Universitetet i Agder

Resonnering i eksamensoppgaver

En teoridrevet innholdsanalyse av kreativ resonnering i eksamensoppgaver i matematikk 1T

KARINA HAUGLID
METTE HAVER HETLAND

VEILEDERE

Stig Eriksen
Håkon Malvin Raustøl

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Emnekode: MA-502

Master

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på lektorutdanningen vår ved Universitetet i Agder. Vi har hatt fem lærerike og spennende sammen gjennom studietiden år, som har vært utfordrende, men også morsomme. Gjennom arbeidet med masteroppgaven har vi fått en større innsikt i eksamensoppgaver, blitt kjent med læreplanen, og hva som kreves i en resonneringsprosess, noe vi gleder oss til å ta med oss inn i arbeidslivet.

Vi vil starte med å takke veilederne våre, Stig Eriksen og Håkon Malvin Raustøl, for gode samtaler, tilbakemeldinger og motiverende ord og for å ha hjulpet oss gjennom masteroppgaven vår. Oppgaveskrivingen hadde ikke vært det samme uten dem i ryggen.

Vi vil takke medstudentene våre for godt samhold gjennom fem år, med mange fine lunsjpauser og morsomme øyeblikk.

Vi vil også takke familie og kjærester som har kommet med oppmuntrende ord og mye tålmodighet gjennom oppgaveskrivingen. Samt kollektiv og venner som har bidratt med godt selskap og en pause i skrivingen.

En ekstra stor takk til Lise og Tobias som har lest gjennom oppgaven og kommet med tilbakemeldinger.

Ikke minst vil vi takke hverandre, for et fint og supert samarbeid både på masteroppgaven og i studietiden ellers. Vi har brukt mye tid sammen, og fylt opp minnebanken med alt fra forelesninger, oppgaveskriving og eksamensperioder til middager, gøye opplevelser og strikkekvelder. Uten hverandre hadde vi ikke fått det til.

Kristiansand, mai 2024

Karina Hauglid og Mette Haver Hetland

Sammendrag

Ved innføringen av Kunnskapsløftet 2020 (LK20) ble resonnering og argumentasjon presentert som ett av seks kjerneelementer. Vi ønsker å svare på problemstillingen: Hvordan er eksamensoppgaver i 1T et utgangspunkt for resonnering?

Vi har gjennomført en teoridrevet innholdsanalyse for å undersøke eksamensoppgaver i matematikk 1T i lys av teori om resonnering. I undersøkelsen har vi tatt utgangspunkt i rammeverket til Lithner (2008) med to hovedinndelinger av forskjellige typer resonnering; imiterende og kreativ. Hvor kreativ resonnering handler om å gjøre tolkninger og å utvikle egne resonnementer. Kreativ resonnering kan knyttes til kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Derfor ville vi ha ekstra fokus på eksamensoppgavene som krever kreativ resonnering og på å identifisere oppgavetyper som gir utgangspunkt for resonnering.

Vi undersøkte fem eksamenssett fra høst 2021 til høst 2023, og analyserte hver deloppgave. Deloppgavene ble delt inn i hvilken resonneringstype de krevde etter vårt rammeverk bestående av seks ulike kategorier: standard algoritmisk resonnering, kompleks algoritmisk resonnering, valgavhengig algoritmisk resonnering, lokal kreativ resonnering og global kreativ resonnering. Vi fant at 36 % av alle deloppgavene på eksamenene krevde enten lokal eller global kreativ resonnering, ved bruk av kategorisering og videre tolkning. De globalt kreative resonneringsoppgavene kan deles i seks underkategorier. Underkategoriene er lagd med bakgrunn i oppgavene selv og handler om å (1) koble sammen graf og uttrykk, (2) vurdere andres påstander og regler, (3) bestemme eller skissere en funksjon, (4) sammenlikne uttrykk, (5) lage program og (6) annet. Disse underkategoriene sammen med de lokalt kreative resonneringsoppgavene ser vi på som ulike måter det gis utgangspunkt for resonnering i eksamensoppgaver. Masteroppgaven presenterer flere interessante funn når det gjelder fordelingen av resonneringstyper på eksamenssettene, og variasjoner fra eksamen til eksamen. Funnene har gitt oss mulighet til å diskutere hvordan eksamensoppgaver gir et utgangspunkt for resonnering og hvordan det kan bevares.

Nøkkelord: resonnering, kjerneelement, eksamen, eksamensoppgaver, matematikk 1T

Abstract

During the introduction of Kunnskapsløftet 2020 (LK20), reasoning and argumentation were presented as one of six core elements. research question: How do exam tasks in 1T serve as a basis for reasoning? We aim to answer the research question: How do exam tasks in 1T serve as a basis for reasoning?

We conducted a theory-driven content analysis to examine mathematics 1T exam tasks considering reasoning. In our study, we based our analysis on the framework by Lithner (2008), which divides reasoning into two main types: imitative and creative. Where creative reasoning is about making interpretations and developing your own reasoning. Creative reasoning can be linked to the core element reasoning and argumentation. Therefore, we had a particular focus on exam tasks that required creative reasoning and to identify task types that provide a basis for reasoning.

We examined five sets of exams from autumn 2021 to autumn 2023 and analysed each subtask. The subtasks were categorized according to the type of reasoning they required, based on our framework consisting of six different categories: standard algorithmic reasoning, complex algorithmic reasoning, choice-dependent algorithmic reasoning, local creative reasoning, and global creative reasoning. We found that 36% of all subtasks on the exams required either local or global creative reasoning, through categorization and further interpretation. The globally creative reasoning tasks can be divided into six subcategories. The subcategories were created based on the tasks themselves and involve (1) linking graph and expression, (2) evaluationg others' claims and rules, (3) determining or sketching a function, (4) comparing expressions, (5) creating a program and (6) other. These subcategories along with the locally creative reasoning tasks are seen as different ways of providing a basis for reasoning in exam tasks. The thesis presents several interesting findings regarding the distribution of reasoning types in exam sets, and variations from one exam to another. The findings have allowed us to discuss how exam tasks provide a basis for reasoning and how it can be maintained.

Keywords: reasoning, core element, exam, exam tasks, mathematics 1T

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning med bakgrunn og forskningsspørsmål

I denne studien har vi analysert oppgaver fra eksamenssett i matematikk 1T, både høst og vår, etter innføringen av Kunnskapsløftet 2020 (LK20), og undersøkt hvorvidt oppgavene gir elevene mulighet til å resonnere i løsningsprosessen.

1.1 Bakgrunn

Den nye læreplanen, Kunnskapsløftet 2020 (LK20), har ført til endringer i matematikkundervisning og skapt diskusjoner rundt oppbyggingen av skriftlig eksamen både på ungdomsskolen og i videregående opplæring. Utdanningsdirektoratet ønsket å tilpasse eksamensformen etter fagfornyelsen. De la høsten 2020 frem forslag om heldigital eksamen, med hjelpemidler tilgengelig under hele eksamen, hvor en del ville bestå av flervalgsoppgaver (Ghosh & Minken, 2021). Forslaget skapte debatt blant matematikklærere, instituttledere ved ulike universiteter som UiO, UiB, NTNU, UiT og UiA, samt ulike ledere i fagforeninger som Norsk Lektorlag, Utdanningsforbundet og Tekna (Munthe-Kaas et al., 2021). Etter mange diskusjoner ble innføringen av ny eksamensform utsatt til våren 2023 (Teknisk-naturvitenskapelig forening, 2021), men av utdanningsdirektoratets sider om eksamen, kommer det frem at den todelte eksamensformen vil bestå, inntil videre (Utdanningsdirektoratet, 2024b).

Gjennom lærerutdanningen, praksis og jobb har vi lagt merke til en økt forekomst av resonnering og argumentasjon i oppgaver etter innføringen av LK20. Med bakgrunn i antakelsen om økt forekomst av resonnering og argumentasjon, og siden matematikkeksamen har vært et omdiskutert tema de siste årene, og trolig vil fortsette med samme vurderingsform fremover, syns vi det er interessant å undersøke om og hvordan resonnering og argumentasjon er en del av eksamen.

Det presenteres i læreplanen (MAT09-01) i delen *om faget*, at Matematikk T skal forberede elevene på en utdanning og et arbeidsliv som stiller krav om matematisk forståelse, gjennom teoretisk bruk av matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020). I delen *om faget* blir også kjerneelementene presentert, disse sier hva «elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Ett av disse kjerneelementene er «resonnering og argumentasjon». Resonnering har fått en større betydning i læreplandokumenter internasjonalt (Jeannotte & Kieran, 2017), og med innføringen av LK20 fremheves dette også i den norske skolen. Læreplanverket danner grunnlaget for utformingen av eksamensoppgavene, men det mangler studier knyttet til kjerneelementene i eksamensoppgaver. Gjennom masteroppgaven vår ønsker vi å se om oppgaveutformingen åpner for at elevene kan vise kompetanse innenfor læreplanens kjerneelement «resonnering og argumentasjon». Det læreplanen beskriver som resonnering og argumentasjon tolker vi, som det forskningen refererer til som kreativ resonnering. Derfor vil en undersøkelse av kreativ resonnering i eksamensoppgaver tilsvare en undersøkelse av kjerneelementets resonnering og argumentasjon i eksamensoppgaver.

På våre fremtidige arbeidsplasser vil det være relevant å ha inngående kunnskap om et av kjerneelementene og hvordan dette kan fremkomme på en eksamen. En slik kunnskap kan vi bruke i undervisning, spesielt i matematikk 1T, men mye kan også overføres til andre matematikkfag. Hvordan man kan legge til rette for kreativ resonnering i oppgaver og diskusjoner, er noe vi kan ta med oss videre på tvers av matematikkfagene.

Med dette som utgangspunkt vil vi gjennom oppgaven etterstrebe å svare på problemstillingen:

Hvordan er eksamensoppgaver i 1T et utgangspunkt for kreativ resonnering?

For å svare på dette må vi kartlegge resonneringstypen i hver eksamensoppgave, før vi kan se nærmere på oppgavene som krever kreativ resonnering. Vi har derfor følgende to forskningsspørsmål:

1. *Hvilke resonneringstyper er eksamen et utgangspunkt for?*
2. *I hvilke oppgavetyper kan elever ta i bruk kreativ resonnering?*

1.2 Begrepsavklaring

I denne delen skal vi se nærmere på noen av de mest sentrale begrepene i oppgaven vår. Her inngår en kort forklaring av hvilke definisjoner av resonnering og argumentasjon vi tar utgangspunkt i, samt en forklaring av ordet *algoritmer*. Begrepene resonnering og argumentasjon blir også forklart nærmere i 3.2.

1.2.1 Resonnering og argumentasjon

Denne studien dreier seg om matematisk resonnering og argumentasjon, begreper som er vide og varierende i sine definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017; Reid & Knipping, 2010). Vi tar utgangspunkt i Jeannotte og Kieran og Lithners definisjoner av resonnering i denne studien. De to førstnevnte definerer resonnering som en kommunikasjonsprosess mellom en selv eller andre, hvor matematiske påstander kan utvikles (Jeannotte & Kieran, 2017). Lithner (2008) ser på resonnering som en tankeprosess fra elevene blir presentert for en oppgave til de har kommet til en konklusjon, hvor valgene elevene tar underveis, og argumentasjonen for disse, er det avgjørende. Han deler resonnering i imiterende og kreativ resonnering. Den imiterende resonneringen handler om å gjengi og anvende innlærte løsningsmetoder, mens den kreative resonneringen handler om å utvikle egne resonnementer (Lithner, 2008). For Lithner er argumentasjon en begrunnelse av strategivalg, både før og etter strategien tas i bruk. Ser vi definisjonene av resonnering i sammenheng med eksamen, handler definisjonene hos både Jeannotte og Kieran (2017) og Lithner (2008) om indre tankeprosesser fra elevene møter en oppgave til den er løst. Mens argumentasjon handler om begrunnelse av tankerekker og valg underveis. Slik er argumentasjonen også en del av resonneringen, ettersom det er en del av tankeprosessen og brukes for å overbevise elevene om at resonnementene deres er passende. Bruken av disse definisjonene kan knyttes opp til fagfornyelsen. De ligger nærme det læreplanens kjerneelement beskriver resonnering og argumentasjon som, der resonnering er å følge, forstå og utforme matematiske tankerekker, mens argumentasjon er å begrunne disse (Kunnskapsdepartementet, 2020).

1.2.2 Algoritmer

Ordet *algoritme* er noe vi bruker mye i denne masteroppgaven. Vi skal nå se på hva en algoritme er, og forklare hva vi mener når vi bruker dette begrepet videre. Thomas gir denne beskrivelsen av en algoritme: «a step-by-step set of instructions in logical order that enable a specific task to be accomplished» (2014, s. 36). En algoritme er altså en detaljert oppskrift på hvordan man kan løse en bestemt oppgave. Thomas (2014) peker også på at algoritmer enkelt kan programmeres på en datamaskin, på grunn av algoritmenes struktur (s. 36). Forskjellige algoritmer kan løse ett og samme problem. Eksempelvis finnes det flere stegvise fremgangsmåter – algoritmer – for å løse likningssystemer. En algoritme kan brukes uten at man forstår matematikken bak eller grunnene for at den fungerer, det er enklere å lære å bruke algoritmen enn å forstå konseptene bak den (Thomas, 2014, s. 37).

Det er mange algoritmer i 1T-matematikken. Fremgangsmåten for å løse en enkel likning kan være en algoritme. En bestemt formel, likhet eller identitet, for eksempel arealsetningen, eller hvordan man skal tegne en graf og finne ekstremalpunkter for denne ved grafiske verktøy for eksempel i Geogebra, er også eksempler på algoritmer. En algoritme er altså en detaljert og stegvis fremgangsmåte for å løse et problem.

1.3 Oppbygning

I masteren har vi tatt et noe utradisjonelt valg, ved å presentere tidligere forskning etter relevant teori. Vi begrunner dette med at den tidligere forskningen er teoritung og det brukes flere begreper som forklares i teorien. Vi ser på tre tidligere forskningsprosjekter som alle bruker eller videreutvikler Lithners rammeverk (2008). Dette rammeverket forklares i kapittel 3.2. Øvrige deler av masteroppgaven følger en vanligere struktur, med relevante publikasjoner og teori før en metodedel, hvor vi utdyper rammeverket brukt i analysen vår. Etterfulgt av resultater og diskusjon, før vi avslutter med konklusjon.

2. Læreplan og eksamen

I dette kapittelet kommer vi til å presentere noen sentrale deler av læreplanen, gå inn på det relevante kjerneelementet og presentere sentrale punkter knyttet til eksamen og diskusjonen rundt eksamen.

2.1 Læreplan

For grunnskolen og videregående opplæring «[…] skal opplæringa vere i samsvar med Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Læreplanverket for Kunnskapsløftet omfattar den overordna delen av læreplanverket, læreplanane for faga og fag- og timefordelinga» (Forskrift til opplæringslova, 2006, § 1). Dette gjelder alle aspekter ved opplæringen, både undervisningen, underveisvurdering og sluttvurdering. Forskriften spesifiserer også hva som gjelder når det kommer til vurdering i fag: Kompetansemålene i læreplanen for det enkelte faget skal være grunnlaget for vurderingen og skal ses i lys av teksten om faget i læreplanen (Forskrift til opplæringslova, 2006, § 3). Dette gjelder vurdering generelt, også eksamen.

Som nevnt i innledningen, kom også kjerneelementene med innføringen av LK20: u*tforskning og problemløsning, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering* og *matematiske kunnskapsområder,* som skal vise hva som er viktigst i faget (Smestad, 2018). Disse er en del av teksten *om faget* som forskriften omtaler. Oppgaven vår kommer til å ta utgangspunkt i kjerneelementet r*esonnering og argumentasjon* som beskrives slik:

> Resonnering i matematikk T handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk T handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.
> (Kunnskapsdepartementet, 2020)

Av denne beskrivelsen kan vi se at de to begrepene henger tett sammen, men resonnering knyttes til tankerekker og forståelse, mens argumentasjon handler om å begrunne tankerekker og løsninger. Kjerneelementene i læreplanen er ikke er et teoretisk dokument i seg selv, men utviklet av Utdanningsdirektoratet i samarbeid med over 100 lærere og andre fagfolk (Kunnskapsdepartementet, 2018). Læreplanen er lagd for å beskrive *hva* elevene skal lære, men *hvordan* blir opp til den enkelte lærer i hver situasjon, og innholdet i undervisningen vil derfor variere (Utdanningsdirektoratet, 2023d).

2.2 Gjennomføring av eksamen i matematikk 1T etter LK20

Høsten 2022 ble det publisert en rapport av Utdanningsdirektoratet knyttet til bruk av hjelpemidler på eksamen (2022d). Et av resultatene i rapporten var en anbefaling om at skriftlig eksamen i matematikk T bør ha et todelt format der elevene skal besvare én del uten og én del med tilgang til hjelpemidler (Utdanningsdirektoratet, 2022d, s. 21). For alle eksamenssettene i 1T vi har sett på, er del 1 papirbasert, og det tillates kun bruk av skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. På del 2 er alle hjelpemidler tillatt, utenom internett og andre kommunikasjonsmuligheter (Utdanningsdirektoratet, 2021, 2022a, 2022b, 2023a, 2023b).

Eksamenssettene inneholder oppgaver som er delt inn i tre kategorier som skal sikre at elevene får vist sin kompetanse i størst mulig del av faget. Kategori 1 handler om at eleven skal ha mulighet for å vise forståelse innen ulike begreper og ferdigheter. Kategori 2 handler i større grad om sammenhenger, og å kunne anvende begreper og bruke ferdigheter på varierte måter og i ulike situasjoner. Mens kategori 3 er oppgaver som krever en form for utforskning eller problemløsning. «Oppgavene krever at [eleven] systematiserer opplysninger, finner sammenhenger, bruker varierte strategier og viser problemløsningskompetanse» (Utdanningsdirektoratet, 2022c, s. 5; 2023c, s. 5).

Når det gjelder vekting av oppgavene, så vil de to delene av oppgavesettet bli vurdert under ett, og de fleste deloppgavene i eksamenssettene vektes likt. I eksamensveiledningen for 2023 står det eksplisitt at noen deloppgaver kan vektes ulikt, men at det i disse tilfellene vil bli oppgitt i eksamensinformasjonen i eksamenssettet, mens i eksamensveiledningen for 2022 er det kun gitt at «Tidsbruk, bredde og kompleksitet vil danne grunnlag for vekting av hver enkelt oppgave ved vurdering» (Utdanningsdirektoratet, 2022c).

3. Oversikt over relevant forskningslitteratur

I dette kapittelet skal vi presentere læringssynet vårt i denne studien, før vi beskriver definisjoner av matematisk resonnering, gjennom Jeannotte og Kieran, som har sett på flere definisjoner av begrepet og bruker et strukturelt aspekt og prosessuelt aspekt for å forklare begrepet. Deretter vil vi se nærmere på Lithner og Bergqvist sine rammeverk, som deler inn resonnering i imiterende og kreativ resonnering, med tilhørende underkategorier. Vi vil også se på Bergqvist sitt rammeverk, som er en videreutvikling av Lithner sitt rammeverk. Vi skal også ta for oss begrepet argumentasjon, og hvilken rolle dette begrepet får i vår undersøkelse. Videre tar vi for oss tidligere forskning av resonneringstyper i oppgaver. Først ser vi på to forskningsprosjekter fra Sverige, hvor ett tar for seg resonneringstyper i oppgaver gitt på eksamen i et universitetsfag, mens det andre undersøker nasjonale prøver for elever på svenske 10.–12. trinn. Etterfulgt av en studie fra norsk videregående skole om imiterende og kreativ resonnering på eksamen i R1 / 2MX.

3.1 Læringssyn

I undersøkelsen vår, plasserer vi oss innen en konstruktivistisk tradisjon. Lillejord beskriver i sitt kapittel om læring som praksis (Manger et al., 2013, kap. 6) at konstruktivisme er en kunnskapsteoretisk posisjon, hvor mennesker selv former sin oppfatning av virkeligheten. Fordi konstruktivisme handler om kunnskapssyn, blir det også gjeldende for læring. For at læring skal skje, må elever ha en aktiv rolle, slik at de kan danne egen eller bygge videre på eksisterende kunnskap, som Helland beskriver i sitt kapittel om læring gjennom livet (Manger et al., 2013, kap. 9). Denne læringen kan skje ved at eleven aktivt erfarer verden og/eller ved samhandling med andre. Resonneringen vi ser på er på et individnivå og i tråd med den konstruktivistiske tradisjonen.

3.2 Matematisk resonnering og argumentasjon

Teorien som omhandler matematisk resonnering og argumentasjon, er med på å utgjøre et rammeverk for å forstå hvordan elever løser eksamensoppgaver som kobles opp mot resonneringsbegrepet. I denne delen av oppgaven vil vi definere viktige begreper og teoretiske perspektiver som vi vil bruke for å diskutere resultatet om hvordan oppgavene er et utgangspunkt for kreativ resonnering.

3.2.1 Aspekter i matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) peker på uklare, vage og i noen tilfeller motstridende beskrivelser av matematisk resonnering i læreplandokumenter verden over. Med dette som bakgrunn gjennomførte de en omfattende gjennomgang av forskningslitteratur innenfor det overordnede begrepet *matematisk resonnering* for å klargjøre de ulike komponentene i begrepet. Deres gjennomgang førte til etableringen av en modell for matematisk resonnering som omfatter to primære aspekter: det strukturelle aspektet og prosessaspektet, som vi nå vil forklare nærmere.

Det strukturelle aspektet kan relateres til *formen* på resonnementet, altså hvordan det er bygd opp. Blant de mest anerkjente typene innenfor det strukturelle aspektet er deduktiv, induktiv og abduktiv resonnement. Reid og Knipping peker på tre kjennetegn ved deduktiv resonnering: «It applies a general rule to conclude a specific result; it leads to no new knowledge […]; and it establishes certainty» (2010, s. 88). Denne typen resonnement er en sentral del av bevisprosessen i matematikk, både ved bevis og formelle bevis (Jeannotte & Kieran, 2017).

Induktivt resonnement refererer oftest til den resonneringen som ikke er deduktiv (Reid & Knipping, 2010, s. 88). Ifølge Reid og Knipping kan induktiv resonnering være

(1) å gå fra spesifikke tilfeller til å konkludere med generelle regler
(2) å bruke det som er kjent for å konkludere med noe som tidligere var ukjent
(3) er bare sannsynlig, ikke sikkert

Samtidig som at deduktiv og induktiv resonnering er ulike, kan de opptre i én og samme løsningsprosess ved at oppgaveløseren veksler mellom disse underveis.

Den siste typen resonnering, abduktiv resonnering, kobles ofte opp mot utforskningsoppgaver. Abduktive resonnementer er vanligst beskrevet som reversert deduktiv resonnering, hvor man starter med et resultat og resonnerer seg bakover til hvorfor dette stemmer. Resonneringen som blir gjennomført leder da til en ny regel, som gjør at oppgaven man undersøker blir mindre overraskende (Reid & Knipping, 2010, s. 100). Dette gjør at denne typen resonnering ikke trenger å gi en garantert eller tydelig løsning, men en mulig forklaring som kan valideres og testes videre.

På den andre siden, ved Jeannotte og Kieran, har vi prosessaspektet. Her ønsker man å utforske det dynamiske, og se på forbindelser og relasjonen mellom ulike objekter (Jeannotte & Kieran, 2017). Dette aspektet handler dermed i større grad om selve resonneringsprosessen, ikke strukturen. Prosessaspektet deles inn i to hovedprosesser: *(a) utforskningen av likheter* og *forskjeller* og *(b) valideringsprosesser*.

(a) I en prosess hvor man utforsker likheter og forskjeller inngår det fem underprosesser: generalisering, hypotesedannelse, mønsteridentifisering, sammenlikning og klassifisering.

Generalisering handler om å trekke ut mønstre eller regler fra en del av det matematiske problemet, som kan brukes for å komme til en løsning av oppgaven. For eksempel ved oppgaver om figurtall.

Hypotesedannelse innebærer å formulere mulige løsninger basert på observasjoner og likheter/ulikheter i oppgaveteksten. For eksempel antakelse om gyldighetsområde ved regresjon.

Mønsteridentifisering handler om å oppdage gjentakende forhold, ordvalg eller oppgaver som tidligere er gitt og som kan være relevante for oppgaven. For eksempel oppgaver som dreier seg om å koble graf til uttrykk.

Sammenlikning innebærer å vurdere ulike aspekter av oppgaven, som for eksempel å kunne koble det opp mot ulike løsningsmetoder eller et annet type problem.

Klassifisering betyr å kategorisere matematiske objekter etter type eller spesifikke egenskaper. For eksempel å kunne identifisere ulike funksjonstyper eller figurer.

(b) Valideringsprosessene dreier seg om verifisering av om matematiske påstander er sanne eller usanne, og inneholder tre nøkkelprosesser: begrunnelse, bevis og formell bevisføring.

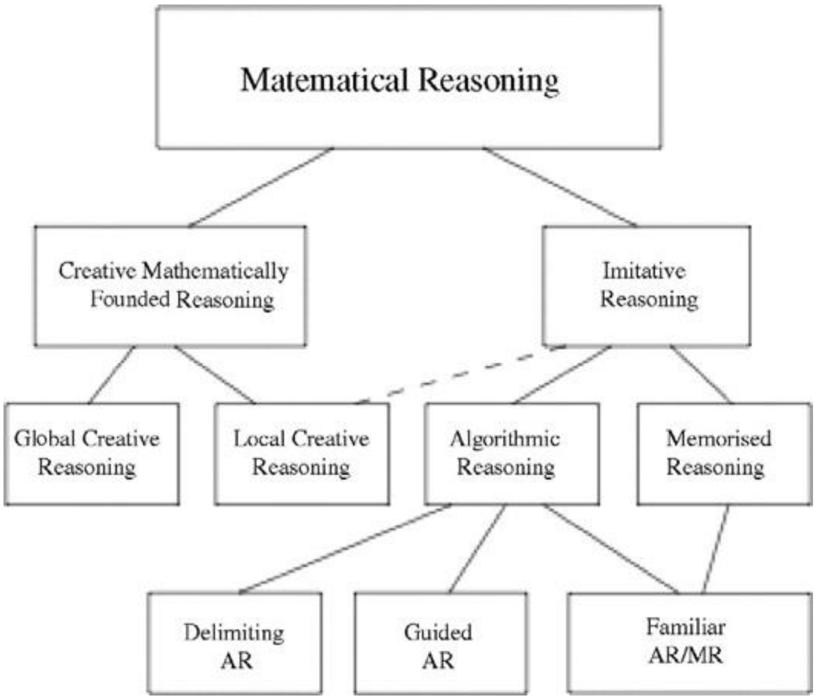
Begrunnelse som prosess handler om å muliggjøre en endring i oppfatningen av om en påstand er sann eller usann.

Bevis handler om å endre oppfatningen av en påstand fra sannsynlig til sann. Det samme gjelder for *formell bevisføring*, men ved formelle bevis er det strengere regler og de skal være godkjente blant matematikere.

Inndelingen som er presentert over i lys av Jeannotte og Kieran (2017) er basert på andre forskeres beskrivelser av begrepet. Den enkelte forskers beskrivelse kan være mindre generell, og gå mer i dybden etter vedkommende sitt syn. Johan Lithner er en av forskerne som Jeannotte og Kieran brukte i sitt arbeid. Vi skal se nærmere på hvordan Lithner definerer og kategoriserer begrepet resonnering.

3.2.2 Ulike resonneringstyper

Lithner (2008) beskriver resonnering slik: «*reasoning* is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving» (s. 257). Altså handler resonnering om tankerekker som brukes i oppgaveløsning, for å både produsere påstander underveis og komme til en konklusjon. Lithner trekker også frem at resonneringen ikke behøver å ha formell logikk eller være sann, så lenge begrunnelsen er fornuftig, for den som resonnerer (2008). Videre deler Lithner inn resonnering i to hovedkategorier: imiterende resonnering (IR) og kreativ resonnering (KR), med tilhørende underkategorier, illustrert på figur 1Figur 1. Dette gjøres også av Bergqvist (2007), som undersøker resonneringstyper på eksamen i et matematikkurs ved universiteter i Sverige (se kapittel 3.3). Flere av hennes kategorier kommer igjen som kategorier i rammeverket vårt. Derfor vil vi nå presentere imiterende resonnering med tilhørende underkategorier, hos både Lithner og Bergqvist, før vi gjør det samme med kreativ resonnering.



Figur 1. Lithners resonneringstyper i Bergqvists oversikt (Bergqvist, 2007, s. 350)

Imiterende resonnering

Imiterende resonnering kjennetegnes ved å anvende kjente prosedyrer og algoritmer for å løse matematiske problemer, der den grunnleggende tankegangen er basert på tidligere innlærte metoder og tilnærminger (Lithner, 2008). Imiterende resonnering deles igjen inn i to – memorerende resonnering og algoritmisk resonnering. Memorerende resonnering (MR) handler om at elever gjenkjenner en oppgave (*familiar MR*) og husker hele svaret, og kun trenger å skrive ned svaret fra hukommelsen. Oppgaver under denne kategorien spør typisk etter faktakunnskaper eller bevis.

Algoritmisk resonnering (AR) handler også om å gjenkjenne en oppgave, men her er det løsningsalgoritmer som huskes. Lithner forklarer at algoritmer ikke begrenses til utregninger, men også refererer til andre prosedyrer som er forhåndskjente for eleven (Lithner, 2008). Utfordringen i AR er å finne en passende algoritme, Lithner (2008) deler AR i tre basert på dette. Den første underkategorien er *familiar AR* (kjent AR), hvor en kjent algoritme velges fordi elevene kjenner igjen oppgaven. *Delimiting AR* (avgrenset AR) skjer når eleven ikke kjenner igjen oppgaven helt, men oppgavens karakter gjør at et begrenset utvalg kjente algoritmer blir aktuelle. Når elevene velger en av de mulige algoritmene, vil den ha en overfladisk forbindelse til oppgaven, den er ikke garantert å føre frem og eleven kan måtte gå tilbake og velge en annen av de aktuelle algoritmene. Den siste underkategorien er *guided AR* (veiledet AR) og her velges strategi ved veiledning enten av tekst, hvor man søker liknende oppgaver i for eksempel en lærebok. Eller man kan bli veiledet av en person, som tar strategivalgene for eleven. Ved tekstveiledning leter man etter noen likheter mellom tekst i oppgaven og et eksempel, teorem, en regel eller en annen type situasjon.

Bergqvist deler også imiterende resonnering i memorert og algoritmisk resonnering, hvor hver av de har flere underkategorier.

Memorert resonnering karakteriseres ved at strategivalget i oppgaveløsningen dreier seg om å hente frem et komplett svar fra hukommelsen og deretter skrive det ned. Bergqvist deler memorert resonnering i tre oppgavetyper: definisjoner, teoremer og bevis. Oppgaver som spør etter definisjoner og teoremer, krever at studenten husker definisjoner. Bevis under denne underkategorien handler om at studentene har memorert et fullstendig bevis, fordi de forventet at beviset skulle komme på eksamen (Bergqvist, 2007).

Algoritmisk resonnering blir av Bergqvist delt i standard algoritmer, komplekse algoritmer, valgavhengig algoritmer og bevisalgoritmer. Felles for alle disse er at man husker en algoritme som tas i bruk i løsningen for en gitt oppgavetype (jf. Lithner, 2008). Standard algoritmer er ofte direkte, ukompliserte og korte algoritmer (Bergqvist, 2007). Det tas i bruk én formel eller en spesifikk fremgangsmåte. Som eksempel på en oppgave under denne kategorien trekker Bergqvist frem derivasjonsoppgaver for matematikkstudenter ved universitetet.

Komplekse algoritmer er resonneringer som er lengre og mer kompliserte enn standard algoritmene. Løsningene har en hovedalgoritme som er kjent, men består også av én eller flere delalgoritmer, ofte standard algoritmer. Valgavhengige algoritmer er algoritmisk resonnering hvor det må gjøres valg av delalgoritme underveis i løsningsprosessen for å komme videre. Delalgoritmene eleven velger blant, er kjente og kan velges algoritmisk, men rekkefølgen kan være ukjent. Bergqvist peker på et mulig problem med denne underkategorien; dersom en oppgave har mange valg i løsningsprosessen og mange valgalternativer ved hvert valg, kan det bli vanskelig for elever å løse oppgaven innen rimelig tid ved AR. Bergqvist plasserte slike oppgaver under en kategori av kreativ resonnering (2007). Den siste delkategorien er bevisalgoritmer, her er bevistypen kjent samtidig kan det være små justeringer i forhold til eksempler som er tidligere gitt i forelesning eller lærebok. Likevel kan en kjent fremgangsmåte brukes for å gjennomføre beviset.

Kreativ resonnering

Kreativ resonnering (KR) karakteriseres ifølge Lithner (2008) ved tre essensielle elementer: nyskapning, plausibilitet og matematisk forankring. Nyskaping, innen resonnering referer til at det, for den som resonnerer, skal utvikles nye resonnementer, eller at tidligere ervervet kunnskap skal kunne gjenkalles og brukes. Dette gjør at man kan benytte seg av varierte tilnærminger i løsningen av et problem. Plausibilitet handler om at resonnement ikke begrenses til forhåndsdefinerte løsningsstrategier eller algoritmer, men i større grad er avhengig av rimelige argumenter som støtter valget og bruken av strategien, og kan begrunne hvorfor konklusjonen er sann eller troverdig. Matematisk forankring handler om at den forklaringen som blir gjort, knyttes til matematiske egenskaper og sammenhenger (Lithner, 2008). Denne kunnskapen og karakteriseringen av KR kan så brukes til å undersøke kreativ resonnering i eksamensoppgaver, men også studere matematikkundervisning og matematikkoppgaver.

Bergqvist deler også kreativ resonnering i lokal og global kreativ resonnering. Lokal kreativ resonnering vil si at det kreves kreativ resonnering i én spesifikk del av løsningen, mens det i resterende delene av løsningen kan brukes øvrig resonnering. Her har ikke Bergqvist delt opp i noen underkategorier (2007). Hvis en oppgave krever kreativ resonnering gjennom hele eller store deler av løsningsprosessen, plasseres den under kategorien global kreativ resonnering. Bergqvist deler videre denne kategorien i tre: konstruksjon av et eksempel, bevise noe nytt og modellering. Disse underkategoriene er mer direkte knyttet til oppgavenes karakter enn tidligere underkategorier, som gjør dem enda mer spesifikke for matematikkursene Bergqvist så på. Felles for disse er at situasjonen og konteksten er ny og det finnes ingen eksisterende, innlært algoritme som kan brukes for å løse oppgaven. Siden underkategoriene er sterkt knyttet til oppgavetyper i matematikkurset Bergqvist ser på, går vi ikke nærmere inn på hver enkelt underkategori her.

Argumentasjon

Når Lithner (2008) deler inn resonnering i imiterende og kreativ resonnering, trekker han også frem en form for argumentasjon. Han ser spesielt på argumentasjon i oppgaveløsning, og hvordan argumentasjon spiller en rolle i valg av fremgangsmåte samt validering av løsning og løsningsprosess. Argumentasjon blir først gjeldende dersom en løsningsmetode trenger forklaring overfor andre eller oppgaveløseren selv. «If understanding of the task is immediate in the reading phase, no argumentation is needed» (Lithner, 2008). For Lithner handler argumentasjon om å rettferdiggjøre valg av løsningsstrategi, argumentasjonen kan deles i to kategorier: prediktiv og bekreftende argumentasjon. Prediktiv argumentasjon skjer før strategien tas i bruk og er en begrunnelse for hvorfor strategien vil føre frem. Bekreftende argumentasjon skjer i etterkant og forklarer hvorfor strategien løste oppgaven (Lithner, 2008). Denne versjonen av argumentasjon kan vi se igjen i Jeannotte og Kierans (2017) valideringsprosess under prosessaspektet av matematisk resonnering.

Reid og Knipping har i sitt arbeid sett på flere forskeres definisjoner av argumentasjon i matematikk. De har funnet ulike tilnærminger til begrepet, deriblant at argumentasjon kan være: en type resonnering, en prosess som fører til antakelser og/eller drøftinger, det kan handle om å overbevise eller å forklare en resonneringsprosess (Reid & Knipping, 2010, s. 154). Umland og Sriramans har definert argumentasjon i matematikk slik: «Argumentation refers to the process of making an argument, that is, drawing conclusions based on a chain of reasoning» (2014, s. 44). De mener at argumentasjon er å trekke konklusjoner på bakgrunn av en resonneringskjede. Denne definisjonen samsvarer med Reid og Knippings funn av hva argumentasjon kan være, og knytter argumentasjon og resonnering sammen. Forenklet kan vi si at argumentasjon er en fremstilling av resonnering, det må skje en form for resonnering for å utvikle elementer i et argument.

Ofte knyttes argumentasjon i matematikk også til bevis (Stylianides, 2007; Jeannotte & Kieran, 2017; Reid & Knipping, 2010). Da kreves noen tilleggskrav til argumentasjonen: den må være kjent, gyldig og deduktiv (Stylianides, 2007). Tidligere beskrivelse av argumentasjon ligger nærmere resonnering enn argumentasjon i form av bevis. For å avgrense argumentasjonsbegrepet og holde det nært læreplanens beskrivelse av både resonnering og argumentasjon velger vi derfor å ikke gå nærmere inn på bevis-aspektet ved argumentasjon i denne studien.

Argumentasjon henger tett sammen med både resonnering og bevis, og hvor man setter skillet mellom dem, varierer. Siden studien vår har motivasjon i læreplanens kjerneelement resonnering og argumentasjon, vil vi bruke en definisjon av argumentasjon som ligger tettere resonnering og likner beskrivelsen til Kunnskapsdepartementet: «Argumentasjon i matematikk T handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (2020). Fra denne beskrivelsen handler argumentasjon om validering av løsninger eller strategivalg, slik også Lithner ser på argumentasjon i sitt arbeid. Samtidig så vi også en liknende beskrivelse i Jeannotte og Kierans valideringsprosess under resonnering, som understreker at begrepene henger tett sammen og ikke har et tydelig skille. Vi vil bruke følgende definisjon av argumentasjon videre: Argumentasjon er en begrunnelse for strategivalg og fremgangsmåter, både for hvorfor de kan brukes og hvorfor de førte / ikke førte frem.

3.3 Tidligere forskning om resonnering i oppgaver

Vi vil nå se nærmere på noen tidligere forskningsprosjekter, som har undersøkt noe liknende det vi skal undersøke. Vi velger å trekke frem to svenske prosjekter, det første av Bergqvist, som så på forekomsten av imiterende og kreativ resonnering på eksamen i et universitetsfag, det andre av Palm, Boesen og Lithner, som så på ulike resonneringstyper i oppgaver på nasjonale prøver for svenske 10.–12. trinn, tilsvarende videregående skole i Norge. Deretter ser vi på en undersøkelse om innhold i eksamensoppgaver, gjort av Aina Fossum i norsk videregående skole.

Ewa Bergqvist (2007) undersøkte forekomsten av oppgaver som krevde kreativ resonnering i eksamensoppgaver i et matematikkurs ved fire universiteter i Sverige. I tillegg til eksamenene brukte hun de aktuelle lærebøkene, foreleserens notater og anbefalte øvingsoppgaver i analysen sin. Hun undersøkte hvordan studenter kunne løse eksamensoppgaver ved bruk av imiterende og kreativ resonnering, og i hvilken grad det ville være mulig å løse eksamen kun ved bruk av imiterende resonnering. Kategoriene vi nevnte under kapittel 3.2 inngår som en del av hennes resultat. Samtidig fant hun ut at av de 16 eksamenene hun undersøkte, var alle utenom én mulig å bestå uten bruk av kreativ resonnering. På en fjerdedel av eksamenene var det mulig å få den høyeste av tre karakterer uten bruk av kreativ resonnering, hverken lokal eller global.

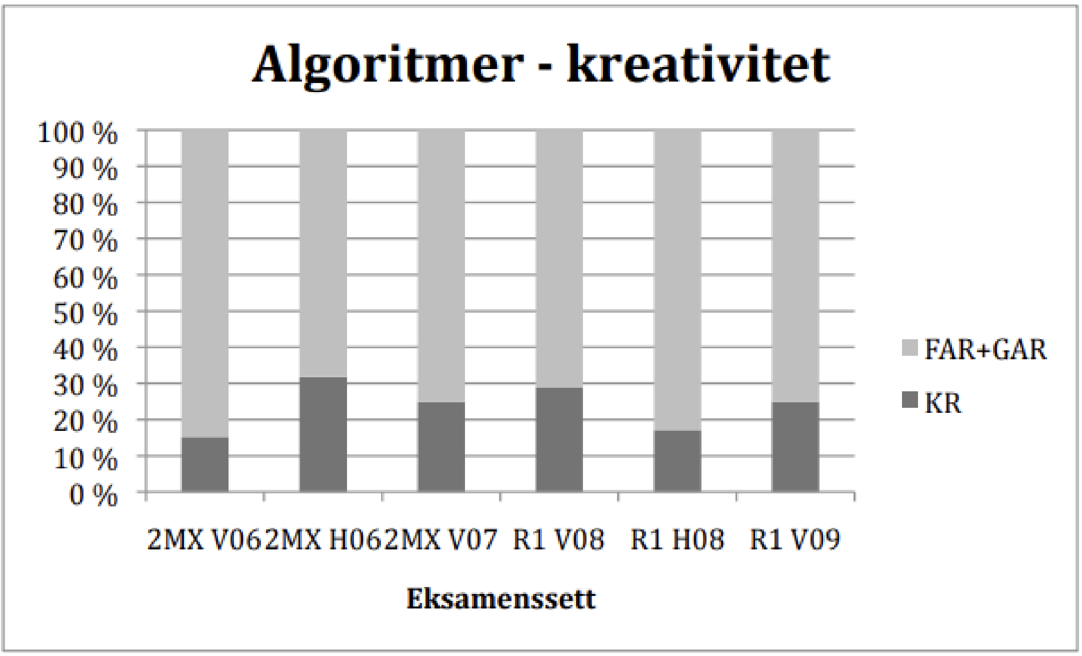
Torulf Palm, Jesper Boesen og Johan Lithner (2005) så også på resonnering i oppgaver. De så på både nasjonale prøver og lokale prøver gitt til elever av lærere, begge deler i svenske 10.–12. trinn. I likhet med Bergqvist kategoriserte de oppgavene etter Lithners hovedkategorier, imiterende og kreativ resonnering og tilhørende underkategorier. De undersøkte forekomsten av global kreativ resonnering på de nasjonale og lærer-lagde prøvene, i ulike fag på de nevnte trinnene.

De fant en forskjell i andelen globalt kreative oppgaver på lærer-lagde prøver og på de nasjonale prøvene, hvor henholdsvis 13,5 % og 50 % av oppgavene krevde global kreativ resonnering. Disse prosentene er gjennomsnittlige, over ulike fag over flere år. Under er Palm et al. (2005) sin oversikt over prosentvis fordeling av memorert og algoritmisk resonnering (MR/AR); lokal kreativ resonnering (LCR); og global kreativ resonnering (GCR), på nasjonale prøver (NTC) i fem ulike matematiske fag (A–D). Det inngår to nasjonale prøver i hvert fag i denne oversikten, til sammen åtte nasjonale prøver, hvor total gjennomsnittlig fordeling fremkommer i raden til høyre.

	NCT A	NCT B	NCT C	NCT D	NCT Tot
MR/AR	27	42	49	26	36
LCR	19	11	7	18	14
GCR	54	47	44	56	50

Tabell 1. Prosentvis fordeling av resonneringstyper (Palm et al., 2005, s. 20)

Aina Fossum (2009) skrev en masteroppgave om innhold i eksamensoppgaver i matematikkfaget på videregående skole, og undersøkte om eksamensoppgavene endret seg med ny skolereform (LK06). Hun så på tre eksamenssett fra 2MX, etter LK97, og tre eksamenssett fra R1, etter LK06. Kurset endret navn fra 2MX til R1 etter fagfornyelsen i 2006, og bygger videre på matematikk 1T. Hun brukte kategoriseringen av imiterende og kreativ resonnering til Lithner og Bergqvist. Hun kom frem til at det var en variasjon mellom de seks oppgavesettene (se figur 2) i andel kreative resonneringsoppgaver, men variasjonen mellom de to reformene var liten. Gjennomsnittlig andel kreative resonneringsoppgaver var 24 % totalt, og også 24 % for hver av de to reformene (Fossum, 2009).



Figur 2. Fordeling av resonneringstyper (Fossum, 2009, s. 76)

4. Metode

I denne delen av oppgaven vil vi presentere forskningsdesignet og metoden vi bruker for å besvare problemstillingen vår: Hvordan er eksamensoppgaver i 1T et utgangspunkt for kreativ resonnering?

Vi går først nærmere inn på forskningsdesign som er teoridreven innholdsanalyse i en casestudie, der fem ulike eksamenssett danner datagrunnlaget for analysen. Deretter vil vi gjøre rede for hvordan dataen har blitt kategorisert og analysert, etter inspirasjon fra Lithner (2008) og Bergqvist (2007), for å se på ulike typer resonnering i eksamensoppgaver. Til slutt vil vi vurdere masteroppgavens validitet ved å se på ulike utfordringer og begrensninger vi har møtt på i lys av validitet og reliabilitet, deretter sette lys på noen etiske betraktninger som vi har tatt hensyn til i oppgaveskrivingen.

4.1 Forskningsdesign

I undersøkelsen vår har vi tatt i bruk en teoridrevet innholdsanalyse for å utforske eksamensoppgavene i faget 1T. I en teoridrevet innholdsanalyse er kategoriseringen deduktiv, og et av hovedmålene er å enten videreutvikle det teoretiske rammeverket eller validere rammeverket for å kunne bruke det til kodingen av det skriftlige datamaterialet (Fauskanger & Mosvold, 2014). Vi lagde kategorier til analyseverktøyet vårt med bakgrunn i tidligere forskning: Det teoretiske rammeverket om resonneringstyper til Lithner (2008) og resultatet til Bergqvist (2007), hvor resonneringstypene fikk flere underkategorier tilpasset oppgavene i universitetsfaget. Vi lagde en oversikt over kategoriene med tilpasningene vi gjorde til eksamensoppgaver i 1T-faget, samt forklaringer til hva som kreves for å plassere en oppgave under hver resonneringskategori. Videre fokuserte vi på oppgaver under kategorien global kreativ resonnering og fant underkategorier til denne. På den måten er forskningen vår en videreutvikling av Lithners rammeverk til å gjelde det spesifikke tilfellet *eksamensoppgaver i matematikk 1T etter innføringen av LK20*.

Selve innholdsanalysen er en måte å gjennomføre en systematisk undersøkelse og fortolkninger av et datamateriale, (Berg & Lune 2012, sitert i Fauskanger & Mosvold, 2014). Vi tok utgangspunkt i den teoretiske innholdsanalysen for å gjennomføre en detaljert analyse, klassifisering av eksamensoppgavene og identifisere resonneringstyper i eksamensoppgavene kvalitativt. Dermed kan forskningsarbeidet vårt plasseres inn under kvalitativ dataanalyse.

For selve dataanalysen har vi sortert datamaterialet etter hvilken eksamen det hører til, og brukt kategorier av ulike typer resonnering for å gjøre det entydig. Hensikten med kvalitativ analysemetode er å sortere materialet som er samlet inn for å undersøke det, slik at materialet blir forståelig (Merrian, 2019, sitert i Postholm & Jacobsen, 2018). For å tydeliggjøre de ulike typene resonnering har vi lett etter ulike mønster innenfor eksamensoppgaver, og deretter delt opp først og fremst i hovedkategoriene – imiterende og kreativ resonering – og senere delt inn de kreative oppgavene i delkategorier med inspirasjon fra rammeverket til Lithner (2008) og Bergqvist (2007), og ut fra dette fått noen kategorier for å besvare problemstillingen vår.

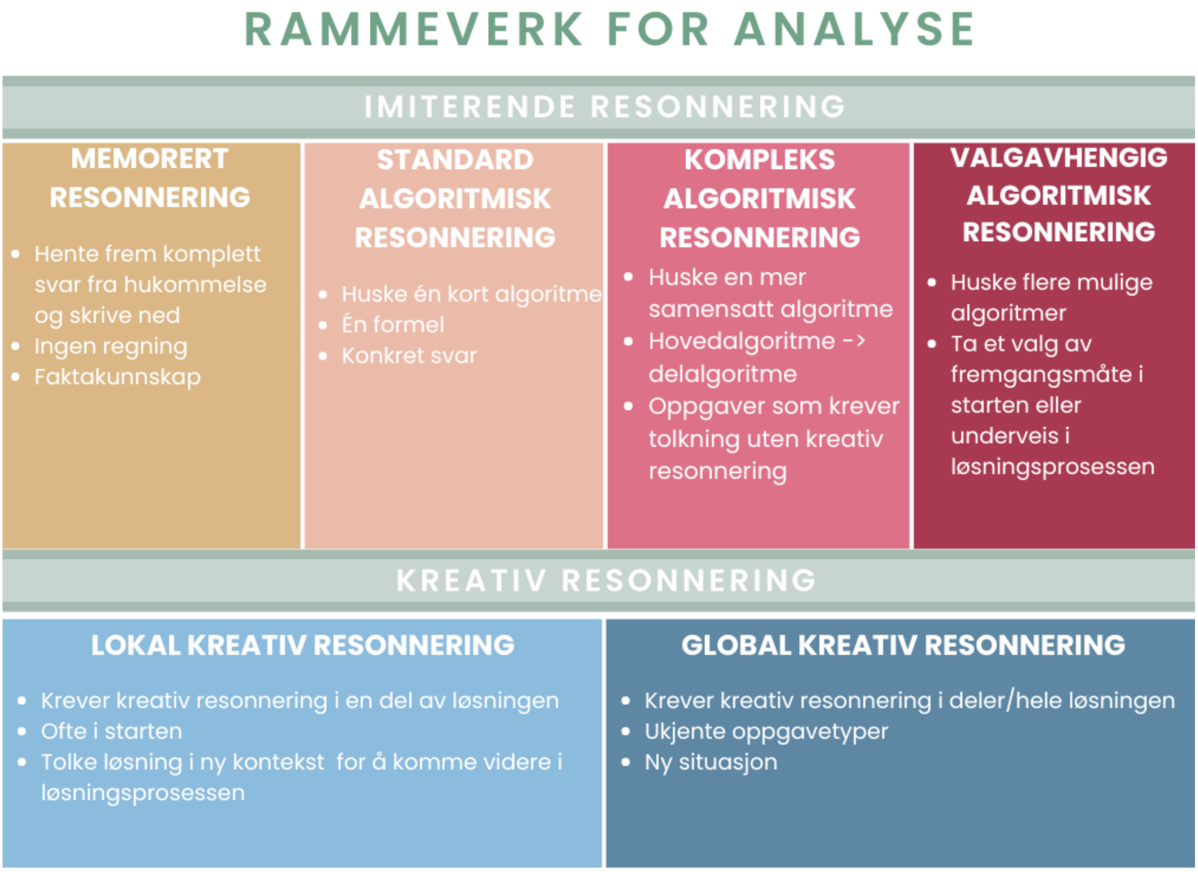
4.2 Datagrunnlag

Som datagrunnlag har vi alle eksamenene i matematikk 1T etter Kunnskapsløftet 2020, som utgjør fem eksamenssett fra høsten 2021 til høsten 2023. Som tidligere nevnt, består eksamenssettene av to hoveddeler: del 1 uten hjelpemidler og del 2 med alle hjelpemidler, utenom internett og kommunikasjon. Elevene har fem timer til rådighet, hvor del 1 må leveres innen én time. Antall oppgaver på hver eksamen varierer fra 11–13 hovedoppgaver som til sammen utgjør 18–28 deloppgaver. I analysen vår har vi tatt for oss hver deloppgave, da de ulike deloppgavene kan være ulike og krever ulik resonnering. Samtidig bør det nevnes at deloppgaver ofte bygger på hverandre, og arbeid med tidligere deloppgaver vil danne et grunnlag for arbeid med den neste. Totalt har vi sett på 114 deloppgaver og kategorisert disse etter resonneringstypene forklart i kapittel 4.3. For å gjøre kategoriseringen vår best mulig har vi brukt løsningsforslag til de ulike eksamenene, slik at vi ser en realistisk eller tenkt måte å løse hver oppgave på for en 1T-elev. NDLA matematikk hadde lagd løsningsforslag for eksamen høsten 2021 og våren 2022 (Nasjonal digital læringsarena, 2021, 2022), som vi tok i bruk, og til de øvrige eksamenssettene brukte vi Matematikk.net sine løsningsforslag (Matematikk.net, 2023a, 2023b, 2023c). Noen oppgaver har reist spørsmålet om det er sannsynlig at elevene kjenner igjen oppgaven og kan trekke frem en kjent løsning fra hukommelsen, altså løse den ved imiterende resonnering. For å avgjøre dette har vi sett på forekomsten av liknende oppgaver i læreboka til Gyldendal for 1T studiespesialiserende: Mønster 1T av Kalvø et al. (2020). Dersom det finnes tre eller flere oppgaver i boka som likner en bestemt eksamensoppgave, anser vi eksamensoppgaven til å være kjent for elevene, og den kan trolig løses ved imiterende resonnering. Her velger vi tre som antall med bakgrunn i tidligere forskningsarbeid, som også bruker dette som et referansepunkt (Bergqvist, 2007; Palm et al., 2005).

4.3 Rammeverk for datanalyse

For å klassifisere deloppgavene i eksamenssettene henter vi, som tidligere nevnt i metoden, inspirasjon fra Palm et al. (2005) og Bergqvist (2007) sine inndelinger. De bruker alle Lithner (2008) som bakgrunn og har en beskrivelse av kjennetegn til oppgaver under hver av underkategoriene. Spesielt tok vi utgangspunkt i Ewa Bergqvist (2007) sitt resultat med inndeling av oppgaver etter resonneringstype, som forklart i teorikapittelet 3.2, og inkluderte kategoriene vi fant aktuelle for 1T-elever. Dette gjorde at vi blant annet ekskluderte bevis-kategorien, gitt den manglende relevansen bevisoppgaver har i 1T-faget. Vi beholdt flere av Bergqvists underkategorier under algoritmisk resonnering, men valgte å utelukke underkategoriene av global kreativ resonnering. Disse underkategoriene går på spesifikke oppgavetyper som ikke nødvendigvis går igjen i 1T-matematikken eller de aktuelle eksamensoppgavene. Vi endte da opp med hovedkategoriene presentert i figur 3. Slik både Bergqvist (2007) og Palm et al. (2005) utførte, har også vi beskrevet hver kategori med typiske kjennetegn og vil gi eksempler til hver kategori på 1T nivå.

For å forstå hvordan disse kategoriene er brukt i vår analyse, velger vi å beskrive de nærmere. Vi skal gå inn på hver underkategori med forklaringer av hvordan de kan brukes for å se på resonnering i 1T-oppgaver med et eksempel fra eksamensoppgaver.



Figur 3. Rammeverk for analyse

4.3.1 Imiterende resonnering

Memorert resonnering handler å huske et komplett svar, hente frem dette fra hukommelsen og skrive det ned. I slike oppgaver vil det ikke kreves utregninger, men konkrete faktaopplysninger for å løse oppgaven. Under en slik resonneringstype vil ikke valg av løsning kreve noen begrunnelse for elevene, det kreves derfor ikke argumentasjon i slike oppgaver. Et eksempel på en slik oppgave kan være: «Hva er momentan vekstfart?». Her vil løsningen være en forklarende setning, liknende definisjonen slik den står i læreboka. For å svare på dette må elevene hente frem denne kunnskapen og skrive den ned, uten videre beregninger eller forklaringer.

Algoritmisk resonnering er, i studien vår, delt i tre: standard algoritmer, komplekse algoritmer og valgavhengige algoritmer. Disse henger tett sammen, siden de alle handler om å huske og å ta i bruk en kjent algoritme. De bygger også på hverandre, da de blir mer og mer sammensatte. Standard algoritmisk resonnering har løsninger som består av én kort algoritme: en formel eller en operasjon. Slike oppgaver kan i 1T være å løse en likning, eller å bruke trigonometriske formler som sinus- og areal-setningen. Disse oppgavene er kjente for elevene og løsningsmetoden er rett frem, derfor trengs det ingen begrunnelse for valg av algoritme og det kreves ikke argumentasjon.

Et eksempel på en eksamensoppgave som har standard algoritme som utgangspunkt er oppgave 1a i figur 4 og figur 5. Av den mulige løsningen ser man at elevene kan bruke en algoritme hvor de setter hver av parentesene lik null, alternativt kan de løse opp parentesene og finne løsning ved bruk av andregradsformelen. Den har ingen gitt kontekst, og man finner liknende oppgaver i lærebøker. I eksamenssituasjonen vil derfor oppgavetypen være kjent for elevene. For å kunne løse denne oppgaven stilles det dermed et krav om algoritmisk resonnering, hvor oppgaven har et konkret svar og av kjent type.

Oppgave	**Mulig løsning**
a) Løs likningen $(x-2)(x+1)=0$	$(x-2)(x+1)=0$ $x-2=0$ eller $x+1=0$ $x=2$ eller $x=-1$

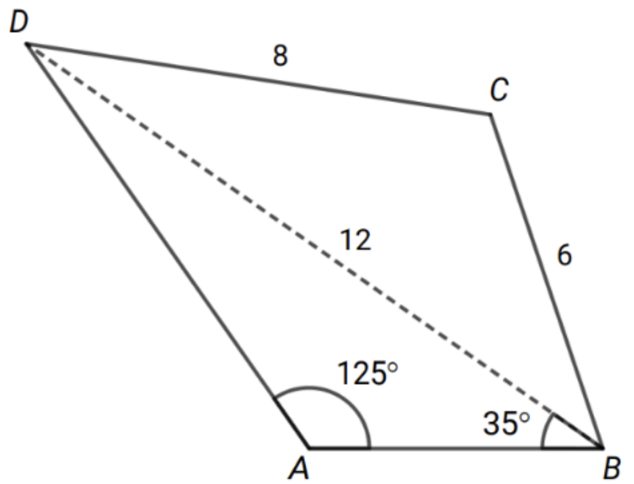
Figur 4. Oppgave 1a, del 1, vår 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

Figur 5. Løsning oppgave 1a, del 1, vår 22 (Nasjonal digital læringsarena, 2022)

Dersom en oppgave krever en mer sammensatt algoritme, er vi over på kompleks algoritmisk resonnering. Her har man ofte en hovedalgoritme som består av flere delalgoritmer. Algoritmen velges fordi elevene husker den og hvordan den henger sammen med oppgaven. Valget av algoritme trenger dermed ingen forklaring og det kreves ingen argumentasjon under denne kategorien. I tillegg til oppgaver med mer komplekse algoritmer, har vi kategorisert oppgaver som eksplisitt spør etter en tolkning av svaret elevene har fått, som kompleks algoritmisk resonnering. I slike oppgaver kan den øvrige løsningen kreve standard algoritmisk resonnering, men tolkningsdelen løfter oppgaven opp til kompleks algoritmisk resonnering. Siden oppgaveteksten og løsningen legger føringer for elevene til å gjennomføre en tolkning, så kan ikke oppgaven kategoriseres som kreativ.

Et eksempel på dette er oppgave 2, figur 6. I denne oppgaven skal elevene bruke trigonometri til å finne arealet av figuren. Her må elevene gjøre egne beregninger for å finne arealet. Hvordan disse beregningene skal gjøres blir antydet gjennom oppgaveteksten og figuren. Oppgaveteksten gir tydelige hint til elevene, blant annet med setningen «I denne oppgaven skal du vise at du kan bruke trigonometri til å bestemme arealet av figuren ovenfor» (Utdanningsdirektoratet, 2023a). Elevene blir også bedt om å redegjøre for trigonometriske sammenhenger som blir brukt. Liknende oppgaver finnes også i læreboka Mønster 1T, og anses dermed å være av kjent karakter for elevene. Oppgaven kan da trolig løses ved algoritmisk resonnering, som vil bestå av flere delalgoritmer eller regneoperasjoner. Arealsetningen kan ses på som en hovedalgoritme, mens cosinus- og sinus-setningen blir delalgoritmer for å finne nødvendig sidelengde og vinkel til å bruke i arealsetningen.

Oppgave 2



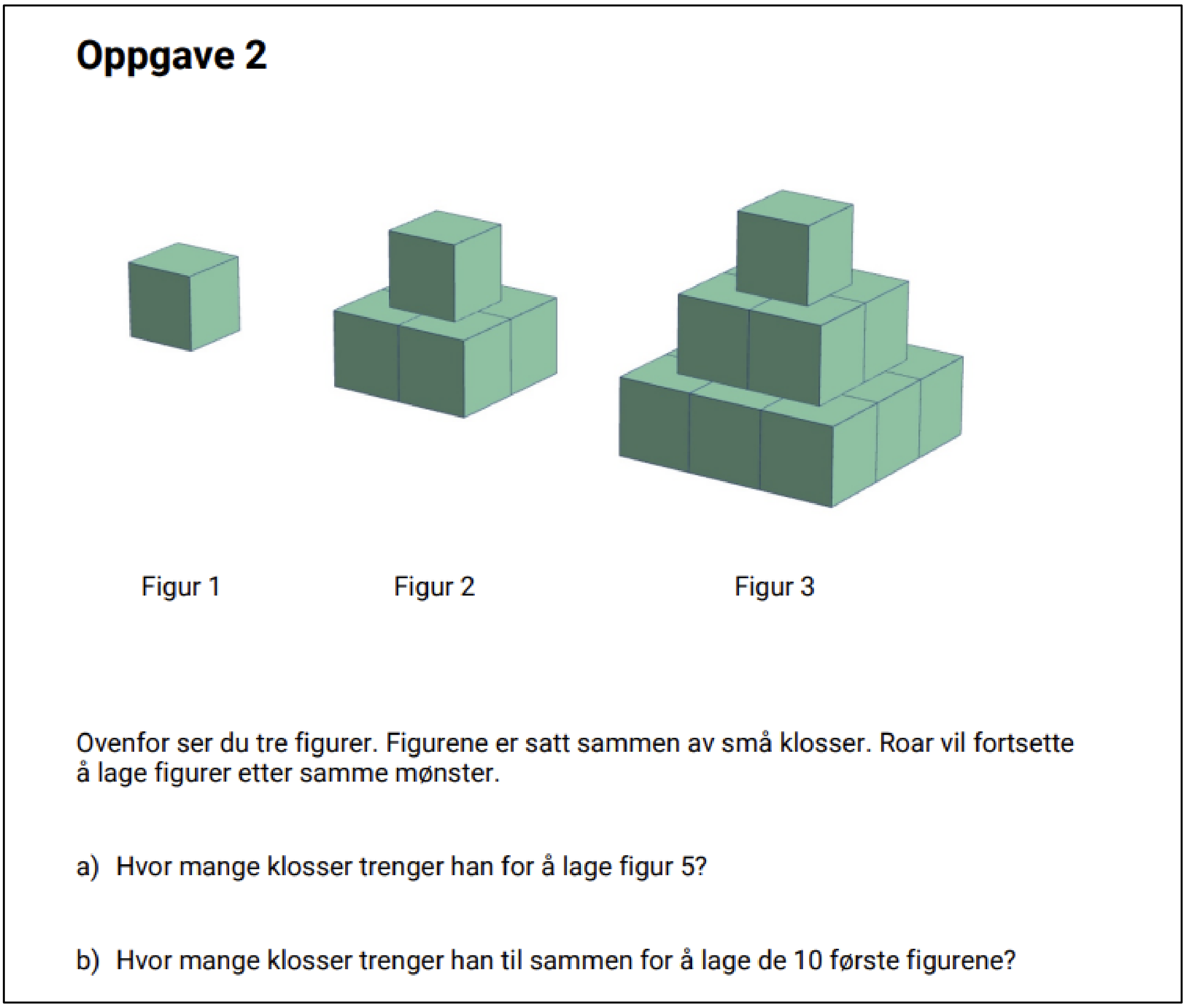
I denne oppgaven skal du vise at du kan bruke trigonometri til å bestemme arealet av figuren ovenfor.

Bestem arealet. Husk å gjøre rede for hvilke trigonometriske sammenhenger du bruker.

Figur 6. Oppgave 2, del 2, høst 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023a)

Valgavhengig algoritmisk resonnering kjennetegnes ved at det må gjøres et valg i oppgaveløsningen. Oppgavene på 1T-eksamen som passer inn under denne kategorien, er oppgaver hvor elevene må sette tall og opplysninger i et system. Hvordan eleven vil lage dette systemet, vil være opp til den enkelte, samtidig som at operasjonene vil være algoritmiske uavhengig av valget. Her vil det være liten grad av argumentasjon, siden løsningen også her i stor grad baserer seg på memorerte algoritmer og løsninger. Likevel kreves det noe begrunnelse knyttet til valget elevene tar, men begrunnelsen trenger ikke være matematisk. Det kan handle om personlig preferanse eller en oppfatning av at en fremstilling er enklere å lage eller forstå enn en annen. Derfor kan valget tas algoritmisk, uten videre argumentasjon.

Et eksempel på en oppgave som hører inn under denne kategorien, er figurtalloppgave slik som oppgave 2b, figur 7. Elevene må her velge fremgangsmetode og hvilket verktøy som skal tas i bruk i løsningsprosessen, for eksempel å bruke algebraisk representasjon, en tabell i Excel eller programmering. Valget elevene tar, vil påvirke de neste stegene i oppgaveløsningen. Om eleven lager en systematisk tabell i Excel, kan den leses av og eventuelt summere antall klosser til og med den tiende figuren. Ved å lage et algebraisk utrykk for summen kan den tiende summen regnes ut direkte, dette gjelder også ved bruk av programmeringskode. Det vil også være mulig å løse problemet grafisk ved bruk av graftegner. Uavhengig av fremgangsmåte vil løsningen kun kreve algoritmisk resonnering.


Oppgave 2

Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små klosser. Roar vil fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Hvor mange klosser trenger han for å lage figur 5?

b) Hvor mange klosser trenger han til sammen for å lage de 10 første figurene?

Figur 7. Oppgave 2b, del 2, vår 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

4.3.2 Kreativ resonnering

Videre har vi kreativ resonnering. Denne kategorien kan deles i to: lokal og global kreativ resonnering. Lokal kreativ resonnering kjennetegnes ved at det kreves kreativ resonnering lokalt i én del av løsningen. Det vil si at oppgaven kan løses med en algoritme, men i ett steg kreves det mer enn lærte løsninger eller algoritmer. Det må da gjøres antakelser eller tolkninger, for at man skal komme frem til en konklusjon. Både i denne kategorien og under kompleks algoritmisk resonnering kan altså en tolkning være nødvendig, men tolkningen vil kvalifiseres som et kreativt resonnement dersom (1) det som må tolkes ikke er gitt, eller (2) tolkningen må gjøres for å komme videre i en sammensatt løsningsprosess. Her blir argumentasjon gjeldende i delen som krever kreativ resonnering, siden elevene må begrunne valg og tolkninger.

Denne begrunnelsen blir de i enkelte oppgaver bedt om å oppgi, men vil finne sted hos elevene uavhengig av dette.

Oppgave 2, figur 8, er et eksempel på oppgaver som plasseres under lokal kreativ resonnering. Her må elevene tolke informasjonen gitt i oppgaveteksten og sette dette i et system for å komme videre i løsningsprosessen. Det er denne tolkningen og systematiseringen som krever kreativ resonnering, fordi konteksten er ny for elevene og de ikke har en algoritme for å sortere denne informasjonen. Elevene kan for eksempel sette opp et likningssystem fra informasjonen og løse likningssystemet algoritmisk, uten videre kreativ resonnering.

Oppgave 2

I en bygård er det 40 leiligheter med til sammen 90 rom.
Hver leilighet har enten to eller tre rom.

Hvor mange leiligheter har to rom, og hvor mange har tre rom?

Figur 8. Oppgave 2, del 2, høst 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022a)

Global kreativ resonnering krever derimot kreativ resonnering i flere deler av løsningen, eller gjennomgående gjennom hele oppgaven. Typisk for slike oppgaver er at det introduseres en ny situasjon, hvor det ikke kan brukes en algoritme som er kjent for elevene. Nye ukjente oppgaver, der fremgangsmåten er ukjent for elevene og de selv kan måtte gjøre antakelser og trekke konklusjoner ut ifra den gitte informasjonen, er også typisk for kategorien. Argumentasjon spiller derfor en stor rolle når elevene løser slike oppgaver, siden de må begrunne valgene sine overfor seg selv, for å tro på egen løsningsmetode.

Et eksempel på dette er oppgave 3, figur 9. Elevene skal vurdere tre ulike påstander, og må utvikle egne begrunnelser for om de er sanne eller ikke. De må ha kunnskap om trigonometri og ta i bruk denne underveis, men hvordan og når, blir opp til eleven selv. At de eksplisitt blir bedt om å begrunne svarene, gjør at argumentasjonen blir mer fremtredende, fordi elevene må være mer bevisst på begrunnelsene sine og skrive disse ned.

Oppgave 3

Om en rettvinklet trekant ABC får du vite at $\tan\angle B = \frac{3}{4}$

- Kan det være riktig at $\sin\angle B = \frac{3}{10}$?
- Kan det være riktig at den ene kateten er 6 og den andre kateten er 8?
- Kan det være riktig at hypotenusen er kortere enn 4?

Husk å begrunne alle tre svarene.

Figur 9. Oppgave 3, del 1, vår 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

4.4 Videre dataanalyse

Et mål for oss var å svare på spørsmålet: I hvilke oppgavetyper kan elevene ta i bruk kreativ resonnering? For å svare på dette så vi nærmere på de 41 deloppgavene som ble inndelt i enten lokal eller global kreativ resonnering. Slik vi tolker læreplanen, er det samsvar mellom læreplanens beskrivelse av resonnering og argumentasjon og det vi og andre definerer som kreativ resonnering. Dette fordi kreativ resonnering krever en dypere forståelse eller utvikling av egne resonnementer, noe imiterende resonnering ikke gjør. Vi sorterte de globalt og lokalt kreative resonneringsoppgavene hver for seg, og så etter fellestrekk, for å identifisere ulike oppgavetyper.

4.5 Reliabilitet og validitet

Vi vil nå ta for oss reliabiliteten og validiteten til studien, og gå nærmere inn på utviklingen og utprøvingen av rammeverket vårt.

4.5.1 Reliabilitet

For å diskutere datakvaliteten i studien bruker vi begrepet reliabilitet. Reliabilitet er et viktig kriterium for vurdering av datagrunnlaget, og handler om nøyaktigheten og stabiliteten av data (Befring, 2015).

Utvikling av rammeverk og bruk av Cohens kappa som reliabilitetskontroll

Under kapittel 4.3 forklarte vi kategoriene i rammeverket nøye, med eksempler fra eksamensoppgaver. Dette bidro til å sikre gjennomsiktighet, slik at det kan være mulig å utføre liknende undersøkelser på et senere tidspunkt, eller å overføre rammeverket til andre matematikkfag.

For å sikre at dataen blir gjort rede for på en presis og nøyaktig måte, har vi utviklet rammeverket inspirert fra Bergqvist ved bruk av test-retest-metoden for å øke påliteligheten i forskingen vår. For å gjennomføre test-retest-metoden tok vi i bruk et måleinstrument, Cohens kappa. Cohens kappa er et måleverktøy på samsvar mellom ulike observatører (Lydersen, 2018). Da sammenliknes resultater fra to eller flere uavhengige bedømmere som har vurdert det samme fenomenet (Befring, 2015). Det er et bedre måleverktøy enn å bruke prosent for å evaluere samsvarets pålitelighet, og brukes som reliabilitetskontroll (University of Nebraska-Lincoln, u.å.). Ved å bruke Cohens kappa kunne vi kvantifisere graden av enighet i kategoriseringen vår, noe som styrket påliteligheten og troverdigheten i analysene våre av eksamensoppgavene.

Kategorisering og konkretisering

Første kategorisering gjennomførte vi i par for å se om Bergqvist (2007) sin kategorisering var brukbar for studien vår, og konkluderte med at dette var et relevant rammeverk for studien. I den aller første kategoriseringen ble eksamen vår 2022 brukt som et pilotsett. Deretter gjennomførte vi individuelle kategoriseringer av eksamenssettet fra høsten 2021 ved bruk av rammeverket vårt, for å vurdere samsvar i plassering av kategorier. Kappa-verdien vi regnet ut etter første kategorisering var lav. Dette skyldtes ulik oppfatning og uklarhet i skillet av kategoriene. Vi hadde flere ganger kategorisert oppgaver som krevde imiterende resonnering som kreativ resonnering og motsatt. Dette gjorde at vi måtte gjennomføre en presisering av hva som karakteriseres som de ulike typene resonnering, ved å lage en oversikt, presentert i figur 3. Et eksempel på forbedring av rammeverket var kategorien kompleks algoritmisk resonnering. Dette var en kategori med uklarheter, og vi hadde ulik oppfatning av den, noe som ble tydelig etter den individuelle kategoriseringen. Etter tydeliggjøring av kategorien presiserte vi at oppgaver som gir et utgangspunkt for praktisk tolkning, uten bruk av kreativ resonnering hører til denne kategorien.

Etter konkretiseringen av rammeverket og beskrivelsen av ulike kategorier gjennomførte vi så en ny kategorisering hver for oss. Da brukte vi et eksamenssett fra høsten 2021 i 1T-Y elektrofag, for å unngå å bruke en del av datagrunnlaget fra eksamensoppgavene i 1T. Etter sammenlikning av resultatene våre og ved kalkuleringen av samsvar kom kappaverdien på 0.70. En kappaverdi på 0.70 viser at måleinstrumentet har vært med å sikre påliteligheten for vårt rammeverk og vår kategorisering av oppgaver, og rammeverket kan brukes i analysedelen. Etter endringene kunne vi gå i gang med analysen av datagrunnlaget vårt. Siden noen av eksamenssettene ble brukt i utviklingen av verktøyet, gjennomførte vi på ny en analyse av settene fra høst 2021 og vår 2022.

Datagrunnlag og valg av teoretisk rammeverk

Datamaterialet vårt er lastet ned ifra Utdanningsdirektoratet. De eksamenssettene som analyseres er statisk data, og kan derfor ikke bli påvirket hvis man velger å analysere samme data gjentatte ganger. Ideelt sett skal man kunne ta i bruk kategorisering vår (figur 3), bruke samme datagrunnlag og oppnå tilnærmet identiske resultat ved støtte i Mønster 1T (Kalvø et al., 2020). Å bruke Bergqvists (2007) inndeling, heller enn Lithners rammeverk (2008) kan også sies å ha økt vår reliabilitet. Bergqvists inndeling ble utviklet gjennom analyse av eksamensoppgaver, mens Lithners er mer generell og gjelder flere deler av matematikkundervisningen enn bare oppgaver.

4.5.2 Validitet

Vi må undersøke subjektiviteten vår i studien vår for å vurdere validiteten i studien. I kvalitative metoder er forskeren selv hovedinstrumentet, og kan forstyrre persepsjonen og redusere validiteten av data. Dette kan handle om forventninger og forutinntatte oppfatninger som kan være med å påvirke vår kategorisering, tolkning og analyse av oppgaver (Befring, 2015, s. 54). Et forsøk på å bevare objektivitet da vi kategoriserte oppgavene, var å bruke løsningsforslag som utgangspunkt for fasit. Løsningsforslagene ga oss en ledetråd på hva som er kjent fra før og ikke, og løsningsstrategier som lærere og elever trolig vil bruke. Løsningsforslagene ble også brukt for å kunne si om det er en kjent eller ukjent algoritmetype. En gjennomgående utfordring for studien er knyttet til om oppgave er ukjente, og hvorvidt vi kan si om en oppgave er kjent eller ukjent. For vår del ble det som nevnt tidligere nødvendig å ta i bruk læreverket Mønster 1T i et forsøk å finne sammenhengen mellom oppgavetypene og kategorisering for å sikre oss teoretisk validitet. Teoretisk validitet innebærer å løfte opp data på et teoretisk nivå, og i tillegg må det være troverdig sammenheng mellom fenomenet og den teorien en bygger på (Befring, 2015, s. 55). I undersøkelsen vår knyttes dette til selve oppgavekategoriseringen som vi bruker og det teoretiske rammeverket som vi utviklet med utgangspunkt i resonneringsbegrepet til Lithner (2008).

4.6 Etiske betraktninger

Det å ta hensyn til etiske betraktninger er viktig i enhver forskning. Datagrunnlaget vårt er hentet fra Utdanningsdirektoratet, og dermed har vi ikke samlet inn selve datamaterialet som skal analyseres på egen hånd. Selv om masteroppgaven vår ikke innebærer direkte kontakt med informanter eller behandling av personopplysninger, har vi likevel vært bevisst på de etiske prinsippene som er knyttet til kvalitativ innholdsanalyse. En viktig etisk betraktning er forskningsdesign (Postholm & Jacobsen, 2018). «Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å fordreie eller fortie relevante tolkninger eller analyser» (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap humaniora juss og teologi, 2021). For å sikre god vitenskapelig praksis har vi flere ganger gått gjennom kategoriene og plasseringen av oppgaver i løpet av skrivingen av masteroppgaven for å sikre presis og pålitelig data samt riktig kategorisering. Da vi sammenliknet oppgavekategoriene, og da vi plasserte oppgavene innen de ulike resonneringstypene, oppdaget vi feilplasseringer. Vi har dermed endret noen plasseringer av oppgaver i noen kategorier der vi ikke har vært konsekvente nok i kategoriseringsdelen av analysearbeidet.

5. Resultat

I denne delen skal vi presentere resultatene av analysen. For å kunne svare på det første forskningsspørsmålet vårt: *Hvilke resonneringstyper er eksamen et utgangspunkt for?* vil vi se på resultatet av kategoriseringen, altså fordelingen av de 114 deloppgavene etter resonneringstype. Etter dette kommer vi inn på hvordan eksamensoppgavene som krever kreativ resonnering gir utgangspunkt for denne resonneringen i oppgavene, for å identifisere oppgavetyper. Dette gjør vi for å svare på vårt andre forskningsspørsmål: *I hvilke oppgavetyper kan elever ta i bruk kreativ resonnering?*

5.1 Forekomst av ulike typer resonnering

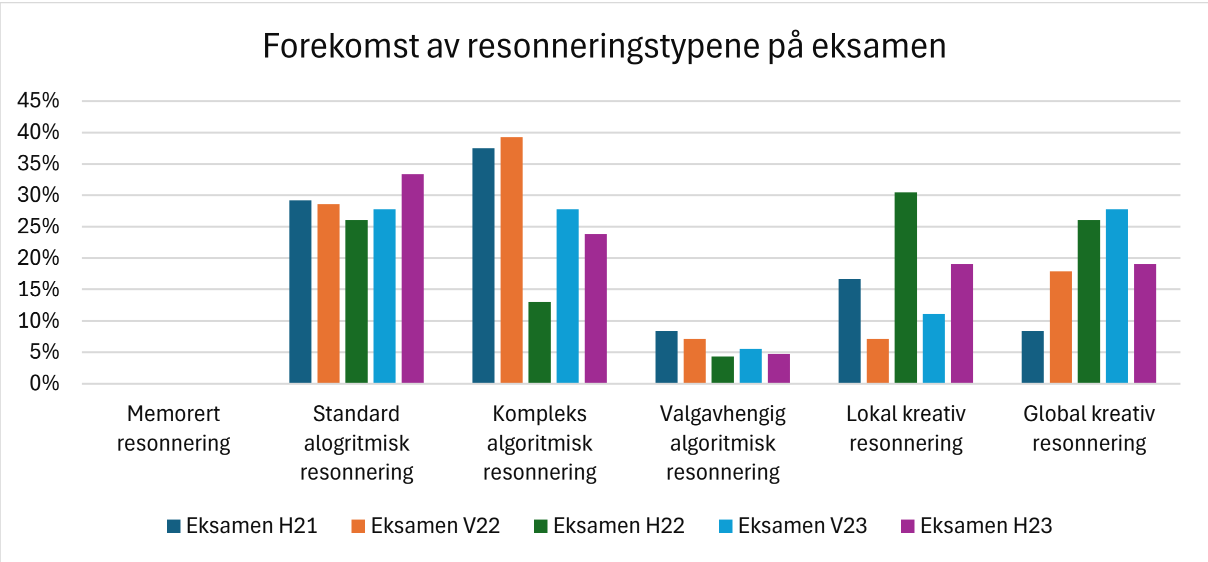
For å undersøke forekomsten av resonneringstypene har vi tatt i bruk noen kategorier. Kategoriene vi har brukt i analysen av deloppgavene er: memorert resonnering (MR), standard algoritmisk resonnering (standard AR), kompleks algoritmisk resonnering (kompleks AR), valgavhengig algoritmisk resonnering (valgavhengig AR), lokal kreativ resonnering (LKR), og global kreativ resonnering (GKR). De fire første kategoriene betegnes som imiterende resonneringstyper (IR), mens de to siste som kreativt resonnerende (KR).

Totalt over alle eksamenssettene er det 73 oppgaver som vi har tolket til å kreve imiterende resonnering og 41 som krever kreativ resonnering, henholdsvis 64 % og 36 % av alle deloppgavene. Alle oppgavene kunne plasseres inn under en av kategoriene i rammeverket vårt, se tabell 2. Det er flest oppgaver under standard algoritmisk resonnering og kompleks algoritmisk resonnering med 33 deloppgaver, deretter global kreativ: 22, lokal kreativ: 19, og til slutt valgavhengig resonnering: 7. Det er ingen oppgaver som har blitt plassert under memorert resonnering. Dette resultatet skal vi gå nærmere inn på i neste avsnitt. For å få en ryddig oversikt har vi fremstilt en oppsummering av kategoriene i tabell 2 under.

Kategorier	MR	Standard AR	Kompleks AR	Valgavhengig AR	LKR	GKR
Totalt antall oppgaver	0	33	33	7	19	22
IR / KR		73			41	

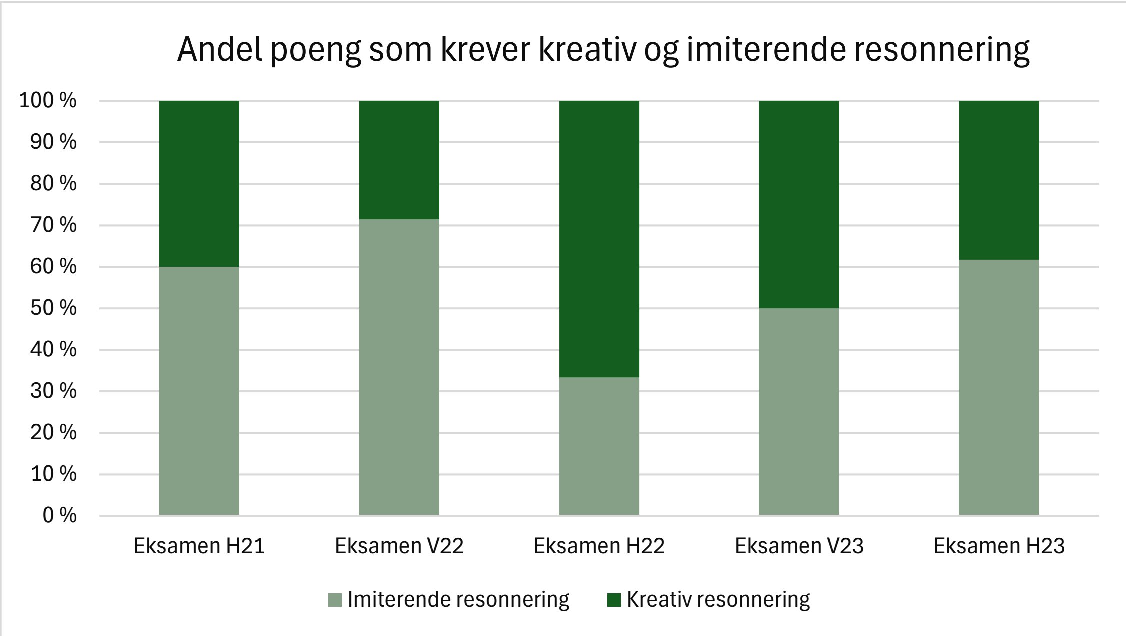
Tabell 2. Total oversikt over typene resonnering av alle de 114 deloppgavene på både del 1 og del 2.

Denne oversikten viser den totale fordelingen på alle de fem eksamenssettene. Under er også et diagram (figur 10) som viser prosentvist antall deloppgaver i hver kategori, på hver eksamen. Her ser vi at det er lite variasjon i andel standard AR blant eksamenssettene, det samme gjelder valgavhengig AR. Eksamen høsten 2022 skiller seg ut i lav anden kompleks AR og høy andel LKR. Det ser ut til å være en stigning i andel GKR frem til eksamen høsten 2023, hvor andelen synker.



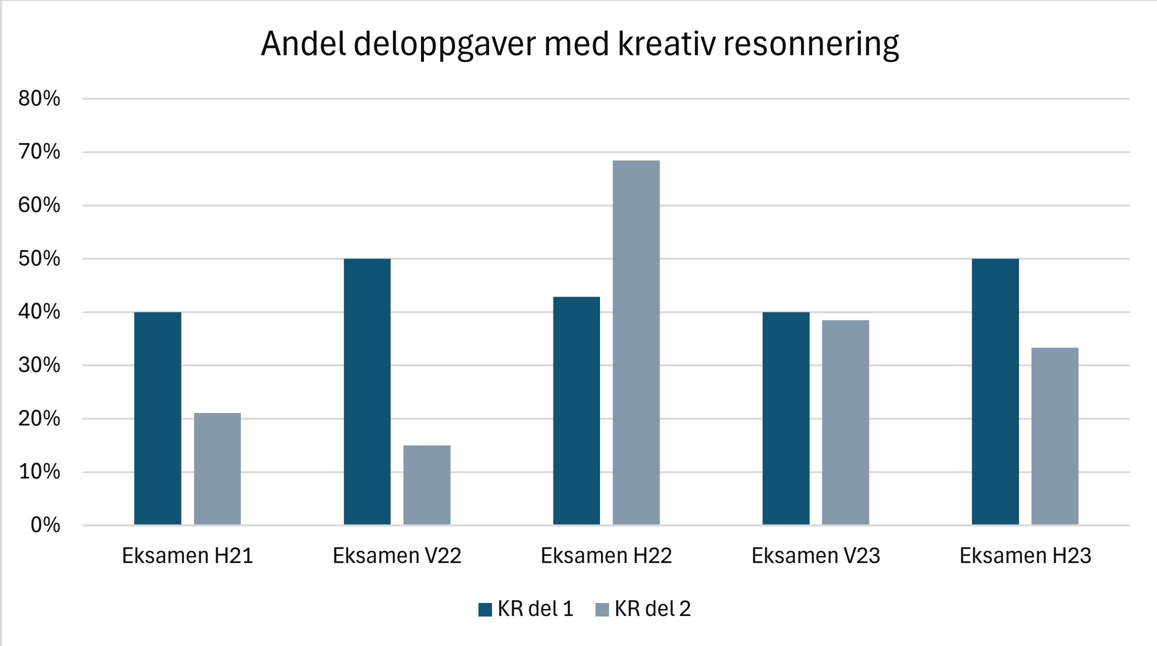
Figur 10. Forekomst av resonneringstypene på eksamen

Vi har også sett på antall imiterende resonneringsoppgaver opp mot antall kreative resonneringsoppgaver på hver eksamen. På de to første eksamenssettene utgjør de kreative resonnerings-deloppgaver 25 % av oppgavene, på den neste eksamenen er andelen 57 %, mens på de to siste er den 38–39 %. Her ser vi kun på antall deloppgaver. På eksamen i 1T vektlegges ikke alle oppgavene likt, fordelingen av kreative og imiterende resonneringsoppgaver vil derfor være noe annerledes om vi tar høyde for poengfordelingen. Nedenfor er en illustrasjon av andelen kreative og imiterende oppgaver, hvor antall poeng per oppgave er vektlagt. Poengene varierer fra ett til fire poeng per deloppgave, med unntak av siste deloppgave på eksamen høsten 2021 og høsten 2022, som henholdsvis kunne gi opptil tolv og ti poeng, de krever begge kreativ resonnering. I gjennomsnitt gir hver deloppgave med imiterende resonnering 2 poeng, mens en deloppgave med kreativ resonnering gir 3 poeng. Dersom vi ser bort ifra de to oppgavene som gir ti og tolv poeng, vil en deloppgave med kreativ resonnering gjennomsnittlig gi 2,5 poeng. Figur 11 viser hvordan fordelingen av kreative og imiterende resonneringsoppgaver er, dersom vi tar høyde for poengene deloppgavene kan gi.



Figur 11. Andel poeng som krever kreativ og imiterende resonnering

Videre så vi nærmere på hvor stor andel av oppgavene på henholdsvis del 1 og del 2 av eksamen som krevde kreativ resonnering. Etter vår kategorisering, viste det seg at en større andel av deloppgavene på del 1 krevde kreativ resonnering enn de på del 2, dette gjelder derimot ikke for eksamen høsten 2022. På del 1 ligger andelen på 40–50 %, mens på del 2 varierer andelen oppgaver som inviterer til kreativ resonnering fra 15–68 %. Dette er presentert i figur 12.



Figur 12. Andel deloppgaver med kreativ resonnering

5.2 De lokalt kreative resonneringsoppgavene

De lokalt kreative oppgavene gir et utgangspunkt for kreativ resonnering, men det kan også brukes imiterende resonnering i oppgavene. Vi har funnet 19 deloppgaver i denne kategorien. Alle gir et utgangspunkt for kreativ resonnering i en del av løsningen, mens resten av løsningen består som regel av innøvde algoritmer. Oppgavene har ulik form, struktur og tematikk. Løsningsprosessene består både av imiterende og kreativ resonnering, og vi har derfor valgt å ikke dele disse inn underkategorier. Vi skal se på tre eksempler fra denne kategorien, for å se nærmere på hvordan disse oppgavene kan løses, med kreativ og imiterende resonnering, og variasjonen i oppgavetypene.

Vi starter med oppgave 1 med tilhørende løsningsforslag (figur 13), hvor elevene skal bestemme en likning for en linje. Av løsningsforslaget ser man tydelig at elevene kan bruke ettpunktsformelen, som er en innøvd algoritme. Det som imidlertid krever kreativ resonnering, er konklusjonen om at linjene m og l har samme stigningstall. Dette må forstås fra informasjonen om at linjene er parallelle, noe som ikke er tilfellet i liknende oppgaver i læreboka Mønster 1T. Derfor anser vi at dette steget krever kreativ resonnering, før elevene kan ta i bruk imiterende resonnering i den videre løsningsprosessen.

Oppgave 1 (2 poeng)
Likningen for en linje l er gitt ved $y = -2x + 9$.
En annen linje m er parallell med linjen l og går gjennom punktet $(5, -6)$.
Bestem likningen for linjen m.

Løsning

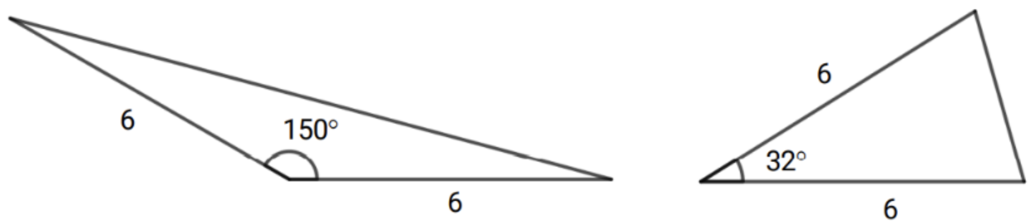
Vi kjenner stigningstallet til linja m, dette må være det samme som linja l. Vi kan bruke ettpunktsformelen:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - (-6) &= -2(x - 5) \\ y &= -2x - (-2) \cdot 5 - 6 \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

Figur 13. Løsning oppgave 1, del 1, høst 21 (Nasjonal digital læringsarena, 2021)

Oppgave 4, figur 14Figur 14, krever også kreativ resonnering i deler av løsningsprosessen. Her må elevene regne ut arealet av trekantene for å vurdere hvilken av de som er størst. Elevene må koble at de skal bruke arealsetningen, dette blir det hintet til i tekst og figur. Elevene må så finne uttrykk for arealet av trekantene – algoritmisk resonnering. Den kreative resonneringen finner sted når elevene må vurdere hvilket av arealene som er størst, nærmere bestemt hvilken av følgende verdier som blir størst: $\sin(150°)$ og $\sin(32°)$. Disse verdiene er ikke kjent for elevene og de må trekke konklusjoner for eksempel fra enhetssirkelen.

Oppgave 4

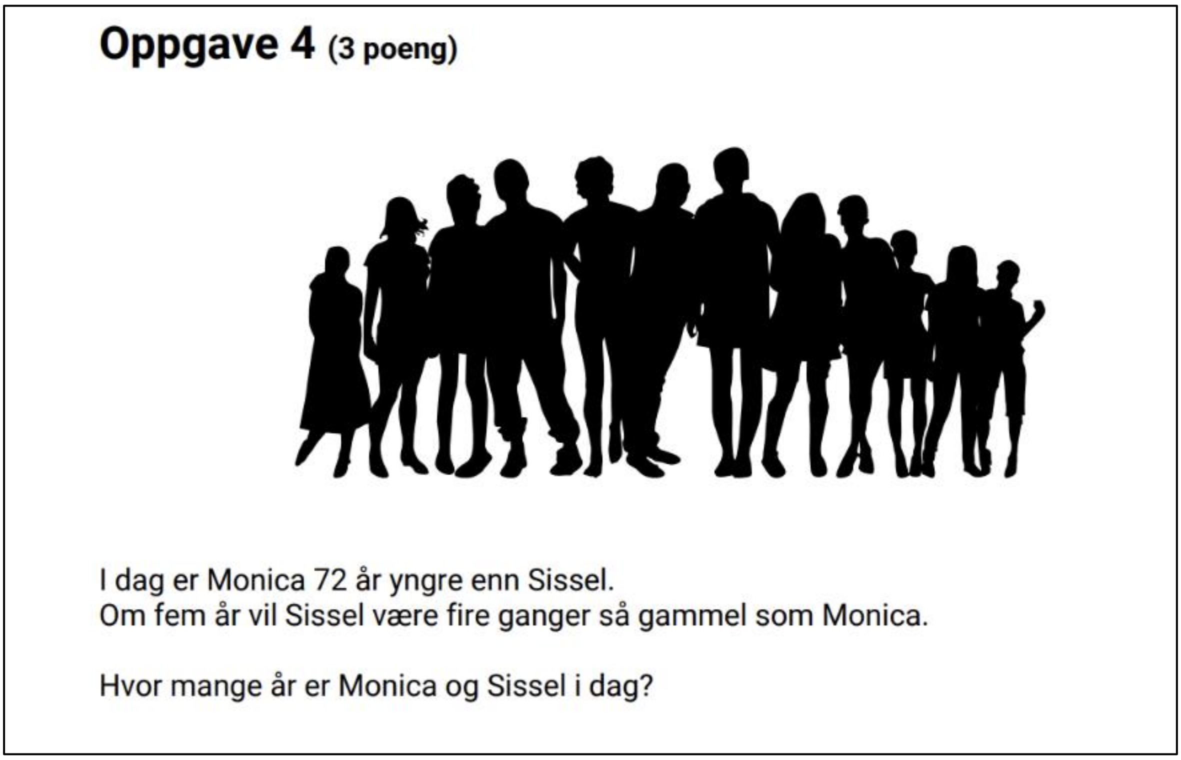


Hvilken av de to trekantene har størst areal?

Husk å argumentere for at svaret ditt er riktig.

Figur 14. Oppgave 4, del 1, høst 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023a)

I oppgave 4, figur 15, kreves det kreativ resonnering i oppstarten av løsningsprosessen. Elevene må bruke informasjonen om personene og alderne deres gitt i teksten, til å sette opp et likningssystem. Videre kan likningssystemet løses ved algoritmisk resonnering. Her vil det også være enkelt for elevene å bekrefte eller avkrefte løsningen sin, ved å sjekke svaret opp mot informasjonen i oppgaven.



Oppgave 4 (3 poeng)

I dag er Monica 72 år yngre enn Sissel.
Om fem år vil Sissel være fire ganger så gammel som Monica.

Hvor mange år er Monica og Sissel i dag?

Figur 15. Oppgave 4, del 2, høst 21 (Utdanningsdirektoratet, 2021)

I flere av de andre tilfellene av lokal kreativ resonnering er det slik at elevene må gjøre en tolkning i oppgaveløsningen, før de kan fortsette med en kjent algoritme eller etter at de har arbeidet med en kjent algoritme. Dette betyr at oppgavene kan være kjente, samtidig som de inneholder ukjente momenter. En annen måte det gis utgangspunkt for kreativ resonnering i disse oppgavene på, er at elevene kan bli bedt om å gi en begrunnelse eller argumentere for at svaret deres er rett, noe som gjør at elevene må utforme egne argumenter, være bevisste disse og skrive dem ned.

5.3 De globalt kreative resonneringsoppgavene

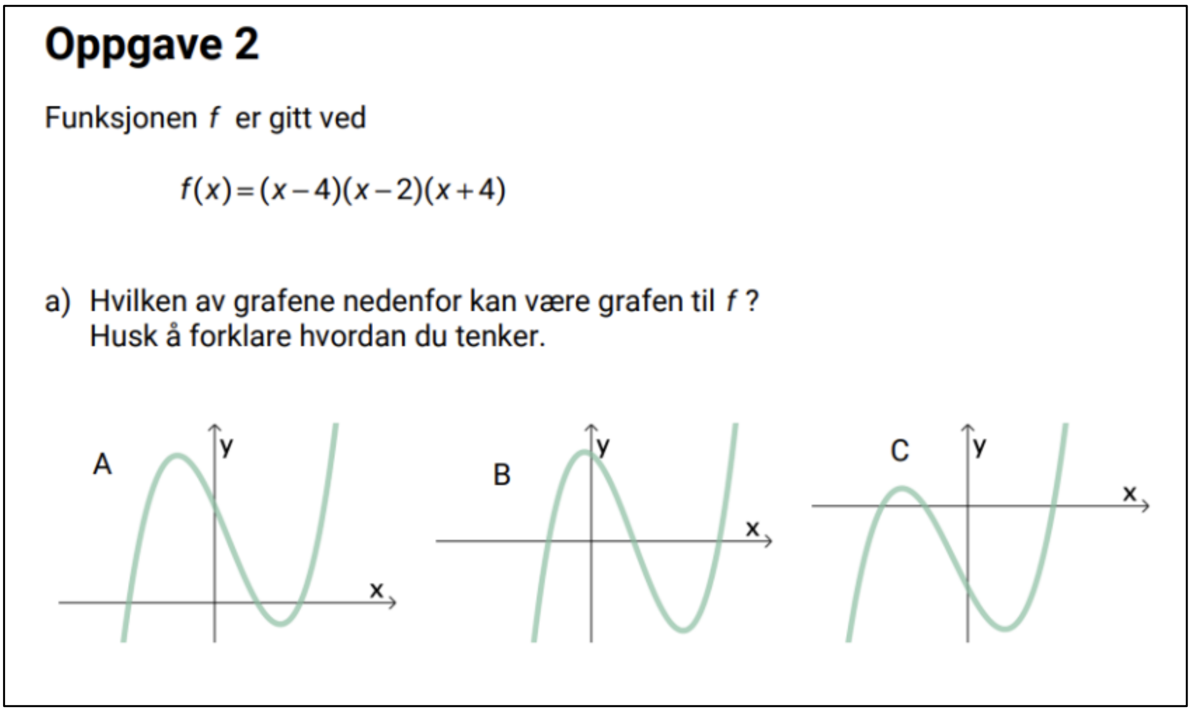
For å kunne svare på problemstillingen vår – *Hvordan er eksamensoppgaver i 1T et utgangspunkt for kreativ resonnering?* – gjennomførte vi en videre analyse av de 22 globalt kreative eksamensoppgavene. I analysen fokuserte vi på oppgavens innhold og struktur i oppgaveteksten og løsningsforslaget. Vi fant at eksamensoppgavene som krever global kreativ resonnering kan deles inn i følgende underkategoriene: (1) koble graf og uttrykk; (2) vurdere andres påstander og regler; (3) bestemme eller skissere en funksjon; (4) sammenlikne uttrykk, (5) lage program; og (6) annet. Vi kommer i dette delkapittelet til å for oss de ulike kategoriene og presenterer noen av oppgavene innenfor hver underkategori, for å forklare og illustrere inndelingen nærmere.

5.3.1 Oppgaver som handler om å koble sammen graf og uttrykk

Fire av de globalt kreative oppgavene handler om at graf og uttrykk skal kobles sammen. Dette innebærer at oppgaven presenterer informasjon om funksjonsuttrykk og bilde av flere grafer, som så skal tolkes og kobles sammen. To av deloppgavene har tre ulike grafer som enten kan kobles eller ikke kobles med funksjonsutrykket. De to resterende deloppgavene utgjør én hovedoppgave. Det oppgis ett funksjonsuttrykk på hver deloppgave og til sammen seks forskjellige grafer. Hvilke grafer som er aktuelle for det enkelte funksjonsuttrykket, er ikke tydelig.

Formuleringen på oppgaven er gitt på litt ulike måter som «husk å argumentere for at svarene er riktige» (Utdanningsdirektoratet, 2023a), «husk å forklare hvordan du tenker» (Utdanningsdirektoratet, 2022a) eller «vurder hvilken av grafene som kan være grafen til [uttrykket]» (Utdanningsdirektoratet, 2022b). Det skriftlige arbeidet eleven må gjøre i løsningsprosessen, er det samme i alle oppgavene, og hver elev må gjøre en vurdering av begge representasjonsformene for å klare å formulere en løsning.

Et eksempel på denne oppgavetypen, som dreier seg om kobling mellom graf og uttrykk, er oppgaven presentert ved figur 16. Funksjonsuttrykket er gitt ved et faktorisert tredjegradsutrykk, som skal kobles sammen med enten graf A, B eller C. Denne oppgaven krever at elevene anvender forståelse knyttet til de grafiske representasjonene for å identifisere hvilken graf som tilsvarer et gitt funksjonsuttrykk. Det som er verdt å nevne med akkurat denne oppgaven, er at utrykket er gitt på faktorisert form, noe som betyr at eleven kan sette hver av faktorene lik 0. Dermed må elevene ha en forståelse for hvordan man kan finne nullpunktene til en funksjon algebraisk, og hvordan punktene kan representeres grafisk. Deretter skal eleven forklare hvilken av grafene som passer sammen med uttrykket. I denne oppgaven er det mer naturlig å se på hver av faktorene, enn å regne ut selve funksjonsuttrykket.


Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x-4)(x-2)(x+4)$$

a) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til f ?
Husk å forklare hvordan du tenker.

Figur 16. Oppgave 2, del 1, høst 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022a)

Oppgaven i figur 17 er tilnærmet lik, men skiller seg fra oppgaven over ved at utrykket ikke er faktorisert, og oppgaveteksten antyder bruk av polynomdivisjon gjennom deloppgave a. Oppgaven gir utgangspunkt for samme resonnement og argumentasjon, men kan ha ulike løsningsmetoder. I denne oppgaven kan man bruke funksjonsuttrykket for å finne skjæringen med y-aksen uten at det trengs en bearbeidelse av uttrykket, i motsetning til oppgaven over (i figur 16). Setter man inn null for x får man punktet $(0, -9)$ og ved hjelp av eliminering ser man at A ikke kan være et alternativ, for å konkludere om B eller C stemmer må man, som i oppgaven over, finne nullpunkter og gjøre nye vurderinger for hvilken graf som stemmer med uttrykket.

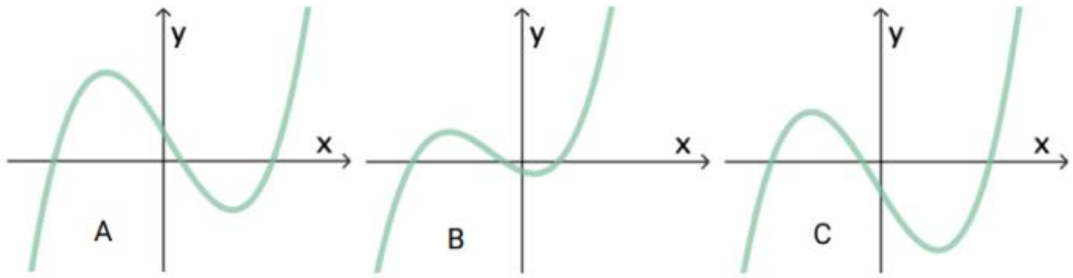
Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2x^3+x^2-18x-9$$

a) Vis at divisjonen $f(x):(x-3)$ går opp.

b) Gjør beregninger, og vurder hvilken av grafene nedenfor som kan være grafen til f.



Figur 17. Oppgave 6b, del 1, vår 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

Ses oppgavene i sammenheng, kan man se at oppgavene på begge eksamenssettene har samme hensikt, men at det er forskjellige måter å gå frem på i løsningsprosessen.

5.3.2 Oppgaver som handler om å vurdere andres påstander og regler

Seks av oppgavene som krever global kreativ resonnering, ber elevene om å vurdere andres påstander og regler. Dette innebærer at oppgaven presenterer noen tankerekker og konklusjoner som elevene må forstå, vurdere og eventuelt videreutvikle. For at eleven skal komme frem til en løsning, kreves det en tolkning av informasjon gitt i oppgaven og utforming av egne tankerekker og resonnementer. Oppgaveteksten ber enten eleven om å kommentere et resonnement eller resonnere for at noe enten er sant eller usant. Vi skal nå se på noen eksempler på oppgaver under denne kategorien. Det er seks oppgaver som er plassert under kategorien å vurdere andres påstander og regler. To av disse oppgavene er tilnærmet identiske og handler om å tolke informasjon, sette opp et funksjonsuttrykk, for så å argumentere for at en påstand stemmer. Det er to oppgaver hvor man skal vurdere om påstander stemmer, og to oppgaver hvor det skal kommenteres et resonnement.

Oppgave 6b på figur 18 er en slik type oppgave hvor elevene blir bedt om å kommentere et resonnement gitt av Trym og Eira. De diskuterer en matematisk funksjon og dens egenskaper. Trym foreslår at alle tredjegradspolynomer må ha et topp- eller bunnpunkt på y-aksen, noe som er en misforståelse innenfor funksjoner og deres egenskaper. Oppgaven krever at eleven må bruke kritisk tenking og resonnering, for å analysere noen andres forståelse og tankeprosess av hvordan man løser oppgaven, uten at deloppgaven legger opp til å løse oppgaven. Tross dette er det er verdt å merke seg at deloppgaven før (6a) ber om en løsning. Deloppgave 6a vil ikke havne inn under samme kategori, men er en deloppgave vi har plassert inn under kategorien standard algoritmisk resonnering, og er dermed ikke noe vi kommer til å gå nærmere i dybden på da den, etter vår analyse, ikke er kreativ.

Oppgave 6

Trym og Eira arbeider med oppgaven nedenfor.

> Funksjonen f er gitt ved
>
> $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$
>
> Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Jeg ser med én gang at grafen må ha et topp- eller bunnpunkt som ligger på y - aksen.

Hvordan ser du det?

Funksjonsuttrykket har ikke et førstegradsledd. Da må det være slik.

Hvorfor det? Vil det alltid være slik?

Ja, i alle fall for alle tredjegradsfunksjoner. Det har jeg lært meg.

Men det er jo ikke slik for grafen til x^3.

Æsj! Det stemmer.

Det kan jo hende du har litt rett likevel, men at det er noe mer vi må se etter?

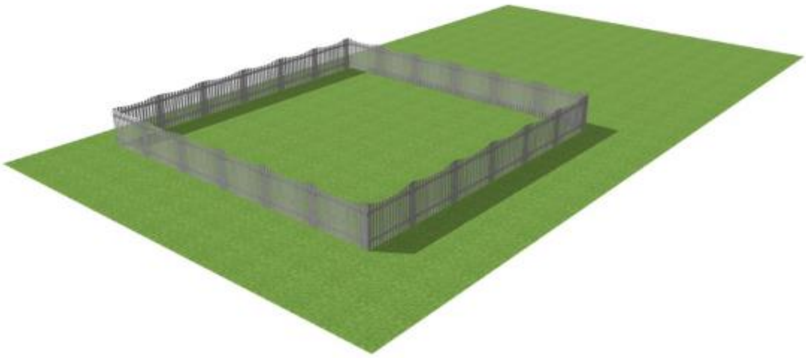
a) Løs oppgaven elevene arbeider med.

b) Ta utgangspunkt i dialogen ovenfor. Utforsk og kommenter Trym sin «regel».

Figur 18. Oppgave 6b, del 2, vår 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023b)

Slike oppgaver finnes det flere av i eksamenssettene. Deloppgave 6b, se figur 19, er enda et eksempel på en slik oppgave. Når det gjelder resonnering og argumentasjon i oppgaven skal elevene finne argumenter for at det Per har gjort, stemmer. En påstand med informasjon som er oppgitt er: «Per påstår at arealet blir størst mulig dersom alle sidekantene er like lange» (Utdanningsdirektoratet, 2022a). For at eleven skal kunne sette opp et funksjonsutrykk for Solveig, må eleven ta i bruk matematiske kunnskaper om rektangler, for å lage et uttrykk for arealet. Eleven får også beskjed om at funksjonsuttrykket skal tegnes, dette må tolkes for å at eleven kan komme til en konklusjon.

Oppgave 6



Per og Solveig har nok materialer til å lage et gjerde som er 64 m langt.
De skal gjerde inn et område som skal ha form som et rektangel, og de ønsker at området skal få størst mulig areal.

Per påstår at arealet blir størst mulig dersom alle sidekantene er like lange.

a) Vis at Per sin påstand kan være riktig, ved å lage en oversikt som viser arealet av ulike rektangler med omkrets 64 m.

Solveig lurer på om de kan tegne en graf som viser at Per har rett. Hun prøver å sette opp et funksjonsuttrykk som hun kan bruke.

b) Sett opp funksjonsuttrykket for Solveig. Tegn grafen, og vis at Per sin påstand er riktig.

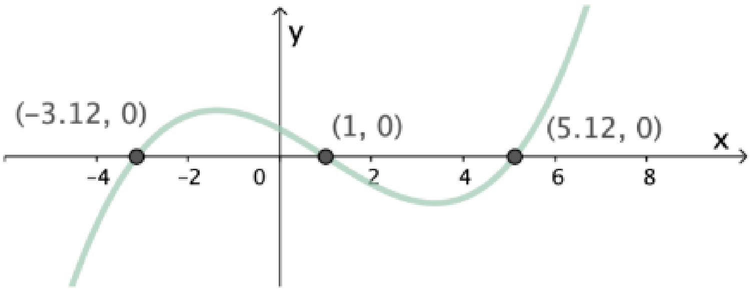
Figur 19. Oppgave 6b, del 2, høst 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022a)

5.3.3 Oppgaver som handler om å bestemme eller skissere en funksjon

Syv av de globalt kreative oppgavene ber elevene bestemme eller skissere en graf ut ifra gitt informasjon i oppgaveteksten. Fem av disse oppgavene dreier seg om polynomfunksjoner og har enten informasjon om, eller spør etter den deriverte til en funksjon. De to siste oppgavene dreier seg om rasjonale funksjoner, hvor elevene må finne et uttrykk til en funksjon, enten ut ifra en graf eller oppgitte asymptoter.

Oppgave 5 (se figur 20) er et godt eksempel på en oppgave under denne kategorien, som handler om polynomer. Her får elevene et bilde av en graf $f'(x)$, og informasjon om nullpunktene til den opprinnelige funksjonen, f, som de skal skissere. Her må elevene forstå informasjon og klare å bruke denne når de skisserer f. De må gjøre egne tolkninger og kan ikke basere seg på innøvde algoritmer. Elevene blir også bedt om å argumentere for hvorfor skissen deres er riktig. Dette gjør at de må ha begrunnelser for valgene de har tatt i skisseringen overfor noen andre, og må være mer bevisst på egne tankeprosesser og resonnementer.

Oppgave 5



Ovenfor ser du grafen til den deriverte av en funksjon f.

Nullpunktene til f er $x=-4$, $x=-2$, $x=4$ og $x=6$

Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.
Husk å argumentere for hvorfor du mener skissen er riktig.

Figur 20. Oppgave 5, del 1, vår 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023b)

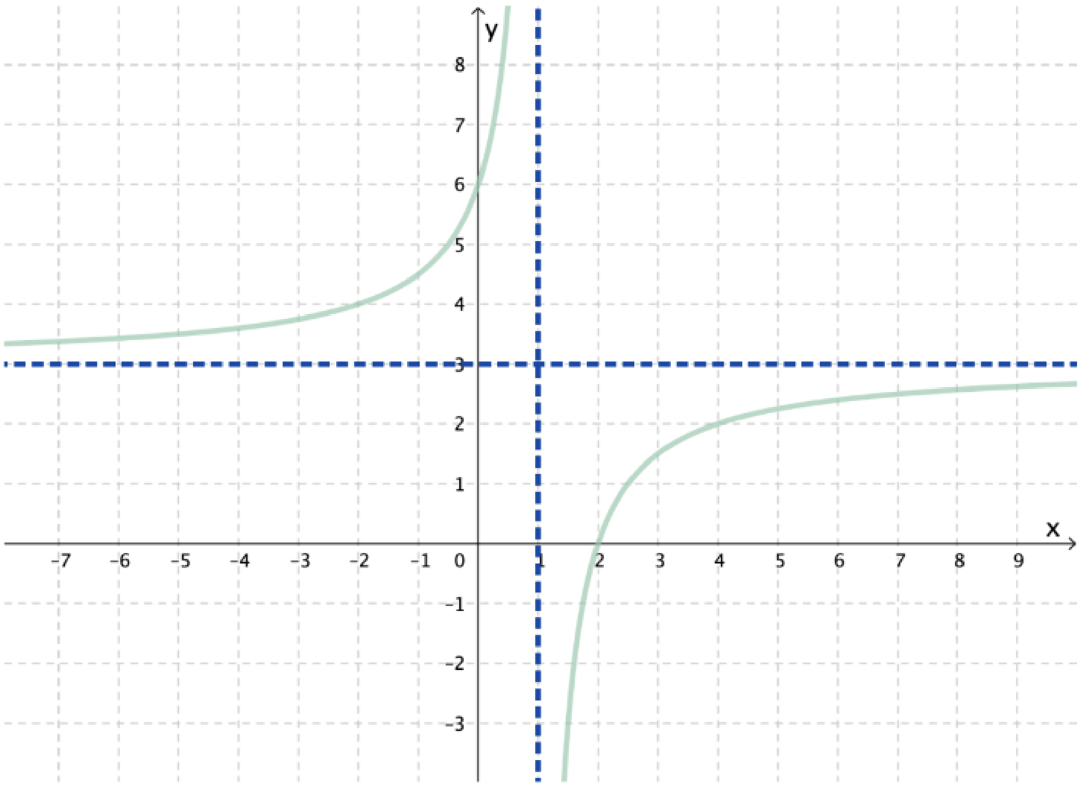
Oppgave 4, se figur 21, er et eksempel på en oppgave om rasjonale funksjoner under denne kategorien. Elevene må resonnere og argumentere for et uttrykk til den oppgitte grafen. Når elevene løser oppgaven, må de bruke kunnskaper de har om asymptoter og rasjonale funksjoner. De må identifisere asymptotene og trekke konklusjoner fra disse. Siden det er færre enn tre oppgaver av denne typen i læreboka, regner vi den som ukjent, og elevene har trolig ikke gjort liknende oppgaver mange nok ganger til å ha lagret en løsningsalgoritme til oppgaven, som gjør at oppgaven krever kreativ resonnering.

Også i denne oppgaven blir elevene bedt om å gi sin egen resonnering og argumentasjon gjennom ord. Elevene må her argumentere for at deres funksjonsuttrykk er korrekt, for eksempel ved å vise at uttrykket oppfyller egenskapene til grafen, og at de har funnet de riktige kritiske punktene.

Oppgave 4

Nedenfor ser du grafen til en rasjonal funksjon f .

Bestem $f(x)$. Husk å argumentere for at svaret ditt er riktig.



Figur 21. Oppgave 4, del 1, vår 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023b)

5.3.4 Oppgaver som handler om å sammenlikne uttrykk

Blant de globalt kreative oppgavene er det to oppgaver som handler om å sammenlikne uttrykk. Oppgavene defineres som globalt kreative, siden de gir et utgangspunkt for at elevene skal utforske relasjoner mellom funksjonsuttrykk for å gjennomføre sammenlikning mellom dem. Sammenlikningen som blir gjort mellom uttrykkene, krever at elevene både kan ta i bruk digitale verktøy, tolke grafer og kritisk vurdere egenskaper. Etter sammenlikningen skal elevene kunne utforme resonnement som gjør at de klarer å uttrykke forskjellen mellom uttrykkene i en sammenlikning. De oppgavene som har blitt plassert inn under denne underkategorien, er regresjonsanalyseoppgaver. Det er vanlig at elever må lage en modell ut ifra oppgitt informasjon i tidligere deloppgaver i slike regresjonsoppgaver. En annen bemerkelse på denne typen oppgave er at det er mye informasjon som blir presentert før selve oppgaveteksten. Det er mange ord i oppgaveteksten og en del tall som er gitt i en tabell, dette skal tolkes og brukes videre i løsningsprosessen. De to oppgavene som har blitt plassert inn under kategorien *å sammenlikne uttrykk*, baserer seg på bruk av regresjon og graftegner i del 2 av eksamen. I den ene oppgaven skal elevene bruke regresjonsanalyse to ganger med ulike tall for å lage ulike modeller, mens i den andre oppgaven skal elevene utføre en regresjonsanalyse med et eksponentialuttrykk, for så å sammenlikne eksponentialuttrykket med formelen for å regne ut svingetiden til en pendel.

Et eksempel på en oppgave som handler om å sammenlikne uttrykk, er oppgaven gitt ved figur 22. Oppgaven handler om at elevene skal tegne inn to uttrykk f og T_1 i samme koordinatsystem ved hjelp av graftegner, for så å beskrive forskjellene elevene legger merke til. Det å sammenlikne og si noe om egenskapene til funksjonsuttrykkene er en sentral del av resonnering- og argumentasjonsprosessen. Oppgaven er ganske åpen, siden det ikke er tydelig hvilke eller hva slags likheter og forskjeller elevene skal peke på. Elevene må selv tolke, sammenlikne og redegjøre for forskjellene/likhetene de finner, noe som går under kreativ resonnering.

Oppgave 4

Da Eline og Malene kom til hytta, var temperaturen i stua 2,0 °C. De skrudde på varmen og stilte termostaten på 20 °C. Tabell 1 viser temperaturen i stua x minutter etter at de skrudde på varmen.

Tid (minutter)	1	5	10	20	30	50	80	120
Temperatur (°C)	2,0	3,7	5,3	8,0	10,2	13,4	16,4	18,4

Tabell 1

Eline og Malene vil lage en modell som viser temperaturen i stua x minutter etter at de skrudde på varmen. De starter med å bruke tallene i tabell 1 til å lage en modell T_1 på formen $T_1(x) = a \cdot x^b$

a) Bestem tallene a og b.

b) Vurder gyldighetsområdet til modellen T_1.

Eline og Malene ønsker å forbedre modellen T_1. Eline foreslår at de skal trekke 20 °C fra hver temperatur de har målt, og heller bruke en eksponentialfunksjon som modell. Hun setter opp en ny tabell.

Tid (minutter)	1	5	10	20	30	50	80	120
Korrigert temperatur (°C)	−18,0	−16,3	−14,7	−12,0	−9,8	−6,6	−3,6	−1,6

Tabell 2

c) Lag en eksponentialfunksjon f som passer godt til tallene i tabell 2.

d) Tegn grafen til T_1 og grafen til f i samme koordinatsystem.
Beskriv forskjeller mellom de to grafene.

Malene mener de kan bruke funksjonen f til å lage en bedre modell enn T_1 for temperaturen i stua. «Vi løfter grafen til f opp 20 °C, slik at den starter omtrent i punktet $(0,2)$», sier hun. «Da vil den passe perfekt.»

e) Bruk funksjonen f, og lag en modell T_2 ved å gjøre som Malene foreslår.
Hva vil temperaturen i stua være etter 4 timer ifølge modellen T_2?

Figur 22. Oppgave 4d, del 2, vår 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022b)

5.3.5 Oppgaver som handler om å lage program

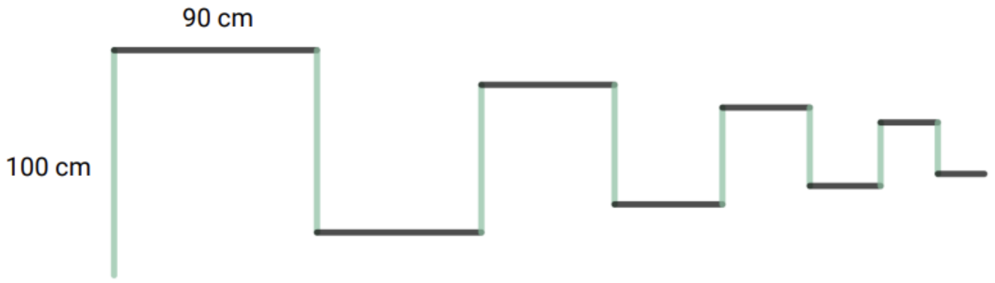
To av eksamensoppgavene ber elevene eksplisitt lage en programmeringskode, med begrenset veiledning fra oppgaven. I den ene oppgaven får elevene et bilde av et påbegynt program, som et forsalg til hvordan de kan begynne, på den andre oppgaven får de ikke det. Selv om programmering er tett knyttet til algoritmer, siden man er nødt til å skrive inn stegvise koder i programmet, krever det mer enn algoritmisk resonnering for å lage et program. Vi skal se på deloppgave 3b (figur 23) for å forklare dette nærmere.

Her skal elevene lage et program som kan regne ut summen av lengdene i figuren og forlengelsen av denne. Elevene må tolke informasjonen i oppgaven for å komme frem til en måte å regne ut summen på. Hvordan tolkningen skal gjøres, og hvordan programmet skal se ut, blir opp til elevene, og de har ingen spesifikk algoritme for å løse dette problemet. De må derimot redusere problemet til algoritmer som kan legges inn i en programmeringskode. På bakgrunn av dette, og fordi elevene må vurdere programmet sitt fortløpende, må de både resonnere og argumentere. Oppgaven har også en tilleggsdel, hvor det legges opp til at elevene skal bruke programmet de har lagd. Problemet i denne delen er at programmet de lager, ikke kan brukes direkte. De må enten teste ulike antall linjestykker og kjøre programmet flere ganger til de får en lengde på minst 9 meter, eller så må de gjøre endringer i programmet, slik at de kan bruke det direkte og kjøre programmet én gang for å få et svar.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal du arbeide med linjestykker som settes sammen til en figur.

Skissen nedenfor viser de 16 første linjestykkene i figuren. Lengden av et linjestykke er alltid 90 % av lengden av det forrige linjestykket. Det første linjestykket er 100 cm langt.



a) Bestem summen av lengdene av de 8 første linjestykkene i figuren.

b) Lag et program som du kan bruke til å bestemme summen av lengdene av linjestykkene dersom det er mange linjestykker i figuren.

Hvor mange linjestykker må vi ha med i figuren dersom summen av lengdene skal bli minst 9 meter?

Figur 23. Oppgave 3b, del 2, høst 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023a)

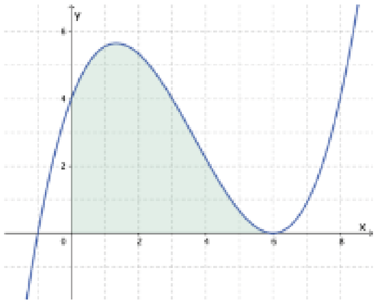
I den andre deloppgaven, oppgave 4b, (figur 24), presenteres en annen og mer kompleks situasjon. Vi skal se litt nærmere på denne oppgaven også, da det er flere interessante observasjoner her.

Her må elevene følge en annens tankerekker for å forstå problemet i oppgaven. Dette gjør at oppgaven også kunne blitt passet inn under kategorien *å følge og vurdere andres resonnementer*. Likevel er hoveddelen av oppgaven å lage et program, ikke å vurdere Theas tankerekker. Temaet i oppgaven kan ses på som en innledning til integrasjon. Selv om *problemet* i denne oppgaven er et annet og mer kompleks enn i forrige eksempel (figur 23), fordi elevene må forholde seg til en tredjegradsfunksjon, må elevene redusere problemet til algoritmer i likhet med forrige eksempel. Her får de litt starthjelp, i motsetning til den tidligere deloppgaven, men må fortsatt ta i bruk kreativ resonnering.

Oppgave 4

Til høyre ser du grafen til funksjonen f gitt ved

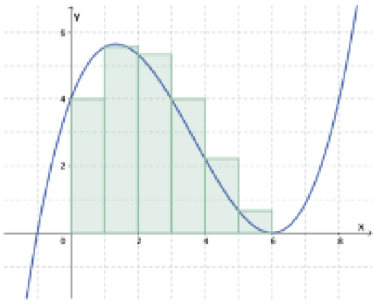
$$f(x) = \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2$$



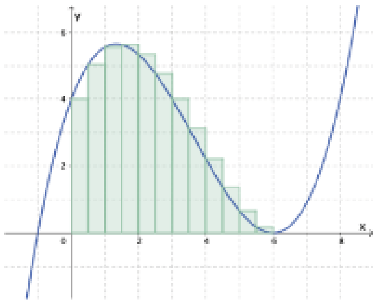
Figur 1

Thea ønsker å bestemme en tilnærmet verdi for arealet av det grønne området som er avgrenset av y - aksen, x - aksen og grafen til f .

Hun vil gjøre dette ved å legge sammen arealene av små rektangler. Hun begynner som vist på figur 2 og figur 3 nedenfor og vil så øke antall rektangler for å få en bedre tilnærming.



Figur 2



Figur 3

a) Bestem arealet av de seks rektanglene i figur 2.

b) Lag et program som Thea kan bruke når hun skal øke antallet rektangler.
Du kan for eksempel begynne som vist nedenfor.

```
def f(x):
    return 1/9 * (x + 1) * (x - 6) ** 2      # Definerer funksjonen f

x_min = 0       # Minste x-verdi
x_maks = 6      # Største x-verdi

n = 6000        # Antall rektangler

bredde =                          # Bredden av hvert rektangel

```

Figur 24. Oppgave 4b, del 2, vår 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023b)

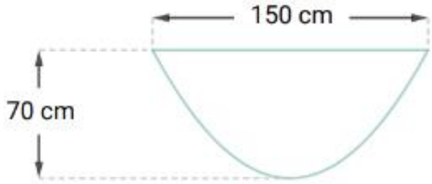
5.3.6 Annet

Én oppgave skilte seg ut fra de andre og kunne ikke plasseres under noen av de overnevnte kategoriene. Vi skal se nærmere på denne oppgaven, hvorfor den ikke passer inn under noen av de andre kategoriene og hvordan den skaper et utgangspunkt for kreativ resonnering.

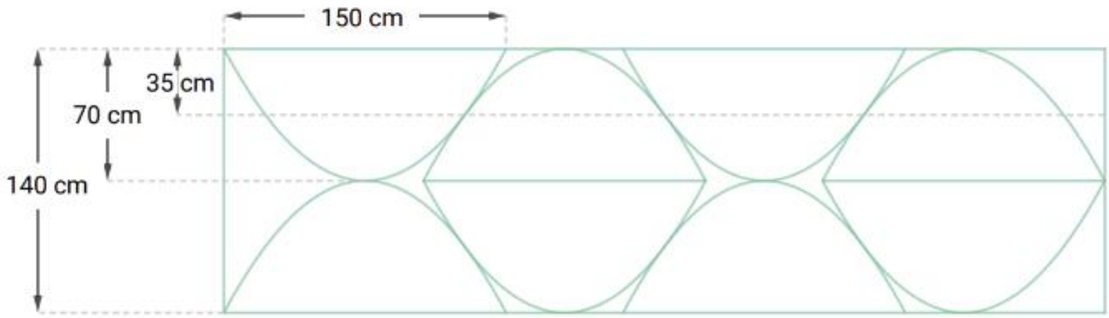
Denne oppgaven (figur 25) består av flere elementer, og hvordan man skal gå løs på den, er ikke åpenbart. Elevene må finne ut hvor langt et tøystykke må være for å få plass til åtte gardiner. De får informasjon om gardinene og hvordan de skal klippes gjennom teksten og figurene. Både tekst og figur må tolkes og forenkles, og elevene må finne ut hvilke lengder det lønner seg å finne verdien til og hvordan disse kan regnes ut. Det kan lønne seg for elevene å bruke kunnskap om parabler og finne et mulig funksjonsuttrykk til en av gardinene, for så å regne med dette uttrykket. Oppgaven presenterer en ny og kompleks situasjon, som krever mye resonnering av elevene for å komme frem til en løsning. Her må de også begrunne valgene sine overfor seg selv for å bli overbevist egen løsningsstrategi, altså argumentere. Ifølge rammeverket vårt er denne oppgaven en måte for elevene å få vist kreativ resonnering. Den er mer kompleks, består av flere momenter, og krever mye tolkning og dannelse av egne antakelser og resonnementer, noe som gjenspeiles i antall poeng (10) det er mulig å få på oppgaven.

Oppgave 7

En bedrift produserer gardiner. Hvert gardin skal ha form som en parabel. Høyden skal være 70 cm. Lengden øverst skal være 150 cm. Se figuren nedenfor.



Bedriften vil klippe ut gardinene fra tøyruller som er 140 cm brede. For å bruke så lite tøy som mulig vil en maskin klippe ut gardinene slik figuren nedenfor viser.



Gjør beregninger, og finn ut hvor langt tøystykke bedriften minst må bruke for å lage åtte gardiner.

Figur 25. Oppgave 7, del 2, høst 22 (Utdanningsdirektoratet, 2022a)

6. Diskusjon

I denne delen av masteroppgaven vil vi drøfte funnene våre, som er beskrevet i kapittel 5, i lys av teori og tidligere forskning for å svare på våre forskningsspørsmål:

1. *Hvilke resonneringstyper er eksamen et utgangspunkt for?*
2. *I hvilke oppgavetyper kan elever ta i bruk kreativ resonnering?*

Slik kan vi få en større forståelse for resultatene og hva de har å si for matematisk resonnering på eksamensoppgaver videre. Vi har også inkludert et delkapittel om begrensninger av studien vår i dette kapittelet.

6.1 Drøfting av funn

I første delkapittel skal vi diskutere analyseresultatene i lys av teori, tidligere forskning og læreplanen. Vi har delt delkapittelet i to, på samme måte som i resultat-kapittelet, for å skape bedre oversikt. Første underkapittel er knyttet til det første forskningsspørsmålet, mens det andre underkapittelet er knyttet til det andre forskningsspørsmålet.

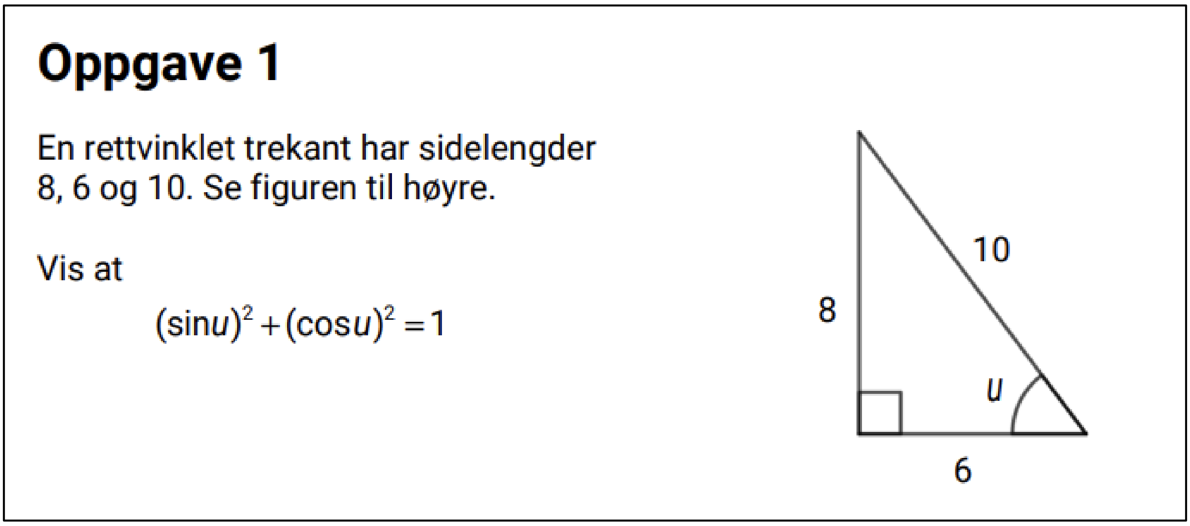
6.1.1 Resonneringstypene i eksamensoppgavene

I dette delkapittelet drøfter vi analyseresultatene våre opp mot forskningsspørsmål 1, som dreier seg om forekomsten av resonneringstyper i eksamenssettene.

Memorert resonnering

Et av hovedresultatene innenfor vår kategorisering er at ingen oppgaver kunne plasseres inn under memorert resonnering, slik det defineres av Lithner (2008) og Bergqvist (2007). Oppgaver under denne kategorien baserer seg på memorering av svar, og krever ikke at elevene må uttrykke en dypere forståelse i løsningsprosessen. For eksempel kunne en oppgave under memorert resonnering på del 1 ha vært «skriv ned andregradsformelen». Denne oppgaven har et entydig svar som kan memoreres i sin helhet.

At det ikke er noen oppgaver av typen memorert resonnering på eksamenssettene vi har sett på, betyr ikke at elevene ikke får bruk for memorert kunnskap i løsningen av øvrige eksamensoppgaver. Kunnskapen om hvordan andregradsformelen er, kan komme til nytte i løsning av oppgaver som krever en annen form for resonnering. Et eksempel er oppgaven under, (figur 26) som er plassert under standard algoritmisk resonnering.



Figur 26. Oppgave 1, del 1, vår 23 (Utdanningsdirektoratet, 2023b)

Her må elevene huske hvordan sinus og cosinus uttrykkes når man har en rettvinklet trekant, sette inn dette og regne ut. Dersom oppgaven hadde bestått av å skrive ned hvordan man uttrykker sinus til en vinkel, ville oppgaven kun krevd memorert resonnering. Elevene må imidlertid også anvende denne kunnskapen i oppgaven, og gjøre utregninger, som gjør resonneringen algoritmisk. Vi kan da konkludere med at eksamensoppgavene i større grad legger opp til at elevene skal anvende memorert kunnskap om ulike temaer, helle enn å gjengi denne. Dette er også noe som kommer frem i eksamensveiledningene til faget, hvor det heter at «Kandidaten skal kunne vise forståelse av begreper og kunne anvende disse i matematiske beregninger og resonnement» (Utdanningsdirektoratet, 2022c, s. 5; 2023c, s. 5). For at elevene skal kunne vise forståelse for begreper og for å anvende disse, bør oppgavene legge til rette for mer enn en gjenkallelse av begreper, altså mer enn memorert resonnering. Slik sett virker det plausibelt at det ikke er noen oppgaver som krever direkte memorert resonnering, men det uttrykkes indirekte gjennom anvendelser.

Fordeling av imiterende og kreative oppgaver

Fra resultatet så vi at andelen memorerende og algoritmisk resonneringsoppgaver i gjennomsnitt utgjør 64 %, mens kreative utgjør 36 % av totalt antall oppgaver. Hvis vi deler inn de kreative oppgavene i lokale og globale, er andelen av disse henholdsvis

17 % og 19 %. Disse prosentene kan ses i sammenheng med Palm, Boesen og Lithner (2005) sine resultater, tabell 1. De undersøkte nasjonale prøver (NP) i det svenske skolesystemet, hvor matematikk A tilsvarer de norske matematikkfagene 1P og 1T (Samordna opptak, 2024). Resultatene til Palm et al. (2005) knyttet til matematikk A er derfor spesielt interessant for oss. Under, i tabell 3, har vi lagd en oversikt med dette resultatet, samt resultatene av vår undersøkelse. Oversikten viser prosentandelen memorerende og algoritmisk resonnering (MR/AR), lokal kreativ resonnering (LKR) og global kreativ resonnering (GKR) på nasjonale prøver i matematikk A og fra eksamen i 1T.

	Andel oppgaver NP A (%)	Andel oppgaver eksamen 1T (%)
MR/AR	27	64
LKR	19	17
GKR	54	19

Tabell 3. Oversikt over andel resonnering i matematikk 1T og nasjonale prøver i matematikk A

Fra denne oversikten ser vi tydelige forskjeller mellom de undersøkte nasjonale prøvene og eksamenene. Andelen lokalt kreative oppgaver ligger på omtrent det samme, mens det er større forskjeller mellom de globalt kreative og imiterende resonneringsoppgavene. Det ser da ut til at de svenske elevene i matematikk A (2003/2004) i større grad enn de norske 1T-elevene (høsten 2021–høsten 2023), måtte utvikle nye resonnementer for å få best mulig resultat på nasjonale prøver. De norske elevene kunne derimot i større grad lene seg på kjente løsningsmetoder, hvor hukommelsen spiller en større rolle enn global kreativ resonnering.

I Norge ble det etter LK20 satt ekstra fokus på blant annet resonnering, da kjerneelementene ble introdusert. Fossum (2009) undersøkte i masteroppgaven sin andelen oppgaver som krever kreativ resonnering på eksamen i R1 og 2MX etter Kunnskapsløftet 06 og Reform 94. Disse matematikkfagene tilsvarer ikke matematikk 1T, men bygger videre på 1T. Vi har ikke funnet tidligere studier knyttet til eksamensoppgaver i 1T, og velger derfor å sammenlikne våre resultater med Fossums (2009) resultater. Hun bruker også Lithners (2008) inndeling av resonnering som bakgrunn for analyse. Dette gjør at vi kan se våre resultater i sammenheng med hennes og undersøke en eventuell utvikling i andel kreative resonneringsoppgaver.

Tabell 4 gir en oversikt over gjennomsnittlig andel oppgaver som krever kreativ resonnering på eksamenene i de gitte periodene.

	Reform 94	Kunnskapsløftet 06	Kunnskapsløftet 20
KR	24 %	24 %	36 %

Tabell 4. Andel oppgaver på eksamen som krever kreativ resonnering etter ulike reformer

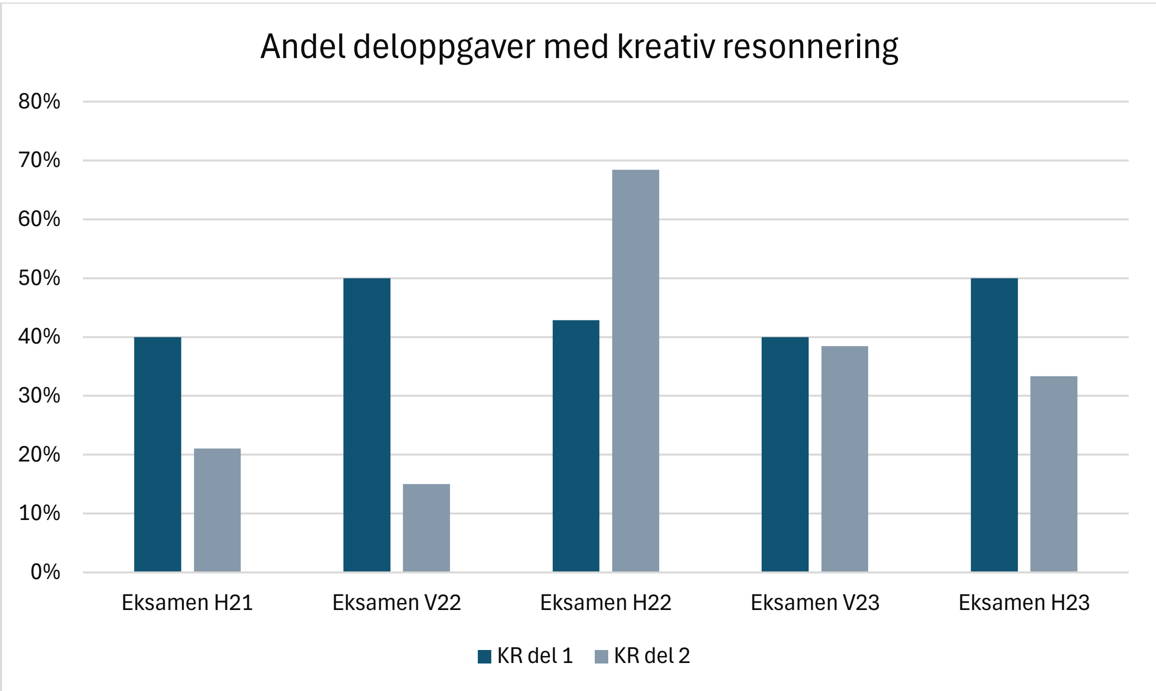
Av denne tabellen ser det ut til å være en betydelig økning i andel eksamensoppgaver med kreativ resonnering etter LK20, sammenliknet med tidligere. Dette kan være et resultat av økt fokus på visse matematiske områder (kjerneelementene) i den nye læreplanen, samt nye debatter rundt eksamensformen.

Eksamensoppgavene etter LK06 var generelt mindre åpne, flere og pekte ofte på en bestemt løsningsmetode som måtte brukes (Utdanningsdirektoratet, 2022d), noe som gjør at de i mindre grad åpner for resonnering enn eksamensoppgavene etter LK20 gjør.

Våre resultater av fordelingen kreative og imiterende oppgaver varierer mellom eksamenene. Andelen deloppgaver som krever kreativ resonnering, ligger mellom 25 % og 57 % på de fem eksamenene. Det kan hende at prosentandelen vil jevne seg ut over tid. Det kan tenkes at en grunn for at den varierer, kan være at elevene skal få mulighet til å vise kompetansen sin i faget på ulike måter. Som nevnt i kapittel 2.1 Læreplan, skal eksamen vurdere kompetansemålene i lys av teksten *om faget*, hvor kjerneelementene inngår. Fra eksamensveiledningene, de aktuelle årene, kommer det også frem at kjerneelementene er del av vurderingskriteriene (Utdanningsdirektoratet, 2022c, 2023c). Oppgavesettene har som mål å sikre at elevene får vist kompetanse i så stor del av faget som mulig (Utdanningsdirektoratet, 2022c, 2023c). Dette betyr at eksamen må inneholde oppgaver som også gir utgangspunkt for de øvrige kjerneelementene: utforskning og problemløsning; modellering og anvendelse; representasjon og kommunikasjon; og abstraksjon og generalisering. Oppgavene vi har kategorisert som kreative resonneringsoppgaver, kan også dekke andre kompetanseområder og kjerneelementer i faget. Men det trenger ikke være tilfellet, og det at oppgavene skal være «i samsvar med kompetansemålene og teksten om faget i læreplanen» (Utdanningsdirektoratet, 2023c, s. 5), kan gjøre at fordelingen av hvert enkelt kjerneelement varierer fra eksamen til eksamen.

Kreative oppgaver på del 1 og del 2

Vi fant også at fordelingen av kreative og imiterende resonneringsoppgaver var varierende på del 1 og del 2 av eksamen. For de fleste eksamenssettene var det flere av deloppgavene på del 1 som krevde kreativ resonnering enn på del 2, se figur 27 nedenfor. Dette så vi på som et interessant funn, siden det tidligere har vært mer rutinepregede oppgaver på del 1 av eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2022d). Etter LK20 økte fokuset på å åpne oppgavene og at elevene skulle få vise kompetansen sin på forskjellige måter (Utdanningsdirektoratet, 2022d). Dette økte fokuset gjelder også for oppgaver på del 2; etter innføringen av LK20 er det ikke lenger et krav eller en anbefaling om bruk av spesifikke hjelpemidler. Dermed må elevene selv velge hensiktsmessige hjelpemidler, og ta i bruk sin egen hjelpemiddelkompetanse for å selv avgjøre om, og i hvilke tilfeller et hjelpemiddel vil være nyttig for å løse en oppgave (Utdanningsdirektoratet, 2022d).



Figur 27. Andel oppgaver med kreativ resonnering

Noe av grunnen til at andelen kreativ resonnering ofte er mindre på del 2 av eksamen, kan være at oppgavene på del 2 har flere deloppgaver per hovedoppgave. Da kan det være ulike resonneringstyper i de ulike deloppgavene. Løsningen på tidligere deloppgaver kan danne et grunnlag, og være en veiledning for elevene til å velge en bestemt retning i løsningsprosessen, som gjør at det ikke kreves kreativ resonnering. Dette samsvarer med Lithners (2008) underkategori *guided AR*, hvor elevene blir veiledet av for eksempel oppgaveteksten. Guided AR er en underkategori av algoritmisk resonnering og betegnes derfor ikke som kreativ resonnering. I studien vår plasseres derfor oppgaver med tydelig veiledning fra oppgavetekst og tidligere deloppgaver, som en form for algoritmisk resonnering, avhengig av oppgaven og løsningens art. Oppgaver med deloppgaver har derfor ofte en form for algoritmisk resonnering i noen av deloppgavene og disse er det flere av på del 2 enn på del 1.

At eksamensoppgavene ikke krever eller antyder et bestemt hjelpemiddel i løsningsprosessen, kunne tenke seg gjøre at oppgavene ville krevd resonnering i større grad. De aktuelle oppgavene er likevel ofte kjente for elevene, og de har gjennom liknende oppgaver opparbeidet rutiner rundt valg av hjelpemiddel og løsning (algoritmer). Derfor har vi ikke kategorisert dem som kreative.

6.1.2 De kreative resonneringsoppgavene

Vår analyse og kategorisering av de 114 deloppgaver i eksamenssettene har gitt en større innsikt i hvordan eksamensoppgavene i 1T kan fungere som et utgangspunkt for at elevene skal kunne bruke kreativ resonnering. Vi skal se på disse oppgavetypene og diskutere de med utgangspunkt i teori, tidligere forskning og læreplanen.

De lokalt kreative oppgavene har vi, i likhet med Bergqvist (2007), ikke delt inn i videre underkategorier. Her ligger den kreative resonneringen i en bestemt del av oppgaven, mens resten kan løses ved bruk av innlærte algoritmer. Her er det ofte ekstra tolkningsarbeid som må til for å komme i gang med eller videre i en løsningsprosess. Jeannotte og Kierans aspekter vil være representert i ulike former i de forskjellige oppgavene, mens *validering* vil være en sentral rolle i alle oppgavene, da valgene elevene gjør under den kreative resonneringen må begrunnes for at de skal bli overbevist sin egen løsning. Av figur 10 ser man at flere eksamenssett har større andel lokalt kreative resonneringsoppgaver enn globale. Dette kan være uheldig, siden elever får brukt resonnering i større grad i globalt kreative oppgaver. Siden LKR-oppgaver også består av algoritmisk resonnering i løsningsprosessen, vil man miste deler av det kreative resonneringsaspektet, dersom andelen imiterende og lokal kreativ resonnering er høy og andelen global kreativ resonnering er lav. Slik som på eksamen høsten 2021, dette var den første eksamen etter LK20 og kjerneelementene var kanskje ikke like implementert i undervisningen, og eksamen enda.

Vi har definert fem underkategorier av global kreativ resonnering: koble graf og uttrykk, vurdere andres påstander/regler, bestemme/skissere funksjon, sammenlikne uttrykk og lage programmeringskode. Hver av disse kan ses på som oppgavetyper som gir utgangspunkt for kreativ resonnering. Det er én eksamensoppgave under GKR som ikke passer under noen av disse fem underkategoriene, som alene er en oppgavetype som gir utgangspunkt for kreativ resonnering på.

I løsningsprosessen til oppgaver i kategorien *koble graf og uttrykk*, blir hovedprosessene til Jeannotte og Kieran (2017) gjeldende. Elevene kan *utforske likheter og forskjeller* mellom grafene og uttrykkene som oppgis. De må også *validere* valget sitt, sjekke at valgt graf passer med uttrykket, og begrunne dette enten overfor seg selv eller også skriftlig i eksamensbesvarelsen. Når det gjelder det strukturelle aspektet, kan løsningsprosessen ta ulik form. Om elevene sammenlikner uttrykk og grafer, vil det være en kombinasjon av deduktiv og abduktiv resonnering. Dersom elevene selv lager en skisse ut ifra uttrykket og sammenlikner med de gitte alternativene, vil det være en mer deduktiv struktur på resonneringen.

Vi merket oss representasjonene av grafene ved disse oppgavene. Skalaene på x- og y-aksene er ikke like. I resultatet så vi på to oppgaver til denne kategorien, en av de var oppgave 6b, se figur 17. Den riktige løsningen der er graf C, hvor det ser ut til at én enhet i y-retning tilsvarer omtrent $\frac{1}{3}$ enhet i x-retning. Dette kan skape forvirring hos enkelt elever, dersom de regner ut skjæringspunktet med y-aksen og ikke tenker på at aksene kan være skalert ulikt. Samtidig kan det være et grep for å fordre resonnering i oppgaven, da ett nullpunkt og skjæring med y-aksen ikke er nok for en konklusjon.

Underkategorien *vurdere andres påstander/regler* er mer komplekse. Tematikken i denne underkategorien er ikke nødvendigvis den samme, og løsningsmetodene kan variere fra oppgave til oppgave. Felles er likevel at oppgavene kan avdekke elevenes evne til å kritisk vurdere andre sine resonnementer. I oppgavene blir det enten oppgitt en påstand eller en regel utviklet av andre, og ofte er en tankeprosess eller et påbegynt resonnement gitt. Derfor vil strukturen i elevenes resonnering være abduktiv, hvor de starter med en påstand og må jobbe seg bakover for å finne ut om og hvorfor denne kan være riktig, med eller uten hjelp fra andres tankerekker. Under prosessaspektet er det allerede fra oppgaveteksten blitt dannet en hypotese og elevenes løsning vil bestå i å *validere* denne. I arbeidet kan de komme til å bruke flere av underprosessene under *utforskningen av likheter og ulikheter*.

Underkategorien vurdere andres påstander/regler kan også kobles til læreplanen, som beskriver resonnering slik: «Resonnering i matematikk T handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker» (Kunnskapsdepartementet, 2020). Det er nettopp dette elevene må gjøre i disse oppgavene; de må vurdere om resonneringen som er gjort er gyldig og i enkelte tilfeller må de også fullføre resonnementene. Det kan være vanskelig for elevene å vite hvor mye de skal ta med i den skriftlige besvarelsen. Samtidig kan det være vanskelig for sensor å bedømme, da det kan være uklart hva som er nok for å få full uttelling på oppgaven.

Bestemme eller skissere en funksjon er den neste kategorien, hvor elevene får oppgitt noe informasjon om en funksjon, enten ved tekst eller graf, men ikke funksjonsuttrykket. Disse oppgavene har varierende struktur, hvor elevene kan gå frem og tilbake mellom mulige løsninger og informasjonen som er oppgitt. Flere deler av prosessaspektet (Jeannotte & Kieran, 2017) blir også gjeldende, og elevene kan blant annet danne hypoteser, identifisere mønster i informasjonen og sammenlikne løsning med informasjonen. Sistnevnte vil også bli en viktig del av *valideringen* av løsningen. Valideringen vil være en vesentlig del av disse oppgavene, for at elevene skal være sikre på sin egen løsning, og i enkelte oppgaver må de også skrive ned en begrunnelse.

Oppgavene likner hverandre i problem og oppbygning, men det er likevel variasjon i kompleksitet (polynomgrad) og variert om oppgavene opptrer på del 1 eller del 2 av eksamen. Av oppgavens art vil det kreves kreativ resonnering før eventuelle hjelpemidler kan tas i bruk på del 2. De fleste oppgavene fant vi på del 1 (5 av 7). En mulig forklaring her er at oppgavene *kan* løses uten hjelpemidler, og det blir ikke nødvendigvis enklere å løse oppgavene ved bruk av hjelpemidler, fordi hva som lønner seg å gjøre/bruke ikke er åpenbart. Ved å plassere disse oppgavene på del 1, hindres elevene i å bruke hjelpemidler og potensielt rote seg bort i disse.

Neste underkategori handler om å *sammenlikne uttrykk*, som allerede fra navnet kan kobles til Jeannotte og Kierans hovedprosess *utforsking av likheter og forskjeller*. Her vil underprosessene deres: *mønsteridentifisering* og *sammenlikning* kunne bli gjeldende i løsningsprosessen. *Valideringsprosessen* vil også være til stede, i en begrunnelse av hvorfor valgte forskjeller/likheter er gjeldende for uttrykkene. Oppgavene åpner for at elevene kan trekke resonnementet lengre eller kortere. Å utdype hvorfor forskjellene blir som de blir, vil vise større resonneringskompetanse enn å peke på forskjellene uten begrunnelse. Dersom elevene velger å se på hvorfor forskjellene/likhetene blir som de blir, vil det bli en abduktiv struktur på resonneringen.

Disse oppgavene viser et interessant tilfelle; de gir utgangspunkt for kreativ resonnering og mulighetene er store. Likevel kan oppgavene løses med større eller mindre grad av kreativ resonnering, avhengig av hvor langt den enkelte eleven velger å trekke resonnementene sine.

Underkategorien *lage programkode* består av to oppgaver, som begge handler om rekker, hvor *mønsteridentifisering* og *generalisering* blir spesielt viktig i løsningsprosessen. Strukturen i resonneringen blir induktiv, siden elevene skal skape noe nytt. I disse oppgavene er også *validering* viktig, og en del av dette kan være å teste programmet de lager på deloppgave a, som i begge tilfeller består av å regne ut et bestemt tilfelle.

Programmeringsoppgavene er komplekse i både tema og løsning, elevene må forstå problemet i oppgaven for å utvikle et program som kan løse det. Vi observerte noe interessant ved hver av oppgavene. Den første oppgaven, som ble gitt på eksamen våren 2023, tar for seg areal mellom en graf og x-aksen i et koordinatsystem. Dette er noe som assosieres med integrasjon, og liknende oppgaver kan brukes i oppstarten av integrasjonstema for at elever skal forstå sammenhengen mellom integrasjon og areal under en graf. Integrasjon inngår derimot ikke som pensum i matematikk 1T, så denne oppgaven introduserer elevene for et nytt problem, som de ikke har kjennskap til fra før.

Når det gjelder oppgaven fra eksamen høsten 2023, figur 23, vil vi kommentere delen av oppgaven der elevene skal gjøre en utregning. Denne utregningen hadde vært veldig grei å gjøre, dersom programmet de lagde kunne brukes direkte, men det er ikke tilfellet. Her er det altså ikke helt samsvar i beskrivelsen av programmet elevene skal lage og det programmet skal brukes til. Hvorfor det gjøres slik kan vi bare spekulere i, kanskje det er for å teste elevenes forståelse for at valg av løkker har en betydning, men fra et programmeringsperspektiv er det lite effektivt å lage et program som ikke kan brukes direkte til problemet som skal løses.

Med LK20 fikk programmering en større plass i skolen enn tidligere (Matematikksenteret, u.å.). Oppgaver som omhandler programmeringskoder blir presentert på eksamen i matematikk 1T, både der koder skal vurderes og der elever selv må lage en programmeringskode. Fra eksamensveiledningen for 2024 har programmering også fått sitt eget avsnitt, og det kommer frem at elever i 1T kan bli spurt om å lage og levere et program (Utdanningsdirektoratet, 2024a). Dette tyder på at liknende programmeringskoder blir en del av eksamen, også i årene fremover.

Den siste globalt kreative resonneringsoppgaven, som ikke passer i de øvrige underkategoriene, består av et komplekst problem og løsning se figur 25. Her er flere av Jeannotte og Kierans aspekter gjeldende; elevene må *identifisere mønster* i figuren og begrunne veivalg overfor seg selv. Her vil strukturen være induktiv, siden elevene skal undersøke noe som er ukjent. I løsningsprosessen vil de likevel måtte ta i bruk deduktiv resonnering ved bruk av kjente regler for å kunne konkludere.

I løsningen til denne oppgaven inngår å lage et funksjonsuttrykk og å anvende dette. Oppgaven plasseres likevel ikke under kategorien *bestem eller skisser en funksjon*, fordi det ikke eksplisitt blir spurt etter en funksjon. Setningen: «Hver gardin skal ha form som en parabel» (Utdanningsdirektoratet, 2022a, s. 21) er det eneste som peker mot funksjoner, men resten av beskrivelsen og figurene gir ikke umiddelbare assosiasjoner til funksjoner. Oppgaven er stor og omfattende, svært åpen, krever mye tolkning og det er ikke liknende oppgaver verken i læreboka eller på tidligere eksamener, noe som alle bidrar til å underbygge at oppgaven krever kreativ resonnering gjennomgående i oppgaven.

At kategoriene våre under kreativ resonnering kan knyttes til Jeannotte og Kieran, samt til kjerneelementet «resonnering og argumentasjon», underbygger at disse oppgavene krever kreativ resonnering. Og viser at underkategoriene våre av GKR kan representere ulike oppgavetyper som gir utgangspunkt for global kreativ resonnering i eksamensoppgavene. Mens LKR er en måte det gis utgangspunkt for kreativ resonnering, i en bestemt del av løsningsprosessen.

6.2 Begrensninger og metodekritikk

Studien tar for seg eksamensoppgaver fra de fem eksamenssettene fra høsten 2021 til høsten 2023, og hvordan fordelingen av resonneringsoppgaver er på disse eksamenssettene. Forholdet mellom imiterende og kreative oppgaver er varierende på de presenterte eksamenene. På de to siste eksamenene er forholdet mellom kreative og imiterende oppgaver ganske jevnt, med 38 % og 39 % kreative oppgaver. Samtidig er forholdet et annet dersom vi tar med poeng per oppgave i beregningen, da gis 38 % av poengene gjennom kreative resonneringsoppgaver på den siste eksamen (høsten 2023), mens det på våreksamen 2023 var en 50/50 poengfordeling. Det er ingen tydelige tendenser, når det gjelder denne fordelingen. Dermed kan ikke vår undersøkelse brukes for å si noe om hvordan fordelingen, verken med eller uten poengberegning, vil bli på eksamener fremover i tid.

En annen faktor er hvorvidt resonneringstypen oppgaven krever og resonneringen som faktisk blir brukt av elevene er den samme. Etter vårt rammeverk, med bakgrunn i teori, og bruk av læreboka Mønster 1T, vil dette være tilfellet for de fleste elevene. Likevel er elever i 1T, og andre matematiske fag, forskjellige og ligger på ulike matematisk nivå. Enkelte elever kan måtte ta i bruk kreativ resonnering i møte med oppgaver vi har plassert under imiterende resonnering. Dette skjer dersom løsningsalgoritmen er utenfor elevens rekkevidde og vedkommende må tenke nytt og kreativt i arbeidet med oppgaven. På samme måte kan enkelte oppgaver som krever en form for kreativ resonnering løses ved imiterende resonnering, dersom eleven har jobbet mye med slike oppgaver og har lagret en mental algoritme for å løse disse. Dette er en utfordring som også er diskutert i andre studier (Bergqvist, 2007; Fossum, 2009; Palm et al., 2005).

En viktig del av avgjørelsen om en oppgave krever kreativ resonnering eller ikke, er hvorvidt oppgaven er kjent for elevene. Vi har sett på læreverket Mønster 1T (Kalvø et al., 2020), og sett på oppgavene i denne som et grunnlag en typisk elev vil ha før eksamen. Eventuelt andre læreverk, nettsider og oppgavesett elevene har benyttet seg av er ikke tatt høyde for i undersøkelsen. Noen eksamensoppgaver er ganske like, også oppgaver som krever kreativ resonnering. Dersom det blir en trend med oppgaver som likner hverandre på eksamenene fremover, kan noen av de kreative resonnementene forsvinne. Dette kan skje hvis elevene bruker tidligere eksamenssett som en øving frem mot eksamen, og på den måten opparbeider algoritmer for å løse en viss type oppgaver.

7. Konklusjon og implikasjoner

7.1 Konklusjon

Etter innføringen av LK20 har det vært et større fokus på områder som matematisk resonnering og argumentasjon, i undervisning og ved vurderinger. For å gi utgangspunkt for kreativ resonnering, som knyttes til læreplanens kjerneelement resonnering og argumentasjon, har vi sett at man må arbeide med oppgaver som introduserer noe nytt for elevene. Dersom elevene arbeider med rutineoppgaver eller andre oppgaver elevene er vant med, vil de kunne bruke innlærte algoritmer i løsningen, og mye av resonneringen vil forsvinne. Dette gjelder generelt, men også eksamensoppgaver.

Fra denne studien har vi funnet at eksamensoppgavene danner utgangspunkt for ulike typer resonnering, hvor både imiterende og kreativ resonnering er representert i eksamenssettene. Dette gjenspeiler at elever skal få vise kompetansen sin i faget på ulike måter (Utdanningsdirektoratet, 2024b). Gjennom arbeidet med masteroppgaven, har vi funnet at 36 % av eksamensoppgavene gir utgangspunkt for kreativ resonnering. Oppgaver som kan løses ved innøvde algoritmer er flere på de fleste eksamenssettene, her er eksamen høsten 2022 et unntak hvor 57 % av oppgavene krevde kreativ resonnering. Det ser ut til å være en økning i kreative resonneringsoppgaver på eksamen nå enn før LK20, dersom vi sammenlikner våre resultater med Fossums (2009) resultater. På del 1 av eksamen var det en større andel kreative resonneringsoppgaver, sammenliknet med del 2, også her er eksamen høsten 2022 et unntak, der var andelen større på del 2.

Gjennom studien ønsket vi å svare på problemstillingen: *Hvordan er eksamensoppgaver i 1T et utgangspunkt for resonnering?*

Dette har vi gjort ved å sette oppgavene som gir utgangspunkt for global kreativ resonnering i egne kategorier. Kategoriene er lagd med bakgrunn i oppgavene selv, hvordan oppgavetype det er, hva oppgaven spør etter og hvilke verktøy eller løsningsmetoder som brukes. Slik endte vi opp med følgende kategorier: oppgaver som handler om å (1) koble sammen graf og uttrykk, (2) vurdere andres påstander og regler, (3) bestemme eller skissere en funksjon, (4) sammenlikne uttrykk, (5) lage et program og (6) annet. Disse kategoriene representerer oppgavetyper som gir utgangspunkt for kreativ resonnering på gjennom hele løsningsprosessen. Lokalt kreative resonneringsoppgaver gir også utgangspunkt for kreativ resonnering, men bare i en spesifikk del av oppgaveløsningen. Sammen er våre underkategorier av GKR, samt funnene innen LKR oppgavetyper som gir utgangspunkt for kreativ resonnering i eksamensoppgaver i 1T.

7.2 Implikasjoner og videre forskning

Vi vil i dette underkapitlet presentere hvilken betydning vår studie kan ha for undervisningen og eksamen i årene fremover. Vi kommer også til å komme med noen forslag for videre studier knyttet til oppgaver med resonnering og argumentasjon.

I undervisningen skal alle delene av læreplanen dekkes (Forskrift til opplæringslova, 2006, § 3). Derfor er det viktig å tilrettelegge for kreativ resonnering i flere deler av undervisningen. Kategoriene som kommer frem under global kreativ resonnering i vår undersøkelse, vil kunne brukes som måter å tilrettelegge for kreativ resonnering på, i en klasseromssituasjon. Eksamen påvirker undervisningen, og lærere kan ta utgangspunkt i oppgaver som plasseres under våre underkategorier av GKR i arbeid med resonnering og argumentasjon i klasserommet og vurderingssituasjoner. Når vi selv skal ha undervisningsøkter med fokus på resonnering og argumentasjon, vil vi være bevisst de ulike resonneringstypene, og oppgaver som passer til kreativ resonnering. Samtidig vil vi passe på å ikke gi elevene for gode hint eller for mye veiledning i arbeid med kreative resonneringsoppgaver, da vil mye av det kreative og resonneringen forsvinne fra oppgaven.

Med økt fokus på oppgaver som krever resonnering, blir elevene mer trent på oppgavene. Ved bruk av eksamensoppgaver, som krever kreativ resonnering, i andre situasjoner enn på eksamen, kan oppgavetypen over tid bli kjent for elevene – de utvikler algoritmer for å løse de. Noen av underkategoriene våre til GKR består av mange oppgaver, som kan føre til at denne typen oppgave øves på i klasserom og den kreative resonneringsbiten i disse oppgavene minker. Derfor vil det være viktig at eksamensoppgaver utvikler seg og varierer, for å sørge for at elevene får brukt kreative resonnementer i løsningen. For å få til den variasjonen, må vi først få en oversikt over hvilke oppgavetyper/kategorier som allerede eksisterer og kan bli kjente på sikt, det kan denne undersøkelsen bidra til. Å inkludere oppgaver som er annerledes enn tidligere eksamensoppgaver og lærebok-oppgaver, slik som oppgaven under kategorien *annet* eller oppgavetyper det foreløpig er få av på eksamenssettene, kan være en mulig løsning. Over tid kan det bli nødvendig med ytterlige oppgavetyper innenfor GKR, for å sikre det kreative i løsningen.

Når det gjelder diskusjonen fra 2020 knyttet til endring i eksamensformen i matematikk, sier vi oss enige i anbefalingen om å beholde en del 1 uten hjelpemidler. Resultatene våre viser at det er en større andel oppgaver på del 1 som krever kreativ resonnering, enn på del 2. Ekskluderer man delen uten hjelpemidler, vil andelen kreativ resonnering trolig synke. Samtidig vil noen av oppgavene i kategorien GKR ikke fungere på del 2, for eksempel oppgavene i underkategorien 5.2.1: Oppgaver som handler om å koble sammen graf og uttrykk. Her kan uttrykket skrives inn i et graftegningsprogram, og elevene kan se hvilken av grafene som passer til uttrykket, og resonneringen ville vært algoritmisk dersom oppgaven hadde vært på del 2.

Når det gjelder videre forskning er det flere ting det kunne vært interessant å vite mer om. I studien vår har vi sett på hvordan eksamensoppgavene gir utgangspunkt for resonnering og argumentasjon. Hvordan elevene faktisk resonnerer og argumenterer i løsningsprosessen, hadde vært interessant å undersøke. Dette kan være vanskelig å utføre i praksis, da mye av resonneringen som finner sted i eksamensoppgavene, kan være skjult og fremkommer nødvendigvis ikke av skriftlige elevsvar. En mulighet kunne være å se på hvordan elever arbeider med eksamensoppgaver i par/grupper, og hvordan de da resonnerer og argumenterer. Det blir interessant å følge utviklingen fremover, vil de globalt kreative oppgavene på kommende eksamenssett kunne deles i de samme underkategoriene, og vil det komme nye underkategorier?

Litteraturliste

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 348-370. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap humaniora juss og teologi. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/ressurser/publikasjoner/retningslinjer-nesh/

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2014). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *98*(2), 127-139. https://doi.org/10.18261/ISSN1504-2987-2014-02-07

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova* (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/forskrift/2006-06-23-724

Fossum, A. (2009). *Algoritmer og kreativitet til matmatikkeksamen* [Masteroppgave, Universitetet i Oslo]. DUO Vitenarkiv. http://urn.nb.no/URN:NBN:no-22879

Ghosh, A. & Minken, M. (2021, 21. januar). *Usikkert om matte-eksamen gjennomføres som planlagt*. Utdanningsforbundet. https://www.utdanningsforbundet.no/nyheter/2021/usikkert-om-matte-eksamen-gjennomfores-som-planlagt/

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K., Weider, Ø. J. & Wilmann, S. (2020). *Mønster : matematikk 1T : studieforberedende utdanningsprogram*. Gyldendal.

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Fornyer innholdet i skolen* (Pressemelding Nr: 132-18). https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/regjeringen-solberg/aktuelt-regjeringen-solberg/kd/pressemeldinger/2018/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T)* (MAT 09-01). Fastsatt som forskrift. https://www.udir.no/lk20/mat09-01?lang=nob

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lydersen, S. (2018). Cohens kappa - Et mål på samsvar mellom observatører. *Tidsskrift for Den norske legeforening*, *138*. https://doi.org/10.4045/tidsskr.17.0962

Manger, T., Lillejord, S., Nordahl, T. & Helland, T. (2013). *Livet i skolen 1. Grunnbok i pedagogikk og elevkunnskap: Undervisning og læring* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Matematikk.net. (2023a, 20. april). *1T 2022 høst LK20 LØSNING*. https://matematikk.net/w/index.php?title=1T_2022_h%C3%B8st_LK20_L%C3%98SNING&oldid=28408

Matematikk.net. (2023b, 7. juni). *1T 2023 vår LK20 LØSNING*. https://matematikk.net/w/index.php?title=1T_2023_v%C3%A5r_LK20_L%C3%98SNING&oldid=28604

Matematikk.net. (2023c, 23. november). *1T 2023 høst LØSNING*. https://matematikk.net/w/index.php?title=1T_2023_h%C3%B8st_L%C3%98SNING&oldid=29015

Matematikksenteret. (u.å.). *Programmering i LK20*. https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser-og-undervisningsopplegg/programmering/programmering-i-lk20

Munthe-Kaas, A. Z., Rønquist, E., Rypdal, M., Erfjord, I., Strømskag, H., Helgesen, R., Handal, S., Randeberg, L. L. & Raustøl, H. M. (2021, 9. mai). En del av eksamen bør løses uten hjelpemidler. *Aftenposten, Debatt*. https://www.aftenposten.no/meninger/debatt/i/x3LVdX/eksamen-i-matematikk-er-paa-ville-veier

Nasjonal digital læringsarena. (2021). *Løsning MAT1021 matematikk 1T høsten 2021*. https://api.ndla.no/files/resources/nKUxq76ctFRL3QGo.pdf

Nasjonal digital læringsarena. (2022). *Eksamen MAT1021 matematikk 1T vår 2022*. https://api.ndla.no/files/resources/dekMtqyjsdSQqfVZ.pdf

Palm, T., Boesen, J. & Lithner, J. (2005). The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessments. *Research reporst in mathematics education*, (5). https://www.researchgate.net/publication/251926273_The_Requirements_of_Mathematical_Reasoning_in_Upper_secondary_Level_Assessments

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Brill. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789460912467

Samordna opptak. (2024, 18. januar). *Sverige - hvordan få generell studiekompetanse*. https://www.samordnaopptak.no/info/utenlandsk_utdanning/sverige/dekker-du-ikke-opptakskravene/

Smestad, B. (2018). Dybdelæring. *Tangenten: tidsskrift for matematikkunder visning*, *29*(4), 31–34.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. http://www.jstor.org/stable/30034869

Teknisk-naturvitenskapelig forening. (2021, 11. august). *Utdanningsdirektoratet snur om todelt eksamen*. https://www.tekna.no/aktuelt/utdanningsdirektoratet-snur-om-todelt-eksamen/

Thomas, M. O. J. (2014). Algorithms. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 36-38). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_8

Umland, K. & Sriraman, B. (2014). Argumentation in Mathematics. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 44-46). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_10

University of Nebraska-Lincoln. (u.å.). *Cohen's Kappa Index of Inter-rater Reliability*. https://psych.unl.edu/psycrs/handcomp/hckappa.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Eksamen MAT1021 Matematikk 1T [høst]*.

Utdanningsdirektoratet. (2022a). *Eksamen MAT1021 Matematikk 1T [høst]*.

Utdanningsdirektoratet. (2022b). *Eksamen MAT1021 Matematikk 1T [vår]*.

Utdanningsdirektoratet. (2022c). *Eksamensveiledning - om vurdering av eksamensbesvarelser [Matematikk 1P, 1T]*.

Utdanningsdirektoratet. (2022d). *Rapport om hjelpemidler til eksamen i matematikk 2022*. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/hjelpemidler-til-eksamen-i-matematikk-2022/

Utdanningsdirektoratet. (2023a). *Eksamen MAT1021 Matematikk 1T [høst]*.

Utdanningsdirektoratet. (2023b). *Eksamen MAT1021 Matematikk 1T [vår]*.

Utdanningsdirektoratet. (2023c). *Eksamensveiledning - om vurdering av eksamensbesvarelser [Matematikk 1P, 1T, 2P, 2PY]*.

Utdanningsdirektoratet. (2023d, 15. august). *Hvordan bruke læreplanene?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvordan-ta-i-bruk-lareplanen/

Utdanningsdirektoratet. (2024a). *Eksamensveiledning - om vurdering av eksamensbesvarelser [Matematikk 1P, 1T, 2P, 2PY]*.

Utdanningsdirektoratet. (2024b, 1. mars). *Endringer i eksamen*. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/slik-endrer-vi-eksamen/#a210169