Fra LK06 til LK20: En analyse av representasjoner i geometrioppgaver

En analyse av Gyldendals læreverk med fokus på bruken av representasjoner, utforskning og kontekst i geometrioppgaver.

Kevin Andreassen & Mads Vebø Byom

VEILEDER

Hans Kristian Nilsen

Universitetet i Agder, 2024

Fakultet for Teknologi og Realfag

Institutt for Matematiske fag

FORORD

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår femårige lærerutdanning ved Universitetet i Agder, hvor vi har spesialisert oss innen matematikkdidaktikk. Gjennom denne perioden har vi opplevd både faglige og personlige utfordringer og gleder, og det å skrive denne masteroppgaven har vært en viktig del av vår akademiske reise.

Vi ønsker å gi en veldig stor takk til vår veileder, Hans Kristian Nilsen, for hans uunnværlige veiledning gjennom hele prosessen. Med stor fleksibilitet og konstruktive tilbakemeldinger har han vært avgjørende for utformingen av denne oppgaven.

Videre vil vi takke hverandre for et godt samarbeid. Å skrive masteroppgaven sammen har vært en takknemlig og lærerik erfaring, hvor vi har kunnet støtte hverandre og dra nytte av hverandres styrker.

Jeg, Kevin, ønsker spesielt å takke min forlovede, Kaja, som har vært en uvurderlig støtte gjennom hele denne perioden. Hun har tatt vare på både meg og vårt nyfødte barn, Gabriel, mens jeg har jobbet med oppgaven. Jeg vil også takke min storebror, Johnny, som introduserte meg for læreryrket ved å ta meg med på jobb i arbeidsuka i 9. klasse og for å være et forbilde i alt han gjør.

Jeg, Mads, ønsker først og fremst å takke min familie for all støtte gjennom tiden ved UiA. Samtidig ønsker jeg å takke venner som har kommet med konstruktive tips og støtte. Avslutningsvis ønsker jeg å takke både elever og ansatte ved Follo barne- og ungdomsskole for alt jeg har lært i løpet av tiden min der.

En stor takk til Gyldendal som har latt oss se på læreverkene deres, og takk til alle som har bidratt til å gjøre denne masteroppgaven mulig.

Kevin og Mads, 20.05.2024

Sammendrag

Denne masteroppgaven undersøker hvordan geometrioppgaver for 6. trinn i Gyldendal sitt læreverk Multi 2.utgave og Multi 3.utgave, tilpasset LK06 og LK20 er utformet, med spesielt fokus på representasjoner, utforskning og kontekst. Gjennom en dokumentanalyse av oppgavene, har vi som mål å undersøke hvordan endringene i læreplanene fra LK06 til LK20 har påvirket disse aspektene.

Våre funn viser at det er en generell likhet mellom læreverkene når det gjelder bruken av representasjoner, utforskning og kontekst. Likevel er det noen forskjeller: læreverket som følger LK20 viser en noe større variasjon i opprinnelige representasjonsformer og har en større spredning i naturlig tenkte konverteringer. Begge læreverkene har oppgaver som byr på potensial for bruk av ulike representasjoner, men det er ikke en markant forskjell i graden av utforskning som oppgavene legger opp til.

Når det gjelder utforskning, viser funnene at både LK06 og LK20 har et begrenset omfang av oppgaver som direkte oppfordrer til utforskning. Selv om LK20 har et eksplisitt fokus på utforskning i læreplanen, er dette ikke fullt ut reflektert i oppgavene. Det er heller ingen betydelig forskjell i bruken av kontekst mellom de to læreverkene, da begge i stor grad benytter rene matematiske kontekster.

Disse funnene belyser at mens LK20 har potensial til å forbedre undervisningen i geometri ved å inkludere mer varierte representasjoner, er det fortsatt behov for videreutvikling av oppgaver som virkelig fremmer utforskning og bruk av realistiske kontekster. Dette peker på behovet for videre forskning for å undersøke hvordan lærere implementerer disse endringene i praksis og hvilke utfordringer de møter. Gjennom denne studien bidrar vi til en bedre forståelse av hvordan læreplanendringer påvirker undervisningspraksis og elevers læringsutbytte i geometri.
.

Abstract
This master's thesis investigates how geometry tasks for 6th grade in Gyldendal's "Multi" textbooks, specifically the 2nd edition (aligned with LK06) and the 3rd edition (aligned with LK20), are designed with a focus on representations, exploration, and context. By conducting a document analysis of these tasks, we aim to examine the influence of curriculum changes from LK06 to LK20 on these aspects.

Our findings indicate a general similarity between the textbooks in their use of representations, exploration, and context. However, some differences are evident: the LK20-aligned textbook exhibits a slightly greater variety in the initial forms of representation and a broader range of natural conversions. Both textbooks offer tasks that have the potential for employing various representations, but there is no significant difference in the extent to which the tasks encourage exploration.

Regarding exploration, the findings reveal that both LK06 and LK20 include a limited number of tasks that directly promote this aspect. Although LK20 explicitly emphasizes exploration in the curriculum, this is not fully reflected in the tasks. There is also no notable difference in the use of context between the two textbooks, as both primarily utilize purely mathematical contexts.

These findings suggest that while LK20 has the potential to enhance geometry teaching through more varied representations, there remains a need for further development of tasks that genuinely foster exploration and the use of realistic contexts. Further research is recommended to explore how teachers implement these curriculum changes in practice and the challenges they encounter. This study contributes to a better understanding of how curriculum changes impact teaching practices and student learning outcomes in geometry.

Innholdsfortegnelse

1 INTRODUKSJON

1.1 Bakgrunn for studien

I forberedelse til masteren kom vi over en artikkel fra Duval (2006), og bet oss merke i følgende utsagn:

> *"For nearly 20 years, empirical data have been collected about the relationships between the thinking processes involved in mathematical activity and troubles of comprehension or even blockages of most learners. And anybody can get empirical evidence on the condition that treatment and conversion be methodologically separated in the tasks that are given to students, which is seldom or never done in most research studies (Duval, 2006, s. 115)."*

Sitatet fra Duval ovenfor, poengterer hvor «enkelt» det er å skille mellom matematikkoppgaver der det er naturlig å benytte "behandling" (Arbeid i samme representasjonsform), og oppgaver der det er naturlig å benytte "konvertering" (bytte av representasjonsform). Ikke bare er det enkelt å adskille, men måten man arbeider med oppgavene har en grunnleggende ulik karakter. Samtidig hevder Duval at man i forskning ikke skiller disse, og at dette er problematisk ettersom de er grunnleggende ulike. Dette ga oss en ide om å se nærmere på matematikkoppgaver, og deres bruk av overganger i representasjoner. Samtidig, som lærerstudenter, har innføringen av den nye læreplanen, den reviderte versjonen av Kunnskapsløftet kalt "Fagfornyelsen" (LK20), vært relevant for oss. Utforskning er et sentralt punkt i den nye læreplanen, og vi ønsker derfor å se om det har blitt noen endringer i overganger med tanke på representasjoner, og utforskning i oppgaver ved skifte til ny læreplan.

I samspillet mellom representasjoner og utforskning fant vi en link mellom "inquiry-based learning" og representasjoner. Linken vi observerte er at gjennom bruk av elevers egne interesser, og i større grad valg fra elever knyttet til oppgaven, kan elevene selv få mulighet til å 1. Velge representasjonsmetode for løsning av oppgaver, og *2.* blir pushet til å se overganger mellom reelle settinger og det vi anser som «ren matematikk». Et resultat av dette er at kontekst også ble relevant for å belyse de ulike oppgavenes muligheter og utfordringer knyttet til matematikkdidaktisk undervisning. Dette førte til at vi valgte å «låne» begreper knyttet til kontekst fra Skovsmose (2023). Tanken er at det å se hvilken kontekst en oppgave er satt i, vil være relevant for det helhetlige bildet av oppgavens naturlige overganger av representasjoner, og oppgavens mulighet for utforskning.

1.2 Vårt fokus og forskningsspørsmål

I denne masteroppgaven undersøker vi geometrioppgaver for 6. trinn i læreverket til Gyldendal, med fokus på representasjoner, utforskning, og kontekst. Vi ser nærmere på to læreverk, Multi 2. utgaven (2014) som følger Læreplanen Kunnskapsløftet fra 2006, og Multi 3. utgaven (2022) knyttet til den reviderte versjonen av Kunnskapsløftet, "Fagfornyelsen", fra 2020. Vi kartlegger hvordan disse tre elementene er fremstilt i oppgavene og hvilke implikasjoner dette har for undervisningen i skolen. Målet med vår analyse er å identifisere hvilke typer representasjoner som benyttes i oppgavene, hvilke overganger vi finner med tanke på representasjoner, i hvilken grad oppgavene oppmuntrer til utforskning, og hvordan konteksten til de ulike oppgavene er med å påvirke bruken av representasjoner og utforskning. Ved å analysere disse elementene, ønsker vi å sette søkelyset på hvordan geometrioppgavene i de respektive læreverkene har utviklet seg med tanke på våre fokusområder, og hvilke implikasjoner dette kan ha for undervisningspraksisen.

For å gi en helhetlig analyse av oppgavene har vi gjort følgende. Først og fremst har vi laget en egen definisjon for ordet "potensial". Potensialet vi ser etter i oppgavene omhandler oppgavens bruk av opprinnelige representasjoner, deres naturlige overganger i representasjoner under bearbeiding av oppgaven, oppgavenes utforskning knyttet til vår definisjon, og oppgavenes bruk av kontekst. Vi mener at disse tre elementene, henholdsvis representasjoner, utforskning og kontekst er elementer som har sterke broer knyttet til hverandre, og dermed er med å påvirke hverandre. Vi ønsker også å trekke frem de respektive læreplanenes formuleringer knyttet til disse tre elementene, og hvordan disse formuleringene bidrar til å skape en helhetlig ide om matematikkdidaktikk i norsk skole. Læreplanens formuleringer vil derfor være viktige i oppgaven ettersom vår hermeneutiske tilnærming til oppgavene krever at vi ser oppgaver i den konteksten de er satt i. Samtidig som læreverkets formuleringer vil bli trukket frem for å synliggjøre bindeleddene mellom de tre elementene som utgjør vår definisjon av potensial i oppgaver.

For representasjoner har vi valgt å ta utgangspunkt i Duvals (2006) systematisering av disse. Vi ser nærmere på hvordan naturlig tenkte overganger av representasjoner i en oppgave legger til rette for kognitivt utfordrende oppgaver. For utforskning har vi valgt å benytte teori tilknyttet Inquiry-Based Learning, IBL, og tar utgangspunkt i Tafoya et al.(1980). Her vektlegges viktigheten av elevers frie valg knyttet til valg av spørsmål, metode og representasjon av løsninger for ulike oppgaver. For kontekst har vi valgt å låne begreper fra Skovsmose (2023), og bruker disse til å skille mellom de ulike kontekstene oppgavene settes inn i. Ideen er at konteksten til en oppgave vil ha en påvirkning på hvor virkelighetsnær en oppgave er, som igjen vil ha en påvirkning på hvor utfordrende oppgaven er i forhold til representasjonsoverganger. Dersom en oppgave benytter konsepter fra inquiry based learning, som viktigheten av at elever får være med i valg av tematikk, vil konteksten for oppgaven naturligvis også bli påvirket av dette. Samlet sett så utgjør dette et potensial i oppgaven, dette forklarer vi mer utdypende i teoridelen.

For tematikk valgte vi å se spesifikt på oppgaver knyttet til geometri for 6. trinn. Dette valget tok vi hovedsakelig på bakgrunn av læreplanens fokus, og dermed også læreverkenes fokus. 2. Utgaven av Multi vektlegger kompetansemålene i LK06 knyttet til geometri, selv om kompetansemålene for matematikk i LK06 er definert som «Kompetansemål etter 7. årssteget», fant vi at innholdet av geomtrioppgaver var primært lagt til utgaven for 6. trinn. Dette gjør at kompetansemålene knyttet til geometri er treffende for dette læreverket. For 3. utgaven som følger LK20 er disse oppgavene naturligvis rettet mot de kompetansemålene i LK20, for 6. trinn, som omhandler geometri. Samlet sett fant vi at disse oppgavene i større grad arbeider mot lignende målsetninger, med enkelte unntak som vi vil se nærmere på i delen om læreplanen. Samlet sett fant vi at de to læreplanene er tematisk samsvarende til den grad at en sammenligning ikke vil, i for stor grad, bli påvirket av ulike tematiske fokus. For å belyse den geometrididaktiske delen av oppgavene har vi valgt å benytte oss av Van de Walle et al. (2020). Vi ønsker også å vektlegge hvordan vår definisjon av potensial henger sammen med matematikkdidaktisk teori, og hvordan dette kommer til syne i matematikkoppgavene. Det er viktig å påpeke at vår oppgave er en dokumentanalyse av disse læreverkene, dette gjør oss ikke i stand til å kunne si hvordan lærerne faktisk praktiserer geometriundervisningen i klasserommet, eller hva elevene faktisk lærer av disse oppgavene.

Med utgangspunkt i det overnevnte formulerer vi følgende forskningsspørsmål:

> 1. *" Hvilke representasjonsformer legges det opp i utvalgte læreverk innenfor temaet geometri, i læreverk underlagt LK06 og læreverk underlagt LK20?"*
>
> 2. *Hvordan kan de ulike representasjonsformene i de respektive læreverk relateres til utforskningsperspektivet, og kontekstualisering i de tilhørende læreplaner (LK06 og LK20)?*

For å svare på disse spørsmålene har vi utviklet et analyseverktøy, som presenteres i teoridelen av oppgaven. Resultatene av dette analyseverktøyet vil vi presentere kvantitativt, ettersom dette er en hensiktsmessig måte for å få en helhetlig oversikt over hvordan de respektive læreverkenes oppgaver fordeler seg med tanke på våre kategoriseringer. Vi vil videre belyse utvalgte oppgaver gjennom en kvalitativ innholdsanalyse med vekt på to aspekt: 1) Oppgaver vi anser som representative for oppgavene i de respektive læreverk og 2) Oppgaver som vi anser å skille seg ut, i retning av å inneha et særlig potensial.

1.3 Struktur

I introduksjonen av vår masteroppgave presenterer vi valget av studie samt målene med studiet, hvor vi også grundig legger frem våre forskningsspørsmål. Disse spørsmålene er fundamentale for retningen og dybden av vår forskning. Videre i teoridelen utdyper vi den relevante teorien som vår oppgave bygger på, med spesielt fokus på teorier knyttet til representasjoner og utforskning. Vi forklarer også de lånte begrepene fra Skovsmose som benyttes i studien, og detaljerer vårt analyseverktøy samt begrepet 'potensial', som er sentrale komponenter i vår teoretiske ramme. Metodedelen tar for seg de metodologiske valgene vi har tatt i forbindelse med vår studie. Her beskriver vi hvordan analyseverktøyet er anvendt for å undersøke oppgavene fra de utvalgte læreverkene, og hvordan dette verktøyet støtter vår analyseprosess. Resultatdelen er strukturert i to delkapitler. Det første gir en helhetlig, kvantitativ oversikt over våre funn, visualisert gjennom tabeller og diagrammer. Det andre delkapittelet gir et dyptgående, kvalitativt blikk på oppgaver som er representative for læreverkene, samt oppgaver som tilbyr særlige muligheter innen matematikkundervisning, noe som gir verdifull innsikt i de praktiske aspektene av hvordan oppgavene fungerer i en undervisningssammenheng. I drøftingsdelen reflekterer vi over betydningen av våre resultater i lys av den teoretiske bakgrunnen vi har lagt. Vi diskuterer hvilke implikasjoner våre funn har, og hvordan de besvarer våre forskningsspørsmål. Dette kapittelet gir også rom for å utforske behovet for videre forskning og diskutere potensielle fremtidige studier som kan videreutvikle forståelsen av representasjoner og utforskning i matematikkoppgaver.

2 LÆREPLAN

I dette kapittelet vil vi først gi en innføring i læreplanene LK06 og LK20 som er essensiell for å forstå den pedagogiske rammen som geometrioppgavene i vår studie er utformet innenfor. Denne gjennomgangen av læreplanene vil hjelpe oss å identifisere endringer i undervisningsmetoder og pedagogiske mål, og hvordan disse påvirker innholdet og tilnærmingene i matematikkoppgavene. Vi vil dykke dypere inn i hvordan geometri og utforskning er beskrevet i de nasjonale læreplanene, og hvordan disse beskrivelsene korresponderer med aktuell matematikkdidaktisk forskning. Vi vil utforske hvordan læreplanene reflekterer skiftende perspektiver på hvordan matematikk best kan læres og undervises, og hvilke pedagogiske tilnærminger som kan være effektive i geometriundervisningen.

2.1 Læreplanens plass i skolen

Læreplaner utgjør grunnlaget for undervisning og læring i skolen. Disse standardiserte dokumentene er avgjørende for å sikre at alle elever får tilgang til en relevant og høykvalitetsutdanning som er tilpasset samfunnets og individets behov. De definerer målene for utdanningen, de ferdighetene som skal utvikles, og kunnskapen som skal formidles. Læreplaner varierer avhengig av nasjonale mål og kan også tilpasses regionale og lokale behov, samt til individuelle elever, noe som gir lærere en viss grad av frihet til å tilpasse undervisningen (Engelsen, 2015, s. 21).

Læreplanene i Norge er et resultat av en statlig styrt prosess der staten bestemmer tidspunktet for revisjoner og reformer av utdanningssystemet. Målet med disse revisjonene er å oppfylle de overordnede målene for utdanning som er satt gjennom ulike reformer. Læreplanen er også et verktøy for staten for å ivareta viktige samfunnsoppgaver som å bevare kulturarven og gi elevene den nødvendige kompetansen for å møte en stadig foranderlig verden (Imsen, 2020, s. 297-298).

For lærere fungerer læreplanen som en veiledning, hvor erfarne lærere og fageksperter bidrar til utviklingen. Dette sikrer at læreplanen har et solid faglig og pedagogisk grunnlag for undervisningen. Læreplanen fungerer også som en informasjonskilde til foreldre, som kan bruke den til å få innsikt i barnas skolegang eller som grunnlag for hjemmeundervisning. Videre bidrar den til å sikre at alle elever får en likeverdig utdanning, uavhengig av deres sosiale eller geografiske bakgrunn (Imsen, 2020, s. 299-302).

Selv med en gitt nasjonal læreplan er det imidlertid ikke garantert at undervisningen er lik i hvert klasserom. Lærernes autonomi og de individuelle og lokale læreplanene som utvikles, fører til variasjoner i hvordan læreplanen implementeres og praktiseres (Imsen, 2020).

2.2 Kunnskapsløftet (LK06) og fagfornyelsen (LK20)

I dette delkapittelet presenterer vi de respektive læreplanene våre valgte læreverk befinner seg innenfor. I analysen av matematikkoppgaver er det nødvendig å se oppgavene i lys av den overordnede læreplanen de er en del av.

2.2.1 Kunnskapsløftet LK06

LK06, også kjent som Kunnskapsløftet, ble innført i 2006 og representerer en betydelig reform i norsk utdanningshistorie. Reformen var motivert av et ønske om å revitalisere den norske grunnutdanningen ved å legge vekt på grunnleggende ferdigheter som lesing, skriving, regning, muntlige ferdigheter og digitale ferdigheter. Disse ferdighetene skulle integreres i alle fag, og målet var å forberede elevene bedre til deltakelse i et kunnskapssamfunn (Utdanningsdirektoratet, 2015a). LK06 la stor vekt på å utvikle elevers kompetanse i disse grunnleggende ferdighetene. Med kompetanse menes her evnen til å møte komplekse krav, ved å mobilisere psykososiale ressurser (inkludert ferdigheter og holdninger) i en gitt kontekst (Utdanningsdirektoratet, 2015a). Denne tilnærmingen var en respons på samfunnets endrede behov, hvor evnen til å anvende kunnskap ble vektlagt fremfor bare å inneha kunnskap. En sentral del av LK06 var dens fokus på progresjon og differensiering i undervisningen. Læreplanen ble utformet slik at lærere skulle kunne tilpasse undervisningen til elevers ulike forutsetninger og behov, samtidig som det ble lagt vekt på elevenes gradvise utvikling av kunnskaper og ferdigheter gjennom hele utdanningsløpet.. LK06 understreket også viktigheten av fagdidaktisk kompetanse blant lærere. Dette kan muligens se på som en erkjennelse av at lærernes evne til å planlegge, gjennomføre og vurdere undervisning i tråd med læreplanens intensjoner, var avgjørende for å oppnå de ønskede utdanningsresultatene (Utdanningsdirektoratet, 2015a). I forhold til matematikkfaget, tok LK06 hensyn til både praktiske og teoretiske aspekter av faget. Det ble lagt opp til at elever skulle utvikle matematisk kompetanse gjennom arbeid med tall og algebra, måling, geometri, funksjoner, statistikk og sannsynlighet (Utdanningsdirektoratet, 2015b). Læreplanen inneholdt også en forventning om at elevene skulle kunne anvende matematikk i dagliglivet og i videre studier.

Spiralprinsippet, som innebærer at man gjentar og bygger videre på temaer med økende vanskelighetsgrad, var en underliggende struktur i LK06. Dette prinsippet sikret en gjennomgående økning i kognitiv utfordring og en sterk kobling mellom teori og praksis, noe som var ment å fremme dybdelæring – en dypere forståelse av matematiske konsepter og deres anvendelse (Karseth & Sivesind, 2010). LK06 er en stor del av norsk utdanningshistorie og er med på å danne grunnlaget for forståelsen av læreplaner i Norge.

2.2.2 Fagfornyelsen LK20

I 2020 ble LK20, eller Fagfornyelsen, introdusert for å møte behovet for en mer fleksibel og fremtidsrettet utdanning. Denne oppdateringen legger vekt på dybdelæring og kritisk tenkning, og introduserer kjerneelementer i fagene for å fremme dypere forståelse av faglig innhold (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.7). Fagfornyelsen representerer en ny fase i norsk utdanningshistorie, hvor fokuset er på en overordnet del som danner grunnlaget for fag- og timefordeling i skolen (Gundersen, 2021). Denne delen legger vekt på formålsparagrafen som redegjør for opplæringens intensjoner, verdier og prinsipper, hvilket speiler et samfunn i endring og behovet for tilpasning til fremtidens utfordringer.

I LK20 er kompetansemålene fornyet og knyttet til hvert årstrinn i grunnskolen, fra 2. til 10. trinn. Denne strukturen skiller seg fra den tidligere læreplanen (LK06), hvor kompetansemålene var gruppert i hovedområder og dekket flere årstrinn samtidig. LK20 presenterer kompetansemålene samlet, uten en eksplisitt inndeling i hovedområder. Den matematikkfaglige delen av læreplanen fokuserer på seks kjerneelementer: utforskning og problemløsing, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, samt abstraksjon og generalisering. Disse elementene er valgt for å fremme dybdelæring og kritisk tenkning og for å forberede elever på å anvende matematikk i en rekke kontekster (Gundersen, 2021) .

LK20 har også introdusert to nye tverrfaglige temaer: folkehelse og livsmestring samt demokrati og medborgerskap. Disse temaene er integrert i et bredt utvalg av kompetansemålene og skal bidra til å forberede elever på livet utenfor skolen ved å fremme sosial kompetanse og borgerskap. Denne integrasjonen av tverrfaglige temaer markerer en betydelig endring sammenlignet med LK06, hvor slike temaer var mindre eksplisitt definert og representert (Gundersen, 2021). Klungrehaug (2020) påpeker i sin kvalitative undersøkelse at LK20s struktur gir lærere større frihet til å integrere og samarbeide mellom fag, og sette kunnskapsområdene i sammenheng med hverandre. Dette er en følge av en mer flytende grense mellom kunnskapsområdene sammenlignet med LK06, hvor hovedområdene var mer rigide og avgrenset. LK20s åpne og fleksible struktur understreker viktigheten av tverrfaglighet og tilrettelegger for en mer holistisk forståelse av fagene og hvordan de kan anvendes i praksis (Gundersen, 2021) .

Generelt representerer LK20 et skifte mot en mer elevsentrert, dybdeorientert og fleksibel tilnærming til læring. Ved å belyse kritisk tenkning, dybdelæring og tverrfaglighet, legger den nye læreplanen til rette for en mer relevant og framtidsrettet utdanning som ikke bare overfører kunnskap, men også utvikler kompetanser som kan anvendes i et bredt spekter av situasjoner i elevers personlige og profesjonelle liv.

2.3 Utforskning i læreplanene

I dette delkapittelet ser vi nærmere på de to læreplanenes formuleringer knyttet til utforskning. Dette er for å se hvordan læreverkene forholder seg til utforskning i forhold til deres styrende dokumenter. Videre skal vi se hvordan dette henger sammen med teori på feltet, og hvordan det kommer til syne i læreverkene.

2.3.2 Utforskning i Kunnskapsløftet (2006)

Læreplanverket for Kunnskapsløftet (LK06) understreker innledningsvis i den generelle delen, betydningen av å gi elevene rom for skaperglede og utforskning. Opplæringen skal stimulere elevenes fantasi og kunstopplevelse gjennom bruk av bilder, form, tone, og ord (Utdanningsdirektoratet, 2015a). Videre legges det frem at undervisningen skal legge til rette at elevene får utviklet sine skapende evner gjennom å løse praktiske problemer gjennom tenkning og forskning (Utdanningsdirektoratet, 2015a). I den generelle delen legges det også frem tre sentrale egenskaper for vitenskapelig forståelse og arbeidsmåte. Evnen til å undre samt å stille nye spørsmål, evnen til å finne mulige forklaringer på observasjoner, for deretter å kunne kontrollere forklaringene gjennom kildegransking, eksperiment eller observasjon (Utdanningsdirektoratet, 2015a). Den fagspesifikke matematikk-delen av læreplanverket nevner at opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening (Utdanningsdirektoratet, 2015b). Dette gjenspeiles til dels også i kompetansemålene, et kompetansemål for 10. Trinn innenfor geometri er følgende: "utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnementer ved hjelp av geometriske ideer og gjøre rede for geometriske forhold av særlig betydning innenfor teknologi, kunst og arkitektur". For 7. Trinn er det ingen kompetansemål innenfor geometri som inneholder begrepet utforskning.

2.3.1 Utforskning i Fagfornyelsen (2020)

I dagens læreplan, Fagfornyelsen, legger overordnede del vekt på viktigheten av å utforske og eksperimentere for å oppnå dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.7.). Det trekkes også frem viktigheten av at kreativitet og skapende evner bidrar til å berike samfunnet, og derfor skal skolen dyrke forskjellige måter å utforske og skape på. Utover dette trekkes også viktigheten av samarbeid frem som en viktig komponent for å inspirere til nytenking (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.8). Fagspesifikt innen matematikk vektlegges elevenes evne til å finne mønstre, sammenhenger og å diskutere seg fram til en felles forståelse som sentrale elementer innen utforskning. Det arbeides også for at elevene skal legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn det de skal vektlegge løsningene (Utdanningsdirektoratet, 2020).

2.4 Konkrete Implikasjoner for geometriundervisning

Under LK06 var geometriundervisningen hovedsakelig prosedyreorientert. Elever lærte å identifisere og beskrive geometriske figurer, en tilnærming som var i tråd med læreplanens generelle fokus på ferdighetsutvikling. Dette innebar ofte bruk av tradisjonelle verktøy som passer og linjal, med liten vekt på elevens selvstendige utforskning eller kreativ problemløsning (Karseth & Sivesind, 2010).

I motsetning til dette legger LK20 opp til en mer integrert og utforskende tilnærming, hvor digitale verktøy og tverrfaglige temaer både øker ressursbredden og fordyper forståelsen gjennom integrering av geometri med andre fagområder. Læreplanen fremmer bruk av geometriske konsepter gjennom praktisk og problemorientert utforskning, som reflekterer moderne pedagogiske metoder anbefalt av Van de Walle et al. (2020)
som understreker viktigheten av å forstå geometri gjennom utforskning og applikasjon. Reformen fra LK06 til LK20 i konteksten av geometriundervisning illustrerer en overgang fra en isolert og statisk tilnærming til en dynamisk og sammenkoblet pedagogisk metodikk. Denne endringen understreker en ny forståelse av læring som en aktiv, integrerende prosess, hvor elever stimuleres til å utforske og anvende geometriske ideer på innovative måter.

3 TEORI

Teoridelen av vår oppgave bygger på fire grunnleggende elementer: geometri, representasjoner, utforskning og kontekst. Disse elementene er nøye utvalgt for å danne et solid fundament for analyse av geometrioppgaver og deres pedagogiske potensial i henhold til endringer i læreplanene fra LK06 til LK20.

Videre vil vi presentere og detaljere analyseverktøyet (vist i sin helhet under), som er utviklet for studien. Dette verktøyet er designet for å evaluere oppgavens struktur og innhold, med spesiell vekt på hvordan de inkorporerer representasjoner, utforskning og kontekst. Bruken av analyseverktøyet, som vil bli helhetlig forklart i metodedelen, er sentral i vår tilnærming for å identifisere og analysere potensialet i ulike geometrioppgaver. Det mulige potensialet de ulike oppgavene innebærer vil være gjennomgående sentralt i vår oppgave og vil derfor defineres tydelig avslutningsvis i teoridelen. Potensialet vi ser etter knytter trådene mellom representasjoner, utforskning og kontekst.

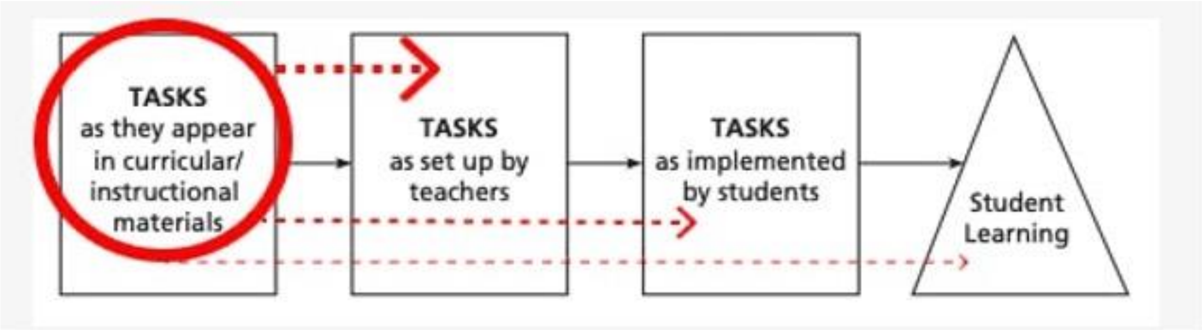
Representasjoner - Duval		**Utforskning**		**Kontekst -Skovsmose**	
Opprinnelig representasjon av oppgave		Utforskningsgrad - **Lafoya**		Kontekst	
Behandling/ Konvertering		Elevers valg (1-4)			

Tabell 1

3.1 Ulike faser i oppgaver

I artikkelen "Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice" av Stein og Smith (1992), diskuteres viktigheten av matematiske oppgaver som et rammeverk for refleksjon innen undervisning. Stein og Smith (1992) understreker at læreres profesjonelle utvikling er tett knyttet til deres evne til å reflektere over undervisningspraksis og elevenes læring. De fremhever hvordan oppgaver som presenteres i lærebøker og andre instruksjonsmaterialer (den første fasen i deres modell), ikke alltid er de samme oppgavene som lærere setter opp (den andre fasen) eller som elevene faktisk utfører (den tredje fasen). Overganger mellom disse fasene kan betydelig påvirke både hva og hvordan elevene lærer (Stein & Smith, 1992).

Stein og Smiths (1992) sin modell gir innsikt i hvordan oppgaver kan endres eller fortolkes forskjellig i hvert steg av læringsprosessen, og dette har relevans for vår undersøkelse av geometrioppgaver i lærebøker. Ved å betrakte Stein og Smiths perspektiver kan vi reflektere over hvordan slike transformasjoner mulig påvirker elevenes oppfattelse og interaksjon med geometrioppgaver, spesielt med tanke på overgangen fra LK06 til LK20. Selv om modellen ikke er en aktiv del av vår metodologiske tilnærming og vi bare befinner oss i hovedsak i den første fasen, hjelper den oss å forstå mulige gap mellom intensjonen bak og den faktiske gjennomføringen av geometriundervisning. I vår oppgave tar vi derfor utgangspunkt i den første fasen, samtidig som vi trekker linjer mot de videre fasene av modellen. Det er derfor naturlig at funn i den første fasen, først og fremst vil kunne gi indikasjoner til hvordan oppgaver blir lagt frem av læreren i klasserommet. Dette vil da være i *fase 2*, og ettersom vi ikke observerer i klasserommet kan vi kun trekke linjer mot denne fasen. Figuren nedenfor viser hvordan vi ønsker å trekke linjer fra fase 1, mot de videre fasene til modellen.



Figur 1: Hentet fra Stein og Smith (1992)

Selv om den primære analysen fokuserer på oppgavenes utforming i lærebøker, er det viktig å anerkjenne og undersøke hvordan disse oppgavene potensielt kan transformeres når lærerne tar dem i bruk, og ytterligere når elevene engasjerer seg i dem. Forbindelsene mellom disse fasene kan gi innsikt i faktorer som påvirker elevens læringsopplevelser og utfall. Dette inkluderer å vurdere hvordan lærere kan endre oppgavene fra deres opprinnelige form for å tilpasse undervisningen til klassens behov eller for å forbedre forståelsen.

Gjennom å inkludere en refleksjon over de senere fasene i Stein og Smiths (1992) modell, setter vi lys på mulige avvik mellom oppgavens intensjon som formidlet i lærebøker og den faktiske gjennomføringen i klasserommet. Dette gir en rikere kontekst for å forstå kompleksiteten i pedagogisk praksis og hvordan teoretiske planer ofte må tilpasses praktiske realiteter. Ved å betrakte denne overgangen fra teori til praksis, åpner vår studie opp for ytterligere forskning om hvordan læreres interaksjoner og elevers utføringer av oppgavene kan forbedres for å støtte dypere forståelse og engasjement. Denne tilnærmingen understreker viktigheten av ikke bare å vurdere oppgavene som de er ment, men også som de praktiseres, noe som gir verdifulle perspektiver for både pedagogisk teori og praksis.

3.2 Geometri

Under avsnittet som omhandler geometri vil vi dykke inn i essensen av geometri som fagfelt og dets plass i matematikkundervisningen, spesielt med fokus på læreplanene LK06 og LK20. Vi vil utforske hvordan geometri er representert i disse læreplanene og hvordan endringer i pedagogiske tilnærminger har påvirket undervisningen i geometri over tid. Dette vil legge grunnlaget for en dypere forståelse av de teoretiske og praktiske implikasjonene som er relevante for vår analyse av geometrioppgaver i skolen.

3.2.1 Utvikling av Geometrisk Tenkning og Forståelse

Geometri er en essensiell del av utdanningen som fremmer barns kognitive utvikling og er sentral for å utvikle romlig forståelse og logisk resonnering. Det å arbeide med geometri kan stimulere til problemløsning og gi grunnlag for matematisk tenkning som er essensielt for videre studier i matematikk og relaterte fagfelt (Marchis, 2012). Geometrisk forståelse starter tidlig i barneskolen, og gunstig sett utvikles den gjennom en utforskende og opplevelsesbasert tilnærming. Van Hieles modell presenterer en sekvens av hierarkiske nivåer som kan bidra til å strukturere denne progresjonen ved å skissere hvordan elevers tenkning utvikler seg fra enkle gjenkjenninger til komplekse analyser og deduktive resonneringer om geometri (van Hiele, 1986). Denne modellen har relevans for dagens undervisningspraksis, hvor lærere kan bruke de forskjellige nivåene som et rammeverk for å sikre at undervisningen stemmer overens med elevenes utviklingsmessige stadier. For eksempel, på Van Hieles første nivå (nå nummerert som nivå 1 etter tillegg av et pre-gjenkjennelses nivå), gjenkjenner barn todimensjonale figurer basert på deres utseende, ofte sammenlignet med kjente prototyper. På høyere nivåer, som nivå 2 og 3, begynner elever å analysere figurers egenskaper og forstå relasjonene mellom disse (Mason, 2002). I forlengelsen av dette understreker Van de Walle et al. (2020), betydningen av en forståelsesdrevet undervisning i geometri. Ved å oppmuntre elever til å aktivt engasjere seg med matematiske konsepter gjennom utforskning, bygger de på sin forståelse og anvender den i ulike sammenhenger. Dette innebærer å utforske egenskapene og relasjonene til todimensjonale figurer ved hjelp av konkrete manipulative og visuelle hjelpemidler for å danne et solid fundament for videre geometrisk resonnering (Van de Walle et al., 2020).

Representasjon spiller en avgjørende rolle i denne læreprosessen. Varierende representasjonsformer - visuelle, konkrete, og digitale, er nødvendige for at elever skal kunne undersøke og utvikle en dypere forståelse av geometriske konsepter. Van de Walle fremhever hvordan elevers evne til å skifte mellom forskjellige representasjoner er kritisk for deres matematiske fleksibilitet og innsikt (Van de Walle et al., 2020). Videre er virkelighetsnærhet og kontekstualisering av matematikk vesentlig. Ved å sette geometri i en relevant kontekst, kan elever se den praktiske bruken av faget og dets relevans i hverdagen. Dette kan gjøre matematikken mer tilgjengelig og meningsfylt for elever, og gir dem en bedre forståelse av fagets plass i verden.

3.2.2 Analyse av Geometrioppgaver

Ifølge Van de Walle et al. (2020) anses problemløsning som et fundamentalt element i matematikkundervisning, og denne tenkningen er dypt integrert i vår analyse av geometrioppgaver. Selv om vi i vår oppgave har valgt å sette fokus på hvordan oppgaver bruker representasjoner, utforskning og kontekst, er det viktig å anerkjenne Van de Walle et al. (2020) perspektiver på problemløsning er høyst relevante. Dette er fordi både den tidligere læreplanen, LK06, og den nåværende, LK20, understreker en sterk sammenheng mellom utforskning og problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2020)

I vår tilnærming til analysen er det essensielt å anerkjenne at mens direkte analyse av oppgavens potensiale for problemløsning ikke er vårt primære fokus, er det fortsatt et underliggende tema som berører all undervisningspraksis og oppgavevurdering. Dette skyldes læreplanenes vektlegging av problemløsning som en kjernekompetanse (Van de Walle et al., 2020). Dermed, selv om vår undersøkelse ikke måler oppgavenes problemløsningspotensial direkte, bruker vi Van de Walles teori som et perspektiv for å forstå og analysere de didaktiske valgene som tas i læreverkets oppgaver. Ved å ha dette i fokus, ønsker vi å sørge for at vår vurdering fanger opp den innflytelsen problemløsning har på elevers engasjement og utvikling av matematisk forståelse.

Van de Walles (2020) fokus på elevsentrert læring og dybde i forståelsen snarere enn overfladisk memorering, underbygger hans filosofi om at matematikk, og spesielt geometri, er best lært gjennom meningsfylte og engasjerende aktiviteter som fremmer kritisk tenkning og problemløsning. Denne forståelsen av geometriundervisning blir styrket av forskning som indikerer at en tilnærming basert på Van Hiele-teorien kan lede til betydelige forbedringer i elevenes geometriske forståelse (Alex & Mammen, 2016). En slik tilnærming krever at lærere har en dyp forståelse av geometriske konsepter og strategier for undervisning, slik at de kan lede elever gjennom et læringsforløp som er både utforskende og kontekstuell.

3.3 Representasjoner

I denne oppgaven forholder vi oss til følgende definisjon for hva en representasjon er: «*A representation is something that stands for something else.*» (Duval, 2006, s. 103). Altså dersom en oppgave er å regne ut omkretsen av en sirkel. Er det for mange naturlig å tegne en sketsj. Da benytter en både sketsjen og tallsymboler for å komme frem til et svar som er omkretsen. Sketsjen og tallsymbolene som benyttes er i denne situasjonen ulike representasjoner innenfor ulike "registre" som benyttes for å løse denne oppgaven. Vi vil også prate om semiotiske systemer av representasjoner, da refereres det til tegn som gir mening i forhold til hverandre i det systemet de befinner seg i. Eksempelvis gir en matematisk ligning kun mening dersom vi er enige om betydningen av tallene og andre matematiske symboler. I dette delkapittelet skal vi først og fremst se på hvorfor det er nødvendig å lære ulike representasjoner innen matematikk, før vi videre ser på overganger i representasjoner og hvordan dette passer inn i vår oppgave.

3.3.1 Viktigheten av representasjoner

Det å kunne benytte forskjellige representasjoner for å forklare noe er nødvendig. Det å kunne skille mellom representasjoner i matematikk handler om å forstå matematikken utenfor representasjonen i seg selv (Duval, 2006, s. 24). Ifølge Gersten et. al (2014, s.29) kommer det frem at generell bruk av ulike typer representasjoner for å berike mulighetene for støtte til elever som har utfordringer i skolen er svært hensiktsmessig. Her nevnes bruken av konkreter og visuelle illustrasjoner som gode hjelpemidler for elever med ulike utfordringer. Duval drar dette et steg lenger innen matematikk og diskuterer at matematiske objekter er abstrakte, og det er gjennom ulike representasjoner at matematikken kommer til syne (Duval, 2006, s. 107). Dette begrunnes også om kjernen i matematikk, og hvordan det skiller seg fra naturvitenskapen, nemlig ved at du ikke kan innhente informasjon gjennom persepsjon eller ved hjelp av instrumenter, men informasjonen kan kun overføres gjennom bruk av representasjoner (Duval, 2006, s. 107). Duval diskuterer viktigheten av semiotiske representasjoner og forståelsen av disse. Han refererer da til tall og tegn som ikke har noen mening i seg selv uten den meningen vi tilegner disse. Ideen er at semiotiske systemer av representasjoner benyttes til å definere, kommunisere og arbeide med matematikk. Altså at når vi arbeider med matematikk så arbeider vi på en sånn måte at representasjonene endres, uten at matematikken endres (Duval, 2006, s. 107). Derfor er det slik at dersom vi arbeider med ligningen:

$$x + 5 = 7$$

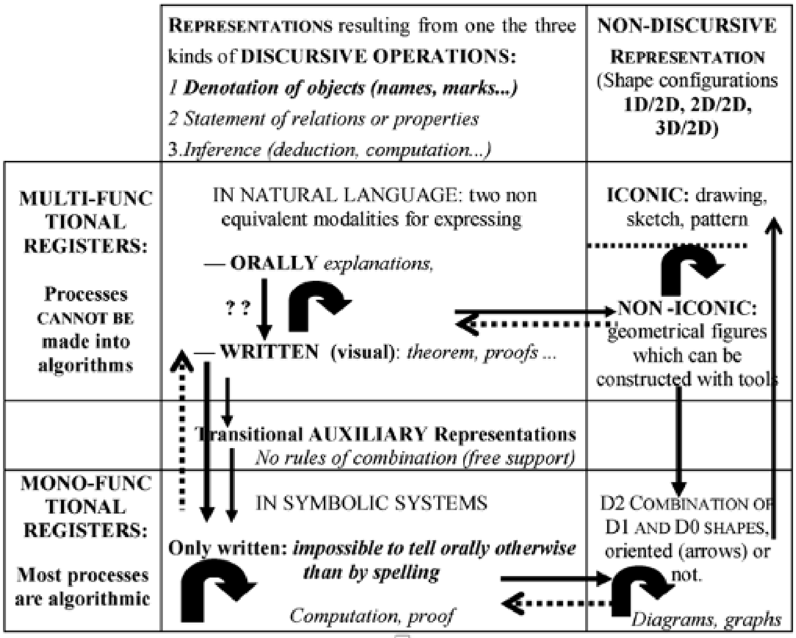
Finner vi at:

$$x + 5 = 7 \;\; Er\, \text{det}\, samme\; som\;\; x = 2$$

Her er det ingen endring av matematiske objekter, men heller en endring av tegnene vi bruker for å beskrive disse. Det er altså bruken av semiotiske systemer som får oss til å kunne gi mening, kommunisere, og arbeide med oppgaven (Duval, 2006, s. 107). I matematisk arbeid endrer vi kun på tegnene eller representasjonene som brukes.

Forskjellige typer representasjoner har ulike muligheter og utfordringer. Ideen er at gjennom å overføre representasjoner ved bruk av semiotiske systemer får vi muligheten til å bruke verktøyene som disse representasjonene inneholder. Semiotiske tegn som “+” og “-“ beskriver henholdsvis addisjon og subtraksjon innenfor det symbolske registeret, og er derfor godt egnet til matematisk utregning, men på bekostningen av at det i mindre grad gjenspeiler en reell situasjon. Ettersom matematikk handler om det å endre på bruken av representasjoner, er representasjonen kjernen til å forstå, kommunisere og arbeide med matematikk (Duval, 2006, s.109).

Gjennomgående i vår oppgave ser vi nærmere på representasjoner, og de ulike semiotisk representasjonene som presenteres i Duvals teori. Denne tabellen danner derfor et teoretisk utgangspunkt for vår analyse:



	REPRESENTATIONS resulting from one the three kinds of **DISCURSIVE OPERATIONS:** *1 **Denotation of objects (names, marks...)*** *2 Statement of relations or properties* 3.*Inference (deduction, computation...)*	**NON-DISCURSIVE** REPRESENTATION (Shape configurations **1D/2D, 2D/2D, 3D/2D)**
MULTI-FUNCTIONAL REGISTERS: **Processes CANNOT BE made into algorithms**	IN NATURAL LANGUAGE: two non equivalent modalities for expressing — **ORALLY** *explanations,* ? ? — **WRITTEN (visual):** *theorem, proofs ...*	**ICONIC:** drawing, sketch, pattern **NON -ICONIC:** geometrical figures which can be constructed with tools
	Transitional AUXILIARY Representations *No rules of combination (free support)*	
MONO-FUNCTIONAL REGISTERS: **Most processes are algorithmic**	IN SYMBOLIC SYSTEMS **Only written:** ***impossible to tell orally otherwise than by spelling*** *Computation, proof*	D2 COMBINATION OF D1 AND D0 SHAPES, oriented (arrows) or not. *Diagrams, graphs*

Tabell 2: Hentet fra Duval (2006)

De spesielt interessante delene av tabellen med tanke på vår analyse er delene som omhandler de ulike registrene, og overgangene mellom disse. For å se nærmere på behandling og konvertering, er det først nødvendig å definere hva Duval legger i ordet "register". Registre dreier seg om hvilke muligheter som er innenfor representasjonsformen som blir brukt. Duval skiller mellom monofunksjonelle og multifunksjonelle registre. Ved bruk av representasjoner innenfor monofunksjonelle registre er all informasjon tilgjengelig uten annet visuelt eller verbalt støy. Innenfor multifunksjonelle registre som verbaltekst og tegninger, kan det være flere faktorer som spiller inn på hvordan vi tolker representasjonen (Duval, 1999, s. 6). Registre er kun de semiotiske systemene som muliggjør det å endre representasjonsform (Duval, 2006, s. 111).Vi vil for å enklere visualisere hvilke registre det er snakk om, og overganger mellom disse, gjennomgående i oppgaven benytte oss av en forenklet modell som er avledet fra tabellen til Duval:

.

Figur 2

Nedenfor kommer en forklaring på hvilket innhold som fanger opp de ulike representasjonene:

Verbaltekst: Ordforklaringer, både skriftlig og muntlig. Forklaringer, teoremer og bevis.

Ikonisk: Sketcher, tegninger, mønster og bilder som bringer med seg noe til oppgaven utover ren kontekst..

Symbolsk: Tall, beregninger og formler.

Diagram: Diagrammer og grafer.

En definisjon av matematiske objekter

Ettersom, ifølge Duval, matematikk handler om å skille representasjonsformene fra de matematiske objektene. Er det nødvendig å ha en klarhet i hva vi legger i begrepet "matematiske objekter". Med matematiske objekter mener vi matematiske begreper, ideer og operasjoner. Tallet 7 er et eksempel på et matematisk begrep. Det kan komme til syne gjennom bruken av klosser, fingre, tallinje, tallsymbol, tekst og flere typer representasjoner. Subtraksjon er et eksempel på en matematisk operasjon. Det går ut på at man kan trekke fra mengder og finne forskjeller mellom mengder (Birkeland et al., 2018 ,s.93). Kommutativitet i multiplikasjon er et eksempel på en matematisk ide. Selve ideen er at rekkefølgen er ubetydelig når man multipliserer to mengder (Birkeland et al., 2018, s.101; Svingen, 2018, s. 2).

3.3.2 Opprinnelig representasjon av oppgave

Duval (2006) argumenterer for at for å få en matematisk forståelse er det nødvendig å arbeide med matematiske objekter gjennom overganger mellom ulike representasjonsformer. Hvilke representasjonsformer som benyttes i læreverkets presentasjon av oppgaven vil derfor påvirke dette. Samtidig vil det naturligvis også være flere representasjonsformer som benyttes i oppgavenes presentasjon, som sammen gir informasjonen elevene trenger for å løse oppgaven. Derfor finner vi det naturlig å analysere hvilke representasjonsformer som benyttes når oppgavene presenteres i læreverket. Elever trenger å møte varierte representasjonsformer, der formen også varierer innenfor hvert enkelt register (Duval, 2006, s. 121).

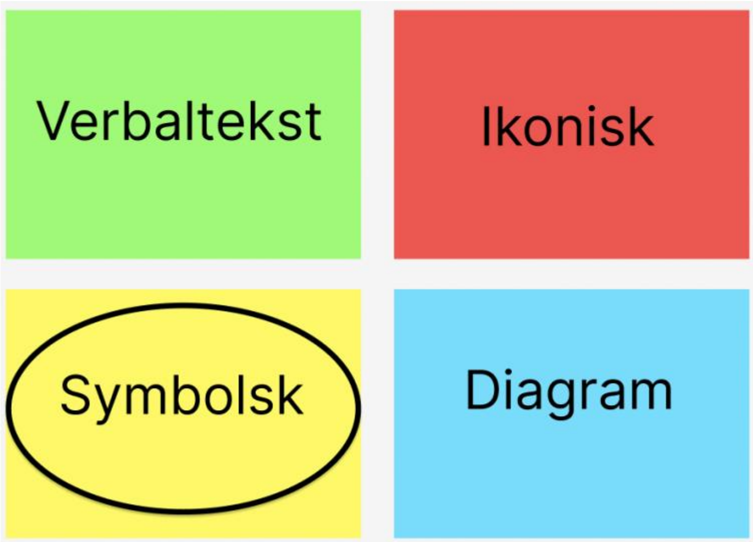
3.3.3 Behandling og konvertering

Videre skal vi se på Duval sine begreper «Treatment» og «Conversion», disse er da oversatt med ordene «Behandling» og «Konvertering».

Behandling:
Behandling er prosessen der oppgaven løses uten at en representasjonsform bytter register. Altså at vi befinner oss i samme representasjonsform for å komme frem til en løsning på oppgaven. Eksempel:

23 + 19 = ….

Eksempelet vil altså endre representasjonsform fra “23+19” til “42”, men ideen her er at dette er en representasjonsform som er innenfor det samme registeret. Mulighetene vi har til å løse disse oppgavene er begrenset til registeret som er brukt. Altså i eksempelet forventes det et tallsymbol som løsning. I analysen av en slik oppgave er det naturlig å si at dette er en oppgave der det er naturlig å bruke behandling, og behandlingen skjer innen det symbolske registeret.



Figur 3

Konvertering:

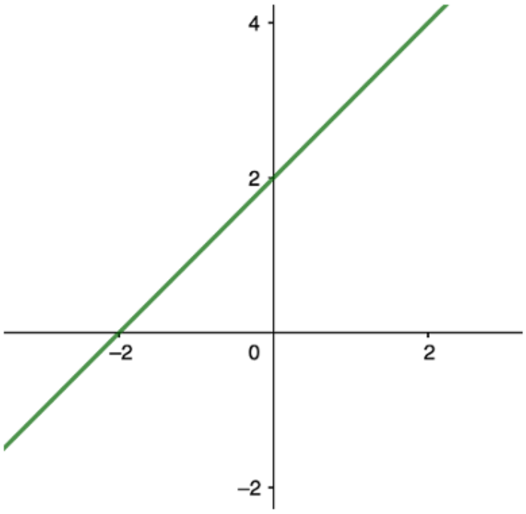
Konvertering er å transformere representasjonsformen til et annet register uten å endre de matematiske objektene (Duval, 2006, s. 112). Konvertering er en endring i form for representasjon og er mer kognitivt krevende enn behandling. Grunnen er at det krever å skille ut det matematiske objektet og overføre det inn i et nytt register, som ofte ikke har noe til felles med det gamle registeret (Duval, 2006, s. 112). Et eksempel på en oppgave som krever konvertering:

Oppgave:

Tegn funksjonen til funksjonsuttrykket:

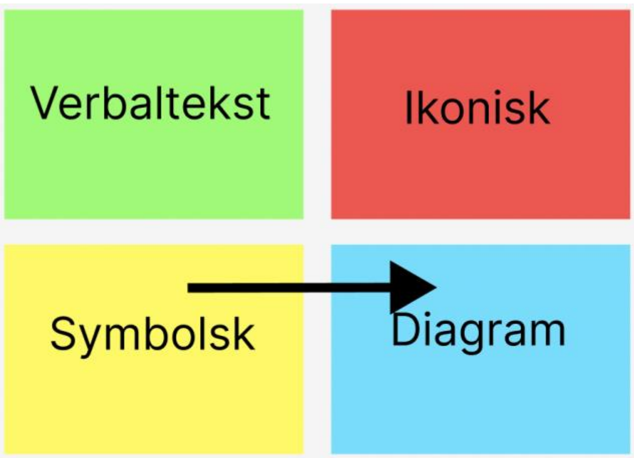
$$f(x) = x + 2$$

Løsning:



Figur 4

I dette eksempelet ser vi at oppgaven er innenfor et symbolsk system, og løsningen krever en graf som ikke ligner den tidligere representasjonen i det hele tatt. Det er altså en konvertering fra et register til et annet, spesifikt fra det vi har kalt "symbolsk" til det vi har kalt "diagram".



Figur 5

Ettersom Duval argumenterer for at konvertering er en mer kognitivt krevende prosess, er det naturlig for oss å skille mellom oppgaver der en naturlig måte å løse oppgaven krever behandling, og der en naturlig måte å løse oppgaven krever konvertering (Duval, 2006, s.114).

3.4 Utforskning

I vår oppgave ønsker vi, blant annet, å se på hvordan oppgaver i læreverkene forholder seg til utforskning. For å gjøre dette, må vi først klargjøre hva vi legger i begrepet “utforskning”, og hva vi ser etter i oppgavene. Videre vil vi presentere hvordan vi ønsker å undersøke utforskning i matematikkoppgavene som gis i læreverkene, for å gjøre dette benytter vi oss av teori knyttet til inquiry-based learning, IBL.

3.4.1 Utforskningsbegrepet

Ettersom vår oppgave er tilknyttet matematikkdidaktikk, preger dette også hvordan vi ser på begrepet "utforskning". Når vi i oppgaven benytter begrepet utforskning vil vi forholde oss til samme definisjon som den nåværende læreplanen gir for utforskning i en matematikkdidaktisk kontekst:

> *“Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse.Elevene skal legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn på løsningene”.*
> *(Utdanningsdirektoratet, 2020)*

Selv om vi undersøker oppgaver som også forholder seg til Kunnskapsløftet (2006), så er det nødvendig å ha det klart hva vi mener når vi diskuterer om en oppgave er utforskende eller ikke. Vårt analyseverktøy vil se mer spesifikt etter tydelige markører for inquiry-based learning, men i oppgaver vi tar et kvalitativt blikk på vil vi benytte denne definisjonen av utforskning. Grunnen til dette er at analyseverktøyet vi har utarbeidet kun fanger opp kategorier knyttet til IBL-teori, og i noen tilfeller vil oppgaver kunne være utforskende uten at de kategoriseres slik av vårt analyseverktøy. Dette blir da en kvalitativ vurdering der vi må se på oppgaven i sin helhet og forholde oss til denne gitte definisjonen av utforskning.

3.4.2 Inquiry-Based learning

For vår oppgave har vi valgt å se på oppgavenes operasjonalisering av utforskning ved å se på hvordan oppgavene legger til rette for inquiry-based learning. Inquiry Based-learning, IBL, refererer til en tilnærming til undervisning der studentene skal benytte arbeidsmetoder som matematikere og forskere benytter i deres arbeidshverdag. Det er en induktiv tilnærming til et problem slik at elevene undersøker og erfarer før de generaliserer og teoretiserer hva de har funnet ut (Harlen OBE, 2018).Tafoya et. Al (1980) er sentral på dette feltet, og vårt teoretiske grunnlag for inquiry-based learning tar utgangspunkt i denne artikkelen. Selv om artikkelen er fra 1980 er den relevant på feltet idag. «Exploring the Interplay between Conceptualizing and Realizing Inquiry—The Case of One Mathematics Teacher's Trajectory» er en Norsk kvalitativ studie fra 2023, som ser nærmere på en lærers refleksjoner og hvordan refleksjonene utvikles da læreren får opplæring i en mer inquery basert tilnærming til undervisning (Bråtlien et al., 2023). En annen artikkel fra 2022, «Working with Inquiry Activities to Encourage Creative Thinking», ser på hvordan elever danner konklusjoner på bakgrunn av funn de har gjort (Harrison, 2022). Begge disse artiklene benytter artikkelen Tafoya et. al (1980) som teoretisk grunnlag, i ulik grad.

Optimalt sett, kommer temaene for IBL arbeidet fra studentenes egne aktiviteter, spørsmål eller nysgjerrighet. Dette refereres til som "*Genuin Inquiry*", og ideen er at da vil dette være et tema elevene er genuint opptatt av (Le Fevre et al., 2015). Savery (2006) trekker også frem viktigheten av dette som en ferdighet som tilegnes gjennom IBL, nettopp å identifisere problemer og finne parameterne som kan føre til en løsning (s. 13). Likevel er det slik at i praksis så skjer det meste av IBL undervisning gjennom at læreren tilbyr utfordrende oppgaver som er relevante og meningsfulle for elevene. Harlen and Qualter (2018) legger vekt på at oppgavene burde være lette å komme i gang med, i tillegg til å ha mulighet for dypere utforskning, "low floor, high ceiling". Viktige komponenter innen en IBL-sekvens er også at det tar lengre tid å gjennomføre, men også at oppgavene er relatert til verden utenfor klasserommet (Vos, 2020). I selve undervisningsøktene er det viktig at elevene får tilnærme seg oppgavene uten at læreren skal ha for mye kontroll (Savery, 2006). Elevene skal lære å jobbe selvgående og sammen med andre med fokus på diskusjon og gi rom for at elevene får brukt sine forskjellige ideer, strategier og spørsmål. Avslutningsvis er det viktig at læreren holder av god til å utforske de forskjellige ideene elevene har kommet opp med. Det er essensielt at de forskjellige konseptene og prinsippene som har blitt utforsket diskuteres og gjennomgås i plenum avslutningsvis i en IBL-sekvens (Savery, 2006).

Tafoya et. al (1980) presenterer et ønske om et verktøy, for å gjennom en større grad av objektivitet kunne analysere lærerressurser og deres grad av inquiry-based learning. Deres definisjon av inquiry ble hentet fra *National Science Teaching Association* “NSTA”.

Kriteriene for inquiry i artikkelen dreide seg om hvordan lærerressursene forholdt seg til følgende punkter:

> *1. is devoid of authoritarian answers to science questions;*
> *2. provides empirical verification by students of knowledge claims made in the curricular materials;*
> *3. involves active student investigation with diverse materials in a variety of instructional settings;*
> *4. includes student participation in all phases of knowledge generation at their cognitive level;*
> *5. involves the complete inquiry process—assuming, observing, inferring, hypothesizing, testing and revising ideas and concepts on the basis of new information. (Tafoya et. al, 1980, s.2)*

For å sjekke om lærerressursen møtte inquiry definert slik, gikk de frem ved å analysere læringsressurser gjennom å velge ut tilfeldig valgte setninger i disse. Videre ble disse analysert og kategorisert i forhold til deres funksjon i læreverket, og i forhold til hvordan lærerressursen stiller seg i forhold til påstander eller erklæring om hva som er fakta. Det presenteres også ulike måter å skille aktiviteter fra hverandre, med tanke på elevers egen mulighet til å påvirke hva som undersøkes. Det blir gitt tre kategorier, *confirmation*, *Structured inquiry* og *Guided inquiry*. Primas presenterer også en 4. kategori, som ikke

defineres tydelig i artikkelen fra 1980, men er naturlig å ha med i tilknytning til IBL. Vi tar derfor utgangspunkt i følgende tabell og deres kategorisering:
(Primas, 2020)

Ettersom vi ønsker vi kun analyserer læreverket, ønsker vi ikke å gjøre enkelte endringer i disse kategoriene, slik at det passer til hva vi faktisk gjør.

3.4.3 Utforskning - Samsvar mellom LK20 og IBL-teori

Det er flere elementer fra hvordan LK20 redegjør for hvordan det skal arbeides med

Tafoya et al. (1980) classification of inquiry-based lessons			
Open	**Guided**	**Structured**	**Confirmation exercises**
The students decide both on the question to investigate and the method they use to get to an answer	The teacher provides the question but the students decide on the text method in which to answer it	Teacher provides both the question and the method, but not the outcome.	Teacher tells the students what the solution to the question is, and then gives instructions on how to conduct an experiment or some practical work to confirm the answer.

Tabell 3: Hentet fra Primas (2011).

utforskning, som samsvarer med teori knyttet til Inquiry-based learning. Et viktig punkt er blant annet ved viktigheten av samarbeid, gjennom at elevene får brukt hverandre til å diskutere og bruke dette til å komme med nye ideer til hvordan de skal løse en gitt oppgave.. Gjennom at elevene skal utforske og skape på forskjellige måter samsvarer dette med IBL teori ved at det vektlegges at elevene skal få arbeide på en naturfaglig, induktiv måte. Slik blir arbeid med IBL en måte å berike elevenes verktøykasse når det kommer til strategier å angripe oppgaver på. Når det gjelder de mer fagspesifikke målene samsvarer dette med IBL gjennom at lærerens fokus i en avslutning må være rettet mot de forskjellige fremgangsmåtene og løsningsstrategier i større grad enn rettet mot løsningene.

3.4.4 Utforskning - Samsvar mellom LK06 og IBL-teori

Kunnskapsløftets fokus på å gi rom for skaperglede og utforskning gjennom varierte arbeidsoppgaver stemmer overens med IBL-teori ettersom her vektlegges det at elevene skal få utfordrende oppgaver som er relevante og meningsfulle. Innen IB- teori blir oppgaver ideelt sett meningsfulle ved at de kommer fra elevens selv, altså "genuin inquery". Dette samsvarer med LK06 sitt fokus på å utvikle elevenes evne til å undre seg og stille nye spørsmål. IBL tar utgangspunkt i naturvitenskapelig forskning, og LK06 sitt forskningsfokus er svært i tråd med dette gjennom utviklingen av evnene til å stille spørsmål, finne forklaringer, og å bevise at forklaringene er gyldige. Midlertidig er det interessant at kompetansemålene innenfor geometri er som følger:

• analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer og beskrive fysiske gjenstander innenfor teknologi og dagligliv ved hjelp av geometriske begreper
• bygge tredimensjonale modeller og tegne perspektiv med ett forsvinningspunkt
• beskrive og gjennomføre speiling, rotasjon og parallellforskyvning
• bruke koordinater til å beskrive plassering og bevegelse i et koordinatsystem på papiret og digitalt
• bruke koordinater til å beregne avstander parallelt med aksene i et koordinatsystem
(Utdanningsdirektoratet, 2015a)

Kompetansemålene inneholder altså ikke begrepet utforskning, og virker i liten grad til å ha fokus på utforskning.

3.4.5 Utforskningsgrad

For at vi effektivt skal analysere oppgaver ønsker vi derfor å gjøre små endringer i disse beskrivelsene for å få det til å passe det vi ønsker å gjøre. Ettersom vi ønsker ikke å se på lærerens faktiske utøvelse, men heller på oppgavers potensial i lærebøker. Vår bearbeidelse av denne oversikten danner grunnlaget for vår bruk av analyseverktøyet, og vi benytter derfor disse samme kategoriene «open», «Guided», «Structured» og «confirmation exercises». De plasseres som en oppgaves utforskningsgrad ut fra om de passer beskrivelsene gitt i tabellen nedenfor.

Open	Guided	Structured	Confirmation exercises
Elevene har mulighet til å velge både spørsmålet som skal utforskes, og måten de ønsker å presentere løsningen.	Oppgaven gir spørsmålet, men elevene får mulighet til å velge hvordan løsningen blir representert.	Oppgaven gir både spørsmålet og forventet løsningsmetode, uten å gi løsningen.	Oppgaven viser løsningen på et spørsmål, og gir instruksjoner til et eksperiment eller annen praktisk rettet metode for å bekrefte løsningen.

3.3.6 Elevers valg

Vi har altså valgt å se på en egenlaget kategori kalt "elevers valg". Ideen er at vi er interessert i hvor mange muligheter elevene har i forhold til representasjon av løsning på oppgaven. Denne kategorien er på den måten i krysningspunktet mellom utforskning, og representasjoner. Utforskning er derfor knyttet sammen med representasjoner ettersom man kan argumentere for at dersom elevene skal få utviklet sine skapende evner som læreplanen nevner, er det naturlig å arbeide og utforske et mangfold av måter å representere løsninger på. «Elevers valg» blir altså markert med et tall fra en til fire. Vi har valgt følgende kriterier:

1	Hvordan elevene skal representere løsningen på oppgaven er allerede bestemt, og det er derfor ingen valgmuligheter.
2	Elevene har mulighet til å velge mellom to ulike måter å representere løsningen på oppgaven.
3	Elevene har mulighet til å velge mellom tre ulike måter å representere løsningen på oppgaven.
4	Elevene har mulighet til å velge mellom fire eller flere måter å representere løsningen på oppgaven.

3.5 Kontekst

I våre analyser av utforskning og representasjoner knyttet til geometri i de ulike lærebøkene har vi lagt vekt på kontekstens betydning. Konteksten, som ofte er et virkelighetsnært problem som kan løses ved hjelp av konkreter, setter andre betingelser for bruken av representasjoner og påvirker hvordan representasjonsoverganger utføres av elevene. Disse kontekstene kan påvirke utforskningsgraden betydelig, ettersom rammene for utforskningen endres når elevene selv henter inn data fra virkeligheten sammenlignet med forelagt, fiktivt datamateriale. Ifølge Tafoyas (1980) modell, som vi benytter til å operasjonalisere utforskningsgraden, påvirker dette primært "valg av metoder" og "ulike svar". I det følgende vil vi derfor redegjøre for dette ved hjelp av Skovsmose (2001, 2023) hvor konteksten deler i tre hovedkategorier.

Skovsmose (2023) fremmer ideen om kritisk matematikkutdanning som en dynamisk og aktiv prosess hvor matematisk kunnskap ikke bare oppfattes som objektiv og verdinøytral, men også som en potensiell katalysator for sosial endring. Hans arbeid inviterer oss til å se matematikkopplæring, ikke bare som en akademisk disiplin, men som en del av et større sosialt og politisk miljø hvor læringsprosesser kan og bør utfordre sosial urettferdighet. Skovsmose (2023) identifiserer matematikkopplæring som et felt hvor bekymringer og håp kan utfolde seg. Bekymringer omhandler ikke bare det som skjer i klasserommet, men også studentenes fremtidige muligheter i livet og de bredere sosiale konsekvensene av matematikkens anvendelse i samfunnet. Han utfordrer dermed det tradisjonelle synet på matematikkens rolle i utdanning og samfunn.

I vår analyse av matematikkoppgavene fra Multi 6A, låner vi Skovsmoses begreper om undersøkelseslandskap som et rammeverk for å kategorisere og diskutere oppgavene. Disse begrepene hjelper oss å klassifisere oppgaver fra “ren matematikk” til “virkelighetsnære problemstillinger”. Vi differensierer mellom oppgaver som fokuserer på abstrakte matematiske prinsipper, de som knytter matematikk til semi-reelle kontekster, og de som gir elever anledning til å utforske matematikk gjennom reelle situasjoner og problemstillinger.

Det er verdt å merke seg at vi i vår analyse ikke anvender hele bredden av Skovsmoses teori. Mens Skovsmose (2023) utdyper en kritisk matematikkutdanning med et sterkt fokus på sosial rettferdighet og politisk aktivisme, fokuserer vår studie primært på de metodologiske begrepene som er relevante for å analysere og sammenligne matematikkoppgavene i vår kontekst. Vi er særlig opptatt av hvordan oppgavene inviterer til matematisk tenkning og forståelse, og vi tar i bruk Skovsmoses kategorisering som et verktøy for å belyse dette. Dette valget gjenspeiler vår intensjon om å holde vår analyse spisset og relevant for vårt mål, som er å identifisere potensialet i matematikkoppgavene. Samtidig erkjenner vi den rike diskursen Skovsmose tilbyr innenfor kritisk pedagogikk og de verdifulle innsiktene dette kan gi til feltet. Derfor, mens vi anerkjenner dybden i Skovsmoses arbeid, vil vår anvendelse av hans teori være selektiv, med fokus på de aspektene som direkte informerer vårt forskningsspørsmål.

3.6 Potensiale

I vår oppgave ser vi som sagt på matematikkoppgaver i disse to utvalgte lærebøkene fra Gyldendal som følger henholdsvis Kunnskapsløftet fra 2006, og den reviderte versjonen av Kunnskapsløftet, Fagfornyelsen, fra 2020. Ideen er at gjennom å se hver enkelt oppgave i lys av deres bruk av representasjoner, muligheter for behandling og konvertering av representasjoner, muligheter for utforskning, og deres kontekstualisering, vil dette sammen kunne lage et, til en hvis grad, helhetlig bilde. Dette helhetlige bildet kaller vi potensial. Ideen er at dette potensialet gir en pekepinn på hvilke muligheter og utfordringer matematikkoppgavene vi undersøker har som verktøy for matematikkdidaktisk undervisning i skolen. Potensialet vi ser etter er begrunnet i teori, men kommer frem i flere av læreplanens formuleringer knyttet til matematikkdidaktikk:

> *"Utforskning i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn på løsningene. (Utdanningsdirektoratet, 2020)"*

Her poengteres viktigheten av å finne sammenhenger mellom ulike representasjoner og hvordan å utforske disse kan bidra til å forstå matematikk, med andre ord altså klare å skille de matematiske objektene fra deres representasjon (Duval, 2006). Fremgangsmåtene og strategiene er det sentrale her, og derfor er ulike former for behandling og konvertering av matematiske objekter sentralt også i læreplanen.

> *"Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på…Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020)."*

Elevene skal kunne oversette, konvertere, mellom representasjonsformer og også identifisere sammenhenger og utfordringer i disse konverteringene. De må også få mulighet til å begrunne valg av representasjonsform, og derfor være klar over muligheter og utfordringer innen ulike registre. For å få begrunnet valg av representasjonsform er det sentralt at elevene møter oppgaver der de får mulighet til å velge representasjonsform ettersom dette handler om nettopp forståelsen av mulighetene forskjellige registre har tilgjengelig.

> *"Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget.*
> *(Utdanningsdirektoratet, 2020)"*

For at elevene skal kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen , er det nødvendig at elevene kan anvende matematisk kunnskap til kunnskap i en reell verden de skal ut i (Utdanningsdirektoratet, 2020). Ideen er gjennom å arbeide med ulike kontekster vil dette kunne hjelpe elevene til å oppdage og utforske nettopp disse sammenhengene og dermed også overganger mellom representasjoner, og i ulike kontekster. Videre i oppgaven vil derfor ordet potensial dreie seg om i hvilken grad en oppgave i sin helhet vektlegger bruk av representasjoner, utforskning og kontekst, og hvilke muligheter og utfordringer dette gir til teoretisk forankret matematikkdidaktisk undervisning.

4 METODE

I dette kapittelet tar vi for oss det metodiske oppsettet som ligger til grunn for vår studie. Vi vil beskrive prosjektets design, utvalg og metoder, og gi en grundig begrunnelse for våre valg. Vi vil også diskutere hvordan vi har jobbet for å sikre gyldighet og troverdighet i forskningsarbeidet og adressere eventuelle utfordringer knyttet til disse kvalitetsdimensjonene. Avslutningsvis vil vi detaljert beskrive analyseprosessen, som er essensiell for å forstå og fortolke datamaterialet, og som danner grunnlaget for våre funn og konklusjoner.

4.1 Forskningsdesign

Denne masteroppgaven anvender en kvalitativ forskningsmetode, med kvantitative innslag, gjennom dokumentanalyse for å undersøke potensialet i matematikkoppgaver fra Gyldendahls læreverk Multi 6A , både 2. og 3. utgave, som henholdsvis følger LK06 og LK20. Ved å sammenligne disse to versjonene, intensiverer vi vår forståelse av hvordan endringer i læreplanen påvirker representasjoner, utforskningsgrad, og kontekst i matematikkoppgaver, spesifikt innen geometri for 6. trinn.

4.1.1 Dokumentanalyse

Metoden i denne masteroppgaven tar i bruk dokumentanalyse innenfor en kvalitativ og kvalitativ forskningstilnærming som eneste metoder for å utforske det inneboende potensialet i matematikkoppgaver, med utelukkende fokus på oppgaver fra Gyldendal. Gjennom en grundig analyse av didaktiske og pedagogiske prinsipper som ligger til grunn for utformingen av disse oppgavene, sikter studien mot å avdekke hvordan de kan optimeres for å fremme dyptgående matematisk forståelse og læring blant elever. Basert på Malteruds (2001) definisjon, støtter kvalitativ forskning som "systematisk innsamling, organisering og tolkning av tekstbasert materiale" opp studiens mål ved å tillate en dyptgående forståelse av matematikkoppgaver som tekstlige og visuelle artefakter. Dette er essensielt for å tolke de komplekse og nyanserte pedagogiske intensjonene bak disse oppgavene.

Bowen (2009) understreker viktigheten av dokumentanalyse som en metode for å gjennomføre en slik systematisk evaluering. I dette prosjektet vil dokumentanalysen tillate en kritisk gjennomgang av eksisterende matematikkoppgaver, læreplaner, og didaktisk litteratur for å identifisere, analysere og syntetisere aspekter ved oppgavene som kan fremme læring. Dokumenter anses som statiske data som gjør det mulig for forskeren å utforske bakgrunnen, intensjonene og kontekstene knyttet til matematikkoppgaver uten å forstyrre det naturlige miljøet hvor de finnes.

En nøkkelfaktor i denne forskningsprosessen vil være anvendelsen av kvalitative standarder som relevans, gyldighet og refleksivitet. Disse standardene sikrer at forskningen holder seg vitenskapelig og metodisk, samtidig som den er åpen for forskerens tolkning og forståelse (Malterud, 2001). For å oppnå økt gyldighet i studien vil triangulering benyttes som en strategi for å validere funn. Triangulering innebærer å kombinere forskjellige metoder og datakilder for å oppnå en dypere forståelse av forskningstemaet. Refleksivitet vil være et kritisk element i forskningsprosessen, der forskerens egne perspektiver og antagelser aktivt vurderes og integreres i analysen (Malterud, 2001). Triangulering, i vår oppgave, vil referere til bruken av flere analytiske perspektiver og teoretiske rammeverk for å tolke oppgavene. Dette kan omfatte og sammenligne funn med relevant litteratur, teorier om matematikkdidaktikk, og læreplanens mål, for å sikre en helhetlig forståelse av hvordan matematikkoppgaver kan utformes for å støtte elevers læring. Datainnsamlingen og -analysen vil følge en systematisk og gjennomtenkt prosedyre. Ved å identifisere og kategorisere ulike typer representasjoner, utforskningsgrader og kontekster som brukes i matematikkoppgavene, vil studien avdekke innsikt i oppgavenes pedagogiske potensiale og utfordringer.

4.1.2 Analysemetode

Analysen av matematikkoppgavene i denne masteroppgaven støtter seg på et til dels selvutviklet analyseverktøy, som har sine røtter i velgrunnlagte teoretiske rammeverk. Hver oppgave blir analysert i henhold til de ulike kategoriene i verktøyet.

Kategorisering av representasjoner: Først anvendes Duval (2006) for å klassifisere de ulike måtene matematikk presenteres på i oppgavene. Denne klassifiseringen spenner fra verbale tekster til ikoniske representasjoner, diagrammer og symboler, og gir et rammeverk for å forstå den visuelle og språklige kompleksiteten i oppgavene.

Behandling og konvertering: Videre analyseres det om oppgavene oppfordrer til eller krever at elever transformerer informasjon fra en representasjonsform til en annen. Dette trinnet tar for seg elevers evne til å forstå og manøvrere mellom forskjellige matematiske språk og hjelper til med å identifisere om oppgavene støtter utviklingen av denne viktige ferdigheten. Flere oppgaver vil inneholde både behandling og konvertering. Vi har da valgt å markere disse oppgavene med "konvertering", ettersom oppgaver som inneholder konvertering er mer kognitivt krevende for elevene.

Utforskningsgrad: Tafoya et al. (1980) inneholder en modell for utforskningsnivåer som benyttes for å vurdere graden av åpenhet i oppgavene. Kategorier som open, guided, structured og confirmation undersøkes for å bestemme hvorvidt og i hvilken grad elevene blir oppmuntret til å utforske matematiske konsepter og problemstillinger selvstendig.

Kontekst: Avslutningsvis analyseres konteksten oppgavene er satt i, ved å trekke på noen av Skovsmoses (2023) begreper. Dette trinnet ser på relevansen og realisme av de situasjoner og problemstillinger som elevene møter i oppgavene, og hvordan disse kan påvirke deres engasjement og læring.

4.2 Analyseprosess

Analyseprosessen er nøye tilrettelagt for å sikre en grundig og metodisk tilnærming til vurderingen av matematikkoppgavene. Denne prosessen inkluderer flere trinn for å sikre en omfattende forståelse av materialet og for å opprettholde analytisk presisjon.

I det første trinnet foretas en detaljert gjennomgang av samtlige oppgaver innenfor det aktuelle kapittelet i de respektive lærebøkene. Hver oppgave blir systematisk kodet og analysert i henhold til de forhåndsdefinerte kriteriene som er utviklet basert på teoretiske rammeverk innen matematikkdidaktikken. De kriteriene som er valgt reflekterer viktige pedagogiske aspekter som representasjoner, utforskningsgrad, og kontekstualisering som tidligere er identifisert som sentrale for elevers læring i matematikk. Deretter blir hver oppgave vurdert individuelt for å identifisere dens unike karakteristika og om oppgaven skiller seg særs ut på noen måte. Denne individuelle vurderingen lar oss kartlegge bredden og dybden av de pedagogiske tilbudene som er tilgjengelige i læreboken og for å oppdage eventuelle mønstre eller avvik i tilnærmingene som er brukt.

For å opprettholde en objektiv standard i analysen, blir samme prosess gjentatt av to forskere uavhengig av hverandre. Dette trinnet sikrer inter-rater reliabilitet og bidrar til å minimere subjektivitet i fortolkningen av oppgavene. Vi sammenligner deretter våre analyser og diskuterer eventuelle uenigheter for å komme frem til en konsensus. Denne dialogen og forhandlingen mellom oss gir rom for refleksjon og revidering av forståelsen basert på kollegial tilbakemelding. Resultatene av denne iterative prosessen er en sammenstilling av funn som reflekterer en balansert og gjennomtenkt evaluering av de undersøkte oppgavene. Ved å dokumentere og diskutere hvert trinn i prosessen, styrkes studiens transparens og tilliten til de trekninger som blir gjort. Ved å fremheve analyseprosessen på denne måten anerkjenner vi viktigheten av metodisk strenghet og gir leseren innsikt i de beslutningsprosessene som ligger bak de konklusjonene og anbefalingene som studien frembringer.

4.3 Begrensninger

Denne masteroppgaven er avgrenset av flere metodologiske og kontekstuelle begrensninger som påvirker både omfanget av studien og generaliserbarheten av dens resultater.

For det første er analysen begrenset til matematikkoppgaver fra ett enkelt forlag og læreverk, Gyldendals Multi 6A, i to forskjellige utgaver. Dette valget gir en dypere forståelse av endringene i pedagogisk tilnærming mellom to læreplaner, men det begrenser også perspektivet til én utgivers tilnærming til matematikkundervisning. Denne innfallsvinkelen utelukker en bredere komparativ analyse med andre forlag, som kunne ha bidratt til en mer nyansert forståelse av hvordan forskjellige pedagogiske tradisjoner og tilnærminger adresserer læreplanenes krav. En annen betydelig begrensning er utelukkelsen av digitale læringsressurser. Mens den digitale dimensjonen av læremidler blir stadig mer fremtredende i dagens utdanningssystem, er disse ressursene utelatt i denne studien. Beslutningen om å fokusere på trykte lærebøker er tatt med den begrunnelse at nettressurser ofte kan være en gjengivelse av oppgavene i boka. Vi må imidlertid også anerkjenne at forskjellene mellom de digitale ressursene for 2. utgaven og 3. utgaven kan være betydelige og kunne ha tilført viktig innsikt om utviklingen av digitale pedagogiske verktøy over tid.

Ytterligere begrensninger skyldes studiens metodiske tilnærming. Selv om dokumentanalysen muliggjør en detaljert gjennomgang av de valgte oppgavene, kan det hende at denne tilnærmingen ikke fullt ut fanger opp lærernes og elevenes faktiske bruk og opplevelse av oppgavene. Lærerens og elevenes interaksjoner med læreboken og deres oppfatninger av oppgavenes nytte og relevans kunne ha gitt verdifulle tilleggsperspektiver, men er utenfor denne studiens fokus.

4.4 Reliabilitet og Validitet

For å sikre og styrke reliabiliteten i studien, er det implementert flere tiltak. Blant disse er bruk av et teoretisk forankret analyseverktøy som er tydelig definert og beskrevet tidligere i metodedelen. Dette verktøyet er utviklet med støtte i etablerte pedagogiske teorier og forskningslitteratur, noe som underbygger analyseprosessen med en solid faglig basis.

Inter-rater reliabilitet, en indikator på konsistensen i data tolkning mellom ulike forskere, er ivaretatt ved at flere forskere uavhengig vurderer de samme oppgavene og deretter sammenligner og diskuterer sine vurderinger for å komme til enighet. Dette samarbeidet bidrar til å minimere personlig bias og styrker tilliten til de konklusjonene som trekkes. Når det gjelder validiteten, det vil si troverdigheten og relevansen av forskningsfunnene, er denne forsterket ved en kritisk gjennomgang av de teoretiske rammene som brukes for både å veilede datainnsamlingen og for å fortolke resultatene. En systematisk begrunnelse for valg av teoretiske perspektiver sikrer at studien er forankret i anerkjent og aktuell pedagogisk forskning.

I tillegg er en åpen og transparent diskusjon om studiens begrensninger innlemmet i forskningsprosessen. Ved å adressere mulige kilder til bias og begrensningene i forskningsdesignet, blir validiteten av studien ytterligere styrket, da dette viser en bevissthet om og en vilje til å balansere forskningens styrker og svakheter. Dette er viktig for å gi leseren et klart bilde av studiens rammer og for å informere om hvorvidt og hvordan funnene kan generaliseres eller overføres til lignende kontekster.

4.5 Etikk

Når vi foretar en grundig gjennomgang og analyse av læreverket, er det med en dyp bevissthet om de etiske standardene som må opprettholdes. Vi forplikter oss til å følge etiske retningslinjer for å sikre en upartisk og rettferdig behandling av innholdet, og vår tilnærming til dataene er drevet av et mål om å belyse og forstå pedagogisk innhold på en objektiv måte. Dette betyr at diskusjonen av oppgavene nøye vil holde seg til objektive kriterier som er forankret i etablert teori, og vi tar sikte på å unngå enhver form for skjevhet eller subjektivitet som kan påvirke tolkningen av oppgavene. Vi respekterer opphavsretten til læreverkene vi analyserer, noe som betyr at vi ikke bare må bruke materialet på en måte som er rettferdig og lovlig, men også at vi gjenspeiler innholdet på en måte som er tro mot forfatternes opprinnelige hensikt. Dette gjør vi ved å se på læreverket med en helhetlig tilnærming. Vi inkluderer både selve læreboken og lærerveiledningen for å sikre at vi ser oppgavene i deres fulle sammenheng.

I respekt for opphavsretten av de analyserte lærebøkene sikrer vi at vår studie gjengir funn på en balansert og rettferdig måte. Vi har ikke benyttet oss av personopplysninger eller sensitive data, og dermed reduserer vi risikoen for mulige etiske konflikter. Vår forskning er preget av et gjennomgående ønske om å bidra til den pedagogiske forskningen med integritet, og å formidle våre funn uten å kompromittere de etiske standardene som er fundamentale for vitenskapelig arbeid.

Ved å fremheve disse prinsippene håper vi at det er med på å sikre at vår undersøkelse av læreverket både er rettferdig og gjenspeiler en omfattende forståelse av de pedagogiske målene. Dette understreker vår forpliktelse til å bidra konstruktivt til feltet av matematikkdidaktikk, og å opprettholde et høyt nivå av etisk ansvarlighet gjennom hele forskningsprosessen.

5 RESULTAT

Målet med dette kapittelet er å presentere våre funn når det kommer til potensial, definert i teoridelen, i matematikkoppgavene. Innledningsvis presenteres kvantitative data for å gi en oversikt over oppgavene. Videre ser vi nærmere på oppgaver som er typiske for læreverkene, før vi trekker frem oppgaver med særlig potensial. Det vil trekkes koblinger mot betydninger for de typiske oppgavene, og for oppgavene med særlig potensial. I resultatdelen vil vi bruke «LK20» og «LK06» som markører for å referere til læreverkene som følger de respektive læreplanene. Diagrammer som er markert med «LK20» refererer da til oppgaver knyttet til læreverket Multi 6A, 3. utgave. Diagrammer markert med «LK06» viser til oppgaver knyttet til læreverket Multi 6A, 2. utgave.

5. 1 Kvantitative resultater

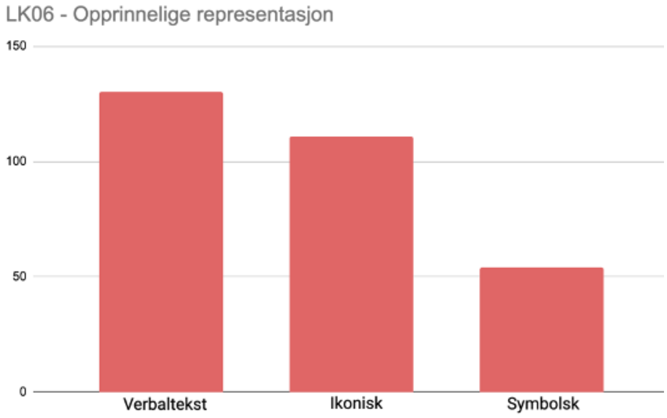
I framlegget av våre resultater velger vi å legge dem frem i samme rekkefølge som ved presentasjonen av vårt analyseverktøy. Henholdsvis representasjoner, utforskning og deretter kontekst. Selv om vi undersøker det vi kaller potensialet i oppgavene, finner vi det mest hensiktsmessig å presentere våre funn i separate deler.

5. 1. 1 Representasjoner

Opprinnelige representasjoner i oppgavene

LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:

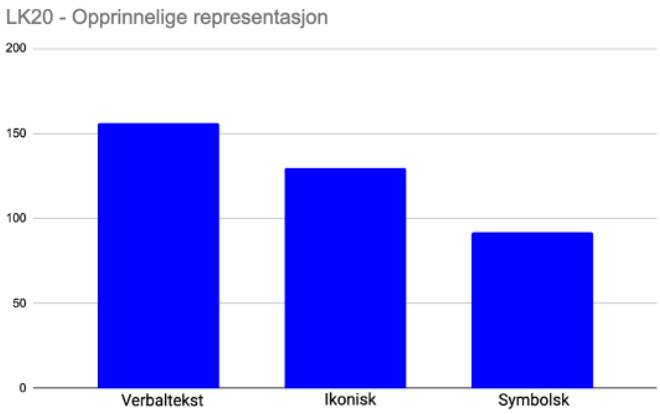
Registre som er brukt i presentasjonen av oppgavene til elevene er følgende for LK06. Det var totalt 130 oppgaver, der samtlige av oppgavene benyttet verbaltekst. 111 av oppgavene benyttet også en form for ikonisk representasjon (85,4%), og 54 av oppgavene benyttet også symboler i oppgaven, det tilsvarer 41,5% av oppgavene.



Figur 6

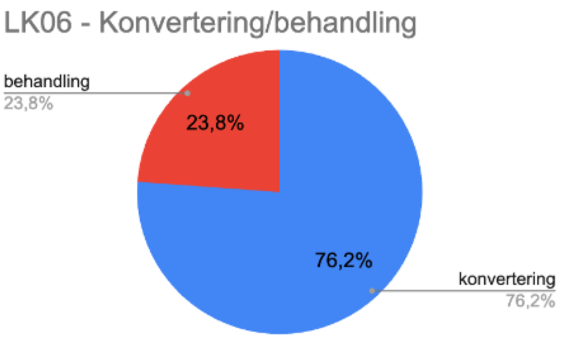
LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021

For læreverket som følger LK20 inneholdt også alle de 156 oppgavene en form for verbaltekst. I tillegg inneholdt 130 (83,3%) av oppgavene en form for ikonisk representasjon til å presentere oppgaven, og 92 av oppgavene benyttet også symboler. Dette tilsvarer 59% av oppgavene.

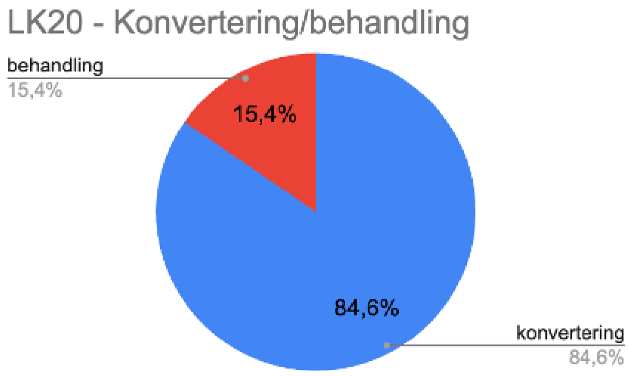


Figur 7

Konvertering og behandling



Figur 8



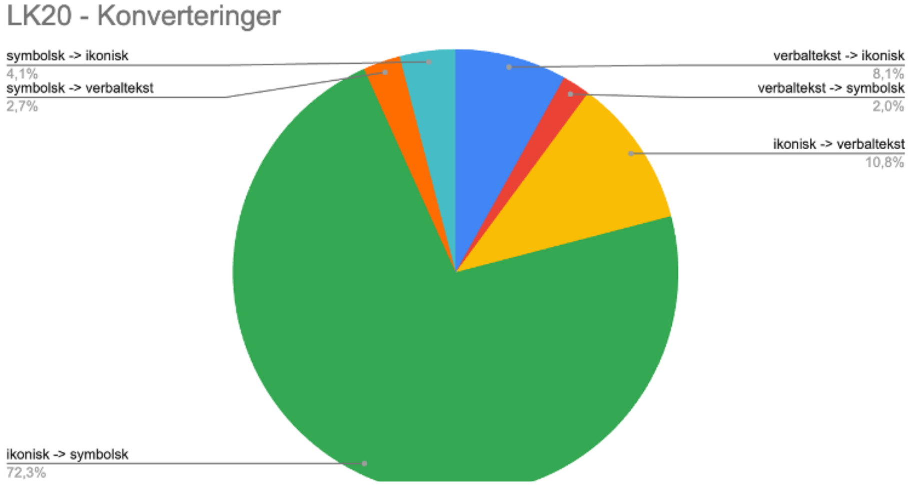
Figur 9

Våre funn viser at 84,6% av oppgavene i læreverket fra 2021 inneholder minst en form for konvertering, til forskjell fra 76,2% av oppgavene i læreverket fra 2014.

En nærmere titt på konvertering

<u>**LK20** - Multi 6A, 3. utgave, 2020</u>

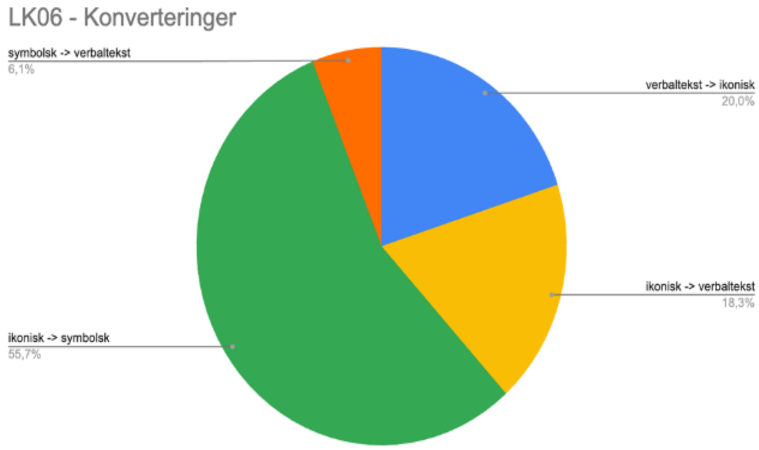
Dette diagrammet viser fordelingen av de ulike typer konverteringene i oppgavene knyttet til læreverket som følger LK20. Det var tydelig at den mest typiske konverteringen var fra det ikoniske registeret til det symbolske registeret. Allikevel var alle former for konverteringer til stede, med unntak av registeret som omhandler grafer og diagrammer.



Figur 10

LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:

For oppgaver fra læreverket knyttet til LK06 ser vi at det var konverteringen fra det ikoniske registeret til det symbolske registeret som dominerte, samtidig som det ikke var noen tilfeller av konverteringen fra verbaltekst til symbolsk, eller fra symbolsk til ikonisk. Allikevel viser konverteringene i dette læreverket en mer jevn fordeling ved at både «ikonisk til verbaltekst» og «verbaltekst til ikonisk» er representert i større grad enn det de er i læreverket som følger LK20.



Figur 11

5. 1. 2 Utforskning

For våre kriterier for utforskning opplevde vi svært lite spredning i datamateriale. Våre funn peker på at begge læreverk er overveldende dominerte av svært lite valgfrihet når det kommer til bruk av representasjoner. Disse blir representert i tabeller, da diagrammer blir meningsløst ved såpass lite spredning.

Utforskningsgrad

LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021

Kategorier	Antall oppgaver
Confirmation exercises	0
Structured	155
Guided	1
Open	0

LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:

Kategorier	Antall oppgaver
Confirmation exercises	5
Structured	123
Guided	1
Open	1

Vi ser at det er noe mer spredning i kategoriene for læreverket som følger LK06, samtidig ser vi at de alle oppgavene som havnet under confirmation exerecises, er knyttet til perspektivtegning. Perspektivtegning er et kompetansemål for LK06, men det er ikke et mål i matematikk for 6. trinn i LK20.

Elevers valg

Når det kommer til kategoriene vi satt for elevers valg opplevde vi igjen lite spredning i analysen:

LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021

Elevers valg av representasjon:	Antall oppgaver
1	154
2	2
3	0
4	0

LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:

Elevers valg av representasjon:	Antall oppgaver
1	127
2	2
3	0
4	1

Oppgavene ber kontinuerlig om løsning innenfor et register. Samtidig ser vi at læreverket som følger LK06 hadde et unntak. Det er viktig å presisere at oppgaver kan være utforskende gjennom ulike måter å komme frem til riktig løsning, samtidig er det vi ser på her knyttet til hvordan elevene har mulighet til å representere løsninger.

5. 1. 3 Kontekst

Når det gjelder konteksten i oppgavene fikk det følgende fordeling:

LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021

Kontekst	Antall oppgaver	Prosentandel av oppgavene
Referanser til ren matematikk	105	67,3%
Semi-referanser til «virkeligheten»	51	32,7%
Reelle referanser	0	0%

LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014

Kontekst	Antall oppgaver	Prosentandel av oppgavene
Referanser til ren matematikk	85	65,4%
Semi-referanser til «virkeligheten»	44	33,8%
Reelle referanser	1	0,8%

Vi ser altså her at det er svært likt mellom de to læreverkene, og at det referanser til ren matematikk som dominerer med omtrent 2/3 av oppgavene. Det er kun en reell referanse, og dette er en praktisk oppgave som krever forskjellig utstyr. Denne oppgaven trekkes frem i den kvalitative delen av resultatet.

5. 2 Kvalitative resultater:

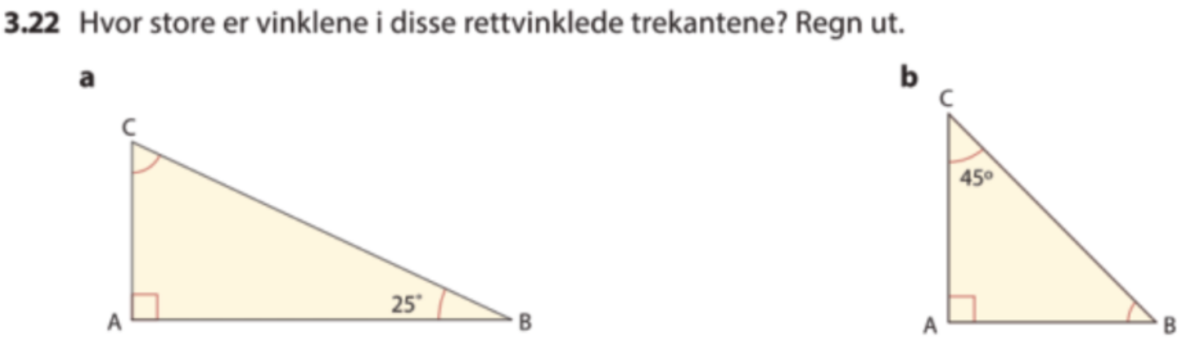
Gjennom vår kvalitative analyse av oppgavene fant vi flere oppgaver som var typiske, og flere oppgaver som skilte ekstra ut. I dette delkapittelet presenterer vi disse oppgavene som et resultat av vår analyse. I denne delen tar vi og presenterer hvordan vi har analysert disse oppgavene slik at dette kommer tydelig frem. Deretter ser vi disse oppgavene i lys av vår teori.

5.2.1 Representative oppgaver

For å finne oppgaver som var representative for mange så vi på de kvantitative resultatene vi fant, og trakk frem alle oppgavene som hadde de mest "vanlige" resultatene fra hver kolonne i analyseskjemaet. Vi valgte også frem noen oppgaver som hadde noe avvik, men samtidig er representative for flere av oppgavene i læreverkene.

Representativ oppgave 1:

Oppgave 3.22 Fra LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021:



Figur 12: Hentet fra Gyldendals Multi 6A, 3.utgaven fra 2021

Analyseskjemaet for oppgave 3.22:

3.22

Representasjoner - Duval		**Utforskning**		**Kontekst - Skovsmose**	
Opprinnelig representasjon av oppgaven	**Verbaltekst, Ikonisk, symbolsk**	Utforskningsgrad -**Lafoya**	**Structured**	Kontekst	Ren matematikk
Behandling/ Konvertering	**Konvertering** Fra **ikonisk** til **symbolsk**	Elevers valg (1-4)	**1**		

Tabell 4

Opprinnelige representasjon av oppgaven:

Verbaltekst - ettersom oppgavens spørsmål inneholder verbaltekst.

Ikonisk - ettersom det er brukt en ikonisk representasjon for å vise illustrasjonene av rettvinklede trekanter.

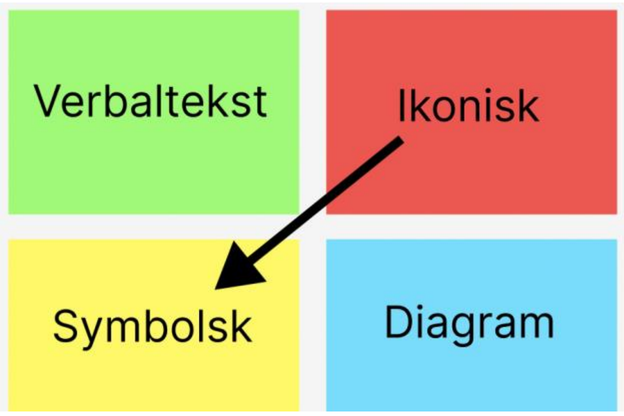
Symbolsk - ettersom vinklene 25° og 45° representeres ved hjelp av tallsymboler.

Konvertering/behandling:

Konvertering:

For denne oppgaven har vi satt konvertering, fra ikonisk til symbolsk.

Grunnen til dette er at den matematiske kjernen i oppgaven er at eleven må studere den ikoniske representasjonen for å oppdage at dette er en trekant, og at den inneholder en rett vinkel.



Figur 13

Deretter må eleven konvertere disse matematiske objektene til symbolsk for, slik at eleven kan benytte mulighetene for behandling som vi finner innen det symbolske registeret. Vinkelsummen til en trekant tilsvarer 180°, og en rett vinkel tilsvarer 90°. Ved hjelp av konvertering da vil eleven bevege seg over til det symbolske registeret og deretter foreta behandlingen:

$$180°-25°-90°=65°$$

Utforskningsgrad:
Structured - Oppgavens spørsmål og fremgangsmåte er satt, eleven er på utkikk etter en løsning. Det er også lite valgfrihet i måten oppgaven burde besvares ettersom det er en implisitt forståelse at svaret skal være et tallsymbol som beskriver antall grader.

Elevers valg:
1 - Det er lite valgfrihet i hvordan elever kan representere løsningen på oppgaven.

Kontekst:
Ren matematikk - Det er ingen kontekst til oppgaven.

Implikasjoner for oppgave 3.22
For å løse denne oppgaven er det nærliggende for elevene å observere den ikoniske observasjonen, for så å konvertere de matematiske objektene over til det symbolske registeret. Deretter benytte en mulighet innenfor det symbolske registeret, kalkulering.

a) $\angle BAC = 90°$

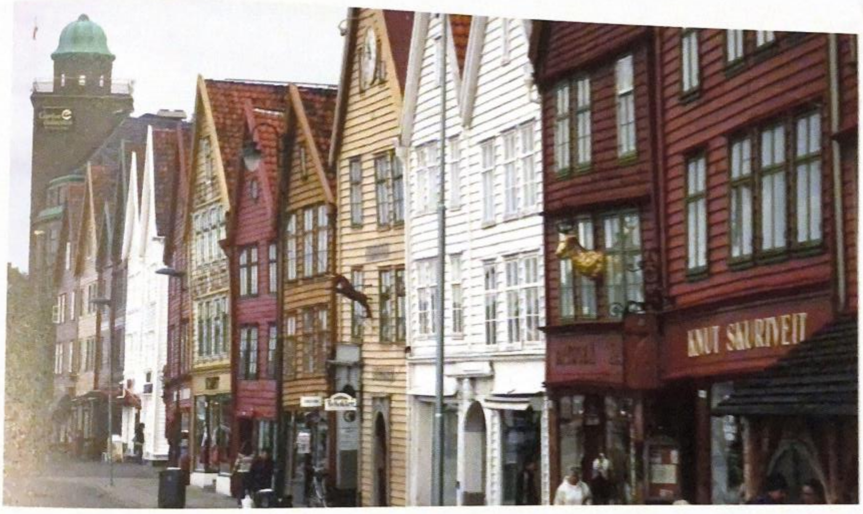
$$\angle ACB = 180° - 25° - 90° = 65°$$

Korrekt løsning: $\angle BAC = 90°, \angle CBA = 25°, \angle ACB = 65°$
Tenkt løsning for elev på 6. trinn: $\angle A = 90°, \angle B = 25°, \angle C = 65°$

Oppgaver som dette fremmer da både konverteringen fra det ikoniske registeret, til det symbolske. Men også behandling gjennom symbolsk kalkulering. Denne oppgaven er representativ for læreverket ettersom for å løse den er det naturlig å benytte den typen konverteringsmetode som var mest hyppig brukt i følge våre resultater.

Representativ oppgave 2:

<u>**Oppgave 4.5 (Oppgavebok) -** Fra LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:</u>



.5 Lag en tegning av bildet fra Bryggen i Bergen ved hjelp av geometriske figurer.

Figur 14: Hentet fra Gyldeandals Multi 6A, 2.Utgaven fra 2014

Analyseskjemaet for oppgave 4.5:

4.5

Representasjoner - Duval		Utforskning		Kontekst - Skovsmose	
Opprinnelig representasjon av oppgave	**Verbaltekst, ikonisk**	Utforskningsgrad - **Lafoya**	**Structured**	Kontekst	**Semi**
Behandling/ Konvertering	**Behandling**	Elevers valg (1-4)	**1**		

Figur 15

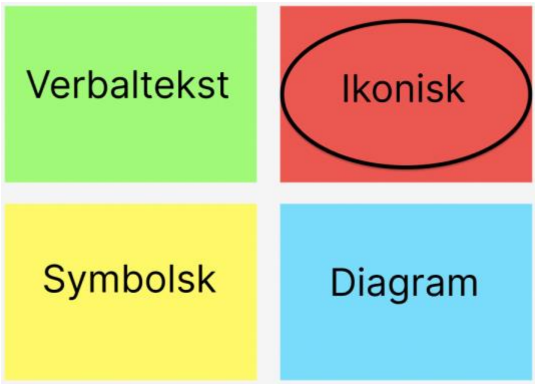
Opprinnelige representasjon av oppgaven:

Verbaltekst - Elevene må lese teksten for å forstå hva de skal gjøre i oppgaven.

Ikonisk - Det er et bilde som inneholde nødvendig informasjon for å løse oppgaven.

Konvertering/behandling:

Behandling - Elevene ser på husene, og skal lage disse husene ved hjelp av tegninger av geometriske figurer. Altså blir dette en behandlinginnenfor det ikoniske registeret.



Figur 16

Utforskningsgrad:

Structured - Oppgaven er plassert som structured ettersom det er tydelig hva elevene skal gjøre, og hvordan de skal presentere løsningen.

Elevers valg:

1 - Det er lite valgmuligheter i forhold til hvordan elevene kan representere løsningen. Det forventes tydelig en tegning av geometriske figurer som skal gjenspeile husene.

Kontekst:

Semi - Konteksten er påkledd ved at det er et bilde av noen hus.

Implikasjoner for oppgave 3.22

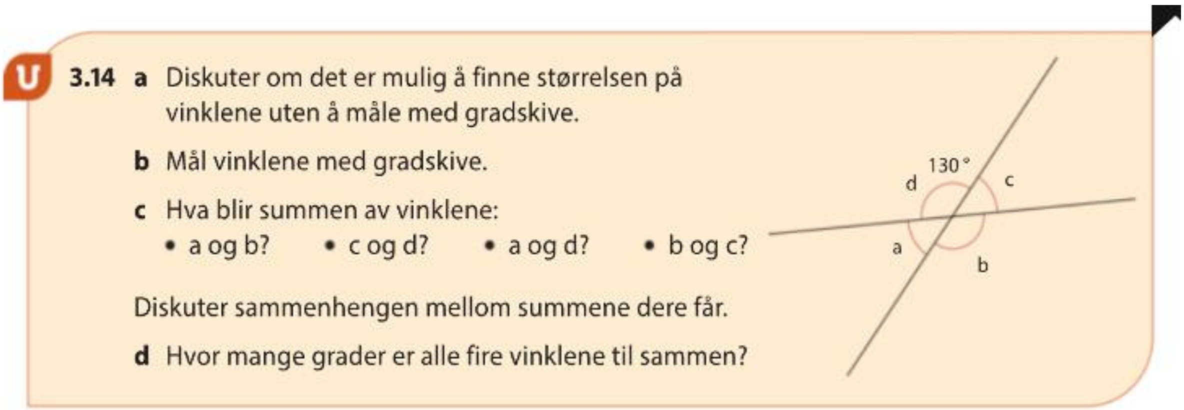
Denne oppgaven er representativ for oppgaver som har behandling som en naturlig måte å løse oppgaven på. Duval mener altså at oppgaver som denne er mindre kognitivt krevende, samtidig får elevene mulighet til å se hvordan de matematiske objektene befinner seg innen forskjellige representasjoner innen samme register (Duval, 1999, s.24). Altså både som bilde av hus, og som tegninger av geometriske figurer uten kontekst. Dermed er denne typen oppgaver med å berike matematikkundervisningen gjennom behandling innenfor det ikoniske registeret.

5.2.2 Oppgaver med ansett særskilt potensiale

Noen av oppgavene vi analyserte skilte seg ut ved å bli kategorisert i vårt analyseskjema på en unik måte gjennom at oppgavens struktur og innhold skilte seg ut fra andre oppgaver i læreverket. Deretter studerte vi disse oppgavene opp mot vår teori for å finne hvordan innholdet i disse oppgavene er med å berike læreverket i form av å fremme matematikkdidaktisk undervisning. Utover dette var det også enkelte oppgaver som ikke skilte seg ut i vårt analyseverktøy, men som vi merket hadde noe ekstra ved seg gjennom vår kvalitative gjennomgang av læreverkene.

Oppgave med ansett særskilt potensiale - 1

Oppgave 3.14 - LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021:



Figur 17: Hentet fra Gyldendals Multi 6A, 3. Utgaven fra 2021

Analyseskjema for oppgave 3.14:

Representasjoner - Duval		Utforskning		Kontekst - Skovsmose	
Opprinnelig representasjon av oppgaven	**Verbaltekst, Ikonisk, symbolsk**	Utforskningsgrad -**Lafoya**	**Structured**	Kontekst	Ren matematikk
Behandling/ Konvertering	**Konvertering** **Ikonisk** til **verbaltekst, Ikonisk** til **symbolsk, Symbolsk** til **verbaltekst**	Elevers valg (1-4)	**1**		

Tabell 5

Opprinnelig representasjon av oppgaven:

Verbaltekst - Oppgaven bruker verbaltekst i spørsmålene som stilles.

Ikonisk **-** Oppgave benytter en ikonisk representasjon av to linjer som krysses.

Symbolsk - Oppgaven inneholder en vinkel med symbolene 130°, for å beskrive størrelsen på vinkelen.

Konverteringer/behandling:

Konvertering:

Denne oppgaven inneholder flere konverteringer. Oppgave a) dreier seg om å studere den ikoniske representasjonen for deretter å diskutere disse, altså konvertere fra ikonisk representasjon til verbaltekst.

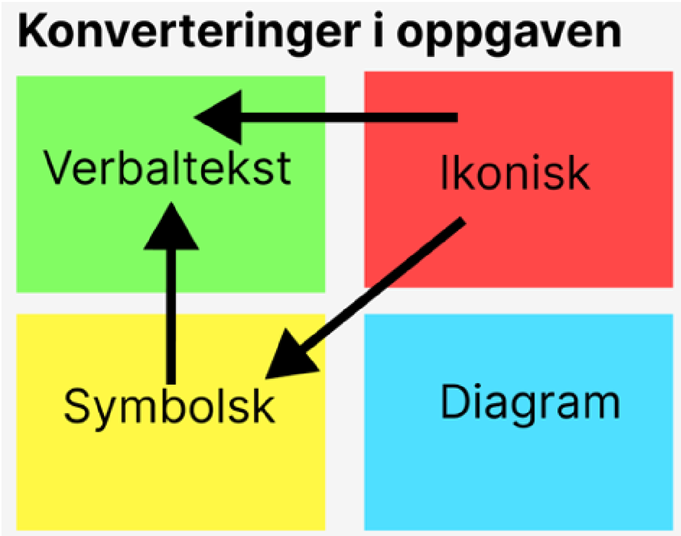
Videre så skal eleven måle vinklene på ikonet. Dette blir da en konvertering fra ikonisk representasjon til symbolsk representasjon ettersom eleven går fra å ta utgangspunkt i tegningen til å konvertere vinklene til tallsymboler. I c) oppgaven finner elevene ut at det er 180° ved hver av de ulike kombinasjonene av vinkler. Deretter diskuterer de denne sammenhengen mellom 180°, med hverandre. Vi har derfor plassert dette som en konvertering fra symbolsk representasjon til verbaltekst, samtidig som man kan også forsvarere flere konverteringer på akkurat denne oppgaven.

Utforskningsgrad:

Structured - Oppgaven og fremgangsmåten er bestemt på forhånd av oppgaven som gis. På alle deloppgavene er det lite frihet i forhold til hvordan elevene kan representere løsningen.

Elevers valg:

1 - Det er lite frihet i forhold til valg av representasjon av løsning.



Figur 18

Kontekst:

Ren matematikk - Oppgaven som gis er ikke satt i noen kontekst.

Potensiale i oppgave 3.14:

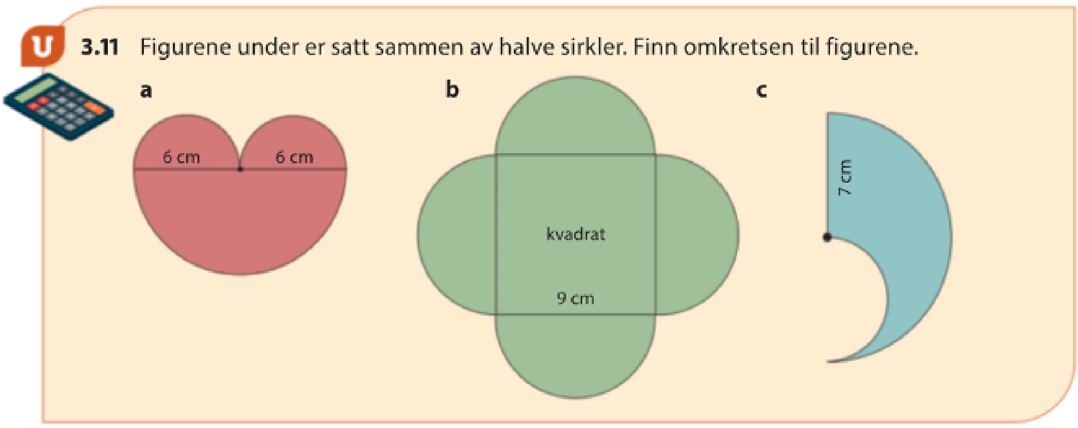
Potensiale til oppgave 3.14 ligger i de tenkte konverteringene i retning verbaltekst, som muliggjør utforskende dialog blant elevene. Våre kvantitative resultater viste at kun 13,5% av de tenkte naturlige konverteringene fra de analyserte oppgavene fra 3. utgaven (læreverket som følger LK20), går i retning verbaltekst. Dermed skiller oppgave 3.14 seg ut fra mengden ved å forvente mindre vanlige naturlige konverteringer for å finne en løsning. I henhold til Duval (2006) så er nøkkelen til å forstå matematikk, nettopp å klare å skille de matematiske objektene ut fra representasjonsformen vi kan observere dem i. For å kunne skille ut de matematiske objektene, må elevene derfor møte dem innenfor ulike representasjonsformer slik at de får erfaring med de matematiske objektene på ulike måter. Nettopp derfor er det sentralt at elevene blir møtt med ulike former for overganger innen representasjoner, både med bakgrunn i teori, og i læreplanen. Ser man derfor denne oppgaven i helheten av læreverket den er en del av, bidrar oppgaven til en jevnere fordeling og på den måten legger til rette for et mer helhetlig matematisk læreverk for elevene.

Utover dette, tar oppgaven i bruk de mulighetene innenfor dette registeret vi refererer til som "verbaltekst", gjennom å bruke verbet "å diskutere". Å diskuterer i sin natur en form for dialog og i pedagogisk kontekst kan derfor ses på som en form for samarbeid, og en utforskende tilnærming kan ha nytte av samarbeid blant elever. Selv om vårt analyseverktøy ikke vil klassifisere denne oppgaven som særlig utforskende i forhold til våre kategorier for utforskningsgrad og elevers valg, er samarbeidende læring et sentralt punkt innenfor inquiry-based learning (Savery, 2006, s.12). Det er også verdt å nevne at verbet omtales i en interessant matematikkdidaktisk kontekst ved at elevene møter oppgaver der de får mulighet til å generalisere funn. Elevene vil ha mulighet gjennom oppgavene, og gjennom diskusjonen med hverandre, til å selv finne ut at et punkt på en rett linje vil gi en vinkel på 180°. De ser derfor sammenhenger mellom løsningene som er utforskende i forhold til vår definisjon.

Van de Walles et, al (2020) forskning understreker viktigheten av å engasjere elever i arbeid med ulike semiotiske systemer for å fremme en dypere matematisk forståelse. I oppgave 3.14, som vises over, blir elever utfordret til å konvertere mellom ikoniske og symbolske representasjoner og verbaltekst, noe som krever at de anvender og reflekterer over matematiske begreper på flere nivåer. Dette samsvarer med Van de Walles vektlegging på at evnen til å skifte mellom forskjellige matematiske representasjoner ikke bare er sentralt i matematisk forståelse, men også essensielt for å utvikle en fleksibel og tilpasningsdyktig tilnærming til problemløsning. Denne tilnærmingen støttes også av oppgavens struktur, som legger opp til en utforskende tilnærming der elever må diskutere og samarbeide om å finne løsninger, i tråd med både LK20 og Van de Walles teorier (Van de Walle et al., 2020).

Oppgave med ansett særskilt potensiale - 2

Oppgave 3.11 - LK20 - Multi 6A, 3. utgave, 2021:



Figur 19: Hentet fra Gyldendals Multi 6A, 3. Utgaven fra 2021

<u>Analyseskjema for oppgave 3.11</u>

3.11

Representasjoner - Duval		**Utforskning**		**Kontekst - Skovsmose**	
Opprinnelig representasjon av oppgave	**Verbaltekst, Ikonisk, symbolsk**	Utforskningsgrad -**Lafoya**	**Structured**	Kontekst	Ren matematikk
Behandling/ Konvertering	**Konvertering** Fra Fra **ikonisk** til **symbolsk**	Elevers valg (1-4)	**1**		

Tabell 6

Opprinnelig representasjon av oppgave:

Verbaltekst - Oppgaven er gitt som en tekstoppgave, der det er nødvendig for eleven å lese oppgaven for å vite hva han/hun skal gjøre.

Ikonisk - Oppgaven er at elevene skal finne areal av ulike geometriske figurer.

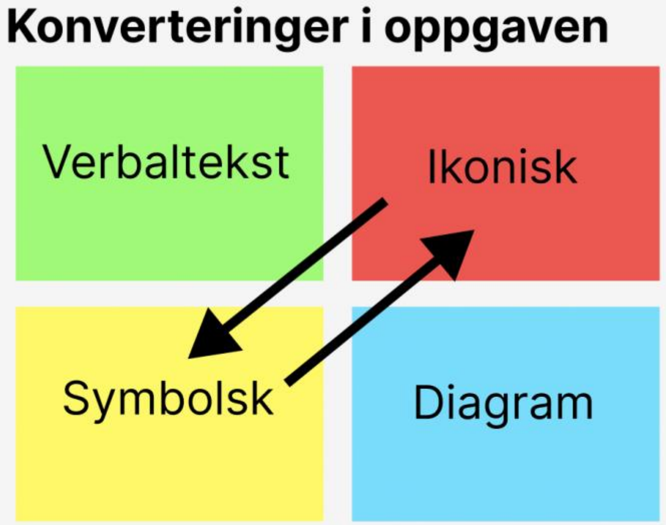
Symbolsk - Flere av lengdene som er nødvendig å vite for å løse oppgaven er oppgitt ved hjelp av tallsymboler.

Behandling/konvertering:

Konvertering:

For denne oppgaven har vi plassert den som en oppgave der det er naturlig å benytte konvertering, fra ikonisk til symbolsk representasjon. Elevene må studere illustrasjonene for å finne ut hvordan de skal løse oppgaven, deretter må de overføre denne informasjonen til det symbolske registeret for å benytte mulighetene som ligger der for å finne frem til korrekt omkrets.

En ting som skiller ut denne oppgaven her, er at for denne oppgaven kan det være naturlig å konvertere gjentatte ganger mellom det ikoniske og symbolske registeret. Ideen er at det å finne omkretsen av disse ulike figurene krever flere beregninger, og kan gjøres på mange måter.



Figur 20

Utforskningsgrad:

Structured - Vi har plassert denne oppgaven her som structured, ettersom det ligger implisitt i oppgaven at et naturlig svar er et tallsymbol.

Elevers valg:

1 - Det er lite valg for elevene når det kommer til muligheter for å representere løsningen på oppgaven.

Kontekst:
Ren matematikk - Det er ingen kontekst i oppgaven.

Potensiale i oppgave 3.11

Oppgave 3.11 skiller seg ut i læreverket ved at det er naturlig å konvertere gjentatte ganger mellom registre for å løse oppgaven, nemlig ved å benytte mulighetene som ligger innenfor de ulike registrene. For å løse disse oppgavene må elevene bevege seg mellom disse registrene ved å gradvis avdekke ny informasjon og fremgangsmåte gjennom de visuelle mulighetene innenfor det ikoniske registeret, samtidig som å benytte de kalkulerende egenskapene innenfor det symbolske registeret. Denne oppgaven peker derfor på et viktig punkt innen Duvals teori, nemlig evnen til å identifisere muligheter og begrensninger innenfor ulike registre og diskriminere registre på bakgrunn av nødvendigheten i den gitte oppgaven (Duval, 1999, s. 24).

Oppgaven er markert med "u", altså som utforskende, av læreverket. Likevel treffer den ikke på våre kriterier i forhold til inquiry-based learning. Oppgaven er nemlig begrenset i forhold til mulige representasjoner av løsning, samtidig som vi identifiserte ved oppgaven at den er interessant i forhold til mulige måter å løse oppgaven på.
Et eksempel på dette er i oppgave a), den kan løses på følgende tre måter:

Løsningsforslag 1:

> *"Jeg ser at det er to halvsirkler med 6 cm diameter, og en halvsirkel med 12 cm diameter. Hvis jeg finner disse kan jeg addere disse for å finne omkretsen av figuren".*

Steg 1: $6 \times 3.14 / 2 = 9{,}42$
Steg 2: $6 \times 3.14 / 2 = 9{,}42$
Steg 3: $12 \times 3.14 / 2 = 18{,}84$

Steg 4: $9{,}42 + 9{,}42 + 18{,}84 \approx 37{,}7$

Løsningsforslag 2:

"Jeg ser at det er to halvsirkler med 6cm diameter, men dette vil jo utgjøre en hel sirkel. Dermed er det en sirkel med 6cm diameter, og en halvsirkel med 12cm diameter. Deretter kan jeg addere disse for å finne omkretsen av figuren."

Steg 1: $6 \times 3.14 = 18{,}84$

Steg 2: $6 \times 3.14 / 2 = 9{,}42$

Steg 3: $18{,}84 + 9{,}42 \approx 37{,}7$

Løsningsforslag 3:

"Jeg vet at formelen for omkrets av en sirkel er følgende: $\pi \times d$*. Og ettersom multiplikasjon er assosiativ så vet jeg at* $12 \times \pi = 6 \times \pi + 6 \times \pi$ *.*
Altså skjønner jeg at de to små halvsirklene øverst må gi samme omkrets som halvsirklene under. Derfor trenger jeg kun å vite omkretsen av en sirkel med diameter lik 12cm."

Steg 1: $12 \times 3.14 \approx 37{,}7$

Ideen her er altså at elevene kan løse oppgaven på forskjellige måter, noen mer avanserte enn andre. Det interessante er at elevene kan benytte ikonisk behandling for å gjøre de symbolske utregningene lettere for seg selv. Et konsept som er viktig innenfor IBL er "*low floor, high ceiling*", altså at utfordringene elevene møter skal være romslige på den måten at elever på ulike matematiske ferdighetsnivåer skal ha mulighet til å arbeide med samme oppgave, samtidig som at det kan være tilstrekkelig utfordrende for elever som har mulighet til å arbeide med dette. For å vise de ulike tenkemåtene er det viktig at læreren setter av tid til å vise de ulike elevenes tilnærminger til oppgaven for å vise hvordan de ulike tilnærmingene til oppgaven ender opp med samme resultat. Dette poenget treffer også et prinsipp innenfor IBL, nemlig at det må settes av tid for å se de ulike elevenes tilnærming til oppgaven (Savery, 2006).

Oppgaver som dette er derfor med å berike læreverket på ulike måter. I form av konverteringer for å utskille de matematiske objektene fra deres representasjon, men også i form av at oppgaven kan løses på ulike måter som har ulik grad av effektivitet, og ulik grad av utfordring. Samtidig gjør oppgaver som dette det mulig til å vise broer mellom ulike tilnærminger, slik at elevene kan se at det ikke er nødvendigvis kun en måte å løse matematiske oppgaver på.

Oppgave med ansett særskilt potensiale - 3

Oppgave 4.11 - LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:

Figur 21: Hentet fra Gyldendals Multi 6A, 2.utgaven fra 2014

Analyseskjema for oppgave 4.11

Representasjoner - Duval		Utforskning		Kontekst - Skovsmose	
Opprinnelig representasjon av oppgave	**Verbaltekst, Ikonisk**	Utforskningsgrad -**Lafoya**	**Structured**	Kontekst	reell
Behandling/ Konvertering	**Konvertering** Fra **verbaltekst** til **ikonisk**	Elevers valg (1-4)	**1**		

Tabell 7

Opprinnelige representasjon av oppgaven:

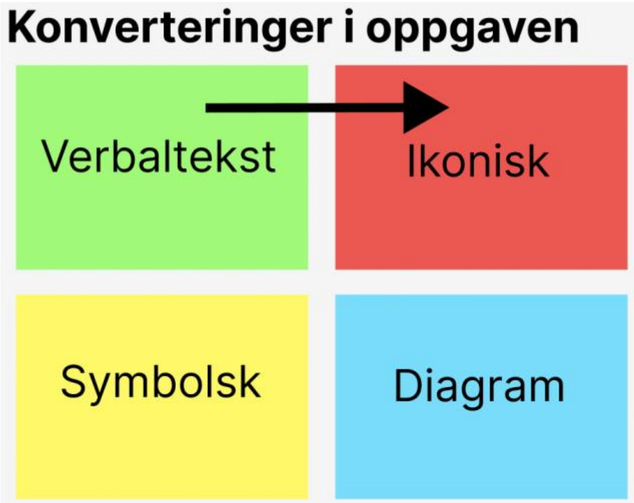
Verbaltekst - Oppgaven står i tekst.

Ikonisk - Det er en illustrasjon som viser julepynt satt sammen av forskjellige prismer og pyramider.

Behandling/konvertering:

Konvertering:

Oppgaven beskriver med tekst, og elevene må tolke de matematiske begrepene "prisme" og "pyramide", for så å kunne lage dem med julepynt. Vi vil derfor plassere denne oppgaven som konvertering fra verbaltekst til ikonisk. Denne oppgaven skiller seg ut ved at det ikke er ved tegning, men ved fysiske konkreter. Dette er den eneste oppgaven der dette var tilfelle, så vi har valgt å plassere den under "ikonisk", ettersom det er det registeret som er mest likt bruken av fysiske objekter.



Figur 22

Utforskningsgrad:

Structured - Vi har plassert denne som structured ettersom selv om elevene kan lage ulike geometriske figurer, er selve måten elevene skal presentere løsningen bestemt. Ideen er at de skal lage geometriske figurer av julepapir.

Elevers valg:

1 - Det er lite valgfrihet i forhold til valg av representasjoner som løsning.

Kontekst:

Reell - Det her er den eneste oppgaven i begge læreverkene der vi har satt reell kontekst. Dette er ettersom elevene skal arbeide med faktiske ekte gjenstander, som julepapir, til å lage geometriske figurer. Det er altså praktisk arbeid i den reelle verden, som gjør at dette ikke kan være i noe annet enn reell kontekst.

Potensial i oppgave 4.11

Denne oppgaven fra 2. utgaven, som følger LK06, var den eneste oppgaven vi plasserte under "reell kontekst".

Figur 23: Hentet fra Gyldendals Mutli 6A, 2. utgaven fra 2014

Kompetansemålene oppgaven sikter mot er trolig følgende:

> *7.-8: "analysere eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og beskrive fysiske gjenstandar innanfor daglegliv og teknologi ved hjelp av geometriske omgrep (Utdanningsdirektoratet, 2015a)"*
>
> *7.-9: "**byggje tredimensjonale modellar**, teikne perspektiv med eitt forsvinningspunkt og diskutere prosessane og produkta (Utdanningsdirektoratet, 2015a)"*

Elevene får altså muligheten til å bygge tredimensjonale figurer ved hjelp av julepapir. Denne oppgaven tar derfor utgangspunkt i den virkelige verden ved at elevene får arbeide med fysisk materiale. Dette gjør at denne oppgaven tar i bruk konkreter, som er svært lite brukt i oppgavene vi har analysert. Å arbeide med konkret materiale i matematikk er viktig og poengtert i den nye læreplanen, i tillegg til å være forankret i Duval (1999, 2006). Elevene får her laget ulike geometriske former, og får dermed sammenlignet de ulike formene innenfor denne typen representasjonsform.

> *"To compare similar representations within the same register in order to discriminate relevant values within a mathematical understanding (Duval, 1999, s.24)."*

Dermed gir denne oppgaven elevene mulighet til å sammenligne de ulike geometriske formene, som konkret materiale. Elevene får dermed mulighet til å finne forskjeller blant de geometriske figurene på en fysisk, taktil måte. Samtidig poengterer Duval også viktigheten av å arbeide med flere typer representasjoner i kombinasjon, slik at man får diskriminert hva som er innholdet innenfor representasjonsformen, og hva som er de matematiske objektene (Duval, 1999, s. 24). En måte å få til dette i større grad for denne oppgaven, er ved at læreren legger til følgende aktivitet slik som dette:

Aktivitet:

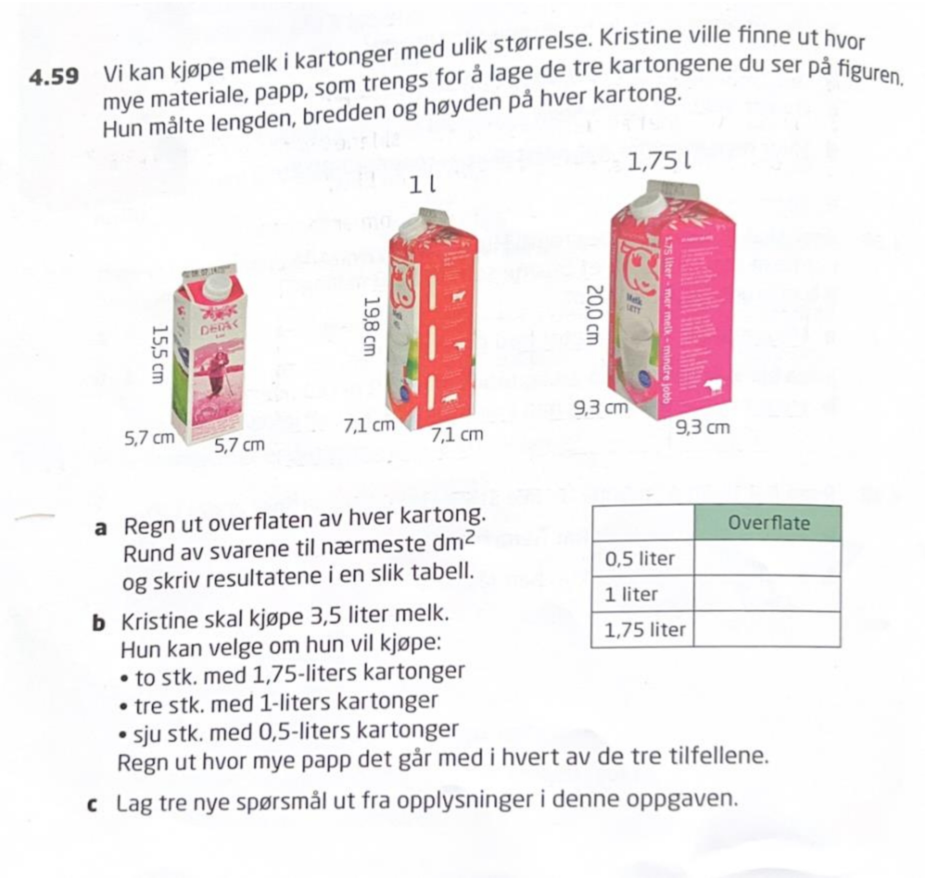
- *Læreren deler elevene i grupper på 4.*
- Lærer: *"Diskuter med hverandre og fordel figurene dere har laget i ulike grupper, slik dere tenker de burde fordeles. Dere bestemmer selv hvor mange grupper."*
- *Gjennomgang av hvordan de ulike gruppene har tenkt i sin fordeling*
- *Læreren trekker linjer mellom de ulike fordelingene, og inviterer til matematisk diskusjon.*

På denne måten får elevene konvertert fra disse konkrete fysiske figurene, over til verbaltekst ved at de må sette ord på hvordan de ønsker å fordele figurene. De får også mulighet til å sammenligne de forskjellige egenskapene til figurene, og se hvordan andre har tenkt. Igjen legger dette også opp til at læreren kan vise broer mellom de forskjellige måtene å gruppere figurer på, i tillegg til å åpne opp for diskusjon og dermed samtale om egenskaper ved de ulike geometriske figurene.

Van de Walle et al. (2020) understreker betydningen av konkrete materialer i matematikkundervisningen for å fremme forståelsen av matematiske konsepter. I Oppgave 4.11 hvor elever bruker julepapir til å konstruere geometriske figurer, tilnærmer man seg matematikken gjennom fysiske, håndgripelige objekter. Dette er i tråd med Van de Walles pedagogikk som argumenterer for at slike konkrete erfaringer er avgjørende for å bygge en dypere forståelse av abstrakte matematiske ideer. Ved å manipulere fysiske objekter, får elevene en visuell og taktil forståelse av geometriske former, noe som bidrar til å forankre matematisk læring i virkelige, relevante kontekster (Van de Walle et al., 2020).

Oppgave med ansett særskilt potensiale - 4

Oppgave 4.59 - LK06 - Multi 6A, 2. utgave, 2014:



4.59 Vi kan kjøpe melk i kartonger med ulik størrelse. Kristine ville finne ut hvor mye materiale, papp, som trengs for å lage de tre kartongene du ser på figuren. Hun målte lengden, bredden og høyden på hver kartong.

a Regn ut overflaten av hver kartong. Rund av svarene til nærmeste dm^2 og skriv resultatene i en slik tabell.

	Overflate
0,5 liter	
1 liter	
1,75 liter	

b Kristine skal kjøpe 3,5 liter melk. Hun kan velge om hun vil kjøpe:
- to stk. med 1,75-liters kartonger
- tre stk. med 1-liters kartonger
- sju stk. med 0,5-liters kartonger

Regn ut hvor mye papp det går med i hvert av de tre tilfellene.

c Lag tre nye spørsmål ut fra opplysninger i denne oppgaven.

Figur 24: Hentet fra Gyldendals Multi 6A, 2.utgaven fra 2014

Analyse skjema for oppgave 4.59 i oppgaveboken:

Oppgavebok - 4.59

Representasjoner - Duval		**Utforskning**		**Kontekst - Skovsmose**	
Kategorisering av representasjoner	**Verbaltekst, Ikonisk, symbolsk**	Utforskningsgrad - **Lafoya**	**Open**	Kontekst	semi
Behandling/ Konvertering	**Konvertering** Fra **ikonisk** til **symbolsk**, Fra **verbaltekst** til **symbolsk**	Elevers valg (1-4)	**4**		

Tabell 8

Opprinnelig representasjon av oppgave:

Verbaltekst - Oppgavene gis ved å bruke tekst, altså tekstoppgaver.

Ikonisk - Det er brukt illustrasjon av melkekartonger som elevene blant annet skal finne overflaten av.

Symbolsk - Det er brukt tallsymboler for å vise til forskjellige lengder og innhold i oppgaven. Symbolene fungerer som støtte til illustrasjonene.

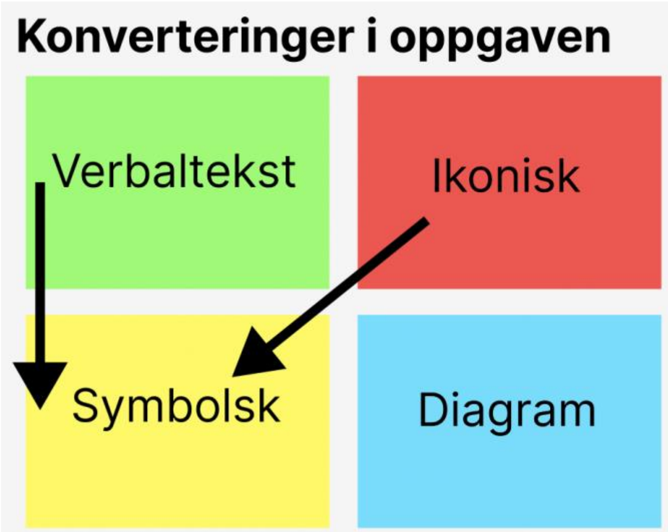
Behandling/Konvertering:

Konvertering:

a) Oppgaven ønsker at elevene skal regne ut overflatene av hver kartong. Dette har vi plassert som en konvertering fra ikonisk til symbolsk. Grunnen til det er at elevene må bruke relevant informasjon fra den ikoniske representasjonen for å finne ut hvordan man skal regne ut arealet av de forskjellige delene av melkekartongen. For å regne ut overflaten er det mer hensiktsmessig å bruke mulighetene som finnes innen det symbolske registeret. Samtidig kan man argumentere for at dette er symbolsk behandling, ettersom lengdene allerede er oppgitt som tallsymboler. Likevel er det nødvendig benytte illustrasjonen av melkekartongen for å løse oppgaven, derfor har vi plassert dette som at det er naturlig å benytte konvertering for å løse oppgaven.

b) I b) oppgaven må elevene tolke verbalteksten, for å forstå hvordan elevene skal finne en løsning. Vi har derfor plassert dette som en oppgave der den naturlige konverteringen er fra verbaltekst til det symbolske registeret. Altså elevene må tolke teksten for å flytte de matematiske objektene inn i det symbolske registeret, for å så foreta utregninger gjennom behandling.

c) I denne oppgaven skal elevene lage egne spørsmål. Her kan det legges opp til ulike former for konverteringer, samtidig som når det står "spørsmål", kan det tolkes som at de skal levere løsningen som verbaltekst. Derfor er den naturlige måten å løse oppgaven på som behandling innenfor verbaltekst.



Figur 25

Utforskningsgrad:

<u>Open</u> - Denne oppgaven har vi plassert som open, spesielt med tanke på c) oppgaven. Denne oppgaven lar elevene lage egne spørsmål.

Elevers valg:

<u>4</u> - Vi har plassert denne på 4 ettersom oppgave c) ber elevene om å lage tre nye spørsmål. Ideen er at ved å lage spørsmål, eller oppgaver, gir dette elevene mulighetene til å lage

spørsmål der elevene kan velge hvilken type semiotisk representasjon som løsningen skal representeres som. Likevel kan man argumentere for at det er spørsmålene som er løsningen, altså at oppgaven ber om et svar i verbaltekst. Samtidig vil det naturligvis kreve av elevene at de ser for seg en tenkt løsning på spørsmålet, og det er derfor vi har plassert denne på 4.

Kontekst:

Semi - Vi har plassert denne under semi, ettersom det er en kledd kontekst, ved at arealet som måles er melkekartonger. Den er ikke reell ettersom det ikke er faktiske melkekartonger som måles for et reelt formål.

Potensiale for oppgave 4.59

I vår analyse av oppgaven finner vi at spesielt c) oppgaven skiller seg ut med tanke på våre resultater knyttet til utforskning. Dette skjer konkret ved at elevene får mulighet til å selv lage nye spørsmål ut fra opplysningene gitt i oppgaven. Utforskningsgraden plasserte vi som "Open", i tillegg til at vi satt den som "4" under elevers valg. Elevene får altså mulighet til å selv velge hvordan spørsmålene utformes, og med seg da får de muligheten til å selv avgjøre hvilke representasjoner som er naturlige å bruke for presentasjonen av en løsning. Potensiale vi ser etter for denne oppgaven, deler seg derfor i to hovedpunkter:

1. Elevene får muligheten til å selv utforme matematiske utfordringer knyttet til allerede oppgitt informasjon.
2. Elevene får mulighet til å selv påvirke hvordan løsningene de ønsker på spørsmålene de lager skal representeres.

I forhold til IBL-teori er det en hake knyttet til punkt 1, nemlig at selv om elevene får mulighet til å lage spørsmålene selv, kan dette ikke plasseres som "genuin inquiry". Dette fordi elevene selv har liten grad til medbestemmelse i forhold til valg av tema, ettersom spørsmålene skal benytte opplysningene som er gitt i oppgaven til å lage nye spørsmål, og i oppgaven er konteksten allerede satt. I dette tilfellet her så kan en argumentere for at dersom konteksten hadde vært "ren matematikk", ville elevene hatt større valgfrihet knyttet til konteksten på spørsmålene de skal lage, og derfor mer treffende i forhold til begrepet "genuin inquiry".

Det at elevene får mulighet til å påvirke hvordan løsninger på oppgaver blir representert på spørsmålene de lager, fører til at elevene tar valg knyttet til hvordan en løsning burde bli representert. Dermed kan man si at de blir satt i en situasjon der de må argumentere for hvorfor en representasjonsmetode er mer hensiktsmessige enn en annen, for et spesielt spørsmål. Oppgaven ber ikke elever eksplisitt argumentere for valgene de har tatt, likevel inviterer oppgaven til tanker rundt dette, ved at elevene skal utforme spørsmål. Selv om denne oppgaven er fra LK06, poengteres dette eksplisitt i LK20, under kjerneelementet Representasjoner og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det forankres også i teori gjennom at elevene må diskriminere i forhold til hvilken representasjonsform som er mest hensiktsmessig med tanke på å presentere funn (Duval, 2006).

6 DRØFTING

I denne delen av oppgaven tar vi først og fremst utgangspunkt i våre forskningsspørsmål, og drøfter disse ut ifra våre funn. Vi gjør dette ved å dele drøftingen i to deler, med utgangspunkt i de respektive forskningsspørsmålene. Videre ser vi på implikasjoner av våre funn, nye ting som dukket opp og dermed hva som er interessant for veien videre. Avslutningsvis samler vi trådene og drøfter hva våre funn tyder på i forhold til utviklingen fra LK06 til LK20, og hvordan dette gir indikasjoner for videre utvikling av matematiske oppgaver i skolen.

6.1 Forskningsspørsmål 1

1. *" Hvilke representasjonsformer legges det opp i utvalgte læreverk innenfor temaet geometri, i læreverk underlagt LK06 og læreverk underlagt LK20?"*

Våre funn når det gjelder oppgavens opprinnelige form viser at det er stor likhet mellom de to læreverkene. Likevel, var det en interessant forskjell når det gjelder bruken av symboler i oppgavene. I oppgavene fra 3. Utgaven, som følger LK20, var det 60% av oppgavene som inneholdt symbolske representasjoner. I 2. Utgaven, som følger LK06, var det kun 44% av oppgavene som benyttet symbolske representasjoner. Bruken av ulike registre, eller ulike semiotiske systemer i oppgavene, inneholder ulike muligheter og utfordringer for å gi mening til oppgaven (Duval, 2006, s. 107). Det er derfor interessant at vi ser at i læreverket som følger LK20 brukes det mer symboler i oppgavenes opprinnelige form, enn det det gjøres i læreverket som følger LK06. Dette antyder at oppgavene som følger LK20 bruker flere midler for å kommunisere oppgaven som elevene skal løse. En økning i bruken av registre som benyttes i oppgavens opprinnelige form kan også være med å fungere som en støtte for elever som har utfordringer i skolen (Gersten et. Al, 2014). Dermed kan denne økte bruken av representasjoner i oppgavenes opprinnelige form, ses på som et positivt i form av at det vil hjelpe flere elever å sette seg inn i oppgaven. På samme tid er det en utfordring ettersom det fører til at flere registre må benyttes på samme tid, og i samspill, for å kunne forstå hva oppgaven spør om.

6.1.1 Behandling & Konvertering

Vi skiller mellom oppgaver som inneholdt naturlige muligheter for konvertering, og oppgaver som kun inneholdt behandling som en naturlig måte å løse oppgaven på. Dermed fører dette til at oppgaver som inneholdt naturlig konvertering likevel kan inneholde former for behandling. Selve ideen med dette er altså å finne ut om det er forskjell i læreverkene i forhold til fokuset på konvertering fra et register til et annet. Ettersom Duval (2006) argumenterer for at konvertering er en prosess som er en mer kognitivt krevende, og kompleks operasjon enn behandling, er det interessant å merke seg at oppgavene som følger 3. Utgaven (LK20) viser at en større andel av oppgavene ble plassert i kategorien der konvertering er den naturlige prosessen (s. 112 - s.114). Forskjellen var 76,2% i 2. Utgaven, til 84,6% i 3. Utgaven. Det er også viktig å presisere her at Duval (2006) trekker frem viktigheten av å jobbe med behandling også, men at våre funn ikke antyder at det er mindre andel behandling i oppgavene, ettersom en oppgave som inneholder konvertering også kan inneholde behandling. At flere av oppgavene i det nye læreverket legger opp til konvertering kan derfor ses på som et positivt grep i forhold til kognitivt utfordrende oppgaver for elevene (Duval, 2006, s. 114).

En kan derfor sette dette i sammenheng med det forrige delkapittelet der vi ser en økt bruk av registre i oppgavers opprinnelige form. Altså poenget som da kommer er at med økt grad av kognitivt utfordrende oppgaver (ved flere oppgaver som krever konvertering), møtes dette av økt bruk av registre i oppgavens opprinnelige form. Det kan altså tyde på at det er flere oppgaver som er mer kognitivt krevende, men de er likevel bedre forklart gjennom økt bruk av semiotiske representasjoner i oppgavenes opprinnelige form. Poenget her er at det ser ut som det trekkes litt i retning “vanskeligere, men med mer veiledning” i forhold til representasjoner i oppgaven.

6.1.2 De ulike formene for konvertering

Når vi nå prater om konvertering, er det viktig å presisere at her er det snakk om konverteringer vi tenker det er naturlig at elevene foretar når personen løser oppgaven, for å komme frem til en meningsfull løsning. Våre funn tyder på at det var et overveldende flertall av naturlige konverteringer fra ikonisk representasjon til symbolsk presentasjon, og fra ikonisk representasjon til representasjon i form av verbaltekst.

6.2 Forskningsspørsmål 2

> 2. *Hvordan kan de ulike representasjonsformene i de respektive læreverk relateres til utforskningsperspektivet, og bruken av kontekstualisering i de tilhørende læreplaner (LK06 og LK20)?*

6.2.1 Utforskning

I forhold til "utforskningsgrad", og i "elevers valg" i oppgavene fant vi svært lite variasjon. De aller fleste oppgavene ble kategorisert som "structured", og "1". Oppgaver som falt under structured definerte vi som følgende basert på Tafoya et. al (1980):
"Oppgaven gir både spørsmålet og forventet løsningsmetode, uten å gi løsningen."

Og "1" ved elevers valg definerte vi som følgende:
"Hvordan elevene skal representere løsningen på oppgaven er allerede bestemt, og det er derfor ingen valgmuligheter."

Ved at oppgaven gir "forventet løsningsmetode", ser vi dette opp mot hvilken representasjonsform oppgaven spør etter som en løsning på oppgaven. Vi så derfor svært få oppgaver som viste til større frihet i form av valgfrihet knyttet til representasjon av løsning, og i forhold til valgfrihet med tanke på spørsmål som stilles. Dette synes også gjennom svært lite spredning i "elevers valg". Dette er interessant ettersom kjerneelementet "representasjoner og kommunikasjon" i læreplanen står det ordrett:

> *"Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få*

mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. (Utdanningsdirektoratet, 2020)"

Da dukker det naturlig opp et spørsmål om hvorfor våre funn finner svært lite grad av valgfrihet knyttet til valg av representasjonsform. For å se etter noen meningsfulle svar på dette, er det naturlig å se til noen utfordringer læreverk kan støte på knyttet til inquiry based learning. En svært sentral utfordring innenfor IBL er hvordan studentene blir sentrale i forhold til kontrollen over hva som foregår (Walker, 2007). Det at elevene har større grad av frihet kan føre til utfordringer knyttet til sikkerhet, tidsbruk og kontroll i forhold til elevenes læringsutbytte (Walker, 2007). Disse utfordringene kan gjøre læreren usikker i forhold til egen rolle og dette kan ha flere implikasjoner for læreverk.

1. Ettersom læreverket er et verktøy for å tilrettelegge undervisning for læreren, kan en forsvare at mål som nevnt tidligere knyttet til kjerneelementer i matematikk, blir møtt ved hjelp av aktiviteter utenfor læreverket. Altså at læreren følger læreplanen, og benytter læreverket der det er naturlig.

2. Ettersom det kan føre til usikkerhet for læreres rolle ved at elevene blir satt i sentrum innen inquiry-based learning, vil det være naturlig å tenke at dette også er potensielle utfordringer som forlaget møter. Lærere har naturligvis forventninger til læreverket, og en mangel på kontroll her kan potensielt føre til misnøye.

3. Dette punktet er en videreføring av punkt 2. Dersom en økt grad av IBL-oppgaver som setter eleven i en større grad i sentrum, benyttes i læreverket. Dette kan føre til misnøye hos lærere, på tross av at det i større grad er et læreverk i henhold til gjeldende læreplan. Er det naturlig å tenke at denne misnøyen kan føre til mindre popularitet for læreverket, og skade forlaget kommersielt.

Her er det viktig å poengtere at dette er kun hypotetisk ettersom dokumenterte utfordringer knyttet til IBL for lærere, ikke kan direkte bety utfordringer for forlaget. I tillegg er det også ikke selvsagt at lærere ville opplevd en økt grad av IBL støttede oppgaver i læreverket som negativt, men heller som en mulighet til å berike egen undervisning. Samtidig er det enkelte oppgaver som skiller seg ut med potensial i forhold til IBL, slik det ble presentert tidligere.

6.2.2 Kontekst

Resultatene viser som sagt at 67,3% av oppgavene i 3. utgaven (LK20) og 65,4% av oppgavene i 2. utgaven (LK06), benytter referanser til ren matematikk. Med andre ord bruker de fleste oppgavene ingen kontekst, og de gjenværende oppgavene benytter en semi-referanse til "virkeligheten", med unntak av en enkelt reell referanse i 2. utgaven.
Det å lære matematikk handler om å skille de matematiske objektene fra deres representasjon (Duval, 2006). Det er en uunngåelig sammenheng mellom representasjon og kontekst. Kjerneelementet "modellering og anvendelser" viser læreplanens fokus på viktigheten ved at elevene får arbeide med oppgaver i en reell kontekst.

> *"Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers… Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. (Utdanningsdirektoratet, 2020)"*

Likevel, viser våre funn svært liten grad av virkelighetsnære kontekster i læreverket. Kun en oppgave ble plassert under "reell kontekst", og den var ikke en gang fra 3. utgaven (LK20), men fra 2. utgaven. Inquiry-based learning tar utgangspunktet i virkeligheten, og vi så at oppgavene vi analyserte i svært liten grad viste spredning i forhold til "utforskningsgrad", og "elevers valg". Et læreverk som legger opp til et økt fokus på sentrale konsepter innen IBL vil ha flere oppgaver knyttet til valgmuligheter for både tema å undersøke, samt valgfrihet i forhold til både bruk av representasjon og kontekst man legger oppgaven til. Et slikt økt fokus på sentrale IBL-konsepter kan derfor øke oppgavens relevans for hvert av våre sentrale teoretiske aspekter, i tillegg til å være i tråd med den nåværende læreplanen i en større grad.

6. 3 Implikasjoner fra våre funn

Våre kvantitative funn viser at de tenkte konverteringene i oppgavene fordeler seg ujevnt, i begge læreverk, med overveldende flertall blant konverteringene «ikonisk til symbolsk». Samtidig ser vi også at det er svært lite spredning i våre data knyttet til utforskningsgrad, og elevers valg. En ide som springer ut fra dette er gjennom et økt fokus på inquiry-based learning, kan dette føre til:

1) Naturligvis en jevnere spredning knyttet til våre kriterier for IBL, og dermed fordeler av dette.
2) En jevnere fordeling tenkte overganger av representasjoner.

Ideen er altså at gjennom at elevene har mer bestemmelsesrett med tanke på hva som er oppgaven, hvordan løse den, og hvordan representere løsningen. Vil den ha en større grad av genuin inquiry, og elevene vil få muligheten til å representere løsningen slik det faller naturlig, og dermed også få muligheten til å argumentere for hvorfor denne typen representasjon er hensiktsmessig. Elevene vil derfor i større grad ha mulighet til å arbeide med matematikk ut fra reelle kontekster, og selv avgjøre hvilke register som er hensiktsmessig i forhold til hva de selv lurer på. Naturligvis kommer vi i en situasjon her der både fordeler og utfordringer knyttet til frihet for elevene vil være relevante. Ettersom dette vil føre til mindre kontroll for læreren både når det gjelder hvordan elevene angriper oppgaven, og dermed også det matematiske innholdet elevene arbeider med.

6.4 Læreplanens muligheter for å fremme IBL og moddelering

Man kan argumentere for at den tidligere læreplanen (LK06) ga lærerne mer fleksibilitet i matematikkundervisningen, ettersom målene ikke var spesifikke for hvert trinn, men heller "før 2. trinn", "før 4. trinn" og "før 7. trinn". Den nye læreplanen (LK20) inneholder derimot spesifikke mål for hvert årstrinn, noe som kan begrense lærernes frihet i forhold til hva som skjer i en gitt matematikktime. I tillegg inkluderer LK20 kjerneelementet "Modellering og anvendelser". Matematisk modellering handler om å lage modeller av dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet gjennom matematisk språk. Matematisk språk kan her tolkes som ulik bruk av representasjoner der matematikken blir synlig, og kan være formålstjenlig på den måten at elevene må trekke ut de matematiske objektene fra virkeligheten, og overføre dem til hensiktsmessige matematiske representasjoner basert på hva de ønsker å få frem. Modellering er også samsvarende med IBL på den måten at elevene møter reelle matematiske situasjoner uten fasitsvar, elevene får selv utforske situasjonen og velger ut hva som er matematisk relevant, og hvilken representasjonsform som er hensiktsmessig for hva de ønsker å få frem. Ettersom vi finner samsvar mellom inquiry-based learning og matematisk modellering er det nærliggende å tro at når det gjelder oppgavene fra 3. utgaven (LK20) burde disse i større grad inneholde variasjon knyttet til våre kriterier for inquiry-based learning, og kontekst. Dette viser våre resultater at ikke er tilfelle. Samtidig kommer vi inn i utfordringen, som nevnt tidligere, nemlig at vår analyse ser på læreverket, og ikke på hva som skjer i klasserommet. Det kan derfor være at undervisningen som skjer i klasserommet ved bruk av den nye læreplanen er mer treffende i forhold til inquiry-based learning og valg av representasjonsbruk, enn hva vi finner i læreverket. Dette handler da om hvordan læreren implementerer oppgavene i klasserommet. .

Det vi altså ender opp med å ettersøke her er en større grad av oppgaver som tar utgangspunkt i elevers valg knyttet til hva som er matematisk relevant, og hvordan en løsning her skal representeres. For å oppnå dette er det å ta utgangspunkt i virkelighetsnære kontekster hensiktsmessig, både i form av å benytte nødvendige konverteringer for å finne meningsfulle løsninger, og for å presentere funn på en hensiktsmessig måte. Denne typen oppgaver vil i en større grad treffe på alle våre parametere knyttet til representasjoner, utforskning og kontekst, dermed mener vi at dette er oppgaver med mye potensial etter vår egen definisjon. I våre kvalitative funn ser vi at oppgaver som inkluderer disse elementene kan bidra til en mer helhetlig matematisk undervisning. Vi hevder at et økt fokus på IBL kan føre til en fordeling av konverteringer som bedre reflekterer hvordan matematikk brukes i dagliglivet, sammenlignet med hvordan læreverkene presenterer matematikk i lærebøkene.

6.5 Ønsket fordeling av tenkte overganger i representasjoner

Funnene i begge læreplanene viser som sagt til at en overveldende stor andel av de tenkte konverteringene dreier seg om konverteringen «ikonisk til symbolsk». Ettersom Duval (2006) argumenterer for at matematikk læres gjennom å skille de matematiske objektene fra deres representasjon, er det nødvendig for elever å arbeide med matematiske objekter innenfor ulike former for representasjoner. Dette kan også tolkes til at det er hensiktsmessig at det er en spredning i tenkte konverteringer som ligger i oppgavene. Samtidig er det ikke åpenbart hvordan denne spredningen burde se ut. I dette vakuumet kommer ideen om at elevene burde få mulighet til å avgjøre dette selv. Fagfornyelsen viser til viktigheten av at elevene skal argumentere for valg av representasjon, likevel gjenspeiles ikke dette i våre funn (Utdanningsdirektoratet, 2020). Ved at elevene får mulighet til å ta valg knyttet til hvordan de representerer en løsning, vil de få mulighet til å i større grad ha eierskap i oppgaven, samtidig som de vil få mulighet til å bruke en representasjonsform som passer med slik de ser verden. Poenget er at gjennom valg av representasjonsform, vil de ulike elevene få muligheter basert på hvordan de selv ser verden. Et mulig problem som da dukker opp er at elevene kun vil velge overganger i retninger av representasjonsformer de selv føler seg komfortable med, og ikke de formene som er mest hensiktsmessige med tanke på mulighetene de innehar for behandling. En mulig løsning på dette er gjennom IBL at elevene samarbeider, og på den måten vil elevene måtte argumentere for hvorfor nettopp deres valg av representasjonsform er hensiktsmessig. Samtidig må elevene følge andres tanker og får muligheten til å se andre måter å konvertere matematiske objekter, som kan være med å berike matematikkundervisningen. Dette poenget beveger seg naturligvis utenfor vårt synsfelt, med tanke på at vi kun ser på matematikkoppgaver. Samtidig er dette et naturlig poeng knyttet til implikasjoner fra en økt grad av inquiry-basert læring innad i læreverkene.

7 KONKLUSJON

I konklusjonskapittelet oppsummerer vi våre hovedfunn og diskuterer hvordan disse er knyttet direkte til forskningsspørsmålene vi utforsket. Vi vil også adressere didaktiske implikasjoner som følge av våre resultater og foreslå retninger for videre forskning. Denne refleksjonen vil både belyse betydningen av våre funn for praksisfeltet og åpne for nye spørsmål og studier i fremtiden.

7.1 Oppsummering av funn

Vår studie har undersøkt geometrioppgaver for 6. trinn i to utgaver av læreverket Multi, henholdsvis knyttet til LK06 og LK20. Vi har analysert oppgavene med fokus på representasjoner, utforskning og kontekst. Våre hovedfunn viser at overgangen fra LK06 til LK20 har ført til merkbare endringer i oppgavenes utforming og pedagogiske mål.

Forskningsspørsmål 1: *Hvilke representasjonsformer legges det opp til i utvalgte læreverk innenfor temaet geometri i læreverk underlagt LK06 og LK20?*

Våre funn viser at det er stor grad av likhet mellom de to læreverkene, når det gjelder kategoriene vi har satt angående bruken av representasjoner, utforskning og kontekst. Likevel var det noe forskjell da vi fant at læreverket som følger LK20 brukte flere opprinnelige representasjonsformer ved presentering av oppgavene, i tillegg til en større spredning på naturlig tenkte konverteringer. Begge læreverkene har oppgaver som byr på et særegent potensial som legger til rette for ulike typer konverteringer som er hensiktsmessig for undervisning av matematikk.

Forskningsspørsmål 2: *Hvordan kan de ulike representasjonsformene i de respektive læreverk relateres til utforskningsperspektivet, og kontekstualisering i de tilhørende læreplaner (LK06 og LK20)?*

Våre funn knyttet til våre kategorier for utforskning viser liten variasjon i begge de respektive læreverkene. Dette kan ses på som overraskende ettersom LK20 inneholder et eksplisitt fokus på utforskning og problemløsning. Samtidig er det viktig å være klar over at dette kan fremdeles finne sted i klasserommet, selv om vi ikke fant funn som viser dette i vår analyse. På bakgrunn av dette kan vi argumentere for at dette er et område som stagnerer i utvikling med tanke på våre satte kriterier for inquiry-based learning, og elevers valg knyttet til valg av representasjonsmetoder. Samtidig viser vår kvalitative analyse av oppgaver med antatt særegent potensial at det er oppgaver innenfor begge læreverkene som treffer vår definisjon for utforskning, selv om de ikke gjør utslag på våre kategorier knyttet til inquiry-based learning. For kontekstualisering så fant vi svært lite forskjell mellom læreverkene, og en dominans av rene matematiske kontekster. En konsekvens av dette kan være et utappet potensial når det kommer til at elevene får mulighet til å separere ut de matematiske objektene innenfor ulike kontekster, som kan føre til en matematikkfaglig utvikling.

7.2 Didaktiske implikasjoner

Basert på våre funn kan vi konkludere med at implementeringen av LK20 har potensial til å forbedre undervisningen i geometri ved å fremme en mer helhetlig og utforskende tilnærming. Lærere bør oppmuntres til å bruke et bredt spekter av representasjoner og skape oppgaver som utfordrer elevene til å tenke kritisk og utforskende. Dette krever at lærere får tilstrekkelig opplæring og ressurser til å kunne implementere de nye læreplanene effektivt. Videre bør det legges vekt på å integrere virkelighetsnære kontekster i matematikkundervisningen, noe som kan bidra til å øke elevenes interesse og engasjement. Dette kan gjøres ved å bruke oppgaver som knytter matematiske konsepter til praktiske og relevante situasjoner. Vi mener derfor det er hensiktsmessig for læreverkene å implementere oppgaver som i større grad er knyttet til inquiry-based learning. Da tenker vi spesielt på elevers muligheter til samarbeid, genuin inquiry og valg av representasjon for løsning.

7.3 Implikasjoner for videre forskning

Våre funn peker på flere områder som krever videre forskning. For det første er det nødvendig å undersøke hvordan lærere faktisk implementerer de nye læreplanene i klasserommet og hvilke utfordringer de møter. Dette kan gi verdifull innsikt i hvordan man kan støtte lærere bedre i overgangen til LK20. Vår analyse så kun på læreverkene, det hadde derfor vært svært interessant å se nærmere på hvordan bruken av representasjoner i oppgaver møter de andre kategoriene knyttet til Smith & Stein (1998). “Hvordan presenterer lærere oppgaver med særeget potensiale knyttet til bruken av representasjoner?” og “Hvordan møter elever oppgaver som er åpne for ulike måter å representere løsningen?” er begge spørsmål som kommer opp som konsekvens av vår analyse, og våre funn. Det er også behov for lengre studier som kan følge elevers utvikling over tid for å vurdere langtidseffektene av den nye læreplanen på elevenes forståelse og ferdigheter i geometri. Videre forskning bør også se på hvordan ulike undervisningsstrategier og ressurser kan optimaliseres for å støtte dybdelæring og utforskning i matematikkundervisningen.

8 EGENREFLEKSJON

Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har vi opplevd en omfattende læringsprosess som har gitt oss både faglig innsikt og personlig utvikling. Her ønsker vi å reflektere over vår egen prosess, hva vi ville gjort annerledes, og hva vi har lært underveis.

8.1 Prosessen

Arbeidet med masteroppgaven har vært en lang og utfordrende reise. Fra de første idéene og problemstillingene til ferdigstillelsen av analysene og skrivingen, har vi vært gjennom mange faser som har krevd både tålmodighet og engasjement. En viktig del av prosessen har vært å utvikle og anvende vårt analyseverktøy for å evaluere geometrioppgavene i de to utgavene av Multi-lærebøkene. Dette har gitt oss verdifull erfaring i å anvende teoretiske rammeverk i praktisk forskning.

8.2 Hva vi ville gjort annerledes

Våre kriterier for utforskning ser vi i ettertid at ikke var optimale med tanke på synliggjøring av spredningen i oppgavene. Ved å se på kvaliteten på oppgavene fant vi raskt ut at flere oppgaver hadde store potensial for utforskning, samtidig som de ikke var dekket av vårt analyseverktøy. Derfor kunne oppgaver som var svært utforskende bli plassert som "structured" i vårt analyseverktøy, og dermed fikk vi ikke avdekket hele potensialet i oppgaven kun gjennom analyseverktøyet.

8.3 Hva vi har lært

Gjennom arbeidet med oppgaven har vi fått en dypere forståelse av hvordan læreplaner påvirker undervisning og læring i matematikk. Vi har lært mye om viktigheten av representasjoner og utforskning i matematikkundervisningen, og hvordan disse elementene kan bidra til en dypere forståelse for elevene. Videre har vi erfart betydningen av å være kritisk og systematisk i vår tilnærming til forskning, og verdien av å ha en klar og gjennomtenkt metodologi.

Vi har også lært mye om samarbeid og prosjektledelse. Å jobbe sammen på en så omfattende oppgave har krevd god kommunikasjon, deling av ansvar, og evnen til å støtte hverandre gjennom utfordringene. Dette har styrket våre ferdigheter i samarbeid og teamarbeid, noe som vil være nyttig i våre fremtidige karrierer.

Vi har altså blitt dyktige på å analysere oppgaver med tanke på oppgavens bruk av representasjoner, tenkte naturlig overganger av representasjoner, utforskning og kontekst. Dette tar vi med oss inn i arbeidslivet for å berike matematikkundervisningen for elevene.

8.4 Avslutning

Til slutt ønsker vi å uttrykke vår takknemlighet for veiledningen og støtten vi har mottatt gjennom hele prosessen. Vi ser tilbake på denne perioden som en tid med stor læring og personlig vekst. Selv om det har vært utfordrende, har vi oppnådd en dyp tilfredsstillelse i å fullføre et prosjekt som vi tror vil bidra til forståelsen og forbedringen av matematikkundervisningen i norske skoler.

Gjennom refleksjon har vi identifisert områder for forbedring og erkjent de mange ferdighetene og innsiktene vi har utviklet. Denne prosessen har vært avgjørende for vår faglige utvikling og vil uten tvil påvirke vår fremtidige praksis og videre forskning.

Litteratur

Alex, J. K., & Mammen, K. J. (2016). Lessons Learnt from Employing van Hiele Theory Based Instruction in Senior Secondary School Geometry Classrooms. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), 2223-2236. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1228a

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2014). *Multi 6a, 2. utgave: Grunnbok, matematikk for barnetrinnet*. Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2014). *Multi 6, 2. utgave: Oppgavebok, matematikk for barnetrinnet*. Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A-C. & Nordberg, G. (2021). *Multi 6a, 3. utgave: Elevbok*. Gyldendal Undervisning.

Andreassen, S.-E. (2014). Lokale læreplaner - kunnskapsmonopol eller kompetansemeny? I K. A. E. Røvik, Tor Vidar Furu, Eli Moksnes (Red.), Reformideer i norsk skole: spredning, oversettelse og implementering (s. 373-402). Oslo: Cappelen Damm akademiske.

Birkeland, P. A, Breiteig, T., Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1* (6). Universitetsforlaget.

Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. Qualitative Research Journal, 9(2), 27-40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Bråtalien M, Naalsund M, Eriksen E. (2023). Exploring the Interplay between Conceptualizing and Realizing Inquiry—The Case of One Mathematics Teacher's Trajectory. *Education Sciences*, 13(8), 843. https://doi.org/10.3390/educsci13080843

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. I D. A. Grouws (Red.), Handbook on Mathematics Teaching and Learning (s. 420–464). New York: Macmillan.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Engelsen, B. U. (2015). Kan læring planlegges?: arbeid med læreplaner - hva, hvordan, hvorfor: skrevet mot LK06: Læreplan for kunnskapsløftet (7. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Gersten, R., Compton, D., Connor, C. M., Dimino, J., Santoro, L., Linan-Thompson, S., & David Tilly, W. (2014). Assisting students struggling with reading: Response to intervention and multi-tier intervention in the primary grades.

Gundersen, K. (2021). Handlingsdimensjonene i LK06 og LK20: En diskursanalyse av læreplaner i matematikk. Masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, Universitetet i Tromsø.

Harlen OBE, W. (2018). *The Teaching of Science in Primary Schools* (7. utg.). David Fulton Publishers. https://doi.org/10.4324/9781315398907

Harrison, C., Howard, S. (2022). Working with Inquiry Activities to Encourage Creative Thinking. In: Murcia, K.J., Campbell, C., Joubert, M.M., Wilson, S. (eds) Children's Creative Inquiry in STEM. Sociocultural Explorations of Science Education, vol 25. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94724-8_7

Imsen, G. (2020). Lærerens verden: innføring i generell didaktikk (6. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Karseth, B., & Sivesind, K. (2010). Conceptualising Curriculum Knowledge within and beyond the National Context. European Journal of Education, 45(1), 103-120. https://doi.org/10.1111/j.1465-3435.2009.01418.x

Kjærstad, T. (2011). Kunnskapsledelse etter Kunnskapsløftet: En sammenlikning av PISAs rammeverk, læreplan og læremidler i matematikk. Masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Klungrehaug, G. (2020). LK06 og LK20: En kvalitativ undersøkelse av to læreplaner i matematikk. Masteroppgave, OsloMet – storbyuniversitetet, Fakultet for lærerutdanning og internasjonale studier, Institutt for grunnskole og faglærerutdanningen.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Le Fevre, D. M., Robinson, V. M. J., & Sinnema, C. E. L. (2015). Genuine inquiry: Widely espoused yet rarely enacted. Educational Management Administration & Leadership, 43(6), 883-899. https://doi.org/10.1177/1741143214543204

Malterud, K. (2001). Kvalitativ forskning: standarder, utfordringer og retningslinjer. The Lancet, 358(9280), 483-488. https://doi.org/10.1016/S0140-6736(01)05627-6

Marchis, I. (2012). Preservice Primary School Teachers' Elementary Geometry Knowledge. Acta Didactica Napocensia, 5(2), 34-39.

Mason, M. (2002). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. Charlottesville, Virginia: University of Virginia.

PRIMAS project. (2011). *Promoting inquiry-based learning (IBL) in mathematics and science education across Europe: PRIMAS guide for professional development providers.* PRIMAS.

Savery, J. R. (2006). Overview of Problem-Based Learning: Definitions and Distinctions. Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning, 1, 9-20. http://dx.doi.org/10.7771/1541-5015.1002

Skovsmose, O. (2023). Critical Mathematics Education. Springer Nature Switzerland AG. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5

Skovsmose, Ole. (2001). Landscapes of Investigation. ZDM - International Journal on Mathematics Education. 33. 123-132. 10.1007/BF02652747.

Stein, M.K., & Smith, M.S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.

Utdanningsdirektoratet. (2015a). Generell del av læreplanen (UTGÅTT). Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/utgatt/generell-del-av-lareplanen-utgatt/

Utdanningsdirektoratet. (2015b). Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2020). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2020). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (10. utg.). Pearson.