Likningsomgrepet i lærebøker

Ein kvalitativ innhaldsanalyse som undersøkjer korleis tre lærebøker i matematikk på 7. trinn legg til rette for utvikling av eleven si forståing av likningsomgrepet

TORBJØRN RØSSLAND

RETTLEIAR

Olav G. Dovland

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag
MA-934

Føreord

I løpet av dei siste tre åra har eg gjennom lærarspesialistutdanning og masteroppgåveskriving ved UiA fått sjansen til å fordjupa meg i sentrale emne innanfor matematikk og matematikkdidaktikk. Studieforløpet har gitt meg eit større matematisk overblikk, og i tillegg har eg fått innblikk i mange gode pedagogiske reiskap som kan nyttast i klasserommet. Som matematikklærar har eg som mål å synleggjera for elevane kor fengjande, og ikkje minst nyttig, matematikkfaget kan vera. Studieforløpet har difor vore gull verdt.

I løpet av lærarspesialistutdanninga var me innom mange interessante tema. Særleg givande synest eg det var å få innblikk i ulike tilnærmingar til algebra. I tillegg fatta eg stor interesse for den sentrale rolla representasjonar har når det kjem til det å skapa matematiske forståingar. Då eg oppdaga at representasjonar har spelt ei avgjerande rolle i utviklinga av algebra, såg eg det som innlysande at eg måtte freista å kombinera desse emna i ei masteroppgåve.

Det å kombinera studium og oppgåveskriving med jobb og familie har tidvis vore ein krevjande affære. Samtidig ville eg ikkje ha vore forutan erfaringane og kunnskapane som studiet ved UiA har gitt meg. Eg vil difor retta ein takk til alle dei dyktige og kunnskapsrike fagpersonane som eg har hatt gleda av å møta på UiA. I tillegg må eg trekkja fram at det har vore særs givande å studera i lag med dei kjekke og kloke medstudentane på lærarspesialiststudiet.

Eg vil også retta ein stor takk til rettleiaren min, Olav G. Dovland, som har støtta meg i arbeidet med å stabla på beina ei masteroppgåve. Du har vist interesse og vore tilgjengeleg, og det har alltid vore lærerikt, og ikkje minst triveleg, å ha rettleiingsmøte med deg.

Avslutningsvis ønsker eg å takka kone og barn for at dei har klart å bera over med ein litt fjern og einspora mann og pappa dei siste åra.

Stord, mai 2024

Samandrag

Med utgangspunkt i at algebra er eit problemområde for norske elevar, gjennomfører denne masteroppgåva ein kvalitativ innhaldsanalyse for å undersøkja følgjande problemstilling:

- *Korleis legg tre lærebøker i matematikk på 7. trinn til rette for utvikling av eleven si forståing av likningsomgrepet?*

For å svara på problemstillinga nyttar oppgåva desse forskingsspørsmåla:

1) *Korleis nyttar lærebøkene døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar for å gi eleven tilgang til likningsomgrepet?*
2) *Korleis nyttar lærebøkene representasjonar for å fremja eleven si forståing av likningsomgrepet?*

I oppgåva blir likningsrelatert innhald i likningskapitla i følgjande lærebøker analysert: Matematikk 7 (Cappelen Damm), Multi 7B (Gyldendal) og Matemagisk 7B (Aschehoug). Ronda og Adler (2017) sitt MDITx-rammeverk blir nytta for å undersøkja forskingsspørsmål 1). For å undersøkja forskingsspørsmål 2) tek ein i bruk eit kategorisystem som nyttar både deduktive og induktive tilnærmingar. Kategorisystemet tar utgangspunkt i Duval (2017) si klassifisering av semiotiske register.

I tillegg til det teoretiske grunnlaget i det analytiske rammeverket nyttar studien Sfard (1991) sin reifikasjonsteori som epistemologisk fundament. I teoridelen ser ein difor nærmare på korleis algebraiske forståingar har utvikla seg i eit historisk perspektiv. I tillegg trekk ein fram kjenneteikn på tradisjonell skulealgebra og utfordringar kring overgangen frå aritmetiske til algebraiske forståingar. Teori kring semiotiske representasjonar blir også gjennomgått.

MDITx-analysen viste at Matematikk 7 konsekvent nytta generaliserande døme, medan Multi 7B og Matemagisk 7B hadde døme som tilførte eit større spekter av variasjon. I Matematikk 7 hadde ordbruken og oppgåvene eit relativt gjennomgåande prosedyrefokus. I Multi 7B registrerte ein at ordbruken innleiingsvis støtta opp om oppgåvene sitt forsøk på å etablera algebraiske forståingar med utgangspunkt i ein kjend aritmetisk kontekst, medan ein i dei seinare lærebokleksjonane fann oppgåver og ordbruk som fremja eit prosedyrefokus. I Matemagisk 7B var det innanfor både ordbrukkategorien og oppgåvekategorien ei jamnare fordeling mellom kategoriar som potensielt kan støtta eleven sin tilgang til likningsomgrepet. MDITx-analysen avdekka også at lærebøkene i hovudsak nytta eksemplifiseringar ved legitimering av matematiske utsegn.

Analysen av representasjonar viste av Matematikk 7 og Multi 7B i stor grad nytta symbolspråket til behandlingar, og at desse lærebøkene vektla konverteringsretninga NS → S. Matemagisk 7B prioriterte konverteringsretninga S → NS, og framheva også bruk av det naturlege språket. I tillegg hadde Matemagisk 7B ein aktiv og variert bruk av overgangsrepresentasjonar, noko som førte til større variasjon i konverteringsretningar.

Som pedagogiske implikasjonar av studien blir det trekt fram at det er sentralt at elevar får høve til å nytta det naturlege språket i arbeid med likningar, og at dei samtidig får innblikk i varierte representasjonar og representasjonsovergangar.

Summary

Based on the fact that algebra is a problem area for Norwegian students, this master thesis conducts a qualitative content analysis to investigate the following problem statement:

- *How do three 7th grade mathematics textbooks facilitate the development of student's understanding of the equation concept?*

To answer the problem statement, the thesis uses the following research questions:

1) *How do the textbooks use examples, tasks, word use and legitimations to give students access to the equation concept?*
2) *How do the textbooks use representations to promote the students understanding of the equation concept?*

The thesis analyses equation-related content from chapters dealing with equations in the following textbooks: Matematikk 7 (Cappelen Damm), Multi 7B (Gyldendal) and Matemagisk 7B (Aschehoug). Ronda and Adler's (2017) MDITx framework is used to investigate research question 1). To investigate research question 2), a category system that utilizes both deductive and inductive approaches is used. The category system is based on Duval's (2017) classification of semiotic registers.

Besides the theoretical basis in the analytical framework, the study uses Sfard's (1991) reification theory as an epistemological foundation. The theory part therefore takes a closer look at how algebraic understandings have developed in a historical perspective. In addition, characteristics of traditional school algebra and challenges related to the transition from arithmetic to algebraic understandings are highlighted. Theory related to semiotic representations is also reviewed.

The MDITx analysis revealed that Matematikk 7 consequently used generalizing examples, while Multi 7B and Matemagisk 7B had examples that provided a greater range of variation. In Matematikk 7, the word use and tasks had a relatively consistent procedural focus. In Multi 7B, it was found that the word use initially supported the tasks' attempt to establish algebraic understandings based on a familiar arithmetic context, while in the later textbook lessons, tasks and word use were mainly found to promote at procedural focus. Within both the word use category and the task category in Matemagisk 7B, there was a more even distribution between categories that potentially can support the student's access to the equation concept. The MDITx analysis also revealed that the most common way of legitimizing mathematical statements was through exemplifications.

The analysis of representations showed that Matematikk 7 and Multi 7B largely used symbolic language for treatments, and that these textbooks emphasised the conversion direction NS → S. Matemagisk 7B prioritised the conversion direction S → NS, and also promoted the use of natural language. In addition, Matemagisk 7B had an active and varied use of transitional representations, which led to greater variation in conversion directions.

The pedagogical implications of the study state that it is essential that students are given the opportunity to use natural language when working with equations, and that they at the same time experience varied representations and transformations of representations.

Innhald

Føreord iii
Samandrag v
Summary vi
1 Innleiing 9
1.1 Bakgrunn og relevans 9
1.2 Problemstilling og forskingsspørsmål 10
1.2.1 Avklaringar 10
1.3 Oppgåva sin struktur 11
2 Teori 13
2.1 Likningsomgrepet 13
2.2 Operasjonell og strukturell forståing av matematikk 13
2.2.1 Dualiteten mellom prosess og objekt 13
2.2.2 Utviklinga av matematiske objekt 14
2.3 Tre sentrale stadium i algebraen si historiske utvikling 15
2.4 Skulealgebra 16
2.5 Overgangen frå aritmetikk til algebra 17
2.6 Semiotiske representasjonar 17
2.6.1 Klassifisering av semiotiske register 18
2.6.2 Transformasjon av semiotiske representasjonar 19
2.6.3 Multiple eksterne representasjonar og språket sin funksjon i læringssituasjonar 20
2.7 Læreboka si rolle i matematikkfaget, og forsking på lærebøker 21
2.7.1 Tidlegare forsking 21
2.8 Analytisk rammeverk 22
2.8.1 MDITx-rammeverket 22
2.8.2 Analyseverktøy for analyse av representasjonar og representasjonsovergangar 26
2.9 Oppklaring kring læringsteoretisk ståstad 29
3 Metode 31
3.1 Utval og avgrensingar 31
3.2 Kvalitativ innhaldsanalyse som forskingsmetode 32
3.2.1 Prinsipp og prosedyrar for kvalitative innhaldsanalysar 32
3.3 Utarbeiding av kategorisystem for analyse av representasjonar 33
3.4 Testing og revisjon av analyseverktøya 34
3.5 Gjennomføringa av analysane 34
3.5.1 Avklaringar og aspekt kring bruk av MDITx-rammeverket 35
3.6 Gyldigheit, pålitelegheit og etiske omsyn 36

4 Analyse og resultat 39
4.1 Resultat MDITx 39
4.1.1 Døme 40
4.1.2 Oppgåver 41
4.1.3 Namngiving og ordbruk 42
4.1.4 Legitimeringar 43
4.2 Resultat representasjonar 43
4.2.1 Behandlingar 45
4.2.2 Konverteringar 46
4.2.3 Samankopling av representasjonar 49
4.2.4 Overgangsrepresentasjonar 51
5 Diskusjon 53
5.1 Bruk av døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar i lærebøkene 53
5.2 Bruk av representasjonar for å fremja forståing for likningsomgrepet 56
6 Konklusjon 61
6.1 Personlege refleksjonar og pedagogiske implikasjonar 63
6.2 Svakheiter ved studien, og forslag til vidare forsking 64
7 Referanseliste 65

1 Innleiing

Denne masteroppgåva nyttar kvalitativ innhaldsanalyse for å undersøkja korleis tre lærebøker på 7. trinn legg til rette for å utvikla elevar si forståing av likningsomgrepet. Innleiingsvis blir forskingsområdet sin bakgrunn og relevans trekt fram, før problemstilling med tilhøyrande forskingsspørsmål blir presentert.

1.1 Bakgrunn og relevans

Det er avgjerande å beherska algebra for å lukkast med vidare studiar i fag som krev bruk av matematikk (Capraro & Joffrion, 2006; Grønmo et al., 2017). Diverre viser fleire internasjonale studiar at algebra skil seg ut som eit problemområde for norske elevar (Grønmo et al., 2017). Over tid har resultata innanfor emnet vore samanliknbare med land med langt færre ressursar enn Noreg, og er difor i følgje Grønmo et al. (2017) alarmerande svake.

Historisk sett har problemløysing fungert som ein inngangsport til algebra, kor ei gradvis formalisering av verbale metodar bana veg for moglegheita til å representera og løysa likningar på algebraisk symbolform (Harper, 1987; Rojano, 1996). Fleire (Harper, 1987; Kieran, 1990b; Sfard, 1991) trekk parallellar mellom individet si læring av algebra og den historiske utviklinga til algebra, eit perspektiv den gjeldande læreplanen (LK 20) også ser ut til å leggja til grunn. Under kjerneelementet «Abstraksjon og generalisering» blir det nemleg understreka at «utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). I tillegg ser ein at kompetansemåla på 5. og 7. trinn som omhandlar likningar følgjer ein progresjon kor elevane først skal løysa likningar gjennom logiske resonnement, før dei skal kunna nytta ulike strategiar for å løysa lineære likningar (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Likningar, i likskap med alle matematiske omgrep, kan oppfattast som ein prosess og/eller eit objekt (Sfard, 1991). I følgje Sfard (1991) banar prosessforståinga veg for objektforståinga gjennom ein krevjande abstraksjonsprosess, kor ho skildrar at prosessen på eit nivå blir til eit objekt på eit høgare nivå. Matematiske objekt har likevel ingen reell fysisk eksistens, noko som betyr at ein berre har tilgang til matematiske objekt gjennom semiotiske representasjonar (Duval, 1999; Duval, 2006; Duval, 2017; Sfard, 1991). Duval (2017) hevdar at matematisk forståing dreiar seg om å kjenna att matematiske objekt på tvers av ulike representasjonar og representasjonsregister, og plasserer transformasjon av semiotiske representasjonar i sentrum av matematisk aktivitet. I LK 20 blir dette perspektivet ivareteke ved at det i kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» blant anna blir understreka at «elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Tidlegare forsking framhevar at norske elevar møter ei algebraundervisning med eit tydeleg manipuleringsfokus (Kongelf, 2019), kor elevane i liten grad kan forklara bakanforliggande samanhengar og strukturar (Naalsund, 2012). Når eg tenkjer tilbake på korleis eg sjølv på 90-

talet fekk undervisning i temaet likningar, stemmer nok mine erfaringar godt med desse observasjonane. Metodar for likningsløysing blei presenterte av læraren og læreboka, og desse blei nytta etter beste evne, utan at eg eigentleg forstod kvifor metodane fungerte. Samtidig minnast eg at arbeid med likningar i all hovudsak dreia seg om symbolmanipulering, og det å løysa tekstproblem ved hjelp av algebraiske likningar. Ein kan difor hevda at tilgangen til likningsomgrepet blei mogleggjort gjennom eit snevert utval av representasjonar og representasjonsovergangar. Likevel vågar eg å påstå at eg over tid fekk ei meir heilskapleg forståing av likningsomgrepet, slik at eg for fullt kunne verdsetja dette overlegne problemløysingsverktøyet. Akkurat kva tid ei slik type forståing dukka opp er vanskeleg å peika på, men etter mange år med jobbing med likningar i ulike samanhengar, og på ulike måtar, blei det matematiske objektet «likningar» gradvis meir synleg. Det å erfara ei slik form for forståing av eit slikt essensielt matematisk reiskap, står i sterk kontrast til den lite meiningsfulle symbolmanipuleringa eg heldt på med i dei tidlege møta med likningsomgrepet.

Både som lærar og elev har eg nytta matematikkboka flittig. Denne personlege erfaringa er ikkje unik. Forsking viser nemleg at læreboka speler ei sentral rolle i matematikkfaget, og at læreboka legg føringar for kva som blir undervist i matematikkklasserommet (Askew et al., 2010; Fan & Kaeley, 2000; Grønmo & Onstad, 2013; Kongelf, 2019). Innhaldet i matematikklærebøker har difor stor innverknad på elevane si læring og forståing innanfor ulike matematiske emne.

1.2 Problemstilling og forskingsspørsmål

LK 20 framhevar at elevane på 7. trinn skal læra seg varierte metodar for likningsløysing, noko som sender signal om at dei skal etablera sentrale forståingar for likningsomgrepet. I tillegg til personlege interesser, i form av at eg dette året underviser i matematikk på dette trinnet, er det difor naturleg å fokusera undersøkinga inn mot 7. trinn. Med utgangspunkt i dette, og den skisserte bakgrunnen for oppgåva, blir følgjande problemstilling framstilt:

- *Korleis legg tre lærebøker i matematikk på 7. trinn til rette for utvikling av eleven si forståing av likningsomgrepet?*

For å få innblikk i ulike fasettar av korleis lærebøkene legg til rette for forståing av likningsomgrepet, vil oppgåva ta utgangspunkt i følgjande forskingsspørsmål:

1) *Korleis nyttar lærebøkene døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar for å gi eleven tilgang til likningsomgrepet?*
2) *Korleis nyttar lærebøkene representasjonar for å fremja eleven si forståing av likningsomgrepet?*

1.2.1 Avklaringar

For å svara på forskingsspørsmåla, vil det bli gjennomført ein kvalitativ innhaldsanalyse av likningsrelatert innhald i likningskapitla i tre matematikklærebøker på 7. trinn. Dette vil innebera bruk av to ulike analyseverktøy, kor ein nyttar både kvalitative og kvantitative aspekt. Ronda og Adler (2017) sitt MDITx-rammeverk tek sikte på å undersøkja korleis døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar blir nytta som medierande reiskap for å gi innblikk i eit læringsobjekt. Det er difor naturleg å nytta dette analyseverktøyet for å svara på forskingsspørsmål 1). For å svara på forskingsspørsmål 2) ligg Duval (2017) si klassifisering av semiotiske register (sjå Tabell 1, s. 18) til grunn. Medan ein nyttar deduktive metodar i det første analyseverktøyet, synte det seg naudsynt å utvida Duval (2017) sitt kategorisystem med induktive element. Dette blei gjort med støtte i supplerande teori.

Analysen vil truleg avdekka både likskapar og skilnadar mellom lærebøkene. Det vil difor vera naturleg å samanlikna dei ulike resultata mot kvarande, noko som medfører at undersøkinga vil ha eit komparativt element.

Matematisk forståing er eit komplekst omgrep. I gjennomgangen av teorien og det analytiske rammeverket vil det difor bli presentert fleire perspektiv på kva matematisk forståing dreiar seg om. I teoridelen vil likningsomgrepet bli utdjupa. Sentrale omgrep knytt opp mot dei ulike analyseverktøya vil også bli definerte, medan omgrepa *lærebøker* og *eleven* derimot vil bli avklart nedanfor.

I denne oppgåva tyder *lærebok* den trykte utgåva av elevane si grunnbok. Dette avgrensar studien ved at oppgåvebøker og eventuelt tilhøyrande rettleiingar og læremiddel ikkje blir analyserte.

Studien undersøkjer korleis lærebøker bidreg til å utvikla *eleven* si forståing. I ein slik samanheng blir det då lagt til grunn at *eleven* sine faglege føresetnadar er innanfor eit normalområde, sidan dette er eit spekter som tradisjonelle lærebøker normalt siktar seg inn på.

1.3 Oppgåva sin struktur

Innleiingsvis har det blitt gjort reie for relevans og bakgrunn for studien. I tillegg har problemstilling og forskingsspørsmål blitt framstilt, etterfølgt av naudsynte avklaringar. I kapittel 2 blir relevant teori for undersøkinga gjennomgått, før ein presenterer studien sine analytiske verktøy. Kapittel 3 fokuserer på oppgåva sin metode. Forskingsdesign og forskingsmetode blir difor gjennomgått. I tillegg blir aspekt ved studien sin kvalitet og etiske omsyn, samt utarbeidinga av kategorisystemet for analyse av representasjonar belyst.

Etter metodedelen følgjer det i kapittel 4 ein detaljert presentasjon av resultata frå analysen. Her blir også ei rekkje døme på ulike kategoriar synleggjort. I kapittel 5 blir resultata diskutert i lys av problemstilling, forskingsspørsmål og teorigrunnlag, før ein i kapittel 6 rundar av oppgåva med å svara på problemstillinga og forskingsspørsmåla. Samtidig som konklusjonar blir trekte, vil det også bli løfta fram tankar kring oppgåva sin prosess og relevans. I samband med denne refleksjonen blir pedagogiske implikasjonar belyst, før ein avslutningsvis trekk fram svakheiter med undersøkinga og kjem med forslag til vidare forsking.

2 Teori

Denne delen av oppgåva tek sikte på å presentera eit teoretisk bakteppe for studien. Vidare blir difor emne som er relevante for å kunna svara på problemstillinga og forskingsspørsmåla belyste. Først blir likningsomgrepet omtala, før aspekt kring matematisk forståing blir gjennomgått. Deretter blir tankar kring skulealgebra presenterte, før ein ser nærmare på korleis forståingar for likningsomgrepet har utvikla seg i eit historisk perspektiv. Aspekt og utfordringar ved overgangen frå aritmetikk til algebra blir også skildra, før ein ser nærmare på teori kring representasjonar si rolle for å skapa forståing for matematiske objekt. Avslutningsvis blir forsking på lærebøker i matematikkfaget omtala og trekt fram, før kapittelet blir avrunda med ein presentasjon av undersøkinga sine analytiske verktøy og ei oppklaring kring oppgåva sin læringsteoretiske ståstad.

2.1 Likningsomgrepet

I ei likning representerer uttrykka på begge sider av likskapsteiknet den same verdien (Otten et al., 2019). Dette inneberer «[…] at ei algebraisk likning er (a) ein struktur som koplar to ulike algebraiske uttrykk, og (b) at to eller fleire ulike algebraiske uttrykk kan bli konstruerte for å representera den same situasjonen.» (Kieran et al., 2016, s. 28. Eiga omsetjing).

I likningar har bokstavar rolle som *ukjende* og/eller *konstantar* noko som medfører at likningar kan nyttast som eit problemløysingsreiskap (Usiskin, 1999). Målet med å løysa ei likning er å finna verdien til det ukjende. Dette kan gjerast ved å kontinuerleg ta omsyn til at likevekta blir oppretthaldt, slik at ein gjennom ulike manipuleringsteknikkar som medfører å gjera «likt» på begge sider, kan isolera det ukjende (Otten et al., 2019).

2.2 Operasjonell og strukturell forståing av matematikk

I følgje Sfard (1991) kan matematiske førestillingar «[…] oppfattast på to fundamentalt forskjellige måtar: *strukturelt* – som objekt, og *operasjonelt* – som prosessar.» (s. 1. Eiga omsetjing). Ei objektforståing betyr at ein ser matematiske objekt som ein statisk struktur, slik at ein kan «[…] kjenna att ideen på eit augneblink og manipulera han som ein heilskap, utan å gå inn på detaljar.» (Sfard, 1991, s. 4. Eiga omsetjing). Operasjonelle forståingar er på den andre sida detaljerte og dynamiske, noko som inneberer at ei prosessoppfatning av matematiske idear utgjer «[…] ein potensiell […] heilskap som kjem til syne gjennom ei rekkje sekvensielle handlingar.» (Sfard, 1991, s. 4. Eiga omsetjing).

2.2.1 Dualiteten mellom prosess og objekt

Sfard (1991) trekk fram at operasjonelle og strukturelle forståingar har utfyllande kvalitetar, slik at matematiske omgrep har ein prosess-objekt-dualitet. Denne tosidigheita meiner ho blant anna kjem til syne når ein arbeidar med krevjande matematiske problem, ved at ein då må ta i bruk både operasjonelle og strukturelle forståingar for å løysa problemet. Gray og Tall (1994) ser tilsvarande dualitet i form av *procept*, kor dei hevdar at ei vellukka forståing av matematikk dreiar seg om ei fleksibel nyttiggjering av prosess og konsept.

Dualiteten mellom prosess og objekt fører med seg eit tvityde kring notasjon, noko som kan skapa utfordringar for elevane (Gray & Tall, 1994). Innanfor temaet likningar kan til dømes det at likskapsteiknet kan betraktast både som eit symbol på identitet, og som ein operasjonskommando, vera til hinder for elevane si forståing av ekvivalens (Sfard, 1991). Det at elevane ser på likskapsteiknet som eit signal om *å gjera noko* (Behr et al., 1980), og «[…] som eit symbol som skil eit problem frå svaret» (Kieran, 1981, s. 324. Eiga omsetjing), fører til at «[…] elevar assosierer likskapsteiknet med dei aritmetiske operasjonane som ein utfører for å finna det endelege svaret.» (Knuth et al., 2008, s. 516. Eiga omsetjing). Det å forstå likskapsteiknet som eit relasjonelt symbol på ekvivalens mellom to matematiske uttrykk er avgjerande for elevane si forståing av likningsomgrepet, noko Knuth et al. (2006) sin studie underbygger ved at dei fann at ei relasjonell forståing av likskapsteiknet fremja elevane sin kompetanse til å løysa algebraiske likningar.

Sfard (1991) ser utfordringar med at elevar gjennom ei kvasi-strukturell tilnærming kan ta utgangspunkt i spesifikke representasjonar og prototypar for å manipulera ulike konsept. Ved likningsløysing kan dette koma til syne gjennom at elevane kan sjå ut til å tolka likskapsteiknet som ein ekvivalent relasjon, sjølv om dei eigentleg følgjer innlærte prosedyrar. Akkurat eit slik funn gjorde Kieran (1981) då ho fann at eldre elevar tilsynelatande hadde ei forståing for at begge sider av likskapsteiknet hadde lik verdi, men at dei likevel nytta prosedyrar som tenderte mot å bruka likskapsteiknet som ein operator. Sfard og Linchevski (1994) trekk fram at kvasi-strukturelle oppfatningar kan hindra elevar sin vidare matematiske utvikling ved at dei kan «[…] dominera elevar si tenking som eit overgrodd ugras, som ikkje gir rom for andre, meir meiningsfulle perspektiv.» (s. 119. Eiga omsetjing).

2.2.2 Utviklinga av matematiske objekt

Sidan strukturelle forståingar er meir abstrakte enn operasjonelle, argumenterer Sfard (1991) for at operasjonell kunnskap i all hovudsak går forut strukturell kunnskap. Det at majoriteten av matematiske idear har utspring i prosessar hevdar ho er gjeldande både i eit historisk, og i eit individuelt perspektiv.

For å etablera ei objektforståing, meiner Sfard (1991) at ein må gå gjennom tre struktureringsnivå i form av *interiorisering, kondensering* og *reifikasjon*. Interiorisering inneberer utføring av sekvensielle prosessar på kjende matematiske objekt. Kondensering krev eit meir heilskapleg bilete av dei stegvise prosessane, slik at desse blir komprimerte til meir handterlege einingar. Dette skapar eit betre innblikk i underliggjande prosessar, og fører til at ein i større grad ser samanhengar mellom relaterte representasjonar. Trass dette understrekar Sfard (1991) at kondenseringsfasen er nært knytt opp mot ein prosess. Først når ein lausriv seg frå denne prosessen, og klarer å sjå den matematiske førestillinga som eit heilskapleg objekt på tvers av representasjonar, hevdar ho den matematiske ideen har blitt reifisert. Overgangen frå interiorisering til høgare abstraksjonsnivå skjer derimot ikkje automatisk. Sfard (1991) peikar nemleg på at «as long as the computational processes have been presented in the purely operational way, they could not be sqeezed into static abstract entities […]» (s. 24).

Sfard (1991) trekk fram at det […] teoretisk sett vil vera mogleg å gjennomføra om lag all matematikk reint operasjonelt.» (s. 23. Eiga omsetjing). Sidan det er heilt avgjerande å ha tilgjengelege matematiske objekt som ein kan utføra prosessar med for å utvikla nye objekt, understrekar ho likevel behovet for strukturelle forståingar. Sjølv om prosessen med å utvikla matematiske objekt kan vera særs krevjande, er det eit viktig poeng at reifikasjon både styrkar og forenklar den matematiske utføringa. Sfard og Linchevski (1994) skildrar nemleg overgangen frå operasjonelle til strukturelle forståingar på følgjande måte: «What happens in such a transition may be compared to what takes place when a person who is carrying many different objects loose in her hands decides to put all the load in a bag.» (s. 198).

2.3 Tre sentrale stadium i algebraen si historiske utvikling

I eit matematikkhistorisk perspektiv har bruk av nye representasjonar bana veg for utviklinga av nye matematiske omgrep (Sfard, 1991). Når ein ser på korleis algebra har utvikla seg gjennom historia, kjem dette fenomenet tydeleg fram. Gjennom tre sentrale stadium i form av retorisk, synkopert og symbolsk algebra, finn ein nemleg markante skifte i korleis algebraiske idear og utrekningar har blitt representerte (Sfard, 1995). I perioden med retorisk algebra, som er i perioden frå Babylonarane til Diophantus (ca. år 250 evt.), blei alle argument skrive med ord, utan noko form for alternativ symbolbruk (Harper, 1987). Denne tilnærminga endra seg då algebraen blei synkopert ved at Diophantus byrja å bruka bokstavar for ukjende storleikar (Harper, 1987). Framleis innehaldt den synkoperte algebraen retoriske element, og takka vera denne samanblandinga av representasjonsformer kunne problemutsegn no skiljast frå likninga som løyser problemet (Rojano, 1996).

Sjølv om Diophantus sin praksis blir rekna som eit sentralt skifte i algebraen si utvikling, handla algebra på dette stadiet om å finna verdien til bokstavane som representerte det ukjende, snarare enn å uttrykkja det generelle (Harper, 1987). Først då Vieta på 1600-talet introduserte bokstavar til å representera gjevne storleikar, blei det mogleg å skildra generelle løysingsmetodar ved hjelp av eit dedikert algebraisk symbolsystem (Kieran, 1990b).

Sfard og Linchevski (1994) trekk fram at Diophantus sine metodar var eit betydeleg steg i mot ei strukturell forståing av algebra, ved at han opererte på uttrykk av ord og symbol som om dei var tal. Likevel understrekar dei at retoriske og synkoperte metodar er operasjonelle av karakter ved at dei skildrar algoritmiske prosessar. Først med Vieta sitt gjennombrot fekk ein eit reiskap for å skapa ei heilskapleg forståing av algebra. Kieran (1990b) trekk nemleg fram at det kondenserte algebraiske symbolsystemet mogleggjer ei strukturell forståing av algebra ved at dei symbolske uttrykka kan oppfattast som strukturelle objekt. I den historiske utviklinga av algebra finn ein difor eit gradvist skifte frå operasjonelle til strukturelle forståingar (Sfard & Linchevski, 1994).

Harper (1987) fann indikasjonar på at elevar gjennom skuleåra utviklar forståingar i samsvar med den historiske utviklinga til algebra, ved at dei overfører kunnskapar frå retoriske, til synkoperte til symbolske løysingsmetodar. Han set studien i samanheng med Küchemann (1978) sine seks nivå av elevtolkingar av bokstavar, og argumenterer for at det er ein parallell mellom eit individ si ontogenetiske utvikling og den phylogenetiske evolusjonen, noko som betyr at eleven si utvikling av matematiske idear oppstår i same rekkefølgje som ideane har utvikla seg gjennom historia (Harper, 1987).

2.4 Skulealgebra

Kieran (1990b) ser utfordringar med at fleirtalet av lærebøker ikkje tek omsyn til den historiske utviklinga til algebra når dei introduserer algebraiske objekt. Sjølv om dei fleste bøkene innleiingsvis prøver å omgå det algebraiske symbolspråket ved å visa enkelte aritmetiske løysingsmetodar på algebraiske likningar, meiner ho dette er ein prosedyremessig fasade. Som regel blir det nemleg raskt forventa at likningar skal løysast med formelle algebraiske metodar. Kieran (1990b) meiner difor at skulealgebraen har eit strukturelt preg, noko som kan by på utfordringar sidan elevar ofte ikkje er klare for å operera på algebraiske uttrykk som objekt ved bruk av metodar som skil seg klart frå aritmetiske.

Kaput (2000) tek til orde for at ein algebra som består av eit nett av dugleikar og kunnskapar skal gjennomsyra matematikkundervisninga på alle trinn, noko som står i kontrast til den tradisjonelle forma for algebraundervisning, som han meiner er «[…] sein, brå, isolert og kunstig […]» (s. 1. Eiga omsetjing). Det gjennomgåande manipuleringsfokuset i den tradisjonelle skulealgebraen, i kombinasjon med sein og isolert introduksjon, meiner han er så skadeleg at han uttalar at: «[…] this algebra is the disease for which it purports the cure!» (Kaput, 2000, s. 1).

Innanfor skulealgebraen peikar Mason (1996) på det same tekniske fokuset som Kaput (2000) ved at det ofte førekjem ein forhasta overgang frå ord til algebraiske symbol («rush to symbols»), slik at arbeid med algebra hovudsakleg dreiar seg om å utføra formelle manipuleringsreglar. Mason (1996) trekk fram at ei slik mekanisk undervisningsform ofte er lite meiningsfull, og kan gjera algebra til ei uoverkommeleg hindring for elevar. Han har difor lite til overs for praksisen, noko følgjande sitat får fram: «Teaching algebra the way we currently do is like teaching people to speak by making them move their mouths into certain positions, over and over--ridiculous!» (Mason, 1996, s. 83).

Både Kieran (1990a) og Sfard og Linchevski (1994) vektlegg at det algebraiske symbolspråket er semantisk svakt, og at det difor er sentralt at elevane skapar forståing for dei algebraiske symbola. Bednarz og Janvier (1996) ser lite spor av ein slik praksis innanfor den tradisjonelle algebraundervisninga, og peikar på at elevane gjerne møter ein algebra strippa for relevans, slik at algebraundervisninga i hovudsak er «[…] ein studie av det algebraiske språket og symbolmanipuleringane som er naudsynte for ein eventuell bruk av det algebraiske verktøyet i ein problemløysingskontekst.» (s. 116. Eiga omsetjing).

Usiskin (1999) knyt bokstavbruk opp mot skulealgebra. Samtidig understrekar Radford (2010) at bokstavar ikkje er den einaste reiskapen ein har for å kunna tenka algebraisk, og at elevar kan nytta andre semiotiske ressursar som språk, teikn og gester for å gradvis formalisera den algebraiske tenkinga si.

2.5 Overgangen frå aritmetikk til algebra

Filloy og Rojano (1989) skil mellom aritmetiske og algebraiske operasjonar. Aritmetiske likningar ($Ax + B = C$) meiner dei kan løysast gjennom ei reversering av aritmetiske operasjonar, medan ikkje-aritmetiske likningar ($Ax + Bx = Cx + D$) på den andre sida involverer operasjonar på ukjende. Det å løysa ikkje-aritmetiske likningar krev ei tileigning av ein algebraisk syntaks, noko som inneberer djupe endringar av aritmetiske forståingar (Filloy & Rojano, 1989). Overgangen frå aritmetikk til algebra er ein krevjande prosess som ikkje skjer spontant. Filloy og Rojano (1989) meiner difor at overgangen frå å kalkulera med tal til å operera med ukjende medfører eit *didaktisk kutt*.

For å støtta elevane i å utvikla algebraiske forståingar, samtidig som aritmetiske kunnskapar blir bevarte, foreslår Filloy og Rojano (1989) bruk av konkrete modellar. Praksisen inneheld to sentrale komponentar, nemleg *omsetjing* og *separering*. Ved omsetjing fungerer modellane som eit bindeledd mellom konkrete og abstrakte operasjonar, medan separering dreiar seg om å kunna bruka den algebraiske syntaksen utan konkret støtte (Filloy & Rojano, 1989).

Samtidig som modellar kan fungera som ei bru mellom aritmetikk og algebra, åtvarar Filloy og Rojano (1989) mot at elevar kan utvikla ufullstendige algebraiske metodar dersom dei neglisjerer sentrale element ved modellane. Det er også eit poeng at visuelle modellar har styrkar og svakheitar. Trass i at balansemodellar synleggjer likevektsprinsippet på ein god måte, har dei nemleg avgrensa moglegheiter til å representera likningar med negative tal, subtraksjon og negative løysingar (Filloy & Rojano, 1989). I likskap med balansemodellar har blokkmodellar visuelle og manipulerbare eigenskapar (Yeap, 2007), og kan difor støtta elevane i å laga koplingar mellom tekstlege og symbolske representasjonar (Morina & Vondrová, 2021). Likevel understrekar Beckmann (2004) at det ikkje alltid er direkte synleg kva operasjonar som skal takast i bruk i blokkmodellar.

2.6 Semiotiske representasjonar

«Ein representasjon er noko som står for noko anna.» (Duval, 2006, s. 103. Eiga omsetjing). Duval (2006) trekk fram at representasjonar kan vera interne og eksterne. Interne representasjonar kan vera eit individ sine tankar og forståingar, medan eksterne representasjonar involverer bruk av teikn for å produsera kunnskap og kommunisera mentale representasjonar (Duval, 2006). Sidan «[…] semiotikk er læren om tegn og tegnbrukende adferd […]», (Svendsen, 2023, 1. avsnitt) kallar ein gjerne eksterne representasjonar for semiotiske representasjonar (Hana, 2014). Når eg vidare i denne oppgåva nyttar omgrepet representasjonar refererer eg til semiotiske representasjonar.

Både Duval (2006) og Sfard (1991) trekk fram at matematiske objekt ikkje eksisterer fysisk, noko som betyr at ein berre har tilgang til matematiske objekt gjennom representasjonar. Dette fenomenet skil matematikk frå andre vitskapsområde, og endrar i følgje Duval (2006) radikalt bruken av teikn: For det første krev matematisk aktivitet bruk av representasjonar, og for det andre er det sentralt at ein ikkje blandar saman representasjonen til eit objekt med det matematiske objektet.

2.6.1 Klassifisering av semiotiske register

Semiotiske system som både mogleggjer produksjon og transformasjon av representasjonar kallar Duval (2017) for representasjonsregister. Som Tabell 1 viser, blir representasjonssystema delt inn i fire registerkategoriar, nemleg *naturleg språk, symbolspråk, ikoniske/ikkje-ikoniske figurar* og *grafar/diagram*. I klassifiseringa blir det teke omsyn til kva funksjon(ar) dei ulike registera kan bli brukt til. Symbolspråk og grafar/diagram er register som er algoritmiske av natur, og difor spesifikke for matematikk (Duval, 2017). Sidan desse registera berre kan nyttast til matematisk prosessering er dei monofunksjonelle. På den andre sida er naturleg språk og ikoniske/ikkje-ikoniske register multifunksjonelle, sidan dei kan bli brukt til mangfaldige kognitive funksjonar, som til dømes kommunikasjon og informasjonsprosessering (Duval, 2006). Register som har utspring i eit språksystem (naturleg språk og symbolspråk) mogleggjer blant anna utrekningar og forklaringar, og er difor diskursive. Visuelle representasjonar har ikkje språklege element, noko som inneberer at dei er ikkje-diskursive (Duval, 1999).

Tabell 1. Klassifisering av semiotiske register (Duval, 2017, s. 85. Eiga omsetjing og utforming).

	DISKURSIVE register *Linearitet basert på* suksesjon for å produsera og organisera sekvensar av ord og symbol	IKKJE-DISKURSIVE register Simultan forståing av ei todimensjonal organisering av n-dimensjonale biletlege einingar
MULTIFUNKSJONELLE register: *Transformasjonar av uttrykk er IKKJE-ALGORITMISKE*	**NATURLEGE SPRÅK** *Tre hierarkisk inkluderte operasjonar (*namngiving av objekta, uttaling og resonnering*) med deira korresponderande meiningsberande einingar* *To fenomenologiske produksjonsmåtar: Munnleg og skrifteleg*	**IKONISK: ILLUSTRASJONAR** Frihandsproduksjon og indre konversasjon av topologiske relasjonar karakteristiske for delar av objektet **IKKJE-IKONISK: GEOMETRISKE FIGURAR** *Tre uavhengige operasjonar:* Instrumentell konstruksjon, mereologisk rekonfigurasjon og dekonstruksjon av dei to-dimensjonale formene
	(Støttande overgangsrepresentasjonar *for frie eksterne operasjonar*)	
MONOFUNKSJONELLE register: *Transformasjonar av uttrykk er ALGORITMISKE*	**SYMBOLSK SKRIFTSPRÅK** *For ein uavgrensa substitusjonsoperasjon:* Nummereringssystem, algebraisk skriving, formelle språk*)* *Éin fenomenologisk produksjonsmåte: Skriftleg*	**KARTESISKE GRAFAR, DIAGRAM** *Linjer og piler kopla med punkt og noder* For grafar: operasjonar med zooming, interpolasjon, endring av aksar

2.6.2 Transformasjon av semiotiske representasjonar

Matematisk prosessering inneberer at ein erstattar ein representasjon med ein annan (Duval, 2006). Duval (2017) plasserer difor transformasjon av representasjonar i sentrum av matematisk aktivitet. I følgje Duval (2006) kan representasjonsovergangar skje på to grunnleggjande forskjellige måtar, nemleg gjennom *behandlingar* og *konverteringar,* kor han skildrar at behandlingar er transformasjonar som held seg innanfor eitt register, medan konverteringar inneberer eit skifte av register.

For å støtta konverteringar mellom naturleg språk og symbolspråk viser Tabell 1 at ein kan nytta overgangsrepresentasjonar. Slike typar representasjonar blir fritt framstilt, noko som inneberer at overgangsrepresentasjonar ikkje høyrer til eit dedikert register. Teknisk sett er difor ikkje representasjonsovergangar som går til, eller frå overgangsrepresentasjonar konverteringar. For å forenkla terminologien vil likevel slike typar overgangar vidare bli kalla for konverteringar. Med utgangspunkt i same tankegong vil transformasjonar innanfor same type overgangsrepresentasjon bli kalla for behandlingar.

I likskap med Sfard (1991) framhevar Duval (1999) at det å kunna utføra behandlingar er tilstrekkeleg ut i frå eit matematisk perspektiv, og trekk fram at monofunksjonelle register teknisk sett er overlegne multifunksjonelle register når det kjem til behandlingar av representasjonar. Samtidig understrekar Duval (2006) at konverteringar er naudsynte for å gi innblikk i matematiske objekt, sidan ei vellukka konvertering krev at ein oppfattar det matematiske objektet på tvers av to vidt forskjellige representasjonsregister. Duval (2017) hevdar difor at konvertering av representasjonar utgjer ein terskel for matematisk forståing.

Konverteringar som inneberer ei ein-til-ein-omsetjing, kallar Duval (1999) for kongruente, medan små endringar på rekkjefølgja i startregisteret derimot kan føra til at konverteringa blir ikkje-kongruent, noko som hindrar ei direkte omsetjing. Duval (1999) peikar på at elevar oftast møter kongruente konverteringar som går i ei fast retning, noko som han meiner kan fremja ei lokal og prosedyremessig forståing. Sidan konverteringar kan vera kongruente ein veg, og ikkje-kongruente motsett veg, meiner Duval (2006) at det er viktig at elevar får erfaringar med å gå fram og tilbake mellom ulike representasjonsregister, slik at ein legg til rette for at dei kan danna seg eit heilskapleg bilete av det matematiske objektet.

Duval (2017) trekk fram at «[…] det er ein betydeleg avstand mellom det naturlege språket og andre kognitive register […]» (s. 90. Eiga omsetjing), og sidan «[…] *konverteringar av utsegn til symbolske register ikkje kan vera rett fram* […]» (s. 95. Eiga omsetjing), meiner han det ofte er naudsynt å nytta overgangsrepresentasjonar for å kunna framstilla ekvivalente symbolske representasjonar. Å løysa tekstoppgåver som ei algebraisk likning er difor ein krevjande affære, noko Capraro og Joffrion (2006) si undersøking viste. Dei fann nemleg at storparten av mellomtrinnselevar var verken prosedyremessig, eller omgrepsmessig klare for å omsetja frå tekst til algebraiske likningar.

2.6.3 Multiple eksterne representasjonar og språket sin funksjon i læringssituasjonar

Både Ainsworth (1999) og Duval (2017) åtvarar mot å gjera elevane for passive i prosessen med å samankopla multiple representasjonar, sidan det å skapa ei djup forståing for matematiske område krev ei meir aktiv form for kunnskapsbygging. For at multiple eksterne representasjonar (MERs) skal ha positiv læringseffekt, trekk Ainsworth (1999) fram tre hovudfunksjonar til MERs, nemleg *komplementerande, avgrensande* og *konstruerande* funksjonar. MERs som utfyller kvarandre sine eigenskapar har komplementerande funksjonar. Dersom ein nyttar ein representasjon til å avgrensa tolkinga av ein anna representasjon, har representasjonen ein avgrensande funksjon. Den tredje funksjonen til MERs er at multiple representasjonar kan bidra til å konstruera ei djupare forståing av det matematiske innhaldet gjennom å støtta ein abstraksjonsprosess (Ainsworth, 1999).

Ainsworth (2006) framhevar at læringsutbyttet ikkje nødvendigvis aukar i takt med antal MERs, og at kombinasjonen av ulike representasjonar kan ha innverknad på læringsutbyttet. Desse påstandane støttar forskinga til Ott et al. (2018) opp om. Ved å undersøkja korleis ulike kombinasjonar av representasjonar i form av naturleg språk, symbolspråk og illustrasjonar påverka læringsutbyttet fann dei nemleg at kombinasjonen av tre MERs ikkje hadde betre effekt enn to MERs. I tillegg indikerte funna at multiple representasjonar som innehaldt tekstrepresentasjonar utkonkurerte grupper som jobba med enkeltrepresentasjonar, inkludert tekstlege. Sidan elevane i utgangspunktet har god kjennskap til språklege representasjonar, trakk Ott et al., (2018) slutningar om at språket fungerer som ein referanserepresentasjon.

I likskap med Ott et al. (2018) erfarte Koedinger og Nathan (2004) at det naturlege språket kan støtta elevar sine problemløysingsprosessar. Dei fann nemleg at elevar lettare klarte å løysa enkle algebraiske tekstoppgåver enn når dei freista å løysa matematisk ekvivalente likningar i eit algebraisk symbolspråk. Funnet meinte dei var ein konsekvens av at elevane hadde vanskar med å forstå det formelle symbolspråket. Som ein pedagogisk implikasjon trakk Koedinger og Nathan (2004) fram verdien av å laga koplingar mellom elevar sine eksisterande verbale forståingar og ny symbolsk kunnskap. Dette meinte dei blant anna kunne gjerast ved å samankopla synlege verbale og symbolske representasjonar, eller ved å gå fram og tilbake mellom desse.

I arbeidet med å etablera matematiske forståingar framhevar Duval (1999) at multifunksjonelle register, og då særleg det naturlege språket, har ei sentral rolle. Blant anna trekk Duval (2017) fram at det er føremålstenleg å nytta språket til rettferdiggjering og bevisføring. Samtidig peikar han på at det er krevjande å konvertera utsegn i det naturlege språket til andre register. Duval (2006) ser difor utfordringar med praksisen med å simultant nytta det naturlege språket til å forklara representasjonar i symbolspråket «[…] som om munnlege forklaringar kan gjera kva som helst symbolske behandlingar transparente.» (s. 114. Eiga omsetjing).

2.7 Læreboka si rolle i matematikkfaget, og forsking på lærebøker

Askew et al. (2010) trekk fram at lærebøker internasjonalt sett utgjer hovudressursen i matematikkundervisninga. I Noreg og Sverige er denne praksisen omfattande. I TIMMS 2011 svarte nemleg rundt 90 % til nærmare 100 % av lærarane på 4. og 8. trinn i desse landa at dei nytta læreboka som undervisningsgrunnlag (Grønmo & Onstad, 2013).

Lærebøker kan ha innverknad på korleis lærarar underviser (Fan & Kaeley, 2000), og kan fungera som eit bindeledd i implementeringa av læreplanmessige intensjonar i klasserommet (Houang & Schmidt, 2008). Lærebøker speler difor ei avgjerande rolle i matematikkundervisninga når det gjeld å utvikla elevane si matematiske forståing.

Trass viktigheita til matematikklærebøker, peikar Rezat og Strässer (2015) på at forsking på desse utgjer eit lite område innanfor den matematikkdidaktiske forskinga. Sjølv om forskingsfeltet er i ein tidleg utviklingsfase, trekk Fan et al. (2013) fram at forsking på lærebøker i matematikk har fått auka merksemd dei seinaste tiåra.

Rezat og Strässer (2015) deler forskingsfeltet inn i tre delar: *forsking på påverknaden til læreboka, forsking på læreboka i seg sjølv* og *forsking på bruken av lærebøker og deira innverknad.* Denne masteroppgåva nyttar innhaldsanalyse som forskingsmetode, og kjem difor inn under den andre kategorien, som nettopp er den kategorien som Rezat og Strässer (2015) trekk fram som den mest utbreidde innanfor forsking på lærebøker i dei nordiske landa.

2.7.1 Tidlegare forsking

I dei seinare åra finn ein fleire relevante forskingsbidrag frå Noreg. Kongelf (2019) undersøkte i sin doktorgradsavhandling korleis lærebøker på ungdomstrinnet i Noreg behandla problemløysing og algebra. Delstudie to undersøkte kva som karakteriserte introduksjonen av algebra i lærebøker på 8. og 9. trinn. Kongelf (2019) konkluderte med at lærebøkene hadde eit manipuleringsfokus, og at algebra blei framstilt som eit isolert emne. Han trakk også fram at lærebøkene i liten grad tok utgangspunkt i elevane sine tidlegare kunnskapar for å skapa forståing for manipulasjon av algebraiske uttrykk, og at generalisering som tilnærming til algebra blei lite brukt. I delstudie tre blei elevoppgåvene i introduksjonskapitla undersøkt. Kongelf (2019) fann då blant anna at oppgåvene i hovudsak handla om algebramanipulasjon.

På mastergradsnivå gjorde Reinhardtsen (2012) ein komparativ analyse av lærebøker på 6. – 8. trinn frå Noreg, Finland, Sverige og USA. Masteroppgåva undersøkte introduksjonen av algebra, kor funna viste at lærebøkene i hovudsak sikta seg inn på å utvikla tekniske dugleikar innanfor det algebraiske symbolspråket. Samtidig viste funna at ei bok (Finland) nytta mønstergeneralisering for å skapa ein naturleg progresjon frå retoriske til symbolske metodar. Reinhardtsen (2012) fann også at to lærebøker fokuserte på å fremja forståing for likskapsteiknet, kor den eine boka nytta vektstenger, medan den andre presenterte likningar som innehaldt uttrykk og variablar på begge sider av likskapsteiknet.

I internasjonal samanheng finn ein også interessant forsking på lærebøker. Valverde et al. (2002) undersøkte aspekt ved lærebøker i TIMMS-land, og fann blant anna at matematikklærebøkene fokuserte på dugleikstrening ved at dei hadde ei overvekt av prosedyrefokuserte øvingsoppgåver.

Ved å samanlikna lærebøker på 7. trinn frå 1970-talet og 2000-talet ønska Hodgen et al. (2010) å få innblikk i om notidas lærebøker støtta seg på forsking kring undervisning av algebra. Dei fann lite evidens for at den nyaste læreboka var informert av forsking, og tok difor til orde for at det eksisterer eit stort behov for å undersøkja korleis ein kan designa forskingsinformerte lærebøker som både er praktiske, teoretiske og appellerande.

Vincent og Stacey (2008) samanlikna funn frå 1999 TIMMS Video Study med ni 8. trinns lærebøker frå Australia, og fann i all hovudsak likskapar mellom undervisningsøktene og lærebøkene. Begge formata viste seg blant anna å fokusera på repetisjon, i tillegg til å ha overvekt av problem med låg algoritmisk kompleksitet.

Dole og Shield (2008) fann at to lærebøker for 8. trinn innanfor temaet proporsjonalitet i hovudsak vektla utrekningsprosedyrar, og at få forklaringar og oppgåver bidrog til å fremja omgrepsforståing. Eit liknande funn gjorde Shield og Dole (2013). Ved å undersøkja fem lærebokseriar for ungdomstrinnet fann dei nemleg at læreverka i liten grad støtta djupnelæring innanfor emnet proporsjonalitet.

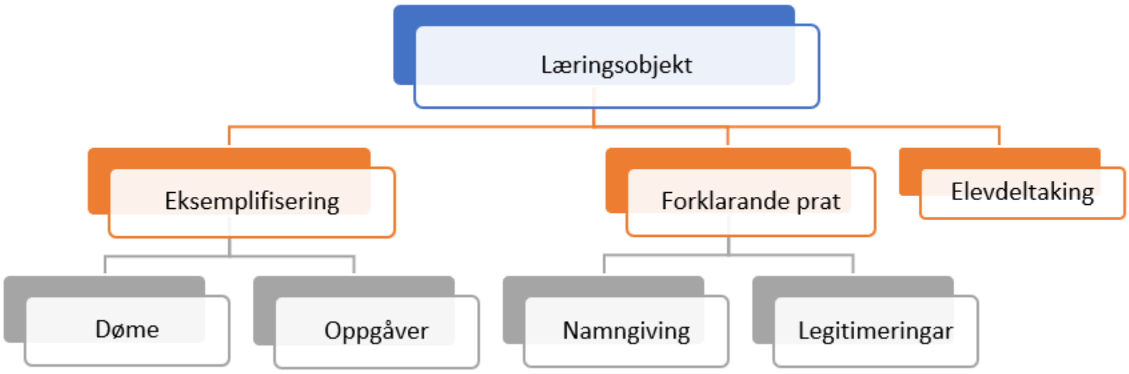
Huntley og Terrell (2014) studerte korleis fem lærebokseriar i USA la til rette for å løysa einstegs ($ax = b$) og fleirstegs ($cx + d = ex + f$) lineære likningar. Funna viste store forskjellar mellom læreverka. Dei konkluderte difor med at elevane truleg ville læra å løysa einstegs og fleirstegs lineære likningar på markante ulike måtar, alt etter kva læreverk som blei nytta.

2.8 Analytisk rammeverk

Vidare blir studien sine analytiske reiskap presenterte. Først blir Ronda og Adler (2017) si tilpassing av *Mathematics Discoursce in Instruction* (Adler & Ronda, 2015) for tekstbokanalyse (MDITx) gjennomgått. Deretter blir det tilpassa analyseverktøyet for analyse av representasjonar og representasjonsovergangar i lærebøkene presentert.

2.8.1 MDITx-rammeverket

For å få innblikk i kva læring som blir gjort tilgjengeleg i lærarar sine undervisningsøkter, utvikla Adler og Ronda (2015) det analytiske verktøyet *Mathematics Discoursce in Instruction* (MDI). Som Figur 1 (s. 23) viser, tek MDI-rammeverket sikte på å undersøkja korleis eksemplifiseringar, forklaringar og elevdeltaking gir tilgang til kunnskap om det som skal lærast i matematikkundervisninga, altså *læringsobjektet*. Analyseverktøyet har ei sosiokulturell forankring, og vel å ha fokus på korleis døme, oppgåver, ordbruk, legitimeringar og den tilhøyrande sosiale interaksjonen blir nytta som medierande reiskap for å gi eleven tilgang til lærebokleksjonen sitt læringsobjekt.



Figur 1. MDI-rammeverket sin struktur (Adler & Ronda, 2015, s. 239. Eiga omsetjing og utforming).

Lærebokstudien til TIMMS definerer ein lærebokleksjon som «[…] ein del av eit tekstmateriale som er via til eit enkeltståande matematisk eller vitskapeleg emne som er meint å tilsvara ein lærar si klasseromsundervisning om emnet undervist over ein til tre økter.» (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002, s. 139, sitert i Ronda & Adler, 2017. Eiga omsetjing). Ronda og Adler (2017) trekk fram likskapar mellom klasseromleksjonar og lærebokleksjonar, og for å undersøkja korleis den matematiske diskursen i lærebøker opnar eller lukkar moglegheiter for å læra matematikk, framstilte dei ein tilpassa variant av MDI-rammeverket som dei kalla for MDITx.

Ronda & Adler (2017) tek utgangspunkt i Sfard (2008, i Ronda & Adler, 2017), som meiner at det å læra matematikk dreiar seg om å delta i ei særskilt form for diskurs. Sidan elevar ikkje har moglegheiter til å påverka utforminga av lærebøker, er elevdeltakingskategorien i MDITx-rammeverket ikkje eksplisitt teke med. Likevel hevdar Ronda og Adler (2017) at deltakingsaspektet blir ivareteke ved at rammeverket gjennom oppgåver og tekst synleggjer kva elevane blir inviterte til å delta i. Samtidig trekk dei fram at dei kulturelle reiskapa i MDITx-rammeverket skapar ulike moglegheiter for å delta i den matematiske diskursen.

Utover fjerninga av elevdeltakingskategorien frå MDI-rammeverket, er dei andre elementa bevarte i MDITx-rammeverket. Sidan lærebokleksjonar og klasseromleksjonar ikkje er identiske, er det gjort innhaldsmessige tilpassingar. Vidare følgjer ein gjennomgang av innhaldet i MDITx-rammeverket sine element.

Læringsobjektet

Læringsobjektet representerer det matematiske temaet i ein lærebokleksjon, og blir ofte synleggjort i form av ein tittel (Ronda & Adler, 2017). Læringsobjektet kan vera eit omgrep, ein metode eller ein prosedyre, og omhandlar både innhaldet i det som skal lærast, og korleis eleven skal handtera dette innhaldet (Lo, 2012, i Ronda & Adler, 2017).

Døme

Bruk av døme er ein måte å synleggjera eigenskapar ved det matematiske innhaldet på (Ronda & Adler, 2017). Zodik og Zaslavsky (2008) definerer eit døme som «[…] eit særskilt tilfelle av ein større klasse, som ein kan resonnera og generalisera i frå.» (s. 165. Eiga omsetjing). Ronda og Adler (2017) tek utgangspunkt i dette, og definerer eit døme som «[…] ei instansiering av innhaldet som er i fokus […]» (s. 1101. Eiga omsetjing).

For å få innblikk i korleis døme i tekstbøker medierer læringsobjektet, tek MDITx-rammeverket utgangspunkt i Marton og Pang (2006) sin «Variation Theory». Denne teorien trekk fram at det er sentralt at elevar får innblikk i variante og invariante eigenskapar ved læringsobjektet, slik at ein kan skjelne ulike aspekt ved det.

MDITx-rammeverket til Ronda og Adler (2017) skil mellom tre måtar lærebøkene kan bruka variasjon i døma for å fremja forståing for ulike aspekt ved læringsobjektet, nemleg gjennom *contrast* (C), *generalization* (G) og *fusion* (F). Kontrasterande døme meiner dei skapar moglegheiter for å samanlikna og finna forskjellar. Generaliserande døme opererer gjerne med ulike representasjonssystem, slik at ein kan belysa variante og invariante aspekt på tvers av representasjonar. Dersom eit døme består av ei samling av fleire døme som både skapar rom for generalisering innanfor kvart enkelt døme, og på tvers av dei ulike døma, inneberer det eit høgare generalitetsnivå. Ein slik måte å framstilla variante og invariante eigenskapar på krev ein fusjon av fleire, og ulike døme (Ronda & Adler, 2017).

Oppgåver

Ronda og Adler (2017) definerer oppgåver som «[…] det elevane blir bedne om å gjera med døma […]» (s. 1102. Eiga omsetjing), og trekk fram at det å jobba med ulike oppgåvetypar kan styrka læringsmoglegheitene ved at ein erfarer ulike sider av læringsobjektet. I analyseverktøyet vektlegg dei difor at det blir gitt rom for å både vurdera om oppgåvene tek sikte på å skapa forståing for moglegheiter knytt direkte opp mot læringsobjektet, og for å vurdera om oppgåvene skapar rom for å laga koplingar på tvers av matematisk innhald. Oppgåver kor ein nyttar tidlegare lært kunnskap og/eller prosedyre blir koda som *known procedure/fact* (KPF). Dersom oppgåva omhandlar gjeldande innhald for lærebokleksjonen blir oppgåva koda som *current topic/procedure* (CTP). Oppgåver som krev at elevane etablerer koplingar på tvers av omgrep, eller som inneberer at ein må ta sjølvstendige val kring omgrep eller prosedyrar som ein nyttar for å løysa oppgåva, kodar ein som *application/making connections tasks* (AMC).

Namngiving/ordbruk

Adler og Ronda (2015) argumenterer for at måten ord blir brukt på, i form av å namngi prosedyrar, handlingar eller matematiske omgrep har innverknad på eleven si merksemd. I MDITx-rammeverket blir matematiske ord som blir brukt som merkelappar, som til dømes omgrepet «tallinje-løysing», koda som L (*label*). Tekst som nyttar verb for å signalisera handling, og med det fokuserer på prosedyren, bli koda som PA (*procedure-action*), medan utsegn som fokuserer på løysinga ved å bruka substantiv blir koda som PN (*procedure-noun*). I tillegg til å fokusera på prosedyre kan teksten også omhandla matematiske omgrep. Tilfelle kor ordbruken refererer til innhaldet i det matematiske omgrepet kodar ein som OM (*object-meaning*), medan ein kodar ordbruk som refererer til eigenskapar ved omgrepet som OF (*object-feature*) (Ronda & Adler 2017).

Ronda og Adler (2017) trekk fram at det kan vera utfordrande for elevar at verb ofte blir omgjort til substantiv i ein matematisk diskurs. Samtidig meiner dei at det er viktig at elevar beherskar denne forma for nominalisering, sidan dette er ein vanleg praksis i matematikklasserommet. I MDITx-rammeverket sitt kategorisystem (Tabell 2, s. 26) blir difor substantivforma favorisert framfor verbforma. I tillegg blir prat som definerer omgrepet direkte (OM) føretrekt framfor prat om enkelteigenskapar ved objektet (OF). Bruk av matematiske ord som merkelappar blir minst verdsett, sidan ein slik ordbruk skapar lite rom for eit variert innblikk i læringsobjektet.

Legitimeringar

Ronda og Adler (2017) tek utgangspunkt i at ein gjennom å grunngje matematiske utsegn kan skapa eit medvit kring kva som blir betrakta som viktig matematisk kunnskap. Den siste kategorien i MDITx-rammeverket belyser difor korleis lærebøker legitimerer utsegn og prosedyrar relatert opp mot læringsobjektet. Når matematiske utsegn blir underbygd av forklarande døme kodar Ronda og Adler (2017) desse som SE (*substantiation by examples*), og når lærebokforfattarane forankrar valideringane sine i etablerte matematiske prinsipp og definisjonar kodar dei utsegna som SG (*substantiation by general case*). Utsegn som manglar legitimeringar, kor autoriteten ligg hos forfattaren(e), blir koda som A.

Bruk av MDITx-rammeverket

MDITx-rammeverket til Ronda og Adler (2017) nyttar følgjande kategorisystem (Tabell 2):

Tabell 2. MDITx-rammeverket sitt kategorisystem (Ronda & Adler, 2017, s. 1106. Eiga omsetjing og utforming).

Læringsobjekt:			
Døme	Oppgåver	Namngiving/Ordbruk	Legitimering
Nivå 1 – minst eitt av variasjonsmønstera (C - Kontrast, G – Generalisering F – Fusjon)	Nivå 1 – utføra kjende prosedyrar, eller bruka kjende omgrep knytt opp mot læringsobjektet	Nivå 1 – bruken av matematiske ord er avgrensa til berre ein type (kva som helst av L, PA, PN, OF eller OM)	Nivå 1 – forfattaren(e) kjem med ein påstand utan rettferdiggjering (inneheld berre kategorien A)
Nivå 2 – innslag av to ulike variasjonsmønster (C, G eller F)	Nivå 2 – utføra prosedyrar som involverer læringsobjektet (inkluderer CTP-, men ikkje AMC-kategoriar)	Nivå 2 – bruken av matematiske ord er avgrensa til berre to typar	Nivå 2 – påstandane som blir framsett blir legitimerte gjennom eit døme, eller er avgrensa til spesifikke eller lokale tilfelle (inkludert SE-, men ikkje SG-kategoriar
Nivå 3 – alle variasjonsmønstera	Nivå 3 – utføra nivå 2-oppgåver, inkludert oppgåver som involverer fleire omgrep og koplingar (inkluderer CTP- og AMC-kategoriar)	Nivå 3 – minst tre ulike typar matematiske ord er tilstades (kva som helst tre av PA, PN, OF eller OM)	Nivå 3 – påstandar er substansierte gjennom prinsipp som ekvivalente representasjonar, definisjonar, tidlegare etablerte generaliseringar/utleia prosedyrar, moteksempel, ekstreme tilfelle (med SG-kategoriar)

2.8.2 Analyseverktøy for analyse av representasjonar og representasjonsovergangar

For å undersøkja korleis lærebøkene nyttar representasjonar for å fremja elevane si forståing av likningsomgrepet blei det gjennomført ei kategorisering av karakteristiske trekk ved representasjonane og representasjonsovergangane i dei undersøkte lærebøkene (sjå Tabell 3 – 6 nedanfor). Kategorisystemet, og utviklinga av dette, blir gjennomgått meir detaljert i metodedelen.

Tabell 3. Kategorisystem for analyse av representasjonar del 1: Behandlingar.

Analyse av representasjonar del 1: Behandling av representasjonar		
Behandling i:	**Kode**	**Skildring av kategori/kommentar**
Naturleg språk	**B: NS**	Skriftlege oppgåver som krev behandling i det naturlege språket til dømes i form av skriftlege/munnlege framstillingar, forklaringar, grunngjevingar eller resonneringar. *Døme: «Forklar kva ei likning er, til ein som aldri har høyrt om likningar før.» (Kongsnes et al., 2022, s. 94).*
Overgangsrepresentasjon	**B: OR**	Manipulering av gjevne overgangsrepresentasjonar, eller framstilling av eigne overgangsrepresentasjonar. *Døme: «Kor mykje veg eska merkt med x?» (Alseth et al., 2022, s. 80) «Lag di eiga oppgåve med uroer […]» (Kongsnes et al., 2022, s. 92).*
Symbolspråk	**B: S**	Utrekningar/algebraisk manipulasjon i symbolspråkregisteret. *Døme: «Løys likninga og vis at løysinga er gyldig.» (Gulbrandsen et al., 2021, s. 101).*

Tabell 4. Kategorisystem for analyse av representasjonar del 2: Konverteringar.

Analyse av representasjonar del 2: Konvertering av representasjonar		
Konvertering frå:	**Kode**	**Skildring av kategori/kommentar**
Naturleg språk til **symbolspråk**	K: NS → S	Oppgåver som inneberer ein konvertering frå naturleg språk til symbolspråk, td. tekstoppgåver som skal skrivast som ei algebraisk likning *Døme:. «Lag ei likning med x.» (Alseth et al., 2022, s. 83).*
Naturleg språk til **overgangsrepresentasjon**	K: NS → OR	Oppgåver som inneberer ein transformasjon frå naturleg språk til overgangsrepresentasjon. *Døme: «Teikn vippehusker som høver til skildringane». (Kongsnes et al., 2022, s. 94).*
Naturleg språk + overgangsrepresentasjon til **symbolspråk**	K: (NS + OR) → S	Oppgåver med multiple representasjonar i form av naturleg språk og overgangsrepresentasjon som skal konverterast til symbolspråk, td. tekstoppgåver med synlege overgangsrepresentasjonar, kor eleven skal utforma ei algebraisk likning.
Overgangsrepresentasjon til **symbolspråk**	K: OR → S	Oppgåver som inneberer ein transformasjon frå ein overgangsrepresentasjon til symbolspråk. *Døme: «Kva for ei likning viser vippehuska?». (Kongsnes et al., 2022, s. 93).*
Overgangsrepresentasjon til **naturleg språk**	K: OR → NS	Oppgåver der eleven skal laga tekstoppgåver ut i frå modellar, eller forklara (munnleg/skriftleg) eigenskapar/endringar i overgangsrepresentasjonar. *Døme: «Lag ei tekstoppgåve som høver med følgjande modell.» (Gulbrandsen et al., 2021, s. 104). «Kva for endringar har Tuva gjort med uroa?» (Kongsnes et al., 2022, s. 97).*
Symbolspråk til **overgangsrepresentasjon**	K: S → OR	Oppgåver der eleven skal framstilla ein overgangsrepresentasjon med utgangspunkt i ei algebraisk likning. *Døme: «Teikn uroer, vippehusker eller tallinjer som viser korleis likninga kan løysast.» (Kongsnes et al., 2022, s. 102). «Kva for ei likning viser tallinja?» (Kongsnes et al., 2022, s. 107).*
Symbolspråk til **naturleg språk**	K: S → NS	Oppgåver der eleven skal forklara (munnleg/skriftleg) ei løysing/likning representert på symbolspråk, eller der eleven skal framstilla ei tekstoppgåve med utgangspunkt i ei symbolsk likning. *Døme: «Forklar kvifor $x=1$ er ei løysing for likninga $5x + 10 = x + 14$.» (Alseth et al., 2022, s. 81). «Lag ei tekstoppgåve som du kan løyse med likninga.» (Gulbrandsen et al., 2021, s. 107).*

Tabell 5. Kategorisystem for analyse av representasjonar del 3: Samankoplingar

Analyse av representasjonar del 3: Samankopling av representasjonar		
Samankopling av:	**Kode**	**Skildring av kategori/kommentar**
Naturleg språk og **symbolspråk**	SK: NS + S	Oppgåver/døme med ekvivalente representasjonar i form av symbolspråk og naturleg språk, kor eleven skal kopla saman/forklara samanhengen mellom tekst/situasjon og likningsuttrykk. *Døme: «Finn likninga som passar til kvar tekstoppgåve, og forklar kvifor likninga passar.» (Alseth et al., 2022, s. 82).* *«Vel likninga som passar med tekstoppgåva.» (Alseth et al., 2022, s. 82).*
Symbolspråk og **overgangsrepresentasjon**	SK: S + OR	Oppgåver/døme/aktivitetar med ekvivalente representasjonar i form av symbolspråk og overgangsrepresentasjonar, kor eleven skal kopla saman representasjonane. Spel og aktivitetar som inneberer ei uviss mengd med representasjonssamankoplingar registrerer ein som tre førekomstar. *Døme: Spel/aktivitetar kor ein skal kopla saman symbolske likningar med ekvivalente overgangsrepresentasjonar (td. symbol, tallinje, uro eller vippehusker).*
Symbolspråk + **overgangsrepresentasjon** m/forklaring i **naturleg språk**	SK: (S + OR) → NS	Oppgåver/døme med ekvivalente representasjonar i form av symbolspråk og overgangsrepresentasjonar, kor eleven skal forklara samanhengen mellom representasjonane. Forklaringsaspektet medfører ei konvertering til det naturlege språket. *Døme: «Forklar korleis uroa viser at $3 \cdot x = 2 \cdot x + 3$.» (Kongsnes et al., 2022, s. 96).*
Naturleg språk og **overgangsrepresentasjon**	SK: NS + OR	Oppgåver/døme med ekvivalente representasjonar i form av naturleg språk og overgangsrepresentasjon, kor eleven skal kopla saman/forklara samanhengen mellom representasjonane. *Døme: «Forklar korleis tallinja viser situasjonen.» (Kongsnes et al., 2022, s. 124).*
Naturleg språk, **overgangsrepresentasjon** og **symbolspråk**	SK: NS + OR + S	Oppgåver/døme med ekvivalente representasjonar i form av naturleg språk, overgangsrepresentasjon og symbolspråk, kor eleven skal, eller får moglegheita til, å kopla saman/forklara samanhengen mellom representasjonane.

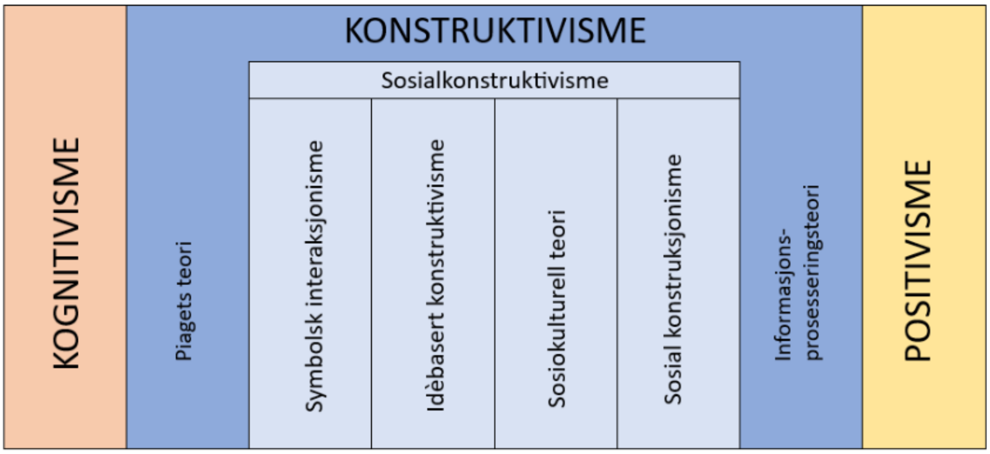
Tabell 6. Kategorisystem for analyse av representasjonar del 4: Overgangsrepresentasjonar.

Analyse av representasjonar del 4: Type overgangsrepresentasjonar/modellar		
Type overgangs-representasjon:	**Kode**	**Skildring av kategori/kommentar**
Blokkmodell **Vippehuske/vektstong** **Uro** **Tallinje**	Blokkmodell Vippehuske Uro Tallinje	Overgangsrepresentasjonane blir registrerte som eitt tilfelle per hovudoppgåve/døme. Dette gjeld sjølv om det eventuelt førekjem fleire variantar av same type overgangsrepresentasjon i løpet av dømet/oppgåva. Dersom oppgåva/dømet inneheld ulike typar overgangsrepresentasjonar, blir alle desse typane registrert (ein gong).

2.9 Oppklaring kring læringsteoretisk ståstad

Postholm og Moen (2018) peikar på at ein innanfor pedagogisk litteratur og forsking grovt sett finn tre hovudperspektiv på korleis kunnskap oppstår, nemleg gjennom kognitivistiske, positivistiske eller konstruktivistiske tilnærmingar. Det som i størst grad skil dei ulike paradigma frå kvarandre er korleis dei føreheld seg til kva innverknad miljøet og individet har på læring. Medan positivistiske retningar forfektar at all læring skjer ved at miljøet påverkar individet, tek kognitivistiske teoriar utgangspunkt i at miljøet har liten innverknad på individet si utvikling, og at tileigning av kunnskap i staden følgjer ein progresjon som er genetisk forankra (Postholm & Moen, 2018). Mellom desse to ontologiske ytterfløyene finn ein det konstruktivistiske paradigmet. Innanfor konstruktivismen presenterer Prawat (1996) seks ulike teoriar, som han ut i frå grad av innverknad frå individ/miljø, plasserer i forhold til kognitivistiske og positivistiske perspektiv. Postholm og Moen (2018) tek utgangspunkt i Prawat (1996) si organisering, og skisserer følgjande modell (Tabell 7):

Tabell 7. Tre hovudperspektiv på korleis kunnskap oppstår (Postholm & Moen, 2018, s. 24. Eiga utforming).



Medan Duval (2006) tilsynelatande plasserer seg nær Piaget sine teoriar ved å referera til individet si utvikling av kognitive strukturar og skjema, har Ronda og Adler (2017) sitt MDITx-rammeverk ei sosiokulturell forankring. Analyseverktøya som blir nytta i denne masteroppgåva ser difor ut til å ta ulike omsyn til individuelle og sosiale aspekt kring læring. Trass dette, kan ein ut i frå Postholm og Moen (2018) sin oversikt plassera oppgåva sitt analytiske rammeverk innanfor eit konstruktivistisk paradigme.

Sidan Ronda og Adler (2017) og Duval (1999, 2006, 2017) tilsynelatande stiller seg ulikt til korleis individet og miljøet påverkar læringa, oppstod det eit behov for å tilføra ein ekstern teori som kunne gjera det mogleg å belysa det analytiske rammeverket med eit felles omgrepsapparat. Sidan Sfard (1991) sin reifikasjonsteori trekk parallellar mellom den historiske utviklinga av matematiske omgrep og Piaget sine idear kring individet si omgrepsutvikling på det psykologiske planet, var det naturleg å ta utgangspunkt i nettopp denne teorien. Det faktum at oppgåva omhandlar temaet likningar, og at problemløysing historisk sett har fungert som ein inngangsport til algebra, var også ein klar medverkande årsak til at oppgåva nyttar Sfard (1991) sin teori til å belysa resultata frå dei ulike analysane.

Samtidig som Sfard (1991) sin reifikasjonsteori blir brukt som eit samlande fundament for studien, er det viktig å understreka at funna også blir kommentert ut i frå kvart enkelt analysereiskap sin teoretiske ståstad, slik at dei ulike rammeverka sin eigenart også blir ivareteke.

3 Metode

Vidare blir forskingsdesign og forskingsmetode gjort reie for. Først blir utval og avgrensingar presenterte, før det kjem ein gjennomgang av kvalitativ innhaldsanalyse som forskingsmetode. Utvikling og bruk av analyseverktøy blir også skildra. Gjennom å trekkja fram utfordringar og tiltak kring gyldigheit, pålitelegheit og etiske omsyn blir studien sin kvalitet avslutningsvis belyst.

3.1 Utval og avgrensingar

I studien er følgjande lærebøker gjenstand for analyse:

- Matematikk 7, Cappelen Damm (Gulbrandsen et al., 2021)
- Multi 7B, Gyldendal (Alseth et al., 2022)
- Matemagisk 7B, Aschehoug (Kongsnes et al., 2022)

Dei utvalde lærebøkene er utgjeve av dei tre største forlaga i Noreg, noko som bidreg til å gjera undersøkinga relevant for relativt mange aktørar. Ved at eg i tillegg underviser på ein skule som nyttar lærebokserien frå Multi, ligg det også til grunn ein personleg motivasjon for å undersøkja og samanlikna ei lærebok frå dette læreverket opp mot tilsvarande lærebøker.

Postholm og Jacobsen (2018) trekk fram at breidde alltid vil stå i konflikt med djupne når ein granskar fleire kasus innanfor eit avgrensa tidsrom. Sidan oppgåva undersøkjer fleire lærebøker, og i tillegg har avgrensingar når det gjeld tid og omfang, har det difor vore viktig å avgrensa studien. Til dømes er oppgåva tematisk avgrensa ved at ein berre undersøkjer innhald som er direkte knytt opp mot likningar i likningskapitla. I tillegg kartlegg studien korleis døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar blir nytta i lærebøkene sine lærebokleksjonar. Sidan det i hovudsak er grunnbøker som tek seg av opplæringsbiten kring matematiske tema, er oppgåvebøker ekskludert frå studien. Ein annan grunn for å ikkje inkludera oppgåvebøker i undersøkinga, er rett og slett det faktum at læreverket Multi ikkje opererer med oppgåvebøker, men heller tilbyr Multi Smartøving som øvingsarena for elevane.

Undersøkinga kring representasjonar inneheld også avgrensingar. Å avgjera om representasjonstransformasjonar er kongruente, eller ikkje-kongruente, kan vera ein komplisert og tidkrevjande affære. Sidan masteroppgåva i utgangspunktet har ei rekkje tidkrevjande element, blei dette aspektet kring representasjonsovergangar difor ikkje undersøkt.

Trass i at forskingsmetode og analytiske reiskap er nøye utvalde for å svara på forskingsspørsmåla og problemstillinga, er det viktig å presisera at dette er val som påverkar og avgrensar innhaldet i oppgåva. Sidan Rezat og Strässer (2015) understrekar at innhaldsanalysar berre kan avdekkja moglegheiter for læring, er det også viktig å trekkja fram at resultata ikkje kan slå fast korleis lærebøkene blir brukt pedagogisk, eller kva effekt dei har i undervisningssamanheng. Det er difor sentralt at ein både som forskar og lesar er medviten nemnde avgrensingar, slik at funna blir tolka i lys av desse.

3.2 Kvalitativ innhaldsanalyse som forskingsmetode

Målet med denne oppgåva er å finna ut korleis tre lærebøker i matematikk på 7. trinn legg til rette for utviklinga av eleven si forståing av likningsomgrepet. Innleiingsvis blei det presentert to forskingsspørsmål knytt opp mot denne problemstillinga. Det å finna svar på forskingsspørsmåla og problemstillinga inneberer ein analyse av delar av innhaldet i dei utvalde lærebøkene. Det var difor naturleg å bruka innhaldsanalyse som metode. Mayring (2014) trekk fram at innhaldsanalyse er «[…] ein systematisk prosedyre for tildeling av kategoriar til delar av tekst.» (s. 31. Eiga omsetjing). I innhaldsanalysar nyttar ein kvalitativ og/eller kvantitativ data som blir samla inn ved deduktive eller induktive metodar (Elo & Kyngäs, 2008).

Det kvalitative aspektet ved innhaldsanalysar har blitt kritisert for å ikkje ta vare på kvantitative teknikkar på ein god nok måte (Elo & Kyngäs, 2008). Samtidig har kvalitative innhaldsanalysar blitt kritiserte for å ikkje vera tilstrekkeleg kvalitative (Morgan, 1993). Sidan innhaldsanalysar ikkje har definerte retningslinjer, presiserer Elo og Kyngäs (2008) at forskingsmetoden er krevjande. Likevel understrekar dei at dette kan vera ein styrke ved metoden, sidan fråvær av konkrete retningslinjer skapar rom for fleksibilitet.

Mayring (2015) ser fordelar med å kombinera kvalitative og kvantitative metodar, og tar til orde for ei blanda metodetilnærming. Dette inneberer at ein kombinerer ei kvalitativ tolking av datamaterialet med kvantitative analysar. Denne masteroppgåva drar nytte av kvalitative og kvantitative aspekt på tilsvarande måte, slik at forskingsdesignet følgjer Mayring (2015) sine prinsipp for kvalitativ innhaldsanalyse.

3.2.1 Prinsipp og prosedyrar for kvalitative innhaldsanalysar

I likskap med Elo og Kyngäs (2008) understrekar Mayring (2015) at innhaldsanalysar ikkje er eit standardisert instrument. For at innhaldsanalysar skal ivareta både kvalitative og kvantitative styrkar, meiner han at det er sentralt at innhaldsanalysar er teoriforankra og følgjer systematiske prosedyrar.

I følgje Mayring (2015) kan kvalitative innhaldsanalysar i hovudsak gjennomførast med utgangspunkt i tre ulike tilnærmingar til dokumentet, nemleg gjennom reduserande, forklarande og strukturerande prosedyrar. Reduserande prosedyrar tek sikte på å laga ein komprimert, men likevel omfattande oversikt over innhaldet, noko som han meiner skapar eit godt utgangspunkt for ei induktiv kategorisering. Ved forklarande prosedyrar nyttar ein konteksten enten utanfor, eller innanfor tekstutsnittet til å skapa ei utvida forståing av analyseobjektet. Når føremålet med analysen er å trekka ut spesifikke element frå materialet, inneberer det ei strukturering av innhaldet. Dette blir gjort gjennom ei deduktiv kategorisering av materialet, kor ein nyttar eit ferdigutvikla og teoriforankra kategorisystem (Mayring, 2015).

Mayring (2015) trekk ikkje opp vasstette skott mellom dei tre hovudprosedyrane, og skisserer underkategoriar kor ein tek i bruk både induktive og deduktive metodar. Ei slik blanda metodetilnærming danna utgangspunktet for utviklinga av kategorisystemet som blei brukt for å undersøkja korleis lærebøkene nyttar representasjonar for å fremja forståing for likningsomgrepet. Utarbeidinga av dette kategorisystemet blir vidare presentert, før den praktiske gjennomføringa av analysearbeidet blir gjennomgått.

3.3 Utarbeiding av kategorisystem for analyse av representasjonar

I utgangspunktet var intensjonen å nytta Duval (2017) si klassifisering av semiotiske representasjonar (Tabell 1, s. 18) for å gjennomføra ei deduktiv kategorisering av representasjonar og representasjonsovergangar i lærebøkene. Etter ein gjennomgang av materialet viste det seg at ei kategorisering med utgangspunkt i dette analyseverktøyet ikkje tilførte tilstrekkeleg informasjon til forskingsspørsmålet som skulle undersøkjast. I lærebøkene, og då i særleg grad Matemagisk 7B, fann ein nemleg døme og oppgåver som ikkje hadde tilfelle av eksplisitte transformasjonar av representasjonar, men som heller hadde fokus på samankopling av representasjonar. Analyseverktøyet til Duval (2017) blei difor utvida gjennom det Mayring (2015) kallar for *category-refinement*, kor ein tek utgangspunkt i eit deduktivt kategorisystem som ein vidare «[…] modifiserer og supplerer med nye kategoriar på ein induktiv måte.» (s. 374. Eiga omsetjing). Modifiseringa av kategorisystemet gjorde det også naudsynt å utvida det teoretiske grunnlaget kring temaet representasjonar.

Kategoriane i analyseverktøyet for representasjonar som omhandlar behandlingar (Tabell 3, s. 27) og konverteringar (Tabell 4, s. 27) tek direkte utgangspunkt i Duval (2017) si klassifisering. Ei samankopling av representasjonar krev at elevane gjennom forklaring eller observasjon skal gjera eksplisitte eller implisitte koplingar mellom multiple representasjonar. Sidan elevane har direkte tilgang til representasjonane treng dei ikkje aktivt å konvertera ein representasjon frå eit startregister til eit målregister. Det var difor naudsynt å framstilla ein eigen samankoplingskategori for desse tilfella (sjå Tabell 5, s. 28).

Kategorien som omhandlar overgangsrepresentasjonar (sjå Tabell 6, s. 28). er også eit supplement til Duval (2017) sitt analysereiskap. Denne utvidinga av rammeverket blei gjort for å gi eit spesifikt innblikk i kva typar overgangsrepresentasjonar ein finn i lærebøkene, noko som er relevant kunnskap sett i høve til både forskingsspørsmålet som omhandlar representasjonar og oppgåva si problemstilling.

Enkelte plasseringar av kategoriar er det naudsynt å forklara nærmare. Trass i at kategorien K: (NS + OR) → S inneheld multiple representasjonar, har tilfella innanfor denne kategorien eit klart konverteringsfokus frå naturleg språk til symbolspråk. Denne kategorien blei difor plassert innanfor konverteringskategorien. Sjølv om kategorien SK: (S + OR) → NS inneberer ei form for konvertering blei han kategorisert inn under samankoplingskategorien. Årsaka til dette er at konverteringsaspektet i dei aktuelle tilfella i all hovudsak fokuserer på at elevane skal nytta naturleg språk til å forklara samanhengar mellom presenterte symbolspråkrepresentasjonar og overgangsrepresentasjonar.

Ved ei deduktiv kategorisering understrekar Mayring (2015) viktigheita av presisjon, og for at ei undersøking skal vera mest mogleg presis trekk han fram tre viktige faktorar. For det første er det viktig at kategoriane er tydeleg definerte. For det andre bør trekk ved kategoriane tydeleggjerast gjennom typiske døme (anchor samples), og for det tredje er det føremålstenleg at det blir utforma kodereglar når det kan vera vanskeleg å skilja kategoriar frå kvarandre. I analyseverktøyet kring representasjonar er desse faktorane teke omsyn til ved at kvar kategori er tydeleg definert og eksemplifisert, og i naudsynte tilfelle er det utforma retningslinjer og reglar for kodinga. Tiltaka bidreg til å tydeleggjera kategoriane, og skapar samtidig transparens kring analysearbeidet, noko som Elo og Kyngäs (2008) trekk fram som sentralt med tanke på å gi lesaren innblikk i analyseprosessen. Sidan demonstrasjon av funn og tolkingar aukar truverdet til undersøkinga (Elo og Kyngäs, 2008), vil typiske døme frå kvar enkelt analyse bli synleggjort i resultatdelen i oppgåva.

3.4 Testing og revisjon av analyseverktøya

I både induktive og deduktive prosessar understrekar Mayring (2015) at kategorisystema må testast, og eventuelt reviderast, før ein gjer ein endeleg analyse av materialet. Han føreslår at ein testar 10 – 50 % av materialet før eventuelle revisjonar blir gjort. Dette prinsippet blei følgt i analysen av læringsmoglegheiter i lærebokleksjonane, ved at godt over halvparten av innhaldet blei testanalysert. Dette medførte ingen revisjon av analyseverktøyet. Likevel var ein slik gjennomgang av materialet viktig, sidan ein fekk betre kjennskap til kategoriane, noko som truleg førte til at den endelege analysen blei meir treffsikker.

Utviklinga av representasjonskategoriane innebar eit relativt omfattande revisjonsarbeid. For å vera trygg på at kategoriane kunne skildra det aktuelle innhaldet i lærebøkene på best mogleg måte, blei det gjort fleire testsyklusar av kategorisystemet før den endelege gjennomgangen av materialet blei gjennomført.

3.5 Gjennomføringa av analysane

Rammeverka og kategorisystema som danna grunnlaget for analysearbeidet blei presenterte i kap. 2.8. Retningslinjene for analysereiskapa blei følgt etter beste emne, og for å registrera resultata på ein systematisk og oversiktleg måte blei det med utgangspunkt i kvart enkelt kategorisystem utforma spesifikke kodeskjema i Excel. Sjølv om kvart enkelt kategorisystem tydeleg definerer kvar einskild kategori, måtte det likevel i enkelte tilfelle gjerast avklaringar. For å fremja transparens kring analyseprosessen, og med det auka truverdet til undersøkinga (Elo & Kyngäs, 2008), vil det vidare bli trekt fram relevante avklaringar og aspekt kring den praktiske gjennomføringa av analysen.

Analysen av representasjonar innebar ein analyse av alle representasjonar og representasjonsovergangar som omhandla likningar i lærebøkene sine likningskapittel. Eventuelle avklaringar blei gjort i utarbeidinga av kategoriane, noko som gjorde at det ikkje dukka opp behov for avklaringar undervegs i analysen av representasjonar. Sidan aktuelle avklaringar blei gjennomgått i detalj ovanfor, er det vidare berre relevant å trekkja fram avklaringar og aspekt kring bruken av MDITx-rammeverket.

3.5.1 Avklaringar og aspekt kring bruk av MDITx-rammeverket

For å gi innblikk i læringsmoglegheitene i lærebøkene sine undervisningssekvensar undersøkjer MDITx-rammeverket ei rekkje aspekt ved innhaldet i lærebøkene. Ein måtte difor bruka mykje tid og tankeverksemd på å lokalisera dei ulike elementa som skulle analyserast. Reint praktisk blei dette gjort ved at ein først gjorde notat i fysiske kopiar av likningskapitla i lærebøkene, før dette arbeidet blei overført til eit kodeskjema i Excel (sjå Tabell 8 nedanfor).

Tabell 8. Kodeskjema i Excel for registrering av MDITx-resultat.

Læringsobjekt 1:	**Løyse lineære likningar med x på ei side av likskapsteiknet**																					
Blokker	**Døme/oppgåve**	**Deloppgåve**	**Døme**					**Oppgåver**				**Namngjeving/ordbruk**							**Legitimeringar**			
			C	G	F	NONE		KPF	CTP	AMC		L	PA	PN	OF	OM			A	SE	SG	NONE
1. Gjennomgang av døme	Samtale s. 100			1					1				3						1	3		
2. Øvingsoppgåver	3.21.	a) - f)							6				2									
	3.22.	a) - f)							6				2									
	3.23.	a) - f)							6				2									
	3.24.	a) - f)							0	6			3									
3. Utforskingsoppgåve	Utforsk saman s. 101								1	1			3									
Total				**1**					**20**	**7**			**15**						**1**	**3**		
Samandrag læringsobjekt 1				G					CTP	AMC			PA						A	SE		

I analysen av oppgåvene blei kvar enkelt deloppgåve definert som éi oppgåve. For å avgjera om ei oppgåve innebar bruk av kjend kunnskap eller prosedyre (KPF), måtte ein ta omsyn til kva kunnskapar ein normalpresterande 7. trinnselev vanlegvis har. Det måtte då både takast utgangspunkt i eigne erfaringar som mellomtrinnslærar i matematikk, og ikkje minst kva kompetansemål i LK 20 som elevane har erfaringar med frå tidlegare trinn. I tillegg måtte desse vurderingane vegast opp mot korleis oppgåvene førehaldt seg til det gjeldande temaet i lærebokleksjonen. Dersom naudsynte prosedyrar eller kunnskapar for å løysa ei oppgåve tydeleg var knytt opp mot lærebokleksjonen sitt tema, blei slike typar oppgåver i all hovudsak kategorisert som CTP-oppgåver. Dette gjaldt sjølv om innhaldet i oppgåvene for enkelte elevar truleg var kjend stoff.

Det å skilja ut AMC-oppgåver frå dei andre oppgåvekategoriane, kunne tidvis vera krevjande, sidan det kan by på utfordringar å avgjera kva tid oppgåver krev at ein etablerer koplingar, eller tar val kring prosedyre og omgrep, for å løysa oppgåvene. Likevel fann ein at oppgåver som etterspurde forklaringar og grunngjevingar oftare blei kategoriserte som AMC-oppgåver. Grunnen til dette er at elevane då i større grad blir utfordra til å gjera vurderingar kring omgrep og prosedyre.

Ordlyden i to oppgåver frå Multi 7B som førekjem i ein lærebokleksjon som omhandlar det å laga og løysa tekstoppgåver som likning med *x* blir vidare nytta for å illustrera nyanseforskjellar mellom CTP- og AMC-oppgåver. Ei oppgåve med følgjande ordlyd er koda som AMC: «Finn likninga som passar til kvar tekstoppgåve, og forklar kvifor likninga passar.» (Alseth et al., 2022, s. 82). For at elevane skal kunna forklara samanhengen mellom tekstoppgåva og likninga, krev det at dei går djupare inn i aspekt kring likningsomgrepet.

Oppgåva blir difor kategorisert som AMC. I oppgåveordlyden «Vel likninga som passar med tekstoppgåva.» (Alseth et al., 2022, s. 82) er forklaringsaspektet fråverande. Dette inneberer at elevane ikkje treng å fordjupa seg like aktivt i omgrepsmessige forhold for å løysa oppgåva, noko som betyr at oppgåva blir kategorisert som CTP.

Ronda og Adler (2017) trekk fram at læringsobjektet for ein lærebokleksjon ofte blir synleggjort gjennom kapitteloverskrifter i lærebøkene. Dette var ikkje alltid tilfelle i dei undersøkte lærebøkene, noko som då innebar at lærebokleksjonane, og det tilhøyrande læringsobjektet, blei gjennom ei kvalitativ vurdering inndeltelte og definerte ut i frå det matematiske innhaldet i døma og oppgåvene. Andre vurderingar kring inndelinga av dei ulike lærebokleksjonane dukka også opp. Til dømes inneheld Matemagisk 7B fleire nivådelte oppgåveløyper, og sidan det kan variera kva løype elevane jobbar med i ein lærebokleksjon, blei relevant innhald i dei ulike løypene kopla opp mot same lærebokleksjon.

Som kodeskjemaet ovanfor (Tabell 8) viser, blei det registrert antal tilfelle innanfor kvar kategori. MDITx-rammeverket har i utgangspunktet ikkje eit slik kvantitativt fokus. Med utgangspunkt i at Mayring (2015) trekk fram at ein kombinasjon av kvalitative og kvantitative aspekt kan heva kvaliteten til undersøkingar, blei det likevel vurdert som fordelaktig å tilføra kvantitative element i denne analysen. Dette valet inneberer difor ei teoriforankra utviding av MDITx-rammeverket.

3.6 Gyldigheit, pålitelegheit og etiske omsyn

Sidan kvantitative metodar har utspring frå eit positivistiske ideal, kor ein tek utgangspunkt i at det eksisterer ei objektiv og sann røynd som kan målast og kvantifiserast, trekk Postholm og Jacobsen (2018) fram at den fullkomne testen på reliabilitet innanfor kvantitative studiar er å oppnå likt resultat i ein gjenteken studie. På den andre sida har kvalitative studiar vanlegvis eit konstruktivistisk perspektiv, kor ein legg til grunn at røynda er ein individuell konstruksjon som stadig er i utvikling (Postholm & Jacobsen, 2018). Postholm og Jacobsen (2018) framhevar difor at det er utfordrande å gjenskapa kvalitative studiar, og at det har innverknad på korleis kvaliteten på forskinga bør vurderast. Sidan resultata kan bli påverka av både forskaren og konteksten, trekk dei fram at det er sentralt at forskaren gir innblikk i kvaliteten til forskinga ved å tydeleg visa forskingsprosessen for lesaren. Det at forskaren samtidig synleggjer sterke og svake sider ved forskingsprosessen på ein ærleg og gjennomsiktig måte, vil styrka pålitelegheita og truverda til undersøkinga (Postholm & Jacobsen, 2018).

I likskap med Postholm og Jacobsen (2018) understrekar både Elo og Kyngäs (2008) og Mayring (2015) viktigheita av å presentera den analytiske prosessen på ein transparent måte. I samband med dette trekk Elo og Kyngäs (2008) fram at det er viktig å gi ei detaljert skildring av analyseprosessen i resultatpresentasjonen, slik at ein skapar ei lenkje mellom data og resultat. Desse faktorane vil fremja pålitelegheita og gyldigheita til forskinga. Gyldigheit handlar om kva slutningar ein forskar har dekning for å trekkja, og blir delt inn i indre og ytre gyldigheit (Postholm & Jacobsen, 2018). Indre gyldigheit handlar om studien faktisk gir svar på det som blir spurt om, og for at lesaren skal kunna avgjera om studien gjer nettopp det, er det i følgje Postholm og Jacobsen (2018) sentralt at forskaren viser korleis skildringar, analysar og tolkingar tek utgangspunkt i datamaterialet. Det er også viktig at ein skildrar utviklinga av kategorisystema, noko som Mayring (2015) meiner bidreg til å forsterka intersubjektiviteten til prosedyren, ved at det blir mogleg for andre å rekonstruera analysen. Med utgangspunkt i nemnde tiltak er det både i metodedelen og resultatdelen blitt via betydeleg spalteplass til å skildra analyseprosessen, og val kring denne, slik at pålitelegheita og gyldigheita til studien blir styrka.

Denne masteroppgåva nyttar to ulike kategorisystem. MDITx-rammeverket er deduktivt ved at det tek utgangspunkt i eit ferdig utarbeida kategorisystem. Det at dette analysereiskapet både er teoriforankra og utprøvd av andre forskarar, meiner Mayring (2015) er element som kan bidra til å auka truverda og objektiviteten til studien.

Kategorisystemet som blei utvikla for å studera representasjonar i lærebøkene bruker både deduktive og induktive metodar, noko som betyr at kategorisystemet i større grad er tilpassa det faktiske innhaldet i dei undersøkte lærebøkene. For at kategoriane skulle gi eit best mogleg bilete av det undersøkte innhaldet, var det heilt sentralt å gjera vurderingar av kategoriane i forkant av den endelege analysen, slik at ein kunne vera trygg på at kategorisystemet fungerte tilfredsstillande.

Det at kvalitative undersøkingar er mindre standardiserte enn kvantitative meiner Mayring (2015) krev eit særleg fokus på forskinga sine kvalitetskriterium. Som eit sentralt element for å auka truverdet til undersøkingar trekk han fram interkoder-reliabilitet. Sjølv om ein slik prosess bidreg til auka objektivitet, blei det i denne undersøkinga ikkje gjennomført uavhengige analysar, noko som er ein klar svakheit ved studien. Det var difor viktig å gjera andre tiltak for fremja objektiviteten til undersøkinga, som til dømes det å gjera fleire analyserundar av heile, eller deler av, materialet, slik at analysen blei meir stabil og objektiv.

I tillegg til å styrka truverda til undersøkinga, vil ei transparent skildring av prosessen også kunne føra til at forskinga i større grad kan overførast til andre kontekstar (Postholm & Jacobsen, 2018). Postholm og Jacobsen (2018) refererer til omgrepet ytre gyldigheit, og trekk fram at overføring i ein kvalitativ kontekst dreiar seg om at skildringane er moglege å kjenna seg att i. Dette inneberer at sjølv om funna i denne forskingsstudien i hovudsak gjeld for dei tre undersøkte lærebøkene, vil det vera mogleg å trekkja ut funn som ein mest sannsynleg kan kjenna att i andre samanhengar. Det at kvalitativ innhaldsanalyse nyttiggjer seg styrkane til kvantitative analysar vil også fremja overføringsaspektet, sidan «Quantitative steps of analysis will always gain particular importance when generalization of the results is required.» (Mayring, 2015, s. 372)

Kvalitative innhaldsanalysar stiller naturleg nok færre krav til personvern enn undersøkingar som direkte angår personar. Trass at dette inneberer færre etiske omsyn, er det samtidig viktig at slike undersøkingar blant anna er sannferdige og reielege (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). Dette krev openheit og transparens kring forskinga. Grep for å fremja desse aspekta har blitt skildra ovanfor. I tillegg bør det trekkjast fram at det er viktig at ein som forskar praktiserer god refereringsskikk, slik at ein både er reieleg, samtidig som ein skapar rom for at arbeidet kan etterprøvast (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019). I skriveprosessen har det difor vore eit sterkt fokus på å synleggjera kjelder så nøyaktig som mogleg, både for at andre sitt arbeid skal bli anerkjend, men og for å skilja mellom eige og andre sine bidrag (Den nasjonale forskningsetiske komitè for samfunnsvitenskap og humaniora, 2021).

For å gi eit godt bilete av analyseprosessen er det fordelaktig å kunna nytta utklipp frå dei undersøkte lærebøkene. For å ta omsyn til opphavsretten blei difor dei aktuelle forlaga kontakta for å undersøkja moglegheita til å få tillating til å gjenbruka figurar og illustrasjonar frå lærebøkene deira. Både Aschehoug og Gyldendal responderte positivt på at ein kunne nytta utklipp frå Matemagisk 7B og Multi 7B, så lenge oppgåva ikkje blir publisert på andre måtar enn gjennom universitetet sine kanalar. Cappelen Damm gav samtykke til intern bruk, men ikkje til noko form for publisering. Sidan eg ønsker at det skal vera mogleg å kunna publisera masteroppgåva gjennom UiA sitt digitale vitenarkiv, inneberer det at det i denne oppgåva ikkje blir gjengjeve illustrasjonar og bilete frå Matematikk 7.

4 Analyse og resultat

Vidare blir resultata frå dei ulike analysane presenterte. For å gi innblikk i analysearbeidet blir typiske døme på dei ulike kategoriane i analyseverktøya trekte fram.

4.1 Resultat MDITx

Tabell 9. Oversikt over MDITx-resultat, Matematikk 7.

Læreverk: Matematikk 7								
Læringsobjekt	Døme		Oppgåver		Namngiving/ordbruk		Legitimeringar	
	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå
Nr. 1	G (2)	L1	CTP (20) AMC (7)	L3	PA (15)	L1	A (1) SE (3)	L2
Nr. 2	G (1)	L1	CTP (21)	L2	PA (11)	L1	SE (5) SG (1)	L3
Nr. 3	G (1)	L1	CTP (9) AMC (4)	L3	PA (19)	L1	NONE	NONE
Nr. 4	G (1)	L1	CTP (6) AMC (4)	L3	PA (20)	L1	NONE	NONE
Nr. 5	G (2)	L1	CTP (5)	L2	PA (6) OF (2) OM (1)	L3	SE (3)	L2

Tabell 10. Oversikt over MDITx-resultat, Multi 7B.

Læreverk: Multi 7B								
Læringsobjekt	Døme		Oppgåver		Namngiving/ordbruk		Legitimeringar	
	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå	Kategoriar	Nivå
Nr. 1	C (1) G (1) C, G (1)	L2	KPF (10) CTP (14) AMC (3 + (6))	L3	PA (11) PN (13) OF((2) OM (1)	L3	SE (3)	L2
Nr. 2	C (1) G (1)	L2	CTP (29) AMC (6)	L3	PA (11) PN (32) OM (1)	L2	A (1) SE (1) SG (1)	L3
Nr. 3	G (1)	L1	CTP (25) AMC (6)	L3	PA (22) PN (13)	L2	SE (1)	L2
Nr. 4	C (1)	L1	CTP (12) AMC (1)	L3	PA (23)	L1	NONE	NONE
Nr. 5	NONE	NONE	CTP (40) AMC (1)	L3	L (1) PA (39) PN (7)	L2	A (1) SE (1)	L2

Tabell 11. Oversikt over MDITx-resultat, Matemagisk 7B.

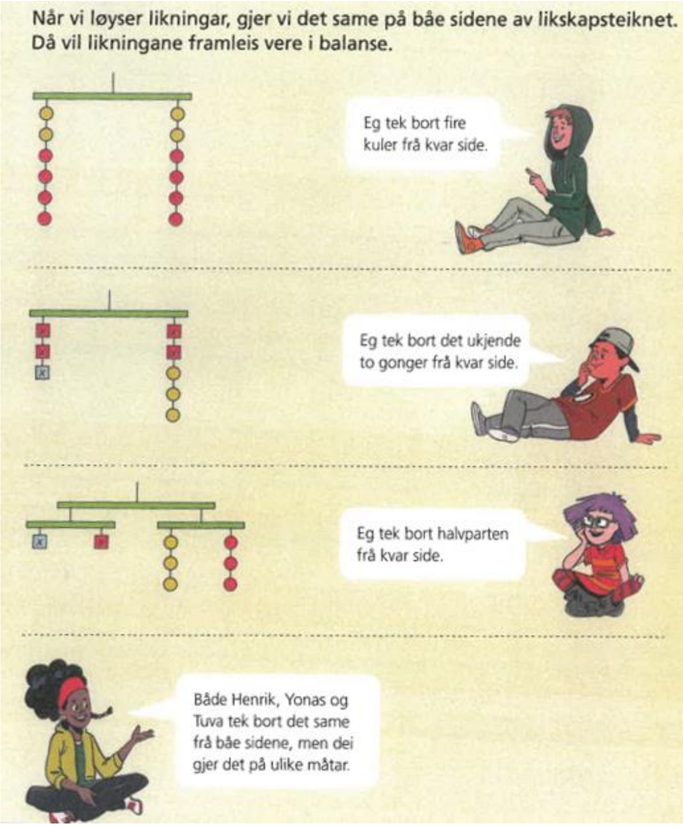
Læreverk: Matemagisk 7B								
Læringsobjekt	**Døme**		**Oppgåver**		**Namngiving/ordbruk**		**Legitimeringar**	
	Kategoriar	**Nivå**	**Kategoriar**	**Nivå**	**Kategoriar**	**Nivå**	**Kategoriar**	**Nivå**
Nr. 1	C, G (2)	L2	KPF (1) CTP (28) AMC (14)	L3	PA (25) PN (23) OF (1)	L3	A (1) SE (3)	L2
Nr. 2	C (2) G (1) C, G (1) F (1)	L3	CTP (15) AMC (17)	L3	PA (23) PN (15) OF (1) OM (1)	L3	SE (5) SG (1)	L3
Nr. 3	C (3) G (1) C, G (1)	L2	CTP (56) AMC (35)	L3	PA(58) PN (53)	L2	SE (1)	L2
Nr. 4	C (1) C, G (1)	L2	CTP (2)	L2	PN (2) OF (2) OM (1)	L3	A (1) SE (5) SG (1)	L3

Tabellane ovanfor (Tabell 9 – 11) gir ein oversikt over MDITx-resultata for kvar lærebok. Resultata for kvar enkelt kategori i rammeverket blir vidare gjennomgått.

4.1.1 Døme

Analysen av undervisningsleksjonane ved bruk av MDITx-rammeverket viser både likskapar og ulikskapar med tanke på kva potensiale for læring lærebøkene har. I Tabell 9 ser ein til dømes at Matematikk 7 konsekvent nyttar generaliserande døme (G), medan Matemagisk 7B (Tabell 11), i tillegg til å ha eitt fusjonerande døme (F), har innslag av både generaliserande og kontrasterande døme (C) innanfor kvar enkelt leksjon. Multi 7B (Tabell 10) har, i tillegg til ei økt som er koda som NONE, to lærebokleksjonar kor ein nyttar både C og G, og to leksjonar kor døma er generaliserande. Det er også verdt å merka seg at Matemagisk 7B skil seg ut med å ha totalt 5 døme kor det førekjem både generaliserande og kontrasterande element.

Figur 2 nedanfor viser eit døme frå Matemagisk 7B som inneheld både kontrasterande og generaliserande element. Til dømes blir det vist ulike og kontrasterande måtar å endra uroa på. I tillegg trekk dei ulike tilfella av uroar, med støtte i den innleiande teksten, fram generelle aspekt kring likningsløysing. Sidan dette mogleggjer generalisering av eigenskapar både innanfor, og på tvers dei ulike døma, er dømet koda som F.



Figur 2. Fusjonerande døme frå Matemagisk 7B med kontrasterande og generaliserande element som blir legitimerte gjennom SG og SE (Kongsnes et al., 2022, s. 98).

4.1.2 Oppgåver

I oppgåvekategorien dominerer CTP-oppgåver. Grunna innslag av AMC-oppgåver ser ein likevel at fleirtalet av lærebokleksjonane i dei tre lærebøkene hamnar på L3. Det er også verdt å merka seg skilnadar mellom antal oppgåver i oppgåvekategoriane, kor ein i hovudsak ser at Multi 7B og Matematikk 7 har tydeleg overvekt av CTP-oppgåver, medan ein finn eit meir balansert forhold mellom AMC- og CTP-oppgåver i Matemagisk 7B. Ein viktig observasjon er at Multi 7B har eit særleg fokus på KPF-oppgåver i den første lærebokleksjonen, kor elevane skal nytta kjend kunnskap kring likskapsteiknet for å løysa oppgåvene. Døme på slike oppgåver finn ein i Figur 3 nedanfor. Sidan elevane i dette dømet blant anna skal finna grunngjevingar for kva tid likskapsteiknet er brukt rett eller feil, har oppgåvene i seg element som går utover typiske KPF-oppgåver. I analyseprosessen blei det difor vurdert om desse deloppgåvene skulle bli koda som AMC-oppgåver. For å best mogleg synleggjera korleis Multi 7B freistar å etablera algebraiske forståingar med utgangspunkt i ein kjend aritmetisk kontekst blei KPF-kategorien føretrekt for desse tilfella, men for å visa at oppgåvene samtidig har kvalitetar som kvalifiserer for å bli registrerte som AMC-oppgåver, blei tilfella noterte som ein parentes i AMC-kategorien.

7.25 Bestem om likskapsteiknet stemmer. Finn ei grunngiving både der det er brukt rett, og der det er brukt feil.

a $45 = 4{,}5 \cdot 10$ **b** $135 = 10 - 145$ **c** $7 \cdot 23 = 8 \cdot 22$

d $2462 - 75 = 2472 - 85$ **e** $17 \cdot 1{,}6 = 34 \cdot 0{,}8$ **f** $1 + 4 \cdot 3 = 15$

Figur 3. KPF-oppgåver i Multi 7B med fokus på likskapsteiknet (Alseth et al., 2022, s. 76).

Sidan elevane i oppgåve 43 a) og b) (Figur 4) skal nytta metodar som har blitt introduserte i den gjeldande lærebokleksjonen, er desse oppgåvene døme på CTP-oppgåver. I oppgåve 43 c) (Figur 4) må elevane vurdera dei ulike metodane opp mot kvarandre for å kunna ta stilling til kva metode dei liker best, og når elevane i tillegg må grunngi valet sitt inneberer det at denne oppgåva blir koda som AMC.

43 Sjå på strategiane til Henrik og Yonas på førre side.

a Løys likninga $6 + 4 \cdot x = 14$ med strategien til Henrik.

b Løys likninga $6 + 4 \cdot x = 14$ med strategien til Yonas.

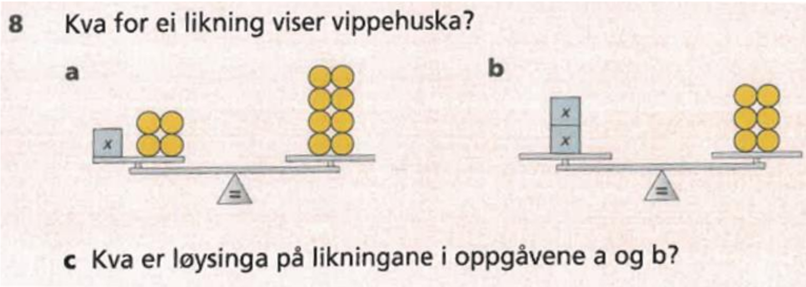
c Kva for ein av strategiane liker du best? Grunngi svaret.

Figur 4. CTP- og AMC-oppgåver frå Matemagisk 7B (Kongsnes et al., 2022, s.121).

4.1.3 Namngiving og ordbruk

Med tanke på korleis lærebøkene nyttar ord og namngivingar skil Matematikk 7 seg klart ut, ved at det i fire av fem lærebokleksjonar berre er innslag av PA. I over halvparten av oppgåvene i denne boka finn ein følgjande handlingsretta matematiske utsegn: *Løys likninga, og vis at likninga er gyldig*. Gjennom at elevane i oppgåvene blir bedne om å både **løysa** og **visa,** fører bruken av verb til at fokuset blir retta mot ein prosedyre. Den siste lærebokleksjonen i Matematikk 7 skil seg frå resten av dei analyserte leksjonane i boka ved at økta, i tillegg til PA, inneheld OF og OM.

Dei andre lærebøkene har ein meir balansert og variert ordbruk. I Matemagisk 7B ser ein blant anna at PN er representert i alle lærebokleksjonane, og at OF og OM førekjem i høvesvis tre og to økter. I oppgåve 8 (Figur 5, s. 43) ser ein døme på utsegn som er koda som PN, sidan substantiva «likning» og «løysinga» fokuserer merksemda på løysinga. Multi 7B har innslag av PN i tre av fem økter, og i ein leksjon blir eigenskapar ved det matematiske objektet trekt fram (OM). I likskap med Matemagisk 7B har Multi 7B innslag av OF i to lærebokleksjonar. Trass i at Multi 7B har ein meir variert ordbruk enn Matematikk 7, er det ein viktig observasjon at dette i hovudsak gjeld dei to første lærebokleksjonane. Frå den tredje lærebokleksjonen finn ein nemleg ei markant dreiing mot PA. Innanfor ordbrukkategorien er også verdt å merka seg at lærebøkene har få, eller ingen, innslag av kategorien L.



Figur 5. Matematiske utsegn i Matemagisk 7B koda som PN (Kongsnes et al., 2022, s. 93).

Multi 7B gir ved fleire høve forklaringar som omhandlar likningsløysing. I følgjande sitat refererer ordbruken direkte til omgrepet «likningsløysing»: «Å *løyse ei likning* betyr å finne talet som ein ukjent storleik står for, slik at verdien blir den same på begge sidene av likskapsteiknet.» (Alseth et al., 2022, s. 78). Utsegnet er difor koda som OM. Det neste sitatet frå Multi 7B skildrar eigenskapar kring det å løysa likningar, og blir difor koda som OF: «Når vi løyser likningar, kan vi legge til og trekke frå like mykje på kvar side av likskapsteiknet.» (Alseth et al., 2022, s. 80)

4.1.4 Legitimeringar

Den vanlegaste måten å legitimera matematiske utsegn på i læreverka er å bruka døme som støttar opp om det matematiske innhaldet. Dette ser ein både ved at SE totalt sett førekjem flest gongar, og at SE er representert i alle lærebokleksjonane som inneheld legitimeringar. Lærebøkene har også enkelte leksjonar kor det førekjem matematiske utsegn som manglar substansieringar (A). Matematikk 7 har ingen leksjonar med innslag av SG, medan Multi 7B og Matemagisk 7B har høvesvis ein og to leksjonar kor utsegn blir legitimerte ut i frå matematiske grunngjevingar. Multi 7B og Matematikk 7 har høvesvis ein og to leksjonar kor legitimering av matematiske utsegn er fråverande.

Vidare blir dømet i Figur 2 (sjå s. 41) brukt for å eksemplifisera dei ulike legitimeringskategoriane i MDITx-rammeverket. Innhaldet i det første utsegnet «Når vi løyser likningar, gjer vi det same på båe sidene av likskapsteiknet.» blir legitimert ut i frå matematiske prinsipp i den påfølgjande setninga «Då vil likningane framleis vere i balanse.» Dømet blir difor koda som SG. Innhaldet i begge utsegna blir vidare underbygd og eksemplifisert av både visuelle og tekstlege representasjonar. Ein kodar difor dømet også som SE. Dersom det første utsegnet hadde mangla desse formene for substansiering, ville autoriteten kring innhaldet ha vore hos forfattarane, og såleis vore eit døme på kategorien A.

4.2 Resultat representasjonar

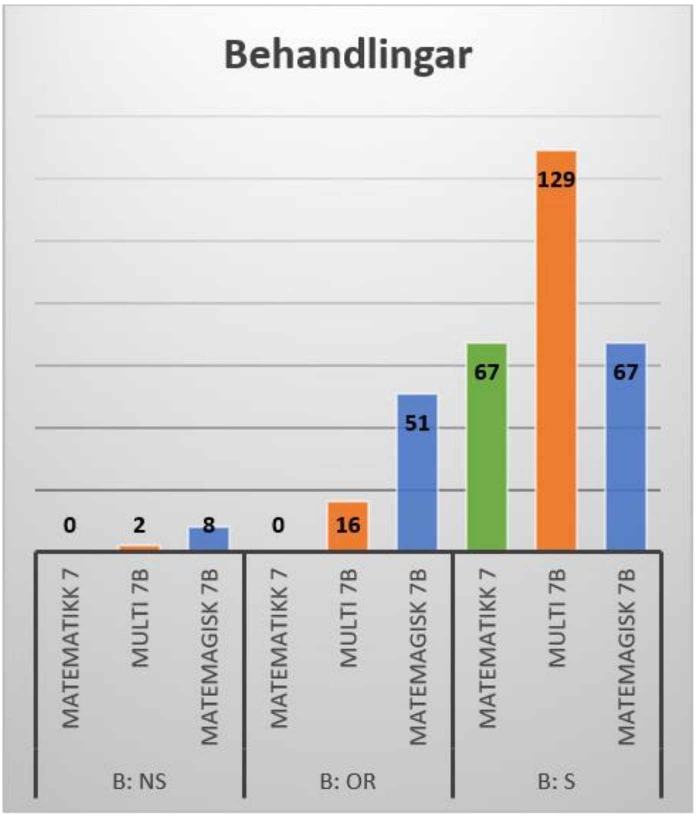
Analysen av representasjonar avdekka store skilnadar mellom Matemagisk 7B og dei to andre lærebøkene. Dette kjem fram i Tabell 12 nedanfor, som viser prosentvis fordeling og antal behandlingar, konverteringar, representasjonssamankoplingar og type overgangsrepresentasjonar innanfor kvar einskild lærebok.

Tabell 12. Oversikt over behandlingar, konverteringar, samankoplingar og type overgangsrepresentasjonar i lærebøkene.

Behandlingar, konverteringar, samankoplingar og type overgangsrepresentasjonar						
	Matematikk 7		**Multi 7B**		**Matemagisk 7B**	
Behandling i:	**Antal**	**Prosent**	**Antal**	**Prosent**	**Antal**	**Prosent**
Naturleg språk	0	0	2	1,4	8	6,3
Overgangsrepresentasjon	0	0	16	10,9	51	40,5
Symbolspråk	67	100,0	129	87,7	67	53,2
Total:	**67**	**100,0**	**147**	**100,0**	**126**	**100,0**
Konvertering frå:						
Naturleg språk til symbolspråk	9	37,5	15	83,3	0	0
Naturleg språk til overgangsrepresentasjon	0	0	0	0	2	3,0
Naturleg språk + overgangsrepresentasjon til symbolspråk	5	20,8	1	5,6	0	0
Overgangsrepresentasjon til symbolspråk	4	16,7	0	0	17	25,4
Overgangsrepresentasjon til naturleg språk	4	16,7	0	0	16	23,8
Symbolspråk til overgangsrepresentasjon	0	0	0	0	15	22,4
Symbolspråk til naturleg språk	2	8,3	2	11,1	17	25,4
Total:	**24**	**100,0**	**18**	**100,0**	**67**	**100,0**
Samankopling av:						
Naturleg språk og symbolspråk	2	40,0	11	68,7	1	3
Symbolspråk og overgangsrepresentasjon	0	0	2	12,5	8	24,2
Symbolspråk + overgangsrepresentasjon m/*konvertering* til naturleg språk	0	0	0	0	13	39,4
Naturleg språk og overgangsrepresentasjon	0	0	1	6,3	9	27,3
Naturleg språk, overgangsrepresentasjon og symbolspråk	3	60,0	2	12,5	2	6,1
Total:	**5**	**100,0**	**16**	**100,0**	**33**	**100,0**
Type overgangsrepresentasjon:						
Blokkmodell	10	100,0	1	10,0	0	0
Vippehuske/vektstong	0	0	8	80,0	19	31,2
Uro	0	0	1	10,0	24	39,3
Tallinje	0	0	0	0	18	29,5
Total:	**10**	**100,0**	**10**	**100,0**	**61**	**100,0**

For å tydeleggjera kva som karakteriserer bruken av representasjonar i dei ulike lærebøkene, blir resultata for kvar kategori vidare presenterte som diagram.

4.2.1 Behandlingar



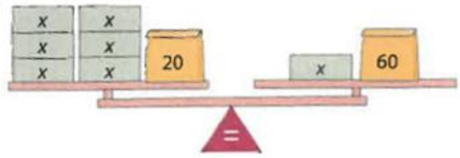
Figur 6. Oversikt over behandlingar i lærebøkene.

Diagrammet ovanfor (Figur 6) viser at Matematikk 7 og Multi 7B har klar overvekt av behandlingar i symbolspråk. Multi 7B skil seg ut med heile 129 behandlingar, medan ein ser at Matematikk 7 nyttar konsekvent symbolregisteret til alle dei 67 registrerte behandlingane. I motsetnad til Matematikk 7, har derimot Multi 7B førekomstar av behandlingar i andre representasjonssystem, med 16 behandlingar i overgangsrepresentasjonar og to behandlingar i naturleg språk. Matemagisk 7B sine behandlingar fordelar seg jamnare utover kategoriane, kor det særleg er verdt å merka seg at læreboka har heile 51 behandlingar i overgangsrepresentasjonar, noko som utgjer omlag 40 % av det totale antalet behandlingar i boka. Det er også eit viktig funn at Matemagisk 7B i større grad nyttar det naturlege språket til behandlingar enn dei andre lærebøkene.

Oppgåve 7.39 (Figur 7) og 7.40 (Figur 8) frå Multi 7B viser døme på høvesvis kategoriane B: OR og B: S, medan oppgåve 11 (Figur 9) i frå Matemagisk 7B viser eit døme på ei oppgåve som krev ei behandling i det naturlege språket (B: NS).

7.39 Kor mykje veg eska merkt med x?

a



Figur 7. Oppgåve frå Multi 7B som inneberer behandling i overgangsrepresentasjon (Alseth et al., 2022, s. 80).

Løys likningane.

7.40 **a** $2x + 81 = 11x$ **b** $105 + 3x = 8x$ **c** $7x = 3x + 44$

d $15x = 6x + 54$ **e** $4x + 360 = 7x$ **f** $12x = 571 - 21 + 2x$

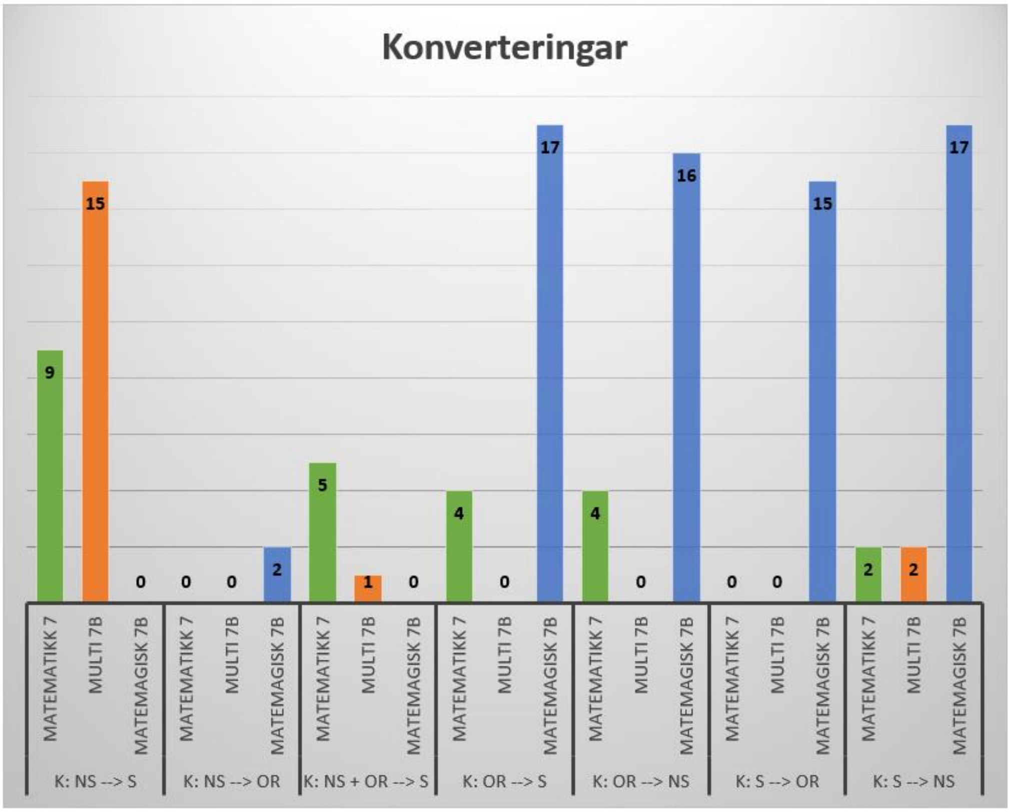
g $4x - 10 = 2x + 8$ **h** $5x - 6 = x + 10$ **i** $6x + 2 = 3x + 26$

Figur 8. Oppgåver frå Multi 7B som inneberer behandling i symbolspråk (Alseth et al., 2022, s. 81).

11 Forklar kva ei likning er, til ein som aldri har høyrt om likningar før.

Figur 9. Oppgåve frå Matemagisk 7B som inneberer behandling i naturleg språk (Kongsnes et al., 2022, s. 94).

4.2.2 Konverteringar



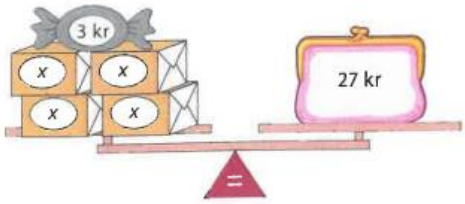
Figur 10. Oversikt over konverteringar i lærebøkene.

Matemagisk 7B har 67 registrerte tilfelle kor det førekjem konverteringar. Dette er klart meir enn Matematikk 7 og Multi 7B, som høvesvis har 24 og 18 konverteringar. Diagrammet ovanfor (Figur 10) viser at det i Matematikk 7 og Multi 7B i all hovudsak førekjem konverteringar kor symbolspråk utgjer målregisteret. 83,3 % av konverteringane i Multi 7B er N → S. Matematikk 7 har også overvekt av N → S, kor denne konverteringskategorien utgjer 37,5 %. Dersom ein ser N + OR → S som ein variant av N → S, har Matematikk 7 14 konverteringar som går direkte, eller indirekte N → S, noko som utgjer 58,3 %. Med ein slik tankegang vil Multi 7B sine direkte og indirekte konverteringar N → S utgjera 88,9 %.

Oppgåver som inneberer konverteringa N → S er i all hovudsak tekstoppgåver som skal gjerast om til ei likning i symbolsystemet, og deretter løysast gjennom behandling. Dette gjeld også konverteringskategorien NS + OR → S, berre at tekstoppgåva då i tillegg blir representert i form av ein synleg overgangsrepresentasjon (sjå Figur 11 nedanfor). Det at slike typar oppgåver skal løysast som ei algebraisk likning medfører at oppgåvene også blir registrerte som behandling i symbolspråk.

7.34 Skriv rekneuttrykk med *x*. Rekn ut.

a Lars kjøper fire like esker med drops og ein tyggegummi som kostar 3 kr. Til saman betaler han 27 kr. Kva kostar éi eske med drops?



Figur 11. Tekstoppgåve med overgangsrepresentasjon frå Multi 7B som skal løysast i symbolspråket (K: NS + OR → S) (Alseth et al., 2022, s. 79).

Som nemnt krev Multi 7B og Matematikk 7 i stor grad direkte, eller indirekte konverteringar N → S. Det er difor eit særs interessant funn at Matemagisk 7B ikkje har nokon som helst tilfelle av ei slik konverteringsretning. I staden ser ein at Matemagisk 7B i stor grad har konverteringar kor overgangsrepresentasjonar utgjer start- eller målrepresentasjonen i konverteringa. Ein finn to tilfelle av N → OR, 17 tilfelle av OR → S, 16 tilfelle av OR → N og 15 tilfelle av S → OR. Til saman utgjer dette 74,6 % av konverteringane i Matemagisk 7B. Matematikk 7 har fire tilfelle OR → S, og fire tilfelle OR → N, medan ein ser at Multi 7B ikkje ved noko høve nyttar overgangsrepresentasjonar som start- eller målrepresentasjon.

I Figur 5 (s. 43) skal ein omforma ei «vippehuskelikning» til ei symbolsk likning, noko som krev ei konvertering OR → S, medan ein i oppgåve 15 (Figur 12) må gå motsett veg, noko som inneberer ei konvertering S → OR.

15 Teikn uroer, vippehusker eller tallinjer som viser korleis likninga kan løysast.

a $2 \cdot x + 2 = 8$ **b** $3 \cdot x = x + 10$ **c** $4 \cdot x + 1 = 2 \cdot x + 7$

Figur 12. Oppgåver frå Matemagisk 7B som inneberer konvertering frå symbolspråk til overgangsrepresentasjon (K: S → OR) (Kongsnes et al., 2022, s. 102).

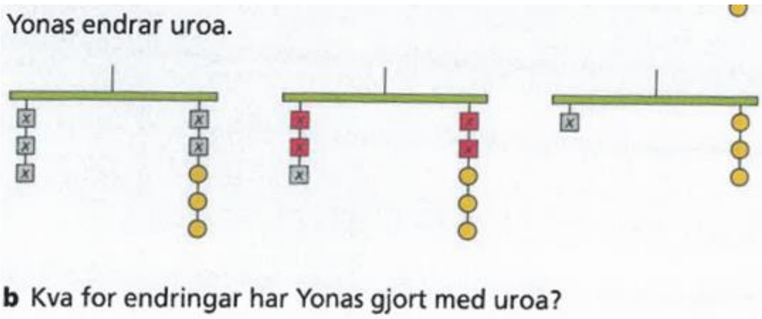
Oppgåve 9 a og b (Figur 13) krev ei konvertering NS → OR, medan Figur 14 er eit døme på ei oppgåve som inneberer at ein omformar overgangsrepresentasjonar til eit munnleg/tekstleg format, slik at ein går OR → NS. Andre typiske døme på sistnemnde kategori, kan også vera oppgåver kor ein skal utforma tekstoppgåver ut i frå overgangsrepresentasjonar, slik som tilfellet er i følgjande oppgåvelyd frå Matematikk 7: «Lag ei tekstoppgåve som høver med følgjande modell.» (Gulbrandsen et al., 2021, s. 104).

9 Teikn vippehusker som høver til skildringane. Vippehuskene skal vere i balanse.

a Éin boks og tre kuler på venstre side. Seks kuler på høgre side.

b Tre boksar på venstre side. Tolv kuler på høgre side.

Figur 13. Oppgåver frå Matemagisk 7B som inneberer konvertering NS → OR (Kongsnes et al., 2022, s. 94).



Figur 14. Oppgåve frå Matemagisk 7B som inneberer konvertering OR → NS (Kongsnes et al., 2022, s. 96).

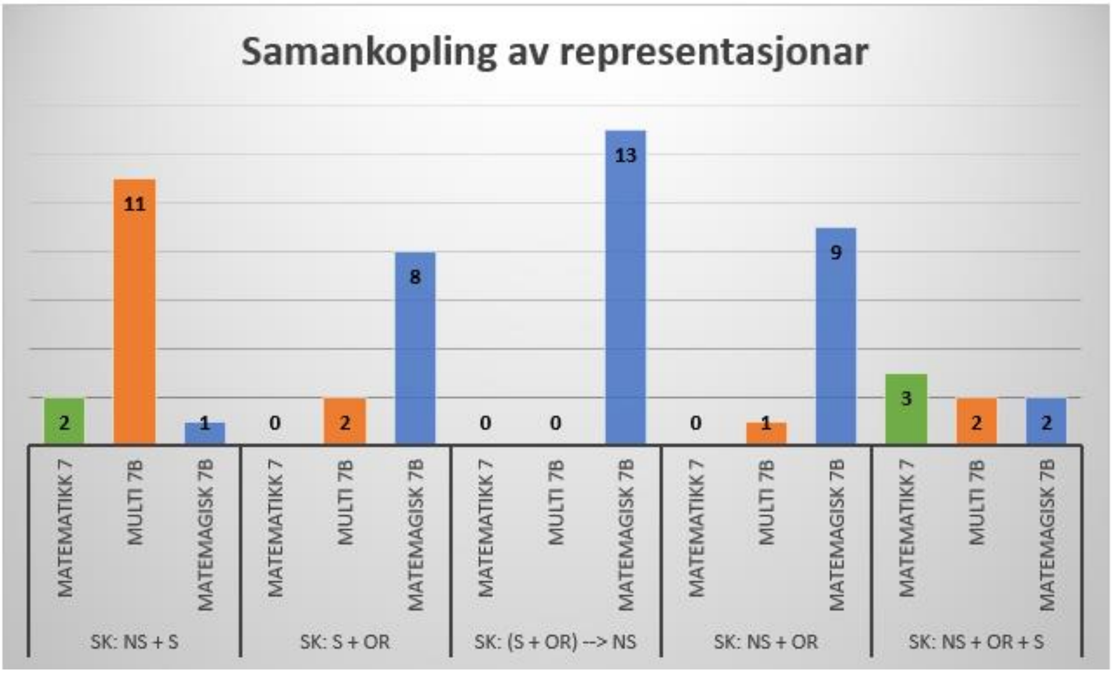
I Matemagisk 7B utgjer K: S → NS den einaste konverteringskategorien som ikkje har overgangsrepresentasjon som start- eller målrepresentasjon. Med 17 tilfelle utgjer kategorien 25,4 % av konverteringane. Både Multi 7B og Matematikk 7 har 2 tilfelle i denne kategorien. Ut i frå resultata for konverteringsretningane NS → S og S → NS kan ein difor trekka fram at Multi 7B og Matematikk 7 vektlegg NS → S, medan Matemagisk 7B prioriterer motsett veg, i form av S → NS. I oppgåve 6 nedanfor (Figur 15) ser ein eit døme på K: S → NS kor elevane skal grunngi ei løysing på ei algebraisk likning, noko som inneberer ein konvertering frå symbolspråk til naturleg språk.

6 Sant eller usant? Grunngi svaret.

a $x = 4$ er ei løysing på likninga $2 + x = 6$.

Figur 15. Oppgåve frå Matemagisk 7B kor elevane skal nytta naturleg språk til å grunngi ei symbolsk løysing K: S → NS (Kongsnes et al., 2022, s. 96).

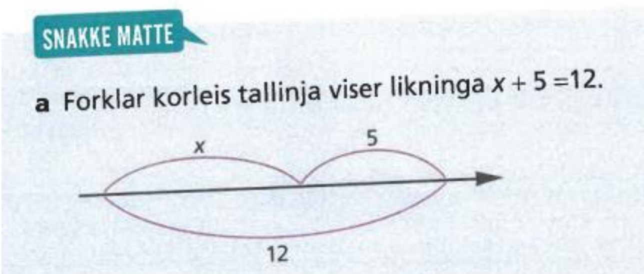
4.2.3 Samankopling av representasjonar



Figur 16. Oversikt over samankopling av representasjonar i lærebøkene.

I likskap med funna kring konverteringar i lærebøkene, viser diagrammet ovanfor (Figur 16) at Matemagisk 7B har klart fleire tilfelle som inneberer ei samankopling av ulike representasjonar enn dei andre lærebøkene. Matemagisk 7B har totalt 33 samankoplingar, medan Multi 7B har 16 og Matematikk 7 har fem samankoplingar av representasjonar. Diagrammet viser at Matemagisk 7B, i likskap med konverteringsresultata, også innanfor samankopling av representasjonar har flest tilfelle av kategoriar kor overgangsrepresentasjonar utgjer eit element. Ved at Matemagisk 7B har 13 tilfelle av SK: (S + OR) → NS, åtte tilfelle av SK: NS + OR og to tilfelle av SK: NS + OR + S, ser ein at læreboka i desse representasjonskombinasjonane også vektlegg bruk av det naturlege språket.

I «SNAKKE MATTE» a) (Figur 17) skal elevane forklara samanhengen mellom eit likningsuttrykk og ein overgangsrepresentasjon i form av ei tallinje. Denne oppgåva er difor eit døme på SK: (S + OR) → NS. I tilfelle kor forklaringsaspektet er fråverande blir slike tilfelle koda som SK: S + OR.

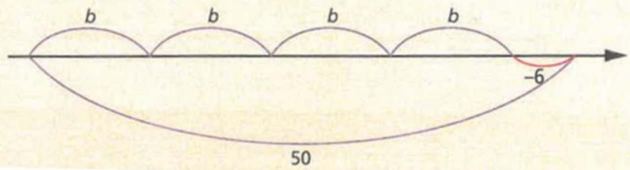


Figur 17. Oppgåve frå Matemagisk 7B kor ein skal forklara samanhengen mellom symbolspråk og overgangsrepresentasjon (SK: S + OR → NS) (Kongsnes et al., 2022, s. 90).

Eit tilfelle som medfører ei samankopling av NS + OR ser ein eit døme på i oppgåve 49 a) (Figur 18).

49 Ingeborg kjøper fire bollar. Ho betaler med ein femtilapp og får seks kroner attende.

a Forklar korleis tallinja viser situasjonen.



Figur 18. Oppgåve frå Matemagisk 7B kor ein skal forklara samanhengen mellom naturleg språk og overgangsrepresentasjon (SK: NS + OR) (Kongsnes et al., 2022, s. 124).

I likskap med Matemagisk 7B viser resultata i samankoplingskategorien at også Multi 7B prioriterer bruk av det naturlege språket, men då i all hovudsak i kombinasjon med symbolspråket. Dette ser ein ved av det førekjem elleve tilfelle av SK: NS + S og to tilfelle av SK: NS + OR + S, og berre eitt tilfelle av SK: NS + OR. Matematikk 7 har færre tilfelle av samankoplingar av representasjonar med to tilfelle av SK: NS + S og tre tilfelle av SK: NS + OR + S. Likevel ser ein same fokus på NS og S som denne boka har i samband med konverteringar.

Eit døme på ei oppgåve der elevane blir bedne om å samankopla NS + S ser ein nedanfor i Figur 19 (oppgåve 7.47), medan ein i Figur 20 (oppgåve 7.89) ser ei samankopling av NS + OR + S.

7.47 Vel likninga som passar med tekstoppgåva.

a I ein fornøyelsespark kostar det 100 kr å komme inn, og kvar aktivitet kostar 30 kr. Anders bruker 250 kr på inngangsbillett og aktivitetar.

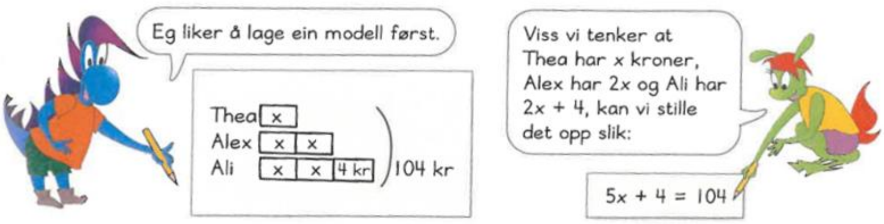
Kor mange aktivitetar tok han?

$\boxed{30x = 250}$ $\boxed{250 = 100 + 30x}$ $\boxed{250 - 100 = 30 + x}$

Figur 19. Oppgåve frå Multi 7B som inneberer ei samankopling av NS + S (Alseth et al., 2022, s. 82).

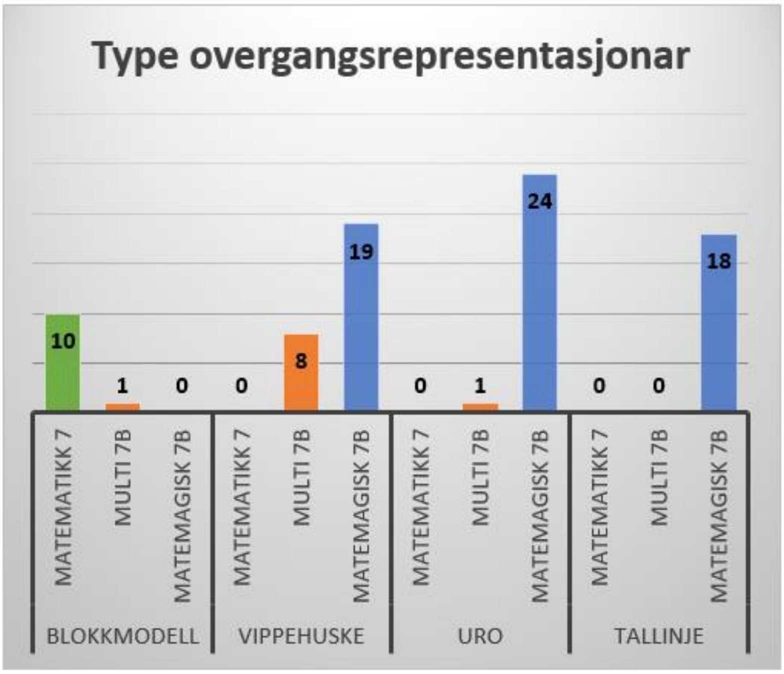
7.89 Alex, Thea og Ali har til saman 104 kr. Alex har dobbelt så mykje pengar som Thea. Ali har 4 kr meir enn Alex.

Rekn ut kor mykje pengar Thea har.



Figur 20. Oppgåve frå Multi 7B som inneberer ei samankopling av NS + OR + S (Alseth et al., 2022, s. 97).

4.2.4 Overgangsrepresentasjonar



Figur 21. Oversikt over type overgangsrepresentasjonar i lærebøkene.

Når ein registrerer overgangsrepresentasjonar, er det viktig å merka seg at kvar enkelt type overgangsrepresentasjon berre blir registrert ein gong per døme/oppgåve. Dette inneberer at elevane kan møta fleire variantar av same type overgangsrepresentasjon i kvart tilfelle, utan at dette blir talt opp.

Analysen av overgangsrepresentasjonar (sjå Figur 21 ovanfor) viste at alle lærebøkene nyttar ei eller fleire former for overgangsrepresentasjonar, og at både Matematikk 7 og Multi 7B nyttar overgangsrepresentasjonar i ti tilfelle. Matematikk 7 nyttar konsekvent blokkmodellar (sjå døme i Figur 20, s. 50) som overgangsrepresentasjonar, medan Multi 7B i all hovudsak nyttar vippehusker/vektstenger (sjå td. Figur 7, s. 46). Matemagisk 7B skil seg frå dei andre lærebøkene, både ved at boka har heile 61 tilfelle kor ein nyttar overgangsrepresentasjonar, i tillegg til at boka har ei relativt jamn fordeling mellom tre ulike former for overgangsrepresentasjonar, nemleg vippehusker (31,2 %), uroar (39,3 %) (sjå td. Figur 2, s. 41) og tallinjer (29,5 %) (sjå td. Figur 17 og Figur 18, s. 49 – 50).

5 Diskusjon

Resultata som blei synleggjort i førre kapittel blir vidare løfta fram og diskuterte. Diskusjonen av resultata tek utgangspunkt i oppgåva si problemstilling, forskingsspørsmål, analytiske verktøy og gjennomgått teori.

5.1 Bruk av døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar i lærebøkene

For å få innblikk i kva læring som blir gjort tilgjengeleg kring temaet likningar i dei undersøkte lærebøkene, blei døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar analyserte ved å nytta Ronda og Adler (2017) sitt MDITx-rammeverk.

Analysen av dei ulike døma i lærebøkene avdekka både likskapar og ulikskapar. Felles for lærebøkene var at dei ulike lærebokleksjonane i så godt som alle tilfelle hadde innslag av døme med generaliserande element. Det er difor naturleg å trekkja fram at lærebøkene gjennom døma fokuserer på å leggja til rette for at elevane skal kunna få innblikk i generelle eigenskapar på tvers av representasjonar.

Ronda og Adler (2017) plasserer lærebokleksjonar som har innslag av døme med berre eitt mønster av variasjon på det lågaste kategoriseringsnivået. Det kan difor diskuterast om ei tilnærming kor generalisering (G) er einerådande i alle døma er tilstrekkeleg med tanke på å skapa ei heilskapleg forståing av likningsomgrepet. I Matematikk 7, kor dette er tilfelle, er det ein risiko for at fråværet av eit breiare spekter av variasjon, både innanfor og på tvers av døma, kan skapa avgrensa moglegheiter til å få innblikk i eigenskapar ved læringsobjektet. Dette kan føra til ei neglisjering av sentrale element ved likningsomgrepet, noko som i følgje Filloy og Rojano (1989) kan bidra til at elevar utviklar ufullstendige algebraiske metodar. Gjennom ein einsidig presentasjon av døma vil det då det vera ein fare for at elevar nyttar desse som prototypar i vidare arbeid med likningsoppgåver, og med det utviklar kvasi-strukturelle forståingar (Sfard, 1991) av likningsomgrepet. I følgje Sfard og Linchevski (1994) kan utviklinga av slike typar forståingar vera uheldig, sidan dei kan enda opp med å «[…] dominera elevar si tenking som eit overgrodd ugras, som ikkje gir rom for andre, meir meiningsfulle perspektiv.» (s. 119. Eiga omsetjing).

Multi 7B og Matemagisk 7B har begge lærebokleksjonar kor døma har innslag av både generaliserande og kontrasterande element, noko som i større grad kan bidra til å belysa ulike aspekt ved likningsomgrepet. Matemagisk 7B skil seg i tillegg ut på fleire måtar som kan ha positiv effekt på læringsmoglegheitene. For det første har læreboka dobbelt så mange døme som dei ande lærebøkene, noko som skapar fleire moglegheiter for å synleggjera eigenskapar ved likningsomgrepet (Ronda & Adler, 2017). For det andre har læreboka ein del tilfelle kor kvart enkelt døme nyttar to ulike tilnærmingar for å fokusera på variante og invariante eigenskapar ved læringsobjektet. Det at Matemagisk 7B, og til ein viss grad Multi 7B, legg til rette for at elevar skal få innblikk i likningsomgrepet gjennom varierte mønster av variasjon, både innanfor og på tvers av døma, er i tråd med Marton og Pang (2006) sine tankar om å få tilgang til generelle eigenskapar gjennom systematisk variasjon.

Sjølv om MDITx-rammeverket rangerer innslag av KPF-oppgåver lågt, kan ein likevel argumentera for at det har ein nytteverdi at elevar møter oppgåver innanfor denne kategorien når dei skal etablera kunnskapar om likningsomgrepet. Når elevar skal utvikla algebraiske forståingar er det nemleg, i følgje Filloy og Rojano (1989), sentralt at ein samtidig tek utgangspunkt i etablerte aritmetiske forståingar. Det er difor eit interessant funn at Multi 7B innleiingsvis gjennom ein del KPF-oppgåver har fokus på å etablera ei relasjonell forståing av likskapsteiknet i ein kjend aritmetisk kontekst, slik at ein kan støtta elevane i arbeidet med å læra seg å løysa algebraiske likningar (Knuth et al., 2006). Når i tillegg fleire av KPF-oppgåvene i Multi 7B også har i seg aspekt som er karakteristiske for AMC-oppgåver, kan ein hevda at Multi 7B ytterlegare legg til rette for at elevane skal skapa forståingar for sentrale aspekt ved likningsomgrepet.

Analysen av likningsoppgåvene avdekka at lærebøkene hadde ein god del lærebokleksjonar som innehaldt innslag av oppgåvekategoriane CTP og AMC, noko som ved første augekast sender signal om at arbeid med oppgåvene i bøkene totalt sett tilbyr relativt varierte måtar å gi tilgang til likningsomgrepet på. Dersom ein ser grundigare på talmaterialet, ser ein likevel at dette er ei sanning med modifikasjonar. I Matematikk 7 og Multi 7B ser ein nemleg at oppgåvekategorien CTP er klart dominerande, noko som indikerer at desse lærebøkene har eit prosedyrefokus ved at dei vektlegg øving på dugleikar knytt opp mot læringsobjektet. I Matematikk 7 er dette fokuset særleg tydeleg sidan elevane i meir enn halvparten av oppgåvene blir bedne om å løysa likningar og visa at løysingane er gyldige. Trass i at Multi 7B innleiingsvis freistar å etablera algebraiske forståingar med utgangspunkt i aritmetiske kunnskapar, møter elevane også her etter kvart ei rekkje med oppgåver som omhandlar symbolsk likningsløysing. Begge lærebøkene vektlegg difor i relativt stor grad manipulering av algebraiske uttrykk, noko som inneberer at dei på mange måtar er representantar for det Kaput (2000) karakteriserer som tradisjonell algebraundervisning, kor manipuleringsfokuset står sterkt. Når elevane i Matematikk 7 i store delar av boka i tillegg må gjennomføra den same prosedyren om og om igjen, kan ein hevda at denne læreboka på det viset freistar å læra elevane algebra på tilsvarande mekaniske måte som Mason (1996) ser utfordringar med. Det at Matematikk 7 fokuserer på å drilla på rutinemessige dugleikar i så stor grad er likevel ikkje overraskande, sidan ein også finn liknande funn i tidlegare studiar (Dole & Shield, 2008; Kongelf, 2019; Shield & Dole, 2013; Valverde et al., 2002; Vincent & Stacey, 2008).

Ved at Matematikk 7 og Multi 7B vektlegg utføring av operasjonar på algebraiske uttrykk, kan ein hevda at lærebøkene har eit strukturelt fokus (Kieran, 1990b). Medan Matematikk 7 kan seiast å vera strukturell allereie innleiingsvis, sidan elevane etter å ha blitt førevist eit døme på likningsløysing omgåande blir bedne om å løysa symbolske likningar, kan ein hevda at Multi 7B på eit vis har det Kieran (1990b) kallar for ein prosedyremessig fasade. Sidan læreboka innleiingsvis freistar å etablera ei forståing for likningsomgrepet gjennom ein aritmetisk kontekst, er rett nok denne fasaden meir langvarig enn hos dei fleste tradisjonelle matematikklærebøkene. Likevel ser ein at læreboka relativt raskt får eit strukturelt preg, ved at CTP-oppgåver som omhandlar algebraisk symbolmanipulering i hovudsak dominerer i dei tre siste lærebokleksjonane (nr. 3 – 5).

Kieran (1990b) framhevar at elevar i ein innleiande fase ofte ikkje har naudsynte føresetnadar til å operera på algebraiske uttrykk som objekt. Det kan difor diskuterast om det er føremålstenleg å ha eit såpass sterkt manipuleringsfokus som Matematikk 7, og til dels Multi 7B har. Det å stadig gjennomføra sekvensielle prosessar på allereie kjende objekt kan nemleg innebera at elevane jobbar med oppgåver som i hovudsak styrkar det første struktureringsnivået i ein reifikasjonsprosess, nemleg interioriseringsnivået (Sfard, 1991). Å koma seg vidare til kondenseringsnivået krev eit meir heilskapleg bilete av dei sekvensielle prosessane som ein utfører på interioriseringsnivået, og så lenge elevane møter algoritmiske prosessar med eit reindyrka operasjonelt fokus, vil det i følgje Sfard (1991) vera tilnærma umogleg å komprimera sekvensielle prosessar til meir statiske og abstrakte einingar. For elevar som er på interioriseringsnivået når dei møter manipuleringsoppgåvene i Matematikk 7 og Multi 7B, kan det å koma seg vidare i abstraksjonsprosessen difor vera ein særs krevjande affære.

Som den historiske utviklinga av algebraiske idear har vist, er det ein lang og krevjande prosess å skapa ei strukturell forståing av likningsomgrepet (Harper, 1987; Kieran 1990b; Sfard, 1991). Trass i at elevane på 5. trinn har jobba med å løysa likningar ved hjelp av retoriske prosessar, kan det at særleg Matematikk 7 raskt fokuserer på å løysa likningar med formelle algebraiske metodar difor innebera eit prematurt strukturelt fokus for ein del elevar.

Ved at Matemagisk 7B tilbyr heile 66 AMC-oppgåver, kan ein hevda at læreboka legg til rette for at elevane tek aktive val kring prosedyrar, slik at dei kan etablera forståingar både for det gjeldande matematiske omgrepet, og på tvers av ulike omgrep. Når elevane i arbeid med slike typar oppgåver blir utfordra til å engasjera seg i underliggjande idear, kan det tenkjast at oppgåvene kan bidra til å fremja elevane sin abstraksjonsprosess, slik at ein mogleggjer ein overgang frå interioriseringsnivået til kondenseringsnivået. Samtidig kan det tenkjast at AMC-oppgåver, i kombinasjon med CTP-oppgåver, på sikt potensielt bidrar til ei heilskapleg forståing av likningsomgrepet i form av reifikasjon (Sfard, 1991). Ut i frå Ronda og Adler (2017) sin ståstad kan det at Matemagisk 7B har eit relativt balansert forhold mellom CTP- og AMC-oppgåver også sjåast på som positivt, sidan dei trekk fram at det er viktig at elevar møter variert oppgåvetypar for å erfara ulike sider av læringsobjektet. Sjølv om dei andre lærebøkene har klar overvekt av CTP-oppgåver, er det likevel viktig å presisera at Matematikk 7 og Multi 7B høvesvis har 15 og 13 (+ 6) AMC-oppgåver. Trass i at dette er ein god del færre AMC-oppgåver enn det Matemagisk 7B har, bør det trekkast fram at desse lærebøkene, om enn i mindre grad, gjennom AMC-oppgåvene, i kombinasjon med andre oppgåvetypar, skapar moglegheiter for å at elevane kan få tilgang til ulike aspekt ved likningsomgrepet.

I alle lærebøkene er det interessant å sjå at ein finn eit relativt godt samsvar mellom korleis ordbruken og oppgåvene i lærebokleksjonane blir nytta for å gi tilgang til likningsomgrepet. I Matematikk 7 ser ein til dømes at prosedyrefokuset som ein finn i oppgåvekategorien også kjem tydeleg fram gjennom korleis læreboka nyttar språket. I fire av fem lærebokleksjonar er nemleg ordbruken konsekvent kategorisert som PA. Ved at verba kategorisk understrekar handling i desse leksjonane, er språket med på å forsterka prosedyrefokuset ytterlegare, noko som i liten grad bidreg til å støtta elevane si objektforståing av likningsomgrepet.

Innleiingsvis i Multi 7B finn ein at matematiske utsegn ofte nyttar substantiv (PN) slik at ein rettar merksemda inn mot løysinga, framfor prosessen. Ein finn også at læringsobjektet ved fleire høve i desse lærebokleksjonane blir omtala meir direkte i form av OF og OM, noko som i lag med Multi 7B sitt forsøk på å fremja forståing for likskapsteiknet gjennom oppgåvene sitt aritmetiske fundament kan fremja sentrale forståingar for likningsomgrepet. Samtidig er det ein viktig observasjon at ein finn ei markant dreiing mot ordbrukkategorien PA i dei siste lærebokleksjonane, noko som korresponderer godt med oppgåvene sitt aukande manipuleringsfokus utover i likningskapittelet i denne læreboka.

I tillegg til at Matemagisk 7B har innslag av OF og/eller OM i tre av fire lærebokleksjonar, finn ein ei relativt jamn fordeling mellom PA og PN i dei matematiske utsegna. Som nemnt har denne læreboka også ei meir balansert vekting mellom oppgåvekategoriane CTP og AMC enn det dei andre lærebøkene har. Innanfor både ordbruk- og oppgåvekategorien finn ein i lærebokleksjonane med det ein del tilfelle av kategoriar som Ronda og Adler (2017) meiner kan retta fokus mot sentrale aspekt ved læringsobjektet. Samtidig ser ein også i denne læreboka ein samanheng mellom korleis oppgåvene og bruken av ord fremjar eller avgrensar elevane sine moglegheiter til å etablera forståingar for likningsomgrepet.

I lærebøkene blir i hovudsak matematiske utsegn som omhandlar læringsobjektet legitimert ved å bruka døme (SE), kor innhaldet i utsegna oftast blir eksemplifisert og underbygd med støtte frå visuelle representasjonar. Sett i lys av Sfard (1991) sine tankar kring representasjonar sine ulike kvalitetar, er det interessant å registrera at lærebøkene nyttar visuelle representasjonar som kan oppfattast heilskapleg for å underbyggja forståinga av sekvensielle verbale representasjonar. Ein kan difor hevda at det i slike tilfelle eksisterer eit samspel mellom prosess- og objektforståingar, kor elevane får innblikk i både operasjonelle og strukturelle tilnærmingar. Å styrka dualiteten mellom prosess og objekt er sentralt for matematisk forståing (Gray & Tall, 1994). Ei slik form for legitimering av matematiske utsegn kan difor bidra til å gi elevane verdifullt innblikk i likningsomgrepet.

Trass i at det å substansiera matematiske utsegn med visuelle representasjonar kan støtta tilgangen til læringsobjektet, er det også viktig å trekkja fram at MDITx-rammeverket i størst grad verdset legitimeringar av matematiske utsegn som direkte refererer til etablerte prosedyrar, prinsipp eller definisjonar (SG). Det at lærebøkene i undersøkinga inneheld relativt få tilfelle av SG kan difor innebera at lærebøkene på det viset ikkje fullt ut utnyttar potensialet som ligg i å referera til generelle høve for å legitimera og synleggjera kva som blir betrakta som viktig matematisk kunnskap relatert opp mot likningsomgrepet (Ronda & Adler, 2017).

5.2 Bruk av representasjonar for å fremja forståing for likningsomgrepet

Det at Matematikk 7 og Multi 7B har ei klar favorisering av behandlingar av representasjonar i symbolspråk, er med på å understreka det tidlegare nemnte prosedyrefokuset som ein finn i desse lærebøkene. Sett ut i frå eit matematisk perspektiv er ikkje eit slikt fokus nødvendigvis negativt, sidan det «[…] teoretisk sett vil vera mogleg å gjennomføra om lag all matematikk reint operasjonelt.» (Sfard, 1991, s. 23. Eiga omsetjing). Ut i frå eit didaktisk perspektiv er derimot bruk av multifunksjonelle register heilt naudsynt, kor det naturlege språket er sentralt med tanke på å skapa forståing for den matematiske aktiviteten (Duval, 1999). Det er difor interessant å merka seg at Matemagisk 7B i mykje større grad enn dei andre lærebøkene også nyttar andre representasjonssystem enn symbolspråket til behandlingar. Det at Matemagisk 7B har 51 behandlingar i overgangsrepresentasjonar med visuelle og multifunksjonelle element, vil truleg kunna støtta elevane i å få innblikk i strukturelle eigenskapar ved likningsomgrepet (Duval, 1999; Sfard, 1991). Når i tillegg det naturlege språket i åtte tilfelle blir nytta til behandlingar, ser ein at Matemagisk 7B innanfor behandlingskategorien vektlegg bruk av representasjonar som Duval (1999) meiner er sentrale med tanke på å fremja matematiske forståingar.

Trass i Multi 7B har innslag av behandlingar i både OR (16) og NS (2), blir desse nærmast overskugga av heile 129 tilfelle av behandlingar i symbolspråk. Ein kan difor hevda at Matemagisk 7B sin meir varierte og balanserte tilnærming til behandlingar står i tydeleg kontrast til praksisen i dei andre lærebøkene. Matematikk 7, og etterkvart Multi 7B, sitt relativt omfattande fokus på dei algebraiske symbola kan skapa eit inntrykk av at det blir praktisert det Mason (1996) kallar for «rush to symbols», ei tilnærming som Mason meiner kan føra til at elevar opplever algebra som ei uoverkommeleg hindring. Når i tillegg Matematikk 7 i liten grad forankrar algebraiske forståingar i aritmetiske, kan det sjå ut til at læreboka innanfor behandlingskategorien presenterer ein algebra strippa for relevans (Bednarz & Janvier, 1996), kor undervisningsaktiviteten i hovudsak dreiar seg om øving på «[…] symbolmanipuleringane som er naudsynte for ein eventuell bruk av det algebraiske verktøyet i ein problemløysingskontekst.» (Bednarz & Janvier, 1996, s. 116. Eiga omsetjing).

Med sine 67 konverteringar har Matemagisk 7B om lag tre gongar fleire konvertingar enn kvar av dei andre undersøkte lærebøkene. Sidan Duval (2017) trekk fram at det å kunna gjennomføra konverteringar av representasjonar er avgjerande for matematisk forståing er dette eit sentralt funn. Trass i at tala kan tyda på at Matemagisk 7B i større grad legg til rette for at elevane gjennom konverteringar kan få eit innblikk i likningsomgrepet enn Multi 7B og Matematikk 7, er det likevel meir relevant å sjå nærmare på korleis dei ulike lærebøkene nyttar konverteringar for å skapa ei slik forståing.

Analysen viste at den dominerande konverteringsretninga i Multi 7B og Matematikk 7 var direkte eller indirekte overgangar NS → S, noko som indikerer at Multi 7B og Matematikk 7 vektlegg bruk av tekstoppgåver som skal løysast ved hjelp av ei algebraisk likning. Sidan slike type oppgåver krev omgrepsmessige forståingar som dei fleste mellomtrinselevar ofte ikkje har (Capraro & Joffrion, 2006), er det noko overraskande at ein finn eit slikt fokus i desse lærebøkene. Det er også verdt å merka seg at Multi 7B i særs få tilfelle nyttar overgangsrepresentasjonar for å støtta elevane i overgangen NS → S, dette trass i at Duval (2017) trekk fram at overgangsrepresentasjonar då ofte er heilt naudsynte, sidan «[…] konvertering av utsegn til symbolske register ikkje kan vera rett fram […]» (s. 95. Eiga omsetjing).

Multi 7B har klart størst andel av konverteringar som går direkte, eller indirekte NS → S. Dette kan bidra til at elevane får erfaringar med å jobba med likningar som ein einsidig aktivitet, noko som i følgje Duval (1999) kan fostra lokale og prosedyremessige forståingar. Matematikk 7 har også overvekt av konverteringar som går NS → S, men sidan læreboka i større grad nyttar overgangsrepresentasjonar i samband med konverteringar, og i tillegg har fire tilfelle av K: OR → NS, kan ein argumentera for at læreboka på denne måten skapar fleire moglegheiter for å gi innblikk i både likningsomgrepet og det algebraiske symbolsystemet enn det Multi 7B gjer. I tillegg til at erfaringar med ulike konverteringsretningar kan gjera det matematiske objektet meir synleg (Duval, 1999), kan nemleg det at Matematikk 7 utfordrar elevane til å gå fram og tilbake mellom verbale og symbolske representasjonar også bidra til å fremja forståinga for det algebraiske symbolspråket (Koedinger & Nathan, 2004).

Medan Matematikk 7 i moderat grad nyttar overgangsrepresentasjonar for å støtta konverteringar i ulike retningar, viste resultata at Matemagisk 7B har ein utstrekt bruk av overgangsrepresentasjonar. Gjennom ein praksis kor slike typar representasjonar ofte utgjer start- eller målrepresentasjonar, fører det til at konverteringane går i varierte retningar. Læreboka legg med det til rette for at elevar i stor grad møter koordineringar av ulike representasjonar og representasjonsregister, noko som Duval (2017) trekk fram som sentralt for læring i matematikk. Ved at Matemagisk 7B i likskap med Matematikk 7 nyttar konverteringane OR → S og OR → NS, kan ein argumentera for at overgangsrepresentasjonane i desse lærebøkene utgjer eit fundament for å etablera koplingar mellom det naturlege språket og symbolspråket. Sidan Matemagisk 7B også har ei rekkje tilfelle av K: S → OR, kan ein samtidig hevda at denne læreboka nyttar overgangsrepresentasjonar for å styrka forståinga av symbolspråket utover tilnærmingar som Matematikk 7 tek i bruk. Ved at læreboka går motsette konverteringsretningar gjennom ei rekkje tilfelle av K: OR → S og K: S → OR, kan det nemleg tenkjast at overgangsrepresentasjonane på den måten kan støtta elevane sin abstraksjonsprosess i endå større grad, slik at dei symbolske forståingane lettare kan separerast frå den konkrete konteksten (Filloy & Rojano, 1989). I tillegg kan ein hevda at ein slik praksis på mange måtar er i tråd med LK 20, kor det i kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» blir understreka at «elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Medan Multi 7B og Matematikk 7 i stor grad prioriterer konverteringsretninga NS → S er det eit særs interessant funn at Matemagisk 7B, utover eitt tilfelle av SK: NS + S, ikkje har eit einaste tilfelle av konverteringsretninga NS → S. I staden ser ein at læreboka vektlegg å gå motsett veg, nemleg S → NS. Dette sender signal om at Matemagisk 7B freistar å nytta det naturlege språket for å skapa forståing for det semantisk svake algebraiske symbolspråket (Kieran, 1990a; Sfard & Linchevski, 1994). I samspel med overgangsrepresentasjonar kan ein difor seia at Matemagisk 7B tilbyr eit variert utval av semiotiske ressursar som kan støtta elevane si gradvise formalisering av algebraiske idear (Radford, 2010). Samtidig er ei slik tilnærming i tråd med LK 20, som slår fast at «[…] utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Det at Matemagisk 7B vektlegg verbale forklaringar og retoriske prosessar i både behandlingar, konverteringar og representasjonssamankoplingar sender også signal om at læreboka tek omsyn til den historiske utviklinga til algebra, slik at ein legg til rette for ei naturleg utvikling av forståinga for likningsomgrepet. Når læreboka i så stor grad skapar moglegheiter for å at elevane skal kunna oppdaga samanhengar mellom ekvivalente representasjonar på tvers av representasjonsregister, kan ein hevda at praksisen støttar ein reifikasjonsprosess. Dette inneberer at det matematiske objektet gradvis blir meir synleg, slik at elevane til slutt kan oppfatta likningsomgrepet som eit heilskapleg objekt på tvers av representasjonar (Sfard, 1991).

Utover det at Matematikk 7 har relativt få tilfelle innanfor samankoplingskategorien, finn ein fleire likskapar mellom denne kategorien og konverteringskategorien. Til dømes ser ein at Multi 7B i hovudsak vektlegg samankopling mellom NS og S. Sidan denne læreboka i liten grad nyttar overgangsrepresentasjonar og varierte konverteringsretningar for å støtta overgangen mellom NS og S, er det eit viktig funn at Multi 7B innanfor samankoplingskategorien freistar å etablera koplingar mellom desse registera. Det at elevane får erfaringar med å samankopla ekvivalente likningar i NS og S, meiner nemleg Koedinger og Nathan (2004) kan fremja elevane sine symbolske forståingar. Når i tillegg Ott et al. (2018) trekk fram at det naturlege språket kan styrka forståinga av andre representasjonsformer, bør funnet tolkast som positivt med tanke på å utvikla elevane si forståing av likningsomgrepet. Likevel bør ein ha i bakhovudet at både Ainsworth (1999) og Duval (2017) åtvarar mot at elevar kan bli for passive i ein samankoplingsprosess, sidan dei då ikkje deltek aktivt nok i arbeidet med å lenkja saman meiningsberande element på tvers av representasjonar (Duval, 2017).

Innanfor samankoplingskategorien finn ein, i likskap med konverteringskategorien, at Matemagisk 7B på ulike måtar koplar saman overgangsrepresentasjonar med NS og S. I læreboka ser ein difor at bruken av det naturlege språket også innanfor denne kategorien er i fokus. Det at det naturlege språket blir nytta som eit element i MERs kan ha positiv effekt på læringa til elevane, sidan språket då kan fungera som ein referanserepresentasjon (Ott et al., 2018). Gjennom tilgang til det naturlege språket, legg Matemagisk 7B med det til rette for at språket sin avgrensande funksjon (Ainsworth, 1999) støttar forståinga av dei andre representasjonsformene. Ved at det naturlege språket i læreboka også har ei viktig rolle i behandlingar og konverteringar, kan ein hevda at denne læreboka tek omsyn til at det er heilt essensielt å nytta språket for å skapa forståing for den matematiske aktiviteten (Duval, 1999).

I følgje Duval (2017) kan overgangsrepresentasjonar spela ei heilt sentral rolle for å støtta konverteringar på tvers av multifunksjonelle og monofunksjonelle register (Duval, 2017). Dette kan ein hevda at Matemagisk 7B tek omsyn til ved at ein finn eit stort utval av både, vippehusker, uroer og tallinjer i læreboka. Desse samansette representasjonsformene kan seiast å ha både ulike, og utfyllande eigenskapar. Medan vippehusker og uroer tydeleg visualiserer likevektsprinsippet, har tallinjer, i motsetnad til balansemodellar, moglegheiter for å representera likningar med negative tal, subtraksjon og negative løysingar. I tillegg kan uroer seiast å vera meir sofistikerte utgåver av tradisjonelle vektstenger/vippehusker, ved at dei kan byggjast ut til å visualisera ei rekkje med likevektsrelasjonar på kvar side av balansepunktet/likskapsteiknet, noko som kan bidra til å skapa eit større medvit kring likevekt og relasjonar. Med utgangspunkt i Matemagisk 7B sin bruk av overgangsrepresentasjonar, kan ein difor hevda at læreboka skapar varierte moglegheiter for å få innblikk i sentrale eigenskapar knytt opp mot likningsomgrepet.

Multi 7B har ikkje same variasjon og omfang av overgangsrepresentasjonar som Matemagisk 7B, men ved at læreboka i likskap med Matemagisk 7B nyttar vippehusker som overgangsrepresentasjonar, blir likevektsprinsippet også i denne læreboka tydeleggjort. Det at Multi 7B både visualiserer likevekt gjennom overgangsrepresentasjonar, i tillegg til å forankra forståingar for likskapsteiknet i kjende aritmetiske kontekstar, viser at læreboka i stor grad freistar å synleggjera det sentrale likevektsprinsippet for å skapa forståing for likningsomgrepet.

Matematikk 7 skil seg frå dei andre lærebøkene ved å konsekvent nytta blokkmodellar som overgangsrepresentasjonar. Sidan blokkmodellar kan ha avgrensa potensiale til å synleggjera kva operasjonar som skal nyttast (Beckmann, 2004), kan det diskuterast om denne typen modellar i tilstrekkeleg grad visualiserer likevektsprinsippet. Rett nok kan blokkmodellar støtta samankoplinga av tekstlege og symbolske representasjonar (Morina & Vondrová, 2021). Likevel kan ein stilla seg spørjande til kvifor Matematikk 7 konsekvent unngår å nytta balansemodellar til å representera likningar, sidan slike typar representasjonar gjerne har større potensiale enn blokkmodellar til å visualisera sentrale element ved likningsomgrepet.

6 Konklusjon

Gjennom ein kvalitativ innhaldsanalyse av tre lærebøker i matematikk på 7. trinn har denne undersøkinga hatt som siktemål å avdekka korleis desse lærebøkene legg til rette for at elevane skal utvikla forståing for likningsomgrepet. For å nærma seg eit svar på den overordna problemstillinga, blei det teke utgangspunkt følgjande forskingsspørsmål:

1) *Korleis nyttar lærebøkene døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar for å gi eleven tilgang til likningsomgrepet?*
2) *Korleis nyttar lærebøkene representasjonar for å fremja eleven si forståing av likningsomgrepet?*

I studien blei likningsrelatert innhald i likningskapitla i lærebøker frå dei tre største forlaga i Noreg undersøkt, nemleg Matematikk 7 (Cappelen Damm), Multi 7B (Gyldendal) og Matemagisk 7B (Aschehoug).

Ronda og Adler (2017) sitt MDITx-rammeverk blei brukt for å få innblikk i korleis lærebøkene freistar å gi tilgang til likningsomgrepet gjennom dei medierande reiskapa døme, oppgåver, ordbruk og legitimeringar. Undersøkinga viste at Matematikk 7 konsekvent nytta ei generaliserande tilnærming i alle døma, medan Multi 7B og Matemagisk 7B hadde fleire lærebokleksjonar kor aspekt ved læringsobjektet blei eksemplifisert med både generaliserande og kontrasterande element. Matemagisk 7B hadde høgast antal døme, og skilte seg i tillegg ut ved at fleire av døma innehaldt både kontrasterande og generaliserande element. Når i tillegg denne læreboka hadde eitt døme med fusjonerande kvalitetar, kan ein hevda at boka gjennom døma legg til rette for både flest, og mest varierte, moglegheiter til å skjelna sentrale element ved likningsomgrepet.

Særleg i Matematikk 7 og Multi 7B fann ein oppgåver som vektla øving på dugleikar relatert opp mot læringsobjektet (CTP). Ved at desse oppgåvene ofte omhandla manipulering av algebraiske uttrykk, kan ein hevda at lærebøkene har eit strukturelt fokus, noko som kan by på utfordringar, sidan elevar på dette stadiet vanlegvis ikkje har naudsynte føresetnadar for å utføra operasjonar på algebraiske objekt (Kieran, 1990b). Gjennom KPF-oppgåver innleiingsvis freista Multi 7B rett nok å etablera forståingar for likskapsteiknet i ein kjend aritmetisk kontekst. Likevel kunne dette på eit vis oppfattast som ein prosedyremessig fasade (Kieran, 1990b), sidan oppgåvene etter kvart fokuserte på at elevane skulle løysa likningar med formelle algebraiske metodar.

Matemagisk 7B hadde eit relativt balansert forhold mellom CTP- og AMC-oppgåver, noko som kan bidra til at elevar i større grad erfarer ulike sider av likningsomgrepet (Ronda & Adler, 2017). Det er også eit poeng at denne balanserte tilnærminga, i kombinasjon med eit relativt stort antal AMC-oppgåver, potensielt kan støtta eleven sin struktureringsprosess. Dei andre lærebøkene innehaldt færre AMC-oppgåver, og hadde ei meir ujamn fordeling mellom CTP- og AMC-kategoriane. Matemagisk 7B sin praksis kan difor seiast å stå i kontrast til tilnærminga i særskilt Matematikk 7, men også Multi 7B, sidan desse lærebøkene gjennom ei rekkje manipuleringsoppgåver til tider skapa eit reindyrka operasjonelt fokus som potensielt kan utgjera ei hindring i elevane sin struktureringsprosess (Sfard, 1991).

Mellom ordbrukkategorien og oppgåvekategorien fann ein eit godt samsvar i så godt som alle lærebøkene sine lærebokleksjonar. Blant anna fann ein at Matematikk 7 sitt prosedyrefokus i oppgåvene blei ytterlegare forsterka gjennom ein utstrekt bruk av handlingsretta verb (PA). I Multi 7B sikta ordbruken seg innleiingsvis meir inn på løysinga (PN) og læringsobjektet (OF og OM), medan ein fann ei tydeleg dreiing mot PA i dei siste lærebokleksjonane. Desse observasjonane høver godt med Multi 7B sitt forsøk innleiingsvis på å etablera forståingar for likningsomgrepet ut i frå aritmetiske forståingar, samtidig som ein såg at oppgåvene i dei seinare lærebokleksjonane fekk eit manipuleringsfokus. I Matemagisk 7B var det ein relativt balansert ordbruk, noko som samsvarar godt med funna i oppgåvekategorien. I denne boka fann ein difor ein del tilfelle av både oppgåver og ordbruk som potensielt kan støtta eleven sin tilgang til dei mangefasetterte sidene ved likningsomgrepet.

Den vanlegaste måten å legitimera matematiske utsegn på i lærebøkene var gjennom eksemplifiseringar i form av visuelle representasjonar. Sidan dette medfører at ein grunngjev sekvensielle verbale utsegn gjennom meir heilskaplege representasjonar (Sfard, 1991), kan ein argumentera for at lærebøkene utnyttar samspelet mellom prosess og objekt for å fremja forståing for likningsomgrepet. Samtidig fann ein få tilfelle kor lærebøkene grunngav matematiske utsegn gjennom å referera til etablerte prosedyrar, prinsipp eller definisjonar (SG), noko som betyr at lærebøkene gjennom legitimeringar sjeldan synleggjer aspekt ved likningsomgrepet gjennom å visa til generelle eigenskapar.

For å undersøkja korleis lærebøkene nyttar representasjonar for å fremja elevane si forståing for likningsomgrepet blei det gjennomført ein *category-refinement* (Mayring, 2015) av Duval (2017) si klassifisering av semiotiske representasjonar, noko som medførte ei utviding av eit deduktivt kategorisystem gjennom induktive metodar. Analysen viste at Multi 7B og Matematikk 7 hadde ei klar favorisering av behandlingar i symbolspråket, noko som understrekar innhaldet i tidlegare funn, nemleg at desse bøkene har eit prosess- og manipuleringsfokus.

I Matemagisk 7B blei det avdekka ein utstrekt bruk av behandlingar i overgangsrepresentasjonar. Når i tillegg læreboka fokuserte på å nytta det naturlege språket til behandlingar, kan ein hevda at læreboka tilbyr ein stor andel behandlingar i representasjonar som Duval (1999) meiner er føremålstenlege med tanke på fremja matematisk forståing.

Matemagisk 7B hadde over tre gongar fleire tilfelle av konverteringar enn kvar enkelt av dei andre lærebøkene. Sidan konverteringar er naudsynte for å etablera matematiske forståingar (Duval, 2017), er dette eit viktig funn. Medan Multi 7B og Matematikk 7 hadde klar overvekt av konverteringar som gjekk NS → S, fann ein at Matemagisk 7B prioriterte motsett konverteringsretning, nemleg S → NS. Ein fann også at Matemagisk 7B i stor grad nytta overgangsrepresentasjonar som fundament for å styrka koplinga mellom NS og S. Læreboka la difor til rette for ein større variasjon i konverteringsretningar enn det dei andre lærebøkene gjorde, noko som kan bidra til ei auka forståing av både symbolspråket og likningsomgrepet (Duval, 2017; Koedinger og Nathan, 2004). Sidan ei slik tilnærming legg til rette for at elevane kan kjenna att representasjonar på tvers av representasjonssystem, har difor praksisen potensiale til å støtta elevane sin stuktureringsprosess (Sfard, 1991).

Medan Matematikk 7 i ein del tilfelle nytta overgangsrepresentasjonar for å mogleggjera eit meir variert innblikk i samanhengen mellom NS og S, nytta Multi 7B få overgangsrepresentasjonar for å støtta koplinga mellom NS og S. Sidan læreboka hadde ein del tilfelle som innebar ei samankopling av NS og S, kan ein likevel hevda at læreboka då freista å nytta språket som referanserepresentasjon for å skapa forståing for symbolspråket (Ott et al., 2018).

Både ved konverteringar og representasjonssamankoplingar nytta Matemagisk 7B det naturlege språket aktivt for å skapa forståing for det semantisk svake algebraiske symbolspråket (Kieran, 1990a; Sfard & Linchevski, 1994). Når læreboka i så stor grad nyttar språket i verbale forklaringar og retoriske prosessar for å skapa forståing for likningsomgrepet, kan ein hevda at Matemagisk 7B legg seg tett opp til den historiske utviklinga til algebra, slik at utviklinga av eleven sine forståingar for likningsomgrepet kan følgja ein naturleg progresjon.

Alle lærebøkene hadde innslag av overgangsrepresentasjonar for å støtta konverteringar eller samankoplingar av representasjonar. Medan Multi 7B i all hovudsak nytta vippehusker for å synleggjera det sentrale likevektsprinsippet, fann ein i Matemagisk 7B eit større, og meir variert utval av vippehusker, uroer og tallinjer, noko som på det viset gav læreboka eit større potensiale til å kunna synleggjera fleire aspekt ved likningsomgrepet. Ein interessant observasjon var at Matematikk 7 konsekvent nytta blokkmodellar som overgangsrepresentasjonar. Sjølv om slike modellar kan støtta koplinga mellom NS og S, kan det nemleg diskuterast om blokkmodellar er det mest føremålstenlege valet når det gjeld å synleggjera likningsomgrepet sitt sentrale likevektsprinsipp.

6.1 Personlege refleksjonar og pedagogiske implikasjonar

Sidan oppgåva har avgrensingar både på tid og omfang har eg undervegs i prosessen stadig kjend på konflikten mellom breidde og djupne (Postholm & Jacobsen, 2018). I byrjinga av skriveprosessen var ønsket til dømes stort om å gå både breitt og djupt. Utover undersøkingane som er presenterte i denne oppgåva, var eg nemleg innom tanken på å inkludera lærebøker frå 5. trinn i studien. I tillegg blei det også gjort ein analyse av oppgåvene sine kognitive krav. Sidan det viste seg at det blei for omfattande å inkludera desse elementa i masteroppgåva, blei dei ekskludert frå undersøkinga. Trass dette, famnar oppgåva likevel relativt breitt i forsøket på å svara på studien si problemstilling, noko som har gjort det naudsynt å nytta ein del spalteplass på å skildra både eit vidt teoretisk bakteppe, og ei relativt omfattande mengd med resultat. Både undervegs, og i ettertid, har eg difor stadig lurt på om det hadde vore meir føremålstenleg å snevra inn fokusområdet ytterlegare, slik at ein kunne ha gått endå meir i djupna på dette utvalde området. Trass i at desse refleksjonane ikkje førte til større omveltingar i oppgåva, skapa denne refleksjonsprosessen auka medvit kring problematikken, slik at eg til slutt enda opp med eit resultat som kan seiast å ha både ei viss breidde og djupne.

Det å planleggja, gjennomføra og skriva denne masteroppgåva har kravd mykje tid og tankeverksemd. Berre det å sirkla seg inn på problemområdet og forskingsspørsmåla var ein temmeleg strevsam affære. Likevel ser eg i ettertid at denne jobben var særs viktig for å kunna utforma ei undersøking som var relevant på fleire plan. På eit personleg plan har det faglege djupdykket gitt meg verdifullt innblikk i sentrale emne innanfor matematikk og matematikkdidaktikk, og tillegg til at eg har fått erfaringar med å planleggja og utføra eit større forskingsprosjekt, har undersøkinga ført til eit større medvit kring korleis både lærarar og lærebøker kan fremja matematisk forståing.

Utover at studien har personleg relevans, er undersøkinga også relevant for andre matematikklærarar. Sjølv om studien ikkje kan overførast direkte, vil det nemleg vera mogleg å kjenna att ulike funn og aspekt i tilsvarande kontekstar (Postholm & Jacobsen, 2018). Undersøkinga vil difor kunna bidra til eit større medvit kring læringsfremjande aspekt i matematikklærebøker, slik at lærarane kan gjera naudsynte grep for å fremja elevane si forståing for matematiske omgrep. Det faglege innblikket som oppgåva tilbyr vil også kunna støtta lærarane til å gjera informerte val når ein skal vurdera bruk av ulike læremiddel.

Denne studien har blant anna framheva verdien av å nytta språket for å skapa forståing for likningsomgrepet. Som ein pedagogisk implikasjon kan ein difor trekkja fram at det er sentralt at lærarar legg til rette for at elevar kan nytta det naturlege språket i arbeid med likningar. Det er også viktig at lærarar har eit medvit kring representasjonar, slik at dei kan gi elevane eit variert innblikk i likningsomgrepet gjennom å utsetja dei for varierte representasjonsovergangar.

6.2 Svakheiter ved studien, og forslag til vidare forsking

I likskap med Huntley og Terrell (2014) sin studie har det i denne undersøkinga blitt avdekka store skilnadar mellom enkelte av lærebøkene. I samsvar med deira slutning kan ein difor hevda at Matemagisk 7B på fleire vis legg til rette for å utvikla relativt markante ulike forståingar av likningsomgrepet, sett i høve til Multi 7B og Matematikk 7. Trass i at funna signaliserer at skilnadane tidvis er store mellom dei undersøkte lærebøkene, er det viktig å vera medviten element som kan svekka resultata i studien. Til dømes er fråværet av interkoder-reliabilitet ein tydeleg svakheit ved studien. I tillegg er det viktig å understreka at innhaldsanalysar berre kan avdekkja potensiale for læring (Rezat & Strässer, 2015). Dette medfører at resultata i undersøkinga må tolkast i lys av nemnde faktorar. Sidan den faktiske læringa oppstår i interaksjonen mellom læraren, eleven og læremiddelet (Rezat & Strässer, 2015), ville det difor vidare å ha vore interessant å undersøkt korleis den praktiske bruken av lærebøkene faktisk fremjar forståing for likningsomgrepet hos eleven. Når progresjonen i LK20 tilsynelatande legg seg tett opp til den historiske utviklinga til likningsomgrepet, ville det i lys av dette også ha vore av verdi å undersøkt korleis matematikklæreverk over ein vidare tidshorisont legg opp til at elevane skal skapa forståing for likningsomgrepet.

7 Referanseliste

Adler, J. & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237-254. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education, 33(*2), 131-152. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183-198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001.

Alseth, B., Røsseland, M., Arnås, A-C. & Nordberg, G. (2022). *Multi 7B, Elevbok* (3. utg.). Gyldendal Norsk Forlag AS.

Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S. & Bretscher, N. (2010). *Values and variables. Mathematics education in high-performing countries*. London: Nuffield foundation. Henta frå: https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Values_and_Variables_Nuffield_Foundation_v__web_FINAL.pdf

Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: A Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 42-46. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ848499.pdf

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18, s. 115-136). Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-18.

Capraro, M. M. & Joffrion, H. (2006). Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols? *Reading Psychology*, *27*(2-3), 147-164. https://doi.org/10.1080/02702710600642467

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2019, 10. februar). *Generelle forskningsetiske retningslinjer*. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/generelle

Den nasjonale forskningsetiske komitè for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora.pdf

Dole, S. & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 19-35. https://doi.org/10.1080/14794800801915863

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.) *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. I, pp. 3-26). Morelos, México: PMENA.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - the Registers of Semiotic Representations.* Cham: Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107-115. https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbook on teaching strategies: an empirical study. *Mid-Western Educational Researcher, 13*(4), 2-9.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25. http://www.jstor.org/stable/40247950

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140. https://doi.org/10.2307/749505

Grønmo, L. S, Hole, A. & Stedøy, I. M. (2017). Prioritering og nedprioritering av fagområder i matematikk. I L.S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken. En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av data fra TIMSS Advanced og TIMSS* (s. 79 - 94). Cappelen Damm Akademisk. https://press.nordicopenaccess.no/index.php/noasp/catalog/book/26

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (Red.) (2013). *Opptur og nedtur: Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige*. Akademika forlag. https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/2013/timss_2013_materie_web.pdf

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K. & Olsen, V. S. (2021). *Matematikk 7, Grunnbok*. Cappelen Damm.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar forlag.

Harper, E. (1987). Ghost of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 75-90. https://doi.org/10.1007/BF00367915

Hodgen, J., Küchemann, D. & Brown, M. (2010). Textbooks for the teaching of algebra in lower secondary school: are they informed by research? *Pedagogies: An International Journal*, *5*(3), 187-201. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486154

Houang, R. & Schmidt, W. (2008). *TIMSS International Curriculum Analysis and Measuring Educational Opportunities*. https://www.researchgate.net/publication/268395948_TIMSS_International_Curriculum_Analysis_and_Measuring_Educational_Opportunities

Huntley, M. A. & Terrell, M. S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM*, *46*(5), 751-766. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0627-6

Kaput, J. J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum*. Distributed by ERIC Clearinghouse.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1990a). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. In *Mathematics and Cognition* (pp. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (1990b). School Algebra: A Procedural - Structural Perspective. *Aprendizaje y Enseñanza del Algebra*, (1), 9 – 18. https://www.researchgate.net/publication/277712733_School_Algebra_A_Procedural_-_Structural_Perspective

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into Its Nature, Its Learning, Its Teaching*. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514–519. https://doi.org/10.5951/MTMS.13.9.0514

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312. http://www.jstor.org/stable/30034852

Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (2004). The Real Story Behind Story Problems: Effects of Representations on Quantitative Reasoning. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(2), 129–164. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1302_1

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk* *kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. AURA. http://hdl.handle.net/11250/2616438

Kongsnes, A. L., Raen, K. R. & Sørdal, M. (2022). *Matemagisk 7B, Grunnbok* (2. utg.). Aschehoug.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1. – 10. trinn (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift av Kunnskapsdepartementet 15.11.2019. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26. http://www.jstor.org/stable/30213397

Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193-220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18, s. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klagenfurt. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-395173

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. I A. Bikner-Ahsbahs, Knipping C, & N. Presmeg (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education,* 365-380. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Morgan D.L. (1993) Qualitative Content Analysis: A Guide to Paths not Taken. *Qualitative Health Research*, *3*(1), 112-121. https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/104973239300300107

Morina, Q. & Vondrova, N. (2021, 22. – 26. august). *Block model approach and its effect on word problem solving, a case study* [Paperpresentasjon]. SEMT '21 / Broadening experiences in elementary school mathematics, Prague.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Oslo.

Ott, N., Brünken, R., Vogel, M. & Malone, S. (2018). Multiple symbolic representations: The combination of formula and text supports problem solving in the mathematical field of propositional logic. *Learning and Instruction*, *58*, 88-105. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.04.010

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. & Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool / El desarrollo del razonamiento algebraico en educación primaria utilizando una balanza como herramienta de apoyo. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 615-663. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm AS.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2018). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen: En metodebok for lærere, studenter og forskere* (2. utgave.). Universitetsforlaget.

Prawat, R. (1996). Constructivisms, modern and postmodern. *Educational Psychologist*, *31*(3), 215-225. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3103&4_6

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Reinhardtsen, J. (2012). *The introduction of algebra: comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA*. [Masteroppgave i matematikkdidaktikk, Universitetet i Agder]. AURA. http://hdl.handle.net/11250/138112

Rezat, S. & Strässer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 247-266. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/20_34_247266_rezat.pdf

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Vol.18, p. 55-62). Kluwer Academic Publishers.

Ronda, E. & Adler, J. (2017). Mining Mathematics in Textbook Lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1097-1114. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9738-6

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. http://www.jstor.org/stable/3482237

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behaviour, 14*(1), 15-39. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 191-228. https://doi.org/10.1007/BF01273663

Shield, M. & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183-199. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9

Svendsen, L. F. H. (2023, 14. juni): semiotikk. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/semiotikk

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In B. Moses (Red.), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*,7 – 13. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book - Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science+Business Media, LLC. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

Vincent, J. & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(1), 82‐107. http://dx.doi.org/10.1007/BF03217470

Yeap, B. H. (2007, 9. – 14. desember). *The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication* [Paperpresentasjon]. APEC-TSUKUBA International Conference III / Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication, Tokyo, Kanazawa og Kyoto, Japan. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/13.YeapBanHar_Singapore.pdf

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of Teachers' Choice of Examples in and for the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165-182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6