UiA Universitetet i Agder

Lektorstudenter sine kriterier til matematisk argumentasjon

En kasusstudie om 1.års-lektorstudenter sin diskurs rundt matematisk argumentasjon i studentbesvarelser.

ARYA ERSHADI
HALLVARD ARNTZEN FOSS

VEILEDERE
Jorunn Reinhardtsen
Kristina Markussen Raen

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag
Emnekode: MA-502

Master

Forord

Vi ønsker å uttrykke vår dypeste takknemlighet til alle som har bidratt til at denne masteroppgaven ble til. Det har vært en spennende og lærerik prosess, og uten støtten og veiledningen fra flere hold, ville dette arbeidet ikke ha vært mulig.

Først og fremst er vi takknemlige for veiledningen fra Jorunn Reinhardtsen og Kristina Markussen Raen, våre veiledere. Deres faglige dyktighet, engasjement og tålmodighet har vært essensielt gjennom hele prosessen med oppgaveskrivingen, og deres evne til å veilede oss, utfordre våre antagelser og inspirere til dypere forståelse har vært fundamentalt for denne oppgaven.

Vi takker også våre medstudenter for verdifulle diskusjoner, tilbakemeldinger, pauser og latter som har beriket vårt arbeid. Deres perspektiver har vært en viktig del av vår læringsprosess.

En spesiell takk går til våre familier og venner, som har vist stor forståelse og støtte gjennom hele masterperioden. Deres oppmuntring har vært uvurderlig på de mest krevende tidspunktene i prosjektet.

Vi vil også takke Julie Kogstad, Konstantina Kaloutsi og Anders Wiik, deres bidrag og støtte har vært avgjørende for gjennomføringen av denne forskningen.

Denne oppgaven er dedikert til alle engasjerte lærere som daglig arbeider for å utdanne og inspirere unge sinn. Deres innsats og engasjement fortjener stor anerkjennelse.

Universitetet i Agder, 07.05.2024

Arya Ershadi og Hallvard Arntzen Foss

Sammendrag

Det å kunne argumentere er en kompetanse som blir mer og mer viktig i en digitaltidsalder. Resonnering og argumentasjon ble i 2020 innført som et eget kjerneelement i læreplanen (LK20). Matematisk argumentasjon handler ikke bare om å konstruere argumenter og bevis, men også om å bedømme dem. Derfor har vi hatt som mål for denne oppgaven å få mer kunnskap om hvordan kriterier lektorstudenter anvender når de bedømmer argumentasjon.

Vi har utført en kvalitativ casestudie ved å undersøke hvordan 1.års-lektorstudenter i matematikk bedømmer argumentasjonen i besvarelser. Dette ble ved å gjennomføre gruppeintervjuer av tre grupper med studenter som tar et matematisk emne som omhandler kjerneelementer resonnering og argumentasjon. Gjennom en kvalitativ innholdsanalyse videreutviklet vi et kategoriseringsskjema av Liu et al. (2015), og benyttet dette til å analysere utsagnene til studentene.

Det som kom frem av analysen var at studentene hadde forutinntatte holdninger til bruken av ulike representasjonsformer. Det viste seg også at studentene ofte benyttet graden av generalisering i besvarelsen, og til tider i oppgaver der det ikke hadde betydning. Vi så også hvordan studentenes matematiske forkunnskaper påvirker hvilke kriterier de stiller til argumentasjonen. Her så vi både at studentene etterspurte mer forklarende argumenter der dem selv ikke er sikre på matematikken, og der to argumenter er like gyldige velger de det som krever lavest nivå av forkunnskaper.

Summary

The ability to argue effectively is a skill that is becoming increasingly important in the digital age. Reasoning and argumentation were introduced as a core element in the curriculum (LK20) in 2020. Mathematical argumentation involves not only constructing arguments and proofs but also evaluating them. Therefore, the aim of this thesis has been to gain more knowledge about the criteria used by mathematics education students when assessing argumentation.

We conducted a qualitative case study by examining how first-year mathematics education students evaluate the argumentation in solutions. This was done by conducting group interviews with three groups of students taking a mathematics course that focuses on the core elements of reasoning and argumentation. Through qualitative content analysis, we further developed a categorization schema from Liu et al. (2015) and used this to analyze the students' statements.

The analysis revealed that students had preconceived attitudes towards the use of different representation forms. It also showed that students often used the degree of generalization in the solutions, sometimes in tasks where it did not matter. We also observed how students' prior mathematical knowledge affects the criteria they apply to the argumentation. We found that students requested more explanatory arguments when they were unsure about the mathematics, and when two arguments were equally valid, they chose the one that required the lowest level of prior knowledge.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Samfunnet i dag er i rask utvikling med stadig nye digitale verktøy som kan hjelpe oss i å løse problemer innen matematikk. Dette kan være digitale verktøy som graftegner, CAS, programmering eller KI. Dette har gjort at elevene ikke trenger de samme ferdighetene som tidligere for å løse matematiske problemer. Dermed er det ferdigheter som blir mindre relevante, mens det er andre som det blir et større behov for. Med bakgrunn i denne utviklingen ble det utarbeidet kjerneelementer i den nye lærerplanen som fremhever hvilke kompetanser en ønsker at elevene skal beherske for å møte utfordringene fremtiden bringer (Utdanningsdirektoratet, 2020). *Argumentasjon og Resonnering* er to av kompetansene som de har sett er viktige for den matematiske forståelsen og dermed inngår i kjerneelementene. Kompetanse om argumentasjon er ytterst aktuelt i den digitale tidsalder, både med sosiale medier hvor mange påstander og argumentasjonsrekker blir lagt ut. Det samme gjelder bruken av digitale verktøy i problemløsning hvor en får presentert løsninger uten å trenge å vite hvorfor. Begge disse eksemplene viser at den kritiske evnen til å bedømme argumenter og påstander er en viktig kompetanse. Denne kompetansen kan opparbeides gjennom arbeid med matematikk da man systematisk, grundig og kritisk bygger opp et logisk bevis. Fordi vi ser at det å bedømme argumenter både generelt og innenfor matematikken blir mer og mer relevant, har vi satt oss som mål om at denne oppgaven skal skape innsikt i hvordan lektorstudenter bedømmer matematisk argumentasjon.

Argumentasjonen sin rolle i skolen har tidligere vært at elevene skal lære det gjennom å utføre bevis. Læring av bevis i skolen har vist seg å være vanskelig for elevene (Senk, 1985), men også vist seg gjennom forskning at lærere har det vanskelig med å undervise bevis (Knut, 2002). Dette til tross for at bevis er en grunnleggende del av matematikken som da resultater først blir gyldige når de har blitt bevist (Ross, 1998). I senere tid har det i forskningen satt fokus på viktigheten av argumentasjon og bevis som grunnlag i større del av matematikken, og ikke bare i geometri. Da argumentasjon og bevis er grunnlegge for å kunne utføre og forstå matematikk (Stylianides, 2007).

Selv om mye av fokuset rundt argumentasjon og bevis retter seg mot at man skal lære seg å konstruere og legge dem frem, har flere sett på hvordan bevis og argumentasjon blir bedømt. Bleiler et al. (2014) har blant annet sett på lærerstudenter sin evne til å bedømme elevbesvarelser etter fire bevisnivåer, og sett spesifikt på deres evne til å gjenkjenne induktive og deduktive bevis, og om de fokuserer på enkeltsetninger i besvarelsene eller helheten i besvarelsen. Lignende har Ko og Rose (2021) sett på sammenhengen mellom lærerstudenter sin evne til å utvikle bevis og hvordan de bedømmer studentbesvarelser. Forskningen ser altså på om lærerstudentene klarer å bedømme riktig og hvordan de produserer bevis. De ser altså på om studentene har evne til å bedømme og hva resultatene av bedømmingen blir, men de ser ikke noe på hva studentene legger til grunn i sin bedømmelse.

Derimot finnes det forskning som forsøker å finne ut av hva man bedømmer etter når man bedømmer bevis. Her har Healy og Hoyles (2000) gjennomført en studie som har sett på hvilke representasjonsformer elever og lærer verdsetter når de bedømmer bevis. En annen studie har gått sett på en enda større inndeling og har laget kategorier for å kategorisere utsagnene til elever som bedømmer ulike besvarelser for å få innsikt i hva elevene verdsetter mest (Liu et al. 2016).

Det er altså tidligere sett på om lærerstudenter klarer å bedømme elevbesvarelser, og at dette kan være utfordrende dem. Derfor vil det være viktig å få innsikt i hva lærerstudentene bedømmer etter for bedre å forstå lærerstudentene sine tanker rundt argumentasjon og bevis. Derfor har vi kommet opp med forskningsspørsmålet:

Hvilke kriterier benytter 1.års-lektorstudenter i bedømmelse av matematiske argumenter?

Forskningsspørsmålet tar utgangspunkt i 1.års-lektorstudenter. Grunnen til at vi har valgt å fokusere på dem er fordi de er i brytningspunktet mellom skolematematikken og matematikken på universitet, som for mange kan være utfordrende (Geisler, 2023). Forskjellen i matematikken ligger hovedsakelig i hvor rigorøst og begrunnet argumentene dine er. Lektorstudenter skal også som fremtidige lærere bedømme elever sine besvarelser så det å se hvilke kriterier de har når de er i starten av studiet kan være nyttig for å kunne tilpasse undervisningsopplegget etter hvordan de bedømmer argumenter.

For å få et best mulig datagrunnlag har vi samarbeidet med et doktorgradsprosjekt, der en ph.d.-kandidat arbeider med å se på studentene sin matematiske argumentasjon i et emne ved et universitet i Norge. Gjennom samarbeidet har vi utarbeidet og gjennomført skriftlige prøver og gruppeintervjuer. Gruppen med lektorstudenter vi har sett på er tilknyttet et matematisk emne tilhørende matematikk årsstudium som del av lektorutdanningen for trinn 8-13 ved et universitet i Norge. Emnet går på våren og bygger på et emnene studentene hadde semesteret før. Disse to emnene er bygd opp rundt kjerneelementene i matematikk hentet fra læreplanverket (Utdanningsdirektoratet, 2020). Høst emnet tar for seg kjerneelementene *utforskning og problemløsning*, a*bstraksjon og generalisering,* og *representasjoner og kommunikasjon*, mens emnet på våren som vi har samarbeidet med tar for seg *resonnering og argumentasjon,* og *modellering og anvendelser*. Første del av vårsemesteret dreier seg om *resonnering og argumentasjon.* Resonnering og argumentasjonsdelen av emnet legger opp til at studentene gjennom problemløsning og arbeid med oppgaver innen tallteori skal lære å bruke ulike bevisformer og -teknikker til å argumentere for matematiske påstander og læresetninger. De får også innføring i matematikkens logiske oppbygning med aksiomatisering, definisjoner og teoremer. Emnet består av fire timer med klasseromsundervisning, med varierende undervisningsformer og legger opptil at studentene skal aktivt delta i undervisningen. Det er også to timer gruppetimer, hvor studentene har anledning til å samarbeide om å løse oppgaver og få veiledning og forklaring fra studentmentorer og faglærere. En av studentmentorene som har bistått studentene i gruppetimene er Hallvard A. Foss som også er med på å skrive denne oppgaven.

1.1 Tidligere forskning

Analyseverktøyet som vi benyttet, er i stor grad inspirert av forskningen til Liu et al. (2016), som har utforsket hvordan elever bedømmer matematiske bevis. Studien involverte intervjuer med elever fra åttendeklasse, som ble bedt om å evaluere og rangere matematiske argumenter. Intervjuene ble transkribert og kodet for å identifisere hvilke aspekter ved argumentene som påvirket elevene sin bedømmelse. Analysen viste at elevene oftere kom med utsagn om de aksepterte påstandene i et argument, enn de gjorde med representasjonsformen og minst av alt argumentasjonsformen. Utsagnene om aksepterte påstander var det empiriske tester og eksempler som var favorisert og betraktet som mer overbevisende. I Representasjonsformer var det numeriske og narrative argumenter som ble oftest anvendt. Dette kom trolig av de gjorde det lettere for elevene å forstå beviset i større grad enn algebraisk, som noen elever opplevde som klare, mens andre som forvirrende. Figurer viste seg å kunne være både hjelpsomme og forvirrende avhengig av tegningen eller visualiseringen som ble presentert. I tillegg til disse funnene ble flere ikke-kategoriserte funn registret som faktorer i elevens vurdering. Elevene sin kjennskap til argumentet og klarheten til forklaringen hadde påvirkning på deres bedømmelse. Studiet tyder på at lærere bør ha fokus på å utvikle elevene sin evne til å kritisk vurdere innholdet i matematiske argumenter fremfor bare å lære dem bestemte argumentasjonsformer. Dette kan gi bedre forståelse og evne til å bruke matematisk logikk og resonnering. De så også behovet for en videre argumentasjonsklassifisering som også tok hensyn til elevens forståelse og disse ikke-kategoriserte faktorene.

Healy og Hoyles (2000) har også sett oppfatningen av bevis blant elever, med søkelys på hvordan studenter i alderen 14-15 år forstår og bedømmer bevis innen algebra. Data ble samlet gjennom skriftlige prøver og intervjuer av elever, hvor elevene vurderte forskjellige algebraiske argumenter og ga tilbakemeldinger på hva de trodde ville gi høyest vurdering fra lærerne, og hvilke de selv likte best. Resultatene viste at elevene hadde to ulike oppfatninger av bevis. Elevene vurderte de algebraiske besvarelsene som de som ville gi mest poeng av læreren. Mens på den andre side foretrakk de selv argumenter som de fant som overbevisende og forklarende, som ofte var mer empiriske og mindre formelle. Studien antyder at lærere bør legge større vekt på å utvikle elevers evner for å forstå og anvende algebraiske bevis, i tillegg til å vurdere hvilke typer argumenter som er mest lærerike og meningsfylte for elever.

Det er altså flere som har sett på hvordan elever bedømmer argumentasjon, men det vanligste er at det er en lærer som bedømmer elever sine argumenter, her har blant annet Meyer og Schnell (2020) sett på læreres forståelse av elevers argumentasjon i skriftlige besvarelser. Dette ble gjort gjennom dybdeintervjuer av lærere som avdekket at lærere tar i bruk en rekke forskjellige kriterier for å bedømme kvaliteten på et argument. Disse inkluderer argumentet sin struktur, innhold og hvordan det presenteres overfor mottakeren. Det kom også frem at lærerne sine vurderinger er sterkt påvirket av deres individuelle pedagogiske praksis og deres personlige forståelse av matematisk argumentasjon. Resultatene indikerer at det er et gap mellom skolematematikken og universitetsmatematikk når det kommer til hva som regnes som et gyldig bevis eller et godt argument. De foreslår at dette kan delvis skyldes at skolepraksisen fokuserer mer på det pedagogiske enn på matematiske kriterier. Meyer og Schnell (2020) anbefaler at lærerutdanningen inkluderer en dypere forståelse av hvordan argumenter konstrueres og vurderes for å forberede lærere på å veilede elever i matematisk tenkning. I tillegg til å fremheve behovet for en bredere forståelse og en felles tilnærming til vurdering av matematiske argumenter i utdanningssystemet.

Morgan et al. (2002) sin studie har hatt fokus på å forstå matematikklæreres praksis innenfor vurdering og hvordan denne blir påvirket av nye reformer i lærerplanen. Forskningen baserer seg på en tidligere studie av Morgan (1998), som identifiserte ulike roller lærere inntok ved vurdering av elevbesvarelser, som ble gjort gjennom analyse av intervjuer og observasjoner hvor lærere vurderte oppgaver. Lærere kunne innta en eller flere av følgende rolle ifølge studiet:

- Utprøver, ved bruk av eksterne kriterier
- Utprøver, ved bruk av egne kriterier
- Hjelperrolle, ser etter muligheter for å gi poeng til elever
- Hjelperrolle, foreslå måter å oppnå kravene
- Pedagog, foreslå måter elevene muligens kan forbedre deres opplevde matematikk kompetanse
- Imaginær naiv leser
- Interessert matematiker
- Intervjuobjekt

(Morgan et al., 2002, s. 446-447, egen oversettelse)

De konkluderte med at en dypere forståelse av lærernes vurderingspraksis krever innsikt i de komplekse og noen ganger motstridende kravene forskjellige vurderingsformene stiller. Morgan et al. (2002) anbefaler at lærerutdanningsprogrammer reflekterer over denne kompleksiteten for å bedre støtte læreres profesjonelle utvikling og forbedre vurderingspraksisen.

For at lærere skal få styrket forståelse kreves det altså at utdanningen fokuserer mer forståelsen av bevis i utdanningen. Derfor har Gomez Marchant et al. (2021) sett på hvordan fremtidige matematikklærere omformer og anvender teoretiske diskurser fra sin utdanning i praksis, spesielt knyttet til argumentasjon i klasserommet. Forskningen fulgte en gruppe matematikk-lærerstudenter og data ble samlet gjennom intervjuer, refleksjoner, og videoopptak av undervisningsøkter. Dette ble så analysert for å identifisere temaer og mønstre i lærerstudentenes diskurs og praksis. Resultatene avdekket tre hovedtemaer i lærerstudentens diskurs om kollektiv argumentasjon: formålet med argumentasjon i matematikkundervisningen, lærerens rolle i å fasiliteter argumentasjon, og kjennetegn ved matematiske argumenter. Analysen viste at lærerstudenten anvendte og tilpasset diskurser om kollektiv argumentasjon fra utdanningen i deres egen undervisningspraksis. Gomez Marchant et al. (2021) konkluderer med at lærerutdanningsprogrammer spiller en kritisk rolle i å støtte fremtidige læreres evne til å koble teori og praksis. Studien understreker viktigheten av at lærerutdanningskurs gir studentene verktøy og forståelser som de kan tilpasse og anvende i deres egen undervisningspraksis.

I likhet med vår forskning har Dalari og Kogstad (2023) sett på argumentasjon hos lektorstudenter som tar et emne som omhandler kjerneelementet *resonnering og argumentasjon*. I dette studiet har Dalari og Kogstad (2023) sett på de skriftlige argumentene til lektorstudentene som omhandler validering og avvisning av matematiske påstander innen tallteori. Formålet til studiet var å undersøke kjennetegn ved studentenes argumenter og se på muligheten for at studentenes svar kunne anerkjennes som bevis. Resultatet viste at studentene produserte argumenter hovedsakelig algebraisk og produserte bevis best i de tilfellene påstanden også var gitt algebraisk. I tillegg hadde Dalari og Kogstad (2023) funn som indikerte at studentene som benyttet seg av empiriske argumenter behersket motbevis bedre. Studien antyder at lektorutdanningen bør sette søkelys på å videreutvikle studentenes evner til å kritisk evaluere og konstruere matematiske argumenter, og ikke bare å formidle kjente argumentasjonsformer. Og at dette igjen kan styrke deres evner til logisk resonnement og matematisk tenkning i deres fremtidige yrkesroller som lærere.

2 Teori

Vi skal se nærmere på hvordan lektorstudentene bedømmer matematiske argumenter. I skolen blir det å argumentere matematisk knyttet til bevis, da et bevis er en form for matematisk argument (Stylianides, 2007). For å forstå dette, må vi først utforske de ulike teoretiske perspektivene på matematiske bevis og argumentasjon.

Balacheff (2002) argumenterer for at det er et mangfold av forståelser av hva et *matematisk bevis* er. Han hevder at uten en klar forståelse og konsensus om hva et matematisk bevis innebærer, vil det være vanskelig å gjøre reelle fremskritt i området. «Undervisningen av matematisk bevisføring synes å være mislykket i nesten alle land, uavhengig av hvordan undervisningen er organisert» (Balacheff, 1998, s. 1, egen oversettelse). I likhet med Balacheff kommer Reid (2005) også fram til forskjellige kunnskapsteorier kan føre til fundamentalt forskjellige tilnærminger til bevis i undervisning. Gjennom sitt arbeid ser Reid (2005) på eksempler fra ulike konferanser og publikasjoner for å illustrere dette og foreslår et felles språk for å diskutere bevis kan fremme bedre forståelse på feltet. Stylianides (2007) hevder at når det ikke fins ett klart svar på spørsmålet om hva et bevis er, fører det til at lærere har ulike definisjoner, som også kan føre til at elever danner seg et bevisbilde som ikke er tilstrekkelig.

Balacheff (1988) mener at det er to utrykk som ofte blir brukt om hverandre når det kommer til bevisforståelse, *bevis* og *matematisk bevis*. Dette mener han skaper utfordringer når det kommer til både forskning og undervisning av bevis, og derav en nødvendighet å differensiere mellom disse to utrykkene. Differensieringen gjør han ved å definere utrykkene *forklaring, bevis og matematisk bevis*. Han bruker begrepet forklaring for å beskrive «diskursen til en person som har som hensikt å formidle gyldigheten av en påstand for noen andre.» (Balacheff, 1998, s. 2, egen oversettelse). Begrepet *bevis* bruker han for å referere til en «*forklaring* som er akseptert av et fellesskap på et gitt tidspunkt.», og med utrykket *matematisk bevis* definerer Balacheff det som «et *bevis* akseptert av matematikere.» (Balacheff, 1998, s. 2, egen oversettelse). Ved disse definisjonene fremmer Balacheff det sosiale aspekter av bevis, noe som han mener er en essensiell del av matematikkundervisning. Han mener at det er et overdrevent fokus på det logiske siden av bevis, når bevis undervises i skolen og alt for lite fokus på den sosiale og praktiske betydningen av de matematiske aktivitetene. Det er fordi matematiske bevis er formen for kommunikasjon blant matematikere, og at dette er med på å etablere bevisene sin gyldighet (Balacheff, 1998). Han sine definisjoner inneholder konkrete hensikter om å fremme gyldighet ovenfor andre, et felleskap og matematikere, uten at han går noe nærmere inn på hva han legger i begrepene felleskap eller matematikere.

Hersh på sin side definerer bevis som «et argument som overbeviser kvalifiserte dommere» (Hersh, 1993, s.391, egen oversettelse). I likhet med Balacheff holder han på det sosiale aspektet og kommer med en annen fremstilling av objektet, altså kvalifiserte dommere. Heller ikke Hersh spesifiserer hva han mener med objektet, men det antydes at kvalifiserte dommere er de personene innenfor matematikksamfunnet som har den nødvendige kompetansen og erfaringen til å vurdere og anerkjenne gyldigheten av et matematisk argument. De anses som kompetente til å avgjøre om et bevis er gyldig basert på deres faglige skjønn og forståelse. Hersh (1993) beskriver dette mer som en sosial prosess enn som en strengt logisk prosedyre, noe som også underbygger den sosiale naturen av matematisk validering blant eksperter.

Det sosiale aspektet er også tatt høyde for i definisjonen til Stylianides, men han setter objektet til å omhandle et klasseromsfellskap da han forsøker å se hvordan bevis oppfører seg i undervisning. Med klasseromsfelleskap mener Stylianides (2007) et felleskap som hovedsakelig bestående av elevene i klasserommet. Denne forståelsen av klasseromsfelleskapet understreker viktigheten av samspillet og samarbeidet, dette inkluderer utvikling av en felles forståelse av hva som aksepteres som matematisk bevis og hvordan bevisføring utføres i klasseromskonteksten. Samtidig tar Stylianides (2007) aspektet for argumentasjon videre og sier det også handler om hvordan det er lag fram. Altså hvilke påstander det er bygd opp av og representasjonsformen. På denne måten gjør Stylianides det mulig å se helheten til et matematiske bevis gjennom de ulike delene det er bygd opp av. Slik kan argumentasjonen i beviset bli analysert mer i dybden som er hensiktsmessig i vårt arbeid, da vi ønsker se nærmere på kriterier for argumentasjon i en klasse. Stylianides sin definisjon ser også på et klasseromsfelleskap og vi har til hensikt å se på en studentgruppe i et emne derfor er det hensiktsmessig å velge det rammeverket som tok høyde disse to aspektene.

Stylianides (2007) definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand som har følgende tre karakteriseringer.

1. Bruke påstander som er akseptert av et klasseromsfelleskap uten behov for videre validering.

2. Bruke en form av resonnering som er validert og kjent, eller innen rekkevidde begrepsmessig, av et klasseromsfelleskap.

3. Det er lagt fram på en passende måte som er kjent, eller innen rekkevidde begrepsmessig, av et klasseromsfelleskap. (s.291, egen oversettelse)

Med dette som fundament kan vi betrakte de tre delene samlet som et gyldig bevis, mens individuelt kan hvert kriterium deles i underkategorier som hver for seg representerer deler av et gyldig argument, forutsatt at det tilfredsstiller de definerte kravene. I det videre arbeidet vil vi derfor anvende disse tre kriteriene som grunnlag for å definere vår argumentasjonsramme. For å øke klarheten i den videre teksten, vil vi erstatte de mer omfattende uttrykkene med betegnelsene *aksepterte påstander*, *argumentasjonsform* og *representasjonsform*, i samme rekkefølge som de opprinnelig ble presentert.

Bruken av aksepterte påstander, argumentasjonsform og representasjonsform er brede definisjoner, og det er derfor nødvendig å utforske disse kategoriene nærmere. Stylianides har følgende eksempler på hva disse kategoriene kan innebærer.

Tabell 1 Basert på Stylianides (2007, s. 292, egen oversettelse)

Aksepterte påstander	Definisjon, aksiom, teorem, osv.
Argumentasjonsform	Bruk av logiske slutningsregler (som modus ponens og modus tollens), bruk av definisjoner for å utlede generelle påstander, kategorisk opplisting av alle tilfeller til hvilken en påstand reduseres (forutsatt at antallet er begrenset), konstruksjon av moteksempler, utvikling av en resonnering som viser at aksept av en påstand fører til en motsetning, osv.
Representasjonsform	verbalt, fysisk, grafisk, tabell, algebraisk osv.

Vår studie som forsøker å se hvilke kriterier lektorstudenter bedømmer argumentasjon etter. Noe lignende er gjennomført i studien til Liu et al. (2016), de gjennomførte studien ved å utarbeide et kategoriseringsskjema som var utarbeidet fra til Stylianides (2007) sin definisjon av bevis. Liu et al. (2016, s. 2376) har utarbeidet underkategorier til de tre delene av et bevis. De kom opp med kategoriseringsskjema under for å systematisere utsagn fra elever.

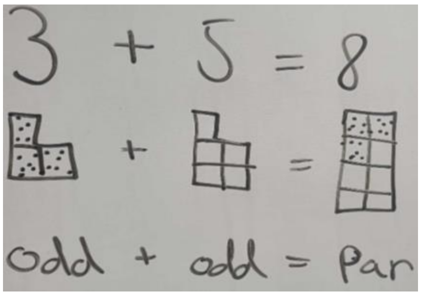
Tabell 2 Basert på kategoriseringsskjema til Liu et al. (2016, s. 2381, egen oversettelse)

Representasjonsform	Aksepterte påstander	Argumentasjonsform
Figurer	Autoriteter	Direkte
Narrativ	Eksempler	Perseptuell
Numerisk	Imaginær	Induktiv
Algebraisk	Matematisk fakta	Generisk
	Antagelse	Rituell
	Mening	Deduktiv

Vi vil her ta for oss hvordan Liu et al. (2016) definerer de ulike kategoriene. Innen representasjonsformer kom de opp følgende kategorier; *narrative*, *billedlige*, *numeriske* og *algebraiske*. Billedlige argumenter involverer bruk av visuelle elementer som figurer, bilder og andre grafiske hjelpemidler for å klargjøre og formidle. Algebraiske argumenter bruker bokstaver for å symbolisere matematiske verdier sammen med operasjoner. F.eks. er påstanden «siden $a^2 - b^2$=(a-b) (a+b), kan vi faktorisere utrykket x^2-9 som (x-3)(+3)» et algebraisk argument. Numeriske argumenter bygger på bruk av tall og matematiske tegn. Et eksempel på dette kan være «Siden 7 + 5 = 12 og 12 er større enn 10, er summen av 7 og 5 større enn 10». Narrative argumenter tar i bruk hverdagsspråket og unngår spesifikk referanse til nøyaktige numeriske verdier eller algebraiske symboler, slik som «Fordi trekanter med to like lange sider alltid har to like store vinkler, vil denne trekanten, som også har to like lange sider, ha to like store vinkler.» (Liu et al., 2016).

Aksepterte påstander har Liu et al. (2016, s. 2377) delt opp i seks underkategorier. Underkategoriene som de har utarbeidet er *autoriteter, eksempler, matematisk fakta, antagelse*, *imaginær* og *mening*. Autoritet referer til en kunnskapsrik kilde som for eksempel en lærer, en matematiker, eller en matematikkbok. Eksempler definerer de som en sjekk gjort gjennom en empirisk undersøkelse. Mens matematisk fakta er definert ved tilfeller hvor det refereres eksplitt til velkjente matematiske resultater, som storetalls lov, distributive lov, trekantulikheten eller lignende. Antagelser definert som noe som antas sant med bakgrunn i konteksten. Imaginær definerer de som mentale bilder med bakgrunn i tidligere erfaringer, og en mening er definert som en person sin overbevisning uten tilstrekkelig begrunnelse.

Den siste kategoriseringen omhandler argumentasjonsformen, og de underkategoriene som er utarbeidet av Liu et al. (2016, s. 2377) er *direkte, perseptuell, generisk, induktiv, rituelt*, og *deduktiv*. Direkte referer til påstander som ikke har ytterligere forklaring enn det som er tilgjengelig i argumentet, f.eks. «et tall kvadrert vil være positiv». Med perseptuell defineres som at man ser en sammenheng mellom kilden og konklusjonen visuelt eller intuitivt. Dette kan være utsagn som «Når vi ser på grafen til funksjon, ser vi at kurven stiger raskt. Derfor må funksjonen ha en høy veksthastighet».



Figur 1 Eksempel på generisk eksempel, uten kontekst.

Generisk refererer til en påstand der man kan se sammenhengen mellom det generelle og det konkrete i eksemplet. Slikt som vist i figur 1 der det generelle, at to oddetall addert gir et partall, visualiseres gjennom et konkret eksempel, som i dette tilfelle er klossene. Videre definerer de induktiv hvis den generelle konklusjonen blir trukket basert på observasjoner av flere eksempler. Rituelt definerer de som en tilnærming til bevis som elevene benytter uten å ha full forståelse av tilnærmingens begrensninger eller grunnen for at virker. Denne typen argumentasjon kan ofte observeres når elever følger kjente prosedyrer eller algoritmer, men uten å vise ytterligere forståelse for prosessen. I motsetning til rituelt, er en deduktiv tilnærming et resonnement hvor man forstår og følger logikken stegvis i argumentet, som utsagnet «Siden vinkelsummen i en trekant alltid er 180 grader, og denne trekanten har to vinkler på 50 og 60 grader, følger det at den tredje vinkelen må være 70 grader.».

3 Metode

I metodedelen av forskningen presenterer vi vår tilnærming, valgene vi har tatt underveis, og hvordan studien er utformet. Dette inkluderer forskningstilnærming og design, der vi forklarer vår konstruktivistiske tilnærming og begrunner hvorfor vi har valgt casestudie som design for studien vår. Datainnsamlingen består av gruppeintervjuer med lektorstudenter som diskuterer styrken til ulike eksempelbesvarelser. Vi beskriver også hvordan vi har forberedt oss til gruppeintervjuene gjennom utvikling av oppgaver, gjennomføring av skriftlige prøver og utvikling av eksempeloppgaver. Videre beskriver vi hvordan vi har utviklet og brukt analyseverktøyet for å besvare forskningsspørsmålet vårt.

3.1 Forskningstilnærming og design

For å forstå hvilke kriterier studentene benytter er det passende å ha en interpretivistisk og konstruktivistisk tilnærming. Det kommer av at interpretivisme er en forskningstilnærming som tar hensyn til individenes ulike tolkninger (Bryman, 2012). Studentene kan ha ulike kriteriene som de bedømmer etter og vi kan da også se på hvordan de forholder seg til de andre studentene som har en annen mening. Interpretivisme er også hensiktsmessig da vi forsøker å forstå hvordan studentenes egne tolkninger, oppfatninger og erfaringer fører til kriteriene de benytter. Når det gjelder konstruktivistisk tilnærming innebærer det at kunnskap er som noe som er i kontinuerlig endring gjennom sosiale interaksjoner. Konstruktivisme er altså en ontologisk posisjon hvor både studentenes interaksjon påvirker hverandre og vi som forskere vil påvirke situasjonen vi setter studentene i (Bryman, 2012). Derfor har vi bygd opp datainnsamlingen slik vi har gjort for å få minimal påvirkning fra oss.

Med bakgrunn i vår forskningstilnærming har vi valgt å benytte en kvalitativ tilnærming. Postholm og Jacobsen (2018) beskriver kvalitativ metode som en egnet metode for å beskrive og forstå mennesker i en ulik situasjon enn forskeren selv. Vår hensikt er å undersøke og forstå hvilke kriterier en gruppe lærerstudenter benytter når de diskuterer matematisk argumenter, og en kvalitativ metode vil da være passende for å få innsikt i dette. Det er likevel viktig å ta i betraktning at kvalitative resultater ikke nødvendigvis kan gjenskapes i fremtidige studier, ettersom både deltakere og forskere vil være forskjellige (Postholm & Jacobsen, 2018). Derfor er det viktig for oss å legge til rette gjennom gode forklaringer på hva vi har gjort og hvordan vi analyserer, slik at andre forskere skal ha de samme forutsetningene når de gjennomfører. Selv om en gjennomfører et lignende prosjekt vil deltagerne være forskjellige som kan ha andre kriterier de bedømmer etter.

Vi har derfor valgt å designe studien vår som en casestudie. En casestudie kan være å se nærmere på et individ, flere individer, en gruppe eller organisasjon innenfor et gitt tidsintervall (Postholm & Jacobsen, 2018). I vårt tilfelle danner studentene som tar emnet en gruppe som vi ønsker å undersøke nærmere. For å få en helhetlig forståelse, har vi analysert studentenes samlede besvarelser, utsagn og diskusjoner. Grunnen til at vi ønsker å se på hele gruppen og ikke enkeltindivider kommer av at vi ønsker å se på hva de vektlegger når de diskuterer med andre da studentene som sagt ikke nødvendigvis er selv bevisste over hvilke kriterier de benytter i bedømmelsen av argumenter.

3.2 Deltagere

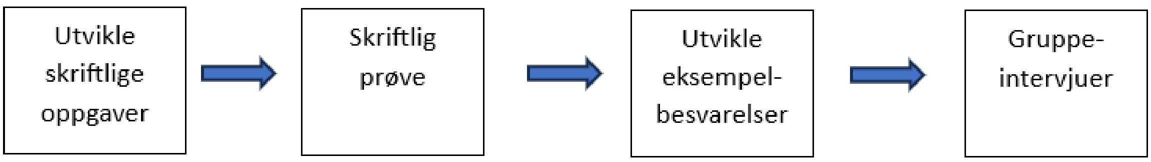
Deltagere i studien vår består av lektorstudenter på årsstudium i matematikk som en del av en femårig lektorutdanning. De tar har alle til felles at de tar emnet som nevnt beskrevet i innledningen. Studentene kunne fritt velge å gi samtykke til å delta i studien gjennom å skrive under på samtykkeskjema. De kunne ta velge om at vi benyttet kun dem sine skriftlige besvarelser og/eller delta i gruppeintervjuer. Det var henholdsvis 19 deltagere som samtykket til bruk av deres skriftlige besvarelser og 10 lektorstudenter som samtykket til gruppeintervjuer av totalt 20 lektorstudenter i emnet.

3.3 Datainnsamling

Datainnsamlingen består av gruppeintervjuer av studentene i emnet, hvor de diskuterer styrker og svakheter ved ulike matematiske argumenter. Vi vil her presentere hvordan vi har forberedt og gjennomført intervjuene.

3.3.1 Forberedelser til datainnsamling

Under gruppeintervjuene ønsket vi at studentene skulle diskutere styrker og svakheter til matematiske argumenter og ikke matematikken i oppgavene. I tillegg ønsket vi at argumentene de bedømte skulle være autentiske, i den forstand at de benyttet metoder og argumenter studentene var kjent med. Derfor konstruerte vi datainnhentingen slik at studentene gjennomførte en uke før gruppeintervjuene.
Forberedelsene til intervjuet består altså av utviklingen av skriftlig prøve, gjennomføringen av skriftlig prøve og utviklingen av *eksempelbesvarelser*. Eksempelbesvarelser er besvarelser som er inspirert av studentbesvarelser eller som vi har konstruert. Vi vil videre gå dypere inn på arbeidet med de ulike stegene presentert i figuren under.



Figur 2 Oversikt over fremgangsmåte i datainnsamlingen.

Oppgavene til denne skriftlige prøven ble utarbeidet i samarbeid med faglærere i emnet, veiledere, en ph.d. -kandidat og en tidligere studentmentor som har skrevet en master (Dalari & Kogstad, 2023) med bakgrunn i lignende data for et år siden. Emnet sitt matematiske fokus dreier seg hovedsakelig rundt tallteori. Vi tok derfor utgangspunkt i tidligere pensum i emnet for å finne passende oppgaver.

Vi utviklet 10 oppgaver som skulle legge til rette for at studentene kunne vise sin kompetanse innen matematisk argumentasjon innen ulike oppgavetyper. De ulike oppgavetypene er inspirert av Healy og Hoyles (2000), og har tre ulike tilnærminger: (1) Studentene får presentert noe spesifikt og skal komme frem til en generalisering og vise at denne stemmer. (2) Studentene får presentert noe generelt og skal vise hvorfor dette stemmer. (3) Studentene får presentert en påstand som man skal ta stilling til og vise hva med påstanden som stemmer. Vi har altså tre forskjellige oppgavetyper som vi velger å kalle; generalisere (1), vise (2) og avgjøre (3).

For å gi et bedre inntrykk av hvordan disse har blitt benyttet i konstruksjonen av oppgavene presenterer vi tre eksempler under med oppgave 7, 1 og 3.

OPPGAVE 7.

Vis at følgende påstand enten er sann eller usann:
"Hvis du dobler summen av to kvadrattall, kan du skrive det som summen av to kvadrattall"

Eksempel:
$2(5^2 + 3^2) = 2(25 + 9) = 68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$
$2(7^2 + 4^2) = 2(49 + 16) = 130 = 121 + 9 = 11^2 + 3^2$
$2(111^2 + 11^2) = 2(12321 + 121) = 24884 = 14884 + 10000 = 122^2 + 100^2$

Figur 3 Oppgave 7 legger opp til generalisering

Oppgave 7 legger opp til at studentene skal generalisere. Selv om oppgaven er formulert slik at studentene skal avgjøre hvilken påstand som er riktig, mener vi oppgaven heller legger opptil at studentene må systematisere og oppdage et mønstre for å besvare oppgaven på en god måte. Vi valgte å inkludere noen eksempler slik at det skulle bli lettere for studentene å se etter mønster og få en bedre forståelse av problemet. Vi så også i ettertid at vi manglet en «alltid» i påstanden, slik at det hadde stått, «kan du alltid skrive det som summen av to kvadrattall». Det virket likevel som dette ikke hadde noen innvirkning på resultatene fra da studentene leste spørsmålet slikt under intervjuene.

OPPGAVE 1.

Student A hevder at $2(x + 1) = 2x + 1$ og student B hevder at $2(x + 1) = 2x + 2$.

a) Hvilken student har rett?

b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

Figur 4 Oppgave 1 med deloppgaver

I Oppgave 1 får studentene presentert to påstander som har ulike resultater og de må avgjøre hvilken som er riktig. De blir deretter i deloppgave b spurt om å vise hvorfor studenten de valgte har riktig, med å komme med to forskjellige matematiske argumenter. Oppgaven legger altså opp til at studentene må avgjøre hvilken påstand som er riktig og vise hvorfor denne avgjørelsen er riktig. Grunnen til at vi har spurt om to matematiske argumenter er for å få studentene til å bruke ulike representasjonsformer. Dette vil også kunne gi innsikt i hva studentene anser som ulike matematiske argumenter, ved å se på forskjellen i studentene sine svar. Til slutt blir de i deloppgave c bedt om vise at den studenten de ikke valgte tar feil. Her skal de bare oppgi ett matematisk argument, og legger opp til flere måter å argumentere på.

OPPGAVE 3.

a) Vis at alle primtall større enn 3 kan bli skrevet på formen $6k + 1$ eller $6k + 5$, for ikke-negative heltall k.

b) Vis at følgende påstand enten er sann eller usann: "Hvert tall som kan bli skrevet på formen $6k + 1$ eller $6k + 5$ er primtall".

Figur 5 Oppgave 3 med deloppgaver

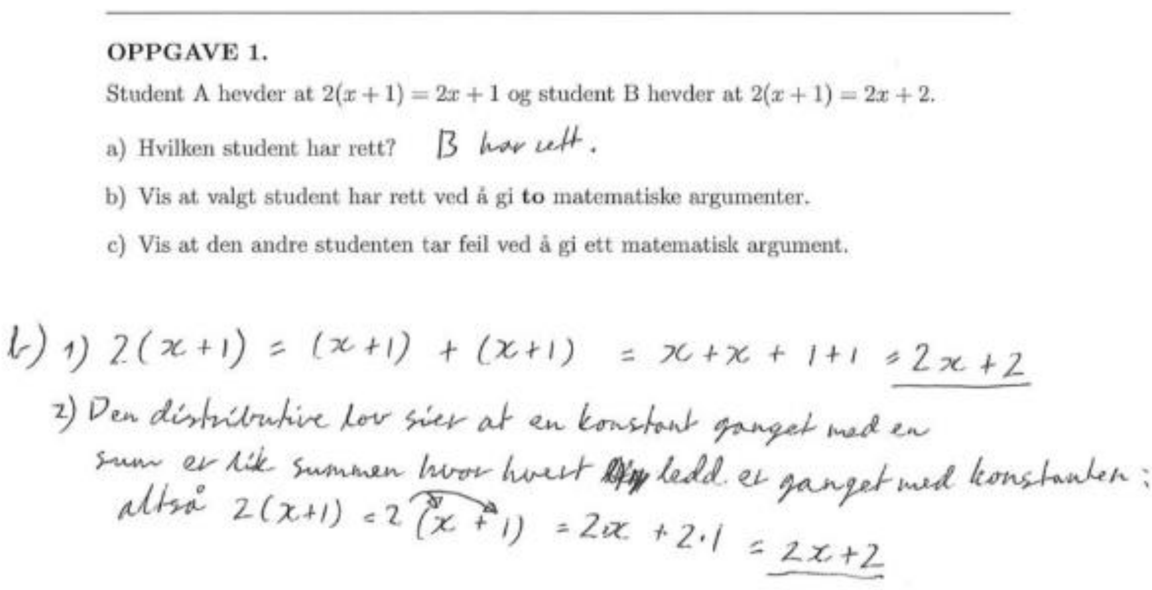
Oppgave 3 består av to deloppgaver hvor den første (3a) ber studentene vise at påstanden stemmer. De får altså presentert en generell påstand som de må ta stilling til, og vise hvorfor den stemmer. Mens den andre deloppgaven (3b) legger opp til at studentene må avgjøre og vise om påstanden er sann eller usann. Her må studentene verifisere svaret sitt gjennom å vise hva som stemmer om påstanden.

Vi laget totalt ti slike oppgaver (Vedlegg 2) som dannet en skriftlig prøve som var obligatorisk for alle deltagere i emnet (20). Men vi benyttet kun de skriftlige besvarelsene fra de som hadde gitt sitt samtykke til det (19). Selve prøven ble gjennomført i et klasserom hvor studentene fikk 90 minutter til rådighet. De hadde ikke tilgang på noen form for hjelpemidler under prøven. Etter prøvene ble de anonymisert og lastet opp på sikker server til UiA.

Gjennomgangen av oppgavene startet med å få et overblikk over hvordan studentene hadde besvart de ulike oppgavene. Vi identifiserte så de oppgavene hvor studentene hadde kommet med ulike former for besvarelser til samme oppgave. Disse ulike formene kunne være forskjellig i argumentasjonsmåte, representasjonsmåte eller gyldighet. Vi så her at ikke alle oppgavene var like godt besvart eller hadde få variasjoner i svar. Det var få svar og dermed også liten variasjon i de to siste oppgavene 9 og 10. Derfor valgte vi å gå videre med de første åtte oppgavene for å finne ulike besvarelser til disse.

Til disse åtte oppgavene identifiserte vi ulike besvarelser og så på hva som gikk igjen og hva som skilte seg ut. Vi valgte så ut de besvarelsene som løste oppgavene på forskjellige måter, f.eks. ulike representasjonsform, argumentasjonsform eller gjentagende feil. Disse besvarelsene som vi da laget med bakgrunn i studentene sine besvarelser har vi valgt å kalle eksempelbesvarelser. Vårt mål med eksempeloppgavene var å skape diskusjon rundt de ulike delene et matematisk argument kan bestå av. Derfor ønsket vi å få dekket alle de ulike representasjonsform, argumentasjonsform og ulik bruk aksepterte påstander i eksempelbesvarelsene. For å få til dette kunne vi ikke basere oss kun på studentene sine besvarelser. Det kom av at studentene hadde en del lignende besvarelser med blant annet mye bruk av algebra i kombinasjon med en narrativ forklaring. Vi valgte derfor å konstruere eksempelbesvarelser for noen av oppgavene som alternativer til besvarelsene til studentene. De vi konstruerte er Student E til oppgave 1C, Student D oppgave 2 og Student D oppgave 7. De resterende eksempelbesvarelsene er inspirert av studentene sine ekte besvarelser. Uansett om vi konstruerte eksempelbesvarelsen eller at den var inspirert av en studentbesvarelse ble alle eksempelbesvarelsene nedskrevet på nytt slik at vi kunne sette fokus på det essensielle i besvarelsen. Dette ble også gjort for at studentene ikke skulle kunne gjenkjenne noen på håndskriften.

Hensikten med de ulike eksempelbesvarelsene var at de skulle legge opp til diskusjon, ved at de hadde ulike argumentasjonsformer, representasjonsformer, bevisformer, og mangler. Slik som Healy og Hoyles (2000) gjorde etterstrebet også med å få inn ulike representasjonsformer i eksempelbesvarelsene. De ulike representasjonsformene er numeriske spesialtilfeller med lite forklaring, narrative besvarelser som forklarte, bruk av figurer, og algebraiske uttrykk. For å gi et bilde på hvordan eksempelbesvarelsene ble utarbeidet viser vi noen eksempler under tatt fra oppgave 1 og 7.



OPPGAVE 1.

Student A hevder at $2(x+1) = 2x+1$ og student B hevder at $2(x+1) = 2x+2$.

a) Hvilken student har rett? B har rett.

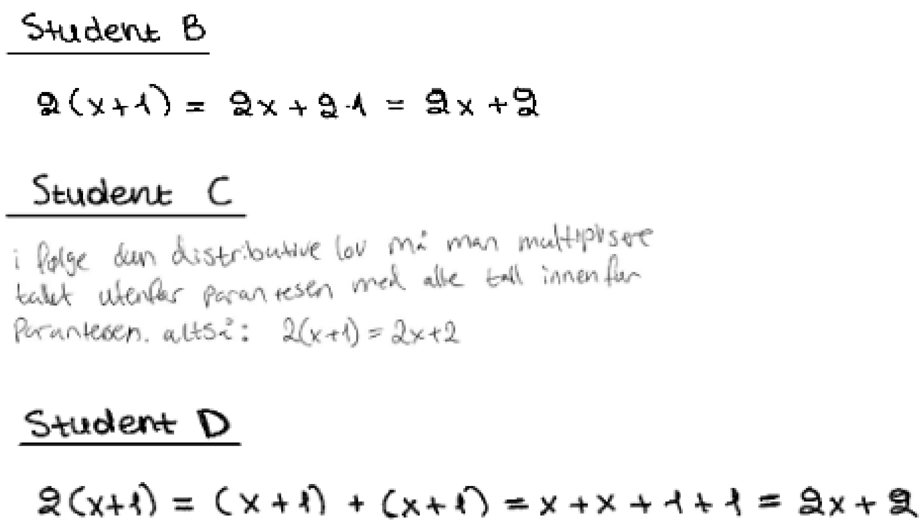
b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

b) 1) $2(x+1) = (x+1) + (x+1) = x + x + 1 + 1 = \underline{2x+2}$

2) Den distributive lov sier at en konstant ganget med en sum er lik summen hvor hvert ledd er ganget med konstanten: altså $2(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2\cdot 1 = \underline{2x+2}$

Figur 6 Studentbesvarelse til oppgave 1a og 1b.



Student B

$2(x+1) = 2x + 2\cdot 1 = 2x + 2$

Student C

i følge den distributive lov må man multiplisere tallet utenfor parantesen med alle tall innenfor parantesen. altså: $2(x+1) = 2x+2$

Student D

$2(x+1) = (x+1) + (x+1) = x + x + 1 + 1 = 2x + 2$

Figur 7 Eksempelbesvarelse B, C, og D til oppgave 1

Vi benyttet studentbesvarelsen i figur 6 til å utvikle to av eksempelbesvarelsene i figur 7. Det først punktet i besvarelsen til studenten dannet grunnlaget for Student D. Vi beholdt besvarelsen slik den var da den fungerte som en algebraisk besvarelse med kun bruk av symboler. Vi endret derimot på representasjon to som ble eksempelbesvarelse Student C. Her gjorde vi en liten endring da vi ønsket at en eksempelbesvarelse skulle være kun narrativ for at det ble et større skille mellom den og eksempelbesvarelse Student B. Eksempelbesvarelsen til Student B, var en besvarelse fra prøven som gikk igjen blant mange av besvarelsene til studentene selv, og vi ønsket derfor å ha den for seg selv. Vi håpet at dette kunne være med på å få bedre innsikt i hvordan studentene ville stille seg til og diskutere rundt denne besvarelsen uten kombinasjonen med det narrative. Det var flere besvarelser som kun holdt seg til det algebraiske som her ved oppgave 7.

OPPGAVE 7.

Vis at følgende påstand enten er sann eller usann:
"Hvis du dobler summen av to kvadrattall, kan du skrive det som summen av to kvadrattall"

Eksempel:
$2(5^2+3^2) = 2(25+9) = 68 = 64+4 = 8^2+2^2$
$2(7^2+4^2) = 2(49+16) = 130 = 121+9 = 11^2+3^2$
$2(111^2+11^2) = 2(12321+121) = 24884 = 14884+10000 = 122^2+100^2$

Svar

Det er sann.

$$2(n^2+m^2) = (n+m)^2 + (n-m)^2$$
$$= (n^2 + \cancel{2nm} + m^2) + (n^2 - \cancel{2nm} + m^2)$$
$$= 2n^2 + 2m^2$$
$$\underline{\underline{2(n^2+m^2) = 2(n^2+m^2)}}$$

Figur 8 Studentbesvarelse til oppgave 7

Student A

$2\cdot(1000^2+25^2) = (1000+25)^2 + (1000-25)^2$

$= 1000^2 + \cancel{2\cdot 25\cdot 1000} + 25^2 + 1000^2 - \cancel{2\cdot 1000\cdot 25} + 25^2$

$= 2\cdot 1000^2 + 2\cdot 25^2$

Student B

Virker ikke for alle fall:

$2(1^2+1^2) = 2\cdot 2 = 4 = 2^2+0^2$

Men 0^2 er ikke et kvadrattall, så påstanden er usann

Student C

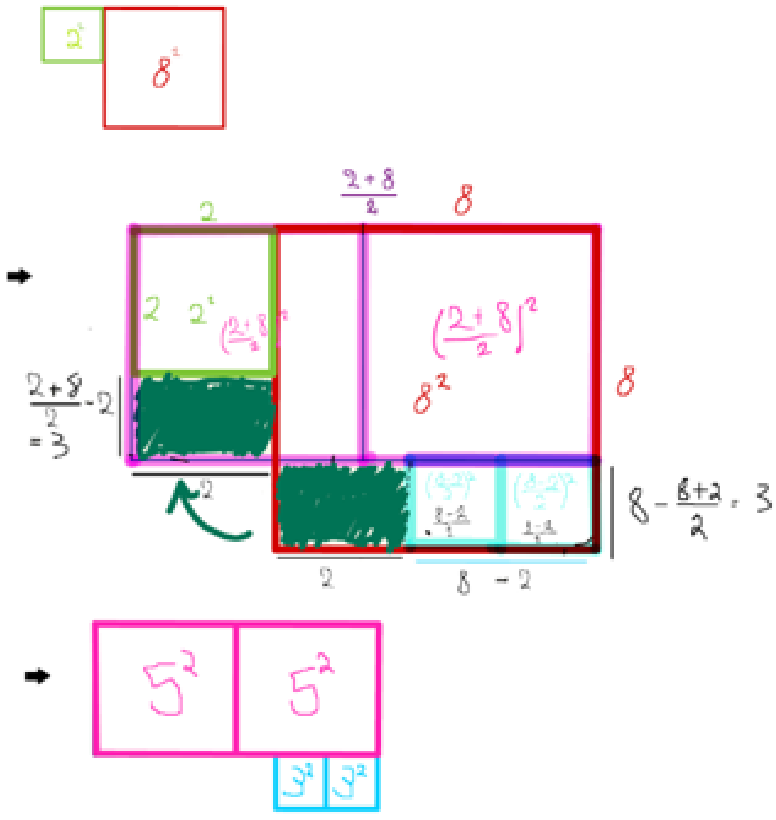
$(a+b)^2 + (a-b)^2 =$

$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 =$

$2\cdot a^2 + 2\cdot b^2$

Student D

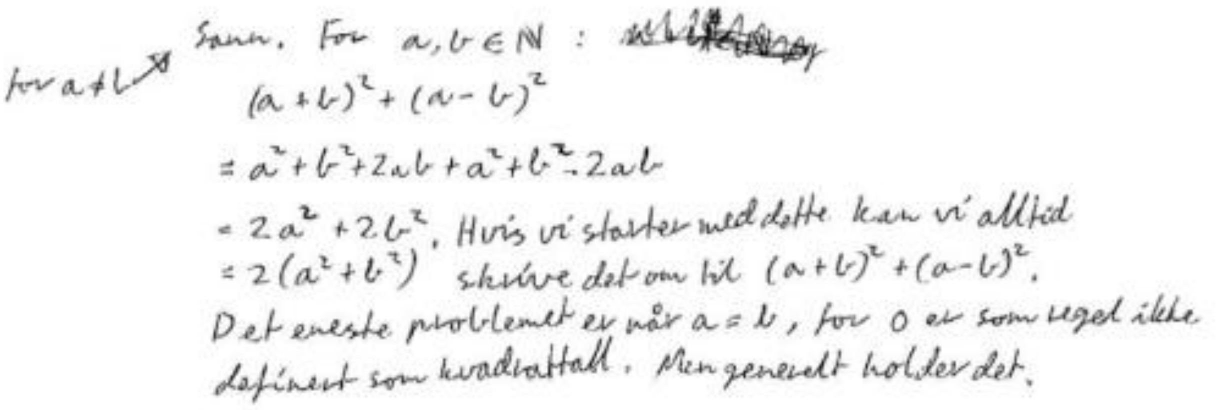
Viser at om vi starter med to kvadrater kan man konstruere 4 kvadrater hvor to og to er like ved å flytte det grønne arealet som er like stort begge steder



$2^2+8^2 = 2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2$

Figur 9 Eksempelbesvarelser til oppgave 7

Studentbesvarelsen (figur 9) er at annet eksempel på hvordan vi tilpasset og utviklet eksempelbesvarelsene. I oppgavesettet fikk studentene presentert noen eksempler sammen med påstanden slik at de skulle forstå oppgaven bedre, men også for at de skulle ha mulighet til å se etter mønstre. Det var en oppgave som var lite besvart, som kan komme av at oppgaven var sent i oppgavesettet, men og fordi de slet med å vite hvordan de skulle starte. I besvarelsen (Figur 9) har studenten sett det generelle, men det vi la merke til var føringen av besvarelsen med hvordan de starter med likheten de ønsker å vise. Studenten holder høyre og venstre side separert og manipulerer bare høyre siden, men det kan også se ut som studenten tar ugangspunkt i at påstanden er sann og får en likhet og sier seg fornøyd. Det var flere besvarelser som inneholdt denne måten å føre på. Vi laget derfor eksempelbesvarelse A som tar utgangspunkt i denne formen for føring, men med konkrete tall da vi ønsket å skille den tydeligere fra eksempelbesvarelse C. I tillegg ønsket vi å ha med et spesialtilfelle for å se på studentene sin respons til dette kontra generelle uttrykk.


for $a \neq b$*

Sann. For $a, b \in \mathbb{N}$:

$(a+b)^2+(a-b)^2$

$= a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab$

$= 2a^2+2b^2$. Hvis vi starter med dette kan vi alltid

$= 2(a^2+b^2)$ skrive det om til $(a+b)^2+(a-b)^2$.

Det eneste problemet er når $a = b$, for 0 er som regel ikke definert som kvadrattall. Men generelt holder det.

Figur 10 Studentbesvarelse til oppgave 7.

En annen besvarelse til oppgave 7 (figur 11) var forløpet til eksempelbesvarelsen B og C, da studenten kom med en påstand som motsa sitt eget argument. Vi delte da denne besvarelsen i to, selv om det kunne vært spennende å se hvordan studentene tenkte om en besvarelse som hadde to konklusjoner som motsa hverandre, ønsket vi å se på hvordan de forholdt seg til at eksempelbesvarelsene hadde ulike konklusjoner. Vi la da til rette for å se hvordan studentene bedømmer gyldigheten til argumentene, da ikke alle eksempelbesvarelsen kan være riktig når de motsier hverandre.

Videre ønsket vi også å inkludere visuelle besvarelser, for å få innsikt i hvordan studentene verdsetter dette fremfor algebra eller narrative besvarelser. Det var ingen av studentbesvarelsene på denne oppgaven som inneholdt noe visuell form for besvarelse. Derfor endte vi opp med å lage et forsøk på et generisk eksempel, for å se hvordan studentene betraktet det visuelle, men ved bruk av konkrete tall for at det skulle bli litt enklere å følge argumentene da vi merket at det ble litt abstrakt ved bruk variabler. Det var flere av oppgavene hvor ingen av studentene hadde visuelle besvarelser hvor vi da valgte å lage eksempel besvarelsene for at dette også skulle bli et diskusjonstema under intervjuene.

3.3.2 Gjennomføring av datainnsamlingen

Intervjuene be gjennomført med 3 grupper på 3, 3 og 4 lektorstudenter, med 1, 1 og 2 tilhørere med lydopptaker. Studentene ble presentert oppsettet med at de skulle besvare tre spørsmål tilhørende hver oppgave med eksempelbesvarelser og at de skulle diskutere seg imellom og komme frem til et samlet svar som de så skulle skrive ned.

Retningslinjer:

Vi har konstruert ulike besvarelser til oppgavene fra arbeidskravet, noen er inspirert av studentbesvarelser, mens andre har vi konstruert selvstendig.

Alle studentene på gruppa må dele sine tanker rundt spørsmålene nedenfor.

For hver oppgave, bli enige dere imellom og skriv ned svaret på følgende spørsmål:

a) Hvordan forstår du oppgaven? Diskuter hva oppgaven etterspør.

b) Hvilket argument er det sterkeste, og hvorfor?

c) Hvilket argument er det svakteste, og hvorfor?

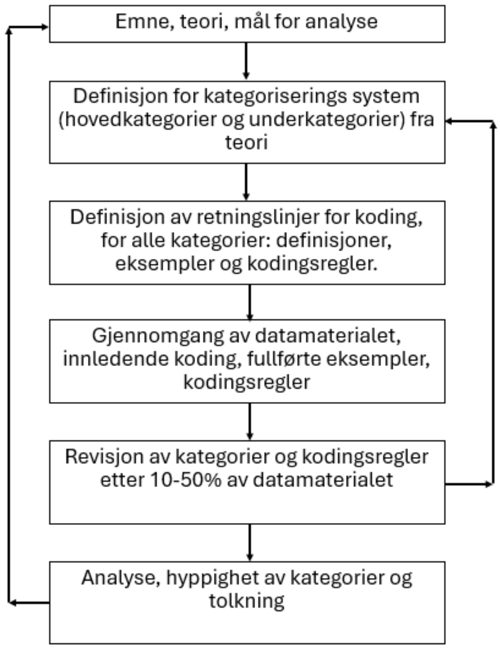
Figur 11 Oppgavene studentene fikk presentert og besvarte til hver oppgave

De fikk de samme tre spørsmålene til hver oppgave, hvor det første spørsmålet var «Hvordan forstår du oppgaven? Diskuter hva oppgaven etterspør.». Hensikten med dette spørsmålet var å få innsikt i studentene sine forståelse av oppgaven og hva de forventer av en besvarelse til oppgaven. Det neste spørsmålene var «Hvilket argument er sterkest, og hvorfor?». Her var hensikten å skape diskusjon mellom studentene hvor de måtte legge frem sine tanker om argumentasjon ovenfor de andre studentene for å sammen kunne enes om hvilken eksempelbesvarelse de valgte. Vi hadde at de bare kunne velg en eksempelbesvarelse for at de skulle måtte diskutere selv om de mente de var like sterke. Det siste spørsmålet var nesten likt som nummer to, men endret fra sterkest til svakest. «Hvilket argument er svakest, og hvorfor?». Grunnet til at vi hadde dette spørsmålet var for å se hva studentene så på som dårlig argumentasjon, og hvilke kriterier som kan knyttes til dette. Grunnen til at vi hadde disse spørsmålene var ikke i seg selv å finne ut hva studentene tenkte om dem, men for å legge opp til en diskusjon. Hvor vi så kan se på hva de legger vekt på i sin diskusjon sammen med medstudentene og hva som skal til for at studentene skiller mellom god og dårlig matematisk argumentasjon for å identifisere deres kriterier.

3.4 Dataanalyse

Dataanalysen tar for seg hvordan vi har arbeidet med innhentet data fra gruppeintervjuene. Denne prosessen startet med transkripsjon av gruppeintervjuene, som besto av å benytte UiO sitt transkripsjonsverktøy Autotekst (UiO, 2024). Her ble lydopptaket transkribert automatisk til et rent tekstformat, men programmet skilte ikke mellom hvem som snakket. Derfor måtte transkripsjonene utbedres ved å legge inn hvem som snakket og gjøre korreksjoner, der det hadde blitt feil. Dette ble gjennomført av forfatterne og studentmentoren nevnt i 3.3.2. Vi arbeidet med ett gruppeintervju hver, hvor vår hensikt var å få med mest mulig av det som skjedde med i transkripsjonen. Vi hadde altså kommenterte inn lengre pauser, ironi og latter. Dette ble gjort for å bevare mest mulig av den informasjonen som ble uttrykt under gruppeintervjuene.

Vår dataanalyse er en kvalitativ innholdsanalyse. En kvalitativ innholdsanalyse er bygget opp av både kvantitative og kvalitative steg, og er mye benyttet innen «sosial science» (Mayring, 2015, s. 365). Hovedtrekkene med kvalitativ innholdsanalyse er at metoden legger opp til å redusere materialet til en sitter igjen med det essensielle. Den legger også opp til å gjøre data mer eksplisitt gjennom å skape helhetlig mening der enkelte setninger eller kommentarer kan være usikre. Kvalitativ innholdsanalyse er også med på å systematisere og skape struktur i materialet (Mayring, 2015, s. 373).



Figur 12 Basert på Mayring (2015, s. 378) sitt skjema over deduktiv innholdsanalyse (egen oversettelse)

3.4.1 Kategorisering

Vi valgte å gjennomføre en deduktiv form for kvalitativ innholdsanalyse med innslag av induktive avgjørelser. Det kom av at vi i tidligere forskning fant allerede utviklet kategoriseringsskjema som hadde blitt benyttet i liknende forskningsprosjekt på ungdomsskole elever (Liu et al., 2016). Når en gjennomfører en deduktiv innholdsanalyse er det viktig at kategoriene er tydelige, at en har konkrete eksempler og ryddige regler for koding. Selv om en har alt dette på plass er det ikke sikkert kategoriseringsskjema passer helt til materialet det er derfor viktig å se underveis om det er riktig å gjennomføre noen endringer. Deretter kan en analysere hele datagrunnlaget, før kan analysere hva dette kan si og se nøyere på enkelte deler (Mayring, 2015, s. 375).

I vårt arbeid med kategorisering av datamaterialet benytter vi ulike begreper som vi har definert. Vi definerer en *kommentar* som det en person sier før en annen person prater. Mens et *utsagn* kan bestå av flere kommentarer, men omdreier seg om samme tema og mening fra samme person. Et *utdrag* består av ett eller flere utsagn, mens en *episode* er en meningsutveksling mellom flere personer som omhandler samme tema, det kan for eksempel være diskusjon av en deloppgavene, eller sammenligningen av flere hvor de setter de opp mot hverandre. Mens en sekvens er sammensetning av episoder som dreier seg om samme oppgave.

Vi utviklet fire retningslinjer for kodingen:

(1) Utsagn fra studentene som omhandler styrken eller svakheten skal kategoriseres. De som ikke passer inn i skjema kategoriseres som IM.
(2) Et utsagn kan kategoriseres av flere kategorier.
(3) Legger til kommentar om utsagnet sier noe om styrken eller svakheten til argumentet.
(4) Et utsagn kan kun kodes innen en hovedkategori en gang innenfor en episode.

Etter å ha analysert ett av gruppeintervjuene med skjema over så vi på hvor godt kategoriseringsskjema klarte å dekke det studentene tok hensyn til når de vurderte argumentene i besvarelsen. Vi så da at skjema ikke var helt dekkende og at kategoriseringsskjema ikke fanget opp alt det studentene tok hensyn til. Det kunne for eksempel være kommentarer som «Den var kreativ», «Jeg synes C er lettere og forståelig» eller «F er mer generell». Det så også ut til at studentene tok hensyn til hvor generell besvarelsen var, da studentene ofte forklarte at en besvarelse var dårligere fordi den kun var et spesialtilfelle. De uttrykte også at en besvarelse var bedre fordi den var mer generell enn en de sammenlignet med. Videre syntes studentene at en del av besvarelsene hadde mangler da de ikke forklarte godt nok, altså at besvarelsene skulle vært mer forklarende for at det skulle være et godt argument. Derfor videreutviklet vi kategoriseringsskjemaet til Liu et al. (2016) både ved å fjerne kategorier som vi så som irrelevante da de ikke var benyttet av studentene. Og ved å legge til kategorier da vi fant at skjema hadde mangler.

RF Representasjonsform	AP Aksepterte påstander	AF Argumentasjonform	GG Grad av generalitet	IM Ikke matematisk
RF1 Figurer	AP1 Autoriteter	AF1 Driekte	ST Spesialtilfelle	FO Forklarende
RF2 Narrativ	AP2 Eksempler	AF2 Generisk	GE Generalisert	
RF3 Numerisk	AP3 Matematisk fakta	AF3 Induktiv		
RF4 Algebraisk	AP4 Antagelse	AF4 Rituelt		
	AP5 Mening	AF5 Deduktiv		

Figur 13 Videreutviklet kategoriseringsskjema

Det nye skjemaet består av fem kolonner, med de samme tre hovedkategoriene fra Liu et al. (2016) i tillegg til «ikke matematisk» og «grad av generalitet». Grunnen til at vi har satt det opp slik er at vi ikke fant det passende i noen av de eksisterende kategoriene. Vi vurderte å kategorisere kommentarer om spesialtilfeller som AP2 (Eksempler), men valgte dette bort fordi spesialtilfeller blir av studentene sett på som et svar på oppgaven. Mens vi tolker AP2 dithen at det er et spesifikt tilfelle som henviser til en påstand som stemmer og bekrefter gyldigheten av denne påstanden. Videre har vi lagt inn IM (Ikke matematisk) i skjema, Liu et al. (2016) holdt denne utenfor, men så at studentene henviste mye til at besvarelsene måtte være forklarende. Det at en besvarelse skal være forklarende i seg selv er ikke noe matematisk så denne ble plassert under IM.

Vi vil her gi innsikt i hva vi legger i de ulike kategoriene og starter med kategoriene under representasjonsform. For at noe skulle kunne kategoriseres for RF1 (Figurer) kommenterer studentene noe som omhandler figurative besvarelser som geometriske konstruksjoner, tabeller eller skisser. RF2 (Narrativ) er besvarelser bygget opp av ord, dette kan være lengre resonnementer eller kommentarer. RF3 (Numerisk) kategoriseres ved at det er bruk av tall og utføre operasjoner på dem. RF4 (Algebraisk) er når besvarelsen benytter bokstaver ril å regne med.

Når det gjelder kategoriene innenfor AP (Aksepterte påstander), gjenkjennes AP1 (Autoriteter) om bruken av autoriteter som sitt grunnlag for at påstanden stemmer. AP2 (Eksempler) fremkommer ved at det henvises et spesifikt tilfelle som skal understreke et poeng. AP3 (Matematisk fakta) handler om bruken av matematiske regler, identiteter, definisjoner eller aksiomer. AP4 (Antagelser) kommer frem ved at besvarelsene bygger på antagelser, eller benytter det i besvarelsen. AP5 (Mening) gjenkjennes ved at besvarelsen inneholder egne tanker som ikke har noe faglig grunnlag.

Kategoriene innenfor AF (Argumentasjonsform) handler om hvilken måte argumentene er bygd opp på. AF1 (Direkte) kommer frem ved at man ikke viser hvorfor en påstand stemmer, men bare sier det rett frem at det stemmer. AF2 (Generisk) kommer frem ved at man gjennom et spesifikt eksempel forklarer det generelle man ønsker å vise. AF3 (Induktiv) gjenkjennes ved at gjennom kun noen eksempler hevder man at det stemmer for alle. AF4 (Rituelt) kommer frem når en benytter seg av matematiske regler uten å vite hvorfor, men kun hvordan. AF5 (Deduktiv) er når ut fra et premiss med stegvise logiske slutninger kommer frem til en konklusjon.

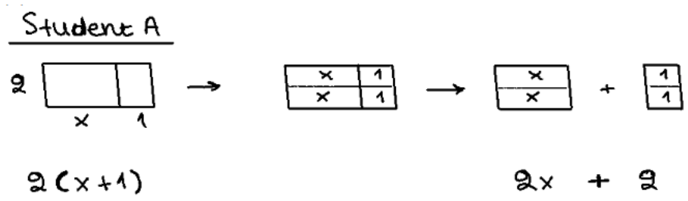
Vi har kodet ST (Spesialtilfeller) der studentene kommenterer på om at det er mangel på generalisering og at det bare henvises til en spesifikk løsning. Tilsvarende har vi kodet det studentene kommenterer om at det er mangel på generalitet eller bruk av generelle uttrykk som GE (Generalisert). FO (Forklarende) har blitt kodet ved å se på der studentene kommenterer på at argumentet kommer tydelig frem, eller er mangler i hva som foregår i besvarelsen.

Vi gjennomførte analysen med å se på hva studentene kommenterte i besvarelsene og kodet utsagnene ut ifra det. Vi så altså ikke på selve argumentasjonen som studentene benyttet ovenfor sine medstudenter for å få frem hvilken de mente var sterkest, men vi så på hvorfor de mente den eksempelbesvarelsen var sterkest. Vi valgte å fargekode utsagnene til studentene ved at hver hovedkategori fikk sin egen farge. For å gi innsikt i hvordan vi har kodet utsagnene viser vi her eksempler hentet fra de ulike hovedkategoriene.

Eksempel på kategorisering av RF (Representasjonsform):

Oppgave 1 [05:49]

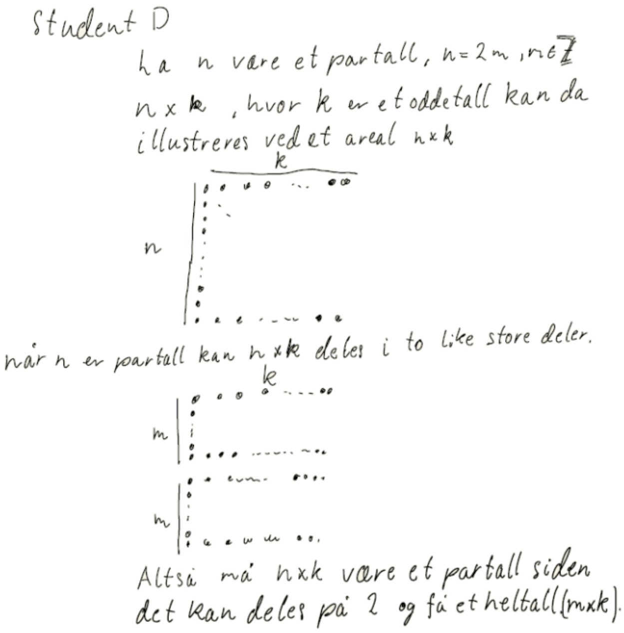
Gia:	Ja. D og A. Jeg liker tegning.
Eva:	Mhm.
Gia:	Tegning er koselig.
Eva:	Jeg synes de er vanskelige, jeg skjønner at de er praktiske for noen, men jeg klarer ikke de der tegningene.
Gia:	Jeg klarer ikke lage dem, men jeg synes det er en veldig fin måte å vise at det funker.
Eva:	Det tok meg dritlang tid å skjønne poenget.



Figur 14 Eksempelbesvarelse til oppgave 1b hvor man skal vise at 2 x + 2 = 2(x+1)

Her har tredje mann på gruppen akkurat sagt at han synes besvarelse D er sterk, da Gia sier at hun er enig, men at hun også synes det om A. Gia uttrykker at hun liker tegninger da de kan være en fin måte å vise frem bevis på, mens Eva synes det kan være vanskelige å forstå dem. Selv om Gia sier at hun synes de er vanskelig å konstruere, har hun ikke noe imot bruk av figurer. De har altså ulike meninger om bruken av tegning og vi har derfor kodet dette som RF1 to ganger. En for meningen til Gia og en for Eva. Selv om vi har markert Gia sine tre kommentarer blir likevel dette telt en gang da det inngår i det samme utsagnet, siden Gia er bare en mening delt opp i tre kommentarer.

Eksempel på kategorisering av AF (Argumentasjonsform):



Figur 15 Eksempelbesvarelse D til oppgave 2.

Oppgave 2 [28:34]

Eva: Jeg synes den tegningen var verst.

Gia: Du gjorde det?

Eva: Jaja, jeg synes ikke det ligger noe godt argument. Han har ikke tegnet godt nok til at du kan bruke det som et generisk eksempel, liksom.

Gia: Nei, kanskje ikke.

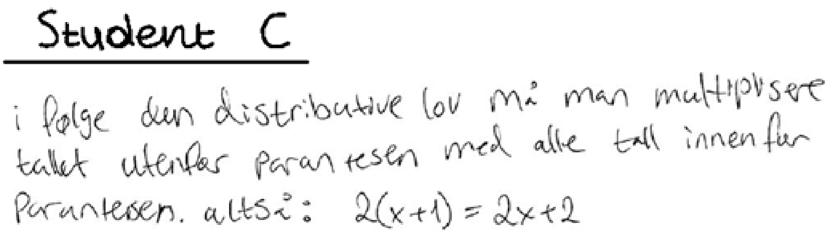
Eva: Jeg ser bare en tegning som på en måte stemmer litt med det han sier, men ikke er nok til at jeg overbevist om at den påstand faktisk stemmer. Det er sånn du gjør når du bare i siste liten må skrive *noe.*

Gia: Men hele det her er jo 2m, og så...

Eva: Ja, for det er det jeg og tenker, den er veldig dårlig presisert.

Dette kodet vi som AM2 (Generisk), da Eva kommenter på hvordan besvarelsen er fremlagt og bygger opp argumentasjonen i besvarelsen. Her kunne en tenkt at det skulle vært kodet under RF1, da hun underveis sier at det er tegnet for dårlig, men hun er ikke negativ kun tegningen, men måten det argumenteres på. Det kommer frem i den siste kommentaren hvor hun sier at «den [besvarelsen] er veldig dårlig presisert.» Hun kommenterer altså på måten argumentasjonen i besvarelsen er bygd opp og ikke det kun tegningen (figuren). Vi landet derfor på å kategorisere dette som AF2, da hun mener det ikke er et godt nok generisk eksempel.

Et eksempel til hvordan vi har kodet som AP (Aksepterte påstander) er fra utdraget:


Student C

i følge den distributive lov må man multiplisere tallet utenfor parantesen med alle tall innenfor parantesen. altså: $2(x+1) = 2x+2$

Figur 16 Eksempelbesvarelse C til oppgave 1.

Oppgave 1 [7:39]

Helen: Hva synes du?

Jane: Jeg vet faktisk ikke helt. Jeg liker godt A.

Helen: Jeg synes det var en kreativ og fin løsning.

Jane: Så liker jeg C, at de sier dette med distributive lov, men kanskje at de kunne vist et lite mellom ledd der. Samtidig som…

Helen: Hvis de liksom hadde gjort det (peker på C) og så det (peker på B).

Ian: Da hadde det vært perfekt.

Her har studentene diskutert seg igjennom de ulike besvarelsene, og nå ønsker de å lande på hvilken de synes er sterkest. Jane forteller da at hun liker eksempelbesvarelse C, ved at den nevner dette med den distributive lov. Hun referer altså til det matematiske regelen, som vi da kodet som AP4. Selv om den viser styrke ved å vise til matematiske regler, synes Jane den har svakheter ved at den mangler noen mellomledd. Hun synes den altså skulle hatt mer forklaring.

Det var flere steder studentene etterlyste mer forklaring, som ved utdraget under hvor studentene diskuterer eksempelbesvarelse B (figur 18) til oppgave 3b (figur 17). Her tar vi for oss hvordan vi kodet dette som FO (forklarende).

OPPGAVE 3.

a) Vis at alle primtall større enn 3 kan bli skrevet på formen $6k+1$ eller $6k+5$, for ikke-negative heltall k.

b) Vis at følgende påstand enten er sann eller usann: "Hvert tall som kan bli skrevet på formen $6k+1$ eller $6k+5$ er primtall".

Figur 17 Oppgave 3

Student B

b) usann, siden 65 er ikke ett primtall

Figur 18 Eksempelbesvarelse B til deloppgave b).

Oppgave 3 [43:34]

Camile: Da blir det B på den, viser ikke hvorfor 65 ikke er primtall eller viser hvordan de har kommet frem til 65.

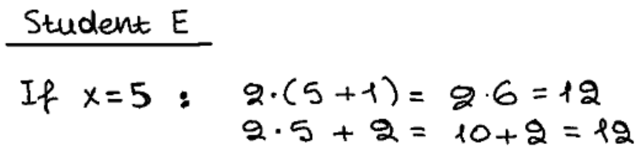
Bent: Ja enig, egentlig selv om på en måte er lett å tenke seg når en har det foran seg.

Camile: Men det er jo det vi ikke skal gjøre når vi har bevis da. Så da skal vi jo ...

Alma: Viser heller ikke ... (mumler mens hun skriver ned på svarark)

Her har studentene diskutert og kommet frem til at de skal svare B på det siste delspørsmålet om hvilken besvarelse som er svakest. I utdraget over legger de frem hvorfor de mener B er svakest. Camile mener det kommer av at besvarelsen ikke viser noe om hvorfor 65 ikke er et primtall eller hvor den har fått svaret fra. Besvarelsen mangler altså forklaring.

Videre viser vi et eksempel på hvordan vi har kodet et utdrag som GG (Grad av generalitet). Her ser studentene på eksempelbesvarelsene til oppgave 1 og tar så for seg 1E.



Figur 19 Eksempelbesvarelse E til oppgave 1.

Oppgave 1 [5:58]

Jane: E da. Der viser den jo at...

Helen: Spesialtilfeller?

Jane: Ja, så vi gir jo motbevis på at den A er feil, men så kan du ikke bevise at B har alltid rett, for det er jo bare et spesialtilfelle.

Ian: Ja.

Helen: Ja, det mangler jo litt av en fin begynnelse og sånn.

Spesialtilfelle er ifølge Jane ikke et godt nok svar for å vise at besvarelsen alltid stemmer, da den viser at bare den ene tilfellet er riktig. Vi kodet dette som ST (Spesialtilfeller) både fordi det blir nevnt med ord, men også fordi de kommenterer på at påstanden som besvarelsen kommer med ikke alltid stemmer ut ifra det den har uttrykt.

3.4.2 Dybdeanalyse

Etter at kategoriseringen var gjennomført så vi på hva som gikk igjen og hva som utpreget seg i hver av kategoriene. For å få bedre innsikt studentene sitt forhold til kriteriene sine har vi sett nærmere på hvordan studentene benytter kriteriene. Derfor har vi sett nærmere på oppgave 1 og 7. Vi valgte oppgave 1 fordi den var den oppgaven som hadde flest utsagn, og inneholdt mange ulike representasjoner blant eksempelbesvarelsene. Oppgave 7 ble valgt fordi den den også hadde mange utsagn i tillegg var dette en oppgave hvor studentene ikke var helt trygge matematisk. Oppgave 7 hadde også mange ulike representasjonsformer blant eksempelbesvarelsene og la derfor opp til mye diskusjon rundt dette for studentene. Det var også andre mer spesifikke episoder blant noen av de andre oppgavene som var meget interessante og dannet et godt bilde på vårt helhetsinntrykk fra intervjuene. Derfor valgte vi også å se nærmere på disse episodene.

3.5 Pålitelighet og Gyldighet

Vår studies pålitelighet handler om hvor vidt våre resultater kan reproduseres under lignende forhold av andre forskere. Dette vil avhenge av at dataen er riktig og ikke avhenger av tilfeldigheter og det er kjent at det er vanskelig å reprodusere kvalitativ forskning da forholdet mellom forsker, forskningsfelt og mennesker vil være ulike og i konstant utvikling (Postholm & Jacobsen, 2018). Derfor har vi valgt å gjennomføre analysen vår metodisk ved en kvalitativ innholdsanalyse. Innholdsanalysen vår inneholder begrunnede kategorier, eksempler og kodingsregler slik at det skal være minst mulig rom for egne tolkninger og at rammene er mest mulig like for ulike forskere som ønsker å gjennomføre et lignende prosjekt. Likevel vil vær forsker ha sin påvirkning på deltagere under intervjuer. Derfor har vi forsøkt å minimere individuell påvirkning og tilfeldigheter ved at gruppeintervjuene ble gjennomført minimal interaksjon mellom intervjuer og studenter, hvor vi kun var deltagende i oppklarende spørsmål. Vi valgte å ha minst mulig interaksjon underveis for at gruppe seg imellom skulle få lik behandling, og for at en kan gjenskape det med de samme forutsetningene.

Vi har også tatt ulike valg for å styrke studiens gyldighet. Gyldighet kan deles i to undergrupper kalt indre og ytre gyldighet. Indre gyldighet handler om hvordan studien måler det vi faktisk ønsker å måle. Altså at det er en sammenheng mellom analyse, begreper, teori og virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018). I vårt tilfelle handler det om å kunne få svar på hva studentene benytter av kriterier når de bedømmer matematisk argumentasjon. Får å svare på dette har vi valgt å gjennomføre intervjuer og se på hvordan studentene benytter sine kriterier. En kunne tenke at vi kunne spurt studentene direkte hvilke kriterier de benytter når de bedømmer argumentasjon, men vi da hadde vi ikke fått sett hvordan de benytter dem i praksis. I tillegg kan det tenkes at de selv ikke er klar over hvilke kriterier de stiller til at argumentasjonen skal oppfattes som god. Derfor har vi valgt å se på det implisitt ved å observere hvordan studentene benytter kriteriene. Kriteriene som studentene har, kommer heller ikke eksplisitt frem i et intervju, men de kan komme til syne ved å se på hva som går igjen kommentarer fra studentene angående besvarelsene. For å klare å analysere kommentarene til studentene, har vi gjennomført en kvalitativ innholdsanalyse. Innholdsanalysen gjør at vi legger opp til å måle likest mulig hver gang, og at andre har mulighet til å gjennomføre det samme. Det er heller ikke sikkert studentene har de samme kriteriene til ulike oppgaver, derfor har vi benyttet flere forskjellige oppgavetyper med ulik oppbygning og fremgangsmåter.

Ytre gyldighet handler om hvordan resultatene fra studien er overførbare (Postholm & Jacobsen, 2018). Får vår studie vil denne ha noe svekket ytre gyldighet da vi ser på en enkelt case, med vår kvalitative metode, som tidligere forklart vil dette kunne gi varierende resultater, men vår metode og undersøkelsesmetode skal være så godt forklart at det kan benyttes av andre forskere som ønsker å undersøke det samme.

3.6 Etiske betraktninger

Gjennom vår studie har vi arbeidet for at vårt prosjekt ikke skal negative innvirkninger på studentene i emnet vi har samarbeidet med. Vi har derfor lagt det opp slik at prosjektet ikke spiller inn på studentene sine oppnåelser i faget. Dette har blitt gjennomført ved at alle studentene deltok på den skriftlige prøven, da den var et eksamenskrav. Under gruppeintervjuene hadde alle studentene som ikke deltok mulighet til å jobbe i grupper med de samme oppgavene som vi benyttet under intervjuene uten at det ble gjort lydopptak. De som ikke ønsket å delta i studien hadde altså like muligheter, det ble bare ikke samlet inn data fra disse studentene. Alle studenter fikk utdelt et samtykkeskjema skriftlig som de fikk anledning til å se over å skrive under på uten oss til stede, slik at ingen skulle føle noe press til å delta.

For at anonymiteten til studentene skal være ivaretatt har vi gjennomført flere tiltak. Dette startet med at de skriftlige prøvene ble anonymisert med pseudonymer etter at de hadde blitt levert inn. Listen med navn og pseudonymer har blitt oppbevart trykt på UiA sin passordsikrede server. Dette er vanlig praksis for å holde alle deltagere i studien anonyme. Siden vi benyttet studentbesvarelser til inspirasjon av eksempelbesvarelsene under intervjuene ble disse omskrevet slik at ingen studenter skulle kjenne igjen håndskriften eller ordlyden til seg selv eller andre studenter. Videre er all vår innsamlede data lagret på universitets passordlagrede servere. Prosjektet har også i sin helhet blitt godkjent av Sikt, i forhold til godkjennelse om at personopplysninger til forskningsdeltagere er ivaretatt.

Vi har i utarbeidelsen av denne oppgaven benyttet ulike KI-verktøy til ulike formål. Som nevnt benyttet vi UiO sin Autotekst til å lage et førsteutkast til transkripsjonen (Autotekst, 2024). Vi har også tatt i bruk OpenAI sin GPT 4 (OpenAI, 2024) til språkvask, setningsoppbygging og for å finne synonymer. Slik at teksten skal få en best mulig flyt.

4 Resultater fra analyse

Resultatene vår består av våre funn fra den kvalitative innholdsanalysen. Vi presenterer først hvordan fordelingen av de ulike kategoriene er gjennom alle oppgavene. Deretter har vi sett nærmere på hvordan disse kategoriene kommer frem når studentene benytter sine kriterier i bedømmelsen av eksempelbesvarelsene.

4.1 Oversikt

Her presenterer vi hvordan utsagnene fra studentene fordeler seg i de ulike kategoriene og hvordan de fordeler seg på de ulike oppgavene. Antall utsagn som studentene kom med varierte fra oppgave til oppgave, som kan ses i oversikten fra figur 19. Studentene har flest utsagn som har blitt kodet i oppgave 1, mens det er færrest til oppgave 3 og 8. Vi ser at antall utsagn kan ha en sammenheng med hvor mange eksempelbesvarelser det er til de respektive oppgavene. Dette er også naturlig da studentene kommer med noen utsagn til hver eksempeloppgave.

	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Oppgave 4	Oppgave 5	Oppgave 6	Oppgave 7	Oppgave 8
Utsagn	79	42	20	36	26	30	47	22
Eksempelbesvarelser	7	4	4*	5	3	2	4	3

Figur 20 Antall utsagn kodet til de ulike oppgavene, uavhengig av kategori.

Gjennom innholdsanalyse har vi også laget Tabell 1 hvor vi ser fordelingen av antall utsagn studentene hadde som faller inn under de ulike kategoriene.

Tabell 3 Fordeling av utsagn kodet innenfor de ulike hovedkategoriene.

Kategori	Antall
RF Representasjonsformer	47
AP Aksepterte påstander	67
AF Argumentasjonsformer	38
GG Grad av generalitet	38
IM Ikke matematisk	112
Totalt	302

Det som kommer frem her at studentene kommenter aksepterte påstander oftest, deretter representasjonsformer og færrest ganger argumentasjonsformer. Den største hovedkategorien av kommentarer er likevel de som ikke matematiske. Dette gir bare et større bilde med hovedkategoriene, men det viser til en viss grad hvor ofte studentene gir utsagn som omhandler ikke matematiske aspekter ved bedømmelsen av argumenter. For å få bedre innsikt i hvilke spesifikke kategorier som går igjen har vi satt sammen skjema (Figur 21) under.

Tabell 4 Antall utsagn i de ulike kategoriene.

Kategori	Antall
RF1 Figurer	20
RF2 Narrativ	14
RF3 Numerisk	2
RF4 Algebraisk	11
AP1 Autoriteter	6
AP2 Eksempler	5
AP3 Matematiske fakta	32
AP4 Antagelse	21
AP5 Mening	3
AF1 Driekte	10
AF2 Generisk eksempel	3
AF3 Induktiv	0
AF5 Rituelt	0
AF6 Deduktiv	25
ST Spesialtilfeller	19
GE Generalisert	19
Forklarende	30
IP Ikke passende	82
totalt	302

Som det kommer frem av tabellen varierer det i stor grad hvor mange utsagn som blir kodet innenfor de ulike kategoriene. Innenfor representasjonsformer ser vi at det flest utsagn om figurer bærer preg av negativ omtale. Studentene omtaler dem som «fine» og «kreative», men at de ikke argumenter så godt. Her virker det som det er variasjoner i hvordan de forholder seg til figurene i lys av argumentasjon. Selv om det er en god del færre utsagn om algebraisk form er disse i stor grad i positiv forstand, da de mener det styrker besvarelsene. Dette kommer ofte i kombinasjon med at studentene sammenkobler det med at besvarelsen er generalisert.

Mens innenfor aksepterte påstander, er det flest utsagn som omhandler matematiske fakta, hvor disse både henviser til styrker og svakheter ved argumentasjonen. Studentene tar altså mye hensyn til bruk av matematiske regler, identiteter og definisjoner når de bedømmer argumenter. Studentene har også mange utsagn om antagelser hvor dette i stor grad er knyttet til hvordan studentene synes det mangler i besvarelsene, enten ved at de ikke begrunner antagelsene sine eller at det er mangler på antagelser i premisset til besvarelsen.

Når det kommer til argumentasjonsformer, kommer det flest utsagn om deduktiv metode fra studentene. Disse går hovedsakelig på at de synes besvarelsene som er bygd opp deduktivt er «tydelige» og «lette å følge». Mens utsagnene som vi har kodet som direkte hovedsakelig handler om at studentene ser svakheter ved argumentasjonen, da de ikke gir noen forklaring som studentene ofte etterspør. Studentene kommer også med noen få utsagn om generiske eksempler. Disse handler om at eksempelbesvarelsene var på god vei til å være generiske eksempler, men manglet tilhørende tekst for å bli et fullverdig generisk eksempel. Videre ser vi at ingen av utsagnene som studentene kommer med har blitt kodet som rituelt eller induktiv. Dette kan komme av eksempelbesvarelsene vi har benyttet gjorde at studentene kom med utsagn om andre aspekter som at det er mangel på forklaring, eller spesialtilfelle.

Studentene kommer med like mange utsagn om spesialtilfeller som de gjør om at noe er generalisert. Spesialtilfeller kommer frem i de tilfellene hvor besvarelsene viser bare en konkret løsning, og studentene ser dette som en svakhet ved argumentasjonen. Mens de besvarelsene som er generalisert legger de det frem som en styrke i argumentasjonen. Studentene var raske med å påpeke om en eksempelbesvarelse var et spesialtilfelle og da sette den som det svakeste argumentet. Mens i tilfellene hvor det var generalisert ble raskt fremhevet og i enkelte tilfeller vurdert som sterkere selv om det generelle ikke hadde noe med oppgaven.

Den største hovedkategorien ikke matematisk har vi delt i to med ikke passende og forklarende. Vi har kodet 30 av utsagnene under forklarende, er ønsker studentene i stor grad mer forklarende argumenter, da de inneholder for lite informasjon slik de står. Den størst kategorien er ikke passende som inneholder alle utsagn fra studentene som ikke passer inn i de andre kategoriene. Blant disse er det gjennomgående høy bruk av adjektiver som begrunnelse til at et argument er bedre enn et annet.

4.2 Anvendelse av kriterier

For å få en dypere forståelse av studentene bedømmer argumentene har vi sett nærmere på hvordan studentene sine utsagn anvender kriteriene i bedømmelsen argumentene. Her valgte vi å se nærmere på oppgave 1 og 7. Vi starter med å presentere funnene våre fra oppgave 1, ved å trekke frem ulike utdrag som gir innsikt i studentene sine kriterier. Vi ser først på noen utdrag som er representative for studentene sine utsagn om representasjonsformer. Deretter tar vi for oss hvordan studentene diskuterer når de kommer med utsagn om aksepterte påstander, argumentasjonsformer, forklarende og grad av generalitet innenfor oppgave 1. Før vi så ser på funnene fra oppgave 7 på en tilsvarende måte som i oppgave 1. Vi har også sett nærmere på andre noen episoder fra andre oppgaver som var interessante, da de tar for seg noen andre aspekter ser ut til å påvirke studentene sine kriterier. Dette er aspekter som studentene sine forkunnskaper og

4.2.1 Oppgave 1

Oppgave 1 var oppgave som studentene var trygge matematisk og alle var sikre på hva som var det riktige svaret på selve oppgaven. Derfor gikk mye av diskusjonen i hvilken av eksempelbesvarelsene som hadde det sterkest og svakest argumentet. Oppgaven legger opp til at besvarelsen skal vise hvilken av påstandene som stemmer, så fokuset til studentene ble på hvilken som viste dette best.

OPPGAVE 1.

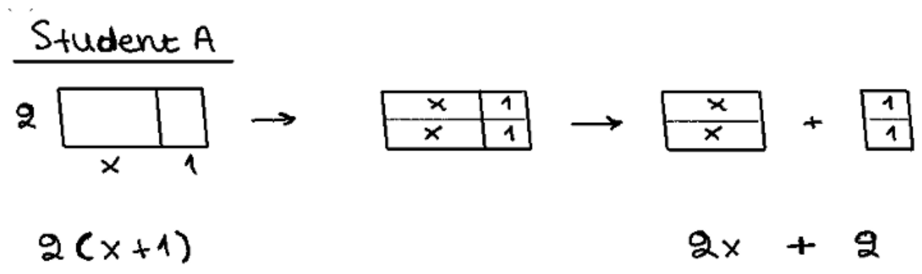
Student A hevder at $2(x+1) = 2x+1$ og student B hevder at $2(x+1) = 2x+2$.

a) Hvilken student har rett?

b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

Figur 21 Oppgave 1



Figur 22 Eksempelbesvarelse A til oppgave 1.

Gruppe 2 [5:46]

Eva: Jeg synes også student D sin er ganske sterk.

Gia: Ja. D og A. Jeg liker tegning.

Eva: Mhm.

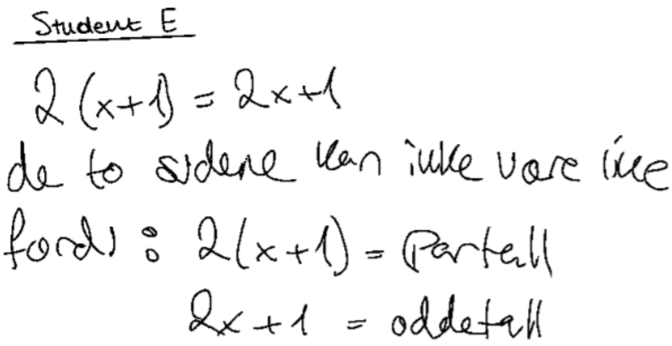
Gia: Tegning er koselig.

Eva: Jeg synes de er vanskelige, jeg skjønner at de er praktiske for noen, men jeg klarer ikke de der tegningene.

Gia: Jeg klarer ikke lage dem, men jeg synes det er en veldig fin måte å vise at det funker.

Eva: Det tok meg dritlang tid å skjønne poenget.

Her diskuterer Eva og Gia oppgave 1, hvor Gia foretrekker D og A, og A fordi hun liker tegninger. Det er altså ikke noe spesifikt i besvarelsen hun referer til, men kun generelt om at hun foretrekker den besvarelsen fordi den inneholder tegning (figurer). Dette er motsetning til Eva som utrykker at hun synes tegninger er vanskelige, men at hun kan forstå at andre synes de er nyttige. Grunnen til at hun synes de er vanskelige virker å være fordi hun må bruke tid på å sette seg inn i dem. Studentene diskuterer ikke hvorfor tegning er bra eller dårlig i denne besvarelsen, men benytter heller sine forutinntatte holdninger til figurer (tegning) for å argumentere for hvilken besvarelse som har det sterkeste argumentet.



Figur 23 Eksempelbesvarelse 1E

Gruppe 2 [11:00]

Gia: Det er et matematisk argument.

Eva: Nei, jeg synes ikke det. Egentlig.

Gia: Ikke? Man må jo ikke alltid skrive for at det skal være et bra nok argument.

Eva: Nei, det er jeg enig i, du må ikke alltid skrive masse, men her har du bare... Han har jo på en måte bevist noe, men den har ikke sagt hvorfor, eller forklart noe mer hvorfor er dette et partall, hvilken student er det som har det?

Gia: Hvorfor skal den si at det er et partall? Det her er jo også en måte å forstå at man trenger ikke å vise at det er et partall for å vise at det blir det.

Frank: Han viser jo bare at 2(x + 1) blir 2 x + 2, algebraisk. Det er jo det oppgaven er.

Studentene diskuterer senere eksempelbesvarelse 1E, her er studentene uenige hvor godt besvarelsen argumenterer. Eva synes besvarelsen burde forklart tydeligere hvorfor 2(x+1) er et partall, mens Gia er uenig da det ikke er det oppgaven spør om, og at en derfor ikke skal trenge å skrive masse for at besvarelsen skal inneholde argumenter. Eva anerkjenner at en ikke skal måtte skrive masse for at det skal være et argument. Likevel synes hun argumentet krever mer forklaring før hun aksepterer det. Her kommer det altså inn på hva som er aksepterte påstander og ikke, for Eva er ikke 2(x+1) her gitt at det er partall. Selv om de er uenige i hva som er aksepterte påstander er de enige om at det finnes andre aksepterte argumentasjonsformer enn narrative. Dette understreker også Frank som avslutter dette utdraget med å si at argumentet til studenten er algebraisk. Videre ser vi det samme som i det første utdraget ved at man benytter sine forutinntatte holdninger til representasjonsform når en bedømmer oppgavene.

Gruppe 3 [5:16]

Helen: Ja. Så D...

Ian: D-en er min favoritt med å på en måte vise det med symboler. Fordi da er det tydelig at man ser på det, det er to parenteser det er det samme som på en måte.

Jane: Det viser jo det samme, men på en annen måte. I stedet for å gange inn så viser du at du har to parenteser som du legger sammen.

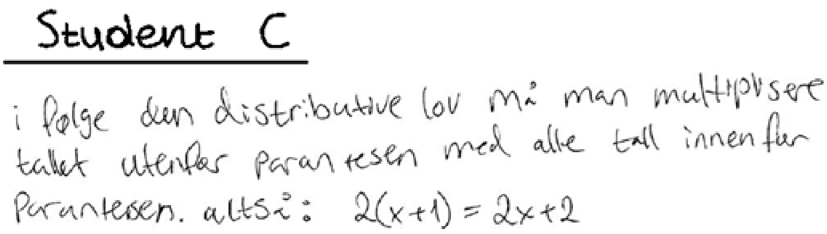
Ian: Det er tre av dem som jeg synes er fine. Det er på en måte A, og så er det D. Og så synes jeg C er en grei også, selv om man på en måte savner symbolbruket da. Men det er på en måte en av de sterkere, siden... Dette er ikke bare en oppgave der man skal regne ut, dette er en oppgave man skal forklare. Så det er på en måte etter konteksten. Jeg vil helst på en måte ha at folk regner ut og gjør det algebraisk med symboler og sånt, men når oppgaven spør etter at du skal forklare det, så blir det på en måte satt fokus på andre ting da.

Jane: Det spør ikke om [forklar], det står vis.

Helen: Så står det jo matematiske argumenter.

Her kommer de forutinntatte holdningene til syne i Ian sin andre kommentar i utdraget. Han forteller at han foretrekker besvarelser som svarer algebraisk. Ian sier sin første kommentar at han foretrekker D på grunn av hvordan symbolbruken får tydelig frem stegene, så her knytter han bruken av algebra sammen med hvorfor den er sterk. Mens han litt senere, når han snakker om besvarelse C, savner han symbolbruken, men at den har andre sterke siden som at den forklarer godt.

Når vi ser på utsagn kodet som aksepterte påstander kommer det frem av kategoriseringsskjema at de hovedsakelig er knyttet til matematisk fakta. Dette kommer frem blant annet i dette utdraget fra gruppe 3.


Student C

i følge den distributive lov må man multiplisere tallet utenfor parantesen med alle tall innenfor parantesen. altså: $2(x+1) = 2x+2$

Figur 24 Eksempelbesvarelse C til oppgave 1.

Gruppe 3 [7:39]

Jane: Jeg vet faktisk ikke helt. Jeg liker godt A.

Helen: Jeg synes faktisk at vi har en kreativ fin løsning.

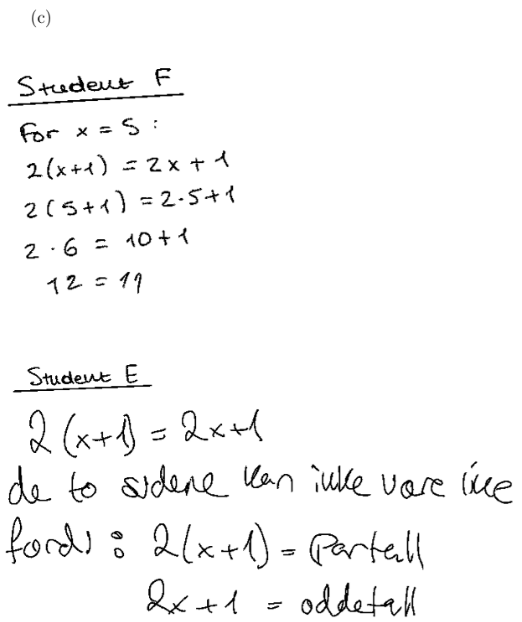
Jane: Så liker jeg C at de sier dette om den distributive lov, men kanskje at de kunne vist et lite mellom ledd der. Samtidig som…

Helen: Hvis de liksom hadde gjort det (peker på C) og så det (peker på B).

Ian: Da hadde det vært perfekt.

Over kan man se at Jane liker eksempelbesvarelse 1C da den henviser til den distributive lov. Gruppen synes likevel at dette ikke holder i seg selv og at besvarelsen burde vist mer av utregningen. Helen foreslår derfor at en burde slått sammen B og C, hvor B inne-hold kunne algebra, med C som kun hadde skriftlig forklaring. Studentene er altså enig i at en besvarelse med kun fakta ikke er nok, men at den må vise og forklare for at den skal ha det sterkeste argumentet.

Når det gjelder disse matematiske faktaene som studentene kommer med utsagn om, fo-kuserer de på hva man kan forvente av forkunnskaper til dem som skal lese besvarelsen. Altså hvilke påstander må man begrunne og hvilke kan man ta for gitt at leseren skal kunne. Dette diskuterte studentene flere ganger og her under fra gruppe tre som disku-tert oppgave 1c, ender på at det beste argumentet er den flest kan forstå.



Figur 25 Eksempelbesvarelser til oppgave 1c.

Gruppe 1 [15:05]

Alma: Jeg vil si at F er mest tydelig. Vis at sidene ikke er like.

Camile: Ja, og da trenger du jo ikke noe for. Ja, det er ikke for vanske-lig å forstå da, men der må du jo på en måte skjønne at 2x pluss 1.

Alma: På E må du skjønne.

Camile: Du må skjønne hva som er partall og oddetall på en måte. Ok enig. Så F er lettere å forstå for flere mennesker.

Bent: Enig.

Altså mener studentene at den sterkeste eksempelbesvarelsen den som krever lavest nivå av forkunnskaper. Studentene kommer her frem til at det å vite hvordan partall og oddetall skrives krever mer kunnskap enn å se at motbeviset i 1F viser at det blir feil, da den kun inneholder enkle regneregler.

Studentene kommenterer lite på argumentasjonsformene, men kommer med enkelte utsagn.

Gruppe 3 [3:12]

Eva: Men den var heller ikke så dum. Den viser jo veldig nøye akkurat alle stegene, hvorfor.

Frank: Ja, ja.

Eva: For den her, hvis ikke du...

Frank: Det er jo bare en regel.

Eva: Hvis ikke du *kan* algebra veldig godt, på den her...

Gia: Ja...

Her i det første utdraget presiserer de hvordan eksempelbesvarelse 1D legger frem alle stegene veldig nøye. Her tolker vi det dithen at studentene setter pris på den deduktive fremgangsmåten i besvarelsen, hvor de stegvis går fra premisset til konklusjonen. De sammenligner 1D med 1B som de finner svakere, da 1B bare har benyttet en regel uten å vise noe stegvis eller noe annen form for forklaring. En annen gruppe kommenterer på hvordan eksempelbesvarelse E kun viser for en bestemt verdi og hvordan bevisnivå det er.

Gruppe 1 [10:23]

Camile: Ja. Viser det bare om x er 5.

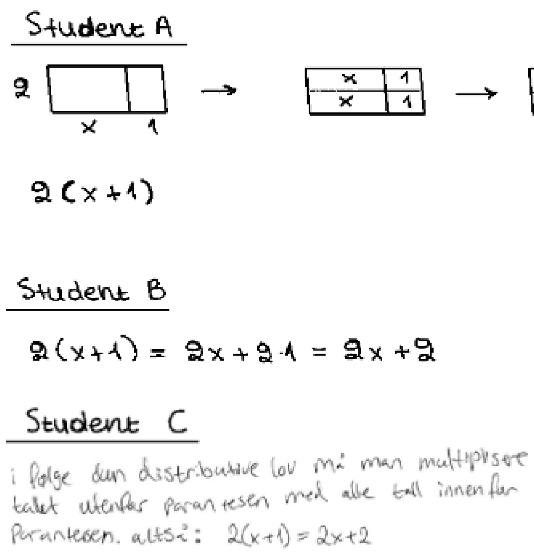
Bent: Og hva heter det nå igjen?

Camile: Naiv empirisme?

Bent: Det var det det var.

Det kommer frem ved studentene kommenterer at 1E bare viser for en enkelt verdi. De drar også inn naiv empirisme som nivå for bevisføring, da eksempelbesvarelsen bare viser direkte til et spesialtilfelle og godtar det da det oppfyller det en ønsker. Studentene har i emnet hatt om de ulike bevis nivåene til Balacheff (1988), men dette er den eneste kommentaren som trekker frem dem.

Studentene etterlyste ved flere tilfeller at eksempelbesvarelsene burde vært mer forklarende. Her presenterer vi studentene sitt første med eksempelbesvarelsene og får deres umiddelbare reaksjon, hvor de kommenter på de tre første eksempelbesvarelsene.



Figur 26 Eksempelbesvarelser A, B og C til oppgave 1.

Gruppe 3 [1:15]

Helen: Her er det en som har vist med blokker. Det var veldig fint.

Intervjuer: Alle de besvarelsene der er bare til oppgaven b (1b), altså.

Jane: Den først viser det jo veldig visuelt.

Ian: Da kan jeg på en måte tenke x som en lengde, ja. Så det er jo en smart måte å gjøre det på.

Jane: Det viser jo det etter det siste stemmer, da. Student B viser jo det samme, bare den ganga inn i parentesen. Ja, mer algebraisk.

Ian: Men jeg synes på en måte ikke at det forklares mye. Det er på en måte... Det er et svar på oppgaven, men samtidig så... Det er på en måte... Ja, de gir riktig svar. Men jeg føler ikke at det forklarer hva elevene har tenkt. Det er bare å vet at den distributive loven gjelder, da.

Jane: Men den viser jo på en måte det via den loven, da. Man kunne kanskje skrevet også, for eksempel, at den... Ja, viser at ved den distributive loven så er det dette som stemmer. Og det er jo egentlig C, da.

Forslaget deres er at den algebraiske besvarelse burde hatt en skriftlig forklaring på hvorfor den hadde gjort, og at dette ikke kommer godt nok frem gjennom det algebraiske argumentet. Ian etterlyser altså forklaring for hvorfor det student B sitt svar gjør som det gjør selv om operasjonen i seg selv er riktig matematisk. Til gjengjeld mener de at det samme gjelder om den geometriske besvarelsen 1A da de mener den forklarer godt visuelt. Jane anerkjenner at besvarelse 1B på et vis har vist den distributive loven algebraisk, men at de kunne presisert dette ved å kommentere det narrativt. Det er altså ikke nok at påstanden er matematisk korrekt for å at det skal besvare oppgaven i deres øyne. Det trengs også en forklaring til hvorfor de gjør som de gjør, her etterlyst ved et narrativ. Det samme snakker gruppe 2 om:

Gruppe 2 [3:12]

Eva:	Men den var heller ikke så dum. Den (1A) viser jo veldig nøye akkurat alle stegene, hvorfor.
Frank:	Ja, ja.
Eva:	For den (1B) her, hvis ikke du...
Frank:	Det er jo bare en regel.
Eva:	Hvis ikke du *kan* algebra veldig godt, på den her...
Gia:	Ja...
Eva:	... så er jo ikke den så lett. Da må du jo vite at du skal gange 2 med begge leddene.
Gia:	Ja.
Eva:	Da må du *kunne* det, på en måte.
Gia:	Ja, men jeg føler sånn, på vårt nivå så bør man kunne det. Men, selvfølgelig. Det er jo fint å, for å vise liksom til... Eh... Hvis man skal bevise for folk som ikke kan algebra ellers, så ville jeg si student D er inne på det, liksom.

Her diskuterer de at det er mangler ved besvarelse 1B da den ikke forklarer at den benytter den distributive lov, men kun benytter den. Det uttrykker de ved å vise hva en trenger å «vite» for å kunne forstå hva som er gjort. Det virker derfor som de tenker at et sterkere argument er et argument som trenger minst mulig forkunnskaper, men at samtidig tilpasser seg etter hvem det er rettet mot, som Gia snakker om.

Studentene er også opptatt av, i hvilken grad eksempelbesvarelsene er generalisert og de er veldig raskt ute med å kommentere om nå er et spesialtilfelle. Det er ser ut til at med en gang studentene ser spesifikke tall, så er det en mangel i besvarelsen som de kan utpeke. I dette tilfellet diskuterer studentene hvilken oppgave de synes er sterkest, når Alma ber Bent snakke litt høyere.

Student E

If $x = 5$: $2 \cdot (5+1) = 2 \cdot 6 = 12$
$2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12$

Figur 27 Eksempelbesvarelse E til oppgave 1b.

Gruppe 1 [5:55]

Bent: Nei, jeg snakker som jeg snakker. Jeg vet ikke, synes den (E) blir litt for spesifikk.

Camile: Ja, E er ikke riktig, det gjelder ikke for alt, det er bare for hvis x er lik fem.

Bent: Ja.

Alma: Så ikke E i hvert fall?

Camile: Nei.

Studentene i Gruppe 1 diskuterer altså hvilken som er sterkest hvor Bent da ender opp med å heller begynne å utelukke de han synes er svake. Dette gjør han ved å trekke frem eksempelbesvarelse E som han synes blir for spesifikk. Camile legger anerkjenner det og utdyper hvorfor den er for spesifikk ved at den kun viser for om x er 5. Det var stort sett slik studentene snakket om spesialtilfeller, ved at de tidlig avslo de som sterke fordi de var spesialtilfeller. Dette ser vi også ved gruppe 3 som også her diskuterer hvilken som er sterkest, når Ian uttrykker at «moteksempel er genialt» i omtale av E.

Gruppe 3 [12:01]

Ian: Moteksempel er genialt.

Jane: Ja, men det er jo ikke det de viser. Her er det om det er rett. Og da viser det jo ikke at det alltid er rett ved vise spesialtilfelle.

Ian: Det er akkurat det.

Jane: Enig? Eller uenig?

Ian: Jeg er enig.

Helen: Jo.

Jane: For alle de andre er generelle.

Ian: Jeg er kanskje enig i at E-en er den som er mangelfull.

Det virker som Ian her tenker at eksempelbesvarelse E er et motbevis for student A i oppgaven, da den viser at student B er riktig ved tilfellet når x er lik 5. Jane motsier dette og understreker at eksempelbesvarelse E kun er et spesialtilfelle og ikke viser at student A har feil, når B er riktig ved ett tilfelle. Hun uttrykker så at alle de andre er generelle og indikerer at derfor er argumentene dem sine bedre. Fra disse to utdragene og andre steder i materialet ser det ut som noen av studentene har en tillært holdning om at spesialtilfeller automatisk er dårligere enn generelle uttrykk uavhengig av kontekst. Det kommer også frem når gruppe 3 diskuterer eksempelbesvarelsene til oppgave 1c.

OPPGAVE 1.

Student A hevder at $2(x+1) = 2x+1$ og student B hevder at $2(x+1) = 2x+2$.

a) ~~Hvilken student har rett?~~

b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

Figur 28 Oppgave 1

(c)

Student F

For $x = 5$:

$2(x+1) = 2x+1$

$2(5+1) = 2\cdot 5+1$

$2\cdot 6 = 10+1$

$12 = 11$

Student E

$2(x+1) = 2x+1$

de to sidene kan ikke være like

fordi: $2(x+1)$ = partall

$2x+1$ = oddetall

Figur 29 Eksempelbesvarelser til oppgave 1c.

Gruppe 3 [14:31]

Helen: X=5, er lik to x pluss en. To fem pluss en.

Jane: eeh var vanskelig. Den viser veldig tydelig med et moteksempel en måte begge to svarer jo egentlig. Den er jo mye mer generell.

(Stillhet ca. 10.sek)

Jane: Ja...

Ian: Jo, F er mer generell, men E-en kommer jo i mål den også.

Jane: F viser jo et spesialt tilfelle. For X=5.

Ian: Ja, men et motbevis er et motbevis.

Jane: Ja, det er det. Men det gjelder jo det andre, og der går du på strukturen til partall og oddetall. Det gjelder jo generelt på den måten. Det er derfor jeg sier at begge to er like gode. Jeg klarer ikke velge mellom de to.

Her diskuterer studentene hvilke argument som er sterkest, hvor de ser på to motbevis. Jane synes det er vanskelig å skille de to besvarelsene og kommer da med at den ene er mye mer generell. Ian går mer på at eksempelbesvarelse F er mer generell, men synes ikke det er noe grunn til at den er bedre enn E. Vi tolker det også dithen at når han sier at «et motbevis er et motbevis.» sier han at det har ikke noe å si om motbeviset inneholder generelle utrykk eller ikke. Til slutt velger alle gruppene eksempelbesvarelse F på 1c siden den krever minst matematiske forkunnskaper. Altså at de som skal se på besvarelsen kun trenger å kjenne til regnereglene, mens i eksempeloppgave E må en kjenne til egenskapene til et partall og oddetall, og at de da kan skrives på denne formen.

4.2.2 Oppgave 7

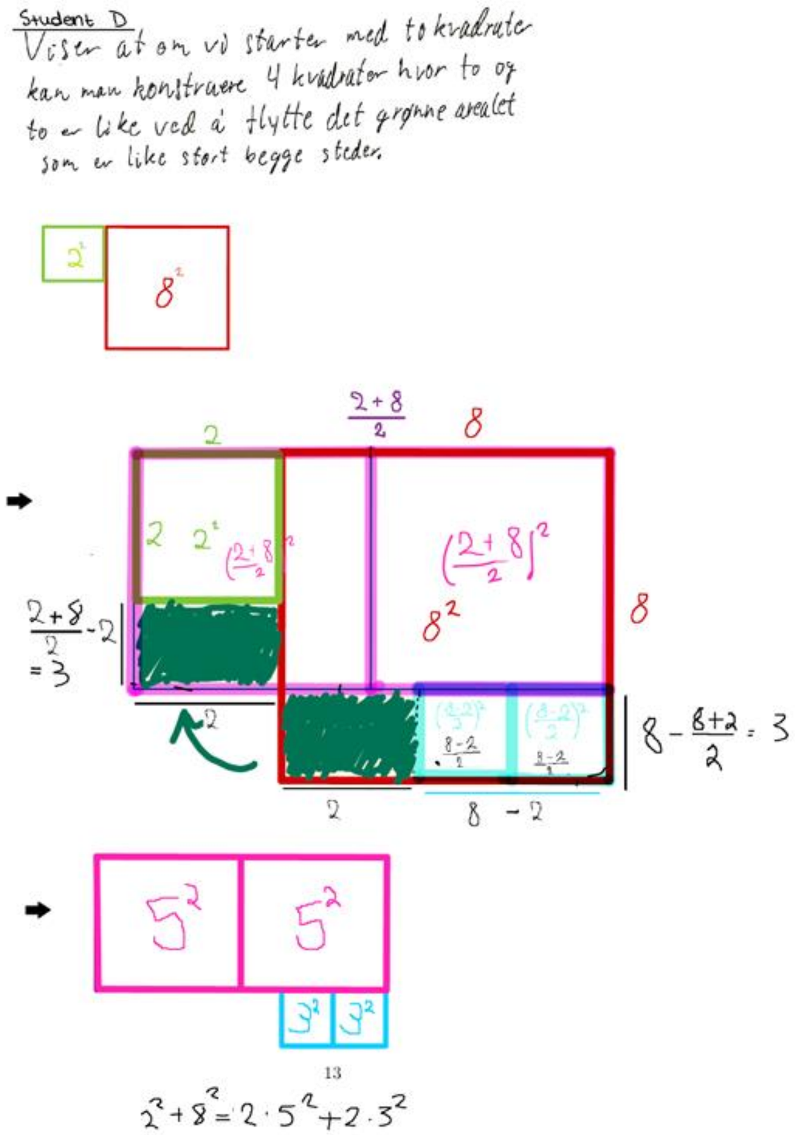
OPPGAVE 7.

Vis at følgende påstand enten er sann eller usann:
"Hvis du dobler summen av to kvadrattall, kan du skrive det som summen av to kvadrattall"

Eksempel:
$2(5^2 + 3^2) = 2(25 + 9) = 68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$
$2(7^2 + 4^2) = 2(49 + 16) = 130 = 121 + 9 = 11^2 + 3^2$
$2(111^2 + 11^2) = 2(12321 + 121) = 24884 = 14884 + 10000 = 122^2 + 100^2$

Figur 30 Oppgave 7

Oppgave 7 er en oppgave med en påstand som en skal avgjøre om er sann eller usann, i tillegg får man noen eksempler slik at en kan se hva som menes med oppgaven. Det var ikke alle studentene som skjønte eksempelbesvarelsene til denne oppgaven. Dette kan skyldes at eksempelbesvarelse A og C ikke var ført optimalt, men det kan også komme av studentene sin mangel på forståelse av selve oppgaven. Studentene brukte også lang tid til å sette seg inn i eksempelbesvarelse D, som vi starter med å se nærmere på diskusjonen rundt den.



Figur 31 Eksempelbesvarelse D til oppgave 7.

Gruppe 3 [1:15:20]

Jane: Svakest?

Helen: D? Nei, A.

Ian: Det var jo så fint tegnet. (snakker om D)

Gruppe 1 [1:25:55]

Bent: Jeg blir litt sånn forvirret av tegningen.

Camile: Ja, det er jeg enig i.

Bent: Jeg tror det er mer fordi det er så mye som skjer.

Når det kommer til kommentarer om representasjonsform er de fleste knyttet til kategorien figurer grunnet eksempelbesvarelse 7D som ble mye for studentene å sette seg inn. Her uttrykte samtlige grupper at den var uoversiktlig og at de slet med å følge den. De uttrykte at det var fint med farger, men at det foregikk mye på en gang som gjorde det uoversiktlig. Det kom frem selv om de berømmet bruken av farger. Det kom også tydelig fram at eksempelbesvarelsen var uoversiktlig da studentene bruke mye tid på å forstå selve besvarelsen, og at de derfor etterlyste mer forklaring rundt tegningen da de ikke syntes at tegningen i seg selv forklarte nok. Studentene syntes også at det var mangler ved forklaringer av de andre eksempelbesvarelsene, dette kommer frem i utdraget under hvor studentene diskuterer eksempelbesvarelse C.

Student C

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 =$$
$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 =$$
$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$$

Figur 32 Eksempelbesvarelse C til oppgave 7

Gruppe 2 [1:18:40]

Gia: Hvis du dobler summen av to kvadrattall. Da føler jeg at denne...

Eva: Jeg synes at denne (C) generaliseringen burde stått på den (peker på eksemplet i oppgaven) måten.

Gia: Ja, enig. For så føler jeg at denne mangler at man forklarer.

Eva: Hvorfor, ja...

Gia: For eksempel om den hadde forklart, da. Liksom sånn, dette her funker for alle.

Eva: Ja, og *hvorfor* det funker for alle.

Gia: Ja. Da hadde det vært et generisk eksempel. Nå er det egentlig bare low key (faktisk) et eksempel. Føler jeg. Når man ikke snakker sånn.

Eva: Jeg er litt enig og litt uenig. For jeg vil si at det er et generisk eksempel, samtidig så synes jeg at det kunne hatt mer forklaring.

Her forstår ikke studentene hva eksempelbesvarelsen viser, de tolker det dithen at dette viser et spesifikt tilfelle hvor en ser på et kvadrat som er summen av to tall og et som er differansen av de to samme, og at eksempelbesvarelsen da ikke er generell. Derfor etterspør studentene mer forklaring av eksempelbesvarelsene for at de skal betraktes som sterkere argument. Usikkerheten ved det matematiske i eksempelbesvarelsen kommer til uttrykk like etter denne seansen. Da Eva sier at hun synes student C (eksempelbesvarelse) er ganske bra, selv om de mener den har noen mangler.

Gruppe 2 [1:19:10]

Eva:	Hva med student B. Ja, for det var den. Hvilket synes vi er best? Jeg synes student C sin er ganske bra, selv om den har noen feil. Eller noe som vi mener den mangler, da.
Live:	Men har noen av dere skjønt den?
Eva:	Nei.
Gia:	Nei
Frank:	Nei.
Eva:	Og hvis ingen av oss skjønner den så ville jeg si at det er ganske dårlig argumentasjon.

Her kommer det altså frem at ingen av de har skjønt eksempelbesvarelse C, og Eva endrer da mening til at de da ikke bør velge den som det sterkeste argumentet. Den matematiske kunnskapen til studentene og forståelsen av argumentet spiller altså inn på hvilket argument de synes er sterkest. Selv om alle studentene er enige om at de ikke skjønner eksempelbesvarelse C, går det ikke lang tid før de skal konkludere og Eva spør da Frank.

Gruppe 2 [1:20:25]

Eva:	Hvilken synes du er best?
Frank:	Best, C.
Gia:	Ja.
Eva:	Hvilken synes du er best? C?
Gia:	Backer. (Støtter)
Eva:	Hvorfor synes vi den er best?
Live:	Det var den jeg skjønte best.
Gia:	Mest generelt.
Live:	Fordi jeg ikke skjønte de andre.
Gia:	Ah, det er legit svar.

Studentene velger altså eksempelbesvarelse C som det sterkeste argumentet selv om de like før hadde avvist det fordi ingen skjønte det. Men som Live uttrykker var det den hun «skjønte best» fordi hun ikke skjønte noen av de andre. Det virker altså som hun tenker at det ligger noe i den besvarelsen, men at hun ikke helt klarer å se sammenhengen. Derimot er Gia sitt forslag at eksempelbesvarelse C er sterkest fordi den er mest generell. Det virker altså som hun kommer med at den er mest generell kun i bakgrunn i at den benytter bokstaver i besvarelsen, da de ikke skjønner sammenhengen mellom oppgaven og argumentet. Dette viser hvor usikre studentene er på hvordan de skal bedømme argumentene når de ikke har kontroll på matematikken i oppgaven.

Gruppe 3 bruker også mye tid på eksempelbesvarelse C, men skjønner delvis hva den prøver å vise gjennom at Jane kommer opp med at man må se på eksempelbesvarelsen baklengs.

Gruppe 3 [1:17:14]

Ian: (Engelsk) If and only if. Ja.

Jane: Da tror jeg at jeg likte den (C) beste altså.

Ian: Den ga hvertfall mer mening for meg nå, men jeg skjønner fortsatt ikke hvorfor den stemmer.

Jane: Den viser jo veldig tydelig at det her... Summen av...

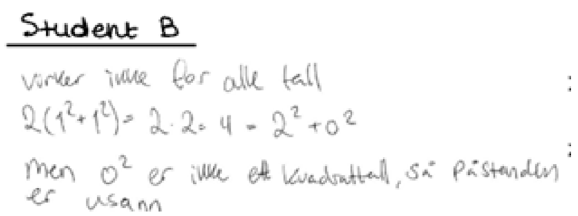
Helen: Hvor er forklaringen og..?

Jane: Den er jo i matematikkspråket. (Med smil om munnen)

Ian: (humrer) Ja, men er jeg enig med deg når du sa at man skulle lese den nedenfra og opp, så gav det mer mening.

Ut fra kommentaren til Ian «If and only if» kan det være at han tror at påstanden i oppgaven er ekvivalent, og som han kommenterer senere «jeg skjønner fortsatt ikke hvorfor det stemmer.» Han har altså en overbevisning om at det stemmer, men vet ikke hvorfor helt hvorfor. Helen etterlyser mer forklaring da hun heller ikke har forstått eksempelbesvarelse C. Likevel er de innforståtte med at forklaringen også kan ligge i det algebraiske som Jane kommenterer her. Noe hun sier det med et smil om munnen når hun sier det ligger i «matematikkspråket» (algebra). Som ble kommer frem som at her vet de at det er noe i dette argumentet, men de klarer ikke å knytte det fullstendig til oppgaven. Det er altså deres matematiske forkunnskaper som begrenser dem i bedømmelsen av eksempeloppgavene. Dette kommer frem flere steder i datagrunnlaget at når studentene er usikre på matematikken etterlyser de mer forklaring og da i form av narrative kommentarer slik som Helen gjør her.

Det var ikke bare ved eksempelbesvarelse C at de matematiske forkunnskapene til studentene ble utfordret.



Figur 33 Eksempelbesvarelse B til oppgave 7

I eksempelbesvarelse B hevdes det direkte at 0 i ikke er et kvadrattall. Om dette stemmer fører det til at alle de andre eksempelbesvarelsene blir ugyldig. Derfor må studentene ta stilling til denne påstanden, som her i gruppe 3.

Gruppe 3 [1:18:22]

Helen: Men «null i annen er ikke et kvadrattall», stemmer det? Kan man ikke sette null i andre? Det blir jo bare null.

Ian: Hvorfor ville man brukt null i andre på et kvadrattall?

Helen: For å få det til å stemme.

Ian: Fordi det skal bare være lengde. Jeg føler på en måte at det er implisitt ment, men ... Det vet jeg ikke, da. Men jeg føler på en måte at ... Det ikke er et gyldig argument å bruke null, da. Som et motbevis.

Helen: Ok, ta C da.

Jane: Vi tar C.

Ian: Ja.

Her leser Helen fra eksempelbesvarelsen, mens hun spør de andre på gruppen, hun viser altså usikkerhet rundt faktumet at null er et kvadrattall. Hun stiller seg skeptisk til påstanden da hun ikke ser noen problemer, da null i annen bare blir null. Ian er enig i at null i kan brukes i motbeviset, men klarer ikke helt sette ord på hvorfor. Han referer heller til «at det er implisitt ment» og «jeg føler». Han har altså en mer intuitiv overbevisning hvorfor argumentet i eksempelbesvarelse B er gyldig. Derfor ender gruppen opp med å velge eksempelbesvarelse C som det sterkeste argumentet. De andre gruppene diskuterte også denne påstanden, her fra gruppe 2.

Gruppe 2 [1:14:15]

Eva: Da kan man jo begynne å diskutere den (B) da. For her mener jo studenten at null i annen ikke er et kvadrattall. Men null kan jo kvadreres. Men det blir bare null. Akkurat som at 1 kan kvadreres, men det blir bare 1. Men er det et kvadrattall? Det vet ikke jeg svaret på.

Gia: Ikke jeg heller. Men...

Eva: Men jeg ville... Eller, jeg vet jo ikke svaret, men jeg ville jo sagt at null i annen egentlig kan skrives som kvadrattall. Og derfor så stemmer jo egentlig påstanden. Men det kommer jo litt an på. Det kan man jo sikkert diskutere.

Gia: Ja...

Live: Hva er det som skjer her oppe, da? (peker på eksempelbesvarelse A)

Eva stiller også spørsmål ved påstanden da hun mener at null kan kvadreres og at det blir null, akkurat som Helen gjorde. Men Eva er likevel usikker på om null er et kvadrattall, som hun sier videre vet hun ikke svaret, men vil sagt at det kan skrives som et kvadrattall. Hun ender dermed opp med at påstanden er sann, men sier at «det kommer jo litt an på. Det kan man jo sikkert diskutere.» som indikerer at hun ikke er helt trygg på beslutningen sin. De andre studentene i gruppen har heller ingen tanker som de kommer med så de ender med skifter tema og se på en annen eksempelbesvarelse. Studentene kommer altså med utsagn om matematiske fakta, men mangler den matematiske forkunnskapen til å kunne validere dem. Dette fører til usikkerhet og at de benytter andre kriterier enn gyldighet, som vi har sett kan være ikke passende aspekter som at det var den de «skjønte mest av» eller at den var «generell» uten annen begrunnelse.

4.2.3 Interessant funn fra oppgave 2

Kriteriene studentene til argumentasjonen i en besvarelse virker å være veldig flytene. Det vi legger i flytene er at de virker å endre seg fra oppgave til oppgave. For å vise dette har vi tatt med episode fra oppgave 2 hvor vi sammenligner med hva studentene svarte i oppgave 1. Vi ser her nærmere på Gruppe 3 sine besvarelser og hva de la til grunn for å velge det sterkeste argumentet.

OPPGAVE 2.

Vis at produktet av et partall og et oddetall alltid er et partall.

Figur 34 Oppgave 2

Student A

$2n \cdot (2m+1) = 4mn + 2n$

$= 2(2mn + n)$

som er et partall.

Figur 35 Eksempelbesvarelse A til oppgave 2.

Studentene diskutere her eksempelbesvarelse A som kort argumenterer direkte og algebraisk for at produktet alltid blir et partall.

Oppgave 2

Gruppe 3 [20:36]

Helen: Den har jo da satt inn 2 *m*, generelt av partall, og gangen med 2 *n* + 1. Det er jo viktig at vi tar den *m* og *n*.

Jane: Ja, det er jo virkelig et veldig direkte bevis.

Helen: Ja, er liker 4 *m n* + 2 *m*, så har de satt 2 på utsiden som er et partall. B. *n* er like oddetall, *n* + 1 er like partall.

Ian: Men det er en ting som jeg på en måte savner på student A, bare for å si det med én gang. Og det er at de kunne sagt at når du deler det på to, så blir det et heltall eller et eller annet sånt. Man kunne lagt til det.

…

[24:35]

Ian: Ofte er det enkle det beste, tenker jeg. Direkte bevis er fantastisk når det på en måte...

Jane: Det viser det veldig konkret. Det eneste er at han har lagt det at et partall kan uttrykkes som $2n$, og oddetall som $2m + 1$.

Helen: Skal vi skrive det da? At vi synes det var sterkest, men for å gjøre den helt opp så kunne vi mange lagt til litt forklarende tekst om hva $2n$ og $2m + 1$ er. Jeg synes kanskje B er den svakeste.

Helen starter med å forklare hva eksempelbesvarelsen viser og gir ros for at det er brukt to forskjellige variabler. Mens Jane kommenterer på argumentasjonsformen ved at det er et veldig direkte bevis. Hun kommenterer også litt senere at «Det viser det veldig konkret». Vi tolker det som at Jane mener at eksempelbesvarelsen har brukt færre tegn i sin besvarelse av oppgaven noe som gjør at informasjonen kommer tydelig frem. Som Ian først kommenterer og så blir gjentatt av de andre på gruppen litt senere, er at de synes den burde hatt med en forklaring rundt hvorfor de benytter $2n$ og $2m$+1. Selv om de mener det er mangler ved forklaringen til eksempelbesvarelse A ender de opp med å velge den som det sterkeste argumentet. De noterer også sammen med svaret sitt at de synes den mangler noe forklaring. Det at de velger denne algebraiske besvarelsen som ikke har noen forklaring av symbolene er en motsetning til det studentene i gruppe 3 valgte å svare i oppgave 1. Her avviste gruppen eksempelbesvarelse 1B sitt argument fordi de mente det var mangler på forklaring av det algebraiske. Det kan ha flere ulike grunner til at de med samme begrunnelse ender på to forskjellige konklusjoner i valg av sterkeste argument. Det kan være at de mente at oppgave 1 gikk mer ut på å forklare hvorfor noe var riktig, og at oppgave to skulle vise an sannhet og at dette har ulike kriterier for studentene. En annen grunn kan være at den manglende forklaringen ikke har like stor betydning i de to oppgavene. Da studentene kan tenke at skriveformene for partall og oddetall er mer grunnleggende akseptert påstand enn den distributive lov som det gjaldt i oppgave 1.

4.3 Oppsummering analyse

Det kommer frem i analysen at studentene tar med seg forutinntatte holdninger knyttet til de ulike representasjonsmåtene når de bedømmer eksempelbesvarelsene. De har ulike holdninger ovenfor bruk av figurer og er veldig på at de må være oversiktlige og ikke inneholde for mye. Figurene må gjerne ha forklaring i tillegg til figuren for at argumentet til figuren skal bli forstått. Det som kommer frem om figurer er at det virker som om studentene synes det er en god måte å vise argumenter på, men at de trenger forklaring, siden det er mye informasjon som er komprimert sammen, som kan være vanskelig å få oversikt over. Dette er noe Eva uttrykker i oppgave 1 og alle gruppene generelt i forbindelse med oppgave 7. Det kommer også til uttrykk i de andre gruppene at mange av studentene foretrekker algebraiske besvarelser, men her også ser vi at det er utfordringer med at de skulle bli forstått. Det kommer frem i tilknytning til oppgave 7, at studentene sliter med å forstå hva oppgaven egentlig krever. Dette fører til at de bruker tid på å forstå også den algebraiske eksempelbesvarelsen (7C). Når det kommer til narrative besvarelser, virker studentene å foretrekke dette, men som forklaring i tillegg til algebra eller figurer, og ikke som en selvstendig form. Det samme gjelder numeriske besvarelser som bare blir avvist som spesialtilfeller og dermed blir det etterlyst forklaring i kombinasjon med besvarelsen for at det skal fungerer som et fullgodt argument.

Vi har sett at studentene sine kriterier til hvilke påstander som er akseptert varier mellom oppgavene. Dette er gjerne knyttet til de algebraiske eksempelbesvarelsene og hvordan en skal legge premisset for oppgaven. Her viser studentene variasjon både forskjell i kriterier mellom oppgaver, men også at de har ulike kriterier seg imellom til hva som aksepterte påstander og ikke. Noen av studentene etterspør ofte mer forklaring i tillegg til algebraen eller det figurative slik at de skal få en god forståelse av argumentet. Dette ble spesielt fremtredenen på de oppgavene hvor studentene hadde mindre matematiske forkunnskaper. Her var det ikke bare påstander som de ønsket forklaringer rundt, men også hvordan eksempelbesvarelsene var utført slik at det ble lettere å følge argumentene.

Det at studentene foretrekker eksempelbesvarelser som er enkle å følge kommer også til uttrykk gjennom argumentasjonsformen, der de satte pris på direkte bevis og deduktivt utførte eksempelbesvarelser. Dette uttrykte de ved å kommentere at de syntes det var bra, men dette virket ikke å være en avgjørende faktor, men mer en del av at det ble lettere å følge argumentet. Det som viste seg å være lett for studentene å vende seg mot var grad av generalitet. Her var studentene raskt ute med å trekke frem det generelle i som noe positivt, selv i de tilfellene de ikke helt skjønner eksempelbesvarelsene. Studentene vendte seg også raskt til spesialtilfeller, i de tilfellene de skulle velge det svakeste argumentet. Dette ble den gjennomgående begrunnelse for hvilken eksempelbesvarelse som var svakest.

5 Diskusjon

I denne diskusjonsdelen ønsker vi å diskutere forskningsspørsmålet vårt i lys av teori og tidligere forskning, og våre resultater. Dette er gjort ved at vi deler opp diskusjonen i flere deler, basert på hovedkategoriene i vårt analyseringsskjema, slik at det blir presentert på en ryddig og oversiktlig måte. I tillegg kommer vi til å se på matematiske forkunnskaper, som kan ha stor påvirkning i studentenes bedømming av argumentasjoner, og derav en viktig faktor for å forstå resultatene. Før i starter diskusjonen ønsker vi bare å repetere forskningsspørsmålet:

Hvilke kriterier benytter 1.års-lektorstudenter i bedømmelse av matematiske argumenter?

5.1 Kriterier for representasjonsformer

En viktig del av vårt arbeid har vært å undersøke og forstå hvordan studenter bedømmer blant annet ulike representasjonsformer. Resultatene våre viser at studentenes syns på disse formene er mangfoldige og indikerer at studentene har forutinntatte holdninger til de ulike representasjonsformene. Vi observerte at studentene hadde klare preferanser til algebraiske besvarelser over de andre representasjonsformene. Dette var med å påvirke deres beslutninger om hvilket argument som ble ansett som sterkest. Flere studenter uttrykte seg spesielt negative overfor for figurative representasjoner, selv om denne kategorien hadde flest utsagn var de oftest benyttet. Men mange av disse kommentarene var det mest i negativ forstand, til tross for at enkelte så på argumentene som kreative og så potensialet for at de kunne være forklarende. Imidlertid ble det også påpekt av noen studenter at slike representasjoner kan bli forvirrende dersom de er overkompliserte eller inneholder for mye informasjon. Det kommer blant annet frem at noen av studentene synes det er vanskelig å komme opp med visuelle/geometriske besvarelser, men at de finner dem forklarende på generelt grunnlag, og dermed fint for å skape forståelse. Dette samsvarer med det Healy og Hoyles (2000) så i sin studie om at studentene verdsatte algebraiske besvarelser, men at de foretrakk andre som var mer forklarende om de skulle lære det selv.

Healy og Hoyles (2000) viser til elevenes syn på de algebraiske argumenter oftest blir betraktet som argumenter som gir best resultater fra læreren og var mest overbevisende. Dette er noe som går igjen i våre resultater at studentene foretrekker algebraiske besvarelser. Dette skyldes at studentene følte seg tryggere på symbolsk manipulasjon og mente at slike representasjoner var mer presise og lettere å følge, som kan ha en sammenheng i måten matematikkfaget er bygget opp i skolesystemet og universitetssystemet. Der fokuset til nå har ligget i større grad på algebraisk argumentasjon.

Det kommer videre frem at studentene i liten grad utrykker seg rundt numeriske beregninger, noe som sannsynligvis skyldes hvordan oppgavene er utformet, i tillegg til at i de tilfeller hvor studentene kommenterte konkrete utregninger, ble disse oppgavene kodet som spesialtilfeller. Dette kan indikere at studentene ser algebraiske og figurative representasjoner som mer generelle og anvendelige, i motsetning til numeriske som blir sett på som konkrete spesialtilfeller.

Algebraiske representasjoner, som bruker symboler for å formidle teoretiske ideer blir ofte foretrukket fordi de anses som klare og lette å følge. Derimot er de narrative ofte kritisert av studentene for å være mangelfulle og mindre presise. Dette er forskjell fra Healy og Hoyles (2000) hvor det flest av de narrative besvarelsene ble betraktet som et bevis. Samtidig ble representasjonsformene ofte koblet sammen av studentene, hvor argumentet ofte ble betraktet som mindre komplett på bakgrunn av mangel av den andre representasjonsformen.

5.2 Kriterier for aksepterte påstander

I likhet med forskningen til Liu et al. (2016), er det en sterk preferanse for bedømming basert på de aksepterte påstandene, med noe annerledes resultat. Studentene ser ut til å foretrekke påstander som er basert på velkjente definisjoner og teoremer, og derfor gikk kommentarene om matematiske fakta hovedsakelig på bruk av matematiske regler og gyldigheten av dem. Tidligere forskning, som Meyer og Schnell (2020), har påpekt at lærere ofte vurderer kvaliteten på argumenter basert på struktur og innhold, noe som samsvarer med studentenes preferanse for formelle, velkjente matematiske påstander. Dette kan skyldes at slike fakta er umiddelbart gjenkjennelige og lett anvendelige i ulike kontekster, noe som gjør dem til effektive verktøy for å bygge overbevisende argumenter. Matematiske fakta er også lett for studentene å avvise om den skulle være feil, men dette krever matematiske forkunnskaper. Som det kommer frem i vår studie blir det vanskelig å bedømme de matematiske faktaene når forkunnskapene mangler. Dette går også overens med forskningen til Meyer og Schnell (2020) som så at læreres matematiske kunnskaper om matematisk argumentasjon påvirket deres evne til å bedømme bevis.

Det kommer også enkelte utspill som går på autoriteter, eksempler og mening. Her er det enkelte tilfeller som ikke gir noen klare indikasjoner eller sammenheng. Selv om studentene generelt foretrekker generelle bevis over spesifikke eksempler, anerkjenner de verdien av eksempelbaserte argumenter for å illustrere og støtte generelle påstander. Liu et al. (2016) viste at eksempelbaserte argumenter ofte hjelper studentene med å forstå matematiske konsepter bedre, og samtidig at dette var noe som var preferert i deres arbeid kontra de resultatene som vi har. Dette funnet reflekterer også tidligere studier, som Healy og Hoyles (2000), som fant at elever ofte foretrekker algebraiske bevis fremfor empiriske eller mindre formelle bevis, men at også her ble argumenter som elevene selv fant som overbevisende og forklarende de som ofte var mer empiriske og mindre formelle. Denne forskjellen mellom våre data og dem sine, kan komme av at vi har sett på lektorstudenter som har nå hatt flere emner på universitet. Universitetsmatematikken stiller som nevnt tidligere høyere krav til formelle bevis og hva en betrakter som et gyldig argument. Dette kan våre lektorstudenter ha adaptert, og anvendt dette som fører til strengere kriterier innen bruk av både representasjonsformer og aksepterte påstander.

5.3 Kriterier for argumentasjonsformer

Når det gjelder argumentasjonsformer, uttrykker flest studenter en preferanse for deduktive metoder. Deduktive argumenter vurderes som sterke fordi de presenterer en logisk og trinnvis fremgangsmåte som leder fra premissene til en konklusjon. Hos studentene uttrykkes det som at «de er lette å følge» og «tydelige». I kontrast til dette kommer studentene med utsagn om direkte argumenter hovedsakelig når de ser svakheter ved argumentasjonen, som for eksempel at argumentene ikke tydelig viser det som ønskes bevist. I mange tilfeller så ble ikke studentene overbevist om at enkelte besvarelser ikke krevde ytterligere forklaring enn det som ble presentert. Dette indikerer at studentene har kriterier at argumentasjonsformen bør være deduktiv for at det skal være et sterkt argument.

Studentene virker også positive til generiske eksempler som argumentasjonsform, men de har kriterier som at disse må ha en forklarende tekst sammen med eksemplet. Ved fravær av dette kriteriet ble argumentene kun betraktet som spesialtilfeller, selv om studentene så sammenhengen med oppgaven stilte de krav om en forklarende tekst. Dette kan komme av at studentene inntok en rolle som «naiv leser» (Morgan et al. 2002) som ikke kjenner til matematikken så godt. Altså at de ikke leser oppgaven som seg selv, men en tenkt person eller elev som skal prøve å forstå besvarelsen. Dette var et gjennomgående tema om at besvarelsene skulle være enklest mulig matematisk som vi kommer tilbake til under kriterier til matematiske forkunnskaper (5.5.2).

5.4 Kriterier for grad av generalisering

Vår studie har avdekket at studentene legger stor vekt på om argumentene er generaliserte eller om de er spesialtilfeller. De utrykket ofte at de anså en besvarelse som bedre hvis den var generalisert, sammenlignet med en besvarelse som kun var et spesialtilfelle. For eksempel kommenterte de at et argument var mer overbevisende fordi det ikke bare viste en konkret løsning, men også viste hvordan løsningen kunne generaliseres til å gjelde for flere tilfeller. Dette kan tolkes som at studentene har kriterier om at besvarelsene må være generalisert. Det vi blant annet så var at de trakk frem generelle besvarelser som sterkere selv om dette var irrelevant for oppgaven. Dette kan være en indikasjon på en tillært tanke, om at generalisering er det beste. Det er imidlertid interessant å merke seg at denne preferansen for generalisering kan ha sine røtter i undervisningsmetodene studentene er eksponert for, da de semesteret i forveien hadde om kjerneelementet *abstraksjon og generalisering*.

Studentene avviste i stor grad besvarelser som inneholdt spesialtilfeller, med argumentet om at de var spesialtilfeller. Kriteriet studentene har om at besvarelser ikke kan være spesialtilfeller står altså sterkt, men som vi så med tilfellet med Ian som raskt var ute med å si at det ene motbeviset var bedre fordi det var generelt. Ble han overbevist av gruppen til å endre til «spesialtilfellet» som krevde mindre matematisk kunnskap. Dette kan være en indikasjon på en manglende dybdeforståelse av hvordan spesialtilfeller kan brukes effektivt i visse matematiske argumenter. Dette ble tydelig i situasjoner der studenter avviste spesialtilfeller som mindreverdige, til tross for at de kunne være gyldige og relevante innenfor en bestemt kontekst. Som i Daliri og Kogstad (2023) kommer frem til at de som anvender empiriske besvarelser ser ut til å være bedre på å anvende motbevis.

5.5 Kriterier til forklarende besvarelser

Analysen identifiserte at studentene ofte etterlyser mer forklarende argumenter i matematiske besvarelser, noe som er tidligere påvist blant de som har sett på bedømmelsen av argumenter (Healy & Hoyles, 2000; Liu et al., 2016; Meyer & Schnell, 2020). Mangelen på forklaring ble sett på som en svakhet i mange av besvarelsene. Studentene hadde her kriterier om at besvarelsene skulle være mer detaljert og presis fremstilling av argumentene. De ønsker argumenter som gav en klarere forståelse av de matematiske prinsippene og inneholdt tilstrekkelig informasjon til at resonnementet kunne følges uten misforståelser. De hadde også kriterier om at begreper som ble benyttet under besvarelsen som f.eks. «oddetall og partall» skulle bli forklart slik at leseren skulle få all informasjonen den trengte for å forstå resonnementet.

Til tross kriteriene om at argumentene måtte være forklarende, var det tilfeller hvor de disse kriteriene ikke veide like tungt. Fra resultatene har vi at gruppe 3 velger ut fra ulike kriterier i oppgave 1 og 2. Her veier ikke kriteriet om at oppgaven må være forklarende like tungt i de to oppgavene. Liknende tendenser ser vi også i de andre gruppene, som kan være en indikator på at studentene ikke er konsekvente på sine valg når de bedømmer et argument. Det kan også være at studentene sine kriterier ikke vektes likt ved hver oppgave.

5.6 Andre kriterier

Det er ikke alle kriteriene som studentene benytter som kan tilknyttes hovedkategoriene vi har i kategoriseringsskjema. Som nevnt tidligere ser det ut til at studentene har kriterier knyttet til matematiske forkunnskaper. Analysen av våre data viser at studentenes matematiske forkunnskaper har stor innvirkning på hvordan de bedømmer matematiske argumenter. Studentene etterspurte ofte mer forklaring i besvarelser hvor de selv hadde mindre kunnskap om det matematiske innholdet. Mens i de tilfellene der de hadde kontroll på matematikken så argumentet i besvarelsene selv om det ikke var forklaring i besvarelsen.

Denne forskjellen i hvordan studentene bedømte etter deres forkunnskaper kom også til syne de gangene studentene hadde en sterkere forståelse av det matematiske innholdet. Siden da var de i stand til å vurdere argumentene mer kritisk og anerkjenne verdien av komplekse og dyptgående resonnementer. På den andre siden, når deres forkunnskaper var svakere, foretrakk de enklere og mer direkte argumenter som var lettere å følge. Slik endret kriteriene til studentene seg ettersom hvor sterke de var matematiske i forhold til oppgaven som besvarelsene tilhørte.

Det var ikke bare studentenes egne forkunnskaper som spilte en rolle på hvilke kriterier de anvendte. De tok også hensyn til den matematiske forkunnskapen til en tenkt person som skulle bli lese besvarelsen. Dette kom frem i de situasjonene hvor to argumenter var like gyldige. Da valgte studentene ofte det som krevde lavest nivå av forkunnskaper, med den begrunnelsen om at det da krevde minst kunnskap av en tenkt leser. De benytter altså noen ganger etter kriteriet om at besvarelsen skal bruke enklest mulig matematikk for at beviset skal være sterkest.

Et annet kriteria som fremtrer mer implisitt føringen til besvarelsen. Det er fordi dårlig føring av besvarelsene virket veldig forstyrrende på studentene, da de måtte bruke mye krefter på å forstå hva argumentene prøvde å formidle. Dette førte til at studentene slet med å forstå eksempelbesvarelse 7 a og c. Dette er noe som også kommer frem i Meyer og Schnell (2020) at lærere ser på hvordan argumentene blir presentert overfor leseren. Studentene i vårt tilfelle kom med flere utsagn som var både negative og positive rundt føringen til besvarelsene. At vi valgte å ha med dårlig føring som en faktor når vi konstruerte eksempeloppgavene, gjorde at det ble mindre fokus på andre aspekter ved argumentene, men det viste hvor viktig tydelig kommunikasjon og argumentasjon er for at en leser skal bli overbevist.

Den største kategorien vi har identifisert er «ikke passende», som inkluderer utsagn som ikke passer inn i de andre hovedkategoriene. Dette omfatter kommentarer som ikke direkte relaterer til matematiske prinsipper eller argumentasjonslogikk, men som likevel gir innsikt i studentenes bedømmelse. For eksempel inneholder denne kategorien utsagn som «kreativt», «denne var fin» eller «jeg likte denne», som reflekterer studentenes subjektive vurderinger uten å gi konkret begrunnelse for hvorfor de foretrakk en besvarelse fremfor en annen. Selv om slike utsagn ikke nødvendigvis bidrar til den matematiske validiteten av et argument, gir de verdifull innsikt i studentenes opplevelse og vurdering av besvarelsene. Det kan være nyttig å anerkjenne disse subjektive vurderingene og reflektere over hvordan de påvirker studentenes helhetsinntrykk av argumentene. Dette kan bidra til en mer helhetlig tilnærming til undervisning, hvor både objektive og subjektive vurderinger blir tatt i betraktning.

6 Konklusjon

I dette kapitlet trekker vi konklusjoner på vårt forskningsspørsmål:

Hvilke kriterier benytter 1.års-lektorstudenter i bedømmelse av matematiske argumenter?

Det vi ser er at studentene benytter ulike kriterier og disse kriteriene ser ut til å variere fra oppgave til oppgave og avhenger av studentenes matematiske forkunnskaper.

For oppgaver hvor studentene har god forståelse for matematikken, har de kriterier om at besvarelsen helst bør være algebraiske. Mens besvarelser på oppgaver hvor studentene har svakere matematisk forståelse, blir kriteriet om at besvarelsen må være forklarende avgjørende. Dette ser ut til å komme av at studentene ønsker å oppnå forståelse over oppgaven gjennom besvarelsen.

Studentene har også kriterier om at besvarelsene skal være enkle og forståelige og at besvarelsene skal inneholde så enkel matematikk som mulig. I tillegg viser resultatene at kvaliteten på føringen av besvarelsene har stor betydning for studentenes evne til å forstå og da bedømme matematiske argumenter. Dårlig føring skaper forvirring og hindrer studentene i å følge resonnementet, noe som påvirker deres bedømmelse negativt. Dette understreker behovet for klar og presis kommunikasjon i matematiske besvarelser.

Samlet sett viser våre funn at studentene har en tydelig preferanse for formelle og forklarende argumenter som gir tilstrekkelig informasjon til å forstå resonnementet fullt ut. De vektlegger også deduktive argumenter som er enkle og forståelige. Ved å integrere disse elementene i undervisningen kan vi skape en læringsprosess som ikke bare fokuserer på matematisk korrekthet, men også styrker studentenes evne til å forklare og forstå komplekse matematiske konsepter på en overbevisende måte.

Våre funn understreker viktigheten av å tilpasse undervisningen til studentenes forkunnskaper og inkludere forklarende elementer i argumentene for å støtte deres forståelse. Dette kan bidra til å gjøre matematiske konsepter mer tilgjengelige og mindre avhengige av studentenes tidligere erfaringer og kunnskaper. Vi ser også at studentene benytter det de har lært i emnet, så at undervisningen er altså helt sentral, I likhet med Gomez Marchant et al. (2021), som konkluderte med at lærerutdanningsprogrammer spiller en kritisk rolle i å støtte fremtidige læreres evne til å koble teori og praksis.

Meyer og Schnell (2020) anbefaler at lærerutdanningen inkluderer en dypere forståelse av hvordan argumenter konstrueres og bedømmes for å forberede fremtidige lærere på å veilede elever i matematisk tenkning. De understreker også behovet for en bredere forståelse og en felles tilnærming til vurdering av matematiske argumenter i utdanningssystemet. Dette er i tråd med funnene fra vår studie, som viser at klar og presis argumentasjon er avgjørende for studentenes forståelse og vurdering av matematiske besvarelser.

Ved å implementere disse anbefalingene i lærerutdanningen og undervisningen kan vi bidra til å styrke fremtidige læreres evne til å veilede elever i kritisk vurdering og konstruksjon av matematiske argumenter. Dette kan føre til en bedre forståelse av matematisk logikk og resonnering, noe som er essensielt for å utvikle elevers og studenters matematiske kompetanse.

6.1 Studiens begrensninger

Studien er gjennomført på 10 studenter fordelt på tre grupper. Dette er relativt få deltagere, selv om det er halvparten av deltagerne i emnet. Vi vet derfor ikke om disse resultatene er overførbare til andre matematiske emner på lærerutdanninger. Dette ville vært med på styrke studiens gyldighet. Om vi kunne gjennomført lignende undersøkelser på andre universiteter og høyskoler kunne en tydeligere ha sett hvordan emnet påvirker studentene og hvordan de adapter det de lærer på studiet.

Vi har også gjennomført studien på lektorstudenter som er i sitt første år, det vil derfor kunne være forskjell fra de praktiserende lærere når det gjelder bedømmelse av argumenter. De vil også ha fått et innblikk i hvordan hvilke kriterier stiller til argumentasjon, men ikke nødvendigvis rukket å få anvendt dette i praksis ennå.

Analyseverktøyet har også sine begrensinger ved at den største kategorien forble utsagn som ikke ble kategorisert. Dette indikerer at det er flere hensyn studentene tar når de bedømmer en besvarelse enn det vi har klart å kartlegge i denne studien. Det ville derfor kunne verdt hensiktsmessig å gjennomføre en induktiv studie for å se om klarer å få en bedre forståelse av disse subjektive utsagnene. Vi så også at en del av oppgavene vi hadde var vanskelige for studentene som førte til at det ikke diskuterte argumentasjonen, men endte opp med å diskutere hvordan man løser oppgaven. Det kom også frem at eksempelbesvarelsene også ble til tider for vanskelig for studentene å forstå. Dette gjorde at ikke alle oppgavene ble like mye diskutert, og heller ikke de ulike aspektene de ulike eksempelbesvarelsene besto av.

6.2 Videre forskning

Som nevnt tidligere har vi en kategori ikke passende med mange utsagn som kunne vært interessant å få en bedre forståelse av. Det er altså mange utsagn studentene kommer med som ikke passer inn i kategoriseringsskjema, men som studentene benytter når de bedømmer argumentasjonen. Vi har med vår studie videreutviklet kategoriseringsskjema, men det trengs mer forskning på området rundt kriterier og anvendelsene av disse nå når bedømmelse av argumenter blir viktigere.

Et annet aspekt ved vår forskning som hadde vært interessant å se nærmere på er om det er en sammenheng mellom hvilke kriterier studentene bedømmer etter og dem sin egen evne til å konstruere matematiske argumenter. Dette vil kunne være med å bidra til hvordan vi kan utvikle undervisningen og legge opp til at bedømming av argumenter kan forbedre elever sin matematiske tenkning.

Vår studie er gjennomført i et emne som hovedsakelig omhandler tallteori, det ville derfor vært aktuelt å ha gjort lignende studier ved emner som omhandler andre felt av matematikken for å se om de hadde andre kriterier knyttet til argumentasjonen på det feltet. Her kan en tenke seg at studentene ville stilt seg annerledes til figurative representasjonsformer innenfor geometri.

Kilder

Autotekst (2024) OpenAI Whisper 3 (13.februar versjon) [Stor språkmodell]. https://autotekst.uio.no

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2002) The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof, in: F. L. Lin (Ed.) *Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand* (Taipei, NSC and NTNU).

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17(2),* 105–127. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9248-1

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Daliri, M. & Kogstad, J. (2023). Lektorstudenters matematiske argumenter: utfordringer og muligheter. University of Agder. [Masteroppgave] Universitetet i Agder. https://hdl.handle.net/11250/3074467

Geisler, S., Rolka, K., & Rach, S. (2023). Development of affect at the transition to university mathematics and its relation to dropout — identifying related learning situations and deriving possible support measures. *Educational Studies in Mathematics, 113(1*), 35–56. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10200-1

Gomez Marchant, C. N., Park, H., Zhuang, Y., Foster, J. K., & Conner, A. (2021). Theory to practice: Prospective mathematics teachers' recontextualizing discourses surrounding collective argumentation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(6), 671-699. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09500-9

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education, 31(4)*, 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389–399. https://doi.org/10.1007/BF01273372

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379. https://doi.org/10.2307/4149959

Ko, Y. Y., & Rose, M. K. (2021). Are self-constructed and student-generated arguments acceptable proofs? Pre-service secondary mathematics teachers' evaluations. *The Journal of Mathematical Behavior, 64*, 100912.

Liu, Y., Tague, J., & Somayajulu, R. (2016). What Do Eighth Grade Students Look for When Determining If a Mathematical Argument Is Convincing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 11*(7), 2373-2401.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. I Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (s. 365–380). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Meyer, M., & Schnell, S. (2020). What counts as a “good” argument in school? —how teachers grade students’ mathematical arguments. *Educational studies in mathematics*, *105*(1), 35-51. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09974-z

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: the discourse of investigation* (Vol. 9, 232). Farmer Press.

Morgan, C., Tsatsaroni, A., & Lerman, S. (2002). Mathematics Teachers' Positions and Practices in Discourses of Assessment. *British Journal of Sociology of Education*, *23*(3), 445–461. https://doi.org/10.1080/0142569022000015463

OpenAI. (2024) ChatGPT-4 (16.mai versjon) [Stor språkmodell]. https://chatgpt.com

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen* (p. 300). Cappelen Damm akademisk.

Reid, D. A. (2005). The meaning of proof in mathematics education. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (in press). [Paperpresentasjon] CERME. Sant Felui de Guixols, Spania. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/Reid.pdf

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly, 105(3),* 252-255.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher, 78,* 448-456.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Are you interested in taking part in the research project

Preservice secondary mathematics teachers' production and review of mathematical arguments in elementary algebra?

This is an inquiry about participation in a research project. The main purpose of the research project is to identify the challenges and opportunities that preservice teachers meet as they work with argumentation in a problem-solving context. In this letter we will give you information about the purpose of the project and what your participation will involve.

Purpose of the project
In this project, we will look at the challenges and opportunities for learning that arises while you work with number theory tasks in the problem-solving context of the course [redacted] We will look at the arguments produced in the lectures and while you work in groups. Data collection in the course [redacted] will be restricted to part of the work with number theory. The data collection will include the required course assignment and the recording of one peer-discussion of an imaginary student argument. You will not be required to produce material outside of your course's requirements.
The data collected for this research project will be used in master and doctoral theses.

Who is responsible for the research project?
University of Agder is the institution responsible for the project.

Why are you being asked to participate?
The research project is about preservice teachers' argumentation, specifically in Norway where the curriculum has recently been updated to include argumentation and reasoning as core elements to be taught at school. As a result, the students of this course are central, as they are participating in a teacher development course in this context in order to be able to teach in school in the future. Your contribution will be helpful, as you will inform research with the challenges that appear when teachers prepare to use argumentation in school.

What does participation involve for you?
The material collected for research is already part of the course work. The interview (maximum 30 minutes, which will be compensated with a gift card) is the only part of the data collection process, where you will use personal time and is not included in course work. We only ask permission to do video- and audio-recordings in the classroom in week 3. The classroom data are collected to describe the educational context. Names and information that can be used to identify you will be anonymised in publications.

Participation is voluntary
Participation in the project is voluntary. If you chose to participate, you can withdraw your consent at any time without giving a reason. All information about you will then be made anonymous. There will be no negative consequences for you if you chose not to participate or later decide to withdraw. It will not affect your grade on this course, your relationship with the university or with your professors.

Your personal privacy – how we will store and use your personal data
We will only use your personal data for the purpose(s) specified in this information letter. We will process your personal data confidentially and in accordance with data protection legislation (the General Data Protection Regulation and Personal Data Act). The people who will have access to the data are the supervisors of the doctoral and master's theses and the authors of the doctoral and master's theses. We will replace your name and contact details with a code. The list of names, contact details and respective codes will be stored separately from the rest of the collected data. In publications, the data that will be mentioned are the name of the university, of the school and the country where the data collection took place.

What will happen to your personal data at the end of the research project?
The project is scheduled to end 31.07.28. The collected data will be stored for further publications after the master's and doctoral thesis are finished.

Your rights
So long as you can be identified in the collected data, you have the right to:
- access the personal data that is being processed about you
- request that your personal data is deleted
- request that incorrect personal data about you is corrected/rectified
- receive a copy of your personal data (data portability), and
- send a complaint to the Data Protection Officer or The Norwegian Data Protection Authority regarding the processing of your personal data

What gives us the right to process your personal data?
We will process your personal data based on your consent. Based on an agreement with the [redacted] Data Protection Services has assessed that the processing of personal data in this project is in accordance with data protection legislation.

Where can I find out more?
If you have questions about the project, or want to exercise your rights, contact:
[redacted]
- Data Protection Services, by email: (personverntjenester@sikt.no) or by telephone: +47 53 21 15 00.

Yours sincerely,

Project Leader (Researcher/supervisor) Student (if applicable)

Consent form

I have received and understood information about the project *Preservice secondary mathematics teachers' production and review of mathematical arguments in elementary algebra* and have been given the opportunity to ask questions. I give consent:

- ☐ to be audio recorded and for a camera directed only at the blackboard to be present in the lectures of week 3
- ☐ to let my written responses to the obligatory tasks (done in class 26.01) be used as research data
- ☐ to participate in an interview after solving the obligatory tasks (only a handful will be asked) that will be audio recorded
- ☐ be audio recorded during obligatory groupwork (02.02) only during the session when reviewing responses to the obligatory tasks

I give consent for my personal data to be processed until the end date of the project, approx. *31.07.28*

(Signed by participant, date)

Vedlegg 2: Skriftlige oppgaver

Arbeidskrav 1: Resonnering og argumentasjon

Emnekode: [redacted]
Emnenavn:
Dato: 26.01.2024

Skriv svaret på oppgavearket.

OPPGAVE 1.

Student A hevder at $2(x+1) = 2x+1$ og student B hevder at $2(x+1) = 2x+2$.

a) Hvilken student har rett?

b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

OPPGAVE 2.

Vis at produktet av et partall og et oddetall alltid er et partall.

OPPGAVE 3.

a) Vis at alle primtall større enn 3 kan bli skrevet på formen $6k+1$ eller $6k+5$, for ikke-negative heltall k.

b) Vis at følgende påstand enten er sann eller usann: "Hvert tall som kan bli skrevet på formen $6k+1$ eller $6k+5$ er primtall".

OPPGAVE 4.

Regn ut x i følgende uttrykk:

$$30x \equiv 12 \pmod{102}$$

OPPGAVE 5.

La $n \epsilon \mathbb{N}$.
Vis at hvis n^2 er delelig med 7, så er n delelig med 7
Forklar kort logikken i beviset ditt.

OPPGAVE 6. Under kan du se to besvarelser på følgende oppgave:

Vis at kubetall alltid kan bli skrevet som differansen mellom to kvadrattall.

a) Hva kan du si om styrker og/eller svakheter til argumentasjonen til student A sin besvarelse?

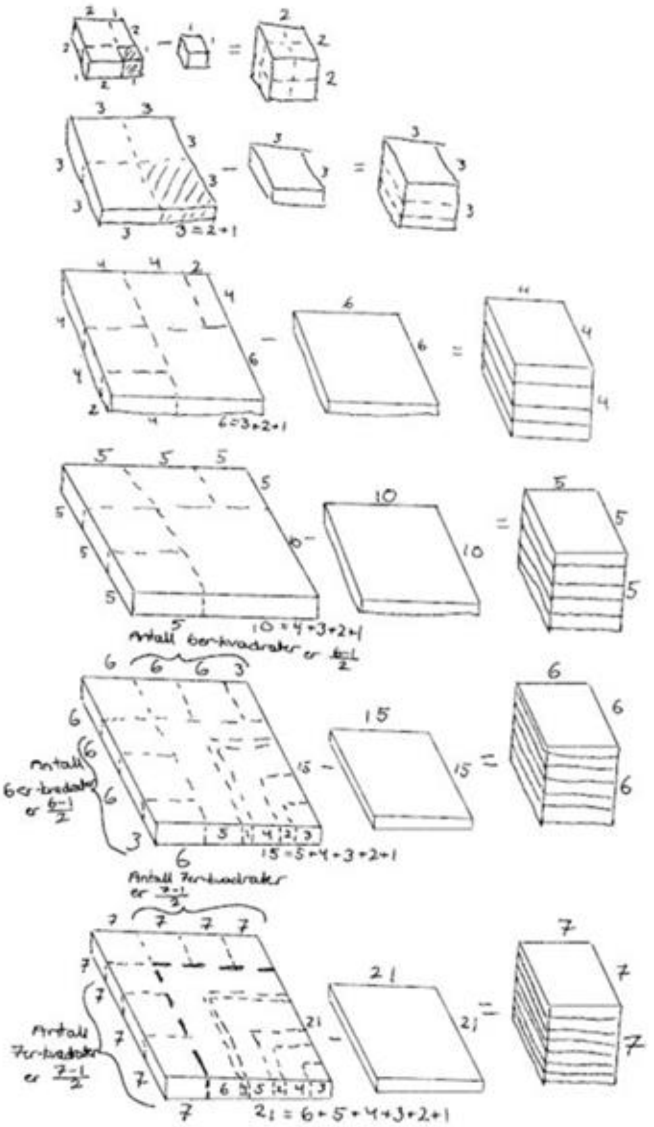
Student A sin besvarelse:

$$
\begin{aligned}
(T_n)^2 - (T_{n-1})^2 &= \left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}\right) - \left(\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right) \\
&= \frac{n^4-n^4+2n^3+2n^3+n^2-n^2}{4} \\
&= \frac{4n^3}{4} \\
&= n^3
\end{aligned}
$$

Har altså vist at differansen mellom kvadratene til to påfølgende trekanttall samsvarer med et kubetall. Kan altså finne en samsvarene differanse til et hvert kubetall. Q.E.D.

b) Hva kan du si om styrker og/eller svakheter til argumentasjonen til student B sin besvarelse?.

Student B sin besvarelse:



OPPGAVE 7.

Vis at følgende påstand enten er sann eller usann:
"Hvis du dobler summen av to kvadrattall, kan du skrive det som summen av to kvadrattall"

Eksempel:
$2(5^2 + 3^2) = 2(25 + 9) = 68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$
$2(7^2 + 4^2) = 2(49 + 16) = 130 = 121 + 9 = 11^2 + 3^2$
$2(111^2 + 11^2) = 2(12321 + 121) = 24884 = 14884 + 10000 = 122^2 + 100^2$

OPPGAVE 8.

La $n \epsilon \mathbb{Z}$.
Vis at om $n^3 + 5$ er et partall, så er n er et oddetall.

OPPGAVE 9.

Vis at det eksisterer 999 påfølgende tall, hvor ingen er primtall.

OPPGAVE 10.

$$x + y = x \cdot y$$

a) Er utrykket alltid, noen ganger eller aldri oppfylt? Argumenter for svaret ditt.

b) Hva er sammenhengen mellom uttrykket og uttrykket i A?

c) Hva er sammenhengen mellom uttrykket og grafen i B?

d) Benytte nå det du fant i b) og c) til å utdype svaret ditt i a).

A

$$a + (1 + \frac{1}{a-1}) = a \cdot (1 + \frac{1}{a-1})$$

B

Vedlegg 3: Oppgaver med eksempelbesvarelser

Universitetet i Agder
Fakultet for teknologi og realfag – Institutt for matematiske fag

Arbeidskrav 1: Resonnering og argumentasjon

Emnekode: [redacted]
Emnenavn:
Dato: 02.02.2024

Retningslinjer:

Vi har konstruert ulike besvarelser til oppgavene fra arbeidskravet, noen er inspirert av studentbesvarelser, mens andre har vi konstruert selvstendig.

Alle studentene på gruppa må dele sine tanker rundt spørsmålene nedenfor.

For hver oppgave, bli enige dere imellom og skriv ned svaret på følgende spørsmål:

a) Hvordan forstår du oppgaven? Diskuter hva oppgaven etterspør.

b) Hvilket argument er det sterkeste, og hvorfor?

c) Hvilket argument er det svakteste, og hvorfor?

OPPGAVE 1.

Student A hevder at $2(x+1) = 2x+1$ og student B hevder at $2(x+1) = 2x+2$.

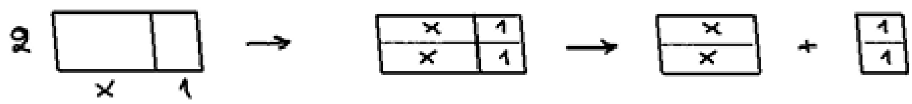
a) ~~Hvilken student har rett?~~

b) Vis at valgt student har rett ved å gi **to** matematiske argumenter.

c) Vis at den andre studenten tar feil ved å gi ett matematisk argument.

Below you can see some students' answers in each question:
(b)

Student A



$2(x+1)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $2x + 2$

Student B

$2(x+1) = 2x + 2\cdot 1 = 2x + 2$

Student C

i følge den distributive lov må man multiplisere tallet utenfor parantesen med alle tall innenfor parantesen. altså: $2(x+1) = 2x+2$

Student D

$2(x+1) = (x+1) + (x+1) = x + x + 1 + 1 = 2x + 2$

Student E

If $x=5$: $\quad 2\cdot(5+1) = 2\cdot 6 = 12$
$\qquad\qquad\quad 2\cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12$

(c)

Student F

For $x = 5$:

$2(x+1) = 2x+1$

$2(5+1) = 2 \cdot 5+1$

$2 \cdot 6 = 10+1$

$12 = 11$

Student E

$2(x+1) = 2x+1$

de to sidene kan ikke være like

fordi : $2(x+1)$ = partall

$2x+1$ = oddetall

OPPGAVE 2.

Vis at produktet av et partall og et oddetall alltid er et partall.

Student A

$$2n \cdot (2m+1) = 4mn + 2n$$
$$= 2(2mn + n)$$

som er et partall.

Student B

n = oddetall , $n+1$ = partall

$n(n+1) = n^2 + n$

n^2 = odd + n = odd gir partall.

Student C

Partall er heltall som kan deles på 2 og få et heltall.
Kan altså uttrykkes ved $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$
Et partall p multiplisert et heltall k kan uttrykkes ved

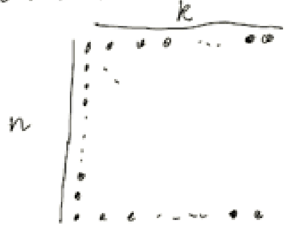
$$p \cdot k = 2m \cdot k = 2(m \cdot k)$$

Ser at produktet kan uttrykkes som et partall.
Produktet mellom et partall og oddetall må altså være et partall da oddetall e en delmengde av heltall.

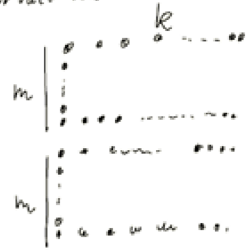
Student D

La n vare et partall, $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$

$n \times k$, hvor k er et oddetall kan da illustreres ved et areal $n \times k$



når n er partall kan $n \times k$ deles i to like store deler.



Altså må $n \times k$ være et partall siden det kan deles på 2 og få et heltall $(m \times k)$.

OPPGAVE 3.

a) Vis at alle primtall større enn 3 kan bli skrevet på formen $6k + 1$ eller $6k + 5$, for ikke-negative heltall k.

b) Vis at følgende påstand enten er sann eller usann: "Hvert tall som kan bli skrevet på formen $6k + 1$ eller $6k + 5$ er primtall".

Student A

a) Ser at det stemmer for $k=2$ og $k=3$, så det stemmer

b) $5 \cdot 6 + 5 = 35$, men $35 = 5 \cdot 7$, så det er ikke ett primtall (moteksempel)
Så ikke alle tall som skrives på formen $6k+5$ er primtall.

Student B

a) hvis ett tall n er delelig med 6, så kan det skrives på en av følgende måter:

$6k$ − sammensatt
$6k+1$
$6k+2 = 2(3k+1)$ − sammensatt
$6k+3 = 3(2k+1)$ − sammensatt
$6k+4 = 2(3k+2)$ − sammensatt
$6k+5$

et primtall kan ikke skrives på formen $6k+i$, $i=\{0,2,3,4\}$
siden disse er sammensatt.
Så alle primtall må skrives som $6k+1$ eller $6k+5$

b) usann, siden 65 er ikke ett primtall

OPPGAVE 4.

Regn ut x i følgende uttrykk:

$$30x \equiv 12 \pmod{102}$$

Student A $30x \equiv 12 \pmod{102}$

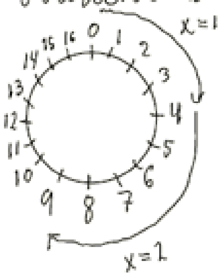
$$x = \frac{102k + 12}{30}$$

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 17k + 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$x = \frac{17k + 2}{5}$$

$k = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x = 14}}$

Student B



$$30x \equiv 12 \pmod{102}$$

$$\frac{30x}{6} \equiv \frac{12}{6} \left(\bmod \frac{102}{6}\right)$$

$$5x \equiv 2 \pmod{17}$$

Starter i 0 og går steg med lengde 5 helt til jeg havner på 2.
Telte 14 steg, altså er $\underline{\underline{x = 14}}$

Student C $30x \equiv 12 \pmod{102}$

k	x
-1	$\frac{-90}{30} = -3$
0	$\frac{12}{30}$
1	$\frac{114}{30}$
2	$\frac{216}{30}$
3	$\frac{318}{30}$
4	$\frac{420}{30} = 14$

$$x = \frac{102k + 12}{30}$$

Antar fra mønsteret at hver femte k fungerer

$k = 5n - 1,\ n \in \mathbb{Z}$

Setter inn for k

$$x = \frac{102(5n-1) + 12}{30}$$

$$x = \frac{510n - 102 + 12}{30}$$

$$x = \frac{510n - 90}{30}$$

$$\underline{\underline{x = 17n - 3,\ n \in \mathbb{Z}}}$$

Student D $30x \equiv 12 \pmod{102}$

$\Leftrightarrow 30x = 102k + 12 \quad | \div 6$

$\Leftrightarrow 5x - 2 = 17k$

Skal altså ha tall i 17-gangen som er 2 mindre enn tall i 5-gangen. Tall som er 2 mindre enn tall i 5-gangen har siste siffer 3 eller 8 når $x>0$ og sifre 7 eller 2 når $x<0$.

-17 oppfyller dette

$-17 = 17(-1) = 5x - 2$

$x = -3$

Et tall i 17-gangen lagt til -3 vil også oppfylle dette siden vi opererer (mod17). Altså får vi

$x \in \{17n - 3,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Student E

$30x \equiv 12 \pmod{102}$

$30x = k + \frac{12}{102}$

$3060x = 102k + 12$

Stemmer der x blir heltall.

OPPGAVE 5.

La $n\epsilon\mathbb{N}$.
Vis at hvis n^2 er delelig med 7, så er n delelig med 7
Forklar kort logikken i beviset ditt.

Student A:

A: n^2 er delelig med 7
B: n er delelig med 7 $\rightarrow$ $\neg B$: n er ikke delelig med 7

$n \in N$ slik at 7 ikke deler n, men 7 deler $n^2 = nn$
Så 7 må dele n eller n $\rightarrow$ indirekte

Student B:

$7^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 11\,025 = 105^2 \longrightarrow 7$ deler 105^2

$105 = 7 \cdot 15 \rightarrow 7$ deler 105

hvis faktorisering av n^2 inkluderer 7^2, da er n også delelig med 7

men hvis faktoriseringen av n^2 kun inkluder 7, da er n ikke delelig med 7.

Student C

A: 7 deler $n \rightarrow n = 7k$
B: 7 deler $n^2 \longrightarrow n^2 = 7k$

$n^2 = (7k)^2 = 49k^2$

Så n^2 er delelig med 7 også

OPPGAVE 6. Under kan du se to besvarelser på følgende oppgave:

Vis at kubetall alltid kan bli skrevet som differansen mellom to kvadrattall.

a) Hva kan du si om styrker og/eller svakheter til argumentasjonen til student A sin besvarelse?

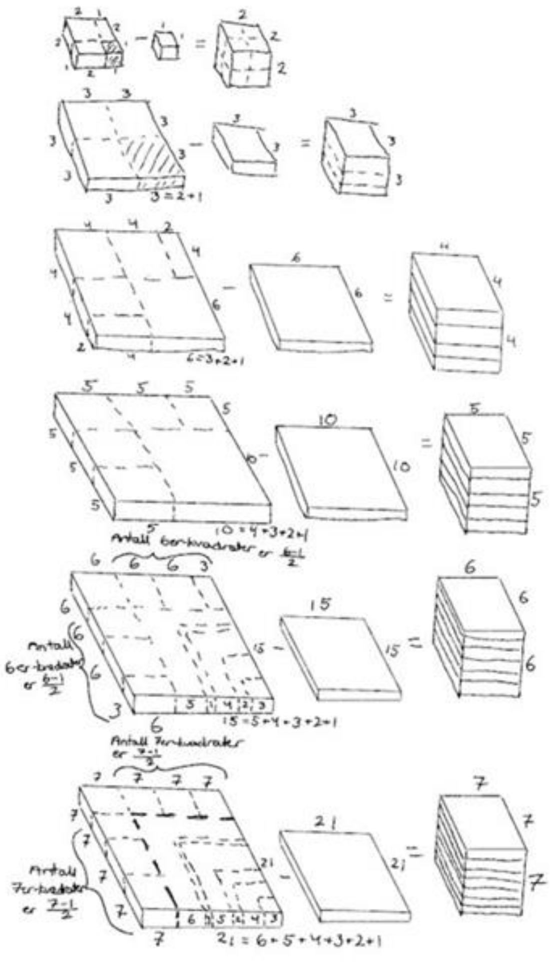
Student A sin besvarelse:

$$
\begin{aligned}
(T_n)^2 - (T_{n-1})^2 &= \left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}\right) - \left(\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right) \\
&= \frac{n^4-n^4+2n^3+2n^3+n^2-n^2}{4} \\
&= \frac{4n^3}{4} \\
&= n^3
\end{aligned}
$$

Har altså vist at differansen mellom kvadratene til to påfølgende trekanttall samsvarer med et kubetall. Kan altså finne en samsvarene differanse til et hvert kubetall. Q.E.D.

b) Hva kan du si om styrker og/eller svakheter til argumentasjonen til student B sin besvarelse?.

Student B sin besvarelse:



OPPGAVE 7.

Vis at følgende påstand enten er sann eller usann:
"Hvis du dobler summen av to kvadrattall, kan du skrive det som summen av to kvadrattall"

Eksempel:
$2(5^2 + 3^2) = 2(25 + 9) = 68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$
$2(7^2 + 4^2) = 2(49 + 16) = 130 = 121 + 9 = 11^2 + 3^2$
$2(111^2 + 11^2) = 2(12321 + 121) = 24884 = 14884 + 10000 = 122^2 + 100^2$

Student A

$2\cdot(1000^2 + 25^2) = (1000+25)^2 + (1000-25)^2$

$= 1000^2 + \cancel{2\cdot 25\cdot 1000} + 25^2 + 1000^2 - \cancel{2\cdot 1000\cdot 25} + 25^2$

$= 2\cdot 1000^2 + 2\cdot 25^2$

Student B

virker ikke for alle tall

$2(1^2+1^2) = 2\cdot 2 = 4 = 2^2 + 0^2$

men 0^2 er ikke ett kvadrattall, så påstanden er usann

Student C

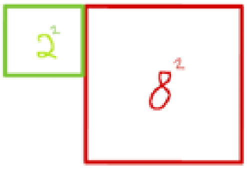
$(a+b)^2 + (a-b)^2 =$

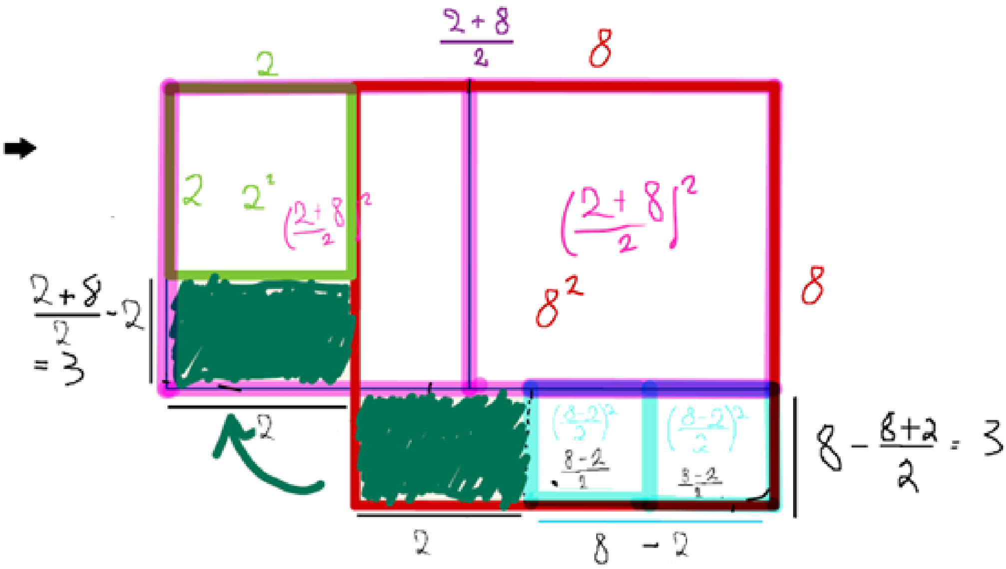
$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 =$

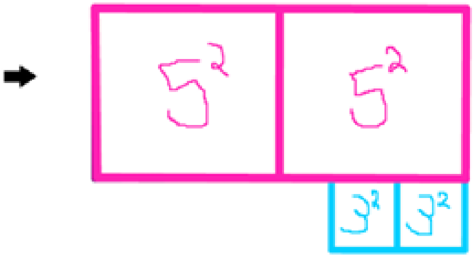
$2\cdot a^2 + 2\cdot b^2$

Student D

Viser at om vi starter med to kvadrate kan man konstruere 4 kvadrater hvor to og to er like ved å flytte det grønne arealet som er like stort begge steder.







13

$$2^2+8^2=2\cdot 5^2+2\cdot 3^2$$

OPPGAVE 8.

La $n\epsilon\mathbb{Z}$.
Vis at om $n^3 + 5$ er et partall, så er n er et oddetall.

Student A

A : n^3+5 er partall
B : n er oddetall $\rightarrow$ $\neg B$: n er partall
hvis n er partall, da er $n=2k$ for $k\in N$

$n^3+5 = (2k)^3+5 = 8k^3+5 = 8k^3+4k+1$
$= 2(4k^3+2)+1 = 2m+1$ oddetall

Så hvis n^3+5 er partell, da må n være oddetall

Student B

• hvis n er partell:
Det går ikke hvis n er partall
$n=2k$
$n^3+5 = (2k)^3+5 = 8k^3+5 = 8k^3+4+1$
$= 2(4k^3+2)+1 = 2m+1$ oddetall

• hvis n er oddetall:
$n = 2k+1$
$n^3+5 = (2k+1)^3+5$
$= 8k^3+3(2k)^2\cdot 1+3\cdot 2k\cdot 1^3+1^3+5$
$= 8k^3+3\cdot 4k^2\cdot 1+3\cdot 2k\cdot 1^3+1+5$
$= 8k^3+12k^2+6k+6$
$= 2k(4k^3+6k^2+3k+3)$

det stemmer når n er oddetall

Vedlegg 4: Godkjennelse fra Sikt

Sikt

Assessment of processing of personal data

Reference number	Assessment type	Date
694860	Standard	10.01.2024

Title
Preservice secondary mathematics teachers' production and review of mathematical arguments in elementary algebra

Institution responsible for the project
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Project leader
Konstantina Kaloutsi

Project period
01.08.2022 - 31.07.2028

Categories of personal data
General

Legal basis
Consent (General Data Protection Regulation art. 6 nr. 1 a)

The processing of personal data is lawful, so long as it is carried out as stated in the notification form. The legal basis is valid until 31.07.2028.

Notification Form

Comment
You have updated your Notification Form. We cannot see that you have made any changes to the Notification Form or attachments that will affect our assessment of how personal data are processed in this project.

Read more about which changes should be notified to Data Protection Services before you send in changes in the future: https://sikt.no/en/notify-changes-notification-form

FOLLOW-UP OF THE PROJECT
We will follow up the progress of the project underway (every other year) and at the planned end date in order to determine whether the processing of personal data has been concluded/is being carried out in accordance with what is documented.

Good luck with the project!