UiA Universitetet i Agder

Master

Vurdering av modellering i læreplanen og eksamen etter LK20

Hvilke perspektiv på modellering finnes i læreplanen LK20?

Hvordan har elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet *Modellering og anvendelser* gjennom eksamensoppgavene?

LOUISE STORDALEN OGNEDAL

VEILEDERE
Kjetil Damsgaard
Hans Kristian Nilsen

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Sammendrag

Formålet med denne masteroppgaven er å få innsikt i hva som ligger i modelleringsbegrepet i læreplanen og eksamensoppgaver og knytte dette opp mot vurdering. Matematisk modellering handler om å bruke matematikk for å løse et problem fra virkeligheten. I forbindelse med Fagfornyelsen ble det utviklet kjernelementer til alle fag, som er det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med. Det enkelte kompetansemålet må sees i sammenheng med kjerneelementene. Analysen tar utgangspunkt i følgende to forskningsspørsmål:

- Hvilke perspektiv på modellering finnes i læreplanen LK20?
- Hvordan har elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet Modellering og anvendelser gjennom eksamensoppgavene?

For å besvare forskningsspørsmålene har jeg gjennomført en dokumentanalyse av læreplanverket, de to eksamenssettene fra 2022 og 2023 og dokumenter knyttet til vurdering av eksamen. Læreplanen ble analysert ut fra de tre perspektivene modellering som innhold, modellering som fartøy og modellering om kritikk (Julie, 2002; Barbosa, 2006). Teori og tidligere forskning jeg benyttet for å kaste lys over det andre forskningsspørsmålet er modelleringssykluser utviklet av Blum og Leiß (Blum 2011) og Blomhøj og Jensen (2003), kompetansebegrep hentet fra KOM-rapporten (2002) og Kilpatrick et al (2001), og begrepene atomistisk og holistisk modellerings-kompetanse slik Blomhøj og Jensen (2007) og Steffensen (2023) presenterer disse. For å kategorisere eksamensoppgaver som modelleringsoppgaver var det nødvendig å utarbeide en kriterieliste, basert på Maas (2006), Borromeo Ferri (2020), Wess et al (2021) og Steffensen (2023).

Analysen viste at alle de tre perspektivene er til stede i læreplanen, men at den største kategorien er uspesifisert bruk av ordet modellering. Det finnes én oppgave på hver eksamen som nevner modellering. I eksamen 2023 er det en oppgave som kan sies å gi elevene mulighet til å vise atomistisk modelleringskompetanse. Videre analyse indikerte at eksamensveiledningen inneholder forventninger om at elever kan gjennomføre en modelleringssyklus, men at det kan være vanskelig både å vise og vurdere holistiske modelleringskompetanse i den settingen som skriftlig eksamen er.

Abstract

The purpose of this master's thesis is to gain insight into the concept of modelling in the curriculum and exam papers and connect this to assessment. Mathematical modelling is seen as a way to use mathematics to solve a real-world problem. In connection to *Fagfornyelsen*, core elements were developed for all subjects, which present the most important subject content. Every competence objective in the curriculum must be seen in the context of these core elements. *Modelling and application* is one of the core elements of mathematics. The analysis is based on the following two research questions:

- What perspectives on modelling are found in the LK20 curriculum?
- How do pupils have the opportunity to demonstrate competence within the core element of *Modelling and applications* through the exam tasks?

In order to answer these research questions, I have carried out a document analysis of the curriculum, the two exam sets from 2022 and 2023 and documents related to the exam assessment. The curriculum was analysed from the three perspectives: modelling as content, modelling as vehicles and modelling as critic (Julie, 2002; Barbosa, 2006). Theory and previous research used to shed light on the second research question are: modelling cycles developed by Blum and Leiß (Blum 2011) and Blomhøj and Jensen (2003), the concept of competence from the KOM report (2002) and Kilpatrick et al (2001), and the terms atomistic and holistic modelling competence as presented by Blomhøj and Jensen (2007) and Steffensen (2023). In order to categorise exam tasks as modelling tasks, I made a list of criteria, based on Maas (2006), Borromeo Ferri (2020), Wess et al (2021) and Steffensen (2023).

The analysis revealed that all three perspectives are present in the curriculum, but that the largest category is the unspecified use of the word modelling. There is one task on each exam that specifically mentions modelling. In the 2023 exam, there is a task that might give students the opportunity to show atomistic competence in modelling. Further analysis indicated that the exam guidance included expectations of the students to use a complete modelling cycle. My findings suggest that it may be difficult for students to demonstrate and sensors to assess holistic modelling competence in the setting of a written exam.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på tre år med videreutdanning. Det har vært tre lærerike, utfordrende og interessante år, og har gitt meg som lærer mye påfyll som jeg skal ta med tilbake til klasserommet. Det har til tider vært tøft og krevende, men ny kunnskap og nye innspill fra både lærere og medstudenter gjør at jeg og mine fremtidige elever forhåpentligvis vil ha god nytte av denne utfordringen.

På veien har det vært mange som har støttet og hjulpet meg og som fortjener en takk. Tusen takk til veilederne mine, Kjetil Damsgaard og Hans Kristian Nilsen, som har vært gode støttespillere underveis i prosessen. Deres raske tilbakemeldinger og konstruktive råd har vært helt avgjørende for å komme i mål med denne oppgaven. Medstudenter fortjener en stor takk, spesielt Renate – du har vært super, med gode samtaler, kollokviegruppe og lunsjavtaler gjennom studiet. Jeg vil også takke ledelsen på Tastaveden skole som har prioritert min videreutdanning, og kolleger som har vært nysgjerrige og støttende gjennom prosessen. Til slutt må jeg sende den største takken til familien min. Selv om jeg tror jeg har vært god til å balansere arbeids- og familielivet, vet jeg at dere ikke alltid har følt det på samme måte.
Kjære Hans Kristian – tusen takk for at du har holdt ut og gitt plass til skriving og frustrasjon gjennom studietiden. Jeg er glad for at jeg nå kan få mer tid sammen med deg og ungene, neste år skal jeg også være med i skibakken!

Stavanger, mai 24
Louise Stordalen Ognedal

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Her vil jeg ta for meg bakgrunnen for valg av tema og formålet med studien, presentere forskningsspørsmålene og gjøre rede for oppgavens struktur.

1.1 Bakgrunn for studien

Våren 2023 var jeg sensor for skriftlig eksamen i matematikk 10.trinn. På sensorsamlingen var om lag to hundre matematikklærere fra hele Norge samlet og jeg registrerte at vi hadde veldig ulike meninger om hvordan modelleringsoppgaver skal besvares. Jeg ble derfor nysgjerrig på hva modellering skal være, og hvordan eksamensoppgaver som handler om modellering kan løses. Jeg har jobbet som matematikklærer i 20 år, og opplever at både jeg og mine kolleger er usikre på hva modellering skal være i ungdomsskolen. Da læreplanen LK20 kom, oppfattet vi dette som et nytt tema, som vi ikke hadde mye erfaring med fra tidligere. Den nye læreplanen virket å være veldig annerledes enn tidligere læreplaner, både med tanke på form og innhold. Til hvert fag ble det laget kjerneelementer, som ifølge Utdannings-direktoratet består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskaps områder og uttrykksformer. De er det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen, og sier hva man må lære for å kunne mestre og anvende faget. Kjerneelementene skal prege innhold og progresjon i læreplanene og bidra til at elevene over tid utvikler forståelse av innhold og sammenhenger i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Det enkelte kompetansemålet må sees i sammenheng med kjerneelementene. Læreplanen i matematikk inneholder seks kjerneelementer:

- Utforsking og problemløsing
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

Som lærer var det mye nytt å sette seg inn i når fokuset i læreplanen på mange måter ble endret. Jeg ønsker derfor å bruke masteroppgaven til å finne ut mer om hva som ligger i modelleringsbegrepet, og hva det vil si å vise modelleringskompetanse.

1.2 Forskningsspørsmål

Jeg ønsket å undersøke hva som ligger i begrepet matematisk modellering i tilknytning til undervisning på ungdomsskolen. Læreplanen styrer hva lærere skal jobbe med i skolen, og den påvirker innholdet i lærebøker og undervisning. Rezat og Strässer (2015) påpeker at lærebøker er den viktigste ressursen for undervisning i matematikk, og en innholdsanalyse kan avsløre hvilke muligheter for å lære boken kan gi. I tråd med dette mener jeg at læreplanen og eksamen setter rammer for læreres arbeid, som det er interessant å undersøke, og jeg har formulert følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke perspektiv på modellering finnes i læreplanen LK20?
2. Hvordan har elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet Modellering og anvendelser gjennom eksamensoppgavene?

Jeg vil se på læreplanen og eksamensoppgaver for å lære noe om hvordan jeg som lærer skal forholde meg til modellering. For å nærme meg begrepet modellering virker det hensiktsmessig å undersøke ulike måter dette presenteres på i forsknings-litteraturen, jeg har derfor valgt å se på hvilke perspektiver på modellering som finnes i læreplanen. For å besvare forskningsspørsmål 1 vil jeg analysere LK20, blant annet gjennom ordtelling og innholdsanalyse. For forskningsspørsmål 2 vil jeg benytte meg av tidligere eksamenssett og sensorveiledninger.

1.3 Oppgavens struktur

I kapittel to presenterer jeg først teorier om hva modellering er, sammen med noen perspektiver på modellering, før jeg viser til ulike kompetansebegrep. Deretter ser jeg på vurdering, eksamen i opplæringsloven og sensurering av eksamen. Til slutt viser jeg til tidligere forskning. I kapittel tre presenterer jeg metoden jeg har benyttet meg av, sammen med dokumentene jeg vil analysere. Kapittel fire inneholder analyser av datamaterialet, som er læreplandokumenter, eksamenssett og dokumenter knyttet til sensurering av eksamen. I kapittel fem drøftes sentrale funn fra analysene i lys av presentert teori og de to forskningsspørsmålene. Kapittel seks inneholder noen avsluttende betraktninger rundt prosjektet og forslag til videre forskning.

2 Teori

Jeg vil først gi en introduksjon til hvordan modellering beskrives i forsknings-litteraturen, og knytte det til ulike modeller av modelleringsprosessen. For å kunne svare på forskningsspørsmålene presenterer jeg de ulike perspektivene på modellering kalt modellering som fartøy, modellering som innhold og modellering som kritikk, som alle knyttes til hva som er hensikten med å jobbe med en modellerings-aktivitet. Videre ser jeg på de to kompetansebegrepene som er mest relevante for læreplanen, sammen med PISA sitt literacy-begrep. Etter en utgreiing av hva det vil si å ha modelleringskompetanse, presenterer jeg de såkalte atomistiske og holistiske syn på modelleringskompetanse, som jeg senere vil benytte i mine analyser av eksamensoppgaver. Jeg undersøker hva som kjennetegner en modelleringsoppgave, og bruker dette til å lage min egen definisjon for å klassifisere eksamensoppgavene ut fra. Til slutt vil jeg se på vurdering og eksamen i opplæringsloven, vurdering av modelleringsoppgaver og modelleringskompetanse og tidligere forskning som er relevant for mine forskningsspørsmål.

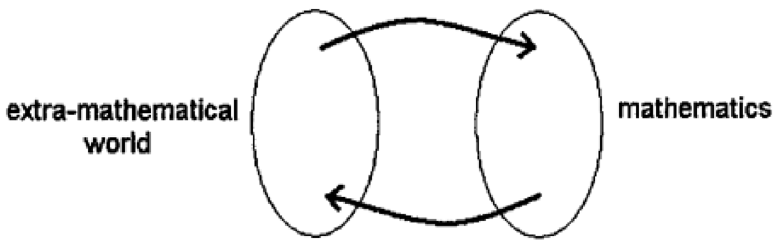
2.1 Modellering

Ifølge Galbraith (2012) har antall artikler og forskningsrapporter som tar for seg teori og/eller praksis om matematisk modellering i tilknytning til utdanning hatt en eksplosiv økning. Det finnes mange ulike perspektiver på og grunner til å undervise i modellering (Blum, 2015). I min studie er det hensiktsmessig å danne seg et bilde av hva forskningsfeltet sier om modellering i skolen, jeg vil derfor først presentere noen utvalgte modeller av modelleringssyklusen. Deretter vil jeg se på tre ulike perspektiver på modellering, kalt modellering som fartøy, modellering som innhold og modellering som kritikk (Julie, 2002; Barbosa, 2006). Disse perspektivene ser på hva som er begrunnelsen for å jobbe med modelleringsoppgaver.

2.1.1 Ulike modeller av modelleringsprosessen

Ifølge Kaiser og Sriraman (2006) er det ikke enighet blant forskere og matematikere om hva matematisk modellering er, og det finnes ulike synsvinkler i den internasjonale diskusjonen rundt hvordan modellering og anvendelse skal forstås. En matematisk modell er et bevisst forenklet og formalisert bilde av en del av den virkelige verden (Niss et al. 2007). Ifølge Blum (2015) handler modellering om sammenhengen mellom matematikk og den ekstra-matematiske eller utenom-matematiske verden, som også kan kalles virkeligheten eller den virkelige verden. Pollak (1979) definerte det som "resten av verden", og dette inkluderer natur, kultur, samfunn eller hverdag (Blum, 2015). Jeg kommer til å bruke begrepet utenom-matematisk når jeg refererer til verden utenfor matematikken. Ifølge Niss et al (2007) vil en anvendelse av matematikk forekomme hver gang matematikk brukes til å behandle et område av den utenom-matematiske verden, for eksempel for å forstå den bedre, til å undersøke problemstillinger, forklare fenomener, løse problemer eller bane vei for beslutninger (Niss et al 2007). Ved å bruke begrepet modellering og anvendelser tas både produktene og prosessene i samspillet mellom den virkelige verden og matematikk opp (Blum, 2015).

Niss, Blum og Galbraith skriver i sin introduksjon til modellering at i enhver anvendelse av matematikk er en matematisk modell involvert, eksplisitt eller implisitt. En matematisk modell består av det utenom-matematiske domenet, D, man er interessert i, et matematisk domene M, og en sammenheng fra det utenom-matematiske til det matematiske domenet (se figur 1).

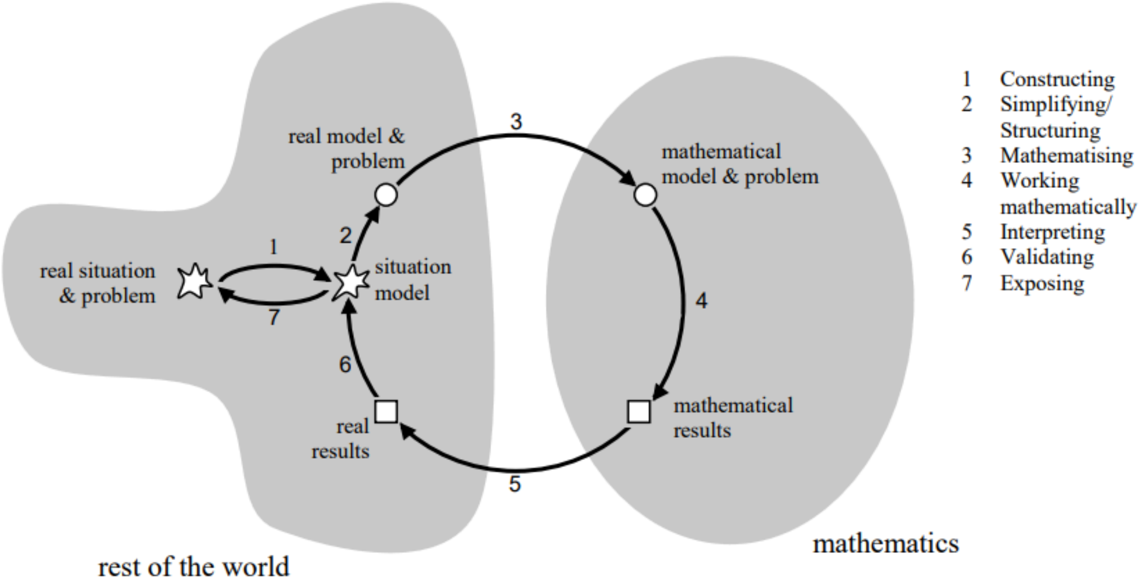


Figur 1: En matematisk modell, hentet fra Niss et al 2007

Objekter, relasjoner, fenomener, antakelser, spørsmål og lignende i D som er relevante for formålet og situasjonen må identifiseres og velges, og deretter oversettes til objekter, relasjoner, fenomener, antakelser, spørsmål og lignende knyttet til M. Innenfor M gjøres matematiske antagelser, utregninger og slutninger, og utfallet av disse oversettes tilbake til D og tolkes som konklusjoner. Dette kalles en modelleringssyklusen, og den kan på grunnlag av validering og evaluering av sammenhengen mellom D og M kjøres flere runder, til man er fornøyd med resultatet med tanke på målet med å lage modellen. Begrepet modellering refererer til hele prosessen, og alt som er involvert i den (Niss et al, 2007). Dette er det enkleste bildet på en modelleringssyklus. Fordi skillet mellom virkelighet og matematikk innenfor en syklisk modell kan være nyttig for å forstå hva matematisk modellering innebærer (Borromeo Ferri, 2018), vil jeg nå ta for meg to modeller som tar i bruk seks og syv steg i modelleringssyklusen, som jeg senere vil benytte meg av i mine videre analyser.

Blum og Ferri (2009) definerer matematisk modellering som prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikk, i begge retninger. Videre påpeker de at når man jobber med modelleringsoppgaver kan en modelleringssyklus være et godt verktøy, jeg vil derfor benytte meg av det når jeg skal analysere eksamensoppgaver. Blum har i samarbeid med flere andre utviklet ulike modeller av modelleringssyklusen, og jeg vil her presentere den mest kjente. Deretter vil jeg se på en modell utviklet av Blomhøj og Jensen (2003). Det finnes også andre modeller av modelleringsprosessen, jeg har valgt ut disse fordi de er mye brukt, og de knyttes til modelleringskompetanse, som jeg vil vise i kapittel 2.2.4.

Blum (2011) viser til at en modell av modelleringssyklusen kan være spesielt nyttig for kognitive analyser av modelleringsoppgaver, noe som gjøres både innen forskning og undervisning. Syvtrinnsmodellen utviklet av Blum og Leiß i 2007 er et eksempel på en slik modelleringssyklusen, se figur 2 (Blum, 2011). I denne er det virkelige liv adskilt fra matematikk for å understreke modelleringens forbindelse mellom matematikk og resten av verden. Denne syklusen tar elevenes perspektiv når de løser en modelleringsoppgave, og den handler om å analysere og forstå de kognitive prosedyrene som finner sted når elever jobber med modelleringsproblemer (Berget, 2023b). Jeg skal ikke undersøke elevers arbeid, men mulighetene som ligger i eksamensoppgavene for at elevene kan gjennomføre en slik modelleringssyklus. Jeg mener derfor det er relevant å bruke denne modelleringssyklusen til å analysere eksamensoppgaver.

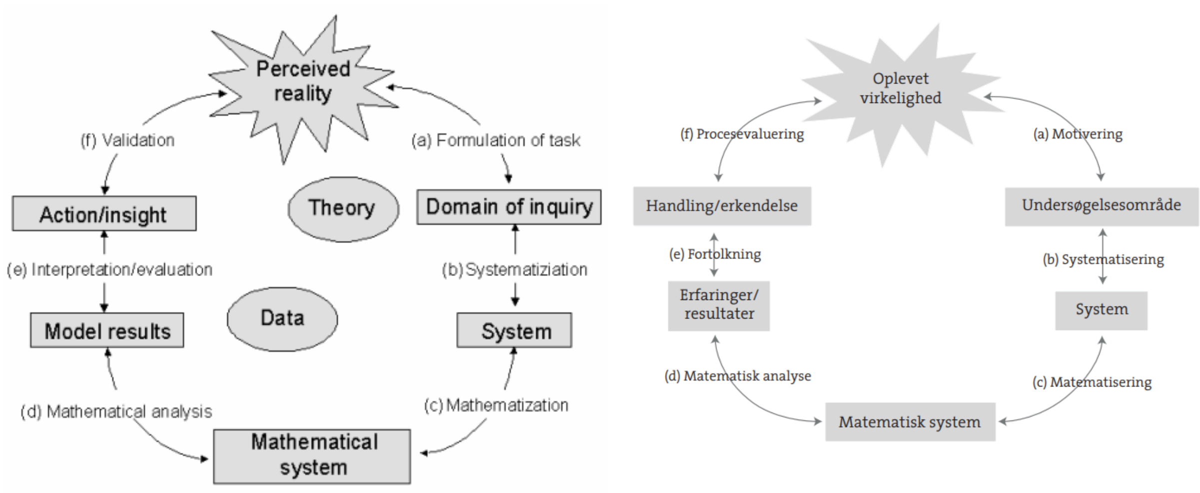


Figur 2 Syvtrinnsmodellen utviklet av Blum og Leiß i 2007 (Blum, 2011)

Modellen knytter sammen den virkelige verdenen med matematikkens verden gjennom sju trinn:
Trinn 1: Forstå problemsituasjonen og konstruere en modellsituasjon.
Trinn 2: Strukturere og forenkle situasjonen.
Trinn 3: Matematisere, det vil si oversette modellsituasjonen til en matematisk modell.
Trinn 4: Jobbe matematisk.
Steg 5: Tolke de matematiske resultatene.
Trinn 6: Validere resultatene. Det kan vise seg at man må gå en ny runde i modelleringssyklusen, for eksempel hvis det er flere faktorer å ta hensyn til enn man tenkte på i første omgang.
Trinn 7: Vise fram den endelige løsningen.
Maas (2006) poengterer at det ikke er tilstrekkelig å matematisere problemet fra den virkelige verden, man må også validere de matematiske resultatene i henhold til problemet man forsøker å løse når man jobber med modelleringsoppgaver.

Blomhøj og Jensen (2007) knytter sammen modelleringssyklusen med det å vise modelleringskompetanse, som jeg vil komme tilbake til i kapittel 2.2.4. De definerer modelleringskompetanse som noens innsiktsfulle beredskap til å gjennomføre alle deler av en matematisk modelleringsprosess i en bestemt kontekst. De bruker samme forståelse av kompetanse som KOM-rapporten, som jeg presenterer i kapittel 2.2.1.

Figur 3 viser modellen de har laget av denne prosessen, inspirert av og ganske lik mange andre modeller av denne prosessen funnet i litteraturen (Blomhøj & Jensen, 2007).



Figur 3 En visuell representasjon av den matematiske modelleringsprosessen (tilpasset fra Blomhøj & Jensen, 2003), hentet fra Blomhøj og Jensen (2007).

Modellen består av seks delprosesser (Blomhøj & Jensen, 2003)
(a) Formulering av en oppgave (mer eller mindre eksplisitt) som veileder deg til å identifisere egenskapene til den oppfattede virkeligheten som skal modelleres. Det vil si smalne fokus inn mot den delen av virkeligheten man skal undersøke.
(b) Valg av relevante objekter eller relasjoner, og systematisering av disse for å gjøre det mulig å lage en matematisk representasjon.
(c) Oversettelse av disse objektene og relasjonene fra virkeligheten til matematikk. Kalles også matematisering.
(d) Bruk av matematiske metoder for å oppnå matematiske resultater og konklusjoner.
(e) Tolkning av svarene i lys av den innledende oppgaven
(f) Evaluering av modellens gyldighet, ved sammenligning med observerte eller predikerte data eller med teoretisk basert kunnskap.

Denne modellen skiller seg fra Blum og Leiß sin ved at den ikke har et trinn 7, å vise fram den endelige løsningen. Blomhøj og Jensen (2003) understreker at dette er en modell av en ideell matematisk prosess som hovedsakelig fokuserer på strukturelle aspekter. Modellen kan brukes både som et verktøy for å analysere matematiske modeller og de matematiske modelleringsprosessene bak dem, samt å definere og analysere modelleringskompetanse, som jeg vil presentere i kapittel 2.2.4. Jeg vil bruke den til sistnevnte når jeg ser på eksamensoppgaver. Videre definerer de matematisk modellering som å gå gjennom hele prosessen som beskrevet ovenfor, og ikke nødvendigvis som en enveistur fra begynnelse til slutt. Det kan være vel så bra å gå bakover og gjenta noen av fasene, eller å gå gjennom en av dem flere ganger. Dette er illustrert med pilene som peker begge veier. Denne måten å jobbe på gjøres ikke nødvendigvis på en bevisst og kontrollert måte, jo bedre og mer erfaren du er på matematisk modellering, jo mer gjør du dette automatisk (Blomhøj & Jensen, 2003).

Ärleback et al (2017) poengterer at de ulike representasjoner av modellering brukes i utarbeidelse av læreplaner, og de påvirker både beslutningstakere, læreplanutviklere, lærere og forskere. Alle representasjoner av modellering har sine styrker og svakheter, noe også Blum (2015) påpeker. Det er noen viktige likhetstrekk mellom flere av disse sykliske representasjonene, selv om ordene som beskriver delprosessene til modellering er forskjellige:

> All of these representations capture some sense that a mathematical model is a simplified version of some aspect of the real world that is formalized in mathematics for the purpose of solving a problem situation in the real world (Ärleback et al, 2017, s.74).

En matematisk modell brukes som en forenklet fremstilling av en virkelighetsnær problemstilling, og modellen kan brukes til å løse denne problemstillingen. Ifølge Galbraith (2012) brukes slike modeller til å støtte elever i å lære kunsten å modellere.

2.1.2 Modellering som fartøy, innhold og kritikk

Disse tre perspektivene på modellering ser på hva som er målet med å jobbe med modelleringsoppgaver. Jeg benytter det til å analysere læreplanen med tanke på hvordan modelleringsbegrepet brukes i tilknytning til undervisning på ungdomsskolen. Julie (2002) skiller mellom å bruke matematisk modellering som et redskap til å lære matematiske begreper og prosedyrer, og modellering som innhold i seg selv.

Han bruker begrepet "mathematical models as vehicles", som kan oversettes til fartøy, kjøretøy, verktøy eller redskap. I litteraturen brukes ordet fartøy, se f.eks Berget (2019) og Steffensen (2023), jeg velger derfor å bruke det samme. Innen perspektivet modellering som fartøy er tanken at matematisk modellering skal brukes som et redskap for utvikling av matematisk forståelse. Matematikken presenteres ofte i en kontekst, slik at man kan lære seg bestemte begreper, prosedyrer og begrunnelser (Julie, 2002).

Modellering som innhold (modelling as content) handler om at man jobber med modelleringsoppgaver for å lære å modellere. Det betyr at man lager matematiske modeller uten at det er krav til at bestemte matematiske prosedyrer eller begreper skal være med. Det innebærer også at man undersøker eksisterende modeller for å finne ut hva modellering er, og at man kan vurdere modeller laget av andre. Her starter man med en situasjon i virkeligheten, og konstruerer det matematiske problemet (Julie & Mudaly, 2007). Julie påpeker at matematikken i skolen ofte er omformet fra slik matematikere jobber for at det skal være mulig å lære den bort til elever, og at det legges for mye vekt på modellering som fartøy. Han argumenterer for at dette ofte skjuler hvor omfattende og innviklet det kan være å konstruere en matematisk modell, og at det derfor bør gjøres mer plass for modellering som innhold (Julie, 2002).

Barbosa (2006) viser til studier rundt den sosiokulturelle dimensjonen til matematikk. Disse studiene påpeker at matematiske modeller ikke er nøytrale beskrivelser som er uavhengig av virkeligheten, men at modelleringsprosessen kan inneholde deler som er skjult for allmennheten. Siden argumenter og beslutninger i samfunnet er basert på matematiske modeller er det viktig at elever har mulighet til å diskutere matematiske modellers natur og rolle, for å lære seg å bli kritiske og engasjerte samfunnsborgere (Barbosa, 2006). Dette perspektivet kalles for modellering som kritikk (modelling as critic).

Galbraith (2012) argumenterer for at alle perspektiver og retninger innen modellering knyttet til utdanning som forskningen har utviklet, kan plasseres innenfor de to perspektivene som kalles modellering som innhold og modellering som fartøy. De to alternative tilnærmingene har ulik motivasjon som utgangspunkt og ulike mål, men det understrekes at de ikke trenger å være motsetninger:

> While as emphasised above, the ‘content’ and ‘vehicle’ approaches differ in key respects, and their respective goals are distinct, they should not be viewed as necessarily antagonistic. In seeking to solve genuine problems the need for new mathematical content may emerge, while real-world contexts can provide legitimate vehicles for the introduction of desired mathematics. (Galbraith, 2012, s.3)

Kaiser og Sriraman (2006) presenterer i sin review-artikkel ulike tilnærminger til modellering fra flere forskningsartikler. Blum (2011) har fire kategorier med begrunnelser for at modellering og anvendelser skal inkluderes i læreplaner og undervisning. Galbraith (2012) argumenterer for at alle disse kan passes inn under de to paraply-kategoriene “innhold” og “fartøy”. Han påpeker også at modellering som kritikk kan kategoriseres som modellering som innhold, nettopp fordi det handler om å finne en problemformulering av et gitt problem i den virkelige verden, og deretter konstruere en modell for å løse det. Jeg velger likevel å bruke modellering som kritikk som en av mine kategorier når jeg analyserer læreplanen. Grunnen er at *Overordnet del* av læreplanen har fokus på kritisk tenkning, og begrepet kritisk tenkning brukes i læreplanens kompetansebegrep.

Når jeg senere skal analysere eksamenssettene må jeg vite hva som kjennetegner en modelleringsoppgave. Både Blomhøj og Jensen (2007) og Steffensen (2023) knytter modelleringsoppgaver sammen med modelleringssyklusen og modellerings-kompetanse. Jeg velger derfor å gjøre rede for ulike kompetansebegrep, og hva det vil si å ha modelleringskompetanse, før jeg definerer hva en modelleringsoppgave er i kapittel 2.2.7.

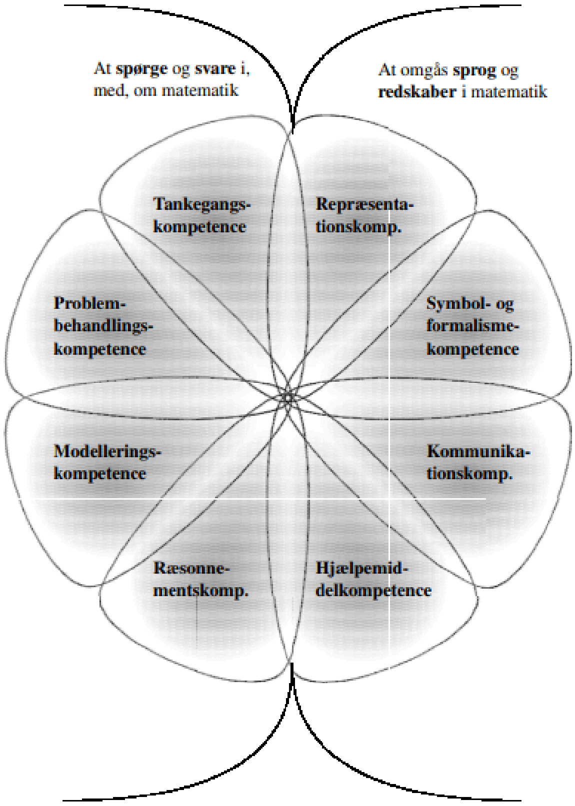
2.2 Kompetansebegrepet

Både læreplanen og eksamen har fokus på kompetanse, jeg vil derfor undersøke hva som ligger i ulike kompetansebegrep. For å kunne svare på forskningsspørsmålet: “Hvordan har elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet *Modellering* *og anvendelser* gjennom eksamensoppgavene?” vil jeg definere hva modellerings-kompetanse er, og sette dette i sammenheng med atomistisk og holistisk syn på modelleringskompetanse.

2.2.1 KOM-rapporten og kompetanseblomsten

I år 2000 startet Niss og Jensen sammen med flere en omfattende analyse av matematikkfaget på alle nivåer av Danmarks utdanningssystem. Dette arbeidet munnet ut i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002). Et av målene med rapporten var å karakterisere hva det betyr at en person er matematisk kompetent, hva vil det si å mestre matematikk. Dette ble beskrevet i generiske termer, som vil si at det er uavhengig av bestemte matematisk emner og gitte nivåer i utdanningssystemet. I rapporten beskrives matematisk kompetanse slik: “...matematisk kompetanse består i å ha kunnskap til å forstå, praktisere, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i en rekke sammenhenger der matematikk inngår eller kan inkluderes.” (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Videre deler de inn i åtte ulike matematiske kompetanser, der “en matematisk kompetanse er en innsiktsfull beredskap til å handle hensiktsmessig i situasjoner som inneholder en viss type matematiske utfordringer.” (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Det er både et handlingsaspekt og et kunnskapsaspekt ved kompetanse slik de definerer det.

De åtte ulike kompetansene kan sies å høre til to grupper, enten “å kunne spørre og svare i og med matematikk" eller “å kunne håndtere matematikkens språk og verktøy.” (Niss & Jensen, 2002). En visuell representasjon av disse vises i figur 4. Denne såkalte kompetanseblomsten skal visualisere at kompetansene ikke er uavhengige av hverandre, men at hver kompetanse overlapper med hver av de andre syv kompetansene (Niss & Højgaard, 2019). Til sammen viser blomsten alle dimensjoner av hva det vil si å mestre matematikk.



Figur 4 En visuell representasjon av de åtte matematiske kompetansene, hentet fra Niss & Jensen, 2002, s. 45.

Det å kunne spørre og svare i og med matematikk krever fire ulike kompetanser. Kort oppsummert kan man si at tankegangskompetanse er å stille spørsmål og ha for øye hvilke type svar som kan finnes. Å være i stand til selv å svare på slike spørsmål både i og med matematikk er henholdsvis problemløsningskompetanse og modelleringskompetanse, og resonnementskompetanse innebærer å kunne forstå, bedømme og argumentere for svar på matematiske spørsmål (Niss & Jensen, 2002).

På samme måte innebærer det å kunne håndtere matematikkens språk og verktøy følgende fire kompetanser: Representasjonskompetanse vil si å kunne håndtere ulike representasjoner av matematiske saksforhold. Symbol- og formalismekompetanse innebærer å kunne håndtere spesielle representasjoner som er bygd opp av matematisk symbolspråk og formalisme. Kommunikasjonskompetanse er å kunne kommunisere innen, med og om matematikk, og hjelpemiddelkompetanse består i å kunne bruke og forholde seg til ulike tekniske hjelpemidler for matematiske aktiviteter (Niss & Jensen, 2002). Alle kompetansene har en utforskende side, som handler om forståelse og kritisk vurdering av allerede gjennomførte prosesser, og en produktiv side hvor fokus er på å selv kunne gjennomføre den typen prosesser som kompetansen innebærer (Jensen, 2009, s.41). Niss og Jensen (2002) påpeker at alle de åtte kompetansene henger sammen, og det er ikke slik at to kompetanser hentet fra samme gruppe er nærmere forbundet enn to kompetanser fra hver sin gruppe.

Det har skjedd en utvikling i bruken av kompetansebegrepene i dansk læreplan, så fra 2017 har tankegangs- og resonnementskompetanse blitt slått sammen, det samme har representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. Per i dag brukes det et kompetansebegrep med seks ulike kompetanser i Danmark.

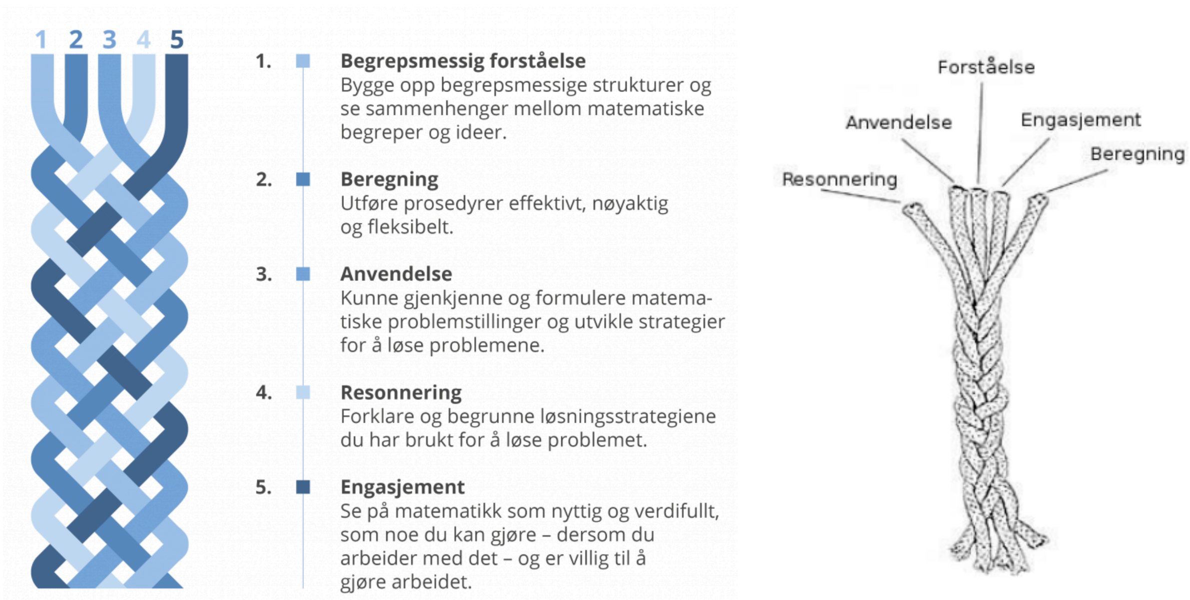
Ifølge Røsseland (2005a) har KOM-rapporten vært inspirasjonskilde til de nasjonale prøvene som har blitt gjennomført årlig i Norge siden 2004. Der blir elevene testet i ulike oppgavetyper, og vurderes ut fra en beskrivelse av matematiske kompetanser. Hun fremhever at rapporten går bort fra den tradisjonelle pensumbaserte beskrivelsen av matematikkfaget, og at den heller foreslår at hensikt og utbytte med undervisningen skal karakterisere ved hjelp av de åtte kompetansene som man ønsker at elevene skal utvikle (Røsseland, 2005a).

Niss og Højgaard (2019) påpeker at KOM-rapporten kom samtidig med andre prosjekter som også jobbet med lignende ideer. De nevner spesielt Kilpatrick og flere amerikanske forskere med rapporten “Adding It Up” (National Research Council, 2001) og “Mathematical Proficiency for All Students” (RAND Mathematics Study Panel, 2003). De understreker at siden arbeidet med disse rapportene var samtidig med KOM-prosjektet så betyr det at tankegangen i KOM-prosjektet ikke ble påvirket av disse prosjektene (Niss & Højgaard, 2019). Jeg vil komme tilbake til hvordan noen av disse prosjektene kan ha påvirket kompetanse-begrepet i den norske læreplanen.

Jeg vil i kapittel 2.2.4 se nærmere på hva KOM-rapporten sier om modellerings-kompetanse, siden det er mest aktuelt for mitt forskningsspørsmål.

2.2.2 Kilpatricks trådmodell

I 2013 oppnevnte Kunnskapsdepartementet et utvalg som skulle se grunnopplæringens fag opp mot krav til kompetanse i et fremtidig samfunns- og arbeidsliv. Dette utvalget ble kjent som Ludvigsen-utvalget, og i 2015 avga de sin rapport *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser* (NOU 2015: 8). Ludvigsen-utvalget presenterte et eksempel på hvordan læreplanen i matematikk kan fornyes, der matematisk kompetanse kan beskrives ved hjelp av fem komponenter, hentet fra Kilpatrick et al (2001). De fem komponentene er forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement, se figur 5 for visuell representasjon og utdyping av hva begrepene inneholder. Alle komponentene er tett sammenflettet og avhengig av hverandre. De støtter hverandre, og når elevene får utvikle alle fem parallelt blir forbindelsen mellom de ulike komponentene forsterket (NOU 2015: 8, s. 57). Matematikksenteret sier at elever vil utvikle en solid, varig, fleksibel og relevant kompetanse i matematikk ved å arbeide med disse fem komponentene, som omfatter alle kjerneelementene i læreplanen LK20 (Matematikksenteret, u.å).



Figur 5: Den såkalte trådmodellen til Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). Figur til venstre hentet fra https://www.matematikksenteret.no/fra-læreplan-til-praksis. Figur til høyre hentet fra Kilpatrick et al (2001, s. 117).

I denne forståelsen er det å kunne matematikk en kombinasjon av å ha forståelse for begreper og ferdigheter innen prosedyrer, å kunne arbeide med problemløsning og fleksible resonnement, og å kunne forholde seg produktivt til matematikk. Det innebærer at man ser på faget som nyttig og meningsfullt, at man tror på at man kan gjøre det bra, og på verdien av å gjøre en innsats (Skott et al, 2017).

2.2.3 Kompetansebegrepet i læreplanen LK20

Læreplanen bygger på denne definisjonen av kompetanse:

> "Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning" (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.11).

I Overordnet del (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.11) presiseres det at skolen må utvikle en forståelse av kompetansebegrepet for å kunne arbeide med læreplaner og vurdering av elevenes faglige kompetanse. Kompetansemålene i hvert fag skal forstås i lys av formålsparagrafen og andre deler av læreplanverket, og må sees i sammenheng med hverandre både innen og på tvers av fag.

Læreplanen definerer kunnskap som "å kjenne til og forstå fakta, begreper, teorier, ideer og sammenhenger innenfor ulike fagområder og temaer." (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.11). Ferdigheter defineres som "å beherske handlinger eller prosedyrer for å utføre oppgaver eller løse problemer, og omfatter blant annet motoriske, praktiske, kognitive, sosiale, kreative og språklige ferdigheter" (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.11). For at elevene skal kunne forstå teoretiske resonnementer og for å utføre noe praktisk må skolen jobbe for at de utvikler forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning i fag. Det å utvikle holdninger og etisk vurderingsevne henger sammen med refleksjon og kritisk tenkning (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.11).

KOM-rapporten og Kilpatricks trådmodell er to ulike forståelser av kompetanse-begrepet. Røsseland (2005a) sier at KOM-rapporten har vært inspirasjonskilde til de nasjonale prøvene i Norge, og PISA bruker også disse kompetansebegrepene utviklet av Niss et al (Blum, 2015). Ludvigsenutvalget (NOU 2015: 8) anbefalte i sin rapport at

Kilpatrick et als (2001) kompetansebegrep skulle brukes i utviklingen av den nye læreplanen. Slik LK20 er nå, mangler Kilpatricks komponent som handler om engasjement. Ifølge Opsal og Smestad (2024) har kjerneelementene for matematikk blitt inspirert av Niss og Jensens (2002) modell for matematikkompetanse. De teoretiske tilnærmingene som er nevnt over settes ikke i sammenheng med kompetansebegrepet i LK20 i selve læreplanen, det er derfor viktig å presisere at dette er tolkninger. Jeg vil likevel anta at det er KOM-rapportens kompetansebegrep som ligger til grunn for læreplanens definisjon av kompetanse, og jeg velger å benytte meg av rapportens definisjon av modelleringskompetanse i min drøfting.

2.2.4 Modelleringskompetanse

Å kunne bruke matematikk til å forstå og håndtere forhold utenfor selve matematikken står sentralt i modelleringskompetanse. Kompetansen inneholder på den ene siden å kunne analysere grunnlaget for og egenskapene til tilgjengelige modeller og å kunne vurdere rekkevidden og gyldigheten til modellene. På den annen side består kompetansen i å kunne gjennomføre aktiv modellbygging i en gitt kontekst, som innebærer å bruke matematikk til behandling av saker utenfor matematikken selv (Niss & Jensen, 2002). Man skal både kunne lage modeller selv, og forstå modeller som er laget av andre.

Aktiv modellbygging inneholder en rekke ulike elementer. Først må man strukturere situasjonen som skal modelleres, for å kunne gjennomføre en matematisering. Det vil si å oversette situasjonen til et matematisk språk, med matematiske problemstillinger og med de nødvendige symboler og matematiske uttrykk. Når man har klart å lage et matematisk uttrykk som representerer den opprinnelige situasjonen, må man kunne bearbeide dette. Det innebærer å kunne forklare hva løsningen betyr for den praktiske situasjonen. Man må også kunne validere den ferdige modellen, som vil si å vurdere gyldigheten og si noe om under hvilke forutsetninger modellen kan brukes. Kompetansen inkluderer også å kunne analysere modellen kritisk, kunne diskutere modellen med andre og å vurdere ulike modeller opp mot hverandre (Niss & Jensen, 2002; Røsseland, 2005b).

Blomhøj og Jensen (2007) definerer modelleringskompetanse som noens innsiktsfulle beredskap til å gjennomføre alle deler av en matematisk modelleringsprosess i en bestemt kontekst. De bruker samme forståelse av kompetanse som KOM-rapporten, som jeg presenterte i kapittel 2.2.1. Når elever skal lære matematisk modelleringskompetanse kan man ifølge Blomhøj og Jensen (2003) tenke seg at det er to ytterpunkter. Det ene er den såkalte holistiske tilnærmingen, der elevene bare jobber med fullskala matematiske modelleringsprosesser. Matematisk modellering består av alle delprosessene (a)-(f), som vist i figur 3 på side 7, og derfor må elevene ha mulighet til å jobbe med alle disse prosessene. Dersom noen av prosessene ikke inkluderes i elevenes aktiviteter, er det sannsynlig at de går glipp av viktige delkompetanser når det gjelder matematisk modellering i nye sammenhenger. Hvis elevene alltid arbeider med ferdig strukturerte problemer, kan det ikke forventes at de utvikler kompetanse i å strukturere en komplekst situasjon. Dessuten kan fullskala matematisk modellering gi autentisitet til elevenes arbeid, og dette kan være en motiverende faktor.

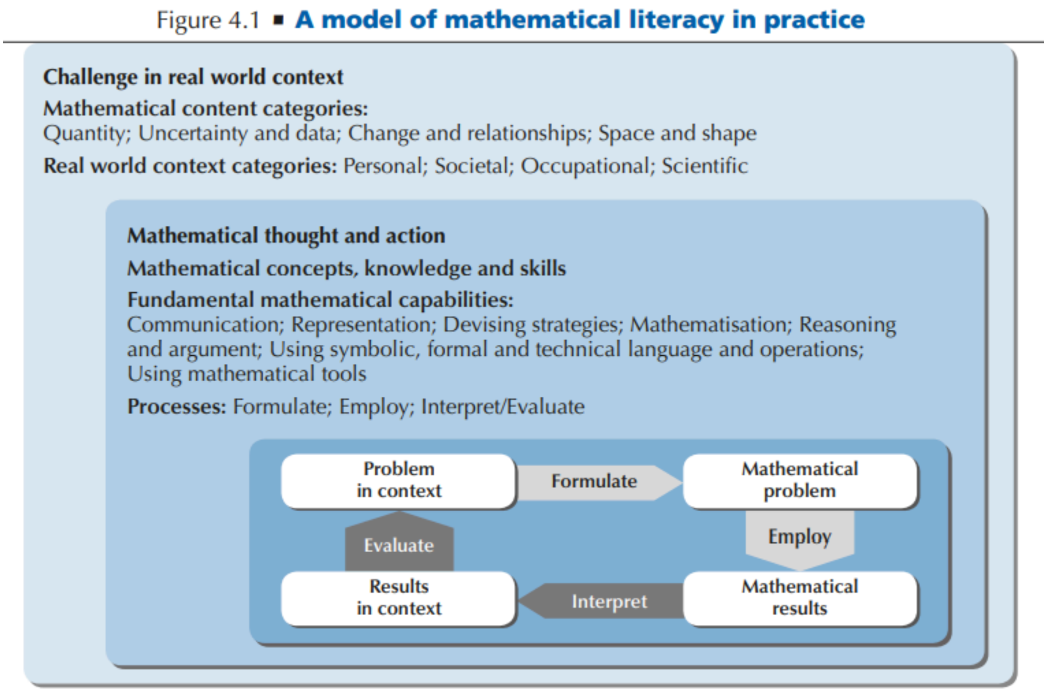
I den andre ytterposisjonen, den såkalte atomistiske tilnærmingen, kan argumentet være at for å utvikle elevenes matematiske modelleringskompetanse må man fokusere på prosessene med matematisering og analyse av modeller, (c) og (d) i figur 3. En støtte for dette standpunktet er at aktiviteter knyttet til disse to prosessene kan sees på som en måte å lære matematikk på, slik at de matematiske begrepene man bruker gir mer mening for elevene. Et annet argument er at det er veldig tidkrevende å jobbe med fullskala matematisk modellering. Det vil derfor begrense tiden man har til matematisering og analyse av det matematiske systemet sammenlignet med tiden brukt på å undersøke det aktuelle problemet og strukturere den komplekse virkelige situasjonen til et objekt for matematisk modellering. Matematisering er kognitivt krevende, så denne tilnærming vektlegger at elevenes arbeid med den delen av matematisk modellering må prioriteres (Blomhøj & Jensen, 2003).

Modelleringskompetanse er nært knyttet til problembehandlingskompetanse, men skiller seg ved at man innen modellering må gjøre mange utenom-matematiske vurderinger. Innen problembehandling kan man arbeide med rene talloppgaver (Niss & Jensen, 2002; Rømseland, 2005b). Resonnementskompetanse er tett forbundet med både modellerings- og problembehandlingskompetanse, og man kan si at at den utgjør den "juridiske" siden til disse kompetansene, den vurderer om svaret er rett eller galt (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Modelleringskompetanse kan slik defineres som evnen til å gjennomføre alle trinn i en matematisk modelleringsprosess, for å løse et ikke-matematisk problem ved hjelp av matematikk. Niss og Jensen (2002) sier at man aldri fullt ut kan inneha en kompetanse eller en oversikt, fordi det er ingen ende på hvor dyptliggende, komplekse og kompliserte saker det kan dreie seg om (Niss & Jensen, 2002). Det er likevel nyttig å definere hva det vil si å ha en bestemt kompetanse når man skal snakke om hva elever bør kunne noe om innen et fagfelt. Dette vil jeg ta med meg i drøftingen i kapittel 5.

2.2.5 PISA

Norge har vært med i PISA-undersøkelsene siden starten i 2000, og PISA påvirker innholdet i norsk skole og norske læreplaner (Utdanningsdirektoratet, 2023h).
Ifølge PISA-rapporten for 2015 er målet med PISA å vurdere matematisk kompetanse. I rapporten brukes begrepet mathematical literacy om matematisk kompetanse (OECD, 2017, s. 67). PISA har brukt det samme kompetansebegrepet i både 2012, 2015 og 2018, og det bygger på KOM-rapportens åtte kompetanser, men ble endret fra åtte til sju kompetanser i PISA 2006. Blum refererer til at kompetansene fra KOM-rapporten danner begrepsgrunnlaget for PISA-studien og for matematisk literacy. Videre sier han at de fleste PISA-delene krever litt modellering i vid forstand, og at en viktig kilde for PISA-filosofien var Hans Freudenthals syn på matematiske konsepter og strukturer (Blum, 2015). Det finnes ingen bredt akseptert definisjon av matematisk literacy. De fleste definisjonene handler om å bygge opp den enkeltes mulighet til å bruke matematikk for å delta i samfunnet og til å bidra på en produktiv og kritisk måte (Geiger et al, 2017). Figur 6 viser en modell av matematisk literacy i praksis, hentet fra PISA-rapporten for 2015, og den har mange likheter med en modelleringssyklus.



Figur 6 En modell av matematisk literacy i praksis, hentet fra OECD, 2017, s. 68)

2.2.6 Atomistisk og holistisk modelleringskompetanse

Blomhøj og Jensen (2003) definerer modelleringskompetanse som å kunne gjennomføre alle deler av en matematisk modelleringsprosess i en bestemt kontekst på en selvstendig og innsiktsfull måte. De påpeker at for å utvikle en slik kompetanse hos elever må i alle fall deler av undervisningen basere seg på en holistisk tilnærming til modellering, som vil si at elevene utfordres til å jobbe med fullskala matematisk modellering og ha ansvar for hele prosessen. De kaller det å jobbe med enkelte deler av modelleringsprosessen for en atomistisk tilnærming. I kapittel 5 vil jeg drøfte om eksamensoppgavene gir mulighet til å vise atomistisk eller holistisk modellerings-kompetanse.

Steffensen ga i 2023 ut en lærebok om modellering, der hun blant annet ser på holistisk modelleringskompetanse og sub-kompetanse (atomistisk kompetanse). Det å kunne planlegge, gjennomføre og reflektere over hele modelleringsprosessen kalles å ha en holistisk modelleringskompetanse (Steffensen, 2023). Ifølge Steffensen (2023) kan elever som har modelleringskompetanse selv konstruere modeller i ulike situasjoner og kontekster, i tillegg til at de kan analysere egne eller andres matematiske modeller. De kan også kritisk undersøke og evaluere modelleringens omfang og gyldighet. Elevers modelleringskompetanse dannes gjennom modelleringsaktiviteter der de kan engasjere seg i ulike deler av modelleringsprosessen. Hun sier at det er vanlig å skille mellom å ha en holistisk modelleringskompetanse og å ha sub-kompetanser i modellering.

Sub-kompetanse innebærer å ha kompetanse til å løse oppgaver innenfor de ulike fasene i modelleringsprosessen. Steffensen (2023) deler inn i de fire sub-kompetansene:

(1) Å forstå virkelige problemer og utvikle en begynnende modell
(2) Å skape en matematisk modell fra en begynnende modell
(3) Å løse matematiske problem i en matematisk modell
(4) Å validere løsningen, som vil si å kritisk sjekke og reflektere over den foreslåtte løsningen, og om nødvendig gjennomføre modelleringsprosessen på nytt.

Elevene kan bygge opp en holistisk modelleringskompetanse på grunnlag av sub-kompetanser (Steffensen, 2023).

Ifølge Steffensen (2023) har man holistisk modelleringskompetanse når man kan planlegge, gjennomføre og reflektere over hele modelleringsprosessen. Hun påpeker at dette innebærer at elevene har handlingskompetanse, meta-kompetanse, kritisk kompetanse og sosial kompetanse. Handlingskompetanse vil si at elevene kan løse et virkelig problem gjennom å utvikle en modell. Meta-kompetanse betyr at elevene kan reflektere over modelleringsprosessen. Kritisk kompetanse vil si at elevene utvikler innsikt om sammenhenger mellom matematikk og virkelighet, og de ser at modeller ikke nødvendigvis er objektive, men at de virker på oss, de er av subjektiv natur. Sosial kompetanse betyr i denne sammenhengen at elevene kan samarbeide i grupper, og at de kommuniserer om og via matematikk om tema som ofte har sosialpolitiske kvaliteter (Steffensen, 2023).

Som jeg har vist finnes det to syn på modelleringskompetanse, som dreier seg om elevene i hovedsak jobber med hele modelleringsprosessen eller om de jobber mest med utvalgte deler av syklusen. Galbraith (2012) deler perspektiver på modellering inn to hovedmål, som presentert i kapittel 2.1.2. Han hevder at bruk av modellerings-syklusen oppsto innenfor “modellering som innhold”, og brukes av to grunner. Den viser hvordan modellering gjøres av profesjonelle matematikere, og den utgjør et godt stillas i den kognitivt vanskelige prosessen det er å lære modellering. Videre påpeker han at “fartøy”-konseptet kan oppnå mange viktige undervisningsformål innenfor et pensum, som modellering som innhold ikke direkte kan løse. Fordi denne retningen blir begrenset av pensum, vil det bli slik at når motstridende prioriteringer oppstår så vil noen deler måtte ofres, og det blir vanligvis de delene som er knyttet spesielt til å lære elevene å bli kompetente til å ta opp virkelige problemer som relevante for deres verden (Galbraith, 2012). Disse delene kalles noen ganger modelleringskompetanser, og dette vil jeg knytte til det Blomhøj og Jensen (2007) kaller atomistisk og holistisk modelleringskompetanse, om man fokuserer på hele modelleringsprosessen eller bare deler av den. Blomhøj og Jensen (2007) presiserer at det er viktig med en balanse mellom den holistiske og den atomistiske tilnærmingen i undervisningen, fordi ingen av de to tilnærmingene er tilstrekkelige alene med tanke på å utvikle modelleringskompetanse. De påpeker også at man bør rette spesiell oppmerksomhet mot manglene ved den atomistiske tilnærmingen. Dette begrunner de med at siden denne samsvarer med mer tradisjonelle undervisningsstrategier i matematikk-undervisningen, kan det være fristende å legge for mye vekt på denne når man legger opp undervisningen (Blomhøj & Jensen, 2007).

2.2.7 Hva kjennetegner en modelleringsoppgave

For å kunne analysere eksamensoppgavene vil jeg finne ut hva som skiller en modelleringsoppgave fra en vanlig matematisk oppgave eller et matematisk problem.

Det er vanlig å definere modelleringsproblemer som spørsmål fra det virkelige liv som kommer fra den utenom-matematiske verden (se f.eks. Jensen, 2009; Borromeo Ferri, 2018; Maas, 2006; Blum, 2015; Blomhøj & Jensen, 2003). Ifølge Galbraith (2012) er det viktigste aspektet for å utvikle modelleringsekspertise at man kan formulere et matematisk problem fra en rotete virkelig verden-kontekst. Borromeo Ferri (2018) hevder at man ikke kan snakke om matematiske modelleringsproblemer uten en reell kontekst. Dersom oppgaven er et påfunnet, ikke-realistisk problem, der alle opplysninger er gitt slik at eleven bare trenger å bruke algoritmer, så vil ikke det kunne karakteriseres som matematisk modellering. Maas (2006) påpeker at det ikke bare er modelleringsoppgaver som er knyttet til virkeligheten. Hun diskuterer ulike forskeres meninger om hva modelleringsoppgaver er, og konkluderer med at det ikke er tilstrekkelig å matematisere problemet fra den virkelige verden, man må også validere de matematiske resultatene man finner med tanke på problemet man startet med. Hun definerer modelleringsoppgaver som autentiske, komplekse og åpne problemer knyttet til virkeligheten, som man må bruke både problemløsning og ulike tenkemåter for å løse (Maas, 2006, s.115).

I matematikk brukes det ulike oppgavetyper. Man kan si at oppgaver er åpne eller lukkede basert på metodefriheten som ligger i oppgaven. En oppgave som har bestemte krav eller få mulige løsningsmetoder kalles en lukket oppgave (Boaler, 1998). Stedøy (2018b) sier at oppgaver kan være lukkede, delvis åpne eller helt åpne. I en lukket oppgave er løsningene faste og udiskutable. En delvis åpen oppgave kan ha mange ulike løsningsmetoder, men løsningene er fortsatt faste og udiskutable. I åpne oppgaver står elevene fritt til å velge metode, og det er ikke nødvendigvis kun ett riktig svar. Elevene vil kunne utforme egne problemstillinger ut fra en gitt tekst, og deretter utføre beregninger som passer til deres problemstillinger.

Steffensen (2023) sier at modelleringsoppgaver kan være vanskelig å skille fra andre typer oppgaver, som tekstoppgaver eller problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgaven blir definert ut fra hvem som skal løse den, det som er et problem for en elev kan være en rutineoppgave for en annen elev. I tillegg karakteriseres problemløsningsoppgaven av at eleven antas å ville engasjere seg i å løse oppgaven, men ikke ser noen direkte måte å løse den på. Videre sier hun at tekstoppgaver er oppgaver der det brukes tekst i stedet for bare matematiske notasjoner. Oppgavene kan stille spørsmål som inneholder en virkelighetstro kontekst eller situasjon (Steffensen, 2023).

Niss et al (2007) kaller tekstoppgaver for “utkledd”, på den måten at oppgaven er et rent matematisk problem som er kledd opp med ord som refererer til en del av den virkelige verden. På sitt beste gir tekstoppgaver rom for interessante og verdifulle aktiviteter plassert innenfor det som er løsnings- og tolkningsstegene i en modelleringssyklus. På sitt verste kan de fremstå som matematiske oppgaver i en urealistisk forkledning, og gi for oppskriftsmessige måter å løse oppgaver på (Niss et al, 2007). Ifølge Steffensen (2023) er måten man løser en tekstoppgaven på å identifisere hvilke matematiske opplysninger gitt i oppgaven som er relevante, og bruke dem på en korrekt måte, siden tekstoppgaver gjerne har et entydig svar. For å løse en tekstoppgave kreves det at eleven kan lese og forstå oppgaven, finne det matematiske problemet, løse problemet gjennom matematiske operasjoner og presentere løsningen sin sammen med en begrunnelse for svaret. Elevene får ofte jobbe med tekstoppgaver etter at de har øvd på en bestemt algoritme, så strategien elevene velger gir som regel rett svar. Både Blum (2015) og andre har sett at utfordringen med tekstoppgaver er at elevene etter hvert utvikler en strategi hvor de "ignorerer konteksten, identifiserer relevante tall, og utfører den korrekte algoritmen" (Steffensen, 2023). Galbraith (2015) presiserer at bruken av en virkelig kontekst for å presentere matematikk ikke nødvendigvis fører til at det utføres matematisk modellering eller anvendelse av noe slag.

Steffensen (2023) sier at modelleringsoppgaver skiller seg fra både vanlige tekstoppgaver og problemløsningsoppgaver på to vesentlige måter. Det ene er at situasjonene eller problemene man skal finne ut av i mye mindre grad er stilt opp på en oversiktlig måte, det andre er at de inneholder mange og også ikke identifiserte variabler. I tekstoppgaver eller problemløsningsoppgaver finner man vanligvis variablene man trenger til utregning i oppgaven, slik er det ikke nødvendigvis i modelleringsoppgaver. Modelleringsoppgaver har sjelden ett riktig svar, svaret kan ha mange ulike former eller varianter avhengig av hvilke kriterier og variabler man har benyttet underveis.

Hva som menes med en modelleringsoppgave kan variere mye avhengig av skole- eller forskningskontekst (Wess et al, 2021). Modelleringsoppgaver vil se forskjellige ut, og Blum skriver: "eksempler er ikke gode eller dårlige i seg selv, det avhenger av formålet deres." (Blum, 2015, s.82). Det er ikke lett å lage en enkel definisjon av hva en modelleringsoppgave er. For å undersøke om eksamensoppgavene er modelleringsoppgaver vil jeg sjekke hver oppgave opp mot en kriterieliste, basert på Maas (2006), Borromeo Ferri (2020), Wess et al (2021) og Steffensen (2023).

Jeg har valgt ut følgende kriterier jeg vil benytte meg av når jeg skal analysere om en eksamensoppgave er en modelleringsoppgave:

- Åpen: Oppgaven kan tolkes på flere måter, kan løses på flere måter, kan ha en gitt løsning, men som oftest er det ikke det.
- Komplekst: Elevene kan forstå situasjonen og søke etter relevante data, og det er kognitivt krevende å løse problemet.
- Realistiske: Knyttet til den virkelige verden, og stemmer overens med elevenes virkelighet på en slik måte at de kan tolke problemet basert på deres erfaring og deres matematiske kunnskaper.
- Autentisk: Spørsmål fra den ekte verden, ikke en kunstig kontekst. Det innebærere at den ikke-matematiske konteksten ikke må være spesielt utformet for matematikkoppgaven, men vær reell.
- Knyttet til en modelleringssyklus: Elevene må benytte en modelleringssyklus for å løse problemet, som vil si å bruke matematikk for å konstruere, beskrive eller forklare situasjonen.

Det er viktig å være oppmerksom på at dette er en tolkning av hva som skal til for å kalle noe for en modelleringsoppgave. I forskningsmiljøet legges det ulik vekt på hvor viktig graden av realisme og autentisitet er, og om alle stegene i modellerings-prosessen må være med. Jeg har valgt disse kriteriene fordi de ser ut til å være i tråd med formuleringene i læreplanen.

2.3 Vurdering

Vurdering står sentralt i denne studien ettersom jeg undersøker eksamensoppgaver med tanke på hvordan elever kan vise kompetanse,og hvordan vurderingen av eksamensoppgavene omtales i plandokumenter. Vurdering er et vidt begrep og med ulike tilnærminger. Vurdering handler om å undersøke elevers faglige utbytte av undervisningen, ved å identifisere deres faglige utvikling og ståsted (Skott et al., 2018). Vurdering kan være summativ eller formativ. I denne studien er fokuset på summativ vurdering som sluttvurdering, siden eksamen skal være en sluttvurdering (Forskrift til opplæringslova, 2006, § 3-14). Jeg vil også presentere hva opplæringsloven sier om vurdering og eksamen, og legge fram noen syn på vurdering av modelleringskompetanse og modelleringsoppgaver.

2.3.1 Summativ og formativ vurdering

En summativ vurdering er en oppsummering av elevens prestasjon i en gitt faglig sammenheng, for eksempel en prøvesituasjon. En lærer eller sensors bedømmelse kategoriserer elevens faglige ståsted. Vurderingen er da en kontrollmekanisme, som har til hensikt å beskrive elevens faglige evne på dette tidspunktet. Eksamen er en slik summativ vurdering, som er pålagt skolen utenfra. Den er en slags "produktkontroll" av hva eleven kan, og den kan være avgjørende for elevens videre utdannings- og arbeidsmuligheter. En summativ vurdering forsøker å tegne et øyeblikksbilde av hva eleven kan og vet på et gitt tidspunkt (Skott et al., 2018).

Formativ vurdering handler derimot ikke bare om å få et stillbilde av elevenes faglige evner, men også om å la informasjon om deres aktuelle forståelse og kunnskap forme den videre undervisning. Læreren må analysere elevenes faglige styrker og svakheter i sammenheng med målene for undervisningen, for å kunne støtte dem i deres videre faglige utvikling. Formativ vurdering handler om vurdering *for* læring, ikke vurdering *av* læring. Derfor gjennomføres formativ vurdering også underveis i et læringsforløp. Tanken er at formativ vurdering skal bidra til å minske avstanden mellom elevenes nåværende forståelse og ferdigheter og det som er intensjonen med undervisningen (Skott et al., 2018).

Ifølge Skott et al (2018) kan vurdering tjene mange formål. Den primære hensikten med vurdering kan i mange land være å trene på ferdigheter og forståelser som testes i en kommende nasjonal eller avsluttende prøve. Det kan være viktig for å sikre at elevene formelt kvalifiserer seg til jobb eller videre utdanning, eller for at skolen står seg godt sammenlignet med andre skoler, når prøveresultater publiseres. I disse tilfellene blir elevene kanskje bedre til å ta prøven. Om de også blir bedre i den matematikken som det var hensikten at de skulle bli gode på, avhenger av i hvilken grad prøven avspeiler hensikten med undervisningen.

Både summativ og formativ vurdering kan ha innflytelse på elevers og læreres oppfatning av hva som er viktig i matematikk. Scott et al (2018) henviser til Clarke (1996) som fant at det man vurderer er det som faktisk bestemmer hva læreren legger vekt på i undervisningen, ikke læreplaner eller pensumbøker. Det viser seg at det som verdsettes i vurderinger fungerer som mål for undervisningen, heller enn motsatt (Scott et al, 2018). Dette kalles for backwash-effekten, og handler om at det som måles blir viktig i undervisningen, mens vi gjerne vil ha den omvendte situasjonen, at det som er viktig blir målt. Den diskusjonen henger dermed sammen med diskusjonen om evalueringens validitet og reliabilitet. Validitet går på at vurderingen er gyldig i den forstand at den måler det som var hensikten med den aktuelle undervisningen eller prøven. Et annet sentralt spørsmål handler om i hvilken grad vurderingen av elevenes svar er robust, rettferdig og ikke preget av tilfeldige omstendigheter. Hvis den er det, sies den å ha høy pålitelighet. Dersom en vurdering har høy reliabilitet, er den pålitelig i den forstand at den kan stoles på, fordi andre ville ha vurdert elevenes svar på samme måte, og fordi en annen tilsvarende evaluering ville gitt samme resultat. Høy reliabilitet er selvsagt viktig i forhold til avsluttende prøver og eksamener, som for eksempel gir tilgang til jobb eller videre utdanning. I matematikk er det ofte slik at kravene til validitet og reliabilitet kan komme i konflikt med hverandre. En skriftlig prøve har ofte høy reliabilitet siden samme besvarelse typisk fører til samme vurdering og karakter, uavhengig av hvem som retter den. På den annen side har en skriftlig prøve i seg selv ofte lav validitet, fordi det er vesentlige sider ved faget som ikke er lette å teste i en slik prøve. Dette gjelder ikke minst de faglige prosessene. Omvendt inviterer evalueringsformer med høyere validitet ofte til tolkninger av svarene som gjør dem mindre pålitelige. Det er dermed ikke lett å finne evalueringsformer som har både høy validitet og reliabilitet (Skott et al, 2017). Højgaard og Niss (2023) påpeker at eksamen og avgangsprøver vanligvis designes med høy reliabilitet som krav, og at det deretter arbeides for at validiteten blir så høy som mulig med innenfor dette kravet. En fare ved dette er at man da kaster lys over det som er lett å måle, i stedet for å måle det som man ifølge undervisningsmålene er interessert i å avdekke og oppnå.

Utvalget for kvalitetsutvikling i skolen finner også denne backwash-effekten eksamen har på undervisningen. De oppsummerer sitt arbeid i *NOU 2023: 1 Kvalitetsvurdering og kvalitetsutvikling i skolen — Et kunnskapsgrunnlag*, De har gått gjennom kvalitetsvurderingssystemet i Norge, som innbefatter nasjonale prøver og eksamen, og påpeker at systemet kan "bidra til målforskyvning i den forstand at skolene vier mest oppmerksomhet til ferdighetene og kompetansene som systemet måler og at skolens brede mandat for både danning og utdanning ikke verdsettes i tilstrekkelig grad" (NOU 2023: 1, s. 175). Man må derfor vurdere det man mener er viktig, hvis ikke er det en fare for at undervisningen vil konsentrere seg for mye om det som vurderes og ikke favne hele bredden av et fag. For å knytte dette til mine forskningsspørsmål vil jeg se på hva opplæringsloven sier om eksamen i grunnskolen.

2.3.2 Vurdering og eksamen i opplæringsloven

I denne studien står den summative vurderingen sentralt ettersom fokuset er på eksamensoppgaver. Det er derfor formålstjenlig å gå nærmere i dybden på hva opplæringsloven sier om vurdering og eksamen. Kapittel 3 i Forskrift til opplæringsloven handler om vurdering i grunnskolen. I § 3-3 står det at formålet med vurdering i fag både er å fremme læring og bidra til lærelyst underveis, og å gi informasjon om kompetanse underveis og ved avslutningen av opplæringen i faget. Videre sies det at grunnlaget for vurdering i fag er kompetansemålene i læreplanen i faget. Kompetansemålene skal forstås i lys av teksten *Om faget* i læreplanen (Forskrift til opplæringslova, 2006).

§ 3-10 sier at all vurdering som skjer før slutten av opplæringen er en underveis-vurdering. Underveisvurdering i fag skal være en integrert del av opplæringen, og skal brukes til å fremme læring, tilpasse opplæring og øke kompetansen i fag. Underveisvurderingen kan være både muntlig og skriftlig (Forskrift til opplæringslova, 2006). Dette peker på formativ vurdering.

I § 3-14 beskrives sluttvurdering. Sluttvurderingen skal gi informasjon om den kompetansen eleven har ved avslutningen av opplæringen i fag, og sluttvurderinger i grunnskolen er standpunktkarakterer og eksamenskarakterer. En standpunktkarakter skal være uttrykk for den samlede kompetansen eleven har i faget ved avslutningen av opplæringen. En eksamenskarakter skal være et uttrykk for den kompetansen hver enkelt elev viser på eksamen (§ 3-22). Eksamen skal være i samsvar med kompetansemålene i læreplanen, og den skal gi elevene mulighet til å vise sin kompetanse i så stor del av faget som mulig ut fra eksamensformen (Forskrift til opplæringslova, 2006). Dette peker på summativ vurdering.

Som støtte til lærernes arbeid med standpunktvurdering har Udir utarbeidet kjennetegn på måloppnåelse for fellesfag i læreplanen LK20. Kjennetegnene er kvalitetsbeskrivelser av hvordan elevenes kompetanse kan se ut på ulike nivå. De er formulert på et overordnet nivå og for tre karakterer: Lav kompetanse (karakter 2), god kompetanse (karakter 4) og framifrå kompetanse (karakter 6). Veiledende kjennetegn på måloppnåelse skal bidra til en felles nasjonal retning for standpunktvurderingen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Disse kjennetegnene samsvarer i noen grad med vurderingskriterier for sentralt gitt skriftlig eksamen som finnes i Eksamensveiledning (Utdanningsdirektoratet, 2023c).

Ved sentralt gitt eksamen er det Utdanningsdirektoratet som har ansvar for organisering av eksamen, utarbeidelse av eksamensoppgaver, fastsettelse av dato og for karaktersetting (§ 3-23, Forskrift til opplæringslova, 2020). De som Udir har oppnevnt til å lage eksamensoppgaver må forholde seg til Rammeverk for eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2021). Rammeverket er på overordnet nivå, og ikke spesifikt for hvert fag. I rammeverket for LK20 er kvalitetskravene til eksamen beskrevet tydeligere enn det de var tidligere, og de skal bidra til å styrke den metodiske kvaliteten på eksamen og sensur. Rammeverket er ment å være dynamisk og skal kunne videreutvikles etter erfaringer med bruk av rammeverket, og utvikling og utprøving av oppgaver til eksamen etter nye læreplaner. Det presiseres at oppgavene må lages på en slik måte at eksamen er mest mulig valid, reliabel, rettferdig og håndterbar innenfor de rammene som til enhver tid gjelder, der oppgavesettet samlet skal representere det som er mulig å vurdere til eksamen i læreplanen. Det er viktig at kandidaten får vise kompetansen sin på flere og varierte måter (Utdanningsdirektoratet, 2021).

2.2.3 Vurdering av modelleringsoppgaver/ -kompetanse

Niss et al (2007) sier at vurdering av matematisk modellering ikke er lett, for jo mer komplisert og åpent et problem er, jo mer komplisert blir det å vurdere kvaliteten på en løsning av problemet. De stiller også spørsmål ved hva de praktiske implikasjonene av å vurdere matematisk modellering som en prosess, snarere enn et produkt, vil være. Højgaard og Niss (2023) påpeker at evaluering av matematisk kompetanse er en omfattende og kompleks oppgave, og det finnes få eksempler på forskningsstøttet empirisk materiale som kan dokumentere vellykkede evalueringstiltak.

Maaß (2006) undersøkte utviklingen av modelleringskompetanse i to klasser med 13-åringer. Et viktig funn i studien er at elever på ungdomstrinnet er i stand å utvikle modelleringskompetanse. Hun poengterer at dette resultatet motsier en vanlige oppfatning, som er spesielt utbredt i skolene, om at modellering av problemer hentet fra virkeligheten er så komplekse at de bare kan brukes i høyere utdanning, eller ikke i det hele tatt (Maaß, 2006, s.128). I studien jobbet hun med klassene gjennom et helt skoleår. Hun brukte både skriftlige prøver, konseptkart og intervjuer for å avdekke elevenes modelleringskompetanse.

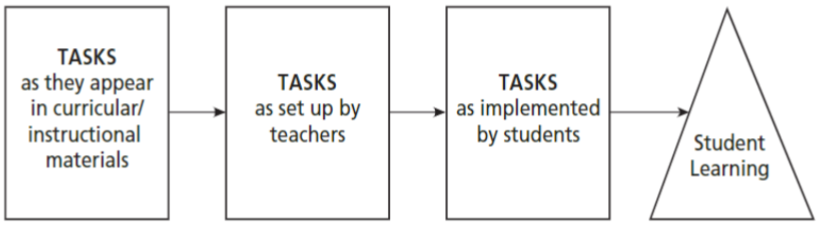
Niss og Jensen (2002) gir en beskrivelse av tre dimensjoner som kan brukes til å oppsummere hvordan en elev har en bestemt matematisk kompetanse, og fremgangen eleven gjør. De tre dimensjonene handler om å avdekke elevens dekningsgrad, aksjonsradius og det tekniske nivået innen den bestemte kompetansen man vil vurdere. De presiserer at hvis en av dimensjonene ikke er til stede, har eleven ingen kompetanse. Ifølge Blomhøj og Jensen (2007) handler dimensjonen som beskriver graden av dekning om hvilke deler av modelleringsprosessen elevene kan jobbe med, og på hvilket refleksjonsnivå. Dimensjonen de kaller teknisk nivå på elevenes aktiviteter i modelleringsprosessen forteller hva slags matematikk de bruker og hvor fleksibelt de gjør det, og dimensjonen aksjonsradius beskriver i hvilke situasjoner og kontekster elevene kan aktivere sin matematiske modellerings-kompetanse (Blomhøj & Jensen, 2007).

I en litteraturgjennomgang ser Frejd (2013) på ulike metoder for å vurdere modelleringskompetanse. Det finnes skriftlige vurderinger i form av avkryssingsprøver, som vurderer elever i deler av modelleringssyklusen, der det skal være mulig å få et øyeblikksbilde av elevenes modelleringsferdigheter. Disse skriftlige prøvene trekker på et atomistisk syn, og fokuserer mer på aspekter ved produktet enn på hele prosessen.

Oppgaveformen prosjekt er bedre når det kommer til å vurdere en mer helhetlig modelleringskompetanse. En ulempe med prosjekt som vurderingsform er at påliteligheten til vurderingen ofte er lavere enn en skriftlig prøve, som beskrevet i kapittel 2.3.1

2.3.4 Intendert, implementert og vurdert læreplan

Når jeg skal analysere eksamensoppgaver, kan det være sentralt å være bevisst på de didaktiske rammene for oppgavene, slik at innholdet og fokuset for analysen blir tydelig. En mye brukt klassifikasjon er Stein & Smith (2011), som peker på at en oppgave kan forstås på flere nivå. For å vurdere hvordan oppgaver kan føre til læring hos elever, kan man ifølge Stein og Smith (2011) bruke de tre fasene for oppgave-løsning, se figur 7.



Figur 7 Tre faser for oppgaveløsning, hentet fra Stein & Smith 2011

Den første fasen er hvordan oppgavene gis i læreplanressurser eller lærebøker. Den andre fasen er hvordan læreren presenterer oppgaven for eleven, og den tredje er implementeringsfasen, som vil si hvordan elevene tar imot oppgaven og jobber med den. Alle disse, men spesielt implementeringsfasen, blir sett på som viktige påvirkere med tanke på hva elevene faktisk lærer (Stein og Smith, 2011).

Eksamensgruppa skriver i rapporten *Vurderinger og anbefalinger om fremtidens eksamen*:

> Eksamen har flere eksplisitte formål (det vil si formelt definerte intensjoner i regelverket), for eksempel å gi informasjon om elevenes kompetanse ved avslutningen av opplæringen i faget. Samtidig viser Kunnskapsgrunnlaget at eksamen også har flere implisitte roller som ikke er formalisert, for eksempel i videreutviklingen av vurderingspraksisen eller i å påvirke læreplanforståelsen og undervisningen i faget. (Blömeke et al, 2020)

Eksamen er således ment å påvirke måten lærere underviser i faget og hvordan læreplanen blir forstått. Jeg undersøker hvordan oppgavene presenteres på eksamen. Eksamensoppgaver blir også brukt i lærebøker (Berget, 2023b), og i undervisningen, så dette kan sees som fase 1 i modellen. Analysen min kan i denne forbindelsen si noe om hvilke muligheter for læring som ligger i eksamensoppgavene. Ifølge Rezat og Strässer (2015) kan innholdsanalyse ikke si noe om hvordan lærere bruker oppgavene eller hva elevene faktisk lærer.

2.5 Tidligere forskning

Kunnskapsdepartementet ønsket en gjennomgang av eksamenssystemet i lys av fagfornyelsen og teknologisk utvikling, de opprettet derfor Eksamensgruppa i september 2018. Eksamensgruppa kom med rapporten *Kunnskapsgrunnlag for evaluering av eksamensordningen* i februar 2019 og *Vurderinger og anbefalinger om fremtidens eksamen i juni* 2020. En av konklusjonene i Kunnskapsgrunnlaget er at det er behov for mer forskningsbasert kunnskap om eksamen. Forskningen om eksamen som finnes i Norge i dag er for det meste spørreundersøkelser eller bruk av registerdata. Det mangler en systematisk utredning av eksamens gjennomføring i praksis, det vil si oppgaver, prosesser, bruk av digital teknologi, sensurering og eksamener på tvers av ulike elevkull, i tillegg til eksamens kort- og langsiktige konsekvenser (Blömeke et al, 2020). Jeg har likevel funnet noe relevant forskning på modellering fra svensk og norsk videregående skole, utført av henholdsvis Frejd (2023) og Berget (Berget & Bolstad, 2019; Berget, 2022; Berget, 2023b).

NIFU har gjennomført en kartlegging av nordisk forskning på eksamen, og de finner at det er relativt lite forskning på selve eksamen- og sluttvurderingssystemene i grunnskolen og videregående opplæring i de nordiske landene (Hovdhaugen et al, 2022). En studie som er interessant i lys av mine forskningsspørsmål er Fafo sin evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn 2017-2019 (Bjørnset, et al, 2020), der de undersøkte om eksamen gir kandidatene like muligheter til å vise sin kompetanse i matematikk. Prosjektet benyttet både kvantitative og kvalitative data, i form av spørreskjema blant matematikklærere og sensorer, intervju med lærere og elever, klasseromsobservasjon og analyse av eksamensbesvarelser. Rapporten konkluderer med at eksamen slik den er gitt i de tre årene oppfattes som rettferdig og av høy kvalitet, og at eksamensoppgavene i hovedsak har vært gode og rettferdige, sett i lys av rammene gitt i LK06. De ulike eksamensoppgavene hang godt sammen med undervisningen og kompetansemålene, og eksamen i matematikk har høy legitimitet blant elever og lærere. Vanskelighetsgraden på oppgavene var tilstrekkelig variert til at elever på alle prestasjonsnivåer fikk mulighet til å vise sin kompetanse, med unntak av de elevene som presterer svakest. Nesten alle deler av læreplanen har blitt gjenstand for prøve i de tre årene, samtidig som en økende andel av sensorene mente at deler av læreplanen aldri ble testet. Både elever og lærere opplevde at innholdet i eksamensoppgavene var i tråd med opplæringen som hadde blitt gitt. Bjørnset et al (2020) finner at eksamenen i stor grad ligger tett på innholdet i lærebøkene elevene har, og det er ingen systematiske forskjeller mellom ulike læreverk. Unntaket er digitale verktøy, der elevene har fått varierende grad av opplæring. Når det gjelder språk og bruk av illustrasjoner i eksamenssettene er hovedbekymringen at det store flertallet av oppgaver stiller språklige krav. Rapporten påpeker at selv om lesing er en grunnleggende ferdighet også i matematikk, er det ikke nødvendig å teste denne ferdigheten i nesten alle eksamensoppgavene (Bjørnset et al, 2020, s. 132). Sensorene forteller at de stort sett ikke opplever utfordringer når det gjelder å sikre rettferdig sensur. Analysen av sensorenes vurderingsskjemaer viste at det var til dels store forskjeller mellom sensorene på de oppgavene som krevde bruk av digitale hjelpemidler, oppgavene hvor elevene selv velger en hensiktsmessig metode, og oppgaver som stiller høyere krav til kommunikasjon og begrunnelse. Rapporten påpeker at åpne oppgaver som krever metodevalg og begrunnelse er vanskeligere å vurdere, og at dette er sentrale områder av matematisk kompetanse som vil bli enda sterkere vektlagt i fagfornyelsen (Bjørnset et al, 2020).

Frejd (2013) har undersøkt avsluttende prøver i matematikk i svensk videregående skole, og fant indikasjoner på at modelleringskompetanse er komplisert å vurdere. Prøvene inneholdt en ujevn vektlegging av de ulike aspektene ved matematisk modellering. Det var oftere at elevene ble bedt om å bruke en allerede eksisterende modell for å beregne et resultat, enn at de ble bedt om å kritisk vurdere forhold og validere resultater. Han fant ingen holistiske oppgaver som vurderte alle aspekter ved modellering (Frejd, 2013).

I Norge har matematisk modellering vært en del av læreplanen i matematikk i videregående skole de siste 30 årene, og Berget har i forbindelse med sin doktoravhandling om modellering i matematikkfaget 2P i norsk videregående skole undersøkt ulike sider ved undervisning og læreplaner (Berget, 2023b). Hun påpeker at det har blitt identifisert et gap mellom hvordan matematisk modellering fremstilles i forsknings- og undervisningsdebatter, og hvordan det jobbes med matematisk modellering i klasserommet. Forskningsspørsmålene hun har besvart er: "Hvilke perspektiv på matematisk modellering kan identifiseres i ulike diskurser ved læreplanen, og hvilke diskursive og sosiale praksiser kan identifiseres i og mellom diskurser?" Diskursene som inngikk i studien var den *ideologiske* (forskningslitteratur og rammeverk), *intenderte* (i norsk læreplan R94, L97, LK06 og LK20), *instruktive* (lærebokoppgaver), *oppfattede* (lærerintervju), *utøvde* (klassromsobservasjoner) og *vurderte* (eksamenoppgaver) læreplanen. Hun har satt de ulike læreplandiskursene i sammenheng, undersøkt hvordan de påvirker hverandre og hvordan sosiale og diskursive strukturer kan føre til at visse forståelser av matematisk modellering utvikles. I den *ideologiske* og den *intenderte* læreplanen fant hun mange ulike modelleringsperspektiv som krever at elevene selv skal ta avgjørelser, analysere og utvikle matematiske modeller, og bruke disse til å løse oppgaver utenfor skolens matematikk. Det ble ikke funnet mange spor av at disse læreplandiskursene ble tatt opp i de andre diskursene. I den *instruktive* læreplanen kan lærebokoppgavene løses ved å huske og bruke prosedyrer. Tidligere eksamensoppgaver er inkludert i lærebøkene. I den *oppfattede* læreplanen ga lærerne uttrykk for at de ikke var kjent med matematisk modellering fra egen lærerutdanning, og de så ikke på matematisk modellering som viktig for at elevene skulle mestre hverdagssituasjoner. I den *utøvde* læreplanen ble matematisk modellering knyttet til ett matematisk kunnskapsområde, og lærerne pekte på læreboken og eksamen for å argumentere for valgene knyttet til undervisningen i matematisk modellering. Dette viser at den *vurderte* læreplanen ble konsumert inn i den *instruktive*, *oppfattede* og *utøvde* læreplanen. Den vurderte læreplanen består av en 5-timers skriftlig eksamen, som ikke legger til rette for å løse holistiske modelleringsoppgaver. Dette kan medføre at matematisk modellering blir forstått på en bestemt måte, der helheten i en modelleringsprosess ikke inngår. Berget fant også at selv om lærerne var enige i at åpne modelleringsoppgaver hjelper elevene til å se matematikk som relevant for livet utenfor skolen, opplevde de ikke at læreplandiskursene tillot eller la til rette for arbeid med slike oppgaver (Berget, 2023b).

NIFU har gjennomført en kartlegging av nordisk forskning på eksamen, og de finner at det generelt sett er relativt lite forskning på selve eksamens- og sluttvurderings-systemene i grunnskolen og videregående opplæring i de nordiske landene (Hovdhaugen et al, 2022). En studie som er interessant i lys av mine forskningsspørsmål er Fafo sin evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn 2017-2019 (Bjørnset, et al, 2020), der de undersøkte om eksamen gir kandidatene like muligheter til å vise sin kompetanse i matematikk. Prosjektet benyttet både kvantitative og kvalitative data, i form av spørreskjema blant matematikklærere og sensorer, intervju med lærere og elever, klasseromsobservasjon og analyse av eksamensbesvarelser. Rapporten konkluderer med at eksamen slik den er gitt i de tre årene oppfattes som rettferdig og av høy kvalitet, og at eksamensoppgavene i hovedsak har vært gode og rettferdige, sett i lys av rammene gitt i LK06. De ulike eksamensoppgavene hang godt sammen med undervisningen og kompetansemålene, og eksamen i matematikk har høy legitimitet blant elever og lærere. Vanskelighets-graden på oppgavene var tilstrekkelig variert til at elever på alle prestasjonsnivåer fikk mulighet til å vise sin kompetanse, med unntak av de elevene som presterer svakest. Nesten alle deler av læreplanen har blitt gjenstand for prøve i de tre årene, samtidig som en økende andel av sensorene mente at deler av læreplanen aldri ble testet. Både elever og lærere opplevde at innholdet i eksamensoppgavene var i tråd med opplæringen som hadde blitt gitt. Bjørnset et al (2020) finner at eksamenene i stor grad ligger tett på innholdet i lærebøkene elevene har, og det er ingen systematiske forskjeller mellom ulike læreverk. Unntaket er digitale verktøy, der elevene har fått varierende grad av opplæring. Når det gjelder språk og bruk av illustrasjoner i eksamenssettene er hovedbekymringen at det store flertallet av oppgaver stiller språklige krav. Rapporten påpeker at selv om lesing er en grunnleggende ferdighet også i matematikk, er det ikke nødvendig å teste denne ferdigheten i nesten alle eksamensoppgavene (Bjørnset et al, 2020, s. 132). Sensorene forteller at de stort sett ikke opplever utfordringer når det gjelder å sikre rettferdig sensur. Analysen av sensorenes vurderingsskjemaer viste at det var til dels store forskjeller mellom sensorene på de oppgavene som krevde bruk av digitale hjelpemidler, oppgavene hvor elevene selv velger en hensiktsmessig metode, og oppgaver som stiller høyere krav til kommunikasjon og begrunnelse. Rapporten påpeker at åpne oppgaver som krever metodevalg og begrunnelse er vanskelig å vurdere, og at dette er sentrale områder av matematisk kompetanse som vil bli enda sterkere vektlagt i fagfornyelsen (Bjørnset et al, 2020).

3 Metode

Analysen i denne studien undersøker modelleringsbegrepet i læreplanen og tilhørende plandokumenter, og knytter det opp mot modelleringsoppgaver på eksamen i matematikk for 10. trinn. I dette kapittelet presenterer jeg hvilke dokumenter som er med i studien og hvorfor disse er valgt ut. Videre vil jeg gi en presentasjon av analyseverktøyene jeg har brukt, og begrunne hvorfor jeg valgte disse. Til slutt beskriver jeg validitet og reliabilitet knyttet til studien.

3.1 Innholdsanalyse

Analysen undersøker innholdet i læreplandokumenter, eksamenssett og dokumenter knyttet til sensurering av eksamen. Mitt utvalg av empiri er dokumenter, og for å kunne besvare forskningsspørsmålene har jeg gjennomført en innholdsanalyse. En innholdsanalyse er en prosess der målet er å avdekke og oppsummere innholdet i dokumenter (Cohen et al, 2011). Jeg har valgt innholdsanalyse som metodisk tilnærming fordi jeg oppfatter dokumenter i form av eksamensoppgaver og læreplan som sentralt for den generelle diskursen som jeg ønsker å bidra til. Alle lærere må forholde seg til læreplanen og sentralt gitte eksamensoppgaver, og en analyse av disse vil dermed være av en viss allmenn interesse.

Kategoriseringen i min studie er hovedsakelig kvalitativ, men inneholder noen kvantitative elementer. Det kvalitative i min analyse blir tydeligere ved at det er jeg som står for tolkningen av dokumentene. Min rolle som forsker, sammen med mine valg og mine tolkninger, vil påvirke datainnsamlingen og den videre analysen (Postholm og Jacobsen, 2011). Det finnes ulike typer kvalitativ innholdsanalyse. Jeg vil gjennomføre en form for struktureringsprosedyre, der formålet med analysen er å filtrere ut spesielle aspekter ved materialet og vurdere materialet etter visse kriterier. I disse prosedyrene er kategoriene formulert på forhånd, i det som kalles en deduktiv kategorisering (Mayring, 2015). En fordel med den innholdsanalytiske prosedyren sammenlignet med andre tilnærminger til tekstanalyse er at materialet man undersøker alltid skal forstås som relatert til konteksten kommunikasjon er hentet fra. For å få til dette må man lage kategorier spesielt til materialet man undersøker, det finnes ikke et standardisert instrument som passer til all tekstanalyse. Det innebærer å bestemme på forhånd hvordan materialet skal ses på, hvilke deler som skal analyseres i hvilken rekkefølge og hvilke betingelser som må være oppfylt for at en tekstkoding skal gjennomføres. Ved at kategoriene er godt beskrevet og fundert i teori, kan andre tolke teksten ved hjelp av samme logikk og metode (Mayring, 2015). Dette vil også bidra til tolkningens gyldighet, mer om dette i kapittel 3.4. Jeg har definert analysekategoriene jeg bruker når jeg analysere læreplanen ut fra Julie (2002) og Barbosa (2006) sine perspektiv på hva som er målet med en modelleringsaktivitet. For å analysere eksamensoppgavene har jeg laget en kriterieliste, basert på teori hentet fra Maas (2006), Borromeo Ferri (2020), Wess et al (2021) og Steffensen (2023). I tillegg analyserer jeg oppgavene som blir kategorisert som modelleringsoppgaver ut fra mulighetene eleven har til å vise kompetanse innen de to kategoriene holistisk og atomistisk modelleringskompetanse. Teorien bak denne inndelingen er hentet fra Blomhøj og Jensen (2007). Dette presenteres nærmere i kapittel 3.3 Analyseverktøy.

Hvis man skal benytte seg av kvantitative analysetrinn må man forklare hvorfor. For eksempel vil kvantitative analysetrinn ha særlig betydning når det er nødvendig å generalisere resultatene. Innen innholdsanalyse kan registrering av hvor ofte en kategori forekommer gi ekstra vekt til dens mening og viktighet (Mayring, 2015).
Jeg har gjennomført en kvalitativ innholdsanalyse med noen kvantitative elementer.
Et kvantitativt element i min analyse er opptelling av hvor ofte ordene modell, modellering og modellere forekommer i læreplanverket. Læreplandokumentene ble analysert fordi de inneholder begreper og uttrykk som formidler sentrale forventninger til elevenes læringsutbytte, det vil si ord som fungerer som signaler for hva som er ment å undervises og læres. Hvordan lærere, lærerutdannere og lærebokforfattere tolker betydningen og viktigheten av slike signaler vil påvirke hva som faktisk blir undervist i klasserommene. Hyppigheten og plasseringen av disse signalordene i læreplandokumentene kan også brukes til å måle hvor viktige de er for et fag (Frejd og Geiger, 2017, s. 4.)

Jeg har undersøkt hvordan oppgavene formuleres på eksamen. Rezat og Strässer (2015) peker på at innholdsanalyse bare kan avsløre hvilke muligheter for læring som ligger i oppgaver, det vil si hvilke potensiale oppgavene har. Man kan ikke trekke slutninger om den faktiske innvirkning på læreres instruksjoner, eller den kompetansen elever oppnår ved å gjøre oppgavene. Eksamen er en sluttvurdering, og skal gi elevene mulighet til å vise hva de har lært. Samtidig brukes tidligere eksamens-oppgaver ofte i opplæringen. Det er derfor interessant å se på hvilke muligheter elever har for å vise modelleringskompetanse i eksamensoppgavene, både som en sluttvurdering for elevkullet som har eksamen, og for senere elevkull som bruker disse eksamensoppgavene som øvingsoppgaver i opplæringen.

3.2 Utvalg

For å svare på forskningsspørsmål 1, “Hvilke perspektiv på modellering finnes i læreplanen LK20? “, har jeg gjennomført en innholdsanalyse av læreplandokumenter der jeg har sett på synligheten til og betydning av begrepet matematisk modellering. Tilnærmingen til denne innholdsanalysen har to aspekter. Først dokumenterer jeg hyppigheten av begrepet modellering. Deretter diskuterer jeg beskrivelsene av matematisk modellering i de ulike delene av læreplanen.

For å undersøke hvordan eksamen gir elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet modellering og anvendelser, har jeg analysert eksamen i matematikk for 10.trinn fra 2022 og 2023, siden det er disse to årene det har vært avgangskull som kunne trekkes ut til eksamen etter at læreplanen LK20 ble innført. Våren 2022 ble ordinære eleveksamener i grunnskolen avlyst, med begrunnelse i covid-pandemien (Regjeringen, 2022). Det finnes allikevel oppgavesett til eksamen, fordi enkelte elever fra voksenopplæringen ble trukket ut.

Jeg har også brukt eksamensveiledning fra 2022 og 2023 og sensorveiledning og forhåndssensurrapport fra 2023 som støtte i analysegrunnlaget mitt. Dette er dokumenter Utdanningsdirektoratet publiserer i forbindelse med sensurering av eksamen, som inneholder føringer for hvordan eksamen skal vurderes. Det er interessant å analysere disse fordi de kan bidra til å kaste lys over mitt forskningsspørsmål knyttet til hvordan elever kan vise modelleringskompetanse.

3.2.1 Læreplanverket

Læreplanen i matematikk 1–10 (MAT01-05) er det første dokumentet jeg analyserer. For å se etter modelleringsbegrepet i kontekst har jeg også sett på andre deler av læreplanen, som overordnet del og fag- og timefordeling. Læreplanverket består av overordnet del, fag- og timefordelingen og læreplaner i fag. Dette er forskrifter til opplæringsloven og skal styre innholdet i opplæringen. Læreplanene for fag beskriver fagenes innhold og mål. Overordnet del skal gi retning for opplæringen i hvert fag, og alle fag skal støtte opp om opplæringens brede formål (Kunnskapsdepartementet (2017). For å undersøke hva slags perspektiver på modellering som finnes i læreplanen, har jeg sett på overordnet del og læreplanen i matematikk 1.–10. trinn knyttet til Kunnskapsløftet 2020.

Læreplanen i matematikk 1.–10. trinn inneholder delkapitlene *Om faget*, *Kompetansemål og vurderin*g og *Vurderingsordning*. Om faget er delt inn i *Fagets relevans og sentrale verdier, Kjerneelementer*, *Tverrfaglige temaer* og *Grunnleggende ferdigheter.* Delkapittelet *Kompetansemål* inneholder kompetansemål og vurdering for hvert trinn fra 2. trinn til og med 10.trinn. Vurderingsordning er delt inn i *Standpunktvurdering*, *Eksamen for elever 10. trinn* og *Eksamen for privatister* (Kunnskapsdepartementet, 2019). I opplæringsloven står det at grunnlaget for vurderingen i et fag skal være kompetansemålene i læreplanen i faget, og kompetansemålene skal forstås i lys av teksten *Om faget* i læreplanen (Forskrift til opplæringslova, 2006).

3.2.2 Eksamenssettene og dokumenter knyttet til sensurering av eksamen

For å undersøke hvordan eksamen gir elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet modellering og anvendelser har jeg sett på eksamen for 10.trinn fra 2022 og 2023, eksamensveiledning fra 2022 og 2023 og sensorveiledning og forhåndssensurrapport fra 2023.

Eksamen i matematikk for grunnskolen arrangeres i midten av mai hvert år. I januar publiserer Utdanningsdirektoratet en eksamensveiledning som beskriver hva som kjennetegner en god besvarelse, hvordan eksamen er bygd opp og hvilke hjelpemidler som er tillatt brukt på eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2022). Den skal være kjent for elever, privatister, sensorer, lærere og foresatte i god tid før eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2023c).

Dagen etter at eksamen er gjennomført starter arbeidet for sensorene, og sensorveiledningen gjøres tilgjengelig. Formålet med sensorveiledningen er å sikre så lik vurdering og så rettferdig sensur som mulig for alle elever som gjennomfører sentralt gitt skriftlig eksamen. Vurderingen tar utgangspunkt i kompetansemålene, slik de er beskrevet i LK20, og i vurderingskriteriene for eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2023d). Vurderingskriteriene som gis her er den samme matrisen som ble publisert i Eksamensveiledning (Utdanningsdirektoratet, 2023c). Det skal også settes poeng på oppgavene. Alle oppgaver på del 1 kan gi 1 poeng, 0 poeng ved feil. Det settes ikke halve poeng. Oppgavene på del 2 kan gi 2 poeng, utenom de to åpne oppgavene knyttet til spesifikke kjerneelementer, som kan gi 3 poeng hver. Delvis korrekt besvarelse kan også gi poeng, dette beskrives for den enkelte oppgave i sensorveiledningen.

Hver eksamensbesvarelse vurderes av to sensorer. Etter eksamensdagen får sensorene rundt to uker på seg til å vurdere om lag 70 besvarelser hver. Oppmenn fra hvert fylke møtes for å utarbeide en forhåndssensurrapport. Drøftinger på forhånds-sensurmøtet fører til justering i kommentarer til enkelte oppgaver, slik at sensorene må justere sine vurderinger av eksamensbesvarelsene etter dette (Utdanningsdirektoratet, 2023e). Det sendes her noen signaler om hvordan modellering skal tolkes, og det vil jeg komme tilbake til i kapittel 4. Sensor 1 og sensor 2 “bytter bunker”, og har to-tre uker på seg til å sensurere ferdig omtrent 140 besvarelser. På fellessensurmøtet i slutten av juni møtes de to sensorene igjen, og sammen setter de endelig karakter på hver eksamensbesvarelse. Tvilstilfeller avgjøres av en oppmannsgruppe. Sensorskolering og fellessensur skal etablere et tolkningsfellesskap mellom sensorene og er en viktig del av kvalitetssikringen av sensuren (NOU 2023: 1).

Det har vært to avgangskull som kunne trekkes ut til eksamen i matematikk etter at læreplanen LK20 ble innført, våren 2022 og våren 2023. Våren 2022 ble ordinære eksamener i grunnskolen avlyst, med begrunnelse i covid-pandemien (Regjeringen, 2022). Det finnes allikevel oppgavesett til eksamen, fordi enkelte elever fra voksenopplæringen ble trukket ut. Ifølge Utdanningsdirektoratet ble det ikke brukt eksterne sensorer til vurdering av denne eksamenen. Sensuren ble gjort av Matematikksenteret og deres nemndsmedlemmer, derfor ble det ikke utarbeidet skriftlig sensorveiledning eller forhåndssensurrapport.

3.3 Presentasjon av analyseverktøy

Formålet med studien er å undersøke modelleringsbegrepet knyttet til læreplanen LK20 og de to eksamenssettene som er laget etter denne. Jeg vil først presentere alle analyseverktøyene i tabell 1, deretter vil jeg forklare hvordan det enkelte verktøyet skal brukes.

Analyse av læreplanverket	Analyse av eksamen	Analyse av dokumenter knyttet til sensurering av eksamen
Opptelling av antall ganger varianter av ordet modellering forekommer	Undersøke eksamensoppgavene opp mot kriterielisten for modelleringsoppgaver	Undersøke om det forventes at elevene gjør bruk av en modelleringssyklus
Analyse av hvilket perspektiv på modellering som finnes i læreplanen	Knytte analysen av eksamensoppgavene og vurderingene av disse opp mot et holistisk og et atomisk syn på modelleringskompetanse	

Tabell 1: Oversikt over mine analyseverktøy

Jeg startet med å telle opp hvor mange ganger varianter av ordene modell og modellering forekommer i læreplanverket. Ifølge Frejd og Geiger (2017) bør læreplandokumenter inneholde begreper og uttrykk som formidler forventninger til elevers læringsutbytte, det vil si ord som fungerer som signaler om hva som er ment å undervises og læres. Hvordan lærere, lærerutdannere, lærebokforfattere og andre med interesse for utdanningsfeltet tolker betydningen og viktigheten av slike signaler vil påvirke hva som undervises i skolen. Hyppigheten og plasseringen av disse signalordene i læreplandokumenter kan også sees på som en måte å måle hvor viktige de er for et fag (Frejd & Geiger, 2017, s.4). Hensikten er å avdekke modelleringens plass i læreplanen.

For å gjennomføre analysen av hva slags perspektiv på modellering læreplanen inneholder, har jeg benyttet meg av Julie (2002) sine ulike perspektiv modellering som fartøy og som innhold, i kombinasjon med Barbosa (2006) sin modellering som kritikk. Alle disse tre perspektivene ser på hva som er målet med modelleringsaktiviteten. Alle forekomstene av ordene modell, modeller og modellering jeg fant i læreplanen ble plassert i en av disse kategoriene. For å være modellering som innhold må det være snakk om overgangen fra hverdagslivet til matematikk, eller å tolke noe matematisk tilbake til hverdagslivet. I kategorien modellering som fartøy må man gå fra et område til et annet, dette viser seg ved at prosessene å omforme eller tolke settes sammen med modellering. Dersom konteksten til modelleringsbegrepet inneholdt noe å vurdere satte jeg det i kategorien modellering som kritikk. Noen steder ble ordene brukt uten forklarende tekst, derfor laget jeg en fjerde kategori med modellering brukt uten spesifisering. Se tabell 2 for oppsummering av kategoriene.

Perspektiv på modellering	Beskrivelse
Modellering som innhold	Sier noe om hva matematikk handler om, eller hva matematikken skal være knyttet til. Modellering for å lære å modellere.
Modellering som fartøy	Sier noe om at modellering brukes til å forstå eller se sammenhenger, at modellering er et verktøy for å få til noe, til å oversette mellom representasjoner eller ta valg. Modellering brukes for å lære annen matematikk.
Modellering som kritikk	Sier noe om at elevene skal kunne kritisk vurdere, bli bevisst på eller få innsikt i hvordan modellering brukes i situasjonen i dagliglivet og i samfunnet.
Modellering uten spesifisering	Ordet brukes uten forklarende tekst, som i en overskrift eller en oppramsing av tema.

Tabell 2 Kategorisering av bruk av ordet modell

Til analysen av eksamensoppgavene har jeg valgt følgende kriterier, basert på Maas (2006), Borromeo Ferri (2020), Wess et al (2021) og Steffensen (2023):

- Åpen: Oppgaven kan tolkes på flere måter, kan løses på flere måter, kan ha en gitt løsning, men som oftest er det ikke det.
- Komplekst: Elevene kan forstå situasjonen og søke etter relevante data, og det er kognitivt krevende å løse problemet.
- Realistiske: Knyttet til den virkelige verden, og stemmer overens med elevenes virkelighet på en slik måte at de kan tolke problemet basert på deres erfaring og deres matematiske kunnskaper.
- Autentisk: Spørsmål fra den ekte verden, ikke en kunstig kontekst. Det innebærere at den ikke-matematiske konteksten ikke må være spesielt utformet for matematikkoppgaven, men være reell.
- Knyttet til en modelleringssyklus: Elevene må benytte en modelleringssyklus for å løse problemet, som vil si å bruke matematikk for å konstruere, beskrive eller forklare situasjonen.

Dette er min tolkning av hva som skal til for å kalle noe for en modelleringsoppgave. Hvor viktig graden av realisme og autentisitet er, og om alle stegene i modellerings-prosessen må være med, er forskere innen feltet ikke enige om. Jeg har valgt disse kriteriene fordi de ser ut til å være i tråd med formuleringene i læreplanen.

Jeg har i kapittel 2 vist hvordan hvordan noen forskere knytter det å vise modelleringskompetanse til en modelleringssyklus. De oppgavene som ble kategorisert som modelleringsoppgaver har jeg derfor analysert ut fra Blum og Leiß (Blum, 2011) sin syvtrinnsmodell (figur 2), for å se på hvordan eksamensoppgavene gir elevene mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet *Modellering og anvendelser*.

Jeg vil undersøke om eksamensoppgavene krever at eleven viser holistisk eller atomistisk modelleringskompetanse. Som beskrevet i kapittel 2.2.6 kaller Blomhøj og Jensen (2003) det å kunne jobbe med fullskala matematisk modellering der eleven har ansvar for hele modelleringsprosessen for en holistisk tilnærming til modellering.

Motsatt er en atomistisk tilnærming, da jobber elevene med enkelte deler av modelleringsprosessen (Blomhøj & Jensen, 2003). Både Niss og Jensen (2002) og Røsseland (2006b) viser til at når man har oversatt et problem fra den virkelige verden til den matematiske verden, og skal jobbe matematisk for å løse problemet (trinn 4), så må man benytte seg av flere ulike kompetanser. Fordi mitt fokus er modellering, så vil jeg ikke kategorisere oppgaver som bare inneholder trinn 4 som modellerings-oppgaver. Det er i tråd med Galbraith (2012), som påpeker at det viktigste aspektet for å utvikle modelleringskompetanse er at man kan formulere et matematisk problem fra en rotete virkelig verden-kontekst, det vil si gjennomføre selve matematiseringsprosessen.

3.4 Validitet og reliabilitet

Validitet kalles også gyldighet. Validitet går på om man har dekning for sine funn og resultater (Postholm og Jacobsen, 2011), som i hvilken grad resultatene er gyldige for det fenomenet som er undersøkt. Reliabilitet kalles også pålitelighet, og det handler om at man kan stole på at forskeren har gjort et godt håndverk i sin undersøkelse (Postholm og Jacobsen, 2011).

3.4.1 Validitet

Ved kvalitativ forskning bruker forskeren i stor grad seg selv i innhentingen av data. Forskerens forventninger og forhåndsoppfatninger vil da kunne påvirke forskningen, og dermed gyldigheten. Overførbarhet, troverdighet, pålitelighet og bekreftbarhet har betydning for forskningens gyldighet. Overførbarhet sier noe om forskningens resultater og analyse også kan være relevante i andre situasjoner med andre kontekster. Troverdighet handler om at studiens formål gir en god beskrivelse av virkeligheten. Forskning der resultatene kan bekreftes gjennom en tilsvarende undersøkelse av en annen forsker kan sies å være bekreftbar (Cohen et al, 2011). Pålitelighet vil jeg beskrive i kapittel 3.4.2.

Jeg har gjennomført en dokumentanalyse med dokumenter som er offentlig tilgjengelig, det er derfor mulig for andre forskere å etterprøve mine funn med en ny undersøkelse. Postholm og Jacobsen (2011) kaller bekreftbarhet for ytre gyldighet. Man kan styrke en argumentasjon for at noe som gjelder i en undersøkelse også vil gjelde for andre, ved å finne støtte enten i tidligere empiriske studier, eller i teori gjennom såkalt teoretisk generalisering (Postholm og Jacobsen, 2011). Jeg har vist til noe tidligere forskning som har resultater lignende mine funn, dette er med på å øke gyldigheten til min forskning. Resultatene mine gjelder de oppgavene og dokumentene som jeg har valgt ut og undersøkt, så funnene kan ikke generalisere til å gjelde andre eksamener eller dokumenter som ligner.

Min studie tar for seg modelleringsbegrepet, og her vil mine forkunnskaper og min forståelse av dette prege analysen. Jeg har i forkant av analysen satt meg inn i og redegjort for relevant teori, både for å minimere denne påvirkningseffekten og for å gjøre mine definisjoner gjennomsiktige. Å utvikle kategorier er ofte et sentralt punkt i kvantitativ innholdsanalyse. Kategoriene er i mitt tilfelle selve analyseinstrumentet, der jeg konkretiserer målene for analysen. Dette bidrar også til å styrke intersubjektiviteten knyttet til studiens funn, i form av at det er mulig for andre å rekonstruere eller gjenta analysen. Innen kvalitativ innholdsanalyse er analysen i fokus, og metoden utvikles og tilpasses innholdet. Det betyr at kategorisystemet og de innholdsanalytiske reglene er utviklet til det spesifikke materialet og det spesifikke forskningsspørsmålet. Arbeidet med kategoriene spiller slik sett en viktig rolle for sammenligning av funn og evaluering av pålitelighet (Mayring, 2015). Jeg har redegjort for hvordan analyse-kategoriene er utviklet, og hvorfor de fikk sin nåværende form, noe jeg anser som en styrke for studiens transparens.

3.4.2 Reliabilitet

Reliabilitet handler om at man kan stole på at forskeren har gjort et godt håndverk i sin undersøkelse (Postholm og Jacobsen, 2011). Reliabilitet kan sies å omfatte pålitelighet, kontinuitet og replikerbarhet, og sier noe om hvilke data som brukes, hvordan de samles inn og hvordan dataene bearbeides. Replikerbarhet innebærer i hvilken grad ny forskning vil få de samme, eller lignende resultater (Cohen et al, 2011). I kvalitativ forskning kan det være utfordrende å gjenskape de samme dataene i en lik studie. For å øke reliabiliteten kan man beskrive alle deler av prosessen som har ført fram til de gjeldende resultatene, slik at funnene man har gjort kan etterprøves. (Postholm og Jacobsen, 2011).

I min studie har jeg gitt en oversikt over hvor jeg har hentet data, det vil si hvilke dokumenter som er analysert. Analyseverktøyene jeg benytter meg av er beskrevet, og jeg har begrunnet hvorfor disse er valgt. For analyse av hvilke perspektiver på modellering som finnes i læreplanen, har jeg brukt et kjent rammeverk fra tidligere forskning. For å analysere eksamensoppgaver har jeg laget en kriterieliste der særtrekk ved modelleringsoppgaver er beskrevet, slik at det skal være mulig for andre å ettergå min analyse. Analyse av dokumenter har gjerne høyere grad av reliabilitet fordi det er skriftlig materiale som kan undersøkes flere ganger, og som ikke endres over tid (Cohen et al, 2011).

4 Resultater og analyse

Resultatene presenteres i fire deler. Først viser jeg opptelling av ordene modell, modellere og modellering, deretter ser jeg på hvordan de tre ulike perspektivene modellering som fartøy, innhold og kritikk kan gjenfinnes i læreplanen. Videre tar jeg for meg hvilke oppgaver i eksamenssettene som kan kategoriseres som modelleringsoppgaver, og til slutt presenterer jeg funn fra analysen av dokumentene knyttet til vurdering av eksamen.

4.1 Opptelling av ordene modell, modellere og modellering

Ifølge Frejd og Geiger (2017) bør læreplandokumenter inneholde begrep og uttrykk som formidler sentrale forventninger til hva som skal undervises og læres. Hyppigheten og plasseringen ordene har i læreplandokumentene kan også brukes som en måte å måle hvor viktige de er for et fag. Jeg har derfor talt opp antall ganger varianter av ordene modell, modellere og modellering forekommer i læreplanen.

Læreplanverket består av overordnet del, fag- og timefordelingen og læreplaner i fag. Overordnet del inneholder ordet modell en gang, i setningen "En lærer er en rollemodell som skal skape trygghet, og veilede elevene i deres ferd gjennom opplæringen." (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 20). Denne bruken av ordet vil jeg ikke kategorisere som knyttet til matematikk. Dokumentet om fag- og timefordeling inneholder syv forekomster av ordet modell/modellering, enten i forbindelse med modell for utdanningsløp, eller som tittel på programfaget programmering og modellering. Disse forekomstene handler om tilbudsstrukturen i den videregående opplæringen, og er ikke relevante for den matematiske modelleringen jeg undersøker. Læreplanen i matematikk 1.-10. inneholder 20 forekomster, da teller jeg alle varianter av ordene modell, modellere og modellering. Til sammenligning finnes det 21 forekomster av varianter av ordet problemløsing, som er et annet av kjerneelementene. Ved å følge Frejd og Geigers (2017) slutning kan man si at siden modellering og problemløsing har like mange forekomster i læreplanen, er de like viktige i faget. Det ligger utenfor rammene til denne masteroppgaven å undersøke dette nærmere. En annen måte å bruke Frejd og Geigers (2017) teori på kan være å sammenligne ulike læreplaner, for å finne ut om modellering har fått mer eller mindre plass. Mitt fokus har vært å undersøke læreplanen og eksamensoppgaver for å finne ut hvordan jeg som lærer skal forholde meg til modellering, jeg har derfor valgt å ikke se på andre læreplaner enn den nåværende.

4.2 Bruk av perspektivene modellering som fartøy, innhold og kritikk i læreplanen

Jeg ønsker å finne ut hva som ligger i modelleringsbegrepet i læreplanen, jeg har derfor undersøkt om bruken av ordene modell, modellere og modellering kan sees i sammenheng med de tre perspektivene modellering som innhold, modellering som fartøy og modellering som kritikk. Disse kategoriene er valgt fordi de sier noe om hva som er målet med modelleringsaktiviteten. I tabell 2 viser jeg mine funn:

Perspektiv på modellering	Antall (28)
Ikke modellering	5
Modellering uten spesifisering	12
Modellering som fartøy	1
Modellering som innhold	7
Modellering som kritikk	3

Tabell 3 - Opptelling av ordene modell, modellere og modellering i læreplanen LK20.

Læreplanen i matematikk 1.-10. inneholder 20 forekomster av ordene modell, modellere og modellering. Jeg vil nå vise hvordan jeg tolket funnene i læreplanen og slik avgjorde plasseringen i en kategori.

Læreplanens første deler handler om faget, og fagets relevans beskrives som at “Matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendelser.” (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Dette perspektivet tolker jeg som modellering som kritikk, fordi det handler om å forstå forhold og sammenhenger i samfunnet. Videre presenteres kjerneelementene, som består av fagets sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer. Ifølge

Utdanningsdirektoratet er kjerneelementene det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen, og sier hva man må lære for å kunne mestre og anvende faget. De skal prege innhold og progresjon i læreplanene og bidra til at elevene over tid utvikler forståelse av innhold og sammenhenger i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Modellering og anvendelser er et av seks kjerneelement i læreplanen LK20, og her er modellering knyttet både til innholdsperspektivet og det kritiske perspektivet:

> Modellering og anvendelser - En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2-3).

Modellering som innhold handler om å bruke en modelleringsprosess for å løse et problem fra den virkelige verden, ved å matematisere problemet, vurdere løsninger og tolke modellene man har laget, slik vi kan se modellering beskrevet i dette kjerneelementet. Her er det også snakk om kritisk vurdering og at matematikk skal brukes til å forstå samfunnet, derfor kan det argumenteres for at disse formuleringene kan plasseres innenfor perspektivet modellering som kritikk.

I kjerneelementet *Matematiske kunnskapsområder* sies det at elevene skal modellere, men det nevnes ikke i hvilken forbindelse det skal gjøres. Læreplanen inneholder tre tverrfaglige temaer. I forbindelse med *Folkehelse og livsmestring* står det: “Gjennom faget skal elevene få utvikle forståelse for teknologi, statistikk og matematiske representasjoner og modeller som kan hjelpe dem til å gjøre ansvarlige livsvalg.” (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4). *Demokrati og medborgerskap* er et annet tverrfaglig tema, og her kan vi lese: “Faget skal gjøre elevene bevisste på forutsetninger og premisser for matematiske modeller som ligger til grunn for beslutninger i deres eget liv og i samfunnet." (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4). Her nevnes representasjoner sammen med modellering, så det kan tolkes som modellering som fartøy. Det står ikke konkret hvordan modelleringen skal foregå, men siden matematikk skal hjelpe elevene til å ta gode beslutninger og livsvalg, kan det sees i sammenheng med perspektivet modellering som kritikk. Det er likevel ikke oppgitt direkte, så kategoriseringen blir uspesifisert bruk av modellering.

Under kompetansemål for 4. og 10. trinn og underveisvurdering på 8. trinn blir modellering knyttet til hverdagsliv, praktiske sammenhenger og ulike deler av en modelleringssyklus, og er derfor modellering som innhold. Det sies også at elevene skal kunne oversette mellom representasjonsformer i problemløsing og modellering, dette kan tolkes som modellering som fartøy.

For underveisvurdering på 10.trinn sies det ikke hvordan elevene skal jobbe med modellering, bare at elevene skal "løse matematiske problemer gjennom å være kreative, modellere og reflektere." (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 14). Kategoriseringen blir derfor uspesifisert bruk av modellering. Under standpunkt-vurdering står det "Læreren skal sette karakter i matematikk basert på kompetansen eleven har vist, både skriftlig, muntlig og digitalt, ved å bruke matematiske uttrykksformer, bruke problemløsingsstrategier og reflektere over og argumentere for løsninger og modeller." (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 14). Dette kan tolkes som modellering som innhold, fordi reflektere og argumentere for er en del av modelleringsprosessen.

I læreplanen i matematikk spesifiseres det at alle fag skal bidra til å realisere verdi-grunnlaget for opplæringen. Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter og kan ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). I overordnet del er det fokus på at elevene skal lære kritisk tenkning, og selv om det ikke knyttes direkte til noen fag, kan det sees i sammenheng med modellering som kritikk, som handler om å lære seg å være kritisk.

Modellering handler om å bruke matematikk til å beskrive, forstå og i noen tilfeller styre vår omverden. I skolen kan modellering brukes til å skape forbindelser mellom elevenes erfaringsverden og matematikk, bidra til å lære viktige begreper, og bygge opp kompetanse til å lage, bruke og forholde seg kritisk til matematiske modeller. En aktivitet kan ha flere mål, og det kan være vanskelig å plassere en matematisk oppgave innenfor en av kategoriene. Jeg har ikke kategorisert oppgaver ut fra dette, men formuleringer i læreplanen, og da kan disse kategoriene være til hjelp for å vise hva modelleringsbegrepet skal inneholde på ungdomsskolen. Som vist har jeg funnet bruk av alle tre perspektivene i læreplanen.

Mine funn kan sees i sammenheng med Bergets (2023b) doktoravhandling, der hun belyste modellering i matematikkfaget 2P på videregående skole. I den forbindelse undersøkte hun frekvensen av ordet modellering i læreplanene LK06 og LK20. Disse to læreplanene er bygget opp på litt ulik måte, hun valgte derfor å bruke matematikk-planene for alle årene i grunnskolen og de i den videregående skolen som gir generell studiekompetanse. Hun fant at ulike former av ordet modellering finnes 38 ganger i LK06 og 76 ganger i LK20, det vil si en dobling. Når det kom til de ulike perspektivene fant hun størst økning av den uspesifiserte bruken. Alle perspektivene er representert i begge læreplanene. Hun påpeker at det er en betydelig økning i bruken av perspektivet modellering som kritikk, noe hun knytter til at én begrunnelse for fagfonyelsen er at opplæringen skal sette elevene i stand til å følge med i samfunnsutviklingen, og være relevant for samfunnsliv, arbeidsliv og teknologi (Berget, 2019). Berget brukte høringsutkastet til læreplanen i matematikk for LK20, hentet i august 2019. Den endelige læreplanen utgitt i 2020 er ikke helt lik, og jeg har ikke undersøkt læreplanverket for videregående skole, så mine resultater er ikke direkte sammenlignbare med Berget sine.

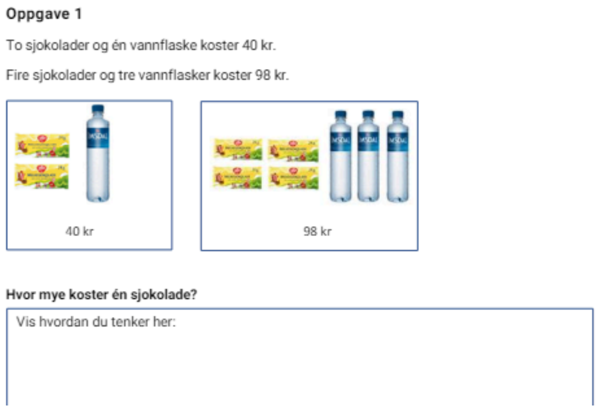
4.3 Modelleringsoppgaver i eksamenssettene

I kapitlene 2.2.7 og 3.3 definerte jeg en kriterieliste for å undersøke om en gitt oppgave er en modelleringsoppgave. Jeg vil her gå gjennom hvordan jeg har analysert eksamensoppgavene ut fra kriteriene åpen, komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus. For oppgavene som blir kategorisert som modelleringsoppgaver vil jeg se på om de krever bruk av hele modelleringssyklusen, eller bare deler av den. Dette vil jeg drøfte opp mot atomistisk og holistisk modelleringskompetanse i kapittel 5. I tabellen under oppsummerer jeg mine funn, før jeg går i dybden på tolkningen av enkelte oppgaver. Eksamenssettene kan sees i sin helhet i vedlegg 1, 2, 3 og 4.

Oppgaver	Kriteriene åpen, komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus	Er det modellerings-oppgaver
Eksamen 2022 del 1 Oppgave 1-7	Oppgavene møtte ikke kriteriene komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus.	Ingen
Eksamen 2022 del 2 Oppgave 1-8	Oppgavene har et rett svar, noen kan løses på ulike måter så de er delvis åpne. Oppgavene møtte ikke kriteriene komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus.	Ingen
Eksamen 2022 del 2 Oppgave 9-10	Eleven blir bedt om å lage matematiske spørsmål og besvare dem, og dette peker på en modelleringssyklus.	Ja, oppgave 10
Eksamen 2023 del 1 Oppgave 1-8	Oppgavene møtte ikke kriteriene komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus.	Ingen
Eksamen 2023 del 2 Oppgave 1, 3, 4, 5 og 6	Oppgavene har et rett svar, noen kan løses på ulike måter så de er delvis åpne. Oppgavene møtte ikke kriteriene komplekst, realistisk, autentisk og knyttet til modelleringssyklus.	Ingen
Eksamen 2023 del 2 Oppgave 2	Oppgaven ber elevene beregne, argumentere og vurdere, som kan tyde på deler av en modelleringsprosess. Kan løses på ulike måter, svaret kan variere ut fra hvordan man argumenterer, eleven kan ikke søke etter relevant data fordi det ikke er tillatt på eksamen, men den er realistisk og autentisk fordi det ikke er en kunstig kontekst og eleven kan bruke kunnskap fra sin hverdag for å løse oppgaven.	Ja
Eksamen 2023 del 2 Oppgave 7 og 8	Eleven blir bedt om å lage matematiske spørsmål og besvare dem, og dette peker på en modelleringssyklus.	Ja, oppgave 8

Tabell 4: Oversikt over analyse av eksamensoppgavene

Eksamen del 1 2022 består av åtte oppgaver, se vedlegg 1. I eksamensveiledningen står det om oppgaver på del 1 at noen av oppgavene krever at man viser fremgangsmåte, mens på andre oppgaver skal man gi svaret enten som et tall, uttrykk eller en avkrysning i en flervalgsoppgave, uten videre begrunnelse (Utdanningsdirektoratet, 2022a). Oppgavene handler å sette opp og løse likningssett, vurdere om påstander knyttet til en graf er korrekte, gi eksempler på lengde og bredde i et gitt rektangel, regne ut volumet til en eske, vise multiplikasjon av to tosifrede tall med arealmetoden, krysse av for hvilket uttrykk som er riktig, regne med eksponentiell vekst og knytte sammen fire ulike funksjonsuttrykk med fire grafer. Ut fra kriterielisten min til modelleringsoppgaver kan man si at elevene ikke trenger ikke søke etter data fordi all informasjon er gitt i oppgaven, oppgavene kan derfor sies å ikke være komplekse. Oppgavene som inneholder tekst er ikke autentiske, hvis man fjerner teksten kan man løse en matematisk oppgave. Alle oppgavene har et rett svar, og noen kan løses på ulike måter så disse kan sies å være delvis åpne. Når det kommer til å undersøke om oppgavene er knyttet til en modelleringsprosess så skilles det mellom en atomistisk og en holistisk tilnærming, som beskrevet i kapittel 2.2.6. Blomhøj og Jensen (2003) kaller det å kunne jobbe med fullskala matematisk modellering der eleven har ansvar for hele modelleringsprosessen for en holistisk tilnærming til modellering. Motsatt er en atomistisk tilnærming, da jobber elevene kun med enkelte deler av syklusen (Blomhøj & Jensen, 2003). Ut fra dette vil jeg si at på eksamen del 1 2022 var ingen av oppgavene knyttet til en holistisk tilnærming til modelleringskompetanse, de møtte heller ingen av kriteriene åpen, kompleks, realistisk eller autentisk. Når det kommer til sub-kompetanse så kommer det an på hvordan man tolker de ulike delprosessene innen modellering. Steffensen (2023) sier at å løse matematiske problemer i en matematisk modell er en sub-kompetanse, det er dette man gjør når man har matematisert problemet og jobber matematisk med å finne løsninger. For å vise hva jeg mener med dette, vil jeg analysere oppgave 1 på del 1, se figur 8. Denne oppgaven har en kontekst hentet fra virkeligheten, så det er interessant å undersøke om det er en tekstoppgave, en problemløsningsoppgave eller en modelleringsoppgave.

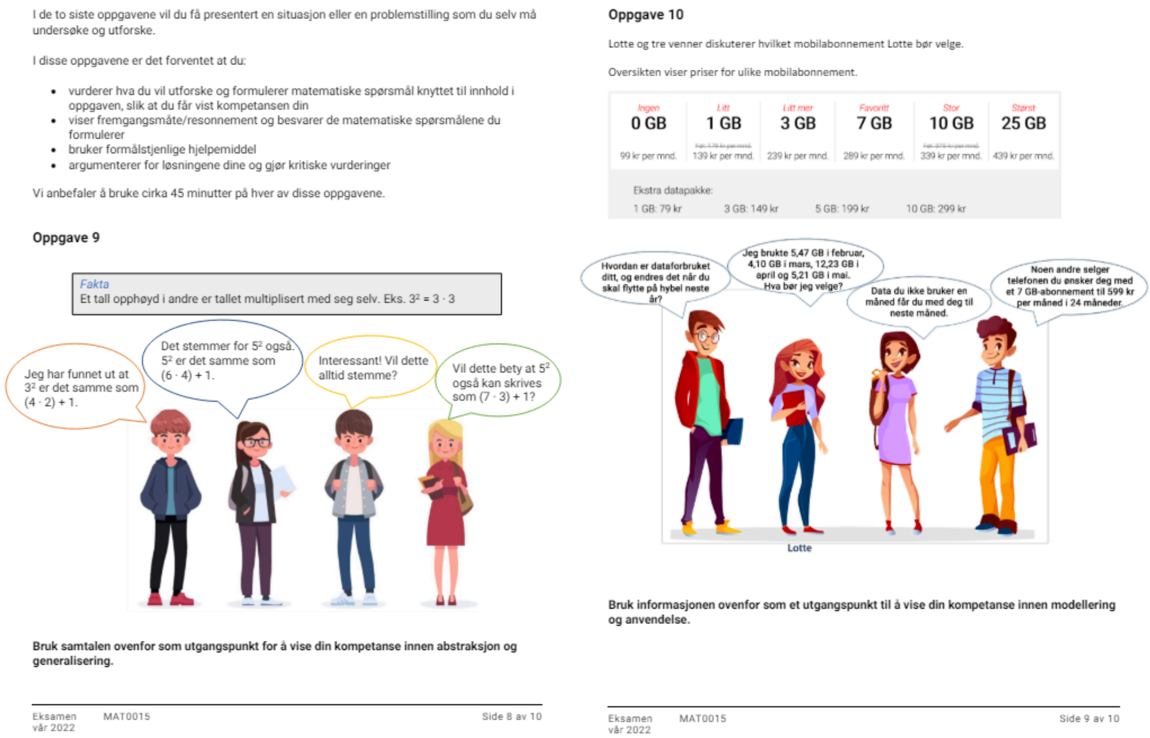


Figur 8 Skjermdump oppgave 1 på del 1 eksamen 2022, for større versjon se vedlegg 1.

Oppgaveteksten sier "vis hvordan du tenker", så det er ikke knyttet krav til hvordan oppgaven skal løses. Man kan løse oppgaven ved å sette opp et likningssett, eller man kan løse oppgaven ved å tegne opp og jobbe med sammenhengen mellom de to beløpene. Ut fra Stedøys (2018b) klassifisering vil jeg derfor si at oppgaven er delvis åpen, det er bare en riktig løsning, men man kan komme fram til løsningen på ulike måter. Oppgaven kan være en problemløsningsoppgave, det avgjørende vil da være om personen som skal løse den har en kjent fremgangsmåte eller ikke (Steffensen, 2023). Jeg kan derfor ikke definere om oppgaven er en problemløsningsoppgave før jeg snakker med personen som skal løse den. Steffensen (2023) sier at modellerings-oppgaver har to vesensforskjeller fra både vanlige tekstoppgaver og problemløsnings-oppgaver. Det ene er at situasjonene eller problemene man skal finne ut av i mye mindre grad er stilt opp på en oversiktlig måte, det andre er at de inneholder mange og også ikke identifiserte variabler Steffensen (2023). Jeg vil si at denne oppgaven har et tydelig spørsmål: "Hva koster en vannflaske?". Det er ikke nødvendig å legge til informasjon eller antagelser for å løse oppgaven, man får all informasjon man trenger. Oppgaven er derfor ikke kompleks ut fra et modelleringsperspektiv, selv om den kan være kognitiv krevende å løse. I eksamensveiledningen for 2023 brukes denne oppgaven som et eksempel på en oppgave sammen med to gode elevbesvarelser. Da sies det at "oppgave 1 er et eksempel på en oppgave hvor eleven skal kunne vise sin forståelse av matematikk og matematiske begreper ved å anvende disse i beregninger og resonnement." (Utdanningsdirektoratet, 2023c). Elevbesvarelse 1 fant prisen for en sjokolade ved å tegne, og elevbesvarelse 2 løste oppgaven som et likningssett. Det presiseres at elevbesvarelsene er likestilt. Oppgaven knyttes til kompetansemålet fra

10.trinn: lage, løse og forklare likningssett knyttet til praktiske situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2023c). Her nevnes det ikke problemløsning eller modellering, men begreper, beregninger og resonnement. I KOM-rapporten deles matematisk kompetanse inn i åtte ulike deler. Det sies at resonnementskompetanse er tett forbundet med både modellerings- og problembehandlingskompetanse, på den måten at den utgjør den "juridiske" siden til disse kompetansene, å vurdere om svaret er rett eller galt. Resonnementskompetanse innebærer å kunne forstå, bedømme og argumentere for svar på matematiske spørsmål (Niss & Jensen, 2002; Røsseland, 2005b). Relatert til en modelleringssyklus vil dette være å arbeide matematisk, som er steg fire i Blum og Leiß (Blum, 2011) sin modell. I Blomhøj og Jensens (2007) modell med seks steg svarer det til punkt (d), som er bruk av matematiske metoder for å oppnå matematiske resultater og konklusjoner. Jeg vil si at både resonnements-kompetanse og denne delen av modelleringssyklusen handler om å jobbe innenfor den matematiske verden, der det ikke er avgjørende hvilken kontekst oppgaven står i. Steffensen (2023) sier at å løse matematiske problemer i en matematisk modell er en sub-kompetanse, det er dette man gjør når man har matematisert problemet og jobber matematisk med å finne løsninger. For å kunne løse modelleringsproblemer etter at man har matematisert dem trenger man alle typer kompetanse slik de presenteres i KOM-rapporten. Slik oppgave 1 på eksamen 2022 presenteres mener jeg at den ikke er knyttet til modellering eller er et matematisert delproblem fra en modell, jeg vil derfor si at den ikke kan klassifiseres som å vise sub-kompetanse innen modellering.

Del 2 av eksamen 2022 inneholder ti oppgaver, se vedlegg 2. Oppgavene 1 til 8 gjør bruk av verb som si noe om, forklar, argumenter eller gjør en kritisk vurdering, som kan peke på en modelleringsprosess. Oppgavene går ut på å tolke et funksjonsuttrykk, regne ut omkretsen til et kvadrat basert på de mindre rektanglene kvadratet er bygget opp av, regne med sannsynlighet, tegne de tre første figurene når den eksplisitte formelen for figur n er oppgitt, finne stigningstallet til en graf og argumentere for at en likning er løst riktig. Målt opp mot kriterielisten finner jeg at oppgavene har et rett svar, og siden noen kan løses på ulike måter er de delvis åpne. Elevene trenger ikke søke etter data fordi all informasjon er gitt i oppgaven (ikke kompleks). Oppgavene som inneholder tekst er ikke autentiske, hvis man fjerner teksten kan man løse den matematisk oppgaven. Elevene trenger ikke matematisere, overgangen fra virkelighet til matematikk er gitt, så modelleringssyklusen brukes ikke. Oppgave 1 til 8 er derfor ikke kategorisert som modelleringsoppgaver.



I de to siste oppgavene vil du få presentert en situasjon eller en problemstilling som du selv må undersøke og utforske.

I disse oppgavene er det forventet at du:

- vurderer hva du vil utforske og formulerer matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven, slik at du får vist kompetansen din
- viser fremgangsmåte/resonnement og besvarer de matematiske spørsmålene du formulerer
- bruker formålstjenlige hjelpemiddel
- argumenterer for løsningene dine og gjør kritiske vurderinger

Vi anbefaler å bruke cirka 45 minutter på hver av disse oppgavene.

Oppgave 9

Fakta
Et tall opphøyd i andre er tallet multiplisert med seg selv. Eks. $3^2 = 3 \cdot 3$

Bruk samtalen ovenfor som utgangspunkt for å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.

Eksamen vår 2022 MAT0015 Side 8 av 10

Oppgave 10

Lotte og tre venner diskuterer hvilket mobilabonnement Lotte bør velge.

Oversikten viser priser for ulike mobilabonnement.

Ingen	Litt	Litt mer	Favoritt	Stor	Størst
0 GB	1 GB	3 GB	7 GB	10 GB	25 GB
99 kr per mnd.	139 kr per mnd.	239 kr per mnd.	289 kr per mnd.	339 kr per mnd.	439 kr per mnd.

Ekstra datapakke:
1 GB: 79 kr 3 GB: 149 kr 5 GB: 199 kr 10 GB: 299 kr

Bruk informasjonen ovenfor som et utgangspunkt til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.

Eksamen vår 2022 MAT0015 Side 9 av 10

Figur 9 Skjermdump fra del 2 Eksamen 2022 (Utdanningsdirektoratet, 2022c, s. 8 og 9). Se vedlegg 2 for større versjon av oppgavene.

Som vist i figur 9, står det i oppgave 9 “bruk samtalen ovenfor som utgangspunkt for å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.” Oppgave 10 har en lignende ordlyd: “Bruk informasjonen ovenfor som et utgangspunkt til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.”

Rett før oppgave 9 og 10 står det skrevet informasjon til eleven om hvordan oppgavene skal besvares, se figur 10. Her blir eleven bedt om å lage matematiske spørsmål og besvare dem, og dette peker på en modelleringssyklus slik både Niss og Jensen (2002) og Røsseland (2005b) beskriver modelleringskompetanse.

I de to siste oppgavene vil du få presentert en situasjon eller en problemstilling som du selv må undersøke og utforske.

I disse oppgavene er det forventet at du:

- vurderer hva du vil utforske og formulerer matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven, slik at du får vist kompetansen din
- viser fremgangsmåte/resonnement og besvarer de matematiske spørsmålene du formulerer
- bruker formålstjenlige hjelpemiddel
- argumenterer for løsningene dine og gjør kritiske vurderinger

Vi anbefaler å bruke cirka 45 minutter på hver av disse oppgavene.

Figur 10 Skjermdump fra del 2 Eksamen 2022 (Utdanningsdirektoratet, 2022c, s.8)

Jeg vil derfor si at matematikkeksamen fra 2022 kun inneholder en oppgave der elever kan vise kompetanse innen modellering, oppgave 10. Om denne oppgaven gir mulighet for å vise holistisk modelleringskompetanse eller sub-kompetanse vil jeg drøfte i kapittel 5.

Eksamen del 1 2023 inneholder syv oppgaver, se vedlegg 3. Oppgavene handler om å sette opp og løse likningssett, tegne fortsettelsen på et mønster og lage formelen for antall brikker i figur *n*, vise utregningen av første kvadratsetning knyttet til arealet av et kvadrat, regne ut gjennomsnitt, median og typetall og begrunne valg av sentralmål, vurdere om påstander knyttet til et søylediagram er korrekte, bestemme stigningstallet til en funksjon ut fra en graf og regne ut hvor mye rabatt i prosent utgjør når du får oppgitt prisen før og etter rabatt. Ut fra kriterielisten finner jeg at oppgavene har et rett svar, og noen kan løses på ulike måter så de er delvis åpne. Elevene trenger ikke søke etter data fordi all informasjon er gitt i oppgaven, de er derfor ikke komplekse. Oppgavene som inneholder tekst er ikke autentiske, hvis man fjerner teksten står man igjen med en matematisk oppgave man kan løse. Jeg vil derfor si at ingen av oppgavene på del 1 er holistiske modelleringsoppgaver. Når det kommer til å vurdere om man trenger noen sub-kompetanser innenfor modelleringsprosessen for å løse disse eksamensoppgavene vil jeg si at ingen av oppgavene er knyttet til modellering eller er et matematisert delproblem fra en modell. Jeg velger derfor å ikke klassifisere noen av oppgavene som at man viser atomistisk modelleringskompetanse ved å løse dem.

Del 2 av eksamen 2023 består av åtte oppgaver, se vedlegg 4. Oppgavene 1 til 6 inneholder verb som bruk, forklar, gjør beregninger, vurder, argumenter og begrunn, som kan peke på en modelleringsprosess. Oppgave 1, 3, 4, 5 og 6 handler om å tolke grafer, bruke opplysninger i et regneark til å finne gjennomsnitt, regne ut arealet til en halvsirkel og forklare om en gitt løsning er riktig, forklare hva et dataprogram knyttet til store talls lov gjør, og regne med eksponentiell vekst. Elevene trenger ikke søke etter data fordi all informasjon er gitt i oppgavene, men de kan nok oppleves som kognitivt krevende. Alle oppgavene inneholder tekst, men de er ikke autentiske fordi man kan fjerne teksten og løse den matematisk oppgaven, så det fremstår som “utkledde” tekstoppgaver. Elevene trenger ikke matematisere i oppgavene 1, 3, 4, og 5, siden overgangen fra virkelighet til matematikk er gitt, er det ikke nødvendig å gå gjennom modelleringssyklusen for å løse oppgavene. Oppgave 6, se figur 11, kan løses på to ulike måter, men den har et rett svar. Eleven kan tegne opp eller bruke eksponential-funksjon for å løse oppgaven, og denne overgangen fra virkelighet til matematikk må eleven selv finne ut. Dette er et eksempel på matematisering.

Oppgave 6

Nicolas får velge mellom 10 000 kroner en gang, eller 1 krone som dobler seg hver dag i to uker (14 dager). Hva bør han velge?

Argumenter for det mest lønnsomme valget.

Enten ti tusen kroner en gang:

Eller en krone som dobler seg hver dag i 14 dager:

Før dag 1:

Etter den første dagen:

Etter den andre dagen:

og så videre til og med dag 14.

Eksamen MAT0015 Side 8 av 12

Figur 11 Skjermdump oppgave 6 på del 2 eksamen 2023, se vedlegg 4 for større utgave.

Jensen (2009) sier at matematisk modelleringskompetanse og matematisk problemløsningskompetanse er to kompetanser som ofte overlapper hverandre når man skal løse oppgaver, men det er noen vesentlige forskjeller. Matematisk problemløsningskompetanse kan kort og upresist beskrives som å kunne håndtere en situasjon hvor man for å komme videre må finne på noe man ikke umiddelbart ser hva er (Jensen, 2009, s.42). Det dreier seg om å løse et problem, ofte kjenne på en frustrasjon over å være kognitivt fast, men likevel håndtere opplevelsen av å føle seg fastlåst. Matematisk modelleringskompetanse handler om en arbeidsprosess der det viktigste kjennetegnet er behovet for ulike former for avgrensning og presisering for å få til det avgjørende aspektet av prosessen, å gjøre en utenom-matematisk utfordring tilgjengelig for matematisk representasjon og prosessering. På grunn av disse åpne delene av modelleringsprosessen, kan hovedutfordringen gjerne beskrives som "handlingslammelse på grunn av mange forskjellige veier du kan ta, og fraværet av et gitt kompass å navigere med" (Jensen, 2009, s.45). Jensen poengterer at problemløsning og modellering på denne måten står i kontrast til hverandre, det å stå fast uten å komme på hvilke valg man har på den ene siden, og det å ha altfor mange valg når det kommer til å avgrense problemet på den andre siden. Ut fra dette vil jeg si at oppgave 6 er en problemløsningsoppgave heller enn en modelleringsoppgave, selv om den både kan sies å være både realistisk og autentisk. Om det er et problem eller en rutineoppgave avhenger av om personen som skal løse den har en kjent algoritme å bruke, som i dette tilfellet vil være kjennskap til eksponentialfunksjoner.

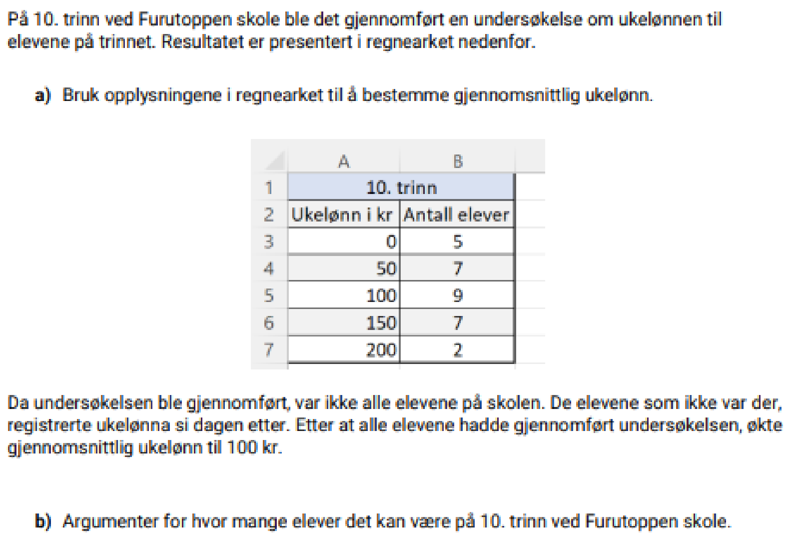
Oppgave 2 ber eleven gjøre beregninger, vurdere og argumentere for hvilket tilbud kunden bør velge, se figur 12. Ved å se på oppgaven i lys av Blums (2011) syv steg i modelleringsprosessen, vil jeg vise at den kan brukes som en atomistisk modellerings-oppgave, der sub-kompetanse betyr at man kan løse oppgaver innenfor noen av fasene i modelleringsprosessen.

Figur 12 Skjermdump av oppgave 2 del 2 eksamen 2023, se vedlegg 4 for større versjon.

De to første stegene handler om å forstå problemet, formulere en problemstilling fra en virkelig situasjon, og deretter avgrense, forenkle og strukturere situasjonen ved å velge hva man vil ta hensyn til. I oppgaven er problemet gitt, fordi man blir bedt om å svare på spørsmålet “hvilket tilbud bør kundene velge”. I steg tre skal man matematisere, som innebærer å oversette til en matematisk modell. Noe av matematikken er gitt i oppgaven ved at man vet rabatten i hvert tilfelle, men den er oppgitt på to ulike måter, som prosent eller hvor mange flasker man får gratis. Man kan velge å anta hvilken pris en smoothieflaske har, slik at man kan sammenligne i kroner, og ikke bare i prosent. I steg fire og fem jobber man med å finne matematiske løsninger, og disse modellresultatene må tolkes og evalueres i forhold til den virkelige situasjonen. I oppgaven kan man velge ulike måter å regne ut på slik at man kan sammenligne tilbudene, enten i prosent, enhetspris eller sammenligne pris dersom man kjøper for eksempel ti flasker. I steg seks validerer man resultatene, som innebærer å vurdere om løsningene er relevante og troverdige, eller om man må gjøre endringer i forutsetningene man gikk ut fra, for eksempel hvis det er flere faktorer å ta hensyn til enn man tenkte på i første omgang. Da kan det bli aktuelt å gå gjennom

deler av modelleringssyklusen på ny. I steg sju viser man fram den endelige løsningen, og forklarer løsningen sin ved for eksempel å peke på forutsetningene man gikk ut fra. Det gjør man for at andre skal kunne forstå og vurdere modellen. I oppgaven skal man vurdere og argumentere for hvilket tilbud kunden bør velge. Utregningene viser at man får mest rabatt i prosent hvis man benytter tilbudet “kjøp tre, få to gratis”. Her kan elevene for eksempel vurdere om en kunde ønsker å kjøpe fem smoothieflasker på en gang, eller om dette blir for mye og derfor benytter tilbudet 25% på hver flaske, eller “kjøp en, og få 50% på den neste”, som begge gir like mye rabatt, men en høyere enhetspris enn å kjøpe fem flasker på en gang.
I sensorveiledningen står det at oppgaven kan gi 2 poeng, dersom eleven gjør korrekte beregninger for alle fire tilbudene, gjør matematiske vurderinger og argumenterer for sin konklusjon (Utdanningsdirektoratet, 2023d). Jeg vil derfor si at denne oppgaven gir mulighet til å vise de to sub-kompetansene Steffensen (2023) har kalt (3) Å løse matematiske problem i en matematisk modell, og (4) Å validere løsningen, som vil si å kritisk sjekke og reflektere, utfordre den foreslåtte løsningen og om nødvendig gjennomføre modelleringsprosessen på nytt.

Oppgave 3 ber elevene argumentere, jeg vil derfor undersøke om det kan være meningen at de skal ta i bruk en modelleringsprosess. I 3a regner man ut at gjennomsnittlig ukelønn er 90 kroner. I oppgave 3b skal man argumentere for hvor mange elever det kan være ved 10.trinn på Furutoppen skole når ukelønnen øker til 100 kroner, se figur 13.


På 10. trinn ved Furutoppen skole ble det gjennomført en undersøkelse om ukelønnen til elevene på trinnet. Resultatet er presentert i regnearket nedenfor.

a) Bruk opplysningene i regnearket til å bestemme gjennomsnittlig ukelønn.

	A	B
1	10. trinn	
2	Ukelønn i kr	Antall elever
3	0	5
4	50	7
5	100	9
6	150	7
7	200	2

Da undersøkelsen ble gjennomført, var ikke alle elevene på skolen. De elevene som ikke var der, registrerte ukelønna si dagen etter. Etter at alle elevene hadde gjennomført undersøkelsen, økte gjennomsnittlig ukelønn til 100 kr.

b) Argumenter for hvor mange elever det kan være på 10. trinn ved Furutoppen skole.

Figur 13 Skjermdump av oppgave 3 del 2 eksamen 2023, for større versjon se vedlegg 4.

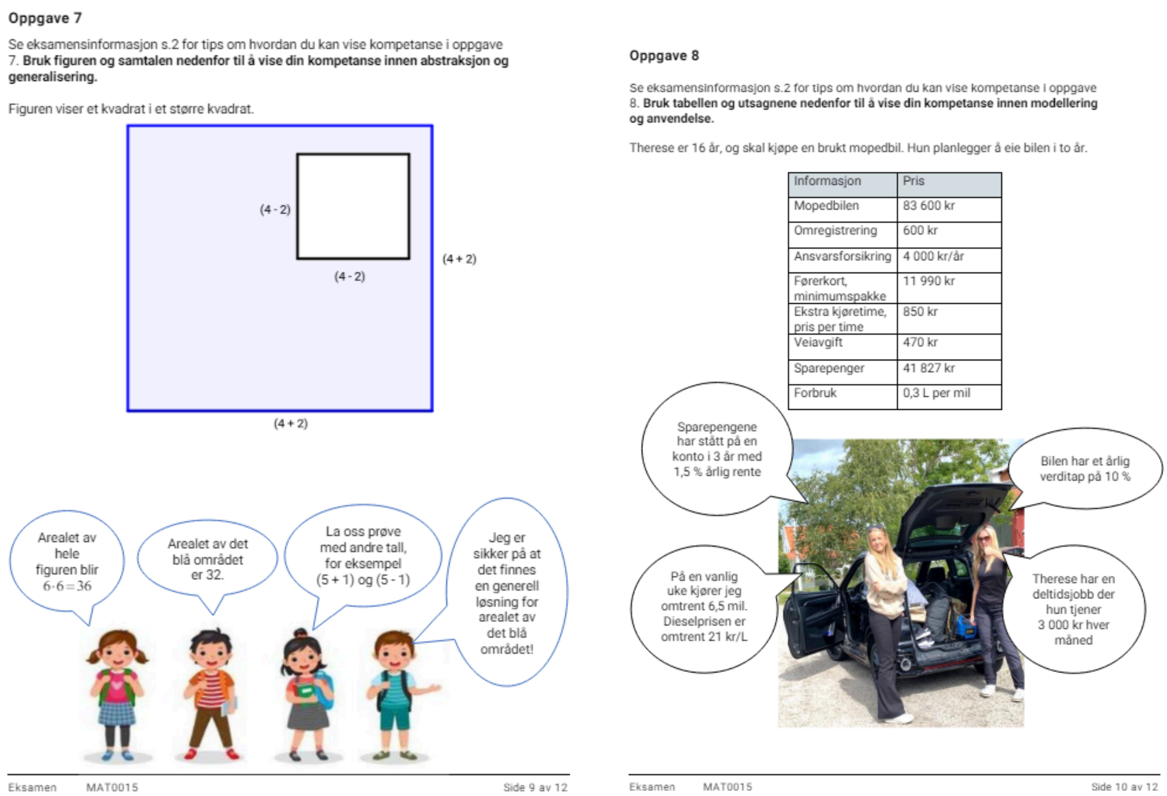
Oppgave 3b har flere mulige svar, og kunne vært brukt som en modelleringsoppgave, men teksten i sensorveiledningen gjør at jeg ikke kategoriserer den slik. Under kommentarer til oppgavene står det om poenguttelling at det skal gis 1 poeng for korrekt forslag om antall elever, og 2 poeng for korrekt forslag om antall elever med framgangsmåte og forklaring. Videre står det under kommentarer at "Vi krever ikke at besvarelsen har mer enn ett forslag. Flere forslag virker positivt på helhetsvurderingen av besvarelsen." (Utdanningsdirektoratet, 2023d, s. 5). Dette tyder på at det ikke er ment at elevene skal gjøre bruk av modellering ved løsning av oppgaven.

På side 2 av del 2 finnes eksamensinformasjon, og figur 14 viser informasjonen som gjelder oppgave 7 og 8:

Spesielt for oppgave 7 og 8	I oppgave 7 og 8 presenterer vi en situasjon eller en problemstilling der du selv skal undersøke og utforske. I disse oppgavene vil vi se etter din kompetanse i å: • vurdere hva du vil utforske og formulere matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven • vise fremgangsmåte/resonnement og besvare de matematiske spørsmålene du formulerer • bruke hensiktsmessige hjelpemiddel • argumentere for løsningene dine og gjøre kritiske vurderinger Vi anbefaler å bruke omtrent 60 minutter på oppgave 7 og 8 til sammen.

Figur 14 Skjermdump av side 2 del 2 eksamen 2023 (Utdanningsdirektoratet, 2023g).

I oppgave 7 står det "Se eksamensinformasjon s. 2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 7. Bruk figuren og samtalen nedenfor til å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering." (se figur 15). Denne oppgaven handler ikke om modellering, men om et annet kjerneelement.


Oppgave 7

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 7. **Bruk figuren og samtalen nedenfor til å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.**

Figuren viser et kvadrat i et større kvadrat.

Eksamen MAT0015 Side 9 av 12

Oppgave 8

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 8. **Bruk tabellen og utsagnene nedenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe en brukt mopedbil. Hun planlegger å eie bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førerkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra kjøretime, pris per time	850 kr
Veiavgift	470 kr
Sparepenger	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil

Eksamen MAT0015 Side 10 av 12

Figur 15 Skjermdump oppgave 7 og 8 del 2 Eksamen 2023. Se vedlegg 4 for større versjon.

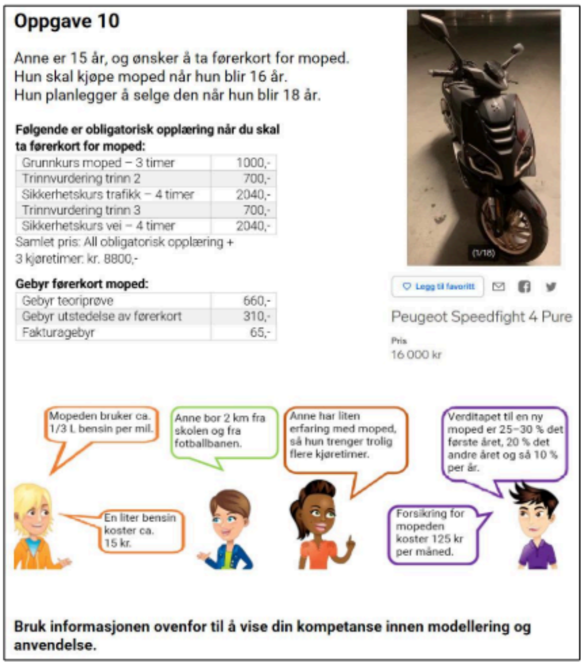
Til oppgave 8 står det “Se eksamensinformasjon s. 2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 8. Bruk tabellen og utsagnene nedenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.“ (se figur 15). Her er det tydelig hva elevene blir bedt om, og dette er den eneste oppgaven på eksamen som nevner modellering. Om elevene har mulighet til å gå gjennom hele modelleringssyklusen når de jobber med denne oppgaven vil jeg drøfte i kapittel 5.

Oppsummert har analysen vist at det i de to eksamenssettene som er laget etter den nye læreplanen finnes to oppgaver som nevner modellering. Det er de såkalte åpne oppgavene, oppgave 10 på del 2 eksamen 2022 og oppgave 8 del 2 eksamen 2023. I eksamen del 2 2023 er det en oppgave som kan sies å gi elevene mulighet til å vise sub-kompetanse i modellering.

4.4 Funn ved analyse av dokumenter knyttet til vurdering av eksamen

I eksamensveiledningen for 2022 nevnes modellering i hovedsak tre ulike steder: I forbindelse med de åpne oppgavene, i eksempeloppgaven og i vurderingskriteriene. På side 7 står det at eleven i del 2 vil få to oppgaver der man selv skal utforske en problemstilling eller en situasjon, og at det vil være fokus på kjerneelementene anvendelse og modellering, og abstraksjon og generalisering. I de to oppgavene forventes det at eleven vurderer hva som skal utforskes, og viser kompetansen sin gjennom å formulere matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven, viser fremgangsmåter og resonnement og besvarer de matematiske spørsmålene man selv har laget. Det forventes også at eleven kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler og kan argumentere for egne løsninger og gjøre kritiske vurderinger (Utdanningsdirektoratet, 2022a). Dette er det samme som står på del 2 Eksamen 2022, se figur 10. Dette peker på modelleringskompetanse slik Niss og Jensen (2002) definerer det, som innebærer å kunne gjennomføre modellbygging i en gitt kontekst. Dette vil jeg drøfte nærmere i kapittel 5.

På side 8 i eksamensveiledningen er det en oppgave fra Eksempelsett Mat01-05 del 2, se figur 16, som ble publisert av Utdanningsdirektoratet i 2021 for å vise hvordan en oppgave innen modellering og anvendelse kan se ut.



Oppgave 10

Anne er 15 år, og ønsker å ta førerkort for moped.
Hun skal kjøpe moped når hun blir 16 år.
Hun planlegger å selge den når hun blir 18 år.

Følgende er obligatorisk opplæring når du skal ta førerkort for moped:

Grunnkurs moped – 3 timer	1000,-
Trinnvurdering trinn 2	700,-
Sikkerhetskurs trafikk – 4 timer	2040,-
Trinnvurdering trinn 3	700,-
Sikkerhetskurs vei – 4 timer	2040,-

Samlet pris: All obligatorisk opplæring + 3 kjøretimer: kr. 8800,-

Gebyr førerkort moped:

Gebyr teoriprøve	660,-
Gebyr utstedelse av førerkort	310,-
Fakturagebyr	65,-

Bruk informasjonen ovenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.

Figur 4 Oppgave 10 fra Eksempelsett Mat01-05 del 2.

Figur 16 - Eksempeloppgave fra Eksamensveiledningen 2022

Dette var den første oppgaven knyttet til kjerneelementet som ble gjort kjent blant matematikklærere, og den ble veldig omdiskutert da den kom ut 2021. Diskusjonene gikk blant annet i om elevene kom til å forstå situasjonen og oppleve den som relevant, og at oppgaven inneholder mye informasjon, som kan være en uvant situasjon for elevene. Antagelig har oppgaven mye informasjon fordi den er tenkt brukt på eksamen uten tilgang til internett, så arbeidet med å innhente informasjon er gjort for elevene. Elevene kan bli styrt gjennom den informasjonen som er gitt, slik at hvilke forhold som tas med i modellen blir påvirket. Det kan derfor stilles spørsmål ved om elevene får brukt hele eller bare deler av modelleringssyklusen. Berget (2022) påpeker at det er vanlig i norske lærebøker at modelleringsoppgaver bare krever bruk av deler av en modelleringssyklus (Berget, 2022). I 2023 ble eksempelsettet fjernet fra Utdanningdirektoratet sine sider, med begrunnelsen at oppgavene ikke lenger var relevante slik eksamen har utviklet seg. Tidligere års eksamensveiledninger fjernes også når de erstattes av årets i januar samme år som eksamen skal avholdes.

Under vurderingskriterier for kjerneelementet modellering og anvendelse finnes en matrise som viser tre karakternivåer. For å oppnå karakteren 2 skal besvarelsen vise at kandidaten anvender matematikk gjennom å løse enkle problem, anvender kjente, og lager egne, matematiske modeller som beskriver situasjoner fra dagliglivet og samfunnet og i liten grad vurderer gyldighet og begrensninger i matematiske modeller. For å oppnå karakteren 4 skal besvarelsen vise at kandidaten anvender matematikk gjennom å løse sammensatte problem, anvender og lager egne matematiske modeller som beskriver situasjoner fra dagliglivet og samfunnet, og at kandidaten i noen grad vurderer gyldighet og begrensninger i matematiske modeller. For å oppnå karakteren 6 skal besvarelsen vise at kandidaten anvender matematikk gjennom å løse komplekse problem, anvender, tolker og lager egne matematiske modeller som beskriver situasjoner fra dagliglivet og samfunnet, og vurderer gyldighet og begrensninger i matematiske modeller i lys av situasjonen. Dette peker på et holistisk syn på modelleringskompetanse.

I 2022 ble det ikke laget noen sensorveiledning eller forhåndssensurrapport. Jeg har derfor ikke fått innsikt i hvordan eksamen fra 2022 ble vurdert.

I eksamensveiledningen for 2023 finner jeg omtale av modellering tre steder:
Under informasjon om eksamensoppgavene, i forbindelse med eksempler på oppgaver og under vurderingskriterier. På side 2, i forbindelse med informasjon om eksamensoppgavene, står det at eleven skal kunne utforske matematiske egenskaper og sammenhenger ved å resonnere, argumentere og kommunisere egne løsninger, vise forståelse for andres resonnement og løsninger, og vurdere modeller, tekster og løsninger kritisk. Dette peker på modellering som kritikk. Videre skal elevene kunne se sammenhenger og bruke ulike strategier i utforskning, problemløsninger og modellering. Dette kan være både modellering som fartøy og som innhold, slik jeg beskrevet i kapittel 2.1.2. Jeg tolker dette som at eksamen krever modelleringskompetanse, men også flere av de ulike kompetansene Niss og Jensen (2002) deler matematisk kompetanse inn i, som tankegangskompetanse, resonnementskompetanse, kommunikasjonskompetanse og problemløsnings-kompetanse. På side 6 gjentas dette, sammen med et eksempel på en oppgave hvor elevene skal vise sin kompetanse gjennom programmering og geometri. Jeg vil si at her blir ordet modell brukt mer som et bilde på en gjenstand, ikke som en modelleringsprosess. Neste funn av modelleringsbegrepet er på side 7, se figur 17.

Oppgave 9 er et eksempel på en oppgave hvor eleven skal kunne se sammenhenger og bruke ulike strategier i utforskning, problemløsninger og modellering. Eleven skal vurdere hva den skal utforske og formulere matematiske spørsmål til, for å få vist sin kompetanse i utforsking, problemløsning og modellering, samt hjelpemiddelkompetanse og å kunne argumentere for løsninger og gjøre kritiske vurderinger.

Figur 17 - Skjermdump fra s 7. eksamensveiledningen 2023 (Utdanningsdirektoratet, 2023c).

Teksten her peker på en modelleringssyklus. Eksempeloppgaven handler om abstraksjon og generalisering, og tilsvarer oppgave 9 på del 2 Eksamen 2022 (Utdanningsdirektoratet, 2022c, s. 8). Den er ikke knyttet til modelleringskompetanse. På side 9 finnes en matrise med vurderingskriterier for sentralt gitt eksamen. Disse vurderingskriteriene er endret fra 2022, da de var satt opp for hvert kjerneelement. Utdanningsdirektoratet sier at vurderingskriteriene er i samsvar med kompetanse-målene i læreplanen, og er beskrivelser av kvaliteten i en besvarelse/oppgave på ulike nivå. Kjerneelementene er her satt sammen til de tre kategoriene “Representasjon, anvendelse og resonnering”, “Resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon” og “Utforsking og problemløsing, modellering, abstraksjon og generalisering.” I kategorien “Resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon” vil det å lese modeller som beskriver dagligliv og samfunn svare til karakteren 2, det å vurderer modellenes gyldighetsområde svare til karakteren 4, mens det å kritisk vurderer modellenes gyldighetsområde og hvilke begrensninger de har svare til karakteren 6. Dette peker på den delen av modelleringskompetanse som handler om å forstå modeller laget av andre.

I kategorien “Utforsking og problemløsing, modellering, abstraksjon og generalisering” vil det å lage deler av modeller som beskriver virkeligheten i et dagligdags språk svare til karakteren 2, det å lage modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk svare til karakteren 4, og det å lage og vurdere egne modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk svare til karakteren 6. Dette peker på den delen av modelleringskompetanse som Niss og Jensen (2002) kaller aktiv modellbygging, som innebærer å gå gjennom en modelleringssyklus.

Jeg vil på bakgrunn av dette si at eksamensveiledningen for 2023 inneholder forventninger om at elever som vurderes til høy kompetanse både kan gjennomføre en modelleringssyklus, og forstå modeller laget av andre.

Sensorveiledningen ble utgitt 22. mai 2023, dagen etter at eksamen ble avholdt (Utdanningsdirektoratet, 2023d). Her omtales modellering på tre ulike steder. På side 3 finnes en matrisen med vurderingskriterier, og dette er den samme matrisen som står i eksamensveiledningens side 9. På side 6 står det om poenguttelling på oppgave 8 (modelleringsoppgaven) at ikke korrekt besvarelse gir 0 poeng. Deretter skal det gis 1 poeng dersom eleven lager deler av modeller som beskriver virkeligheten i et dagligdags språk, 2 poeng dersom eleven lager modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk og 3 poeng dersom eleven lager og vurderer egne modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk. Dette gjenspeiler vurderings-kriterienes inndeling i karakterene 2, 4 og 6. På side 10 står det et eksempel på løsning av oppgave 8, som skal gi full uttelling. Her sies det at “Etter to år er lånet nedbetalt, og Therese ønsker å finne ut hvor stort forventet verditap bilen har. Hun setter derfor opp en modell for verditapet.” Modellen viser et funksjonsuttrykk med vekstfaktor, og funksjon tegnet i Geogebra. Det er også satt opp noen antagelser utover informasjonen som er oppgitt i oppgaven, og et regneark med beregninger av lån, nedbetaling, engangsutgifter og inntekter og utgifter per måned.

Forhåndssensurrapporten ble utgitt 1. juni 2023, og her fant jeg modellering omtalt to steder. På side 3 står den samme matrisen med vurderingskriterier som i sensorveiledningens side 3 og eksamensveiledningens side 9, der modellering nevnes under to kjerneelementer, og beskrives på tre karakternivåer. På side 6 er poenguttelling på oppgave 8 er endret, se figur 18:

8	0 poeng: Ikke korrekt 1 poeng: lager deler av modeller som beskriver virkeligheten i et dagligdags språk 2 poeng: lager modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk 3 poeng: lager ~~og vurderer~~ egne modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk.

Figur 18 - Skjermdump fra Forhåndssensurrapporten 2023 s. 6

Dette regner jeg som et signifikant funn, fordi når man tar bort vurdering av modellen fra en modelleringssyklus, tar man bort et av trinnene. En viktig del av det å vise modelleringskompetanse er å kunne validere den ferdige modellen, som vil si å vurdere gyldigheten og si noe om under hvilke forutsetninger modellen kan brukes. Når et av trinnene fjernes, får man ikke lenger vist holistisk modelleringskompetanse. Dette vil jeg i kapittel 5 drøfte i lys av mitt andre forskningsspørsmål, som omhandler hvordan elever har mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet modellering og anvendelser gjennom eksamensoppgavene.

5 Drøfting

Hensikten med denne studien er å finne ut hvordan modellering omtales i læreplanen og hvordan modelleringskompetanse defineres, operasjonaliseres og vurderes. For å kunne si noe om dette har jeg undersøkt de to forskningsspørsmålene

1. Hvilke perspektiv på modellering finnes i læreplanen LK20?
2. Hvordan har elever mulighet til å vise kompetanse innen kjerneelementet *Modellering og anvendelser* gjennom eksamensoppgavene?

Her vil jeg først drøfte mine funn i tilknytning til modelleringsbegrepet i læreplanen, deretter ta for meg oppgavene i eksamenssettene jeg har kategorisert som modelleringsoppgaver, og til slutt funn fra analysen av dokumentene knyttet til vurdering av eksamen.

5.1 Modellering i læreplanverket

For å svare på det første forskningsspørsmålet har jeg analysert læreplanen med tanke på forekomster av ordene modell, modellere og modellering, og kategorisert bruken av ordene ut fra tre ulike perspektiv som er knyttet til målet med modelleringsaktiviteten (Julie, 2002; Barbosa, 2006). Analysen min viste at varianter av ordene modell, modellere og modellering forekom 20 ganger i læreplanen for matematikk for 10.trinn. Jeg fant at de tre perspektivene modellering som fartøy, innhold og kritikk alle er representert i læreplanen, som vist i kapittel 4.2. Den største kategorien i mine funn var likevel uspesifisert bruk av ordet modellering. Det vil si at læreplanen ikke gir noen føringer for hvordan det skal arbeides med modellering. Læreplanen sier at "En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller." (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Det kan være utfordrende for lærerne å undervise mot dette målet, uten en tydeligere definisjon av modelleringsbegrepet. Blum (2015) påpeker at det har vært et gap mellom mengden av forskning på modellering, og hvor lite det faktisk blir undervist om modellering og anvendelser i klasserom rundt om i verden. Han viser til at hovedårsakene til at det er vanskelig for lærere å undervise i dette, er at de trenger ulike kompetanser, både matematisk og utenom-matematisk kunnskap, ideer til oppgaver og til undervisning. I tillegg blir undervisningen mer åpen og vurderingen mer kompleks (Blum, 2015). Når læreplanen ikke hjelper lærere med å tydelig definere modelleringsbegrepet, slik mine funn peker på, kan konsekvensen være at det blir undervist mindre i dette temaet. Forfattere av lærebøker gjør bruk av læreplanen når de bygger opp sine læreverk, og uten tydelige føringer blir det mer opp til den enkelte forfatter og forlag å tolke hva som skal være innholdet i matematikkundervisningen.

I tråd med redegjørelsene tilknyttet modellering i LK20, vil jeg trekke inn Bergets (2023b) forskning. Hun intervjuet lærere som jobber i videregående skole. Lærerne så ikke på modellering som en grunnleggende prosess i skolematematikken, de oppfattet det isteden som en del av innholdsområdet funksjoner. For dem var målet at elevene skulle kunne løse oppgavene som ble gitt på eksamen, og å mestre spesifikke matematikkoppgaver. Samtidig opplevde de ofte tidspress knyttet til det å “komme gjennom pensum”. Dette medførte snarveier inn i matematikkens verden, slik at de ikke “kastet bort tid” på matematiseringsprosesser (Berget, 2023b). Matematisering kan knyttes til modelleringssyklusens trinn 3 og 4 slik jeg beskriver i kapittel 2.1.1. Jeg oppfatter at det er denne problematikken Blomhøj og Jensen (2007) sikter til når de advarer mot for mye vekt på atomistisk tilnærming i undervisningen om modellering. Jeg har ikke undersøkt hvordan det arbeides med modellering i norske klasserom. Både Niss og Jensen (2002) og Røsseland (2006b) viser til at når man har oversatt et problem fra den virkelige verden til den matematiske verden, og skal jobbe matematisk for å løse problemet (trinn 4), så må man benytte seg av flere ulike kompetanser. Jeg valgte å ikke kategorisere oppgaver som bare inneholder trinn 4 som modelleringsoppgaver, fordi matematiseringsprosessen allerede er gjort for elevene i slike oppgaver. Lærerne i Berget (2023b) sin studie baserte sine valg på hvordan modellering ble presentert i lærebøkene og eksamensoppgavene. Disse lærerne hadde ikke lært om modellering i sin utdanning, de hadde kun møtt på modellering i tilknytning til sin egen matematikkundervisning gjennom læreboka og læreplanen (Berget, 2023b). Dette kan selvfølgelig ikke generaliseres til å gjelde alle lærere, men det kan antyde et bilde på utfordringene som finnes i norske klasserom. Ifølge NOU 2023:1 ønsket regjeringen gjennom fagfornyelsen å fornye fagene i grunnskolen og de gjennomgående fagene i den videregående opplæringen. Sammenhengene i læreplanverket skulle styrkes, og skolens verdigrunnlag konkretiseres og tydeliggjøres. Prioriteringene i læreplanene skulle komme tydeligere fram ved å definere fagenes kjerneelementer (NOU, 2023). Mine funn indikerer at modellering har en stor plass i læreplanen, samtidig som de peker på utfordringer rundt at det ikke er tydelig hvordan modelleringsbegrepet skal forstås og hvordan man skal jobbe med det i klasserommene. Hvis lærere ikke har nok kunnskap om eller opplæring i modellering, er det fare for at intensjonene i læreplanen ikke blir oppfylt, slik Berget (2023b) finner i sin doktoravhandling.

5.2 Modelleringsoppgaver i eksamenssettene

Analysen viste at matematikkeksamen for 2022 inneholder én modelleringsoppgave. Videre fant jeg at eksamen for 2023 inneholder én oppgave som nevner modellering og én oppgave som kan sies å gi elevene mulighet til å vise sub-kompetanse i modellering. Hvordan elevene kan vise kompetanse innen kjerneelementet *Modellering og anvendelser* vil jeg drøfte ved hjelp av teorien om atomistisk og holistisk modelleringskompetanse (Blomhøj & Jensen, 2007; Steffensen, 2023)

Steffensen (2023) definerer holistisk modelleringskompetanse som det å kunne planlegge, gjennomføre og reflektere over hele modelleringsprosessen. Jeg fant at hvert av eksamenssettene har én åpen oppgavene som ber elevene vise kompetanse innen modellering og anvendelse. Mine funn tyder på at det i eksamensveiledningen 2023 forventes at elevene viser holistisk modelleringskompetanse, fordi det i vurderingskriteriene uttrykkes at for å oppnå karakteren 6 må eleven vurdere gyldighet og begrensninger i matematiske modeller i lys av situasjonen, og lage og vurdere egne modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk. Dette innebærer alle deler av en modelleringssyklus, slik Blum og Leiß (Blum, 2011), og Blomhøj og Jensen (2007) beskriver. Eksamensveiledningen er kjent for elever og lærere før eksamen, og kommuniserer hva elevene bør forberede seg på. I lys av disse beskrivelsene av vurdering i eksamensveiledningen, vil jeg si at slik oppgavene er formulert på eksamen så åpner det opp for at elevene kan vise holistisk modelleringskompetanse. Spørsmålet blir da om det er mulig for elevene å vise en slik kompetanse innenfor rammen av en skriftlig fem timers eksamen. Det vil jeg diskutere i lys av mine funn fra dokumentene knyttet til vurdering av eksamen, i kapittel 5.3.

Som vist i kapittel 4 viste analysen at oppgave 2 på del 2 eksamen 2023 gir eleven mulighet til å vise atomistisk modelleringskompetanse, fordi den innebærer bruk av trinn 1, 2, 3, 4 og 5 i Blum og Leiß (Blum, 2011) sin syklus.

5.3 Dokumenter knyttet til vurdering av eksamen

I forbindelse med sensurering av eksamen publiserer Utdanningsdirektoratet flere dokumenter som gir føringer for hvordan eksamen skal vurderes. Jeg valgte som nevnt i metodekapittelet å inkludere disse i analysen fordi de kan bidra til å kaste lys over mitt forskningsspørsmål om hvordan elever kan vise modelleringskompetanse. Mine funn tyder på at både eksamensveiledningene og sensorveiledningen kommuniserer en forventning om at elevene skal ta i bruk en modelleringssyklus når de løser modelleringsoppgaver. Dette begrunner jeg med at vurderingskriteriene lister opp at elevene må anvende matematikk gjennom å løse komplekse problem, samt anvende, tolke og lage egne matematiske modeller som beskriver situasjoner fra dagliglivet og samfunnet, og vurdere gyldighet og begrensninger i matematiske modeller i lys av situasjonen, for å oppnå karakteren 6.

Højgaard og Niss (2023) beskriver evaluering av matematisk kompetanse som omfattende og komplekst, og det finnes lite forskningsbasert empirisk materiale som kan dokumentere vellykkede evalueringstiltak. I KOM-rapporten gis det en beskrivelse av tre dimensjoner som kan brukes til å oppsummere hvordan en elev har en bestemt matematisk kompetanse. De tre dimensjonene handler om å avdekke elevens dekningsgrad, aksjonsradius og det tekniske nivået innen kompetansen man vil vurdere (Niss & Jensen, 2002). På en skriftlig eksamen vil det være mulig å si noe om det tekniske nivået, mens elevens dekningsgrad og aksjonsradius vil være vanskeligere å avdekke med en enkelt eksamensoppgave. Dette ble også synlig i eksamensoppgavene som ble analysert i denne studien, da oppgavene i stor grad inneholdt matematiske beregninger fremfor situasjoner som skulle modelleres. Da blir sentrale deler av modelleringsaspektet utelatt.

Analysen viste at i forhåndssensurrapporten fra 1. juni 2023 ble sensorene bedt om å endre sin vurdering av oppgave 8, den åpne modelleringsoppgaven. For å få 3 poeng, som er maksimal uttelling, er det nok at eleven "lager egne modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk" (Utdanningsdirektoratet, 2023e). Ordet "vurderer", som var med i sensorveiledningen fra mai, ble fjernet. Å vurdere modellen svarer til trinn 6 i Blum og Leiß (2007) sin modell, og trinn (f) hos Blomhøj og Jensen (2003). Kravet om at alle trinn i en modelleringssyklus skulle anvendes ble dermed tatt bort. Dette funnet fører til at jeg stiller meg to spørsmål. Det ene handler om at sensorer og oppmenn er lærere, som av overnevnte grunner kanskje vurderer etter kriterier implisitt antydet i LK20, og som jeg har vist kan diskuteres, og at forhåndssensuren dermed antyder at det var vanskelig å vurdere modellerings-oppgaven. Det er viktig å poengtere at jeg ikke kan slå fast dette med sikkerhet, innenfor rammene av denne oppgaven. Det andre spørsmålet jeg stiller meg er om det er mulig å få til vurdering av kompetanse innen modellering, spesielt med vekt på det holistiske aspektet, i den settingen som skriftlig eksamen er. Det har flere forskere undersøkt, så det vil jeg diskutere. Frejd (2013) stilte det samme spørsmålet da han undersøkte svenske avgangsprøver, og han fant at prøvene inneholdt en ujevn vektlegging av de ulike aspektene ved matematisk modellering. Det var oftere at elevene ble bedt om å bruke en allerede eksisterende modell for å beregne et resultat, enn at de ble bedt om å kritisk vurdere forhold og validere resultater. Han fant ingen holistiske oppgaver som vurderte alle aspekter ved modellering. Han fant ingen enkel løsning på spørsmålet, og konkluderte med at det er ønskelig med både videre empiriske studier og mer forskning fra et teoretisk synspunkt (Frejd, 2013).

Fafo fant i sin evaluering av eksamen 2017-2019 at det var vanskelig for sensorene å vurdere oppgaver hvor elevene selv skal velge en hensiktsmessig metode, og oppgaver som stiller høyere krav til kommunikasjon og begrunnelse (Bjørnset et al, 2020). De så ikke spesifikt på modellering, men siden dette er deler som inngår i en modelleringssyklus, så kan man argumentere for at dette også vil gjelde for sensorers vurderinger av eksamen under LK20.

Mitt funn, som innebærer at sensorenes vektlegging av vurdering i forbindelse med oppgave 8 på eksamen 2023 ble endret fra sensorveiledning til forhåndssensurrapport (Utdanningsdirektoratet, 2023e), kan også tolkes som en indikasjon på at det er utfordrende for elevene å få vist fram til vurdering alle delene av en modellerings-syklus. Frejd (2013) kommer fram til at prosjektarbeid over tid er en anbefalt arbeidsmåte når elevene skal lære alle delene av en modelleringsprosess, og således tilegne seg holistisk modelleringskompetanse. Han stiller spørsmål ved hvordan dette skal kunne vurderes. En løsning på dette kan kanskje sees i sammenheng med utprøvingen Utdanningsdirektoratet har satt i gang våren 2024, der elevene i matematikk 1P-Y skal jobbe med en langtidsoppgave. Formålet er å undersøke om det kan finnes andre gode måter enn skriftlig eksamen for å vurdere elevenes sluttkompetanse i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2024b). Dette kan tyde på at Utdanningsdirektoratet også har sett at modellering er vanskelig å både vise frem og vurdere på en fem timers skriftlig prøve, slik eksamen er nå. Som nevnt kan en utfordring med vurdering av prosjektarbeid være at påliteligheten ofte er lavere enn en skriftlig prøve (Frejd, 2013). Utdanningsdirektoratet skriver at langtidsoppgaven skal vurderes av både faglæreren til eleven og en ekstern faglærar for å oppnå en mest mulig rettferdig og pålitelig vurdering. Disse diskusjonene hører også med til en større generell skolepolitisk diskusjon rundt vurderingsformer, hvor en summativ og enkelt kvantifiserbar vurderingsform jevnlig utfordres fra ulike hold (Blömeke et a, 2020).

Funnene mine viser at modellering bør ha en plass i skolen, selv om det ikke er tydelig om modellering skal brukes som en arbeidsmåte for å oppnå andre mål, eller om elevene skal lære seg å modellere fordi det har en verdi i seg selv. Eksamen påvirker hvordan lærere og elever jobber med matematikk, gjennom den såkalte backwash-effekten, og det er derfor naturlig at modellering får plass på eksamen. Mine funn antyder at det ikke er avklart om eksamen i sin nåværende form legger til rette for at elevene kan vise både holistisk og atomistisk modelleringskompetanse.

6 Avslutning

I dette kapittelet oppsummerer jeg mine hovedfunn før jeg peker på didaktiske implikasjoner og kommer med forslag til videre forskning basert på mine funn. Jeg avslutter med noen refleksjoner rundt eget arbeid.

6.1 Oppsummering av hovedfunn

Jeg ønsket å lære mer om modellering ved å undersøke perspektiver på modelleringsbegrepet i læreplanen, og hvilke muligheter eksamensoppgavene gir for å vise kompetanse innen modellering og anvendelse. Analysen viste at alle de tre perspektivene modellering som fartøy, modellering som innhold og modellering som kritikk er tilstede i læreplanen, men at bruken av ordet modellering for det meste ikke er spesifisert. Det betyr at lærere og lærebokforfattere selv må tolke hvordan modellering skal brukes i klasserommet. Selv om læreplanen har modellering som kjerneelement og kompetansemål, er det ikke tydelig hvordan man skal forstå og jobbe med matematisk modellering.

Analysen av eksamensoppgavene viste at det i 2022 var én modelleringsoppgave, og i 2023 to modelleringsoppgaver. Den ene oppgaven i 2023 gjorde det mulig for elevene å vise delkompetanser innen modellering. På begge eksamenene var det en såkalt åpen oppgave, der elevene ble bedt om å vise kompetanse innen modellering. Analysen av dokumenter knyttet til eksamen og sensurering viste at det var en forventning om at elevene skulle gjøre bruk av en modelleringssyklus, men at dette ble endret i den siste beskjeden til sensorene. Da var kravet om å vurdere egne løsninger, som tilsvarer trinn 6 i modelleringssyklusen, fjernet, og løsning av oppgaven ble regnet som fullgod uten at dette trinnet var med. Dette kan tyde på at både det å vise og det å vurdere holistisk modelleringskompetanse på en skriftlig fem timers eksamen er utfordrende. Flere forskere peker på at modellering er en prosess som består av flere steg, og som bør evalueres over tid, samtidig som elevene gjerne bør jobbe i grupper (se f.eks. Jensen, 2021; Frejd, 2013).

6.2 Didaktiske implikasjoner

Modellering har plass i læreplanen, og mine funn tyder på at det forventes at elevene gjør bruk av en modelleringssyklus når de jobber med modelleringsoppgaver. Jeg fant også tegn på at modellering er vanskelig å vurdere. Utdanningsdirektoratet kunne gjerne kommet med en mer tydelig bestilling på hva modelleringsbegrepet innebærer for opplæringen, for eksempel i form av kompetansepakker slik de har laget for digital kompetanse og programmering (Utdanningsdirektoratet, 2022d). For lærere som skal jobbe med modellering i klasserommet, og for eksempel øve til eksamen med elever i 10. klasse, vil jeg vise til Blomhøj og Jensen (2003). De påpeker at for å tilegne seg modelleringskompetanse er det viktig å inkludere både oppgaver som krever at man følger hele modelleringsprosessen (holistiske oppgaver) og oppgaver der kun enkelttrinn av modelleringssyklusen må utføres (atomistiske oppgaver).

6.3 Implikasjoner for videre forskning

På bakgrunn av mine funn vil jeg komme med noen forslag som kan være relevante for videre forskning på feltet. Det første jeg vil trekke frem er å analysere hvordan modellering presenteres i lærebøker for ungdomstrinnet etter innføringen av LK20, med tanke på muligheten for å utvikle holistisk og atomistisk modelleringskompetanse. Det å utvikle en holistisk modelleringskompetanse blir sett på som tidkrevende, men også nødvendig for at elever skal lære seg modellering (Blomhøj & Jensen, 2007; Frejd, 2013; Berget, 2023b).

I ordopptellingen i læreplanen så jeg kun på ulike varianter av ordet modell. Det kunne også vært interessant å analysere læreplanene med tanke på koblinger til modellering uten at det er eksplisitt uttrykt. For eksempel står det under kompetansemål etter 2. trinn at eleven skal kunne “utforske addisjon og subtraksjon og bruke dette til å formulere og løse problemer fra lek og egen hverdag” (Utdanningsdirektoratet, 2019). Her er det snakk om å oversette mellom den virkelige verden og matematikk, og man kan kjenne igjen deler av en modelleringsprosess. Men hvis modellering ikke er klart definert noe sted i læreplanen, og heller ikke i lærebøkene, er det vanskelig å få øye på disse sammenhengene. En analyse av dette vil kunne frembringe mer kunnskap om modelleringsbegrepet i læreplanen.

Det hadde også vært interessant å foreta en evaluering av matematikkeksamen for 10. trinn over tid, slik Fafo gjorde for 2017-2019 (Bjørnset, et al, 2020). Deres gjennomgang av tre eksamenssett inkluderte både analyse av oppgaver og sensors vurderinger og intervju med elever, lærere og sensorer, med fokus på om eksamen er rettferdig. Våren 2023 var det første året eksamen etter LK20 ble gjennomført av et helt årskull, så en slik gjennomgang vil måtte ligge noen år fram i tid.

6.4 Refleksjon og tilbakeblikk

Hvis jeg skulle gjort noe annerledes kunne jeg tenke meg å kontakte Utdanningsdirektoratet for å få vite noe om de interne vurderingene som ble gjort av eksamensbesvarelsene i 2022. Siden det ikke ble laget sensorveiledning eller forhåndssensurrapport fordi det var et fåtall kandidater som gikk opp til eksamen, har jeg ikke kunnet inkludere disse i min analyse.

Jeg gikk inn i masterarbeidet med et ønske om å lære mer om modellering, slik at jeg kan bli en bedre lærer for mine elever og en mer kunnskapsrik kollega på skolen. Jeg har lest mange artikler, og det viktigste jeg vil ta med meg inn i skolehverdagen er at for å tilegne seg modelleringskompetanse må elevene både arbeide med oppgaver som krever at man følger hele modelleringssyklusen (holistiske oppgaver) og oppgaver der man kun gjennomfører deler av en slik syklus (atomistiske oppgaver) (Blomhøj & Jensen, 2003). Jeg har blitt mer bevisst på hva en god oppgave er, og jeg har fått tips til hvordan arbeid med modelleringsoppgaver kan evalueres, blant annet i form av skjema utarbeidet av Højgaard og Niss (2023). Forskningsarbeidet har vært krevende, men det har også vært et lærerikt og givende år.

Referanser

Ärlebäck, J.B, Doerr, H.M & Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Matematics Education. I G. Stillman, W.H-J. Blum & G. Kaiser. (Red.). *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*, 71-81. Springer.

Barbosa, J. C. (2003) What is mathematical modelling? I S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Red.). *Mathematical modelling: a way of life.* ICTMA11, 227-234. Horwood Publishing.

Barbosa, J. C. (2006). *Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective*. ZDM, 38(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Berget, I. K. L. (2023a). *Mathematical modelling in the discourses of the KOM and PISA frameworks and teacher interviews.* Research in Mathematics Education, 1–18. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2165536

Berget, I. K. L. (2023b). *Mathematical modelling in upper secondary school: A case study of Norwegian curriculum discourses*. [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Bergen. https://bora.uib.no/bora-xmlui/handle/11250/3062661

Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education, 27*(1), 51–70.

Berget, I. K. L. & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis, 13*(1), 83–97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Bjørnset, M., Fossum, A., Rogstad, J. & Smestad, B. (2020) *På like vilkår? Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn 2017-2019*. Sluttrapport. (Fafo 2020:01). https://www.fafo.no/zoo-publikasjoner/fafo-rapporter/pa-like-vilkar

Blomhøj, M., & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education,* 45–56. New York: Springer.

Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45–58.

Blum, W. (2011) Can Modelling Be Taught and Learnt? i Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B & Stillman, G. (2011) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, ICTMA 14 Vol 1 2011, 15-30, Springer
https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. I Cho, S. (Red). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688- 3_9

Blömeke, S., Skillinghaug, S., Blikstad-Balas, M., Eggen, P. O., Fjørtoft, H., Gamlem, S. T. M., Tveit, S., Gilje, Ø., Eira, K. I., Helgesen, R., Johannessen, S., Minken, M., Waage, A. og Walker, M. J. (2020). *Vurderinger og anbefalinger om fremtidens eksamen*. Utdanningsdirektoratet.
https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/vurderinger-og-anbefalinger-fremtidens-eksamen/

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understanding. *Journal for research in mathematics education, 29*(1), 41-62.

Bock, W., Bracke, M. & Kreckler, J. (2015). *Taxonomy of modelling tasks*. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2015. 821-826. https://hal.science/hal-01287249

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham: Springer.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2017). *Research Methods in Education*. London: London: Taylor & Francis Group

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova (FOR-2006-06-23-724)* Lovdata. Kapittel 3 Individuell vurdering i grunnskolen og i vidaregåande opplæring Heile kapittel 3 endra ved forskrift 1 juli 2009 nr. 964 (i kraft 1 aug 2009). Heile kapittel 3 endra ved forskrift 29 juni 2020 nr. 1474 (i kraft 1 aug 2020).
https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment—A literature review. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 413-438.

Frejd, P. og Geiger, V. (2017). *Exploring the Notion of Mathematical Literacy in Curricula Documents*. 10.1007/978-3-319-62968-1_22

Galbraith, P. (2012). Models of modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of mathematical modelling and application, 5*(13), 3–16.

Hovdhaugen, E., Flobakk-Sitter, F., Wollscheid, S., Fossum, L. W. & Korseberg, L. (2022) *Kartlegging av nordisk forskning på eksamen* (NIFU-rapport 2022:18). Nordisk institutt for

studier av innovasjon, forskning og utdanning NIFU
https://nifu.brage.unit.no/nifu-xmlui/handle/11250/3028976

Højgaard, T. & Niss, M. (2023). Formativ evaluering af matematiske kompetencer. I Christensen, T.S.; Hobel, P.; Niss, M. og Rørbeck, H. (red.). *Sammenlignende Fagdidaktik 7*, 37-56. https://tidsskrift.dk/sammenlignendefagdidaktik

Jensen, T. H. (2009). Modellering versus problemløsning - om kompetencebeskrivelser som kommunikationsværktøj. *Mona. Matematik- og naturfagsdidaktik - tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere 2009*(2), 37-54.

Julie, C. (2002). Making relevance relevant in mathematics teacher education. In Vakalis, I., Hughes-Hallett, D., Kourouniotis, C, Quinney, D., & Tzanakis, C. (Eds), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level*.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study,* 503–510. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387- 29822-1_58

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematic education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302–310.

Kilpatrick, J., J. Swafford og B. Findell (red.) (2001) *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Research Council. Washington, DC: National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.
https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies?. *ZDM 38*, 113-142.
https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2010). *Classification Scheme for Modelling Tasks. Journal für Mathematik-Didaktik 31*(2), 285-311 https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Maaß, K., Zehetmeier, S., Weihberger, A. et al. (2022) Analysing mathematical modelling tasks in light of citizenship education using the COVID-19 pandemic as a case study. *ZDM Mathematics Education 55*, 133–145 (2023). https://doi.org/10.1007/s11858-022-01440-9

Matematikksenteret. (u.å). Hentet 28. februar 2024 fra
https://www.matematikksenteret.no/fra-l%C3%A6replan-til-praksis

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (eds) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education.* Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Merriam, S.B & Associates. (2002). Introduction to Qualitative Research. *Qualitative Research in Practice*, 3-17. San Francisco: Jossey-Bass.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), (2007) *Modelling and Applications in Mathematics Education* (10th ed., pp. 2-32). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1

Niss, M. A., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets forlag.

Nortvedt, G. A. (2012). Fortsatt en vei å gå. I M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA*, 43-66.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited.
Educational Studies in Mathematics, Vol. 102, No. 1 (September 2019), pp. 9-28
https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

NOU 2015: 8 (2015) *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser.*
Kunnskapsdepartementet.https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf

NOU 2023: 1. (2023). *Kvalitetsvurdering og kvalitetsutvikling i skolen — Et kunnskapsgrunnlag.* Kunnskapsdepartementet.
https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2023-1/id2961070/?ch=1

OECD (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving,* PISA, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/9789264281820-en.

OECD (2019), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Opsal, H., Smestad, B. (2024). Norske læreplaner (del 4). *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 17–22.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Høyskoleforlaget.

Regjeringen. (2022, 28.februar). *Forskrift om avlysing av eksamen fastsatt*. Hentet 18.01.24 fra
https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/forskrift-om-avlysing-av-eksamen-fastsatt/id2902480/

Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 247–266.

Rørseland, M. (2005a). Hva er matematisk kompetanse? *Tangenten, (1)*, 12-18.

Rørseland, M. (2005b). Hva er matematisk kompetanse-del 2. *Tangenten, (2)*, 48-53.

Skott, J., Skott C.K., Jess, K. og Hansen H.C. (2018). *Matematik for lærerstuderende : Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.-10. klasse.* Frederiksberg, Samfundslitteratur.

Stedøy, I. (2018a). *Matematisk kompetanse*. Matematikksenteret. Hentet fra https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/T1.P2.M2A%208-13%20Sted%C3%B8y%20Matematisk%20kompetanse.pdf

Stedøy, I. (2018b). *Utforskende matematikkundervisning*. Matematikksenteret. Hentet fra https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/T2.P1.M3A%20Artikkel%20Utforskende%20undervisning_0.pdf

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice, *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275. https://pubs.nctm.org/view/journals/mtms/3/4/article-p268.xml

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. *Mathematics: Essential research, essential practice, 2*(1), 688-697. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED503746.pdf#page=691

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18.november). *Hva er kjerneelementer?* Hentet 02.11.23 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Kjennetegn på måloppnåelse – matematikk 10. trinn*. Hentet 11.01.23 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/kjennetegn/kjennetegn-pa-maloppnaelse-matematikk-10-trinn/

Utdanningsdirektoratet (2021). *Rammeverk for eksamen – LK20 og LK20S*. Hentet 20.11.23 fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/rammeverk-skriftlig-eksamen-i-lk20-og-lk20s/

Utdanningsdirektoratet (2022a). *Eksamensveiledning – om vurdering av eksamensbesvarelser 2022 (MAT01-05) Matematikk 1-10.*

Utdanningsdirektoratet. (2022b, 24. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk del 1*. Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2022c, 24. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk del 2*. Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2022d 7. januar). *Kompetansepakker*. Hentet 01.05.24 fra https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/kompetansepakker

Utdanningsdirektoratet. (2023a, 3. april) *Sensurere eksamen*. Hentet 13.01.24 fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/sensurere-eksamen/#a194076

Utdanningsdirektoratet. (2023b, 9. juni) *Kva er nytt i matematikk?* Hentet 02.11.23 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2023c). *Eksamensveiledning – om vurdering av eksamensbesvarelser 2023 MAT0015.* Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2023d, 22. mai). *Sensorveiledning 2023.* Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2023e, 1. juni). *Forhåndssensurrapport 2023*. Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2023f, 22. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk del 1*. Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2023g, 22. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk del 2.* Hentet 28.09.23 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2023h, 5. desember) Den internasjonale studien PISA. Hentet 20.01.24 fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/pisa/#a200996

Utdanningsdirektoratet. (2024a). Eksamensveiledning – om vurdering av eksamensbesvarelser 2024 MAT0015 Matematikk. Hentet 29.03.24 fra https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2024b, 3. januar) Langtidsoppgåva i matematikk 1P-Y. Hentet 20.03.2024 https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/utproving-av-langtidsoppgave-som-alternativ-eller-supplement-til-eksamen/langtidsoppgava-i-matematikk-1p-y/

Wess, R., Klock, H., Siller, HS., Greefrath, G. (2021). Mathematical Modelling. In: *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5_1

Vedlegg 1 - Del 1 Eksamen 2022

Utdannings-
direktoratet

Eksamen

24.05.2022

MAT0015 Matematikk
10 årstrinn.

Del 1

Se eksamenstips på baksiden!

Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Del 1 (uten hjelpemiddel) og Del 2 (med hjelpemiddel) skal deles ut samtidig. Del 1 skal leveres innen 1 time. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Hjelpemidler	På del 1 er ingen hjelpemidler tillatte, bortsett fra vanlige skrivesaker og linjal.
Fremgangsmåte og forklaring	Del 1 har åtte oppgaver. Skriv med penn når du krysser av eller fører inn svar i Del 1. I ruter merket med «Vis hvordan du tenker her» skal du vise hvordan du resonnerer og argumenterer for dine svar. Du skal ikke kladde på oppgavearkene. Bruk egne kladdeark. Flervalgsoppgavene har to ulike avkrysningsbokser: - ○ I disse oppgavene skal du sette kryss i ei rute - ☐ I disse oppgavene må du vurdere om du må sette kryss i flere ruter for å besvare oppgaven
Informasjon om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av Del 1 og Del 2. Sensor vurderer i hvilken grad du - viser matematisk kompetanse basert på fagets kjerneelementer - utforsking og problemløsing - modellering og anvendelse - resonnering og argumentasjon - representasjon og kommunikasjon - abstraksjon og generalisering - matematiske kunnskapsområder
Kilder	

Oppgave 1

To sjokolader og én vannflaske koster 40 kr.

Fire sjokolader og tre vannflasker koster 98 kr.

40 kr

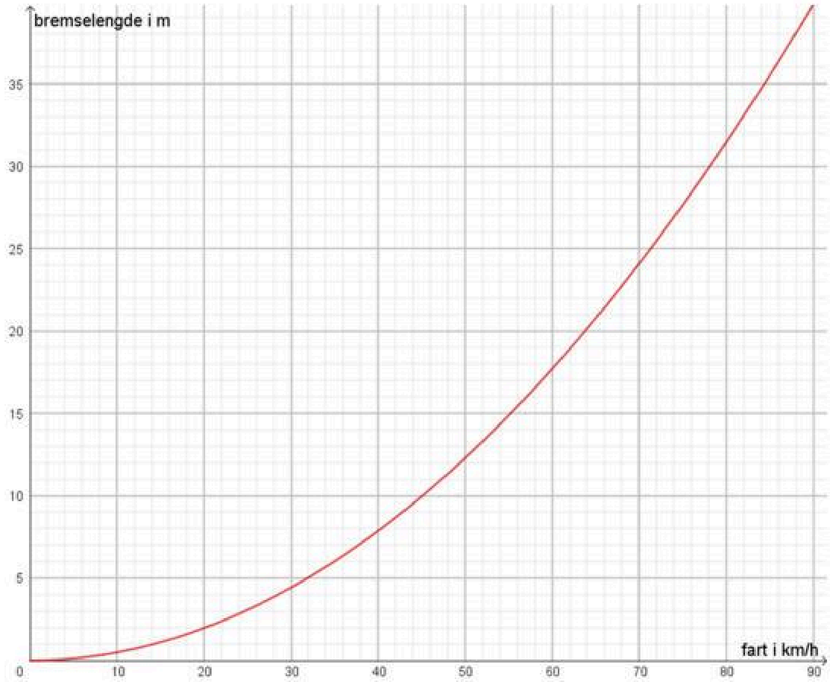
98 kr

Hvor mye koster én sjokolade?

Vis hvordan du tenker her:

Oppgave 2

Grafen viser sammenhengen mellom fart og bremselengde for en bil på tørr asfalt.



Ta utgangspunkt i grafen. Vurder om påstandene er korrekte eller ikke.

	Korrekt	Ikke korrekt
Om farten er 40 km/h, er bremselengden omtrent 8 m		
For at bremselengden skal være mindre enn 15 m, må farten være mindre enn 55 km/h		
Om farten halveres, halveres også bremselengden		
Om farten er over 70 km/h, er bremselengden over 30 m		

Oppgave 3

Ett bestemt rektangel har lengde *a* og bredde 2*a*.

Hvilken lengde og bredde kan rektanglet ha?

Lengde: ____________________

Bredde: ____________________

Oppgave 4

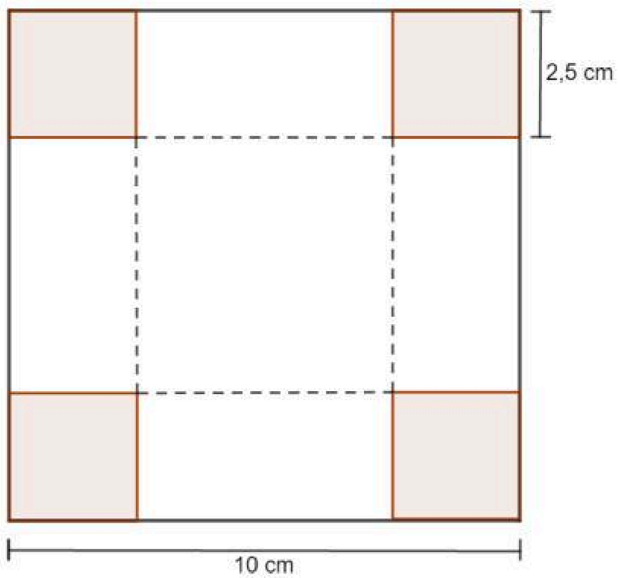
Kristian lager esker av papirkvadrater med sidelengde 10 cm.

I hvert hjørne klipper han bort et lite kvadrat med sidelengde 2,5 cm.

Deretter bretter han opp papiret langs de prikkete linjene og fester hjørnene med tape.

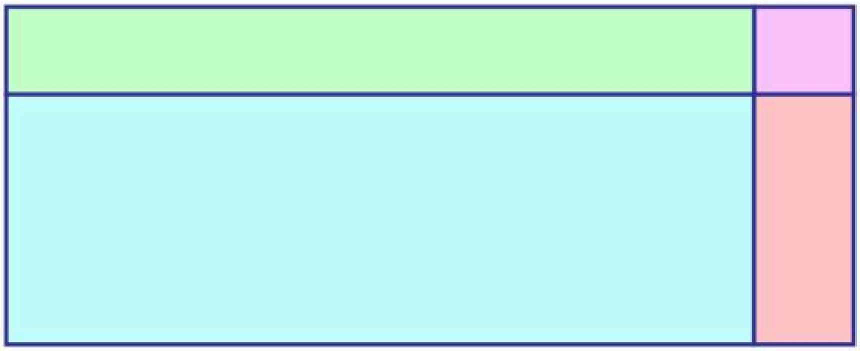
Hvor stort er volumet til eska?

- ○ 25 cm^3
- ○ 62,5 cm^3
- ○ 125 cm^3
- ○ 250 cm^3



Oppgave 5

Bruk figuren til å vise at $68 \cdot 27 = 1836$



Oppgave 6

Til en teaterforestilling blir det solgt tre ulike billettyper:

Voksen	315 kr
Honnør	250 kr
Barn	210 kr

Hvilket av uttrykkene gir den totale billettinntekten, *B*, når det blir solgt *x* antall voksenbilletter, *z* antall honnørbilletter og *y* antall barnebilletter?

- ○ $B = x + z + y$
- ○ $B = 775$
- ○ $B = x \cdot z \cdot y$
- ○ $B = 315x + 250z + 210y$

Oppgave 7

Selma skal dyrke bakterier. Hun starter med 15 000 bakterier i en skål.

Antallet bakterier vokser eksponentielt, og øker med 10 % hver dag.

Hvor mange bakterier vil det være i skålen etter to dager?

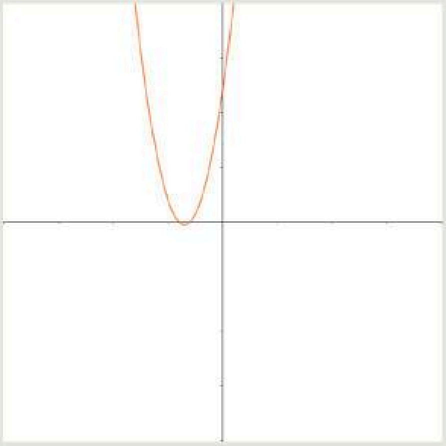
Vis hvordan du tenker her:

Oppgave 8

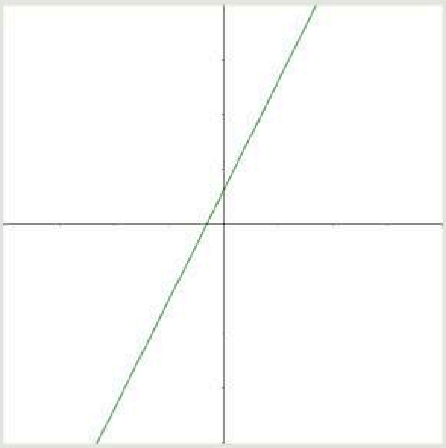
Nedenfor ser du grafen til fire ulike funksjonsuttrykk.

$f(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $g(x) = 1{,}2^x$ $\qquad$ $h(x) = \frac{40}{x}$ $\qquad$ $i(x) = x^2 + 7x + 12$

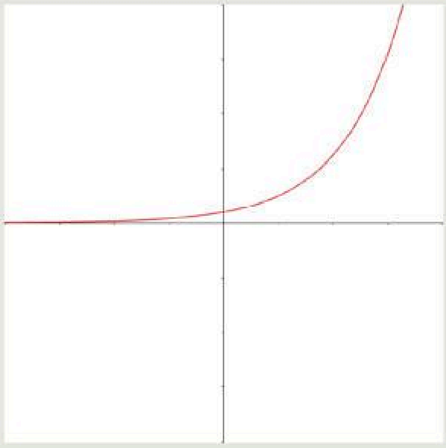
Skriv riktig funksjonsuttrykk til hver graf.



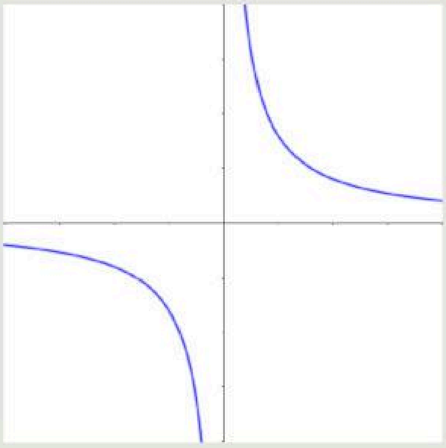
Svar: ____________________



Svar: ____________________



Svar: ____________________



Svar: ____________________

Blank side.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT OPPGAVESETTET:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Vurder om svarene dine er gyldige, før du leverer.

Lykke til!

udir.no

Vedlegg 2 - Del 2 Eksamen 2022

Utdannings-
direktoratet

Eksamen

24.05.2022

MAT0015 Matematikk
10 årstrinn.

Del 2

Se eksamenstips på baksiden!

Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer.
Hjelpemidler	Etter at del 1 er levert inn, er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon med andre.
Fremgangsmåte og forklaring	Del 2 (med hjelpemidler) har ti oppgaver. Du må i alle oppgaver vise hvordan du både resonnerer og argumenter for dine svar. Hvis oppgaveteksten ikke sier hvilken framgangsmåte du skal bruke, kan du fritt velge framgangsmåte selv. Skriv med penn eller digitalt. I de to siste oppgavene vil du få presentert en situasjon eller en problemstilling som du selv må undersøke og utforske. Du skal vise din matematiske kompetanse ved å stille og besvare relevante matematiske spørsmål. Du skal besvare spørsmålene dine ved å argumentere, resonnere, modellere og generalisere. I tillegg skal du vurdere gyldigheten av dine svar. Vi anbefaler å bruke cirka 45 minutter på hver av disse oppgavene.
Informasjon om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av Del 1 og Del 2. Sensor vurderer i hvilken grad du - viser matematisk kompetanse basert på fagets kjerneelementer - utforsking og problemløsing - modellering og anvendelse - resonnering og argumentasjon - representasjon og kommunikasjon - abstraksjon og generalisering - matematiske kunnskapsområder
Kilder	

Oppgave 1

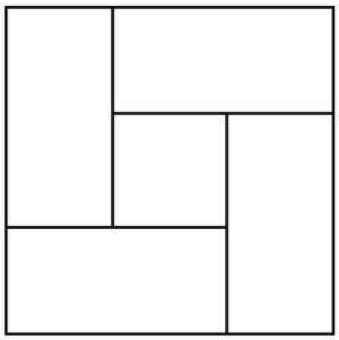
Hanna planlegger en bursdagsfest.
Hun ønsker å leie et lokale til festen.
Hanna har laget et funksjonsuttrykk, $f(x)$, som viser utgiftene ved leie av lokalet:

$f(x) = 100x + 2500$

Bruk funksjonsuttrykket og si noe om utgiftene ved leie av lokalet.

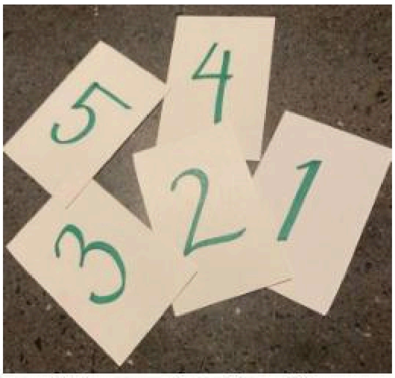
Oppgave 2

Figuren viser et stort kvadrat som er bygd opp av fire kongruente rektangler og et lite kvadrat.
Omkretsen til hvert rektangel er 30 cm.



Argumenter for at omkretsen til det store kvadratet er 60 cm.

Oppgave 3



På fem kort står tallene 1, 2, 3, 4 og 5.
Kortene blir lagt på et bord med tallsiden ned og blir deretter blandet.

Du trekker to tilfeldige kort og summerer tallene som står på kortene.

Argumenter for at det er 40 % sjanse for at summen av tallene på kortene du trekker blir et partall.

Oppgave 4

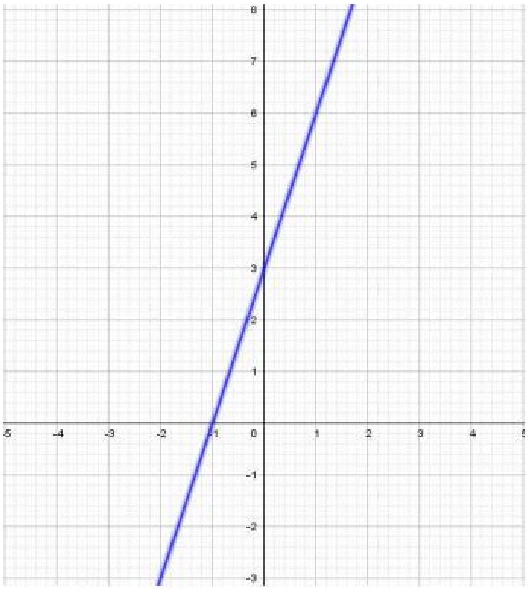
Den eksplisitte formelen for figur *n* i et mønster er:

$F_n = n^2 + 2$

Tegn figurer som kan være de tre første i dette mønsteret.

Oppgave 5

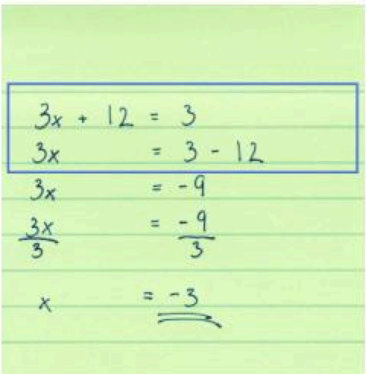
Studer grafen.



Argumenter for at stigningstallet til grafen er 3.

Oppgave 6

Bildet nedenfor viser hvordan Ahmad har løst en likning.

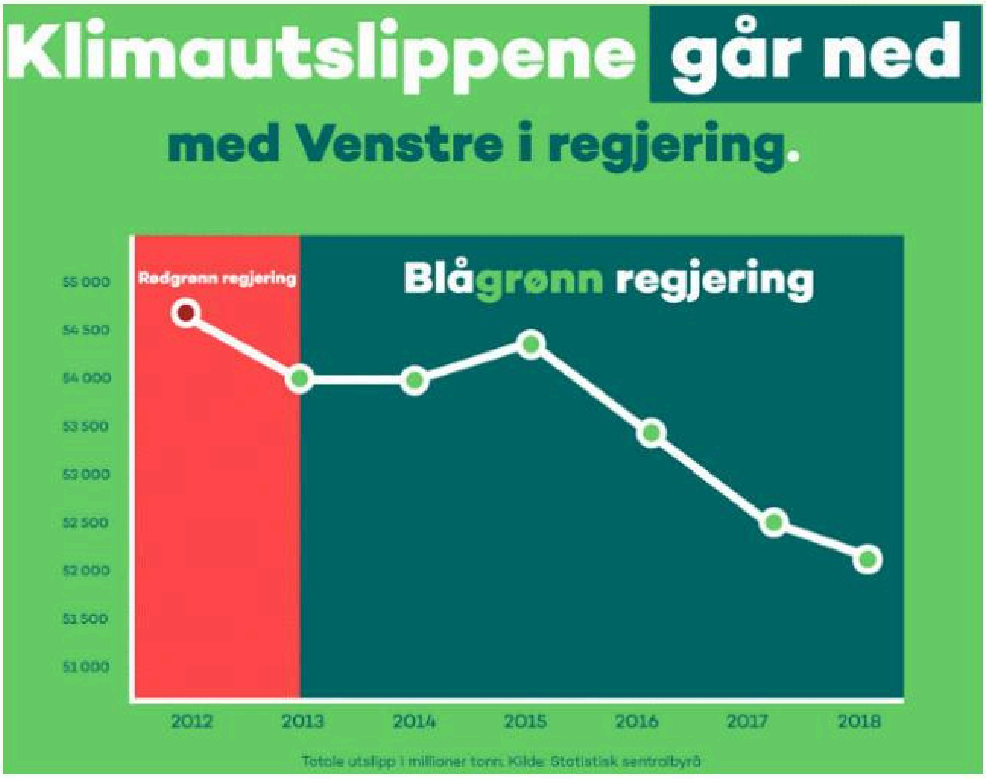


Argumenter for at det Ahmad har gjort i den blå rammen er korrekt.

Oppgave 7

Venstre var støtteparti for den blågrønne regjeringen i perioden 2013–2017, og ble med i regjeringen fra januar 2018.

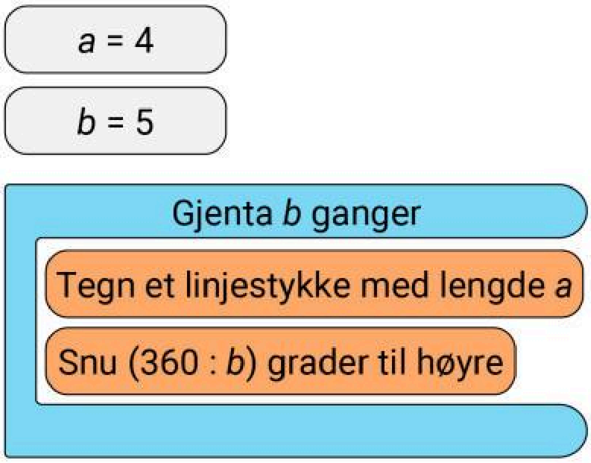
I en kampanje lagde partiet Venstre en grafisk framstilling som viste klimautslippene i perioden 2012–2018.



Gjør en kritisk vurdering av den grafiske framstillingen, og vurder om den gir et riktig bilde av utviklingen.

Oppgave 8

Bildet viser et dataprogram.



a) **Forklar hva som skjer når programmet blir kjørt.**

b) **Tegn figuren og sett riktige mål på figuren din.**

I de to siste oppgavene vil du få presentert en situasjon eller en problemstilling som du selv må undersøke og utforske.

I disse oppgavene er det forventet at du:

- vurderer hva du vil utforske og formulerer matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven, slik at du får vist kompetansen din
- viser fremgangsmåte/resonnement og besvarer de matematiske spørsmålene du formulerer
- bruker formålstjenlige hjelpemiddel
- argumenterer for løsningene dine og gjør kritiske vurderinger

Vi anbefaler å bruke cirka 45 minutter på hver av disse oppgavene.

Oppgave 9

Fakta
Et tall opphøyd i andre er tallet multiplisert med seg selv. Eks. $3^2 = 3 \cdot 3$

Bruk samtalen ovenfor som utgangspunkt for å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.

Oppgave 10

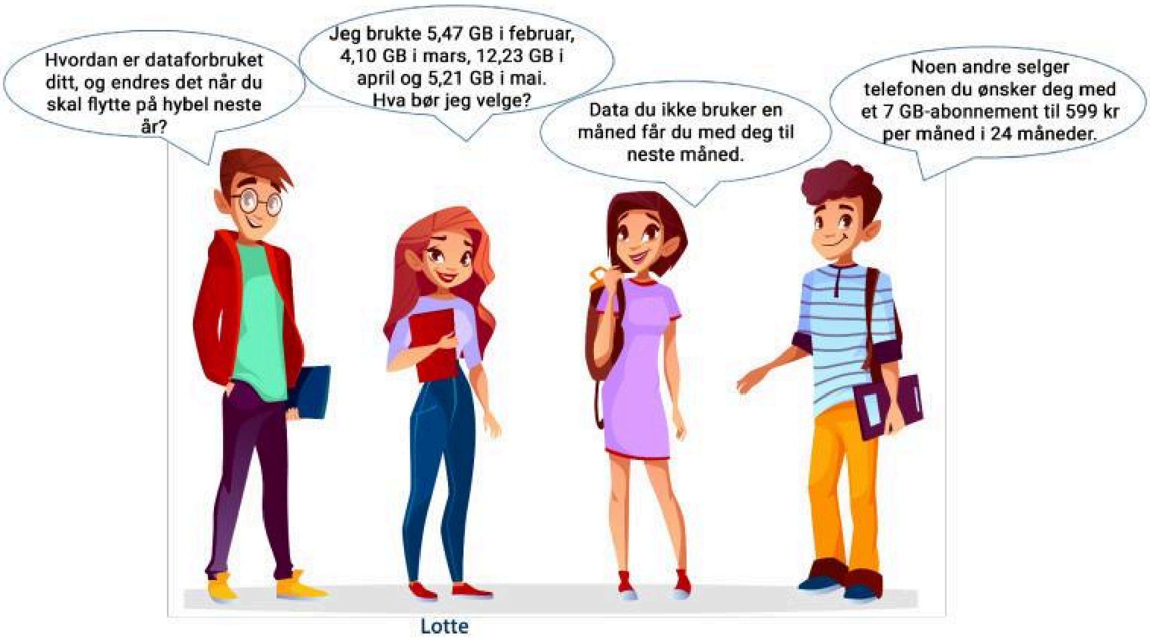
Lotte og tre venner diskuterer hvilket mobilabonnement Lotte bør velge.

Oversikten viser priser for ulike mobilabonnement.

Ingen	Litt	Litt mer	Favoritt	Stor	Størst
0 GB	1 GB	3 GB	7 GB	10 GB	25 GB
	~~Før 179 kr per mnd.~~			~~Før 379 kr per mnd.~~	
99 kr per mnd.	139 kr per mnd.	239 kr per mnd.	289 kr per mnd.	339 kr per mnd.	439 kr per mnd.

Ekstra datapakke:

1 GB: 79 kr	3 GB: 149 kr	5 GB: 199 kr	10 GB: 299 kr



Bruk informasjonen ovenfor som et utgangspunkt til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT OPPGAVESETTET:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Vurder om svarene dine er gyldige, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!

udir.no

Vedlegg 3 - Del 1 Eksamen 2023

Utdannings-
direktoratet

Eksamen

22.05.2023

MAT0015 Matematikk Del 1

Se eksamenstips på baksiden!

Til skolen: Ved digital innlevering av Del 1 må skolen føre kandidatnummer på hvert ark før skanning og opplasting i PGS.

Bokmål

Bokmål

EKSAMENSINFORMASJON	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Del 1 og del 2 deles ut samtidig. Del 1 skal leveres innen 1 time. Etter at del 1 er levert inn, kan kandidaten bruke hjelpemidler. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemiddel	På del 1 er ingen hjelpemidler tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker og linjal.
Framgangsmåte og forklaring	Del 1 har 7 oppgaver. Skriv med penn når du krysser av eller fører inn svar i delen uten hjelpemidler. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaveteksten krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav eller noe uttelling. I ruter merket med «Vis hvordan ...» eller «Løs oppgaven her ...» skal du vise hvordan du resonnerer og argumenterer for dine svar. Du skal ikke kladde på oppgavearkene. Bruk egne kladdeark.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av del med og uten hjelpemidler. Se eksamensveiledningen med vurderingskriterier for sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på nettsidene til Utdanningsdirektoratet.
Kilder	Kilder for bilder, tegninger osv. • slikkepinne og sjokolade: meny.no (22.10.2022) • Bil: bilforum.no (21.11.2022) • hodetelefoner: power.no (21.10.2022) Bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Kandidatnummer:

Oppgave 1

To slikkepinner og to sjokolader koster 32 kr.
Fire slikkepinner og to sjokolader koster 44 kr.

32 kr

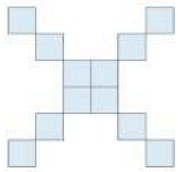
44 kr

Hvor mye koster en slikkepinne?

Vis hvordan du tenker her:

Kandidatnummer:

Oppgave 2

FIGURNUMMER	FIGUR 1	FIGUR 2	FIGUR 3
TEGNING AV FIGUREN			
ANTALL BRIKKER I FIGUREN	5	12	21

a) Tegn Figur 1 og Figur 3 inn i tabellen.

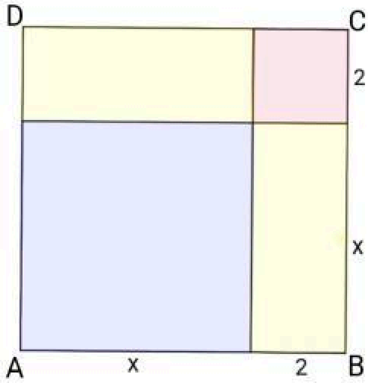
b) Lag en formel for antall brikker i Figur n, og forklar hvordan du kom fram til formelen.

Løs oppgave b) her:

Kandidatnummer:

Oppgave 3

Erlend og Oline arbeider med areal av figurer.
Oline mener at arealet av kvadrat ABCD med sider $(x + 2)$ kan uttrykkes slik: $x^2 + 4x + 4$



Vis her hvordan Oline kan forklare Erlend at det stemmer:

Kandidatnummer:

Oppgave 4

Tabellen nedenfor viser hastigheter målt i en fartskontroll.

Alle hastighetene er mål i km/h.

62	20	62	18	55	62	65	54	62	60

a) Avgjør gjennomsnitt, median og typetall.

b) Begrunn hvilket av sentralmålene du ville valgt for å beskrive bilenes hastighet.

Løs oppgave a) og b) her:

Kandidatnummer:

Oppgave 5

Tabellen nedenfor viser hvor mange elever som bruker skoleskyss fordelt på fylke.

Fylke	Antall elever per fylke	Andel i % per fylke
Viken	26988	17,2 %
Oslo	3991	5,8 %
Innlandet	14889	37,7 %
Vestfold og Telemark	10281	21,2 %
Agder	9920	25,3 %
Rogaland	8190	12,7 %
Vestland	20265	26,4 %
Møre og Romsdal	8852	28,2 %
Trøndelag	15374	28,1 %
Nordland	7017	26,3 %
Troms og Finnmark	8293	31,4 %

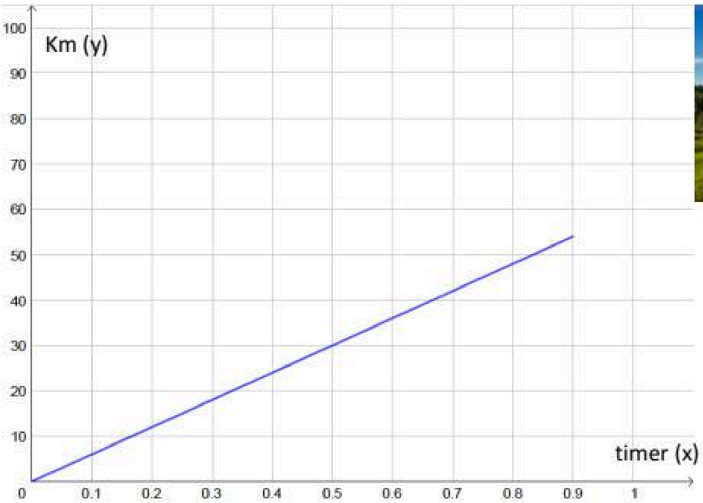
Vurder om påstandene nedenfor er sanne eller usanne. Kryss av i riktig rute.

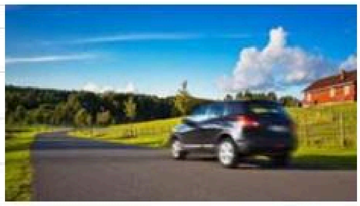
Påstand	Sann	Usann
Flere enn tre ganger så mange elever bruker skoleskyss i Innlandet som i Oslo.		
Gjennomsnittlig er det 5000 elever som bruker skoleskyss per fylke.		
I mer enn halvparten av fylkene er det under 25 % som bruker skoleskyss.		
Viken har den største prosentandelen av elever som bruker skoleskyss.		

Kandidatnummer:

Oppgave 6

Jenny kjørte fra hjemmet sitt til hytta. Nedenfor er en grafisk framstilling av sammenhengen mellom tiden (timer) og strekningen (km) for turen til Jenny.



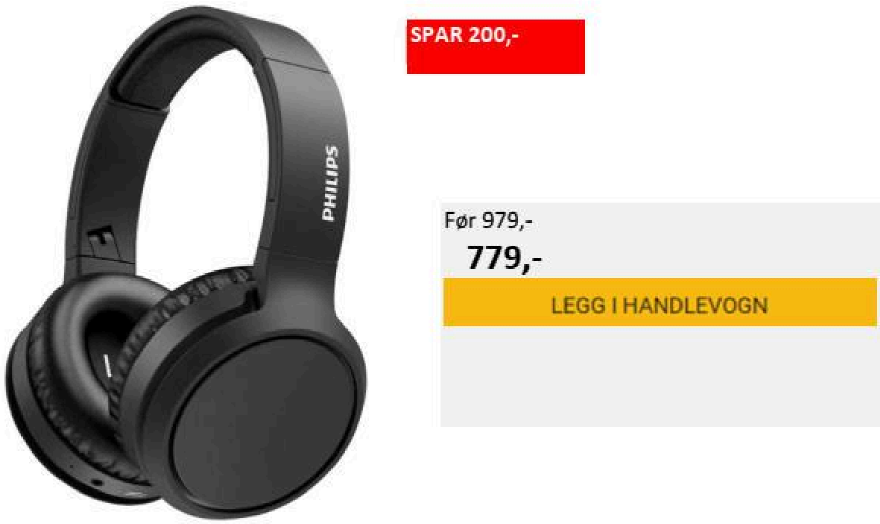


Bestem stigningstallet til funksjonen, og forklar sammenhengen mellom stigningstallet og Jennys gjennomsnittsfart.

Løs oppgaven her:

Kandidatnummer:

Oppgave 7



Marco kjøpte et headset til 779 kr. Før rabatten på 200 kroner, kostet headsettet 979 kroner.

Marco fikk omtrent _________ % i rabatt.

Tom side

Tom side

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!

udir.no

Vedlegg 4 - Del 2 Eksamen 2023

Utdannings-
direktoratet

Eksamen

22.05.2023

MAT0015 Matematikk Del 2

Se eksamenstips på baksiden!

Bokmål

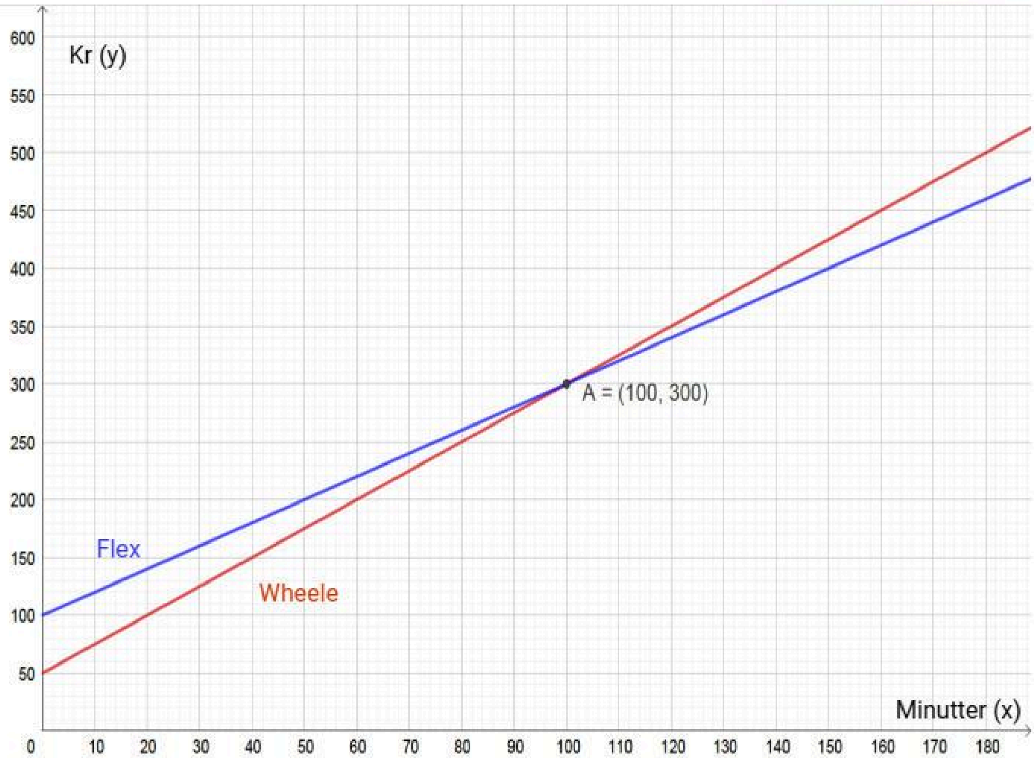
Bokmål

EKSAMENSINFORMASJON	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Del med hjelpemidler	Etter at del 1 er levert inn, er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av åpent internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Veiledning om vurderingen	Se eksamensveiledningen med vurderingskriterier til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Spesielt for oppgave 7 og 8	I oppgave 7 og 8 presenterer vi en situasjon eller en problemstilling der du selv skal undersøke og utforske. I disse oppgavene vil vi se etter din kompetanse i å: • vurdere hva du vil utforske og formulere matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven • vise fremgangsmåte/resonnement og besvare de matematiske spørsmålene du formulerer • bruke hensiktsmessige hjelpemiddel • argumentere for løsningene dine og gjøre kritiske vurderinger Vi anbefaler å bruke omtrent 60 minutter på oppgave 7 og 8 til sammen.
Kilder	Kilder for bilder, tegninger osv. • el-sykkel: tek.no (22.10.2022) • smoothie: bama.no (13.12.2022) • penger: dnb.no (02.10.2022), dinside.dagbladet.no (27.11.22) Bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Oppgave 1

Den grafiske framstillingen nedenfor viser sammenhengen mellom tid (minutter) og hvor mye det koster å leie el-sparkesykkel hos de to utleiefirmaene Flex (blå graf) og Wheele (rød graf).

Bruk den grafiske fremstillingen til å forklare hva det koster å leie en sparkesykkel fra Flex og Wheele.



Oppgave 2

Nedenfor er det fire ulike tilbud på flasker med smoothie.
Gjør beregninger, vurder og argumenter for hvilket tilbud kundene bør velge.

Tilbud 1:

«Kjøp tre, og få to gratis»

Tilbud 2:

«25 % rabatt på hver flaske»

Tilbud 3:

«Kjøp en, og få 50 % på den neste»

Tilbud 4:

«Kjøp to, og få en gratis»

Oppgave 3

På 10. trinn ved Furutoppen skole ble det gjennomført en undersøkelse om ukelønnen til elevene på trinnet. Resultatet er presentert i regnearket nedenfor.

a) Bruk opplysningene i regnearket til å bestemme gjennomsnittlig ukelønn.

	A	B
1	10. trinn	
2	Ukelønn i kr	Antall elever
3	0	5
4	50	7
5	100	9
6	150	7
7	200	2

Da undersøkelsen ble gjennomført, var ikke alle elevene på skolen. De elevene som ikke var der, registrerte ukelønna si dagen etter. Etter at alle elevene hadde gjennomført undersøkelsen, økte gjennomsnittlig ukelønn til 100 kr.

b) Argumenter for hvor mange elever det kan være på 10. trinn ved Furutoppen skole.

Oppgave 4

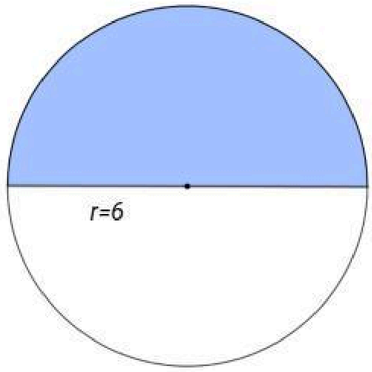
Nedenfor er en oppgave som Halvor fikk i en matematikktime.

OPPGAVE:

Bildet til høyre viser en sirkel, med en blå halvsirkel.

Radius er 6.

Bestem arealet til halvsirkelen.



Halvor løste oppgaven slik:

Løs oppgaven her:

Formelen for areal av sirkel: $\pi \cdot r \cdot r$
Jeg skal regne ut arealet av en halvsirkel og halverer derfor radiusen til 3.
Det gir: $3{,}14 \cdot 3 \cdot 3 \approx \underline{\underline{28{,}26}}$

Løys oppgåva her:
Formelen for areal av sirkel: $\pi \cdot r \cdot r$

Eg skal rekne ut arealet av ein halvsirkel og halverer derfor radiusen til 3.
Det gir: $3{,}14 \cdot 3 \cdot 3 \approx \underline{\underline{28{,}26}}$

Vurder løsningen til Halvor, og argumenter for om løsningen gir et korrekt areal av halvsirkelen.

Oppgave 5

Emira utforsker store talls lov ved å kaste terning med seks sider.
Hun lager et dataprogram som kaster terning for henne.

Nedenfor vises Emiras forslag til en kode til et dataprogram.

```
antall_terningkast = skriv inn heltall

Gjenta antall_terningkast ganger
    tall = tilfeldig tall fra og med 1 og til og med 6
    legg tall til liste

Skriv liste til skjerm
```

a) Forklar hva som skjer når dataprogrammet blir kjørt

Emira vil lage en tabell for å vise at det er like stor sannsynlighet for å få de ulike resultatene 1, 2, 3, 4, 5 og 6.

b) Hvilken verdi for *antall_terningkast* vil du anbefale Emira å velge? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 6

Nicolas får velge mellom 10 000 kroner en gang, eller 1 krone som dobler seg hver dag i to uker (14 dager). Hva bør han velge?

Argumenter for det mest lønnsomme valget.

Enten ti tusen kroner en gang:

Eller en krone som dobler seg hver dag i 14 dager:

Før dag 1:

Etter den første dagen:

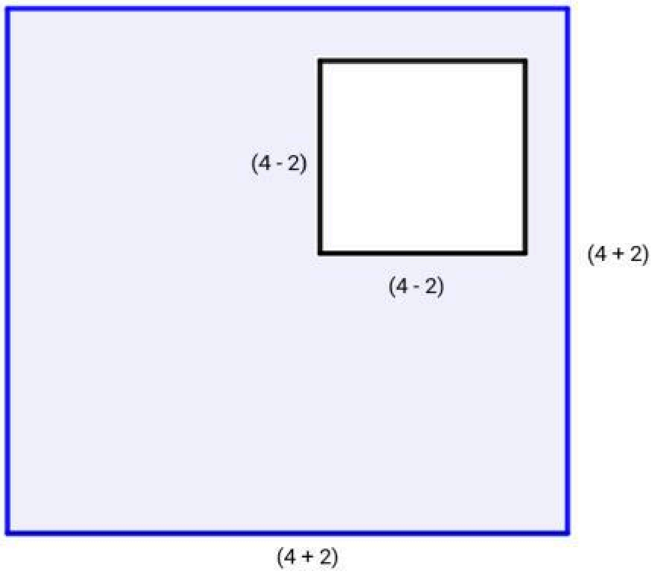
Etter den andre dagen:

og så videre til og med dag 14.

Oppgave 7

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 7. **Bruk figuren og samtalen nedenfor til å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.**

Figuren viser et kvadrat i et større kvadrat.



Oppgave 8

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 8. **Bruk tabellen og utsagnene nedenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe en brukt mopedbil. Hun planlegger å eie bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førerkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra kjøretime, pris per time	850 kr
Veiavgift	470 kr
Sparepenger	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil

Sparepengene har stått på en konto i 3 år med 1,5 % årlig rente

Bilen har et årlig verditap på 10 %

På en vanlig uke kjører jeg omtrent 6,5 mil. Dieselprisen er omtrent 21 kr/L

Therese har en deltidsjobb der hun tjener 3 000 kr hver måned

Blank side

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!

udir.no