Matematisk modellering i lærebøker og skriftlig eksamen på 10.trinn

En sammenligning før og etter innføring av LK20 ut fra en kvantitativ innholdsanalyse av et læreverk og skriftlig eksamen på 10.trinn.

Lars Hammer

VEILEDER
Shaista Kanwal

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematikk

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter jeg mitt treårig løp med videreutdanning i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder. Det startet som et studie, som skulle utvikle meg i rollen som lærerspesialist i matematikk ved skolen der jeg jobber. Allerede noen måneder inn i studiet ble tittelen og jobben som lærerspesialist strøket med et pennestrøk fra politisk hold. Derfor var det med glede vi fikk muligheten til å fullføre masterutdanningen med spisset fokus mot matematikkdidaktikk. Bare fremtiden vil vise om lærerspesialistordningen gjenoppstår i en eller annen form.

Jeg vil takke mine medstudenter for alle gode samtaler og all inspirasjon jeg har fått gjennom faglige diskusjoner og forslag til gode metoder for undervisning i matematikk. Videre vil jeg takke min veileder, Shaista Kanwal, for gode veiledningssamtaler og trøst når arbeidet har virket uoverkommelig. En takk sendes også til arbeidsgiver, som har lagt til rette for at jeg har kunnet fordype meg i faget, og mine kollegaer som har vist interesse for studiet og masteroppgaven.

Den største takken skal likevel min samboer Lisa, sammen med våre barn Martine, Andrea, Sofie og Helle ha. De har lagt til rette for at jeg har kunnet gjemme meg bort med oppgaven på hytta eller på loftet, og heiet på meg gjennom hele arbeidet med masteroppgaven. Uten deres støtte hadde denne oppgaven aldri blitt en realitet. Jeg ser frem til å kunne fungere som pappa og kjæreste igjen.

Harstad, mai 2024

Lars Hammer

Sammendrag

Mitt utgangspunkt for masterprosjektet var et ønske om å undersøke hvordan kjerneelementenes inntreden i læreplanen påvirker oppgaver gitt ved skriftlig eksamen i matematikk på 10.trinn. Underveis i arbeidet så jeg nødvendigheten av å knytte den vurderte læreplanen, i form av eksamen, sammen med den tiltenkte læreplanen (LK06 g LK20) og den vedtatte læreplanen, her representert ved lærebøker fra før og etter innføringen av gjeldende læreplan.

Prosjektet er en kvantitativ innholdsanalyse av fire eksamener gitt til elever på 10.trinn i matematikk, det være seg de to siste før innføring av ny læreplan, LK20, og de to første etter innføring av LK20. I tillegg har jeg analysert oppgaver fra tre matematiske temaer i to lærebøker fra samme forlag. Den ene læreboka er gitt ut i 2015, basert på LK06, mens den andre er utgitt i 2021, etter innføring av LK20.

I analysen har jeg benyttet meg av et rammeverk som tar utgangspunkt i en modelleringssyklus utviklet av Blum og Leiss (2007), som tidligere er benyttet av Berget (2022) i sin studie av lærebøker og eksamen i videregående skole i Norge. I studien har jeg vært på jakt etter hvilke muligheter som ligger i de 551 analyserte oppgavene i lærebøkene for at elevene skal utvikle modelleringskompetanse, og hvilke deler av modelleringssyklusen som de 72 analyserte eksamensoppgavene legger til rette for at elevene får vist sin kompetanse i.

Resultatene av analysen viser en endring i retning av at matematisk modellering vil få en mer markant plass i matematikkundervisningen i norsk skole. Sammenligningen av lærebøkene er positiv og viser at andel oppgaver som legger til rette for å arbeide med hele modelleringssyklusen øker innenfor alle analyserte matematiske temaer. Endringen er også synlig i analyserte eksamener, om enn ikke like tydelig.

Avslutningsvis drøftes hvordan ivareta matematisk modellerings i lærebøker og nåværende eksamensform, og en prøveordning fra Utdanningsdirektoratet lanseres som en mulig løsning på sistnevnte utfordring.

Abstract

My starting point for the master's project was a desire to investigate how introduction of the core elements into the curriculum affects written exams in 10th grade. During this study, I felt it necessary to link the assessed curriculum, in the form of examination, with the intended curriculum (LK06 g LK20) and the adopted curriculum, represented by textbooks in this thesis, from both previous and current curriculum.

The project is a quantitative content analysis of tasks in four exams for 10th grade students in mathematics. I have compared two exams from previous curriculum and the first two exams given after the introduction of LK20. I have also analyzed tasks from three mathematical topics in two textbooks published by the same publisher. One textbook was published in 2015, based on LK06, while the other was published in 2021, after the introduction of LK20.

For analysis, I have used a framework of a modelling cycle developed by Blum and Leiss (2007), which has previously been used by Berget (2022) in her study of textbooks and exams in upper secondary school in Norway. In my study, I have been looking for what opportunities lie in the 551 analyzed tasks in the textbooks for the students to develop modeling competence, and which parts of the modeling cycle that the 72 analyzed exam tasks facilitate for the students to demonstrate their modeling competence.

The results of the analysis reveal a change into mathematical modelling taking a more prominent role in mathematics teaching in Norwegian schools. The comparison of the textbooks shows that the number of tasks making students work with the entire modelling cycle is increasing within all analyzed mathematical topics. The change is also visible in exams, although not as clear.

In the end of this study there is presented a possible solution from the Norwegian Directorate for Education and Training giving students the possibility to show their modelling competencies in exams.

Innholdsliste

1. Innledning

Gjennom mange år som matematikklærer på ungdomstrinnet har avsluttende skriftlig eksamen blinket i det fjerne. Uten at det har vært et tema i den daglige matematikktimen, vet man at den kan komme. Læreren bærer på et ønske om at akkurat sine elever skal være best mulig forberedt den dagen de sitter der med penna klar og oppdatert PC, til grunnskolens største test. Ved innføringen av ny læreplan, og gjennom min videreutdanning i matematikk, har modellering fått en mer sentral rolle i min undervisning. Jeg lurte derfor på hvor stor plass matematisk modellering får i sentralt gitt skriftlig, og på om det er samsvar mellom hva læreplanen sier, og det oppgavene på eksamen krever av elevenes kompetanse i matematisk modellering. Samtidig er det interessant å se på hvordan lærebokforfatterne forholder seg til at kjerneelementene, deriblant *modellering og anvendelse*, har fått en så tydelig rolle i læreplanen.

I denne oppgaven vil jeg først presentere relevant teori om matematisk modellering, om modelleringens plass i læreplanen og ulike perspektiver på modellering. Videre vil metoden brukt for analysen forklares inngående, før resultater av analysen danner grunnlag for en drøfting på bakgrunn av presentert teori.

Læreplanens ord, formuleringer og utforming blir omtalt som den tiltenkte læreplanen, altså hva læreplanforfatterne mener at elevene skal lære. Videre handler det om hvordan den enkelte lærer forstår læreplanen og hva som foregår av læringsaktiviteter i klasserommene, gjerne kalt den vedtatte læreplanen. Valverde et al. (2002) beskriver også tredelingen og kaller det *intended*, *implemented* og *attained curriculum*. Kort fortalt handler det om det læreplanen forteller at elevene skal lære (intended), hvilke strategier og hvordan det jobbes i skolen (implemented) og hva elevene faktisk sitter igjen med (attained). I denne oppgaven vil jeg konsekvent bruke de norske ordene tiltenkt, vedtatt og vurdert læreplan.

Denne masteroppgaven vil sette søkelys på den vurderte læreplanen, gjennom en analyse av den eneste formen for sentralt gitt vurdering som finnes i grunnskolen, skriftlig eksamen etter 10.trinn. Samtidig må man ha alle tre «læreplanene» med seg i denne prosessen da eksamens intensjon er å objektivt teste elever i det som læreplanen har tiltenkt, så vel som det som elevene har lært gjennom 10 år med matematikkundervisning.

Med innføring av ny læreplan, LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019), betyr det i så måte at den vurderte læreplanen også må endres. Selv om antall år med eksamen etter LK20 er begrenset til to er det likevel interessant å gjennomføre et dypdykk i om disse endringene er tydelige og i så fall på hvilken måte. Jeg har i prosessen gått grundig til verks gjennom å analysere alle oppgavene gitt fra fire oppgavesett gitt til tiendeklassingene i matematikk, to fra LK06 og to fra LK20. Samtidig har jeg tatt for meg et læreverk fra et av de største forlagene i Norge for å få et innblikk i hvordan de har endret seg med innføringen av Fagfornyelsen, og hvilken plass modelleringen har fått i disse.

Den tiltenkte læreplanen, henholdsvis LK06 og LK20, initierer både hva som skjer i klasserommet og hva som skal vurderes etter endt grunnskole. Lærebokforlagenes fagbøker er skrevet og utformet på bakgrunn av det læreplanen forteller at elevene skal lære i matematikk. Det som skjer i klasserommet, blir i stor grad påvirket av det som står i lærebøkene. Nyere forskning sier at lærebøkenes plass i norske matematikklasserom er stor, men at det i nyere tid blir supplert med andre typer læringsressurser.

> How the textbook tasks ultimately affect students' learning depends on how the teachers interpret and enact the textbooks—as well as the curriculum documents—in the classrooms. (Deng, 2015, i Bakken & Andersson-Bakken, 2021, s. 745).

Dette tyder på at lærebøkene i stor grad påvirker den vedtatte læreplanen. Med andre ord er lærebøkene med på å bygge bro mellom den tiltenkte og den vedtatte læreplanen. Det er ikke denne masteroppgavens intensjon å belyse fordeler og ulemper med det, annet enn at det setter denne analysen i en kontekst, og i så måte er det et aspekt å ta med når vi ser på den vurderte læreplanen.

1.1 Bakgrunn for valg av tema og problemstilling

Min nysgjerrighet for temaet økte da jeg leste Ingeborg Kathrin Lid Bergets sin studie (Berget, 2022) som setter et kritisk søkelys på modelleringsoppgaver i lærebøker og avsluttende eksamen for videregående elever i 2P matematikk. Her undersøker hun mer enn 500 oppgaver fra 3 ulike læreverk og alle eksamensoppgaver i faget gitt fra 2006 til 2020/2021, altså de som er gitt ut fra LK06. Hennes hovedfunn er at i de fleste av disse oppgavene er matematiseringen allerede gjort av forfatterne, og at det som kreves av eleven kun handler om den vertikale matematikken. Hun analyserer oppgavene med Blum og Leiss

sin modelleringssyklus på 7 steg. Hun definerer hvert enkelt steg og henviser til disse i sine analyser. Nevnte modelleringssyklus er inngående forklart i kapittel 2 og hvordan den brukes forklares i kapittel 3.
Jeg vil, på samme måte som Berget (2022), benytte Blum og Leiss sin modelleringssyklus (Blum & Leiss, 2007), som verktøy for å se på hvilke steg som kreves for å løse oppgaver i eksamensoppgaver, og samme lærebok for 10.trinn en fra hver av de to nevnte læreplaner. Derfor kan dette arbeidet sees på som et supplement til Bergets arbeid, om enn med en litt annen vinkling da jeg aktivt sammenligner eksamenssettene og bøkene før og etter innføring av ny læreplan. Jeg behandler analysene hver for seg og det gir meg 2 problemstillinger.

Mine problemstillinger blir da:

1. ***Hvilke steg i modelleringssyklusen legger lærebokoppgaver på 10.trinn til rette for at elevene får øving i, sammenliknet med tilsvarende oppgaver fra før innføringen?***
2. ***Hvilke steg krever eksamensoppgavene at elevene behersker etter innføring av ny læreplan, sammenliknet med eksamensoppgaver fra før innføringen?***

I tillegg har jeg formulert noen underspørsmål:

1. Hvordan ivaretar lærebøker de syv stegene i Blum og Leiss' modelleringssyklus etter innføringen av LK20?
2. I hvilken grad får elevene vist sin modelleringskompetanse, eventuelt hvilke steg krever oppgavene i femtimers skriftlig eksamen i matematikk?
3. Hvilke sammenhenger finnes mellom den vedtatte læreplanen (representert ved lærebøkene) og den vurderte læreplanen (representert ved skriftlig eksamen)?

1.2 Modellering i læreplanen

Modellering er en del av kjerneelementet *modellering og anvendelse*, men det er ikke slik at modellering i læreplaner i matematikk er nytt av 2020. Matematiske modeller, forstått som modeller laget for å forenkle virkeligheten, har lenge vært en del av matematikken. Blum og Borromeo Ferri (2009) hevder at modellering ikke har den plassen som er ønskelig i klasserommet, og begrunner det med at modellering også er vanskelig for lærere ved at det krever en annen form for undervisning der oppgavene er mer åpne og undervisningen blir mindre forutsigbar (s.45).

I tillegg til at ordet modellering kommer til syne gjennom nevnte kjerneelement er det på tiende trinn to kompetansemål som spesifikt bruker ordet modellering:

- Bruke funksjoner i modellering og argumentere for fremgangsmåter og resultat
- Modellere situasjoner knyttet til reelle datasett, presentere resultatene og argumentere for at modellene er gyldige.

  (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Det må presiseres at kompetansemålene må sees i lys av formålet med faget. I læreplanen i matematikk for grunnskolen under «Fagets relevans og sentrale verdier» står det at «matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv» (Kunnskapsdepartementet, 2019), og det passer godt med tanken om at modellering nettopp starter i det virkelige liv. Stillmann (2015) skiller mellom retningen på prosessen ved anvendelse og matematisk modellering. Begge disse perspektivene må derfor med i nevnte mål.

Et siste poeng å nevne angående modellering i læreplanene, all den tid forskningsspørsmålet omhandler sammenlikning av eksamensoppgaver og lærebokoppgaver gitt før og etter innføringen av LK20, er Berget og Bolstad (2019) sine funn i sin kvantitative studie av hvor mange ganger ordet modellering, modell eller modeller forekommer i de ulike læreplanene. Her må det presiseres at deres studie omhandler utkastet til den nye læreplanen. Likefullt er funnene deres interessante. I LK06 forekommer ordet 5 ganger i læreplanen for grunnskolen, mens den i utkastet til LK20 forekommer 16 ganger, altså mer enn en tredobling. Gjennom samme opptelling av gjeldende læreplan gjelder samme tendens. I den innførte LK20 finner man ordet brukt 20 ganger i læreplanen i matematikk for grunnskolen. Det er da interessant å undersøke om den samme økningen også setter avtrykk i den vurderte læreplanen, i dette tilfellet skriftlig eksamen i matematikk på 10.trinn.

2. Teori

I kapittel 2 vil relevant teori løftes frem. Først forklarer jeg hva som ligger i modelleringsbegrepet, for så å løfte frem hvordan tidligere forskere forklarer hva det vil si å ha modelleringskompetanse. Videre presenteres tre modelleringssykluser, som både har likhetstrekk og noen ulikheter. En av disse, Blum og Leiss sin, presenteres mer detaljert gjennom et eksempel da den danner grunnlag for analysen. Avslutningsvis nevner jeg teorier om ulike perspektiver på modellering og kjennetegn på modelleringsoppgaver.

2.1 Modelleringsbegrepet

I modellering skiller man mellom to *verdener*. Den ene er den matematiske verden og alt det andre er den virkelige verden. Pollak (1979) dro dette skillet allerede for over 40 år siden og han fremhevet videre at det er interaksjonen mellom disse verdenene som kjennetegner modellering. Blum og Borromeo Ferri (2009) beskriver en modelleringsprosess som å oversette mellom virkeligheten og matematikken, og at det skjer i begge retninger.

En matematisk modell er en forenklet representasjon av virkeligheten, den har en tydelig hensikt og viser bare enkelte aspekter av virkeligheten (Henn, 2000, sitert i Maaß, 2010, s.287). Det skilles ofte mellom beskrivende modeller og normative modeller. En beskrivende modell etterstreber å representere virkeligheten så korrekt som mulig, mens en normativ modell bare viser deler av virkeligheten. Sistnevnte har ofte en tydelig hensikt med hva de som lager modellen ønsker å vise (Maaß, 2010).

Et arbeid bestilt av Kunnskapsdepartementet, ledet av Carla Botten-Verboven, sammen med ni andre med bakgrunn i skolen, analyserte matematikkundervisninga i norsk skole. Idédokumentet viser til utsagn fra elever som sier at «Matematikk på skolen og i matematikkboka er noe annet enn matematikk i hverdagslivet» (Botten-Verboven et al., 2010, s.35). Det er altså elevene selv som svarer at de ikke ser sammenhengen mellom det som læres i matematikk på skolen og den matematikken som de trenger i samfunnet. Schou et al. (2013) påpeker at et viktig aspekt for å lykkes med matematisk modellering i skolen er at eleven kan kjenne seg igjen i situasjonen og at det er noe hen kan relatere seg til.

2.2 Modelleringskompetanse

Å ha modelleringskompetanse beskrives som å kunne konstruere modeller ved å gjennomføre de ulike stegene på en passende måte, så vel som å kunne analysere og sammenligne gitte modeller (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

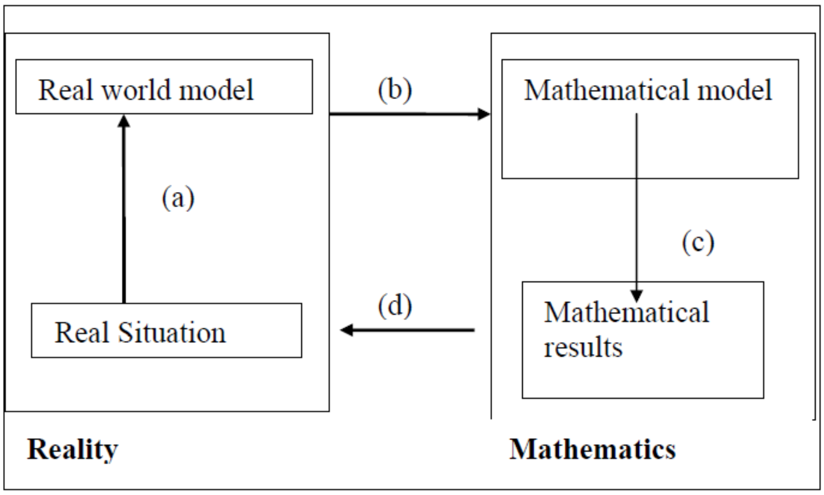
Maaß (2010) argumenterer for at å lykkes med modellering er det flere subkompetanser som trengs gjennom en modelleringsprosess. Hun fremhever spesielt at resonnering trengs for å løse de enkelte stegene. Videre trekker hun frem viktigheten av å kunne forklare og grunngi stegene i en modelleringsprosess.

Wess et al. (2021) sier at for å ha modelleringskompetanse må eleven kunne oversette mellom virkelighet og matematikk i begge retninger og jobbe med matematiske modeller. Blum et al. (2007) definerer modelleringskompetanse slik:

> Mathematical modelling competency means the ability to identify relevant questions, variables, relations or assumptions in a given real world situation, to translate these into mathematics and to interpret and validate the solution of the resulting mathematical problem in relation to the given situation, as well as the ability to analyse (sic!) or compare given models by investigating the assumptions being made, checking properties and scope of a given model etc. (s. 12)

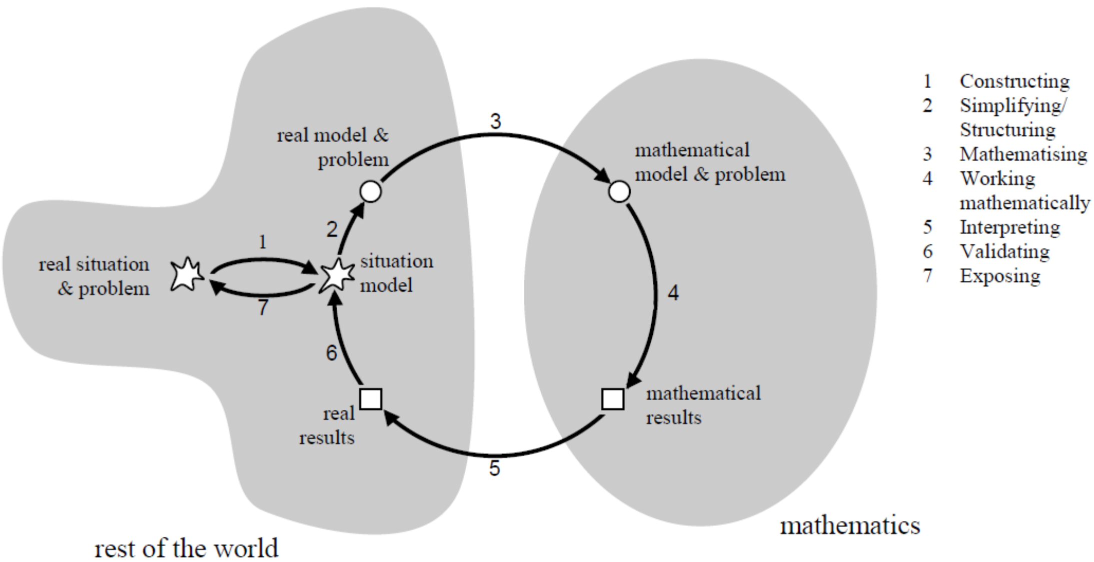
2.3 Modelleringssykluser

I dette avsnittet vil jeg presentere tre ulike modeller som beskriver prosessen for matematisk modellering. En av dem vil stå sentralt i dette arbeidet, men det er også av hensikt å se på andre liknende modeller. Flere av disse likner på, og springer ut av, hverandre. Borromeo Ferri (2006) presenterer en modell utarbeidet av de tyske skoleforskerne Gabrielle Kaiser og Werner Blum midt på 90-tallet, delt inn i fire. Denne modellen skiller veldig tydelig mellom den virkelige verden og den matematiske verden. Bokstavene a-d (se Figur 2.1) beskriver den kognitive prosessen som skjer mellom de ulike stegene, der (a) henviser til at det må lages en modell i den virkelige verden, (b) til horisontal matematisering, (c) til den vertikale matematiseringen og (d) til tolkingen av svaret en jobber seg frem til i den matematiske verden sett opp mot den opprinnelige situasjonen (Borromeo Ferri, 2006).



Figur 2.1 Modelleringssyklus (Kaiser, 1995 & Blum, 1996, sitert i Borromeo Ferri, 2006, s. 88)

En annen modell, som senere vil danne grunnlaget for denne analysen, ble utarbeidet av Blum og Leiss (2007) (se Figur 2.2). Det er altså samme forsker, den tyske matematikeren Werner Blum, som har tatt del i utviklingen av begge disse modellen med et drøyt tiårs mellomrom. Denne modellen, som er vidt anerkjent, består av 7 steg som starter i den virkelige verden, tar veien om matematikken og ender tilbake igjen i den virkelige verden, som i en syklus.

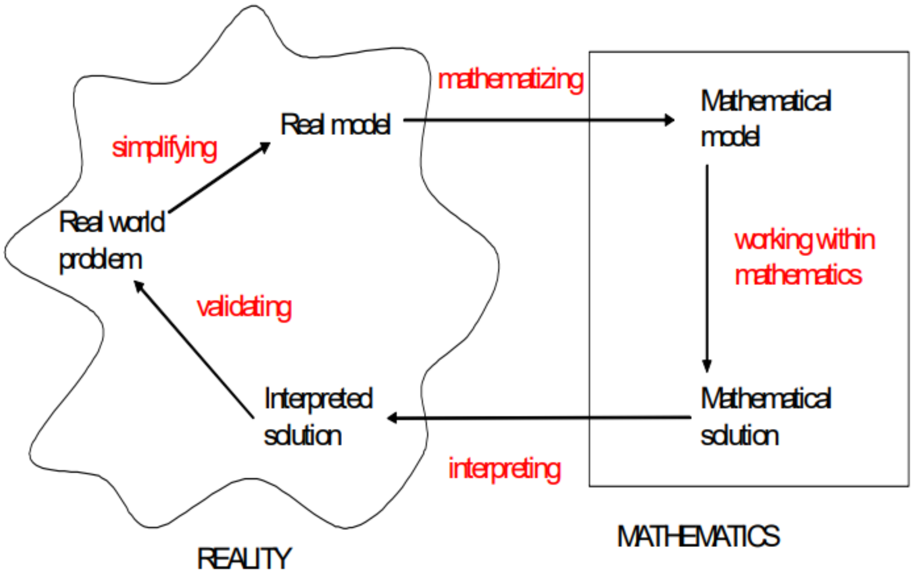


Figur 2.2 Blum og Leiss' modelleringssyklus (2007)

Modellen til Blum og Leiss deler den virkelige og den matematiske verden fra hverandre, i dette tilfellet representert ved de grå feltene som holdes adskilt. Modelleringssyklusen er beskrevet som 7 steg og i det følgende vil jeg gå nærmere inn på å forklare hvert enkelt steg. Ruten gjennom syklusen er ikke lineær, hvilket betyr at elevene ikke må følge stegene i samme retning som pila viser, og Blum og Leiss presiserer at alle steg, og interaksjonen mellom dem, krever kognitive prosesser. Begrepene i modellen beskriver hvor elevene er i prosessen, mens stegene 1-7 beskriver hvilke arbeidssituasjoner elever befinner seg i.

Syklusen starter med en virkelig situasjon eller et problem, og her kreves det at elevene må forstå oppgaven (1) for å kunne lage en situasjonsmodell. Deretter må de strukturere og forenkle gjennom å gjøre valg (2) og på den måten utarbeide en virkelighetsnær modell, ofte kalt reell modell. I denne delen må elevene gjøre antakelser, velge ut hva som er relevant for oppgaven og ta noen valg for hvilke hensyn som skal med videre i prosessen. Videre beveger eleven seg fra den virkelige verden over til den matematiske, det gjøres ved at man matematiserer (3), som her betyr å oversette problemet fra den virkelige verden til å bli et matematisk problem. Etter matematisering innehar eleven en matematisk modell av situasjonen, beskrevet med tall og matematiske symboler. Da er det klart for å jobbe matematisk (4) med modellen gjennom bruk av ulike representasjonsformer for å få et matematisk svar eller resultat. Videre tar eleven tak i det matematiske svaret eller resultatet og oversetter det tilbake igjen til den virkelige verden for å så tolke (5) dette i lys av det virkelige problemet. Neste steg er å validere løsningen eller løsningene (6) mot situasjonsmodellen. Eleven kan da spørre seg? Stemmer det hen har funnet ut? Er det noe som ikke er tatt hensyn til? Er det noe som burde vært droppet? Etter valideringen sjekker man resultatet (7) og om man har svart på oppgaven. I mange tilfeller vil det være hensiktsmessig å gå frem og tilbake mellom stegene i syklusen, eventuelt hoppe over et steg som ikke er nødvendig i akkurat den prosessen hen behandler (Blum og Leiss, 2007).

En tredje modell (se Figur 2.3) ble utarbeidet av Maaß (2006), og har klare likhetstrekk med Blum sine modeller. Modellen må, ifølge Maaß, oppfattes som et forenklet skjema og ikke en algoritme man følger fra punkt til punkt. Hun grunngir det ved å understreke at den virkelige modellen vil påvirkes av den enkelte elevs matematiske kunnskap. Videre peker hun på sammenhengen mellom modelleringsprosess og modelleringskompetanse, og at modelleringskompetanse består av flere delkompetanser. Delene hun refererer til er kompetanse i å forstå den virkelige modellen, lage en matematisk modell, jobbe matematisk og validere sin løsning. (Maaß, 2006)



Figur 2.3 Modelleringssyklus laget av Maaß (2006)

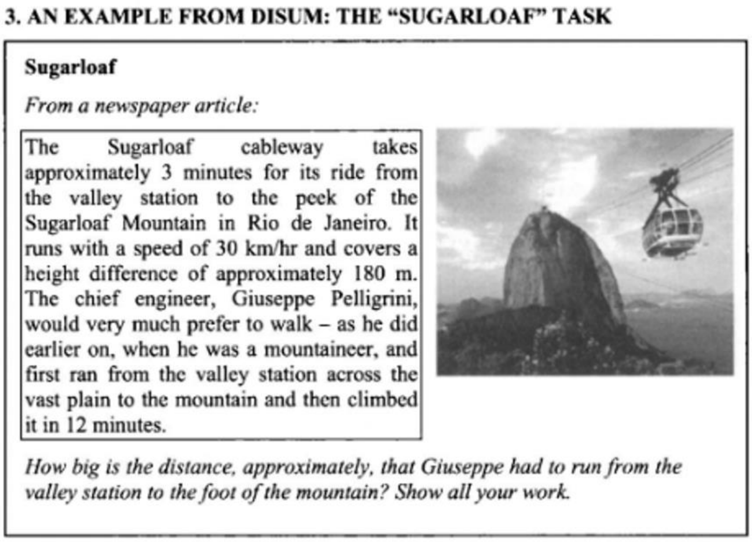
Janvier (1996) er enda mer spesifikk i sine tanker rundt elevers arbeid med matematisk modellering. Han hevder at det er formuleringsfasen og valideringsfasen som er mest utfordrende for elever. Sett opp mot Maaß (2006) og Blum og Leiss (2007) sine modeller, handler det om overgangene fra virkelig situasjon til matematisk modell og fra den matematiske modellen tilbake til den virkelige situasjonen.

Av de tre modellene for matematisk modellering er det, på samme måte som i Berget (2022), Blum og Leiss (2007) sin modell, som vil danne grunnlaget som rammeverk for dette arbeidet. I tillegg til at studien til Berget bruker modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007) velger jeg den samme fordi den er allment akseptert i modelleringsdebatten (Hankeln et al. 2019). Den er, etter mitt skjønn, enkel og forståelig, og tydelig forklart gjennom eksempelet jeg vil vise til i det følgende. I neste avsnitt vil jeg bruke nevnte eksempel fra Blum og Leiss for å tydeliggjøre hvordan modelleringssyklusen kan brukes i praksis. I metodedelen vil jeg komme inn på hvordan modelleringssyklusen vil brukes i analysen.

2.4 Forklaring av modelleringssyklus i «Sukkertoppen»

Blum og Leiss (2007) forklarer modelleringssyklusen gjennom å vise hvordan de analyserer en oppgave kalt «Sugarloaf», eller «Sukkertoppen» (min oversettelse). Oppgaven er hentet fra prosjektet DISUM som kom i stand på bakgrunn av at tyske elever presterte bekymringsfullt lavt på TIMSS-undersøkelsen sent på 90-tallet. DISUM står for «Didactical intervention modes for mathematics teaching oriented towards selfregulation and directed by tasks» og undersøker hvordan elever og lærere håndterer modelleringsproblemer (Blum & Leiss, 2007, s. 223).

Prosjektet er med andre ord mer omfattende enn kun å se på modelleringssyklusen, men den er interessant i min forskning fordi den gjennom å bruke nevnte eksempler forklarer de ulike stegene i modelleringssyklusen, og hvilke kognitive utfordringer elevene møter i modelleringsoppgaver.


3. AN EXAMPLE FROM DISUM: THE "SUGARLOAF" TASK

Sugarloaf

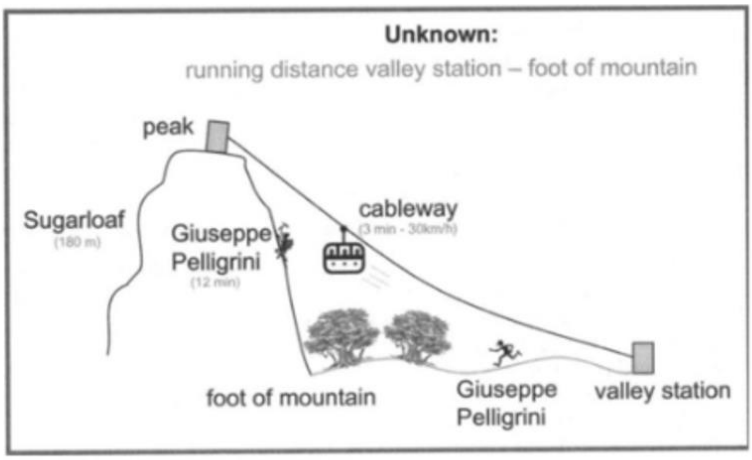
From a newspaper article:

The Sugarloaf cableway takes approximately 3 minutes for its ride from the valley station to the peek of the Sugarloaf Mountain in Rio de Janeiro. It runs with a speed of 30 km/hr and covers a height difference of approximately 180 m. The chief engineer, Giuseppe Pelligrini, would very much prefer to walk – as he did earlier on, when he was a mountaineer, and first ran from the valley station across the vast plain to the mountain and then climbed it in 12 minutes.

How big is the distance, approximately, that Giuseppe had to run from the valley station to the foot of the mountain? Show all your work.

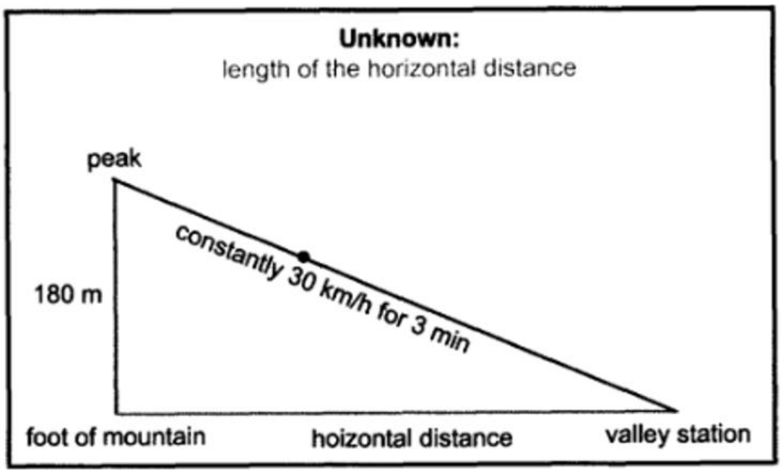
Figur 2.4 Sukkertopp-oppgaven. Brukt av Blum og Leiss (2007) til å forklare stegene i modelleringssyklusen.

I det følgende bruker jeg Blum og Leiss (2007) sin forklaring, gjennom eksempelet, for å tydeliggjøre hva som kreves av eleven i de ulike stegene i modelleringssyklusen (Figur 2.2). I steg 1 handler det om å lese teksten og forstå situasjonen for så å lage en situasjonsmodell (Figur 2.5).



Figur 2.5 Situasjonsmodell av Sukkertopp-oppgaven.

I steg 2 gjøres det valg, forenklinger og struktureringer for å konstruere en virkelig modell, som vist i Figur 2.6. For eksempel ser man at den virkelige modellen er blitt en rettvinklet trekant og på sidene i trekanten er avstander og fart satt inn for at det i neste steg skal kunne matematiseres. All informasjon som ikke trengs for å løse oppgaven er fjernet.



Figur 2.6 Virkelig modell av Sukkertopp-oppgaven.

Matematiseringen i steg 3 gjør nevnte modell om til en matematisk modell, som i dette tilfellet er en rettvinklet trekant med en ukjent side. Det fører til at når eleven skal jobbe matematisk (steg 4) så er det naturlig å ta i bruk Pytagoras læresetning for å finne den ukjente siden (lengste katet). Videre må eleven tolke det matematiske svaret han fikk opp mot den virkelige situasjonen. Når vi så diskuterer steg 6: validering, blir dette eksempelet interessant. Det handler om å sjekke om det er noen hensyn som ikke er tatt. Blum og Leiss problematiserer det gjennom flere gode poenger som eleven bør ta hensyn til, som for eksempel at kabelen til gondolen ikke er en rett linje, gondolen har naturlig nok lavere fart ved start og slutt av turen og at fjellet ikke danner en vinkel på 90° med bakken. Det betyr at eleven ikke kan se bort fra dette og må ta en runde tilbake til steg 1 i sin syklus før hen til slutt kommer frem til en løsning av problemet (Blum & Leiss, 2007).

2.5 Perspektiver på undervisning av modellering

Å modellere betyr å forstå et problem fra virkeligheten, gjennom å lage en modell og finne en løsning på problemet ved å jobbe matematisk med modellen (Maaß, 2010). LK20 beskriver modellering på denne måten: «En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Blum og Niss (2020) trekker frem to grunner til å jobbe med matematisk modellering i matematikkundervisningen. De kaller det *modellering for matematikkens skyld* og *matematikk for modelleringens skyld*. Disse perspektivene er ikke motstridende, men de vil gi ulike konsekvenser basert på de valg læreren gjør og de aktivitetene det legges opp til at elevene skal jobbe med (s.28). Stillmann (2015) er innom det samme for å beskrive anvendelse av matematikk som når det går fra matematikk til virkelighet, mens matematisk modellering har motsatt retning, altså fra virkelighet til matematikk.

Andre forskere begrunner at modellering er viktig ut fra tre perspektiver. Blant flere, deler Julie (2002) inn i *modelling as content, modelling as vehicle og modelling as critisism.* Berget og Bolstad (2019) oversetter disse tre perspektivene til; modellering som innhold, modellering som fartøy og modellering som kritikk. I det ligger det at man har ulike mål med modelleringsprosessen, til forskjell fra Blum (2015), som nevner sine perspektiver som grunner til at det bør drives med utvikling av modelleringskompetanse i matematikk (Berget & Bolstad, 2019).

Når det er snakk om modellering som innhold, er det å utvikle selve modelleringskompetansen som er målet. Underforstått at man skal løse et problem ved hjelp av matematikk og en tanke om at man da utvikler matematikk som et verktøy for å forstå dagliglivet. Det sammenfaller med Blum og Niss (2020) sitt første argument for modellering i matematikklasserom.

Modellering som fartøy forklares med at det da ikke er modelleringskompetansen som skal utvikles, men noe annet. I de fleste tilfellene gjelder det matematiske konsepter gjennom at det motiverer elevene å se en relevans for matematikken. I så måte passer det godt med det andre argumentet til Blum og Niss (2020). Vi ser her at det er ulike nyanser mellom de to perspektivene. Der Blum og Niss (2020) forsøker å begrunne hvorfor elever skal bli jobbe med modelleringsoppgaver, ser Berget og Bolstad (2019) på målet med modelleringsoppgavene. Likevel kan det hevdes at de argumenterer for det samme og jeg vil i denne oppgaven bruke begrepene som tilnærmet synonymer (se Tabell 2.1).

Tabell 2.1 Sammenlikning av Blum og Niss (2020) og Berget og Bolstad (2019) (min tolkning).

Begrunnelse for modelleringsoppgaver Blum og Niss (2020)	**Mål med modelleringsoppgaver** Berget og Bolstad (2019)
Matematikk for modelleringens skyld ↔	Modellering som innhold
Modellering for matematikkens skyld ↔	Modellering som fartøy

Det nevnte perspektivet om modellering som fartøy har vært gjenstand for debatt. Realistic mathematics education er et eksempel på hvordan modellering blir brukt som virkemiddel for matematikkens skyld. RME er en matematikkdidaktisk metode utviklet med et ønske om å knytte sammen virkelighet og matematikk. RME bygger på Hans Freudenthals tanke om at om elever kan relatere seg til en matematikkoppgave, eller prosess, vil læringsutbytte økes (Schou et al., 2013). I RME blir modellene sett på som representasjoner av problemsituasjoner (Heuvel-Panuizen, 2003). Når det gjelder dette mener Borromeo Ferri (2018) at det da ikke kan betegnes som matematisk modellering. Det samme hevder Galbraith (2012), som sier at det da er en prosess som går fra et matematisk innhold til et annet, og ikke nødvendigvis fra den virkelige verden til den matematiske. Dette synet deles av flere. Eksempelvis hevder Højgaard (2009) at når matematiske oppgaver allerede har gjort antakelsene så er det ikke snakk om den virkelige verden lenger. Hvis man da igjen ser tilbake til Pollak (1979) og Blum og Leiss (2007) sine definisjoner av modellering blir det en mismatch å kalle det modellering.

Det siste perspektivet er modellering som kritikk. Da handler det om å tolke, forstå og kritisk vurdere gitte modeller. Kritisk tenkning er et viktig begrep i læreplanen, også i matematikk. Herunder å eksempelvis kunne forstå en funksjon, en graf eller en statistisk fremstilling med et kritisk blikk og være i stand til å vurdere modellene. Dette perspektivet er tett knyttet opp mot samfunnet vi lever i og modelleringen utgjør et verktøy for å tolke og forstå ulike samfunnsmessige fremstillinger.

2.6 Kjennetegn på modelleringsoppgaver

Borromeo Ferri (2018) forsøker gjennom å lage kriterier og presentere kjennetegn på modelleringsoppgaver å lage et skille mellom disse og andre typer matematikkoppgaver. Borromeo Ferri peker på at om elever skal utvikle sin modelleringskompetanse må hen jobbe med modelleringsoppgaver. Spørsmålet som da dukker opp er hva som skiller en modelleringsoppgave fra andre oppgaver elevene møter i matematikkfaget.

Borromeo Ferri (2018) argumenterer for at det er seks kriterier som må oppfylles for at en oppgave skal være en modelleringsoppgave. «A modeling problem should be *solvable through the modeling cycle*, which implies that all phases of the modeling cycle must be used» (Borromeo Ferri, 2018, s.47). For det første må oppgaven være åpen, hvilket betyr at det må være lagt til rette for at det er flere måter å løse den på og det må ikke kun være et korrekt svar til oppgaven. For det andre må oppgaven ha en viss kompleksitet som bidrar til at eleven må gjøre undersøkelser og antakelser i sitt forsøk på å forstå den reelle situasjonen. I likhet med Schou et al. (2013) argumenterer også Borromeo Ferri for at det er avgjørende at eleven opplever oppgaven realistisk for at hen skal engasjere seg i den. Det er mangt å tenke på når en lærer eller oppgaveforfatter skal gjøre en oppgave realistisk for en ungdomsskoleelev, deriblant at den oppleves som meningsfull, at den er tilpasset elevers interesse, at den er presentert i et språk eleven forstår og at den er tilpasset elevenes kognitive alder. Det neste kriteriet for en god modelleringsoppgave er, ifølge Borromeo Ferri (2018), at den er autentisk. Med autentisk mener hun at det er en del av oppgaven at eleven eksempelvis skal jobbe med autentiske data. Å gjøre en oppgave autentisk kan være utfordrende og herunder kan det være fare for at den fort består av utdaterte data. Videre fremhever hun at en modelleringsoppgave må unngå at oppgaven lett lar seg løse ved å følge algoritmer, men heller sørge for at oppgaven krever at eleven må ta i bruk strategier for å nå frem til en løsning. Likevel hevder Borromeo Ferri (2018) at det ikke er veldig komplisert å gjøre et problem om til et modelleringsproblem.

> The transformation of problems in to modeling problems could be more manageable for teachers facing time restrictions in school life. For this, mathematical problems in school books should be looked at with this question in mind: how to make tasks more interesting, motivating and with higher cognitive demand by changing them into real life problems. (Borromeo Ferri, 2018, s. 58).

Videre gis det fire enkle faktorer for å gjøre et matematisk problem til et modelleringsproblem. Først nevnes at man kan redusere og/eller utelate data, informasjon og metoder. Dernest kan man modifisere den virkelige situasjonen til å gjøre den mer autentisk.

Så bør man formulere et mer åpent spørsmål. Avslutningsvis bør man definere hvilke verktøy eleven kan ta i bruk i sitt arbeid med problemet (Borromeo Ferri, 2018, s. 58).

En annen studie om kjennetegn på modelleringsoppgaver er gjennomført av Wess et al. (2021). De nevner selv likheten med Maaß (2010) og fremhever koblingen til virkeligheten, representert gjennom situasjonens kontekst, autensiteten og relevansen for eleven. Videre påpekes det at det er viktig at oppgaven er åpen og at den legger til rette for ulike tilnærminger og løsninger.

Vos (2020) problematiserer dette ytterligere gjennom sin studie av oppgaver i matematikkbøker i Nederland. Studien ser på hvordan oppgavedesignere muligens produserer oppgaver og hun deler dem inn i fem oppgavekategorier. Den første kategorien Vos trekker frem er det hun kaller «bare tasks». Disse kjennetegnes ved at oppgaven kun inneholder matematisk språk og symboler. Hennes andre kategori er det hun kaller «dressed-up tasks». Med det mener hun at det er forsøkt å gjøre oppgaven om til en realistisk kontekst, men at det egentlig er en skjult matematisk oppgave. En tredje kategori kaller hun «tasks with mathematical contexts», altså at det er matematikken i seg selv som er utgangspunktet for oppgaven. Slike oppgaver er det, ifølge Vos, mange av innenfor geometri og er som oftest visuelle.

De to siste kategoriene til Vos er interessante i denne studien da de kan knyttes til modelleringsbegrepet og kan relateres til Borromeo Ferri (2018), Maaß (2010) og Schou et al. (2013) sine kjennetegn på modelleringsoppgaver. Vos (2020) kaller disse kategoriene for «oppgaver med realistisk kontekst» og «oppgaver med autentisk kontekst». I mitt utvalg av oppgaver fra bøker og eksamener har jeg valgt å inkludere samtlige oppgaver med ett unntak. Unntaket er «bare tasks». Dette valget utdypes og forklares i metodedelen.

2.7 Vertikal og horisontal matematisering

I forskning omkring matematisk modellering dukker begrepet matematisering stadig opp, og ofte med underbegrepene vertikal og horisontal matematisering. Begrepene er sentrale i RME. Matematisering handler, ifølge Heuvel-Panuizen (2003), om å søke etter og løse matematiske problemer. Den horisontale delen gjenspeiler det å ta et problem fra virkeligheten og organisere det matematisk. Vertikal matematisering betegner det å jobbe matematisk med matematikken og søke løsninger. Herunder også å kunne manipulere, reorganisere og utføre operasjoner innenfor den matematiske verden. Freudenthal (1991, sitert i Berget, 2022) forklarer det slik:

> The horizontal mathematising leads, according to Freudenthal (1991, p. 41) “from real life to the world of symbols”, and in the vertical mathematising you “stay in the world of symbols”. (s.54)

Her påpekes det at det ikke alltid er et klart skille mellom horisontal og vertikal matematisering, og viser til flere eksempler der disse blandes. Det avhenger av situasjonen, personen(e) som er involvert og miljøet situasjon oppstår i. I denne analysen vil begrepet horisontal vise til de kognitive prosessene som skjer i steg 3 i modellen til Blum og Leiss vist i figur 2.2, mens vertikal matematisering vil handle om de kognitive prosessene i steg 4.

3 Metode

I dette kapitlet vil det først presenteres hvordan studien er gjennomført og generelt om innholdsanalyse. Videre trekkes det frem hvordan ordningen er for skriftlig eksamen og hvilke endringer som er gjort ved innføring av ny læreplan, LK20. Dette gjøres fordi mitt utvalg av eksamener til denne studien er tenkt for å kunne gjøre en sammenlikning av matematisk modellering i eksamensoppgaver gitt før og etter Fagfornyelsen. Deretter begrunner jeg valg av læreverk og matematiske temaer til analysen, før jeg presenterer metoden brukt i analysen gjennom å presentere tydelige kriterier. Avslutningsvis vurderer jeg, og argumenterer for, kvaliteten og validiteten til dette arbeidet.

3.1 Innholdsanalyse

Denne masteroppgaven er en kvantitativ innholdsanalyse. Målet er å både undersøke antall helhetlige modelleringsoppgaver elevene blir testet på i sentralt gitt eksamen og i to utgaver av et læreverk, men mer sentralt i denne oppgaven vil jeg identifisere hvilke steg av modelleringssyklusen de ulike oppgavene kreves for å kunne løse dem. Eksamenssettene og læreverkene er valgt ut for å kunne sammenligne modelleringsoppgaver fra før og etter innføring av ny læreplan i 2020. Metoden må anses som en kvantitativ innholdsanalyse da resultatene i form av tall og prosenter kommer på bakgrunn av et tydelig rammeverk.

Postholm og Jacobsen (2018) problematiserer dette når de diskuterer fordeler og ulemper med kvalitative og kvantitative analyser. De legger til grunn at det er ulikt hva som fungerer best fra forskning til forskning. Min forskning kan hevdes å ha innslag av kvalitativ innholdsanalyse da subjektivitet blir et aspekt i hvordan rammeverket tolkes i analysen av den enkelte oppgave.

Rezat og Strässer (2015) hevder at innholdsanalyser er passende for å få ny innsikt og kunnskap om et gitt tema, i dette tilfellet matematisk modellering. Mayring (2015) trekker frem kvalitative innholdsanalyser som beholder de fordeler som ligger i kvantitative analyser, samtidig som man analyserer med en teoretisk bakgrunn og dermed får en kombinasjon av den kvantitative tilnærmingen med en kvalitativ tilnærming. Selv om innholdsanalyse er en passende metode for å belyse mitt forskningsspørsmål, er det viktig å være bevisst på utfordringer med metoden. Det må legges til at metoden også har blitt kritisert for sin blanding av tilnærminger.

Mayring (2015) drøfter hvordan ivareta kravene til systematikk i kvantitativ metode og samtidig gjøre en kvalitativ analyse med bakgrunn i teori på samme tid. Et behov for systematisk kategorisering er sentralt i kvantitative innholdsanalyser, så vel som i kvalitative innholdsanalyser. I denne studien ivaretas det gjennom et tydelig analytisk rammeverk. Behovet gjelder både for dem som gjør selve analysen og for dem som i ettertid skal bruke samme kategorier i andre analyser (Mayring, 2015). Slike analyser kan ikke sees på som automatiserte systemer som kan overføres fra et studie til et annet. Da er det avgjørende at det er synlig hvordan analysen er utført (Mayring, 2015).

Selve analysen i denne studien vil ha innslag som kan argumenteres for at er av både deduktiv og induktiv art. I første rekke vil det være en deduktiv tilnærming i form av at jeg samler inn spesifikke data fra de siste års oppgaver gitt til avsluttende eksamen for tiendetrinnselever i matematikk, og at denne innsamlingen er initiert av en antakelse jeg hadde ved studiens begynnelse. Sagt på en annen måte vil analysen ha et preg av deduktivitet da utgangspunktet er en hypotese om at den formative vurderingssituasjonen, skriflig eksamen, ikke tilstrekkelig ivaretar læreplanens intensjon om å teste elevenes kompentanse i matematisk modellering. Denne studiens bestemte rammeverk basert på teorien som er presentert er det sentrale og på det grunnlag er studien i hovedsak basert på en deduktiv metode.

En forsker lager seg hypoteser, for å samle inn empiri som støtter opp om, eventuelt forkaster hypotesen. Postholm og Jacobsen (2018) kaller dem forventninger og sier «Forventningene dannes her på bakgrunn av tidligere empiriske funn og tidligere teorier (s.101). I denne studiens tilfelle fungerer funnene til Berget (2022) i hennes undersøkelser, samt den teori som er blitt presentert.

Postholm og Jacobsen (2018) gjør et poeng av at det ikke er mulig å være rent deduktiv eller induktiv. Denne studien er et eksempel i så måte, fordi ut fra et konstuktivistisk perspektiv er det viktig å forstå det dynamiske og det unike, noe som krever en induktiv metode. Det vil si at forskerne tar utgangspunkt i empirien og finner støtte i teorien for de empiriske funn. Gjennom å blande disse har man en pragmatisk tilnærming, som baserer seg på det som kan kalles abduksjon. Utgangspunktet for det er at det skapes spørsmål gjennom observasjoner. Videre blir disse spørsmålene til antakelser for hva en forsker tror hen vil finne ut (Posthom & Jacobsen, 2018). Selv om jeg har argumentert for at denne studien i all hovedsak har en deduktiv tilnærming må man ha Postholm og Jacobsen sitt poeng med seg i forskningsarbeidet.

3.2 Ny læreplan har betydning for eksamen

Fra start av i skoleåret 2020-2021 trådte LK20 i kraft. Det er samtidig verdt å nevne at for 10.årstrinn ble oppstart forskjøvet med et år til skolestart 2021. Det betyr at første skriftlige eksamen for 10.trinn i matematikk var våren 2022.

Ny læreplan, ny eksamensordning, færre oppgaver og endring i informasjonen om vurdering gitt til elevene på oppgavearkene er verdt å nevne her. Til det siste først; på side 2 i både del 1 og 2 står teksten:

Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av Del 1 og Del 2. Sensor vurderer i hvilken grad du

- Viser matematisk kompetanse baser på fagets kjerneelementer
    - Utforsking og problemløsning
    - Modellering og anvendelse
    - Resonnering og argumentasjon
    - Representasjon og kommunikasjon
    - Abstraksjon og generalisering
    - Matematiske kunnskapsområder

      (Utdanningsdirektoratet, 2022a)

Det er verdt å merke seg at det i denne informasjonen opplyses om at det er kjerneelementene, deriblant *modellering og anvendelse*, som danner grunnlaget for vurderingen. Ordet modellering brukes ikke i eksamensoppgavene fra 2020 og 2021.

3.3 Utvalg av eksamener til analysen

I analysen har jeg sett på samtlige oppgaver fra de to årene før ny læreplan og de to årene det inntil nylig har vært gitt eksamen etter, til sammen fire eksamenssett, totalt 89 oppgaver. Senere vil antallet oppgaver i analysen bli redusert til 72 . Et viktig aspekt i så måte er å legge merke til at antall oppgaver har blitt redusert fra 28 (20 uten hjelpemidler og 8 med) i 2020 og 2021, til 18 (8 uten hjelpemidler og 10 med) i 2022 og en ytterligere reduksjon til 15 i 2023 (7 oppgaver uten hjelpemidler og 8 med). Denne utviklingen er av interesse i denne analysen da det vil ha innvirkning på datamaterialet analysen gir, samt at det betyr med arbeidskrevende og oppgaver. I så tilfelle vil det være av betydning å trekke frem flere oppgaver som eksemplifiserer funn i analysens drøftingsdel.

I ny eksamensordning, altså de som er gitt i 2022 og 2023, er tanken fra utviklerne at del 2 skal bestå av to type oppgaver. Det betyr i praksis at de oppgavene hvor elevene har tilgang til hjelpemidler er todelt. De to aller siste oppgavene er det som direktoratet kaller type 3-oppgaver. Utdanningsdirektoratet beskriver oppgavetypen slik:

> I oppgavetype 3 skal elevene få anledning til å vise kompetanse i nye situasjoner knyttet til problemløsning, utforsking og modellering. De skal vise at de forstår og at de kan gjøre seg forstått i matematikk. Elevene kan ta i bruk skriveverktøy og andre digitale hjelpemidler som de er kjent med fra opplæringen. (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

En del av denne forskningen er en innholdsanalyse av oppgaver gitt ved sentralt gitt skriftlig eksamen i matematikk ved endt 10-årig grunnskole i Norge. Eksamen skal organiseres slik at elevene får vist kompetansen sin i faget, jf. opplæringsloven § 3-22 (Utdanningsdirektoratet, 2020). Skriftlig eksamen i matematikk organiseres som en fem timers skoleeksamen, der det er to deler, en uten hjelpemidler og en med alle hjelpemidler unntatt åpent internett og andre verktøy for kommunikasjon. For eksamen gitt før ny læreplan, det vil i denne studien bety eksamen gitt i 2020 og 2021, er det presisert at del 1 må være levert innen 2 timer av eksamenstiden er gått, mens det etter ny læreplan, eksamener gitt i 2022 og 2023, kun er krav om at eleven må levere del 1 før hen får tilgang til hjelpemidlene.

3.4 Utvalg av lærebok til analysen

På samme måte som ved analysen av eksamener sammenlikner jeg utvalg fra begge læreplaner og har tatt for meg et læreverk fra et stort norsk forlag, Gyldendal, og deres bøker fra 2015 og 2021. Bøkene heter Maximum 10 og er laget for tiende trinn. Den første er derfor laget basert på K06, mens den fra 2021 er laget etter læreplanen LK20. Det er også verdt å merke seg at det er fire forfattere involvert i begge bøkene, og at to av disse er blant skaperne i begge bøkene. I Maximum 10 (Tofteberg et al, 2015) er det 5 store temaer, inndelt i hver sine kapitler. Disse er Personlig økonomi, Geometri og design, Algebra og likninger, Funksjoner og Sannsynlighet. I boka utgitt etter ny læreplan, Maximum 10 (Tofteberg et al, 2021) er det derimot fire temaer, og disse har fått navnene Likninger og algebra, Funksjoner, Økonomi og Se flere sammenhenger. For å skille bøkene med samme navn fra hverandre i det følgende, velger jeg i denne teksten å kalle dem Maximum 2015 og Maximum 2021, forkortet til M15 og M21.

Med bakgrunn i læreplanen velger jeg å kun ta med temaer som er sammenliknbare fra de to utgavene. Det vil si at jeg vil analysere kapitlene som beskrevet i tabellen nedenfor. Kapitlene Geometri og Sannsynlighet fra Maximum 2015 er ikke en del av denne studien, da det ble en stor endring i sist læreplanreform. I LK20 er kompetansemålene fordelt på hvert enkelt trinn, og samtlige mål som handler om geometri og sannsynlighet er nå plassert på niende trinn. Disse anses derfor ikke som relevante for denne forskningen. Modellering har ofte vært knyttet tett opp mot funksjoner. Janvier (1996) argumenterer for å bruke modellering i tilnærming til algebra. Oppgaver som omhandler økonomi generelt og personlig økonomi spesielt har sin rot i den virkelige verden. På bakgrunn av disse tre argumentene anser jeg det som relevant å innlemme alle tre emnene i denne studien.

Tabell 3.1 Oversikt over oppgaver til analysen

Maximum 10-2015	Maximum 10-2021
Kapittel 1: Personlig økonomi (109 oppgaver) Kapittel 3: Algebra og likninger (93 oppgaver) Kapittel 4: Funksjoner (78 oppgaver)	Kapittel 3: Økonomi (121 oppgaver) Kapittel 1: Algebra og likninger (106 oppgaver) Kapittel 2: Funksjoner (102 oppgaver)

Med utvalget ender jeg før neste sortering opp med i alt 280 oppgaver fra Maximum 2015 og 329 oppgaver i Maximum 2021, til sammen 609 oppgaver. I tillegg vil jeg innlemme kapittelet *Se flere sammenhenger* som står i Maximum 2021. Kapitlet, som består av 89 oppgaver tas med fordi det i innholdsfortegnelsen er listet opp et underkapittel som heter *Modellering*. Det vil være et poeng for denne analysen å se separat på hvilken måte lærebokforfatterne har ivaretatt matematisk modellering i kapittelet. Analysen av nevnte kapittel vil gjøres ut fra samme rammeverk som de øvrige kapitlene, men vil holdes utenfor dataene som fås fra de kapitlene som har like matematiske temaer (se Tabell 3.1). Det vil gi et tydeligere sammenlikningsgrunnlag for bøkene, men etter hvert vil jeg også innlemme funnene derfra i de kvantitative dataene.

3.5 Sortering av oppgaver

Vos (2020) kaller oppgaver uten tekst «bare tasks». Det vil si at oppgaven kun inneholder matematiske symboler og symbolene er ikke satt i noen form for kontekst. Siden oppgaven ikke er relatert til det virkelige liv eller innehar noen kontekst velger jeg i denne studien å konsekvent se bort fra denne type oppgaver. Eksempel på en slik oppgave er vist i Figur 3.1.

Oppgave 2 (1 poeng)

Regn ut

$$3(2+5)-3^2$$

2	12	15	30
○	○	○	○

Figur 3.1 Eksempel på "bare task"

En oppgave blir behandlet som én oppgave. Det vil si at det deles ikke inn i deloppgaver(a), b) c) osv. Det betyr at når jeg tar for meg en oppgave så er det om den samlet sett, alle deloppgaver inkludert, legger til rette for de ulike stegene i modelleringssyklusen.
Alle tekstoppgaver er innlemmet i denne analysen.

De type oppgaver, som Vos (2020) kaller «bare tasks» registreres som nettopp det, men blir ikke analysert ut fra rammeverket som presenteres i neste delkapittel. Det betyr at når jeg senere presenterer hvordan hver enkelt oppgave er analysert, er det da snakk om alle oppgavene i utvalget unntatt alle merket «bare tasks». Det vil si at hver enkelt oppgave har en form for kontekst. Denne studiens intensjon er først og fremst å isolert se på hvilke steg i modelleringssyklusen oppgavene legger til rette for at elevene skal få øving. Blomhøj og Jensen (2007) kaller det atomistisk, mens det motsatte, holistisk, er å se på hele oppgaven som en helhet. Det gjelder både oppgaver fra lærebøkene og oppgaver elevene blir testet i til eksamen. I forlengelsen av det vil jeg presentere, og etter hvert diskutere, hvor mange av oppgavene som krever bruk av hele modelleringssyklusen.

3.6 Rammeverk for analyse av steg i modelleringssyklusen.

I analysen identifiserer jeg hvert enkelt steg i modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007) som er relevant for å løse oppgaven. Det betyr at det i første omgang ikke tas hensyn til om oppgaven er en modelleringsoppgave eller ikke. Det eneste hensynet som tas i utgangspunktet er om oppgaven er satt i noen form for kontekst gjennom at den inneholder tekst. Videre vil det da dannes et bilde av hvilke oppgaver som legger til rette for bruk av hele modelleringssyklusen.

I det følgende vil jeg beskrive hvert enkelt steg i syklusen, og når det enkelte steget er relevant i oppgaveløsningen. Deretter presenterer jeg det i en tabell, som også viser til kjennetegnene jeg har brukt i min analyse. Rammeverket for analysen har tydelige likheter med det som Berget (2022) brukte i sin studie av eksamener og lærebøker for elever i videregående.

Det første steget, lage situasjon (1), er av betydning i tilfeller der det enten ikke finnes data og eleven må finne disse selv gjennom undersøkelser og antakelser, eller der det kan være for mye data og eleven må gjøre vurderinger for hva som er relevant å bruke videre i modelleringen. Her kan man spørre seg om oppgaven krever at eleven gjør antakelser selv og avgjør hva som er relevant for å lage en virkelighetsnær/reell modell. Det andre steget, strukturere og forenkle (2), henger i utgangspunktet tett sammen med steg 1, der det igjen handler om at eleven selv må avgjøre hva som er relevant å bruke i oppgaven. Likevel kan det forekomme oppgaver der mange data og tall er oppgitt, men det er opp til eleven selv å strukturere disse og ta med seg det hen opplever som relevant. Steg 3, matematisering (3), er i denne analysen aktuell når oppgaven er gitt i et dagligdags språk og det ikke er gitt hvordan man skal løse det. Da er det snakk om den horisontale matematiseringen fra den virkelige verden over til en matematisk modell i matematikken. I det fjerde steget, jobbe matematisk (4), er vi i symbolenes verden og eleven jobber med tall og symboler. Elevene jobber med symbolene og representasjonene, manipulerer dem for å komme frem til et matematisk svar. Det femte steget, tolke et matematisk svar (5), gjelder når det er funnet et matematisk svar og man så ser på dette med et blikk tilbake til konteksten oppgaven i utgangspunktet var gitt i. Et typisk eksempel på det kan vi senere se i oppgaven i Figur 4.1. Der har oppgaveforfatterne allerede gjort matematiseringen, eleven jobber matematisk med funksjonen (4) og så tolker og besvarer eleven gitte spørsmål (5). For å forklare hvordan jeg identifiserte steg seks, validering (6), er det lettest å forklare hva som ikke blir ansett som det. Hvis oppgaven handler om å finne et svar som står i en fasit er det ikke relevant å validere, men om oppgaven derimot er åpen blir dette et viktig steg i syklusen. Det siste steget, utvide (7), henger sammen med steg 1 og 2, og handler om åpne oppgaver der elevene kan gjøre flere antakelser og ta tak i disse. Systematisert i en tabell blir rammeverket for min analyse som presentert under:

Tabell 3.2 Analytisk rammeverk for modelleringssyklus.

Steg		Hvilke handlinger krever steget av eleven?	Kjennetegn på om steget er relevant i oppgaven
1	Lage situasjon	Eleven må forstå en virkelig situasjon. Eleven må gjøre antakelser og valg for hva som skal med videre i arbeidet	Hvis ja på spørsmålet: «Trenger eleven å gjøre antakelser og valg selv?»
2	Strukturere og forenkle	Eleven må ta tak i den situasjonen den laget i steg 1 og strukturere og forenkle den, og lage en reell modell.	Henger sammen med steg 1. Hvis ja på spørsmål: «Er det nødvendig for eleven å strukturere og forenkle situasjonen for å lage en reell modell?»
3	Matematisere	Eleven må oversette situasjonen fra situasjonsmodellen til en matematisk modell. Horisontal matematisering.	Oppgaven er presentert i et dagligdags språk og gir ingen ledetråd om hvordan løse den. MERK: Om oppgaven allerede er presentert i et matematisk språk og det er gitt hvordan løse den er matematiseringen allerede gjort av oppgaveforfatter.
4	Jobbe matematisk	Eleven jobber med den matematiske modellen, inkludert matematiske symboler og søker løsninger. Vertikal matematisering.	Er relevant når eleven må gjøre matematikk gjennom kalkulasjoner, operasjoner for å komme frem til en løsning i matematisk språk.
5	Tolke matematisk svar	Eleven tolker sitt matematiske språk mot den virkelige situasjonen og dens kontekst.	Når eleven skal finne et matematisk svar på et spørsmål gitt i dagligdags språk.
6	Validere	Oppgaven var åpen og ikke har noe entydig svar må eleven validere om svaret hen er kommet frem til gir mening.	Her utelukkes alle oppgaver med «fasit». Er aktuelt om oppgaven er åpen og det ikke er noe entydig svar.
7	Utvide	Oppgaven var åpen og krevde antakelser og valg (steg 1).	Knyttet til steg 1 og 2 (der eleven gjør antakelser og valg). Her utelukkes også oppgaver med entydig fasit. Kun åpne oppgaver legger til rette for utvidelse.

3.7 Kvalitet, validitet og reliabilitet

Postholm og Jacobsen (2018) fremhever to sentrale spørsmål som en forsker bør spørre seg hva angår validitet og reliabilitet.

a) Hvilke begrensninger er knyttet til forskningen?
b) Hvordan gjennomføringen av forskningen kan ha påvirket resultatene?
(Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222)

Det første spørsmålet handler om forskningens validitet, underforstått er det et spørsmål om hvilket grunnlag jeg har for de funn jeg presenterer og de slutninger jeg trekker. Videre handler det om det jeg finner i min studie er gyldig, blant annet sett ut fra om jeg skulle hevde i min studie at oppgaver som krever bruk at hele modelleringssyklusen har økt etter innføringen av LK20, så henger det sammen med at modellering har fått en mer sentral plass i gjeldende læreplan. Et annet aspekt ved validitet er om det jeg studerer har overføringsverdi til noe annet, som i dette tilfellet kan være andre læreverk. Rammeverket som er brukt er med på å øke validiteten til denne kvantitative innholdsanalysen. Det bekreftes ved at tilnærmet samme rammeverk er brukt av Berget (2022) i henne studie av lærebøker og eksamensoppgaver på videregående skole.

Gjennom denne studien var jeg bevisst den utfordring som ligger i å ha en objektiv tilnærming til arbeidet. Det bidrar til å fremme oppgavens reliabilitet. Det istemmes av Postholm og Jacobsen (2018). Reliabiliteten øker ved å beskrive analyseprosessen og metoden på en måte som gjør at studien kan gjentas. Siden jeg analyserte hver enkelt oppgave adskilt fra de andre kunne jeg gå tilbake etter studien og sammenligne hvordan jeg hadde analysert like oppgaver fra de to lærebøkene.

Et siste (mislykket) forsøk på å løfte forskningens troverdighet ble gjort ved at jeg inviterte mine kollegaer i matematikkfagteamet på skolen jeg jobber på til å delta på 2 økter av 60 minutter der vi analyserte oppgaver jeg hadde valgt ut blant de som jeg i utgangspunktet hadde måtte gå flere runder med. Det er syv matematikklærere med ulik mengde erfaring fra matematikklasserom på skolen vår. Det varierer fra nyutdannet til nærmere 30 år med undervisningserfaring i matematikk. Øktene ble gjennomført i møtetiden på skolen og det handlet både om å øke validiteten til mine funn, samtidig som jeg søkte bekreftelse på at mine analyser og funn ble delt av flere. Et interessant aspekt ved disse øktene er at jeg måtte starte første økta med en innføring og en diskusjon om hva modellering er, og sette mine kollegaer inn i tankene rundt Blum og Leiss sin modelleringssyklus. Det støttes av Maaß (2006) som hevder at modellering ikke er tilstrekkelig implementert i den daglige matematikkundervisningen. Mine kollegaer ga tilbakemelding på at øktene var lærerike og interessante, men det var nok det eneste jeg fikk ut av det. Min tilstedeværelse og mine føringer for arbeidet, samt at jeg måtte gi mine kollegaer en kjapp innføring i matematisk modellering, gjør at det mest må sees på som kollegabasert utvikling og veiledning mer enn en økning av denne studiens reliabilitet.

4 Resultater

I kapitlet presenteres analyseresultater av 72 oppgaver fra de siste fire års eksamener, og 551 oppgaver fra to ulike utgaver av læreverket Maximum fra Gyldendal forlag, henholdsvis laget ut fra LK06 og LK20. Jeg har inkludert samtlige tekstoppgaver i analysen. Først kommer en oversikt over hvilke oppgaver fra de ulike matematiske temaene som faller inn under «bare tasks». Deretter vises det til hvordan analysen av noen utvalgte oppgaver ble. Resultatene fra eksamen og lærebøker presenteres hver for seg i delkapitler. Til slutt deler jeg analyseresultatene ut fra de ulike matematiske temaene fra lærebøkene. Inkludert i dette kapitlet er også en oversikt over hvor mange oppgaver som krever bruk av hele modelleringssyklusen, og i så måte er helhetlige modelleringsoppgaver (se kapittel 2.6).

4.1 Oversikt over «Bare tasks»

Jeg har i min analyse merket alle oppgavene som Vos (2020) kaller «Bare tasks», altså oppgaver som mangler kontekst og inneholder kun matematiske tall og symboler. Jeg vil presentere både resultater gitt i prosentandel som inkluderer disse og resultater hvor disse er tatt bort. Til å begynne med presenterer jeg, i Tabell 4.1 hvor mange slike oppgaver det var i eksamenssettene, og hvor stor prosentandel av oppgavene det gjelder.

Tabell 4.1 Oversikt "bare tasks" i eksamenssettene.

Eksamen	2020	2021	2022	2023	Totalt
Antall oppgaver	28	28	18	15	89
Bare tasks	7	8	2	0	17
Prosent	25	29	11	0	19

I en liknende oversikt for lærebøkene kan det være interessant å legge merke til hvilke tema de ulike kapitlene omhandler slik som man kan se i Tabell 4.2. Når man leser denne tabellen er det verdt å ha med seg at antall oppgaver i de to lærebøkene er ulik.

Tabell 4.2 Oversikt "bare tasks" i de matematiske temaene i lærebøkene.

Lærebok kapittel	M15 kapittel 1 Personlig økonomi	M15 Kapittel 3 Algebra og likninger	M15 Kapittel 4 Funksjoner	M21 Kapittel 1 Likninger og algebra	M21 Kapittel 2 Funksjoner	M21 Kapittel 3 Økonomi	M21 Kapittel 4 Se flere sammenhenger	Totalt
Antall oppgaver	109	94	78	101	95	115	80	672
Bare tasks	0	58	14	46	2	0	1	121
Prosentandel	0	62	18	46	2	0	1	18

Her er det verdt å merke seg at antall oppgaver som kategoriseres som «Bare tasks» varierer mye fra emne til emne, og at det mest iøynefallende utslaget er for oppgaver innenfor temaene algebra og likninger. Slike oppgaver er av typen *trekk sammen, løs likningen/ulikheten,* *faktoriser og forkort uttrykkene* og *løs likningssettet*. Et interessant funn er at selv om denne tendens også er tydelig i Maximum 2021, er prosentandelen betydelig redusert fra Maximum 2015. Det er også verdt å trekke frem at i det matematiske temaet personlig økonomi/økonomi ikke er en eneste «bare task», verken i utgaven fra 2015 eller i utgaven fra 2021. Disse funnene vil jeg diskutere i drøftingsdelen av oppgaven.

4.2 Analyseresultater fra eksempler

Når jeg i det følgende vil presentere mine funn med tall, prosenter og tendenser for så til slutt å kunne trekke slutninger ut fra disse, er det naturlig å vise til noen eksempler for hvordan jeg har analysert. Det første eksempelet er hentet fra kapittel 2 Funksjoner i Maximum 2021 (se Figur 4.1), og er en oppgave der eleven får presentert en andregradsfunksjon og skal besvare noen spørsmål ut fra en tenkt situasjon som funksjonen representerer. Her finnes det et entydig fasitsvar på alle deloppgavene og selv om elevene ikke har tilgang til fasit, så tyder oppgavene på at det er forventet å komme fram til nevnte fasitsvar gjennom å benytte formelen. Det betyr at ut fra de kjennetegn på stegene i syklusen som jeg presenterte i metoden (Tabell 3.2) kan steg 6: validering og steg 7: utvide utelukkes.

2.59 En stein blir kastet fra en bro. Høyden h målt i meter over vannet t sekunder etter at steinen blir kastet, er $h(t) = 15t + 20 - 4{,}9t^2$.

a Hvilken høyde over vannet ble steinen kastet fra?

b Hva er maksimumshøyden til steinen?

c Hvor lenge er steinen mer enn 20 m over vannet?

d Vis at det tar omtrent 4 sekunder fra steinen blir kastet til den treffer vannflaten.

Figur 4.1 Eksempeloppgave 1 til analyse.

Videre ser man at matematiseringen allerede er gjort av forfatterne og oppgaven handler om å jobbe matematisk med gitt funksjon og tolke det matematiske svaret eleven kommer frem til, i betydning av å undersøke om det matematiske svaret kan stemme. Det gir meg følgende analyse av oppgaven presentert i Tabell 4.3.

Tabell 4.3 Analyse steg i modelleringssyklus av oppgave i Figur 4.1.

Steg i modelleringssyklusen	1	2	3	4	5	6	7
Krever trinn for å løse oppgaven	Nei	Nei	Nei	Ja	Ja	Nei	Nei

Fra samme bok presenterer jeg nå et eksempel som viser hvordan en oppgave, som i utgangspunktet også omhandler en andregradsfunksjon, slik som den foregående gjorde, hvordan den åpnes opp og hvordan det legges til rette for at eleven skal måtte ta i bruk flere steg av modelleringssyklusen.

4.28 Basketballkast

a Diskuter to og to. Har dere nok informasjon i bildet til å finne en modell hvor ballen treffer kurven?

b Bruk dynamisk graftegner med bilde i Bokstøtta. Finn en modell der ballen treffer kurven, og en der ballen ikke treffer kurven. Dersom dere trenger det, kan dere tegne inn flere punkter.

Figur 4.2 Eksempeloppgave 2 til analyse.

Som nevnt handler denne oppgaven også om en andregradsfunksjon, men den krever først at eleven forstår situasjonen, deretter må den lage en virkelig modell, for eksempel gjennom å tegne punkter i et koordinatsystem som til slutt viser ballbanen både ved treff og ved bom. Så må det matematiseres til en matematisk modell med to andregradsuttrykk, som eleven kan utforske videre. Det matematiske svaret må så tolkes tilbake til oppgaven og ikke minst må det valideres i forhold til den virkelige situasjonen. Her finnes også flere muligheter for å utvide og det er mulige svar på oppgaven. Det kan eksempelvis være at de tenker at treffet er via plata eller rett ned i kurven. Hvordan kan de sikre seg at det blir bom på modellen der hvor ballen ikke treffer kurven? Basert på mine kjennetegn analyseres denne oppgaven derfor slik:

Tabell 4.4 Analyse av oppgave i Figur 4.2

Steg i modelleringssyklusen	1	2	3	4	5	6	7
Krever trinn for å løse oppgaven	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

4.3 Resultater fra analysen

Videre vil jeg nå presentere de kvantitative resultatene fra analysen. Datamengden som inkluderer 623 matematikkoppgaver viser både hvilke emner som, ifølge denne studien, legger best til rette for å jobbe med matematisk modellering. På samme måte som tidligere vil jeg først presentere resultatet av analysen for eksamenene for å kunne sammenlikne eventuelle endringer fra før og etter ny læreplan. Deretter vil det samme bli gjort med de to lærebøkene.

4.3.1 Modellering i eksamensoppgaver

I Tabell 4.5 er analysene fra eksamensoppgavene samlet, dette for å vise til og kunne kommentere noen funn spesielt. Samtlige analyserte oppgaver legger opp til vertikal matematisering og i disse er det nødvendig for eleven å jobbe matematisk (steg 4). Oppgaver som faller inn under kategorien «Bare tasks», og som ikke er en del av denne analysen er betydelig færre i 2022 og 2023 sammenliknet med 2020 og 2021. I den perioden disse oppgavesettene har vært gitt til eksamen har det vært 17 slike oppgaver, henholdsvis 7 i 2020, 8 i 2021, 2 i 2022 og 0 i 2023. Det betyr at disse har vært en stor del av eksamen i 2020 og 2021 (før ny læreplan), mens de er tilnærmet fraværende i 2022 og 2023, altså etter ny læreplan.

Tabell 4.5 Oversikt antall og samlet prosentandel for hvert steg i modelleringssyklus for eksamenssettene.

Oppgave		Antall oppgaver analysert	Steg 1 Lage situasjon	Steg 2 Strukturere og forenkle	Steg 3 Mate-matisere	Steg 4 Jobbe matematisk	Steg 5 Tolke matematisk svar	Steg 6 Validere	Steg 7 Utvide
Eksamen 2020	DEL 1	13	0	0	0	13	9	0	0
	DEL 2	8	0	0	0	8	6	0	0
	SUM	21	0	0	0	21	15	0	0
Eksamen 2021	DEL 1	12	0	0	0	12	10	0	0
	DEL 2	8	0	0	1	8	6	0	0
	SUM	20	0	0	1	20	16	0	0
Eksamen 2022	DEL 1	6	0	0	0	6	6	0	0
	DEL 2	10	1	1	1	10	7	2	1
	SUM	16	1	1	1	16	13	2	1
Eksamen 2023	DEL 1	7	0	0	0	7	7	1	0
	DEL 2	8	1	1	2	8	8	2	1
	SUM	15	1	1	2	15	15	3	1
Totalt for alle 4 eksamener	DEL 1	38	0	0	0	38	32	1	0
	DEL 2	34	2	2	4	34	27	4	2
	SUM	72	2	2	4	72	59	5	2
Prosentandel			**3**	**3**	**6**	**100**	**82**	**7**	**3**

Videre ser man at oppgaver der det er nødvendig for eleven å ta i bruk steg 1: lage situasjon, steg 2: strukturere og forenkle og steg 7: utvide er fraværende de 2 første eksamensårene, mens det i hvert av de 2 siste årene er én oppgave, totalt 2, som krever disse tatt i bruk. Begge

oppgavene er plassert i del 2 av eksamen, den delen hvor elevene har tilgang til hjelpemidler, og det står beskrevet i oppgaveteksten at eleven skal vise sin kompetanse i modellering.
For steg 6: validere ser man av analysen at det er 5 oppgaver totalt som kan argumenteres for at det er nødvendig å validere det matematiske svaret opp mot den virkelige modellen. Ifølge rammeverket brukt i denne analysen utelukker alle oppgaver med fasit steg 6: validering. 5 oppgaver har likevel blitt analysert til at de tar i bruk dette steget av modelleringssyklusen. Dette er oppgaver som er åpne i form av at eleven kan velge hva hen ønsker å ta tak i for så å vise sin kompetanse i eksempelvis matematisk modellering. At det ikke er fasit på en eksamen krever en annen form for sensurering, men den debatten får være forbeholdt en annen studie.

Oppsummert ser man at for eksamensoppgaver handler det for eleven i utstrakt grad om å jobbe matematisk med oppgaver som krever et fasitsvar. Det betyr at steg 4: jobbe matematisk og steg 5: tolke matematisk svar er mest fremtredende.

4.3.2 Modellering i lærebøkene

Resultatene fra lærebøkene blir presentert i tre ulike tabeller. Tabell 4.6 viser de analyserte oppgaver fra de 3 kapitlene i Maximum 2015, mens Tabell 4.7 viser analyseresultatene fra de samme matematiske temaene i Maximum 2021. Senere i resultatdelen vil jeg ta et nærmere blikk på resultatene ved å sammenlikne oppgaver fra like emner. Det er tidligere nevnt i denne teksten at flere av oppgavene i 2015-utgaven er gjenbrukt i Maximum 2021. Det er også flere andre poenger å dra med seg ut fra disse resultatene, men det blir forbeholdt drøftingsdelen. I tabellene er alle oppgavene som Vos (2020) kaller «Bare tasks» ekskludert, og prosentandelen er da regnet ut fra de resterende 209 tekstoppgavene fra de 3 kapitlene i Maximum 2015 og de 263 tekstoppgavene fra Maximum 2021.

Tabell 4.6 Oversikt analyseresultater Maximum 15

Kapitler	Antall oppgaver i analysen	Steg 1 Lage situasjon	Steg 2 Strukturere og forenkle	Steg 3 Matematisere	Steg 4 Jobbe matematisk	Steg 5 Tolke matematisk svar	Steg 6 Validere	Steg 7 Utvide
M15 K1 Personlig økonomi	109	7	5	2	101	61	26	7
M15 K3 Algebra og likninger	36	3	2	13	33	28	5	2
M15 K4 Funksjoner	64	2	1	9	60	45	6	1
SUM M 15	209	12	8	24	194	134	37	10
	Prosent	6	4	11	93	64	18	5

Tabell 4.7 Oversikt analyseresultater Maximum 21

Kapitler	Antall oppgaver i analysen	Steg 1 Lage situasjon	Steg 2 Strukturere og forenkle	Steg 3 Matematisere	Steg 4 Jobbe matematisk	Steg 5 Tolke matematisk svar	Steg 6 Validere	Steg 7 Utvide
M21 K1 Likninger og algebra	55	11	9	34	48	47	18	6
M21 K2 Funksjoner	93	16	16	28	85	63	23	14
M21 K3 Økonomi	115	23	19	18	103	78	44	15
SUM M 21	263	50	44	80	236	188	85	35
	Prosent	19	17	30	90	71	32	13

I Tabell 4.8 presenteres den totale oversikten for begge lærebøkene og i denne har jeg også innlemmet det fjerde kapitlet i Maximum 21, som heter *Se flere sammenhenger*.

Tabell 4.8 Samlede analyseresultater for Maximum 15 og Maximum 21

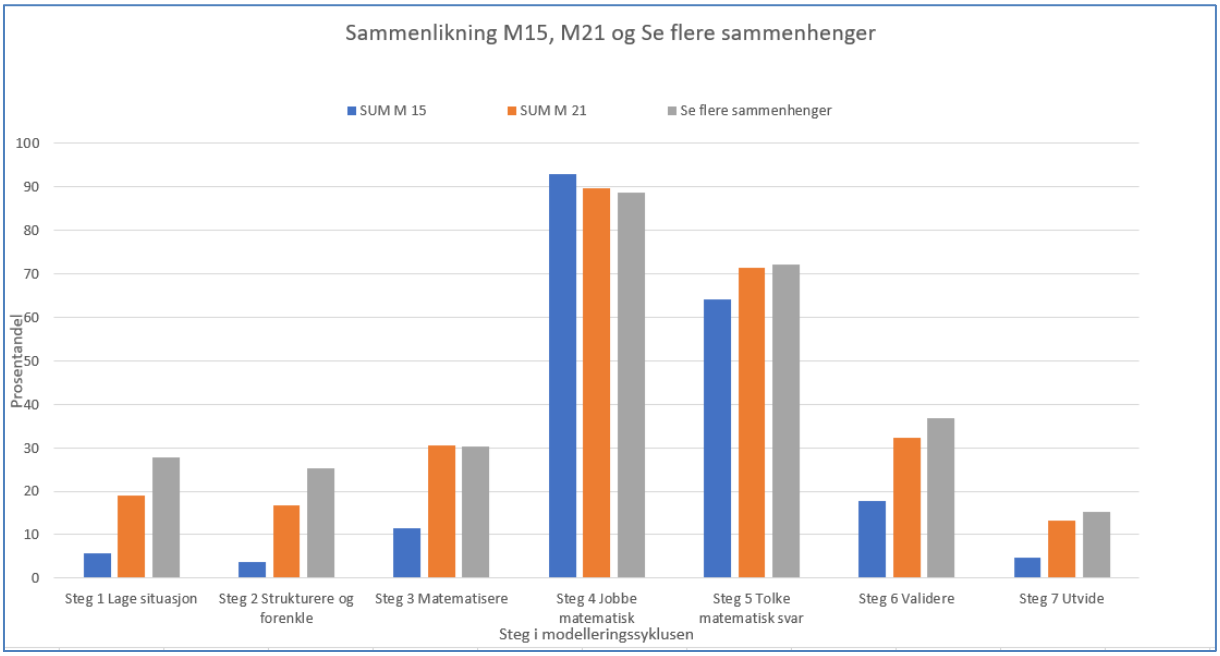
Kapitler	Antall oppgaver i analysen	Steg 1 Lage situasjon	Steg 2 Strukturere og forenkle	Steg 3 Matematisere	Steg 4 Jobbe matematisk	Steg 5 Tolke matematisk svar	Steg 6 Validere	Steg 7 Utvide
SUM M 15	209	12	8	24	194	134	37	10
	Prosentandel	6	4	11	93	64	18	5
SUM M21 inkludert Se flere sammenhenger	342	72	64	104	306	245	114	47
	Prosentandel	21	19	30	89	72	33	14
SUM TOTALT	551	84	72	128	500	379	151	57
	Prosentandel	15	13	23	91	69	27	10

Tendensen fra eksamensoppgavene er gjenkjennbar i form av at å jobbe matematisk og tolke matematiske svar er inkludert i flest oppgaver, men det er likevel en del data i tabellen som det er verdt å gå nærmere inn på. For stegene 1: lage situasjon, 2: forenkle og strukturere og 7: utvide er prosentandelen økt betraktelig fra læreboka utgitt før ny læreplan i 2020 til boka utgitt etter ny læreplan. Nødvendigheten av å lage en situasjon (steg 1) er økt fra 6% til 21%. Enda større er den prosentvise økningen for behovet for å strukturere og forenkle (steg 2), som er økt fra rundt 4% til 19%. En nesten like markant økning registreres for prosentandel oppgaver der det er lagt til rette for at eleven kan og bør utvide. Også behovet for å matematisere, har en markant økning med nær en tredobling. Steg 4: jobbe matematisk og steg 5: tolke matematisk svar er totalt sett tilnærmet lik fra M15 til M21, mens steg 6: validere har doblet prosentandelen fra den ene utgaven av læreboka til den andre.

Analyseresultatene som denne studien viser fra læreboka utgitt i 2015, mens K06 var gjeldende læreplan, samsvarer i stor grad med resultatene Berget (2022) presenterte fra sin studie av lærebøker på videregående. Det kan tyde på at det er innføringen av ny læreplan som har ført til den endringen jeg finner i min studie. Dette vil jeg problematisere i drøftingsdelen.

I Tabell 4.8 er kapitlet *Se flere sammenhenger* inkludert, mens i Tabell 4.6 og Tabell 4.7 er det for sammenligningens skyld holdt utenfor. Det er interessant å ta et nærmere blikk på det fjerde og siste kapittelet i Maximum 2021. Kapitlet har lærebokforfatterne innlemmet 79 oppgaver, og her finner man overskrifter som tyder på at kjerneelementene og de tverrfaglige temaene i læreplanen er forsøkt ivaretatt. Underkapitlene heter; Utforsking og problemløsning, Modellering, Praktiske oppdrag, Tverrfaglige temaer og Presentasjon og kommunikasjon. Her er det mange av oppgavene hvis intensjon virker å legge til rette for at elevene skal få øving i matematisk modellering.

Den neste oversikten som presenteres er en sammenlikning av de samme matematiske temaene fra Maximum 2015, Maximum 2021 og så blir kapitlet Se flere sammenhenger representert med en egen søyle.



Figur 4.4 Søylediagram for sammenlikning av de matematiske temaene i lærebøkene.

Søylediagrammet visualiserer de resultatene som ble presentert i Tabell 4.6-4.8. Selv om tendensen fortsatt er at i flest oppgaver så er det steg 4: jobbe matematisk og steg 5: tolke matematiske svar, som er nødvendig, har alle de andre stegene i modelleringssyklusen blitt mye bedre ivaretatt etter innføringen av ny læreplan i 2020.

4.4 Eksempel: Modelleringsoppgave fra eksamen 2022

Avslutningsvis i presentasjonen av resultater for eksamensoppgaver vil jeg nå gå nærmere inn på hvordan jeg har analysert det som tidligere ble kalt Type 3-oppgave fra eksamen 2022 og argumentere for resultatene av analysen. En type 3-oppgave ble av definert som åpne oppgaver som er eksplisitt knyttet til ett kjerneelement (Utdanningsdirektoratet, 2022b). Oppgaven presenteres først i Figur 4.3. Deretter vil jeg gjøre rede for analysen av den.

Oppgave 8

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 8. **Bruk tabellen og utsagnene nedenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe en brukt mopedbil. Hun planlegger å eie bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førerkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra kjøretime, pris per time	850 kr
Veiavgift	470 kr
Sparepenger	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil

Figur 4.3 Modelleringsoppgave gitt til eksamen 2022.

Dette er en oppgave hvis oppgavetekst ber elevene vise sin kompetanse i modellering, og analyserer hvert enkelt steg med Blum og Leiss (2007) sin modelleringssyklus som rammeverk. For det første er oppgaven fullspekket med tall og mulige problemer for eleven å ta tak i. Det er tydeliggjort at Therese skal eie bilen i 2 år. Likevel ligger det en åpenhet i oppgaven som gjør det mulig for eleven å gjøre egne antakelser ut fra den informasjonen oppgaven gir, legge til egne forutsetninger, og gjøre forenklinger og valg. Eleven må forstå situasjonen, lage en situasjonsmodell ut fra de valg hen gjør. Man kan altså argumentere for at det ligger en åpenhet i oppgaven. Når situasjonsmodellen er gjort og eleven har strukturert det den ønsker å jobbe videre med må hen lage en matematisk modell basert på de valgene som er gjort. Det må altså skje en horisontal matematisering. Det er også lagt opp til å kunne legge til egne antakelser, for eksempel at dieselprisen vil stige i løpet av de to årene eller å innhente prisen på kaskoforsikring. Oppgaven inneholder ingen formel for å løse den og heller ingen modell. Den må eleven lage selv før hen kan jobbe matematisk og kan tolke de ulike svarene den vertikale matematiseringen gir. Selv om hver enkelt av de utregninger elevene gjør i denne oppgaven har sine fasitsvar, er det en oppgave som krever at eleven validerer sitt svar tilbake til den opprinnelige konteksten og situasjonsmodellen der prosessen startet. Det er også en oppgave som gir rom for å utvide, legge til og lage egne føringer for oppgaveløsningen. Summert kan det argumenteres for at denne oppgaven utfordrer elevene i alle deler av modelleringssyklusen og at for å vise sin kompetanse i modellering, hvilket er hovedspørsmålet i oppgaven, så er det en nødvendighet. I Tabell 4.9 presenteres analysen av denne oppgaven.

Tabell 4.9 Analyse av oppgave i Figur 4.3.

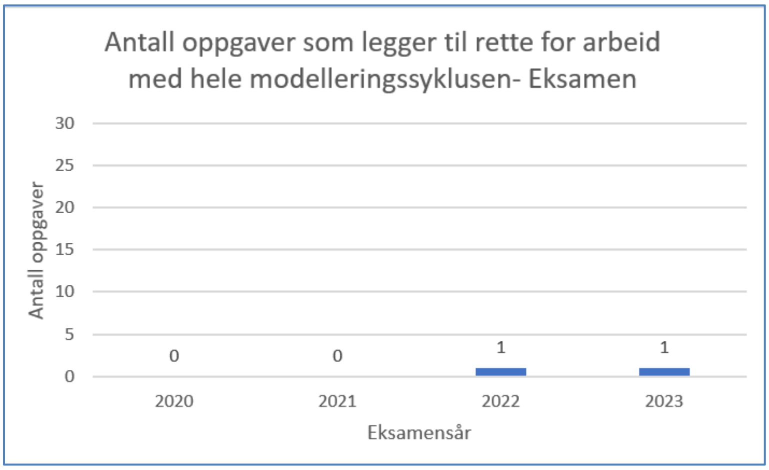
Steg i modelleringssyklusen	1	2	3	4	5	6	7
Krever trinn for å løse oppgaven	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

4.6 Alle steg i modelleringssyklusen = modelleringsoppgave

Denne analysen tar for seg alle tekstoppgaver og ser på hvordan disse legger til rette for de enkelte stegene i modelleringssyklusen uten å i utgangspunktet definere dem som modelleringsoppgaver. I teorien har jeg problematisert at det ikke er en entydig definisjon av hva en modelleringsoppgave er, og videre vil det presenteres en oversikt over antall og prosentandel oppgaver som de ulike eksamener og lærebøkene har der det ifølge min studie legges til rette for bruk av hele modelleringssyklusen. Borromeo Ferri (2018) og Højgaard (2009) hevder blant annet at alle steg må være en del av prosessen for å kunne betegne en oppgave som modelleringsoppgave. I teoridelen ble ulike forskeres definisjon av hva en modelleringsoppgave er, samt at flere andre kjennetegn ble nevnt (se kapittel 2.6). Med Borromeo Ferri og Højgaard som bakteppe, betyr det at jeg på bakgrunn av mine funn også identifiserer de oppgavene der min analyse viser at det er lagt til rette for samtlige steg i nevnte syklus.

Som ellers i denne teksten vil resultatene fra analysen av eksamen presenteres først, deretter resultatene av oppgavene i lærebøkene. Jeg har i kapittel 4.4 vist til en oppgave fra eksamen

2022 som ivaretar alle stegene i syklusen og den er en av i alt to oppgaver som, ifølge Borromeo Ferri (2018), kan omtales som modelleringsoppgave (se Figur 4.3)



Figur 4.5 Fremstilling av antall modelleringsoppgaver i eksamenssettene.

I tabellen ovenfor er det verdt å ta med seg det tidligere nevnte om at antall oppgaver er redusert de to siste årene av denne studien, sammenliknet med de to foregående. Begge oppgavene som presenteres i resultatene i tabellen over er av typen som jeg i kapittel 4.4 omtaler som Type-3-oppgaver.

Resultatene for lærebøkene presenteres i Tabell 4.10, der både antall oppgaver og prosentandelen oppgaver er tatt med.

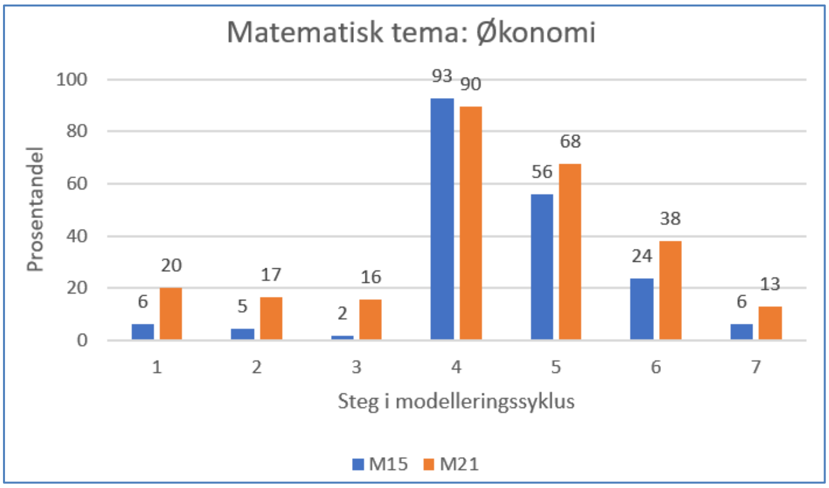
Tabell 4.10 Antall og prosentandel modelleringsoppgaver i lærebøkene

Lærebok	Antall oppgaver totalt	Antall oppgaver som krever hele modelleringssyklusen	Prosentandel
Maximum 2015	281	5	2 %
Maximum 2021	391	37	9 %

Det er verdt å legge merke til at antall oppgaver som krever hele modelleringssyklusen er økt fra 2% i læreboka gitt ut etter LK06 til 9% i læreboka gitt ut etter LK2020.

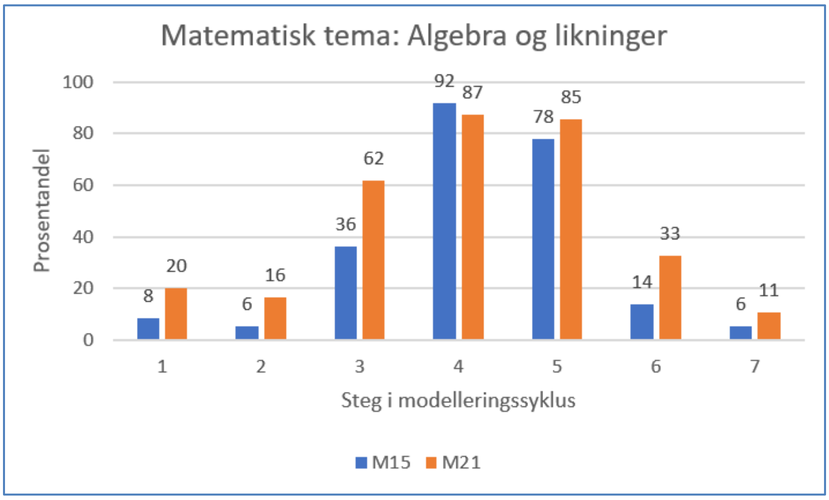
4.7 Resultater fra de ulike matematiske temaene

I denne masteroppgaven er det videre et poeng at kapitler som inneholdt like matematiske temaer skulle analyseres og sammenliknes. I de tre neste diagrammene (Figur 4.6, 4.7 og 4.9) settes de syv stegene i modelleringssyklusen opp mot hverandre basert på prosentandelen oppgaver som krever dette steget. Det er til hensikt å kunne se etter tendenser for hvilke temaer som legger opp til at elevene skal få trening i matematisk modellering. Jeg har tidligere i oppgaven argumentert for hvorfor disse tre matematiske temaer er av spesiell interesse når det gjelder matematisk modellering.



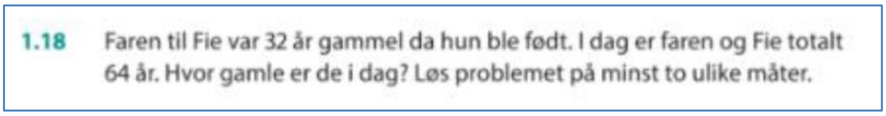
Figur 4.6 Steg i modelleringssyklus i det matematiske temaet økonomi i de to lærebøkene.

I det matematiske temaet økonomi, vist i Figur 4.6, er tendensene tilnærmet lik det som ble presentert for bøkene som helhet. Det er en stor prosentvis økning fra 2015 til 2021 på de stegene som nærmest var ikke-eksisterende i den første utgaven av læreboka til denne analysen.



Figur 4.7 Steg i modelleringssyklus i det matematiske temaet Likninger og algebra.

I oversikten for algebra og likninger, vist i Figur 4.7, må det først minnes på om at her var det mange oppgaver som faller inn under kategorien «bare tasks». Det betyr at antall oppgaver som danner grunnlaget for diagrammet er tilnærmet halvparten i forhold til de to andre matematiske temaene. Like fullt er økningen markant for de samme stegene som i forrige diagram som omhandlet økonomikapitlene. Vi legger merke til steg 3: matematisering, som var stor i 2015, men som i 2021 er nødvendig for eleven å utføre i over 60% av oppgavene. Herunder er flere av oppgavene av typen uoppstilte likninger. I slike oppgaver er situasjonen laget, forenklet og strukturert, men eleven må gjøre om fra et dagligdags språk og lage en matematisk modell i form av en likning. I Figur 4.8 vises en slik oppgave.



1.18 Faren til Fie var 32 år gammel da hun ble født. I dag er faren og Fie totalt 64 år. Hvor gamle er de i dag? Løs problemet på minst to ulike måter.

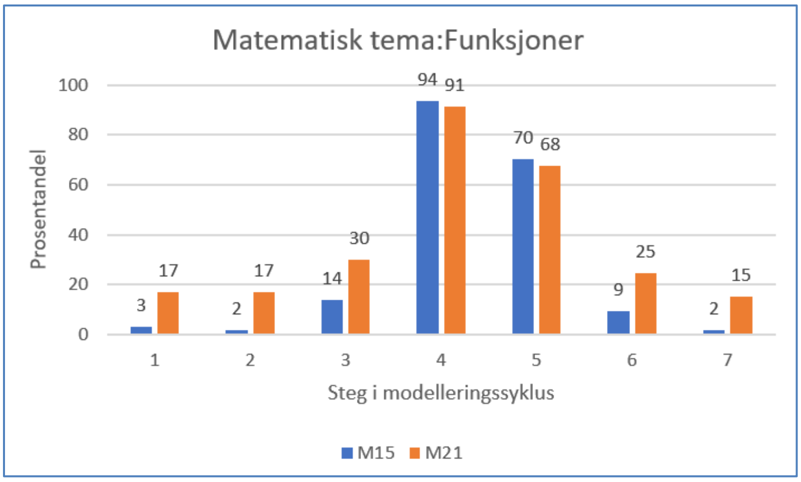
Figur 4.8 Eksempeloppgave - uoppstilte likninger.

Det gir denne analysen av oppgaven:

Tabell 4.11 Eksempel på analyse av oppgaven i Figur 4.8

Steg i modelleringssyklusen	1	2	3	4	5	6	7
Krever trinn for å løse oppgaven	Nei	Nei	Ja	Ja	Ja	Nei	Nei

I læreplanen for 10.trinn er kjerneelementet *modellering og anvendelse* knyttet opp mot fire av kompetansemålene, hvorav to av fire omhandler funksjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019). Resultatene for det matematiske temaet funksjoner, vist i Figur 4.9, viser også en klar økning for læreboka som er produsert etter innføring av LK20. Spesielt er det av interesse å se at de stegene i modelleringssyklusen som Janvier (1996), Maaß (2006) og Blum og Leiss (2007) fremhever som krevende er analysert til å ha en markant økning fra 2015 til 2021. Det gjelder steg 1: lage situasjon, steg 2: strukturere og forenkle, steg 6: validere og steg 7: utvide. Stegene er tidligere i denne teksten betegnet som å være en del av formuleringsfasen og valideringsfasen.



Figur 4.9 Steg i modelleringssyklus i matematisk tema Funksjoner

5 Drøfting

Problemstillingene til denne studien er todelt, der den ene handler om å sammenlikne hvordan læreverket Maximum fra Gyldendal legger til rette for at elever skal få øving i matematisk modellering, mens det andre ser på hvilke krav oppgaver i skriftlig eksamen har for elevene hva angår matematisk modellering. Begge disse sammenlikningene ser på utvalg fra LK06 og LK20. Dette gjøres gjennom analysen basert på de to første av de 3 underspørsmålene formulert i kapittel 1.1. Det tredje underspørsmålet ser på hvordan sammenhengen er mellom den vedtatte, den tiltenkte og den vurderte læreplanen når det gjelder matematisk modellering.

Først i dette kapitlet vil resultatene fra analysen av eksamen og lærebøkene drøftes hver for seg gjennom å sammenlikne disse før og etter innføring av LK20. Deretter dras det en linje fra læreplan, via lærebok, til eksamen. Videre drøftes nevnte resultater i lys av teori om matematisk modellering og modelleringsoppgaver. Teori brukes til å drøfte muligheter for å gjøre små grep for at oppgaver fra lærebøkene, som i utgangspunktet ikke er modelleringsoppgaver, til å bli oppgaver der elevene får mulighet til å utvikle kompetanse i matematisk modellering.

5.1 Modellering i eksamen før og etter LK20

Analysen av eksamensoppgavene fra de to siste årene med LK06, i 2020 og 2021, og de to første årene med LK20, i 2022 og 2023, viser en endring. Typiske oppgaver før LK20 var slik som i eksemplet med andregradsfunksjonen (Figur 4.1), der matematiseringen allerede var utført og det var kun steg 4: jobbe matematisk og steg 5: tolke matematisk svar i modelleringssyklusen som ble etterspurt i oppgaven. Liknende oppgaver ble gitt til eksamen år etter år. Det er i så måte av interesse at disse oppgavetypene er borte fra eksamen etter innføringen av LK2020. Da er det likevel verdt å merke seg at denne type oppgaver, hvor matematiseringen allerede er gjort, lever videre i lærebøkene også etter ny læreplan.

I delkapittel 4.3.1 påpekte jeg endringen fra 2020 og 2021 til 2022 og 2023 der det legges opp til færre, men mer åpne oppgaver. Wess et al. (2021) nevner åpne oppgaver som et kjennetegn på en modelleringsoppgave og Borromeo Ferri (2018) lister opp seks kriterier for å kalle det en modelleringsoppgave, blant annet at oppgaven er åpen og legger til rette for flere fremgangsmåter og løsninger. Min analyse støtter opp om at det er i nettopp de åpne oppgavene det legges til rette for at elevene får vist sin modelleringskompetanse. Det er også her eleven får vist sin kompetanse i flest steg i Blum og Leiss' modelleringssyklus. Det er spesielt steg 1: lage situasjon, steg 2: strukturere og forenkle og steg 7: utvide, som virker mest utfordrende å vurdere elevene i til eksamen i nåværende form.

De åpne oppgavene, eksempel vist i Figur 4.3, tidligere betegnet som type 3-oppgaver, beskrevet som oppgaver knyttet til ett kjerneelement, ber elevene om å vise sin kompetanse i *modellering og anvendelse*. I disse oppgavene blir elevene servert tall, størrelsen og enkelte antakelser er gjort. Likevel kan disse betegnes for åpne da det for eleven handler om å vurdere hvilke tall som er viktige og å være kritisk til antakelsene. Det kan argumenteres for at det i stor grad er en situasjon som elever på tiende trinn kan kjenne seg igjen i og relatere seg til, slik som Schou et al. (2013) mener er avgjørende for å lykkes med modellering. Mye kan tyde på at de som har valgt ut denne oppgaven, og mopedoppgaven i 2022, har hatt som mål å treffe flest mulig elevers interesser og hva de kan relatere seg til. Pauline Vos formulerer det slik: "To improve dressed up tasks, a task designer can make the context more realistic" (Vos, 2020, s. 37).

Selv om min analyse viser at antall, og ikke minst prosentandelen, oppgaver med modellering gitt til eksamen har økt, er det viktige subkompetanser innenfor modellering som kan forsvinne i de modelleringsoppgavene eksamen inneholder. Herunder, evnen til resonnering og å kunne grunngi valg i modelleringsprosessen, slik som Maaß (2010) trekker frem.

5.2 Modelleringsoppgaver i eksamen

Denne studiens resultater viser at i eksamen i 2020 og 2021, hvor elevene fortsatt fulgte Kunnskapsløftet 2006, var det ingen oppgaver hvor målet var å la elevene vise sin kompetanse i modellering, mens det de to seneste årene kan argumenteres for at den siste oppgaven på Del 2 var tenkt til et slikt formål. Som tidligere nevnt poengteres det i teksten til oppgaven.

Alle oppgaver ble analysert ut fra et analytiske rammeverk inspirert av Berget (2022) sin studie der hun så på lærebøker og eksamensoppgaver i 2P matematikk på videregående. I likhet med Berget tar mitt rammeverk utgangspunkt i Blum og Leiss (2007) sin syklus for modellering. Her samsvarer funnene mine for ungdomsskolen i stor grad med de funnene Berget (2022) gjorde. Det er stor overvekt av at det er steg 4 og steg 5 som er nødvendig for at elevene skal kunne løse oppgavene i eksamenssett og lærebøker før innføring av ny læreplan.

For steg 4: jobbe matematisk var det for videregående 93%, mens for 10.trinn viser mine studie for eksamenssettene både før og etter eksamensreformen viser at samtlige oppgaver legger til rette for å jobbe matematisk. Samme tendens ser man for steg 5 der det ifølge Berget (2022) sin studie var 55% av oppgavene som gjorde krav på slikt arbeid, mens min studie viser henholdsvis 83%, Tendensen er dermed enda tydeligere på ungdomsskolen enn på videregående skole. Grunnen til det kan være at oppgaver til yngre elever blir lettere å løse matematisk om man utelater stegene 1, 2 og 7, som ifølge Blum og Leiss (2007) er de mest kognitivt krevende. Det siste poenget kunne vært problematisert ytterligere, men det er ikke denne studiens intensjon å besvare hvorfor det er slik.

5.3 Modellering i lærebøker

Gjennom denne oppgaven har jeg behandlet analysen av eksamen og lærebøkene adskilt. Jeg har likevel argumentert for at de er sterkt knyttet til hverandre. Berget (2022) mener at oppgaver i lærebøker og i eksamensoppgaver kan være forskjellig, men i hennes studie viser det seg at de i stor grad er like. Resultatene fra min studie viser i noen grad det samme, men det er verdt å merke seg at det har vært endringer i retning av at oppgavene i større grad er tilrettelagt flere deler av modelleringssyklusen for i særdeleshet lærebokoppgavene, og delvis for eksamensoppgavene gitt etter innføring av LK20.

Resultatene fra min sammenligning av modelleringsoppgaver i Maximum 2015 og Maximum 2021 viser en markant økning i oppgaver der elevene blir utfordret og får jobbet med stegene 1-3 og 6-7 i henhold til Blum og Leiss' modelleringssyklus. Både Janvier (1996) og Maaß (2006) peker på formuleringsfasen (steg 2 og 3) og valideringsfasen (steg 6) som avgjørende for å utvikle elevers modelleringskompetanse. Med det som bakteppe er det positivt å registrere at flere oppgaver legger til rette for arbeid i disse fasene i den siste utgaven av den læreboka, som denne analysen omhandler.

Spesielt tydelig blir tendensen om man i tillegg til sammenligningen av de tre kapitlene som min analyse gjør, inkluderer kapitlet som det ikke finnes tilsvarende til i Maximum 2015, kalt *Se flere sammenhenger*. Det er tidligere nevnt at kapitlet har en deloverskrift som heter «Modellering» og gjennom min analyse ser man at det inneholder oppgaver som bidrar til at elevene får jobbe med å utvikle en helhetlig modelleringskompetanse. Det er likevel verdt å stille spørsmål om hvorvidt det er gjennomtenkt å lage et eget kapittel der man velger å isolere de åpne oppgavene fra resten av matematikken. Det er nærliggende å spørre seg om det beror på en tanke om at modellering, og utvikling av modelleringskompetanse, er en sak som ligger ved siden av matematikken. Min studie underbygger bare delvis en slik tanke, en tanke som var utgangspunktet for denne studien. Det viste seg at analysen gir klare indikasjoner på at også de tre andre kapitlene i læreboka inneholder en økning i oppgaver hvor det er nødvendig at elevene utvikler og tar i bruk formuleringsfasen og valideringsfasen i sitt arbeid med matematisk modellering.

Blum og Niss (2020) trekker frem en dualitet i modelleringskompetansen og kaller det «matematikk for modelleringens skyld» og «modellering for matematikkens skyld». Jeg har tidligere dratt paralleller til det Julie (2002) kaller «modelling as content» og «modelling as vehicle, og som videre er oversatt av Berget og Bolstad (2019) til «modellering som innhold» og «modellering som fartøy». Mine funn i studien av Maximum 2021 tyder på at det i de tre kapitlene jeg sammenliknet med Maximum 2015 er det matematiske innholdet som er i fokus, forstått som det Blum og Niss (2020) kaller «modellering for matematikkens skyld» og det Berget og Bolstad (2019) kaller «modellering som fartøy» er målet med oppgavene. I *Se flere sammenhenger* legger en større andel av oppgavene til rette for at eleven skal få utviklet egen kompetanse i matematisk modellering og er i så måte kategorisert som «modellering som innhold». Det virker som om lærebokforfatterne har sett et behov for å legge til rette for utvikling av modelleringskompetansen, og løst det ved å innlemme slike type oppgaver i et ekstra kapittel i den nye boka. Det kan samtidig være med på å skape distanse mellom det matematisk innhold og matematisk modellering. Berget (2022) konkluderer med at det er et fravær av helhetlige modelleringsoppgaver i sin studie av lærebøkene laget ut fra K06 og at det er liten sammenheng mellom modelleringskompetanse og det matematiske innholdet. Min studie viser at det stemmer overens med mine resultater for utgaven av Maximum utgitt i 2015, mens det derimot tyder på at helhetlige modelleringsoppgaver er kommet til i økende grad i Maximum 2021. Likevel kan det diskuteres om valget om å samle flere av disse i et eget kapittel i boka er det mest hensiktsmessige å gjøre.

5.4 Læreplan – lærebok - eksamen

Et av underforskningsspørsmålene for dette arbeidet var å undersøke matematisk modellering i den vurderte læreplanen, i form av at det var skriftlig avsluttende eksamen i matematikk på tiende trinn som skulle spille hovedrollen. I innledningen argumenterte jeg for at alle tre læreplanene spiller en viktig rolle og er knyttet sammen.

Når lærebøkenes innflytelse på hva elever lærer i matematikk i norsk skole er så betydningsfull, som det den ifølge nevnte forskning er, bør en kunne forvente en sammenheng mellom de oppgavetyper som bøkene tilbyr, og de oppgavetypene som elevene møter til eksamen. En slik tankegang vil, basert på denne studien, likevel ikke være helt korrekt. Resultatene fra denne analysen viser at de delene av modelleringssyklusen som den vurderte læreplanen, i dette tilfellet eksamen, i dagens form ikke ber elevene om å jobbe med, nettopp er avgjørende for at elevene ser koblingen mellom det virkelige liv og matematikken. Hvis man legger Schou et al. (2013) sine tanker for å lykkes med matematisk modellering til grunn, må det være situasjoner som eleven kjenner seg igjen i og kan relatere seg til. Det vil da være et spørsmål om det det i det hele tatt er mulig i en femtimers skriftlig eksamen. De begrensningene som ligger i nevnte form for vurdering tyder på at for at elevene skal få vist sin kompetanse i *modellering og anvendelse*, så må vurderingssituasjonen endres. Det må tenkes nytt. Min studie støtter opp om det og jeg vil senere presentere hvordan Utdanningsdirektoratet har planer om å løse denne utfordringen.

Ved å se på resultatene fra denne studien opp mot den teorien som er presentert får man noen kollisjoner. Højgaard (2009) hevdet at det ikke er matematisk modellering om de matematiske antakelsene allerede er gjort. Oppgaver av en slik art finnes ikke i eksamener gitt før LK20, mens det kan argumenteres for at det er én oppgave i henholdsvis 2022 og 2023 som imøtekommer dette kravet. Det vil være en utfordring for oppgavemakere å lage, og for sensorer å vurdere, oppgaver der elevene skal gjøre alle antakelser på egen hånd. Højgaard (2009) formulerer det slik:

> Den ene hypotese er at invitationer til matmatisk modellering alt for ofte erstattes af invitationer til matematisering – fordi matematiseringsopgaver er nemmere at formulere og orkestrere som lærer, nemmere at forstå og arbejde med som elev og nemmere at arbejde med i eksamenssammenhæng som lærer og «system». (s. 53)

En kan likevel hevde at lærebokforfatterne i større grad burde ta hensyn til det om målet er å utvikle elevers kompetanse i matematisk modellering, i denne studien likestilt med *modellering som innhold*. Dette fordi det er avgjørende for eleven å utvikle modelleringskompetansen sin for å kunne lykkes med matematisk modellering. Ifølge Wess et al. (2021) må eleven kunne oversette mellom virkeligheten og matematikken, og kaller det modelleringskompetanse. Maaß (2010) er tydelig på at modellering handler om å lage en modell for å forstå virkeligheten, for så å kunne jobbe matematisk med modellen.

5.5 Modellering i åpne oppgaver

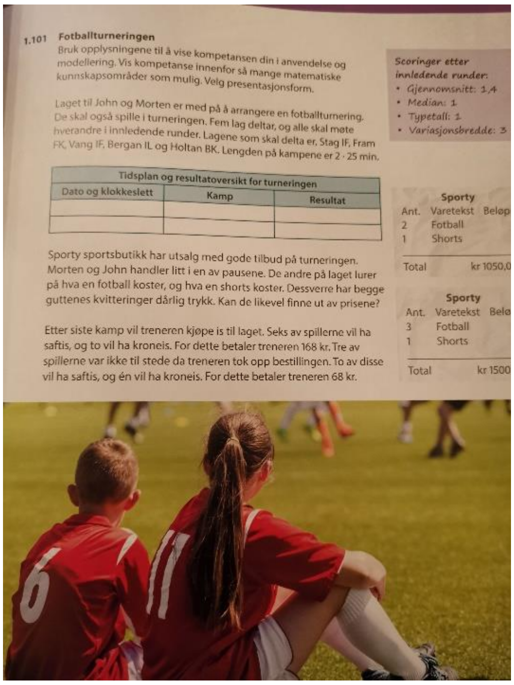
Kapitlet *Se flere sammenhenger* i Maximum 2021, inneholder flere åpne oppgaver. Det er oppgaver som legger til rette for utforsking, problemløsning og modellering. Maaß (2006) mener at en god måte å jobbe med modelleringsoppgaver er gruppearbeid, avløst av klasseromsdiskusjoner. Da får elevene anledning til å diskutere oppgavene i grupper, ta i bruk det matematiske språket og gjennom samarbeid settes i stand til å lage matematiske modeller av de virkelige situasjonene. Diskusjonene med medelever vil gi flere stemmer og syn på hvilke valg og antakelser som bør tas med i formuleringsfasen. Det samme vil gjelde i valideringsfasen. Å arbeide på en slik måte er tidkrevende og utfordrende både for elev og lærer, men *Se flere sammenhenger* legger til rette for en slik type tilnærming til matematisk modellering. Om den enkelte lærer er i stand til å utnytte kapitlets forsøk på å legge til rette for at eleven får øvd på matematisk modellering er en annen sak, og denne studien har ikke hatt til hensikt å forske på det.

Både Højgaard (2009), Maaß (2006) fremhever samarbeid i matematisk modellering, og sier at det må legges til rette for at elevene får jobbe sammen og over tid med virkelige problemer for å utvikle kompetanse både innen formuleringsfasen og valideringsfasen. Læreboka som er analysert i denne studien virker å legge opp til det etter innføringen av LK20, og matematisk modellering løftes frem i læreplanen gjennom kjerneelementene. Da er det av interesse å registrere at mine kollegaer ikke har god nok kjennskap til hva modelleringskompetanse er og hva som skal til for at elevene skal utvikle den.

5.6 Oppgavenes innhold

Gjennom denne studien har jeg argumentert for viktigheten av å spesielt la elevene jobbe med formuleringsfasen og valideringsfasene. Jeg har i min analyse gjort funn som sier at det er nettopp disse fasene som elevene i minst grad møter i oppgaver. Janvier (1996) hevder at de to nevnte fasene er avgjørende for at elever skal lykkes med matematisk modellering. Selv om hans artikkel handler om å bruke modellering som en måte å tilnærme seg algebra, kan det anses som en bekreftelse på det Blum og Niss (2020) og Maaß (2006) problematiserer.

Likevel pekes det i retning av at elevene ikke opplever at den matematikken de møter i skolen har sammenheng med matematikken i hverdagslivet, og at matematiseringen er gjort av lærebokforfatterne og eksamensoppgaveforfatterne før elevene møter dem. Schou et al. (2013) hevder at eleven må kunne relatere seg til situasjonen for å forstå og engasjere seg i den. I et klasserom er det omtrent like mange ulike interesser og erfaringer som det er elever. Det er klart at det kan lages oppgaver hvor elevene blir utfordret til å vise sin kompetanse i modellering der konteksten er en fotballturnering, som vist i Figur 5.1, men det er mange elever som verken relaterer seg til fotball eller noen form for turneringsoppsett. Elever som er opptatt av sminke, av miljøvern eller hva enn det måtte være vil ikke finne denne oppgaven spesielt engasjerende. Det betyr at for å møte poenget til Schou et al. (2013) helt bokstavelig, må det være mange ulike oppgaver.


1.101 **Fotballturneringen**
Bruk opplysningene til å vise kompetansen din i anvendelse og modellering. Vis kompetanse innenfor så mange matematiske kunnskapsområder som mulig. Velg presentasjonsform.

Laget til John og Morten er med på å arrangere en fotballturnering. De skal også spille i turneringen. Fem lag deltar, og alle skal møte hverandre i innledende runder. Lagene som skal delta er, Stag IF, Fram FK, Vang IF, Bergan IL og Holtan BK. Lengden på kampene er 2 · 25 min.

Scoringer etter innledende runder:
- Gjennomsnitt: 1,4
- Median: 1
- Typetall: 1
- Variasjonsbredde: 3

Tidsplan og resultatoversikt for turneringen		
Dato og klokkeslett	Kamp	Resultat

Sporty sportsbutikk har utsalg med gode tilbud på turneringen. Morten og John handler litt i en av pausene. De andre på laget lurer på hva en fotball koster, og hva en shorts koster. Dessverre har begge guttenes kvitteringer dårlig trykk. Kan de likevel finne ut av prisene?

Sporty

Ant.	Varetekst	Beløp
2	Fotball	
1	Shorts	
Total		kr 1050,0

Sporty

Ant.	Varetekst	Belø
3	Fotball	
1	Shorts	
Total		kr 1500

Etter siste kamp vil treneren kjøpe is til laget. Seks av spillerne vil ha saftis, og to vil ha kroneis. For dette betaler treneren 168 kr. Tre av spillerne var ikke til stede da treneren tok opp bestillingen. To av disse vil ha saftis, og én vil ha kroneis. For dette betaler treneren 68 kr.

Figur 5.1 Oppgave som eksemplifiserer forsøk på å lage oppgave elever kan relatere seg til (min tolkning).

Med dette påpeker jeg en utfordring oppgaveforfatterne, og i enda større grad de som utvikler eksamensoppgavene har. Å lage oppgaver som er realistiske, autentiske og som flest mulig elever finner relevant er ikke enkelt. Det kan være det de har tenkt på da de lagde mopedbil-oppgaven til eksamen 2023 del 2 (se Figur 4.3). Det er i alle fall nærliggende å tro at anskaffelse av moped eller mopedbil er noe som opptar de aller fleste femten-sekstenåringer. I så måte treffer denne oppgaven Schou et al. (2013) sine poenger godt.

Bakken et al. (2021) hevder at de som utvikler lærebøker er konservative og ikke alltid evner å lage oppgaver tilpasset gjeldende læreplan. De viser til funn som tyder på at både reviderte og nye lærebøker endrer seg langsomt. Selv om deres studie omhandler naturfag og språkfag, har de også sett på matematikkbøker som viser samme tendens. De argumenterer for flere grunner til det, for eksempel at lærebokforfatterne ikke nødvendigvis kjenner læreplanens innhold, at lærebokoppgaver er en egen sjanger og oppgavene i stor grad stiller lave kognitive krav. Det stemmer bare delvis overens med funnene i min studie, som viser at matematiseringen ofte er gjort før oppgaven presenteres for eleven og at det først og fremst, for eleven, handler om å jobbe matematisk. Årsaken til at det i denne studien kun karakteriseres som å delvis stemme, er at funnene viser en økning i oppgaver som legger til rette for elevers utvikling av kompetanse i matematisk modellering.

5.7 Matematisk tema og matematisk modellering

I resultatene ser denne studien på oppgaver kategorisert under tre ulike matematiske temaer og her holdes resultatene i første omgang adskilt, før det presenteres samlet. Resultatene viser en markant økning for de stegene i modelleringssyklusen som er krevende for elevene innenfor alle de tre ulike matematiske temaene. Flere oppgaver er lagt til rette for at elevene skal få utfordringer i både steg 1: lage situasjon, steg 2: strukturere og forenkle, steg 3: matematisere, steg 6: validere og steg 7: utvide. Det tyder på, at på tross av at Bakken et al. (2021) hevder at lærebøker er konservative, at forfatterne av Maximum 2021 har tatt kjerneelementenes inntog i LK20 på alvor og lagt til rette for at eleven skal få utviklet sin matematiske modelleringskompetanse. Resultatene fra analysen viser at det gjelder alle tre matematiske temaer, som her er sammenliknet. Det kan bety at det som i utgangspunktet var en hypotese om at *Se flere sammenhenger* var lagt til for å imøtekomme behovet for oppgaver som la opp til matematisk modellering, ikke er den hele og fulle sannhet. Selv om resultatene av analysen for dette kapitlet viser at flere oppgaver legger til rette for matematisk modellering, viser det seg at det også innenfor de tre matematiske temaene er en positiv utvikling hva angår andel oppgaver som legger til rette for at elevene skal få utviklet sin modelleringskompetanse.

5.8 Modelleringsoppgaver

Selv om denne kvantitative studien favner bredt og innlemmer alle oppgaver både fra de utvalgte eksamener og de to utgavene av lærebøkene, foruten om «bare tasks», har den gjennom analysen samtidig kunnet identifisere antall oppgaver som ut fra det teorien definerer som modelleringsoppgaver (Borromeo Ferri, 2018, Maaß, 2010 og Schou et al., 2013). Det ble gjort ved å summere hvor mange oppgaver fra de ulike lærebøkene analysen viser at inneholder samtlige syv steg i Blum og Leiss’ modelleringssyklus (se Tabell 4.8). I denne studien handlet det om å se på de syv stegene hver for seg, men likevel vil de oppgaver som krever alle stegene i mitt arbeid hevdes at imøtekommer nevnte forsknings krav til hva en modelleringsoppgave er. Resultatene viser at det i Maximum 2015 var 5 oppgaver og i Maximum 2021 var 37 slike oppgaver. Det er en betydelig økning. Fellesnevneren for disse oppgavene er at de er åpne oppgaver. Det må presiseres at denne studien kun tar for seg et læreverk og i så måte kun er representativt for de elever som er utstyrt med Maximum 10 fra Gyldendal forlag. Likevel er økningen av en sånn art at det er tydelig at matematisk modellering har fått en mer markant plass i læreboka som er gitt ut etter at kjerneelementene gjorde sitt inntog i norske læreplaner. Det tyder på at broen mellom den vedtatte læreplanen, den tiltenkte læreplanen og den vurderte læreplanen er mer solid enn det mitt inntrykk var før denne studien fant sted.

Gjennom denne studiens arbeid, spesielt hva angår det store analysearbeidet, har det vært interessant å se på enhver tekstoppgave med modellerings-brillene på. Flere av oppgavene innehar muligheten for en modelleringsoppgave, men så er antakelser gjort, en formel gitt eller det står beskrevet hvordan løse den. Borromeo Ferri (2018) hevdet at det med noen endringer var mulig å gjøre matematikkoppgaver til modelleringsoppgaver. Det må bety at selv om min analyse finner henholdsvis 5 av 281 oppgaver som krever bruk av hele modelleringssyklusen i Maximum 2015 og 37 av 391 i Maximum 2021, så er det et potensiale for å gjøre dem til modelleringsoppgaver. Læreren, og hens handlingsrom og valg, er og blir avgjørende også når det kommer til elevers muligheter til å utvikle sin modelleringskompetanse.

6. Konklusjoner, egne refleksjoner og implikasjoner

Denne masteroppgaven avrundes med å presentere konklusjoner som studien har kommet frem til, samt en mulig løsning, initiert av Utdanningsdirektoratet, som legger til rette for at elever skal få muligheten til å vise modelleringskompetanse også ved eksamen. I tillegg løfter jeg frem noen egne refleksjoner rundt denne studien, og dens begrensninger. Implikasjoner er diskutert underveis i teksten.

6.1 Konklusjoner

Denne studiens problemstilling var todelt. Først handlet det om å kartlegge hvilke deler av modelleringssyklusen til Blum og Leiss' som oppgavene i lærebøker legger til rette for at elevene skal arbeide med. Andre del handlet om hvilke krav som stilles til modelleringskompetanse ved skriftlig eksamen. Jeg har argumentert for hvorfor det er interessant å se på hvordan lærebokforfatterne har valgt ut oppgaver basert på de to læreplanene, som har vært gjeldende på de gitte tidspunkt. Dette ble gjort på samme grunnlag og med et rammeverk inspirert av det Berget (2022) brukte, der man behandlet hver enkelt tekstoppgave og identifiserte muligheter som lå i den enkelte oppgave for å utvikle kunnskap og ferdigheter innenfor matematisk modellering.

Denne studien viser at siste utgave av lærebøkene legger bedre til rette for å utvikle elevers kompetanse innenfor matematisk modellering etter innføring av LK20, men at det ikke legges til rette for det samme i en skriftlig eksamen. Drøftingsdelen i denne studien har derfor løftet frem at for å kunne gjennomføre sentralt gitt eksamen, som også ivaretar vurdering i matematisk modellering er det nødvendig å endre eksamensordningen. En slik løsning er allerede påbegynt fra direktoratet og denne studien ønsker en slik løsning velkommen. Det vil legge bedre til rette for at elevene skal få vist sin kompetanse i matematisk modellering på en helt annen måte enn ved en femtimers skriftlig eksamen. De neste årene vil vise i hvor stor grad den vurderte læreplanen blir tilstrekkelig ivaretatt når det gjelder elevers kompetanse i matematisk modellering.

6.2 Egne refleksjoner

En ukjent faktor i likningen om matematisk modellerings plass i norsk skole, som denne studien ikke har hatt til hensikt å mene noe om, er læreres egen modelleringskompetanse og deres erfaringer og kompetanse i å undervise elever i matematisk modellering. Det underbygges også av Borromeo Ferri (2018) som hevder at matematiske oppgaver kan gjøres til modelleringsoppgaver ved at læreren endrer på den. Den erfaringen jeg gjorde meg i arbeidet med matematisk modellering sammen med mine kollegaer, beskrevet i kapittel 3.6, kan tyde på at kompetanseheving av matematikklærere vil være avgjørende for at norsk skole skal lykkes med det. Min studie viser at både læreplanen, lærebøkene og eksamen i større grad legger til rette for det nå enn før 2020.

Studien bygger på et stort antall matematikkoppgaver og har hatt til hensikt å se etter hvilke muligheter lærebøker gir for å øke elevers modelleringskompetanse, samt hva eksamensoppgaver etterspør. Den har ikke sett på hvordan matematikklæreren utnytter mulighetene, og den har heller ikke sett på bakgrunnen for at eksamensoppgavene har vært og er som dem er. Det må også nevnes at denne studien er begrenset til et læreverk, og i så måte kan man ikke konkludere med at det gjelder for læreverk utgitt av andre forlag.

6.3 Utprøving av ny eksamensform – en mulig løsning

Jeg har argumentert for at eksamen i dagens form ikke er gunstig for at elevene skal kunne få vist sin kompetanse i matematisk modellering. Underveis i arbeidet med denne studien kommer det et initiativ fra Utdanningsdirektoratet i januar 2024, der de legger til rette for utprøving av det de kaller langtidsoppgave, som en mulig erstatning for femtimers skoleeksamen deriblant i matematikk.

> I 2024 skal over hundre vidaregåande skular prøve ut langtidsoppgåve som ein del av undervisninga. Ei forskningsgruppe frå Insitutt for lærarutdanning ved NTNU skal følgje tett med på utprøvinga for å vurdere om langtidsoppgåver kan vere eit godt alternativ eller supplement til eksamen. (Utdanningsdirektoratet, 2024).

Det finnes med andre ord et ønske om å legge til rette for andre vurderingsformer enn tradisjonell femtimers skoleeksamen, og Utdanningsdirektoratet bekrefter at det har sammenheng med ny læreplan og at det er utfordrende, om enn ikke umulig, å lage oppgaver til en skoleeksamen som i tilfredsstillende grad treffer læreplanens intensjon. Denne utprøvingen skjer i tre fag på videregående, deriblant matematikk 1P-Y, og i første omgang vil den ikke erstatte eksamen, men heller være en del av underveisvurderingen. Eksamen, i tradisjonell form, vil fortsatt gjelde også for de skoler og elever som deltar på denne utprøvingen. Videre er planen at ungdomsskolene kan bli en del av prøveprosjektet fra og med vår 2025.

Prosjektet med utprøving av langtidsoppgave, som alternativ sluttvurdering, er et resultat av et arbeid utført av en ekspertgruppe satt ned av regjeringen gjennom Stortingsmelding 21 fra 2021 (Utdanningsdepartementet, 2021, s.96).

Det vil legge til rette for at flere læreplanmål og kjerneelement får bedre vilkår i en slik eksamensordning, og denne studien tyder på at det vil være en løsning hva angår vurdering av elevers kompetanse i matematisk modellering. Det er på den annen side lett å se for seg innkjøringsproblemer og utfordringer med slike løsninger, men det vil dette pilotprosjektet forhåpentligvis avdekke og eventuelt søke svar på. Underveis i arbeidet med analysen og denne masteroppgaven har det kommet klarere frem for meg at konklusjonen ville være at man burde ønske en slik løsning velkommen for å best mulig kunne ivareta vurdering av blant annet modelleringskompetansen i sentralt gitt eksamen. Det er gledelig å registrere at Utdanningsdirektoratet har tenkt de samme tankene og kommet meg i forkjøpet.

6.4 Veien videre

Avslutningsvis er det på kjerneelementet *modellering og anvendelse* sine vegne positivt å kunne konkludere med at det som tidligere var nærmest fraværende i egen praksis nå er løftet frem gjennom LK20 og at lærebokforfatterne har gitt matematisk modellering en sentral plass i sine bøker. Så gjenstår det å se om den nye initierte eksamensordningen med langtidsoppgave er veien å gå for også å kunne ivareta matematisk modellering i den vurderte læreplanen. Denne studien viser at matematisk modellering er løftet både i den tiltenkte, den vedtatte og den vurderte læreplanen. Den tiltenkte læreplanen vil gi lærerne en bestilling om å undervise i matematisk modellering, den vedtatte læreplanen vil gi lærerne et nyttig verktøy for å undervise i matematisk modellering, og til sist vil den vurderte læreplanen gi føringer for læreren om at elevene vil bli vurdert i matematisk modellering ved skriftlig eksamen. I sum vil det kunne bidra til et løft for matematisk modellering, som til sist vil kunne bidra til at elevene ser sammenhengen mellom den virkelige verden og den matematiske verden.

Litteraturliste

Bakken, J. & Andersson-Bakken, E. (2021). The textbook task as a genre. *Journal of Curriculum Studies*, https://doi.org/10.1080/00220272.2021.1929499

Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27 (1), 51–70.

Berget, I.K. L & Bolstad O.H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, 13 (1), 83-97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007) What's all the Fuss about Competencies? I *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI* Study, vol 10. 45-55. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-38729822-1_3

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* 73-91. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W. & Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, 4-32. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_59

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with Mathematical modelling problems? The example "Sugarloaf" and the DISUM Project. I C. Haines, P.L. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA12) - Education, Enigineering and Ecnomics.* 222-231. Horwood.

Blum, W. & Niss, M. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical modelling.* Routledge Education. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Borromeo Ferri, R. (2006). *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education.* 41-75. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9_3

Botten-Verboven, C., Magesen, M., Nilsen., Aigeltinger, R., Ødegaard, P., Bendiksen, V., Dalvang, T., Tofteberg, G. N. (2010). *Matematikk for alle, … men alle behøver ikke kunne alt.* Utdanningsdirektoratet

Galbraith, P. (2012). Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 5 (13), 3-16.

Hankeln, C., Adamek, C. & Greefrath. G. (2019). Assessing Sub-competencies of Mathematical Modelling – Development of a New Test Instrument. I G. A. Stillman & J. P. Brown (Red.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (s. 143-160). ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_8

Heuvel-Panhuizen, M. van den (2003). The didactical use of models in realistic mathemathics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Eductaional Studies in Mathematics, 54, 9-35.* https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Højgaard, T. (2009). Modellering versus problemløsning: om kompetencebeskrivelser som kommunikationværktøj. *MONA*, 2, 37-54.

Janvier, C. (1996). Modeling as the Initiation into Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (s. 225-238). Kluwer Academic.

Julie, C. (2002). Making relevance relevant in mathematics teacher education. I I. Vakalis, D. Hughes-Hallett, C. Kourouniotis, D. Quinney & C. Tzanakis (Red.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics* (s. 1-8).

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift 15.11.2019. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education 38, 113-142.* https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theroatical Background and Procedures. I A. Bikner-Ahsbahs, Knipping, C & Presmeg (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (s. 365-380). Adcances in Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. *New trends in mathematics teaching*, 232-248.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Rezat, S. & Strässer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 247–266.

Schou, J., Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. K. (2013). *Matematikk for lærerstuderende: DELTA fagdidaktik, 319-342.* Samfundslitteratur.

Stillman, G. A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? I S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, 791-805.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Tofteberg, G., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2015). *Maximum 10*. Gyldendal norsk forlag.

Tofteberg, G., Tangen, J., Bråthe, L. & Stedøy, I. (2021). *Maximum 10*. Gyldendal norsk forlag.

Utdanningsdepartementet (2021). *Fullføringsreformen – med åpne dører til verden og fremtiden. (St.meld.21).* Utdanningsdepartementet. Hentet 18.januar 2024 fra Meld. St. 21 (2020–2021) (regjeringen.no)

Utdanningsdirektoratet (2020). *Individuell vurdering Udir-2-2020. Del V Eksamen.* Utdanningsdirektoratet. Hentet 18.januar 2024 fra Del V Eksamen | udir.no

Utdanningsdirektoratet (2022a). *Eksamen MAT0015 Matematikk 10.årstrinn 2022.* Utdanningsdirektoratet. Hentet 3.september 2023 fra Søk i eksamensoppgaver (udir.no)

Utdanningsdirektoratet (2022b). *Rapport om hjelpemidler til eksamen 2022.* Utdanningsdirektoratet. Hentet 18.januar 2024 fra Rapport om hjelpemidler til eksamen i matematikk 2022 | udir.no

Utdanningsdirektoratet (2024). *Utprøving av langtidsoppgåve til eksamen.* Utdanningsdirektoratet. Hentet 8.februar 2024 fra Utprøving av langtidsoppgåve til eksamen | udir.no

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice Through the World of Textbooks*. Kluwer Academic Publishing.

Vos. P. (2020) Tasks Contexts in Dutch Mathematics Education. I Heuvel-Panhuizen M. van den (Red.), National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics, ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824_3

Wess, R., Klock, H., Siller, H., & Greefrath, G. (2021). Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling: A Test Instrument. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5