Master

Muligheter for resonnering og argumentasjon i videregående lærebøker

En dokumentanalyse av seks norske matematikklærebøker

RACHEL YANG KOLBJØRNSRUD
HENRIK NESJE

VEILEDER
David Alexander Reid

Universitetet i Agder, 2024
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Emnekode: MA-502

Forord

Kristiansand, mai 2024

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem år med lektorutdanning på Universitetet i Agder. Prosessen har vært utfordrende, trivelig og lærerik. Vi ønsker å oppsummere denne masterreisen med en limerick:

"Raki and Henko with their future in sight,

Wrote pairwise a thesis with not too much fight.

In textbooks they dived,

Their master it thrived,

In research they found pure delight!"

Fra fadderuke første studieår fant vi fort ut at den eneste personen som maktet utallige timer med den ene av oss, var den andre. Etter lange dager med eksamenslesing, lab-undervisning og gruppetimer, fant vi et vennskap som muligens kunne holde gjennom en masteroppgave. Prosjektet har bydd på mye diskusjoner, gode ideer, elendige ideer, frustrasjon og lettelse. Rett og slett en berg-og-dal-bane for den mentale helsen som vi var så heldige å få kjøre sammen. Vi takker hverandre for et godt samarbeid, ikke bare gjennom masteroppgaven, men gjennom fem år med studier.

Vi hadde ikke klart disse årene uten en fin klasse rundt oss. Dere har vært gode å ha for å diskutere faglige temaer, men også for å få en pause fra det. Takk for alle lunsjpauser opp gjennom, og spesielt i masterperioden, som ga et avbrekk i lesingen og skrivingen. Det har vært godt for både humøret og hodet.

Takk til familie og venner for å spørre hvordan masterskrivingen går, og for å vise støtte når vi svarer «helt ok». Vi hadde ikke klart oss uten.

Den siste og største takken går til David Alexander Reid for å veilede oss gjennom master-oppgaven. Vi setter veldig pris på møtene, med både faglige diskusjoner og morsomme samtaler langt utenfor temaet. Takk for at du viste interesse og tro på prosjektet, og de gode tilbakemeldingene vi fikk underveis. Dette har både vært interessant og betryggende. Takk for å gi oss større kunnskap om Canada og «Canada day». 1. juli vil for alltid ha en ny og større betydning.

Sammendrag

I 2020 publiserte Utdanningsdirektoratet nye læreplaner for undervisning i norsk skole. De nye læreplanene introduserte begrepet «kjerneelementer», som skal være «[…] det viktigste faglige innholdet elever skal arbeide med i opplæringen» (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Kjerneelementet vi undersøker i masteroppgaven er resonnering og argumentasjon.

For å dekke den nye læreplanens krav til undervisningen, produseres det nye lærebøker. Lærebøker er et særlig viktig hjelpemiddel for lærere i planlegging av matematikkundervisning, og for elever til å arbeide med faget (Lepik et al., 2017).

Kjerneelementenes viktige rolle i læreplanen, samt lærebøkers rolle i matematikkundervisning, gjorde at vi fant temaet om muligheter for resonnering og argumentasjon i videregående lærebøker relevant. Dette ledet oss fram til det første forskningsspørsmålet vårt:

> *«Hvordan har videregående lærebøker tilrettelagt muligheter for at elever kan arbeide med kjerneelementet resonnering og argumentasjon?»*

Vi gjennomførte en dokumentanalyse basert på en metode av Bowen (2009). Metoden gikk ut på å gjennomføre et første overblikk over data, hvor vi systematiserer viktige elementer, og deretter å analysere funnene. Analysen ble gjennomført på lærebøker for praktisk (1P) og teoretisk (1T) matematikk for elever i første trinn på studiespesialisering. Kjerneelementet er likt for begge retningene, selv om de har ulike kompetansemål. Dette gjorde det interessant å sammenligne mulighetene for resonnering og argumentasjon mellom spesialiseringene. Ut fra dette formulerte vi det andre forskningsspørsmålet:

> *«Hva er forskjellene i lærebokforlagenes tilnærming til å tilrettelegge for muligheter for læring i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i 1P og 1T?»*

Resultatene våre tydet på at det eksisterer muligheter for resonnering og argumentasjon, men mulighetene var få og lite varierte. Vi observerte også store forskjeller på elevers muligheter til resonnering og argumentasjon i de to spesialiseringene. Dette kan tyde på at elever som velger praktisk matematikk ikke får samme muligheter for resonnering og argumentasjon i lærebøkene som elever i teoretisk matematikk.

Abstract

In 2020, the Norwegian Directorate for Education and Training published new curricula for teaching in Norwegian schools. The new curricula introduced the concept of «core elements», which are described as «[…]the most important academic content that students will work with during their education» (Utdanningsdirektoratet, 2019a, our translation). The core element we examine in this master's thesis is reasoning and argumentation.

To meet the new curriculum requirements, new textbooks are being produced. Textbooks are a particularly important tool for teachers in planning mathematics instruction, and for students to work with the subject (Lepik et al., 2017).

The significant role of core elements in the curriculum, as well as the role of textbooks in mathematics teaching, made the topic of opportunities for reasoning and argumentation in high school textbooks relevant. This led us to our first research question:

> *«How have high school textbooks facilitated opportunities for students to work with the core element of reasoning and argumentation?»*

We conducted a document analysis based on a method by Bowen (2009). The method involved conducting an initial overview of the data, where we systematized important elements, and then analysed the findings. The analysis was carried out on textbooks for practical (1P) and theoretical (1T) mathematics for first-year students in the general studies program. The core element is the same for both courses, although they have different competency goals. This made it interesting to compare the opportunities for reasoning and argumentation between the specializations. From this, we formulated our second research question:

> *«What are the differences in the textbook publishers' approaches to facilitating opportunities for learning the core element of reasoning and argumentation in 1P and 1T?»*

Our results indicated that there are opportunities for reasoning and argumentation, but these opportunities were few and not very varied. We also observed significant differences in the opportunities for reasoning and argumentation between the two specializations. This suggests that students who choose practical mathematics do not have the same opportunities for reasoning and argumentation in as students in theoretical mathematics.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Fra skoleåret 2020 implementerte Utdanningsdirektoratet (Udir) nye læreplaner for undervisning i både grunnskole og videregående skole (LK20). Disse læreplanene inkluderte en overordnet del som skulle adressere verdier og prinsipper som skulle ligge til grunn for all undervisning. Læreplanene fikk også ny struktur, hvor det første vi møter er *om faget*. Det er i denne delen vi blant annet finner *kjerneelementer* (Utdanningsdirektoratet, 2019b).

Utdanningsdirektoratet fremsetter at «kjerneelementer er det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Utdanningsdirektoratet, 2019a). De skal veilede elevene i å forstå og anvende faget, samt å hjelpe elevene til å se sammenhenger og forstå innholdet (Utdanningsdirektoratet, 2019a). For å oppnå målet med kjerneelementet må dem nødvendigvis ha en betydelig innflytelse på undervisningen, som en grunnpilar i lærerens planlagte undervisningsopplegg.

Innen matematikk på videregående skole er det seks kjerneelementer som går igjen i alle spesialiseringer man kan velge. Et av disse kjerneelementene er *resonnering og argumentasjon*, heretter forkortet til RA, som vi har valgt å fokusere på i denne oppgaven. Utdanningsdirektoratet definerer RA i praktisk matematikk (1P) på følgende måte:

> Resonnering i matematikk P handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk P handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020a, avsnitt 3).

For teoretisk matematikk (1T) er kjerneelementet formulert identisk, men med «P» byttet ut med «T». Det er verdt å merke seg at kjerneelementet eksplisitt inneholder begrepet «bevis», som en del av argumentasjonsdelen i RA (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). Derfor vil vi også inkludere bevis som en del av begrepet resonnering og argumentasjon.

Stylianides (2008) beskriver matematikk som en disiplin etablert gjennom en prosess, hvor et bevis ofte er det siste steget. Under prosessen kreves det blant annet argumentasjon til å forklare om stegene i prosessen stemmer, og hvorfor. På denne måten kan argumentasjon tolkes som en kompetanse som har bidratt, og bidrar, til å *utvikle* matematikk. Schoenfeld argumenterer for at «if problem solving is the "heart of mathematics," then proof is its soul» (2009, s. xii). Resonnering og argumentasjon kan, gjennom deduktive argumenter og bevis, verifisere eller avkrefte påstander innen matematikk. Dette aspektet har særlig relevans i dagens samfunn, hvor spredning av informasjon har blitt enklere, noe som kan føre til en økning i mengden av mis- og desinformasjon. I tillegg, med fremveksten av kunstig intelligens, blir evnen til å evaluere påstander stadig viktigere. Basert på dette mener vi at vi trygt kan si at resonnering og argumentasjon er en viktig del av matematikk.

Når nye læreplaner blir innført, publiserer bokforlagene også lærebøker for å imøtekomme de nye kravene. Lærebøker har ofte stor innflytelse på undervisningen i klasserommet og planleggingen av læringsaktiviteter, og blir derfor et viktig verktøy både for lærere og elever

(Lepik et al., 2017, s. 287). Lepik et al. (2017) gjennomførte en undersøkelse for å se hvordan lærere i Estland, Finland og Norge brukte lærebøkene i undervisningen, hovedsakelig på grunnskolenivå. I undersøkelsen svarte norske lærere at lærebøkene spilte en betydelig rolle i planleggingen av undervisningen. Mange av oppgavene elevene arbeidet med var hentet fra lærebøkene, og lærebøkene ble i stor grad brukt til hjemmelekser (Lepik et al., 2017, s. 299-302). Selv om studien ble gjennomført på grunnskolen, tror vi at lignende resultater hadde blitt observert på videregående skole. Siden lærebøker i matematikk tilsynelatende har en betydelig innflytelse på undervisningen, oppgaver og lekser, er det særlig viktig at forlagene som tolker læreplanen, dekker denne på en tilfredsstillende måte.

Da vi skulle velge emne for vår masteroppgave, fant vi resonnering og argumentasjon i lærebøker som et spennende tema å forske på. Under arbeidet med å lese tidligere forskning, observerte vi at mye av den eksisterende forskningen, utført i det 21. århundre, primært hadde blitt gjennomført på grunnskolenivå, og det var begrenset med nyere forskning på videregående skole. Vi så derfor en mulighet til å utvide dette forskningsfeltet ved å studere videregående lærebøker. Vi ønsket å undersøke hvilke muligheter elever får til å arbeide med resonnering og argumentasjon. Dermed formulerte vi følgende forskningsspørsmål:

> *«Hvordan har videregående lærebøker tilrettelagt muligheter for at elever kan arbeide med kjerneelementet resonnering og argumentasjon?»*

Videre syntes vi også de forskjellige spesialiseringene i matematikk kunne være et interessant aspekt for RA i lærebøker. Spesialiseringene innen praktisk og teoretisk matematikk like stort arbeidsomfang, 140 timer (Sirnes, 2023), i tillegg er kjerneelementet RA formulert helt likt. På bakgrunn av dette har vi også formulert følgende forskningsspørsmål:

> *«Hva er forskjellene i lærebokforlagenes tilnærming til å tilrettelegge for muligheter for læring i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i 1P og 1T?»*

Innledningsvis vil vi presentere viktige begreper som oppgaven vår bygger på for å presisere hvilken betydning de vil ha videre i oppgaven. Deretter vil vi presentere vårt valg av metode, med begrunnelse for de avgjørelsene vi har tatt. Resultatene vil inneholde presentasjonen av våre funn fra analyseringen av datainnsamlingen. Til slutt vil vi diskutere hvordan disse resultatene besvarer forskningsspørsmålene våre, og gi forslag til videre forskning.

2 Begrepsrammeverk og tidligere forskning

I dette kapittelet ønsker vi å presentere sentrale begreper omhandlet resonnering og argumentasjon, og hvilken betydning disse har i denne oppgaven. Videre vil vi fremsette tidligere forskning relevant for temaet.

2.1 Begrepsrammeverk

Flere av begrepene vi bruker gjennomgående i oppgaven, har ikke nødvendigvis én enkel, intuitiv betydning. Forskjellige matematikkdidaktikere og forskere bruker begrepene på forskjellig vis, da variasjoner av kontekst og behov vil påvirke hvordan definisjonene er formulert. Vi har sett på relevant forskningslitteratur i sammenheng med læreplanen for å komme i mål med definisjonene av begrepene.

2.1.1 Resonnering

I 2017 publiserte Jeannotte og Kieran en artikkel om matematisk resonnering. Forfatterne forsøkte å sammenfatte relevant forskningslitteratur omhandlet resonnering, for å danne en forståelse av hva som inngår i begrepet, og dermed danne en modell for hva resonnering betyr i skolesammenheng. Forfatterne av artikkelen deler matematisk resonnering inn i to aspekter; et strukturelt aspekt og et prosessaspekt, hvor begge er viktige for å forstå karakteristikken bak matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 1).

Det strukturelle aspektet deler resonnering inn i forskjellige typer, og de mest omtalte er deduksjon, induksjon og abduksjon (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Reid og Knipping (2010) beskriver disse begrepene i sin bok, Proof in Mathematics Education. Forfatterne ønsket å lage boken blant annet for å hjelpe lærere, forskere og studenter til å få en oversikt over hva disse begrepene betyr (Reid & Knipping, 2010, s. xiii). Boken gir en forklaring på blant annet deduktiv, induktiv og abduktiv resonnering, samt mekanisk deduksjon og resonnering med analogi (Reid & Knipping, 2010, s. 83). Vi har valgt å se på definisjonene av de fire førstnevnte.

Deduktiv resonnering er den eneste formen for resonnering man med sikkerhet kan si er gyldig og er grunnleggende for å kunne produsere et bevis. I deduktiv resonnering konkluderer man med et resultat ut fra et tilfelle og en regel (Reid & Knipping, 2010, s. 83-84).

Induktiv resonnering bruker det man vet stemmer, til å konkludere med ny informasjon som tidligere ikke var kjent. Et induktivt resonnement er annerledes enn et deduktivt resonnement, da det konkluderer med en regel fra et tilfelle og resultatet. Denne typen resonnering er ikke helt sikkert, i motsetning til et deduktivt resonnement (Reid & Knipping, 2010, s. 88).

Abduktiv resonnering tar et resultat og en regel for å konkludere med et tilfelle. Man kan på et vis se på det som den reversible prosessen av deduktiv resonnering. Reid og Knipping forklarer at Eco identifiserte tre typer abduktiv resonnering. Den første typen benytter en kjent regel, til å konkludere med et tilfelle. En annen type kan ha *flere* kjente regler, som leder til samme resultat. Det kan i noen tilfeller også oppstå situasjoner hvor ingen generell regel er kjent. Her må personen som resonnerer komme opp med en regel selv (Reid & Knipping, 2010, s. 101-102).

Reid og Knipping bruker *tilfelle (case), regler (rule) og resultat (result)* til å eksemplifisere de forskjellige typene resonnering (s. 83, vår oversettelse). Figur 1 viser hvordan de tre typene resonnering kan bli benyttet i et eksempel.

Deduction	*Rule* – All the beans from this bag are white *Case* – These beans are from this bag *Result* – These beans are white
Induction	*Case* – These beans are from this bag *Result* – These beans are white *Rule* – All the beans from this bag are white
Abduction (*Hypothesis*)	*Rule* – All the beans from this bag are white *Result* – These beans are white *Case* – These beans are from this bag

Figur 1: Hentet fra Reid og Knipping (2010, s. 101).

En annen type resonnering, utenfor de mest omtalte, er mekanisk deduksjon. Mekanisk deduksjon går ut på å bruke en metode eller algoritme som er basert på deduktive prinsipper. Ved å kun utføre algoritmen forsvinner begrunnelsen av operasjonene, og elevene får ikke jobbet med de deduktive prosessene. Mekanisk deduksjon inkluderer blant annet bruk av algebraiske egenskaper for å manipulere uttrykk (Reid & Knipping, 2010, s. 124).

Det andre aspektet Jeannotte og Kieran (2017) skriver om er prossessaspektet som videre deles inn i to typer. Den første typen handler om å se etter likheter og ulikheter og har fem prosesser relatert til seg. Disse prosessene er å «identifisere mønster» (identifying a pattern), «sammenliging» (comparing), «generalisere» (generalizing), «klassifisere» (classifying) og å «lage en antakelse» (conjecture) (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12-13, vår oversettelse).

«Identifisere mønster» handler om å gjenkjenne gjentakende strukturer mellom matematiske objekter. «Sammenligning» blir definert som å se etter likheter og ulikheter mellom matematiske objekter. «Generalisering» handler om å utlede generelle prinsipper om en gruppe eller en undergruppe av matematiske objekter. «Klassifisering» handler om å se etter fellestrekk mellom matematiske grupper, og kategorisere etter disse fellestrekkene. En siste prosess som blir nevnt er «lage en antakelse» (conjecture) (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 13-16). Conjecture kan oversettes til flere norske ord, deriblant gjetning, formodning, konjektur eller antakelse. Vi har valgt å oversette ordet til «antakelse», og definerer på samme måte som Jeannotte og Kieran: «[En] antakelse [er] en matematisk resonneringsprosess som, ved søk etter likheter og forskjeller, utleder en fortelling om en regelmessighet med sannsynlig eller trolig epistemisk verdi, og som har potensial for matematisk teoretisering» (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14, vår oversettelse).

Den andre typen i prossessaspektet heter validering og handler om å avgjøre om påstander er gyldige eller ikke. Her er det tre underkategorier, som er «begrunne» (justify), «bevise» (proving) og «bevise formelt» (formal proving) (vår oversettelse). Ved å validere ønsker man å gå fra sannsynlig til gyldig, fra sannsynlig til ugyldig eller å øke sannsynligheten (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 16). «Begrunne» (justify) handler om å endre troverdigheten til et matematisk utsagn. «Bevise» (proving) har likheter med «begrunne», men «bevise» vil knyttes mer opp mot deduktive prosesser, og ønsker å endre fra sannsynlig til gyldig. Den siste underkategorien av validering er «bevise formelt». Denne underkategorien handler om å vise at påstander er gyldige. De omtaler «bevise formelt» som en form for resonnering som stiller høyere krav til presisjon, logikk og formalitet enn «bevise». «Bevise formelt» må være *gjennomgående* deduktivt (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 17-19).

2.1.2 Argumentasjon

Reid og Knipping (2010) skriver at forskere har ulike tilnærminger og tolkninger til begrepet «argumentasjon». Balacheff (1999, s. 3) skriver at forskjellen kan stamme fra tidlig teoretisk forskning, og mener det er viktig at man adresserer disse ulikhetene mellom definisjonene. Tre teoretikere som Balacheff diskuterer er Perelman, Toulmin og Ducrot, hvor hver av dem gir et distinkt perspektiv på argumentasjonsbegrepet: Perelman mener at argumentasjon først og fremst handler om å overbevise. Toulmin mener at argumentasjon kan sees på som påstander, og strukturen som forsvarer disse. Strukturen bygges opp av premisser akseptert i elevgruppen. Ducrot mener at argumentasjon er en integrert del av *all* diskurs (Balacheff, 1999, s. 3, vår oversettelse). Ettersom flere forskere har basert arbeidet sitt på ulike grunnleggende teorier, har definisjonen og bruken av ordet argumentasjon utviklet seg til å bli varierende. Balacheff mener for eksempel at argumentasjon er en hindring for elever til å lære seg bevis (Balacheff, 1999). Denne tilnærmingen kan minne om Duval (1991) sin tolkning, som mener argumentasjon og deduktiv tenking begge er former for resonnering, men at de ikke fungerer på lik måte. Som vi skrev i kapittel 2.1.1, er deduktive resonnementer de eneste som kan kvalifiseres som bevis. Dette kan tyde på at Duval mener at argumentasjon alltid er ulikt bevis.

Douek (2010) er en av forskerne som lager klare definisjoner av argumentasjon og argument. Argumentasjon er «[...] en prosess som produserer logisk sammenhengende, men ikke nødvendigvis deduktive, diskurser om et gitt tema» (Douek, 2002, s. 304, vår oversettelse). Argument definerer hun som «en eller flere begrunnelser, for eller mot en påstand, mening eller måling» (Douek, 2002, s. 304, vår oversettelse), og det kan presenteres på ulike måter, for eksempel gjennom ord, tall, tegninger og lignende. Douek ser på bevis som en form for argumentasjon (Douek, 2010, s. 334). Boero (1999) bruker samme definisjoner som Douek for argumentasjon og argument. Boero beskriver argumentasjon som en ikke-lineær prosess med seks faser. Prosessen starter med å lage en antakelse og ender i et formelt bevis (Boero, 1999).

Som vi ser, er det store forskjeller i definisjonen av argumentasjon, som nødvendigvis vil påvirke hvilken sammenheng forskere mener det er mellom argumentasjon og *bevis*.

2.1.3 Bevis

Balacheff (1988) deler bevis inn i to ulike typer, pragmatiske og intellektuelle bevis. Pragmatiske bevis innebærer å bevise med handling, mens intellektuelle bevis baserer seg på ord for å vise sammenhenger. Balacheff introduserer tre nivåer for elevers bruk av bevis. Det grunnleggende nivået er «naiv empirisme», videre kommer «det avgjørende eksperimentet» og det høyeste nivået er «det generiske eksempelet og tankeeksperimentet» (vår oversettelse). Når elever bruker «naiv empirisme» ser de på enkle observasjoner som tilstrekkelig til å si noe er bevist. «Det avgjørende eksperimentet» gjør elevene *bevisste* på at bevis basert på eksempler, ikke nødvendigvis er tilstrekkelig for å konkludere at noe gjelder generelt. Tankeeksperimentet knytter bevis med generiske eksempler, som baserer seg på å fjerne de spesifikke omstendighetene fra eksempelet og presentere det generelle (Balacheff, 1988, s. 2-7).

Andreas Stylianides skrev i 2007 en forskningsartikkel om bevis og bevisføring i skolematematikk. Stylianides påpeker at bevis er et ord med manglende klar betydning, og hans mål var derfor å lage en konseptualisering av ordet. Arbeidet er gjennomført i klasser som tilsvarer norsk grunnskole, men han fremsetter at arbeidet kan bli brukt i alle klasser (2007, s. 289).

Stylianides definerer bevis som et matematisk argument for eller mot en matematisk påstand som må overholde noen kriterier:

1. Argumentet bygger på felles aksepterte påstander blant elevgruppen. Disse påstandene er sanne og trenger ikke ytterligere bevis. Dette kan være aksiomer, definisjoner, teoremer og lignende.
2. Argumentet må inneholde resonnering som er gyldig og kjent for elevgruppen, eller være i et passende konseptuelt rekkevidde for klasserommet. Dette kan være modus ponens, modus tollens og bruk av kontraeksempel.
3. Til sist må argumentet bli uttrykt på en måte som er passende for elevgruppen. Dette kan være at argumentet blir presentert muntlig, med diagrammer, bilder, algebraisk og lignende (Stylianides, 2007, s. 291-292, vår oversettelse).

Stylianides kommer også med noen kommentarer til sin egen definisjon. En av disse kommentarene går ut på å tydeliggjøre hva han mener når han sier «classroom community», noe vi, i kriteriene ovenfor, har oversatt til «elevgruppen». Stylianides snakker hovedsakelig om *elevene*, og samfunnet/fellesskapet i klassen når han snakker om «elevgruppen». Læreren har en egen rolle i klasserommet, og skal prøve å gi elevene en bredere forståelse av matematikk (Stylianides, 2007, s. 292).

I artikkelen fremsetter Stylianides også et krav om at argumentene, eller deler av argumentene, må være aksepterte i elevgruppen. Dette betyr imidlertid ikke at hvert enkelt individ i klasserommet må akseptere argumentet eller alle delene av argumentet for at det skal kunne godkjennes som et bevis. Det er også slik at ikke alle elever nødvendigvis er i stand til å akseptere dette, da individene i et klasserom ofte har ulik forståelse og kompetanse innenfor matematikken. Samtidig skal det nevnes at Stylianides ikke mente at individet er mindre viktig enn elevgruppen (Stylianides, 2007, s. 293).

2.1.4 Resonnering, argumentasjon og bevis – vår tolkning

Vi har nå beskrevet de tre viktigste nøkkelordene for oppgaven vår, resonnering, argumentasjon og bevis. I dette delkapitlet vil vi oppsummere hvordan vi forstår begrepene, når de tolkes i lys av læreplanen. Slik vi forstår læreplanen er kjerneelementene ikke nødvendigvis seks separate ferdigheter. I kjerneelementet utforsking og problemløsing stilles det blant annet krav til at elever skal *vurdere* om løsninger er gyldige. I kjerneelementet representasjon og kommunikasjon skal elevene benytte formelle *resonnement* (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). Vi ser dermed at prosesser innenfor RA forekommer i andre kjerneelementer. Vi tolker det som at Udir anerkjenner at man i praksis ofte arbeider med flere kjerneelementer samtidig. Likevel, for å sette begrensninger i masteroppgaven, har vi forsøkt å identifisere og utelate prosesser som nevnes eksplisitt i forbindelse med andre kjerneelementer.

Vi vår masteroppgave definerer vi resonnering som elevenes evne til å forstå at regler og resultater har klare begrunnelser, og inkluderer «lage en antakelse», «argumentasjon» og «bevis». Kjerneelementet omtaler resonnering som evnen til å «[…] kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer [...]» (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b).

Selv om Jeannotte og Kieran (2017) omtaler «identifisere mønster» og «sammenligne» som prosesser relatert til RA, er ikke dette noe vi vil ta med i vår tolkning av RA. I læreplanen går begge disse prosessene eksplisitt inn under kjerneelementet utforsking og problemløsing (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). «Klassifisere» er en prosess hvor man konkluderer med matematiske forklaringer om objekter ut fra lignende egenskaper (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 15-16). Vi syntes denne er nært tilknyttet prosessen å «identifisere mønster» og «sammenligne», som begge er under kjerneelementet utforsking og problemløsing. «Generalisering» har et eget kjerneelement i læreplanen, abstraksjon og generalisering (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). Alle disse prosessene har vi dermed valgt å ekskludere i vår tolkning av RA. Reid og Knipping (2010, s. 124) skrev om en type resonnering kalt mekanisk deduksjon. Dette handler om å bruke formler eller metoder *basert* på deduktive prosesser, men å benytte dem skjuler begrunnelsene. Siden begrunnelsene forsvinner, har vi valgt å utelate dette fra vår tolkning av RA.

Fra prosessaspektet til Jeannotte og Kieran (2017) ønsker vi kun å benytte «lage en antakelse» (conjecture) i vår oppgave. Denne kompetansen blir ikke eksplisitt nevnt i noen av kjerneelementene. «Lage en antakelse» havner altså *ikke* under RA, slik Udir beskriver det, da kjerneelementet i større grad vektlegger *begrunnelse*. Vi velger å ta «lage en antakelse» med i vår masteroppgave da vi ser gjentatte ganger at forskere og matematikkdidaktikere knytter det nært opp mot RA (for eksempel, Boero, 1999; Jeannotte og Kieran, 2017; National Council of Teachers of Mathematics, 2000), og vi mener at å lage antakelser kan være en god og viktig inngang til å jobbe med RA.

Kjerneelementet beskriver argumentasjon som at «[…] elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). Vi tolker argumentasjon i kjerneelementet som at det er delt i to. Altså forventes det at elevene skal begrunne fremgangsmåter, resonnementer og løsninger. I tillegg til dette skal de bevise at de er gyldige. Vi beskriver hensikten med argumentasjon til å være å «avgjøre eller begrunne om påstander stemmer eller ikke, eller endre sannsynligheten for at det stemmer eller ikke». Beskrivelsen er hentet fra Jeannotte og Kieran (2017, s. 16), men vi la eksplisitt til ordet «begrunnelse», da vi mener dette passer bedre med kjerneelementet. Jeannotte og Kieran (s. 17-19) deler inn i kategoriene «begrunne», «bevise» og «bevise formelt», som alle handler om å avgjøre om påstander er gyldige eller ikke. «Begrunne» omhandler alle typer begrunnelser, og trenger ikke å ha sammenheng med deduktive prosesser, mens «bevise» alltid har sammenheng med deduktive prosesser. Etter vår tolkning er argumentasjon både deduktivt og ikke-deduktivt og vil derfor omhandle begge disse prosessene. «Bevise formelt» stiller større krav til formalitet og symbolbruk, og må være gjennomgående deduktivt. Dette er en spesiell type argument, bevis, som vi vil definere senere i delkapitlet.

Vi har tatt utgangspunkt i Doueks (2002) definisjoner av «argumentasjon» og «argument». Denne definisjonen tilsier at argumentasjon må være logisk sammenhengene prosess, men som ikke har krav om å være deduktivt. «Argumenter» blir beskrevet som «en eller flere begrunnelser for eller mot en påstand, mening eller måling» (Douek, 2002, s. 304, vår oversettelse). Med denne tolkningen trenger ikke argumenter å være strengt deduktive, men inkluderer alle former for begrunnelser. Douek presiserer at et argument kan presenteres på ulike vis, gjennom tegning, ord, symboler og lignende. Dette passer godt med en lærebokanalyse, da vi ikke kan vite hvordan begrunnelsen *faktisk* blir utført. Den siste delen i kjerneelementet omhandler bevis. Bevis må, i motsetning til argumentasjon, alltid være på deduktiv form.

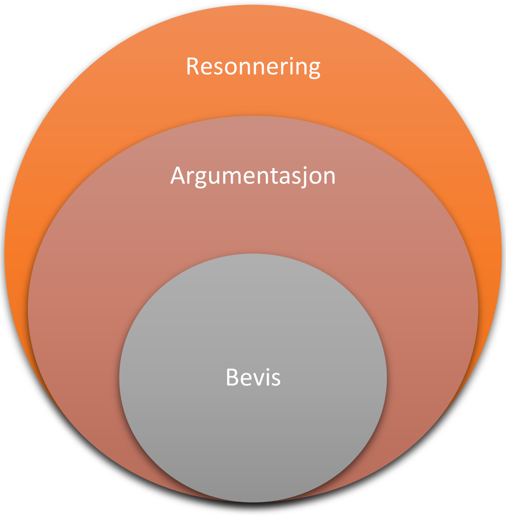
Vi tolker bevis som en spesiell form for argument, slik også Douek (2010, s.334) og Stylianides (2007, s. 291) gjør. For at et matematisk argument skal være et gyldig bevis må det oppfylle tre kriterier.

1. Argumentet bygger på felles aksepterte påstander i elevgruppen.
2. Argumentet inneholder resonnering og argumentasjon som er gyldig og kjent for elevgruppen.
3. Argumentet må presenteres i en måte som er kjent for elevgruppen (Stylianides, 2007, s. 291, vår oversettelse).

For å definere bevis vurderte vi definisjonene til Balacheff (1988) og Stylianides (2007). Vi endte opp med å benytte Stylianides sin definisjon, da vi mener den passer godt til å jobbe med bevis i skolen. Den inneholder fundamentale matematiske element, men kan tilpasses ulike klasser (Stylianides, 2007).

Som vi nevnte i kapittel 2.1.1 er deduktive resonnementer de eneste man med sikkerhet kan konkludere med at er gyldig. Bevis stiller derfor et krav om at prosessen skal være deduktiv. Vi skiller ikke mellom «bevis» og «bevise formelt» slik som Jeannotte og Kieran (2017). Vi mener Stylianides sin definisjon inkluderer begge disse typene.

Vår tolkning av resonnering, argumentasjon og bevis kan oppsummeres figur 2 (Burheim et al., 2023, s. 16). Dette viser at argumentasjon er en form for resonnering, og at bevis er et spesialtilfelle av argument.



Figur 2: Vår tolkning av resonnering og argumentasjon, hentet fra (Burheim et al., 2023)

2.2 Tidligere forskning på analyse av lærebøker

I dette delkapittelet vil vi presentere tidligere forskning omhandlet resonnering og argumentasjon.

2.2.1 Tidligere forskning nasjonalt

Tidligere år har det blitt gjennomført liknende studier i Norge. I 2022 undersøkte Rebekka Pettersen muligheter for resonnering og argumentasjon i lærebøker for 5.-7. klasse. Pettersens (2022, s. 5) oppgave tok for seg to forskningsspørsmål. Hun ønsket å se hvorvidt lærebøkene benyttet nøkkelord som var relaterte til arbeid med RA. I tillegg undersøkte hun på hvilken måte søkeordene ble brukt, og hvilken bruk som ga mulighet RA. Det ble gjennomført en dokumentanalyse, hvor det ble søkt etter ord, som senere ble analysert. Resultatene til Pettersen viste få muligheter til RA i lærebøkene, særlig med tanke på kjerneelementets sentrale rolle.

Gjerløw og Rørvik (2023) skrev sin masteroppgave om muligheter for RA i lærerveiledningene tilhørende lærebøker på 5.-7. trinn. De gjennomførte ordsøk i bøkene, og analyserte funnene. Deretter drøftet de hvilke forskjeller det var mellom lærerveiledningene og lærebøkene. Gjerløw og Rørvik fant flere muligheter i lærerveiledningene sammenlignet med elevbøkene, men andelen var fremdeles liten.

Tømmerdal (2021) undersøkte muligheter for resonnering og argumentasjon i lærebøker for 5. klasse. Studiet ble gjennomført etter innføringen av LK20, hvor brøk var en stor del av kompetansemålene. Han så derfor kun etter muligheter i kapitlene om brøk. Analyseverktøyet til Tømmerdal var en kombinasjon av tidligere analyseverktøy av G. Stylianides (2009) og A. Stylianides (2016), med noen tilpasninger. Hans resultater viste at oppgaver med resonnering og argumentasjon i brøkkapitlene var få.

Gjengår (2023) så etter muligheter for resonnering og argumentasjon i geometrikapitlene for 6. klasse, da geometri vektlegges tungt i kompetansemålene. Analysen til Gjengår var basert på et analyseverktøy av Otten et al (2014), og inkluderte analyse av oppgaver og forklaringsbokser. Fra resultatene konkluderte hun med at få oppgaver ga mulighet for resonnering og argumentasjon, men at en høyere andel forklaringsbokser inkluderte kjerneelementet. De fleste oppgavene i studiet som ga mulighet for resonnering og argumentasjon la opp til begrunnelser og ikke-gyldige bevis.

2.2.2 Tidligere forskning internasjonalt

I internasjonale artikler er det mange ulike tolkninger omhandlet begrepene resonnering, argumentasjon og bevis. Når vi, videre i masteroppgaven, refererer til andre forskere sitt arbeid, bruker vi forfatternes egne begreper innen resonnering, argumentasjon og bevis. Dette for å ikke blande med kjerneelementet RA.

McCrory og Stylianides (2014) gjennomførte et forskningsprosjekt på 16 lærebøker i USA for framtidige grunnskolelærere. De undersøkte mulighetene studentene fikk til å utvikle kompetanse med reasoning and proving gjennom arbeid med disse bøkene. McCrory og Stylianides begynte prosessen med å lage en liste med begreper som har logisk sammenheng med reasoning and proving. Noen av begrepene de så etter var blant annet deduktiv resonnering, induktiv resonnering, definisjoner, forklaring, begrunnelse, kontraeksempel og bevis (vår oversettelse). De søkte hovedsakelig i innholdsfortegnelse og indekser. Når de fant tilfeller av disse begrepene prøvde de å besvare om innholdet på siden kunne knyttes opp mot reasoning and proving, og på hvilken måte ordet ble benyttet. De ønsket også å undersøke om innholdet hadde sammenheng med andre temaer i bøkene (McCrory & Stylianides, 2014, s. 120-121). Resultatene deres viste at det var få eksempler hvor studentene kunne lære om essensen ved reasoning and proving. Det ble funnet muligheter i noen eksempler og oppgaver, men lite som ga lærerstudentene mulighet til å diskutere og forstå hva reasoning and proving er (McCrory & Stylianides, 2014, s. 129).

Bieda et al. (2014) publiserte en artikkel hvor de så etter muligheter for reasoning and proving i syv forskjellige lærebøker for grunnskole i England. Metoden deres identifiserte oppgaver ved å søke etter viktige nøkkelord de mente ofte kom i forbindelse med muligheter for reasoning and proving. De utvalgte nøkkelordene var forklare, beskrive, forutsi, vis, skriv en regel, fortell hvordan, fortell hvorfor, argumenter og bevis (Bieda et al., 2014, s. 5, Vår oversettelse). Da nøkkelordene ble funnet i lærebøkene ble de analysert og kategorisert inn i koder. Resultater viste at det var lav andel av oppgavene som ga mulighet for å jobbe med reasoning and proving, med 3,7% av oppgavene. Resultatene deres viste *ingen* funn av koden som omhandlet å evaluere begrunnelser. De fremsetter at dette kan være en viktig mulighet som går tapt, da evaluering av begrunnelser kan være en god mulighet for elever til å lære om essensen av reasoning and proving, og forstå at det finnes ulik grad av overbevisning i begrunnelser. De argumenterer for at å evaluere begrunnelser kan være en viktig bro over til å klare å generere egne begrunnelser (Bieda et al., 2014, s. 6-8).

I 2012 publiserte Thompson et al. sin artikkel om muligheter til å lære reasoning and proof i videregående lærebøker i USA. Forfatterne ville blant annet undersøke hvilke forskjellige *typer* muligheter elever fikk gjennom lærebøkene, og ikke utelukkende i hvilken *grad* elever får muligheter til å jobbe med reasoning and proof. Analyseverktøyet de benytter i artikkelen er derfor finjustert til å kunne finne ut hvilke forskjellige muligheter bøkene gir til å lære om reasoning and proof. Thompson et al. sin metode gikk ut på å lete etter noen forhåndsbestemte algebraiske egenskaper i lærebokteksten. Da en slik egenskap ble funnet, analyserte forfatterne hele seksjonen, samt alle oppgaver tilhørende seksjonen (Thompson et al., 2012, s. 264). Forfatterne skiller mellom analyse av lærebokteksten og oppgaver.

I analyseringen av lærebokteksten ville Thompson et al. (2012) finne ut hvilken type begrunnelse som ble brukt for egenskapene. De tildelte koder til egenskapene de fant, avhengig av hvordan bøkene begrunnet dem. Kodene var «generelt argument», «spesifikt tilfelle», «overlatt til eleven» og «ikke begrunnet». Forfatterne analyserte totalt 383 egenskaper fra 20 lærebøker innen algebra og prekalkulus, og fant at 30,8% av egenskapene var begrunnet med et generelt argument og 22,4% var begrunnet med et spesifikt tilfelle. Elevene ble utfordret til å begrunne egenskapen selv i 11,2% av tilfellene, mens 39,4% av egenskapene ikke var begrunnet i det hele tatt (Thompson et al., 2012, s. 269).

I oppgavedelen analyserte Thompson et al. (2012) totalt 9742 oppgaver, og de delte resultatene inn i prosent av totalt analyserte oppgaver. Funnene Thompson et al. gjorde i studien viste, jevnt over, få muligheter til å jobbe med reasoning and proof i oppgavene (Thompson et al., 2012, s. 275). De oppgavene som ga mulighet, var ensformige, og dreide seg oftest om å «produsere et argument» (PG/PS) eller å «utforske en antakelse» (UG/US). LG/LS handler om å «lage en antakelse», EG/ES står for å «evaluere et argument», mens «andre bevisrelaterte resonnementer» er delt inn i flere koder; «kontraeksempel», «korriger eller identifiser en feil» og «prinsipper for bevis». «G» og «S» står for henholdsvis generell og spesifikk, og viser fordelingen av oppgavene som forventet et henholdsvis generell eller spesifikt svar. Tabell 1 viser oversikt over resultatene til Thompson et al. fra deres oppgaveanalyse.

	Antall oppgaver analysert	Prosent inneholdt reasoning and proof	LG/LS	UG/US	PG/PS	EG/ES	Andre bevisrelaterte resonnementer	Totalt G	Totalt S
Totalt	9742	5,4%	0,8%	1,7%	2,4%	0,1%	0,6%	2,6%	2,5%

Tabell 1: Oversikt over analyserte oppgaver og prosentvist funn av de forskjellige kodene (Thompson et al., 2012, s. 277)

Linda Haggarty og Birgit Pepin skrev en forskningsartikkel i 2002, hvor de blant annet undersøkte lærebøker i England, Tyskland og Frankrike. Studiet ble gjennomført på alderstrinn tilsvarende ungdomsskole (Haggarty & Pepin, 2002, s. 567). Forfatterne analyserte lærebøker og observerte og intervjuet lærere. Vi vil hovedsakelig trekke frem resultater fra analysen av lærebøkene.

I Tyskland deles elevene inn i ulike spesialiseringer ved 10 års alder. Her kan de velge mellom tre ulike spesialiseringer, Hauptschule, Realschule og Gymnasium, hvor sistnevnte retter seg mot universitetsutdanning. Læreplanens hovedprinsipper er like for alle de tre retningene. Lærebøkene som ble benyttet på Gymnasium inkluderte bevis og høye kognitive krav, mens Hauptschule og Realschule la mer vekt på algoritmer og det å anvende matematiske ideer (Haggarty & Pepin, 2002). I Tyskland har de en liste med «godkjente» lærebøker. Haggarty og Pepin hevder dette fører til at lærere forventer at pensumet er dekket i lærebøkene, som videre fører til at de benytter bøkene særlig ukritisk (Haggarty & Pepin, 2002, s. 575). I noen tilfeller observerte Haggarty og Pepin at lærere begrenset elevenes læringsutbytte om de trodde at matematikken ble for utfordrende (s.587).

Når elevene starter på ungdomsskole i England blir de fordelt i ulike klasser innenfor matematikk. Denne fordelingen blir basert på hvilke resultater de får i en nasjonal test. Uavhengig av hvilken klasse elevene blir fordelt i, er den nasjonale læreplanen formulert likt. Lærebøkene som blir brukt er tilpasset fordelingen av elever, på et trinn vil det derfor ofte benyttes forskjellige mattebøker (Haggarty & Pepin, 2002, s. 575). Lærere mente selv at det *måtte* brukes ulike bøker mellom gruppene, og trakk frem at høyt presterende elever hadde behov for utfordrende og spennende oppgaver. Lavere presterende elever trengte imidlertid mindre komplekse oppgaver, med større fokus på prosedyrer (Haggarty & Pepin, 2002, s. 584).

Resultatene fra studien deres viste at om man sammenlignet de forskjellige spesialiseringene i henholdsvis England og Tyskland, fikk elever veldig ulike muligheter til å lære matematikk. Dette til tross for at læreplanens hovedprinsipper er formulert likt i spesialiseringene.

3 Metode og analyseverktøy

I dette kapittelet vil vi presentere metoden for masteroppgaven. Vi starter med å presentere hvilke data vi valgte å analysere, etterfulgt av en gjennomgang av hvordan vi organiserte disse dataene. Vi vil forklare hvordan vi har kombinert tidligere forskning sammen med vår metode, for å lage et analyseverktøy. Kapittelet vil også inkludere våre etiske refleksjoner i denne masteroppgaven, samt ta for oss gyldighet og pålitelighet.

3.1 Valg av datamateriale

Vi har valgt å se på lærebøker på videregående skole. Når elever starter på studiespesialisering, har de to mulige veivalg for matematikk; praktisk matematikk eller teoretisk matematikk. Det er disse to fagene vi har tatt utgangspunkt i for masteroppgaven vår. Som vi skrev innledningsvis, er kjerneelementet formulert identisk i begge fagene. Praktisk og teoretisk matematikk har like stort omfang, med 140 årstimer (Sirnes, 2023). Etter vår mening ville det være hensiktsmessig å velge fag med likt omfang, for at resultatene skal kunne sammenlignes best mulig.

Med bakgrunn i elevenes behov for matematikk i fremtiden velger elevene mellom fagene 1T eller 1P. 1T er et kurs som egner seg om man ønsker å ta realfagsmatematikk eller samfunnsfaglig matematikk, som flere studieretninger krever som forkunnskap. 1P skal forberede elever til å benytte matematikk i praktiske situasjoner relatert til samfunn og arbeidsliv. Dette faget passer for elever som ikke trenger realfagsmatematikk i fremtiden, og ikke ønsker å fordype seg i faget (utdanning.no, 2024).

Forlagene vi har valgt å se på er Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, da dette er de tre største bokkonsernene i Norge (Neraal & Røhne, 2023). Til sammen ble vår studie bestående av seks bøker, hovedsakelig analysert i digital form. De utvalgte bøkene er «Mønster 1P» og «Mønster 1T» fra Gyldendal, «Sinus 1P» og «Sinus 1T» fra Cappelen Damm og «Matematikk 1P» og «Matematikk 1T» fra Aschehoug.

3.2 Dokumentanalyse

Vi har valgt å gjennomføre en dokumentanalyse med utgangspunkt i metoden til Bowen (2009). Denne metoden er tilpasset for å analysere både fysiske og digitale bøker, noe som passet godt til vår masteroppgave. Denne metoden er en kombinasjon av innholdsanalyse og en tematisk analyse. Prosessen bak en dokumentanalyse deles inn i tre deler, skimming (superficial examination), reading (thorough examination) og tolkning (interpretation) (Bowen, 2009, s. 32, vår oversettelse). Prosessen er repeterende, og man kan gå gjennom stegene i flere omganger for å sikre at viktig data er medtatt. Metoden inkluderer en kvalitativ analyse av data, ved å analysere alle funnene i dybden. Data blir kodet og fordelt i hensiktsmessige kategorier, gjennom et analyseverktøy (Bowen, 2009, s. 32).

3.2.1 Skimming

Skimming er det første steget i analysen. I denne delen gjennomføres et første overblikk over dokumentene som analyseres, og viktige elementer av tekst, bilder eller annen type data identifiseres. Her er det viktig å velge ut elementer som er relevante til vårt tema (Bowen, 2009, s. 32). For å finne elementer å søke etter tok vi inspirasjon fra Bieda et al. (2014) og McCrory og Stylianides (2014), som søkte etter reasoning and proving i lærebøker. I første omgang valgte vi ordene «vis», «forklar», «begrunn», «argument», «bevis», «diskuter», «tenk», «resonner» og «reflekter». Vi gjennomførte noen ordsøk i de utvalgte digitale lærebøkene, og la blant annet merke til at «tenk» kom tilnærmet alltid sammen med et av de andre søkeordene. For eksempel «Forklar hvordan du har tenkt [...]». «Resonner» hadde veldig få forekomster, og befant seg oftest i forklarende situasjoner, som ikke ga mulighet for RA. «Reflekter» hadde ingen forekomster i bøkene vi undersøkte. Disse tre ordene valgte vi derfor å ikke inkludere i skimmeprosessen av masteroppgaven. Nøkkelordene vi endte opp med ble derfor «vis», «forklar», «begrunn», «argument», «bevis», «diskuter». Ved å søke etter disse ordene plukket vi også opp de forskjellige verbbøyingene av nøkkelordene.

Alle forlagene har noen «utvalgte oppgaver», som er ment som muligheter til å utforske matematikk, se sammenhenger og snakke om matematikk. Disse kategoriserte vi under «utvalgte oppgaver», og de tre forlagene har to typer. Alle forlagene inkluderer «utforsk» som den ene utvalgte oppgavetypen. Den andre typen varierer i navn, «snakk», «diskuter» og «reflekter og diskuter», men alle har som mål å få elevene til å gjennomføre eller reflektere over matematikk i en muntlig sammenheng (Borge et al., 2020b, s.3; Kalvø et al. 2020b, s.6; Oldervoll et al., 2020a, s. 3). Mange forfattere vektlegger at argumentasjon blir uttrykt i en sosial sammenheng (Reid & Knipping, 2010, s. 163). Med dette tror vi at oppgavene i kategorien «utvalgte oppgaver» særlig kan gi forhøyet sannsynlighet for mulighet til å jobbe med RA.

Listen over elementer vi ønsket å søke etter, bestod av nøkkelordene «vis», «forklar», «begrunn», «argument», «bevis» og «diskuter» og de «utvalgte oppgavene». Vi organiserte funnene i regneark, og noterte hvilken side nøkkelordet eller de «utvalgte oppgavene» forekom på. I tillegg ga vi en bokstav etter sidetallene, for å lettere finne tilbake til dem da vi skulle analysere. Bokstaven forklarer i hvilken sammenheng ordet forekommer, om det er i en oppgave (O), et eksempel (E) eller i forklarende tekst (F). Om nøkkelordene forekom i de utvalgte oppgavene fikk de en bokstav som forklarer hvilken oppgave de dukket opp i, enten utforsk (U), diskuter (D), snakk (S) eller reflekter og diskuter (R). Vi ønsket å se på *alle* de «utvalgte oppgavene», og analyserte derfor ikke disse funnene som nøkkelord. De «utvalgte oppgavene» er kun organisert etter sidetall, da det ikke var nødvendig med hjelp til å finne tilbake til disse. Regnearket gjorde det lettere og mer oversiktlig da vi, etter skimmeprosessen, skulle gå tilbake for å analysere funnene. Figur 3 viser malen for systematiseringen av skimmeprosessen.

	Nøkkelord						**Utvalgte oppgaver**	
	Vis	Forklar	Begrunn	Argument	Bevis	Diskuter	Utforsk	Snakk/Diskuter/Reflekter og diskuter
	*** #							
	*** #							
Sidetall:	***							
Bokstav:	#							

Figur 3: Mal for kategorisering av nøkkelord og «utvalgte oppgaver»

3.2.2 Analyse

Vi valgte å samle Bowens (2009) prosesser lesing (reading) og tolkning (interpretation) i begrepet *analysering*. Lesing inkluderer en nøyere og mer presis lesing av data, og krever at man gjenkjenner mønstre, koder og kategoriserer (Bowen, 2009, s. 32). Vi mener dette foregår samtidig som man tolker data.

Bowen (2009) legger vekt på at dokumentene må analyseres objektivt og i sammenheng med formålet dokumentene ble lage for. Siden lærebøkene er laget med elever som målgruppe, ønsket vi å se hvordan elever får mulighet til å jobbe med RA, kun ved bruk av lærebøker.

Når vi gjennomfører analysen, vil vi gå nøyere inn på hver forekomst av nøkkelord eller «utvalgte oppgaver». Vi ønsker å se på hele sammenhengen ordet forekommer i, ikke bare ordet i seg selv eller setningen det er en del av. Deretter vil vi tildele funnene kode ettersom hvilken måte dem tilrettelegger for RA, eller om dem ikke gjør det.

3.3 Analyseverktøy

I dette delkapittelet vil vi presentere analyseverktøyet vi har benyttet i vår masteroppgave. Vi har latt oss inspirere av tidligere forskning og gjort noen tilpasninger slik at analyseverktøyet kan besvare våre forskningsspørsmål.

Vi ønsket opprinnelig å gjennomføre en liknende studie som Pettersen (2022) og Gjerløw og Rørvik (2023), men med videregående lærebøker som datagrunnlag. Begge masteroppgavene gjennomførte en dokumentanalyse med lærebøker for elever på 5.-7. trinn. Vi innså imidlertid at vi ønsket å gjøre en del forskjeller, og valgte å vinkle oppgaven annerledes.

Selv om vår masteroppgave har likheter med Pettersen og Gjerløw og Rørvik sin oppgave, er det noen betydelige forskjeller. Deres masteroppgaver retter fokus mot nøkkelordene, og bruken av disse. Vi ønsket fokus på hvilke *måter* elever får jobbet med RA og benyttet derfor et analyseverktøy som var tilpasset denne tilnærmingen.

For å kunne analysere ordene og sammenhengen de kom i, måtte vi bruke et analyseverktøy. Vi tok inspirasjon fra tidligere forskning, og endte opp med å gå ut ifra analyseverktøyet Thompson et al. (2012) fremsatte, da de gjennomførte et liknende forskningsprosjekt. De gjennomførte forskningen på amerikanske lærebøker tilhørende videregående skole, og skilte mellom lærebokteskt og oppgaver, noe vi også ønsket å gjøre. Med lærebokteskt menes det i boken som ikke er oppgaver; forklaringer, eksempeloppgaver, teoremer og ellers informasjon til elevene. Oppgaver er de oppgavene som er ment at elevene skal løse. Denne konkrete separeringen mellom lærebokteskt og oppgaver er noe som skiller Thompson et al. sitt analyseverktøy fra flere andre analyseverktøy tilpasset tekstbøker.

For å finne seksjoner og oppgaver som skulle analyseres startet Thompson et al. med å lete og søke i «[…] tables of contents and indices of several mathematics textbooks to determine where words such as conjecture, proof, or reasoning […] might occur» (2012, s. 263). Forfatterne fremsetter at de, ut ifra denne søkingen, lagde en liste med 43 generelle egenskaper som de mente var berettiget en forklaring eller begrunnelse, og de lette dermed spesifikt etter disse egenskapene (s. 263). Eksempler på slike egenskaper kan være «kvadratsetningene», regel for produkt av eksponenter eller «abc-formelen» (s. 293-295). Leting etter disse egenskapene var basen i metoden de brukte for å finne både seksjoner (lærebokteksť) og oppgaver som skulle analyseres gjennom analyseverktøyet. Da Thompson et al. hadde funnet en av de 43 egenskapene, analyserte de seksjonen i lærebokteksten, og gikk deretter gjennom alle oppgaver i den tilhørende seksjonen og analyserte dem. Under presenterer vi nærmere hvordan analyseverktøyet deres ser ut, samt hvilke endringer vi gjorde for at det skulle passe bedre med vår metode.

3.3.1 Analysering av lærebokteksten

Kodene for lærebokteksten er delt inn i fire bokstaver, hvor hver av de fire bokstavene korresponderer til en bestemt type begrunnelse for egenskapen. Kodene er «generell», «spesifikk», «etterlatt til student» og «ingen begrunnelser» (Thompson et al., 2012, s. 261).

Siden vår metode gikk ut på å bruke søkeord for å finne steder der det var høy sannsynlighet for muligheter til RA, måtte vi justere analyseverktøyet noe. I kodene G, S og O har vi lagt til «[…] metoden/egenskapen […]» hvor til sammenligning Thompson et al. kun skriver «[…] egenskapen […]» (s. 261, vår oversettelse). Begrunnelsen for denne endringen er at vi, i motsetning til Thompson et al., ikke utelukkende lette etter egenskaper, men det var også matematiske metoder eller prosedyrer som ble inkludert under ordsøkingen. I tillegg gjorde vi en liten endring i koden S; endret fra «[…] begrunnet med et deduktivt argument […]» (s.261, vår oversettelse), til «[…] begrunnet med et argument […]». Vår tolkning av argument inkluderer ikke-deduktive argumenter, og ville derfor gjøre denne endringen. Under, i tabell 3, er en oversikt over de fire kodene vi brukte til å analysere lærebokteksten.

G	*Generell:* Metoden/egenskapen er begrunnet med et bevis.
S	*Spesifikk:* Metoden/egenskapen er begrunnet med et argument basert på et spesifikt tilfelle.
O	*Overlatt til elev:* En begrunnelse for metoden/egenskapen overlates til eleven å fullføre, vanligvis med et problem i øvelsene.
I	*Ingen:* Det gis ingen begrunnelse, og det nevnes ikke eksplisitt at begrunnelsen skal overlates til eleven. Å gjengi definisjoner eller teoremer inngår ikke som begrunnelse.

Tabell 2: Oversikt over analyseverktøyet til lærebokteksten (Thompson et al., 2012, s. 261, vår oversettelse og endring).

Ved koden G er metoden/egenskapen begrunnet gjennom et deduktivt, generelt argument. Dette er den eneste begrunnelsen som, per vår definisjon, gjelder som et bevis. Ved koden S er metoden/egenskapen blitt begrunnet med et spesifikt tilfelle. Eksempel på dette kan være at forfatterne har presentert «regelen» for produkt av eksponenter med samme grunntall, og bruker spesifikke talleksempler som begrunnelse for hvorfor denne regelen må være sann, i stedet for et generelt bevis. Ved koden O har forfatterne av boken eksplisitt utfordret eleven til å begrunne metoden/egenskapen selv, gjennom for eksempel et deduktivt argument. Dette kan komme i form av en oppgave, eller at forfatterne for eksempel skriver i lærebokteksten «prøv å vise hvorfor denne egenskapen gjelder». Ved den siste koden, I, har ikke boken begrunnet egenskapen eller utfordret elevene om å begrunne den.

3.3.2 Analysering av oppgaver

Som nevnt ville Thompson et al. (2012) undersøke *hvilke* måter elevene fikk mulighet til å jobbe med RA, i tillegg til hvor mange oppgaver som kunne relateres til RA. For å muliggjøre dette fremsatte de et eget analyseverktøy for oppgaver, som er delt inn i tre hovedkategorier; «lag eller undersøk en påstand», «produsere eller evaluere et argument» og «andre bevis-relaterte resonnementer» (Thompson et al., 2012, s. 262, vår oversettelse). De tre hovedkategoriene er videre delt inn i koder, hvor de fleste kodene har en tilleggskode, G eller en S, som står for generell eller spesifikk. Under, i tabell 4, er Thompson et al. sitt analyseverktøy for oppgaver, slik det er presentert i deres artikkel.

Lag eller undersøk en antakelse	
LS/LG	*Lag en antakelse:* Elevene blir spurt om å komme med en antakelse ut ifra et gitt mønster. Enten generell eller spesifikk.
US/UG	*Utforske en antakelse:* En antakelse er presentert, og eleven blir spurt om å bestemme om den er sann eller usann og komme med en begrunnelse. Enten generell eller spesifikk.
Produsere eller evaluere et argument	
PS/PG	*Produser et argument:* Eleven blir spurt om å skrive et argument eller bevis om en påstand. Enten generell eller spesifikk.
ES/EG	*Evaluer et argument:* Eleven blir spurt om å bestemme om et argument er gyldig eller ikke. Enten generell eller spesifikk.
Andre bevisrelaterte resonnementer	
KX	*Kontraeksempel:* Eleven blir spurt om å finne et kontraeksempel til en gitt påstand, eller å vise at den gitte påstanden er feil.
KS/KG	*Korriger eller identifiser en feil:* Oppgaven oppgir et feilaktig svar eller argument til et problem. Eleven blir fortalt at noe er galt, og skal bestemme feilen i resonnementet eller korrigere den. Enten generell eller spesifikk.
PB	*Prinsipper for bevis:* Eleven blir spurt om å forklare hovedtrekkene eller et overblikk av et argument, men ikke skrive et fult bevis.

Tabell 3: Oversikt over analyseverktøy for oppgaver (Thompson et al., 2012, s. 262, vår oversettelse).

For at vi skulle gjennomføre analyseringen av oppgaver har vi brukt Thomson et al. sitt analyseverktøy som utgangspunkt. Vi valgte også her å gjøre endringer, hovedsakelig for å gjøre analyseringen mer konsekvent gjennom konkretisering av noen av kodene. I tillegg til dette tok vi kjerneelementet RA i betraktning da vi justerte kodene. På denne måten kan vi si at dersom en oppgave har blitt tildelt en kode, vil oppgaven være en mulighet for å jobbe med RA. Unntaket for dette er for koden IF og LG/LS, hvor sistnevnte handler om å «lage en antakelse», og er dermed «utenfor» kjerneelementet per vår definisjon i kapittel 2.1.4. I tabell 4 er vårt analyseverktøy for oppgaver presentert.

Lag eller undersøk en antakelse	
LS/LG	*Lag en antakelse:* Elevene blir spurt om å komme med en antakelse ut ifra et gitt mønster, tekst, diagram eller bilde. Enten generell eller spesifikk.
US/UG	*Utforske en antakelse:* En eller flere antakelser er presentert, og eleven blir spurt om å bestemme om det er sant eller usant og komme med en begrunnelse. Enten generell eller spesifikk.
Produsere eller evaluere et argument	
PS/PG	*Produser et argument:* Boka presenterer en påstand eller løsning, og eleven blir spurt om å komme med et argument eller bevis for hvorfor dette gjelder. Enten generell eller spesifikk.
ES/EG	*Evaluer et argument:* Boka presenterer ett eller flere argumenter, og eleven skal evaluere om dette er gyldig eller ikke og komme med en begrunnelse. Enten generell eller spesifikk.
Andre bevisrelaterte resonnementer	
KX	*Kontraeksempel:* Eleven blir spurt om å finne et kontraeksempel til en gitt påstand, for å vise at den gitte påstanden er feil.
KS/KG	*Korriger eller begrunn en feil:* Oppgaven oppgir et feilaktig svar eller argument til et problem. Eleven blir fortalt at noe er galt, og skal begrunne feilen eller korrigere den. Enten generell eller spesifikk.
PB	*Prinsipper for bevis:* Eleven blir spurt om å forklare hovedtrekkene eller et overblikk av et bevis, men ikke komme med et fult bevis.
Ingen mulighet for resonnering og argumentasjon funnet	
IF	*Ikke funnet:* Eleven må ikke å bruke resonnering og argumentasjon for å løse oppgaven

Tabell 4: Oversikt over vårt analyseverktøy, med endringer (Thompson et al., 2012, s. 262).

De fleste kodene for oppgaveanalysering er delt inn i generelle og spesifikke tilfeller. Vi valgte å utvide analyseverktøyet med klare «regler» for hva som skal til for å oppnå henholdsvis generell og spesifikk. Dette gjorde vi for at det er lettere å skille mellom tilfellene, samt å få en mer konsekvent analysering. For at en oppgave kategoriseres som generell, må det komme tydelig frem at generell bruk av tall, bokstaver, symboler eller formuleringer må benyttes for å svare på oppgaven. En oppgave kategoriseres som spesifikk dersom den ikke kategoriseres som generell.

Vi valgte å utvide LS/LG til å gjelde for flere tilfeller enn kun «komme med en antakelse eller forklaring ut ifra et gitt mønster» (Thompson et al., 2012, s. 262). Delvis fordi vi oppfattet «mønster» som et vagt begrep og delvis fordi vi tenkte det kunne være mange muligheter til å komme med antakelser enn kun de i forbindelse med mønster. Vi utvidet dermed disse kodene til å gjelde for tekst, diagram og bilder i tillegg til mønster. Koden US/UG justerte vi til å også inkludere tilfeller hvor boken presenterte flere påstander.

I justeringen av kodene PS/PG presiserer vi at oppgaven enten kan være presentert som en løsning eller en påstand som er gyldig. Beskrivelsen av PS/PG inkluderer både argument og bevis. Et argument kan være både deduktivt og ikke-deduktivt, et bevis *må* være deduktivt.

Tidlig i analysen oppdaget vi at forholdet mellom oppgaver som la opp til deduktive og ikke-deduktive argument i spesifikke tilfeller varierte, mens generelle tilfeller alltid la opp til deduktive argument. Vi bestemte dermed at PG måtte være deduktivt, og vil på denne måten kunne kvalifiseres som bevis. Denne avgjørelsen gjorde vi i tro om at alle PG vil være deduktive, og ikke ville skape en konflikt med denne beskrivelsen. I justeringen i koden ES/EG presiserte vi at det kan være flere argumenter, samt at eleven blir spurt om å *evaluere* gyldigheten. Denne presiseringen gjorde vi blant annet fordi vi ønsket at den skulle skille seg tydeligere fra US/UG. I ES/EG er det forventet at elevene skal evaluere og drøfte seg gjennom et argument for å forsikre seg om at hver del av begrunnelsen er gyldig. I tillegg, selv om det kan virke underforstått, ønsket vi å presisere at eleven skal jobbe med å begrunne i slike oppgavetyper, og la dermed til «og komme med en begrunnelse».

Vi ville skille koden KX tydeligere fra kodene KS/KG, og valgte dermed å presisere at det er et kontraeksempel som skal bli brukt for å motbevise den gitte påstanden. I likhet med justeringen på koden ES/EG ville vi, i koden KS/KG, presisere at elevene skulle *begrunne* feilen som er presentert. På denne måten vil det være tydeligere at også denne koden gir mulighet til å jobbe med kjerneelementet RA. I koden PB presiserte vi at det var bevis det handlet om, altså deduktive argumenter. Denne endring gjorde vi fordi begrepet «argumenter» ikke nødvendigvis kan overføres mellom tekster, ettersom forfattere definerer det forskjellig.

3.3.3 Systematisering av analyse

For å gjøre opptelling og analysering mest rettferdig har vi tatt utgangspunkt i at en del av en oppgave er definert som en oppgave. Altså vil en oppgave som har fire deloppgaver under seg (for eksempel a, b, c og d) telles som fire separate oppgaver. Hvis vi under ordsøkingen har fått treff på et ord i oppgave b, er det kun b-oppgaven vi har analysert, og ikke de resterende a, c og d. Videre i masteroppgaven, da vi snakker om en oppgave, er det altså en deloppgave vi snakker om. Når det gjelder de «utvalgte oppgavene» (for eksempel «utforsk», «snakk», «diskuter og reflekter») så har vi under telling av totalt antall oppgaver telt hver av disse som én oppgave. Dette gjorde vi fordi oppgavene ble analysert som én stor oppgave, selv om den bestod av flere spørsmål.

Som man kan se i kapittel 8, Vedlegg, er noen ruter markert i rødt. Denne koden viser funn vi ikke analyserte. Det kan for eksempel være «tabellen viser [...]» eller «lag en modell som viser [...]». Her blir ordet vis brukt synonymt med «representerer». Dette er situasjoner hvor sammenhengen til nøkkelordet ikke har noe med RA og bevis og gjøre, og etter vår mening ikke er ment som en mulighet til det. Vi velger å skille disse fra koden IF, da oppgaver med IF er oppgaver som potensielt kunne vært en mulighet for RA, men ikke oppfyller kravene. Vi vil ikke telle disse røde rutene under statistikken som viser antall ganger nøkkelordene forekommer. Det har vi bevisst valgt å gjøre for å ikke få et falskt høyt antall forekomster av noen av ordene, og for å ikke få et urealistisk høyt tall med IF.

Om noen oppgaver inneholdt flere nøkkelord, skulle disse kategoriseres i nøkkelordet vi analyserte først. Om et annet nøkkelord henviste til samme oppgave ble dette markert som rødt. Vi valgte å gjennomføre analyseringen på denne måten for å ikke analysere samme oppgave flere ganger. Dersom nøkkelordene befant seg i de «utvalgte oppgavene», ville nøkkelordene bli markert med fargen blå i oversikten, og de ble ikke analysert som nøkkelord.

Vi ønsket uansett å analysere *alle* de «utvalgte oppgavene», og unngikk på denne måten å kode mulighetene flere ganger.

Der det blir passende å tildele to forskjellige koder, vil dette løses med å gjøre nettopp det. På denne måten vil alle forskjellige mulighetene for RA bli presentert i resultatene. Om det imidlertid ble naturlig å gi en oppgave samme kode flere ganger, vil vi *ikke* gjøre dette. Om noen av oppgavene har flere deler, hvor en del gir mulighet for RA, mens en del ikke gir dette, vil vi kun logge koden som gir mulighet for RA. Vårt hovedmål er å finne muligheter for RA, og legger dermed mindre vekt på det som kategoriseres som «ikke funnet».

3.4 Etiske perspektiver

I all forskning er det viktig å ta hensyn til etiske perspektiver. I vår masteroppgave er det en del etiske perspektiver som bortfaller, da vi ikke samler data fra mennesker, men det vil ikke si at det ikke har sine utfordringer. Det er viktig å reflektere over vårt valg av datamateriale. Forskning tar utgangspunkt i lærebøker som er offentlige publikasjoner. Vår masteroppgave tar i bruk en del tidligere forskning på resonering og argumentasjon, og bygger på metoder og analyseverktøy utviklet av andre forskere. Der vi har brukt andre forfattere sitt arbeid har vi vært nøye med å referere til kilden. Der det har vært mulighet har vi søkt etter primærkilde, for å forstå den originale hensikten til forfatterne.

Masteroppgaven inneholder vår tolkning av data, og det er viktig at vår tolkning ikke endrer den opprinnelige dataen (Fangen, 2022). Vi valgte derfor å presentere materialet fra bøkene slik det blir vist til leseren, sammen med vår tolkning. På denne måten går ikke viktig informasjon tapt, og forlaget sin hensikt blir presentert på en rettferdig måte.

Vårt mål med masteroppgaven er å undersøke hvordan lærebøkene individuelt adresserer kjerneelementets krav om resonnering og argumentasjon. Vi ønsker ikke å sammenligne forlagene eller fremheve noen lærebok fremfor andre. Vi har forsøkt å inkludere eksempler fra alle forlagene og begge fagene for å sikre en så balansert representasjon som mulig. Vi har aktivt forsøkt å oppnå dette for å vise både eksempler som demonstrerer oppfyllelse av læreplanens krav om resonnering og argumentasjon, samt eksempler som ikke oppfyller disse kravene.

3.5 Pålitelighet og validitet

Alle forskningsprosjekt bør sees i et kritisk lys for å avgjøre om forskningen er pålitelig og gyldig. Pålitelighet handler om hvorvidt dataene vil gi konsekvente svar under ulike omstendigheter (Bell, 2010, s. 119). Masteroppgaven vår er en dokumentanalyse og vår data vil derfor være konsekvente under hele prosjektet.

Vi valgte å analysere all data sammen i par, for å oppnå en mer pålitelig analyse av data, og for å gjennomføre en så uniform som mulig vurdering av hver oppgave. Vi prøvde å lage gode beskrivelser av hver kode for å gjøre analyseringen lettere og mer konsekvent. Vi kunne oppdage underveis at vi av og til glemte hva som skilte kodene fra hverandre. Da var det nyttig og ha gode beskrivelser som kunne få oss tilbake på riktig spor. Underveis i analysen kunne vi møte på problemer, hvor vi måtte utføre noen endringer. Der det ble gjort større endringer som kunne ha effekt på tidligere analyserte data, analyserte vi den aktuelle dataen på nytt.

Vi mener dette ble mest rettferdig da vi analyserte en og en bok, og det ville minimere forskjellene fra starten til slutten i analysen. Der vi oppdaget noe kunne ligge mellom to koder, måtte vi endre noen formuleringer for at analyseverktøyet skulle være mer presist. Disse forandringene utvidet som regel kodene for å inkludere noen tilfeller. Vi tror dette ble mer hensiktsmessig enn å legge inn flere koder til analyseverktøyet. Vi tok en avgjørelse på at vi forhåpentligvis har løst disse problemene første gang vi møtte på dem. Vi gikk derfor ikke tilbake for å dobbeltsjekke disse, da vi håper og antar det ikke ville ha effekt på tidligere analysert data. Vi hadde jevn kontakt med veileder under analyseringen for å diskutere både analyseverktøyet, og utvalgte oppgaver for å vite at vi var på riktig spor.

Validitet handler om hvordan vårt valg av forskningsmetode er tilstrekkelig til å lage en konklusjon til forskningsspørsmålet (Bell, 2010, s. 120). I masteroppgaven fokuserer vi utelukkende på hvordan lærebøkene henvender seg til leseren som målgruppe. Som lærer har man ofte tilgang til andre hjelpemidler, for eksempel lærerveiledning eller digitale plattformer, som kan brukes sammen med læreboken. Vi har ikke tatt med slike ressurser i denne oppgaven.

Vi har valgt å lokalisere og analysere nøkkelord og «utvalgte oppgaver» i lærebøkene. Vi har gjort et nøye utvalg for å velge ut nøkkelordene, med inspirasjon fra tidligere forskning. Vi hadde forslag til flere nøkkelord enn de vi inkluderte, men valgte bort noen ettersom de ikke ble brukt i sammenheng med RA. Vi håper at de utvalgte ordene dekker de fleste mulighetene for RA og bevis i lærebøkene. Samtidig skal det ikke utelukkes at en del muligheter kan ha bortfalt ved valg av vår metode.

Tekstbøker vil imidlertid ikke gi hele sannheten på hvordan elever faktisk gjennomfører oppgavene, og dermed heller ikke til hvilken grad de får utbytte av tilretteleggingen boka gjør. Som Thompson et al. skriver: «Even though it is well documented that pedagogical, philosophical, and psychological factors are important in learning about reasoning and proof, because we were interested in analyzing textbooks, we focused on the mathematical and logical components explicitly mentioned in written materials» (2012, s. 257).

Dette synliggjør noe av begrensningen til denne oppgaven, og også andre typer lærebokanalyser. Hvordan elever tilegner seg kunnskap i RA er kompleks, da det er pedagogiske, filosofiske og psykologiske faktorer involvert i læring. For å konkludere med hvordan elever tilegner seg kunnskap i RA, må man dermed se på elevene, og ikke bare lærebøker. Vår oppgave fokuserer imidlertid utelukkende på lærebøkene, og deres eksplisitte tilrettelegginger for å lære RA.

4 Resultater fra analyse av innsamlede data

I denne delen av masteroppgaven vil vi presentere resultatene fra analysen. Totalt i datainnsamlingen har vi registrert og logget mer enn 3100 nøkkelord og «utvalgte oppgaver». Etter datainnsamlingen ga vi en rød fargekode til alle ord som ikke var relevante for masteroppgaven (se kapittel 3.3.3 for detaljer). Dette førte til at vi endte opp med 1521 tilfeller av nøkkelord og «utvalgte oppgaver» som skulle analyseres gjennom analyseverktøyet. Av disse 1521 tilfellene, ble 674 av dem merket med koden I eller IF, mens resterende 847 var en mulighet til RA. Etter å ha analysert alle forekomster av nøkkelord og «utvalgte oppgaver» satte vi resultatene inn i tabeller, for å få oversikt over de ulike forekomstene av kodene. På denne måten kunne vi lettere se sammenhenger på tvers av koder og fag. Disse tabellene er hovedgrunnlaget til videre diskusjon.

Tabell 5 viser en oversikt over datagrunnlaget vårt – totalt antall nøkkelord og «utvalgte oppgaver» vi har analysert.

		Totalt antall tilfeller analysert
1T	Gyldendal	411
	Cappelen Damm	312
	Aschehoug	300
	Totalt 1T:	961
1P		
	Gyldendal	240
	Cappelen Damm	182
	Aschehoug	160
	Totalt 1P:	560
	Totalt 1T + 1P	1521

Tabell 5: Oversikt over datagrunnlag

Vi talte over alle oppgavene i lærebøkene for å se antall oppgaver tildelt en kode som en prosent av totale oppgaver i bøkene. Tabell 6 viser oversikt over antall oppgaver i bøkene.

		Totalt antall oppgaver
1T	Gyldendal	2868
	Cappelen Damm	3209
	Aschehoug	2760
1P	Gyldendal	2114
	Cappelen Damm	3138
	Aschehoug	1677
	Totalt	15766

Tabell 6: Oversikt over antall oppgaver i lærebøkene

Videre i kapittelet vil vi presentere tabeller med fullstendig data, samt noen utvalgte funn fra ordsøkingen, for å gi innsikt i hvordan vi har tenkt under analyseringen og hvorfor funnene har blitt tildelt koden de har fått.

4.1 Lærebokteksten

I dette delkapittelet vil vi presentere funnene våre fra analyseringen i lærebokteksten. Tabell 7 viser oversikt over antall forekomster vi analyserte, og hvilken kode dem fikk.

	Lærebokteksten					**Forekomster analysert**
		G	S	O	I	
1T	Gyldendal	17	6	1	3	27
	Cappelen Damm	6	5	0	5	16
	Aschehoug	13	4	1	1	19
	Totalt 1T:	36	15	2	9	62
1P	Gyldendal	1	7	1	1	10
	Cappelen Damm	0	4	0	2	6
	Aschehoug	0	2	0	4	6
	Totalt 1P:	1	13	1	7	22
	Totalt 1T + 1P	37	28	3	16	84

Tabell 7: Oversikt over fordelingen av koder fra lærebokteksten

4.1.1 Generell (G)

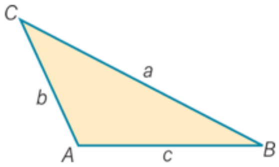
Ved å begrunne metoder og egenskaper med generelle tilfeller, etterlater disse ingen tvil til leseren om at egenskapen eller metoden skal gjelde generelt. Hvis begrunnelsen for en egenskap eller metode ble presentert for elevene med generell bruk av tall, bokstaver, symboler og/eller formuleringer, ga vi den koden G.

Et eksempel på et slik tilfelle er beviset for sinussetningen. I dette beviset bruker man en vilkårlig trekant ΔABC. Beviset demonstrerer at forholdet mellom sinus til en vinkel og motstående side er konstant, uansett hvilken vinkel man bruker. Ved å bruke symboler og generelle betegnelser i stedet for konkrete tallverdier, viser dette beviset at resultatet gjelder for alle trekantene, ikke bare for én spesifikk trekant.

7.6 Sinussetningen

I en rettvinklet trekant kan vi finne vinkler og sider ved hjelp av definisjonene av sinus og cosinus. Nå skal vi lære å bruke sinus til å finne vinkler og sider i en trekant som ikke er rettvinklet.

Vi tegner en trekant ABC.



Vi kan bruke arealsetningen med utgangspunkt i hvert av de tre hjørnene i trekanten. Det gir tre ulike uttrykk for arealet av trekanten. Uttrykkene er $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$, $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$ og $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$. Alle de tre uttrykkene må gi det samme svaret.
Altså er

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Nå multipliserer vi alle tre uttrykkene med 2. Det gir

$$b \cdot c \cdot \sin A = a \cdot c \cdot \sin B = a \cdot b \cdot \sin C$$

Deretter dividerer vi alle uttrykkene med $a \cdot b \cdot c$ og forkorter:

$$\frac{\cancel{b} \cdot \cancel{c} \cdot \sin A}{a \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{c}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{c} \cdot \sin B}{\cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{c}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \sin C}{\cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot c}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Vi har nå bevist *sinussetningen*: Forholdet mellom sinus til en vinkel og lengden av den motstående siden er det samme for alle vinklene i en trekant.

Figur 4: (Oldervoll et al., 2020a, s. 298)

En eksempeloppgave som har blitt kodet som G, er beviset for at vinkelsummen i en vilkårlig trekant er 180 grader. Eksempelet begrunner egenskapen ved å bruke en vilkårlig trekant der verdiene til vinklene ikke er spesifisert. Deretter benyttes samsvarende vinkler til å vise hvorfor dette resultatet alltid må gjelde.

EKSEMPEL 20

Vis at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Løsning:
Vi forlenger de to linjene i det ene hjørnet på trekanten og tegner en parallell til den tredje siden samme sted, se figuren. Det er klart at $w = w'$, siden de er toppvinkler. Videre er $u = u'$ og $v = v'$, siden de er samsvarende vinkler ved parallelle linjer. Til sammen utgjør u', v' og w' en rett linje, altså 180°, se figuren. Da gjør u, v og w det også.

Vi valgte trekanten vilkårlig uten å gjøre noen antakelser om den. Derfor gjelder resonnementet alle trekanter. □

Figur 5: (Kalvø et al., 2020b, s. 35-36)

4.1.2 Spesifikk (S)

I de tilfellene egenskaper eller metoder fikk koden S, var de begrunnet med et argument basert på et spesifikt tilfelle. I slike tilfeller blir ikke den generelle gyldigheten av egenskapen eller metoden uttrykt, men står gjerne som en kommentar etter at egenskapen er begrunnet.

Eksempelet i figur 6 er funnet etter en diskusjonsoppgave om prosentvis vekst over tid. Læreboken viser hvordan elevene kan bruke tilsvarende metode til å finne verdier bakover i tid. Dette spesifikke eksempelet inkluderer konkrete verdier og et bestemt tilfelle, men er en egenskap som også gjelder generelt. Etter eksemplet gir læreboken en kommentar som understreker at denne metoden vil gjelde for alle tilfeller.

I diskusjonsoppgaven fant dere sikkert ut at når vi setter 8000 kr i banken med 4 rente per år, vil beløpet vokse til 8000 kr $\cdot$ 1.04^{10} etter 10 år. Etter n år vil kapitalen vår ha økt til 8000 kr $\cdot$ 1.04^n.

Hvis vi vil finne ut hvor mye penger vi måtte ha satt i banken for 5 år siden for å ha 8000 kr på kontoen i dag, kan vi la x være beløpet i kroner. Ettersom det beløpet har vokst til 8000 kr på 5 år, må

$$
\begin{aligned}
x \cdot 1,04^5 &= 8000 \text{ kr} \quad \Big| \cdot \frac{1}{1,04^5} \\
x &= 8000 \text{ kr} \cdot \frac{1}{1,04^5} \\
x &= 8000 \text{ kr} \cdot 1,04^{-5} \\
x &= 6575,42 \text{ kr}
\end{aligned}
$$

Dette viser at vi kan bruke formelen 8000 kr $\cdot$ $1,04^n$ også når vi regner bakover i tida, men da må vi bruke negative verdier for n.

Tilsvarende gjelder hver gang vi har en fast prosentvis økning eller nedgang i flere perioder.

Figur 6: (Oldervoll et al., 2020b, s. 106)

I figur 7 presenteres en eksempeloppgave som er kodet med S. Det er deloppgave a som har fått denne koden. Deloppgave c, som også inneholder nøkkelordet *vis*, mangler begrunnelse og krever kun mekanisk deduksjon. Deloppgave a demonstrerer imidlertid hvordan man omformer et rotuttrykk og gir begrunnelser for hvorfor akkurat denne faktoriseringen er gunstig å benytte.

a Vis at $\sqrt{18}$ kan omformes til $3\sqrt{2}$.

b Skriv $\sqrt{\dfrac{4a}{9}}$ så enkelt som mulig.

c Vis at $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ kan omformes til $\sqrt{3}$.

a Vi faktoriserer 18 slik at den ene faktoren er et kvadrattall. Fordi 9 er et kvadrattall, velger vi faktoriseringen $18 = 9 \cdot 2$.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

b $$\sqrt{\frac{4a}{9}} = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{a}}{3}$$

c $$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{eller} \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Figur 7: (Borge et al., 2020a, s. 14)

4.1.3 Overlatt til elev (O)

Hvis en oppgave fikk koden O, var begrunnelsen for en egenskap eller metode elevenes ansvar å formulere. Læreboken gir ikke en forklaring på hvorfor dette gjelder.

I eksempelet under blir elevene introdusert for en metode for å løse lineære likninger, uten at det blir gitt en tilhørende begrunnelse. Umiddelbart etter denne metoden blir presentert, følger det en oppgave. I deloppgave c av denne oppgaven, blir elevene bedt om å utarbeide begrunnelsen for Ada Lovelace's formel. Her blir dermed elevene bedt om å begrunne metoden, og vi har gitt den koden O.

Vi kan skrive lineære likningssystemer med to ukjente på formen:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Ada Lovelace viste at løsningen, når $ae - bd$ ikke er lik 0, er gitt ved:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \wedge y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

5.11

Vi har gitt likningssystemet

$3x - 5y = 11$

$2x + 3y = 1$

a Løs likningssystemet med CAS.

b Bruk formlene til Ada Lovelace til å løse likningssystemet.

c Vis hvordan vi får formlene til Ada Lovelace uten og med bruk av hjelpemidler.

Figur 8: (Borge et al., 2020b, s. 237)

4.1.4 Ingen begrunnelse (I)

Noen egenskaper eller metoder blir introdusert for elevene uten tilhørende begrunnelse. Disse tilfellene har blitt kodet som I. Eksempeloppgaven nedenfor viser en oppgave som innebærer å forenkle et rotuttrykk. Eksempeloppgaven kan minne om en av de vi kodet som S, men har en vesentlig forskjell som fører til at de blir kodet ulikt. Forfatterne skriver at man utnytter at $50 = 25 \cdot 2$, men det gis ingen begrunnelse for hvorfor dette er en hensiktsmessig måte å faktorisere uttrykket på. Dette vurderes som utilstrekkelig for en begrunnelse, og derfor har vi gitt eksempeloppgaven koden I.

EKSEMPEL

Bruk regnereglene for kvadratrøtter til å vise at $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Løsning:

Vi utnytter at $50 = 25 \cdot 2$. Dermed er

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$$

Figur 9: (Oldervoll et al., 2020a, s. 101)

4.2 Oppgaver

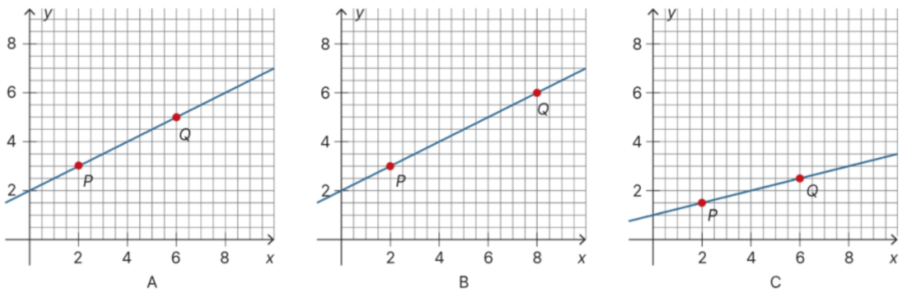
I dette delkapittelet vil vi presentere resultatene fra analyseringen av oppgavene i lærebøkene. Tabell 8 viser oversikt over antall oppgaver analysert, samt hvilken kode de ble tildelt. I tillegg viser vi antall oppgaver tildelt en kode som en prosent av totale oppgaver i bøkene. Her har vi dividert tallene kolonnen «Totalt 1T + 1P», med totalt oppgaver i alle bøkene, 15.766.

		Oppgaver													
		LS	LG	US	UG	PS	PG	ES	EG	KX	KS	KG	PB	IF	Oppgaver analysert
1T	Gyldendal	22	29	3	4	76	72	0	0	0	2	0	0	149	384
	Cappelen Damm	20	20	3	0	90	11	0	0	0	1	0	0	135	296
	Aschehoug	34	22	4	6	51	32	0	0	1	0	0	4	108	281
	Totalt 1T:	76	71	10	10	217	115	0	0	1	3	0	4	392	961
1P															0
	Gyldendal	38	14	10	2	43	12	0	0	0	1	0	0	100	230
	Cappelen Damm	19	5	18	0	41	3	0	0	1	0	0	1	82	176
	Aschehoug	12	13	10	0	21	4	0	0	1	2	0	1	84	154
	Totalt 1P:	69	32	38	2	105	19	0	0	2	3	0	2	266	560
	Totalt 1T + 1P	145	103	48	12	322	134	0	0	3	6	0	6	658	1437
	Prosent av totalt antall	0,92 %	0,65 %	0,30 %	0,08 %	2,04 %	0,85 %	0,00 %	0,00 %	0,02 %	0,04 %	0,00 %	0,04 %	4,17 %	
	oppgaver i bøkene	1,57 %		0,38 %		2,89 %		0,00 %		0,10 %				4,17 %	

Tabell 8: Resultat fra analysering av oppgaver

4.2.1 Lag en antakelse (LG/LS)

En antakelse kan beskrives som en påstand fra et individ hvor gyldigheten til påstanden er ukjent. Denne må ha potensialet til å bli bevist i matematisk teori. Under er et eksempel på en oppgave vi har kodet som LS. I oppgave b blir elevene bedt om å regne ut det som skal representere stigningstallet til de tre figurene. Etter dette skal de sammenligne tallene og diskutere seg frem til en forklaring på hva tallene representerer i hver graf. Siden det er spesifikke punkter elevene skal arbeide med, har denne oppgaven fått koden LS.



UTFORSK

a Regn ut hvor mye funksjonen har vokst fra *P* til *Q* på hver av figurene, altså hvor mye *y*-verdien har endret seg.

La (x_1, y_1) være koordinatene til *P*, og (x_2, y_2) være koordinatene til *Q*.

b Regn ut $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ for hver av de tre figurene.
Sammenlikn tallene og diskuter hva de betyr.

Figur 10: (Kalvø et al., 2020b, s. 139)

Under er et eksempel på en oppgave der elevene blir bedt om å formulere en generell antakelse. I den første delen av oppgaven skal elevene si hva sammenhengen er mellom funksjonen f(x), og nullpunktene til den deriverte funksjonen f ’ (x). Det spesifiseres ingen bestemt funksjonuttrykk i oppgaven, derfor skal antakelsen gjelde alle funksjoner. Elevene blir ikke bedt om å gi et argument for eller bevise antakelsen. Det er bare den første delen av oppgaven som handler om å lage en antakelse.

Reflekter og diskuter!

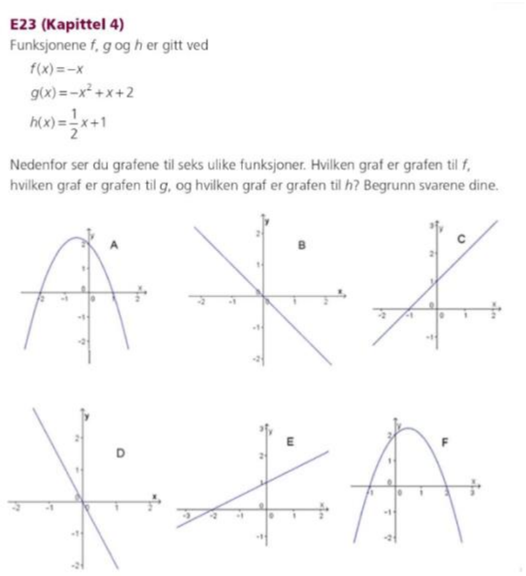
Hva er sammenhengen mellom ekstremalpunktene til en funksjon $f(x)$ og nullpunktene til den deriverte funksjonen $f'(x)$?

I hvilke praktiske sammenhenger kan det være nyttig å finne topp- eller bunnpunkter?

Figur 11: (Kalvø et al., 2020b, s. 310)

4.2.2 Utforske en antakelse (US/UG)

Elevene kan bli presentert for en eller flere antakelser, og må avgjøre om de stemmer eller ikke. I disse tilfellene har oppgaven fått koden US/UG. I oppgaven under blir elevene presentert for tre funksjonsuttrykk og seks grafiske representasjoner. Eleven har fått oppgitt at tre av de grafiske representasjonene vil «passe» med funksjonsuttrykkene, men må undersøke hvilke kombinasjoner som hører sammen.


E23 (Kapittel 4)

Funksjonene f, g og h er gitt ved

$$f(x) = -x$$
$$g(x) = -x^2 + x + 2$$
$$h(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Nedenfor ser du grafene til seks ulike funksjoner. Hvilken graf er grafen til f, hvilken graf er grafen til g, og hvilken graf er grafen til h? Begrunn svarene dine.

Figur 12: (Borge et al., 2020a, s. 233)

Eksempel på en annen måte elever kan utforske antakelser er å undersøke om matematiske påstander gjelder alltid, noen ganger eller aldri slik som i oppgaven under. Påstandene er generelt formulert, og har ikke spesifikke verdier eller uttrykk. Oppgaven har derfor fått koden UG.

SNAKK

Stemmer det?

Alltid – noen ganger – aldri

- Grafen til en funksjon har ett skjæringspunkt med y-aksen.
- Grafen til en funksjon har to skjæringspunkter med y-aksen.
- Hvis $f(0) = c$, så er $(0\ ,\ c)$ det eneste skjæringspunktet mellom grafen til f og y-aksen.
- Grafen til en funksjon har ingen skjæringspunkter med x-aksen.
- Grafen til en funksjon har uendelig mange skjæringspunkter med x-aksen.

Figur 13: (Borge et al., 2020b, s. 162)

4.2.3 Produser et argument (PS/PG)

Når en oppgave er kodet som PS eller PG, blir en påstand eller løsning presentert for elevene, og deres oppgave er å komme med et argument eller bevis. Påstanden som presenteres, er gyldig, og det er dermed ikke elevenes oppgave å avgjøre gyldigheten. Nedenfor er en oppgave der elevene skal produsere argumenter for et spesifikt tilfelle. Oppgaven begynner med å gi elevene noe informasjon, etterfulgt av et matematisk uttrykk. Deres oppgave er å begrunne hvorfor uttrykket kan brukes til å finne kortsiden i en tennisbane. For å finne kortsiden må elevene bruke omkretsen som er gitt, og trekke fra de to langsidene. De sitter nå med verdien for de to kortsidene, og må dele på to for å få lengden på en kortsidene. Denne begrunnelsen bygger på logiske forklaringer, ikke på felles aksepterte matematiske påstander. Oppgaven legger heller ikke opp til matematisk deduksjon. Derfor legger denne oppgaven opp til et argument, ikke et bevis.

2.35
En tennisbane er rektangulær med et areal på 260,8 m^2
og en omkrets på 69,5 m.

a La x være lengden av langsiden.
Forklar at kortsiden er $\frac{69{,}5 - 2x}{2}$.

b Finn målene på tennisbanen.

Figur 14: (Kalvø et al., 2020b, s. 97)

Eksempelet under fikk også koden PS. Her blir elevene bedt om å vise at trekanten er rettvinklet. Her kan elevene benytte pytagoras teoremet. Det er antatt at de skal vite at pytagoras skal gjelde for alle rettvinklede trekanter. Elevene kan da teste om $AB^2 + BC^2 = AC^2$ er gyldig, og vil da se at trekanten er rettvinklet, siden den oppfyller pytagoras teorem. Deretter må de avgjøre at det skal være $\angle B$ som er rettvinklet. For å avgjøre dette kan de bruke informasjonen om at katetene må gå ut fra den rette vinkelen i en rettvinklet trekant. Med bakgrunn i dette kan de konkludere med at dette gjelder den oppgitte trekanten, og trekanten er rettvinklet med $\angle B = 90°$. For å besvare oppgaven må elevene benytte sammenhengende deduktive argumenter, noe som tilsvarer at denne PS-oppgaven kan defineres som bevis.

6.84
I en trekant ABC er $AB = 6$, $BC = 8$ og $AC = 10$.

a Vis at trekanten er rettvinklet med $\angle B = 90°$.

b Finn vinklene i trekanten.

Figur 15: (Kalvø et al., 2020b, s. 386)

Oppgaver med koden PG gir elevene mulighet til å produsere bevis. Nedenfor presenteres en oppgave med kode PG. Her blir elevene fortalt at det ligger drops i et $n \cdot n$ gitter. Hvis lengden blir forlenget med en bestemt mengde, skal bredden minke med samme mengde. Resterende areal skal alltid bli et kvadrattall og elevenes oppgave er å vise dette. Siden det originale kvadratet er et $n \cdot n$ gitter må det ha areal n^2. For at sidene skal øke og minke kan de sette at lengdene øker og minker med en verdi a. Det nye arealet er da $(n - a)(n + a) = n^2 - a^2$. Siden vi ønsker å finne resten mellom arealene må vi trekke arealet av trekanten fra arealet av kvadratet $n^2 - (n^2 - a^2) = a^2$. Vi kan se at resten er a^2, og vil bli et kvadrattall uavhengig av hvilken verdi a skulle vært. Oppgaven ber eleven bevise at dette *alltid* skal stemme. Etter vår mening krever derfor oppgaven et generelt bevis.

2.31 U
Bjørn har akkurat så mange drops at han kan legge dem i et kvadratisk $n \times n$-gitter. Han vil omorganisere dropsene sine til et rektangulært gitter. Lengden av gitteret skal være like mye lengre enn n som bredden er kortere enn n.
Vis at Bjørn alltid etter en slik omorganisering vil ha et antall drops til overs som er et kvadrattall.

Figur 16: (Borge et al., 2020b, s. 62)

Kodene PS og PG handler om å produsere argument eller bevis. Som vi har skrevet i kapittel 2.1.4 inkluderer argumentasjon både deduktive og ikke-deduktive begrunnelser. Bevis derimot har krav om å være deduktivt. Alle forekomster av PG er oppgaver hvor elevene får mulighet til å produsere bevis, da disse oppgavene legger til rette for gjennomgående deduktiv struktur i svaret. For PS så vi variasjon mellom deduktive og ikke-deduktive begrunnelser. Vi utviklet ikke et analyseverktøy som ga mulighet til å skille mellom disse to typene av argument, blant annet for å begrense arbeidsmengden i masteroppgaven. Vi kunne derfor ikke si at alle PS kan kvalifiseres som bevis, slik som for PG, men det er absolutt muligheter innenfor PS også.

4.2.4 Evaluer et argument (ES/EG)

I kodene som handler om å evaluere et argument, presenterer boken ett eller flere argumenter eller bevis, og elevene skal evaluere om disse er gyldige eller ikke. De blir bedt om å komme med en begrunnelse for sin vurdering, enten den er generell eller spesifikk. Vi fant ingen tilfeller av verken ES eller EG i noen av bøkene.

4.2.5 Kontraeksempel (KX)

Når elever blir bedt om å finne et kontraeksempel til en gitt påstand, tildeles oppgaven koden KX. Et kontraeksempel er et moteksempel som ugyldiggjør den opprinnelige påstanden. I oppgaven under presenteres en påstand for elevene, og de skal forklare hvorfor påstanden er ugyldig, med et eksempel. Elevene kan bruke en valgfri startverdi, og teste ut med begge tilfellene. Ved å gjøre dette vil elevene se at Endre tar feil, og må i tillegg forklare hvorfor det ikke blir det samme.

3.320

Samme type slalåmski selges i to forskjellige butikker. Prisen er den samme i begge butikkene. I butikk A settes prisen ned 20 %. I butikk B settes prisen først ned 10 % og så etter noen dager med 10 % til. Endre påstår at prisen da fremdeles er den samme i begge butikkene.

Forklar Endre hvorfor dette ikke er riktig. Bruk gjerne et eksempel når du forklarer.

Figur 17: (Oldervoll et al., 2020b, s. 312)

4.2.6 Korriger eller begrunn en feil (KS/KG)

Oppgaver blir tildelt koden KS/KG når læreboken gir et feilaktig svar eller argument til et problem, og elevene oppfordres til å begrunne eller korrigere feilen. Vi observerte at de eneste tilfellene der elevene måtte korrigere eller begrunne feil, var i spesifikke tilfeller. I den følgende oppgaven blir elevene presentert for to ulike metoder for å forenkle et uttrykk. Det påpekes at begge metodene inneholder feil, men elevene får ikke opplyst hva eller hvor feilene er. Etter å ha identifisert feilene, blir de bedt om å begrunne dem. I andre del av oppgaven blir elevene utfordret til å forenkle uttrykket på riktig måte. Ikke alle oppgaver i denne kategorien krever både korrigering og begrunnelse, men oppgaven i figur 18 ble elevene utfordret til å gjøre begge deler.

2.301

Oda og Pål skal forenkle uttrykket

$$\frac{1}{a} - \frac{a+1}{2a}$$

De løste oppgaven slik:

Oda: $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot a} - \frac{a+1}{2a} = \frac{2-a+1}{2a} = \frac{3-a}{2a}$

Pål: $\frac{2a \cdot 1}{a} - \frac{2a\,(a+1)}{2a} = 2-(a+1) = 1-a$

- Både Oda og Pål løste oppgaven feil. Forklar hvilke feil de gjør.
- Løs oppgaven uten og med digitalt hjelpemiddel.

Figur 18: (Oldervoll et al., 2020a, s. 336)

4.2.7 Prinsipper for bevis (PB)

Prinsipper for bevis handler om å forklare hovedtrekkene i et bevis, men ikke komme med et fult bevis. I eksempelet under blir elevene bedt om å forklare beviset for at grafen til en andregradsfunksjon er symmetrisk om en linje x ved hjelp av CAS' utregning. I CAS-feltet ser elevene at det blir satt inn $f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)$ og $f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)$. Elevene må forstå at x må ha samme verdi, og siden CAS skriver true må funksjonsverdiene bli like. Siden det er en andregradsfunksjon må dette bety at grafen er symmetrisk om linja.

4.139

Til høyre ser du et bevis for at grafen til en andregradsfunksjon er symmetrisk om linja gitt ved $x = -\frac{b}{2a}$.

a Forklar beviset.

b Utfør det samme beviset uten hjelpemidler.

1	$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := a\,x^2 + b\,x + c}$
2	$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right) \stackrel{?}{=} f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)$ $\rightarrow$ **true**

Figur 19: (Borge et al., 2020b, s. 220)

4.2.8 Ikke funnet (IF)

Når en oppgave har fått koden IF betyr det at vi ikke anser den som en mulighet til å jobbe med RA. Det kan være verdt å merke seg at slike typer oppgaver ikke nødvendigvis er *unyttige*, men slik vi har tolket kjerneelementet resonnering og argumentasjon havner disse typer oppgaver utenfor.

Vi observerte gjentatte ganger at elever blir bedt om å forklare et uttrykk eller tilfelle basert på informasjon. Her prøvde vi å nøye skille mellom tilfeller hvor all informasjonen er gitt og eleven kun trenger å gjengi oppgaveteksten, mot tilfeller hvor eleven må bruke egne begrunnelser for å løse oppgaven. Under er et eksempel på en oppgave hvor all nødvendig informasjon er i oppgaveteksten, og vi anser oppgaven som ingen mulighet for RA.

2.69

Amir deler ut reklamehefter for firmaet BaX. Han får 50 kr i fastlønn hver dag og 2 kr for hvert reklamehefte han deler ut. La $L(x)$ være lønna til Amir, mens x er antall reklamehefter han deler ut.

a Forklar at $L(x) = 2x + 50$.

b Tegn grafen til funksjonen.

c Hvor mye tjener Amir en dag han deler ut 60 reklamehefter?

d Hvor mange reklamehefter må Amir dele ut for å tjene 300 kr?

Figur 20: (Kalvø et al., 2020a, s. 94)

I kapittel 2.1.1 introduserte vi begrepet mekanisk deduksjon. Dette er en form for resonnering, som ikke inngår i vår tolkning av RA. Eksemplet under er en oppgave hvor det legges opp til at elevene benytter mekanisk deduksjon. Å utføre en polynomdivisjon er basert på deduktive prinsipper, men som ikke kommer frem under utførelsen av divisjonen. For å besvare oppgaven er det dermed tilstrekkelig å kunne utføre algoritmen, uten ytterligere begrunnelse.

5.68 U

Polynomet P er gitt ved $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

a Vis at divisjonen $P(x) : (x - 1)$ går opp.

Figur 21: (Borge et al., 2020b, s. 259)

I oppgaven under skal elevene lage en regresjon ut fra oppgitt tabell, og funksjonstypen er gitt. Elevene må skrive inn tallene i et regneark, sette opp en regresjon og velge modellen oppgaven ber om. Dersom funksjonsuttrykket deres er likt som i oppgaven, har de besvart den. Elevene trenger ikke å begrunne hvorfor modellen passer, eller selv avgjøre en passende modell.

OPPGAVE 7

Botanikere som studerte ei vulkansk øy som dukket opp av havet, talte planteartene som etablerte seg på øya. I tabellen nedenfor er y antallet planter og x antallet år etter 2014.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	9	25	72	200	500

- Vis ved regresjon at eksponentialfunksjonen som passer best med dataene i tabellen, er gitt ved

  $f(x) = 1{,}37 \cdot 2{,}68^x,\ x \in [1, 6]$
- Hvor mange prosent har antallet plantearter økt per år ut fra denne modellen?
- Tegn digitalt grafen til eksponentialfunksjonen for $x \in [1, 6]$.
- Finn hvor raskt antallet plantearter vokser etter 4 år.
- Finn hvor lang tid det tar før antallet plantearter fordobles.

Figur 22: (Oldervoll et al., 2020a, s. 271)

Noen oppgaver ber elevene gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives gjennom matematisk språk. For å besvare disse oppgavene krever det at elevene tenker praktisk, men det forventes ingen matematisk begrunnelse. Oppgaver som dette har fått koden IF.

Reflekter og diskuter!

Hvilke praktiske situasjoner kan vi beskrive med en tredjegradsfunksjon?

Figur 23: (Kalvø et al., 2020a, s. 237)

Oppgaven under ber elevene tegne grafer, og fortelle hva de ser. Sammenhengen mellom grafene elevene tegner har en tydelig forklaring, men formuleringen av oppgaven begrenser mulighetene for å begrunne hvorfor grafene blir brattere med større verdi for k. Oppgaver som dette legger vekt på at elevene skal observere mønster eller sammenhenger, uten at de trenger å begrunne.

Tegn grafen til $f(x) = x^k$ digitalt med ulike verdier for k.

Hva ser dere?

Figur 24: (Oldervoll et al., 2020b, s. 234)

5 Drøfting av resultatene med støtte i teoretisk perspektiv

Målet for denne oppgaven var å se på muligheter for resonnering og argumentasjon i videregående lærebøker. Resonnering og argumentasjon er et av læreplanens seks kjerneelementer, og er det viktigste elevene skal arbeide med i opplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Lærebøker er et særlig viktig verktøy i matematikkundervisning, og det er derfor viktig at arbeid med kjerneelementene kommer tydelig frem i bøkene. Vi valgte å se på to ulike spesialiseringer innenfor videregående matematikk, teoretisk og praktisk. Kjerneelementet er formulert helt likt for begge spesialiseringene.

I dette kapittelet ønsker vi å diskutere på hvilken måte resultatene besvarer forskningsspørsmålene våre:

> *«Hvordan har videregående lærebøker tilrettelagt muligheter for at elever kan arbeide med kjerneelementet resonnering og argumentasjon?»*
>
> *«Hva er forskjellene i lærebokforlagenes tilnærming til å tilrettelegge for muligheter for læring i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i 1P og 1T?»*

Her vil vi diskutere resultatene, se nærmere på interessante funn og sammenligne disse med tidligere forskning. Vi kommer til å legge mest vekt på de analyserte oppgavene fra lærebøkene, men vil også trekke frem funn fra lærebokteksten. Diskusjonen er viktig for å gi et helhetlig bilde av mulighetene for RA i lærebøker.

5.1 Resonnering og argumentasjon i oppgaver

I denne seksjonen vil vi presentere og diskutere hvordan lærebøkene har lagt til rette for muligheter til RA i oppgaver. Her vil vi besvare det første forskningsspørsmålet, hvor vi tar for oss tre aspekter: Muligheter for å jobbe med RA i lærebokoppgavene; muligheter i oppgavene som kommer til kort; muligheter som bortfaller i formuleringen av oppgavene.

5.1.1 Muligheter for resonnering og argumentasjon

Fra resultatene våre ser vi at det finnes muligheter for resonnering og argumentasjon i lærebøkene. Kodene PS/PG (produsere et argument) og LS/LG (lage en antakelse) er de mest gjentatte blant oppgavene vi analyserte. Fra resultatene ser vi at elever får flere muligheter til å jobbe med spesifikke tilfeller, altså LS og PS, enn de får mulighet til å jobbe med generelle tilfeller, LG og PG.

Å produsere argumenter er en viktig del av RA. Disse oppgavetypene tilsier at elever skal produsere et argument til en påstand eller løsning. I disse tilfellene er det ikke tvil om det boken presenterer stemmer, og eleven skal vise hvorfor dette gjelder gjennom et argument eller bevis. Det er derfor ikke elevene sin oppgave å avgjøre *om* det er sant, men *hvorfor* det er sant. Dersom vi ekskluderer IF, som vi har kategorisert som ingen mulighet for RA, forekom koden PS flest ganger med 322 oppgaver gjennom de seks lærebøkene.

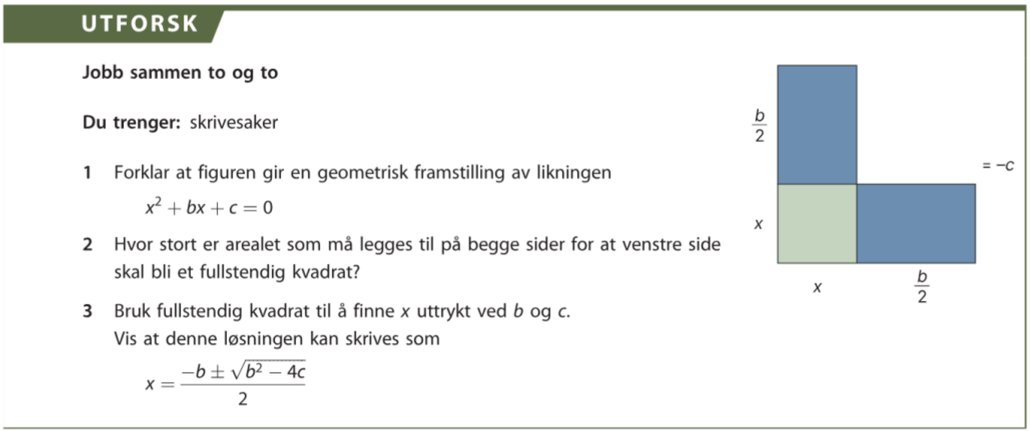
Det ble også kodet mange tilfeller av PG, relativt sett. Totalt for alle bøkene fikk 134 oppgaver denne koden. Den klart største andelen ble funnet i bøkene for 1T. Etter vår mening er PG oppgaver hvor elevene får mulighet til å produsere argumenter som kan kvalifiseres som bevis. I masteroppgaven har vi valgt å benytte Stylianides sin definisjon av bevis, som sier at et bevis må bestå av påstander som er sanne og akseptert av elevgruppen, det må inneholde gyldig resonnering for elevgruppen, og må uttrykkes på en passende måte for elevgruppen. I tillegg må argumentet være deduktivt.

I Thompson et al. (2012) sine resultater, presenteres antallet av hver kode som en prosent av totale oppgaver *analysert*. Som presentert i kapittel 2.2.2, fant Thompson et al. at totalt 2,4% av oppgavene de analyserte ga mulighet for å produsere et argument (PS/PG). Dersom vi skal sammenligne våre resultater med deres, blir det mest nærliggende å representere antallet av hver kode som en prosent av totale oppgaver *i boken*. Vi talte opp totalt 15.766 oppgaver i de seks lærebøkene. Fra resultatene har vi at 322 og 134 oppgaver fikk henholdsvis koden PS og PG. Dette fører til at *minst* 2,9% av oppgavene handler om å produsere et argument. Det er viktig å understreke at det å presentere våre funn som en prosent av totale oppgaver vil gi et pessimistisk syn på resultatene, da det høyst sannsynlig er flere muligheter for RA som vi ikke har plukket opp gjennom nøkkelordene. Imidlertid tror og håper vi at nøkkelordene har plukket opp flesteparten av mulighetene, og at prosentandelene vi presenterer er bortimot representativt for fordelingen av de virkelige mulighetene for RA. Denne usikkerheten vil gjelde videre i seksjoner der vi presenterer våre resultater som en prosent av totale oppgaver.

En relativt stor andel av oppgavene ble kodet som LS eller LG, med henholdsvis 145 og 103 funn. Her skal elevene komme med en antakelse basert på et mønster, bilde, tekst, diagram eller liknende. Som vi skrev i kapittel 2.1.4 mener vi at å lage en antakelse ikke *direkte* går under kjerneelementet RA, da det mangler krav om en begrunnelse. Vi valgte å ta det med da en del forfattere, for eksempel Boero et al. (1996), ser på antakelser som begynnelsen på argumentasjon, og vi selv mener det er en god inngang til å jobbe med RA.

Gjerløw og Rørvik (2023, s. 64-65) analyserte lærerveiledninger tilhørende lærebøker for 5.-7. klasse. Resultatene deres viste at instruksene til en oppgave i lærerveiledningene kunne tilby muligheter for RA som ikke kom tydelig fram i lærebøkene. Dette kan indikere at oppgaver som egentlig ikke kategoriseres som RA, kan gi muligheter med de riktige instruksjonene. Vi tror at oppgaver kodet som LS og LG kan være slike muligheter dersom lærere aktivt følger elevene opp med krav om begrunnelse.

Etter analyseringen ble vi oppmerksomme på en spesiell kombinasjon av koder. Det var noen oppgaver som både fikk kode for å «lage en antakelse» (LS/LG) og «produsere et generelt argument» (PG). Det var totalt åtte slike tilfeller i lærebøkene. Denne kombinasjonen av koder kan tyde på at elever blir utfordret til å jobbe med RA som en prosess, som starter med å lage en antakelse, og ender i et bevis. Boero et al. (1996) bruker begrepet «Cognitive unity of theorems», om den kognitive sammenhengen mellom en antakelse og bevis. De mener denne sammenhengen kan sees på som en prosess som starter med å produsere en antakelse, for så å benytte argumenter til å konstruere bevis for et teorem. Artikkelen fremsetter at skoler i Italia og i andre land ofte tilnærmer seg bevis ved at lærer presenterer, og elever repeterer. Prosessen med å «lage en antakelse» og «produsere et generelt argument» for å lære elever teoremer, utfordrer denne metoden, og gir mulighet til at elever selv kan komme frem til bevis og teoremer. Figur 25 viser eksempel på en oppgave vi har kodet som både LG (oppgave 2) og PG (oppgave 3).


UTFORSK

Jobb sammen to og to

Du trenger: skrivesaker

1 Forklar at figuren gir en geometrisk framstilling av likningen

$$x^2 + bx + c = 0$$

2 Hvor stort er arealet som må legges til på begge sider for at venstre side skal bli et fullstendig kvadrat?

3 Bruk fullstendig kvadrat til å finne x uttrykt ved b og c.
Vis at denne løsningen kan skrives som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Figur 25: (Kalvø et al., 2020b, s. 89)

Vi ønsker å presisere at vi stort sett fant disse kombinasjonene i de «utvalgte oppgavene». Vi tror grunnen til dette er fordi vi analyserte dem som én oppgave, i motsetning til analysen av nøkkelordene hvor vi kun så på deloppgaven ordet befant seg i. Dette vil gi økt sannsynlighet til å finne kombinasjoner med LS/LG og PG. Med dette vil vi anta at slike tilfeller fins det flere av gjennom boken.

Uavhengig av de mulighetene vi har presentert, vil vi likevel poengtere at antall muligheter virker svært begrenset, med tanke på hva man kanskje ville forventet da kjerneelementene «er det viktigste […] elevene skal arbeide med i opplæringen» (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Tidligere forskning på LK20 (for eksempel, Gjengår (2023); Pettersen (2022); Tømmerdal (2021)), oppdaget få muligheter for RA i lærebøker i grunnskolen. Bieda et al. (2014) undersøkte muligheter for reasoning and proving i lærebøker for amerikanske grunnskoleelever, og oppdaget at i gjennomsnitt 3,7% av oppgavene ga mulighet for reasoning and proving. Thompson et al. (2012) fant totalt at 5,4% av oppgavene var en mulighet for reasoning and proof. Våre resultater kan tyde på at denne mangelen også er til stede i norske videregående lærebøker.

5.1.2 Lite representerte oppgavetyper

Selv om det eksisterer muligheter for RA i oppgavene, er det særlig noen koder vi sjeldent observerte. Fra resultatene kan vi se svært lite oppgaver med koden US eller UG, og ingen oppgaver som fikk kodene ES og EG. Vi kan også se få observasjoner av «andre bevisrelaterte resonnementer». Dette er koder som KX (kontraeksempel), KS/KG (korrigere eller begrunne feil) og PB (prinsipper for bevis).

US og UG handler om å utforske en antakelse. En eller flere antakelser presenteres for eleven og det er elevens oppgave å bestemme om dette er sant eller usant, og komme med en begrunnelse. US ble observert 48 ganger gjennom analysen, og UG 12 ganger.

Oppgaver med kode ES eller EG presenterer ett eller flere argumenter, og det er opp til eleven å evaluere om det er et gyldig eller ikke, og komme med begrunnelse. Vi tror denne typen oppgave kan være svært gunstig, da elevene får trent på å se argumenter og bevis, hvordan dem er utformet, samt at de må lete etter styrker og svakheter med begrunnelsene. Resultatene fra analyseringen viser imidlertid at det er ingen oppgaver som oppfylte kravene til å få kodene ES eller EG. Denne mangelen er det også flere forskere som har observert. Thompson et al. (2012) sine resultater viste 0,1% av denne typen oppgaver. Bieda et al. (2014) hadde en lignende kategori i deres analyse, «evaluere begrunnelser», og fant ingen tilfeller av slike oppgaver.

Mangelen på US/UG og ES/EG indikerer at elever sjelden får muligheten til å avgjøre eller evaluere gyldigheten til en påstand eller et argument, som er en del av formålet med argumentasjon. Vi vil imidlertid legge til at våre valg av søkeord kan ha begrenset mulighetene til å finne disse oppgavetypene. Om vi hadde valgt å legge til søkeord som for eksempel «evaluer» eller «avgjør» tror vi at vi ville fått andre treff på oppgaver som muligens kunne blitt tildelt kodene US/UG eller ES/EG.

Resultatene våre viste også lav andel av «andre bevisrelaterte resonnementer». I denne kategorien finner vi blant annet koden KX (kontraeksempel) som er å komme med et kontraeksempel for en gitt påstand. de Villiers fremsetter at «[…] ett kontraeksempel er nok til å motbevise en matematisk påstand» (de Villiers, 2010, s. 210, vår oversettelse). Kontraeksempler kan dermed bistå elever i prosessen med å avgjøre om matematiske påstander stemmer eller ikke. Resultatene våre viser tre funn av koden KX.

En annen kode innenfor «andre bevisrelaterte resonnementer» er KS/KG (korriger eller begrunn en feil). Oppgave som ble tildelt denne koden oppgir et feilaktig svar eller argument, og elevene må begrunne eller korrigere feilen. Vi tror, i likhet med Thompson et al. (2012, s. 261, vår oversettelse), at «[…] slike typer oppgaver har potensialet til å starte resonneringsprosessen som til slutt vil kunne føre til formelle bevis». Vi ser i våre resultater svært få oppgaver som er tildelt disse kodene, med seks tilfeller av KS og null tilfeller av KG.

Koden PB ble også lite observert i analysen. Prinsipper for bevis handler om at eleven skal forklare hovedtrekkene av et deduktivt argument, men de trenger ikke å komme med et fullstendig bevis. Slike oppgaver senker terskelen for å arbeide med bevis, da elevene ikke trenger å produsere hele beviset fra start til slutt. Vi tror at oppgaver av denne typen kan hjelpe flere elever til å forstå deduktive argumenter, og kan gi dem en bedre forståelse av strukturen i ulike typer bevis. Totalt seks oppgaver ble tildelt koden PB.

Funnene våre, med svært lav forekomst av «andre bevisrelaterte resonnementer» korrelerer ganske godt med Thompson et al. sine resultater. De finner at totalt 0,6% av oppgavene blir tildelt en eller flere av kodene for «andre bevisrelaterte resonnementer». Våre resultater tilsier at det eksisterer *minst* 0,1% av samme oppgavetyper i bøkene vi analyserte.

Fra resultatene våre kan vi se at det er store mangler på variasjon. Disse manglene tyder på at noen særegne muligheter for RA bortfaller i lærebøkene. Dette kan gi elevene en manglende forståelse av essensen ved RA, og det blir derfor særlig viktig at lærere og lærebokforfattere passer på å inkludere oppgaver med flere, varierte former for RA.

5.1.3 Bortfalte muligheter for resonnering og argumentasjon

Av totalt 1437 oppgaver analysert, ble 658 kodet som IF. I resultatene presenterte vi noen eksempler på oppgaver som var typiske for å falle inn i kategorien IF. Det var for eksempel oppgaver hvor eleven ble bedt om å forklare en formel (se figur 20), sette opp en regresjon (se figur 22) eller gi eksempler på praktiske situasjoner (se figur 23). Mekanisk deduksjon ble også bli kategorisert som IF, og er tilfeller hvor elevene bruker metoder basert på deduktive prinsipper, men begrunnelsen faller bort ved bruken (Reid & Knipping, 2010) (se figur 21).

For noen av oppgavene i kategorien IF, så vi at dersom ordlyden hadde vært formulert annerledes, kunne det blitt en mulighet til å jobbe med RA. Analyseverktøyet vårt var ikke presist nok til å plukke opp de disse tilfellene, men vi *anslår* at dette gjelder minst 10% av oppgavene vi har kodet som IF. Eksemplet i figur 24 spør elevene «hva ser dere?». Slike oppgaver legger vekt på å observere og beskrive mønstre eller relasjoner, uten nødvendigvis å kreve en begrunnelse for *hvorfor* disse sammenhengene eksisterer. Mangelen på krav om begrunnelser kan begrense elevenes evne til å utvikle ferdigheter i RA. Det er derfor viktig at lærebokforfattere tenker gjennom hvilke muligheter for RA de ønsker skal være til stede i oppgaver, og formulerer dem slik at dette kommer tydelig frem.

5.2 Forskjeller i matematikk 1T og matematikk 1P

I dette delkapittelet vil vi besvare det andre forskningsspørsmålet. Vi vil undersøke om mulighetene for RA er ulikt i lærebøker for teoretisk og praktisk matematikk. Når elevene starter på studiespesialisering på videregående, kan de velge mellom to spesialiseringer innenfor matematikk; teoretisk matematikk (1T) og praktisk matematikk (1P). Som nevnt tidligere er kjerneelementene formulert helt likt for både praktisk og teoretisk matematikk. Vi ser ingen indikasjoner på at kjerneelementene skal vektlegges ulikt i undervisningen, selv om kompetansemålene er forskjellige.

I lærebokteksten ser vi færre muligheter for RA i 1P sammenlignet med 1T. I 1T finner vi totalt 53 muligheter, sammenlignet med 15 muligheter i 1P. Vi finner en betydelig forskjell i antall forekomster av koden G. Koden indikerer at en egenskap eller metode er begrunnet med et generelt bevis. Det er tydelig at denne egenskapen eller metoden vil gjelde generelt, uavhengig hvilke tallverdier som erstatter symbolene. Gjennom alle bøkene i 1T fant vi totalt 36 tilfeller av koden G, i motsetning observerte vi kun ett tilfelle i 1P. Til tross for dette blir elever i 1P utfordret til å konstruere generelle antakelser og argumenter. Vi tror at om elevene skal få optimalt utbytte av disse oppgavetypene bør generelle metoder og egenskaper være presentert gjennomgående i læreboksteksten og eksempler. Det kan være både mer utfordrende og mindre hensiktsmessig for elever å utføre disse oppgavetypene om de ikke har sett hvordan generelle egenskaper eller metoder ser ut. Dette kan føre til at færre elever får muligheten til å engasjere seg i denne typen RA.

I likhet med Haggarty og Pepin (2002), observerte vi at det er store forskjeller i matematikklærebøker som benyttes på et klassetrinn. Haggarty og Pepin så på innholdet og bruken av lærebøker i Tyskland, Frankrike og England. I Tyskland og England ble elevene delt inn i ulike mattegrupper fra de startet på ungdomsskolen. Resultatene til Haggarty og Pepin viste at noen grupper i større grad fikk oppgaver omhandlet bevis og høye kognitive krav, mens andre grupper hadde oppgaver med en tyngre vektlegging på prosedyrer. Det skal bemerkes at Haggarty og Pepin så generelt på lærebøker, mens vi så utelukkende etter muligheter for RA. De samme forskjellene i potensielt læringsutbytte kan også observeres i lærebøkene for 1P og 1T. Fra våre resultater kan vi tydelig se at elever i 1P får færre muligheter til å jobbe med RA i oppgaver, enn elever i 1T. I 1P fant vi 272 muligheter for RA i oppgavene, i 1T fant vi 507. Vi ser særlig store forskjeller i oppgaver som krever generelle svar, med betydelig færre tilfeller av LG, UG og PG i 1P sammenlignet med 1T. Vi har tidligere presisert at PG er oppgavetypen hvor elevene blir utfordret til å produsere bevis. I 1P kodet vi 19 oppgaver som PG, hvor vi til sammenligning kodet 115 oppgaver i 1T. Kjerneelementet RA presiserer at elever skal *bevise* (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b), men da vi kun har observert 19 tilfeller av PG i de tre lærebøkene i 1P, kan det være fare for at dette kravet ikke dekkes tilstrekkelig.

Våre resultater viser at det eksisterer muligheter for resonnering og argumentasjon i videregående lærebøker, men at disse er få og ensformige. Vi ser en særlig mangel på «andre bevisrelaterte resonnementer» og muligheter for å avgjøre og evaluere påstander og argumenter. Mellom 1P og 1T kan vi se store forskjeller i mulighetene for RA. Elever som velger 1P får jevnt over færre muligheter, og særlig færre muligheter til å jobbe med generelle tilfeller. Dette oppsummerer kort forskningsspørsmålene våre, før vi videre tar for oss hvordan dette kan påvirke undervisning, og forslag til videre forskning.

6 Konklusjon

I dette kapittelet vil vi konkludere funnene våre, og diskutere dem opp mot eventuelle implikasjoner i matematikkundervisning. I tillegg vil vi komme med forslag til videre forskning, gi et raskt tilbakeblikk og vurdere prosjektet.

6.1 Eventuelle implikasjoner av resultatene med tanke på matematikkundervisning

Resonnering og argumentasjon er et av læreplanens kjerneelementer. Dette betyr at det skal være sentralt i undervisningen, på tvers av kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2019a, vår tolkning). Lærebøker i matematikk er viktige ressurser både i planlegging og gjennomføring av undervisning, og er et godt hjelpemiddel for lærere (Lepik et al., 2017). Siden lærebøkene ser ut til å være en så pass sentral resurs i undervisning, er det særlig viktig at RA er godt og variert representert i nettopp lærebøkene. Fra våre resultater kan vi se at lærebøkene tilbyr forskjellige muligheter for RA, men at både variasjonene og hyppigheten av forekomster for muligheter er lite representert i bøkene. I beste tilfelle fører dette til at lærere må lete etter gode oppgaver i lærebøkene eller finne gode oppgaver i andre ressurser. I verste tilfelle fører dette til at lærere ikke gir elevene tilfredsstillende oppgaver, som kan føre til at skolen utdanner elever i matematikk, uten at de *egentlig* vet hva matematikk er.

Vi observerte at presis formulering var vitalt for hvordan en oppgave er forventet å besvares. For eksempel gir ikke ord som «forklar» eller «vis» automatisk mulighet for RA. Formuleringer som «forklar hvordan …» og «forklar hvorfor …» vil tolkes svært ulikt, og vil kreve to helt forskjellige svar. Dermed er det avgjørende at lærere og lærebokforfattere tenker gjennom hva ønsket læringsutbytte for oppgaver er, og formulerer dem slik at dette kommer tydelig frem.

I starten av masteroppgaven innså vi hvor kortfattet og vagt kjerneelementet resonnering og argumentasjon er formulert. Vi tenkte imidlertid at gjennom å definere begrepene presentert i kjerneelementet, ville forståelsen bli mer komplett. Etter mye lesing og timer med diskusjon innså vi at kjerneelementet er *enda* mer vagt og tvetydig enn det vi opprinnelig så for oss. Som presentert i kapittel 2.1, er forskere svært uenige i hva resonnering, argumentasjon, begrunnelse og bevis *faktisk* er og handler om. I tillegg til uenighet av betydningen til begrepene i kjerneelementet, er det også mulig å tolke setningsoppbyggingen på ulike måter. Et eksempel på dette er i LK20 sin beskrivelse av argumentasjon. «Argumentasjon […] handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2020a, 2020b). Valenta og Enge skriver angående kjerneelementet at «slik sett kan det tolkes at all argumentasjon som nevnes i LK20 skal være bevis […]» (2020, s. 15). Vi har tolket setningen annerledes, og definerer at argumentasjon handler om å begrunne framgangsmåter, resonnementer og løsninger, og *i tillegg* bevise at disse er gyldige. Med denne tilnærmingen trenger ikke all argumentasjon om å være bevis, og dermed kan de også være ikke-deduktive.

Dette er bare noen eksempler på hvordan kjerneelementet resonnering og argumentasjon kan tolkes forskjellig. Hvilke implikasjoner den vage formuleringen av kjerneelementet har, er vanskelig å måle. Det er imidlertid liten tvil om at et kjerneelement som er så pass vagt og åpent for tolkninger, nødvendigvis fører til at ulike lærere og skoler legger forskjellig vekt på hva som anses som tilstrekkelig kunnskap innen RA. Dette kan resultere i at RA vektlegges ulikt innad i skoler og blant lærere, noe som kan hindre en enhetlig utdanning av elever.

I tillegg til dette viser resultatene i vår oppgave indikasjoner på betydelige mangler i variasjonen av oppgaver, samt begrensede muligheter for å arbeide med RA. Årsaken til disse manglene vil vi ikke diskutere ytterligere i denne sammenhengen, da det krever en annen type forskning for å trekke slutninger.

6.2 Egen vurdering av prosjektet og tilbakeblikk over oppgaven

Mot slutten av dette prosjektet ønsker vi å reflektere over våre tanker og egenvurdering. Ved prosjektets begynnelse var det en omfattende mengde teori og litteratur å fordøye. Resonnering og argumentasjon er et komplekst begrep som kan være utfordrende å få en grundig forståelse av, spesielt siden tolkningen og behandlingen av begrepet varierer betydelig både nasjonalt og internasjonalt og også individuelt. Når vi ser tilbake på starten av oppgaven, innser vi hvor begrenset vår forståelse av resonnering- og argumentasjonsbegrepet faktisk var. Dette er sannsynligvis en vanlig opplevelse, og det er typisk at en dypere forståelse utvikles jo mer man engasjerer seg med emnet, slik vi opplevde. Likevel har disse forståelsesbegrensningene hatt implikasjoner. Vi mener at vår metode, med å benytte nøkkelord, er en god tilnærming for å lokalisere muligheter for RA i lærebøker. Om vi imidlertid skulle startet prosjektet på nytt, med kunnskapen vi innehar nå, ville vi vurdert å endre eller legge til noen nøkkelord. Et eksempel ville være å inkludere ordet «avgjør» i nøkkelordene. Dette var en mulighet for RA som vi tilfeldigvis observerte flere ganger, men som vi ikke hadde inkludert blant våre opprinnelige nøkkelord.

En annen endring vi muligens hadde gjort, om vi skulle starte på nytt, er å revurdere om analysekodene LS og LG skulle inkluderes eller ikke. Disse kodene tildeles oppgaver som faller inn under kategorien "å lage en antakelse". Som tidligere nevnt, ser vi på disse oppgavene som separate fra selve RA, i tråd med vår tolkning av læreplanen, men at det heller er en god *inngang* til å jobbe med RA. Under analysedelen har også dette ført til noen utfordringer med å skille mellom «å lage en antakelse» og for eksempel «lete etter mønstre» eller «finne sammenhenger». I mange internasjonale studier regnes alle disse som resonnering, og de er nært knyttet til hverandre. I denne oppgaven prøvde vi å være så konsekvent som mulig under analyseringen, og det var under disse oppgavetypene det krevde mest tid å være konsekvent. Med gode retningslinjer og mange lange diskusjoner, tror vi likevel at vi har vært svært konsekvente, også på disse kodene. Vi har valgt å beholde dataen og resultatene fra LG og LS, da vi tror det kan gi nyttig innsikt, uavhengig om det tolkes som RA eller ikke.

En siste endring vi ville vurdert var å dele koden PS inn i underkoder slik at vi kunne skille mellom oppgaver som tydelig la opp til en gjennomgående deduktiv struktur i svaret, mot oppgaver som ikke gjorde dette. På denne måten kunne vi kvantisert hvor mange PS-oppgaver som la opp til at elevene skulle *bevise* en spesifikk påstand (se figur 15), mot dem som kun la opp til å forvente et ikke-deduktivt argument som svar (se figur 14). Med denne endringen kunne vi trukket en tydeligere konklusjon om mulighetene for bevis i lærebøkene.

Som forslag til videre forskning tror vi det kan være nyttig å se hvilke muligheter elevene faktisk får i klasserommet. Her kunne det vært interessant å undersøke hvilke oppgaver som blir valgt ut av lærere over en periode, og om lærerne har RA i tankene da de velger ut oppgaver fra bok eller andre ressurser.

Da Gjerløw og Rørvik (2023) så etter muligheter for resonnering og argumentasjon i lærerveiledninger, fant de flere muligheter, enn det lærebøkene tilbydde. Det kunne derfor vært interessant å se om det finnes flere muligheter i lærerens ressurser utenfor lærebøkene, som for eksempel i lærebøkenes digitale plattform.

Et siste forslag til fremtidig forskning kan være å utføre en grundigere analyse av oppgavene som tydelig la opp til å forvente et bevis som svar. Denne tilnærmingen kunne gitt en større dybde i hvilke muligheter elever får til å involvere seg i bevisoppgaver i lærebøker.

Alt i alt syntes vi oppgaven vår gir god innsikt i hvilke muligheter for RA lærebøker tilbyr. Mange av kodene var nærmest ubrukt og noen helt ubrukt, som peker på at det er svært ensformig muligheter for RA. Vi har også avdekket store forskjeller i muligheter for RA i de forskjellige spesialiseringene 1P og 1T. Funnene våre er i tråd med det flere forskere har funnet, at RA er en gren i matematikken som ser ut til å bli forsømt. Vi håper å bidra til å endre denne trenden gjennom publiseringen av vår oppgave.

Til sist syntes vi oppgaven har vært spennende og gitt oss en *sjeldent* god forståelse for hva resonnering og argumentasjon kan være, og hvorfor det er så viktig å arbeide med. Dette er definitivt noe vi vil ta med oss inn i lærerhverdagen og diskutere og dele med kolleger på arbeidsplassen.

7 Referanseliste

Balacheff, N. (1988). *A study of students' proving processes at the junior high school level*. Second UCSMP international conference on mathematics education, Chicago. https://www.researchgate.net/publication/321423805_A_study_of_students'_proving_processes_at_the_junior_high-school_level/citations

Balacheff, N. (1999). Is Argumentation an Obstacle? Invitation to a Debate. https://www.researchgate.net/publication/234597638_Is_Argumentation_an_Obstacle_Invitation_to_a_Debate

Bell, J. (2010). *Doing Your Research Project*. Berkshire: McGraw-Hill Education.

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J. & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 71-80.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics educaton. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, *2*, 113-120. https://www.researchgate.net/publication/303517235_Challenging_the_traditional_school_approach_to_theorems_A_hypothesis_about_the_cognitive_unity_of_theorems

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2020a). *Matematikk 1P*. Aschehoug Undervisning.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2020b). *Matematikk 1T*. Aschehoug Undervisning.

Bowen, G. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, *9*, 27-40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Burheim, O. T., Dahl, H., Enge, O. & Rø, K. (2023). *Alltid, aldri eller noen ganger?: Om matematisk argumentasjon i grunnskolen*. Caspar forlag AS.

de Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. I G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Red.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (s. 205-221). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14

Douek, N. (2002). *Context complexity and argumentation*. PME CONFERENCE, http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/PME/PME26/RRDouek.pdf

Douek, N. (2010). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. *CERME 6–WORKING GROUP 2*, 332-342. https://hal.science/hal-02182374/file/cerme6_proceedings.pdf#page=414

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261. https://doi.org/10.1007/BF00368340

Fangen, K. (2022). Kvalitativ metode. *De nasjonale forskningsetiske komiteene*. https://www.forskningsetikk.no/ressurser/fbib/metoder/kvalitativ-metode/

Gjengår, A. (2023). *Resonnering og argumentasjon i matematikkbøker.* [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. NTNU Open. https://hdl.handle.net/11250/3091581

Gjerløw, H. & Rørvik, O. T. (2023). *Kjerneelementet Resonnering og argumentasjon i lærerveiledninger: Norske matematikklærerveiledninger for 5.-7.trinn* [Masteroppgave, Universitetet i Agder]. AURA. https://hdl.handle.net/11250/3074481

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and Their Use in English, French and German Classrooms: Who Gets an Opportunity to Learn What? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567-590. http://www.jstor.org/stable/1501441

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8
Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K. & Weider, Ø. J. (2020a). *Mønster: Matematikk 1P*. Gyldendal.
Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K. & Weider, Ø. J. (2020b). *Mønster: Matematikk 1T*. Gyldendal.
Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2017). Using textbooks in the mathematics classroom-The teachers view. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries* (s. 287-314). Cappelen Damm Akademisk.
McCrory, R. & Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research*, *64*, 119-131. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.003.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/
Neraal, A. & Røhne, B. (2023, 25. oktober). Cappelen Damm. I *Store Norske Leksikon*. https://snl.no/Cappelen_Damm
Oldervoll, T., Svorstøl, O., vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020a). *Sinus 1T: Matematikk*. Cappelen Damm.
Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. A. (2020b). *Sinus 1P: Matematikk*. Cappelen Damm.
Pettersen, R. (2022). *Opportunities for reasoning and argumentation: Norwegian mathematics textbooks for grades 5-7* [Universitetet i Agder]. AURA. https://hdl.handle.net/11250/3036582
Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.
Schoenfeld, A. H. (2009). Series Editor´s Foreword: The Soul of Mathematics. I *Teaching and learning proof across the grades*. Routledge New York.
Sirnes, S. M. (2023). matematikk: (vgs). I *Store Norske Leksikon*. Hentet 10. februar 2024 fra https://snl.no/matematikk_-_vgs
Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869
Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16. http://www.jstor.org/stable/40248592
Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253-295. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0253
Tømmerdal, S. (2021). *Resonnering og bevis på barnetrinnet: En kvalitativ studie av brøkoppgaver i lærebøker på 5. trinn* [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. NTNU Open. https://hdl.handle.net/11250/2784921
utdanning.no. (2024, 5. februar). Valg av matematikk på videregående. https://utdanning.no/tema/utdanning_hjelp_og_veiledning/valg_av_matematikk_pa_videregaende
Utdanningsdirektoratet. (2019a, 18.11.2019). *Hva er kjerneelement?* UDIR. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/
Utdanningsdirektoratet. (2019b). Hva er nytt i læreplanverket? https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-nytt-i-lareplanverket/
Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Matematikk P (MAT08-01) Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat08-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Matematikk T (MAT09-01) Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Valenta, A. & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), 18 sider. https://doi.org/https://doi.org/10.5617/adno.8195

8 Vedlegg

8.1 Gyldendal – Mønster 1T

Nøkkelord																				Utvalgte oppgaver			
Vis										Forklar				Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Reflekter og diskuter	
3 F		121 O	PS	202 O	PS	276 O	IF	351 E		6 F		207 O	IF	217 O	LG	415 F		14 F	G	6 F		10	IF	11	IF
3 F		124 F		202 O		277 O	IF	354 E		19 R		208 O	IF	219 O	LG	420 F		14 F		24 U		11	IF	12	IF
6 F		126 U		202 O		277 O	IF	356 O		23 O	US	210 O	PG	339 O	LG	420 F		21 F	G	35 R		12	IF	19	IF
6 F		126 F		203 O	IF	279 F		362 F		25 R		211 O	PS	396 O	LG	420 F		34 F		61 F	O	17	LS	20	IF
7 F		127 U		203 O	IF	279 F		362 F		30 U		213 O	PS			423 F		34 F		34 U		24	IF	25	PG
7 F		127 U		203 O	IF	279 F		368 E		30 U		215 O	PG			423 F		34 F		86 R		30	LS	31	LG
11 F		127 U		203 O	PG	280 U		369 E		31 R		215 O	PS			423 F		34 F		126 U		34	LG	35	LG
12 F		128 F		203 O		280 F		369 E		33 O	IF	216 O	PS			425 O		34 F	G	126 U		38	US og PS	65	KS
15 F		130 O		203 O		281 F		370 O		37 O	PS	224 U				428 F		35 F		127 U		42	LG	69	IF
19 F		131 U		204 O		281 F		370 O	PG	37 O	PG	224 U				434 F		35 F		127 U		62	IF	78	LS
29 F		131 U		204 O	PS	286 F		372 R		37 O	PG	228 U				437 F		35 R		131 U		64	LG	80	IF
34 F	G	131 U		205 O		288 O		372 F		37 O	IF	231 U				494 F		35 F		132 U		71	PG	86	LS
35 F		132 U		205 O		289 U		374 O		51 O	PG	234 R				494 F		35 F				72	PG	87	LG
35 F		135 O		208 O		290 F		375 O		52 O	PG	254 R				495 F		36 F				73	PG	96	IF
35 F		135 O		208 O		291 E		376 F		52 O	PG	262 R				495 F		47 O	G			77	IF	102	IF
35 E	G	136 U		208 O	PG	293 O		378 E		55 O	PG	267 O	PS			496 F		47 O				85	LG	125	IF
36 F		136 F		208 O		293 O		380 O		70 O	PS	276 O	PS					55 O	PG			89	LG og PG	129	IF
36 E	G	137 F		208 O		293 O		380 O		70 O		282 U						87 F	G			91	IF	134	LG
36 E	G	139 E		209 O		296 E		380 O	PG	71 U		286 R						100 F	G			94	LS	137	IF
37 O	PG	140 E		209 O		268 F		383 O		71 U		290 R						100 F				98	LG	141	LG og PG
37 O	PG	140 E		209 O	PG	300 O	IF	384 O	IF	71 U		293 O	IF					100 F				124	LS	141	IF
37 O	PG	143 O		209 O		300 O		384 O	IF	72 U		294 U						147 F				126	LG	142	IF
37 O		143 O		209 O		301 O		385 O		73 U		300 O	IF					222 F				127	IF	150	UG
37 O	PG	143 O		209 O		302 F		386 O	PS	78 R		316 R						228 F	G			131	IF	154	UG
42 E	S	143 O		210 O		304 E		387 O		89 U		320 O	PS					367 F	G			132	LS	159	IF
44 F		144 O		210 O	IF	305 E		388 O		97 O	PS	321 O	PS					376 F	G			136	LS	165	IF
47 O	PG	144 O		210 O	PG	307 F	S	390 O		98 U		323 O	IF					380 O	PG			139	LS	168	IF
51 O	IF	147 F	G	211 O		307 F		390 O	PS	102 R		327 O	IF					380 O	PG			145	LG	169	IF
51 O	IF	147 F		211 O	IF	308 F		390 O		110 O	IF	327 O	IF					494 F				147	IF	172	UG
51 O	IF	152 E		212 O		310 F		391 O	PG	110 O	IF	328 O	PS					495 F				149	IF	179	IF
51 O	IF	154 O		212 O		310 F		391 O		110 O	PG	328 O	PS					495 F				151	IF	184	UG
51 O	PG	156 F	G	213 O		312 O		393 O		110 O		330 O	PS									156	IF	226	IF
52 O	PG	157 E		214 O		314 E		395 O	PS	111 O	PS	330 O	PS									161	IF	233	IF
52 O	PG	159 O		214 O		318 F		395 O		113 O	IF	331 O	PS									164	IF	234	PG
52 O	PG	159 O		214 O	IF	320 O		396 O	IF	113 O	PS	331 O	PS									168	IF	239	IF
52 O	PG	160 O		214 O		321 O		396 O	IF	115 O	PS	332 O	IF									175	IF	240	IF
54 O		160 O		214 O	IF	321 O		396 O		116 O	PG	332 O	PS									179	IF	245	LS
55 O		161 U		215 O		321 O	IF	396 O		117 O	PS	333 O	PS									186	PG	250	PS
55 O		161 U		215 O	PG	322 O		397 O		119 O	LS	336 O	LG									224	PG	251	PS
56 O	PG	161 U		215 O	IF	322 O		398 O	LS	126 E	I	337 O	IF									228	IF	252	IF
56 O	PG	162 F		215 O	PS	323 O	IF	398 O		130 O	IF	342 O	PS									231	KS	253	IF
56 O	PS	164 U		216 O	PG	323 O		398 O	IF	134 R		343 O	PS									236	IF	254	PS
57 O		171 F		217 O	IF	324 O		398 O	PS	139 E	I	348 R										238	IF	257	LG og PG
57 O		173 O		217 O		324 O		398 O	IF	144 O	PS	349 R										242	LS	262	IF
57 O		174 O		217 O	PS	325 O		399 O	IF	158 E	IF	350 O	IF									246	IF	263	IF
58 O	PS	176 F		218 O		325 O		399 O	PS	159 O	IF	350 O	PG									249	LG	282	IF
59 O	PG	176 F		218 O		325 O		399 O	IF	159 O	PS	350 O	PS									250	LS	283	LS
59 O	PS	179 U		218 O		325 O		399 O		160 O	PS	351 U										251	IF	286	IF
59 O	PS	180 E		218 O	LG	326 O		399 O	PS	160 O	LS	351 U										260	IF	289	if
61 F		182 E		218 O	IF	326 O		400 O	IF	162 E	I	380 O	PS									262	LS	290	IF
68 E	S	182 E		218 O		326 O		400 O	PG	166 O	IF	380 O	PS									280	IF	296	LG
68 E		186 U		220 O		328 O	LS	400 O	IF	169 E	S	380 O	PS									282	LS	298	PG
71 U		186 F		220 O		328 O		400 O	PG	190 O	PG	384 O	PS									285	IF	300	LG
71 U		187 E		220 O		330 O	PS	400 O		190 O	PG	387 O	IF									289	IF	308	IF
72 U		189 O		220 O	IF	331 O	PG	400 O		190 O	PG	387 O	PG									294	LG	310	LG
72 U		189 O		220 O		331 O	PG	401 O	IF	197 O	IF	387 O	PG									297	LS	313	IF
73 U		189 O		220 O		332 O	PS	401 O	PG	199 O	IF	398 O	PS									306	IF	316	PG
73 U		189 O		220 O		332 O	PS	401 O	PS	199 O	IF	399 O	IF									313	LG	347	PG
73 U		189 O		220 O		334 O		401 O	PS	199 O	IF	408 F										346	IF	348	PS
74 F		190 O		221 O		334 O		402 O		201 O	US	426 F										351	LS	349	IF
83 F	S	190 O		223 F		334 O	IF	402 O		202 O	LS	428 F										357	IF	363	IF
87 F	G	190 O		226 F	S	334 O		402 O		202 O	PG	433 O	LG									363	IF	365	LG og PG
89 U		190 O	PG	226 R		334 O		403 O	IF	203 O	PG	444 F										364	IF	368	IF
96 E		190 O	PS	227 F		334 O	PS	403 O	PS	203 O	IF	495 F										367	IF	372	if
97 O		190 O	PG	231 F		335 O	PS	405 F		204 O	IF	495 F										371	IF	378	LG
98 U		190 O	PG	235 O	IF	335 O	PS	405 O		204 O	PS	496 F										375	IF	379	PS
98 F		190 O	PG	244 E		335 O		406 F		206 O	IF	496 F													
100 F	G	193 O		245 F		336 O		417 F																	
107 O		193 O		252 F		337 O		421 E																	
107 O		193 O		253 F		338 O		425 F																	
108 O		194 O		256 F		338 O	IF	426 F																	
108 O		194 O		256 F		339 O		433 O																	
111 O	IF	195 O	PS	256 F		339 O	IF	435 F																	
113 O	IF	195 O		261 F		340 O	PS	446 F																	
114 O	PG	195 O	IF	265 F		340 O	PS	446 F																	
114 O	IF	196 O		265 F		340 O	PS	446 F																	
115 O	IF	196 O		269 O	IF	341 O		446 F																	
117 O		198 O		269 O	IF	341 O	PS	447 F																	
118 O		198 O		272 O		342 O	PG	448 F																	
119 O		198 O	PS	272 O	PS	342 O	PG	448 F																	
119 O		199 O		273 O	IF	342 O	PG	450 F																	
120 O	PG	199 O		273 O	IF	342 O	PS	450 F																	
120 O	PG	200 O		274 O	IF	343 O		450 F																	
120 O	IF	201 O		275 O	IF	350 O	PS	450 F																	
120 O	IF	201 O		275 O	PS	351 U		484 F																	

8.2 Aschehoug – Matematikk 1T

Nøkkelord																		Utvalgte oppgaver			
Vis						Forklar				Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Snakk	
10 F		199 E		309 O	PS og LS	3 F		189 O	PS	20 U		44 F		4 F		121 S		3			
11 F		205 O		309 O		3 F		189 O	PS	29 F	G	189 U		7 F		157 S		16	LG	8	UG
17 U		205 O		318 O	IF	3 F		189 O	LS	31 F	G	189 U		17 F		166 S		17	LG	10	IF
18 F		210 O		323 O		8 S		190 O	IF	32 S				17 F		272 S		20	IF	12	IF
19 E	S	212 F		323 O		10 S		190 O	IF	56 U				42 F		272 S		20	LS	32	IF
19 O	IF	212 O		325 F	S	12 O	IF	192 U		129 U				43 F		286 S		24	IF	40	IF
19 O	IF	213 F		329 F		13 O	IF	195 S		163 O	IF			44 F		313 F		25	IF	46	PB
20 O	IF	213 O		339 F		15 E		196 O	PS	172 O	IF			44 F		335 S		34	IF	55	IF
20 O	IF	214 O		343 F		15 E		196 S		214 O	US			44 F		340 S		45	LG	58	IF
21 O		218 O		345 O		18 F		198 O	PG	219 O	IF			44 E	G			55	PS	68	UG
31 E	IF	220 O		345 O		32 S		202 E	I	219 O	LS			44 F				56	PG	70	IF
31 O	IF	220 O	PS	346 O		46 S		210 S		224 O	LS			45 F				60	PB	74	UG
31 O	IF	220 O	IF	346 O	PS	72 O	PG	214 U		237 O	LS			45 F				61	IF	79	IF
35 O	IF	220 O	IF	346 O		92 O	PS	220 O	PB	347 O	LS			45 O	PG			69	IF	83	IF
48 O		221 O	IF	348 O		94 O	PG	220 O	PG	358 O	LS			45 O	PG			70	LS	106	IF
59 E		221 O	PG	349 O	IF	108 S		221 O	PS					45 E	S			73	PG	107	LG
62 O	PG	222 O		349 O	IF	113 S		221 O	PG					45 U				78	LS	108	IF
72 O		223 O	LS	349 O	PG	115 U		222 O	LG					45 U				105	LS	113	IF
84 O	IF	223 O	IF	349 O	PG	121 S		223 O	LS					45 U				115	LG og LS	121	LG og PG
87 E		224 O	IF	350 O		123 S		223 O	IF					46 F				116	LG	123	LG og PG
93 O		224 O	LS	350 O		128 O	PS	227 O	IF					46 F				117	PS	126	IF
95 O		224 O		350 O	PS	132 U		254 S						46 F				129	US	129	LS
98 O	PG	224 O		350 O	PS	135 U		262 O	PS					46 F				132	US	136	PS
103 F		224 O		352 O		140 S		262 O	LS					46 F				134	IF	139	IF
105 E		225 F		352 O		140 S		263 O	IF					46 E	G			135	LG	140	IF
110 O		227 O		354 O		141 S		301 O	LS					46 E				137	LG	141	IF
114 O	IF	237 F	O	354 O	PS	141 S		305 E	S					46 S				139	IF	157	IF
115 U		237 O		359 O	IF	141 U		307 S						46 S				141	PG	162	UG
117 U		242 O		359 O		141 U		308 O	LS					46 F				143	LS	166	LG
128 O		245 O	PS	359 O		150 O	PS	308 O	P					47 F				159	IF	169	IF
128 O		246 O	PS	359 O		158 O	IF	311 O	IF					47 O				171	IF	173	IF
133 O	PS	250 F		359 O	PG	163 O	PS	312 O	IF					47 O				174	LG	175	LG og PG
143 O	IF	255 O		359 O	IF	175 U		318 U						47O	KX			175	LG og PS	191	PS
146 O	PS	255 O		361 O		175 U		326 U						47 O	PG			177	IF	195	IF
148 O	IF	259 O	IF	361 O		175 S		331 O	PS					47 O	PG			178	LG	196	IF
149 O		259 O	IF	362 O	IF	175 O	IF	337 U						47 O	PG			182	IF	208	LG
149 O		260 O		362 O	IF	175 O	IF	341 S						49 O	PS			189	LS	210	IF
149 O	PS	260 O	IF	362 O	IF	177 O	PS	343 S						49 O	PS			192	IF	215	LG
150 O	IF	261 O	IF	362 O		179 O	PS	348 O	PG					50 F				196	IF	232	IF
150 O	IF	265 O		363 O		179 O	PS	350 O	PB					50 F				212	LS	234	IF
151 O	PG	268 E		363 O		179 O	PS	357 O	PS					50 F				214	PS	241	LG
151 O		274 O		364 O		179 O	PS	362 O						50 F				236	LS og LG	244	LS
151 O		274 O	IF	364 O	IF	181 O	LS	368 O	IF					82 O	PG			245	LS	248	IF
151 O		275 O		364 O		185 O	IF	369 O	PS					91 E	G			269	IF	251	LS
151 O	IF	276 F		365 O	PS	185 O	IF	369 O	PG					91 O	IF			270	IF	254	LS
153 O	PS	279 F		365 O	PG	185 O	PS	369 O						120 F				291	IF	254	US
153 O	IF	279 O		366 O	PS									127 F	G			294	IF	257	LS
153 O	PS	280 O		366 O										135 F				318	LG	272	LS
153 O		280 O		367 O	PS									145 F	G			326	LG	273	IF
158 O		282 E		368 O										145 F				337	LS	280	PS
160 F		282 E		368 O										148 O	G					284	LS
163 F		283 O		368 O										220 O						286	IF
163 O		283 O	IF	368 O										220 O						294	IF
166 F		285 E		368 O										220 O	PG					307	LS
167 O		286 O		369 O	PS									307 F	G					308	IF
168 F		287 O		369 O	PS									307 F						311	UG
168 F		287 O		370 O										307 F						327	IF
172 O		288 O		370 O	IF									307 F						331	PS
175 O		289 F		371 O										308 F	G					335	PS
177 U		290 O		371 O	IF									308 O	PG					339	IF
178 E		291 F		371 O										308 S						340	UG
178 O		291 F		371 O										308 S						341	PS
179 O	PS	294 O		371 O										308 S						341	LS
182 U		294 S		371 O										308 S						343	PS
183 E		296 O		371 O										312 O	PG						
183 O		296 O		399 F										329 F	G						
184 E	IF	297 O		412 F										342 F	G						
184 E		297 O		412 F										343 F	G						
184 O	IF	298 O		412 F										343 S							
186 F		298 O		413 F										348 O	PG						
189 U		298 O		413 F										350 O	PG						
190 O		298 O		413 F										408							
190 O		299 O		413 F										408							
193 O		301 O		416 F										408							
193 O		303 F		417 F																	
193 O		307 E		419 F																	
198 O		307 E		422 F																	
198 O	PS	307 F		422 F																	
199 E		308 O																			

8.3 Cappelen Damm – Sinus 1T

Nøkkelord																				Utvalgte oppgaver			
Vis										Forklar		Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Diskuter	
7 F		199 O	IF	328 O	PS	375 O		414 O	PS	6 F		72 U		6 F		56 F		7 D		7	IF	7	IF
23 F		200 F		329 O		375 O		415 O	PS	9 D		344 O	PS	82 F		56 F		119 D		13	IF	9	IF
34 F		204 E		329 O		376 O		415 O	PS	13 U		346 O	LG	126 F		61 D		382 O	IF	17	IF	12	IF
35 E		204 E		329 O		376 O	IF	415 O	PS	18 O	PS	347 O	LG	176 F		61 D				23	IF	13	IF
35 E		206 O		329 O		377 O	IF	415 O	PS	48 O	IF	371 O	IF	230 F		62 U				45	IF	18	IF
37 E		206 O		333 O	IF	378 O		417 O		50 E		387 O	PS			82 F				57	IF	31	IF
38 F		207 E	I	334 O	PG	379 O		417 O		51 O	IF	410 O	LG			82 F				62	LG	51	IF
42 F		208 O		335 O	IF	379 O		420 O	PS	51 O	IF	412 O	LG			116 F	G			64	IF	61	IF
44 E		208 O		336 O	PS	379 O		420 O	LS og PS	61 F	PS	416 O	PS			116 F				68	IF	83	IF
44 E		211 E		337 O	IF	381 O		421 O		86 O	PS					116 F				72	LS	88	LS
45 O		212 E		341 O	IF	381 O	PS	422 O		88 O	PS					126 F				88	IF	106	LG
45 O		215 O		343 O		381 O		422 O		100 O	PS					126 F				95	IF	106	IF
46 F		216 O		343 O		381 O		422 O	IF	114 O	PS					153 F	G			100	LS	115	IF
49 F		216 O		343 O		382 O		423 O		115 D						153 F				103	LS	119	IF
50 F		219 F		345 O	IF	383 O		423 O		126 F						189 F	G			111	LS	140	LG
55 O	PS	223 E		347 O	IF	383 O		423 O		127 F	S					191 F	I			139	IF	143	IF
55 O		223 E		347 O	IF	384 O		423 O	LS og PS	143 F						246 U				142	US	148	IF
63 F		227 O		347 O	IF	386 O		424 O	PG	176 F						246 U				147	US og LS	154	IF
66 E		227 O		350 O		387 O		424 O	PG	185 E	S					272 F				159	LG	183	IF
68 F		227 O		350 O		387 O		424 O	PS	187 O	PS					272 F				163	IF	189	IF
72 F		228 O		351 O	IF	387 O		424 O	PG	200 D						298 F	G			177	IF	199	IF
73 E		228 O		352 O	PS	388 O		425 O	PS	203 D						301 U				201	IF	200	LS
86 O		229 O		352 O	PS	388 O		425 O	PS	229 O	IF					303 F	G			202	LS	203	LG
87 O		229 O		353 O		389 O		425 O		230 F						324 O	PS			216	LS	206	IF
91 F		229 O		353 O	PS	390 O		425 O		244 O	LG					331 O	PS			240	IF	209	LG
98 E		231 F		353 O	PS	390 O		426 O		265 D						336 O	LG			246	IF	234	IF
99 E		232 F		353 O		391 O		427 O		310 F						336 O	LG			253	IF	244	IF
101 E	I	239 F	S	354 O		391 O		428 O	IF	310 F						369 O	LG			260	LS	253	LG
102 O	IF	245 F		355 O	PG	391 O		429 O		317 O	IF					369 O	LG			273	LS	259	IF
111 F	S	246 F		355 O	PS	391 O		430 O		317 O	PS					437 O	PG			286	LS	261	LS
114 O	PS	246 F		357 O	IF	391 O		430 O		318 O	IF					476				302	LG	265	IF
114 O	IF	246 F		359 O	IF	392 O		431 O		319 O	PS					476				305	IF	279	LG
124 O	IF	248 F		359 O	IF	392 O		431 O		325 O	IF					476						285	IF
125 O		251 F		359 O	IF	393 O		432 O	PS	326 O	PS					478						289	IF
128 F		259 O	IF	359 O	IF	393 O		433 O	IF	326 O	PS											293	PG
131 E		262 F		359 O	PS	393 O		433 O	PS	326 O	PS											297	LS
136 F		262 F		360 O	IF	393 O	IF	433 O		326 O	PS											302	LS
141 F		266 E		360 O	IF	393 O		433 O	PS	327 O	PS											304	IF
146 F		270 O	LS	360 O	IF	394 O	IF	434 O	IF	331 O	PS												
148 F		270 O	IF	360 O	IF	394 O		434 O	IF	336 O	KS												
153 F		270 O	PS	360 O	IF	394 O		434 O		337 O	PS												
154 E	IF	270 O	IF	361 O	IF	395 O		434 O	IF	337 O	PS												
155 E	IF	271 O	IF	362 O	IF	395 O		434 O	PG	337 O	LS												
156 O	IF	271 O	PS	362 O	PS	395 O		434 O	PG	340 O	PS												
156 O	IF	280 F		363 O		395 O		434 O	PS	340 O	PS												
156 O	IF	289 D		363 O	IF	395 O		434 O	PS	346 O	PS												
160 E	I	290 F	G	364 O	PS	395 O		434 O	PS	346 O	PS												
162 E	I	290 F		364 O	IF	396 O		434 O	IF	354 O	PS												
163 O	IF	293 D		364 O	IF	396 O		435 O	IF	354 O	PS												
163 O	IF	293 F		364 O	IF	396 O	PS	435 O	PG	354 O	PS												
167 E	IF	295 E		364 O	IF	397 O		435 O	IF	358 O	PS												
168 O	IF	307 O		365 O	IF	397 O	IF	435 O	PS	375 O	PS												
172 O	IF	307 O		365 O	LS	398 O		435 O		383 O	PS												
174 O	IF	307 O		365 O	PS	398 O	IF	436 O	IF	394 O	US												
174 O	IF	308 O		366 O	IF	400 O		436 O	IF	402 O	PS												
177 E		308 O	IF	367 O	PS	400 O		436 O	PS	404 O	PS												
178 E		309 O		367 O	PS	400 O		436 O		405 O	LG												
179 O		310 F		367 O	IF	400 O		436 O		409 O	LG												
180 O		317 O		369 O	IF	400 O		437 O	IF	415 O	PS												
181 E		317 O		370 O	PS	400 O		437 O	IF	415 O	PS												
181 E		317 O		371 O	PS	400 O		437 O	IF	422 O	PS												
181 E		317 O		371 O		401 O		438 O		424 O	PS												
183 O		318 O		371 O		401 O		439 O		432 O	PS												
183 O		318 O		372 O		401 O		439 O		432 O	IF												
184 O		318 O		372 O		401 O		440 O	PS	432 O	IF												
184 F		318 O		373 O		401 O		441 O	PS	432 O	IF												
185 O		318 O		373 O		402 O		441 O	PS	437 O	IF												
185 E		322 O	IF	373 O		402 O		442 O	PG	443 O	PS												
187 O		323 O		373 O		402 O		443 O	PS														
188 O		323 O		373 O		403 O		443 O	PS														
188 O		323 O		374 O		403 O		444 O															
188 O		323 O		374 O		403 O		444 O	PS														
194 F	S	323 O		374 O		410 O		444 O	PS														
194 F		324 O	IF	374 O		410 O	IF	444 O	IF														
197 F		325 O	IF	374 O		410 O	IF	444 O	PS														
197 F		327 O		374 O		413 O		472															
198 F		328 O	PS	375 O		414 O	IF	473															
198 F		328 O	PS																				

8.4 Gyldendal – Mønster 1P

Nøkkelord																						Utvalgte oppgaver			
Vis										Forklar				Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Reflekter og diskuter	
3 F		90 O		185 O	IF	260 O		309 O		6 F		197 O	LS	262 O	LS	331 F		107 F		22 U		10	IF	11	IF
3 F		91 O		187 F		261 O		309 O		21 R		197 O	IF	317 O	LS	336 F		152 F		30 F		12	IF	13	IF
6 F		91 O		192 O		262 O		310 O	IF	45 O	PS	201 O	US			336 F		152 F		40 O	IF	17	LS	14	IF
6 F		91 O		192 O		263 O		310 O		57 O	IF	209 R				336 F				85 O	LS	20	IF	14	LS
7 F		92 O		192 O	IF	263 O		310 O		61 R		216 O	IF			342 F				99 O	LS	22	LS	16	IF
7 F		92 O		192 O	IF	267 F		311 O		64 R		216 O	PS			342 F				101 O		28	IF	17	LS
13 F	S	93 O		195 O		269 E		311 O		66 O	IF	218 E	S			342 F				101 O	PS	33	LS	18	US
20 F		94 O		195 O		270 E		311 O		69 R		222 O	US			342 F				118 U		50	IF	21	PG
30 E		94 O		196 O		271 E		311 O	PS	73 R		223 O	PS			343 O				126 U		52	IF	26	LS
30 E		95 O		196 O	IF	272 E		311 O	PG	79 E	G	223 O	LS			346 F				136 U		58	LS	29	IF
30 E		95 O		196 O		273 O		311 O		84 O	IF	226 E	S			351 F				146 O	IF	68	IF	54	IF
31 F		95 O		197 O	PS	274 O		312 O		84 O	PS	227 E	S			354 O				149 O	PS	73	LS	55	LS
32 E		95 O		197 O	IF	274 O		312 O		85 O	IF	229 O	PS							153 F	O	78	LS	59	IF
37 O		95 O		198 O		274 O	PS	313 O		88 O	IF	240 O	PS							166 U		108	IF	60	LS
42 O		97 O		198 O		274 O	PS	313 O	IF	89 O	IF	244 R								166 U		110	LS	61	IF
42 O	IF	97 O		199 O	IF	274 O		315 O		91 O	IF	248 O	PS							184 R		118	IF	64	LG
53 F		97 O		199 O	PS	275 U		316 O	PS	91 O	IF	248 O	PS							192 O		126	US	69	IF
53 F		97 O		204 U		275 E		317 O		93 O	PS	248 O	IF							204 U		132	LG	71	LG
53 F		97 O		204 U		275 E	I	317 O		94 O	IF	249 O	IF							222 O	US	154	LS	73	PG
54 E	S	97 O		204 U		276 E		317 O	IF	94 O	IF	249 O	PS							260 O	IF	159	LG	75	IF
56 O		98 O		204 F		281 F		318 O		94 O	IF	251 O	IF							266 U		166	IF	79	IF
56 O		98 O		205 E		282 R		318 O		95 O	IF	253 O	PS							266 U		169	IF	83	IF
56 O		98 O		205 E		283 O		318 O		95 O	IF	254 O	IF							266 U		173	IF	109	IF
56 O		99 O		205 E		283 O	IF	318 O		95 O	LS	254 O	IF							269 E		178	IF	111	LS
56 O		99 O		206 F		283 O		318 O		101 O	IF	255 O	IF							274 O	LS	204	LS	112	IF
61 E		99 O		208 F		283 O	IF	319 O		109 R		256 O	PS							302 O	IF	212	LS	113	LS
62 F		101 O		208 F		284 O		319 O	IF	110 U		256 O	IF							313 O	IF	217	IF	114	LS
63 F		101 O		210 O		284 O		319 O		112 R		256 O	IF									224	LS	115	US og LG
63 F		102 O		210 O		284 O		319 O		122 R		256 O	IF									230	IF	122	PS
64 F		102 O		210 O	PS	285 F		319 O	IF	124 R		257 O	IF									235	LS	124	PS
64 R		102 O		210 O		286 E		319 O	PS	126 U		257 O	IF									241	LS	125	PS
65 E		103 O		211 O		288 E		321 F		129 R		258 O	PS									266	LS	127	US
66 O		103 O		211 O		288 E		321 F		132 U		258 O	PS									275	IF	129	PS
66 O		103 O		212 F		289 E		322 F		132 U		259 O	IF									285	LG	132	IF
67 O		103 O		213 E		290 O		333 F		132 R		259 O	PS											133	PG
67 O		103 O		213 E		290 O		341 F		133 R		260 O	IF											135	PG
67 O		103 O		214 F		290 O		344 F		135 R		260 O	IF											137	PG
69 F		103 O	IF	214 E		290 O	PG	345 F		136 U		261 O	IF											156	LG
69 E		103 O		214 E		290 O	PS	350 O		137 R		261 O	IF											160	LG
71 E		104 O		214 E		290 O		350 F		142 O	IF	261 O	PS											164	LS
71 E		105 O		215 F		290 O		352 F		144 O	IF	286 R												167	IF
72 E		105 O		215 E		292 F		358 E		146 O	IF	290 O	PG											170	IF
73 U		105 O		222 O	PS	292 E		358 E		148 O	US	290 O	PG											171	IF
74 F		105 O		223 O		293 E		359 E		150 O	US og KS	301 O	IF											174	PG
76 O		105 O		222 U		294 E		360 O		160 R		307 O	PS											176	IF
77 O		105 O		226 E		294 E		366 F		164 R		311 O	PG											179	IF
78 U		109 F		228 O	PS	295 E		367 F		165 O	PS	313 O	PS											184	IF
80 F		109 F		228 O		300 O		367 F		167 R		316 O	PS											205	PG
81 F		111 F		228 O		300 O		367 F		170 R		317 O	LS											206	LS
81 F		112 F		229 O		300 O		367 F		177 O	US	324 F												209	LG
83 E		114 E		240 O		301 O		368 F		189 O	LG	345 F												217	IF
84 O		116 E	S	245 O		301 O		369 F		191 O	PS	347 F												221	LS
84 O		118 U		245 O		304 O		369 F		191 O	LS	350 O	IF											227	LS
84 O		118 F		245 O		304 O		371 F		194 O	IF	365 F												228	LS
84 O		126 U		250 O		304 O		371 F		195 O	PS	377 F												232	UG
84 O		136 U		250 O		305 O	PS	371 F		196 O	LG													237	IF
84 O		139 O		251 O		305 O		371 F																243	LS
85 O		144 O		253 O	PS	305 O		376 F																244	PS
85 O		149 O		253 O		306 O		376 F																271	IF
85 O		165 O	IF	253 O		307 O		376 F																273	IF
85 O		165 O	IF	254 O		307 O	PS	376 F																280	LG og UG
86 F		171 E		254 O		308 O		379 F																282	LG
87 F		174 E		258 O		308 O		379 F																286	LG
87 F		174 R		258 O		308 O		379 F																	
88 O		177 O		258 O		309 O		380 F																	
88 O		178 F	S	260 O		309 O		380 F																	
89 O		181 F		260 O		309 O		389 F																	
90 O																									

8.5 Aschehoug – Matematikk 1P

Nøkkelord																		Utvalgte oppgaver			
Vis						Forklar		Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Snakk	
8 F		123 O		199 O		10 S		50 S		Ikke funnet		223 O		95 S		36	PG	10	PS
14 E	S	125 F		199 O		23 S		63 U				223 O		102 O	IF	48	IF	12	IF
14 E	I	127 E		201 O		32 O	PS	63 U				223 O	KX	180 S		57	LS	13	LS
14 O	IF	129 F		201 O	PS	48 U		65 O	IF					181 O		59	IF	21	LS
14 O	IF	132 O		202 O		52 S		79 S								63	IF	23	IF
14 O	IF	137 O		205 E		54 S		79 S								64	IF	28	IF
14 O	IF	144 O		206 O		55 S		120 U								84	PG	47	IF
14 O	IF	144 O		213 U		64 U		121 O	IF							116	IF	50	IF
20 E	I	144 O	PS	216 O		73 O	IF	178 E	I							117	LG	52	LG
20 O	IF	145 O		218 O		83 S		183 O	IF							118	IF	54	LG
20 O	IF	146 O		218 O		88 S		185 O	IF							119	LG	55	KS
20 O	IF	147 O	IF	219 O		100 O	US	189 O	IF							120	IF	57	LS
22 O	IF	148 O	PS	221 O		125 U		216 U								120	IF	68	IF
22 O	IF	151 O		223 O		126 O	IF	232 O	US							121	IF	79	IF
26 O	IF	151 O		223 O	PG	126 O	IF	233 O	US							122	IF	82	US
27 F		155 O		227 O	IF	128 O	LS	235 O	US							123	IF	83	IF
27 F		155 O		229 O		143 O	IF	235 O	LS							124	IF	88	IF
34 F	S	157 E		230 O		143 O	PS	242 O	US							125	IF	91	US
36 U		159 F		233 O		145 O	IF									140	IF	92	IF
36 U		160 E		234 O		145 O	IF									156	IF	94	PS
36 E	I	161 O		234 O		151 O	IF									157	IF	95	IF
36 O	IF	162 E		235 O		158 O	US									169	LG	112	LG
36 O	IF	162 O		235 O		175 F										175	IF	121	PS
38 O	IF	163 E		235 O		184 O	IF									194	LG	124	IF
40 O	IF	165 E		235 O		186 O	IF									198	IF	124	IF
40 O	IF	165 O		235 O		189 O	IF									200	IF	154	IF
64 U		165 E		235 O	IF	192 S										204	IF	155	IF
71 O	PS	166 E		236 O		197 O	IF									211	LG	168	LS
75 O		167 O		238 O	PS	198 U										212	LG og PS	175	IF
75 O		168 O		239 O		199 O	PS									212	PS og LS	175	IF
80 O		169 F		239 O		199 O	PS									213	IF	180	IF
81 O		169 F		240 O		199 O	PS									213	LG	192	LS
84 O		169 F		240 O		199 O	LS									216	LG	206	IF
84 U		169 F		241 O	PS	205 O	PS									216	LG	208	US
85 F		170 O		241 O		206 O	PS											211	PB
91 O		171 O		243 O		206 S													
95 E		173 F		243 O		209 O	IF												
96 O		174 O		244 O		209 O	IF												
97 O		174 O		244 O	IF	209 O	LS												
97 O		176 O		244 O		209 O	LS												
98 O		176 O		245 O		212 U													
99 O		177 F		245 O		212 U													
101 O		178 E		246 O	PS	213 U													
101 O		179 E		247 O	IF	213 U													
102 O		179 E		248 O		214 U													
105 O		183 O		250 O	IF	221 O	LG												
107 F		184 O		264		222 O	IF												
107 F		185 O		265		230 O	US og KS												
110 O		185 O		275		231 O	PS												
111 F		186 O		275		240 O	IF												
111 F		187 O		275		248 O	IF												
112 O		187 O		276		248 F													
112 S		189 O		276		249 O	PS												
114 E		189 O		276		251 O	PG												
114 E		194 O		276															
115 O		194 O		280															
122 U																			

8.6 Cappelen Damm – Sinus 1P

Nøkkelord																				Utvalgte oppgaver			
Vis										Forklar		Begrunn		Argument		Bevis		Diskuter		Utforsk		Diskuter	
21 F		224 F		300 O	IF	338 O		372 O		3 F		250 O	US	6 F		144 D		162 F		7	IF	9	IF
24 O		224 F		301 O		339 O		372 O		11 O	PS	286 O	LS	118 F		326 O	PG	208 F		8	IF	10	IF
26 F		225 E		303 O		339 O		373 O		13 D		301 O	US	118 F				271 O	IF	12	LS	13	PS
27 F		227 O		303 O		339 O		373 O	IF	14 E	IF	301 O	US	162 F				346 O		16	IF	17	IF
28 F		227 O		303 O		340 O		374 O		17 D		306 O	US	208 F				362 O		32	LG	20	IF
31 F		228 O		304 O		340 O		374 O		24 O	US	348 O	US							33	IF	31	IF
31 F		228 O		304 O	IF	343 O		374 O		29 O	IF	349 O	US							47	IF	36	IF
33 F		229 E		304 O	IF	343 O	IF	374 O		52 D		352 O	LS							58	IF	45	LG
83 F		229 E		304 O	PS	347 O		374 O		66 D		352 O	US							69	IF	49	IF
84 F		231 O		304 O		347 O		375 O		76 D		353 O	US							91	IS	52	PG
84 E		232 O		305 O		348 O	PS	375 O		89 O	PS	355 O	US							94	IF	61	IF
85 O		232 E	I	306 O		348 O		375 O	IF	89 O	PS	355 O	US							99	IF	66	PG
85 O		234 O		307 O		349 O		377 O		106 O	IF	365 O	IF							123	IF	72	IF
87 O		234 O		307 O		350 O		377 O		135 E	S	381 O	US							128	IF	76	LS
87 O	PS	236 E		307 O	PS	351 O		377 O		144 D		392 O	US							132	IF	83	LS
89 F		238 E		307 O		352 O		378 O		144 D										139	LS	88	LS
90 O		240 E		307 O		352 O		379 O		144 D										143	LS	94	LS
90 O		241 O		307 O	PS	352 O		379 O		153 O	IF									143	IF	99	IF
91 U		241 O		308 O		353 O		379 O		179 O	IF									148	IF	102	IF
95 F		242 O		308 O		353 O		379 O		181 E										163	IF	108	IF
103 F		242 U		308 O		353 O		381 O		182 O	IF									177	IF	137	IF
104 F		243 F		309 O		354 O		381 O		184 O	IF									182	IF	144	PB
104 F		244 F		310 O		354 O	LS	381 O		184 O	IF									187	IF	149	LS
105 F		248 O		310 O		354 O	IF	381 O		184 O	IF									189	LG	151	LG
106 O		250 O		310 O		355 O		382 O		200 O	PS									192	LS	193	LG
106 F	S	250 O		310 O		355 O		382 O		204 O	IF									209	IF	215	IF
110 E	I	251 O		310 O		355 O		382 O		225 E	S									223	US	222	IF
110 O	IF	251 O		311 O		355 O		382 O		227 O	PS									228	LS	231	IF
117 O		252 F		311 O		355 O	IF	383 O		252 F										232	IF	234	IF
117 O	PS	260 O		311 O		355 O		383 O		252 F										234	LS		
117 O		262 O		311 O		356 O		383 O		254 O	LS									242	LS		
117 O	PS	272 O		311 O		357 O		384 O		255 O	PS												
117 O		273 O	IF	311 O		357 O		384 O		255 O													
117 O		274 O		312 O		357 O		384 O		256 O	LS												
129 F		174 O		313 O		359 O		384 O		259 O													
163 F	S	275 O		313 O		359 O		384 O		266 O	IF												
166 F		276 O		313 O		359 O		385 O		279 O	US												
167 E		276 O		313 O		359 O		385 O		283 O	IF												
167 E		281 O		316 O		361 O		386 O		283 O	LS												
168 E		284 O		317 O		363 O		386 O		285 O	PS												
169 F		285 O		319 O		363 O		386 O		286 O	US												
173 F		286 O		320 O	PS	363 O		387 O		291 O	PS												
175 E		286 O		321 O	PS	364 O		387 O	IF	291 O	PS												
175 E		289 O		323 O		365 O		387 O		293 O	PS												
176 O		289 O		323 O		365 O		387 O	IF	293 O	PS												
176 O		290 O	IF	324 O		365 O		387 O		294 O	PS												
177 F		291 O		326 O		365 O		388 O		294 O	PS												
180 F		291 O		326 O	US	366 O		388 O		305 O	PS												
180 F		291 O		326 O		366 O		388 O		307 O	PS												
183 F		292 O		328 O		367 O	PS	389 O		308 O	PS												
194 F		292 O		328 O		368 O		389 O		312 O	PS												
197 E		292 O	PS	329 O		368 O		390 O		312 O	KX												
210 E		292 O		330 O		369 O		390 O		323 O	IF												
212 O	IF	293 O		330 O	IF	369 O		391 O		323 O	PS												
212 O		293 O		330 O	PS	369 O		391 O	IF	327 O	IF												
212 F		294 O		330 O	PS	369 O		391 O		338 O	PS												
213 E	IF	294 O		333 O		370 O		391 O		340 O	IF												
215 O		294 O		333O		370 O		391 O		340 O	IF												
216 E		294 O		333 O	PS	370 O		391 O	IF	341 O	IF												
217 E		294 O		333 O	PS	370 O		392 O		353 O	IF												
218 O		294 O	PS	334 O	IF	370 O		392 O		355 O	US												
219 O		295 O		334 O		370 O		392 O		356 O	IF												
220 E		295 O		335 O	IF	371 O		392 O		358 O	IF												
220 E		300 O		338 O		371 O		392 O		359 O	IF												
220 E		300 O		338 O		371 O		393 O		359 O	IF												
222 O		300 O		338 O		371 O		393 O		359 O	PS												
223 O		300 O		338 O		372 O				360 O	PS												
223 O		300 O		338 O						364 O	IF												
										367 O	PS												
										372 O	PS												
										382 O	PS												