Variasjon og progresjon i representasjonsformer for brøk

En analyse av et læreverk for mellomtrinnet

HALLGEIR HANSEN

VEILEDER
Niclas Larson

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Sammendrag

I denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk har jeg undersøkt brøkoppgaver i et læreverk for mellomtrinnet. Forskningsspørsmålene mine er todelt: Hvordan varierer læreverket Multi fra Gyldendal representasjonsformer innen emnet brøk på 5. til 7.trinn? På hvilken måte legger læreverket Multi opp til en progresjon i representasjoner for brøk i bøkene for 5. til 7. trinn? Til sammen 862 brøkoppgaver fordelt på fire bøker og tre trinn er analysert i løpet av perioden oktober 2023 til mars 2024. I prosessen har jeg foretatt både horisontal og vertikal analyse. Den horisontale analysen viser overordnet struktur og bakgrunnsinformasjon i læreverket. Den vertikale analysen gir meg informasjonen jeg etterspør i forskningsspørsmålene. Resultatene viser at andelen diskursive multifunksjonelle registre stiger gradvis fra 5. til 7.trinn, mens andelen diskursive monofunksjonelle registre synker gradvis fra 5. til 7.trinn. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre holder seg på et relativt stabilt nivå, selv om tendensen er svakt synkende. Andelen kognitivt krevende oppgaver øker markant fra 5. til 6.trinn, noe som vises ved at andelen oppgaver som krever konvertering øker. Brøk som forhold er det aspektet ved brøk som oftest er benyttet i læreverket, noe som er et funn som ikke er i tråd med tidligere forskning. Aspektene brøk som helhet og brøk som måleenhet har lav forekomst. 62-77 % av brøkoppgavene er uten bruk av brøkmodell. Økt bruk av brøkmodeller vil gi mer eksponering for flere registre, som er viktig for utvikling av forståelse for et matematisk objekt. Det krever at elevene er fleksible, og kan utføre omdanning mellom ulike hovedregistre, noe som er kognitivt krevende. Det vil ha potensiale for å gjøre elevene mer robuste i sin forståelse av brøk. På dette punktet mener jeg læreverket har potensiale for forbedring. Der brøkmodeller er benyttet, er arealmodellen overrepresentert i læreverket, noe som er i tråd med tidligere forskning. Mer variasjon i bruk av brøkmodeller mener jeg vil gjøre læreverket bedre. Grunnen til det er at elevene da vil oppleve jevn eksponering for alle tre brøkmodellene, i stedet for stor vektlegging av den ene. Elevene vil få en bredere forståelse for brøk, og ikke være avhengige av arealmodell for å forstå. Lengde- og mengdemodellene vektlegger andre deler og aspekter ved brøk, som er verdt å framheve mer enn tilfellet er i det analyserte læreverket. Med hensyn til metode, vektlegger boka sterkt delen-det-hele metoden, og sammenligningsmetoden finnes i færre enn 10 brøkoppgaver. Konklusjonen min i forhold til forskningsspørsmålene er at læreverket Multi varierer representasjonsformer for brøk ved å variere hovedregistre, overganger mellom registre, aspekter ved brøk, brøkmodeller og metode. Jeg konkluderer med at representasjonene avhenger av hvilke delemner av brøk som er plassert hvor i læreverket, og at plassering virker både ryddig og logisk. Progresjon fra 5. til 7.trinn er mest merkbar i bruk av mer kognitivt krevende oppgaver i bøkene for 6. og 7.trinn i forhold til boka for 5.trinn. Ideer for videre forskning kan være en sammenligning av variasjon innen representasjonsformer i flere læreverk. En kan og undersøke andre matematiske emner, da variasjon av representasjonsformer generelt er essensielt for matematisk forståelse.

Abstract

In this master thesis, I have done research on a set of mathematics textbooks for 5Th to 7th grade. My research questions are twofold: How does the textbooks from Multi carry out variations of representations of fractions? In which way does the textbooks from Multi facilitate progress in variations of representations of fractions? Altogether I have analysed 862 fraction exercises from four textbooks for 5th, 6th and 7th grade. From October 2023 until March 2024, I did a horizontal and a vertical analysis on all chapters including fractions. The horizontal analysis gives insights on structure and general background information, while the vertical analysis provides access to the details requested in the research questions. The result from the vertical analysis shows that the share of discursive multifunctional registers is steadily rising from the 5th grade textbooks to the textbook for 7th grade. The opposite is the trend for the discursive monofunctional registers. The share of non-discursive multifunctional registers is quite stable, but slowly decreasing. The share of cognitive demanding exercises increases from the 5th grade textbooks to 6th grade. I have pinpointed it though elevated findings of conversions as type of transformation of semiotic representations. It directly suggests that the cognitive demands get more complex. The ratio concept is the most common share of all the aspects of fractions. This in not in line with earlier studies on aspects of fractions. The part-whole and the measure concepts have relatively low occurrence. 62 – 77 % of the analysed fraction exercises is without use of fractionmodels. Increased use of exercises with fractionmodels will expose pupils for a broader range of representations and semiotic registers. It demands flexible pupils, who are able to carry out transformations while changing registers. This is cognitive demanding. Potentially it may strengthen the pupil`s understanding of the mathematical concept of fractions. Regarding this matter, I believe there is potential for improvement in the analysed textbooks. The area model is overrepresented in exercises where fractionmodels are included. This is also in line with former studies done in Norway. In my opinion, more variation in use of fractionmodels will improve the quality of the analysed textbooks. It will give the pupils stable exposure for all three fractionmodels. The linear- and the discrete models emphasize different aspect of fractions, which is worth highlighting. The part-whole method is highly preferred in favour of the comparison method. The distribution ought to be more balanced in the 4th edition of the textbooks. In short, the textbooks vary representations of fractions by varying registers, transformations between registers, aspects, fractionmodels and methods. Progression in variation in representations of fractions are noticeably identified through more cognitive demanding exercises in the textbooks for 6th and 7th grade, compared to the ones for 5th grade. Future research may compare variation in representations of fractions in different textbook series. Another option is to conduct research different mathematical concepts. Variation in representations of fractions is in general essential for deep mathematical understanding.

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Kunnskapsløftet 2020 er vår gjeldene læreplan. Læreplanen for matematikk inneholder kjerneelementer. Ordet kjerneelement indikerer at akkurat disse elementene er sentrale og viktige innen faget. Et av læreplanens fem kjerneelementer er Resonnering og argumentasjon. Det presiseres at elevene må få erfaringer med ulike representasjoner, samt kunne veksle mellom representasjoner. Læreplanen i matematikk støtter dette konkret med kompetansemålet "Mål for opplæringa er at eleven skal kunne representere brøkar på ulike måtar og omsetje mellom dei ulike representasjonane" (Utdanningsdirektoratet, 2020). For at elevene i stor grad skal være i stand til dette, bør de møte stor variasjon i representasjoner (Kilpatrick et al, 2001 og Duval,2006). Det å kunne benytte ulike representasjoner, gir muligheter for forskjellige løsningsmetoder for elevene når de arbeider med brøk (Enge & Valenta, 2013).

Skolen jeg arbeider ved benytter læreverket Multi fra Gyldendal på mellomtrinnet. Gyldendal er den største forlagsgruppen i Norge når det gjelder skole- og fagbøker (Næraal, A., 2024). Dette underbygger at læreverket er kjent og godt utbredt i skoler rundt om i Norge. Siden mange elever møter Multi ukentlig, er der interessant å vite på hvilken måte læreverket lever opp til standarden Kunnskapsløftet 2020 legger opp til.

Kunnskapsløftet 2020 har kompetansemål som omhandler brøk etter 5., 6., 7. og 8. trinn. De første kompetansemålene som konkret nevner brøk, er på 5. trinn. Jeg har i over 20 år arbeidet på mellomtrinnet, og sett læreverkenes ulike løsninger på hvordan de har presentert emnet brøk for elevene. Når læreplanen i tillegg legger stor vekt på emnet brøk på mellomtrinnet, så trigger det en nysgjerrighet i meg til å undersøke hvordan min skole sitt valgte læreverk varierer representasjonene i emnet. Da jeg arbeider på 5.-7. trinn, og læreplanen har kompetansemål innen brøk på alle disse tre årstrinnene, føles det naturlig å undersøke læreverket Multi 5-7.

Brøk er viktig i seg selv, men også som grunnlag, for å forstå desimaltall og prosent. Brøk er i tillegg viktig med tanke på å lære algebra, da algebra ikke kun inneholder heltall, men også brøker. Kunnskap om brøk er essensielt for å mestre utregningene i algebra. Emnet algebra krever dermed at en har kunnskap om brøk. Forskning fra USA og Storbritannia viser at barneskoleelevers kunnskap om brøk henger tett sammen med hvordan disse elevene mestrer algebra og matematikk generelt (Siegler et al., 2012).

1.2 Tema og forskningsspørsmål

Variasjon i representasjoner er viktig innen matematikk. Et matematisk objekt eller ide er abstrakt. Objektet eller ideen kan gjøres tilgjengelig via representasjoner (Kilpatrick et al, 2001 og Duval, 2006). *"Mathematical ideas are enhanced through multiple representations"* (Kilpatrick et al, 2001, s. 95). For å oppnå dyp forståelse for et matematisk objekt som brøk, bør en altså eksponeres for en variasjon av representasjoner for brøk, noe også læreplanen legger opp til (Utdanningsdirektoratet,2020). Formålet mitt er å undersøke hvordan et mye benyttet læreverk ivaretar variasjon av representasjoner innen emnet brøk på mellomtrinnet. Forskningsspørsmålene for masteroppgaven er:

- Hvordan varierer læreverket Multi fra Gyldendal representasjonsformer innen emnet brøk på 5. til 7?
- På hvilken måte legger læreverket Multi opp til en progresjon i representasjoner for brøk i lærebøkene for 5. til 7. trinn?

1.3 Oppbygning av oppgaven

Masteroppgaven inneholder 6 kapitler. I kapittel 2 tar jeg for meg teori som har betydning for mine forskningsspørsmål og forskning. Metode blir beskrevet i kapittel 3, mens resultatene blir presentert i kapittel 4. I kapittel 5 drøfter jeg resultatene, før jeg i kapittel 6 kommer med tilbakeblikk og vurderer prosjektet i avslutninga.

2 Teori

I denne masteroppgaven undersøker jeg i hvilken grad læreverket Multi 5-7 fra Gyldendal bruker varierte representasjoner innen temaet brøk. Jeg vil først kort ta for meg tidligere forskning på lærebøker i matematikk. Forskningen er utført både i Norge og i utlandet, og vil sette mine undersøkelser i kontekst. Deretter følger et delkapittel om sosiokulturell læringsteori, der begrepet *mediering* blir presentert. Sentrale begreper som representasjoner, representasjonskompetanse og brøk blir beskrevet. Duval sitt system for representasjoner og registre er sentral i forskningen min, og blir viet oppmerksomhet. Jeg tar utgangspunkt i Niss og Jensen (2002) når jeg definerer representasjonskompetanse. Dette skriver jeg om i delkapittel 2.3.1.

2.1 Tidligere forskning

En studie, utført i Sverige, tar for seg lærebøker i matematikkundervisning. Her fant en ut at fysiske lærebøker er viktig i matematikkundervisning. “Hence, the textbook seems to be the definition of school mathematics, as well as the learning path for the majority of students, at least in lower and upper secondary school” (Johansson, 2003, s. 20). Læreboka i matematikk fremheves altså som sentral i klasseromsundervisningen. I selve analysen av lærebøker delte Johansson inn oppgavene ut fra hva de krevde av elevene. Kategoriene var les og forstå, bruke en rutine prosedyre, problemløsning, begrunnelse og samarbeidsoppgaver. Omtrent 40-50% av oppgavene i de analyserte bøkene var oppgaver i kategoriene les og forstå, samt bruke en rutine prosedyre, men kun en lav prosentandel oppgaver ble kategorisert i de andre tre kategoriene (Johansson, 2003, s. 66). Johansson foreslår videre studier innen hvordan enkelte lærebøker introduserer spesifikke matematiske emner.

En annen svensk studie har analysert to sett lærebøker, og tok for seg trinnene 3. til 9.klasse (Ahl & Helenius, 2021). De forsket på hvordan kvotienter blir konstruert og framstilt i lærebøker. I forbindelse med forskningen, laget Ahl og Helenius et rammeverk for hvordan en kan analysere progresjon innenfor kunnskap for matematiske konsepter. Dette rammeverket kommer jeg mer inn på i metodedelen. Studiens resultater viser at de undersøkte læreverkene i for stor grad gir elevene begrensede forklaringer med ikoniske representasjoner av kvotient konstruksjoner fra 3. trinn og helt opp til og med 9. trinn (Ahl & Helenius, 2021).
En norsk studie undersøkte misoppfatninger knyttet til brøk, og er utført på elever på 6. og 7. trinn (Bjerke et al, 2013). De fant ut at elevene de forsket på, hadde mangelfull forståelse for brøkbegrepet. Videre konkluderer de med at elevene ensidig benyttet en type modell i representasjon for brøk; arealmodellen. De stiller spørsmål om lærebøkene i for stor grad benytter aspektet brøk som del av en helhet, og oppfordrer til mer variert bruk av representasjonsformer (Bjerke et al., 2013).

2.2 Sosiokulturell læringsteori

Denne masteroppgaven er skrevet med et sosiokulturelt læringssyn som bakteppe. Dette på grunn av at læringssynet inneholder viktige elementer, som redskaper og mediering. Jeg skriver mer om disse begrepene seinere i dette delkapittelet og i delkapittel 2.4.
Den sosiokulturelle læringsteorien har sitt utspring fra Vygotsky. Teorien vektlegger samspill mellom enkeltindividet og individets samhandling med andre som viktig for både læring og utvikling. Læring er altså et sosialt fenomen, ikke kun utvikling som foregår isolert i hvert enkelt individ (Vygotsky, 1978). I lærebøkene jeg undersøker kan dette eksplisitt oppdages som samarbeidsoppgaver. I undervisningspraksis understøttes det av at elevene jevnlig får muligheter til å diskutere og resonnere sammen, ikke kun individuelt.

Læring og utvikling foregår i en kulturell kontekst (Säljö, 2010). Kulturen og samfunnet en hører hjemme i har betydning for hvordan en tenker, oppfører seg og lærer. En blir formet av å engasjere seg i kulturelle aktiviteter, samtidig som kulturen stiller ulike redskaper til disposisjon (Säljö, 2010, s.18). «Med redskap eller verktøy menes de ressursene, så vel språklige (eller intellektuelle) som fysiske, som vi har tilgang til, og som vi bruker når vi forstår vår omverden og handler i den» (Säljö, 2010, s. 21). Sosiokulturell læringsteori vektlegger altså kontekst, at vi utvikler oss i en sammenheng, ikke ene og alene.
I forbindelse med redskaper, vil jeg definere et annet sentralt begrep, nemlig mediering.

> Begrepet mediere – som kommer fra det tyske Vermittlung (formidle) - antyder at mennesker ikke står i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen. Tvert imot håndterer vi den ved hjelp av ulike fysiske og intellektuelle redskaper som utgjør integrerte deler av våre sosiale praksiser (Säljö, 2010, s. 83).

En kan altså benytte redskaper for å mediere, slik at vi snakker om medierende redskaper. Dette kan sees på som hjelpemidler en benytter i en lærings- eller utviklingsprosess, samt kommunikasjon. Medierende redskaper kan være konkrete og fysiske, i form av en gangetabell, graf, tabell eller lommeregner, eller i form av å være mer abstrakte, som for eksempel språk (Säljö, 2010). I matematikk vil språket ha ulike former, det være seg ikonisk, symbolsk, skriftlig eller muntlig. Et matematisk objekt medieres gjennom sine ulike representasjoner. Disse representasjonene kan være veldig ulike, og kan bestå av både språk, tegninger, illustrasjoner og symboler (Duval, 2006). I denne masteroppgaven vil jeg undersøke et læreverk sine representasjoner av brøk. Disse representasjonene vil være medierende redskaper. Stor variasjon i bruk av representasjoner, vil gi ulike perspektiver og innfallsvinkler til det matematiske objektet brøk, og potensiale for bred forståelse for dets innhold.

2.3 Matematisk kompetanse

Niss og Jensen definerer i rapporten Kompetencer og Matematiklæring matematisk kompetanse som "En matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rammer en bestemt slags matematiske udfordringer." (Niss & Jensen, 2002, s.43). Et individ med matematisk kompetanse har evne til å forstå og anvende matematiske begreper, metoder og ferdigheter. En skal og kunne anvende matematikk i forskjellige kontekster, ikke kun i grunnleggende regneoperasjoner (Niss & Jensen, 2002).

Rapporten presenterer åtte kompetanser, som er gyldige for matematikkundervisning på alle trinn. De åtte kompetansene henger sammen, samtidig som de hver for seg inneholder avgrensede dimensjoner. Til sammen utgjør de åtte kompetansene matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Kompetansene er delt i to grupper, som de kaller **Å kunne spørre og svare** og **Å kunne håndtere språk og redskaper**.

Å kunne spørre og svare	**Å kunne håndtere språk og redskaper**
Tankegangskompetanse	Representasjonskompetanse
Problembehandlingskompetanse	Symbol- og formalismekompetanse
Modelleringskompetanse	Kommunikasjonskompetanse
Resonnementskompetanse	Hjelpemiddelkompetanse

Tabell 1: Oversikt over de 8 kompetansene som utgjør matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002)

2.3.1 Representasjonskompetanse

Representasjonskompetanse fører med seg å kunne forstå ulike typer representasjoner for matematiske objekter, fenomener eller situasjoner. Det innebærer avkoding, fortolkning og kunne skille mellom dem. En må også kunne benytte de ulike representasjonene hensiktsmessig (Niss og Jensen, 2002, s. 56).

En må vite at et matematisk objekt er abstrakt, og kun er tilgjengelig via sine representasjoner. De ulike representasjonene viser forskjellige aspekter ved objektet. Representasjonene kan deles inn i representasjonssystemer (Duval, 2006). De ulike representasjonssystemene inneholder representasjoner som er beslektet. De kan for eksempel være verbale (skriftlig og muntlig), symbolske, visuelle, grafiske, geometriske og tabellmessige (Duval, 2006).

I tillegg kreves det at en forstår forbindelser mellom ulike representasjoner, og har kjennskap til styrker og svakheter med de forskjellige representasjonene. Representasjoner via konkreter skaper forbindelse til hjelpemiddelkompetansen (Niss & Jensen, 2002).

I matematikk er symbolske representasjoner spesielt viktige. På grunn av dette vil det være tett forbindelse mellom representasjonskompetanse og modelleringskompetanse, samt symbol- og formalismekompetanse (Niss & Jensen, 2002).

Matematiske representasjoner krever kommunikasjon om og innen matematikk, så det indikerer sterke forbindelser også til kommunikasjonskompetanse (Niss og Jensen, 2002, s. 56-57).

Matematisk kompetanse innebærer å besitte kunnskaper og ferdigheter innen ulike delkompetanser. Representasjonskompetanse er sentralt, og har forbindelser til mange av de andre kompetansene, som til sammen utgjør matematisk kompetanse (Niss og Jensen, 2002). Videre i oppgaven vil jeg bygge videre særlig på representasjonskompetanse. I neste delkapittel vil jeg presentere nærmere hva representasjoner er og hvorfor det er viktig. Det vil skape en ramme for min forskning på lærebøker.

2.4 Representasjoner

I dette delkapitlet skriver jeg om representasjoner og representasjonssystemer.

2.4.1 Matematiske objekter er abstrakte

Et matematisk objekt eller en matematisk ide er abstrakt. Objektet eller ideen blir uttrykt via representasjoner. Disse representasjonene kan være i form av illustrasjoner, muntlige eller skriftlige regnefortellinger, symboler eller ulike diagrammer. "*A representation is something that stand for something else.*" (Duval, 2006, s. 103). Når skoleelever ser det matematiske objektet brøk i ei lærebok, ser de altså representasjonene for objektet brøk. Objektet eller ideen brøk er mediert gjennom representasjoner. Andre eksempler på matematiske objekter, kan være en funksjon, et regnestykke eller ei tallrekke (Duval, 2006).

2.4.2 Representasjonssystemer

Det at matematiske objekter og ideer er abstrakte kan for mange være utfordrende (Duval, 2006). Duval skriver at en representasjon står for noe annet, noe som gjerne er lite håndgripelig, og vanskelig å få tak på (Duval, 2006). Han skisserer to hovedpunkter: Det første er hva som kreves kognitivt for å gjøre et matematisk objekt tilgjengelig. Det andre er matematikkfagets særpreg. For å beskrive forskjell i kognitiv aktivitet som kreves innen matematikk, i forhold til andre kunnskapsområder, kommer Duval med tre karakteristiske trekk ved matematikk (Duval, 2006, s. 106-108).

Det første trekket er at viktigheten av semiotiske representasjoner skiller matematikk fra mange kunnskapsområder. Semiotikk defineres som læren om tegn og tegnbrukende atferd. Matematiske objekter eller ideer kan ikke observeres direkte, kun via semiotiske representasjoner. En må være i stand til å bytte mellom ulike representasjoner for samme objekt for å utføre en matematisk prosess. Overganger mellom semiotiske representasjoner er selve hjertet i matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 107).

Matematikkens paradoksale natur er det andre særpreget ved matematikkunnskap. En kan ikke observere et matematisk objekt, slik en kan med konkrete fenomener. En har dermed kun en mulighet for å gjøre et matematisk objekt tilgjengelig, nemlig mediering via representasjoner. En må altså benytte semiotiske representasjoner for å utøve matematisk aktivitet. Likevel kan en altså velge mellom ulike semiotiske representasjoner for et og samme matematiske objekt. I tillegg er ikke det matematiske objektet det samme som de semiotiske representasjonene. Paradokset er da at en må skille mellom de semiotiske representasjonene og det matematiske objektet, samtidig som det ikke er tilgjengelig uten semiotiske representasjoner (Duval, 2006, s. 107).

Det tredje særpreget ved matematikkunnskap er at det er stor variasjon av semiotiske representasjoner innen matematikk. Å utøve matematisk aktivitet krever at flere representasjonssystemer oppleves som tilgjengelige, og at en i tillegg kan benytte de representasjonene som er hensiktsmessige ut fra problemstilling. Det er utfordrende å gjenkjenne et matematisk objekt, fordi det kan representeres på mange måter, i ulike representasjonssystemer. Enkelte matematiske prosesser er også enklere å utføre i et spesifikt representasjonssystem, og hvert ulikt system vil gi spesifikke muligheter (Duval, 2006, s. 108-109).

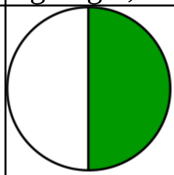
Duval deler de semiotiske representasjonssystemene inn i monofunksjonelle- og multifunksjonelle semiotiske systemer. I de monofunksjonelle semiotiske systemene tar de fleste matematiske prosessene form som algoritmer, og er stringente. Det vil si at en har få valgmuligheter, og det finnes strenge regler for hva som er tillatt og ikke. Matematiske bevis er eksempler på monofunksjonelt register. Multifunksjonelle semiotiske systemer er lite stringente, der de monofunksjonelle systemene har høy grad av stringens. Duval deler videre opp de monofunksjonelle- og multifunksjonelle semiotiske representasjonssystemene inn i diskursive og ikke-diskursive systemer. Diskursive representasjoner inkluderer ord og symboler. Ikke-diskursive representasjoner er ulike bilder, illustrasjoner, grafer og diagrammer. Totalt ender Duval opp med fire hovedtyper systemer, han kaller registre (Duval, 2006, s. 109-111).

	Diskursive	**Ikke-diskursive** Konfigurasjoner av former 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D
Multifunksjonelle registre	Naturlig språk • Muntlige forklaringer ↓↓ ↷↷ Skriftlige: teorem, beviser ⇓⇓ ⟹⟹	Ikoniske: tegninger, illustrasjoner og mønster …................................... ⇑⇑ ↷↷ Ikke-ikoniske: Geometriske figurer som kan ⇑⇑ konstrueres med redskaper ⇓⇓
	Hjelpende overgangsrepresentasjoner ⇓⇓ Ingen regler for kombinasjoner	⇑⇑ ⇓⇓
Monofunksjonelle registre	⇓⇓ Symbolske systemer Kun skriftlig: beregninger, bevis ↷↷ ⇒⇒	⇓⇓ Diagrammer, grafer og ⇑⇑ tabeller ↷↷

Tabell 2: Klassifisering av registre som kan mobiliseres i matematiske prosesser (Duval, 2006)

Diskursive multifunksjonelle registre vil være naturlig språk. Dette kan igjen forekomme muntlig og skriftlig. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre er ikoniske eller ikke ikoniske. De ikoniske inkluderer tegninger, illustrasjoner og mønstre, mens de ikke-ikoniske er geometriske figurer en kan konstruere med redskaper. En konstruert likesidet trekant vil være ikke-ikonisk, mens en skisse av et problem vil framstå som ikonisk (Duval, 2006).

Diskursive monofunksjonelle registre inneholder symboler, og er kun skriftlige. Ikke-diskursive monofunksjonelle registre inkluderer grafer og diagrammer, for eksempel til en lineær funksjon (Duval, 2006).

Diskursive multifunksjonelle registre	**Ikke-diskursive multifunksjonelle registre**	**Diskursive monofunksjonelle registre**	**Ikke-diskursive monofunksjonelle registre**
Naturlig språk Skriftlig eller muntlig	Ikoniske og ikke-ikoniske Illustrasjoner, tegninger, mønstre	Symboler Skriftlig	Grafer, diagrammer, tabeller
"Hallgeir spiser en halv sjokolade. Hvor mye sjokolade har han igjen?"		½	**1/2** | **2/4** **4/8** | **8/16**

Tabell 3: Eksempel hvor hvordan en kan representere ½ i de fire hovedregistrene til Duval

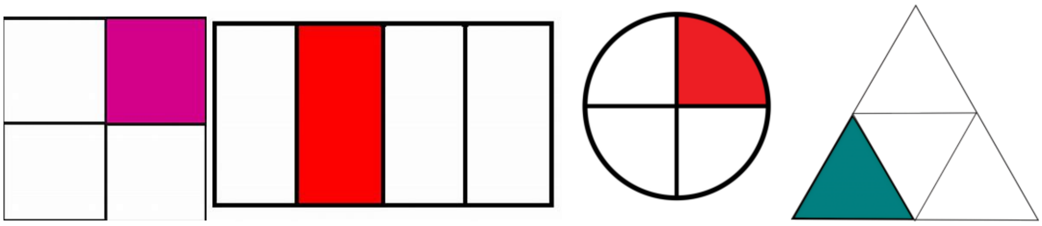
Overganger mellom ulike representasjoner kan skje på to måter. Overganger innenfor samme register, er behandling. Dersom overgangen foregår mellom ulike registre, kaller vi det konvertering (Duval, 2006, s. 111). I tabell 2 viser de bøyde pilene behandlinger, mens rette piler indikerer konverteringer. Fra figur 1 kan en se at overgangen fra ikke-diskursivt monofunksjonelt register til ikke-diskursivt multifunksjonelt register er konvertering. Overgang fra skriftlig til muntlig representasjon vil være ei behandling innen samme hovedregister.

2.4.3 Utfordringer ved ulike representasjonsformer

Både behandlinger og konverteringer kan være utfordrende for skoleelever (Duval, 2006). Det å ikke beherske konverteringer mellom ulike hovedregistre, begrenser både mulighetene til å bruke kunnskapen som kreves, samt kapasiteten til å tilegne seg ny matematisk kunnskap (Duval, 2006, s. 121). Dette indikerer at en bør forsøke å variere representasjoner, og oppmuntre elevene til å se sammenhengene mellom dem.

En må være i stand til å skille mellom et matematisk objekt og objektets ulike representasjoner (Duval, 2006). Da vil en kunne ta inn over seg at en faktisk kan ha ulike representasjoner for det samme matematiske objektet, for eksempel at ¼, "en firedel" og alle de visuelle illustrasjonene av ¼ i figur 4 er representasjoner for den samme brøken.

Ved problemløsning er det essensielt å kunne trekke ut matematisk relevant informasjon. Da må en kunne skille mellom det matematiske objektet og dets representasjoner, fordi objektet kun er tilgjengelig via sine representasjoner (Duval, 2006, s. 124). Dersom en ser på brøk, er det ikke gitt at elever ser at ulike illustrasjoner for en gitt brøk er representasjoner for den samme brøken (Duval, 2006).



Figur 1, 2, 3 og 4: Ulike representasjoner for ¼

2.4.4 Hvorfor bør en variere representasjonsformer?

En bør bruke den representasjonen som er mest hensiktsmessig i den enkelte situasjon (Duval, 2006). Dersom en lærer vil vise situasjoner der en har bruk for brøk, vil en representasjon være mer hensiktsmessig enn andre representasjoner. Det kan være naturlig språk eller visuelle illustrasjoner fra multifunksjonelle registre. Ved matematisk behandling vil andre representasjoner være enklere og mer effektiv å benytte, nemlig diskursive monofunksjonelle, i form av symboler (Duval, 2006, s. 110 og 127).

Ulike representasjonssystemer viser ulike aspekter ved et matematisk objekt. Det matematiske objektet er abstrakt, og representasjonene viser ulike sider av objektet. En bred forståelse krever at en forstår at representasjonene ikke er det matematiske objektet. Det krever også at en kan veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som er praktisk. I delkapittel 2.3.5 synliggjør jeg sammenhengen mellom representasjonskompetanse og andre kompetanser, som til sammen utgjør matematisk kompetanse. Uten å besitte bred kompetanse om representasjoner, vil et individ ikke kunne oppnå høg matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002).

2.5 Brøk

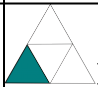
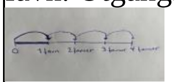
Det finnes flere forklaringer på hva brøk er for noe. Her er to eksempler:
"Brøk er et matematisk uttrykk for en del eller flere like store deler av en enhet. En brøk skrives vanligvis med en brøkstrek som a/b" (Aubert, 2021).

"En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek er det samme som deletegn. En brøk er en del av noe" ("Brøkregning", 2023).

En grunn til en har flere forklaringer og definisjoner av hva brøk er for noe, er at brøkbegrepet er komplekst. Brøkbegrepet består av fem ulike aspekter: brøk som del av en helhet, brøk som forhold, brøk som operator, brøk som kvotient og brøk som måleenhet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 295-296). Disse vil jeg presentere i delkapittel 2.5.1.

2.5.1 Ulike aspekter ved brøk

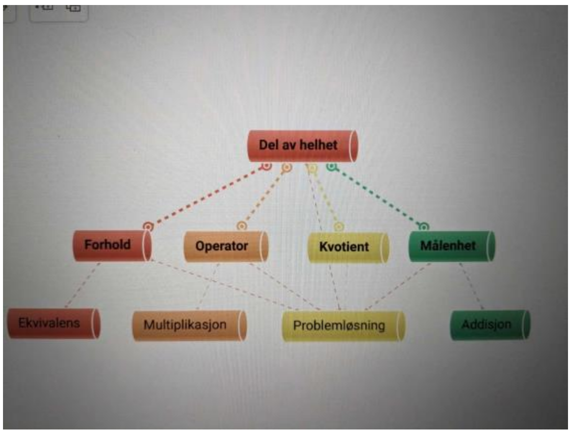
Brøk kan tolkes forskjellig i de ulike aspektene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dette viser jeg i tabell 4.

Aspekt	Tolkning av brøken 1/4
Brøk som en del av en helhet	 En del av en helhet, som er delt inn i fire like store deler. Figuren viser at 1 av 4 like deler er fargelagt.
Brøk som forhold	Brøk som forhold brukes ofte ved sammenligninger. “Hva er størst av ¼ og 1/8?” Utviding og forkorting: “Ved ¼ og 2/8 er forholdet mellom teller og nevner lik.”
Brøk som operator	Brøk som operator vil si ei sammenligning mellom to størrelser. En brøk multipliseres med et tall, og vi får et tall som er større eller mindre en utgangspunktet. Målestokk er et område elever møter dette aspektet: Rita er 160 cm høg. Hvor stor blir en modell i målestokk 1:4? 160cm*¼= 40 cm
Brøk som kvotient	¼ som 1 dividert på 4. Et eksempel kan være en eplepai delt på 4 individer. Da får hvert individ ¼ eplepai hver.
Brøk som måleenhet	¼ som 1 multiplisert med ¼ av måleenheten, der utgangspunktet er gitt. Eksempel: 1*(¼*4 favner) = 1 favn. Utgangspunktet 0 og måleenhet favner. 

Tabell 4: ¼ i forskjellige aspekter

Enda et aspekt ved brøk, som Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) ikke har nevnt spesifikt, er brøk som tall. For en brøk finner vi tilsvarende desimaltall med lik verdi. Brøken ¼ tilsvarer desimaltallet 0,25, og brøken og desimaltallet har lik verdi. Brøk kan altså sees på som et tall på tallinja (“Brøk”, u.å.).

De ulike aspektene ved brøk kan tolkes ulikt, men de henger også sammen. Behr et al. (1983) systematiserte aspektene ved brøk, og viste strukturer og sammenhenger mellom de (Behr et al, 1983, s. 10). Her blir brøk som del av en helhet framstilt som et grunnleggende aspekt, og viktigere enn de andre fire aspektene. Sammenheng mellom aspekter ved brøk og brøkoperasjoner og problemløsning blir visuelt vist i modellen. Av figuren kan vi se at alle fem aspektene ved brøk kan benyttes ved problemløsning, mens de andre aspektene er noe mindre fleksible.



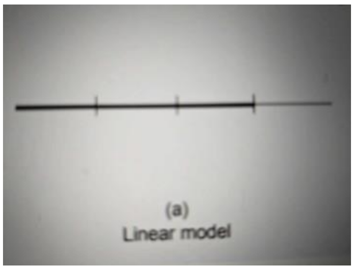
Figur 5: Teoretisk modell som viser sammenheng mellom aspekter ved brøk og ulike brøkoperasjoner, samt problemløsning (Behr et al., 1983)

2.6 Ulike brøkmodeller

I tillegg til ulike representasjoner, har en også lignende redskaper for å illustrere brøk, nemlig forskjellige brøkmodeller. En brøkmodell kan betegnes som instruksjonsmateriale vi benytter for å framstille eller eksemplifisere brøk. Vi har tre modeller for brøk som er mest brukt i matematikkundervisning på mellomtrinnet; lengde, - areal- og mengdemodellen (Watanabe, 2002, s. 457). En kan bruke ulike metoder når en representerer brøk ved hjelp av disse modellene.

2.6.1 Lengdemodellen

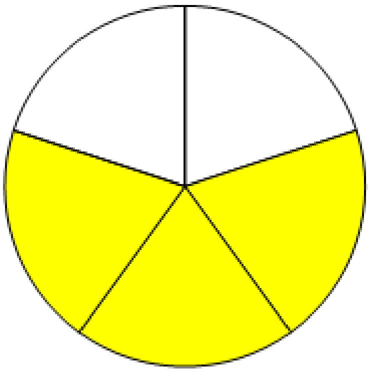
Lengdemodellen innebærer at brøk er punkter i en todimensjonal figur. Hvert punkt representerer et tall. En kan benytte konkreter, noe som er en fordel da det matematiske objektet er abstrakt (Watanabe, 2002).



Figur 6: ¾ vist som lengde (Watanabe, 2002)

2.6.2 Arealmodellen

I arealmodellen dekker en brøk en del av arealet til en gitt figur. Hele figuren er en hel, mens brøken viser en del av det hele (Watanabe, 2002).



Figur 7: 3/5 som areal

2.6.3 Mengdemodellen

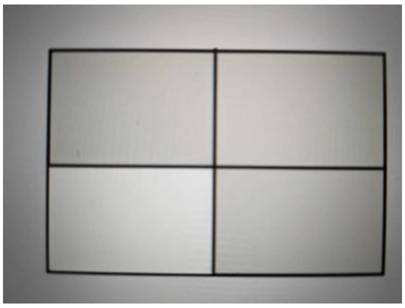
Ved bruk av mengdemodellen, har vi en gitt mengde. Deler av denne mengden skiller seg ut fra den hele mengden, og utgjør en brøk av hele mengden (Watanabe, 2002). Det kan for eksempel være seigmenn, der røde seigmenn utgjør en del av den totale mengden seigmenn.

Figur 8: De røde seigmennene utgjør 2/4 av alle seigmennene

2.6.4 Metoder for representasjon av brøk

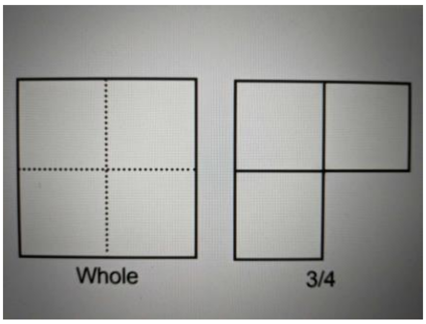
En kan representere brøk på minst to forskjellige måter dersom en bruker lengde-, areal- eller mengdemodellen. Watanabe kaller metodene for "*the part-whole method"* og *"the comparison method"* (Watanabe, 2002, s. 459). Videre kaller jeg metodene delen-det hele metoden og sammenligningsmetoden. Metodene skiller seg mest fra hverandre når det gjelder forholdet mellom det hele og brøkdelen.

Delen-det hele metoden viser brøken som en illustrasjon, der brøken er en integrert del av det hele. En svakhet ved metoden er at en ikke legger nok vekt på ideen om at brøken er en del av en enhet (Watanabe, 2002).



Figur 9: ¾ vist via "Delen-det hele metoden"

Sammenligningsmetoden viser brøken og det hele som to separate figurer. Brøken blir representert via en sammenligning av figuren til brøkdelen og figuren til det hele. Denne metoden legger vekt på forholdet mellom det hele og brøkdelen, noe som kan være fordelaktig (Watanabe, 2002).



Figur 10: Hentet fra Watanabe (2002). ¾ via sammenligningsmetoden

Begge metoder kan brukes uavhengig av hvilke av de tre brøkmodellene en velger å benytte seg av.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg først skrive om metode generelt innen forskning. Deretter forklarer jeg har hvilke metoder jeg har brukt i min analyse. Kapittel 3.1 vies forskningsmetoder. I delkapittel 3.2 forklarer jeg hva dokumentanalyse er for noe. Deretter retter jeg blikket mer spesifikt mot horisontal og vertikal analyse, og hvordan jeg har tilpasset analyseverktøyet til min analyse av variasjon i representasjonsformer innen emnet brøk i Multi 5-7. Dette vil en kunne lese i delkapittel 3.3 og 3.4. I delkapittel 3.5 viser jeg to eksempler på metodebruk, mens 3.6 omhandler valg av læreverk og trinn. Dette etterfølges av reliabilitet og validitet i delkapittel 3.7. Metodekapitlet avsluttes med at jeg skriver om styrker og svakheter med min forskning i delkapittel 3.8.

3.1 Ulike forskningsmetoder

En forskningsmetode er framgangsmåtene en benytter for å svare på de spørsmålene en har stilt (Kleven et al., 2014). Det er vanlig å skille mellom kvantitative og kvalitative forskningsmetoder. Begge metodene kan benyttes for å samle data, for å kunne analysere disse og trekke konklusjoner (Check & Schutt, 2012, s. 10).

Enkelt forklart kan en benytte kvantitative forskningsmetoder for å samle inn data, som en analyserer. Spørreundersøkelser og kategorisering passer til kvantitativ metode, og en kan håndtere store mengder data. Data må være kvantitative, det vil si tall eller data som kan telles og kategoriseres. Kvantitative forskningsmetoder er designet slik at forskeren kan forbli objektiv (Check & Schutt, 2012).

Kvalitative metoder passer til case studier, observasjon av grupper og elever. Metoden kjennetegnes av forskerens nærhet til det en forsker på (Kleven et al., 2014). Forskeren har mulighet til å tolke innsamlede data, samt å skape mening ut fra analyserte funn (Check & Schutt, 2012).

Forskere kombinerer gjerne kvantitativ og kvalitativ metode for å tilføre forskningen mer substans (Check og Schutt, 2012). Bruken av flere metoder fungerer som triangulering, og viser ulike perspektiver av det en forsker på. Jeg skriver mer om dette i delkapittel 3.8.

3.2 Dokumentanalyse

Innholdsanalyse er en samfunnsvitenskapelig metode for analyse av innhold i skriftlige eller muntlige tekster, samt bilder, videoer eller filmer. Innholdsanalyse kan være både kvantitativ og kvalitativ (Grønmo, 2023). Dokumentanalyse er analyse av skriftlige kilder som er overlevert fra en situasjon i fortida og som er av relevans for forskninga (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 87).

Innholdsanalyse kjennetegnes av at innholdet i dokumenter blir gjennomgått for å finne informasjon om det som skal undersøkes (Grønmo, 2004). Dokumenter kan være ulike typer data, som for eksempel bøker, aviser, magasiner, nettsider, lydopptak, bildeopptak eller brev (Grønmo, 2004).

Kvantitativ metode kan benyttes ved dokumentanalyse. Forskeren må holde seg objektiv, og tolkning av data inngår ikke som en del av analysen. Innholdet i dokument vurderes med referanse til et strukturert kodeskjema (Grønmo, 2004, s. 143).

Kvalitativ metode kan også brukes ved analyse av dokumenter. Forskeren vil ha muligheter til å tolke interessante funn. Dersom forskeren tolker brøkoppgaver, gir mening til innholdet i oppgavene og tolker sammenhenger mellom ulike representasjoner for det matematiske objektet brøk, er metoden kvalitativ. Forskeren etterstreber objektivitet. Dette blir vanskeligere ved kvalitativ metode sammenlignet med kvantitativ metode, da forskerens egne meninger risikerer å påvirke tolkningen. Det er essensielt å tolke på en så objektiv måte som mulig (Grønmo, 2004).

3.3 Analyseverktøy

I dette delkapittelet vil jeg beskrive de analyseverktøyene jeg har benyttet i min forskning. Jeg tatt utgangspunkt i et analyseverktøy for dokumentanalyse utviklet av Charalambous et al. (2007, 2010). Dette skriver jeg om i delkapittel 3.3.1. Da jeg fokuserer på representasjoner for brøk, har jeg tilpasset analyseverktøyet, slik at det er hensiktsmessig for systematisering av mine funn. Jeg kompletterer analysen ved å inkludere en tilpasset versjon av et rammeverk, designet for å analysere progresjon i begrepskunnskap. Jeg informerer om dette rammeverket i delkapittel 3.3.2. Tilpassing av analyseverktøy kommer i delkapittel 3.3.3.

3.3.1 Horisontal og vertikal analyse

Charalambous et al. (2007, 2010) designet et todimensjonalt analyseverktøy da de analyserte og sammenlignet lærebøker fra Kypros, Irland og Taiwan. De to dimensjonene er horisontal og vertikal analyse.

Den horisontale analysen retter søkelyset mot bakgrunnsinformasjon og struktur i læreverk. Tittel på lærebok, antall bøker og sider, navn på forfattere, forlag, utgivelsesår og oversikt over medfølgende materiell hører med til bakgrunnsinformasjon i den horisontale analysen. Delen som inneholder struktur, inkluderer antall leksjoner/timer og antall sider per leksjon, struktur på leksjoner, rekkefølge på emner og emner som dekkes.

Horisontal analyse av lærebok	
Bakgrunnsinformasjon	**Overordnet struktur**
Tittel	Antall leksjoner og antall sider per leksjon
Antall bøker	Struktur på leksjoner
Antall sider	Rekkefølge på emner
Navn på forfattere	Emner som dekkes
Forlag	
Utgivelsesår	
Medfølgende materiell	

Tabell 6: Horisontal analyse, etter Charalambous et al. (2007, 2010)

Den andre dimensjonen i analyseverktøyet er den vertikale analysen. Charalambous et al. (2007, 2010) undersøkte det matematiske innholdet i lærebøker og hvordan innholdet var presentert, blant annet med fokus på representasjoner.

<table>
<tr><th></th><th>Hva presenteres?</th><th>Hva kreves?</th></tr>
<tr><td>Matematisk innhold</td><td>Aspekter ved brøk
Måter å presentere innholdet på: definisjoner, regler, konvensjoner og representasjoner</td><td rowspan="3">Potensielle kognitive krav:
• Memorering
• Prosedyrer uten forbindelser
• Prosedyrer med forbindelser
• Gjøre matematikk

Forventninger:
• Kun svar
• Forklaringer
• Begrunnelser
• Evalueringer</td></tr>
<tr><td>Matematiske praksiser</td><td>Gjennomarbeidede eksempler
Modellerende tenkning</td></tr>
<tr><td>Holdninger</td><td>Syn på matematikk</td></tr>
</table>

Tabell 7: Vertikal analyse (Charalambous et al., 2007, s. 195)

3.3.2 Analyse av matematisk innhold ved vertikal analyse

To svenske forskere, Ahl og Helenius, har designet et rammeverk for å analysere progresjon i matematisk begrepskunnskap (Ahl & Helenius, 2021). De har forsket på to svenske lærebokserier for 3.-9. trinn innen emnet kvotient konstruksjoner. De har sett på representasjoner for kvotient konstruksjoner.

Forskerne gir representasjonene symboler. Ikoniske representasjoner får symbolet ♥, situasjonelle representasjoner blir symbolisert med ☺ og matematiske symboler er symbolisert med π. Dersom det meningsbærende i en oppgave er situasjonell, og et bilde illustrerer situasjonen har forskerne vist dette med ☺ →♥. I en oppgave der prosedyre er gitt uten forklaring hvorfor, bruker de symbolene π →. For å effektivt kunne analysere brøkoppgaver, benytter jeg symboler ved den første analysegjennomgangen. Dette skriver jeg mer om i delkapittel 3.3.3 og 3.5.

3.3.3 Utvikling av analyseverktøy

Den horisontale analysen har fokus på struktur i læreverk og bakgrunnsinformasjon, og jeg har ikke tilpasset denne dimensjonen. Jeg har brukt horisontal analyse som vist i tabell 6 som rammeverk i min forskning. Jeg vil presentere resultater av forskningen i kapittel 4. Som utgangspunkt for den vertikale analysen har jeg tilpasset rammeverket vist i tabell 7. Den er basert på rammeverk utarbeidet av Charalambous et al. (2007, s. 195).

	Hva presenteres?	Hva kreves?
Matematisk innhold	• Oppgaver sorteres etter representasjonsformer i oppgave: Fire hovedregistre • Aspekter ved brøk • Brøkmodeller • Metoder • Omdanning av representasjoner	Hva kreves av oppgaven: A. Behandling B. Konvertering
Matematiske praksiser	• Hvordan begrepet brøk forklart i begynnelsen av kapitler og delkapitler om brøk? • Hvilke representasjonsformer blir benyttet i forklaringer og utforskningsoppgaver i læreverket?	
Holdninger	Syn på matematikk	

Tabell 8: Tilpasset vertikal analyse

Mitt fokus vil være på hvordan brøk blir representert i oppgavene i læreverket Multi, og hvorvidt det er progresjon i bøkene for 5.til 7. trinn. Jeg kategoriserer matematiske forklaringer og oppgaver etter representasjonsform. Her benytter jeg inndeling som vist i tabell 10. Jeg bruker Duval sin inndeling av representasjoner i hovedregistre (Duval, 2006, s. 109-111). Fra rammeverket til Ahl og Helenius har jeg hentet inspirasjon til å bruke symboler for de fire hovedregistrene for representasjoner. Diskursive multifunksjonelle registre har symbolet ☺, mens ikke-diskursive multifunksjonelle registre symboliseres med ♥. Ved diskursive monofunksjonelle registre bruker jeg π som symbol. Selv om jeg på forhånd antar at få oppgaver og forklaringer vil inneholde ikke-diskursive monofunksjonelle registre, benytter jeg meg av registeret, og bruker symbolet ⊞. Dersom en oppgave eller forklaring inneholder flere hovedregistre, plasserer jeg den i flere kategorier.

Diskursive multifunksjonelle registre	**Ikke-diskursive multifunksjonelle registre**	**Diskursive monofunksjonelle registre**	**Ikke-diskursive monofunksjonelle registre**
Naturlig språk Skriftlig eller muntlig ☺	Ikoniske og ikke-ikoniske Illustrasjoner, tegninger, mønstre ♥	Symboler Skriftlig π	Grafer, diagrammer, tabeller ⊞

Tabell 9: Kategorisering etter representasjonsform

Hver forklaring og oppgave jeg analyserer, kategoriseres i forhold til hvilket aspekt ved brøk som er i fokus. Aspektene jeg har kategorisert etter er brøk som del av en helhet, brøk som forhold, brøk som operator, brøk som kvotient og brøk som tall.

Oppgavene kategoriseres også etter hvilken brøkmodell som er involvert i hver enkelt oppgave. Jeg benytter her tre kategorier; lengde, - areal- og mengdemodellen (Watanabe, 2002, s. 457). Da en del oppgaver ikke bruker noen av modellene, har jeg i tillegg en kategori som jeg kaller "ingen modell." For å ytterligere kunne beskrive hvordan brøk blir presentert i læreverkets oppgaver, undersøker jeg hvilken metode for representasjon av brøk som er benyttet, "delen-det hele metoden" eller "sammenligningsmetoden."

Hver forklaring og oppgave blir også kategorisert etter om elevene må foreta behandling eller konvertering, da dette forteller om elevene kan forholde seg til en representasjonsform eller blir utfordret til å se sammenhenger mellom flere representasjonsformer (Duval, 2006).
For å se på matematiske praksiser, vil jeg undersøke hvordan begrepet brøk forklart i begynnelsen av kapitler og delkapitler om brøk. Hvilke representasjonsformer som blir benyttet i forklaringer og utforskningsoppgaver vil også analyseres for å se etter mønster, variasjon og progresjon.

For å finne ut hva slags syn på matematikk læreverket gjenspeiler, vil jeg undersøke hva forfatterne av lærebøkene selv skriver om emnet. Dette finner jeg i Skolestudio eller i Læreres bok for hvert trinn. I tillegg vil jeg bruke resultatene av forskningen min til å undersøke om det er sammenheng mellom det forfatterne skriver og det som møter elevene i lærebøkene.
I tillegg til å plassere en oppgave etter representasjonsform, setter jeg opp hver oppgave opp nummerert etter hverandre. Jeg har med informasjon om hvilke representasjonsformer oppgaven presenterer for elevene, om elevene må foreta behandling eller konvertering, samt aspekt ved brøk.

For å systematisere resultater av min analyse, har jeg underveis sett behovet for å utvikle en modell som er helt tilpasset min forskning. Modellen under viser min kategorisering av oppgavene i læreverket, slik jeg utfører den vertikale analysen av oppgaver.

Modell for vertikal analyse	
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre
	Diskursive monofunksjonelle registre
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre
Omdanning av representasjoner	Behandling
	Konvertering
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet
	Brøk som forhold
	Brøk som operator
	Brøk som kvotient
	Brøk som måleenhet
	Brøk som tall
Brøkmodell	Lengdemodell
	Arealmodell
	Mengdemodell
	Ingen bruk av modell
Metode	Delen-det-hele-metoden
	Sammenligningsmetoden

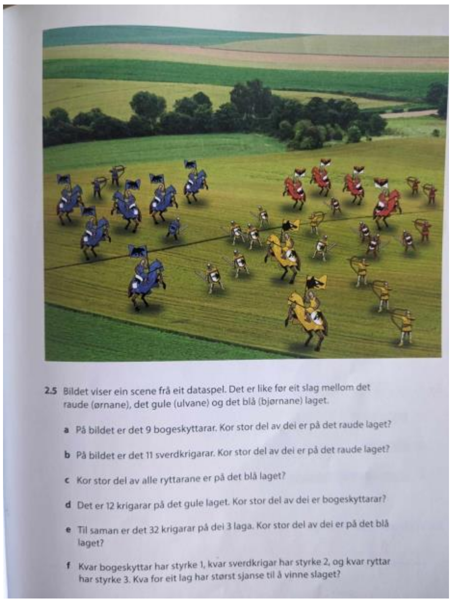
Tabell 10: Modell for vertikal analyse

3.4 Beskrivelse av modell for vertikal analyse

I dette delkapittelet beskriver jeg kategoriseringen av oppgaver, og gir eksempler fra læreverket. Horisontal analyse utfører jeg kun en gang for hver lærebok, mens jeg utfører vertikal analyse for hver enkelt analyserte oppgave. Jeg analyserer alle oppgaver som er plassert før kapittelprøve, som forfatterne kaller "Kan du dette?" i læreverket. Jeg har således ikke analysert "Kan du dette?" eller repetisjonsoppgavene som er plassert til slutt i hvert kapittel. Jeg har valgt å gjøre det slik, på grunn av at "Kan du dette?" er ment å reflektere innholdet i hvert kapittel, som oppsummeringsoppgaver. I Lærerens bok står det at "Kan du dette?" oppsummerer det viktigste lærestoffet elevene har arbeidet med i temaet (Alseth et al., 2020). Øvesidene, som er repetisjon, presenterer ikke nytt fagstoff, men en repetisjon av oppgaver. I Lærerens bok står det "Oppgavene er laget for at både lærere og elevene selv skal få oversikt over elevene sin kompetanse innen læringsmålene for gjennomgått tema" (Alseth et al., 2020, s. 3). Den horisontale analysen viser bakgrunn og struktur. Den vertikale analysen gir meg data som jeg presenterer i kapittelet om resultater.

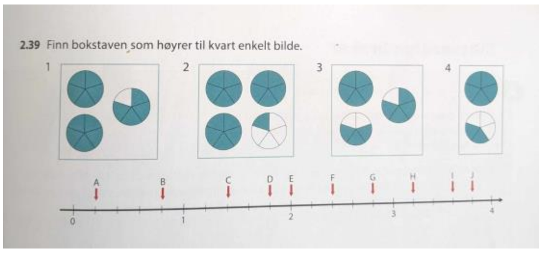
3.4.1 Representasjonsformer

Oppgavene kategoriseres i fire hovedregistre (Duval, 2006), der oppgavene kan inneholde flere registre. Diskursive multifunksjonelle registre inneholder naturlig språk, og her inkluderer jeg oppgaver som krever lesing og tolkning av tekst eller skriftlige eller muntlige forklaringer av elevene. Eksempelet under viser en oppgave med mye tekst.



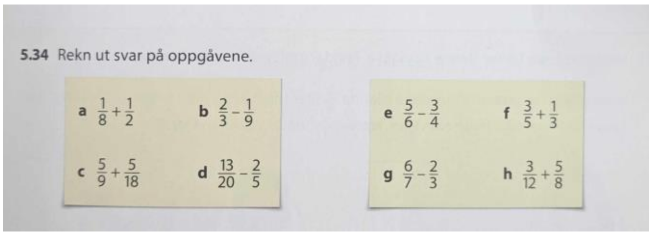
Figur 11: Eksempel på bruk av naturlig språk (Multi 5 a, s. 47).

Ikke-diskursive multifunksjonelle registre inneholder illustrasjoner, tegninger eller mønstre (Duval, 2006). Jeg inkluderer også bilder som brukes for å illustrere i dette registeret.



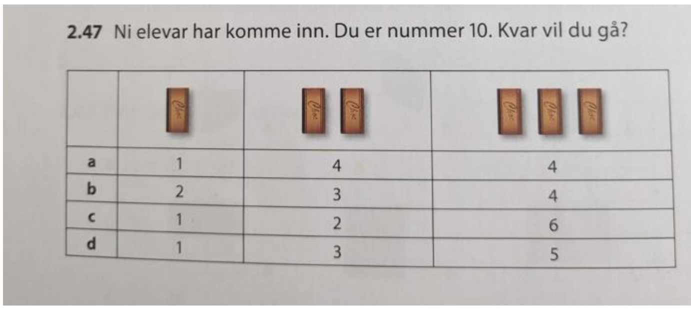
Figur 12: Eksempel på bruk av illustrasjoner (Multi 5 a, s. 57).

Diskursive monofunksjonelle registre inneholder matematiske symboler (Duval, 2006). I dette registeret plasserer jeg oppgaver der elevene enten presenteres for matematiske symboler, eller må uttrykke svar med matematiske symboler.



Figur 13: Eksempel på bruk av matematiske symboler (Multi 6 b, s. 17).

Ikke-diskursive monofunksjonelle registre inkluderer oppgaver som inneholder grafer, tabeller eller diagrammer (Duval, 2006). Det kan være at oppgavene viser disse, eller at elevene selv må produsere dem. Oppgaven under viser en oppgave, der opplysninger er satt i en tabell, og presenteres for elevene.



2.47 Ni elevar har komme inn. Du er nummer 10. Kvar vil du gå?

a	1	4	4
b	2	3	4
c	1	2	6
d	1	3	5

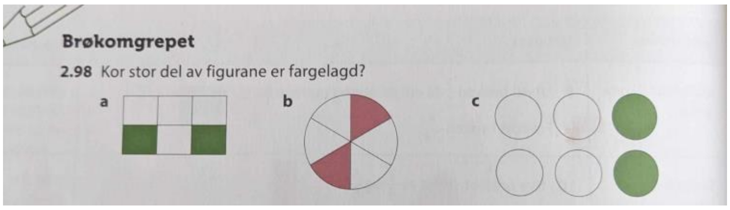
Figur 14: Eksempel på bruk av tabell, graf eller diagram (Multi 5 a, s. 60)

3.4.2 Omdanning av representasjoner

Jeg benytter her to typer omdanning; behandling og konvertering (Duval, 2006, s. 111). Dersom omdanning foregår innen samme register, vil jeg kategorisere som behandling. Omdanning ved å skifte register, klassifiserer jeg som konvertering. Typiske eksempler på behandling, er oppgaver der elevene må utføre utregninger med mellomregninger for å komme fram til et svar. Dersom elevene må ta hensyn til flere registre for å løse en oppgave, definerer jeg omdanningen som konvertering.

3.4.3 Brøkens ulike aspekter

Oppgavene med brøk som del av en helhet inneholder ofte figurer eller illustrasjoner som er delt i mindre like deler (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Elevene skal gjerne finne ut "Hvor stor del ...?" I eksemplene under viser 2.98 a) og b) figurer der 2/6 av figurene er fargelagte. 2.98 c) viser at 2 av 6 figurer er fargelagte, noe som utgjør 2/6 av det hele.

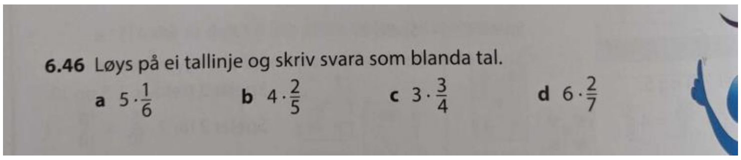


Figur 15: Eksempel på bruk av brøk som del av en helhet (Multi 5 a, s. 76)

Aspektet brøk som forhold benyttes ofte ved sammenligninger av brøker, eller ved brøker som er likeverdige (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dette har jeg beskrevet i tabell 4 i delkapittel 2.5.1. Her må elevene gjerne utvide eller forkorte brøker, som vist i eksempelet under.

Figur 16: Eksempel på bruk av aspektet brøk som forhold (Multi 5 b, s. 33)

Brøk som operator er et aspekt ved brøk jeg finner oftest i kapitler eller delkapitler som tar for seg multiplikasjon av brøk. Under viser jeg en oppgave som eksempel på akkurat dette.

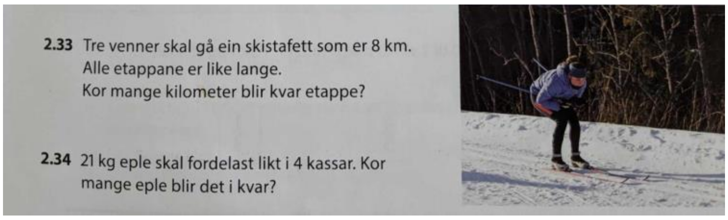


6.46 Løys på ei tallinje og skriv svara som blanda tal.

a $5 \cdot \frac{1}{6}$ **b** $4 \cdot \frac{2}{5}$ **c** $3 \cdot \frac{3}{4}$ **d** $6 \cdot \frac{2}{7}$

Figur 17: Eksempel på bruk av brøk som operator (Multi 5 b, s. 44)

Oppgaver som har med aspektet brøk som kvotient, inneholder ofte en mengde som skal divideres i flere like delmengder (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Oppgaven under viser en helmengde på 8 km som skal divideres på 3, slik av hver delmengde tilsvarer 1/3 av helmengden.

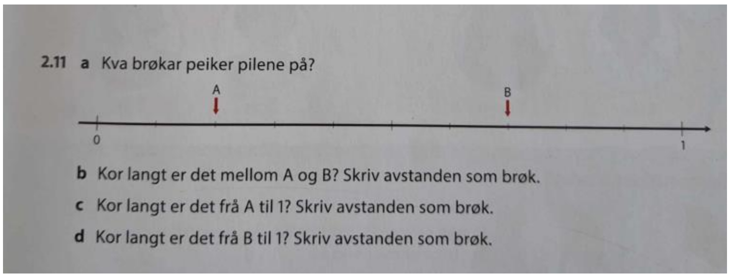


2.33 Tre venner skal gå ein skistafett som er 8 km. Alle etappane er like lange. Kor mange kilometer blir kvar etappe?

2.34 21 kg eple skal fordelast likt i 4 kassar. Kor mange eple blir det i kvar?

Figur 18: Eksempel på bruk av brøk som kvotient (Multi 5 a, s. 55)

Aspektet brøk som måleenhet vises gjerne i oppgaver der brøk blir brukt for å beskrive avstand (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Oppgave 2.11 b, c og d i eksempelet under viser dette.



2.11 **a** Kva brøkar peiker pilene på?

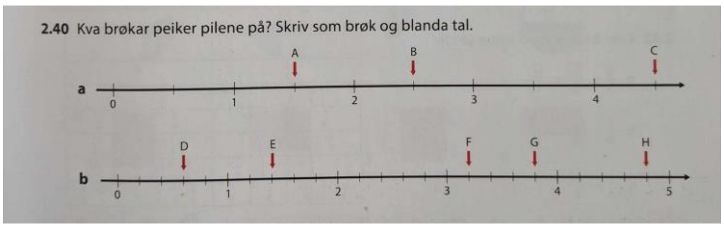
b Kor langt er det mellom A og B? Skriv avstanden som brøk.

c Kor langt er det frå A til 1? Skriv avstanden som brøk.

d Kor langt er det frå B til 1? Skriv avstanden som brøk.

Figur 19: Eksempel på brøk som måleenhet (Multi 5 a, s. 49)

Det sjette aspektet er brøk som tall, og dette finner jeg igjen i oppgaver som fokuserer på brøk som en tallstørrelse. Et eksempel er oppgaver der en må se sammenheng mellom brøk, desimaltall og prosent. I oppgaven under blir elevene bedt om å skrive ned brøkene pilene peker på.

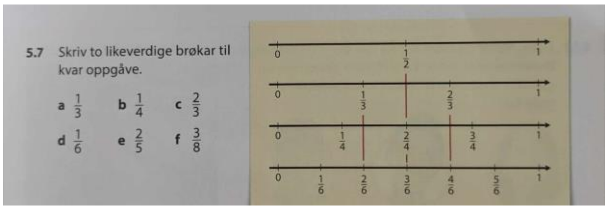


2.40 Kva brøkar peiker pilene på? Skriv som brøk og blanda tal.

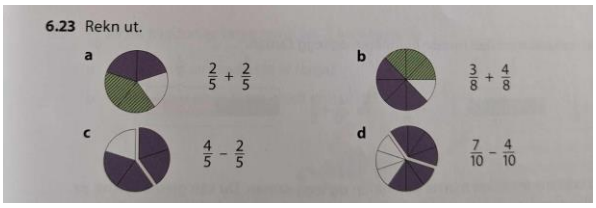
Figur 20: Eksempel på bruk av brøk som tallstørrelse (Multi 5 a, s. 57)

3.4.4 Forskjellige brøkmodeller

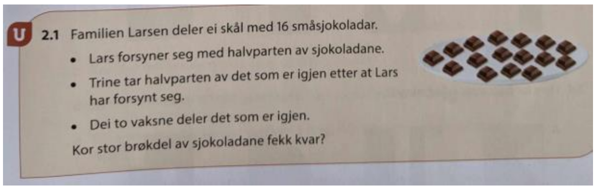
I min modell for vertikal analyse har jeg tre kategorier for brøkmodeller (Watanabe, 2002). I tillegg har jeg oppgaver uten modell som egen kategori. Under viser jeg eksempler på kategoriene.



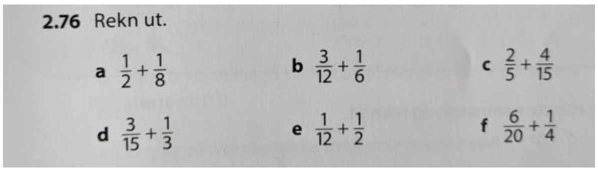
Figur 21: Eksempel på bruk av lengdemodellen (Multi 6 b, s. 7)



Figur 22: Eksempel på bruk av arealmodellen (Multi 5 b, s. 37)



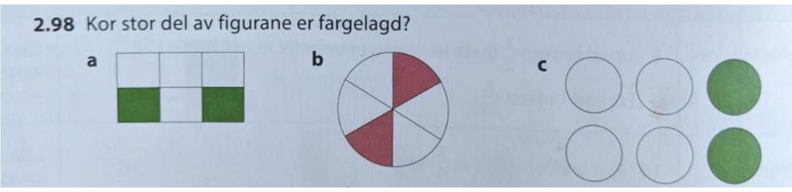
Figur 23: Eksempel på bruk av mengdemodellen (Multi 5 a, s. 45)



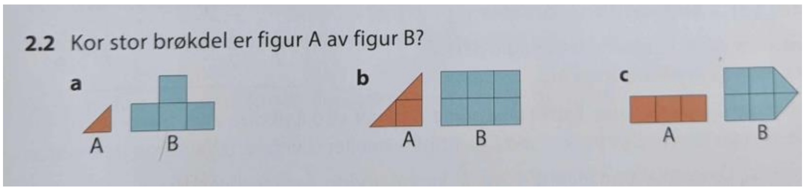
Figur 24: Eksempel på oppgave uten bruk av modell (Multi 5 a, s. 69)

3.4.5 Metodebruk ved brøkmodeller

Når jeg analyserer oppgavene ut fra bruk av metode, forsker jeg kun på de oppgavene som benytter lengde-, areal eller mengdemodellen. Jeg skiller mellom to ulike metoder, nemlig sammenligningsmetoden og delen-det-hele-metoden. (Watanabe, 2002).



Figur 25: Eksempel på bruk av delen-det-hele-metoden (Multi 7 a, s. 45)

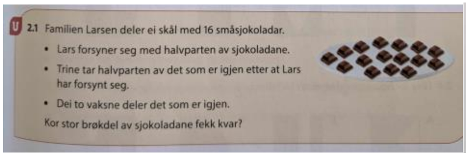


Figur 26: Eksempel på sammenligningsmetoden

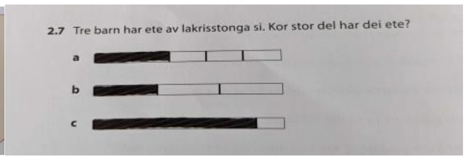
3.5 Konkrete eksempler på metodebruk

Dette delkapittelet inneholder eksempler på oppgaver, der jeg viser hvorfor den enkelte oppgaven plasseres i aktuell kategori. Jeg teller hver deloppgave, slik at dersom en oppgave består av a), b), c) og d), så teller jeg det som fire oppgaver. Jeg analyserer hver oppgave for seg i flere omganger.

I dette delkapitlet vil jeg vise min vertikale analyse av to oppgaver. Jeg viser en utforskningsoppgave og en øveoppgave. Utforskningsoppgavene er oftest plassert tidlig i kapitler og delkapitler, og før forklaringer og øveoppgaver. Det er presisert at lærer bør hjelpe elevene i å forstå hva som skal utforskes, men ikke gi elevene løsningsmetoder. I øveoppgavene får elevene arbeide med oppgaver som løfter fram det matematiske aspektet i undersøkelsesoppgaver.



Figur 27: Utforskningssoppgave



Figur 28: Øveoppgave

I min vertikale analyse ser jeg først på det matematiske innholdet i mitt utvalg av brøkoppgaver. Oppgave 2.1 inneholder naturlig språk og illustrasjon. Svaret vil være en brøk, så matematiske symboler vil være det elevene skriver i kladdeboka si og uttrykker muntlig når en snakker om oppgaven. Dette noterer jeg slik:

2.1: Konvertering ☺ og ❤ $\mapsto \pi$ Aspekt: 1 Brøk som en del av en helhet

Oppgave 2.1 har med representasjoner fra tre hovedregistre, derav tre symboler. ☺ og ❤ $\mapsto$ π viser at oppgaven presenterer de to registrene til venstre for pila. Registeret til høyre for pila står for prosessen eller sluttproduktet oppgavene legger opp til. Her bruker jeg pila ulikt Ahl og Helenius. Jeg skiller ikke mellom begrep og prosedyre, slik de gjør i sin analyse. Da oppgaven har med flere hovedregistre, må elevene foreta konvertering. Spørsmålet er "Kor stor brøkdel av sjokoladane fekk kvar?" Siden svaret vil være en brøk, altså et matematisk symbol, slik at *brøk som en del av en helhet* vil være aspektet ved brøk i oppgaven. Jeg plasserer oppgave 2.1 inn i diskursive multifunksjonelle registre, ikke-diskursive multifunksjonelle registre og diskursive monofunksjonelle registre i en tabell. I oppgave 2.7 a) må elevene tolke en illustrasjon, og svare som brøk. Jeg definerer dette som konvertering fra ikke-diskursivt multifunksjonelt register til diskursivt monofunksjonelt register. Aspektet er også i denne oppgaven brøk som en del av en helhet. Min notasjon blir slik:

2.7 a Konvertering ❤ $\mapsto \pi$ Aspekt: 1 Brøk som en del av en helhet

Jeg plasserer oppgavene i tabell etter hvilken brøkmodell som er benyttet. I oppgave 2.1 er mengdemodell brukt, mens jeg definerer oppgave 2.7 som lengdemodell, da figuren illustrerer lengde på lakrisstenger. Til slutt vurderer jeg om metode er *sammenligningsmetoden* eller *delen-det hele metoden*. Her er sammenligningsmetoden benyttet.

3.6 Mitt valg av læreverk

Læreverket jeg har valgt å utøve min forskning på, er Multi fra forlaget Gyldendal, som er landets største innen skole- og fagbøker (Næraal, A., 2024). Forlagets matematikkverk, Multi, er nå utgitt i 3.utgave i papirformat. Multi er et læreverk som har vært lenge i det norske markedet, og 3.utgave er tilpasset gjeldende læreplanverk. Min intensjon er å belyse variasjon og progresjon i representasjonsformer av brøk i et utprøvd læreverk mange skoleelever faktisk bruker. Jeg mener da at Multi innfrir kravene.

Jeg har i drøyt 20 år arbeidet på mellomtrinnet, og undervist i matematikk i alle disse årene. Derfor har jeg stor egeninteresse i å forske på akkurat 5., 6. og 7. trinn. I bakhodet har jeg en formening om at dagens utgave av Multi 5-7 virker mer varierte i forhold til hva elevene møter av representasjoner sammenlignet med både 1. og 2.utgavene. Selv om jeg ikke skal forske på akkurat dette, kan jeg få mer innsikt i hvordan tilstanden er nå i forhold til tidligere utgaver av læreverket.

I læreplanen er det mange kompetansemål knyttet til brøk som er lagt til mellomtrinnet. Etter 5. trinn er det seks ulike kompetansemål som dreier seg om brøk. På 6. trinn er det ett kompetansemål knyttet opp mot brøk, og på 7. trinn to kompetansemål relatert direkte til brøk. Det er kun ett kompetansetrinn knyttet direkte opp mot brøk som er lagt til 8.-10. trinn, og ingen som er lagt til småskoletrinnet (Utdanningsdirektoratet, 2020). Siden det er akkurat på mellomtrinnet læreplanen legger opp til at elevene skal eksponeres mye for brøk, ønsker jeg å forske på hvordan et læreverk for disse trinnene framstiller brøk.

3.7 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet refererer til om benyttet forskningsmetode er pålitelig, slik at resultatene av forskningen er troverdige (Check & Schutt, 2012). Her må vurderer jeg min valgte modell for analyse. Er den nøyaktig og stabil? Min metode for horisontal analyse ble designet for over 15 år siden, og er tidligere brukt i analyse av lærebøker i flere land (Charalambous et al., 2007, 2010). Det underbygger at den delen av analysen både stabil og nøyaktig slik at bakgrunnsinformasjonen og strukturen i læreverket er pålitelig. Hva som blir etterspurt i den horisontale analysen er objektiv informasjon, som tittel, antall bøker, antall sider, navn på forfattere og forlag, utgivelsesår og medfølgende materiell. I tillegg skal forsker finne struktur i lærebok. Dette er informasjon som er mulig å finne uten å måtte være subjektiv. Ved å beholde stor grad av objektivitet her, mener jeg modellen for horisontal analyse har stor grad av pålitelighet.

Min modell for vertikal analyse bygger på kjent, verifisert forskning som jeg har skrevet om i teoridelen og metodedelen. Det at metode er gjort kjent, og er transparent, styrker reliabiliteten til forskningen (Check & Schutt, 2012). Kategoriseringen av oppgaver kan utføres på samme måte over tid, og av ulike individer. Det innebærer også at min modell for vertikal analyse kan gjentas av andre forskere, som en retest av samme læreverk, eventuelt andre læreverk, for å sammenligne resultater. For å oppnå nøyaktige resultater har jeg utviklet en modell for vertikal analyse som tar hensyn til ulike sider ved brøk. Jeg vurderer register ut fra representasjonsform, omdanning av representasjon, brøkens aspekt, brøkmodell og metode for hver enkelt oppgave jeg analyserer. Min kategorisering av oppgaver er utviklet av meg selv, og forklares i delkapittel 3.3.3 og 3.4. Kategoriene bygger på tilgjengelig forskning, som en kan gjøre seg kjent med for å forstå bakgrunnen for min forskning og resultatene av den. Ved å beskrive analysemetode, blir den transparent, noe som også øker reliabiliteten (Check & Schutt, 2012).

Jevnlige veiledninger underveis i forskningsprosessen øker reliabiliteten, da jeg får uavhengige vurderinger i situasjoner der min tolkning og eventuelle subjektivitet kan påvirke kategorisering, analyse og dermed resultatene av forskningen.

Validitet viser til hvorvidt forskningen måler det den har til hensikt å måle (Check & Schutt, 2012). Jeg forsker på hvordan læreverket Multi fra Gyldendal varierer representasjonsformer innen emnet brøk på 5. til 7. trinn, og på hvilken måte læreverket legger opp til en progresjon i representasjoner for brøk i lærebøkene for 5. til 7. trinn. Hvis metoden fører til at jeg får svar på disse spørsmålene, så har forskningen høy grad av validitet, og resultatene er gyldige (Check & Schutt, 2012).

Indre validitet oppnås når analysemetode dekker hele meningen med det matematiske begrepet brøk (Check & Schutt, 2012, s. 82). Jeg har definert begrepet brøk, teori for alle elementene metoden består av er forklart i teori- og metodedelen og modell for analyse dekker i høy grad variasjon i representasjonsformer for brøk. Likevel må jeg foreta vurderinger hver gang en oppgave skal kategoriseres, slik at en analyse til dels er avhengig av forskeren. Da forskningen må gjennomføres av mennesker, vil jeg vurdere den indre validiteten som høg på grunn av klare rammer for kategorisering og analyse.

Validitet handler også om forskningen kan generaliseres (Check & Schutt, 2012, s. 38). Jeg forsker kun på et læreverk, slik at resultatene kun er gjeldene for Multi 5-7 fra forlaget Gyldendal. Metoden som er benyttet kan generaliseres, da andre forskere kan gjenta forskningen, enten på samme læreverk, eller på andre læreverk.

3.8 Styrker og svakheter ved forskningen min

Forskningen har stor grad av reliabilitet og validitet, noe jeg skriver om i delkapittel 3.7. Det er en styrke ved forskningen. Det er viktig at dette blir ivaretatt i så stor grad som mulig. Når dette er ivaretatt, så er det den viktigste styrken ved forskningen. For meg, som forsker alene, er det viktig å få andre sitt blikk på forskningen.

Jeg har lang erfaring med læreverket Multi fra Gyldendal, og har benyttet både 1. og 2.utgaver av læreverket tidligere. Siden 3.utgave kom på markedet, har jeg brukt det i min undervisning i matematikk på mellomtrinnet. Det at jeg har kjennskap til læreverket, gjør at jeg har gode forutsetninger for å stille relevante forskningsspørsmål. Likevel har jeg ingen klar formening om hvilke resultater forskningen vil gi, noe som er viktig. Forutinntatthet kan føre til at en ubevisst søker spesifikke svar i analysen, og det må en søke å unngå.

Tidsperspektivet har påvirkning. Da jeg skal analysere en mengde oppgaver, er det viktig for meg å ha god tid til gjennomføring. Dette for å streve etter objektivitet, ha tid til å analysere oppgaver på nytt, se over, kategorisere korrekt og trekke riktige slutninger når analysen er ferdigstilt. Jeg har brukt tid på teori, som bakgrunn for å kunne tilpasse en metode som kan gi meg svar på det jeg faktisk lurer på og forsker på.

Jeg undersøker mange oppgaver i min forskning. Dette fører til stort datamateriale, som gjør det mulig å finne eventuelle tendenser og trender i oppgavenes oppbygning. Det fører også til at eventuelle feiltolkninger fra min sine får små konsekvenser for resultatene, da dette utgjør en liten andel av det totale antall analyserte oppgaver.

Jevnlig veiledning er viktig for meg i arbeidet med denne masteroppgaven. Det er en styrke å få sett på min forskning og skriveprosessen min med både objektivitet og kritisk blikk, noe min veileder har gjort med jevne mellomrom. På masterseminar fikk medstudenter og veiledere høre utdrag fra hva jeg har arbeidet med i dette prosjektet, og jeg fikk tilbakemeldinger som jeg kunne ta med meg videre i arbeidet.

Forskningen min er både kvantitativ og kvalitativ. At den er kvalitativ, gir rom for subjektivitet, noe en i størst mulig grad vil unngå for å oppnå høy grad av reliabilitet og validitet. Det faktumet at jeg utfører forskningen alene er således en svakhet. En kan samtidig vri det til noe positivt ved å vektlegge det at jeg selv må stå i arbeidsprosessen både i perioder med god flyt, og i perioder med mer motgang. Jeg får nærhet til både selve prosessen, men også produktet.

4 Resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere resultatene av forskningen min. Delkapittel 4.1 viser resultater fra den horisontale analysen. I delkapittel 4.2 skriver jeg om den vertikale analysen. I Multi 5 a har jeg analysert to kapitler, i Multi 5 b, Multi 6 b og Multi 7a ett kapittel.

4.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen har jeg delt i to deler, en del med bakgrunnsinformasjon og en del med overordnet struktur. Bakgrunnsinformasjonen for de fire analyserte bøkene er i tabell 12, og overordnet struktur kan en lese i tabell 13.

Horisontal analyse Bakgrunnsinformasjon			
Multi 5 A	Multi 5 B	Multi 6 B	Multi 7 A
Tittel: Multi 5 A elevbok, 3.utgave **Antall bøker:** Det er totalt 14 bøker for barnetrinnet. For trinnene 1. til og med 7.klasse finnes det ei A-bok og ei B-bok. **Antall sider:** 135 **Navn på forfattere:** Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås, Mona Røsseland og Gunnar Nordberg **Forlag:** Gyldendal **Utgivelsesår:** 2021 **Medfølgende materiell:** Elevbok A og B Parallellbok A og B Lærerens bok A og B Multi Smart Øving Smart Vurdering Multi fagrom	**Tittel:** Multi 5 B elevbok, 3.utgave **Antall bøker:** Det er totalt 14 bøker for barnetrinnet. For trinnene 1. til og med 7.klasse finnes det ei A-bok og ei B-bok. **Antall sider:** 135 **Navn på forfattere:** Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås, Mona Røsseland og Gunnar Nordberg **Forlag:** Gyldendal **Utgivelsesår:** 2021 **Medfølgende materiell:** Elevbok A og B Parallellbok A og B Lærerens bok A og B Multi Smart Øving Smart Vurdering Multi fagrom	**Tittel:** Multi g B elevbok, 3.utgave **Antall bøker:** Det er totalt 14 bøker for barnetrinnet. For trinnene 1. til og med 7.klasse finnes det ei A-bok og ei B-bok. **Antall sider:** 136 **Navn på forfattere:** Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås, Mona Røsseland og Gunnar Nordberg **Forlag:** Gyldendal **Utgivelsesår:** 2021 **Medfølgende materiell:** Elevbok A og B Parallellbok A og B Lærerens bok A og B Multi Smart Øving Smart Vurdering Multi fagrom	**Tittel:** Multi 7 A elevbok, 3.utgave **Antall bøker:** Det er totalt 14 bøker for barnetrinnet. For trinnene 1. til og med 7.klasse finnes det ei A-bok og ei B-bok. **Antall sider:** 144 **Navn på forfattere:** Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås, Mona Røsseland og Gunnar Nordberg **Forlag:** Gyldendal **Utgivelsesår:** 2022 **Medfølgende materiell:** Elevbok A og B Parallellbok A og B Lærerens bok A og B Multi Smart Øving Smart Vurdering Multi fagrom

Tabell 12: Horisontal analyse; bakgrunnsinformasjon

Struktur	Antall leksjoner og tidsbruk per leksjon:	Struktur på leksjoner:	Rekkefølge på emner:	Emner som dekkes:
Multi 5 A	15 leksjoner. Øktene har varighet fra 25 til 75 minutter. Sideantall per leksjon varierer.	Felles for alle analyserte kapitler: Leksjonene inneholder utforskningsoppgaver, forklaring av sentralt fagstoff, aktiviteter, spill, og øveoppgaver.	1. Tall og regning 2. Brøk 3. Sannsynlighet 4. Desimaltall, brøk og prosent	1.De fire regneartene 2. Brøk 3. Sannsynlighet 4 Desimaltall, brøk og prosent
Multi 5 B	15 leksjoner. Øktene har varighet fra 30 til 50 minutter. Sideantall per leksjon varierer.		5. Tid 6. Regning med brøk 7. Algebra og programmering 8. Regning	5. Analog og digital klokke, regning med tid, tekstoppgaver. 6. Regneartene med brøk 7. Algebra og programmering, 8. Regneark, multiplikasjon og divisjon i praktiske situasjoner, tid, overslag og prosentregning
Multi 6 B	12 leksjoner. Øktene har varighet fra 30 til 95 minutter. Sideantall per leksjon varierer.		5. Brøk 6. Mønster og koordinatsystem 7. Algebra og programmering, 8. Tall og regning	5. Brøkbegrepet, addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med brøk. 6. kongruens og koordinatsystemet. 7. Figurtall, tallfølger, formler og programmering. 8. Titallsystemet, desimaltall, regneark og praktisk regning.
Multi 7A	15 leksjoner. Øktene har varighet fra 5 til 75 minutter. Sideantall per leksjon varierer.		1.Tall og regning 2. Brøk og desimaltall 3. Statistikk 4. Prosent.	1.De fire regneartene. 2. Brøk og desimaltall, 3. Statistikk, inkludert statistiske undersøkelser, diagrammer og sentralmål. 4. Prosent, sammenheng mellom brøk, desimaltall og prosent.

Tabell 13: Horisontal analyse; Overordnet struktur i analyserte lærebøker

I Multi 5 A analyserte jeg oppgaver fra kapittel 2, som omhandler brøk. Kapitlet starter på side 45 og ender på side 82. Jeg analyserer her 97 nummererte oppgaver, fra side 45 til side 73. Estimert lengde på leksjoner henter jeg i Skolestudio, der den digitale utgaven av læreverket befinner seg. Dette gjelder bøkene for både 5., 6. og 7. trinn.

I Multi 5 B undersøker jeg regning med brøk fra kapittel 6. Kapittelstart er på side 29, mens side 66 er kapittelet sin siste side.

For 6. trinn har Gyldendal plassert brøk i Multi 6 B, slik at jeg analyserer oppgaver fra dette kapittelet. Kapittelet starter på side 5 og slutter på side 36. Den lengste økta i kapittel om brøk er på 95 minutter, noe som er lengere enn 5. trinn bøkene til Multi. Tidsaspektet er anslått i Multi fagrom, der elevene kan gjøre oppgavene digitalt.

På 7. trinn er kapittel 2 i Multi 7 A det kapittelet som omhandler brøk og desimaltall. Kapittelet begynner på side 45, og avsluttes på side 82. Øktene er estimert til varighet mellom 5 og 75 minutter.

For hvert trinn har Gyldendal to bøker, elevbok A og B. I hver av bøkene presenteres fire temaer, slik at en i løpet av et skoleår arbeider med totalt åtte temaer. Som alternativ til elevbok A og B har Gyldendal også Parallellbok A og B fra 4. trinn til og med 7. trinn. Parallellbok A og B er engangsbøker, slik at elevene ikke trenger å bruke egne kladdebøker, men i stedet skrive i Parallellboka. Parallellbøkene følger elevbøkene side for side. Innholdet er tydelig visualisert for elevene, og i større grad blir lærestoffet forklart grundig. Enkelte oppgaver fra elevbøkene er forandret eller tatt vekk.

Lærerens bok A og B henvender seg til lærere som benytter læreverket Multi i undervisningen. Her står læreplanens mål fordelt på de ulike temaene i tilhørende elevbok. Forfatterne har laget sin fortolkning av mål for opplæringen, og lister disse opp knyttet til kapitlene i læreboka. I Lærerens bok kan en for hvert tema finne forklaringer, presiseringer, tips til forenklinger og utfordringer, illustrasjoner og oversikt over utstyr en trenger i undervisning. Det er også bilder av alle sidene i tilhørende elevbok med forslag til hvordan en kan gjennomføre undervisningen.

I Skolestudio har Gyldendal samlet sine digitale læreverk. Her kan en finne Multi fagrom, Multi Smart Øving og Multi Smart Vurdering. Multi fagrom inneholder digitale versjoner av elevbøkene og lærerveiledning. Her presenterer Gyldendal forslag til årsplan med tilhørende læringsmål. Lærere får veiledning i hvordan en kan benytte fagrommet. I fagrommet finner en også kapittelprøver med fasiter. Fagrommet inneholder de samme oppgavene som papirutgavene av elevbøkene, men i tillegg har en tilgang på kopiark, nettoppgaver og digitale arbeidsrom med konkreter.

Multi Smart Øving er kun digital. Elevene møter her en strøm av oppgaver som er adaptive, det vil si at elevene får oppgaver tilpasset sitt faglige nivå. Dersom de svarer korrekt på mange oppgaver på rad, får de mer utfordrende oppgaver eller blir sendt videre til neste delkapittel. Elever som gjør mye feil, blir gitt oppgaver som skal tette faglige hull. Lærer kan følge med på progresjonen til elevene, og flytte de mellom delkapitler Alseth et al., 2020).

Multi Smart Vurdering består av prøvemoduler for elevene. Lærer har tilgang til en oppfølgingsmodul. For 1. trinn finnes det en årsprøve, mens 2.-7. trinn har prøver for hvert halvår. Halvårsprøve er ment å gjennomføres i januar eller februar, og helårsprøvene i mai-juni. Elevene har tilgang til lyd ved gjennomføring av prøvene. Prøvene rettes automatisk, og som lærer får en tilgang på oversikt over klassen sine resultater med en gang elevene har levert prøve.

For å kunne anslå tidsbruk for leksjonene, har jeg benyttet Multi fagrom. Der har forfatterne selv anslått tidsbruk for hver leksjon. Gyldendal skriver i "Til lærer 5. trinn" i Multi fagrom at en ikke bør følge tidsangivelsene for rigid, da en må tilpasse tidsbruk til elevene en til enhver tid underviser.

4.2 Vertikal analyse

I vertikal analyse av brøkoppgaver, redegjør jeg for resultatene i tabeller, og understreker de viktigste funnene med eksempler. Tabell 11 viser modell for vertikal analyse. Jeg har analysert de de fire bøkene hver for seg, og sammenstilt resultatene for trinn. Syn på matematikk har jeg analysert med hensyn til bøkene sett under ett. Til slutt har jeg sammenlignet resultatene, og vurdert om det er progresjon i bruk av representasjoner av brøk.

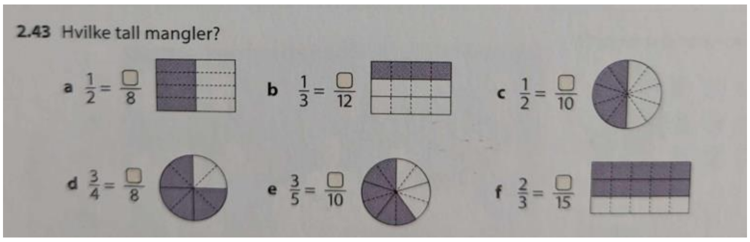
4.2.1 Vertikal analyse av Multi 5 A

I Multi 5 A har jeg analysert to kapitler. Kapittel 2 omhandler brøk, og delemnene brøkbegrepet, brøk større enn 1, likeverdige brøker og addisjon og subtraksjon av brøk. Kapittel 4 inkluderer brøk, desimaltall og prosent. Jeg har analysert 243 oppgaver fra kapittel 2 og 37 oppgaver fra kapittel 4. Tabell 14 viser resultatene av de totalt 280 analyserte oppgavene fra kapittel 2 og 4 ved bruk av analyseverktøyet, som er beskrevet i delkapittel 3.4. Jeg har analysert oppgavene med hensyn til representasjonsform, omdanning av representasjon, aspektet til brøken, hvilken brøk modell som brukes og metode. Da det i 112 oppgaver er benyttet brøkmodell, har jeg analysert disse med hensyn til metodebruk. Tabell 14 viser resultatene fra den vertikale analysen av kapitlene samlet sett.

Vertikal analyse av Multi 5 A, kapittel 2 og 4		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	81	28,9 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	95	33,9 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	162	57,9 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	1	0,4 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	153	54,6 %
	Konvertering	127	45,4 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	22	7,9 %
	Brøk som forhold	147	52,5 %
	Brøk som operator	13	4,6 %
	Brøk som kvotient	14	5,0 %
	Brøk som måleenhet	14	5,0 %
	Brøk som tall	135	48,2 %
Brøkmodell	Lengdemodell	29	10,4 %
	Arealmodell	68	24,3 %
	Mengdemodell	15	5,4 %
	Ingen bruk av modell	168	60,0 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	108	96,4 %
	Sammenligningsmetoden	4	3,6 %

Tabell 14: Vertikal analyse av kapittel 2 og 4 i Multi 5 A

Da jeg analyserte registre, så jeg på hva læreverket presenterte for elevene. Av tabellen over kan vi se at diskursive monofunksjonelle registre er funnet i 162 oppgaver, som tilsvarer 57,9 % av de 280 analyserte oppgavene i Multi 5 A. Under viser jeg et eksempel på oppgaver som inkluderer diskursivt monofunksjonelt register.



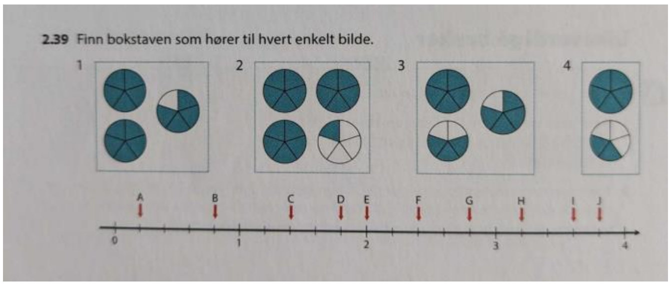
Figur 29: Eksempel på oppgave med diskursive monofunksjonelle register (Multi 5 A, s. 59)

267 av 280 oppgaver krever at elevene produserer matematiske symboler som svar. 27 oppgaver krever skriftlige forklaringer og 12 oppgaver krever at elevene illustrerer visuelt. Det er altså sterk overvekt av oppgaver der elevene skal skrive brøk som svar. 27 oppgaver fordrer at elevene skal illustrere brøk visuelt og 12 ved oppgaver blir elevene bedt om å forklare med naturlig språk.

Det neste jeg har undersøkt er overganger mellom ulike representasjoner. Dette kan foregå på to måter. Overganger innenfor samme register, er behandling. Hvis overgangen foregår mellom ulike registre, kaller vi det konvertering. Dette har jeg beskrevet i delkapittel 3.4.2. Kapittel 2 og 4 inneholder til sammen 153 oppgaver der elevene må foreta overganger innen samme register, og da klassifiserer jeg det som behandling. Dette tilsvarer 54,6 % av oppgavene. Resten av oppgavene, 127 i tallet, inneholder overganger mellom ulike registre. 45,7 % av oppgavene krever dermed at elevene foretar konvertering. Oppgave 2.43, vist i figur 29, er et eksempel på en oppgave der jeg har klassifisert overgang mellom representasjoner som behandling. Oppgaven omhandler likeverdige brøker, og elevene må utvide brøkene, og dette foregår innen samme register. Boka presenterer en figur som støtte til elevene.

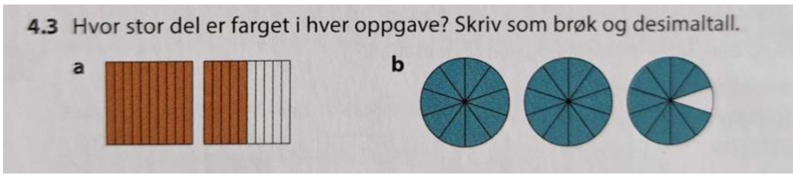
Det er inkludert brøk som forhold som aspektet i flest oppgaver. Oppgave 2.43 er et eksempel på en oppgave der aspektet er inkludert når likeverdige brøker er inkludert. Brøk som tall forekom nest flest ganger, i 48,2 % av de 280 oppgavene, mens de andre aspektene er jevnt fordelt. 228 av oppgavene presenterer ett aspekt for elevene, mens 52 oppgaver viser to aspekter.

Det er flest oppgaver uten bruk av brøkmodell i kapittel 2 og 4. Av oppgavene med modell, er arealmodellen oftest benyttet. Jeg fant bruk av brøkmodell i 112 av oppgavene, og 68 av disse viste arealmodell. Oppgaven under viser en oppgave som inkluderer både arealmodell og lengdemodell. Delkapittel 2.6 omhandler de ulike brøkmodellene.



Figur 30: Eksempel på bruk av brøkmodell (Multi 5 A, s. 57)

Ved å studere de 112 oppgavene som inneholder bruk av modell, kan jeg se hvilke av disse oppgavene som har med sammenligningsmetoden eller delen-det hele metoden. I 4 av oppgavene er delen-det hele metoden benyttet, mens sammenligningsmetoden er brukt i de 108 andre oppgavene. Den prosentvise fordelingen er her 96,4 % med delen-det hele metoden, kontra 3,6 % med sammenligningsmetoden. Metoder for representasjon av brøk har jeg skrevet om i delkapittel 2.6.4.



Figur 31: Eksempel på delen-det hele metoden (Multi 5 A, s. 100)

For å finne matematiske praksiser undersøker jeg hvordan begrepet brøk blir forklart i begynnelsen av kapitler og delkapitler om brøk. Resultatene fra denne analysen har jeg satt i tabellen under.

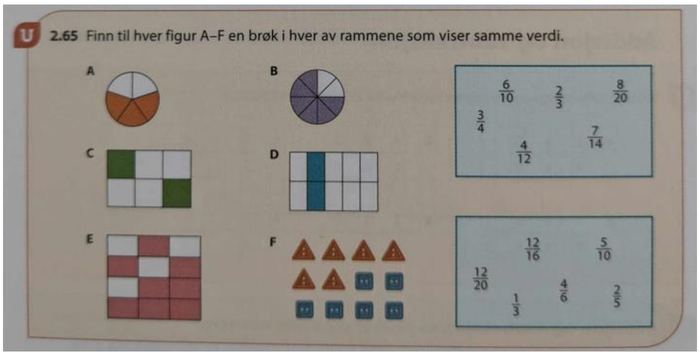
Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i Multi 5 A		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	36	73,5 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	27	55,1 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	38	77,6 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	16	32,7 %
	Konvertering	33	67,3 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	7	14,3 %
	Brøk som forhold	15	30,6 %
	Brøk som operator	2	4,1 %
	Brøk som kvotient	6	12,2 %
	Brøk som måleenhet	5	11,6 %
	Brøk som tall	18	36,7 %
Brøkmodell	Lengdemodell	10	20,4 %
	Arealmodell	14	28,6 %
	Mengdemodell	7	14,3 %
	Ingen bruk av modell	19	38,8 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	49	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

Tabell 15: Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i Multi 5 A, kapittel 2 og 4

Hvilke hovedregistre som presenteres i utforskningsoppgaver og forklaringer varierer, og 3 av 4 hovedregistre er representert. De fleste forklaringer og utforskningsoppgaver inneholder flere hovedregistre. Diskursive multifunksjonelle registre er representert i til sammen 36 forklaringer og utforskningsoppgaver, ikke-diskursive multifunksjonelle registre i 27 og diskursive monofunksjonelle registre i 38. Elevene må forholde seg til flere hovedregistre samtidig, og samtidig se sammenhenger mellom disse. Dette underbygger at å legge opp til å skape forståelse er en matematisk praksis i kapitlene som omhandler brøk i Multi 5 A. Samtidig mener jeg læreverket viser god variasjon med tanke på eksponering av tre av fire hovedregistre. Ikke-diskursive monofunksjonelle registre er ikke benyttet, noe jeg finner logisk, da tabeller, grafer og diagrammer benyttes mer innen andre emner enn brøk.

30 av de 49 forklaringene og utforskningsoppgavene inkluderer visuell brøkmodell. Jeg mener det også viser at læreverket legger vekt på å skape forståelse i introdusering av nytt lærestoff for elevene i Multi 5 A. Alle tre modellene for brøk er representert, noe jeg ser på som god variasjon i hvordan elevene blir presentert for nytt lærestoff.

33 av 49 av forklaringene og utforskningsoppgavene innebærer konvertering, altså at elevene må forholde seg til minst to hovedregistre. De 16 andre forklaringene og utforskningsoppgavene inneholder behandling. Konvertering er mer kognitivt krevende enn behandling, noe jeg har omtalt i delkapittel 2.4.2. Da det er stor overvekt av konvertering, mener jeg læreverket i dette kapittelet legger vekt på å skape forståelse. Elevene blir presentert for en sammenheng der brøk inngår.



Figur 32: Eksempel på utforskningsoppgave som krever konvertering (Multi 5 A, s. 65)

I alle forklaringer og utforskningsoppgaver er delen-det-hele-metoden benyttet. Dette viser at forfatterne mener metoden er enklere å forstå enn sammenligningsmetoden, og at de foretrekker den.

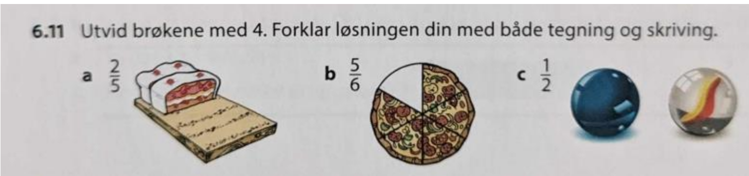
4.2.2 Vertikal analyse av Multi 5 B

I Multi 5 B har jeg sett nærmere på kapittel 6, som handler om regning med brøk. Kapitlet starter med et delkapittel om likeverdige brøker, før de neste delkapitlene omhandler addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon med brøk. Til sammen har jeg analysert 229 oppgaver fra dette kapitlet i Multi 5 B. I 79 oppgaver er det benyttet brøkmodell, og derfor har jeg analysert disse 79 oppgavene med hensyn til metodebruk. Oversikt over resultatene av analysen står i tabell 15.

Vertikal analyse av Multi 5 B		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	102	44,5 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	15	6,6 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	129	56,3 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0,0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	119	52,0 %
	Konvertering	110	48,0 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	0	0,0 %
	Brøk som forhold	98	42,8 %
	Brøk som operator	66	28,8 %
	Brøk som kvotient	54	23,6 %
	Brøk som måleenhet	0	0,0 %
	Brøk som tall	63	27,5%
Brøkmodell	Lengdemodell	7	3,1 %
	Arealmodell	61	26,6 %
	Mengdemodell	11	4,8 %
	Ingen bruk av modell	150	65,5 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	79	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

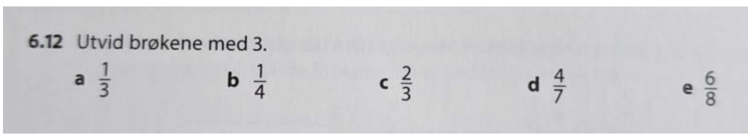
Tabell 15: Oversikt vertikal analyse av kapittel 6 i Multi 5 B

Diskursive multifunksjonelle registre og diskursive monofunksjonelle registre dominerer i dette kapitlet. Delkapitlene omhandler de fire regneartene med brøk. De fleste oppgavene inneholder enten tekst eller matematiske symboler, eller begge deler samtidig. I figur 38 under viser jeg eksempel på oppgaver som har inkludert flere hovedregistre. Oppgaven presenterer naturlig språk, matematiske symboler og illustrasjoner, slik at 3 av 4 hovedregistre er representert for elevene. Elevene må selv svare med symbol, benytte naturlig språk skriftlig og tegne illustrasjon. 218 av 229 oppgaver krever at elevenes svar er innen det diskursive monofunksjonelle registeret, i form av matematiske symboler. 3 oppgaver legger opp til at elevene svarer med illustrasjoner og ingen oppgaver krever naturlig språk i svaret.



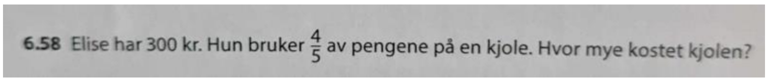
Figur 33: Eksempel på oppgaver som inneholder flere representasjonsformer (Multi 5 B, s. 32)

Fordelingen mellom behandling og konvertering er relativt lik, med 52 % av oppgavene som krever behandling og 48 % av oppgavene som krever konvertering. Oppgavene vist i figur 34 krever at elevene foretar overganger innenfor samme hovedregister, altså behandling. Dette har jeg skrevet om i delkapittel 2.4.3.



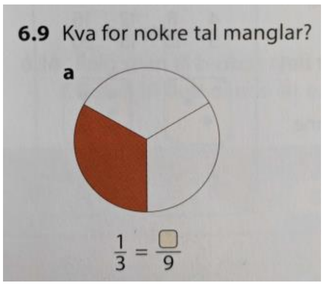
Figur 34: Oppgaver som inkluderer behandling (Multi 5 B, s. 33)

Med tanke på brøkens aspekt viser resultatene av analysen at brøk som forhold opptrer oftest i de analyserte oppgavene fra Multi 5 B med en prosentandel på 42,8 %. Jeg har gjort omtrent like mange funn av brøk som operator, kvotient og tall, mens jeg har ingen funn av brøk som måleenhet og brøk som del av helhet. I oppgave 6.11 a), b) og c), vist over i figur 38, opptrer brøk som forhold i oppgaver der elevene må utvide brøk. I 213 av de analyserte oppgavene presenteres ett aspekt for elevene, mens det i 16 oppgaver blir presentert to aspekter.
150 av de 229 analyserte oppgavene er uten bruk av brøkmodell. Figuren under viser et eksempel på en av disse oppgavene.


6.58 Elise har 300 kr. Hun bruker $\frac{4}{5}$ av pengene på en kjole. Hvor mye kostet kjolen?

Figur 35: Eksempel på oppgave uten bruk av brøkmodell (Multi 5 B, s. 49)

Av de 79 oppgavene som inkluderer brøkmodell, er arealmodellen benyttet i 61 av oppgavene. Dette tilsvarer 77,2 % av oppgavene med brøkmodell. Oppgave 6.9 a), vist i figur 36 under, viser bruk av arealmodellen. Her er 1/3 av det totale arealet fargelagt.



Figur 36: Oppgave der arealmodell er benyttet (Multi 5 B, s. 31)

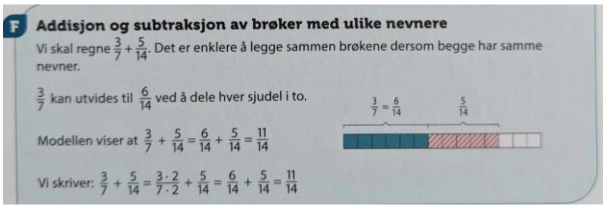
Alle de 79 oppgavene med bruk av brøkmodell benytter delen-det-hele metoden. Det vil si at ingen av oppgavene inkluderer sammenligningsmetoden.

For å analysere matematiske praksiser, har jeg undersøkt forklaringer og utforskningsoppgaver i kapitlet for seg, det vil si at jeg har isolert resultatene for disse og slått de sammen. Jeg har analysert 14 forklaringer og 26 utforskningsoppgaver, noe som gav totalt 40 analyserte enheter. Resultatene er vist i tabell 16.

Analyse av forklaringer og utforskningoppgaver i Multi 5 B		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	33	82,5 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	14	35,0 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	25	62,5 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0,0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	9	22,5 %
	Konvertering	31	77,5 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	0	0,0 %
	Brøk som forhold	12	30,0 %
	Brøk som operator	16	40,0 %
	Brøk som kvotient	13	32,5 %
	Brøk som måleenhet	0	0,0 %
	Brøk som tall	10	25,0 %
Brøkmodell	Lengdemodell	3	7,5 %
	Arealmodell	15	37,5 %
	Mengdemodell	6	15,0 %
	Ingen bruk av modell	23	57,5 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	39	97,5 %
	Sammenligningsmetoden	1	2,5 %

Tabell 16: Vertikal analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i kapittel 6 i Multi 5 B

3 av 4 hovedregistre er ofte benyttet både i forklaringer og utforskningsoppgaver. I 13 av 14 forklaringer alle tre registrene bruk samtidig, mens ikke-diskursive multifunksjonelle registre har få funn i utforskningsoppgavene samtidig som det er vektlagt i forklaringene. Forklaringen under inneholder diskursivt multifunksjonelt register, da det er med naturlig språk. Bruk av illustrasjon indikerer at ikke-diskursivt multifunksjonelt register er benyttet. Matematiske symboler, i form av brøker, gjør at også diskursivt monofunksjonelt register er brukt i forklaringen.



Figur 37: Forklaring som inneholder tre hovedregistre (Multi 5 B, s. 38)

Det er lagt stor vekt på konvertering ved omdanning av representasjoner ved innføring av nye faglige aspekter, da 77,5 % av alle forklaringer og utforskningsoppgaver krever konvertering. Jeg mener vektleggingen av konvertering viser at det legges vekt på at elevene skal utvikle forståelse for det faglige som blir presentert i kapitlet. Forklaringen vist i figur 42 krever at elevene foretar overganger fram og tilbake mellom tre ulike hovedregistre, og er et eksempel på forklaring som inneholder konvertering.

4 av 6 brøkaspekter er benyttet jevnt, med prosentandeler mellom 25 og 40 %. De to siste aspektene har ingen funn i analysen.

Alle tre brøkmodellene er benyttet i både forklaringer og utforskningsoppgaver, mens 23 forklaringer og oppgaver er uten bruk av modell.

Analysen viser at delen-det-hele metoden er dominerende også ved forklaringer og utforskningsoppgaver. Jeg gjorde ett funn av sammenligningsmetoden i en av forklaringene, mens det i de resterende 39 analyserte enhetene er bruk delen-det-hele metoden.

Resultatene av analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver viser at et relativt bredt spekter av representasjonsformer er benyttet. Forfatterne har forsøkt å variere bruk av representasjonsformer, samtidig som de har lagt vekt på utvikling av faglig forståelse med sin store vektlegging av konvertering. Både forklaringer og utforskningsoppgaver blir etterfulgt av øveoppgaver, der elevene får trent på de faglige aspektene som er forklart.

4.2.3 Samlet vertikal analyse av Multi 5 A og Multi 5 B

I dette delkapitlet skal jeg vise en samlet vertikal analyse av Multi 5 A og Multi 5 B, for å vise resultatene for brøkoppgaver på 5. trinn. Til sammen har jeg analysert 509 oppgaver, der 280 oppgaver er fra Multi 5 A, og 229 oppgaver er fra Multi 5 B. Oversikt over resultatene er i tabell 17.

Samlet vertikal analyse av Multi 5 A og Multi 5 B		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	183	36,0 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	110	21,6 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	291	57,2 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	1	0,2 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	272	53,4 %
	Konvertering	237	46,6 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	22	4,3 %
	Brøk som forhold	245	48,1 %
	Brøk som operator	79	15,5 %
	Brøk som kvotient	68	13,4 %
	Brøk som måleenhet	14	2,8 %
	Brøk som tall	198	38,9 %
Brøkmodell	Lengdemodell	36	7,1 %
	Arealmodell	129	25,3 %
	Mengdemodell	26	5,1 %
	Ingen bruk av modell	318	62,5 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	187	97,9 %
	Sammenligningsmetoden	4	2,1 %

Tabell 17: Samlet vertikal analyse av kapittel 2 og 4 i Multi 5 A og kapittel 6 i Multi 5 B

Også samlet sett for 5. trinn, viser resultatene av analysen at 3 av 4 hovedregistre ofte blir eksponert for elevene, mens ikke-diskursivt monofunksjonelt register kun er brukt i ett tilfelle på 509 oppgaver. Diskursive monofunksjonelle registre blir oftest benyttet, nemlig i 291 oppgaver. Dette tilsvarer 57,2% andel. Diskursive multifunksjonelle registre opptrer i 183 av 509 oppgaver, noe som tilsvarer en andel på 36,0 %. 110 oppgaver inneholder ikke-diskursive registre. Dette utgjør 21,6% av de 509 analyserte oppgavene.

Fordeling mellom behandling og konvertering er balansert, med andeler på 53,4 % og 46,6 %. Alle seks aspekter ved brøk er benyttet, men det er stor forskjell på hyppighet av eksponering. Brøk som måleenhet er representert 14 ganger, mens brøk som forhold opptrer 245 ganger. Elevene presenteres for ett aspekt i 441 av oppgavene, og for to aspekter i 68 av oppgavene. Prosentandelene er 86,6 % og 13,4 %.

De tre brøkmodellene blir brukt i ulik grad. Mengde- og lengdemodellen blir brukt i henholdsvis 26 og 36 oppgaver, mens arealmodellen blir benyttet i 129 oppgaver. 318 oppgaver er uten bruk av modell.

Av de 191 oppgavene med brøkmodell, er delen-det-hele modellen brukt i 187 av oppgavene. Det vil si at sammenligningsmodellen er benyttet i 4 oppgaver innen samme nummererte oppgave.

Jeg har samlet resultatene for analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i kapittel 2 og 4 i Multi 5 A, og kapittel 6 i Multi 5 B. Til sammen har jeg her analysert 83 forklaringer og utforskningsoppgaver. Formålet er å bruke resultatene som basis for å trekke slutninger omkring matematiske praksiser i læreverket. Resultatene står i tabell 18.

Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i Multi 5 A og B		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	63	75,9 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	39	47,0 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	57	68,7%
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0,0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	25	30,1 %
	Konvertering	58	69,9 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	7	8,4 %
	Brøk som forhold	27	32,5 %
	Brøk som operator	18	21,7 %
	Brøk som kvotient	19	22,9 %
	Brøk som måleenhet	3	3,6 %
	Brøk som tall	24	28,9 %
Brøkmodell	Lengdemodell	10	12,0 %
	Arealmodell	27	32,5 %
	Mengdemodell	12	14,5 %
	Ingen bruk av modell	41	49,4 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	83	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

Tabell 18: Samlet analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver fra Multi 5 A og B

Resultatene viser at diskursive multifunksjonelle registre opptrer i 75,9 % av tilfellene, og oftest av hovedregistrene. Dette er naturlig språk. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre finnes i 47,0 % av de 83 forklaringene og utforskningsoppgavene jeg har analysert i Multi 5 A og B. De opptrer i form av figurer, tegninger eller illustrasjoner. I 68,7 % av tilfellene eksponeres elevene for diskursive monofunksjonelle registre i form av matematiske symboler. Tabeller, diagrammer eller grafer utgjør ikke-diskursive monofunksjonelle registre, og blir ikke benyttet i hverken forklaringer eller utforskningsoppgaver i brøkkapitlene i Multi 5 A og B.

Omdanning av representasjoner blir i 69,9 % av tilfellene framstilt på en måte som fører til at elevene må foreta konvertering mellom ulike hovedregistre. Behandling må foretas i 30,1 % av forklaringer og utforskningsoppgaver. Totalt sett er det lagt vekt på utvikling av forståelse for nye temaer, da konvertering krever mer forståelse fra elevene enn behandling. Jeg legger merke til at andelen oppgaver som krever behandling er større i øveoppgaver, der det er meningen at elevene skal øve mer på delemner som blir tatt opp i forklaringer og utforskningsoppgaver. Det ser ut til at forfatterne ønsker at elevene først skal opparbeide seg forståelse, for deretter øve.

Alle seks aspektene ved brøk er representert ved forklaringer og utforskningsoppgaver. Brøk som forhold er oftest benyttet, med en andel på 32,5 %. Dette er gjerne ved forklaringer og oppgaver som omhandler å finne felles nevner, utviding og forkorting av brøker.

Brøk som tall er vektlagt aspekt i 28,9 % av forklaringer og utforskningsoppgaver, mens brøk som kvotient opptrer i 22,9 % av tilfellene. Aspektet brøk som operator har en prosentandel på 21,7 %. De to siste aspektene, brøk som måleenhet og brøk som del av helhet, er vektlagt i henholdsvis 3,6 % og 8,4 %.

42 av 83 forklaringer og utforskningsoppgaver inneholder brøkmodeller, mens 41 er uten bruk av modell. Dette tilsvarer en andel på 49,4 %. Arealmodellen blir benyttet oftest, med en andel på 32,5 %. Lengde- og mengdemodellen blir omtrent like ofte bruk, med 12,0 % og 14,5 % andel av de 83 analyserte enhetene.

Delen-det-hele metoden er den eneste metoden som er brukt der brøkmodeller er benyttet.

4.2.4 Vertikal analyse av Multi 6 B

Brøk er det første kapitlet i Multi 6 B for sjette trinn. Delkapitlene omhandler brøkbegrepet, brøk desimaltall og prosent, addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med brøk. Jeg har analysert oppgavene som dreier seg om brøk, slik at jeg ikke har analysert reine desimaltall- og prosentoppgaver. Totalt har jeg analysert 163 oppgaver, i tillegg til forklaringer. I tabell 19 har jeg samlet resultatene av analysen.

Vertikal analyse av Multi 6 B, kapittel 5		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	77	47,0 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	37	22,6 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	92	56,1 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0,0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	71	43,6 %
	Konvertering	92	56,4 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	12	7,4 %
	Brøk som forhold	86	52,8 %
	Brøk som operator	38	23,3 %
	Brøk som kvotient	6	3,7 %
	Brøk som måleenhet	5	3,1 %
	Brøk som tall	61	37,4 %
Brøkmodell	Lengdemodell	8	4,9 %
	Arealmodell	20	12,2 %
	Mengdemodell	8	4,9 %
	Ingen bruk av modell	127	77,9 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	36	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

Tabell 19: Vertikal analyse av kapittel 5 i Multi 6 B

Av tabellen kan vi lese at med tanke på hovedregistre, møter elevene matematiske symboler i diskursive monofunksjonelle registre 92 av 163 ganger, som tilsvarer 56,1 % av de analyserte oppgavene. Elevene møter naturlig språk i diskursive multifunksjonelle registre i 47,0 % av tilfellene. Figurer, tegninger og illustrasjoner blir i ikke-diskursive multifunksjonelle registre benyttet i 22,6 % av oppgavene. Elevene blir ikke eksponert for ikke-diskursive monofunksjonelle registre, da ingen oppgaver inneholder tabeller, grafer eller diagrammer. 158 av 163 oppgaver legger opp til at elevene gir svar i form av brøk, det vil si diskursivt monofunksjonelt register. I 32 av oppgavene må elevene svare i form av å illustrere brøk visuelt, mens det i 12 oppgaver kreves naturlig språk.

Omdanning av representasjoner skjer med bruk av konvertering i 56,4 % av brøkoppgavene i kapitlet, mens 43,6 % av omdanningen forgår innen samme hovedregister, og blir kategorisert som behandling.

Brøk som forhold er det aspektet ved brøk som opptrer oftest, med en andel på 52,8 %. Også aspektene brøk som operator og forhold finnes i en større del av oppgavene, mens brøk som del av helhet, brøk som kvotient og brøk som måleenhet har en andel på under 10 %. Oppgavene presenterer ett aspekt i 74,2 % av tilfellene, to aspekter i 21,5 % av tilfellene og tre aspekter i 4,3 % av de analyserte oppgavene.

Hele 127 av 163 oppgaver er uten bruk av brøkmodell. Lengde- og mengdemodellen er like mye benyttet, med 4,9 % andel. Arealmodellen er brukt i 20 av oppgavene, som utgjør 12,2 % av de analyserte oppgavene.

I alle 36 oppgavene med brøkmodell er delen-det-hele metoden benyttet. Dette er uavhengig av brøkmodell.

Matematiske praksiser har jeg analysert ved å foreta en analyse av de 8 forklaringene og 27 utforskningsoppgavene som omhandler brøk i kapittel 5 i Multi 6 B. Resultatene av dette har jeg satt i tabell 20.

Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i Multi 6 B		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	35	100 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	20	57,1 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	29	83,6 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	0	0,0 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	4	11,4 %
	Konvertering	31	88,6 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	2	5,7 %
	Brøk som forhold	15	42,9 %
	Brøk som operator	14	40,0 %
	Brøk som kvotient	2	5,7 %
	Brøk som måleenhet	4	11,4 %
	Brøk som tall	11	31,4 %
Brøkmodell	Lengdemodell	2	5,7 %
	Arealmodell	10	28,6 %
	Mengdemodell	2	5,7 %
	Ingen bruk av modell	22	62,9 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	14	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

Tabell 20: Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i kapittel 5 i Multi 6 B

Alle forklaringer og utforskningsoppgaver inneholder naturlig språk, så diskursive multifunksjonelle registre har en andel på 100 %. Matematiske symboler finnes i 83,6 % av analysert materiale, så også diskursive monofunksjonelle registre opptrer ofte i forklaringene og utforskningsoppgavene. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre, i form av figurer, tegninger og illustrasjoner, har en prosentandel på 57,1 %. Ingen funn av ikke-diskursive monofunksjonelle registre ble gjort.

88,6 % av de analyserte enhetene krever konvertering ved omdanning av representasjoner, mens de resterende 11,4 % krever behandling. Bare dette viser at læreverket i dette kapitlet legger vekt på at elevene skal utvikle forståelse for emnet brøk.

Alle seks aspektene ved brøk opptrer i de 35 enhetene med forklaringer og utforskningsoppgaver. Brøk som forhold, operator og tall har prosentandeler på over 30 %. Brøk som kvotient, måleenhet og del av helhet har prosentandeler under 12 %. At alle aspektene er med, viser at forfatterne tar på alvor at elevene skal forstå at brøk kan opptre ulikt ut fra situasjon og hvordan oppgavene er designet. Det gir også variasjon i oppgavetyper, og variasjon i hvordan elevene møter brøk i læreverket.

I 62,9 % av forklaringer og utforskningsoppgaver er ikke brøkmodell benyttet. 19 utforskningsoppgaver og 3 forklaringer er uten brøkmodell. Den mest brukte brøkmodellen er arealmodellen, med en andel på 28,6 %. 4 av 8 forklaringer inneholder arealmodellen Lengde- og mengdemodellen har prosentandel på 5,7 %, med to funn av hver. Det indikerer at arealmodellen ansees av forfatterne som godt egnet for å skape fundament for forståelse for brøkbegrepet hos elevene.

Alle 14 forklaringer og utforskningsoppgaver med brøkmodell inneholder delen-det-hele metoden, mens sammenligningsmetoden er fraværende.

4.2.5 Vertikal analyse av Multi 7 A

I Multi 7 A omhandler kapittel 2 brøk og desimaltall. Jeg har analysert de 190 oppgavene som inneholder brøk. Kapitlet inkluderer delemnene likeverdige brøker, de fire regneartene med brøk og tekstoppgaver med brøk. I tillegg inneholder kapitlet multiplikasjon og divisjon med desimaltall, men jeg har ikke analysert oppgaver herfra. I tabell 21 har jeg satt inn resultatene for den vertikale analysen.

Vertikal analyse av Multi 7 A		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	91	47,9 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	49	25,8 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	96	50,5 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	3	1,6 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	83	43,7 %
	Konvertering	107	56,3 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	9	4,7 %
	Brøk som forhold	70	36,8 %
	Brøk som operator	45	23,7 %
	Brøk som kvotient	63	33,2 %
	Brøk som måleenhet	0	0,0 %
	Brøk som tall	41	21,6 %
Brøkmodell	Lengdemodell	5	2,6 %
	Arealmodell	35	18,4 %
	Mengdemodell	3	1,6 %
	Ingen bruk av modell	147	77,4 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	37	86,0 %
	Sammenligningsmetoden	6	14,0 %

Tabell 21: Vertikal analyse av kapittel 2 i Multi 7 A

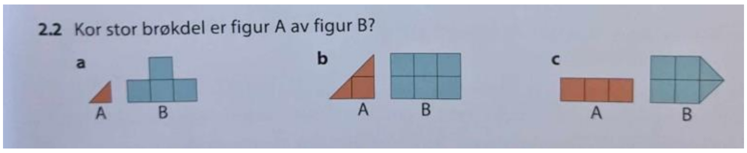
I kapittel 2 i Multi 7 A er alle fire hovedregistre for representasjon benyttet. Diskursive multifunksjonelle registre finnes i 91 av de 190 oppgavene jeg har analysert. Prosentandelen er 47,9 %. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre er til stede i 25,8 % av oppgavene, mens diskursive monofunksjonelle registre opptrer i 50,5 %. Ikke-diskursive monofunksjonelle registre er representert i 1,6 % av oppgavene. 180 av 190 oppgaver er av slik art at svarene inneholder matematiske symboler. Elevene må illustrere brøk visuelt i 15 av oppgavene, mens de må benytte naturlig språk i 5 oppgaver.

Omdanning av representasjoner krever konvertering i 56,3 % av oppgavene, og behandling i 43,7 % av oppgavene.

Fem av aspektene ved brøk er benyttet i kapitlet. Brøk som forhold opptrer i 70 av oppgavene, som tilsvarer en prosentandel på 36,8 %. Brøk som kvotient finnes i 33,2 % av de analyserte oppgavene. Alle tilfellene er å finne i delkapitlet om divisjon med brøk. 23,7 % av oppgavene fremhever aspektet brøk som operator, og disse opptrer i delkapitlet om multiplikasjon med brøk. Brøk som tall har prosentandel på 21,6 %, og brøk som del av en helhet 4,7 %. Oppgavene presenterer ett aspekt for elevene i 79,5 % av de 190 oppgavene i kapitlet. I 18,9 % av tilfellene presenteres to aspekter for elevene, mens tre aspekter har en prosentandel på 1,6 %.

77,4 % av de analyserte oppgavene i kapittel 2 er uten bruk av brøkmodell. Arealmodellen er brukt i 35 av 190 oppgaver, som gir en prosentandel på 18,4 %. Lengdemodellen opptrer i 2,6 % av oppgavene, og mengdemodellen i 1,6 % av oppgavene.
Til sammen er det 43 oppgaver, der elevene møter brøkmodell. Delen-det-hele metoden er benyttet i 86,0 % av disse, men sammenligningsmetoden finnes i 14,0 % av oppgavene. I figur 38 viser jeg eksempler på bruk av sammenligningsmetoden, der en har to figurer som

sammenlignes. Figur A er en del av figur B, og figurene er plassert ved siden av hverandre, slik av elevene samtidig kan se både brøkdelen og helheten. Jeg har skrevet om brøkmetoder i delkapittel 2.6.4.



Figur 38: Eksempel på bruk av sammenligningsmetoden (Multi 7 A, s. 45)

Jeg har analysert de 9 forklaringene og 26 utforskningsoppgavene som omhandler brøk i kapitlet, for å vurdere matematiske praksiser. Resultatene fra analysen har jeg satt i tabell 22.

Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i Multi 7 A		Antall	Andel
Representasjon Presentert for elevene	Diskursive multifunksjonelle registre	34	97,1 %
	Ikke-diskursive multifunksjonelle registre	18	51,4 %
	Diskursive monofunksjonelle registre	30	85,7 %
	Ikke-diskursive monofunksjonelle registre	3	8,6 %
Omdanning av representasjoner	Behandling	2	5,7 %
	Konvertering	33	94,3 %
Brøkens aspekt	Brøk som del av helhet	2	5,7 %
	Brøk som forhold	15	42,9 %
	Brøk som operator	7	20,0 %
	Brøk som kvotient	10	28,6 %
	Brøk som måleenhet	0	0,0 %
	Brøk som tall	8	22,9 %
Brøkmodell	Lengdemodell	5	14,3 %
	Arealmodell	11	31,4 %
	Mengdemodell	6	17,1 %
	Ingen bruk av modell	13	37,1 %
Metode	Delen-det-hele-metoden	22	100 %
	Sammenligningsmetoden	0	0,0 %

Tabell 22: Analyse av forklaringer og utforskningsoppgaver i kapittel 2 i Multi 7 A

Alle 9 forklaringer som handler om brøk, inneholder både diskursive multifunksjonelle, ikke-diskursive multifunksjonelle og diskursive monofunksjonelle registre.

Til sammen opptrer diskursive multifunksjonelle registre i 97,1 % av forklaringer og utforskningsoppgaver. Diskursive monofunksjonelle registre finnes i 85,7 % av de analyserte enhetene. 18 av 35 analyserte enheter inneholder ikke-diskursive multifunksjonelle registre, som tilsvarer 51,4 % av de 35. 8,6 % av de 35 analyserte forklaringene og utforskningsoppgavene benyttet ikke-diskursive monofunksjonelle registre. At alle forklaringene inneholder 3 av 4 hovedregistre indikerer at forfatterne legger stor vekt på å legge til rette for at elevene skal kunne utvikle forståelse for brøk og regning med brøk. At alle hovedregistre er representert i utforskningsoppgavene viser det samme, samt at oppgavene da framstår som varierte.

94,3 % av forklaringer og utforskningsoppgaver krever konvertering. Dette viser hvor viktig det er for forfatterne at elevene utvikler forståelse for brøk. Det indikerer også at forklaringer og utforskningsoppgaver er satt inn i kontekst.

Brøk som forhold er det aspektet elevene blir eksponert oftest for i forklaringer og utforskningsoppgaver i kapittel 2 i Multi 7 A. Aspektet opptrer i 3 forklaringer som innebærer sammenligning av brøker, i form av utviding, forkorting og felles nevner. I tillegg finner en aspektet igjen i 12 utforskningsoppgaver. Dette gir en prosentandel på 42,9 %. Brøk som kvotient opptrer til sammen 10 ganger i delkapitlet om divisjon med brøk. 3 av forekomstene er i forklaringer. Prosentandelen er 28,6 %. Brøk som operator har en andel på 20,0 %, alle i delkapitlet om multiplikasjon om brøk. Brøk som tall opptrer i kombinasjon med brøk som forhold i 2 forklaringer og 6 utforskningsoppgaver. Det tilsvarer en prosentandel på 22,9 %. Brøk som del av en helhet opptrer i de to første utforskningsoppgavene.

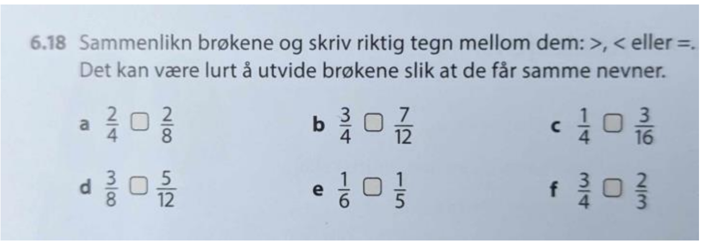
13 av utforskningsoppgavene er uten bruk av brøkmodell. Alle de 9 forklaringene inneholder modellbruk. Totalt er prosentandelen 37,1 %. Arealmodellen er også her den mest anvendte brøkmodellen, med 31,4 % av de analyserte forklaringer og utforskningsoppgaver. Lengde- og mengdemodellene er det omtrent like forekomster av, med prosentandeler på 14,3 % og 17,1 %.

Delen-det-hele metoden er brukt i alle oppgavene som inneholder brøkmodeller.
For å undersøke syn på matematikk, har jeg lest i lærerveiledningene til læreverket, for å se hva forfatterne skriver. De fremhever at elevene lærer gjennom å utforske og ved å utføre problemløsning. Dette har forfatterne skrevet i forordet til Lærerens bok for alle de analyserte bøkene i læreverket (Alseth et al., 2020). Det står videre "Dette er en arbeidsform som elevene møter i så og si hver eneste undervisningsøkt (Alseth et al., 2020). Dersom forfatterne tenker på utforskningsoppgavene som både utforskning og problemløsning, ser jeg at dette punktet er dekket med minst en oppgave per undervisningsøkt.

Et annet syn forfatterne trekker fram er at elevene lærer gjennom samarbeid og kommunikasjon (Alseth et al., 2020). Lærerveiledningene påpeker i mange tilfeller viktigheten av dette, og forslår samtaler og samarbeid ovenfor faglærer ved spesifikke oppgaver. Hvert nytt kapittel begynner med ei samtaleside. Eksemplet under er fra Multi 5 B, side 28.

Figur 39: Eksempel på samtaleside (Multi 5 B, s.28)

På flere oppgaver oppfordres lærer til å la elevene kommunisere sine ideer. Til oppgave 6.18 er det skrevet "La elevene komme med sine forklaringer til hvordan de tenkte da de sammenlignet de ulike brøkene" (Alseth et al., 2020, s. 34). Oppgaven er vist i figur 40.



6.18 Sammenlikn brøkene og skriv riktig tegn mellom dem: >, < eller =.
Det kan være lurt å utvide brøkene slik at de får samme nevner.

a $\frac{2}{4}$ ☐ $\frac{2}{8}$ b $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{7}{12}$ c $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{16}$

d $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{5}{12}$ e $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{5}$ f $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{2}{3}$

Figur 40: Eksempel på oppgave egnet for kommunikasjon (Multi 5 B, s. 34)

Forfatterne peker på at undervisningen bør ta utgangspunkt i elevenes egne erfaringer og forkunnskaper (Alseth et al., 2020). Samtalesider og samtaleoppgaver på hvert brøkkapittel indikerer at dette er ivaretatt.

I forordet til Lærerens bok står det: "Vi ønsker oss en matematikkopplæring preget av engasjement, utforskning, samarbeid, kreativitet, refleksjon, innsats, kommunikasjon og glede" (Alseth et al., 2020). Vektlegging av utforskning inkluderer induktiv arbeidsmetode, kreativitet og muligheter for samarbeid. Kommunikasjon gir elevene muligheter til å lære ut fra egne forutsetninger, og til å lære av medelever.

Alle områdene forfatterne påpeker er viktige for god undervisning, samsvarer med et sosiokulturelt syn på læring. Der er samhandling og kommunikasjon viktig for god læring. Læring foregår i en kontekst, ikke kun i individenes egne hoder. Sosiokulturell læringsteori har jeg skrevet om i delkapittel 2.2.

4.2.6 Sammenligning av vertikal analyse

Ved å sammenligne vertikal analyse fra 5., 6. og 7. trinn, kan jeg oppdage eventuelle likheter, ulikheter og om det er noe progresjon mellom trinnene. Det første jeg har sammenlignet, er prosentvis fordeling av hovedregistre i analyserte oppgaver, slik de er presentert for elevene. Diagram 1 viser prosentandel for analyserte oppgaver som inneholder hvert av de fire hovedregistrene fra 5. trinn med blå søyler, fra 6. trinn med røde søyler og fra 7. trinn med gule søyler. Oppgaver kan inneholde flere registre, slik at summen av søyler for spesifikke trinn overstiger 100%.

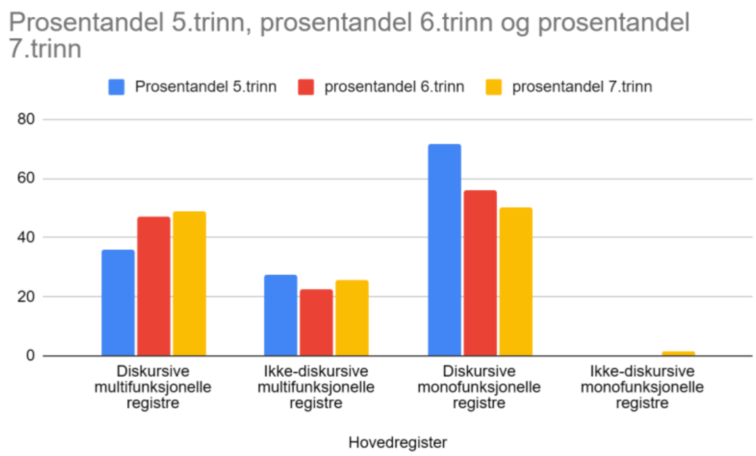


Diagram 1: Prosentandel hovedregistre

Av diagrammet kan vi se at andelen diskursive multifunksjonelle registre stiger gradvis fra 5. til 7. trinn, mens andelen diskursive monofunksjonelle registre synker gradvis fra 5. til 7. trinn. Ikke-diskursive multifunksjonelle registre holder seg på et relativt stabilt nivå, selv om tendensen er svakt synkende. Det er flest innslag av ikke-diskursive monofunksjonelle registre på 7. trinn.

Resultater for sammenligning av omdanning av representasjoner, har jeg satt i diagram 2. Her viser de blå søylene prosentandelen oppgaver som inneholder behandling i 5., 6. og 7. trinn. De røde søylene viser prosentandel oppgaver som inneholder konvertering for de samme trinnene.

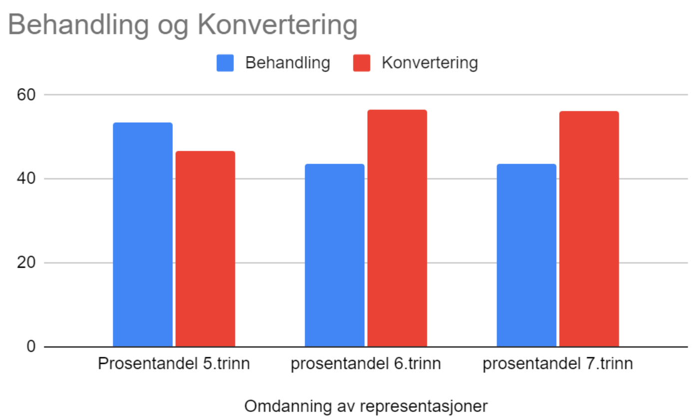


Diagram 2: Prosentfordeling av omdanning av representasjoner

I Multi 5 er prosentfordelingen mellom behandling og konvertering 53,4 % behandling og 46,6 % konvertering. Fra 5. til 6. trinn øker andelen konvertering til 56,4 %, mens andelen behandling synker tilsvarende til 43,6 %. Tallene for 7. trinn ser omtrent like ut, med 56,3 % konvertering og 43,7 % konvertering.

De seks aspektene ved brøk har jeg skrevet om i delkapittel 2.6.1. I diagram 3 viser jeg resultatene fra sammenligningen av læreverket for 5. - 7. trinn. Blå farge viser resultater for Multi 5, rød farge viser resultater for Multi 6 og gul farge viser Multi 7 sine resultater.

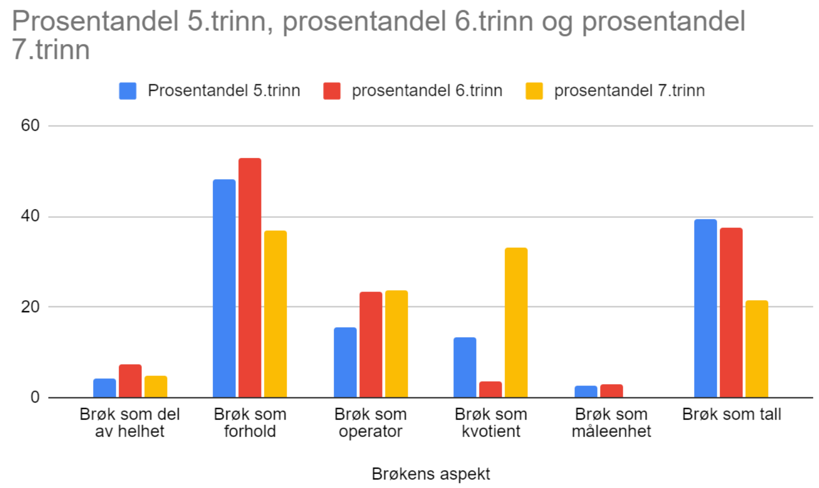


Diagram 3: Prosentfordeling av aspektene ved brøk

Aspektet brøk som del av helhet sin prosentandel for de tre trinnene er relativt stabil, men med svakt stigende tendens. Brøk som forhold har høy prosentandel alle i læreverket for alle tre trinnene. For Multi 5 er andelen på 48,1 %. Andelen øker til 52,8 % i Multi 6 før den synker til 36,8 % i Multi 7. Brøk som operator sin prosentandel stiger fra 5. til 7. trinn. Aspektet brøk som kvotient viser svært ulike tall for de tre trinnene. I Multi 5 er andelen på 13,3 %. I Multi 6 har den sunket til 3,7 %, mens den har økt til 33,2 % i Multi 7. På mellomtrinnet er dette aspektet er klart mest vektlagt på 7. trinn. Brøk som målenhet har lav prosentandel på alle tre trinn. Det sjette aspektet er brøk som tall. Her har prosentandelen en synkende tendens fra 5. til 7. trinn.

I den vertikale analysen har jeg analysert bruk av brøkmodeller i oppgavene. Også i sammenligningen har jeg benyttet tre ulike brøkmodeller; lengde-, areal- og mengdemodellen. I tillegg har jeg analysert brøkoppgaver uten bruk av brøkmodell.

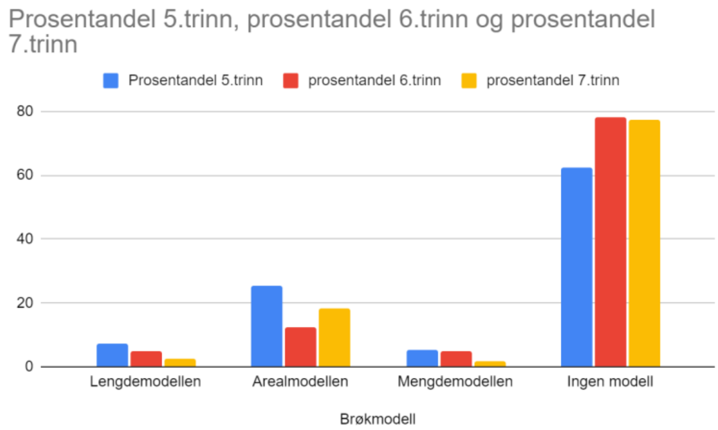


Diagram 4: Prosentandel ulike brøkmodeller og uten bruk av brøkmodell

For alle tre trinnene er det desidert flest oppgaver uten bruk av brøkmodell. Andelen er på 62,4 %, 78, 0 % og 77,4 % for 5., 6. og 7. trinn. Av diagrammet kan vi se at arealmodellen er benyttet langt oftere enn både lengde- og mengdemodellen.

En annen måte å få oversikt over bruk av brøkmodeller, er å kun analysere de oppgavene med bruk av brøkmodell. I Multi 5 har jeg analysert 191 oppgaver som har medfølgende brøkmodell. I Multi 6 er det tilsvarende tallet 36 og i Multi 7 er det 43 oppgaver med bruk av brøkmodell. Prosentandelene for de tre ulike brøkmodellen har jeg analysert, og satt i diagram 5.

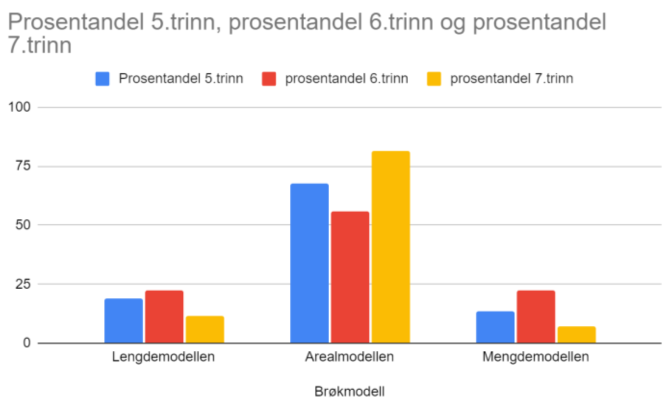


Diagram 5: Prosentandel for brøkmodeller

Her ser vi klarere enn i diagram 4 at arealmodellen er dominerende på alle tre trinn, dersom en kun ser på oppgaver som inneholder brøkmodell. I Multi 5 er prosentandelen 67,5 %. Andelen synker til 55,6 % i Multi 6, før den økter til 81,4 % i Multi 7. Prosentandelen for lengdemodellen er 18,9 %, 22,2 % og 11,6 % på de samme tre trinnene. For mengdemodellen er andelen 13,6 %, 22,2 % og 7,0 %.

Jeg sammenlignet bruk av metode ved oppgaver som inkluderer brøkmodeller. Dette er de samme oppgavene som er analysert med tanke på brøkmodell i diagram 5, totalt 270 oppgaver.

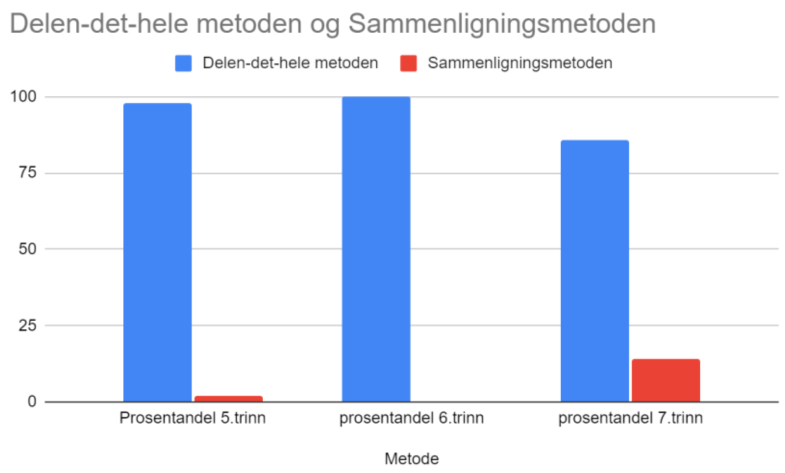


Diagram 6: Prosentandel metodebruk ved bruk av brøkmodeller

Delen-det-hele metoden er dominerende på alle tre trinn, med prosentandeler på 97, 1 %, 100 % og 86,0 %. Det er noen innslag av sammenligningsmetoden i Multi 5 og 7, men ingen bruk i Multi 6.

I forklaringer og utforskningsoppgaver ser brukt av hovedregistre noe annerledes ut enn ved øveoppgaver. Diagram 7 viser dette.

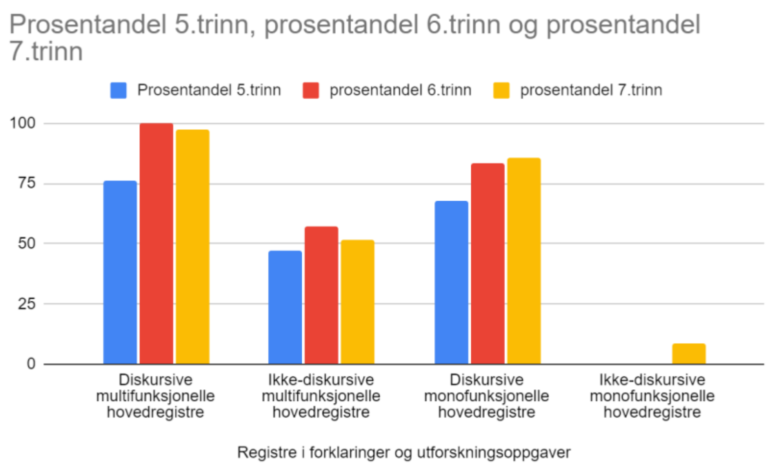


Diagram 7: Prosentandel hovedregistre i forklaringer og utforskningsoppgaver

Her blir naturlig språk benyttet mest, ikke matematiske symboler, som i øveoppgavene. Andelen diskursive monofunksjonelle registre er økende fra 5. til 7. trinn, ikke synkende, som ved øveoppgavene.

Omtrent 70 til 94 % av forklaringer og utforskningsoppgaver krever at elevene foretar konvertering mellom ulike hovedregistre. Disse tallene er mye høyere enn ved øveoppgavene. Det indikerer at elevene skal utvikle forståelse ved innføring av nye matematiske delemner. Aspekter ved brøk har relativt like prosentandeler ved forklaringer og utforskningsoppgaver som ved øveoppgaver. Sammenligning av andeler kan en se i diagram 8.

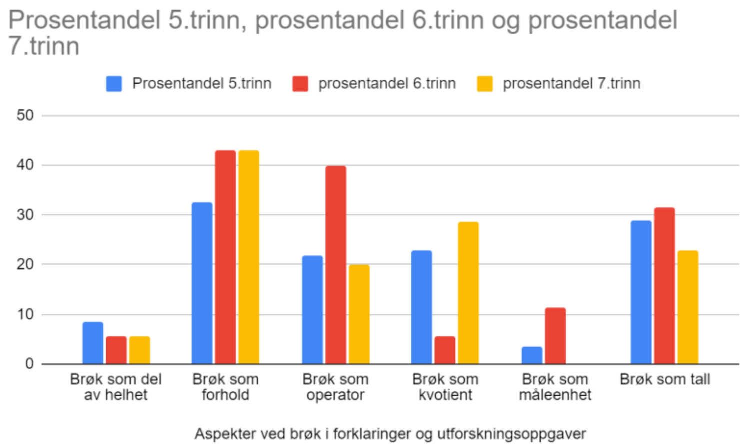


Diagram 8: Aspekter ved brøk i forklaringer og utforskningsoppgaver

Bruk av brøkmodeller er større ved forklaringer og utforskningsoppgaver enn ved øveoppgaver. Arealmodellen er den foretrukne brøkmodellen, mens de to andre brøkmodellene har relativt lik forekomst. Grafisk framstilling er i diagram 9.

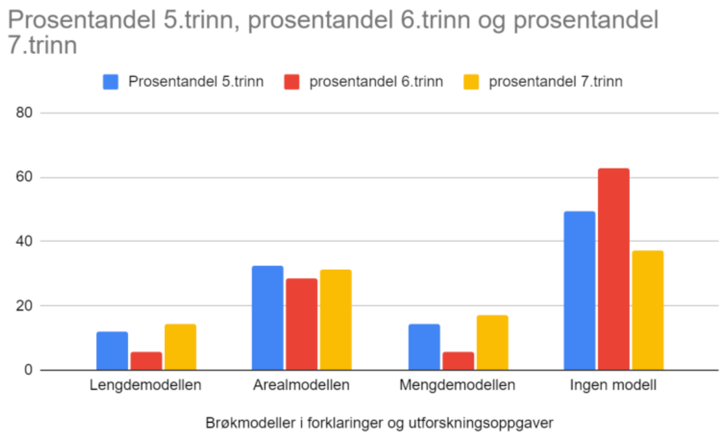


Diagram 9: Brøkmodeller i forklaringer og utforskningsoppgaver

I alle forklaringer og utforskningsoppgaver er delen-det-hele metoden benyttet.

5 Drøfting

I dette kapitlet vil jeg drøfte metode og resultatene av min analyse av brøkoppgaver i læreverket Multi fra Gyldendal. Med bakgrunn i teori satte jeg sammen et analyseverktøy, som jeg skulle hjelpe meg å systematisk finne ut om et læreverk har variasjon i sine representasjonsformer av brøk på 5.-7. trinn. Målet var også å undersøke om læreverket hadde noen form for progresjon i representasjonsformer i lærebøkene for 5. til 7. trinn.

5.1 Drøfting av metode

Den horisontale analysen ble utført ved bruk av kjent analyseverktøy utviklet av Charalambous et al. (2007, 2010). Jeg mener verktøyet fungerte hensiktsmessig, slik at analysen ble enkel å utføre og oversiktlig av utseende. I starten brukte jeg tid på å designe tabeller, der jeg kunne lese av informasjon om alle de analyserte bøkene uten å måtte ha en tabell for hver lærebok. Løsningen ble å ha en tabell for bakgrunnsinformasjon og en tabell for struktur. Det gikk raskt å gjennomføre den horisontale analysen. Denne analysen gir bakgrunnsinformasjon og forklarer struktur i læreverket. Informasjonen gir meg og lesere tilgang på relevant informasjon om læreverket, som bakteppe for den vertikale analysen.

Den vertikale analysen bygger også på analyseverktøyet som er utviklet av Charalambous et al. (2007) i forbindelse med forskning på brøk i lærebøker i ulike land. Denne tilpasset jeg til min forskningssituasjon, slik at analyseverktøyet hadde fokus på representasjoner, og hvordan brøk ble presentert for elevene i et læreverk. Det som presenteres i en oppgave tilhører kategorien matematisk innhold (Charalambous et al., 2007, s. 195).

Først definerte jeg hva matematisk kompetanse er, og her støttet jeg meg på teori av Niss og Jensen (2002). De definerte åtte kompetanser, som til sammen utgjør matematisk kompetanse. En av disse åtte kompetansene er representasjonskompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Dette beskrev jeg i delkapittel 2.3.1. At representasjonskompetanse er en del av matematisk kompetanse gav meg trygghet i at representasjoner er viktig innen matematikk, og derfor i læreverk presentert for skoleelever. Matematisk innhold, som brøk, kan representeres ulikt (Duval, 2006).

Brøkoppgavene ble sortert etter representasjonsformer. Jeg benyttet inndeling med fire hovedregistre, etter Duval (2006). Denne måten å sortere på fungerte, men jeg opplevde at mange oppgaver inneholdt flere hovedregistre. Summen av funn ble derfor over 100 %, noe kan føre til at diagrammene har potensiale til å forvirre. Alternativt kunne jeg bestemt meg for hvilket hovedregister som var mest synlig i hver oppgave. Jeg skrinla dette, da jeg mener en slik metode i større grad kunne bli preget av subjektivitet og tvilstilfeller, noe jeg ønsket å unngå.

Overgang mellom representasjoner, i form av behandling eller konvertering, sier noe om hvilke kognitive krav oppgavene krever av elevene. Derfor var det nyttig å inkludere dette i analyseverktøyet. Jeg har støtte i Duval (2006), og jeg har skrevet om dette i delkapittel 2.4. Overgang mellom representasjoner gir informasjon om hvor kognitivt utfordrende oppgavene er. Det å ha kun to alternativer, gjorde det enkelt for meg å samle inn data. Johansson (2003) benyttet fem kategorier for å beskrive hva oppgavene krevde av elevene. En lignende kategorisering kunne gitt meg mer detaljert kunnskap om oppgavenes kognitive krav, da fem kategorier kan få fram flere nyanser enn to kategorier. Sett i ettertid innser jeg at en annen type kategorisering kunne fått fram mer informasjon om hvilke krav oppgavene stiller.
Jeg har analysert brøkens aspekt. Her støttet jeg meg på teori av Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) og Behr et al. (1983). De benyttet fem aspekter ved brøk, mens jeg i tillegg benyttet brøk som tall. I ettertid ser jeg at jeg har få funn av brøk som måleenhet, og at

årsaken sannsynligvis er at jeg har inkludert den sjette kategorien brøk som tall, som fanger opp aspekter ved brøk som kunne blitt kategorisert som brøk som måleenhet dersom jeg hadde utelatt brøk som tall som egen kategori. Jeg ser at kategorien brøk som tall dekker smalere enn brøk som måleenhet, og at analysearbeidet hadde gått like greit med 5 aspekter. Sett i etterkant, så hadde nok brøk som måleenhet favnet om de oppgavene som jeg har kategorisert som aspektet brøk som tall. I prosessen oppdaget jeg også at det i enkelte delemner var gjennomgående fokus på ett eller to aspekter ved brøk.

Da jeg ønsket å analysere ikke-diskursive multifunksjonelle registre nærmere, hadde jeg behov for modeller for brøk. Her benyttet jeg en enkel inndeling fra Watanabe (2002). Hans inndeling av brøkmodeller, med tre ulike typer, gjorde det visuelt og enkelt å skille visuelle framstillinger av brøk. Metoder for representasjon av brøk har jeg også hatt nytte av i analysen. Delen-det-hele metoden og sammenligningsmetoden gir begge mening til brøkbegrepet, og jeg fant det interessant at den ene metoden er sterkt vektlagt i forhold til den andre i læreverket Multi.

Ved å analysere utforskningsoppgaver og forklaringer adskilt fra resten av brøkoppgavene fikk jeg innblikk i matematiske praksiser, som er en del av den vertikale analysen (Charalambous et al., 2007, 2010). Jeg utformet egen statistikk for utforskningsoppgaver og forklaringer. Funnene her var ikke identiske som i øveoppgavene. Dette skriver jeg om i delkapittel 5.2.

5.2 Drøfting av forskningsfunn

Tre av fire hovedregistre opptrer i mange oppgaver, og i større grad i utforskningsoppgaver og forklaringer. Representasjonene medierer det matematiske objektet (Duval, 2006). Ahl og Helenius (2021) fant ut at lærebøker i for stor grad gir elevene begrensede forklaringer med ikoniske representasjoner. Min forskning viser at både diskursive multifunksjonelle registre og diskursive monofunksjonelle registre opptrer oftere enn ikke-diskursive multifunksjonelle registre, der ikoniske representasjoner hører til. En årsak kan være at Ahl og Helenius forsket på kvotientkonstruksjoner, samt inkluderte alle årstrinn fra 3. til 9. trinn. Duvall (2006) påpeker at variasjon i representasjoner er viktig for å utvikle bred forståelse for matematiske ideer. Jeg mener resultatene viser at det analyserte læreverket imøtekommer dette på en tilfredsstillende måte, men at en liten økning i bruk av illustrasjoner kunne forbedret balansen mellom representasjoner av brøk. *"Mathematical ideas are enhanced through multiple representations"* (Kilpatrick et al., 2001, s. 95). Økt bruk av ikke-diskursivt monofunksjonelt register hadde ytterligere forbedret balansen mellom representasjonene.

Resultatene fra analysen viser at prosentandelen diskursive multifunksjonelle registre stiger fra 5. til 7. trinn. Denne informasjonen vises visuelt i diagram 1. Brøkinnholdet i Multi 5 introduserer brøk som matematisk emne for elevene. De skal bli fortrolige med begreper som teller og nevner (Alseth et al.,2020, s. 44). I bøkene for 6. og 7. trinn er mange av delkapitlene viet regning med brøk. Mange av disse oppgavene er gitt en praktisk setting, og da i form av tekstoppgaver. At forklaringer og utforskningsoppgaver har større andel naturlig språk enn øveoppgaver skyldes sannsynligvis at forfatterne ønsker å forklare begreper og framgangsmåter for elevene ved innføring. Da har de valgt å forklare med naturlig språk, mens de gir eksempler med matematiske symboler. Mange utforskningsoppgaver og forklaringer inneholder også illustrasjoner, slik at tre av fire hovedregistre forekommer parallelt.

Andel oppgaver med illustrasjoner og figurer forandrer seg lite fra 5. til 7. trinn, både ved øveoppgaver og forklaringer og utforskningsoppgaver. Trenden i delkapitlene er at de fleste oppgavene, inkludert ikke-diskursive multifunksjonelle registre, kommer i starten. Elevene får først illustrasjoner som støtte, mens de senere i delkapitlene blir utfordret på oppgaver uten denne visuelle støtten. Matematiske objekter må ikke forveksles med representasjonene (Duval, 2006, s. 126). Av den grunn kan denne måten å bruke illustrasjoner og figurer virke logisk, da elevene får sett sammenheng mellom matematiske symboler og illustrasjoner tidlig. Et alternativ kan være å ha lik fordeling av visuell støtte gjennom delkapitlene. Fordelen med det vil være at oppsettet er kjent for elevene. Jeg mener det fungerer slik det er gjort i dette læreverket, men ser at det kan utføres annerledes. Brøk er abstrakt. Visuelle representasjoner vil ha potensiale for å kople abstrakte ideer og begreper til konkrete modeller og illustrasjoner. Dette kan bidra til at elevene styrker sin forståelse for brøkbegrepet (Duval, 2006). Visuelle representasjoner, her i form av tegninger, skisser eller illustrasjoner, gir elevene muligheter til å uttrykke sine matematiske tanker om brøk på en konkret og tydelig måte. Det kan og gjøre det enklere for lærer å identifisere eventuelle feil eller misforståelser, da illustrering av brøk fordrer forståelse og er vanskelig å utføre korrekt med manglende forståelse. Å illustrere brøker visuelt åpner opp for elevene kan være kreative i sin tilnærming til brøk. Dette kan legge til rette for økende engasjement hos elever.

Bruk av matematiske symboler synker gradvis fra 5. til 7. trinn ved øveoppgavene. Oppgavene inneholder i stedet mer naturlig språk, og er mindre preget av ren ferdighetsdrill, som det er mer av i læreboka for 5. trinn. Jeg mener dette indikerer progresjon i det faglige innholdet. Duval (2006) skriver at konvertering er mer kognitivt krevende enn behandling, og at elevene blir gradvis mer utfordret på konvertering fra naturlig språk til matematiske symboler er tråd med det. Ved forklaringer og utforskningsoppgaver er trenden motsatt. Her øker andelen fra 5.til 7. trinn. Årsaken kan være at delemnene på 6. og 7. trinn domineres av regning med brøk. Her er forklaringene preget av å forklare framgangsmåter ved regning, noe som er mest praktisk ved å vise de matematiske symbolene.

Et stort flertall av de analyserte oppgavene krever at elevene svarer i form av matematiske symboler. Totalt har jeg analysert 862 oppgaver. 823 av disse oppgavene legger opp til at elevene må svare i form av matematiske symboler. Her mener jeg læreverket har forbedringspotensiale, da elevene i stor grad gir svar fra kun et hovedregister. På dette punktet er det både lite variasjon og progresjon. Å ha oversikt over alle sidene ved et matematisk objekt kan øke forståelse for objektet (Duval, 2006). Flere oppgaver som krever at elevene benytter og kommuniserer flere hovedregistre vil også sikre mer variasjon i hva elevene må produsere av svar.

Jeg av den oppfatning om at mange elever har potensiale for ytterligere utvikling av forståelse for emnet brøk, dersom en større andel av oppgavene hadde krevd forklaringer og illustrasjoner. Duval (2006) skriver at variasjon av representasjoner er viktig. Jeg mener at forklaringsprosessen vil stimulere til at elevene utvikler forståelse. Dersom elever må forklare sine matematiske svar, enten til medelever eller til lærer, må de gå gjennom prosessen de benyttet for å komme fram til svaret sitt. Dette vil bidra til å styrke forståelsen av konseptet brøk, da de bruker flere redskaper for å mediere det matematiske objektet (Duval, 2006). Ved å forklare egne svar, får elevene muligheter til å oppdage eventuelle feil eller misforståelser de selv kan ha gjort. Kommunikasjonskompetanse er dessuten en del av matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Korrigering av feil og misforståelser er et viktig bidrag i læreprosessen. Det å kommunisere matematiske ideer og løsninger krever kritisk tenkning, og utvikler forståelse. En lærer dessuten i samhandling med andre (Vygotsky, 1978). Dette kan hjelpe elevene med å utvikle evnen til å analysere og evaluere. At elevene blir vante til å praktisere sine kommunikasjonsferdigheter, vil de ha nytte av både i andre fag og generelt i livet (Vygotsky, 1978). Et annet aspekt ved å forklare sine matematiske svar med naturlig språk, er at det kan fremme tillit og samarbeid mellom elevene. Dette vil være et bidrag i å skape et positivt læringsmiljø, der elevene gradvis åpner opp for å lære av hverandre.

At det er lite bruk av tabeller, grafer og diagrammer, mener jeg er logisk, da dette ikke vil tilføre mer grunnleggende forståelse for emnet brøk. Jeg fant kun 4 tilfeller av dette på over 800 oppgaver. I læreverket fokuseres det på hovedregistrene som best ivaretar framstillingen av brøk. Duval (2006) skriver at variasjon bruk av representasjoner er viktig. Mer bruk av det ikke-diskursive multifunksjonelle hovedregisteret ville ført til mer variasjon i bruk av representasjoner, uten at det ville tilført mer faglig forståelse. Da mener jeg det fungerer med minimal bruk av hovedregisteret, slik det er lagt opp til i læreverket.

Oppgavene blir kognitivt mer krevende fra 5. til 7. trinn. Resultatene viser dette ved at andelen overganger som krever konvertering øker. Dette henger sammen med gradvis økning i diskursive multifunksjonelle registre og den reduserte andelen bruk av diskursive monofunksjonelle registre. Jeg mener det er logisk utvikling, da elevene først lærer basisferdigheter for deretter å bruke kunnskapen i stadig mer tekstbaserte oppgaver. Innholdet i bøkene for 6. og 7. trinn bygger på det elevene har lært på de foregående trinnene. Dette er tegn på progresjon i bruk av representasjoner. I forklaringer og utforskningsoppgaver er andelen oppgaver som krever konvertering opp mot 100 %. Dette viser at utvikling av forståelse er essensielt, særlig ved innføring av nye emner og delemner. Johansson (2003) forsket på lærebøker i matematikk, og kategoriserte oppgaver ut fra kognitive krav. 40-50 % av oppgavene hun undersøkte, ble definert som de to laveste kategorier, les og forstå, samt bruke rutine prosedyre. En lavere andel oppgaver ble kategorisert som mer krevende. Hun delte oppgavene inn i 5 kategorier (Johansson, 2003, s. 66). Jeg undersøkte omdanning av representasjoner, og kategoriserte oppgavene etter om de krever behandling eller konvertering. Konvertering er mest kognitivt krevende (Duval, 2006). Resultatene mine gav 43,6-53,4 % prosentandel behandling, som er mindre krevende enn konvertering. På 2 av 3 trinn var andelen konvertering høyere enn andelen behandling. Dette viser jeg i diagram 2. Ved forklaringer og utforskningsoppgaver er andelen behandling 6-30 %. Mine funn viser noe høyere prosentandel oppgaver med høye kognitive krav enn forskningen til Johansson (2003) viste. Jeg har kun forsket på brøkoppgaver, mens Johansson forsket bredere, noe som gir ulike forutsetninger. Det har gått over 20 år mellom studiene, så det er en mulighet for at lærebøkene vektlegger oppgaver med høye kognitive krav mer nå enn tidligere. Det er likevel for store forskjeller på forutsetningene i min forskning i forhold til Johansson sin forskning til å kunne konkludere i den retning. At de kognitive kravene i oppgavene øker markant fra 5. til 6. trinn, som resultatene av min forskning viser, fører til at lærere for 6. trinn må være klar over dette i sin tilnærming til brøkundervisningen. Jeg skriver mer om dette i delkapittel 5.3.

Brøkbegrepet omhandler flere sider ved det matematiske objektet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Alle aspektene ved brøk er ivaretatt. Prosentandelene varierer fra trinn til trinn og delkapittel til delkapittel, da det settes søkelys på ulike aspekter ved brøk ut fra faglig innhold. Brøk som operator har mange funn i delkapitler som inneholder multiplikasjon med brøk. Dette samsvarer med Behr et al. (1983, s. 101). Likeledes har brøk som kvotient stor prosentandel når fokuset er divisjon med brøk. Jeg er overrasket over at andelen til brøk som del av en helhet er relativt lav på alle tre trinn. Behr et al. (1983) har aspektet som grunnleggende, og Bjerke et al. (2013) hadde stor andel funn, og stilte spørsmål om aspektet var for mye vektlagt. På forhånd hadde jeg sett for meg at det iallfall på 5. trinn ville finnes mange funn, men her var andelen lavest. Årsaken til denne hypotesen, er at framheving av dette aspektet etter min mening har potensiale til å introdusere begrepet brøk, samt en begynnende forståelse for brøkbegrepet. Ved introduksjon av brøkbegrepet har jeg, som matematikklærer, ofte brukt reelle eksempler ved bruk av akkurat dette aspektet. "9 av 17 elever i klassen er gutter. Hvor stor brøkdel av klassen er gutter?" Dette er en type spørsmål elevene mine veldig ofte klarer å resonnere seg fram til svaret på. 11 av de 14 første oppgavene i Multi 5 A, kapittel 2, inkluderer aspektet brøk som del av en helhet, så aspektet er framhevet i en tidlig fase. Likevel mener jeg at aspektet kunne blitt benyttet mer, særlig på 5. trinn, der begrepsinnlæringen er mest vektlagt i det analyserte læreverket. Aspektet brøk som forhold har størst prosentandel. Det forekommer særlig i oppgaver med likeverdige brøker, sammenligning av brøker og oppgaver der en har behov for felles nevner. Dette er i tråd med Behr et al. (1983) og Charalambous & Pitta-Pantazi (2007). I sum blir det veldig mange oppgaver. Dette høres smart ut, da alle disse sidene ved brøk er viktige for å utvikle forståelse for emnet. I nesten alle kapitlene er det inkludert oppgaver med likeverdig brøk i starten, og det indikerer at forfatterne mener at inngående kunnskap om det er essensielt.

I en stor andel av oppgavene er det ikke benyttet brøkmodeller. Mer bruk vil gi mer eksponering for flere registre, noe Duval (2006) fremhever som viktig for utvikling av forståelse for et matematisk objekt. Det krever at elevene er fleksible, og kan utføre omdanning mellom ulike hovedregistre, noe som er kognitivt krevende. Det vil ha potensiale for å gjøre elevene mer robuste i sin forståelse av brøk. På dette punktet mener jeg læreverket har potensiale for forbedring, da mellom 62,4 % og 78 % av brøkoppgavene på 5. til 7. trinn er uten brøkmodell. Forklaringer og utforskningsoppgaver har større andel bruk av brøkmodeller, noe som viser at forfatterne mener de er av betydning ved innlæring og utvikling av nye emner. Jeg ser at bruk av brøkmodeller vil ta plass i lærebøkene. Med samme antall oppgaver, vil økt bruk av brøkmodeller føre til flere sider i bøkene. Alternativt kan antall oppgaver kuttes for å beholde antall sider i bøkene. Jeg har sammenlignet funnene i papirutgavene med de digitale utgavene, og det er samsvar i bruk av brøkmodeller. Bjerke et al. (2013) fant ut at manglende forståelse for brøkbegrepet var vanlig blant elever på 6. og 7. trinn. I studien kom det fram at arealmodellen ble for ensidig brukt av elevene. De anmodet til mer variert bruk av representasjonsformer. Resultatene av min analyse viser at læreverket Multi på 5., 6. og 7. trinn sterkt vektlegger nettopp arealmodellen, og samsvarer med funnet fra 2013. Når det gjelder bruk av brøkmodeller, skiller altså læreverket seg ikke ut fra resultater i tidligere forskning.

Av de oppgavene der brøkmodell er benyttet, er det lagt stor vekt på arealmodellen på hele mellomtrinnet. Her er det liten variasjon og progresjon. Mer variasjon i bruk av brøkmodeller mener jeg vil gjøre læreverket bedre. Grunnen til det er at elevene da vil oppleve jevn eksponering for alle tre brøkmodellene, i stedet for stor vektlegging av den ene. Elevene vil få en bredere forståelse for brøk, og ikke være avhengige av arealmodell for å forstå. Lengde- og mengdemodellene vektlegger andre deler og aspekter ved brøk, som er verdt å framheve mer enn tilfellet er i det analyserte læreverket. Bjerke et al. (2013) oppfordret til variert bruk av representasjoner, da de stiller seg spørsmål om bøkene i for stor grad har fokus på brøk som del av en helhet. Mine resultater viser at dette aspektet ved brøk ikke er særlig vektlagt i læreverket Multi. Brøk som forhold er det aspektet som har høyest prosentandel både i forklaringer og utforskningsoppgaver, samt øveoppgaver. Dette har jeg vist i diagram 3 og 8.

Læreverket benytter ensidig delen-det-hele metoden i brøkoppgaver der brøkmodell er brukt. Alle modellene har felles at også sammenligningsmetoden kan brukes. Watanabe (2002) mener begge modellene bør brukes. Med sammenligningsmetoden vil elevene se det hele som en figur og del av det hele som en figur ved siden av. Det at Multi 7 inneholder noen oppgaver med sammenligningsmetoden, er positivt og et tegn på progresjon fra 5. og 6. trinnbøkene. Men etter min mening burde bøkene for alle tre trinnene økt prosentandelen en hel del. Elever lærer ulikt, og noen kan derfor ha potensiale for bedre læring med denne metoden i stedet for delen-det-hele metoden.

Læreverket varierer representasjonsformer for bruk ved forklaringer. Dette sier noe om matematiske praksiser. Et annet viktig funn, er at 70-94 % av forklaringer og utforskningsoppgaver krever konvertering. Det viser at det er viktig for forfatterne at elevene utvikler forståelse for det matematiske innholdet.

I Lærerens bok står det at Multis tilnærming til læring og undervisning av matematikk er basert på lang erfaring fra norsk skole og på nyere forskning (Alseth et al.,2020). Et eksempel på dette er at elevene skal lære gjennom utforskning og problemløsning. Læreverket inneholder mange slike oppgaver, der elevene må jobbe induktivt uten å vite framgangsmåter. Her er det samsvar mellom intensjon og innhold i læreverk.

5.3 Implikasjoner med tanke på matematikkundervisning

Elever er ulike og har ulike behov. De lærer ulikt og i forskjellig tempo. Derfor er det viktig at undervisningen i matematikk er variert. En måte å gjøre undervisning i brøk variert på, er å eksponere elevene for så mange sider ved brøk som mulig. Resultatene av min forskning viser at ikke-diskursive monofunksjonelle registre er benyttet svært lite. Duval (2006) framhever viktigheten av variasjon i representasjonsformer. Dersom lærebøkene ikke presenterer varierte representasjoner, bør matematikklærerne likevel sørge for at elevene opplever stor variasjon i representasjoner. Dette kan utføres både muntlig og skriftlig. Som matematikklærer er en ikke bundet opp til å benytte læreverket hele tida. En bør variere undervisninga mer, ikke bare med tanke på representasjoner, men også andre sider av faget. Det viktige er at en følger gjeldende læreplan, og de kompetansemålene som gjelder for hvert trinn.

Dersom det viser seg at et læreverk har liten eksponering av en type brøkmodell, kan en som lærer likevel vise elevene akkurat den modellen i eksempler på tavla eller digitalt. Lærere bør vise at det går an å illustrere brøk visuelt ved hjelp av lengde- og mengdemodellen, og ikke bare benytte oppgaver fra læreverket, der arealmodellen er overrepresentert. Dette fant også Bjerke et al. (2013).

Ofte blir elevene bedt om å produsere matematiske symboler som svar på oppgaver. 823 av 862 analyserte oppgaver krever kun brøk som svar. Selv om læreverket ikke legger stor vekt på andre hovedregistre enn det diskursivt monofunksjonelle, kan en som lærer jevnlig utfordre elevene både til å både forklare sine framgangsmåter og be de illustrere framgangsmåter og matematiske svar. En måte å gjøre dette på er å la elevene jevnlig arbeide sammen i mindre grupper, der de får oppgaver, gjerne problemløsningsoppgaver der framgangsmåte ikke er gitt. I gruppene arbeider elevene sammen med oppgavene, forklarer for hverandre og produserer illustrasjoner og praktiske eksempler på sine matematiske prosesser og svar. En annen måte å organisere grupper på, kan være å benytte fast læringspartner i perioder. Da vil en over tid bygge trygghet ovenfor den medeleven en kommuniserer mest med. En lærer i samhandling med sine omgivelser (Vygotsky, 1978).

Diagram 2 viser at elevene møter en større andel kognitivt krevende oppgaver i læreverkene for 6. og 7. trinn i forhold til boka for 5. trinn. Ved oppstart av emnet brøk på 6. trinn må lærere være klar over dette, og bruke tid på å skape forståelse for brøk. Eksponering for ulike representasjonsformer vil bidra (Duval, 2006). Dette samme gjelder variasjon i bruk av brøkmodeller (Watanabe, 2002). Kommunikasjon omkring emnet brøk vil utvikle elevenes forståelse (Vygotsky, 1978). Variasjon i hvilke overganger mellom representasjoner som kreves i oppgaver, er benyttet i læreverket. Bevisste valg styrer de kognitive kravene oppgaver stiller til elevene. Jeg mener læreverket treffer godt, med en økning av andelen konvertering fra 5. til 6. trinn. Det gir progresjon i hvordan brøk blir presentert for elevene, da oppgavene oppleves mer kognitivt krevende i 6. og 7. trinn, i forhold til boka for 5. trinn.

I det analyserte læreverket legges det lite vekt på at elevene skal arbeide med konkreter. De digitale hjelpemidlene inkluderer digitale konkreter, som en bør bruke i undervisningen dersom en bruker læreverket Multi. Disse har også elevene tilgang til via Skolestudio, slik at de kan benytte konkretene mens de arbeider med brøkoppgaver. Ved oppstart av nye emner og delemner, som brøk, bør en også la elevene få tilgang til fysiske konkreter.

Cuisenairestaver passer godt til konkretisering av lengdemodellen, og bruk av sammenligningsmetoden (Watanabe, 2002).

Figur 40: Cuisenairestaver

Centikuber kan konkretisere brøk, og kan brukes på samme måte som cuisenairestaver. Da de er kubeformede og kommer i ulike farger, passer de også fint for å konkretisere mengdemodellen, som i min forskning hadde relativt få funn.

Figur 41: Centikuber

Fysiske konkreter gir elevene muligheter til å manipulere brøker direkte. Bruk av konkretiseringsmateriell kan bidra til å motvirke skjevheten i bruk av brøkmodeller, som Bjerke et al. (2013) og jeg fant. Dette kan også være nyttig for elever som lærer best gjennom praktisk utforskning. Å arbeide med fysisk konkretiseringsmateriell oppmuntrer til utforskning og eksperimentering, noe som kan bidra positivt i utviklingen av kreativ tenkning. Bruk av fysisk materiell gir elevene en felles visuell referanse som de kan kommunisere om. Dette kan igjen fremme samarbeid og kommunikasjon mellom elevene når de diskuterer og deler sine tankeprosesser om brøk. Kommunikasjonskompetanse er også en delkompetanse innen matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Å benytte fysisk konkretiseringsmateriell kan gjøre de abstrakte matematiske ideene rundt brøk mer håndgripelige og konkrete for elevene. Konkretiseringsmaterialet er da fysiske medierende redskaper som brukes for å forstå et abstrakt matematisk objekt eller ide (Säljö, 2010). Dette kan bidra til dypere forståelse av hva brøker egentlig representerer.

Læreverket legger stor vekt på emnet brøk, særlig på 5. trinn. Dette er i tråd med kompetansemålene gjeldende læreplan. At mange av delemnene kommer igjen i lærebøkene for 6. og 7. trinn, er strengt tatt unødvendig. Her har forfatterne valgt å eksponere elevene for delvis samme delemner flere ganger, men tilpasset alder. Jeg mener det er positivt at elevene møter brøk mer enn kun på 5. trinn, samt litt på 6. og 7. trinn. De kan bygge videre på den kunnskapen de allerede har, og får repetert et matematisk emne som er både omfattende og viktig.

6.0 Avslutning

I forkant av forskningen hadde jeg to forskningsspørsmål jeg søkte svar på. Det ene var hvordan læreverket Multi varierer representasjonsformer innen emnet brøk på 5. til 7. trinn. det andre var på hvilken måte læreverket legger opp til en progresjon i representasjoner for brøk i bøkene for 5. til 7. trinn.

Arbeidet med dette prosjektet har hele veien føltes meningsfullt. Jeg har fordypet meg i et sentralt matematisk emne, samtidig som jeg har undervist elever i det samme emnet. På forhånd var jeg innstilt på at arbeidet kom til å bli både tidkrevende og utfordrende. Jeg vurderte å begynne med selve innhentingen av datamateriale, slik at jeg kunne danne meg et bilde av teoriomfanget, men endte opp med å formulere forskningsspørsmål først. Ut fra det kunne jeg finne litteratur. Konsekvensen ble at jeg fant for mye interessant og passende litteratur, og skrev en for omfattende teoridel, som senere måtte kortes ned. Likevel ser jeg at denne teorien gav meg mer forståelse, både for representasjoner og emnet brøk.

Gjennom teoridelen ville jeg få fram viktigheten av representasjoner innen matematikkfaget. En må utvikle representasjonskompetanse for å kunne utvikle matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Matematiske objekter er abstrakte, og uttrykkes via sine representasjonsformer (Duval, 2006). Jeg benyttet Duval sin inndeling i semiotiske systemer, samt overganger mellom hovedregistre, som utgangspunkt da jeg i begynnelsen ønsket å utvikle et analyseverktøy. Teoridelen belyser videre elementer ved brøk og brøkens representasjoner. For å skaffe et bredt bilde av hvordan læreverket varierer sin bruk av representasjonsformer, inkluderte jeg brøkens ulike aspekter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, 2010) i analyseverktøyet. Watanabe (2002) gav innsikt i ulike brøkmodeller brukt som illustrasjoner og støtte i oppgaver. Jeg fant det nyttig å inkludere hans innfallsvinkel om metodebruk ved brøkmodeller, og benyttet det i analysen. Totalt sett gav dette meg muligheter til å undersøke oppgavene i læreverket på en nøyaktig måte.

Analyseverktøyet gjorde det mulig for meg å systematisere innhentingen av datamateriale i tabeller. Jeg måtte likevel analysere hver oppgave for seg. Her lettet bruk av symboler på arbeidet, da det gjorde det visuelt enkelt å kategorisere (Ahl & Helenius, 2021). I analyseprosessen oppstod tvilstilfeller, der jeg måtte foreta valg i kategoriseringen. At jeg tillot meg selv å plassere en oppgave i flere kategorier, førte til at prosessen fløt enklere, og at tvilstilfellene ble redusert. Samtidig førte det til at telling og summering ble mer uoversiktlig, og at dette tok lang tid. Den horisontale analysen var raskt gjennomført, men å visualisere den transparent og oversiktlig krevde flere forsøk med ulike tabeller.

Gjennom analyseprosessen av data, har jeg fått stadig mer detaljert inntrykk av at læreverket varierer representasjonsformer innen emnet brøk, samt legger opp til progresjon i representasjoner for brøk i bøkene for 5. til 7. trinn. I resultat- og diskusjonskapitlene har jeg pekt på hvordan læreverket presenterer brøk for elevene, og diskutert variasjon av representasjonsformer og progresjon i disse.

Et interessant funn i min forskning, er at ikke-diskursive multifunksjonelle registre hadde relativt lav forekomst med prosentandeler mellom 20 og 30 %. Tidligere forskning har pekt på at lærebøker for ofte gir forklaringer med ikoniske representasjoner (Ahl & Helenius, 2021), så her viser min forskning noe annet. Dette har jeg skrevet om i delkapittel 5.2. Mitt funn medfører at matematikklærere må være klar over læreverkets relative mangel på illustrasjoner, slik at de inkluderer bruk av støttende illustrasjoner og figurer i sin undervisning i emnet. Andelen brøkoppgaver som er kognitivt krevende øker merkbart i overgangen mellom 5. og 6. trinn. Resultatene viser dette ved at prosentandelen oppgaver som krever konvertering øker fra 46 % til 56 %. Dette funnet er viktig, da lærere som benytter læreverket Multi, må bruke denne kunnskapen til å forsikre seg om at elevene får tid og muligheter til å utvikle sin forståelse for emnet brøk i sjette klasse. Andelen til aspektet brøk som del av en helhet er lav i læreverket. Aspektet er grunnleggende (Behr et al., 1983), og tidligere forskning viser stor vektlegging (Bjerke et al., 2013). For brukere av læreverket impliserer dette at en må forsikre seg at aspektet blir introdusert tidlig, og ivaretatt, for at elevene skal ha forutsetninger til å utvikle god forståelse for brøk som objekt.

Analysen viste også at brøkmodeller i relativt liten grad benyttes i læreverket, noe jeg har illustrert i diagram 4 i delkapittel 4.2.6. Å kunne variere representasjoner for et matematisk objekt er viktig for å utvikle god matematisk forståelse (Duval, 2006). Brøkmodeller er visuelle, og tilhører ikke-diskursive multifunksjonelle registre, som hadde lav prosentandel. Som lærer i matematikk må en ha dette i bakhodet i planlegging av undervisning, slik at en systematisk kan variere sin bruk av brøkmodeller for å eksponere elevene for et bredt utvalg modeller. Sammenligningsmetoden har under 10 funn totalt i læreverket. Her har både lærebokforfattere og matematikklærere en jobb å gjøre for at elever blir kjent med metoden.

Jeg analyserte forklaringer og utforskningsoppgaver for seg. Her var det utstrakt bruk av flere hovedregistre samtidig. Andelen oppgaver som krever konvertering, og dermed er kognitivt krevende, var fra 70 til 94 %. Disse funnene viser at forfatterne har vektlagt forståelse og dybdelæring ved innlæring av nytt lærestoff.

Konklusjonen i forhold til forskningsspørsmålene er at læreverket Multi varierer representasjonsformer for brøk ved å variere hovedregistre, overganger mellom registre, aspekter ved brøk, brøkmodeller og metode. Jeg konkluderer med at representasjonene avhenger av hvilke delemner av brøk som er plassert hvor i læreverket, og at plassering virker både ryddig og logisk. Progresjon fra 5. til 7. trinn er mest merkbar i bruk av mer kognitivt krevende oppgaver i bøkene for 6. og 7. trinn i forhold til boka for 5. trinn. Dette er omtalt både i kapittel 4 og 5.

Læreverket har noen svakheter, noe jeg har løftet fram i diskusjonskapitlet. Det er rom for forbedring når det gjelder systematisk variasjon av representasjonsformer, og en mer tydelig progresjon i bruk av representasjoner gjennom mellomtrinnet. Likeledes påpeker jeg lærernes ansvar for å få fram ytterligere variasjon, og vektlegging av sider ved brøk som læreverket ikke har lagt vekt på.

Av gjennomgang av tidligere forskning, fikk jeg ideer til hva jeg kunne se etter i analysen. Her fant jeg også ideer og referansepunkter som jeg fikk brukt for i arbeidet. Jeg fikk noe å sammenligne en del av mine resultater med. Det var i etterkant interessant å oppdage at mine funn var både i tråd med tidligere forskning (Bjerke et al., 2013), mens jeg samtidig fikk andre resultater enn tidligere forskning (Ahl & Helenius, 2021). Johansson (2003) benyttet en detaljert metode for å beskrive kognitive krav i oppgaver. Selv om jeg valgte en annen måte å beskrive dette på, kunne jeg sammenligne mine resultater med resultatene til Johansson.

For min egen del, har valg av forskningsspørsmål gitt meg kunnskap som jeg har direkte bruk for i undervisningssituasjon. Resultatene viser at læreverket jeg benytter, har relativt liten andel oppgaver med illustrasjoner og figurer. Observasjoner i undervisningssituasjoner indikerer at elevene gjerne utvikler mer forståelse når jeg bruker konkrete eksempler, og illustrerer på tavla. Jeg er mer bevisst at jeg bør benytte ulike brøkmodeller når jeg forklarer og gir visuelle eksempler. Når en måte å undervise på ikke er dekkende, har jeg nå mer faglig trygghet, og kan dermed bedre variere både vanskegrad og måter å undervise på. Der jeg tidligere hadde tendenser til å ha søkelys på prosedyre, har jeg innsett at det viktigste er å skape forståelse. Et spesifikt eksempel på dette er hvordan jeg forklarer divisjon av brøk, hvor jeg nå er mer bevisst elevenes behov for støttende brøkmodeller og det å visuelt vise hvorfor prosedyre er som den er. Resultatene viste også at arealmodellen var dominerende. Det har ført til at jeg har blitt mer nøye med å også inkludere mengde- og lengdemodellen når jeg visualiserer brøk. Få funn av bruk av sammenligningsmetoden, har gjort meg bevisst på at også denne metoden har en verdi. I år underviser jeg matematikk på 5. trinn, og jeg har forsøkt å implementere metoden når jeg illustrerer brøk på tavla. Her har jeg tidligere i all hovedsak benyttet delen-det-hele-metoden.

Jeg har analysert et læreverk med hensyn til emnet representasjoner av brøk. Videre forskning kan med fordel sammenligne variasjon av representasjonsformer i flere læreverk fra andre forlag. Her kan en også forske på andre matematiske emner enn brøk, da variasjon av representasjonsformer generelt er viktig for matematisk forståelse, og ikke bundet opp til kun enkelte matematiske emner. En annen innfallsvinkel, er å forske på det tilhørende digitale innholdet til Gyldendal. Det inkluderer Multi fagrom, som er digital utgave av læreboka. Et annet digitalt element er Multi Smart Øving. Her møter elevene individuelt tilpassede oppgaver. Multi sine halv- og helårsprøver er digitale. Et dypdykk her kan være interessant for videre forskning.

Litteraturliste

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2021). *A framework for analyzing progress in concept knowledge in mathematics textbooks*. I G.A. Nortvedt, N.F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B.E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H.K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić, J. & A. Wernberg (Red.). *Bringing Nordic mathematics education into the future. Preceedings of Norma 20.* SMDF.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A.-C. & Nordberg, G. (2021). *Multi 5 A elevbok* (3.utgave). Gyldendal.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A.-C. & Nordberg, G. (2021). *Multi 5 B elevbok* (3.utgave). Gyldendal.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A.-C. & Nordberg, G. (2021). *Multi 6 B elevbok* (3.utgave). Gyldendal.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A.-C. & Nordberg, G. (2022). *Multi 7 A elevbok* (3.utgave). Gyldendal.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A.-C. & Nordberg, G. (2020). *Multi 5 A Lærerens bok* (3.utgave). Gyldendal

Aubert, K. E. (2021, 11.mars). Brøk. I Store norske leksikon. brøk – Store norske leksikon (snl.no)

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. I R. L. M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-125). Hentet fra http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html.

Bjerke, A.H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall – Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B.B. Moen, A. Reinertsen, T. Solhaug (Red.). *FoU i praksis 2012 conference proceedings*. Tapir akademisk forlag, Trondheim.

Brøkregning (2023, 20.april). I matematikk.net. /Brøkregning – Matematikk.net

Brøk (u.å.). I matematikk.org. Hentet 12.april 2024 fra Brøk (matematikk.org)

Check.J., Schutt,R., (2012) *Research methods in education.* SAGE.

Enge, O., Valenta, A., (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten*, 24(1), 8-12.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2007). *The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish and Taiwanese textbooks.* I J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park & D.-Y. Seo (Red.), *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education 31, vol 2,* 93-200. PME 31.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). *A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries.* I Mathematical Thinking and Learning, 12(2), s. 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). *Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions.* An International Journal, 64(3), 293-316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*.Educational Studies in Mathematics, 6, 103-102),p.103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Grønmo, S. (2023, 16.januar). Kvalitativ metode. I *Store norske leksikon.* kvalitativ metode – Store norske leksikon (snl.no)

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum*. [Doktorgradsavhandling]. Luleå Department of Mathematics, Luleå University of Technology.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*.Mathematics Learning Study Committee,Center for Education, Washington, DC. National Academy Press.

Kleven, T. A., Tveit, K. & Hjardemaal, F. (2014). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Fagbokforlaget.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.

Næraal, A. (2024). Norges 50 største forlag. Bok365. Norges 50 største forlag - BOK365.no

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M. & Chen, M. (2012). *Early Predictors of High School Mathematics Achievement*. Psychological Science, 23(7), 691-697. doi: 10.1177/0956797612440101

Säljö, R. (2010). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen akademisk forlag.

Utdanningsdirektoratet. (2020). Læreplan i matematikk 1.-10.trinn.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The development of higher Psychological Processes*. I M. Cole, V. John-Steiner, S.Scribner & E. Souberman (Red.). Harvard University Press.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. I *Teaching Children Mathematics*, 8(8), s. 457-463. NCTM.