem slik:

- Prioriteringsregelen sier: I sammensatte regneuttrykk utføres først potensering, så multiplikasjon og divisjon, og til slutt addisjon og subtraksjon. Dette betyr at sammensatte regneuttrykk får entydige svar.
- Parentes: En parentes binder innholdet sammen. Birkeland et al. (2019, s. 294)

Som følge av disse konvensjonene er uttrykk som $5x + 3 \times 3 - 1$ ikke er lik som $(5x + 3) \times 3 - 1$. Behovet for et felles notasjonssystem knyttet til sammensatte regneuttrykk skal sørge for at flertydige resultater unngås.

Re-fokus på likhetstegnet

Som med variabler og algebra, har ideen om likhet sine røtter langt tilbake i tid. Likhetstegnet som vi kjenner det i dag ble introdusert av Robert Recorde i Cambridge i 1557 (Birkeland et al., 2019, s. 278). I begynneropplæringen blir likhetstegnet brukt som et signal om å utføre en operasjon (Birkeland et al., 2019, s. 297). Denne forståelsen av likhetstegnet kaller Kilpatrick et al. (2001, s. 379) for operasjonell forståelse av likhetstegnet. I algebra representerer likhetstegnet et ekvivalenstegn, som betyr at uttrykkene på hver side av likhetstegnet skal ha den samme verdien. Elever som har denne forståelsen av likhetstegnet har en relasjonell forståelse (Kilpatrick et al., 2001, s. 379). Et re-fokus på likhetstegnet innebærer å sette et fokus på denne overgangen i forståelse av likhetstegnet.

Filloy og Rojano (1989, s. 19) har undersøkt overgangen fra aritmetikk til algebra gjennom løsningen av likninger. De nevner at venstre side av en likning i aritmetiske sammenhenger, blir sett på sin en sekvens av operasjoner utført på tall, og høyre side representerer konsekvensene av disse operasjonene. De kaller dette aritmetisk notasjon av likhet. Videre argumenterer de for at elever har bruk for en annen forståelse av likhetstegnet i andre kontekster, slik som i algebra. Elevene må forstå at uttrykkene på begge sider av likhetstegnet er av samme natur eller struktur og at det finnes handlinger som gir mening til denne likheten mellom uttrykkene.

Videre argumenterer Filloy og Rojano (1989, s. 19-22) for at algebraiske tanker om likhet kan observeres gjennom elevers atferd. I deres artikkel beskriver de at det innebærer endringer i hvordan elever tolker og håndterer likhetstegnet, spesielt i forhold til løsning av likninger som involverer handling utover det aritmetiske. Hvordan elever behandler likninger kan dermed være en indikator på hvordan de ser på likhet. Dersom man eksempelvis observerer at en elev er villig til å skrive $1 + 4 = 2 + 3$ uten å uttrykke at summen er 5, kan man argumentere for at eleven har en relasjonell forståelse av likhet.

3.1.2 Institusjonell analyse

Den institusjonelle analysen skal bidra til å indentifisere konteksten for *ALTA kortspill* (Strømskag, 2022). Fra en Workshop (6. nov 2023) knyttet til *ALGEBRA*-prosjektet fikk vi generell informasjon om klassen. Ifølge planlagt fremdriftsplan skulle elevene arbeide med sammensatte regneuttrykk.

I dette delkapittelet vil vi først redegjøre for sentrale momenter i Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20). Deretter vil vi beskrive konteksten til realiseringen av *ALTA kortspill* som inkluder en bekrivelse av skolen, klassen og rammebetingelser.

Kompetansebegrepet, tilpasset undervisning og elevmedvirkning

I overordnet del, som er en del av læreplanverket, står verdigrunnlaget i opplæringslovens formålsparagraf og overordnede prinsipper for grunnopplæringen. Den beskriver grunnsynet som skal prege den pedagogiske praksisen (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 1). I skolens arbeid med læreplaner og vurdering er det avgjørende å ha god forståelse for kompetansebegrepet. Kompetansebegrepet er satt sammen av begrepene ferdigheter og kunnskaper. Å ha kunnskap om noe handler om å ha kjennskap til og forstå fakta, begreper, teorier, ideer og sammenhenger i de forskjellige fagene. Ferdigheter gjør det mulig for elevene å velge hensiktsmessige metoder og fremgangsmåter for å løse ulike oppgaver og problemer. Elevene må derfor ha forskjellige ferdigheter, blant annet praktiske, kognitive, sosiale, kreative og språklige. Gjennom ferdigheter og kunnskap skal elevene kunne reflektere og tenke kritisk i fag. Dette er sentralt for å forstå teoretiske resonnementer (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11).

Prinsipper for skolens praksis er en sentral del av overordnet del. Hver elev skal møtes med utfordringer som fremmer danning og lærelyst. For å få til dette trekkes blant annet tilpasset opplæring frem (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 17). Tilpasset opplæring skal sørge for at alle elever får best mulig læringsutbytte av undervisningen. Dette skal gjøres gjennom tilpasning til mangfoldet og variasjon innad i elevfelleskapet (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 18).

Elevmedvirkning er noe som skal prege skolens praksis. Elevmedvirkning innebærer at elevene skal ta del i læringsfelleskapet. Læringsfelleskapet skal utvikles sammen med læreren og legge til rette for at elevene kan tenke, erfare og lære sammen med andre. Dette kan gjøres gjennom samarbeid, læringsprosesser og kommunikasjon (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 16).

Kompetansemål og kjerneelementer

Et av kompetansemålene til i LK20 er «bruke sammensatte regneuttrykk til å beskrive og utføre utregninger» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kompetansemålene er tett knyttet til kjerneelementene som er det viktigste faglige innholdet i opplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Flere kjerneelementer kan være relevante, men vi vil ha hovedfokus på utforskning, resonnering og argumentasjon og representasjon og kommunikasjon i *ALTA kortspill*. (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Utforskning

Utforsking i matematikk handler blant annet om at «elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningen» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

Representasjon og kommunikasjon

Relevante elementer fra kjerneelementet representasjon og kommunikasjon er:

> Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer. (...) Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler (...) Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner. (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3)

Resonnering og argumentasjon

Kunnskapsdepartementet (2019) forklarer resonnering og argumentasjon slik:

> Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige. (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Relevante matematiske kunnskapsområder

Matematiske kunnskapsområder skal bidra til at elevene utvikler matematisk forståelse. To av områdene er tall og tallforståelse og algebra. Dette innebærer at: «Elevene må tidlig få et godt tallbegrep og få utvikle varierte regnestrategier. Algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner (…)» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Grunnleggende ferdigheter

I læreplanen er de fem grunnleggende ferdigheter gjennomgående i alle fag. Grunnleggende ferdigheter skal bidra til faglig kompetanse og utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2019, 18. november). Vi vil hovedsakelig legge vekt på regning, skriving og muntlige ferdigheter.

Muntlige ferdigheter handler om å kunne komme med meningsfulle samtaler i matematikk. Videre skal elevene kunne kommunisere sine ideer og vurdere sine matematiske problemer, strategier og løsninger gjennom samtaler. Elevene skal utvikle seg fra et hverdagsspråk til et mer presist matematisk språk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4).

Regning som grunnleggende ferdighet handler om å bruke representasjoner, begreper og fremgangsmåter til utregninger, men og kunne vurdere løsninger. Å løse forskjellige matematiske problemer med begreper, symboler og strategier er en sentral del for å utvikle regneferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5).

Skriving i matematikk handler om å utvikle seg fra et hverdagslig språk, til et mer presist matematisk språk. Ved hjelp av velvalgte representasjoner skal elevene kunne uttrykke sammenhenger, oppdagelser og ideer. Dette innebærer også å kunne presentere meningsfulle løsninger for hverandre og situasjoner, men også kunne skrive for egen læring (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5).

Forskningsskolen

I denne delen skal vi beskrive konteksten som *ALTA kortspill* vil bli presentert i. Beskrivelsen av konteksten er basert på vår oppfatning av skolen etter å ha deltatt på en *ALGEBRA* workshop (6. nov 2023), hvor vi møtte lærerne og ble kjent med *ALGEBRA*-prosjektet. På denne workshopen ble vi fortalt at *ALTA kortspill* vil bli gjennomført på 7. trinn på en privatskole på Sørlandet, hvor de følger Læreplan i matematikk 1. – 10. trinn. Realiseringen vil foregå over 3 økter på 90 min hver. Det er 15 elever i klassen og 2 lærere, der en av lærerne har hovedansvaret for undervisningen. Denne læreren har vært kontaktlærer for klassen siden 5. trinn.

Vi forventer at elevene har blitt presentert for de nødvendige forkunnskapene som skal til for å arbeide med sammensatte regneuttrykk. Det kom frem på workshopen at elevene har stasjonsøkter en gang i uken, der en stasjon alltid er spill. Flere elever har høyt konkurranseinstinkt og det er som regel stort engasjement knyttet til spill. Kontaktlærer sier at elevene gjør slik de blir bedt om og er generelt positive til matematikk, men at det er faglig variasjon i klassen.

Skolen har tradisjon for å delta i forskningsprosjekter, og vi har blitt fortalt at skolen er positiv til forskning og utvikling. I tillegg har vi inntrykk av at det er en samarbeidsorientert skolekultur og det kom frem på workshopen at skolen generelt scorer bra på nasjonale prøver innenfor matematikkfaget.

3.1.3 Didaktisk analyse

I didaktisk analyse vil vi utforske tidligere forskning og litteratur knyttet til undervisning og læring om målkunnskapene. På bakgrunn av vår oppgave, ønsker vi å utforske didaktiske aspekter med utgangspunkt i algebraisk aktivitet og algebraisk tenking.

Identitetselementene

IE er en egenskap ved grunnleggende regneoperasjoner og er tett knyttet mot tallforståelse (Durbin, 2008, s. 22; Valenta, 2016). Vi vil derfor undersøke didaktiske aspekter knyttet til tall og tallforståelse og grunnleggende regneoperasjoner. I følge Russell et al. (2011, s. 45) er det mange ungdomsskoleelever som har problemer med overgangen fra aritmetikk til algebra. Dette begrunnes med at elevene har manglende kunnskap om egenskaper og oppførsel til operasjoner. Elevene bør bruke ulike representasjoner eller kontekster til å beskrive adferden og egenskapene til operasjoner. Gjennom artikulasjon og begrunnelse kan elevene få mulighet til å generalisere og argumentere for sine påstander om forskjellige operasjoner (Russell et al., 2011, s. 51). Videre poengterer Russell et al. (2011, s. 47) at lærer må være oppmerksom på at elevene ikke over-generaliserer egenskapene. I arbeid med IE kan elever eksempelvis oppdage at IE× er 1, og tenke at -1 også er et IE×.

Valenta (2016) drøfter sentrale elementer i tallforståelse med utgangspunkt i Kilpatrick et al. (2001) sine fem komponenter i matematiske ferdigheter. Komponentene består av begrepsmessig forståelse, resonnering, anvendelse, engasjement og beregning. Disse fem komponentene er sammensatt og utfyller hverandre (Valenta, 2016). Begrepsmessig forståelse handler om å kunne anvende ulike matematiske representasjoner. Elevene må kunne oversette og velge representasjoner hensiktsmessig (Valenta, 2016, s. 3). Dette innebærer også å ha kjennskap til blant annet grunnleggende regneoperasjoner, som IE er en del av (Valenta, 2016, s. 6).

Ettersom komponentene er sammensatt og utfyller hverandre kan argumenteres for at IE bør ses i sammenheng med de andre komponentene. Vi mener resonnering og beregning er spesielt relevante for IE. Elevene må få mulighet til å resonnere rundt egenskapene til tall og operasjoner (Valenta, 2016, s. 12), i henhold til IE, kan dette innebære resonnering rundt hvorfor IE ikke forandrer verdien på uttrykket. Videre må elevene kunne anvende beregning. Dette handler om å utføre matematiske prosedyrer, slik at de er gunstige for konteksten (Valenta, 2016, s. 6). Eksempelvis kan den additive invers brukes til å danne IE+ i balansering av likninger.

Variabler

Både Kieran (2004) og Blanton et al. (2015) trekker frem arbeid med variabler som hensiktsmessig i utviklingen av algebraisk tenkning.

Filloy og Rojano (1989) har undersøkt overgangen fra aritmetisk og algebraisk tenkning på ungdomsskoleelever, med fokus på hvordan de lærer å forstå og operere med ukjente som variabler i matematiske likninger. Resultatene til Filloy og Rojano (1989, s. 24) viser at elever ikke kan korrigere sine algebraiske feil på egenhånd basert på deres forståelse av algebra. De argumenterer for at det finnes et slags didaktisk skille i overgangen fra aritmetikk til algebraisk tenkning der lærerveiledning er sentralt (Filloy & Rojano, 1989, s. 19). Dersom elevene arbeider med likninger med ukjente uten betydelig støtte fra lærer har elevene en tendens til å bruke løsningsmetoder som allerede er kjent for dem, noe som ikke leder til målene algebra skal oppnå (Filloy & Rojano, 1989, s. 24).

Filloy og Rojano (1989, s. 24) argumenterer for å undervise algebra med ukjente ved å bruke modeller. Modellering består av to deler: oversettelse og separasjon. Oversettelse er når vi gir abstrakte konsepter konkret form og den må fungere begge veier. Separasjon handler om å skille de nye ideene og operasjonene fra deres konkrete kontekst. Filloy og Rojano (1989, s. 25) erfarte at noen elever kan bli for opptatt av de konkrete modellene, og andre elever kan ha vanskeligheter for å bruke nye ideer på egenhånd og abstrahere. Lærer bør være oppmerksom på dette og det bør tas i betraktning i arbeidet med å koble teorien med praktiske eksempler.

Radford (2010, s. 16) argumenterer for at skolealgebra ikke kan reduseres til bruk av bokstaver og trekker frem viktigheten av å bruke flere semiotiske ressurser i undervisning. I klasseromsstudien fra sin artikkel, illustrerer Radford (2010, s. 16) hvordan algebraisk tenkning oppstår gjennom bruk av semiotiske ressurser som kroppslige handlinger, gestikulering og visuelle representasjoner til å arbeide med generalisering, variabler og ukjente. For å gjøre de abstrakte konseptene mer forståelige, brukte lærer ulike semiotiske ressurser for å oversette mellom abstrakte konsepter og konkrete situasjoner. Dette samsvarer også med Russell et al. (2011, s. 63) som argumenterer for å bruke ulike representasjoner og kontekster for å skape meningsfulle erfaringer i arbeid med ukjente, slik at elevene kan uttrykke generelle forhold og mønstre på en måte som er meningsfull for elevene.

Birkeland et al. (2019) viser til at elevene kan ha vanskeligheter med å se på variabler som et fleksibelt og dynamisk tall. Noen elever vil tenke på bokstaver som ulike, og dermed konkludere med at de også må ha ulik verdi. Dette medfører at elever kan tro at $2a$ aldri kan ha den samme verdien som $2b$. Elever kan også ha vanskeligheter med å akseptere variabler som fullverdige svar. Lærer må være bevisst på dette og derfor gi mange velvalgte eksempler og erfaringer, slik at elevene får utviklet et begrep om bokstaver som symbol for variabler (Birkeland et al., 2019, s. 295).

Behov for et felles notasjonssystem

Russell et al. (2011, s. 63) argumenterer for meningsfull bruk av notasjon i broen mellom aritmetikk og algebra. Elevene bør bruke representasjoner og kontekster til å modellere generelle påstander som kan hjelpe elevene med å utvikle forståelse knyttet til aritmetikkens symboler. Russell et al. (2011, s. 66) argumenterer for at det kan være gunstig å innføre notasjon etter at elevene allerede har artikulert deres ideer med ord og bilder som lar dem beholde meningen med symbolene.

Ulland et al. (2018) understreker at elevene bør skrive for å lære, skrive for å dokumentere og å regne på papir for å øve på å bruke matematiske uttrykk gjennom forskjellige representasjoner, og påpeker at elever på lavere trinn kan forstå matematiske forhold og operasjoner uten å mestre matematisk notasjon. Dette kan gjøre det utfordrende når det faglige nivået øker (Ulland et al., 2018, s. 139-140). I arbeidet med algebraiske konvensjoner bør lærer gjøre elevene oppmerksomme på disse, og ikke overlate utviklingen til elever selv (Filloy & Rojano, 1989, s. 23). Elever trenger tid og erfaring til å utvikle en forståelse for konvensjoner ved algebraisk notasjon, samt hvordan bruke bokstaver som variabler. Russell et al. (2011)

Re-fokus på likhetstegnet

Ekvivalens og et re-fokus på likhetstegnet er noe Kieran (2004) og Blanton et al. (2015) argumenterer for i tidlig algebra. (se 2.1.3). I en studie gjennomført av Blanton et al. (2015, s. 54) indikerte resultatene at det er mulig å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet hos elever i 3. klasse-gjennom tidlig algebraintervensjon. Elevene gikk fra operasjonell forståelse av likhetstegnet til en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Intervensjonen i studien til Blanton et al. (2015, s. 46) baserte seg på blant annet diskusjoner i grupper og i plenum i forbindelse med problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgavene var designet til å engasjere eleven i generalisering, representering, bevise og resonnere med matematiske forhold.

Russell et al. (2011, s. 51-53) trekker også frem gruppediskusjoner og fellesdiskusjoner i arbeidet med overgangen fra operasjonell til relasjonell forståelse av likhet, hvor elevene får mulighet til å artikulere sine påstander om ekvilens ved å argumentere for dem og bevise dem.

Birkeland et al. (2019, s. 297) argumenterer for at elevene bør bli kjent med å se identiteter hvor operasjonstegn forekommer på begge sidene av likhetstegnet. Dette kan gjøres ved at elevene lager identitetene selv, sjekker og varierer til de blir bevisste på likhetstegnets egenskaper.

3.2 Fase 2 – Design og a priori-analyse

I denne delen vil det didaktiske designet og en a priori-analyse til *ALTA kortspill*. Målet med *ALTA kortspill* er at elever skal være i algebraiske aktiviteter som kan utvikle algebraisk tenking. Dette skal gjøres gjennom målkunnskapene som gjort rede for i forbedrende analyse. Se vedlegg 1 for *ALTA Kortspill*.

Vi vil starte med å gjøre rede for valg av matematikkspill og videreutviklingen av spillet i delkapittel 3.2.1. Deretter vil vi 3.2.2 forklare konteksten, felles momenter for hver økt og regulereringer. I 3.2.3 beskriver vi økt 1, i 3.2.4 i beskriver vi økt 2 og i 3.2.5 i beskriver vi økt 3.

3.2.1 Valg av matematikkspill og inspirasjon til videreutvikling

Våren 2023 skrev vi en Forsknings- og utviklingsarbeid (FoU)-oppgave i faget *Matematikkundervisning og ulike perspektiver på læring* der vi undersøkte matematikkspill. I denne oppgaven brukte vi et matematikkspill som heter *Lag det tallet*. Vi erfarte at elever i klassene vi undersøkte fikk utforske og eksperimentere med blant annet IE, og at spillet la opp til matematisk notasjon (Eget arbeid, 2023). Vi så også at *Lag det tallet* sammenfalt med Russo et al. (2018) og Russo et al. (2024) sine prinsipper og kriterier for pedagogisk rike matematikkspill (se 2.4), noe vi vil gjøre rede for senere i delkapittelet. Vi har derfor valgt *Lag det tallet* som utgangspunkt i utviklingen av *ALTA kortspill*.

Lag det tallet

Lag det tallet er et kortspill hentet fra matematikksenteret.no (Matematikksenteret, u. å). Målet i spillet er å få flest mulig poeng gjennom å lage et måltall ved å bruke kortene og de fire regneartene. Spillets gang kan leses nedenfor:

Utstyr: Kortstokk, skrivesaker, kladdeark og spillark

Spillets gang:

1. Del ut fem kort til hvert lag.
2. Snu kortstokken med billedsiden ned. Trekk måltallet fra det øverste kortet i bunken.
3. Bruk spillkortene til å lage et uttrykk som er likt måltallet ved hjelp av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Hvert spillkort man bruker i løsningen sin gir 1 poeng.
4. Når spillerne er fornøyde med sin løsning, skrives denne ned på spillarket og valideres av motstanderlaget.
5. Elevene legger spillkortene som ble brukt i runden i en egen bunke. Dette er poengbunken.
6. Måltallet legges i bunnen av kortstokken, hver gruppe trekker nye kort slik at de har fem kort på hånden og en ny runde starter.
7. Spillet er ferdig når kortstokken er spilt ut, eller etter et bestemt antall runder. De som har flest kort i sin poengbunke vinner spillet.

Figur 3: Måltall og spillkort. Hentet fra Mattelist (u. å.)

Fra figur 3 er måltallet 9, og spillkortene er 11,9,7,5 og 2. En løsning kan være $7 + 2 = 9$. Dette gir spillerne 2 poeng. En annen løsning kan man lage den additive invers $(5 + 2)$ til 7 for å danne IE+, løsningen kan da se slik ut: $7 - (5 + 2) + 9 = 9$ som gir 4 poeng.

TDS som utgangspunkt

Lag det tallet legger til rette for høy elevaktivitet, og elevene kan få en fordel dersom de benytter seg av IE. Denne fordelen i spillet kan ses på som en slags optimal løsning, og kan komme frem gjennom konkurranseaspektet og miljøet. *Lag det tallet* har potensiale til å ivareta begge designprinsippene for en didaktisk situasjon i TDS (se 2.2).

Spillets forankring i spillteori

Lag det tallet harmonerer med Russo et al. (2024, s. 3) kriterier:

Spillet må ha spesifikke kognitive matematiske mål; Det er et underliggende mål i *Lag det tallet* å bruke IE og regneoperasjoner. Anvendelse og forståelse av atferden av operasjoner kan være kognitive matematiske mål i spillet.

Krever at elevene bruker matematisk kunnskap for å vinne spillet; Spillet legger opp til at elevene bruker regneoperasjoner, IE og strategier for å få flest mulig poeng.

Er underholdende og har potensiale til å engasjere elevene; Spillet har en mulighet til å engasjere elevene ved at de har en balanse mellom flaks og ferdigheter, et konkurranseaspekt og mulighet for diskusjon.

Styres av et definert sett med regler og har en klar underliggende struktur; Spillet har tydelige regler og et klart mål hver runde.

Involverer en utfordring mot enten en oppgave eller en mostander(e) og interaktivitet mellom motstandere; Spillet legger opp til spillgrupper der elevene kan finne løsninger sammen. Elevene må også godkjenne hverandres spillrunder. Dette er en regel, men det kan også være hensiktsmessig i tilfelle motstanderlaget har regnet feil og løsningen er ugyldig. Spillet har en lav inngangsterskel der elevene kan velge selv hva slags regneart de vil benytte seg av.

Inkluderer elementer av kunnskap, ferdigheter, strategi og/eller flaks, men ikke flaks alene; Elevene må trekke et måltall og spillkortene sine. Dette kan resultere i gode eller mindre gode kort. Det er likevel fordel å mestre grunnleggende regneoperasjoner og bruke strategier.

Har et tydelig sluttpunkt; Spillet er ferdig når kortstokken er spilt ut, eller etter et bestemt antall runder.

Inspirasjon for videreutvikling

Lag det tallet harmonerer med Russo et al. (2024) sine kriterier for ikke-digitale matematikkspill. Når vi videreutvikler spillet vil vi hente inspirasjon fra Russo et al. (2018) sine premisser for pedagogisk rike matematikkspill, og bruke disse der vi ser det hensiktsmessig. Matematikksenteret har også gjennomført en undervisningsøkt hvor de brukte *Lag det tallet*, og anbefalte Wæge (2015) sine samtaletrekk i klassediskusjonen. Disse vil vi også legge ved i vår *ALTA kortspill*. (Matematikksenteret, u. å).

3.2.2 Felles momenter for hver økt

Vi vil starte med å definere konteksten til *ALTA kortspill*, deretter redegjøre for felles momenter i hver økt og reguleringer.

Sosial organisering

Elevene skal spille i *spillag* bestående av to elever. To spillag spiller mot hverandre i en *spillgruppe*. Dersom det er oddetall, må et spillag bestå en eller tre elever.

Kontekst

Fra institusjonell analyse vet vi at elementer som tilpasset opplæring og elevmedvirkning er forankret i læreplanverket (se 3.1.2). Matematikkspill er en måte å variere undervisningen på, og ved å bruke mattespill som fullverdig undervisning kan det argumenteres for at dette er en form for tilpasset opplæring. Videre vil vi at *ALTA kortspill* skal bidra til elevmedvirkning, og lærer skal derfor legge til rette for klasseromsdiskusjoner hvor elevenes løsninger og spillsituasjoner blir brukt. Kompetansemålet for øktene er å «bruke sammensatte regneuttrykk til å beskrive og utføre utregninger» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

ALTA kortspill er planlagt over tre økter på 90 min hver. Lærer har gitt uttrykk for at elevene er vant til gruppearbeid og spill. Spillark, kort, kladdeark og kalkulator er også tilgjengelig. Klasserommene er utstyr med tavle og digitale verktøy. Ifølge lærer er det variasjon i det faglige nivået i klassen, men vi forventer at elevene har de nødvendige forkunnskapene til å arbeide med sammensatte regneuttrykk. Det er 15 elever i klassen, som betyr at det blir fire spillgrupper og åtte spillag, der en elev må spille alene.

Dialog og diskusjon

Russo et al. (2018, s. 51) argumenterer for å danne meningsfulle kontekster, der elevene får mulighet til å artikulere påstander og får mulighet til å teste og validere moment i overgangen fra aritmetikk til algebraisk tenkning. Videre er det ifølge Russo et al. (2018, s. 31) sentralt at elevene har meningsfulle matematiske diskusjoner i matematikkspill, samtidig er det vesentlig å beholde elevene i en adidaktisk fase så lenge det er hensiktsmessig (Strømskag, 2022). For å kunne bevare det adidaktiske potensialet, men samtidig skape dialog, skal elevene i *ALTA kortspill* ta del i spillag. Gjennom spillag kan det forekomme matematisk dialog mellom spillerne som et resultat av motivasjon for få å flest mulig poeng. Hvert spillag skal spille mot et annet spillag, disse danner til sammen en spillgruppe. Spillagene skal validere hverandres løsninger, slik at de må argumentere for gyldigheten av løsningen sine. Fra teorien vet vi at konkurranseaspektet kan ta fokuset vekk fra matematikken (Russo et al., 2018). Ved å ha en regel der elever må validere hverandres løsninger, kan det bidra til å rette et fokus på matematikken.

Matematikkspill kan bidra til å danne meningsfulle kontekster og legge opp til meningsfulle matematiske klassediskusjoner, og bidra til utviklingen av et matematiske fagspråk hos elevene, noe Ulland et al. (2018) argumenterer for.

Spillark

Meningsfull bruk av notasjon er en sentral del i overgangen fra aritmetikk til algebra (Russell et al., 2011) og kan bidra til at elevene er i aktivitet som utvikler algebraisk tenking. *ALTA kortspill* skal derfor ha et spillark som elevene må notere sine løsninger på (Vedlegg 1). For å bevare det adidaktiske potensialet er spillarket en del av reglene i spillet og skal hovedsakelig fungere som en måte hvor elevene kan dokumentere sine spillrunder og samtidig validere hverandres løsninger. Vi har derfor valgt å ha et spillark som er relativt åpent, slik at elevene må ta stilling til hvordan de skal presentere sine løsninger. Dette harmonerer med (Ulland et al., 2018, s. 139) som argumenterer for å la elevene skrive for å dokumentere, regne og for å lære.

En konsekvens av et åpent spillark kan være at elevene tenker over hvordan de skriver, slik at de kan skrive på en måte som både gir mening for spillaget og for motspillere.

Reguleringer ved informasjonssprang

For å kunne tilpasse spillet til hver enkelt elev slik at det gir hensiktsmessig utfordring, bør spillet kunne reguleres (Russo et al., 2018, s. 30). Hver økt vil ha et sett med spillreguleringer som lærer kan bruke for å regulere vanskelighetsgraden på spillet, slik at det faglige nivået kan tilpasses hver gruppe eller spillag. For eksempel er en regulering at røde kort er negative tall, eller at det i hver runde må brukes multiplikasjon eller divisjon. Reguleringer som gjør spillet mindre utfordrende kan være å innføre bruken av kalkulator om lærer finner det hensiktsmessig. Spillreguleringene er overlatt til lærer sin autonomi, og er noe som lærer bør vurdere gjennom alle øktene.

3.2.3 Økt 1

Vi vil at elevene skal få kjennskap til IE som er egenskaper til regneoperasjoner (se 3.1.1). Å ha kjennskap til atferden til regneoperasjoner er en sentral del av å utvikle tall og tallforståelse (Russell et al., 2011; Valenta, 2016, s. 12). Gjennom tilbakemeldinger fra miljøet er målet at elevene skal oppdage IE som strategi. Elever kan prøve og feile seg frem til løsninger, men det er ofte en fordel å kunne bruke IE, eller lage IE ved hjelp av IE+, IE× og divisjon av to like tall. Målet er at spillet skal skape et naturlig fokus på adferden til regneoperasjonene.

Devolusjonsfase

Økt 1 sin didaktiske kontrakt blir formulert. Lærer skal modellere en spillrunde av *Lag det tallet* for elevene. I modelleringen skal lærer velge én elev som medspiller og to elever som motspillere. Tanken bak dette er å involvere klassen i større grad ved overbringelsen av miljøet. Lærer må gjennomgå regler, sosiale sammensetninger og betydningen av spillarket.

Aksjonsfase

Elevene spiller *Lag det tallet*, og skal i denne fasen prøve og feile på miljøet. De skal danne seg erfaringer og implisitte løsninger. Disse implisitte løsningene kan blant annet være bruken av forskjellige regnearter og IE. Elevene kan også oppdage strategier som kan gi flere poeng i spillet gjennom validering av hverandres løsninger.

Om devolusjonen har vært vellykket, kan lærer ta rollen som observatør. Det kan være gunstig å se etter hvordan elevene utvikler strategier og da spesielt IE. Lærer bør notere seg løsninger, slik at hen kan bruke eleveksempler i de senere fasene. Om devolusjonen ikke var vellykket må lærer regulere ved henvisning til den didaktiske kontrakten, slik at elevene kommer i gang med spillet.

Formuleringsfase

I denne fasen skal det foregå en strategiutveksling. Hensikten med denne strategiutvekslingen er å gjøre elevene bevisst på valgene sine i spillet, samt bli eksponert for andre spillag sine strategier. Strategiutvekslingen skal også sikre at alle elevene blir inkludert i det faglige felleskapet. For å bevare det adidaktiske potensialet skal spillagene utveksle strategier med et annet spillag som de *ikke* spiller mot. Fra et konkurranseperspektiv gir det liten mening å dele strategier til motstanderen sin. Ved å rullere kan det argumenteres for at det er mer motiverende å dele strategier.

Valideringsfase

Etter strategiutvekslingen skal elevene tilbake i sine opprinnelige grupper og validere gyldigheten til strategiene sine ved å innlede nye spillrunder. Elevene bør få nok tid til å spille, slik at de har mulighet til teste ut strategiene som har blitt delt.

Etter denne spillsekvensen skal lærer innlede en klassedialog der elevene skal ha mulighet til å dele, begrunne og argumentere for forskjellige strategier som har kommet til syne. For å forsøke å bevare den adidaktiske fasen bør debatten dreie seg om strategier og aspekter av spillet, og primært være mellom elevene. Optimalt skal lærer fungere som en ordstyrer.

Institusjonaliseringsfase

Lærer tar elevene ut av den adidaktiske fasen og inn i en didaktisk fase. Lærer skal de-kontekstualisere kunnskapen elevene har bruk i spillet, som i dette tilfellet er IE. Lærer bruker konkrete situasjoner fra økten til å forklare at IE er en egenskap til en regneoperasjon som ikke endrer verdien til et tall når det kombineres med tallet. Lærer bør få frem betydningen til IE, som for eksempel i balansering av likninger, og at dette er noe de vil bruke videre i matematikken.

3.2.4 Økt 2

I økt 2 er blir det innført to målkunnskaper, og spillet reguleres med informasjonssprang.

Det første målet i denne økten er at elevene skal få kjennskap til variabler. Å arbeide med variabler er hensiktsmessig i utviklingen av algebraisk tenking (Blanton et al., 2015; Kieran, 2004). Dette skal skje gjennom å bytte ut et spillkort med jokerkortet. Jokeren representerer en verdi fra 1 – 13 og kan brukes hver spillrunde. Variabler har to vanlige bruksområder som plassholder og en rekke tallverdier (Kilpatrick et al., 2001). Elevene skal få erfaringer med variabel som en plassholder gjennom å representere jokeren som ett spesifikt tall/kort i løsningene sine. Videre når elevene diskuterer og resonnerer rundt hvordan de kan bruke jokeren og strategier rundt den, vil jokeren representere en rekke tallverdier (i dette tilfellet 1-13). Radford (2010) trekker frem bruken av semiotiske ressurser i undervisningen for å gjøre abstrakte konsepter mer forståelig, dette sammenfaller også med Russo et al. (2018, s. 51) som understreker at elevene må bruke ulike representasjoner og kontekster for å skape mening med ukjente. Vi antar at elevenes erfaringer med jokeren vil gi den kjent kontekst i videre arbeid med variabler.

Det andre målet i økten er at elevene skal erfare behovet for et felles notasjonssystem. Fra Filloy og Rojano (1989) vet vi at dersom elever blir overlatt til å lære algebraisk notasjon selv, vil de ha en tendens til å bruke egne og kjente metoder. Elevene har ikke blitt presentert for konvensjonene parenteser og prioriteringsregelen, og vi forventer derfor at det vil komme frem ulike notasjonsstrategier på spillarkene. Ved at elevene blir eksponert for hverandres ulike notasjonsstrategier, antar vi at behovet for et felles notasjonssystem kommer frem.

Den sosiale organiseringen vil være lik som i økt 1, men lærer har mulighet til å forandre på gruppesammensetningen.

Devolusjonsfase

I økt 2 utvides den didaktiske kontrakten. Lærer skal modellere en spillrunde med elevene der jokeren blir innført. Spillarket er en sentral del av denne økten ettersom to av målkunnskapene er notasjon og variabel. Lærer bør derfor presisere at elevene må notere på spillarket, uten å legge føringen på selve notasjonen.

Aksjonsfase

I denne spillsekvensen skal elevene igjen prøve og feile på miljøet. De skal danne seg erfaringer og implisitte løsninger ved bruk av jokeren. Dette kan innebære strategisk bruk av joker eksempelvis å bruke joker som additive invers eller bruke joker som IE×.

Om devolusjonen har vært vellykket, kan lærer hovedsakelig ta rollen som observatør. Som observatør bør lærer se hvordan elevene utvikler strategier eller interessante aspekter ved notasjonen til elevene. Observasjonene kan brukes i formuleringsfasen. Om devolusjonen ikke var uklar må lærer regulere med henvisning til den didaktiske kontrakten.

Formuleringsfase

Lærer må finne representative eksempler som skal legge grunnlaget for en klassedialog. I denne klassedialogen skal elevene ha mulighet å dele ulike fremgangsmåter for notasjon og variabler. De skal også reflektere og argumentere for forskjellige måter å notere på. Lærer bør vise til flere notasjonsstrategier som har kommet frem i aksjonsfasen, og disse skal bli synliggjort slik at elevene ser behovet for et felles notasjonssystem. For å holde fasen adidaktisk, skal lærer ta utgangspunkt i spillet og spillsituasjonene. Lærer kan bruke analogier (eksempelvis notasjonsskjema i sjakk) for å gi notasjonen mening i spillsammenheng. Lærer skal sammen med elevene finne felles momenter i de forskjellige notasjonssystemene som elevene skal bruke i neste fase. Eksempelvis kan dette være hvordan elevene forholder seg til likhetstegn, mellomregninger og notasjon av joker.

Valideringsfase

Etter endt klassedialog om notasjon skal elevene tilbake i spillag. Lærer regulerer spillet med en ny regel. Nå må elevene godkjenne hverandres notasjoner på spillarket for å få poeng for løsningene sine. Når elevene må godkjenne hverandres notasjoner er det ønskelig at dette skaper dialog om forskjellige måter å notere på, at elevene resonnerer rundt disse og at momentene fra formuleringsfasen kan komme til nytte.

Elevens nye erfaringer danner grunnlaget for en klassedialog. I klassedialogen skal lærer styre elevene mot behovet for felles retningslinjer ved notasjon.

Institusjonaliseringsfase

Avslutningsvis skal lærer gjennomfører en institusjonaliseringsfase der rollen til kunnskapen i spillet blir tydeliggjort i matematisk betydning. Lærer bruker elevenes erfaring om behovet for et felles notasjonssystem i spillet til å forklare at det også er nødvendig med et entydig notasjonssystem i matematikken. Lærer viser til konvensjonene prioriteringsregelen og parentes, og forklarer hvordan dette blir brukt videre i algebra og matematikken.

Videre skal lærer bruke jokeren i spillet som en meningsfull kontekst når ideen om variabel blir presentert. Lærer kan vise til hvordan man symbolsk kan representere joker som J, og videre vise andre konvensjonelle symboler i matematikken, hva ideen til symbolene skal representere og når disse blir brukt. Lærer kan henvise til spillrundene der elevene diskuterer strategier knyttet til joker og knytte dette opp mot å generalisere ved hjelp av variabler i matematikken.

3.2.5 Økt 3

Økt 3 vil ikke følge Strømskag (2022) sin modellering av en didaktisk situasjon. I denne økten vil det ikke forkomme noen formuleringsfase, men det vi være en spilloppgavesekvens.

I økt 3 vil den matematiske ideen dreie seg om et re-fokus på likhetstegnet. Vi ønsker at elevene skal være i aktiviteter som kan bidra til at elevene utvikler en relasjonell forståelse av likhet og ekvivalens, slik at de kan ha muligheten til å utvikle algebraisk tenking. Dette skal gjøres gjennom å innføre tre måltall, der lærer legger føringer på at eleven må skrive høyre side av likningen som uttrykk. Ved å legge til flere måltall må elevene lage to uttrykk og sette dem lik hverandre. Fra Kilpatrick et al. (2001) og Birkeland et al. (2019) vet vi at mange elever har en operasjonell forståelse av likhetstegnet og at likhetstegnet kan bli sett på som et signal for å utføre en regneoperasjon. Ved å innføre flere måltall ønsker vi at eleven skal re-fokusere på likhetstegnet gjennom å lage to uttrykk som er ekvivalente. Elevene må ta stilling til hva slags regneoperasjon de vil bruke mellom måltallene.

Etter klassedialogen og institusjonaliseringen av likhetstegnet vil det være en spilloppgavesekvens. I spilloppgavene skal elevene bruke målkunnskapene de har lært i andre kontekster, men som likevel har et format som gir meningsfull kontekst for elevene. Dette vil vi gjøre ved å lage spillrelaterte likninger der tallene er representert av spillkort og variablene er representert av joker (se vedlegg 1). Målet er at lærer og elever får vurdere og erfare om kunnskapen de lærte gjennom øktene har blitt til referansekunnskap som kan brukes i andre områder av matematikken.

Devolusjonsfase

I økt 3 skal lærer modellere en spillrunde av *Lag det tallet* med tre måltall. Lærer må få frem at elevene skal skrive måltallene som et utrykk på høyre side av likhetstegnet. Utover dette er devolusjonen lik som i økt 1 og 2.

Aksjonsfase

I denne spillsekvensen skal elevene samhandle med miljøet gjennom prøving og feiling. I spillsekvensen må elevene nå ta stilling til to uttrykk i løsningene sine og sette dem lik hverandre. Elevene skal danne seg erfaringer og implisitte løsninger for hvordan de snakker om og noterer spilløsningene sine.

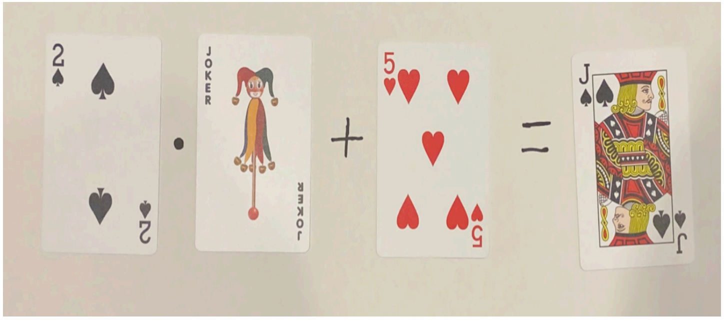
En vellykket devolusjon fører til at lærer kan ta rollen som observatør. Det kan være gunstig å se etter hvordan elevene forholder seg til likhetstegnet, siden dette kan si noe om elevens algebraiske tanker (Filloy & Rojano, 1989, s. 19-22). Om devolusjonen ikke var vellykket må lærer igjen regulere elevene slik at de kommer i gang med spillet.

Klassedialog og institusjonaliseringsfase av likhetstegnet

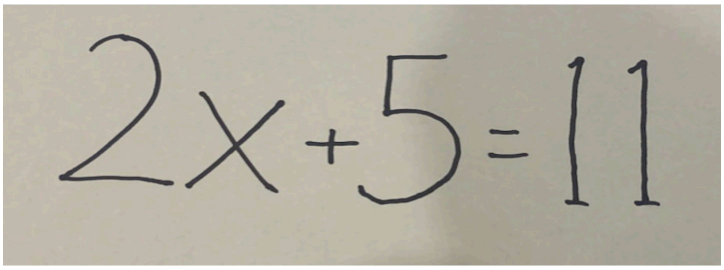
Etter elevene har gjennomført en aksjonsfase med flere måltall, skal lærer legge til rette for klassedialog. I denne klassedialogen skal lærer bruke situasjoner fra aksjonsfasen for å illustrere at likhetstegnet kan betyr ekvivalens og ikke et signal om å utføre en regneoperasjon. Videre informerer lærer om rollen til og fremtiden til likhetstegnet ved å eksempelvis forklare at likhetstegnet kan bli brukt i likninger, som er to uttrykk satt lik hverandre.

Spilloppgaver

I neste del av økt 3 skal elevene arbeide med oppgaver knyttet til målkunnskapene (se figur 4 og figur 5 for to utvalgte oppgaver). Oppgavene skal være basert på målkunnskapen fra alle øktene. Oppgavene er laget med utgangspunkt i spillkortene, der målet er å bevege seg fra en kjent kontekst til mer abstrakte konsepter. Det anbefales at elevene løser disse i grupper eller i felleskap, slik at elevene får mulighet til å argumentere, resonnere og begrunne valgene sine. Lærer bør være oppmerksom på om elevene opplever utfordringer i arbeidet med oppgavene.



Figur 4: Oppgave økt 3



Figur 5: Oppgave økt 3

Avslutningsvis skal lærer bruke oppgavene som er hensiktsmessig for elevgruppen og trekke ut den matematiske kunnskapen elevene har brukt. I gjennomgangen av oppgavene er matematikken sentral. Målet med siste del i økt 3 er at elevene skal se en verdi av kunnskapen de har tilegnet seg i en annen kontekst.

3.3 Fase 3 – Realisering, observasjon, datainnsamling

I denne delen skal vi gjøre rede metodiske aspekter i forkant av realiseringen. 3.3.1 vil ta for seg realiseringen, 3.3.2 observasjon og 3.3.3 datainnsamlingen.

3.3.1 Realisering

Den planlagte realiseringen av *ALTA kortspill* vil bli gjennomført av kontaktlæreren til den gitte klassen. Den vil gjennomføres på starten av vårsemesteret på et 7.trinn. Det vil være 3 økter på 90 minutter over to uker. Ifølge Postholm og Jacobsen (2018, s. 135) er det formålstjenlig for forskeren at alle parter har definert sin rolle. Rollen til elevene har blitt definert ved at de har gitt samtykke til å være med i forskningsprosjektet som forskningsdeltakere. For å gjøre kontaktlæreren bevisst på sin rolle gjennomførte vi en 90 minutters gjennomgang av *ALTA kortspill* på *ALGEBRA* workshop (11. jan 2024) der vi forklarte, reflektere og planla gjennomføringen av *ALTA kortspill*. Vår rolle vil være forsker som har en rolle som observatør som samler inn data under realiseringen av undervisningsopplegget (Strømskag, 2022, s. 73)

3.3.2 Observasjon

Ifølge Gold (1989, henvist i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115) er vi observatør-som-deltaker. Dette betyr at vi ikke deltar i aktiviteten og vi har heller ingen relasjon til elevene, men vi vil svare på spørsmål om hvem vi er og hvorfor vi er der. Ettersom vi er en del av *ALGEBRA*-prosjektet vil det også være en forsker fra prosjektet med samme observatørrolle som oss til stede under realiseringen.

Som observatører vil vi bruke feltnotater i hver økt i realiseringen av *ALTA kortspill*. Postholm og Jacobsen (2018, s. 114) trekker frem at observasjoner ikke kun handler om å se, men å bruke alle sansene. Dette kan hjelpe oss som observatører med å få et helhetlig bilde av situasjonen. Selv om det er algebraisk aktivitet som er av vår interesse, vil vi fortsatt være oppmerksomme på lydnivå, kroppsspråk og stemning.

Ifølge Postholm & Jacobsen (2018) er det vesentlig at forskeren leser seg opp på eksisterende teori knyttet til tematikken (i vårt tilfelle teori om algebra) slik at forskeren kan fokusere på observasjonen, samtidig må forskeren være bevisst på at teori kan forme synet til forskeren. Siden vi er to observatører som skal behandle dataene har vi to forskjellige teoretiske briller, men med samme fokus i samme setting og situasjon, som kan gi grunnlag for en flere forhold i situasjonen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131).

3.3.3 Datainnsamling

I observasjonen vil feltnotater, lydopptak, videoopptak og spillark bli brukt som datainnsamlingsmetode. Kommunikasjon mellom elever og mellom elev og lærer er en viktig del av vår forskning, samt både verbale og non-verbale uttrykk (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). Lydopptak og videoopptak vil bli brukt til å undersøke dette. I forskning kan bruk av video oppleves som mer forstyrrende for forskningsdeltakeren enn lydopptak (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131) I de adidaktiske fasene vil to grupper bli observert med kamera og to grupper med diktafoner. Hvilke grupper som har kamera og hvilke som har diktafoner, blir bestemt i samarbeid med kontaktlærer med hensyn til elevene og minst mulig forstyrrelser i økten generelt. I fasene hvor klassen er samlet, vil ett kamera bli plassert mot elevene og ett kamera plassert mot lærer og tavle. Kameraene vil bli plassert i et hjørne slik at vi enkelt kan snu kameraene mellom gruppene og samlingspunktet. Vi ønsker å få med oss mest mulig, uten at vi tar unødvendig oppmerksomhet fra økten. Spillarkene vil bli samlet inn etter hver økt. Dataene vil bli lagt inn på en sikker passordbeskyttet server i forbindelse med *ALGEBRA* prosjektet og deretter slettet fra opptaksutstyr.

4 Metode del 2

Metode del 2 vil omhandle vårt forskningssyn og forskningsdesign som er relevant for vår problemstilling (se 4.1). I 4.2 vil vi gjøre rede for analyseverktøy og analyseprosessen. Forskningskvaliteten vil bli drøftet i 4.3, hvor sentrale elementer er tolkning (se 4.3.1), gyldighet (se 4.3.2) og pålitelighet (se 4.3.3). Siste del av metode del 2 vil handle om etiske betraktninger og ansvarlighet ovenfor deltakere.

4.1 Forskningssyn og forskingsdesign

Ontologisk tar vi utgangspunkt i at virkeligheten konstrueres av oss som forskere og subjektene i realiseringen av *ALTA kortspill*, som tilsier at vi befinner oss innenfor konstruktivismen (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 90). Ettersom vi ønsker å analysere og tolke empirien samlet fra realiseringen, hvor vi anerkjenner at vår tolkning og teoretiske perspektiv påvirker resultatene, befinner vi oss innenfor det interpretivistiske paradigme (Bryman, 2016, s. 26).

I vår problemstilling ønsker vi å undersøke realiseringen av *ALTA kortspill* for algebraisk aktivitet og hensiktsmessige momenter for å legge opp til algebraisk aktivitet. Ettersom dette er noe som er vanskelig å måle, og finner sted i samspillet mellom elev, lærer og miljøet, har vi valgt å bruke en kvalitativ casestudie. Creswell (2013, s. 47-48) påpeker at kvalitativ forskning er hensiktsmessig når man trenger å utforske et problem i dybden der variablene er vanskelige å måle.

4.2 Analyseverktøy og analyseprosess

I denne delen skal vi gjøre rede for analyseverktøyet og analyseprosessen. I 4.2.1 skal vi forklare utviklingen av og presentere vårt analyseverktøy for algebraisk aktivitet. I 4.2.2 skal vi forklare hvordan vi bruker teoretisk tematisk analyse i analyseprosessen.

4.2.1 Analyseverktøy

Analyseverktøyet vil hjelpe oss med å tolke om elevene er i algebraisk aktivitet i de konkrete situasjonene som oppstår i realiseringen av *ALTA kortspill*. For å gjøre dette vil vi basere utviklingen på teorikapittelet 2.1.3 som handler om algebraisk aktivitet.

Basert på dette utviklet vi fem tegn på algebraisk aktivitet (se tabell 1): Fokusere på strategier, re-fokus på likhetstegnet, variabler, notasjon med mening og generalisert aritmetikk.

Den første kategorien *fokusere på strategier* baserer seg på:

- Å forstå atferden til operasjoner (Russell et al., 2011).
- Fokuserer på relasjoner og ikke kun kalkulering av numeriske svar
- Fokusere på operasjoner, samt deres inverse den relaterte idé om å gjøre/reversere (Kieran, 2004).

Re-fokus på likhetstegnet bygger på:

- Et re-fokus på betydningen av likhetstegnet (Kieran, 2004).
- Ekvivalens, uttrykk, likninger (Blanton et al., 2015).

Kategorien *variabler* har sin bakgrunn i områdene:

- Et fokus på både tall og bokstaver, i stedet for bare tall (Kieran, 2004)
- Variabel (Blanton et al., 2015).
- Generalisere og begrunne
- Notasjon med mening (Russell et al., 2011).

Den fjerde kategorien, *notasjon med mening*, bygger i hovedsak på:

- Å bruke notasjon med mening (Russell et al., 2011).
- Fokusere på å både representere og løse et problem fremfor det å kun løse det (Kieran, 2004)

Kategorien *generalisert aritmetikk* har bakgrunn i:

- Generalisert aritmetikk (Blanton et al., 2015).
- Generalisere og begrunne
- Utvide nummersystemet (Russell et al., 2011).

Kategorier for algebraisk aktivitet	Situasjoner av interesse
Fokusere på strategier	- Diskusjon, resonnering og argumentasjon rundt strategier knyttet til: o Identitetselementer til addisjon og multiplikasjon (IE) o Joker o Flere måltall

	o Generelle strategier i spillet - Bruk og endring av strategier knyttet til: o IE o Joker o Flere måltall o Generelle strategier
Re-fokus på likhetstegnet	- Diskusjon, argumentasjon og resonnering ved bruken av likhetstegnet - Endring i bruk av likhetstegnet i spillarket
Variabler	- Diskusjon, resonnering og argumentasjon knyttet til bruken av joker - Representasjon av jokeren
Notasjon med mening	- Diskusjon, argumentasjon og resonnering om notasjon - Utrykke og tolke egne og andres notasjonssystemer - Endering mot konvensjonell matematisk føring i spillarkene
Generalisert aritmetikk	- Diskusjon, resonnering og argumentasjon knyttet til egenskapene til regneoperasjonene o Generelle regneoperasjoner o IE o Joker o Flere Måltall - Tegn til forståelse av atferd av operasjoner - Diskusjon, resonnering og argumentasjon av fundamentalegenskapene til tall - Utvidelse nummersystemet o Negative tall

Tabell 1: Analyseverktøy

4.2.2 Analyseprosessen

I analyseprosessen har vi valgt å gjennomføre en teoretisk tematisk analyse bestående av seks faser, inspirert av Braun og Clarke (2006, s. 87) som skriver om tematisk analyse innenfor kvalitativ forskning i psykologi. Fasene er:

1. Bli kjent med dataene dine
2. Lage foreløpige koder
3. Lete etter temaer
4. Gjennomgå temaer
5. Definere og navngi temaer

6. Produsere rapporten. Braun og Clarke (2006, s. 87, vår oversettelse).

Tematisk analyse kan sees på som en fundamental analysemetode innenfor kvalitativ forskning og som er en metode for å identifisere, rapportere og analysere temaer i datasettet (Braun & Clarke, 2006, s. 78-79).

Vi fant denne metoden hensiktsmessig fordi den gir en systematisk fremgangsmåte til å presentere analyseprosessen i de kategoriene vi har utarbeidet, og å få et dypt innblikk i dataene. (Braun & Clarke, 2006, s. 84).

Fase 1: Bli kjent med dataene

Den første fasen handler om å gjøre seg kjent med datamaterialet. Dette gjøres blant annet ved å transkribere nødvendige data, lese dataen og notere ideer (Braun & Clarke, 2006, s. 87).

Som nevnt tidligere bestod datamaterialet vårt av feltnotater, spillark, videoopptak og lydopptak. Etter hver økt systematiserte vi datamaterialet slik at spillarkene, videoopptak og taleopptak til hver respektiv spillgruppe sammenfalt. Etter hver økt analyserte vi dataene fortløpende. Vi opprettet et analysedokument hvor vi noterte ned tidspunkt og korte forklaringer om situasjonene fra feltnotater og opptakene, og gjorde dette med alle fire gruppene vi observerte. Dette var en sentral del av databehandlingen, siden elevene eksempelvis kunne bruke IE i løsningen på spillarkene, uten at dette kom frem på video- eller taleopptakene. Dette var relevant informasjon da det kunne si noe om utviklingen senere i realiseringen. Det var en tidkrevende prosess, men det lot oss få oversikt over hva elevene uttrykte skriftlig og muntlig.

Fase 2: Lage foreløpige koder

Den andre fasen i denne tematiske analysen handler om å systematisere og gruppere dataene i koder (Braun & Clarke, 2006, s. 88).

Etter vi hadde gjort oss kjent med datamaterialet begynte vi å systematisere og gruppere dataene ved å knytte situasjonene opp mot *situasjoner av interesse* i analyseskjemaet (tabell 1). Vi valgte å gi situasjonene fargekoder. Så vi eksempelvis at et spillag resonnerte rundt bruken av strategier, ga vi den fargekoden gul. Samme situasjon kunne også få flere farger, eksempelvis dersom spillaget i den samme situasjonen også snakket om hvorfor og hvordan strategien fungerte fikk den fargekoden rød i tillegg.

Fase 3: Lete etter temaer

Denne fasen handler om å organisere kodene i kategoriene, og samle all dataen til situasjonene (Braun & Clarke, 2006, s. 89).

Etter vi hadde kodet dataene, samlet vi disse i kategoriene fra analyseskjemaet. Vi satt da igjen med en oversikt fra alle tre øktene som var oversiktlig med fargekoder.

Fase 4: Gjennomgå temaer

I Fase 4 skal man gjennomgå og raffinere dataene og revidere temaer. Dette gjøres blant annet ved å vurdere gyldigheten av temaene i forhold til dataene. Dersom kategoriene fungerte, kan man gå til den neste fasen (Braun & Clarke, 2006, s. 91). Vi opplevde at kategoriene var dekkende for datamaterialet og derfor valgte vi å gå til fase 5.

Fase 5: Definere og navngi temaer

Den femte fasen handler om å organisere datautvalg og analysere temaer i detalj (Braun & Clarke, 2006, s. 92). Dette var en omfattende og utfordrende prosess, ettersom vi undersøker blant annet endring og utvikling, samtidig som vi ser etter spesifikke aktiviteter. Vi fant det hensiktsmessig å organisere dataene gjennom å først analysere de forskjellige kategoriene overordnet i øktene, deretter fant vi representative utvalg til hver av kategoriene. Hensikten med dette var å kunne presentere resultatene og analysen til hver kategori på en helhetlig måte. Dette var nyttig når vi skulle analysere kategoriene i de overordnete øktene. Ved å analysere hver økt innenfor hver kategori, fikk vi et overblikk over situasjoner og vi kunne også kvantifisere sentrale elementer som kan si noe om utviklingen. Vi kan eksempelvis se hvilket tidspunkt og hvilken sekvens av undervisningen IE ble bruk for første gang eller omfanget av bruken av negative tall hos alle spillagene. Dette lot oss finne representative utvalg i analysen, men også bidra til konteksten i presentasjonen av de representative utvalgene for hver kategori.

I prosessen av organisering og analyse av representative utvalg, valgte vi å basere disse på bakgrunn av hva vi fant representativt for kategoriene. Noen utvalg er representative for hele klassen, mens andre utvalg oppstod kun som enkelttilfeller innad i forskjellige spillag. Vi ville forsøke å beskrive dataene slik at de ble tydelige og gyldige, derfor valgte vi å se bort ifra datamaterialet med lav kvalitet, som eksempelvis ved mye bakgrunnsstøy.

Vi transkriberte de aktuelle situasjonene ordrett, og hos spillgrupper som hadde kamera ble kroppsspråket til elevene notert om vi fant det relevant. Prosessen med å beskrive de representative utvalgene var omstendelige, og vi måtte ofte gå frem og tilbake i dataene for å forstå konteksten og om utvalget vårt bygde på andre situasjoner tidligere i øktene. Enkelte situasjoner ble gjennomgått mange ganger slik at vi fikk med oss alt som skjedde. Da denne prosessen var over hadde vi representative utvalg med utviklingen i kronologisk rekkefølge, og med tilhørende transkripsjoner, spillark og mulig kroppsspråk.

Braun og Clarke (2006, s. 92) viser til at denne fasen skal få frem essensen i hvert enkelt tema. Mange av våre situasjoner foregikk over en gitt periode med brudd av andre momenter i mellomtiden. Det var derfor utfordrede å få frem den røde tråden i situasjonen vi ville analysere. For å bevare den røde tråden, samtidig som vi kunne tolke og analysere, la vi inn vår tolkning og analyse rett etter hver seksjon.

Fase 6: Produsere rapporten

I fase 6 skal resultatene bli skrevet ned og rapportert (Braun & Clarke, 2006, s. 93). For å gi leseren en kontekst for realiseringen, startet vi med å presentere et kortfattet sammendrag av øktene i realiseringen. Denne delen omhandlet hvordan organiseringen i realiseringen var og hvordan den avvek fra *ALTA kortspill*. Disse presenterte vi økt-vis, med samme oppsett som vi brukte i *ALTA kortspill*.

Vi presenterte så resultatene kategorisk, hvor vi startet med det overordnede, før vi gikk dypere inn på representative utvalg. Det var utfordrende å vite hvor detaljerte beskrivelser fra datamaterialet vi skulle inkludere i utvalgene, da vi opplevde at noen momenter kunne gi et dypere innblikk i konteksten, men samtidig ville vi forsøke å holde oss innenfor kategoriens rammer. Vi har forsøkt å inkludere tilstrekkelig med detaljer til at resultatene forteller historien til kategorien på en gyldig måte (Braun & Clarke, 2006, s. 93).

4.3 Forskningskvalitet

For å vurdere kvaliteten av forskningen, må forskerne kritisk kunne beskrive og analysere måten kunnskapen i forskningen er konstruert og hvordan den kommer frem (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 219-220).

I dette kapittelet vil vi redegjøre for sentrale elementer knyttet til forskningskvalitet. I 4.3.1 vil vi gjøre rede for tolkning, 4.3.2 tar for seg den indre gyldigheten og i 4.3.3 vil den ytre gyldigheten bli drøftet. Til slutt vil i 4.3.4 sentrale elementer knyttet til påliteligheten bli presentert.

4.3.1 Tolkning

Bryman (2016, s. 392) påpeker at forskning i sosiale kontekster kan aldri være helt objektiv og vi som forskere må derfor tolke funnene våre. Heshusius (1994, referert i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 220) påpeker at forskeren må være bevisst på sin egen subjektivitet i forskningen. Vi anerkjenner at våre tolkninger og resultater er påvirket av hvilken algebra-teori vi har tatt utgangspunkt i. Vi har derfor forsøkt å gjøre rede for vårt teoretiske ståsted ved å definere algebraisk tradisjon som er algebra og aritmetikk samtidig (se 2.1.1). Vi har også designet *ALTA kortspill* med utgangspunkt i DI. Ved å være transparent i disse prosessene håper vi at forskningsresultatet kan oppleves som gyldig for flere og ha intersubjektivitet, som ifølge Postholm og Jacobsen (2018, s. 15) er det nærmeste vi kommer sannhet.

4.3.2 Indre Gyldighet

Indre gyldighet handler om studien måler det den skal måle (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). I undersøkelser av den sosiale virkeligheten kan man oppfatte situasjoner forskjellig. Det er derfor sentralt at leseren finner resultatene våre troverdige (Bryman, 2016, s. 390).

Hovedformålet med *ALTA kortspill* er å utvikle algebraisk tenkning, men vi kan aldri si med sikkerhet om elevene har utviklet algebraisk tenkning, da dette er en kognitiv prosess. Vi har derfor fokusert på algebraisk aktivitet, som kan bidra til å fremme utviklingen av algebraisk tenkning (se 2.1). I undersøkelsen av algebraisk aktivitet må vi fortsatt tolke resultatene for å vurdere om vi faktisk måler algebraisk aktivitet. Ved å designe *ALTA kortspill* med utgangspunkt i algebraisk aktivitet og inspirert av didaktisk ingeniørvirksomhet (DI) har vi forsøkt å gjøre designprosessen transparent for leseren, og samtidig forankre valgene våre i teori. I designprosessen har vi også forsøkt å forutsi hvordan vi kan plassere elevene i algebraisk aktivitet. Dette gjør at leseren kan stilling til om våre hypoteser er plausible.

For å sikre enighet om våre tolkninger, gikk vi gjennom empirien til spillgruppe 1 i økt 1 individuelt. Deretter sammenliknet vi tolkningene og diskutere oss frem til enighet. Analyseverktøyet vi har benyttet i vår studie er teoretisk forankret, noe som også bidrar til å øke den indre gyldigheten. På denne måten håper vi å gi grunnlag for analysene og tolkningene og at det er en sammenheng mellom disse (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 230).

Vi deltok også på en workshop (01. feb 2024) etter realiseringen av *ALTA kortspill*, hvor både læreren som gjennomførte *ALTA kortspill* og en forsker som observerte realiseringen var til stede. Her fikk vi deltaker-validering på enkelte observasjoner og våre tolkninger fra realiseringen (Bryman, 2016, s. 390).

4.3.3 Ytre gyldighet

Den ytre gyldigheten handler om i hvilken grad funnene fra vår studie kan overførers eller generaliseres til andre kontekster utover vår realisering (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 238).

ALTA kortspill er utviklet for generiske elever på 7.trinn, men realiseringen ble gjennomført på en privatskole, noe som ikke nødvendigvis er representativt for 7. trinnselever. Gjennom en institusjonell analyse håper vi å gi leseren mulighet til å skille funnene fra konteksten og at funnene kan være gyldige utover den spesifikke konteksten. Av personvernhensyn er det begrenset hvor omfattende den institusjonelle analysen kan være. Geertz (1973, referert i Bryman, 2016, s. 392) trekker frem begrepet tykke beskrivelser, slik at leseren kan vurdere om funnene kan overføres til andre situasjoner. Vi har brukt datainnsamlingsverktøy som videoopptak, lydopptak, feltnotater og spillark. På grunnlag av dette har vi forsøkt å gi grundige og tykke beskrivelser av vår data og tolkninger, slik at leseren kan ta stilling til om funnene kan overføres til andre kontekster.

4.3.4 Pålitelighet

Pålitelighet handler om å gjøre forskning synlig for andre, slik at andre har muligheten til å fastslå riktigheten av funnene (Bryman, 2016, s. 392). I en kvalitativ studie bør forskeren derfor reflektere over sin påvirkning av funnene og at forskningsprosessen er synlig for leseren (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224).

Det var kontaktlærer som gjennomførte *ALTA kortspill*, mens vi hadde rollen som observatør som deltaker. Vi fortalte elevene hvem vi var og hvorfor vi var der, men utover dette observerte vi timen og det kan derfor argumenters for at vi i liten grad har påvirket elevene.

Selv om vi ikke gjennomførte *ALTA kortspill* var det vi som designet den, og det kan ha påvirket funnene indirekte. Det var avvik mellom øktene og det som var planlagt i *ALTA kortspill*. *ALTA kortspill* ble designet til økter som varte i 90 minutter hver, i realiseringen var hver økt på 75 minutter. Videre kan formuleringer i *ALTA kortspill* ha vært utilstrekkelige, og formålet kan være at formålet ikke har kommet tydelig frem.

Datainnsamlingsverktøyet kan ha påvirket funnene ved å være forstyrrende for elevene. Vi møtte derfor opp i god tid før første økt, slik at vi kunne planlegge og sette opp kamera og diktafoner på en hensiktsmessig måte for å samle det ønskede datamaterialet. Videre avtalte vi med lærer hvor kameraene og diktafonene burde være slik at det forstyrret i minst mulig grad. Vi hadde tilgang til to diktafoner og ett kamera den første økten, og fikk dermed ikke samlet inn data fra en av gruppene. I økt 2 og 3 fikk vi tilgang til et kamera til. Noe av datamaterialet vårt bærer tidvis preg av mye støy, og er ikke mulig å bruke.

For å gjøre forskningsprosessen synlig har vi forsøkt å beskrive analyseprosessen grundig. Vi har forsøkt å være transparente på hvordan vi utviklet analyseverktøyet som har vært grunnlaget for en teoretisk tematisk analyse. Ved å bruke en teoretisk tematisk analyse har vi fulgt fasene til Braun og Clarke (2006, s. 87), slik at leser kan vite hvordan vi behandlet dataene og ta stilling til analyseprosessen. Vi opplevde at analyseprosessen var utfordrende, ettersom det var et stort datamateriale som skulle analyseres, der det var mange ulike komponenter som måtte tas hensyn til. Dette kan ha påvirket gjennomsiktigheten til analyseprosessen. Dersom vi hadde hatt mer tid til rådighet ville vi endret kategoriene i fase 4 for å bedre kunne skille mellom kategoriene.

4.4 Etiske betraktninger

I Norge er det tre grunnleggende etiske krav relatert til forholdet mellom forsker og forskningsdeltakere: «informasjon om samtykke, krav på privatliv og krav på å bli korrekt gjengitt» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247).

Gjennom informert samtykke skal den frivillige deltakeren vite ulike konsekvenser ved forskningen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247). Ettersom vår studie ble med i *Algebra Learning: Generalizing, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation* (*ALGEBRA*), som allerede var et pågående prosjekt, fikk vi vite at samtykkeskjema var signert. Likevel var det viktig for oss at vi presenterte oss for elevene i forkant av realiseringen, og informerte om studiens hensikt, at det var frivillig å delta og at all data ville bli anonymisert.

For å oppfylle kravet på privatliv gjorde vi flere tiltak. For å bevare skolens anonymitet, har vi forsøkt å ikke nevne noe som gjør at den kan identifiseres, samtidig som vi kan gi leseren en kontekst for forskningen. Når det gjelder elevene, har vi gitt dem pseudonymer, både i transkripsjoner og i endelig tekst. Prosjektet er godkjent av Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør (Vedlegg 2), som gir oss grunnlag for å behandle personvernopplysningene i tråd med universitetets retningslinjer. Etter hver økt ble datamaterialet opplastet på en passordbeskyttet sikker server knyttet til *ALGEBRA*, og deretter slettet fra kamera og diktafon.

I kravet på å bli korrekt gjengitt streber vi etter å presentere resultatene så fullstendig og korrekt som mulig, i den grad det har vært mulig. Vi deler Fontana & Freys (2000, referert i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251) etiske prinsipp som tilsier at forskerens ansvarlighet overfor forskningsdeltakerne trumfer studiens målsetninger. Vi har forsøkt å presentere dataene fullstendig slik at resultatene ikke blir tatt ut av sin sammenheng (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251).

5 Resultater og analyse

I dette kapittelet skal vi presentere et kortfattet sammendrag av øktene fra realisering (se 5.1). Videre vil resultatene fra analysen blir presentert gjennom hver kategori for algebraisk aktivitet, hvor vi starter kategorien med en overordnet analyse av øktene. Dette skal gi kontekst for det representative utvalget for kategorien. Kategoriene blir presenter slik: fokus på strategier (se 5.2), variabler (se 5.3), notasjon med mening (se 5.4), re-fokus på likhetstegn (se 5.5) og generalisert aritmetikk (se 5.6).

5.1 Realisering av ALTA kortspill

I dette delkapittelet skal vi presentere kortfattede sammendrag av øktene i realiseringen *ALTA kortspill* på et 7. trinn. Sammendragene vil handle om strukturen av øktene, og vi vil gjøre rede for avvikene fra *ALTA kortspill*. Øktene er kun 75 minutter lange, til tross for at øktene var planlagt som 90-minuttersøkter.

5.1.1 Økt 1

Oppstart

Lærer presenterte plan for timen og modellerte en spillrunde sammen med elevene. Lærer hadde planlagt spillag og spillgrupper på forhånd og viste klasseromsorganiseringen på tavlen. Lærer innledet en spillsekvens.

Hoveddel

I spillsekvensen spilte spillagene *Lag det tallet* mot hverandre i spillgrupper. Lærer observerte de forskjellige spillgruppene og regulerte ved henvising til den didaktiske kontrakten om nødvendig (se 3.2.3).

Etter omtrent 20 minutter med spilling initierte lærer en strategiutvekslingssekvens. Spillgruppene ble oppløst og spillagene delte strategier med et annet spillag enn sin opprinnelige motstander. Etter fem minutter med strategideling gikk elevene tilbake til sine opprinnelige spillgrupper, og en ny spillsekvens ble innledet.

Elevene spilte *Lag det tallet* i ytterlige 20 minutter hvor lærer observerte og regulerte om nødvendig.

Avslutning

Lærer var ordstyrer i en klassedialog om strategier i spillet. I *ALTA kortspill* var det planlagt en institusjonaliseringsfase (se 3.2.3). Det ble ikke gjennomført noen institusjonaliseringsfase i realiseringen.

5.1.2 Økt 2

Oppstart

Lærer startet økten med en kort oppsummering av bruken av identitetselement til addisjon og multiplikasjon (IE) fra økt 1, og elevene ble oppfordret til å fortsette og bruke IE.

Lærer innførte joker og modellerte en spillrunde med elevene der reglen knyttet til joker ble forklart. Det ble ikke lagt noen føringer for hvordan joker skulle noteres. Organiseringen av spillagene og spillgruppene var lik som i Økt 1.

Hoveddel

Elevene spilte *Lag det tallet* med joker. Utover i timen ble det lagt inn en spillregulering av lærer der alle gruppene måtte bruke multiplikasjon i hver spillrunde. Lærer tok bilder av forskjellige notasjoner fra spillarkene. Etter 20 minutter samlet lærer elevene for en klassedialog.

Lærer presenterte fire forskjellige bilder fra spillsekvensen av ulike måter spillagene notere løsningene på, og ledet en faglig debatt om føringsstrategier og likhetstegnet. Lærer avsluttet klassedialogen ved å si at spillagene som ønsket kunne fjerne jokeren fra spillet.

Det ble innledet en ny spillsekvens hvor elevene ble oppfordret til å føre løsningene sine på én linje og validere motstanders løsninger i spillarket for å få poeng.

Avslutning

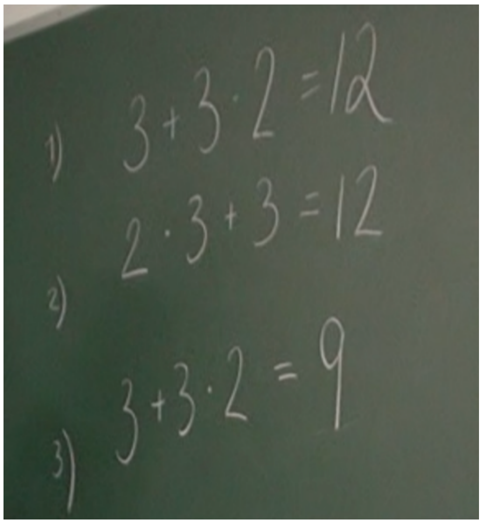
I avslutningen ledet lærer en ny faglig debatt om føringsstrategier og notasjon. Det ble presentert uttrykk fra spillsekvensen hvor elevene har hatt problemer med å føre løsningen på én linje. Timen ble avsluttet uten en institusjonaliseringsfase for variabel eller notasjonssystem, til forskjell fra planlagt *ALTA kortspill* (se 3.2.4).

5.1.3 Økt 3

Oppstart

Lærer startet økten med tre eksempler og ledet en klassedialog rundt disse uttrykkene (figur 6). Lærer forklarte prioriteringsreglene og parenteser. Etter omtrent 25 min ble en spillsekvens med fokus på notasjon innledet. Elevene har samme spillag, men nye spillgrupper.

Oppstarten var avvik fra *ALTA kortspill*, som handler om devolusjonen til *Lag det tallet* med tre måltall som et uttrykk på høyre side av likhetstegnet (se 3.2.5).



Figur 6: Oppgaver i oppstarten, økt 3

Hoveddel

Elevene spilte *Lag det tallet*, og lærer regulerte slik at alle spillgruppene måtte bruke multiplikasjon. Etter omtrent 25 minutter med spill, samlet lærer elevene. Ifølge *ALTA kortspill*, skulle elevene spilt *Lag det tallet* med tre måltall som et uttrykk på høyre side av likhetstegnet i denne delen av økten (se 3.2.5).

Lærer innførte reglen om å bruke to måltall på høyre side av likhetstegnet. En spillrunde ble modellert, men det ble ikke lagt føringer på notasjon. Planlagt i *ALTA kortspill* skulle det ha vært en klassedialog og institusjonaliseringsfase av likhetstegnet (se 3.2.5).

Elevene spilte med 2 måltall og hvor lærer gikk rundt og korrigerte notasjon. Spillsekvensen varte omtrent 20 minutter, før lærer samler elevene for en avslutning. Spilloppgavene ble ikke brukt (se 3.2.5).

Avslutning

Lærer ledet en kort (omtrent 2 minutter) avsluttende klassedialog om elevens opplevelser i spillet. I *ALTA kortspill* var det planlagt klassedialog om spilloppgaver (se 3.2.5).

5.2 Kategori 1 – Fokusere på strategier

Den første kategorien for algebraisk aktivitet er å fokusere på strategier (se 4.2.1). Strategier er noe elevene arbeider med gjennom alle tre øktene. Vi har valgt å fokusere på økt 1 og 2. I økt 1 (se 5.2.1) vil det være to representative utvalg og i økt 2 (se 5.2.2) vil det være ett representativt utvalg.

5.2.1 Økt 1

I den første spillsekvensen observerte vi at fire av åtte spillag brukte identitetselementet til addisjon (IE+) i løsningene sine, men det var ingen dialog rundt strategier. Alle gruppene forsøkte først å finne en løsning med bruk av subtraksjon og addisjon for å flest poeng. I strategiutvekslingen diskuterte elevene strategier de hadde utarbeidet, hvor vi observerte at syv av åtte spillag delte spillstrategier, tre spillag delte IE+ som en strategi, ett spillag delte negative tall som strategi og divisjon av to like tall som strategi.

Dette tolker vi som at elevene helst starter med det enkleste, prøve og feile-strategi med addisjon og subtraksjon, men etter hvert som de samhandler med miljøet utvikler de flere strategier basert på tilbakemeldingen fra miljøet. Strategiutvekslingen får elevene til å artikulere løsningene sine og alle gruppene diskuterer og argumenterer for strategier.

I den kommende spillsekvensen observerte vi at samtlige spillgrupper diskuterte, argumenterte og resonnerte rundt strategier. Vi observerte at alle spillag brukte IE+ og fem av åtte spillag brukte identitetselementet til multiplikasjon (IE×). Ett lag ble gjort oppmerksom på negative tall under strategiutvekslingen, og brukte dette i denne spillsekvensen. Deres motstanderlag gjøres så oppmerksom på strategien når de skal validere løsningen og sa: «Åja, vi kan gå under, ja».

Vi tolker dette som at strategiutvekslingen fikk elevene til å fokusere mer på strategier, og la et grunnlag for diskusjon, resonnering og argumentasjon om strategier i påfølgende spillsekvens. Det oppleves også at elevene var mer villige til å teste sine egne og medelevers hypoteser, eksempelvis negative tall.

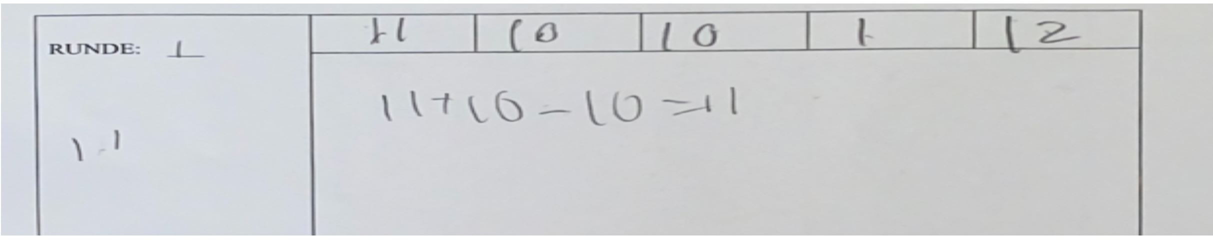
I klassedialogen observerte vi artikulasjon knyttet til strategier i spillet. Elevene delte sine strategier og måtte argumentere for gyldigheten av disse. Utsagn som: «Om du har én eller om du lager én kan du alltid gange med én» og «Om du har to av samme tall kan du ta pluss og minus for da får du null» blir observert.

Det kan argumenteres for at en slik klassedialog bidrar til å gjøre flere elever bevisst på strategier i spillet. Elevene får også øve på hvordan de skal ordlegge seg slik at strategiene de deler kommer til syne.

Representativt utvalg 1

I første spillsekvens har vi brukt eksempler fra spillaget til Siri og Guri, som spiller mot laget til Kjetil og Lars. I første sekvens snakket Siri og Guri i liten grad om strategier. De prøvde forskjellige kombinasjoner individuelt og valgte den løsningen som ga mest poeng. Til motsetning diskuterte Kjetil og Lars ofte kombinasjoner sammen. De fant også kombinasjoner fort, noe som resulterte i at Siri og Guri ofte valgte en løsning med en gang Kjetil og Lars har funnet sin løsning.

Tolkning: Allerede fra første runde brukte Kjetil og Lars IE+ $(10 - 10)$, de gikk midlertidig glipp av å bruke av IE× (Se figur 7). Siri og Guri godkjente løsningen.

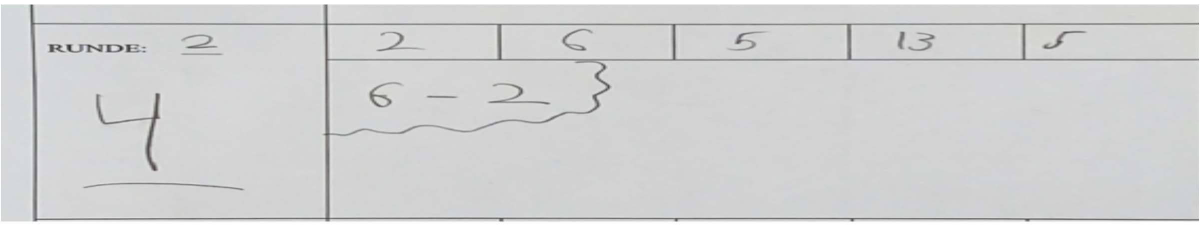


Figur 7: Lars og Kjetil bruker IE+ (10-10)

I runde 2 hadde Siri og Guri muligheten til å bruke IE+ $(5 - 5)$ (se figur 8). De var interessert i å få flere poeng og dette er noe de diskuterte sammen:

Guri:	13 minus 5 er 8, men vi klarer ikke lage noe som lager 4.
Siri:	Men kan vi ikke bare gjøre sånn her da? (*viser* $6 - 2 = 4$).
Guri:	Jo, det blir 4, men hva om vi skal få flere poeng?

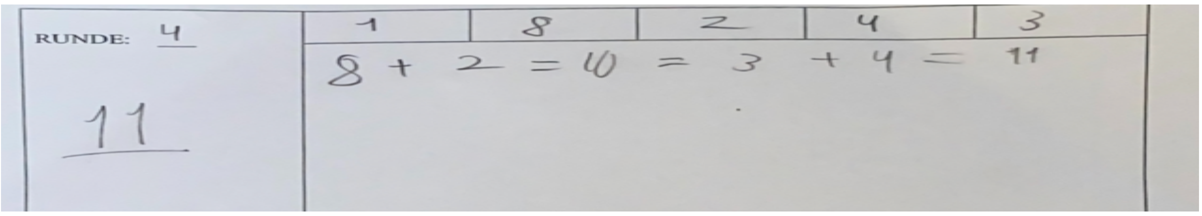
Lars og Kjetil fant en løsning med IE uten å snakke om strategier $(12 - 12)$ som gir dem 5 poeng denne runden. De maste på Siri og Guri om å finne en løsning og Siri og Guri valgte dermed løsningen de allerede hadde funnet (se figur 8).



Figur 8: Siri og Guri går glipp av IE+ (5-5)

Tolkning: Kjetil og Lars brukte IE+ i runde 1 som Siri og Guri godkjente. Siri og Guri har muligheten til å benytte seg av IE+ i runde to, men dette gjør de ikke. Vi oppfatter det som at de ikke har registret at IE+ er en strategi i spillet. Kjetil og Lars har brukt IE+ to runder. Selv om vi ikke observerte dialog mellom Lars og Kjetil antar vi at de har oppdaget IE+ som strategi.

I de påfølgende rundene hadde Siri og Guri muligheten til å bruke IE× (figur 9). De benyttet seg i midlertidig ikke av dette. Før de skrev ned løsningen oppsummerte de den slik: $8 + 2 - 3 + 4 = 11$.



Figur 9: Siri og Guri går glipp av IE×. Forsøkte å notere: 8 + 2 – 3 + 4 = 11

Tolkning: Siri og Guri så ikke aktivt etter IE×, siden de gikk glipp av det. Det var heller ingen dialog om strategier.

Lars og Kjetil brukte IE+ flere runder, men kun når de hadde to like tall. Spillaget fikk ofte 4 og 5 poeng. De hadde også muligheten til å bruke IE×, men det er ikke før den femte runden at de benyttet seg av IE×. De startet med å finne en løsning som ga 4 poeng, men var ikke fornøyde og ville prøve å få 5 poeng. Lars oppdaget at man kan bruke IE× og ble veldig engasjert. De glemte å notere på spillarket denne runden, utrykket Lars og Kjetil fant er $9 \times 1 + 9 - 11 + 1 = 8$.

Lars: 9 pluss 9 er lik 18 og 18 minus 11 er 7, pluss 1 da har vi 8. Men da bruker vi bare fire.

Kjetil: Men nå skal vi prøve å bruke alle.

Lars: Vi tar 9 ganger 1 (…) Det er så big brain av meg! 9 ganger 1 er jo lik 9.

Siri: Men du må jo gange det med et annet tall da.

Lars: Ja, 9 ganger med 1.

Siri: Åja!

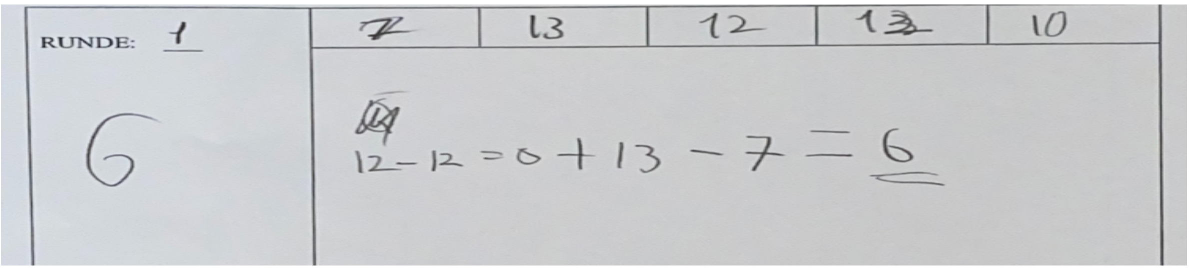
Tolkning: Vi oppfatter dette som at Siri får en åpenbaring ved bruken av IE× når hun blir gjort oppmerksom på at man kan multiplisere med 1.

I strategiutvekslingen diskuterte Lars og Kjetil med et annet spillag. Spillaget Lars og Kjetil utvekslet strategi med startet med å si «vi får bare enere som måltall hele tiden og at det ikke er noe gøy og at det er vanskelig». Lars henviste til å dividere to like tall og sier: «Men da må dere jo dele, da får dere 1». Etter dette gikk de igjennom hvor mange poeng hvert lag hadde fått og så over spillarkene. Mot slutten av strategiutvekslingen kommenterte Lars at han brukte IE× og sa: «1-ere er dritbra, dere må bruke 1-ere» han fylte inn: «Vi hadde egentlig brukt bare fire kort, men så hadde vi 1-er igjen og ganga med den».

Siri og Guri ble satt sammen med en annen gruppe for å dele strategier. Den andre gruppa fortalte: «Hvis du for eksempel har fem kort og du skal lage 4 (måltallet) også kan du lage 4 med tre kort og du har for eksempel to 9ere. Så kan du lissom bare ta 9 minus 9 også har du brukt to kort» De fulgte opp med spørsmålet: «Ga det mening?» «Ja» sa Siri og Guri. Da den andre gruppa spurte om Siri og Guri hadde noen triks sa de: «Vi har ingen triks, vi bare gjør noe».

Tolkning: I strategiutvekslingen ser vi at Kjetil og Lars deler strategien om bruken av IE× og divisjon av to like tall. Divisjon har ikke Kjetil og Lars kommentert tidligere i spilløkten og det kan derfor argumenters for at dette kom til syne når de hjalp det andre spillaget. Siri og Guri deler ingen strategier, men spillaget som Guri og Siri deler IE+ som strategi.

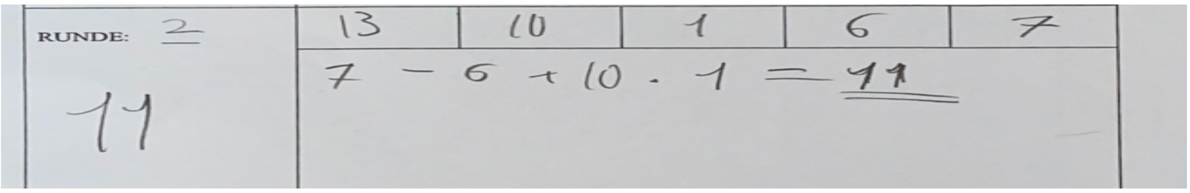
Etter gruppene hadde delt strategier gikk de tilbake til sine opprinnelige grupper og spilte videre. I den påfølgende spillrunden prøvde Siri og Guri med med IE+ $(12 - 12)$ (se figur 10) i sin løsning og forsøkte å lage måltallet med de tre resterende kortene. Det var mye bråk og derfor vanskelig å høre hva de faktisk sa, men ifølge spillarket har de fått 4 poeng og brukt IE+ (figur 10).



Figur 10: Siri og Guri bruker IE+ (12-12). Forsøkte å notere: 12 – 12 + 13 – 7 = 6

Tolkning: Vi antar at Siri og Guri ble bevisst på bruken av IE+ fra strategiutdelingen.

Siste runde før oppsummering av timen fikk Guri og Siri muligheten til å bruke IE×, denne muligheten benyttet de seg av. De lagde en løsning som ga 4 poeng. Guri sier: «7 minus 6 er 1, pluss 10 som er 11» også korrigerte hun seg selv: «gange med 1 som er fortsatt 11, siden vi skal bruke flest kort» (se figur 11).



Figur 11: Siri og Guri benytter seg av IE×

Tolkning: Siri og Guri kan ikke ha fått vite om IE× fra strategiutveksling, så det er derfor stor sannsynlighet for at de har oppdaget dette fra runden hvor Kjetil og Lars brukte IE×. En annen mulighet er at selve strategiutvekslingen gjorde spillaget bevisst på strategier og de begynte å se aktivt etter andre muligheter for å få poeng.

5.2.2 Økt 2

I økt 2 ble joker innført. Flere spillgrupper fikk ofte fem poeng og utover i økten diskuterte fire av åtte spilllag om muligheten for å alltid få fem poeng. Joker ble brukt som IE, to spillgrupper utviklet også en strategi der de mente de alltid kunne få fem poeng. Dette skal vi se nærmere på i representativt utvalg 2.

Representativt utvalg 2

Lene og Anna var et spillag og hadde akkurat blitt ferdig med runde 2.

Lene: Det er ikke noe gøy når vi alltid kan få alle

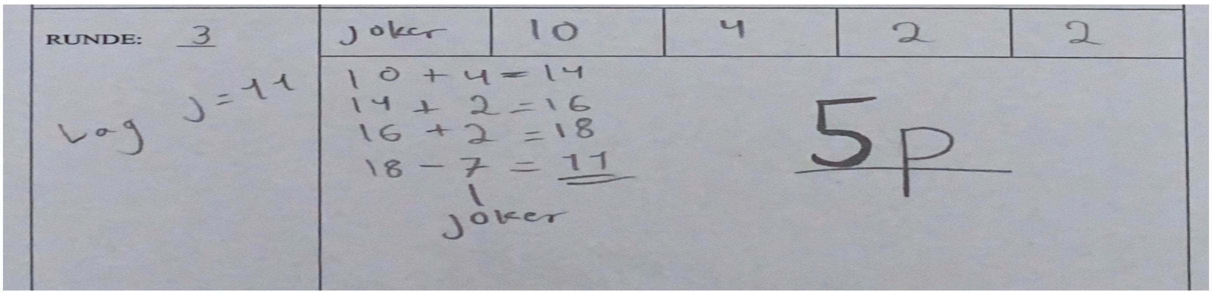
Anna: Det er så mye lettere når vi får joker

Da de begynte på neste runde, sa Lene:

Lene: Jeg har en veldig god idè (*peker på kortene*), vi kan bare plusse alle disse og ta minus den. Skjønner du?

Lærer kom bort og Anna sa:

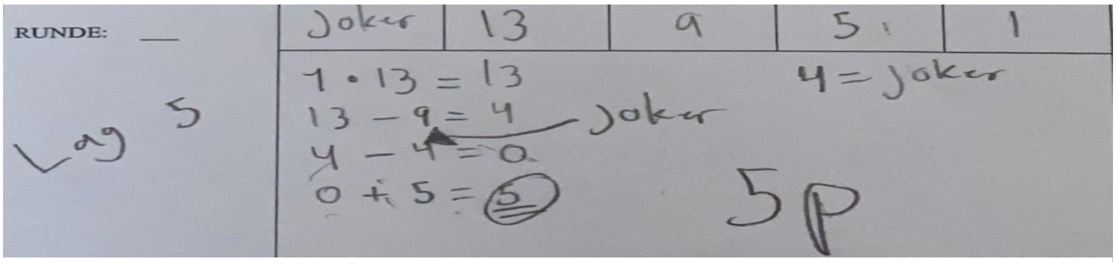
Anna: (Navn på lærer), vi har nå løst åssen vi alltid vi kan gjøre det (*viser til alltid 5 poeng, se figur 12*). Vi kan alltid plusse alle tallene sammen, og hvis det blir mindre enn det her (*peker på måltallet*), kan vi bare plusse på måltallet og hvis det blir mer enn dette kan vi bare ta minus.



Figur 12: Lene og Anna får fem poeng

Tolkning: Etter joker ble innført antar vi at dette kan bidra til at elevene utforsker strategier. Lene og Anna argumenterer og resonnerer rundt strategier ved bruken av joker. De gir uttrykk for at ikke lengre er utfordrende. Lærer innførte en regulering om å bruke multiplikasjon i hver runde.

Runden etter multiplikasjon ble innført brukte Lene og Anna mye tid på spillrunden (omkring 15 minutter) og de var innom mange varianter for å forsøke å få 5 poeng. Løsninger som gav 4 poeng og mindre ville de ikke skrive ned. De kom frem til to løsninger som gav 5 poeng. Lene og Anna skrev ned den ene løsningen (se figur 13).



Figur 13: Lene og Anna får fem poeng med multiplikasjon

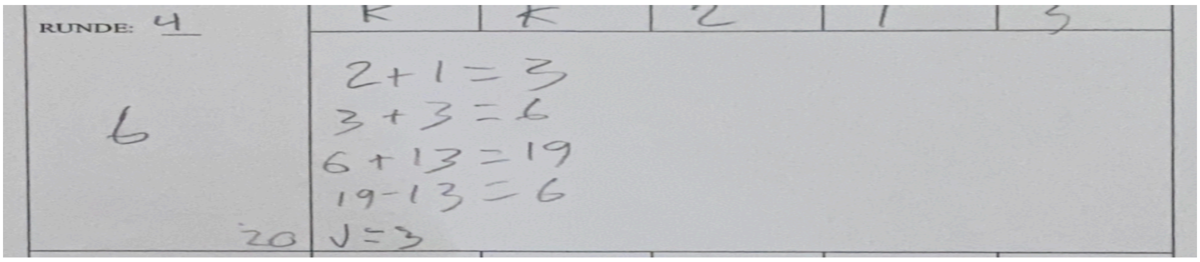
Tolkning: Siden jokeren alltid gav Lene og Anna 5 poeng med subtraksjon og addisjon tolker vi det som at de ville finne en løsning som alltid gav fem poeng med multiplikasjon, selv etter innføringen av multiplikasjon.

5.3 Variabel

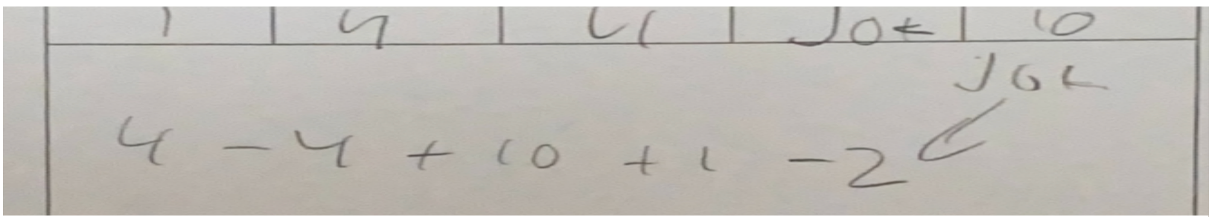
Ettersom variabel kun var innført i økt 2 vil vi kun se på resultater fra denne økten. Vi har ikke noe representativt eksempel fra denne kategorien.

5.3.1 Økt 2

Jokeren var innført i spillet i omtrent 20 minutter og vi har derfor lite datamateriale. Vi observerte ingen dialog om notasjon knyttet til jokeren.
Fire spillag representerte joker som «j», to spillag skrev «jok» og to spillag skrev «joker». 1 spillag skrev kun tallet den representerte. Hvor og hvordan variabelen på spillarket ble notert varierte. Se figur 14 og 15.



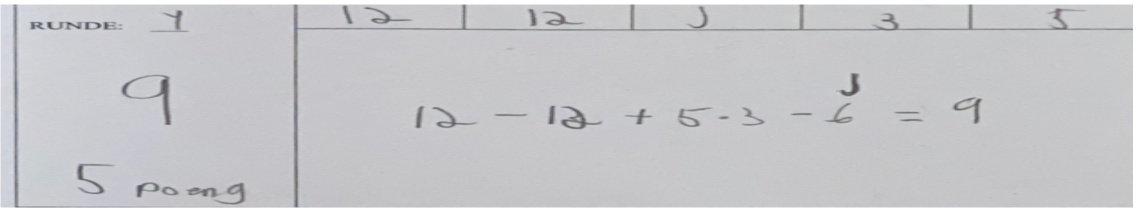
Figur 14: Skriver j for joker



Figur 15: Skriver jok for joker

Tolkning: Det ser ut til at elevene klarer å tenke på joker som en plassholder i svaret, men at mange ikke aksepterer bokstaver som fullverdige svar i spillarket. Det kan oppfattes som at det er usikkerhet rundt notasjonen av joker, men at elevene bruker representasjoner som gir mening for dem i spillkonteksten. Det oppfattes som at elevene forstår at joker representerer en rekke tallverdier når de leter etter løsninger. Elevene bruker ofte jokeren i slutten av hvert utrykk for å se hva slags verdi som mangler. Dette er en noe alle spillgruppene gjør etter de har spilt noen runder med jokeren. Det er lite prat om jokeren i spilløkten og det er heller ingen klassedialog rundt denne. Det er derfor lite grunnlag til å si noe om hvordan elevene forholder seg til jokeren som plassholder eller tallverdi annet en fra spillarket. Det er likevel ulike måter å notere jokeren på som kan gi indikasjon på at elevene synes det er viktig at verdien til jokeren kommer frem (se figur 14 og 15).

Notasjonen av joker ble kommentert en gang i klasseromsdialogen, der en elev kommenterte en annens gruppe spillark og sa at de har «byttet joker om til 6» (figur 16).



Figur 16: Elev kommenterer at j = 6

5.4 Notasjon med mening

Elevene noterte løsningene sine på spillark gjennom alle tre øktene. Men det var først i den andre delen av økt 2 at det ble rettet et fokus på notasjon. Vi vil derfor presentere en oppsummering av alle tre øktene, hvor vi har et representativt utvalg fra økt 2.

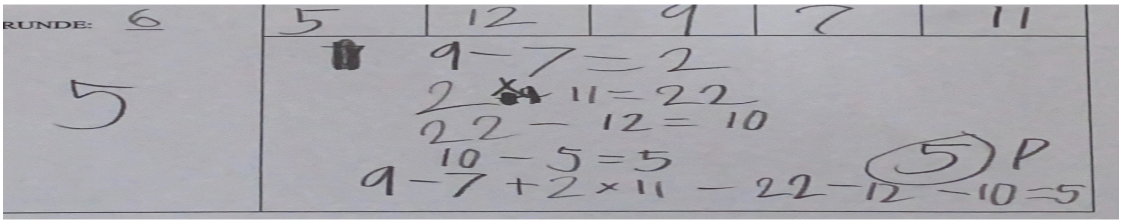
5.4.1 Økt 1

Notasjon var ikke et fokus i økt 1, men elevene måtte notere alle løsningene sine på spillarket.

Tolkning: Elevene behandlet spillarket som et verktøy for å dokumentere løsningene sine. Det forkom ofte notasjonsfeil (se figur 9 og 10 i representativt utvalg 1). Selv om elevene noterte feil kan det oppfattes som at notasjonen ga mening for elevene, og det er ingen dialog rundt notasjon utenom når lærer kommenterte innføringen.

5.4.2 Økt 2

I økt 2 var notasjon grunnlaget for en klassedialog omtrent halvveis i økten. I klassedialogen ble forskjellige noteringsstrategier tatt opp, og elevene ble bedt om å tolke andres løsninger og uttrykke sine egne. Videre i økten ble timen regulert slik at elevene måtte godkjenne hverandres løsninger på spillarket. I den påfølgende spillsekvensen observerte vi diskusjon, resonnering og argumentasjon om notasjon i samtlige spillgrupper. Elevene diskuterte hvordan de skulle uttrykke egne og motstanderlagets løsninger. Lærer oppfordret til å skrive løsningen på en linje, noe mange elever slet med. De fant det utfordrende å bevare likhetsprinsippet (se figur 17).



Figur 17: Elev noterer alt på en linje, operasjonell forståelse av likhetstegn

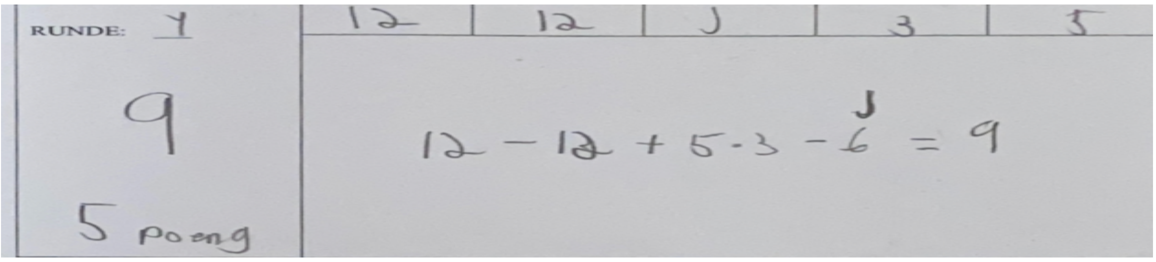
Det kan se ut som om klassedialogen i seg selv skapte mye diskusjon, resonnering og argumentasjon om notasjon. Reguleringen i spillet er en viktig del av å få elevene til å uttrykke og tolke egne og andres notasjonssystemer i den kommende spillsekvensen. Da elevene fikk operere på miljøet etter klassedialogen var det diskusjon, resonnering og argumentasjon i samtlige spillgrupper.

For å gi en grundigere skildring av denne kategorien, har vi valgt et utvalg fra klasseromsdialogen i denne økten.

Representativt utvalg 3

I økt 2 skulle elevene blant annet oppdage viktigheten av et notasjonssystem. Dette kom frem gjennom fellesdelen som ble gjennomført rundt halvveis i økta. Underveis i timen har lærer tatt bilde av forskjellige føringer fra spillarkene. Disse ble presentert på tavla og var grunnlaget for en klasseromsdialog.

Lærer viste utrykket (figur 18) og spør:



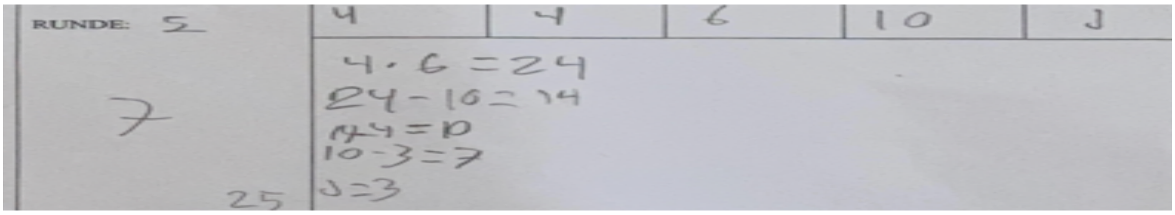
Figur 18: Eksempel på føringsstrategi 1

Lærer: Hva tenker dere når dere ser denne, skjønner dere hva de har gjort?

Lucas: De har byttet joker om til en 6-er … de har egentlig skrevet 15 når de har 5 × 3.

Lærer kommenterte ikke utsagnet til eleven, og gikk videre til neste eksempel (figur 19):

Lærer: Er det noe forskjell på denne, (*viser figur 19*) og denne (*viser figur 18*)?



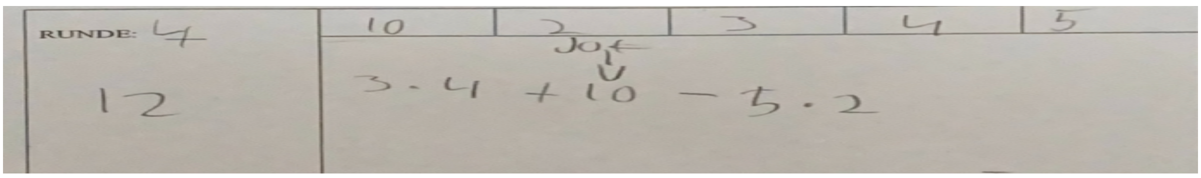
Figur 19: Eksempel på føringsstrategi 2

Marte: På den andre var det liksom alt i en, men på denne er sånn at de må vise hva de får liksom.

Lærer: På denne her (*referer til forrige eksempel*), er alt i ett (*Blar til figur 18 igjen*). Denne her er det mer steg for steg, at du ser hva de får.

Elevene nikket og ga uttrykk for at de var enige med lærer. Lærer gikk videre:

Lærer: Hvordan er denne i forhold til de andre (*Viser figur 20)*?

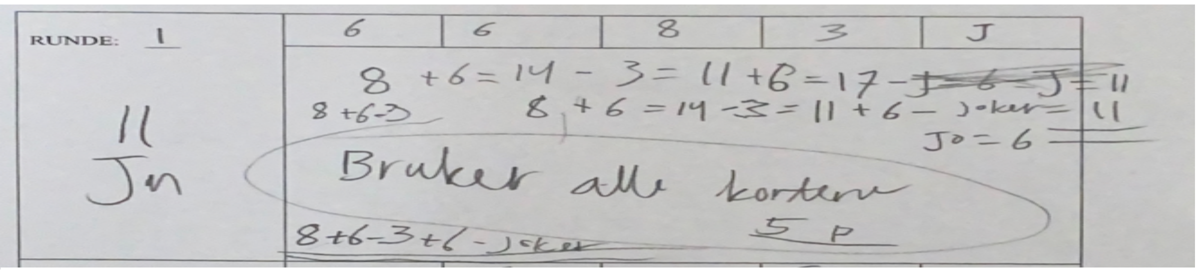


Figur 20: Løsning uten likhetstegn

Per: Det mangler likhetstegnet.

Lars: Det er to gangestykker.

Lærer nikket bekreftende og viste frem det siste eksempelet (figur 21).



Figur 21: Spillark med mye informasjon

Lærer: Hva tenker dere om denne?

Espen: Veldig mye skrevet!

Kjetil: Det var veldig mye informasjon, ja.

Lærer: Den forrige hadde ikke noe likhetstegn, ser dere noe på denne? (*Ramser opp regnestykket og viser til figur 21*).

Espen: Asså er-lik betyr likt på begge sider.

Lærer: (*Nikker bekreftende*) Når vi har likhetstegn skal det være like mye på begge sider.

Videre gikk lærer gjennom regnestykket med eleven og viser at $8 + 6 \neq 14 - 3$.

Lærer understrekte at dette var en feil veldig mange i klassa gjorde.

Lærer: Kan dere beskrive disse fire eksemplene med et ord?

Marte: Forskjellig!

Lærer: Ja! Det var det jeg var ute etter! Hva tenker dere om det, er det bra at vi skriver forskjellig?

Marte: Det er når to stykker jobber sammen og begge har forskjellige måter å skrive på kan der være vanskelig å forstå hva vi mener.

Lærer: Når vi skriver forskjellig kan det være vanskelig å forstå hva vi mener. Jeg tipper Espen forstår hva som menes med det her (*viser figur 21*), men når for eksempel Per skal lese dette, så tipper jeg at det blir litt mye og vanskelig å forstå, stemmer det Per?

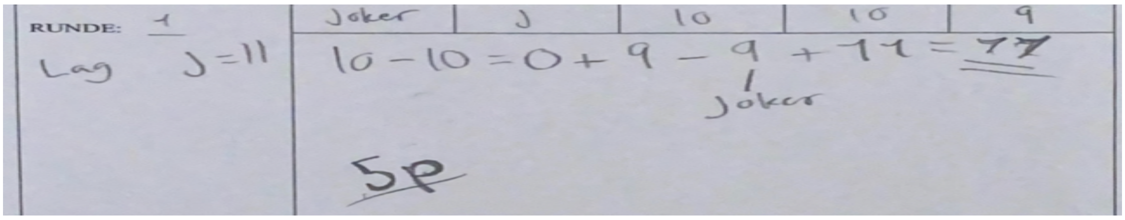
Per nikket og en annen elev rakk opp hånden:

Lucas: Det kan være vanskelig å skjønne hva de mener når vi skriver forskjellig, men det kan også gi mer informasjon og du kan lære noe nytt.

Lærer: Ja, men hva er det jeg må bruke energi på om alle vi skriver forskjellig? Jeg må ikke bare forstå matematikken, men jeg må også skjønne måten de har notert på.

Tolkning: Ved at elevene fikk presentert flere måter å føre på, og muligheten til å refektere rundt disse, kan dette bidra til at elevene forstod problemet med å notere forskjellig. Elevene resonnerte også rundt bruken av lite/mye informasjon rundt regnestykker. I klasseromsdialogen var det ingen elever som gav uttrykk for at det var vanskelig å notere korrekt. Det kan oppfattes som at elevene ikke vet hvordan de skal notere uten mellomregninger ,og opplever mellomregningene som viktig informasjon eller hjelp til å komme til svaret. Denne klassedialogen blir utgangspunktet for neste del av økta der læreren ber dem være ekstra nøye med hvordan de fører. Målet er at de skal føre på en slik at måte at motspilleren kan forstå hva de har gjort, og det blir innført en regel der spillgruppene skal kan sjekke og forstå hverandres utreninger. Fem av åtte spillpar noterer med mellomregninger på spillarket sitt.

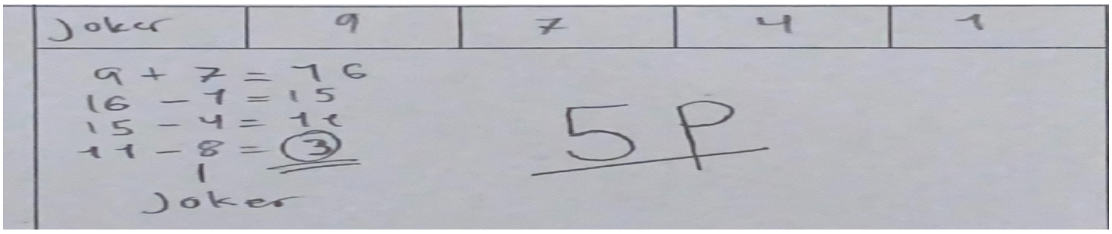
En elev som har ført alle sine uttrykk med mellomregninger i økt 1 og 2 forsøkte å føre slik lærer har bedt dem om etter klassedialogen (figur 22). Lærer kom bort og sjekket utregningen.



Figur 22: Elev har ført alt en linje

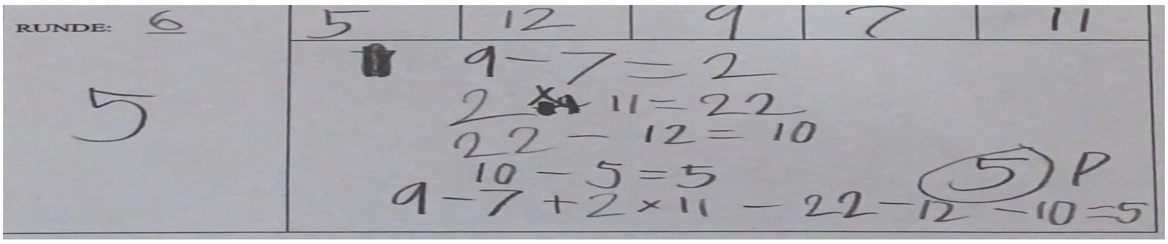
Lærer spurte spillgruppa: «Hvorfor kan man ikke kan føre som det er satt opp nå» motspiller svarte: «Fordi det skal være like mye på begge sider, og det er det ikke her».

Eleven ga uttrykk for at det er vanskelig å føre alt på en linje og de påfølgende rundene begynt å notere eleven med mellomregninger igjen (figur 23).



Figur 23: Fører med mellomregninger

En annen elev fikk også beskjed om å føre alt på en linje og satt alle mellomregningene sine sammen til et regnestykke uten å kontrolere uttrykket (figur 24).

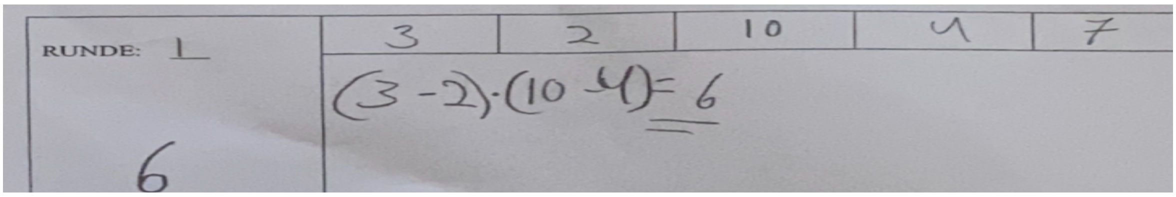


Figur 24: Elev har notert alt på en linje

Tolkning: Fra klassedialogen kom nødvendigheten av et notasjonssystem frem blant elevene, men det kan oppfattes som at det var viktigere at notasjonen deres gav mening for dem selv. Vi oppfattet at flere elever ikke helt forstod hvorfor alt skulle føres på en linje, og fant det mindre meningsfult. De gikk ofte tilbake til kjente mellomregninger (figur 2 og figur 24).

5.4.3 Økt 3

Økten startet med en 20 minutters undervisning om notasjon, prioriteringsregler og parenteser før elevene spilte. Flere elever brukte parenteser i regnestykkene sine, men de trengte veiledning fra lærer og ga uttrykk for at det var vanskelig. Elevene argumenterte og resonnerte for sine valg om notasjon, men det var i dialog med lærer og ikke med spillgruppa. Fra figur 25 er det et spillag som har notert ned alt på en linje, men først uten parenteser, slik at løsningen er $3 - 2 \times 10 - 4 = 6$. Lærer spurte om svaret blir 6 og viste til prioriteringsreglene. Spillaget oppdaget feilen sin, men trengte veiledning for å vite hvor parentesene skulle være i løsningen sin.



Figur 25:Bruken av parantes etter hjelp fra lærer

Mange elever var opptatt av at lærer skulle validere notasjonen til løsningene gjennom timen. Spillagene oppdaget ikke hverandres feil.

Tolkning: Elevene beveget seg mot et felles notasjonssystem, siden de var opptatt av å få bekreftet notasjonen og prøvde å notere korrekt, men fant det utfordrende å notere riktig. Det var noe drøfting, resonnering og argumentasjon om notasjonssystem, men dette skjedde mellom lærer og elev.

5.5 Re-fokus på likhetstegnet

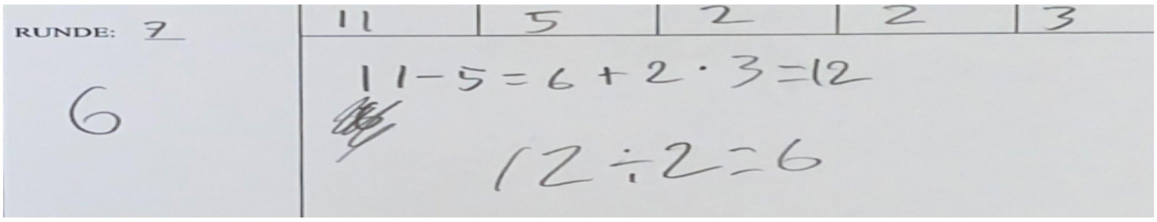
Fra økt 1 var det allerede spillag som kommenterte likhetstegnet. Fra økt 2 i klassedialogen ble det belyst problemer knyttet til notasjon og likhetstegnet (se 5.4.2). I økt 3 ble flere måltall introdusert, men kun i 20 minutter. Det ble heller ikke tid til klassedialog rundt flere måltall. I denne kategorien vil vi presentere funn og tolkninger fra økt 1, 2 og 3 et representativt utvalg fra økt 3.

5.5.1 Økt 1

Totalt seks av åtte spillag brukte likhetstegnet feil. Tre spillag i økt 1 ga uttrykk for at de brukte likhetstegnet bevisst feil.

Lærer: Har du lov til å gjøre sånn? (*viser til figur 26)*

Elev: Ja, det er ikke lov sånn egentlig, men nå gjorde jeg det … Jeg visste at det ikke var lov, men nå gjorde jeg det bare fordi jeg ikke gidder å skrive sånn annerledes.



Figur 26: Feil bruk av likhetstegn

Tolkning: Vi opplever at elevene enten ikke har den nødvendige kunnskapen som skal til for å notere korrekt, eller at de ikke gidder fordi det ikke gir mening i sammenheng med spillet.

5.5.2 Økt 2

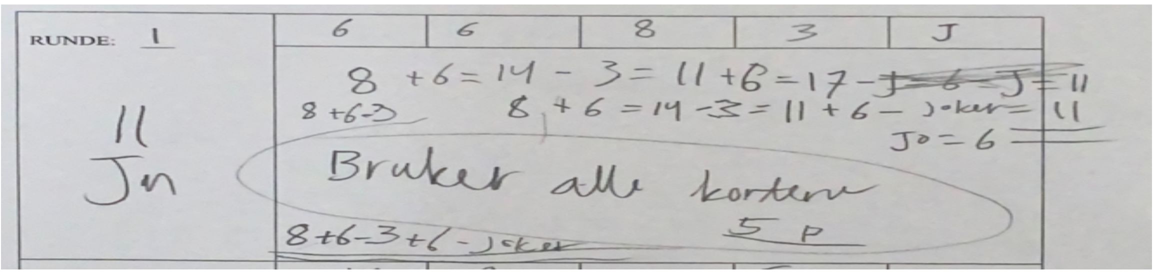
I økt 2 var det færre feil knyttet til likhetstegnet. Vi observerte rundt fire av åtte spillag som brukte likhetstegnet feil.

I klassedialogen fra økt 2 ble det presentert forskjellige måter å notere på, blant disse eksemplene ble likhetstegnet kommentert (figur 27). I lys av dette kom det frem i klassedialogen at likhet betyr likt på begge sidene.

Lærer: Den forrige hadde ikke noe likhetstegn, ser dere noe på denne? (*Ramser opp regnestykket og viser til figur 27).*

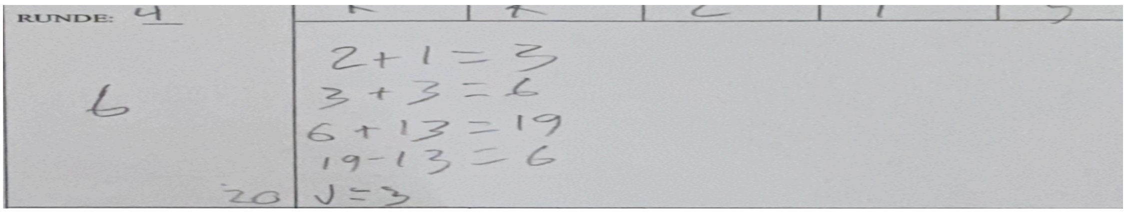
Espen: Asså er-lik betyr likt på begge sider.

Lærer: (*Nikker bekreftende*) Når vi har likhetstegn skal det være like mye på begge sider.



Figur 27: Spilløsning som ble brukt som eksempel på likhetstegn

Tolkning: Elevene er mer opptatt av notasjon i denne timen, og vi ser en nedgang i feil bruk av likhetstegnet. Fire av åtte spillag har brukt likhetstegnet feil, mot seks av åtte spillag i økt 1. De gav uttrykk for at det var utfordrende å notere alt på en linje, og disse spillagene brukte flere mellomregninger (figur 28). Det var lite resonnering, diskusjon og argumentering om likhet, men det virket som om spillagene var mer bevisste på notasjonene ved at de brukte flere mellomregninger, og spillarkene hadde færre feil i bruk av likhetstegnet. Mange elever gav uttrykk for at de ikke hadde den nødvendige kunnskapen om konvensjonene til å skrive det matematisk korrekt.



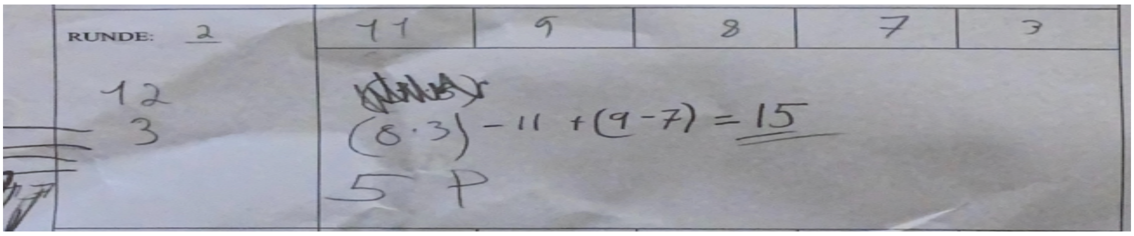
Figur 28: Elev som noterer med mellomregninger

5.5.3 Økt 3

Et ekstra måltall ble introdusert halvveis i økten. Det ble ikke lagt føringer på hvordan det skulle noteres. I denne spillsekvensen observerte vi at alle spillagene startet med å addere måltallene sammen og noterte det som et helt tall i spillarket. Når lærer regulerte spillagene byttet de notasjonsstrategi og skrev kombinasjonen av måltall som et uttrykk.

Representativt utvalg 4

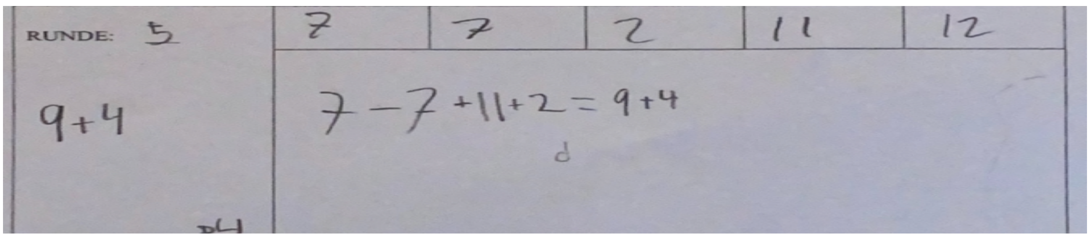
I økt 3 ble flere måltall introdusert. Selv om det var dialog om notasjonen på venstre side av likhetstegnet, var det ingen dialog innad i disse spillgruppene knyttet til hvordan de skulle notere måltallet på høyre side. Alle spillgruppene adderte måltallet og skrev dette som et svar på høyre side av likhetstegnet. De gruppene som noterte hvert respektive måltall på høyre side var i samarbeid med lærer. To av fire grupper var opptatt av å vise hva slags måltall de hadde trukket, og skrev dette på eget sted på spillarket (figur 29). Det forekom ingen samtale mellom elevene om hvordan de skulle føre måltallet på høyre side av likhetstegnet, men elevene var opptatt av riktig notasjonen på venstre side.



Figur 29: Skriver måltallene på venstre side av spillarket. Adderer måltallene på høyre siden av likhetstegnet

En annen gruppe hadde 9 og 4 som måltall. Lærer var i nærheten og det første eleven spurte om var (figur 30):

Elev 1:	Kan vi velge om vi skal gange, plusse og sånt?
Lærer:	Ja
Elev 2:	Men da skal vi vel skrive svaret på høyre side? Skal vi skrive 13 da?
Lærer:	Her vil jeg at du skal skrive 9 + 4 istedenfor 13



Figur 30: Spillpar får veiledning til å ha uttrykk på begge sider av likhetstegnet

Tolkning: Vi opplever at elevene ser på likhetstegnet som et signal for å utføre en operasjon istedenfor relasjonen mellom to uttrykk. Elevene ville ofte skrive to måltall som et svar. Ved hjelp fra lærer kan de ha blitt oppmerksom på skrivemåten.

5.6 Generalisert aritmetikk

Den generaliserte aritmetikken kommer frem i alle tre øktene, men i økt 3 så vi mye av det samme som i økt 1 og 2. Vi vil derfor presentere våre funn og tolkninger fra økt 1 og 3 med et representativt utvalg fra økt 1. Vi så ingen bruk av multiplikative invers i øktene, men noen elever dividerte med to like tall for å lage 1. Alle elevene brukte additive invers.

I økt 1 brukte alle åtte spillag IE+, fire av åtte spillag bruker IE×. Under strategiutvekslingen fra økt 1 var det en elev som foreslo å bruke divisjon av to like tall for å lage 1 som i dette tilfellet også er måltallet (se 5.2.1, Representativt utvalg 1). Det var også en annen gruppe som brukte divisjon av to like tall i en spillrunde (figur 33).

5.6.1 Økt 1

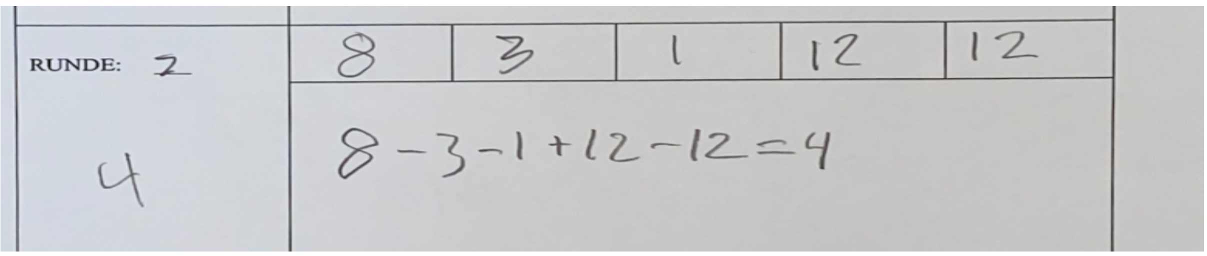
I spillsekvensene observerte vi bruk av blant annet additive invers, bruk av negative tall og divisjon av to like tall.

Elev som brukte additiv invers (figur 31):

Elev 1: Jeg tror vi ikke kan bruke alle

Elev 1: Hvis du vil ha med disse her, så tar du disse her to (*viser til 12 -12*). Det forandrer seg jo ikke

Elev 2: Ja, det gjør vi!



Figur 31: Spillag bruker IE+

Vi observerte også diskusjon knyttet til generelle tallmengder. Noen spillgrupper valgte å bruke negative tall under strategiutvekslingen (figur 32).

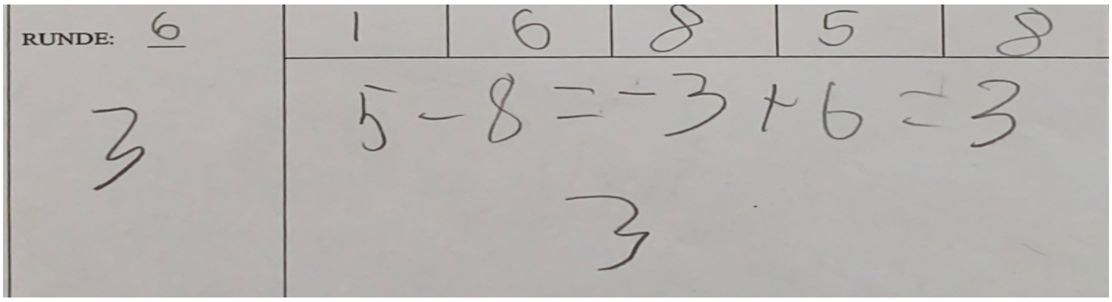
Elev 1: Vi tar 5 – 8, da går vi i minus

Elev 2: Nei! (*og foreslår en løsning, men gir ikke ønsket poeng*)

Elev 2: Eller hva var det du foreslå med disse? (*viser til 5 - 8*).

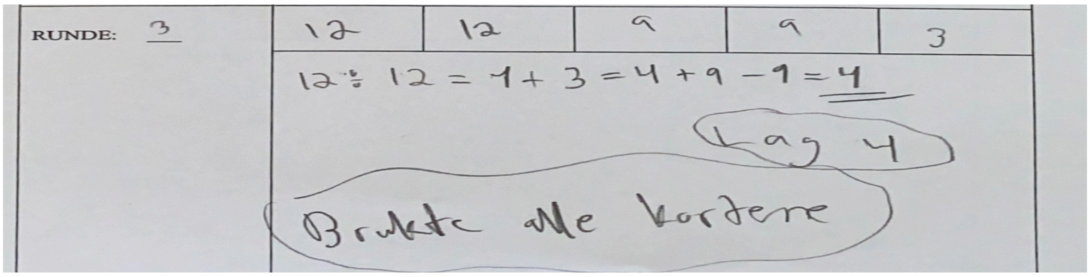
Elev 1: Hvis du tar 5 – 8, da går du i minus ikke sant, så har du – 3 og plusser på den

Elev 2: Ja! Det går jo.



Figur 32: Økt 1, negative tall. Forsøkte å notere 5 – 8 + 6 = 3

Noen elever dividerte to like tall for å lage 1 (figur 33). Dette var fra økt 1. Vi hadde ikke datasamlingsverktøy på denne gruppa i økt 1 og fikk derfor ikke hørt dialogen.



Figur 33: Dividerer to like tall. Hadde problemer med å notasjonen

Videre vil vi se på et representativt eksempel som representerer kategorien 5.

Representativt utvalg 5

Bruken av IE som strategi kom til syne i kategori 1. I den oppsummerende klasseromsdialogen i avslutningen av økt 1 ble forskjellige egenskaper ved IE diskutert.

Timen ble oppsummert med en klassedialog der lærer fungerte som ordstyrer.

Lærer: Var det noen som fant triks eller strategier i spillet?

Elev 1: Om du har én eller om du lager én kan du alltid gange med én

Elev 2: Om du har to av samme tall kan du ta pluss og minus for da får du null

Lærer: Hvorfor er det lov?

Elev 1: Det gjør det egentlig ikke noe mer vanskelig for deg, du står akkurat på det samme

Lærer: Ja! Du får to gratis poeng! Men (*navn på elev*) du sa noe om ganging ... Hvorfor er det interessant å gange med 1?

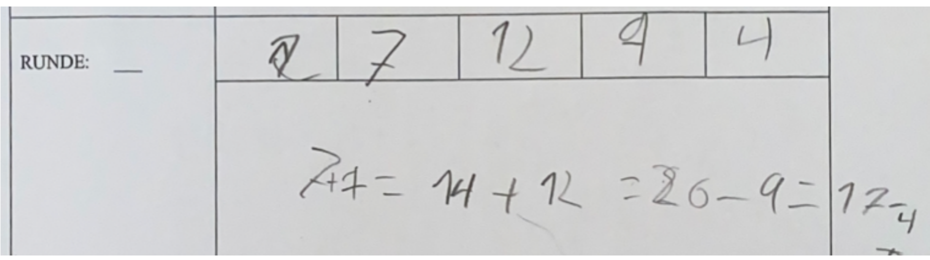
Elev 3: Hvis du klarer å lage talla (*måltallet*), så kan du bare gange med en og det blir det samme

Lærer: Hva får du om du ganger med 100×1? … eller 1000 000×1? ... eller 23×1? ... (*elevene svarer fortløpende i plenum*)

Tolkning: Det kom frem mange strategier i klasseromsdialogen. Noen elever hadde formulert egne løsninger om hvorfor IE fungerer og argumenterte for disse, noe som kan tyde på at de kan ha resonnert rundt egenskapene til IE eller at klasseromsdialogen fikk dem til å resonnere om egenskapene til IE.

Representativt utvalg 6

En annen konkret situasjon hvor en elev prøvde å bruke summen av fire oddetall for å sjekke om de kan bruke alle fem kort. Kari og Ole får delt ut tallene 7,7,12,9,4, med måltallet 13 (Se figur 34).



Figur 34: Ole og Kari snakker om partall og oddetall

Ole tok feil av hva slags tall de hadde, og trodde de hadde 4 oddetall. Ole sier: «Dritt, vi kan ikke bruke alle, Kari. Siden vi har fire oddetall» og fortsatte: «Hvis vi har partall i oddetall så blir det uansett partall» han oppdaget at han tok feil og sa: «Bare glem det».

Tolkning: Selv om eleven leser feil tall, viser dette at han bruker forskjellige generaliserte tallegenskaper i spillet. Det legger også til rette for matematisk argumentasjon, der han må forklare hvordan han har tenkt til medspiller.

5.6.2 Økt 2

Vi observerte mye av det samme fra økt 1, men i denne økten var joker et element. Noen elever var inne på tanken om å bruke joker som 0, og spurte lærer om dette var lov. De fikk beskjed om at jokeren hadde verdi mellom 1 – 13, og diskuterte ikke dette ytterlige. Andre spillgrupper brukte joker som additive invers og IE×.

Tolkning: Innførelsen av joker, la opp til diskusjon, resonnering og argumentasjon knyttet til regneoperasjonene og tallmengder. At elevene prøvde å bruke den som et nullprodukt eller IE, kan tolkes som en grad av bevissthet til forståelse av atferden til operasjoner.

6 Drøfting

I denne delen skal vi diskutere våre forskningsresultater opp imot våre forskningsspørsmål i lys av teori. Våre forskningsspørsmål er:

1. *Hva slags algebraisk aktiviteter kommer til syne gjennom realiseringen av ALTA kortspill på et 7. trinn?*
2. *Hvilke momenter ved realiseringen av ALTA kortspill opplevde vi som hensiktsmessig for å legge opp til algebraisk aktivitet?*

Vi har tidligere argumentert for at algebraisk tenkning kan utvikles gjennom algebraisk aktivitet (2.1). I 6.1 vil vi drøfte analysen av resultatene og drøfte dem opp mot teori. Deretter vil vi i 6.2 drøfte hva slags momenter ved realiseringen av *ALTA kortspill* som vi opplevde som hensiktsmessig for å fremme disse algebraiske aktivitetene.

6.1 Algebraisk aktivitet

I dette delkapittelet vil vi drøfte hva slags algebraisk aktivitet som kommer til syne gjennom kategoriene fra analysen. Vi vil innledningsvis drøfte kategorien fokusere på strategier (se 6.1.1), deretter variabler (se 6.1.2), notasjon med mening (se 6.1.3), re-fokus på likhetstegnet (se 6.1.4) og avslutningsvis generalisert aritmetikk (se 6.1.5).

6.1.1 Fokusere på strategier

Gjennom tilbakemeldinger fra spillet ser vi flere eksempler på at elevene fokuserer på strategier i spillet. Et spillpar leter etter løsninger for å få flere poeng og de forkaster løsninger som ikke gir ønsket mengde poeng. Gjennom utforskning finner de en løsning som gir 5 poeng og involverer bruken av identitetselementet til multiplikasjon (IE×) (se 5.2.1, Representativt utvalg 1). Vi ser at alle spillgruppene bruker identitetselement til addisjon og multiplikasjon (IE) som strategi. Ved å oppdage og bruke IE som en strategi på denne måten, kan det argumenteres for at elevene har hatt et fokus på atferden til regneoperasjonene. Aktiviteter hvor elevene gjør dette, er ifølge Russell et al. (2011) aktiviteter som kan være i broen mellom aritmetikk og algebra.

Videre ser vi at forståelse for IE utvikles gjennom validering av motstanders spillark ved at spillag begynner å ta i bruk IE som strategi etter å ha sjekket og kommentert motstanderlaget. I valideringsprosessen har elevene uttrykt løsningene sine skriftlig i en meningsfull kontekst for eleven. Dette er også et sentralt moment i overgangen fra aritmetisk til algebraisk tenkning. Russell et al. (2011) argumenterer for at dette skjer når elevene får notere med mening. I tillegg retter valideringen et fokus på regneoperasjonenes egenskaper som også er et av Russell et al. (2011) sine punkter i broen mellom aritmetikk og algebraisk tenkning.

I strategiutvekslingen fikk elevene artikulert sine strategier. Elevene argumenterte og resonnerte for gyldigheten av egne og andres løsninger og strategier. IE som strategi var dominerende i de fleste grupper. Ifølge Russell et al. (2011, s. 51) må elevene få mulighet til å være i aktiviteter hvor de artikulerer, representerer og begrunner generaliseringer om operasjoner i overgangen mellom aritmetikk og algebraisk tenkning. Dette sammenfaller også med Kieran (2004) sitt andre fokusområde om operasjoner og dens inverse.

Videre opplevde vi at innføringen av joker gjorde at elevene måtte revurdere etablerte strategier i spillet og at dette skapte diskusjon, argumentasjon og resonnering rundt hvordan de kunne bruke jokeren hensiktsmessig. Som nevnt tidligere, kan aktiviteter som retter fokuset på operasjonenes atferd være en bro mellom aritmetikk og algebraisk tenkning (Russell et al., 2011).

6.1.2 Variabel

Det er lite datagrunnlag på variabler, men vi observerte at elevene måtte ta stilling til hvordan joker skulle noteres på spillarket. Russell et al. (2011) argumenterer for at elever må få uttrykke sine påstander med ord, og koble dem til forskjellige representasjoner. I spillet så vi at elevene gjorde dette. Forkortelser som blant annet «jok» og «j» ble brukt på spillarket. Det var ingen diskusjon rundt notasjonen av joker i klasseromsdialogen og det kunne oppfattes som at elevene og lærer tok dette for gitt, og at det var underforstått at dette var en symbolsk notasjon for jokeren. Det kan derfor argumenteres for at symbolet «j», som elevene noterte på spillarket, ga mening for elevene i konteksten. Blanton et al. (2015) trekker også frem at variabel er en symbolsk notasjon og fungerer som et språklig verktøy for å representere matematiske ideer på presise måter. Dette er en sentral algebraisk aktivitet for å utvikle algebraisk tenkning (Blanton et al., 2015, s. 43).

Ser vi dette i kontekst av Radford (2010), er bruken av semiotiske ressurser (joker i denne forstand) i arbeidet med blant annet variabler en sentral del av algebraisk tenkning og kan bidra til å oversette mellom abstrakte ideer og konsepter. Dette styrkes av Filloy og Rojano (1989, s. 24) som argumenterer for å blant annet modellere ved å bruke oversettelse i arbeid med notering av ukjente i overgangen fra aritmetikk og algebra.

Vi observerte at elevene var i algebraisk aktivitet knyttet til variabler, men dette baserer seg på et lite datagrunnlag. Russell et al. (2011, s. 63) argumenterer for å bruke representasjoner og kontekster til å modellere generelle påstander, og dermed hjelpe elevene med å utvikle forståelse knyttet til aritmetikkens symboler. Vi opplevde det som at jokeren legger opp til dette og at jokeren gir elevene en meningsfull kontekst for videre arbeid med variabler.

6.1.3 Notasjon med mening

Et av Kieran (2004) sine fem fokusområder for å utvikle algebraisk tenkning handler om at elevene må få mulighet til å både representere og løse problemer (se 2.1.3). Å gå fra løsninger i spillet til notasjon på spillarket handler om å gå fra en representasjon til en annen. Denne oversettelsen mellom representasjoner er gunstig for utviklingen av algebraisk tenkning (Filloy & Rojano, 1989).

Fra resultatene oppfattet vi det som at elevene så nødvendigheten av et notasjonssystem. Vi opplevde at en klasseromsdialog basert på utfordringer knyttet elevers tidligere løsninger i spillet var hensiktsmessig for å gi notasjon en meningsfull kontekst for eleven. Meningsfull bruk av notasjon er noe Russell et al. (2011, s. 66) trekker frem som en del av overgangen fra aritmetikken til algebra, og de legger vekt på at notasjon bør innføres etter at elevene allerede har artikulert deres ideer med ord og materiell som lar dem beholde meningen med symbolene.

Spillreguleringen som handlet om at løsningene skulle noteres på én linje (se 5.4.2) gav utspill for aktivitet der elevene forsøkte å uttrykke seg mer matematisk korrekt. Selv om de fleste elevene ikke klarte å notere sammensatte regneuttrykk matematisk korrekt på egenhånd, opplevde vi at elevene rettet et fokus på atferden til operasjoner, med et ønske om å forstå hvordan de kunne notere på en hensiktsmessig måte i spillet. Som nevnt tidligere er dette fokuset på atferd av operasjoner en algebraisk aktivitet (Russell et al., 2011).

6.1.4 Re-fokus på likhetstegnet

Filloy og Rojano (1989) argumenterer for at algebraiske tanker om likhet kan observeres gjennom elevers atferd. I deres artikkel beskriver de at det blant annet innebærer endringer i hvordan elever tolker og håndterer likhetstegnet.

I realiseringen observerte vi at mange elever sa at likhetstegnet betydde likhet. Likevel så vi lite tegn til at elevene hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet på spillarkene i de to første øktene. I den første økten var det seks av åtte spillag som brukte likhetstegnet feil og tre av åtte spillag gav uttrykk for at de var bevisste på feil bruk. I den andre økten var det fire av åtte spillag som brukte likhetstegnet feil.

I klasseromsdialogen i økt 2 ble betydning av likhet tydeliggjort av lærer under klassedialogen gjennom ulike noteringsstrategier. Vi opplevde at dette kan ha skapt et re-fokus på likhetstegnet, som er et fokusområde som kan bidra til å utvikle algebraisk tenkning (Kieran, 2004, s. 140).

Etter klassedialogen ble spillet regulert slik at elevene skulle skrive alt som ett uttrykk. Det var flere elever som fant dette utfordrende og elevene gikk tilbake til å notere med flere mellomregninger. Vi oppfattet at elevene gjorde dette for å bevare ekvivalens. Det kan argumenteres for at elevene har hatt et re-fokusert på likhetstegnet som kan bidra til å utvikle en relasjonell forståelse av likhet, men det kan virke som at elevene mangler kunnskap om konvensjonene. Arbeid med å utvikle en relasjonell forståelse for likhet er noe som kan bidra til algebraisk tenkning (Blanton et al., 2015, s. 43).

Det forekom i liten grad dialog eller diskusjon som direkte omhandlet likhetstegnet. Da det var dialog om dette, var den mellom elev og lærer, og ikke mellom elevene. Som et resultat av dialog med lærer, så vi at flere spillag brukte likhetstegnet korrekt, og fortsatte å notere korrekt i de påfølgende rundene. Dette stemmer overens med Filloy og Rojano (1989) som sier at elever ikke kan overlates til å finne ut av konvensjonene på egenhånd, og trenger veiledning i overgangen til algebraisk tenkning. Dette gjelder også når regelen om to måltall introduseres. Elevene startet med å addere måltallene og kun skrive summen på spillarket. Gjennom lærerintervensjon begynte elevene å skrive uttrykk på begge sider av likhetstegnet. Det kan derfor argumenteres for at miljøet la opp til et re-fokus på likhetstegnet og at lærer var en sentral støttespiller for elevenes arbeid med å mestre konvensjonene knyttet til det.

6.1.5 Generalisert aritmetikk

I alle øktene observerte vi momenter av generalisert aritmetikk. I økt 1 måtte elevene dele strategier og blant annet argumentere for hvorfor IE var en god strategi i spillet, samt argumentere og resonnere rundt gyldigheten til strategiene sine. Ettersom IE er en egenskap til regneoperasjoner må elevene derfor tenke på egenskapen til IE og hvorfor IE ikke forandrer verdien på sine løsninger. Ved å la elevene få mulighet til å argumentere, resonnere og diskutere bruken av egenskapene til operasjoner kan det argumenteres for at elevene har vært i algebraisk aktivitet (Russell et al. (2011, s. 51)

Vi så også at spillag brukte negative tall i løsningene sine. Bruken av negative tall kom fra elevene i spillet og utviklet seg til andre grupper gjennom strategiutveksling og validering av løsninger. Spillgrupper som også er bevisste på negative tall, vil ha flere mulige kombinasjoner til å få poeng i spillet. Denne utvidelsen av nummersystemet gjorde at elevene fokuserte på egenskapene til tallene og operasjonene, og dermed resonnerte rundt uttrykkene, noe som er en algebraisk aktivitet (Blanton et al., 2015, s. 43; Russell et al., 2011, s. 59). Andre momenter knyttet til generalisert aritmetikk som kom til syne, var blant annet en elev som forsøkte å bruke summen av oddetall til å undersøke om det var mulig å oppnå fem poeng, se figur 34. Dette krever forståelse av enkelte egenskaper til tall. Disse aktivitetene sammenfaller med Blanton et al. (2015) sin idé om generalisert aritmetikk for å utvikle algebraisk tenking, der eleven bør få muligheten til å generalisere aritmetiske sammenhenger og resonnere rundt aritmetiske uttrykk.

6.2 Momenter for algebraisk aktivitet

I dette delkapittelet skal vi undersøke hvilke momenter ved realiseringen av *ALTA kortspill* vi opplevde som hensiktsmessig for å legge opp til algebraisk aktivitet. 6.2.1 vil handle om spill som plattform for å fremme algebraisk aktivitet. I 6.2.2 vil vi drøfte meningsfulle kontekster og i 6.2.3 skal vi drøfte den sosiale organiseringen.

6.2.1 Spill som plattform for å fremme algebraisk aktivitet

Vårt matematikkspill tok utgangspunkt i Russo et al. (2018) sine prinsipper og Russo et al. (2024) sine kriterier for matematikkspill, og den didaktiske modellen er inspirert av teorien for didaktiske situasjoner (TDS) fra Artigue (2014) og Strømskag (2022). Under realiseringen av *ALTA kortspill* opplevde vi at matematikkspill som følger disse kravene kan være hensiktsmessig i utviklingen av algebraisk tenkning gjennom algebraisk aktivitet. Dette baserer vi på at vi så algebraisk aktivitet i alle kategoriene fra resultatene (se 5 og 6.1). Vi observerte stor variasjon i hvordan og når disse algebraiske aktivitetene kom til syne (se 5.2.1, Representativt utvalg 1), noe som kan indikere at spillet la opp til at elevene kunne regulere nivå og tempo selv.

Matematikkspill kan være en effektiv måte å oppdage matematiske ideer på gjennom å la elevene utforske spillet selv. De matematiske ideene bør være strategier i spillet, som er et av kriteriene til Russo et al. (2024) om rike matematikkspill. Gjennom strategier som baserer seg på matematiske ideer kan det legges til rette for gode matematiske diskusjoner mellom elever. Ser vi dette i lys av realiseringen gjorde de adidaktiske situasjonene at de matematiske ideene kom til syne fra miljøet, og at elevene fant det meningsfullt å bruke målkunnskapene i miljøet. Ifølge Russo et al. (2018) kan spill legge opp til meningsfull matematisk diskusjon når elevene er engasjerte. Ernest (1986, s. 2-3) nevner også at spill naturlig legger opp til muntlig aktivitet der elevene kan diskutere trekk og løsninger, samt øke motivasjonen til å diskutere med lærer. Dette opplevde vi at vårt matematikkspill gjorde. Matematiske diskusjoner er ifølge Russell et al. (2011, s. 51) avgjørende i overgangen fra aritmetikk til algebraisk tenking. Elevene må få muligheten til å artikulere, formulere, begrunne og representere generaliseringer om operasjoner.

6.2.2 Meningsfulle kontekster

Et annet momentet er at spillet legger til rette for meningsfulle kontekster som elevene kan bruke i algebraiske aktiviteter. Strategiutvekslingen og klasseromsdialogen er eksempler på dette, der elevene måtte artikulere matematiske ideer til andre spillag og/eller klassen. Radford (2010, s. 63) trekker frem at semiotiske ressurser bør brukes i undervisningen for å oversette fra konkrete situasjoner til abstrakte ideer, og kan bidra til utviklingen av algebraisk tenkning. Videre argumenterer Russell et al. (2011) også for bruken av kontekster til å hjelpe elevene med å utvikle forståelse for aritmetiske symboler. Ved å presentere en spillkontekst for elevene som er meningsfull, kan dette være et hjelpemiddel for å gå fra en konkret sitasjon til en abstrakt matematisk idé.

Fra oversettelsen fra konkrete situasjoner til abastrake ideer kan det argumenteres for at overgangen fra interaksjon med spillkortene til notering på spillarket også var et sentralt moment i utviklingen av algebraisk aktivitet. Ved å presentere et relativt åpent spillark uten noe form for bestemmelser om notasjon, måtte elevene notere slik at det ga mening for dem, men også for de andre spillgruppene. Å skrive for å lære, i tillegg til å skrive for å dokumentere og å regne på papir er noe som kan hjelpe elever med å løse matematiske problemer (Ulland et al., 2018, s. 139). På den andre siden bør man ifølge Filloy og Rojano

(1989) gjøre eleven oppmerksomme på algebraiske konvensjoner slik at de ikke overlater utviklingen til seg selv.

6.2.3 Sosial organisering

Den sosiale organisering under realiseringen kan ha bidratt til algebraisk aktivitet. Å kunne argumentere, resonnere, begrunne påstander og forsvare sine valg er sentrale algebraiske aktiviteter og det harmonerer med læreplanen (se 3.1.2) (Russell et al., 2011). Gjennom lagspill og validering av motstanderens spillark så vi at disse aktivitetene kom til syne. Elevene presenterte løsningene sine i stor grad muntlig, både for motstander og for lagspiller. Det var av elevenes interesse å kunne følge med på hverandres resonnementer for å kunne oppdage strategier, men også for å validere poengene. Strategiutvekslingen som ble gjennomført i økt 1 er også et moment som kan ha bidratt til algebraisk aktivitet og samtidig bevart det adidaktiske potensialet. Elevene var villige til å dele strategier med andre spillag. Et annet moment med strategiutvekslingen var at flere elever begynte å bruke IE senere i økten. Det kan argumenteres for at strategiutviklingen fungerte som en aktivitet slik at flere elever ble inkludert i å oppdage det matematiske målet for økten, uten å avsløre den didaktiske intensjonen.

Et annet argument for å la elevene artikulere i grupper først, er at de fikk øvd seg på å artikulere matematikk, noe som kan ha bidratt til at klasseromsdialogen ble mer presis og at læringsutbyttet muligens økte. Det kan også ha føltes tryggere for elevene, siden de fikk mulighet til å teste og validere egne hypoteser i spillgruppene først. Klassedialogen brukte også eksempler fra spillsituasjoner, noe som kan ha bidratt til at elevene fant klassedialogen mer engasjerende ettersom det var kjente spillsituasjoner som ble diskutert.

7 Avslutning

I dette avsluttende kapittelet vil forsøke å trekke en konklusjon ut ifra forskningsspørsmålene i 7.1. Deretter vil vi i 7.2 gjøre rede for begrensinger knyttet til studien. I 7.3 skal vi skrive om implikasjoner, før vi avslutter i 7.4 med egne refleksjoner.

7.1 Konklusjon

Vi skal nå trekke en konklusjon med utgangspunkt i våre forskningsspørsmål og formål med oppgaven. Vi vil starte med å svare på forskningsspørsmålene:

1. *Hva slags algebraiske aktiviteter kommer til syne gjennom realiseringen av ALTA kortspill på et 7. trinn?*

Fra resultatene og drøftingen kan vi konkludere med at algebraisk aktivitet fra alle kategoriene kom til syne på forskjellige tidspunkter i *ALTA kortspill*. Elevene fokuserte på strategier i spillet, de re-fokuserte på likhetstegnet, de arbeidet med variabler, de noterte med mening og de generaliserte aritmetikk.

2. *Hvilke momenter ved realiseringen av ALTA kortspill opplevde vi som hensiktsmessig for å legge opp til algebraisk aktivitet?*

I realisering av *ALTA kortspill* var det flere momenter fra gjennomføringen som vi opplevde som hensiktsmessige for å legge opp til algebraisk aktivitet. Matematikkspill som følger noen bestemte kriterier og prinsipper, og er satt inn i en didaktisk modell inspirert av teorien for didaktiske situasjoner (TDS) kan ha vært hensiktsmessig for å legge opp til algebraisk aktivitet. De adidaktiske situasjonene i matematikkspillet gjorde at målkunnskapene kom frem gjennom tilbakemelding fra miljøet. Dette la opp til mye algebraisk aktivitet. Å gi elevene en spillkontekst kan også ha vært hensiktsmessig for elevene. Gjennom å presentere en kjent kontekst, kan elevene relatere matematiske ideer til denne og den matematiske klassedialogen kan oppleves mer meningsfull. Vi fant også den sosiale organiseringen som et hensiktsmessig element som kan legge opp til algebraisk aktivitet ved at lagspill oppfordrer til deling av strategier. Videre må spillerne argumentere for gyldigheten av sine løsninger til motstanderen. Strategiutveksling som moment kan få elevene til å fokusere på og artikulere sine matematiske ideer.

7.2 Begrensinger

ALTA kortspill ble realisert på en privatskole i klasse med 15 deltakere. Dette er relativt få deltakere, som ikke er et representativt utvalg for 7. trinn. Som nevnt i 4.3.2, har vi forøkt å definere konteksten til realiseringen ved å gjennomføre en institusjonell analyse, som kan hjelpe med å skille resultatene fra konteksten. Likevel kan vi ikke si at resultatene fra denne studien kan overføres til å gjelde for andre 7. trinn. For å styrke studiens ytre gyldighet, kunne vi realisert *ALTA kortspill* på i flere 7. trinn, på tvers av skoler.

ALTA kortspill måtte være klar til workshop 11. januar 2024. På grunn av en begrenset tidsramme har vi tatt beslutninger i designprosessen som kunne vært mer veloverveide, men som måtte tas på grunn av tidsaspektet. Vi hadde også et ønske om å designe undervisningsopplegget med inspirasjon i didaktisk ingeniørvirksomhet (DI) og gjorde dette samtidig som vi utviklet *ALTA kortspill*. I ettertid har vi skrevet DI ut i sin helhet. For å begrense studiens omfang, kunne det vært gunstig å ikke gjennomført en DI og/eller fokusert på færre målkunnskaper. Samtidig, så kan designet med utgangspunkt i DI ha bidratt til momenter som har vært gunstige for å legge til rette for algebraisk aktivitet i realiseringen.

Øktene i realiseringen var kun 75 minutter, som avvekt fra *ALTA kortspill* som var designet for 90 minutter. Lærer avvek fra *ALTA kortspill* (se 5.1) i samtlige økter. Avvikene fra *ALTA kortspill* kan ha påvirket resultatene våre.

Kategoriene i analyseskjema burde blitt revidert i fase 4 av den teoretiske tematiske analysen (se 4.2.2) og et tydeligere analyseverktøy kunne bidratt til å gjøre analyseprosessen mer oversiktlig. Vi fant spesielt at kategoriene Fokusere på strategier og generalisert aritmetikk var utfordrende å skille (se 4.2.1). Dette kombinert med avvikene i realiseringen til *ALTA kortspill* gjorde at fremleggelsen av resultatene oppleves som uoversiktlig. En mulig justering kunne vært å kombinere fokusere på strategier og generalisert aritmetikk.

7.3 Implikasjoner

I denne masteroppgaven har vi designet en *Algebra Learning-Teaching Activities* (*ALTA*) og fått et innblikk på hvordan algebraisk tenkning kan utvikles gjennom algebraiske aktiviteter i en realisering av den. Fra 1.1 vet vi at det er et behov for å tidlig algebra i skolen. Sibgatullin et al. (2022) sitt systematiske overblikk fant ut at det er et behov for å innføre tidlig algebra i undervisningen, at lærere og lærerstudenter trenger mer kompetanse i å undervise det og at ikke-tradisjonelle aktiviteter som spill kan hjelpe med dette. Dette gjenspeiles også i Nasjonalt organ for kvalitet i utdanning (NOKUT) sine resultater (Haakens & Bråten, 2023). Med vår studie håper vi at *ALTA kortspill* kan være et bidrag til *Algebra Learning: Generalizing, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation* (*ALGEBRA*)-prosjektet eller annen forskning og i lærerprofesjonen.

Ved å ta utgangspunkt i DI håper vi at *ALTA kortspill* kan ha fått et solid teoretisk grunnlag for videre utvikling. Hvis medlemmene i *ALGEBRA* ønsker å videreutvikle *ALTA kortspill*, kan det være hensiktsmessig å gjennomføre en a posterori-analyse.

Videre har vi erfart at et matematikkspill satt inn i en TDS-inspirert didaktisk modell og som følger noen gitte spill-kriterier, potensielt kan legge til rette for algebraisk aktivitet som kan bidra til utvikling av algebraisk tenkning. Ettersom vi kun har undersøkt matematikkspillet i *ALTA kortspill*, kan et forslag til videre forskning være å undersøke om dette også gjelder for andre matematikkspill som kan legge til rette for algebraisk aktivitet. Ved å være grundig i utviklingsprosessen, håper vi at andre kan få nytteverdi av studien vår.

Vi opplevde spillet som engasjerende og mange elever gav uttrykk for at spillet var gøy. Det kan være aktuelt å forske videre på hvordan man bruker spill som fullverdig matematikkundervisning.

7.4 Egne refleksjoner

Arbeidet med denne masteravhandlingen har vært en lærerik og interessant prosess. Spesielt har arbeidet med utviklingen av *ALTA kortspill* vært lærerikt for oss. Både teori om algebra, spillteori, TDS og DI er noe vi vil ta med oss videre inn i klasserommet når vi skal utforme nye undervisningsopplegg. Dette håper vi kan komme våre fremtidige elever og profesjonsfelleskapet til gode. Vi har også tilegnet oss mange erfaringer om hva didaktisk forskning innebærer og hvordan gode kilder og forskningslitteratur kan styrke profesjonsutviklingen. Å være observatør i klasserommet med teoretiske briller har også gitt oss muligheten til å se på undervisningen fra et annet perspektiv. Dette Vil gi oss nytteverdi som fremtidige lærere og bidra til at vi kan utvikle oss innenfor profesjonen.

Deltakelsen i *ALGEBRA* har gitt oss verdifull innsikt i arbeid med algebraisk tenkning, og det har vært spennende og lærerikt å få lov til å være deltakere i en syklus i *ALGEBRA*-prosjektet.

Vi hadde fire målkunnskaper som utgangspunktet for *ALTA kortspill*. Ettersom vi var inspirert av TDS, bestemte vi oss tidlig i semesteret for å forsøke å bruke DI for disse målkunnskapene. Det viste seg å være utfordrende å gjennomføre DI for alle fire målkunnskapene på en kortfattet måte som passet oppgavens omfang. Prosessen var tidkrevende, men også utrolig lærerik.

Alt i alt er vi fornøyde med gjennomføringen av studien, til tross for at det var en omfattende prosess. Ved å være åpne og grundige med studiens metodologi (se 3 og 4) og begrensinger (se 7.2), håper vi at oppgaven kan gi verdi til *ALGEBRA*-prosjektet og andre liknende forskningsprosjekter.

8 Referanseliste

Artigue, M. (2014). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. I B.-A. Angelika, K. Christine & P. Norma (Red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s. 467-496). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_17

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2019). *Matematikk for lærere* (6. utg.). Universitetsforlaget.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. & Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Red.). Kluwer Academic Publishers.

Bryman, A. (2016). Social Research Methods. I (s. 16-38). Oxford Univerisity Press.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches* (3. utg.). SAGE Publications. https://books.google.no/books?id=Ykruxor10cYC

Durbin, J. R. (2008). *Modern Algebra: An Introduction*. Wiley. https://books.google.no/books?id=IBaLPwAACAAJ

Eget arbeid. (2023). *Prosjektoppgave MA-446 - Om didaktiske spill i undervisningen. (Upublisert semesteroppgave).*

Eriksson, H. (2022). Teaching algebraic thinking within early algebra - a literature review. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, *TWG03*(03). https://hal.science/hal-03744603

Ernest, P. (1986). Games. A Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School. *Mathematics in School*, *15*(1), 2-5. http://www.jstor.org/stable/30216298

Evang, H. (2020). Matematikk for livet. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *104*(3), 283-296. https://doi.org/10.18261/issn.1504-2987-2020-03-06

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25. http://www.jstor.org/stable/40247950

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2017). Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. I L. S. Grønemo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken*. Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/noasp.26

Hodgen, J., Oldenburg, R. & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. I (s. 32–45). https://doi.org/10.4324/9781315113562-4

Haakens, M. & Bråten, H. (2023). *Grunnskolelæreres resultater på nasjonal deleksamen i matematikk: betydningen av forkunnskaper*. NOKUT. https://www.nokut.no/globalassets/nokut/notater/2023/grunnskolelareres-resultater-pa-nasjonal-deleksamen-i-matematikk_betydningen-av-forkunnskaper_2023.pdf

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. Kaput, D. Carraher & B. Maria (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-18). Routledge. https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer International Publishing. https://books.google.no/books?id=HNlCDwAAQBAJ
Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.
Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. & Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877
Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/
Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob
Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/2019/timss-2019-kortrapport.pdf
Mangiante-Orsola, C., Perrin-Glorian, M.-J. & Strømskag, H. (2018). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *Special Issue English-French*(Special Issue English-French), 145-174. https://hal.science/hal-03522594 (Special Issue English-French)
Matematikksenteret. (u. å). *Lag det tallet*. Matematikksenteret. Hentet 03.01.2024 fra https://www.matematikksenteret.no/læringsressurser/grunnskole/lag-det-tallet
Mattelist. (u. å.). *Lag det tallet*. Matematikksenteret. Hentet 03.01.2024 fra https://www.mattelist.no/419
Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.
Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*, 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741
Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 43-69). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_4
Russo, J., Kalogeropoulos, P., Bragg, L. A. & Heyeres, M. (2024). Non-Digital Games That Promote Mathematical Learning in Primary Years Students: A Systematic Review. *Education Sciences*, *14*(2), 200. https://www.mdpi.com/2227-7102/14/2/200
Russo, J., Russo, T. & Bragg, L. A. (2018). Five principles of educationally rich mathematical games. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *23*(3), 30-34.
Sibgatullin, I., Korzhuev, A., Khairullina, E., Sadykova, A., Baturina, R. & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*, em2065. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486
Strømskag, H. (2020). Didaktisk ingeniørvirksomhet i matematikk: Multiplikasjon som modell for situasjoner på 3. trinn. I *Samtaleorientert matematikk - et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 81–119). Fagbokforlaget. https://www.researchgate.net/publication/346488997_Didaktisk_ingeniorvirksomhet_i_matematikk_Multiplikasjon_som_modell_for_situasjoner_pa_3_trinn
Strømskag, H. (2022). Teorien for didaktiske situasjoner: Et systemisk rammeverk for å utvikle og undersøke matematikkundervisning. I *Samtaleorientert matematikk - et*

samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner (s. 25–80). Fagbokforlaget. https://www.researchgate.net/publication/346487579_Teorien_for_didaktiske_situasjoner_Et_systemisk_rammeverk_for_a_utvikle_og_undersoke_matematikkundervisning
Ulland, G., Herheim, R. & Røskeland, M. (2018). Språk teller! Om hvordan elever løser, tenker rundt og skriver om et regnestykke. *Nordic Journal of Literacy Research*, *4*(1). https://doi.org/10.23865/njlr.v4.1256
Universitetet i Agder. (u. å). *ALGEBRA – Algebra Learning: Generalising, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation*. Hentet 1.05.2024 fra https://old.uia.no/forskning/prioriterte-forskningssentre-ved-uia/merga-mathematics-education-research-group-at-agder/innhold/algebra-algebra-learning-generalising-expressing-balancing-reasoning-and-argumentation
Utdanningsdirektoratet. (2019, 19.11.2019). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/
Valenta, A. (2016). Aspekter ved tallforståelse. *Matematikksenteret*. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta_Aspekter%20ved%20tallforståelse%20okt16.pdf
Wæge, K. (2015). Samtaletrekk - redskap i matematiske diskusjoner. *Tagenten*, *2015*(2). http://tangenten.no/wp-content/uploads/2021/12/tangenten-2-2015-nettet.pdf

Vedlegg

Vedlegg 1: ALTA kortspill

ALTA 7. trinn – Ikke-digitale matematikkspill som tilnærming til algebra

Aktuelle kjerneelementer

- Utforsking og problemløsing
- Resonnering og argumentasjon
- Abstraksjon og generalisering

Kompetansemål

- Bruke sammensatte regneuttrykk til å beskrive og utføre utregninger

Hva er hensikten?

I denne ALTAen skal elevene jobbe med tall og tallforståelse gjennom matematikkspill. Dette innebærer blant annet å ha forståelse for grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner. I følge Valenta (2016) er noen av disse grunnleggende egenskapene sammensatte regneutrykk og identitetselementer. Disse elementene er også en sentral del av matematikkspillene. Elevene vil også jobbe med notasjon, variabel og likhetstegnet noe som kan bidra til algebraisk tenking (Blanton 2015).

ALTAen vil bygge på teori om spillpedagogikk fra Koay (1996) og Russo et al. (2018). Videre vil teorien for didaktiske situasjoner (TDS), både fra (Brousseau (2002) og Strömskag (2022) bli brukt som et rammeverk. TDS brukes til å utvikle og undersøke matematikkundervisning ved å rette oppmerksomheten mot elevdeltakelse i didaktiske situasjoner. Teorien legger vekt på at elevene ikke bare skal lære matematikk, men også forstå hensikten og brukbarheten av denne matematikken.

Sentrale begreper knyttet til TDS

Adidaktisk situasjon: Elevene løser problemer uten betydelig lærerstøtte, med autonomi i det materielle og intellektuelle miljøet. Adidaktiske situasjoner skjer i kontekster der problemet engasjerer eleven så mye at den ikke tenker over matematikken som ligger bak.

Miljø: Elevene samhandler med det materielle og intellektuelle miljøet når de løser problemer. I TDS skal miljøet gi objektive tilbakemeldinger til elevene, slik at læreren ikke er direkte involvert i tilbakemeldingsprosessen.

Identitetselementene

Et identitetselement er et element som ikke endrer størrelsen på en mengde når det kombineres med et annet element i en matematisk operasjon. Identitetselementet til addisjon er 0, og identitetselementet til multiplikasjon er 1 (Durbin, 2008, s. 22). Av relevans for spillet vet vi eksempelvis at: $a + 0 = a + (b - b) = a$ og at $a * 1 = a * +b - (b - 1), = a$, der $a \ni \mathbb{N}$.

Variabel

En variabel er en måte å uttrykke en matematisk idé symbolsk og den vil ha ulike roller avhengig av den matematiske konteksten (Blanton 2015, s. 43).

Oversikt over øktene

	Intensjon	Aktivitet
1. økt	Elevene skal jobbe med å utvikle strategier og kjennskap til spillet. Gjennom å oppdage identitetselementene vil elevene kunne ha få en fordel i spillet. Økta skal danne et grunnlag for de neste timene.	**Oppstart**: Lærer spiller med elevene, uten å dele strategier om spillet. **Hoveddel**: Elevene blir kjent med spillet og skal reflektere over forskjellige strategier. Elevene deler strategiene og lærer gjør disse synlig for klassen. Disse strategiene skal elevene teste ut i nye spillrunder. Identitetselementene bør kommer frem som en strategi. **Avslutning:** Lærer skal lede en vitenskapelig debatt hvor elevene får validere strategiene sine. Deretter skal matematikken «dras ut» fra spillet. Lærer bør vise hva Identitetselementene blir brukt til i matematikk.
2. økt	Elevene skal jobbe med en variabel i matematikkspillet, som er en sentral del av kunne forstå algebra (Blanton 2015, s. 72). Å uttrykke seg skiftelig matematisk krever også at elevene er presise i sin innføring. Notasjon vil derfor også være en sentral del av økt 2.	**Oppstart**: Lærer spiller med elevene, uten å dele strategier om spillet. Lærer innfører *joker* som en variabel. **Hoveddel**: Elevene skal bruke *joker* som en variabel og fokusere på korrekt notasjon. Etter elevene har spilt sammen skal de dele ulike fremgangsmåter for notasjon og videre teste ut disse på miljøet. **Avslutning:** Etter de har spilt nye runder skal elevene validere ulike fremgangsmåter for notasjon. Dette skal gjøres gjennom en faglig debatt om notasjon og variabel ledet av læreren. Avslutningsvis skal læreren presentere matematikken elevene har oppdaget.

3. økt	I denne økten skal elevene utvide sin forståelse av likhetstegnet gjennom spillet. Notasjon og elementer fra de forrige øktene er fortsatt relevante. Hovedintensjonen i denne økten er at elevene skal blir presentert for de matematiske ideene i spillet og videre kunne bruke dem i andre kontekster, som i dette tilfellet er regneoppgaver. Det er ønskelig at elevene skal kunne bruke det de har lært i spillene som referansekunnskap på andre områder i matematikken og hverdagslivet.	**Oppstart:** Lærer spiller med elevene, uten å dele strategier om spillet. Lærer innfører *2-3 måltall istedenfor 1*. **Hoveddel:** Etter elevene har spilt med flere måltall. Skal lærer lede en kassedialog som handler om likhet og bruk av likhetstegnet. Siste del i hoveddelen skal elevene arbeide med oppgaver. Oppgavene vil basere seg på tidligere økter og de matematiske konseptene som er «skjult» i spillet. **Avslutning**: Lærer går igjennom oppgaver og løfter frem viktige aspekter ved dem og elevene skal få lov til å reflektere rundt kunnskapen de har tilegnet seg, både i matematikken og i hverdagen.

Økt 1 – Identitetselementer

Intensjon:

Elevene skal jobbe med å utvikle strategier og kjennskap til spillet. Gjennom å oppdage identitetselementene vil elevene kunne ha få en fordel i spillet. Økta skal danne et grunnlag for de neste timene.

Spill 1 – Lag det tallet

Spillet er hentet fra https://www.mattelist.no/419

Utstyr:

- Kortstokk
- Blyant
- Kladdeark
- Spillark

Spillets gang:

1. Del ut 5 kort til hvert lag
   1) Snu det øverste kortet i bunken, dette er måltallet.
   2) Lagene skal nå prøve å bruke så mange av de utdelte kortene som mulig for å nå måltallet gjennom bruk av subtraksjon, addisjon, multiplikasjon og divisjon.
   3) Når spillerne mener at de ikke klarer å bruke flere kort for å nå måltallet, skrives regnestykket ned på «spillarket» og de presenterer svaret sitt for motstanderen.
   4) Kortene som spillerne klarte å bruke til å oppnå måltallet legges i en egen bunke, dette er poeng bunken.
   5) Spillerne legger måltallet i bunn av bunken og trekker et nytt måltall. Videre trekker de kort til de har 5 kort på hånden.
   6) Når spillerne har spilt ut hovedbunken, eller spilt ut et gitt antall runder, er spillet ferdig. Spillerne teller da antall kort de har i sin poengbunke. De med flest kort i denne bunken får flest poeng og vinner.

Eksempel på spillrunder:

Måltall: 10

Kort: 2, 5, 8, 10, 4

1) (5x4) – 10 = 10 → 3 poeng, siden kun 3 kort blir brukt.
2) (2x4) – 8 + 10 = 10 → 4 poeng, bruker identitetselementet 0
3) 4(5+8-10) – 2 = 10 → 5 poeng

Regulering:
Klarer man å bruke 5 kort får man 6 poeng.

Oppstart

Tid	**Beskrivelse**	**Intensjon**	**Kommentar**	**Regulering**
15 min	Lærer gjennomgår spillet med elevene og deler inn klassen i spillgrupper. Ved gjennomgang av reglene skal lærer spille noen runder med elevene. Lærer velger seg en medspiller og to motspillere.	Lærer skal gi elevene en adidaktisk situasjon med et problem og et miljø. Dette betyr at lærer skal skape en situasjon der elevene får mulighet til å utforske spillet innenfor trygge rammer.	Det er viktig at lærer ikke avslører identitetselementene eller egne strategier, disse skal elevene forhåpentligvis oppdage selv.	Beskrivelsen av spillet bør være kort og presis. Tenk over hensiktsmessige gruppe-sammensetninger.

Hoveddel

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
15-20 min	**Del 1:** Elevene skal spille kortspillet. Dette skjer i elevgrupper der de spiller to mot to. Elevene skal skrive ned løsningene sine på spillarket hver runde.	Elevene skal samhandle med miljøet i en adidaktisk situasjon. Elevene skal se nytte av å bruke sammensatte regneuttrykk og få utvikle egne strategier.	Lærer bør helst være passiv og observerende. Dette betyr at lærer ikke intervenerer i spillet, men får mulighet til å observere og notere hendelser som kan spilles videre på senere.	Dersom oppstarten ikke har vært klar nok, må lærer regulere situasjonen. Dette er kun for å gjøre nødvendige avklaringer og tilpassinger slik at spillet skal fungere.
10 min	**Del 2:** Lærer avbryter spillet roterer på spillgruppene. Elevene skal utveksle strategier med et annet elevpar og tilegne seg andre strategier.	Elevene skal bli utfordret muntlig til å formulere en eksplisitt løsning på problemet. I denne situasjonen betyr det å finne de beste strategiene. Det er ønskelig at bruken av identitetselementene kommer frem som en strategi.	Lærers rolle er å gjøre strategiene synlig for elevene. Dette kan eksempelvis gjøres ved å skrive opp strategier på tavlen, etter elevene har diskutert.	Lærer regulerer for å holde elevene i den adidaktiske situasjonen. Eksempelvis hvis elevene har brukt identitetselementene, er det viktig at lærer buker et felles språk som alle kan forstå til å synliggjøre. Eks: «nullpar» eller «lage 1».
15-20 min	**Del 3:** Elevene går tilbake til sine opprinnelige spillgrupper og fortsetter der de slapp.	Elevene skal få teste ut de nye strategiene og få tilbakemelding fra miljøet på om de fungerer eller ikke.	Her skal lærer igjen være passiv og observerende. Bemerk hendelser som kan spilles videre på i neste del.	Igjen gjøres reguleringer kun for å avklare og tilpasse slik at elevene kan spille.

Avslutning

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
7 min	**Del 1:** Lærer stopper spillet og setter i gang en faglig debatt der elevene diskuterer og begrunner hva som er de beste strategiene i spillet.	Elevene skal resonere, argumentere og generalisere innenfor den adidaktiske situasjonen.	Lærerens rolle er å være leder av en faglig debatt. Ideelt sett skal lærer kun gripe inn for å strukturere debatten eller få eleven til å utrykke seg mer matematisk presist. Man ønsker at behovet for forklaring skal komme fra miljøet og ikke fra lærer.	Det kan være utfordrende å få i gang en faglig debatt. Lærer kan regulere og strukturere debatten ved hjelp av Wæges (2015) samtalepunkter. Se «vedlegg 1».
8 min	**Del 2:** Lærer skal avslutningsvis stoppe debatten og presenter den formelle matematikken bak spillet og strategiene. Lærer skal informere om rollen til, betydningen av og fremtiden av kunnskapen de har oppnådd.	Elevene skal utvikle sin forståelse for Identitetselementene. Elevene skal forstå at matematikken bak spillet kan brukes i andre sammenhenger. Eks. identitetselement: 4 = 1*4 eller 4+ (2-2) = 4	I denne delen tar lærer elevene ut av den adidaktiske fasen og inn i en didaktisk fase og kan «offisielt» anerkjenne matematikken bak spillet. Observasjonene til læreren gjør seg underveis, kan brukes i forklaringen.	**Hvis tid:** Kan «dra ut matematikken» ved flere aspekter av spillet. Eksempel: Regnerekkefølge, sammensatte regneuttrykk, negative tall, parentes og forhold mellom multiplikasjon og addisjon.

Økt 2 – Variabel og notasjon

Intensjon:

Elevene skal jobbe med en variabel i matematikkspillet, som er en sentral del av kunne forstå algebra (Blanton 2015, s. 72). Gjennom å bruke en variabel kan elevene uttrykke en matematisk idé symbolsk på en kortfattet måte. Å uttrykke seg matematisk krever at elevene er presise i sin føring. Notasjon vil derfor også være en sentral del av økt 2.

Spill 2 – Variabel og notasjon:

Utstyr:

- Kortstokk
- Blyant
- Kladdeark
- Spillark

Spillets gang:

1) Del ut 4 kort og en **joker** til hvert lag.
2) **Jokeren** kan ha verdier mellom 1 – 13.
3) Snu det øverste kortet i bunken, dette er måltallet.
4) Lagene skal nå prøve å bruke så mange av de utdelte kortene som mulig for å nå måltallet gjennom bruk av subtraksjon, addisjon, multiplikasjon og divisjon.
5) Når spillerne mener at de ikke klarer å bruke flere kort for å nå måltallet, skrives regnestykket ned på «spillarket» og elevene presenterer svaret sitt for motstanderen.
6) Kortene som spillerne klarte å bruke til å oppnå måltallet legges i en egen bunke.
7) Spillerne legger måltallet i bunn av bunken og trekker et nytt måltall. Videre trekker de antall kort ettersom hvor mange kort de klarte å bruke forrige runde.
8) Når spillerne har spilt ut hovedbunken, eller spilt ut et gitt antall runder, er spillet ferdig. Spillerne teller da antall poeng fra spillarket sitt.

Eksempel på spillrunder:

Måltall: 10

Kort: 2, 5, Joker (j), 10, 4

1) (5x4) – 10 = 10 → 3 poeng, siden kun 3 kort blir brukt.
2) (2x4) – j + 10 = 10 → 4 poeng, bruker joker (j) for å oppnå identitetselementet 0
3) 4(5+j-10)– 2 = 10 → 5 poeng, j = 8.

9.1 Spillreguleringer:

Mer utfordrende	**Mindre utfordrende**
Røde kort kan være negative tall	Vente med å innføre flere spillkort.
Legg til flere spillkort	Definere joker før hver spillrunde.
Kan legge inn momenter som gjør at elevene må bruke f.eks. multiplikasjon	Kalkulator
Joker må bestemmes som en verdi innen f.eks. 30 sekunder etter spillrunden er i gang.	

Oppstart

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
15 min	Lærer setter rammer for timen og modellerer en runde i spillet sammen med en elevgruppe. Lærer presiserer at Joker kan brukes som hvilket som helst kort (1-13). I denne leksjonen er det viktig at elevene fører inn i spillarkene.	Lærer setter rammene for timen og skal skape et miljø hvor elevene utforsker selv hva en variabel er. Man ønsker at elevene skal fylle inn i spillarkene for at de senere skal oppleve viktigheten av korrekt notasjon.	Viktig at lærer kan modellere uten å avsløre strategier og bruke fagbegreper. Bruk ord som «Joker» fremfor «Variabel», slik at man kan tilrettelegge for en god adidaktisk fase. Som nevnt, er det viktig at elevene fører inn i spillarkene, men at man ikke trenger å ha noen regler for hvordan man fører enda. Man ønsker å oppnå at elevene fører forskjellig.	Reguler rammene til timen ut ifra forrige leksjon. For eksempel: Vurder gruppe-sammensetninger. Trenger elevene føringer for tid per runde? Trenger elevene andre former for konkreter?

Hoveddel

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
20-25 min	**Del 1:** Elevene skal spille kortspillet, denne gangen med en joker. Det er viktig at alle elevene noterer hver runde i spillarket.	Elevene skal få spille og utforske hvordan man kan bruke joker i spillet. Det er ønskelig at elevene skal finne ut at man alltid kan lage identitetselementer ved hjelp av joker. Gjennom et mangfold av notasjoner vil dette legge grunnlag for neste del.	Hvis lærer observerer ugyldig matematikk i føring, skal man ikke intervenere, men kan gjerne lage en mental notasjon, slik at man kan spille videre på det i de neste delene.	Lærer tilpasser nivået ut ifra spillgruppene. Se «Spillreguleringer» i spillbeskrivelsen. Dersom reglene ikke har vært klare nok gjør lærer nødvendige avklaringer og tilpassinger slik at spillsekvensen skal fungere.
15 min	**Del 2:** Lærer avbryter spillsekvensen for å spørre hvordan ulike grupper har notert i spillarket. Hvis lærer har observert forskjellige føringer, kan man vise dette til klassen. Det er ønskelig å gjøre det synlig for klassen at forskjellig føringer gjør det utfordrende å telle poeng uten	Det er ønskelig at elevene skal oppleve at det er et problem at gruppene noterer forskjellig. Dette problemet skal helst komme fra miljøet og ikke fra læreren. Lærer må dermed få frem forskjellige innføringer. Hovedmålet er at elevene skal se nytten av å et felles notasjonssystem. Dette kan gjøres synlig ved at lagene skal godkjenne hverandres svar,	Lærerens rolle er fortsatt å gjøre elevenes strategier synlig for hverandre. En måte læreren kan holde situasjonen adidaktisk, kan være å trekke analogien til sjakk. I sjakk er det viktig at spillerne fører hver sitt trekk. Det er essensielt at lærer lar elevene prøve og feile, men det betyr ikke at man skal ignorere logiske	Dersom elevene ikke oppdager problemet med notasjon selv, må lærer veilede dem til det. Wæges samtalepunkter (vedlegg 1) kan være hensiktsmessig å bruke.

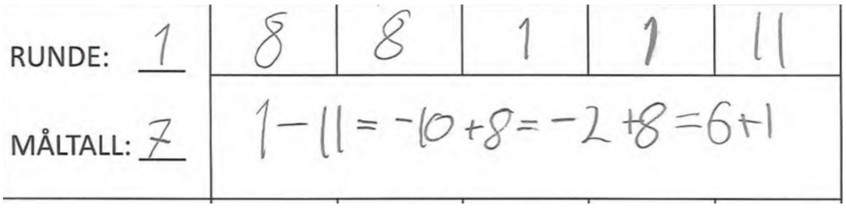
	Lærer presiser nå at motspillerene må godkjenne innføringen i spillarket for å få poeng. Denne valideringen skjer i hver runde.	som muligens kan føre til uenigheter.	brister i elevenes føringsstrategi, men at man heller fokuserer på hvordan de har tenkt ved føringen.	
15 min	**Del 3:** Elevene spiller enda en gang, denne gangen må de validere føringene til den andre gruppen.	Elevene skal teste ut føringsstrategier og forsøke å uttrykke matematikken. Forhåpentligvis så oppdager elevene utfordringer ved å uttrykke seg forskjellig.	Læreren har en passiv rolle, men samtidig observerer mulige elementer som kan brukes for å få frem riktig notasjon i den kommende fasen.	Reguleringene her bør være knyttet til den praktiske gjennomføringen av sekvensen. Mulighet for å bruke kalkulator til å verifisere svar

Avslutning

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
10 min	**Del 1:** Lærer stopper spillet og setter i gang en faglig debatt der elevene diskuterer og begrunner hvordan man kan føre inn føre inn i spillarket. De skal	Man ønsker at elevene har opplevd problemer med å uttrykke seg gjennom matematisk notasjon, og dermed resonere seg frem til at man trenger regler for	Her er det hensiktsmessig at læreren kan bruke observasjonene. I figur 1 og figur 2 har elevene ført feil, men det er også noen momenter som er logiske og riktige med innføringen. F. Eks.	Denne fasen kan være utfordrerne for læreren. Lærer skal regulere slik at den korrekte innføringen blir synlig. Dette bør kommer frem gjennom elevene, men det kan være utfordrende.

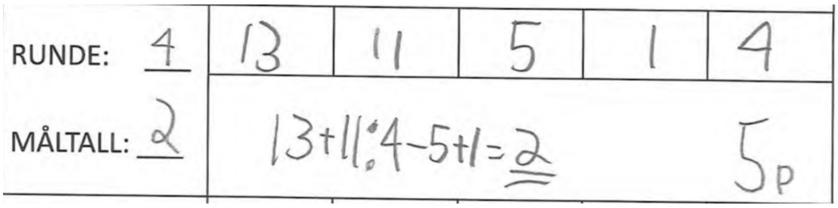
	få uttrykke seg muntlig og reflektere over sine erfaringer ved notasjonen.	hvordan man noterer i spillet og i matematikken. Lærer skal lede debatten og poengtere styrker og svakheter ved elevenes føringer.	Fra venstre til høyre, tenkt ledd. Det kan være vanskelig å holde denne fasen adidaktisk.	Igjen kan Wæges (2015) samtalepunkter komme til nytte.
10 min	**Del 2:** Siste del av timen er der lærer og elevene «offisielt» anerkjenner matematikken. Lærer forklarer at jokeren egentlig er en variabel. Lærer skal informere om rollen til, betydningen av og fremtiden av variabler. Lærer gjør det samme med notasjon.	Elevene skal bli eksponert for den formelle matematikken som er skjult i spillet. Målet er at elevene skal få eierskap og kan anvende det de har lært i andre situasjoner. .	Her er det gunstig om lærer kan spille videre på eksemplene som har blitt observert i klassen og kan bruke dette til å belyse matematikken. F. Eks. «Jeg så at noen brukt joker til å lage et nullpar med 7, dette betyr at de også løste en ligning der den ukjente var 7. Dette skriver vi som J=7 eller x=7». «Jeg så at Kari og Ola tenkte riktig, men slet med å forstå hva de mente på spillarket. Slik er det også i matematikken. For at vi skal kunne forstå hverandres matematikk, er det viktig at vi fører på en bestemt måte.»	Det er vanskelig å vurdere hvor stor grad elevene har internalisert og tatt eierskap til matematikken. Det viktige her er at det dannes et grunnlag for videre arbeid med variabler, notasjon og regnerekkefølge.

Eksempler på utfordringer knyttet til notasjon



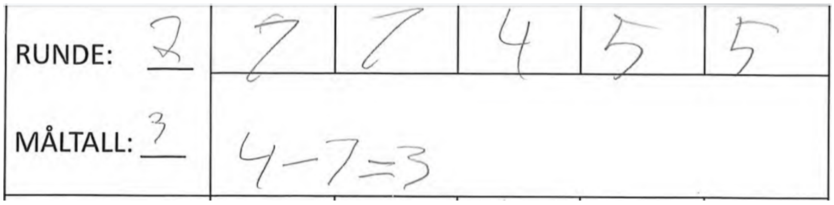
RUNDE: 1	8	8	1	1	11
MÅLTALL: 7	1−11=−10+8=−2+8=6+1				

Det kan argumenteres for at eleven har tenkt riktig, men bruker likhetstegnet feil



RUNDE: 4	13	11	5	1	4
MÅLTALL: 2	13+11:4−5+1=2 5p				

Bruken av parentes



RUNDE: 2	7	7	4	5	5
MÅLTALL: 3	4−7=3				

Rekkefølge

Time 3 – Likhet, uttrykk og ligninger

Intensjon:

I denne økten skal elevene utvide sin forståelse av likhetstegnet gjennom spillet. Notasjon og elementer fra de forrige øktene er fortsatt relevante. Hovedintensjonen i denne økten er at elevene skal blir presentert for de matematiske ideene i spillet og videre kunne bruke dem i andre kontekster, som i dette tilfellet er regneoppgaver.

Målet er at elevene skal kunne bruke det de har lært i spillene som referansekunnskap på andre områder i matematikken og hverdagslivet

Spill 3 – Likhet, uttrykk og ligninger

Utstyr:

- Kortstokk
- Blyant
- Kladdeark
- Spillark

Spillets gang:

1) Del ut 5 kort til hvert lag
2) Trekk **3 kort fra bunken** og snu disse opp, dette er måltallet.
3) Lagene skal nå prøve å bruke så mange av de utdelte kortene som mulig for å nå måltallet gjennom bruk av subtraksjon, addisjon, multiplikasjon og divisjon.
4) Når spillerne mener at de ikke klarer å bruke flere kort for å nå måltallet, skrives regnestykket ned på «spillarket» og elevene presenterer svaret sitt for motstanderen.
5) Kortene som spillerne klarte å bruke til å oppnå måltallet legges i en egen bunke, dette er poeng bunken.
6) Spillerne legger måltallet i bunn av bunken og trekker et nytt måltall. Videre trekker de antall kort ettersom hvor mange kort de klarte å bruke forrige runde.
7) Når spillerne har spilt ut hovedbunken, eller spilt ut et gitt antall runder, er spillet ferdig. Spillerne teller da antall kort de har i sin poengbunke. De med flest kort i denne bunken vinner spillet.

Eksempel på spillrunder:

Måltall: 10 + 2 + 1

Kort: 9, 5, 4, 10, 3

1) 9 + 4 = 10 + 2 +1 → 2 poeng, siden kun 2 kort blir brukt.
2) 9 – 5 – 4 + 10 + 3 = 10 + 2 +1 → 4 poeng, identitetselementet til addisjon

Spilleguleringer:

Mer utfordrende	**Mindre utfordrende.**
Trekke flere måltall	Kun bruke addisjon mellom måltallene
Røde kort er negative tall	Bruke konkreter
Måltallene skal multipliseres	Ta vekk bildekort fra korstokken
Innføre joker som måltall og spillkort	

Oppstart

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
10 – 15 min	Lærer setter rammer for timen og modellerer en runde i spillet sammen med en elevgruppe. Elevene skal fortsette å notere på spillarket. *De skal notere alle måltallene.* Altså f.eks. 10 + 2 + 1, ikke addere og skrive 13. Elevene kan velge regneart som skal være mellom måltallene.	Som i forrige leksjon er intensjonen at lærer skal gi elevene en adidaktisk situasjon med et problem og et miljø. Man ønsker at elevene skal forstå at likhetstegnet representerer to ulike utrykk av samme verdi og ikke kun «det riktige svaret».	Viktig at lærer kan modellere uten å avsløre strategier og fagbegreper. Som nevnt, er det viktig at elevene fører inn i spillarkene. Elevene bør bruke det de har lærte om notasjon fra forrige time.	Reguler rammene til timen ut ifra forrige økt. For eksempel: Vurder gruppe-sammensetninger. Trenger elevene føringer for tid per runde? Trenger elevene andre former for konkreter?

Hoveddel

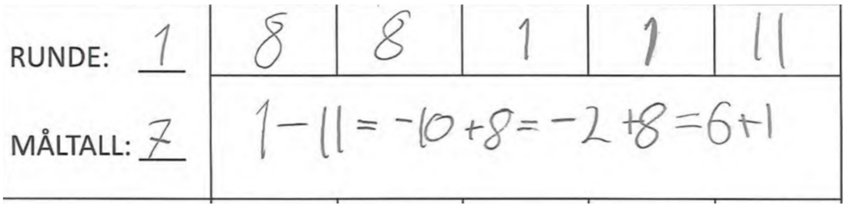
Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
20 – 25 min	**Del 1:** Elevene skal spille kortspillet, men med tre målkort som utgjør måltall.	Elevene skal jobbe med et sammensatt måltall for å utvikle sin forståelse for likhetstegnet. Man ønsker at elevene skal forstå at (=) betyr likhet på begge sider, samt at det ikke alltid kommer på slutten av regnestykket.	Det er viktig at lærer er «på» for å regulere nivået. Vurder ut ifra tidligere økter om elevene skal starte med to måltall istedenfor tre.. Lærer skal også observere og notere seg elementer som kan brukes videre i økten.	Lærer regulerer slik at elevene blir hensiktsmessig utfordret. Se «Spillreguleringer» i spillbeskrivelsen over. Dersom reglene ikke har vært klare nok gjør lærer nødvendige avklaringer og tilpassinger slik at spillsekvensen skal fungere.
10-15 min	**Del 2:** Elevene er ferdig med spillet og lærer innleder en kassedialog som handler om likhet og bruk av likhetstegnet. Etter elevene har diskutert, forklarer lærer «offisielt» hva likhetstegnet betyr innenfor matematikken. Lærer informerer om rollen til, betydningen av og fremtiden til kunnskapen.	Elevene utvikler sin forståelse for likhet og likhetstegnet. Det er ønskelig at elevene selv kommer frem til dette ved hjelp av kunnskapen i de har tilegnet seg i spillet. Elevene skal bli vist de matematiske konseptene rundt likhet og likhetstegnet.	Den skjulte matematikken i spillet skal komme frem i denne dialogen. Elevene bør argumentere og resonere seg frem til dette selv og lærer er kun en debattleder. Dersom lærer har gjort observasjoner, kan den spille videre på dette.	Fokuser på de viktigste og mest grunnleggende aspektene med likhet. Hvis elevene gir uttrykk for at de forstår likhetstegnet godt, kan man snakke om balansering av ligninger og inversoperasjoner.

20-25 min	**Del 3:** Denne delen skal eleven løse oppgaver. Oppgavene vil basere seg på tidligere leksjoner og de matematiske konseptene som er «skjult» i spillet.	De skal se en verdi i kunnskapen de har tilegnet seg i spillet i en annen kontekst.	Lærers rolle her er å passe på at konseptene forstås. Gjennom observasjon kan lærer få et inntrykk om noen av de matematiske konseptene trenger ytterligere forklaringer.	Lærer bestemmer hvilken arbeidsmetode som er mest hensiktsmessig. Skal de løses felles på tavlen, i grupper eller individuelt. Lærer kan bryte opp arbeidet for å forklare matematikken grundigere etter behov.

Avslutning

Tid	Beskrivelse	Intensjon	Kommentar	Regulering
10-15 min	Lærer går igjennom oppgaver og løfter frem viktige aspekter. Lærer skal få elevene til å reflektere over hva de kan bruke denne kunnskapen til, både matematikken og i hverdagen.	Det er ønskelig at elevene har internalisert og kan bruke den kunnskapen de har tilegnet seg.	Legg merke til hva elevene sliter mest med, og hva de mestrer. Dette kan danne et godt grunnlag for videre arbeid.	Lærer skal bruke sine observasjoner fra de forrige øktene.

Eksempel på feil bruk av likhetstegnet



Referanseliste

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990.* Springer Dordrecht.

Koay, P. L. (1996). The use of mathematical games in teaching primary mathematics. *The Mathematics Educator*, 1(2), 172-180. http://hdl.handle.net/10497/87

Mattelist. (u.å.). *Lag det tallet*. https://www.mattelist.no/419

Russo, J., Russo, T. & Bragg, L. A. (2018). Five principles of a educationally rich mathematical games. *Australian Primary Mathematics Classroom, 23*(3), 30-34. https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.223103

Strømskag, H. (2022). *Teorien for didaktiske situasjoner: Et systemisk rammeverk for å utvikle og undersøke matematikkundervisning.* I V. Nilssen & S. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk* (s. 25-80). Fagbokforlaget.

Valenta, A. (2016) Tallforståelse – begrepsmessig forståelse. *Tagenten 2016(1).*

https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/2023-04/tallforståelse.pdf

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 26*(2), 10-16. http://tangenten.no/wp-content/uploads/2021/12/tangenten-2-2015-nettet.pdf

Wæges samtaletrekk

Samtaletrekk	Det kan høres ut som…	Hva en lærer gjør
1. Gjenta	«Så du sier at …?»	Repeterer deler eller alt en elev sier, og ber deretter eleven respondere og bekrefte om det er korrekt eller ikke.
2. Repetere	«Kan du gjenta hva han sa med dine egne ord?»	Spør en elev om å gjenta en annens elevs resonnering
3. Resonnere	«Er du enig eller uenig, og hvorfor?» «Hvorfor gir det mening?»	Spør elevene om å bruke deres egen resonnering på noen andres resonnering
4. Tilføye	«Har noen noe de vil føye til?»	Prøver å få elevene til å delta i en videre diskusjon
5. Vente	«Ta den tiden du trenger … vi venter.» (Teller sakte til 10 inni deg.)	Venter uten å si noe
6. Snu og snakk	«Snu og snakk med sidemannen din»	Sirkulerer og lytter til samtalene mellom elevene. Bruker informasjonen til å velge hvem du skal spørre.
7. Endre	«Har noen av dere forandret tenkingen deres?»	Tillater elevene å endre tenkingen etter som de får ny innsikt.

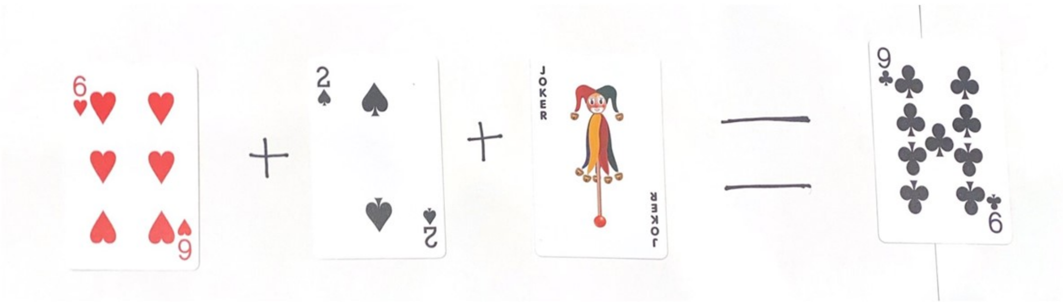
Spillark

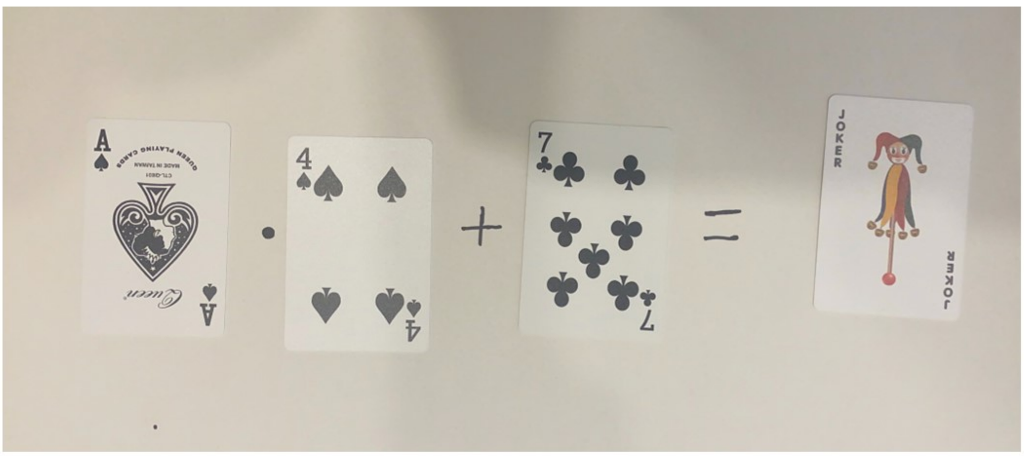
NAVN:____________________________ SPILLNUMMER:_____________

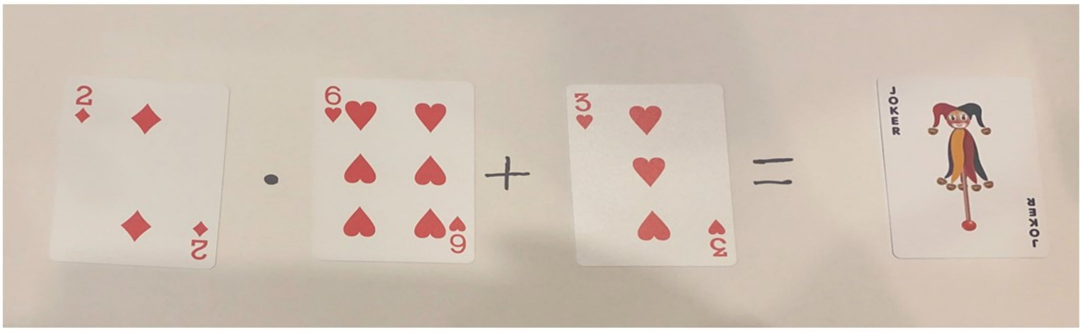
RUNDE: ___					
RUNDE: ___					
RUNDE: ___					

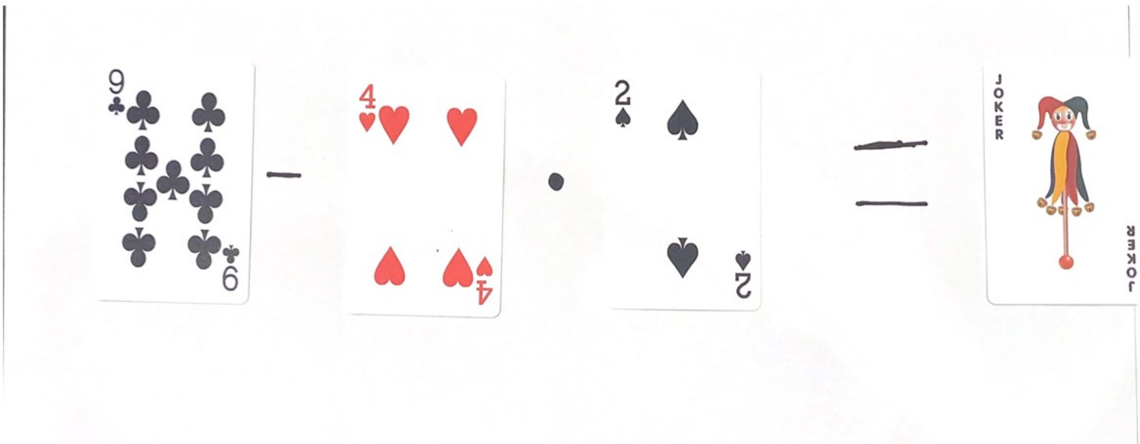
Spilloppgaver

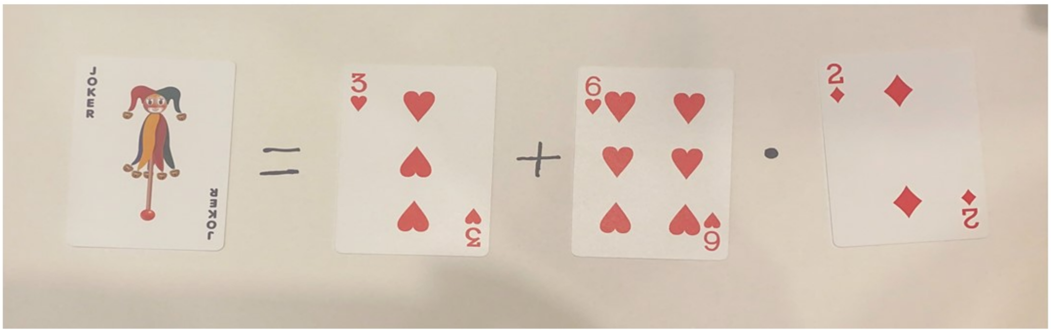
Hvilken verdi har jokeren?

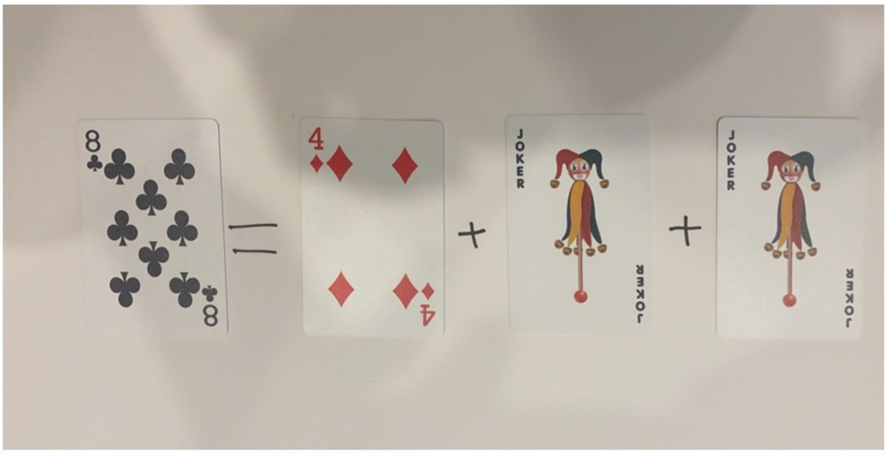


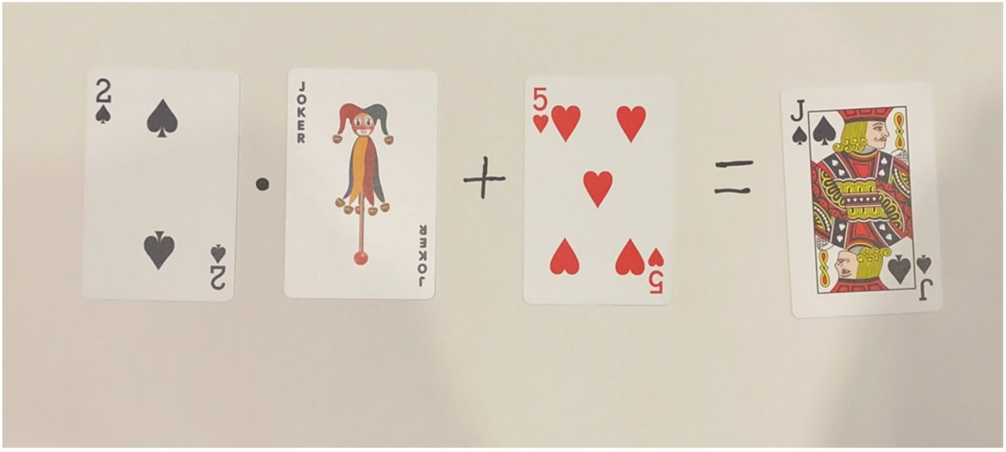


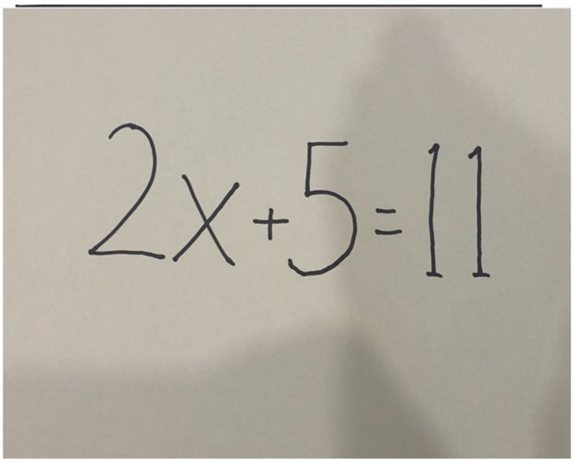


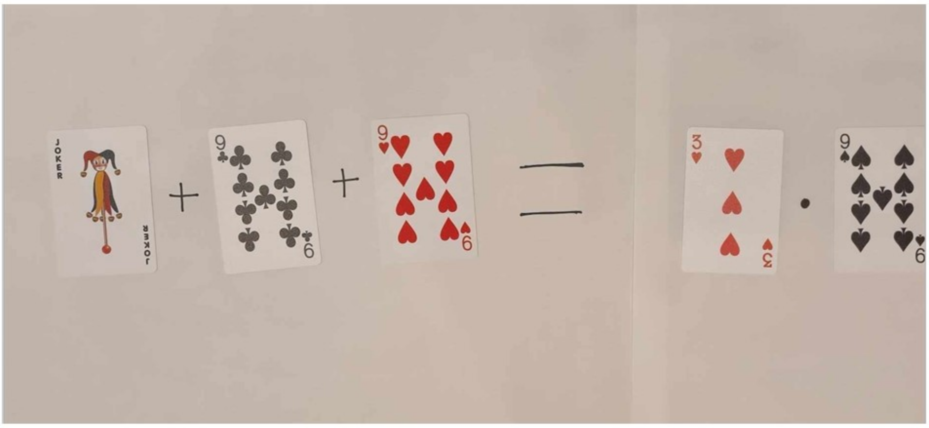


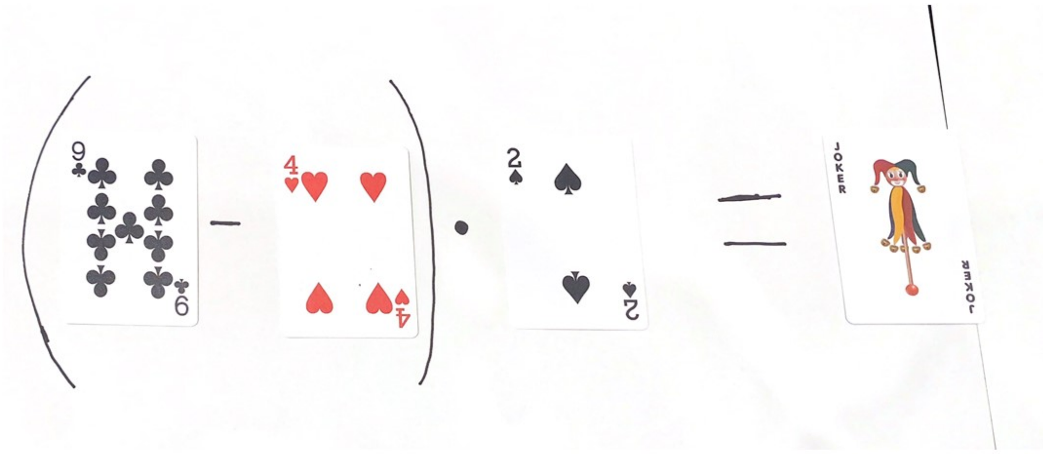

JOKER

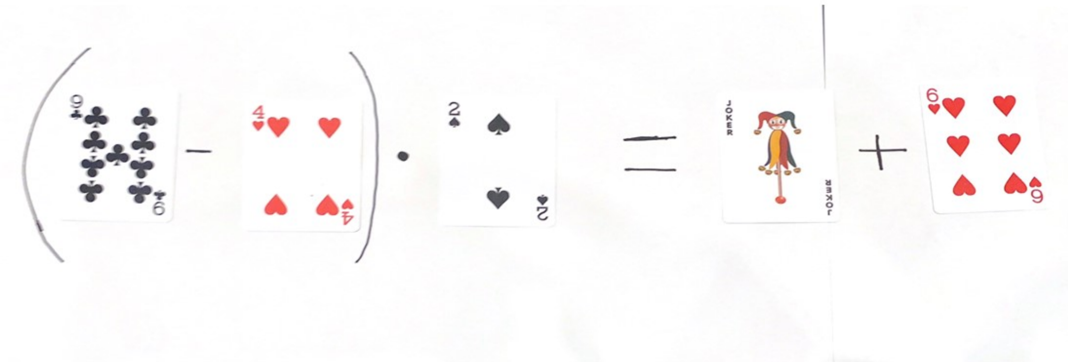

JOKER
JOKER



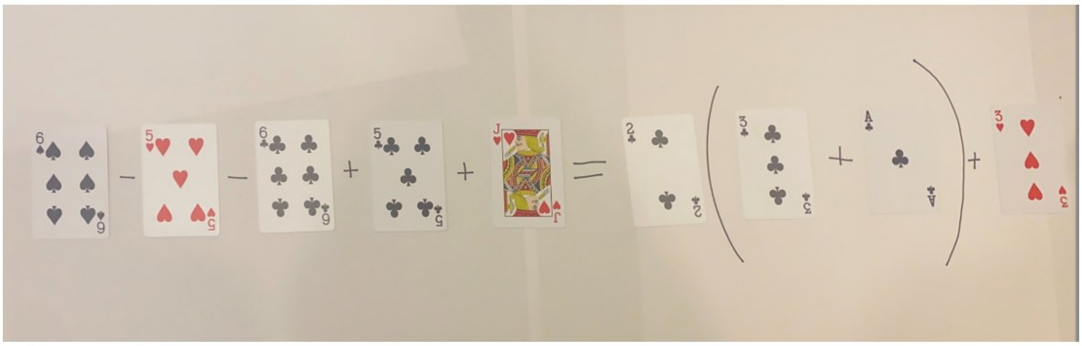

2x+5=11

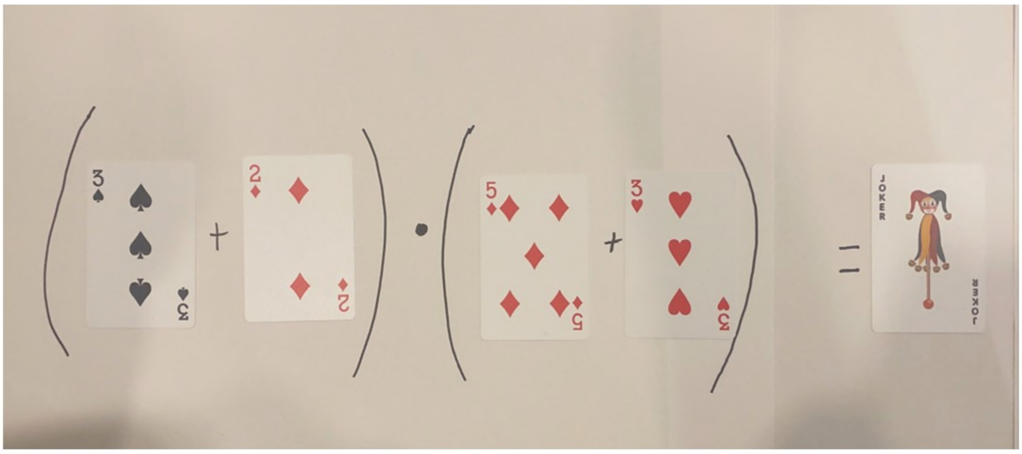


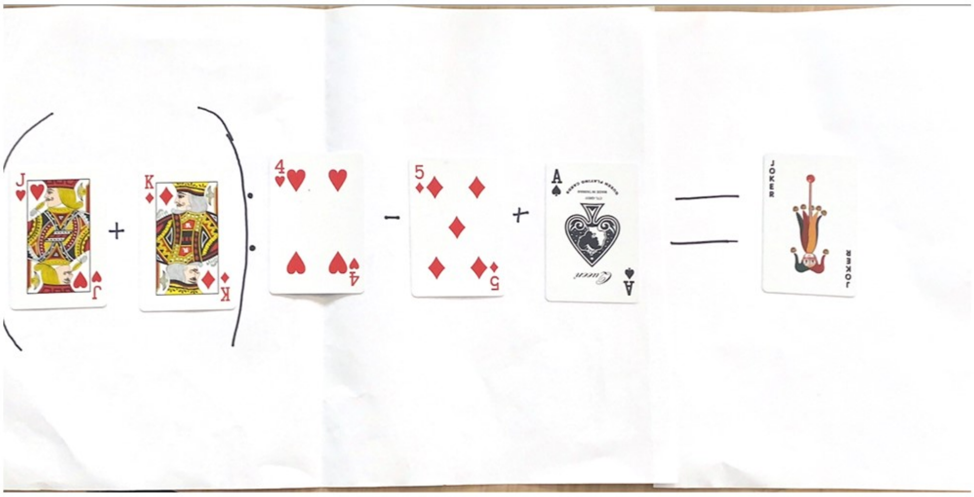


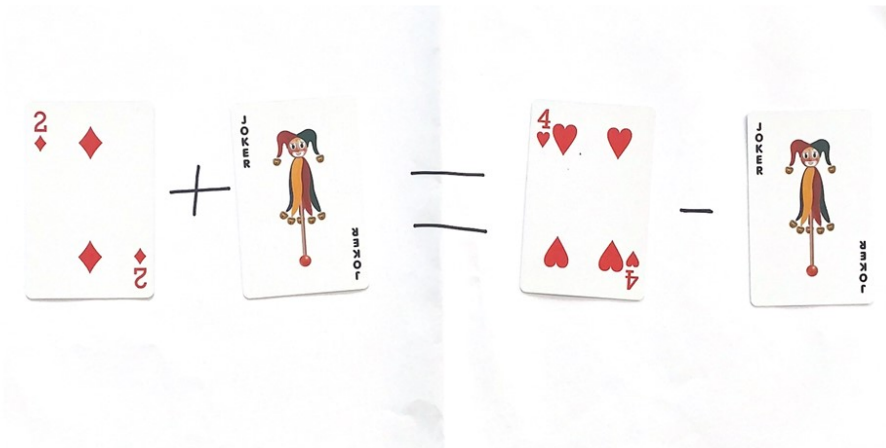


$$(9-4)\cdot 2 = 6 + X + 3$$




JOKER





Vedlegg 2: SIKT Vurdering av behandling av personopplysninger

Sikt

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	**Vurderingstype**	**Dato**
849691	Standard	09.01.2023

Tittel
ALGEBRA-prosjektet

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
David A. Reid

Prosjektperiode
01.01.2023 - 31.12.2030

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2030.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2030.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

Lykke til med prosjektet!