Faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebra for lærerstudenter

En kvalitativ innholdsanalyse av åtte nasjonale deleksamener i algebraisk tenkning for GLU 5-10

REBEKKA ABILDGAARD LINDSETH

VEILEDERE

Per Sigurd Hundeland
Jorunn Reinhardtsen

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min studietid ved Universitetet i Agder. Etter fem år med nye bekjentskap, utallige forelesninger, varierte arbeidsmetoder og spennende praksis sitter jeg igjen med et spekter av kunnskaper og erfaringer som jeg vet vil ha betydning for den stadig utviklende læreren i meg.

Arbeidet med masteroppgaven har vært svært lærerikt og jeg har fått en stor respekt for all innsatsen som legges ned av forskere for å få mer kunnskap om algebra og utdanning generelt. Jeg håper at studien vil være et nyttig bidrag til forskningsfeltet og til lærerutdanning i Norge. Gjennom arbeidet med masteroppgaven har jeg fått en dypere og mer omfattende forståelse av hva algebraisk tenkning innebærer, hvorfor det er viktig, og hvordan det kan utvikles. Dette er verdifull kunnskap jeg tar med meg inn i yrkeslivet i skolen.

Hjelp og støtte fra ulike hold har hatt stor betydning for gjennomføringen av dette masterprosjektet. Først vil jeg rette en stor takk til veilederne mine, Per Sigurd Hundeland og Jorunn Reinhardtsen. Takk for inspirasjon til valg av masterprosjekt, uvurderlig tilrettelegging, og ikke minst profesjonell og kyndig veiledning gjennom hele mastergradforløpet. Takk til NOKUT som har engasjert seg i masterprosjektet og gitt meg en plattform til å formidle forskningen min gjennom. Jeg vil også takke tidligere praksislærere, forelesere og dyktige medstudenter for gode diskusjoner og faglig utvikling. Til slutt vil jeg takke mannen min, Henrik, for å ha vært en solid klippe for meg det siste året. Du har tatt ansvar på så mange måter, støttet meg gjennom graviditet og fødsel, gitt meg tid og rom til å skrive, og motivasjon og inspirasjon til å fullføre.
Uendelig tusen takk.

Kristiansand, november 2023
Rebekka Abildgaard Lindseth

Sammendrag

Denne masteroppgaven søker å finne ut av hva slags faginnhold nasjonal deleksamen i algebra for GLU 5-10 inneholder og dermed hvilke kunnskaper lærerstudentene testes i. Totalt 150 oppgaver har blitt analysert med utgangspunkt i et didaktisk og algebraisk rammeverk som baserer seg på begrepene til Ball et al. (2008) og Kieran (2004). Forskningsspørsmålet er: *Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?*. For å besvare forskningsspørsmålet er det foretatt en kvalitativ innholdsanalyse av åtte nasjonale deleksamener gjennomført i perioden fra høsten 2019 til våren 2023.

Funnene viser at det er en del variasjon av faginnhold mellom eksamenssettene. Samtlige oppgaver inneholder undervisningskunnskap og sett alle eksamenssettene under ett er det funnet at en svært høy andel av oppgavene tester studentenes fagkunnskap, med et stort fokus på allmenn fagkunnskap, og at en av tre oppgaver tester studentenes fagdidaktiske kunnskap. Algebraisk aktivitet er også godt representert i oppgavene. Over tid har de meningsskapende genererende aktivitetene blitt prioritert i økende grad over de regel-baserte transformerende aktivitetene. 99,4% av oppgavene stimulerer til en eller flere globale meta-level aktiviteter, og det legges spesielt stor vekt på at kandidatene skal beherske å begrunne og analysere.

Abstract

This master's thesis seeks to find out what kind of subject content the national partial exam in algebra for GLU 5-10 contains and thus what knowledge the student teachers are tested on. A total of 150 tasks have been analyzed with a didactic and algebraic framework that is based on the concepts of Ball et al. (2008) and Kieran (2004). The research question is: *What kind of content knowledge for teaching and algebraic activity do the tasks in the national partial exam in algebra stimulate to?.* In order to answer the research question, a qualitative content analysis of eight national partial exams from the period between the autumn of 2019 to the spring of 2023, has been carried out.

The findings show that there are some variations in subject content between the exam sets. All the tasks contain content knowledge for teaching, and it is found that a very high proportion of the tasks test the students' subject matter knowledge, with a large focus on common content knowledge, and that one out of three tasks tests the students' pedagogical content knowledge. Algebraic activity is also well represented in the tasks. Over time, the meaning-building generational activities have been increasingly prioritized over the rule-based transformational activities. 99.4% of the tasks stimulate to one or more global meta-level activities, and a particular emphasis is placed on the candidates ability to justify and analyze.

Innholdsfortegnelse

Figurliste:

Tabelliste:

Diagramliste:

1.0 Innledning

Norske elevers matematikkprestasjoner kan regnes som middels gode i et europeisk perspektiv, men svake prestasjoner i algebra er noe av det som trekker gjennomsnittet ned (Bergem et al., 2016). For alle som bruker matematikk er det viktig med grunnleggende ferdigheter og forståelse av både aritmetikk og algebra. Lærere med høy kompetanse i algebra er bedre stilt til å legge til rette for elevenes læring av faget enn lærere som har manglende kompetanse (Kieran, 2007). Matematikklærere spiller derfor en viktig rolle for elevens læring, men hvordan er lærerstudentenes egne kunnskaper i algebra? NOKUT har på fjerde året testet lærerstudenter i algebraisk tenkning og resultatene viser at også lærerstudenter har svake prestasjoner i algebra (NOKUT, 2023). Dette masterprosjektet søker å finne ut mer om hva slags kunnskaper som egentlig blir målt i den nasjonale deleksamenen. Studier av eksamener er viktig ettersom innholdet kan demonstrere hva som har blitt vurdert som relevant og viktig av de som utviklet eksamenene (Bergqvist, 2007). Hvordan eksamener er designet kan med dette også ha virkning på hva studentene selv anser som relevant og viktig i faget. Faginnholdet som har blitt prioritert i nasjonal deleksamen i algebra kan bidra til å forme lærerstudentenes forestillinger i matematikkfaget, som de igjen kan ta med seg inn i klasserommet som matematikklærere når den tid kommer. Denne studien kan fungere som et bidrag til forskningsfeltet som omhandler faginnhold i oppgaver og eksamener, og resultatet kan ha relevans for fremtidig undervisning av lærerstudenter og for NOKUT som utvikler deleksamen.

1.1 Bakgrunn for studien

Algebra er et område i matematikken som både norske elever og norske lærerstudenter sliter med. De ferskeste resultatene, fra våreksamen i 2023, viser at strykprosenten blant lærerstudentene øker, karaktersnittet minker og stadig færre gjennomfører eksamen (NOKUT, 2023). Ifølge NOKUT-direktør Kristin Vinje er et av målene med å teste studentene i nettopp algebraisk tenkning å styrke den delen av matematikkopplæringen som elever sliter spesielt med (NOKUT, 2023). Lærere i den norske skolen skal undervise etter Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20). I læreplanen for matematikk nevnes algebra som et av flere matematiske kunnskapsområder som danner et grunnlag som elever trenger for å utvikle matematisk forståelse. Videre står det at «algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Som matematikklærer er det viktig med gode matematikkunnskaper for å være i stand til å undervise elever i det de skal lære. Siden norske elever presterer svakt i algebra er algebra et interessant og relevant tema innenfor matematikken å fordype seg i. Det ble bakgrunnen for min motivasjon til å skrive en masteroppgave som omhandlet algebra.

Jeg har ikke selv gjennomført nasjonal deleksamen i algebraisk tenkning ettersom jeg startet på lærerutdanningen før eksamenen ble iverksatt, men nyheter om svake prestasjoner blant lærerstudentene gjorde meg nysgjerrig. Det å teste lærerstudenter i en nasjonal deleksamen i matematikk er relativt nytt. Etter et pilotprosjekt ble første nasjonale deleksamen gjennomført høsten 2019. Deretter har NOKUT gjennomført to eksamener i året og inkludert eksamenen fra våren 2023 er det utviklet totalt åtte deleksamener (NOKUT, u.å.a). Dette er dermed relativt fersk data som det eksisterer lite forskning på og jeg har derfor en unik mulighet til å komme med et nytt og relevant bidrag til forskningsfeltet. Min studie kan både være relevant for NOKUT som utvikler eksamenene og for de ulike institusjonene og lærerutdanningene som utdanner fremtidige lærere.

I de nasjonale retningslinjene for grunnskolelærerutdanningen trinn 5-10 innebærer algebraisk tenkning «søk etter samvariasjon, generelle strukturer, mønstre og relasjoner, beskrivelse av disse ved bruk av ord og symboler, og resonnering og argumentasjon» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). NOKUT oppgir selv at i tillegg til å teste lærerstudentenes kompetanse i algebraisk tenkning inneholder nasjonal deleksamen i algebra også didaktiske og metodiske problemstillinger (Haakens & Bråten, 2023, s. 6). På bakgrunn av dette har jeg valgt å undersøke oppgavene i eksamenssettene gjennom et rammeverk som både tar for seg algebraisk aktivitet og undervisningskunnskap i matematikk.

1.2 Om NOKUT og nasjonal deleksamen

Det Nasjonalt organ for kvalitet i utdanninga, NOKUT, er et statlig forvaltningsorgan under Kunnskapsdepartementet som har til hensikt å sikre, informere og bidra til å utvikle norsk utdanningskvalitet. En av forvaltningsoppgavene deres er å gjennomføre nasjonale eksamener for sykepleierutdanningene, grunnskolelærerutdanningene (GLU) og barnevernsfaglige masterutdanninger (NOKUT, u.å.a). Eksamenene er obligatoriske for alle studentene innenfor disse utdanningene i Norge og besvarelsene sensureres nasjonalt av sensorer oppnevnt av NOKUT for å sikre anonym institusjonstilknytning og at karakterene gis på samme grunnlag nasjonalt (NOKUT, u.å.b). For grunnskolelærerutdanningene, trinn 1-7 og 5-10, gjennomføres nasjonal deleksamen i matematikk innenfor temaet algebraisk tenkning. Deleksamenen dekker en enhet på 5 studiepoeng og inngår i emnet matematikk 1 som innebærer de første 30 studiepoengene lærerstudentene tar i matematikk. I perioden 2015-2018 ble det utformet en felles deleksamen for begge grunnskoleutdanningene innenfor brøk og desimaltall som en pilottest. Fra 2019 har utdanningene derimot hatt ulike eksamenssett med ulike sensorveiledninger utformet av to ulike faggrupper.

Nasjonal deleksamen i algebraisk tenkning for GLU 5-10 skal prøve følgende fire læringsutbyttebeskrivelser som skjer i arbeid med tall og regneoperasjoner, og situasjoner fra matematikk eller «virkeligheten» som omhandler samvariasjon mellom størrelser. Kandidaten:

- «har dybdekunnskap om matematikken elevene arbeider med på trinn 5–10
- har kunnskap om ulike representasjoner og betydningen bruk av og overganger mellom representasjoner kan ha for elevers læring
- har kunnskap om bruk av ulike læremidler, både digitale og andre, og muligheter og begrensninger ved slike læremidler
- kan analysere og vurdere elevers argumentasjon og løsningsmetoder ut fra ulike perspektiv på kunnskap og læring» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44).

1.3 Utvikling av forskningsspørsmål

Det NOKUT utvikler nasjonal deleksamen i matematikk for grunnskolelærerutdanningene (GLU), trinn 1-7 og 5-10. Temaet for eksamenssettene er algebraisk tenkning. I min studie skal jeg se på hva slags type oppgaver som har blitt gitt i eksamenssettene for GLU 5-10. For å gjøre det benytter jeg spesielt begrepene *undervisningskunnskap i matematikk* (UKM) (Ball et al., 2008) og *algebraisk aktivitet* (Kieran, 2004). Målet er å undersøke hvilke typer kunnskaper NOKUT har prioritert og om disse samsvarer med læringsutbyttebeskrivelsene studentene skal prøves i. Forskningsspørsmålet er som følger:

Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?

For å svare på forskningsspørsmålet har jeg valgt å undersøke åtte eksamenssett fra høsten 2019 til og med våren 2023. Ball et al. (2008) deler undervisningskunnskap i to hovedkategorier og totalt seks underkategorier. Rammeverket har blitt utviklet og brukt til å kartlegge hva slags undervisningskunnskap oppgavene etterspør. Kieran (2004) deler algebraisk aktivitet i tre kategorier som i denne studien har blitt brukt til å si noe om hva slags aktivitet oppgavene stimulerer til og dermed hva studentene blir testet i.

1.4 Oppbygging av oppgaven

I dette første kapittelet har bakgrunnen for studien, studiens formål og forskningsspørsmålet blitt presentert. Kapittel 2 presenterer tidligere forskning som er relevant for studien og som studien skal gi et bidrag til. Dette inkluderer forskning på faginnhold i eksamensoppgaver, algebraisk tenkning blant lærerstudenter, og måling av undervisningskunnskap i matematikk.

Kapittel 3 tar for seg teori og det teoretiske rammeverket som anvendes i denne studien. Det starter med algebra og algebraisk tenkning, før modellene for algebraisk aktivitet og undervisningskunnskap i matematikk blir gjort rede for.

Kapittel 4 tar for seg studiens metode. Studiens forskningsdesign, datagrunnlag og dataanalyse blir presentert sammen med begrunnelser for valg gjort underveis. Dette inkluderer tolkning av begrepene til Ball et al. (2008) og Kierans (2004), og anvendelse av disse. Til slutt diskuteres studiens reliabilitet og validitet, og det blir gjort rede for etiske betraktninger.

I kapittel 5 blir resultatene fra analysen lagt frem. Her blir forekomsten av de ulike kategoriene på de ulike eksamenssettene presentert, i tillegg til eventuelle likheter og forskjeller mellom eksamenssettene. Sammenhenger mellom ulike kategorier blir også studert.

I kapittel 6 blir resultatene fra analysen diskutert i lys av relevant forskning og teori. Læringsutbyttebeskrivelsene nasjonal deleksamen skal prøve studentene i blir sett i sammenheng med funn av faginnhold i eksamenssettene. Videre blir eksamenssettenes innhold av algebraisk tenkning diskutert.

I Kapittel 7 blir studiens hovedkonklusjoner trukket og forskningsspørsmålet besvart, før forslag til videre forskning presenteres.

2.0 Tidligere forskning

2.1 Faginnhold i oppgaver på universitetsnivå

Det er flere grunner til å at det er viktig å studere eksamener i matematikk. Eksamener er en vanlig del av universitetsutdannelser og gir studenter anledninger til å arbeide med matematikk gjennom å løse oppgaver. Studier viser at vurderinger generelt påvirker måten studenter studerer på (Kane et al. 1999). Kunnskaper og ferdigheter som en student skal inneha etter et fullført kurs på universitetet er direkte relatert til hva som kan måles gjennom vurderinger. Eksamener kan derfor sees på som et uttrykk for hva de som utviklet eksamenene anser som viktig og relevant faginnhold, noe som igjen kan påvirke studenters forestillinger i faget, for eksempel om hva slags resonnering som er viktig i matematikk (Bergqvist, 2007). Hvilke forestillinger lærerstudenter har om hva som er viktig og relevant i matematikk kan påvirke hva de selv vektlegger når de etter hvert skal velge og lage oppgaver til elever.

Tidligere forskning antyder at studenter løser oppgaver på universitetsnivå primært ved bruk av imitativ resonnering, noe som innebærer memorering av fakta og kopiering av algoritmer (e.g. Lithner, 2003, 2004). Det å fokusere på å huske stegene til en prosedyre når en arbeider med algoritmer kan svekke studentenes forståelse av matematikken som ligger til grunn (Bergqvist, 2007). Bergqvist hevder at det er viktig å undersøke ulike former for resonnering som studenter støter på i utdanningen ettersom læring knyttes til aktivitetene og prosessene studentene engasjeres i. Lithner (2004) har analysert kalkulusoppgaver i tekstbøker på universitetsnivå og funnet at studenter møter på kreativ resonnering i svært lav grad. Kreativ resonnering kan sees på som det motsatte av imitativ resonnering og knyttes til det å utvikle nye måtes å løse oppgaver på (Lithner, 2004). Senk et al. (1997) undersøkte matematisk resonnement i over 100 tester utviklet av lærere til videregående elever. Oppgavene ble klassifisert til å inneholde resonnement dersom de krevde begrunnelse, forklaring eller bevis. Forskerteamet kom frem til at det var behov for resonnement i omtrent 5% av oppgavene.

Bergqvist (2007) har analysert 200 oppgaver fra totalt 16 eksamener produsert ved fire ulike svenske universiteter for å undersøke hva slags matematisk resonnering som kreves av studenter som tar introduksjonskurs i kalkulus. Resultatene viste at omtrent 70% av oppgavene kunne løses ved bruk av imitativ resonnering og at 15 av eksamenene kunne bestås kun ved bruk av denne typen resonnering. Selv om imitativ resonnering har sin plass i matematikkfaget, kan en overvekt av slike oppgaver gi studentene et inntrykk av at matematikk i all hovedsak består av imitative metoder. På bakgrunn av dette konkluderer Bergqvist (2007) med at studenter bør få flere muligheter til å lære kreativ resonnering slik at en også kan øke innholdet av denne typen resonnering i eksamener.

2.2 Algebraisk tenkning i utdanning

Algebra er et av de mest forskede områdene innen matematikkundervisning. Over de siste førti årene har mange forskere adressert utfordringene knyttet til læring og undervisning av algebra i skolen (Hodgen et al., 2018). Det fins en mengde forskning på elevers forståelse av algebra og deres utfordringer er viden kjent. Til tross for dette er det funnet et begrenset antall studier, særlig i norsk kontekst, knyttet til matematikklæreres forståelse av algebra og dets effekt på elevers læring (Fadum & Tellefsen, 2022). En rekke internasjonale studier har vist at lærerstudenters og matematikklæreres forståelse av algebraiske begreper kan være begrenset og at de ofte bruker regelbaserte forklaringer og tilbakemeldinger (Even, 1993; Magiera et al., 2017; van den Kieboom et al., 2014). Forskning på lærerstudenters kompetanser kan fungere som et bidrag til utviklingen av lærerstudier.

En metastudie fra 2022 tok for seg 36 publiserte studier om algebraisk tenkning i utdanning fra perioden 2013 til 2021 der forskningsobjektene inkluderte barnehagebarn, skoleelever, lærerstudenter og lærere (Sibgatullin et al., 2022). Metastudien viste at antall årlige publiserte studier om algebraisk tenkning i utdanning økte over tid med en topp i 2019 og en nedgang i 2020 og 2021. Utbruddet av COVID-19 kan være årsak til nedgangen ettersom det påvirket mulighetene for gjennomføring av forskning. En del av metaanalysens konklusjoner rettet seg mot hva lærere og lærerstudenter kan gjøre for å forbedre elevenes algebraiske tenkning. Dette inkluderte å forbedre egen kommunikasjon, oppmuntre elevene til å engasjere seg på høyere matematiske nivåer og fokusere på elevenes problemløsningsferdigheter. Aktiviteter, begreper og strategier som har effekt på elevers algebraiske tenkning er mønsteroppgaver, tallforståelse, de fire regneartene, symbolforståelse, ikke-numeriske størrelser, positive heltall og rasjonelle tall (Sibgatullin et al., 2022, s. 11). Matematikklærere som har kunnskap om dette er bedre rustet til å utvikle den algebraiske tenkningen hos elevene sine.

Magiera, Moyer og van den Kieboom har publisert en rekke studier (Magiera et al., 2013; 2017; van den Kieboom et al., 2014) som tar for seg algebraisk tenkning hos 18 lærerstudenter fra et stort universitet i USA. Lærerstudentenes skriftlige besvarelser på 125 oppgaver ble brukt som datamateriale og analysert med mål om å identifisere algebraisk tenkning (Magiera et al. 2017). I 2013 undersøkte de sammenhenger mellom lærerstudentenes evne til å tenke algebraisk, til å gjenkjenne muligheter til å engasjere elever i algebraisk tenkning, og til å gjenkjenne og tolke algebraisk tenkning hos elever (Magiera et al., 2013). I tillegg til å analysere lærerstudentenes skriftlige løsninger ble deres evne til å planlegge og analysere intervjuer av elevene, og deres tolkninger av elevers skriftlige løsninger på oppgaver som la til rette for algebraisk tenkning, analysert. Lærerstudentene som ble vurdert til å inneha et høyt nivå av algebraisk tenkning ble sammenlignet med lærerstudentene som ble vurdert til å inneha et lavere nivå av algebraisk tenkning. Førstnevnte gruppe var i stand til å gjenkjenne og tolke elevers algebraiske tenkning når det oppstod i intervjuene og satte søkelys på hvordan elevene tenkte. Den andre gruppen var mindre konsekvente i å gjenkjenne situasjoner der algebraisk tenkning oppstod hos elevene og fokuserte mer på hva elevene gjorde i intervjuene. Funnene viste at det var sterk sammenheng mellom lærerstudentenes evne til algebraisk tenkning og deres evne til å gjenkjenne elevers algebraiske tenkning (Magiera et al., 2013, s. 108). Forskerteamet har også utført en studie som undersøker hvilke type spørsmål lærerstudentene stilte i intervjuene (van den Kieboom et al., 2014). Funnene viste at lærerstudentene som ble vurdert til å inneha et lavere nivå av algebraisk tenkning, stilte spørsmål som enten aksepterte og bekreftet elevenes svar eller ledet dem mot svaret uten å utforske deres tenkning. Lærerstudentene som ble vurdert til å inneha et høyere nivå av algebraisk tenkning stilte i større grad spørsmål for å undersøke elevenes tenkning eller hjelpe dem med å avklare egen tankegang, men under halvparten av spørsmålene var av denne typen. Resultatene indikerte sammenheng mellom lærerstudenters evne til algebraisk tenkning og type spørsmål de stiller for å utforske elevenes algebraiske tenkning (van den Kieboom et al., 2014).

2.3 Lærere og lærerstudenters undervisningskunnskap i matematikk

At norske elever har utfordringer med algebra er allment kjent. Pedagogisk og fagdidaktisk forskning viser at kvaliteten på lærerens undervisning er en av de viktigste faktorene for elevers læringsutbytte (Mosvold, 2017). Mosvold (2017) rapporterer fra en litteraturstudie av tidligere forskning på undervisningskunnskap i matematikk. Av 190 empiriske studier gjennomført i perioden 2006-2013, ble fem av disse gjennomført i Norden. Flere studier antyder sammenheng mellom lærerens kunnskap og elevenes resultater, med noe sprikende funn. Baumert et al. (2010) fant tydelige sammenhenger mellom lærernes fagdidaktiske kunnskap og elevenes resultater, men i motsetning til andre studier (e.g. Hill et al., 2005; Marshall et al., 2009) fant de ingen tydelig sammenheng mellom deres fagkunnskap og elevenes resultater. Kunter et al. (2013) fant også at den fagdidaktiske kunnskapen hadde betydning for elevenes motivasjon og innstilling til matematikkfaget. Årsaker til sprikende funn kan komme av ulike tolkninger av kategoriene: noe som betegnes som fagdidaktisk kunnskap i én studie, kan betegnes som spesialisert fagkunnskap i en annen studie (Mosvold, 2017).

Mosvold og Fauskanger (2015) mener det vil være vanskelig å kartlegge lærere og lærerstudenters undervisningskunnskap gjennom skriftlige prøver i matematikk. Utfordringene ligger i å avgjøre hvilke instrumenter en vil ta i bruk og hvordan resultatene skal analyseres, tolkes og brukes. For å undersøke et utvalg av 30 norske læreres undervisningskunnskap i matematikk har Mosvold og Fauskanger tatt i bruk 28 flervalgsoppgaver utviklet av Ball med kollegaer for å måle slik kunnskap og la ved tilhørende åpne oppgaver som de selv hadde utviklet for å finne ut mer om lærernes forståelse. Figur 2.1 viser et eksempel på en flervalgsoppgave utviklet for å måle spesialisert fagkunnskap, som er en form for undervisningskunnskap som Mosvold og Fauskanger mener er nært relatert til relasjonsforståelse. Figur 2.2 viser de tilhørende åpne spørsmålene som skal undersøke lærernes relasjonsforståelse nærmere (Mosvold & Fauskanger, 2015).

6. Tenk deg at elevene dine arbeider med multiplikasjon av store tall. Blant elevarbeidene, ser du at noen elever som har gått på skole i andre land enn Norge bruker følgende metoder:

Elev A	Elev B	Elev C
35	35	35
· 25	· 25	· 25
125	175	25
+ 75	+ 700	150
875	875	100
		+ 600
		875

Hvilke av elevene bruker en metode som kan benyttes til å multiplisere to vilkårlige hele tall?

	Metoden vil fungere for alle hele tall	Metoden vil IKKE fungere for alle hele tall	Jeg er ikke sikker
a) Metode A	1	2	3
b) Metode B	1	2	3
c) Metode C	1	2	3

Figur 2.1: Eksempel på flervalgsoppgaver (oversatt fra Ball & Hill, 2008, s. 5, i Mosvold og Fauskanger, 2015, s. 6).

1. Hva kan elevene når de svarer som elevene A, B og C over?
2. Hva, hvis noe, trenger elevene å lære mer om? (Hvorfor?)
3. Speiler oppgaven viktig matematikkfaglig/matematikkdidaktisk innhold på det trinnet du underviser? (Hvorfor?/Hvorfor ikke? Gi et eksempel fra klasserommet for å illustrere.)
4. Ville du anbefalt elevene dine å bruke noen av metodene som elevene A, B og C bruker? (Hvorfor?/Hvorfor ikke?)

Figur 2.2: Eksempel på åpne oppgaver tilhørende flervalgsoppgavene (Mosvold & Fauskanger, 2015, s. 7).

Videre sammenlignet Mosvold og Fauskanger lærernes flervalgsvar og deres svar på de åpne oppgavene og kom frem til at det var en mangel på samsvar i nesten alle oppgavene i studien. Selv om de fleste lærerne som indikerte relasjonsforståelse gjennom de åpne oppgavene også svarte riktig på flervalgsoppgavene, og lærerne som indikerte manglende forståelse svarte feil på en eller flere av de tilhørende åpne oppgavene, var det en del lærere som ikke viste relasjonsforståelse men likevel svarte riktig på flervalgsoppgavene. I tillegg svarte to av lærerne feil på flervalgsoppgavene selv om de viste god relasjonsforståelse gjennom de åpne oppgavene. Mosvold og Fauskanger konkluderer med at det er utfordringer med å studere læreres kunnskap i begge oppgaveformatene og at læreres skår på ulike oppgaver må brukes med forsiktighet (Mosvold & Fauskanger, 2015).

Fadum og Tellefsen har analysert 82 eksamensbesvarelser av norske lærere i emnet *tall og algebra* fra videreutdanningsstudiet i matematikk 1 for 5.-10. trinn (2022). De studerte besvarelsene til oppgaven i figur 2.3 for å undersøke lærernes undervisningskunnskap knyttet opp mot algebraiske uttrykk og forståelse av likhetstegnet.

Regn ut følgende uttrykk: $\frac{m+3}{5} - \frac{m-8}{4} =$

a) Her er et eksempel på en løsning fra en elev på 10. trinn (figur 1). Finn ut hvordan eleven har regnet og hvilke misoppfatninger som kan være til stede.

$$\frac{m+3}{5} - \frac{m-\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}} = \quad \big| 20$$

$$\cancel{20}^{4}\ \frac{m+3}{\cancel{5}} - 20 \cdot m - 2 =$$

$$4m + 3 - 20m - 2 =$$

$$-16m + 1 = 0$$

$$-16m = -1$$

$$m = \frac{-1}{-16} = \frac{1}{16}$$

$$\underline{\underline{m = \frac{1}{16}}}$$

Figur 1. *Elevens løsning*

b) Hvordan kan du skape en kognitiv konflikt hos eleven slik at han/hun selv oppdager hva som må være rett svar?

Figur 2.3: Eksamensoppgave fra videreutdanningskurs i matematikk (Fadum & Tellefsen, 2022, 2. 48).

Lærernes matematiske kunnskap, deres analyse av elevens løsning og tilbakemeldingen de ville gitt eleven, dannet grunnlaget for vurderingen av besvarelsene. Fadum og Tellefsen (2022) fant at 50 av 82 lærere viste allmenn fagkunnskap ved at de forenklet det algebraiske uttrykket riktig. 15 studenter løste oppgaven som en likning og klarte dermed ikke å skille mellom uttrykk og likninger, noe som tydet på at de kan ha samme hindringer for å lære algebra som er typiske for elever. De fleste klarte å finne ut hvordan eleven hadde regnet, men kun seks lærere viste spesialisert fagkunnskap ved å identifisere og beskrive årsaker til elevens misoppfatning, noe som samsvarer med tidligere forskningsfunn om at lærere kan være lite opptatt av å finne forklaringer på elevers misoppfatninger i algebra (e.g. Tirosh et al., 1998). Mangel på spesialisert fagkunnskap førte også til at lærernes tilbakemeldinger til eleven, som skulle vise den fagdidaktiske kunnskapen, ble generelle ettersom de ikke klarte å spesifisere hva de ønsket å fremheve hos eleven (Fadum & Tellefsen, 2022).

3.0 Teori

3.1 Algebra

Algebra er et sentralt emne i matematikken, likevel har det vært problematisk å formulere en definisjon på hva algebra *er* (Usiskin, 1988). Ordet *algebra* har ifølge Kieran (2020) eksistert siden 800-tallet, og frem til andre halvdel av 1900-tallet ble begrepet primært brukt i forbindelse med løsning av likninger. Kieran foreslår en tradisjonell definisjon der algebra omtales som et verktøy for å representere tall og mengder med bokstav-symbolikk, i tillegg til å kalkulere med disse symbolene (Kieran, 1996). Tendensen var lenge å assosiere algebra i skolen og algebraisk tenkning med bruken av bokstaver (Radford, 2010). Den forestillingen lærerne selv har om algebra, evnen til å formidle det som er viktig og legge til rette for at elevene får en dyp forståelse, vil påvirke den forestillingen elevene selv utvikler. Kunnskap om algebraens rolle i skolen, hvilke utfordringer og muligheter som er, er derfor essensielt for matematikklærere.

3.1.1 Variabler

De algebraiske tegnene vi har hatt i skolen har tradisjonelt vært bokstaver og tegn for operasjoner (Radford, 2010), og det er først når elevene møter variabler at en kan si at elevene studerer algebra (Usiskin, 1988). Men, ettersom begrepet variabel i seg selv er mangefasettert, vil det ikke være tilstrekkelig å definere skolealgebra som «studiet av variabler». Over tid har oppfattelsen av variabel endret seg. Det har blant annet blitt definert som tall som endrer seg, bokstaver som representerer tall, og symboler som brukes til å erstatte navn for objekter. Mange elever tror at alle variabler er bokstaver som erstatter tall, men elevene møter også variabler som ikke representerer tall i skolen, for eksempel *f* for funksjon, A for et punkt eller AB for et linjestykke. Variabler har mange mulige definisjoner, referanser og symboler. Forsøk på å presse ideen om variabel inn i en enkel forestilling forenkler ideen og forvrenger dermed algebraens hensikt. Usiskin (1988) mener at formålene vi har for algebraundervisning, forestillingene vi har for faget, og bruken av variabler er uløselig relatert. Han har definert fire forskjellige forestillinger av algebra som relaterer til forskjellig bruk av variabler: (a) algebra som generalisert aritmetikk; (b) algebra som en studie av prosedyrer for å løse visse typer problemer; (c) algebra som en studie av forhold mellom mengder; og (d) algebra som en studie av strukturer (Usiskin, 1988).

Selv om det ikke er mulig å praktisere abstrakt algebra uten å bruke sofistikerte notasjoner, kan ikke algebra og algebraisk tenkning reduseres til «bruken av bokstaver». Manipulasjon av symboler er bare en liten del av hva algebra handler om (Mason, 1990). Bokstaver har verken vært nødvendig eller en tilstrekkelig betingelse for algebraisk tenkning. En kan både bruke bokstaver uten å tenke algebraisk, for eksempel ved å bruke innlærte isolerte prosedyrer til å løse en likning, og en kan tenke algebraisk uten å bruke bokstaver, for eksempel ved å se etter endring i figurer. Radford (2010) hevder at bruk av bokstav-symbolikk er en av flere måter å utpeke og uttrykke ubestemthet. Det finnes en sone før elevene tyr til bokstav-symbolikk der de kan starte å tenke algebraisk. Ifølge han har denne sonen, *sonen for fremvekst av algebraisk tenkning*, i stor grad blitt ignorert i skolen som et resultat av besettelsen med å gjenkjenne det algebraiske kun i det symbolske (Radford, 2010).

3.1.2 Algebraisk tenkning

I motsetning til algebra som kan beskrives som et felt integrert i utdanningssystemer, kan algebraisk tenkning beskrives som en menneskelig aktivitet som algebra springer ut av (Hodgen et al., 2018). For å si eller mene noe om algebraisk tenkning, hevder Radford (2010) at en må ha en form for teori eller ide om tenkning generelt. Han mener at det ikke er enkelt å gi et konkret svar på hva tenkning *er*, men foreslår at det er en kompleks form for refleksjon mediert av sansene, kroppen, tegn og artefakter (Radford, 2010). «Tenkning» i «algebraisk tenkning» kan referere til en måte å produsere mening eller substans på, mens «algebra» kan referere til innholdet en skal produsere mening eller substans om (Lins, 1992).

I 1996 foreslo Kieran følgende definisjon på algebraisk tenkning:

> "Algebraic thinking can be interpreted as an approach to quantitative situations that emphasizes the general relational aspects with tools that are not necessarily letter-symbolic, but which can ultimately be used as cognitive support for introducing and for sustaining the more traditional discourse of school algebra" (Kieran, 1996, s. 275).

I motsetning til hennes definisjon på algebra, involverer ikke algebraisk tenkning nødvendigvis bokstav-symbolikk. Ifølge Kieran (2004) innebærer algebraisk tenkning et fokus på: (a) relasjoner; (b) operasjoner og deres inverter; (c) representere og løse problemer istedenfor å bare løse dem; (d) arbeid med bokstaver som representerer ukjente mengder; og (e) meningen med likhetstegnet. Hun peker på at elever har en tendens til å fokusere på kalkulering uten å se de relasjonelle aspektene ved operasjoner. For å tenke algebraisk mener Lins (1992) at en må (i) tenke aritmetisk, (ii) tenke internt, og (iii) tenke analytisk. De to første kriteriene omhandler arbeid med det semantiske feltet av numre og aritmetiske operasjoner, mens å tenke analytisk er en metode for å søke sannheten og behandle det ukjente som noe kjent (Lins, 1992). Kaput (1998) snakker om betydningen av algebraisk resonnering, som er nært knyttet til algebraisk tenkning. Han foreslår en algebraisk reform der nøkkelen er å implementere algebraisk resonnering over alle klassetrinnene. Han trekker frem to kjerneaspekt ved algebraisk resonnering: (a) å lage og uttrykke generaliseringer i stadig mer formelle og konvensjonelle symbolsystemer; og (b) å manipulere symbolsystemer gjennom en etablert syntaks. Eksempler på symbolsystemer kan være grafer, tabeller, variabler notasjoner og tallinjer. Kaput hevder videre at disse to kjerneaspektene er nedfelt i tre tilnærmingsmåter: (i) algebra som studiet av strukturer og systemer abstrahert fra beregninger og relasjoner (generalisert aritmetikk); (ii) algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og felles variasjon; og (iii) algebra som en klynge av modelleringsspråk. Tradisjonell skolealgebra har fokusert på kjerneaspekt (b) på bekostning av kjernaaspekt (a), dette fordi en er avhengig av å kunne reglene rundt kombinasjoner av symboler og hvordan de forholder seg til hverandre for å kunne regne med dem (Kaput, 1998).

De fleste som underviser i matematikk vil være enige om at algebra og algebraiske ideer har en viktig plass i matematikkfaget (Magiera et al., 2013, s. 94). Å introdusere algebra tidlig vil kunne bidra til å utvikle elevenes konseptuelle kunnskaper og ferdigheter ved å flytte oppmerksomheten vekk fra symbolske manipulasjoner og mot å analysere og generalisere mønstre ved bruk av flere representasjoner (Kieran, 1996). Ved å fokusere på algebraisk tenkning på de tidlige klassetrinnene vil elevene ideelt sett få muligheter til å lenke algebraiske ideer til det de har lært om aritmetikk (Kaput, 1998; Kieran; 1996). Lærere med robust kompetanse i algebraisk tenkning er godt stilt til å hjelpe elever med å utvikle en forståelse av algebraiske ideer og knytte forbindelser mellom dem (Kieran, 2007).

3.1.2 Utvikling av algebraisk tenkning

Kieran (1996) hevder at algebraisk tenkning kan utvikles gjennom aktiviteter som ikke nødvendigvis er unike for algebra, men der algebra kan brukes som et verktøy. Dette inkluderer aktiviteter som å analysere forhold mellom mengder, legge merke til struktur, studere endring, generalisere, problemløsning, modellering, begrunne, bevise, og forutsi. I læreplanverket LK20 beskrives mange av disse aktivitetene som kjerneelementer det norske matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er derfor essensielt for norske matematikklærere å ha kjennskap til og kunnskap om disse aktivitetene.

Å analysere forhold er en av aktivitetene Kieran (2004) hevder kan utvikle algebraisk tenkning. Ifølge Usiskin (1988) kan algebra oppfattes som studiet av forhold mellom mengder. Forhold har i begge tilfellene blitt oversatt fra det engelske ordet «relationships». Å analysere eller studere forhold handler om å se etter sammenhenger og knyttes spesielt til funksjoner. Forhold kan blant annet uttrykkes gjennom bokstav-symbolikk, noe som gjør at komplekse matematiske ideer kan uttrykkes kortfattet og at endring kan analyseres effektivt (Kieran, 2004). Å studere endring handler om å se etter forandring i blant annet figurer, mønstre og grafer. Å lete etter mønster og finne sammenhenger blir i LK20 knyttet til utforskning i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Det handler blant annet om at elever skal legge mer vekt på strategier og fremgangsmåter enn på løsningene.

Kieran (1996) trekker frem problemløsning som en historisk del av algebraen, men det var ikke før mot slutten av 1900-tallet at perspektivet på problemløsning begynte å skifte mot algebraisk tenkning. Å utforske generiske problemer og deres utvidelser er en matematisk autentisk og motiverende måte å arbeide på (Bell, 1996). Bell (1996) foreslår to forståelser av problemløsning. En smal forståelse av begrepet går ut på å løse problemer ved å utforme og løse likninger. En bred forståelse av begrepet innebærer å utforske problemer på en åpen måte, ved å utvide og utvikle dem i søket etter resultater, gjerne generelle resultater. Dette kan knyttes til hvordan Kieran (1996) beskriver forestillinger av problemløsning i algebra. Den smale forståelsen samsvarer med hvordan problemløsning tradisjonelt sett har blitt behandlet i algebraen, mens den brede forståelsen samsvarer med den nyere måten å betrakte problemløsning på med fokus på algebraisk tenkning. Bell (1996) hevder videre at det ikke er noe tydelig skille mellom problemer som kan løses ved aritmetisk tenkning alene og de som krever en algebraisk løsning. Variablene i problemløsningsoppgaver vil være ukjente eller konstante, og nøkkelinstruksjonene vil være å forenkle og løse (Usiskin, 1988). I LK20 handler problemløsning i matematikk om «at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før… òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige.» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2).

Ifølge Kieran (2004) kan en utvikle algebraisk tenkning gjennom modellering. Algebra kan forstås som et språk for å uttrykke noe og modellering i matematikk er en måte å uttrykke virkeligheten på gjennom et formelt matematisk språk (Kaput, 1998). En matematisk modell kan defineres som en abstrakt, forenklet matematisk konstruksjon relatert til en del av virkeligheten og som er laget for en spesifikk grunn (Bender, 2000, s. 3). Ifølge LK20 skal norske elever lære å lage modeller for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers, i tillegg til å vurdere modellenes gyldighet, avgrensinger og mulige anvendelser (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). For å hjelpe å øke elevers suksess i algebra er det viktig for lærere å velge oppgaver og aktiviteter som oppmuntrer dem til å resonnere og som lar dem modellere et utvalg av situasjoner, lenke viktige matematiske ideer, og bygge en grunnleggende forståelse av algebraiske begreper (McAuliffe & Vermeulen, 2018, s. 419).

Sentralt i algebraisk tenkning er generalisering (Kieran, 2018; Kaput, 1998; Mason, 1996). Hodgen et al. (2018) beskriver generalisering som en mental prosess der en komprimerer flere tilfeller til en enkelt, enhetlig form. Arbeid med generaliseringsoppgaver og aktiviteter kan styrke evnen til å filtrere ut matematisk informasjon og til å trekke konklusjoner i form av generaliserte påstander (Hodgen et al., 2018). Mason (1996) pekte på generalisering som et viktig fundament i matematikk og mente at om lærere var uvitende om generaliseringens tilstedeværelse og ikke hadde for vane å få elevene til å jobbe med å uttrykke sine egne generaliseringer, så ville ikke matematisk tenkning finne sted. Han mente at elever i skolen ofte viser en interesse for det konkrete, noe som har ført til apparatbasert praksis i utdanningsmiljøet. Lærere kan forsterke denne tilsynelatende preferansen for den materielle verden ved å lage undervisning som understreker det spesielle, noe som kan gjøre det vanskeligere å sette pris på det generelle (Mason, 1996). Oppgaver som fokuserer på generalisering er viktig i utviklingen av algebraisk tenkning, men selv om generalisering inneholder en strukturell komponent har en overvekt av slikt fokus i skolen tilslørt prosessen av å legge merke til struktur (Kieran, 2018). Kieran (2018) trekker frem tre perspektiver på struktur: (a) struktur og generalisering; (b) struktur i numre og numeriske operasjoner; og (c) struktur i figurmønstre og funksjoner. Det første perspektivet knytter generalisering til å identifisere, trekke ut og uttrykke aritmetisk struktur i operasjoner på grunnlag av gjentatte og regelmessige observasjoner. Struktur i numre og numeriske operasjoner er ofte uttrykt i nedbrutt, beregnet form og handler om organisering, sammensetning og kombinasjoner av mengder og tall, eksempelvis å etablere regelmessigheter i tall eller å forstå sammenhenger mellom operasjoner. Struktur i figurmønstre og funksjoner linker denne numeriske strukturen med en *romlig* struktur der en både bryter ned og rekomponerer, eksempelvis for å forutsi neste figur i en figurtalloppgave. Fundamentalt for å utvikle elevers algebraiske tenkning er aktiviteter som gir dem erfaringer med nedbryting og rekomponering av numeriske uttrykk, og deres strukturelle ekvivalens (Kieran, 2018).

Kieran (2004) peker på å begrunne og bevise som aktiviteter algebraisk tenkning kan utvikles gjennom. Å begrunne handler om å utvikle matematiske argument for å forsvare eller tilbakevise validiteten av en fremgangsmåte, en løsning eller et resonnement. Illustrasjoner, manipulasjoner, aksiomer og bevis er eksempler på argumenter en kan bruke for å begrunne noe (Blanton et al., 2018). I LK20 beskrives argumentasjon som å grunngi fremgangsmåter, resonnement og løsninger, og bevise deres gyldighet (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Spesielt erfaringer med å begrunne generaliseringer vil komme til nytte når elever skal studere bevis. Stylianides (2007) hevder at definisjoner på bevis sjeldent fremkommer i forskningslitteraturen. Han foreslår en definisjon som betrakter bevis som et matematisk argument med følgende kjennetegn: (a) allmenn anerkjente påstander som definisjoner, aksiomer og teoremer; (b) argumentasjonsmåter som anvendelse av logiske slutningsregler, eller vise til moteksempler og motsigelser; og (c) argumentative representasjoner som symbolske, verbale og fysiske. Bevis er fundamentalt for matematisk forståelse og essensielt i utvikling og etablering av matematisk kunnskap, derfor insisterer både forskere og læreplaner på at elever i alle klassetrinn burde få erfaringer med bevis på ulike områder i matematikken (Stylianides, 2007).

Den siste aktiviteten Kieran (2004) trekker frem i forbindelse med utvikling av algebraisk tenkning er å forutsi. Å forutsi er å fremsette en påstand om et kjent fenomen med hensikt om å avsløre noe på forhånd (Kasmer & Kim, 2011). Med en slik definisjon kan det gjelde alt fra tilfeldige gjetninger uten bevis til vitenskapelige resonnementer med tilstrekkelig støtte. Forutsi som en form for algebraisk tenkning baserer seg på sistnevnte der en aktiverer tidligere kunnskap og linker relevante ideer fra utforskning for å fremsette en plausibel prediksjon.

3.3 Algebraisk aktivitet

Algebra er et sentralt emne i skolematematikk og flere har forsøkt å konseptualisere skolealgebra og algebraisk tenkning. Ulike tilnærminger og teoretiske diskusjoner har forsøkt å gi mening til aktivitetene elever møter når de lærer algebra og det har vært fokus på å påpeke hva som er viktig i skolealgebra (Eisenmann & Even, 2009). Kieran (1996) bygde videre på disse ideene og mente det ville være nyttig å tilnærme seg algebra som en aktivitet. Hun utviklet en modell som kategoriserer skolealgebra i tre typer algebraisk aktivitet: genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter og global meta-level aktiviteter.

Ifølge Kieran skjer mye av meningsskapingen av algebra innenfor de genererende aktivitetene. Dette er aktiviteter som setter søkelys på representasjon og tolkning av situasjoner, egenskaper, mønstre og forhold. Det handler i hovedsak om generering av uttrykk og likninger, og innebærer forståelse av variabler, ukjente, likhetstegnet og forestillingen av likningsløsing (Kieran, 2004). Typiske eksempler inkluderer å utforme likninger som inneholder en ukjent som representerer problemsituasjoner, generalisere uttrykk fra geometriske mønstre eller numeriske sekvenser, uttrykke regler som styrer numeriske relasjoner, og representere funksjoner ved bruk av graf, tabell eller bokstav-symbolikk. En annen måte å se på disse genererende aktivitetene er fra et oversettelsesperspektiv: at en oversetter fra en situasjon til en algebraisk representasjon. Bruken av begrepet oversettelse antyder at all informasjon om en situasjon opprettholdes, noe som ikke er tilfellet med algebra (Kieran, 1996). For å vite hva som skal representeres algebraisk, må en kunne avdekke nyttige sammenhenger eller relasjoner i geometriske mønstre, tallrekker eller situasjoner (Radford, 2010).

Transformerende aktiviteter fokuserer på regnetekniske prosesser i algebra og omtales ofte som «regel-baserte» aktiviteter (Kieran, 1996). Dette inkluderer blant annet å samle like uttrykk, faktorisere, utvide, erstatte, addere og multiplisere polynomer, potensregning med polynomer, løse likninger, forenkle uttrykk, arbeide med ekvivalente uttrykk og likninger, og så videre. Det arbeides eksplisitt med algebraiske verktøy som variabler, potenser, parenteser, og det matematiske språket. En god del av denne typen aktivitet handler om å endre formen på et uttrykk eller en ligning for å opprettholde ekvivalens (Kieran, 1996). Selv om en ofte forbinder det å skape mening i algebra med genererende aktiviteter, er det viktig å nevne at transformerende aktiviteter også kan involvere meningsskaping, for eksempel knyttet til ekvivalens og gjennom bruken av egenskaper og aksiomer i de manipulerende prosessene (Eisenmann & Even, 2009). For noen kan transformerende aktiviteter bli ganske automatisert. Når regler i algebra er godt innarbeidet kan det føre til at transformerende aktiviteter automatiseres og en kan løse algoritmer uten at så mye tenkning er involvert (Kieran, 1996).

Ifølge Kieran er det gjennom de globale meta-level aktivitetene at algebraisk tenkning utvikles. Denne typen aktivitet er kontekst-basert og krever matematisk resonnement. De inkluderer problemløsning, modellering, legge merke til struktur, studere endring, generalisering, analysere forhold, begrunne, bevise og forutsi (Kieran, 1996). Dette er aktiviteter som legger til rette for mer generelle matematiske prosesser som ikke er eksklusive for algebra, men der algebra kan brukes som et verktøy. For slike aktiviteter finnes det flere løsninger og det skal være mulig å komme frem til svaret uten å bruke formell algebra. Forsøk på å skille disse globale meta-level aktivitetene fra algebra fjerner all kontekst eller behov en kan ha for å bruke algebra, de er derfor også essensielle for de andre algebraisk aktivitetene, spesielt for de meningsskapende genererende aktivitetene (Kieran, 2004).

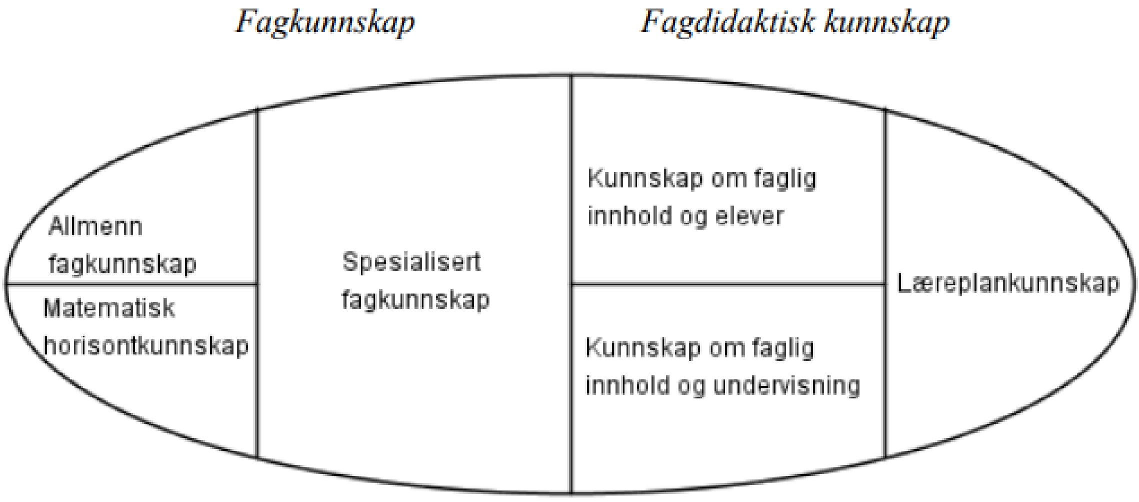
I motsetning til en del andre rammeverk som skiller mellom matematiske oppgaver med lavere og høyere kognitive krav, fokuserer Kierans modell kun på typen algebraisk aktivitet og ikke på det kognitive nivået av aktiviteten. Alle de tre aktivitetene kan relateres til krevende oppgaver selv om transformerende aktiviteter ofte dukker opp i oppgaver på lavt nivå i lærebøker (Eisenmann & Even, 2009).

3.4 Undervisningskunnskap i matematikk (UKM)

Resultater fra ulike studier gir en indikasjon på hva elever kan i matematikk, og med svake resultater på noen områder har det blitt stilt spørsmål ved læreres kunnskap i matematikk (Mosvold & Fauskanger, 2015). «Måling av den kunnskapen lærere trenger for å undervise i matematikk er imidlertid ikke det samme som å måle elevers kunnskaper i matematikk. Mens elevene skal tilegne seg en allmenn matematisk kunnskap, er læreres undervisningskunnskap i matematikk mer sammensatt» (Mosvold & Fauskanger, 2015 , s. 2). Over tid har det vært et fokus på hva lærere burde vite (Ball et al., 2008). Det rådende synet er at matematikklærere trenger å kunne matematikken som er i læreplanen pluss noe mer avansert matematikk fra høyere utdanning. Et annet syn er at lærere trenger å kunne læreplanen, men "dypere", i tillegg til en viss mengde pedagogisk fagkunnskap. I begge tilfeller er det uklart hva det er som utgjør den ekstra kunnskapen i matematikk. Ball et al. (2008) utførte en studie for å identifisere hva slags matematisk kunnskap som er nødvendig for effektiv undervisning. Ved å tydelig identifisere denne kunnskapen kunne den brukes til å forbedre læreres undervisningskunnskap i matematikk. Fokuset lå på bruken av kunnskap *i* og *for* undervisning istedenfor på lærerne selv. Studiens hensikt var å lære mer om hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk var bygd opp og dets betydning, og ikke for å måle enkeltlæreres kunnskap eller rangere lærere (Mosvold & Fauskanger, 2015). Med undervisning menes alt lærere gjør for å legge til rette for elevenes læring. Dette innebærer interaktivt arbeid i klasserommet, i tillegg til planlegging av timer, evaluering av elevers arbeid, lage og rette prøver, oppgaver og lekser, og forholde seg til foreldre og kollegers synspunkter og meninger om faget (Ball et al., 2008). De utviklet en praksis-basert teori om «mathematical knowledge for teaching», som man i Norge refererer til som *undervisningskunnskap i matematikk* (UKM) (Valenta, 2015). Teorien bygger på Lee

Shulmans «notion of pedagogical content knowledge» (1986) fra midten av 1980-tallet der det ble forsøkt å identifisere fagkunnskap som var unik for undervisning og bygge bro mellom «fagkunnskap» og «fagdidaktisk kunnskap». Ball et al. (2008) kom frem til at de kunne definere totalt seks underkategorier til disse to domenene. Det viktigste og mest overraskende funnet var avdekkingen av en type matematisk fagkunnskap som skilte seg fra allmenn matematikkunnskap; *spesialisert fagkunnskap*, en kunnskap de mente var essensiell for effektiv undervisning (Ball et al., 2008).

Med utgangspunkt i Shulmans to innledende kategorier, utviklet Ball et al. (2008) en modell bestående av seks elementer av undervisningskunnskap. Shulman hadde også en tredje kategori, *læreplankunnskap*, som de plasserte under fagdidaktisk kunnskap (Ball et al., 2008).



Figur 3.1: Ball et al. sin modell for undervisningskunnskap i matematikk (UKM) oversatt til norsk (Valenta, 2015, s. 48).

Ball et al. (2008) definerer *fagkunnskap* i matematikk som matematisk kunnskap nødvendig for å undervise matematikk til elever. *Allmenn fagkunnskap* innebærer de matematiske kunnskapene og ferdighetene som trengs for å løse matematiske problemer korrekt. Lærere må kjenne og forstå materialet de underviser, noe som innebærer å bruke begreper og notasjoner riktig, og å gjenkjenne elevers feilsvar eller lærebøkers unøyaktige definisjoner. Disse kunnskapene og ferdighetene finner vi ofte blant andre mennesker som kan matematikk og i andre settinger, og er derfor ikke unike for undervisning. Eksempler på slik kunnskap kan være å kjenne til primtall, regne ut arealet til en sirkel og kunne bruke prioriteringsreglene riktig. Allmenn fagkunnskap er viktig for læreres planlegging og utførelse av undervisning, og mangler kan føre til problemer i klasserommet. For eksempel, om en lærer sliter med å løse et problem på tavla kan dette både koste tid og føre til forvirring for elevene (Ball et al., 2008). Allmenn fagkunnskap kan også betraktes som den matematiske kunnskapen elever skal tilegne seg (Fadum & Tellefsen, 2022).

I motsetning til allmenn fagkunnskap, er *spesialisert fagkunnskap* matematiske kunnskaper og ferdigheter som er unike for lærere og som de må kunne for å gjennomføre undervisning på en god måte. Det er denne kategorien Ball et al. (2008) er spesielt interessert i. Den spesialiserte fagkunnskapen gjør læreren i stand til å være bevisst på ulike måter å fremstille en matematisk operasjon eller idé på, overveie fordeler og ulemper av ulike modeller, representasjoner og forklaringer, og å identifisere viktige matematiske ideer og muligheter en oppgave kan inneholde (Valenta, 2015). Eksempler på dette er å se etter mønstre i elevers gale utregninger, å vurdere om en uvanlig metode vil fungere generelt eller velge ut en illustrasjon som representerer et matematisk problem på best mulig måte (Ball et al, 2008).

Et viktig poeng til Ball et al. er skillet mellom allmenn fagkunnskap og spesialisert fagkunnskap. Andre yrkesutøvere med matematisk bakgrunn, slik som regnskapsførere og ingeniører, innehar også allmenn fagkunnskap og kan drive med kalkulering og modellering i det daglige. De trenger dog ikke å kunne forklare hvorfor en kan «legge på en 0 når en ganger med 10» eller om en uvanlig utregning vil fungere generelt (Ball et al., 2008, s. 401). Dette er problemstillinger lærere kan møte på i det daglige og som krever spesialisert fagkunnskap.

Fagdidaktisk kunnskap forener faglig og pedagogisk kunnskap, og setter søkelys på elevers læring og hvordan en kan legge til rette for dette (Mosvold, 2017; Valenta, 2015). Ball et al. (2008) identifiserer to typer kunnskaper der kunnskap om matematikk kombineres med kunnskap om elever, og kunnskap om undervisning. *Kunnskap om faglig innhold og elever* handler om elevers forhold til matematikken og innebærer kjennskap til hvordan elever har tendens til å tenke i møte med matematikken, hva de syns er vanskelig, vanlige feil de gjør og misoppfatninger som det er sannsynlig at elevene har. Når lærere velger eksempler og oppgaver, må de forutse hva elevene sannsynligvis vil gjøre og hvordan de vil vurdere vanskelighetsgraden. I tillegg skal lærere være i stand til å lytte til og tolke elevers innspill og uttrykk (Ball et al., 2008). *Kunnskap om faglig innhold og undervisning* brukes i planlegging av undervisning og handler om hvordan læreren legger opp undervisningen for at elevene skal utvikle en dypere forståelse. Læreren skal velge hvilke eksempler, oppgaver og aktiviteter som tjener dette formålet og rekkefølgen av disse, i tillegg til å vurdere fordeler og ulemper en gitt representasjon, metode eller fremgangsmåte kan ha i undervisning av et gitt emne. Det å ha kunnskap om faglig innhold og undervisning innebærer også å være bevisst på hvordan språk og metaforer kan hjelpe og forvirre elevenes læring. Læreren skal også vurdere hvilke av elevenes utspill som skal følges opp, spares til senere eller bygges videre på, og hvilke oppfølgingsspørsmål som er hensiktsmessig å stille (Ball et al., 2008). Alt dette er pedagogiske problemstillinger som påvirker læring.

De fire overnevnte elementene er de mest sentrale i modellen til Ball et al. (2008) og de er nært knyttet til hverandre. For eksempel vil det være allmenn fagkunnskap å avgjøre om et elevsvar er galt, mens det vil være spesialisert fagkunnskap å identifisere kilden til elevens feil. Det å kjenne til vanlige feil og bestemme hvilken av disse som er mest sannsynlig at elever gjør kategoriseres som kunnskap om matematikk og elever, mens det å bestemme hvordan en kan lære elevene å rette opp i slike feil hører til kunnskap om matematikk og undervisning. Det kan være vanskelig å skille disse kunnskapene fra hverandre (Ball et al., 2008, s. 397). For eksempel i oppgaven «Sorter disse desimaltallene fra minst til størst: 0.6, 0.13, 0.298» vil det kreve allmenn fagkunnskap å løse den, spesialisert fagkunnskap å lage den, kunnskap om faglig innhold og elever å gjenkjenne hvilke desimaltall elever kan ha problemer med, og kunnskap om faglig innhold og undervisning å bestemme hva en skal gjøre med disse problemene.

I tillegg til disse kategoriene peker Ball et al. (2008) også på *matematisk horisontkunnskap* og *læreplankunnskap* som deler av undervisningskunnskap i matematikk. Horisontkunnskap beskrives som bevissthet rundt hvordan matematiske emner undervist over flere år relaterer til hverandre. For en matematikklærer i første klasse handler det om å vite hvordan en skal undervise med den hensikt om å danne et grunnlag for matematikken elevene skal lære i de neste skoleårene (Ball et al., 2008).

Læreplankunnskap er nært knyttet til horisontkunnskap og beskrives av Shulman (1986) som å se sammenhengen mellom matematikken elevene har lært, skal lære og vil lære senere. Selv om de er plassert under hver sin hovedkategori i modellen for UKM, presiserer Ball et al. (2008) at det kan være kunnskap som går igjen i alle kategoriene.

Modellen for undervisningskunnskap i matematikk har fungert som et viktig bidrag internasjonalt i forskning på og utvikling av matematikklærerkompetanse, lærerutdanning, og etter- og videreutdanning av lærere. Det har også blitt brukt i forskning på lærere og lærerstudenter i Norge, og vært et utgangspunkt i rammeplaner for matematikkemner på grunnskolelærerutdanninger (Valenta, 2015).

4.0 Metode

Denne studien har som formål å undersøke faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebraisk tenkning for lærerstudenter på GLU 5-10. For å finne ut av dette er det foretatt en kvalitativ innholdsanalyse av eksamenssettene der oppgavene har blitt kategorisert med utgangspunkt i et rammeverk for UKM og algebraisk aktivitet. Dette kapittelet tar for seg hvordan datamaterialet har blitt innsamlet og analysert. Det blir gjort rede for hvilke valg som er tatt, og vansker som har oppstått i forbindelse med kategorisering av oppgavene. Til slutt blir studiens reliabilitet, validitet og forskningsetiske hensyn drøftet.

4.1 Forskningsdesign

4.1.1 Kvalitativ innholdsanalyse

For å analysere og tolke innholdet i oppgavene på de nasjonale deleksamenene har jeg foretatt en kvalitativ innholdsanalyse med en teoridrevet tilnærming. I en teoridrevet innholdsanalyse anvendes kategorier deduktivt og utvikles ut fra teori eller forskning med mål om å validere eller videreutvikle eksisterende rammeverk (Fauskanger & Mosvold, 2015). Jeg startet med å lage oversikter over Ball et al. (2008) og Kierans (2004) begreper og brukte eksisterende teori til å formulere noen kjennetegn og underkoder til hver kategori (vedlegg A & vedlegg B). Oversiktene ble brukt som referanse til kategoriseringen der underkodene beskrev oppgavetyper fra eksamenssettene. Meningen med underkodene var å kunne gjenkjenne oppgaver som tilhørte de ulike kategoriene og å begrunne plasseringen i den aktuelle kategorien ved å koble de til beskrivelser fra teorien. Underkodene hadde ingen annen hensikt enn å assistere kategoriseringen og blir ikke undersøkt eller kommentert i analysen.

Ball et al. (2008) deler undervisningskunnskap i to hovedkategorier, fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. I min studie har jeg valgt å skille mellom allmenn fagkunnskap og spesialisert fagkunnskap, som begge er varianter av fagkunnskap, ettersom Ball et al. (2008) gjør et stort poeng ut av hvordan disse skiller seg fra hverandre. Kategoriene jeg deler undervisningskunnskap i er dermed: allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap.

Kieran (2004) deler algebraisk aktivitet i tre kategorier: genererende, transformerende og globale meta-level aktiviteter. Ettersom nasjonal deleksamen skal prøve lærerstudenter i algebraisk tenkning og Kieran hevder algebraisk tenkning utvikles gjennom de globale meta-level aktivitetene, har jeg valg å se nærmere på disse. Kieran nevner ni globale meta-level aktiviteter som jeg har valgt å omtale som underkategorier i denne studien: problemløsning, modellering, legge merke til struktur, studere endring, generalisering, analysere forhold, begrunne, bevise og forutsi (Kieran, 2004). Et bredt spekter av teori presentert i teorikapittelet har blitt brukt for å definere disse begrepene og hensikten med underkategoriene er å si noe om hva slags algebraisk tenkning eksamensoppgavene legger opp til.

4.1.2 Kvantifisering av kvalitativ data

For å undersøke faginnholdet i de nasjonale deleksamenene har jeg foretatt en kvalitativ innholdsanalyse, noe som baserer seg på kvalitative tilnærminger der jeg som forsker foretar tolkning av tekster. Materialet som blir samlet inn som kvalitative data blir så kvantifisert under analysen, altså gjort til gjenstand for kvantitative analyser (Grønmo, 2004). Dataanalysen bygger derfor i stor grad på kvantitative tilnærminger der kvantitative analyseteknikker og måleinstrumenter tas i bruk for å formidle resultatene på en oversiktlig måte. Både den kvalitative og den kvantitative tilnærmingen refererer til de samme undersøkelsesenhetene og de samme undersøkelsesbetingelsene, de relaterer likevel til ulike faser av forskningsprosessen, henholdsvis innsamlingen og analysen (Grønmo, 2004).

Grønmo (2004) problematiserer kvantifisering av kvalitativ data. Han peker på at man under den kvalitative innsamlingen kan gi avkall på eller forkaste de formelle kravene kvantitative analyseteknikker stiller til struktur og presisjon. Dermed kan en stille spørsmål ved sammenlignbarheten av de forholdene som samles og telles opp under analysen, noe som igjen kan beskrives som kvasistatistikk. Videre gjør hun det klart at kvantifisering av kvalitativ data kan gjennomføres på en forsvarlig måte med effektive og fruktbare resultater om forskeren er bevisst på begrensingene ved metoden. Metoden egner seg spesielt i tilfeller der kvalitative resultater skal presenteres på en oversiktlig måte (Grønmo, 2004), noe som er hensikten i denne studien.

4.2 Datagrunnlag

Åtte deleksamener laget og gjennomført av NOKUT danner datagrunnlaget til denne masteroppgaven. Eksamenene gjennomføres to ganger i året, i mai og november, som en 4-timers, individuell skriftlig skoleeksamen uten hjelpemidler. Grunnet COVID-19 har fem av åtte eksamener, fra våren 2020 til og med våren 2022, blitt gjennomført som skriftlige hjemmeeksamener med hjelpemidler der studentene har fått en halvtime ekstra tid som skal kompensere for opplastning av eventuelle bilder og kontrollere innsendingen av besvarelsen (NOKUT, u.å.c).

Eksamenssettene har ulik oppbygging av oppgaver og deloppgaver. Antall oppgaver på hver eksamen varierer fra fire til 12, mens antall deloppgaver varierer fra 15 til 21. Det er vanlig at deloppgavene i en oppgave henger sammen eller omhandler samme tema, men en trenger som oftest ikke å ha løst en oppgave korrekt for å få til den neste. Poeng deles ut for hver deloppgave med maksimalt ett eller to poeng og maksimal poengsum på hver eksamen varierer fra 25 til 33 poeng. På bakgrunn av dette vil hver enkelt deloppgave både regnes og omtales som en oppgave i denne studien. Deloppgavene som blir vist som eksempler på kategorisering er tatt fra ulike oppgaver fra ulike eksamenssett og henger ofte ikke sammen med hverandre.

4.3 Dataanalyse

Denne studien har i hovedsak tatt i bruk kvalitativ metode, med innslag av kvantitative tilnærminger. For å besvare forskningsspørsmålet: *Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?* har jeg gjort en kvalitativ innholdsanalyse av eksamenssettene. I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for hvordan jeg har definert de ulike kategoriene og forklare hvordan jeg har skilt de fra hverandre. Kjennetegn og eksempler på typiske oppgaver til hver kategori vil bli gitt, samt begrunnelser for kategoriseringen.

For å kategorisere oppgavene har jeg foretatt en tolkning av undervisningskunnskap i matematikk og algebraisk aktivitet slik de er presentert av Ball et al. (2008) og Kieran (2004), og utviklet et rammeverk basert på dette. Jeg utformet to oversikter (vedlegg A

& vedlegg B): en over UKM med kategoriene allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap, og en over algebraisk aktivitet med kategoriene genererende, transformerende og globale meta-level aktiviteter der sistnevnte inkluderer ni underkategorier. Deretter kodet jeg de ulike oppgavene inn i en eller flere av kategoriene med utgangspunkt i oppgavenes innhold og utfordringer. Én og samme oppgave kan oppmuntre til flere mulige svar og løsninger, og kan plasseres i flere kategorier fra samme modell basert på hva oppgaven spør etter.

4.3.1 Bruk av rammeverk for UKM

I UKM-modellen skiller Ball et al. (2008) mellom fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. I denne studien blir oppgavene vurdert etter om de inneholder undervisningskunnskapene allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap, der de to førstnevnte er varianter av samme hovedkategori. Som et utgangspunkt for hver av oppgavene vurderte jeg først om det var nødvendig med matematisk kunnskap for å besvare den aktuelle oppgaven, og om denne kunnskapen var allmenn og generell eller spesialisert og unik for lærere, eller en kombinasjon av begge. Deretter vurderte jeg om det var behov for fagdidaktisk kunnskap, som kunnskap om elever eller undervisning, for å løse oppgaven. Kjennetegn fra oversikten over kategoriene ble brukt til assistanse.

Allmenn fagkunnskap

Allmenn fagkunnskap kjennetegnes av generelle matematiske ferdigheter og kunnskaper, og som et minimum må en kunne matematikken elevene skal lære. Ball et al. (2008) beskriver allmenn fagkunnskap som evnen til å løse matematiske problemer korrekt, bruke begreper og notasjoner korrekt, beherske det matematiske arbeidet en tildeler elever, og være i stand til å oppdage elevers feilsvar og eventuelle feil i læreboka. Typiske eksamensoppgaver som hører inn under denne kategorien er å løse matematiske oppgaver og problemer; avgjøre om et elevsvar er rett eller galt; og definere matematiske termer og begreper. Følgende er eksempler på oppgaver som etterspør allmenn fagkunnskap:

Oppgave 1

Elever på ungdomstrinnet skal øves i å generalisere. Dette innebærer å uttrykke en generell sammenheng på grunnlag av et tallmønster, slik som en tallfølge.

De fire første leddene i en tallfølge er 4, 9, 14, 19, …

b) Finn et algebraisk uttrykk for det n-te leddet i tallfølgen. Begrunn svaret ditt ved å beskrive hvordan du tenkte.

Figur 4.1: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde allmenn fagkunnskap (oppgave 1b fra høst 2020).

d) Gitt følgende oppgave:

Finn tre etterfølgende naturlige tall som gir summen 81.

Løs oppgaven på to ulike måter, der den ene måten skal være med bruk av likning.

Figur 4.2: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde allmenn fagkunnskap (oppgave 1d fra høst 2019).

Oppgavene krever matematisk kunnskap og ferdigheter, men knyttes ikke til undervisning eller elever. Det å ganske enkelt løse en matematisk oppgave krever kun allmenn fagkunnskap da slik kunnskap ikke er unik for undervisning.

Spesialisert fagkunnskap

Spesialisert fagkunnskap kjennetegnes av matematiske ferdigheter og kunnskaper som er unike for undervisning. Det er matematikk lærere må kunne for å drive undervisning og lærerarbeid. Ifølge Ball et al. (2008) innebærer slik kunnskap å vise elever hva stegene til en prosedyre betyr og forklare hvorfor de gir mening, velge hvilke numre som er strategisk å bruke i et eksempel, vurdere validiteten av elevers metoder og løsninger, og å forsøke å finne ut hva en elev har gjort og om elevens tenkning er matematisk korrekt. Dyktig undervisning krever å kunne påpeke kilden til en matematisk feil. Det er vanlig praksis for matematikere å analysere egne feil. Det som gjør at slik kunnskap for lærere defineres som spesialisert og ikke allmenn fagkunnskap, er at lærere setter søkelys på feil produsert av elever som er i en læringsprosess og må derfor sette seg inn i noen andres tankegang (Ball et al., 2008). Typiske eksamensoppgaver innebærer å lage oppgaver, løsningsforslag og representasjoner til elever; vurdere elevers løsninger, metoder og strategier; og forklare prosedyrer, strategier og løsninger for elever. Eksempler på slike oppgaver er:

Kari har hatt en innføringstime om det å løse likninger, og hun gav elevene følgende oppgave:

$$10 - \square = 12 - 7$$

Hun ba elevene om å avgjøre hvilket tall som passer i den tomme boksen for å gjøre likheten sann. Alle elevene fant det riktige svaret, 5, men de brukte ulike strategier.

c) Hvilke av følgende strategier er riktige? Begrunn svaret ditt.

1) $12 - 7 = 5$, så jeg må finne ut hva jeg trekker fra 10 for å få 5. $10 - 5 = 5$, så da blir svaret 5.
2) 10 er to mindre enn 12 på den andre siden, så da må jeg trekke fra 2 fra 7 for å få det samme, så svaret er 5.
3) Når jeg regner 12 minus 7 så får jeg 5, så 5 må da settes inn i den tomme boksen får å gjøre uttrykket sant.

Figur 4.3: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde spesialisert fagkunnskap (oppgave 2c fra høst 2019).

En elev har løst to likninger slik:

Likning 1:

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$
$$x = 0 \text{ eller } x = -3$$

Likning 2:

$$x^2 + 5x = 6$$
$$x(x+5) = 6$$
$$x = 6 \text{ eller } x = 1$$

f) Har eleven løst likningene riktig? Begrunn svaret ditt.

Figur 4.4: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde spesialisert fagkunnskap (oppgave 2f fra høst 2019).

For å avgjøre om elevers strategier og løsninger fungerer eller gir riktig svar, kreves matematisk analyse og vurdering av elevenes arbeid. Hadde oppgavene kun spurt om elevsvaret var riktig eller galt, uten begrunnelse, hadde den blitt kategorisert som allmenn fagkunnskap ettersom det ville vært tilstrekkelig å selv være i stand til å løse oppgaven korrekt.

Fagdidaktisk kunnskap

Fagdidaktisk kunnskap kombinerer fagkunnskap og pedagogikk. Ball et al. (2008) hevder at kunnskap om faglig innhold og elever/undervisning hører inn under denne kategorien. Dette innebærer kunnskap om hva elever tenker og gjør i matematikk, og kunnskap om hvordan undervise matematikk. Matematikklærere må kunne si noe om hva elever generelt kan tenke i møte med en oppgave; hva som er lett, vanskelig, interessant, motiverende etc., og bestemme hvilke av mange feil og misoppfatninger det er mest sannsynlig at elevene vil gjøre og ha. Ball et al. (2008) hevder at en del av de matematiske oppgavene knyttet til undervisning krever en matematisk kunnskap om designet av instruksjon. Lærere sekvenserer innhold for instruksjon i klasserommet og må være i stand til å vurdere fordeler og ulemper ulike representasjoner kan ha knyttet til spesifikke, matematiske ideer, og hvordan bruken og rekkefølgen av visse eksempler har innflytelse på elevenes læring. Eksamensoppgaver innenfor denne kategorien handler om å forutsi eller gi eksempel på hvordan elever kan løse en gitt oppgave; og gi eksempler på feil, misoppfatninger eller utfordringer elever kan ha; vurdere ulike modeller og representasjoners nytte i undervisning; og å velge eksempler til bruk i undervisning eller for lærerens formål.

Oppgave 7

Elever på 8. trinn fikk følgende oppgave:

Hva betyr uttrykket $xy + 1$?

(A) Legg 1 til y, gang så med x.
(B) Gang x og y med 1.
(C) Legg sammen x og y, legg så til 1.
(D) Gang x med y, legg så til 1.

b) Velg én av svarmulighetene som er feil, og beskriv hvordan elever som valgte dette feilsvaret, kan ha tenkt.

Figur 4.5: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde fagdidaktisk kunnskap (oppgave 7b fra vår 2020).

Oppgave 5

En lærer gir elever følgende oppgave (tallgåte):

> Jeg tenker på et tosifret tall. Summen av sifrene i tallet er 9. Hvis jeg snur rekkefølgen på sifrene, øker tallverdien med 45. Hvilket tall tenker jeg på?

e) Beskriv to muligheter bruk av digitale verktøy kan gi i arbeidet med å løse oppgaver innenfor algebra, som for eksempel tallgåten ovenfor.

Figur 4.6: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde fagdidaktisk kunnskap (oppgave 5e fra vår 2022).

Oppgave 7 tester kunnskap om elevers *generelle* tanker og handler om hvilke forestillinger de tenderer å ha om matematikk. Det handler ikke om en elevs *spesielle* tanke. Hadde oppgaven gått ut på å analysere det matematiske en enkelt elev hadde gjort for å beskrive elevens spesielle tanke, ville den blitt kategorisert som spesialisert fagkunnskap. For å svare på oppgave 5 må en ha kunnskap om det matematiske innholdet som blir presentert og kunnskap om hvordan man som lærer kan bruke eksempler eller verktøy i undervisning, derfor har også denne oppgaven blitt kategorisert til å inneholde fagdidaktisk kunnskap.

Kombinasjoner av undervisningskunnskap

En og samme oppgave kan inneholde ulike aspekter av undervisningskunnskap. Det kan blant annet handle om at enkelte oppgaver kan være to- eller flerdelte. For eksempel må kandidaten avgjøre om et svar er riktig eller galt, for deretter å forklare en metode til elever. Noen situasjoner kan også løses ved ulik bruk av kunnskap, for eksempel en oppgave knyttet til en elevs feil. For å finne ut hva en elev har gjort feil kan en lærer bruke spesialisert fagkunnskap og analysere feilen matematisk. Læreren kan stille seg spørsmål om hvilke steg som ble tatt i løsningen og hvilke antagelser som har ligget til grunn. En annen lærer kan identifisere elevens feil fordi han eller hun har sett elever gjøre samme feil på samme oppgave før. Læreren trenger ikke å analysere feilen matematisk fordi han eller hun er kjent med den type tenkning og bruker derfor fagdidaktisk kunnskap (Ball et al., 2008).

En og samme oppgave kan dermed kategoriseres på ulike måter avhengig av kunnskapen kandidaten som løser den innehar og tar i bruk. Et eksempel på en slik oppgave er:

Oppgave 9

En elev på 8. trinn regnet som vist nedenfor. Beskriv en feiltenkning som kan ligge bak elevens løsning. Erstatt tallene 3 og 4 med variablene x og y, og begrunn algebraisk at oppgaven (generelt sett) er løst feil.

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$$

Figur 4.7: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde alle tre undervisningskunnskaper (oppgave 9 fra høst 2020).

Ball et al. inkluderer kunnskap om elevers tenkning både i spesialisert fagkunnskap og i fagdidaktisk kunnskap (2008). Oppgaven kan løses ved å først analysere elevens løsning for så å resonnere seg frem til hva slags feiltenkning eleven kan ha, noe som hører inn under spesialisert fagkunnskap. Den kan også løses ved å først ta utgangspunkt i ulike feiltenkninger elever kan ha i møte med et matematisk emne, for så gjenkjenne dette i elevens løsning. Da brukes det fagdidaktisk kunnskap. Den aktuelle oppgaven er i tillegg todelt der den andre delen går ut på å erstatte og bevise, noe som gjør at den også kategoriseres som allmenn fagkunnskap.

4.3.2 Bruk av rammeverk for algebraisk aktivitet

Kierans (2004) modell for algebraisk aktivitet består av genererende, transformerende og globale meta-level aktiviteter. Analysen skiller ikke mellom ulike genererende og transformerende aktiviteter: en oppgave kan vurderes til å inneholde genererende og transformerende aktiviteter uten å spesifisere hvilke aktiviteter dette gjelder. Det skilles derimot mellom ulike globale meta-level aktiviteter ettersom disse er tydelig definerte og knyttes til algebraisk tenkning som er temaet for nasjonal deleksamen. For å analysere oppgavene har jeg først vurdert om det er behov for genererende og/eller transformerende aktivitet for å løse den aktuelle oppgaven. Deretter har jeg vurdert hvilke globale meta-level aktiviteter oppgaven krever. Også i denne delen av analysen har kjennetegn fra oversikten over kategoriene blitt brukt til assistanse.

Genererende aktivitet

Genererende aktiviteter kjennetegnes av å lage eller frembringe noe, og å endre representasjonsform. Kieran (2004) beskriver genererende aktiviteter som utformingen av uttrykk og likninger, og å endre representasjonsformer. I tillegg har jeg valgt å inkludere verbale fremstillinger som genererende aktiviteter. Eksamensoppgaver som stimulerer til genererende aktiviteter kan innebære å lage eller utforme et uttrykk, en likning, en formel eller en figur/illustrasjon; representere funksjoner ved graf, tabell, illustrasjoner eller symboler; og verbale fremstillinger. Eksempler på slike oppgaver er:

Oppgave 2

De første leddene i en tallfølge er 7, 12, 19, 28, 39, ...

d) Finn en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen på to ulike måter. Vis framgangsmåtene.

Figur 4.8: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde genererende aktivitet (oppgave 2d fra høst 2022).

Oppgave 1

a) Vis ved hjelp av en illustrasjon og tilhørende ordforklaring hva en funksjon er. Illustrasjonen og ordforklaringen skal være tilpasset elever på 8. trinn.

Figur 4.9: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde genererende aktivitet (oppgave 1a fra høst 2022).

Felles for disse oppgavene er at noe skal genereres. I oppgave 2 skal kandidaten frembringe en formel og i oppgave 1 skal kandidaten lage en illustrasjon med ordforklaringer. Oppgavene kategoriseres derfor begge til å som inneholde genererende aktivitet.

Transformerende aktivitet

Transformerende aktiviteter kjennetegnes av såkalt «regel-basert» algebra og manipulasjon av uttrykk og likninger. Ifølge Kieran (2004) sentrerer en god del av denne aktiviteten seg rundt å endre på formen av et uttrykk eller en likning for å opprettholde ekvivalens. Eksamensoppgaver som stimulerer til transformerende aktiviteter kan handle om å løse en likning eller ulikhet; manipulere et uttrykk eller en formel, eller forkorte en brøk; kunnskap om regler; og erstatte. Eksempler på slike oppgaver er:

Oppgave 8

I LK20 er et kompetansemål etter 5. trinn at elevene skal forklare hva det vil si at et tall er en løsning på en likning.

b) Vis på to ulike måter at $x = 3$ er en løsning på likningen $2x + 4 = 10$.

Figur 4.10: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde transformerende aktivitet (oppgave 8b fra høst 2022).

Oppgave 4

For å undersøke elevenes forståelse av prioriteringsreglene for matematiske operasjoner ga læreren fire oppgaver. En elev kom fram til følgende (svarene er skrevet med håndskrift):

i) $7 \cdot 2 - 6 + 3 = 5$

ii) $9 - 5 + (16 : 8) = 2$

iii) $9 + 24 : 3 - 1 = 16$

iv) $17 - (3 + 7 \cdot 2) = 0$

Avgjør om svaret på hver oppgave i)–iv) er riktig eller feil, og beskriv hvordan eleven kan ha tenkt.

Figur 4.11: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde genererende aktivitet (oppgave 4 fra høst 2022).

Oppgave 8 kan løses gjennom transformerende aktiviteter blant annet ved å erstatte den ukjente i likningen med 3 for å se at ekvivalensen opprettholdes, og ved å løse likningen. For å avgjøre om svarene i oppgave 4 er rette eller gale må kandidaten ha kunnskap om regler og manipulasjoner som er gyldige i algebra, og evnen til å løse disse riktig. Begge oppgavene kategoriseres derfor som transformerende.

Genererende og transformerende aktiviteter

Noen oppgaver legger både til rette for genererende og transformerende aktivitet. Det kan være oppgaver der kandidaten tar i bruk begge for å finne en løsning, og det kan være oppgaver der kandidaten kan velge en av de to. Slike oppgaver blir kategorisert i begge kategoriene.

Oppgave 5

En lærer gir elever følgende oppgave (tallgåte):

Jeg tenker på et tosifret tall. Summen av sifrene i tallet er 9. Hvis jeg snur rekkefølgen på sifrene, øker tallverdien med 45. Hvilket tall tenker jeg på?

a) Finn svaret på tallgåten på to måter, ved å
   i) utforske de tosifrete tallene som har siffersummen (tverrsummen) 9,
   ii) sette opp et likningssystem og løse oppgaven algebraisk.

Figur 4.12: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde genererende og transformerende aktivitet (oppgave 5a ii) fra vår 2022).

c) Avgjør for hver av i)–iv) om x og y er omvendt proporsjonale størrelser. Begrunn svarene dine.

i) $y = \frac{4{,}5}{x}$

ii) $x = \frac{4}{y}$

iii) $xy - 8 = 0$

iv) $y = \frac{10}{x+5}$

Figur 4.13: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde genererende og transformerende aktivitet (oppgave 1c fra høst 2022).

Oppgave 5 a) i) og 5 a) ii) er behandlet som to separate oppgaver ettersom de blir vurdert med poeng uavhengig av hverandre. Oppgave 5 a) ii) er et eksempel på en oppgave som både inneholder genererende og transformerende aktivitet. Kandidaten må først sette opp et likningssystem, som er en genererende aktivitet, før oppgaven løses gjennom transformerende aktiviteter som å erstatte og manipulere. Oppgave 1 c) på figur 4.14 er et eksempel på en oppgave der det er flere måter å komme frem til korrekt svar. For å finne ut om x og y er omvendt proporsjonale kan en manipulere uttrykkene, noe som er en transformerende aktivitet. En kan også velge å løse oppgaven gjennom tallutforskning ved å innsette x og y i en tabell, noe som er en genererende aktivitet.

Global meta-level aktivitet

Globale meta-level aktiviteter legger til rette for algebraisk tenkning og er aktiviteter som ikke nødvendigvis krever algebra, men der bokstav-algebra kan brukes som verktøy. Kieran (2004) hevder at slike globale meta-level aktiviteter er essensielle for transformerende og spesielt genererende aktiviteter, og er det som gjør algebra meningsfullt. Problemløsning, modellering, legge merke til struktur, studere endring, generalisering, analysere forhold, begrunne, bevise og forutsi er aktiviteter hun inkluderer i denne kategorien og som er sentrale for algebraisk tenkning. For å kunne si noe om hva slags algebraisk tenkning en finner igjen i oppgavene har jeg valgt å bruke disse aktivitetene som underkategorier til kategoriseringen av oppgavene. Begrepene er definert i teorikapittelet, i tillegg til at en beskrivelse av hver av dem er inkludert i oversikten jeg utformet over algebraisk aktivitet (vedlegg B)

En og samme oppgave kan inneholde flere meta-level aktiviteter. Oppgave 3 b) har blitt vurdert til å inneholde de fire meta-level aktivitetene: legge merke til struktur, generalisere, begrunne og bevise. For å begrunne ved å bevise at påstanden gjelder for to vilkårlige oddetall, må kandidaten studere strukturen av et oddetall og legge merke til hvordan det kan uttrykkes generelt.

Oppgave 3

En ungdomsskoleklasse arbeider med å undersøke strukturer i tallsystemet. En elev påstår at *«når jeg multipliserer et oddetall med et annet oddetall blir det et oddetall»*.

b) Vis hvordan du som lærer vil begrunne algebraisk om elevpåstanden gjelder for to vilkårlige oddetall.

Figur 4.14: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde meta-level aktivitetene legge merke til struktur, generalisere, begrunne og bevise (oppgave 3b fra høst 2022).

4.4 Reliabilitet og validitet

Forskningens kvalitet bestemmes i all hovedsak ut fra hvordan kunnskapen er konstruert og produsert, og for å kunne bedømme kvalitet må forskeren beskrive dette på en kritisk måte (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 219-220). Reliabilitet og validitet er sentrale begreper i denne sammenheng og inngår som kriterier i studiens samlede troverdighet. Reliabilitet går ut på forskningens pålitelighet og handler om dataen som har blitt samlet inn og hvordan jeg som forsker har påvirket resultatene mine. Validitet går ut på forskningens gyldighet og handler om hvilke begrensinger som er knyttet til forskningen og hvilke konklusjoner dataen gir dekning for å trekke (Postholm & Jacobsen, 2018).

Reliabilitet

Reliabilitet er et viktig kriterium for vurdering av datakvaliteten i en studie. I denne studien har jeg foretatt en kvalitativ innholdsanalyse av dokument i form av tekst. Samtlige åtte nasjonale deleksamen som danner datagrunnlaget mitt er tilgjengelige på NOKUT sine nettsider. Teksten som analyseres er stabil og blir ikke påvirket av gjentatte analyser. Teoretisk sett skal det derfor være mulig å undersøke de samme dokumentene og få de samme resultatene. Innholdsanalysen jeg har gjort kan ligne kvantitativ innholdsanalyse ved at jeg har tydelige kategorier som fungerer som hovedkoder, og kjennetegn på oppgavetyper som fungerer som underkoder. Med unntak av underkategoriene for meta-level aktivitet, er ikke underkodene en del av den formelle analysen og jeg har ikke laget kodeskjema med kodeinstruks slik som er vanlig praksis ved kvantitativ innholdsanalyse (Grønmo, 2004). Jeg har forsøkt å øke studiens reliabilitet ved å være transparent på hvordan modellene og begrepene til Ball et al. (2008) og Kieran (2004) har blitt tolket, hvilke kriterier som har blitt lagt til grunn for kategoriene og grunngi valgene jeg har tatt slik at andre som ønsker å undersøke det samme vet hva jeg har gjort.

Et problem som er typisk for kvalitativ innholdsanalyse er at forskerens perspektiv påvirker tolkningen av tekstene (Grønmo, 2004, s. 201). Som forsker er det viktig å være bevisst på egen subjektivitet i analysen og tolkning av data (Fadum & Tellefsen, 2022). Gjennom utvikling av det teoretiske rammeverket og kriterier for de ulike kategoriene driver jeg både tolkning av teori og tolkning av oppgavene på nasjonal deleksamen. Andre forskere vil kunne komme til andre slutninger ettersom deres tolkning vil kunne være ulik min. Som forsker kan jeg aldri bli helt objektiv når det gjelder min egen subjektivitet, men det er viktig at jeg er bevisst dette og formidler subjektiviteten min som en del av konteksten funnene kan forstås innenfor (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 220). Jeg skal likevel ikke være *helt* subjektiv slik at jeg driver med ren synsing, det vil være uinteressant for leseren. Dette har jeg prøvd å unngå ved å lage klare rammer til rammeverket og begrunne begreper og fenomener ved hjelp av eksisterende og anerkjent teori.

Validitet

Validitet refererer til datamaterialets gyldighet i forhold til problemstillingen som skal belyses (Grønmo, 2004). Om den innsamlede dataen er relevant for det jeg har til hensikt å studere, kan validiteten vurderes som tilfredsstillende. Forskningsspørsmålet i denne studien er: *Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?.* Ettersom jeg analyserer samtlige eksamenssett som er laget innen denne studien ble gjennomført, er det grunnlag for å kunne generalisere resultatene. Ut ifra det teoretiske rammeverket jeg har utviklet kan jeg si noe generelt om det didaktiske og algebraiske faginnholdet på nasjonal deleksamen i algebra for GLU 5-10, men jeg kan ikke si noe om andre eksamener, andre matematiske emner eller ut ifra andre teoretiske rammeverk. Ettersom jeg baserer rammeverket på begrepene til Ball et al. (2008) og Kieran (2004), er det ikke alt av faginnhold som avdekkes i denne studien. Ved bruk av andre teoretiske rammeverk kunne jeg sagt noe om annet faginnhold, men da måtte forskningsspørsmålet også vært formulert annerledes.

4.5 Etiske betraktninger

Som forsker er det noen etiske prinsipper en må ta hensyn til. Datagrunnlaget til denne studien er samtlige åtte nasjonale deleksamener i algebra for GLU 5-10 utviklet av NOKUT. Disse er å finne på NOKUT sine nettsider. Studien har ikke vært meldepliktig til NSD ettersom jeg ikke har behandlet personopplysninger eller sensitiv informasjon. Jeg har ikke hatt direkte kontakt med informanter. Ved dokumentanalyse er det likevel hensyn en må ta som forsker. I de nasjonale forskningsetiske retningslinjene stilles det blant annet krav til redelighet og god henvisningsskikk. God henvisningsskikk innebærer å anerkjenne andres arbeid og henvise nøyaktig til alle kilder som tas i bruk, noe som sikrer krav til etterprøvbarhet og gir grunnlag for videre forskning (NESH, 2021).

Til forskere stilles det også krav til riktig presentasjon av data. (Postholm & Jacobsen, 2018). Forfalskning, fabrikkering og plagiering er alvorlige brudd på god vitenskapelig praksis. Fordreie og fortie relevante tolkninger og analyser er også uforenelig med god vitenskapelig praksis (NESH, 2021). Kategoriseringen av hver eneste oppgave har blitt gransket ved flere anledninger i løpet av denne studien for å sikre presise og pålitelige data. Ved å sammenligne oppgavetyper og kategorisering på tvers av eksamenssettene har jeg avdekket og rettet opp i tilfeller der jeg ikke har vært konsekvent. Både hver forekomst av de ulike kategoriene og hver oppgave har blitt talt opp og plassert i forskjellige tabeller og krysstabeller.

5.0 Resultater

I dette kapittelet vil resultatene fra dokumentanalysen bli presentert. Analysen er basert på totalt 150 oppgaver fra åtte nasjonale deleksamener og tabell 5.1 viser fordelingen av disse. Rammeverket som ligger til grunn for analysen fokuserer på ulike aspekter ved oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra. UKM-modellen til Ball et al. (2008) er brukt til å identifisere undervisningskunnskapen oppgavene etterlyser, og selv om modellen gjelder for matematikk blir ikke det algebraiske innholdet vurdert. Modellen for algebraisk aktivitet fokuserer derimot på oppgavenes algebraiske innhold, og det er spesielt de globale meta-level aktivitetene som kan knyttes til algebraisk tenkning. På bakgrunn av dette vil resultatene av dataanalysen for UKM og algebraisk aktivitet presenteres separat. Kapittelet er bygd opp av fire deler der den første tar for seg resultatene knyttet til UKM, den andre tar for seg resultatene knyttet til algebraisk aktivitet, den tredje tar for seg noen sammenhenger mellom UKM og algebraisk aktivitet, og den siste oppsummerer de viktigste resultatene fra hele kapittelet.

Antall deloppgaver	
Vår 2023	19
Høst 2022	21
Vår 2022	21
Høst 2021	19
Vår 2021	18
Høst 2020	17
Vår 2020	15
Høst 2019	20
SUM	150

Tabell 5.1: Oversikt over antall deloppgaver i eksamenssettene.

5.1 Resultater av undervisningskunnskap

Samtlige 150 oppgaver krever undervisningskunnskap i matematikk for å løses og med utgangspunkt i Ball et al. (2008) sine begreper i UKM-modellen har oppgavene enten blitt vurdert til å inneholde allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap, fagdidaktisk kunnskap, eller som en kombinasjon av disse. De tre formene for kunnskap vil i denne sammenheng også omtales som kategorier for kategoriseringen. Resultatene av analysen gjort med utgangspunkt i UKM, vil ta for seg forekomsten av kategoriene og kombinasjoner av disse, i tillegg til likheter og forskjeller mellom eksamenssettene.

5.1.1 Forekomsten av undervisningskunnskap i matematikk

Tabell 5.2 viser forekomsten av de tre kategoriene for undervisningskunnskap på hver deleksamen. Samme kategori kan kun forekomme én gang per oppgave, men samme oppgave kan inneholde flere kategorier. Det forklarer hvorfor det totale antall forekomster er 201 på 150 oppgaver.

Forekomsten av undervisningskunnskap				
	Allmenn fagkunnskap	Spesialisert fagkunnskap	Fagdidaktisk kunnskap	Antall forekomster
Vår 2023	9	10	10	29
Høst 2022	15	7	5	27
Vår 2022	17	6	5	28
Høst 2021	10	8	6	24
Vår 2021	13	5	5	23
Høst 2020	13	5	9	27
Vår 2020	7	6	7	20
Høst 2019	14	6	3	23
SUM	98	53	50	201

Tabell 5.2: Forekomsten av undervisningskunnskap i eksamenssettene.

Summen på nederste rad viser totale antall forekomster av hver kategori over alle eksamenssettene. 98 av 150 oppgaver kan løses ved bruk av allmenn fagkunnskap, dette tilsvarer omtrent 65,3% av alle oppgavene og er langt mer enn de to andre kategoriene. Spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap forekommer omtrent like mange ganger og henholdsvis 35,3% og 33,3% av alle oppgavene kan løses ved bruk av disse undervisningskunnskapene.

Kolonnen til høyre viser det totale antall forekomster på hver eksamen og sier noe om hvor rikt eller omfattende et eksamenssett er. Tabellen viser en tendens til at eksamenssettenes innhold av undervisningskunnskap blir rikere eller mer omfattende over tid. Her må det tas et forbehold ettersom spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap kan forekomme på samme oppgave som omhandler elevers løsninger, selv om kandidaten kun trenger å ta i bruk en av kunnskapene for å løse oppgaven.

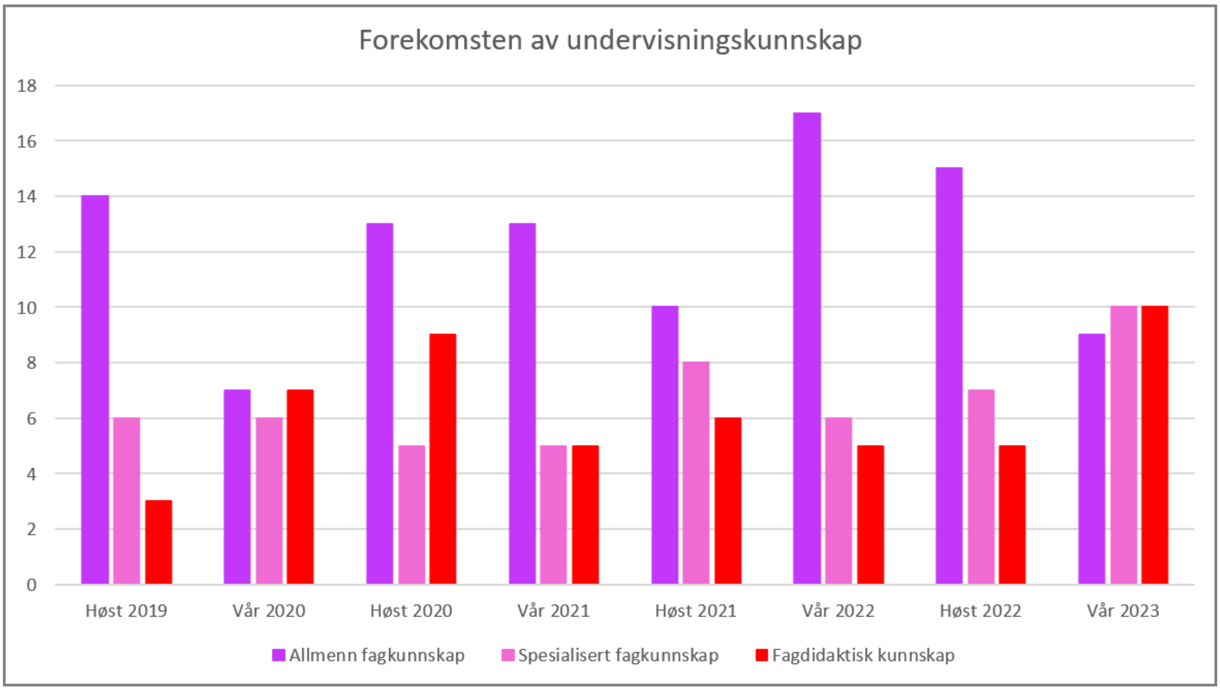


Diagram 5.1: Forekomsten av undervisningskunnskap i eksamenssettene.

Diagram 5.1 illustrerer forekomsten av de ulike kategoriene på hver deleksamen. Allmenn fagkunnskap er kategorien som forekommer mest på de fleste eksamenssettene, men variasjonen er stor. På eksamenssettene der forekomsten av allmenn fagkunnskap er høyest, er spriket til kategorien med nest flest forekomster størst. Dette tyder på at en vektlegging av allmenn fagkunnskap på eksamenssettene går ut over forekomsten av de andre kategoriene. Eksamenssettene som har de færreste forekomstene av allmenn fagkunnskap, har en jevnere fordeling av kategorier og et mindre sprik mellom kategoriene med flest, nest flest og færrest forekomster. Spesielt vår 2020 og vår 2023 skiller seg ut blant eksamenssettene med en svært jevn fordeling av undervisningskunnskap.

5.1.2 Kombinasjoner av undervisningskunnskap i matematikk

Kombinasjoner av undervisningskunnskap								
	Kun allmenn fagkunnskap	Kun spesialisert fagkunnskap	Kun Fagdidaktisk kunnskap	Allmenn og spesialisert fagkunnskap	Spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Allmenn fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Antall oppgaver
Vår 2023	5	3	2	1	5	2	1	19
Høst 2022	13	2	1	1	3	0	1	21
Vår 2022	13	1	2	2	1	0	2	21
Høst 2021	10	3	1	0	5	0	0	19
Vår 2021	10	3	0	0	2	3	0	18
Høst 2020	7	1	0	0	3	5	1	17
Vår 2020	6	2	2	0	4	1	0	15
Høst 2019	13	4	0	0	2	1	0	20
SUM	77	19	8	4	25	12	5	150

Tabell 5.3: Kombinasjoner av undervisningskunnskap i eksamenssettene. Tallene indikerer antall oppgaver.

Samtlige oppgaver er sortert i tabell 5.3 ut ifra hvilke kategorier av undervisningskunnskap de inneholder. Her er kombinasjoner av kategorier hensyntatt. Av totalt 150 oppgaver inneholder 104 kun én kategori, 41 inneholder to kategorier og fem inneholder alle tre kategoriene. Av totalt 98 oppgaver som inneholder allmenn fagkunnskap, inneholder 77 av disse *kun* denne kategorien, noe som tyder på at allmenn fagkunnskap ofte opptrer alene i oppgavene. Dette betyr at de resterende 73 oppgaver tester undervisningskunnskap som er spesielt knyttet til det å være lærer, enten de inneholder spesialisert fagkunnskap, fagdidaktisk kunnskap eller begge. Av oppgavene som inneholder disse undervisningskunnskapene, er det relativt få som *kun* inneholder spesialisert fagkunnskap eller fagdidaktisk kunnskap. Spesialisert fagkunnskap, og spesielt fagdidaktisk kunnskap, opptrer dermed ofte i kombinasjon med andre kategorier og tabellen viser at kombinasjonen av disse to er den mest populære kombinasjonen av undervisningskunnskap med 25 tilfeller. I spesifikke oppgaver som omhandler elevers løsninger kan disse to undervisningskunnskapene forekomme samtidig selv om kandidaten kun trenger å ta i bruk en av dem. Det kan forklare hvorfor denne kombinasjonen er så stor. Totalt 50 oppgaver kan løses ved bruk av fagdidaktisk kunnskap og på åtte av disse er dette den eneste kategorien av undervisningskunnskap. Det betyr at 142 av 150 oppgaver, tilnærmet 94,7%, kan løses ved bruk av fagkunnskap, enten det er allmenn eller spesialisert. Dette indikerer at kandidatene i høy grad testes i fagkunnskap på nasjonal deleksamen i algebra.

5.1.3 Spesifikke oppgavetyper

Noen typer innhold i eksamenssettene er studert nærmere. Dette gjelder oppgaver som omhandler elevers strategier og løsninger, oppgaver som omhandler eksempeloppgaver gitt til elever, og oppgaver som omhandler digitale verktøy.

Elevers strategier og løsninger

Totalt 32 av 150 oppgaver innebærer å vurdere eller analysere elevers strategier eller løsninger på en måte som gjør at spesialisert fagkunnskap og/eller fagdidaktisk kunnskap er nødvendig. Oppgave 7 fra vår 2022 er et eksempel på en slik oppgave og er vurdert til å inneholde spesialisert fagkunnskap fordi kandidaten må analysere stegene i elevens løsning for å avgjøre hvorvidt påstandene beskriver feil.

Oppgave 7

En lærer ber elever forenkle følgende algebraiske uttrykk:

$$\frac{2(a+1)}{3a} + 3 - \frac{2}{3a} - \frac{6a-2}{6} =$$

En elev kom fram til følgende feil løsning:

$$\frac{2(a+1)}{3a} + 3 - \frac{2}{3a} - \frac{6a-2}{6}$$

$$= \frac{2a+2}{3a} + 3 - \frac{2}{3a} - \frac{6a}{6} + \frac{2}{6}$$

$$= \frac{2a}{3a} + \frac{2}{3a} - \frac{2}{3a} + 2\frac{6}{6} + \frac{2}{6} - a$$

$$= \frac{2}{3} + 2\left(\frac{6}{6} + \frac{1}{6}\right) - a$$

$$= \frac{2}{3} + 2\frac{7}{6} - a$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{14}{6} - a$$

$$= \frac{18}{6} - a$$

$$= 3 - a$$

Avgjør for hver påstand i) – iv) om den beskriver en feil ved elevens løsning.
Avgjør deretter hvilken av påstandene som best beskriver hva som er feil ved elevens løsning.
Du behøver ikke å begrunne svarene dine.

i) Eleven bruker den distributive loven feil.
ii) Eleven blander sammen faktorer og skrivemåten for blandet tall.
iii) Eleven glemmer noen steder å forkorte felles faktorer.
iv) Eleven må bruke en mer formell prosedyre for å finne fellesnevneren før leddene adderes.

Figur 5.1: Eksempel på oppgave som innebærer å vurdere en elevs løsning (oppgave 7 fra vår 2022).

Av de 32 oppgavene har 16 blitt vurdert til å inneholde spesialisert fagkunnskap, uten å inneholde fagdidaktisk kunnskap. Dette er oppgaver som innebærer å begrunne gyldigheten av elevers strategier eller løsninger. Slike oppgaver kan dermed løses ved bruk av matematiske ferdigheter og kunnskaper. Tre oppgaver er vurdert til å inneholde fagdidaktisk kunnskap, uten å inneholde spesialisert fagkunnskap. Dette er oppgaver som handler om å beskrive hvordan elever kan tenke i møte med spesifikke oppgaver. For disse oppgavene er det nødvendig med kunnskap om elever og læring. 13 oppgaver er vurdert til å både inneholde spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Dette er oppgaver som blant annet innebærer å beskrive elevers tenkning på bakgrunn av deres løsningsmetode, men det kan også være todelte oppgaver der kandidaten både skal identifisere feil eller vurdere strategi og forklare eller hjelpe elever til å forstå noe. Oppgaver som innebærer å vurdere elevers påstander, der påstandene ikke gir uttrykk for elevers egne strategier eller løsninger, er ikke inkludert i disse 32 oppgavene dersom de kan løses ved bruk av kun allmenn fagkunnskap.

Eksempeloppgaver

I alle eksamenssettene blir kandidatene presentert for eksempeloppgaver som er tilpasset elever og som det antyder bruk i undervisning. På disse oppgavene kan kandidaten blant annet bli bedt om å løse oppgaven selv, enten helt eller delvis, vurdere elevers løsninger av oppgaven, eller tilpasse forklaringer eller løsninger til elever ut ifra oppgaven. En slik oppgave kan for eksempel være representert med oppgave 2 fra høst 2021:

Oppgave 3

Denne oppgaven ble gitt til elever på 8. trinn:

> Et 40 cm langt trestykke ble kuttet i tre deler. Uttrykkene nedenfor representerer lengdene (i cm) til de tre delene:
>
> $$x + 6$$
>
> $$2x - 5$$
>
> $$x + 7$$
>
> Hvor lang er den lengste delen (i cm)?

Elever kan møte ulike utfordringer når de løser oppgaven.

b) Gi to eksempler på slike utfordringer.

Figur 5.2: Eksempel på oppgave som innebærer å vurdere en eksempeloppgave (oppgave 3b fra høst 2021).

Jeg har sett nærmere på oppgavene som innebærer at kandidaten skal *vurdere* eksempeloppgaver. Oppgaven må altså inneholde en eksempeloppgave i oppgaveteksten i tillegg til at kandidaten skal; vurdere hvordan elever kan tenke i møte med en gitt oppgave, for eksempel hvilke feiltenkninger som kan avdekkes; vurdere bruk av eksempeloppgaver i undervisning, for eksempel hvilken av flere eksempeloppgaver som passer for lærerens formål; eller beskrive hvordan en kan få elever til å forstå elementer ved en gitt eksempeloppgave. I slike oppgaver skal ikke kandidaten vurdere elevers løsninger, men selve eksempeloppgaven. Totalt 22 av 150 oppgaver er vurdert til å innebære eksempeloppgaver som kandidatene skal vurdere. seks av disse gikk ut på å vurdere en eksempeloppgave for å si noe om elevers tenkning eller mulige løsninger, 11 innebar å vurdere bruk av eksempeloppgaver i undervisning og fem handlet om hvordan en som lærer kunne forklare noe for elever med utgangspunkt i en gitt eksempeloppgave. Samtlige 22 oppgaver er også vurdert til å inneholde fagdidaktisk kunnskap, åtte i kombinasjon med allmenn fagkunnskap, syv i kombinasjon med spesialisert fagkunnskap, og én i kombinasjon med både allmenn og spesialisert fagkunnskap. Seks av oppgavene inneholder kun fagdidaktisk kunnskap.

Digitale verktøy

Totalt åtte oppgaver fordelt på fem eksamenssett innebærer bruk av eller vurdering av digitale verktøy. På tre av eksamenssettene blir kandidatene ikke prøvd i digitale verktøy overhodet. Dette tyder på at NOKUT i svært liten grad prioriterer å prøve studentenes algebraiske tenkning eller evne til å arbeide med algebra i forbindelse med digitale verktøy. Oppgave 2 fra høst 2021 er et eksempel på en slik oppgave.

Oppgave 2

Elever på 8. trinn arbeider med å utforske grafer til lineære funksjoner.

Lag en oppgave der elevene skal bruke et dynamisk geometriprogram til å utforske stigningstall og konstantledd til lineære funksjoner. Lag et løsningsforslag til oppgaven. Løsningsforslaget skal inneholde bilder av utforskingen i det dynamiske geometriprogrammet.

Figur 5.3: Eksempel på oppgave som innebærer bruk av digitale verktøy (oppgave 2 fra høst 2021).

Med unntak av én oppgave fra vår 2023 som omhandlet Chat GPT, finner vi resten av oppgavene på vår 2022, høst 2021, vår 2021 og høst 2020. Det disse fire eksamenssettene har til felles er at de, på grunn av COVID-19, alle var hjemmeeksamener der alle hjelpemidler var tillatt. Disse syv oppgavene omhandler enten regneark eller dynamiske geometriprogram/graftegningsverktøy. Blant disse åtte oppgavene er det tre forekomster av allmenn fagkunnskap, tre forekomster av spesialisert fagkunnskap og fire forekomster av fagdidaktisk kunnskap, det er dermed ikke funnet noen sammenheng mellom enkelte undervisningskunnskaper og oppgaver som omhandler digitale verktøy.

5.2 Resultater av algebraisk aktivitet

Samtlige Den første delen i dette delkapittelet ser kun på genererende og transformerende aktivitet der de fleste oppgaver stimulerer til enten genererende eller transformerende aktivitet, eller en kombinasjon av begge. Den andre delen ser på globale meta-level aktiviteter. Det er ni globale meta-level aktiviteter og nesten samtlige oppgaver inneholder en eller flere av disse. En tredje og siste del ser på sammenhenger mellom genererende, transformerende og globale meta-level aktiviteter. Samtlige algebraiske aktiviteter vil omtales som kategorier.

5.2.1 Forekomsten av genererende og transformerende algebraisk aktivitet

I likhet med kategoriene for undervisningskunnskap, kan kategoriene genererende og transformerende aktivitet kun forekomme én gang per oppgave og samme oppgave kan inneholde begge kategoriene. Totale antall forekomster av disse to typene algebraisk aktivitet er 174 på 150 oppgaver. Tabell 5.4 viser en oversikt over hvordan disse forekomstene har fordelt seg på samtlige eksamenssett.

Forekomsten av genererende og transformerende algebraisk aktivitet			
	Genererende aktivitet	Transformerende aktivitet	Antall forekomster
Vår 2023	14	6	20
Høst 2022	15	7	22
Vår 2022	13	8	21
Høst 2021	14	11	25
Vår 2021	13	9	22
Høst 2020	11	11	22
Vår 2020	8	8	16
Høst 2019	12	14	26
SUM	100	74	174

Tabell 5.4: Forekomsten av genererende og transformerende algebraisk aktivitet i eksamenssettene.

Totalt sett stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra mer til genererende enn transformerende aktivitet. Det samlede antallet forekomster av genererende og transformerende aktivitet på hver eksamen sier noe om hvor *mye* algebraisk aktivitet det forventes av studentene. Også her kan noen få oppgaver løses ved bruk av enten transformerende eller genererende aktivitet, og har derfor blitt talt opp til å inneholde begge aktivitetene. Det er ingen tydelig trend i forbindelse med antall forekomster på hver eksamen over tid, men studeres antall forekomster av genererende og transformerende aktivitet hver for seg, er det funnet noen klare tendenser. Diagram 5.2 illustrer forekomsten av genererende og transformerende aktivitet.

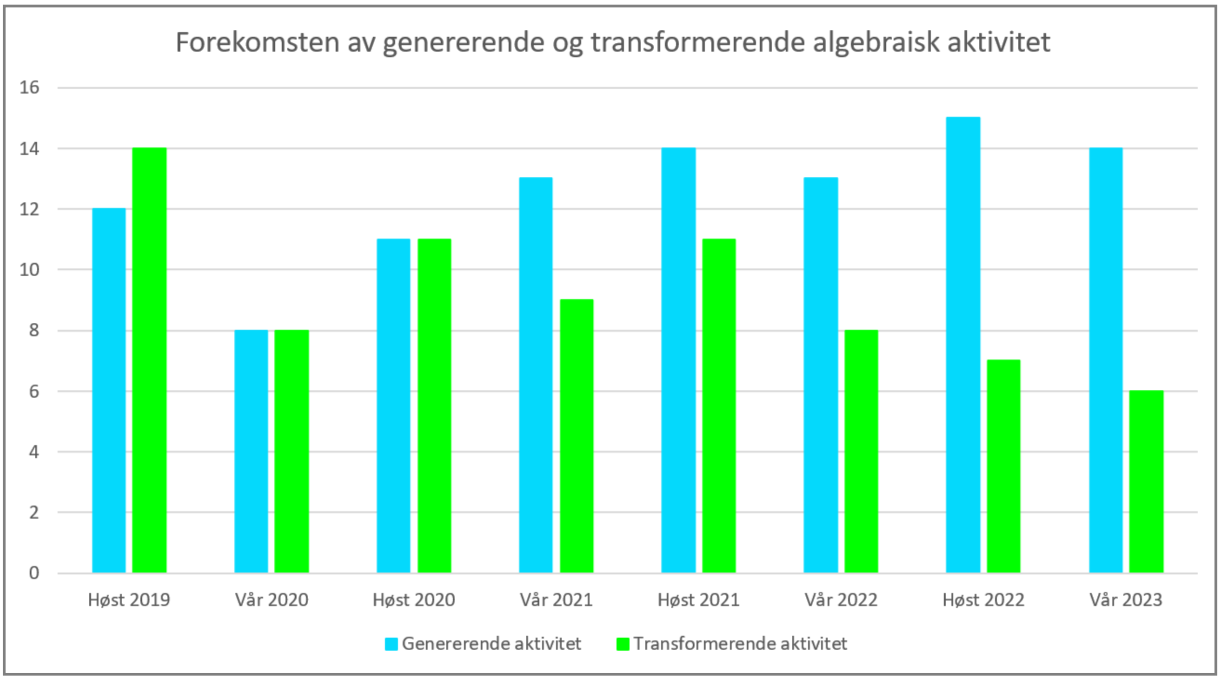


Diagram 5.2: Forekomsten av genererende og transformerende algebraisk aktivitet i eksamenssettene.

Diagrammet viser at det er en del variasjon mellom eksamenssettene. Forekomsten av genererende aktivitet er høyere eller lik forekomsten av transformerende aktivitet på syv av åtte eksamener, med høst 2019 som det eneste unntaket. De to neste eksamenssettene, vår 2020 og høst 2020, har like mange forekomster av begge aktivitetene. Resterende eksamener inneholder flere forekomster av genererende aktivitet enn transformerende aktivitet og spriket mellom disse øker over tid med en differanse som er på sitt høyeste høsten 2022 og våren 2023. Det er altså en utvikling over tid der spriket mellom de to blir større. Dette tyder på at studentene i økende grad testes i genererende aktiviteter og i minkende grad testes i transformerende aktiviteter på nasjonal deleksamen i algebra. Diagram 5.3 viser andelen oppgaver som inneholder genererende aktivitet og andelen oppgaver som inneholder transformerende aktivitet i prosent. To trendlinjer viser hvordan andelen oppgaver som inneholder genererende aktivitet øker og andelen oppgaver som inneholder transformerende aktivitet minker.

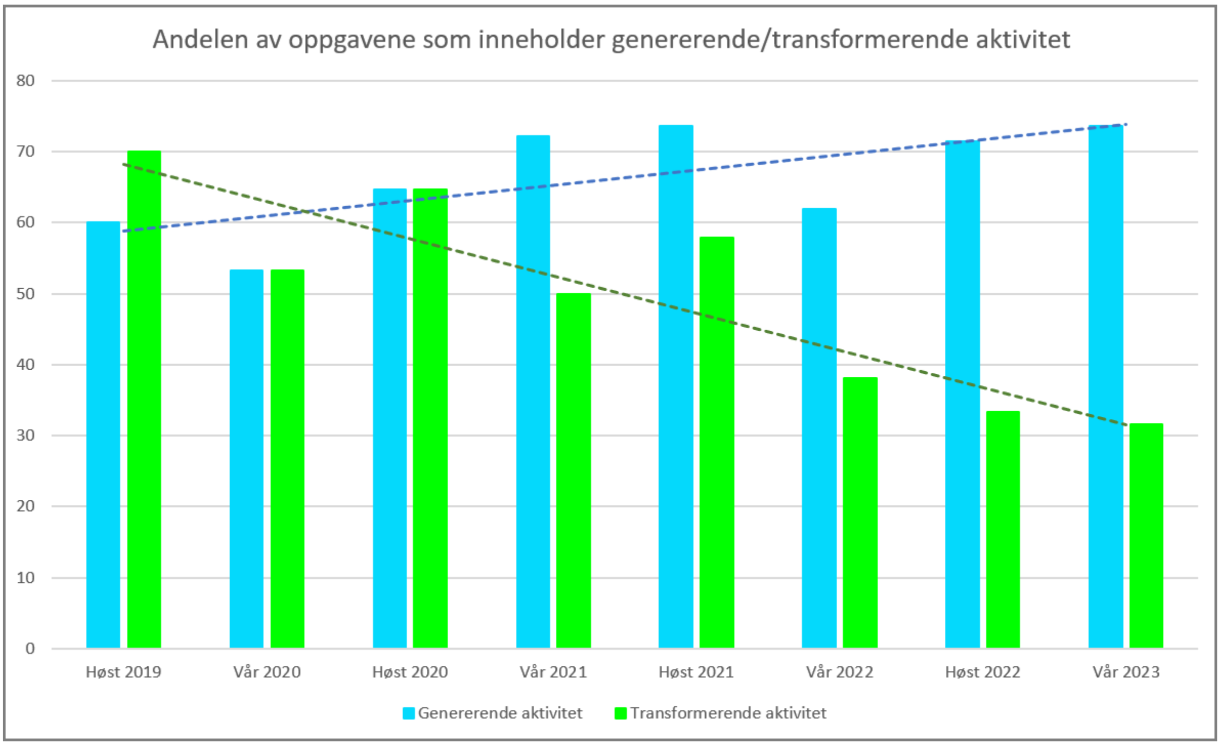


Diagram 5.3: Andelen av oppgavene som inneholder genererende/transformerende aktivitet i eksamenssettene.

Kombinasjoner av genererende og transformerende algebraisk aktivitet					
	Kun genererende aktivitet	Kun transformerende aktivitet	Genererende og transformerende aktivitet	Verken genererende eller transformerende aktivitet	Antall oppgaver
Vår 2023	11	3	3	2	19
Høst 2022	12	4	3	2	21
Vår 2022	11	6	2	2	21
Høst 2021	7	4	7	1	19
Vår 2021	9	5	4	0	18
Høst 2020	6	6	5	0	17
Vår 2020	5	5	3	2	15
Høst 2019	6	8	6	0	20
SUM	67	41	33	9	150

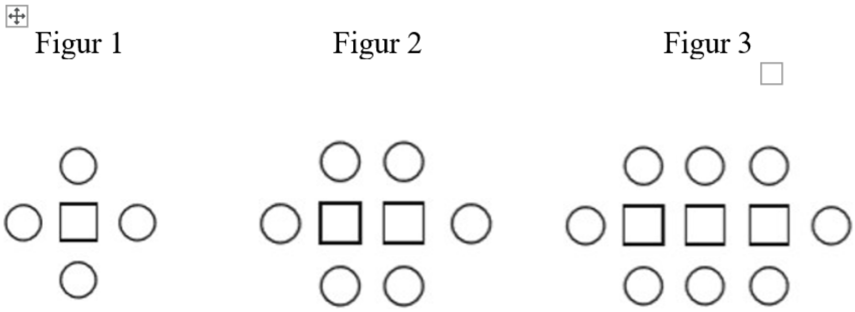
Tabell 5.5: Kombinasjoner av genererende og transformerende algebraisk aktivitet. Tallene indikerer antall oppgaver.

Tabell 5.5 viser hvor mange oppgaver som inneholder kun genererende aktivitet, kun transformerende aktivitet, eller en kombinasjon av begge. Av totalt 150 oppgaver inneholder 108 én aktivitet og 33 begge aktivitetene. I de fleste oppgavene som har blitt kategorisert til å inneholde begge aktivitetene er det behov for bruk av begge aktivitetene for å løse oppgaven, men noen få oppgaver der kandidaten kan velge mellom genererende og transformerende aktivitet for å løse oppgaven har også blitt kategorisert til å inneholde begge aktivitetene. Av 100 oppgaver som stimulerer til genererende aktivitet, inneholder 67 av disse kun til denne aktiviteten, noe som tilsvarer omtrent 44,7% av samtlige oppgaver. 41 av 74 oppgaver som stimulerer til transformerende aktivitet inneholder kun denne aktiviteten, noe som tilsvarer omtrent 27,3% av samtlige oppgaver. Svært få oppgaver stimulerer verken til genererende eller transformerende aktivitet, men tabellen viser at slike oppgaver har blitt mer vanlig de siste årene. Oppgave 6 b) fra vår 2022 er et eksempel på en oppgave som verken inneholder genererende eller transformerende algebraisk aktivitet.

Oppgave 6

Følgende figurtalloppgave ble gitt til elever på mellomtrinnet:

Figurene nedenfor viser hvordan bord og stoler settes sammen etter et mønster. For eksempel er figur 1 satt sammen av ett bord og fire stoler. Vi tenker oss at mønsteret fortsetter utover de tre første figurene.



Hvordan kan vi regne ut antall stoler når antall bord er kjent?

b) Ta utgangspunkt i læreplanen i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05) i LK20 til å gi to begrunnelser for at slike figurtalloppgaver passer på mellomtrinnet. Henvis tydelig til læreplanen.

Figur 5.4: Eksempel på oppgave som verken inneholder genererende eller transformerende aktivitet (oppgave 6b fra vår 2022).

5.2.2 Forekomsten av globale meta-level aktiviteter

I motsetning til kategoriene for undervisningskunnskap og genererende og transformerende algebraisk aktivitet, kan samme oppgave inneholde flere globale meta-level aktiviteter. Det totale antall forekomster av meta-level aktiviteter er 337 over 150 oppgaver. Diagram 5.4 viser fordelingen av disse.

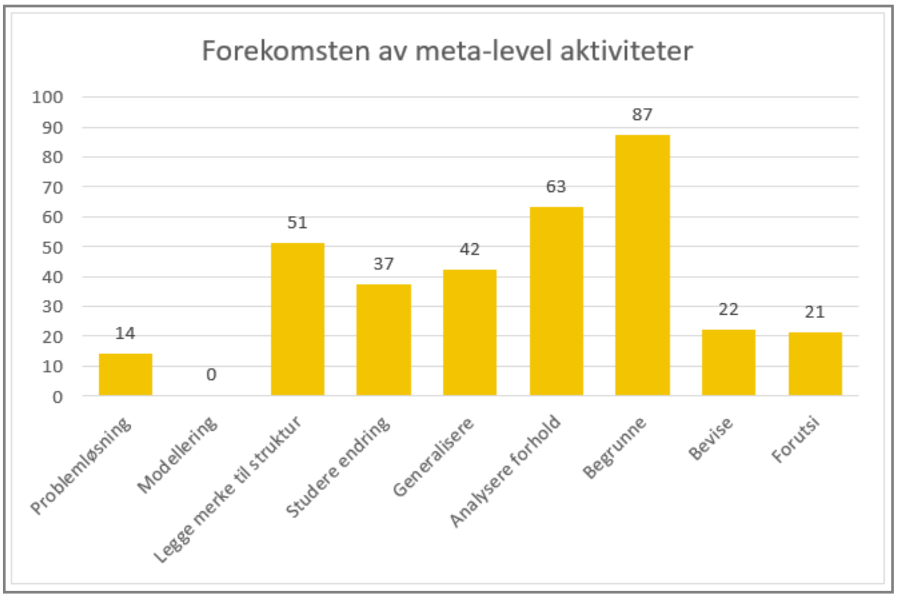


Diagram 5.4: Forekomsten av meta-level aktiviteter totalt i åtte eksamenssett. Tallene indikerer antall oppgaver som inneholder de aktuelle meta-level aktivitetene.

De tre mest brukte meta-level aktivitetene i eksamenssettene er «begrunne», «analysere forhold» og «legge merke til struktur».

58% av samtlige 150 oppgaver inneholder meta-level aktiviteten «begrunne», noe som tyder på at det legges mye vekt på at kandidatene skal beherske å begrunne og resonnere omkring algebraiske sammenhenger. I 41 av disse oppgavene er begrepet eksplisitt nevnt i oppgaveteksten i form av «begrunn», «begrunne» eller «gi en begrunnelse». De resterende 46 oppgavene har blitt vurdert til å implisitt be om en begrunnelse gjennom formuleringer som «vis algebraisk… », «lag en illustrasjon som viser…» og «vis på to ulike måter hvorfor…». Ettersom å bevise er blitt definert som en form for begrunnelse i dette rammeverket, har alle de 22 oppgavene som inneholder aktiviteten å bevise også blitt telt opp i kategorien begrunne. Det betyr at omtrent en fjerdedel av oppgavene i kategorien begrunne innebærer å bevise.

Den nest største kategorien av meta-level aktivitet er «analysere forhold» som kan knyttes til 42% av samtlige oppgaver. Å analysere forhold og sammenhenger mellom mengder er dermed noe NOKUT prioriterer å teste kandidatene i. Prioriteringen av meta-level aktiviteten «legge merke til struktur» er også relativt høy ettersom 34% av oppgavene kan knyttes til denne aktiviteten. Kandidatene testes dermed i om de kan identifisere og trekke ut strukturer i blant annet numre og figurer.

Forekomsten av meta-level aktivitet									
	Høst 2019	Vår 2020	Høst 2020	Vår 2021	Høst 2021	Vår 2022	Høst 2022	Vår 2023	SUM
Problemløsning	1	1	3	3	3	1	2	0	14
Modellering	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Legge merke til struktur	7	4	5	7	8	7	9	4	51
Studere endring	4	4	5	6	5	4	5	4	37
Generalisere	3	4	6	6	7	3	8	5	42
Analysere forhold	7	5	6	8	8	8	10	11	63
Begrunne	12	10	14	9	10	11	11	10	87
Bevise	1	3	2	2	4	2	5	3	22
Forutsi	2	3	3	5	3	2	2	1	21
SUM	37	34	44	46	48	38	52	38	337
Antall forekomtser per oppgave i snitt	1,85	2,27	2,59	2,56	2,53	1,81	2,48	2,00	2,25

Tabell 5.6: Forekomsten av de ulike meta-level aktivitetene i eksamenssettene. Tallene indikerer antall oppgaver.

Tabell 5.6 viser antall oppgaver som inneholder de ulike meta-level aktivitetene på hvert eksamenssett. Av 150 oppgaver er det totalt 337 forekomster av meta-level aktiviteter. Summen på nest nederste rad viser antall forekomster av meta-level aktiviteter på hvert eksamenssett totalt og den nederste raden viser antall forekomster per oppgave i gjennomsnitt. Førstnevnte indikerer hvor rike eksamenssettene er i meta-level aktiviteter, mens sistnevnte indikerer hvor rike eller omfattende oppgavene på hvert eksamenssett er. Ettersom det er de globale meta-level aktivitetene som kobles til algebraisk tenkning, er det å anse som positivt at eksamenssettene og oppgavene er rike på dette området. Meta-level aktivitetene deles inn i ni underkategorier, derfor kan et høyt snitt på antall forekomster per oppgave både skyldes at mange av oppgavene inneholder flere kategorier eller at noen oppgaver inneholder veldig mange kategorier.

Meta-level aktiviteten «begrunne» forekommer oftest på eksamenssettene med unntak av eksamenssettet for våren 2023. Her hadde aktiviteten «analysere forhold» flest forekomster.

Sett alle settene under ett er antall forekomster av de ulike meta-level aktivitetene relativt jevnt fordelt med noen unntak. «Generalisere» varierer med tre forekomster på det laveste til åtte forekomster på det høyeste, en differanse på fem forekomster. Samme differanse mellom laveste og høyeste antall forekomster finner vi også i kategoriene å legge merke til struktur og begrunne. «Analysere forhold» har derimot den største differansen og er den eneste kategorien der det er en tydelig utvikling over tid. Med unntak av det første eksamenssettet, høst 2019 med syv forekomster, har antall forekomster av å analysere forhold gradvis økt fra fem i vår 2020 til 11 i vår 2023. Dette tyder på at oppgaver som inneholder det å analysere forhold mellom mengder gradvis har blitt prioritert på nasjonal deleksamen i algebra over tid.

Meta-level aktiviteter per oppgave

Ettersom rammeverket inneholder ni globale meta-level aktiviteter og oppgavene kan inneholde mellom ingen og alle av disse, blir de ulike kombinasjonene derfor ikke undersøkt og presentert på samme måte som ved kategoriene for UKM og genererende og transformerende algebraisk aktivitet. Det er kun én oppgave som har blitt vurdert til å ikke inneholde globale meta-level aktivitet. Dette er oppgave 7 fra høst 2022 og går ut på å gjengi potensregelen. Med unntak av denne oppgaven er de resterende 149 oppgavene vurdert til å inneholde en eller flere meta-level aktiviteter. Antall oppgaver som inneholder forskjellige antall meta-level aktiviteter er oppgitt i tabell 5.7.

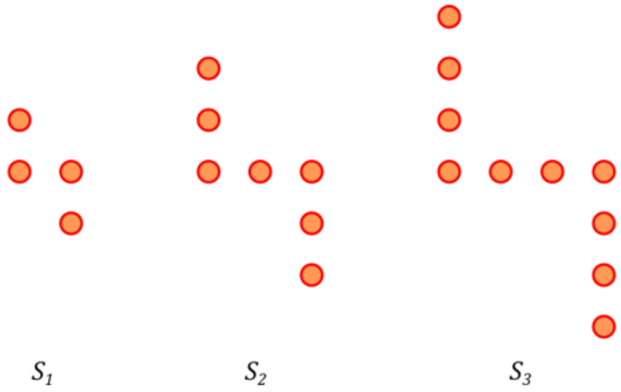
Oppgavenes innhold av meta-level aktivitet									
	Høst 2019	Vår 2020	Høst 2020	Vår 2021	Høst 2021	Vår 2022	Høst 2022	Vår 2023	SUM
Ingen meta-level aktiviteter	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Én meta-level aktivitet	12	7	2	6	7	14	4	11	63
To meta-level aktiviteter	3	3	9	3	4	3	9	2	36
Tre meta-level aktiviteter	3	2	3	4	3	1	0	2	18
Fire meta-level aktiviteter	1	1	1	3	2	0	5	3	16
Fem meta-level aktiviteter	0	1	1	2	3	3	2	1	13
Seks meta-level aktiviteter	1	1	1	0	0	0	0	0	3
Syv meta-level aktiviteter									
Åtte meta-level aktiviteter									
Ni meta-level aktiviteter									
Antall oppgaver	20	15	17	18	19	21	21	19	150

Tabell 5.7: Antall oppgaver som inneholder forskjellig antall meta-level aktiviteter.

De aller fleste oppgavene inneholder én eller to meta-level aktiviteter og kombinasjonen av seks meta-level aktiviteter er det høyeste funnet blant alle eksamenssettene. Totalt tre oppgaver inneholder seks kategorier. Oppgave 4 a) fra høst 2019 er et eksempel på dette.

Oppgave 4

Under er det tegnet tre figurer som representerer stoltallene S_1, S_2 og S_3. Antallet prikker i figur 1 kaller vi for S_1 (stoltall nummer 1), antallet prikker i figur 2 kaller vi S_2 (stoltall nummer 2) og så videre.



a) Bruk figurene til å forklare utviklingen til stoltallene fra S_1til S_3, og tegn S_6.

Figur 5.5: Eksempel på oppgave kategorisert til å inneholde seks meta-level aktiviteter (oppgave 4a fra høst 2019).

Dette er en figurtalloppgave der kandidaten både skal forklare utviklingen av mønsteret ved bruk av figurene, og tegne en figur. Meta-level aktivitetene oppgaven er vurdert til å inneholde er: legge merke til struktur, studere endring, generalisere, analysere forhold, begrunne og forutsi. For å generalisere mønsteret og forklare utviklingen til stoltallene må kandidaten studere figurene ved å legge merke til struktur; hvordan figurene er bygd opp av prikker, og studere endringen mellom figurene; hvordan og hvor på figuren antall prikker øker. Når kandidaten skal forklare denne utviklingen må figurene brukes til å underbygge påstanden, derfor har oppgaven også blitt vurdert til å inneholde aktiviteten å begrunne. Kandidaten må også analysere forholdet mellom figurnummeret og antall prikker i figuren og forutsi antall prikker i figur 6 for å tegne den riktig.

Oppgaver som inneholder 4, 5 eller 6 meta-level aktiviteter		
	Mønster-oppgave	Ikke mønster-oppgave
Vår 2023	3	1
Høst 2022	4	3
Vår 2022	3	
Høst 2021	3	2
Vår 2021	5	
Høst 2020	2	1
Vår 2020	2	1
Høst 2019	2	
SUM	24	8

Tabell 5.8: Antall oppgaver som inneholder fire, fem eller seks meta-level aktiviteter, sortert etter om de omhandler mønster.

Totalt 32 oppgaver inneholder fire, fem eller seks meta-level aktiviteter. Dette er å anse som *mange* meta-level aktiviteter i forhold til resten av oppgavene. En nærmere analyse av disse oppgavene viser at 24 av dem omhandler mønstre, for eksempel i figurer og tallfølger. Tabell 5.8 viser fordelingen av disse. Antall mønsteroppgaver med fire eller flere meta-level aktiviteter varierer fra to til fem på hver eksamen. De resterende åtte oppgavene inneholder alle fire meta-level aktiviteter, noe som betyr at de 16 oppgavene som inneholder flest globale meta-level aktiviteter alle omhandler mønstre. Dette tyder på at de rikeste og mest omfattende oppgavene på nasjonal deleksamen i algebra, i forbindelse med meta-level aktiviteter og dermed også algebraisk tenkning, i høy grad omhandler mønstre.

5.2.3 Sammenhenger mellom algebraiske aktiviteter

I denne delen av analysen blir sammenhenger mellom algebraiske aktiviteter belyst. I diagram 5.5 blir andelen oppgaver som stimulerer til genererende og/eller transformerende aktivitet vist ut ifra hvor mange meta-level aktiviteter oppgavene inneholder.

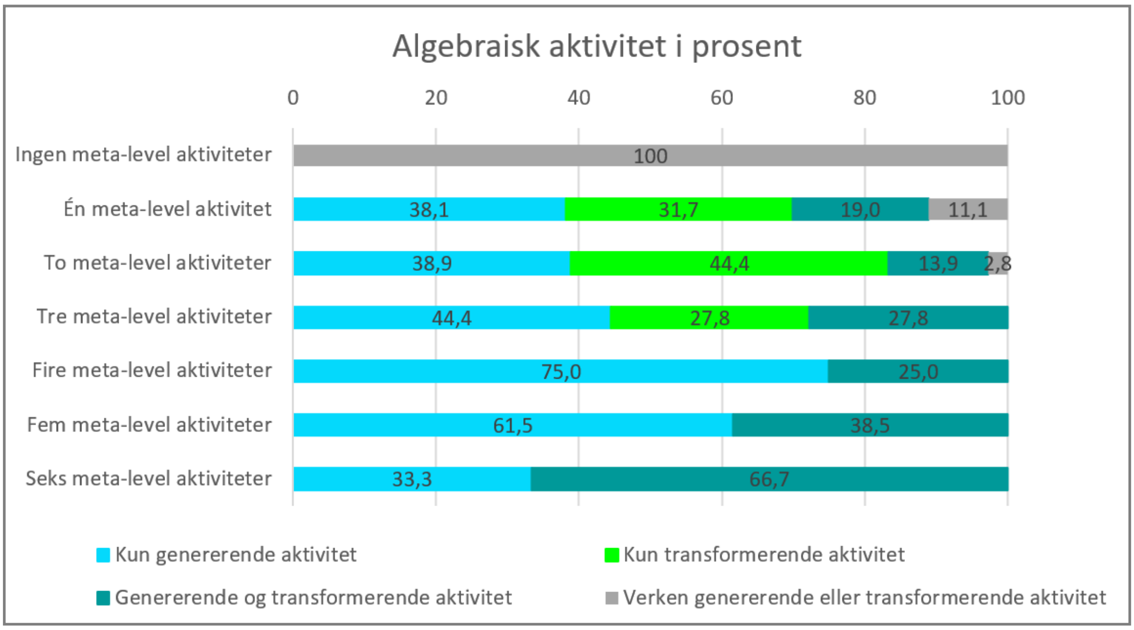


Diagram 5.5: Andelen oppgaver som inneholder genererende/transformerende aktivitet fordelt på antall meta-level aktiviteter som kreves.

Diagrammet viser at oppgaver som kun stimulerer til transformerende aktiviteter begrenser seg til å inneholde en, to eller tre meta-level aktiviteter. Av de 32 oppgavene som inneholder fire eller flere meta-level aktiviteter inneholder samtlige av disse genererende aktivitet. For å løse oppgaver som er rike på meta-level aktiviteter må det dermed utføres genererende aktiviteter og i noen av oppgavene kreves transformerende aktiviteter i tillegg. For disse 32 oppgavene minker andelen oppgaver som kun stimulerer til genererende aktivitet desto flere meta-level aktiviteter som kreves. Dette tyder på at behovet for både genererende og transformerende aktivitet øker i tråd med antall meta-level aktiviteter og gjør slike oppgaver svært rike på algebraisk aktivitet.

5.3 Sammenhenger mellom undervisningskunnskap og algebraisk aktivitet

Rammeverket som er brukt i analysen tar for seg ulike aspekter ved oppgavenes faginnhold. Oppgavenes innhold av undervisningskunnskap og genererende og transformerende aktivitet er sortert i tabell 5.9.

Undervisningskunnskap og genererende og transformerende aktivitet								
	Kun allmenn fagkunnskap	Kun spesialisert fagkunnskap	Kun fagdidaktisk kunnskap	Allmenn og spesialisert fagkunnskap	Spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Allmen fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap	Antall oppgaver
Kun genererende aktivitet	40	6	0	1	16	2	2	67
Kun transformerende aktivitet	15	11	0	3	6	3	3	41
Genererende og transformerende aktivitet	21	2	0	0	3	7	0	33
Verken genererende eller transformerende aktivitet	1	0	8	0	0	0	0	9
Antall oppgaver	77	19	8	4	25	12	5	150

Tabell 5.9: Oppgavenes innhold av undervisningskunnskap og genererende og transformerende aktivitet.

Blant de 77 oppgavene som kun inneholder allmenn fagkunnskap er det en relativt høy andel, 52%, som kun inneholder genererende aktivitet og en relativt lav andel, 19,5%, som kun inneholder transformerende aktivitet. For oppgavene som kun inneholder spesialisert fagkunnskap er trenden motsatt: andelen som kun inneholder genererende aktivitet er 31,2% og andelen som kun inneholder transformerende aktivitet er 57,9%. Regner vi med oppgavene der spesialisert fagkunnskap er i kombinasjon med andre undervisningskunnskaper er det svært jevnt mellom de to kategoriene. Dette tyder på at transformerende aktivitet er en relativt populær algebraisk aktivitet blant oppgavene som inneholder spesialisert fagkunnskap og spesielt blant oppgavene som kun inneholder denne undervisningskunnskapen.

5.4 Oppsummering av resultater

Samtlige 150 oppgaver som er analysert fra nasjonal deleksamen i algebra inneholder undervisningskunnskap i matematikk. Antall forekomster av de tre ulike undervisningskunnskapene og fordelingen av disse på eksamenssettene varierer i stor grad og vi ser en tendens til at eksamenssettenes innhold av undervisningskunnskap blir rikere over tid. Tilnærmet 94,7% av oppgavene inneholder fagkunnskap, enten det er allmenn eller spesialisert, noe som indikerer at kandidatene i høy grad testes i matematiske kunnskaper og ferdigheter. Allmenn fagkunnskap er den klart største kategorien av undervisningskunnskap i eksamenssettene og forekommer på 65,3% av oppgavene, svært ofte som den eneste undervisningskunnskapen. Spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap er noe mindre representert i eksamenssettene og henholdsvis 35,3% og 33,3% av samtlige oppgaver kan løses med slik undervisningskunnskap. Disse forekommer sjeldnere alene på oppgavene, og ofte i kombinasjon med hverandre. Eksamenssett som inneholder svært mye allmenn fagkunnskap, har ofte relativt lite spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Dette indikerer at et høyt fokus på allmenn fagkunnskap går ut over forekomsten av de andre undervisningskunnskapene.

Av samtlige 150 oppgaver stimulerer om lag 49,3% av oppgavene til transformerende aktivitet, 66,7% til genererende aktivitet, og 99,3% til globale meta-level aktiviteter. Over tid har kandidatene i økende grad blitt testet i genererende aktiviteter på bekostning av transformerende aktiviteter, som tyder på et minkende fokus på regnetekniske prosesser. Meta-level aktivitetene «begrunne», «analysere forhold» og «legge merke til stuktur» forekommer oftest på eksamenssettene. Å begrunne er den mest etterspurte meta-level aktiviteten totalt sett, mens antall oppgaver i eksamenssettene som tester kandidatenes evner til å analysere forhold mellom mengder har økt over tid. Kandidatenes forståelse av og evne til å resonnere rundt algebraiske sammenhenger vektlegges dermed svært høyt i nasjonal deleksamen i algebra. Alle oppgavene som er rike på globale meta-level aktiviteter krever genererende aktiviteter for å løses, og i noen av oppgavene er det også nødvendig med transformerende aktiviteter. Mange av disse oppgavene omhandler mønstre.

6.0 Diskusjon

Målet med denne studien har vært å undersøke faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebra for studenter på grunnskolelærerutdanningen for 5.-10. trinn. For å svare på problemstillingen har jeg utviklet et rammeverk og brukt det i en kvalitativ innholdsanalyse av eksamenssettene. Rammeverket tok utgangspunkt i UKM av Ball et al. (2008) og algebraisk aktivitet av Kieran (2004). Datamaterialet besto av åtte nasjonale deleksamener der 150 oppgaver ble analysert og kategorisert i henhold til rammeverket for å kunne si noe om hva slags undervisningskunnskap og algebraisk aktivitet oppgavene og eksamenssettene inneholdt. I dette kapittelet vil resultatene av analysen bli diskutert og sett i lys av relevant forskning og teori for å besvare følgende forskningsspørsmål:

Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?

Først vil faginnholdet i eksamenssettene sees opp mot læringsutbyttebeskrivelsene eksamenene skal prøve studentene i. Deretter vil eksamenssettenes innhold av algebraisk tenkning diskuteres.

6.1 Sammenhenger mellom faginnholdet i eksamenssettene og læringsutbyttebeskrivelsene

Gjennom deleksamen i algebraisk tenkning for GLU 5-10 skal NOKUT prøve lærerstudenter i fire læringsutbyttebeskrivelser. Faginnholdet i eksamenssettene burde derfor samsvare med disse. Vektingen av læreutbyttebeskrivelsene i eksamenssettene er ikke gitt.

6.1.1 Første læringsutbyttebeskrivelse

Den første læringsutbyttebeskrivelsen lyder: «Kandidaten har dybdekunnskap om matematikken elevene arbeider med på trinn 5-10» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Dette målet kan tolkes som at studenten som et minimum må beherske matematikken elevene skal lære, noe som dreier seg om matematiske kunnskaper og ferdigheter, og målet kan derfor knyttes til allmenn fagkunnskap i UKM. Ifølge Ball et al.

(2008) trenger lærere å kunne materialet de lærer bort og være i stand til å utføre arbeidet de tildeler elevene. De hevder at en forståelse av matematikken i læreplanen spiller en kritisk rolle i planlegging og utføring av undervisning, og at allmenn fagkunnskap derfor er essensiell kunnskap for lærere. Omtrent 65,3% av oppgavene inneholdt allmenn fagkunnskap og kan dermed kobles til den første læringsutbyttebeskrivelsen. Resultatene viste imidlertid at et stort fokus på denne undervisningskunnskapen hadde konsekvenser for innholdet av spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap på samme eksamenssett. En kan dermed stille spørsmål til hvilken grad NOKUT egentlig *burde* prioritere den første læringsutbyttebeskrivelsen. Bergqvist (2007) peker på at studenter ser til eksamener for å få et inntrykk av hva som er viktig i faget. Studentene kan tolke en prioritering av allmenn fagkunnskap på nasjonal deleksamen i algebra som at det er den undervisningskunnskapen som er viktigst i matematikk. Resultater av tidligere studier (e.g. Fadum & Tellefsen, 2022) indikerer at norske lærere sliter mer med spesialisert fagkunnskap enn med allmenn fagkunnskap. En kan derfor argumentere for at spesialisert fagkunnskap burde få et større fokus på nasjonal deleksamen i algebra.

NOKUTs første læringsutbyttebeskrivelse passer godt med Ball et al. (2008) sin beskrivelse av allmenn fagkunnskap. Kandidaten skal dog ikke bare ha kunnskap, men *dybdekunnskap*, om matematikken elevene arbeider med på 5.-10. trinn. Ordene «dybde» og «dybdekunnskap» er ikke nevnt i læreplanen i matematikk (kunnskapsdepartementet, 2019). Det er dermed ikke spesifisert at elevene selv skal ha dybdekunnskap i matematikk og en kan argumentere for at studentene derfor skal ha matematisk kunnskap som overgår elevenes. «Dybde» er derimot nevnt fem ganger i overordnet del, fire ganger i ordet «dybdelæring» (kunnskapsdepartementet, 2017). Der står det at:

> «Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. […] Dybdelæring i fag innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre.» (kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11-12).

Dette kan tolkes som at elevene skal tilegne seg dybdekunnskap i fag, deriblant matematikk, og at det dermed ikke forventes annerledes dybdekunnskap av lærerstudentene. Hva dybdekunnskapen i den første læringsutbyttebeskrivelsen innebærer er ikke spesifisert og om studentene skal kunne mer eller annerledes matematikk enn elevene, for eksempel å analysere løsninger og strategier, er relevant i forbindelse med om den første læringsutbyttebeskrivelsen inkluderer spesialisert fagkunnskap i tillegg til allmenn fagkunnskap. 94,7% av oppgavene på nasjonal deleksamen i algebra inneholdt fagkunnskap, enten det var spesialisert, allmenn eller begge. Dette er en svært høy andel, og om en kan si at den første læringsutbyttebeskrivelsen samsvarer med fagkunnskap i UKM-modellen, er dette faginnhold som studentene i svært stor grad testes i på nasjonal deleksamen i algebra.

I tidligere studier på undervisningskunnskap i matematikk er det funnet en tydelig sammenheng mellom læreres fagkunnskap og elevenes resultater (Hill et al., 2005; Marshall et al., 2009). Et fokus på at lærerstudenter skal ha gode matematiske kunnskaper og ferdigheter kan derfor være betydningsfullt for å gjøre dem i stand til å undervise elever. Det er også funnet tydelige sammenhenger mellom læreres fagdidaktiske kunnskap og elevenes resultater (Baumert et al., 2010). Dette tyder på at det kan være fordelaktig å finne en balanse mellom oppgaver som tester lærerstudentenes fagkunnskap og fagdidaktiske kunnskap på nasjonal deleksamen i algebra. En del av oppgavene som inneholdt spesialisert fagkunnskap kan derimot ikke beskrives «som matematikk elevene arbeider med», for eksempel å lage oppgaver til undervisning og identifisere matematiske feil i elevers løsninger, en kan dermed anta at spesialisert fagkunnskap og alt det innebærer ikke kan inkluderes i den første læringsutbyttebeskrivelsen.

6.1.2 Andre læringsutbyttebeskrivelse

Den neste læringsutbyttebeskrivelsen lyder: «kandidaten har kunnskap om ulike representasjoner og betydningen bruk av og overganger mellom representasjoner kan ha for elevers læring» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Et av kjerneelementene i matematikkfaget er representasjon og kommunikasjon, noe som innebærer å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer, og oversette og veksle mellom ulike representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det å bruke og veksle mellom representasjoner kan knyttes til genererende aktiviteter i Kierans (2004) modell over algebraiske aktiviteter, mens kunnskap om bruk av representasjoner for elevers læring kan kobles til fagdidaktisk kunnskap.

Ifølge Kieran (2004) fokuserer genererende aktiviteter på representasjon, enten det innebærer å representere noe algebraisk eller å oversette mellom representasjoner. Hun hevder at slike aktiviteter innebærer forståelse av variabler, ukjente, likhetstegnet og forestillingen av likningsløsning, og at det er innenfor disse aktivitetene mye av meningen med algebra oppstår. Totalt 66,7% av oppgavene på nasjonal deleksamen i algebra stimulerer til genererende aktivitet og inneholder representasjoner. Det betyr at en relativt høy andel av oppgavene kan knyttes til NOKUTs andre læringsutbyttebeskrivelse. Det er derimot ikke alle disse oppgavene som innebærer kunnskap om bruk av representasjoner for elevers læring. Fagdidaktisk kunnskap kombinerer kunnskap om faglig innhold, i dette tilfellet kunnskap om representasjoner i matematikk, og kunnskap om elever og undervisning. Kunnskap om elever og undervisning innebærer kunnskap om hvordan elever lærer, hva de tenker i møte med ulike emner i matematikk, og hvordan en kan legge opp undervisning for at elevene skal få en dypere forståelse (Ball et al., 2008). En kan dermed si at kunnskap om bruk av representasjoner for elevers læring krever fagdidaktisk kunnskap. Av 100 oppgaver som stimulerer til genererende aktivitet inneholder 30% av disse fagdidaktisk kunnskap. Det er med andre ord 30 oppgaver som kombinerer representasjoner og kunnskap om elevers læring.

6.1.3 Tredje læringsutbyttebeskrivelse

Kandidatene prøves også i om de «har kunnskap om bruk av ulike læremidler, både digitale og andre, og muligheter og begrensninger ved slike læremidler» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Som en konsekvens av utdanningspolitiske føringer og den teknologiske utviklingen har definisjoner på læremidler vært inkonsekvente over tid (Svingen & Gilje, 2018, s. 4-5). I forskriften til opplæringsloven er læremiddel definert slik: «Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet.» (Forskrift til opplæringsloven, 2006, §17-1). *Lærebøker* er ofte brukt om trykte læremidler (Opplæringsloven, 1998, §9-4). Svært få oppgaver i nasjonal deleksamen i algebra omhandler spesifikke trykte læremidler som lærebøker. Én deloppgave fra høst 2022 omhandler en definisjon tatt fra en lærebok for 10. trinn. I denne oppgaven skulle kandidaten relatere en påstand til lærebokdefinisjonen. Oppgaven innebar ikke å vurdere læremiddelet og er derfor ikke vurdert til å prøve den tredje læringsutbyttebeskrivelsen. Det er likevel en del oppgaver som inneholder eksempeloppgaver som elever blir gitt eller skal løse. En kan argumentere for at slike eksempeloppgaver kan defineres som læremidler ettersom de er utviklet til bruk i undervisningen. Ved å simpelthen løse en slik eksempeloppgave viser ikke studenten at han eller hun har kunnskap om bruk av ulike læremidler, både digitale og andre, eller evnen til å vurdere muligheter og begrensninger ved slike læremidler. Kunnskap knyttet til læremidler i matematikk, enten det er digitale eller andre, har direkte nytteverdi i undervisningssammenheng. Slik kunnskap kan defineres som kunnskap om faglig innhold og undervisning, som hører inn under fagdidaktisk kunnskap i UKM-modellen (Ball et al., 2008). For at oppgaver inkluderer eksempeloppgaver skal prøve den tredje læringsutbyttebeskrivelsen må oppgaven etterspør fagdidaktisk kunnskap, for eksempel ved at studenten vurderer potensialet til eksempeloppgaven eller viser hvordan eksempeloppgaven kan brukes i undervisning. 14,7% av oppgavene oppfyller denne beskrivelsen og kan dermed vurderes til å prøve den tredje læringsutbyttebeskrivelsen.

I kunnskapsgrunnlaget for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk skiller Svingen og Gilje (2018) mellom digitale læremidler og digitale verktøy. Læremidler beskrives til å inneholder oppgaver og disse er ofte laget for å øve på ferdigheter. Digitale verktøy kan brukes til å representere, manipulere og gjøre beregninger på matematiske objekt. Excel og GeoGebra oppgis som eksempler på digitale verktøy (Svingen & Gilje, 2018, s. 21). Digitale verktøy som Excel og GeoGebra er ikke utviklet til bruk i opplæringen eller for å dekke kompetansemål og ifølge Svingen og Gilje er de heller ikke definert som læremidler. På bakgrunn av dette vil ikke oppgaver som inneholder bruk av og refleksjon over digitale verktøy høre inn under den aktuelle læringsutbyttebeskrivelsen. Av 150 oppgaver er det ingen som innebærer å bruke eller vurdere digitale læremidler. Det er derimot åtte oppgaver som omhandler digitale verktøy som regneark, dynamiske geometriprogram, graftegningsverktøy og program for kunstig intelligens. De fleste av disse oppgavene går ut på å beskrive løsninger ved bruk av slike verktøy eller lage oppgaver til elever der slike verktøy skal tas i bruk. Kun to oppgaver går ut på å vurdere muligheter og begrensninger ved digitale verktøy. Det er uklart om disse oppgavene er ment til å prøve den tredje læringsutbyttebeskrivelsen, men ettersom en kan argumentere for at digitale verktøy ikke er læremidler basert på Svingen og Giljes (2018) definisjoner, kan oppgavene vurderes til å ikke gjøre det.

6.1.4 Fjerde læringsutbyttebeskrivelse

Den siste læringsutbyttebeskrivelsen går ut på at kandidaten «kan analysere og vurdere elevers argumentasjon og løsningsmetoder ut fra ulike perspektiv på kunnskap og læring» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Kunnskap om elevers tenkning og feilsvar er både inkludert i fagdidaktisk kunnskap og spesialisert fagkunnskap i UKM-modellen. Førstnevnte gjennom kunnskap om elevers generelle løsninger og hvordan de har tendens til å tenke eller argumentere, og sistnevnte gjennom evnen til å analysere og vurdere elevers spesielle argumentasjoner og løsningsmetoder (Ball et al., 2008). En kan argumentere for at kjennskap til ulike perspektiv på kunnskap og læring kun hører inn under fagdidaktisk kunnskap og ikke spesialisert fagkunnskap ettersom det ikke innebærer rene matematiske kunnskaper og ferdigheter. Inkludert i fagdidaktisk kunnskap er kunnskap om hvordan elever lærer og tenker, hvordan dette kan komme til uttrykk, og hvordan en kan legge opp undervisning for at elever skal kunne utvikle en dypere forståelse av et matematisk emne (Ball et al., 2008). Å kjenne til ulike perspektiver på kunnskap og læring vil styrke denne kompetansen.

Totalt 21.33% av oppgavene kan knyttes til den fjerde læringsutbyttebeskrivelsen ettersom de går ut på å vurdere og analysere elevers argumentasjon og løsningsmetode. Ingen av disse oppgir eksplisitt at studentene skal anvende ulike perspektiver på kunnskap og læring for å løse oppgavene, men i noen av oppgavene kan bruk av slik kunnskap være en forutsetning eller forventet. Tidligere forskning antyder at lærere ikke er spesielt opptatt av å finne årsaker til elevers misoppfatninger i algebra (Tirosh et al., 1998). Fadum & Tellefsen (2022) fant i sin studie at få lærere klarte å identifisere og beskrive årsaker til elevers misoppfatninger. Ettersom innholdet på eksamener kan ha betydning for hva studenter tolker som viktig i faget (Bergqvist, 2007), kan et utvalg av oppgaver som går ut på å vurdere og analysere elevers argumentasjon og løsningsmetode være med på å gjøre studentene oppmerksom på viktigheten av å identifisere og forklare årsaker til elevers feil og alternative løsningsmetoder.

6.2 Algebraisk tenkning

Nasjonal deleksamen i algebra skal teste lærerstudenters algebraiske tenkning. I eksamenssettene for GLU 5-10 inneholder 99,3% av 150 oppgaver globale meta-level aktiviteter, som er aktiviteter som innebærer algebraisk tenkning (Kieran, 2004). I tillegg til at omtrent samtlige oppgaver inneholder algebraisk tenkning, er det funnet 337 forekomster av meta-level aktiviteter totalt. Dette betyr at flere oppgaver inneholder ulike meta-level aktiviteter og utfordrer dermed flere sider ved kandidatenes algebraiske tenkning. Tidligere forskning (e.g. Magiera et al., 2013; Kieboom et al., 2014) har funnet sterke sammenhenger mellom lærerstudenters algebraiske tenkning og deres evne til å gjenkjenne elevers algebraiske tenkning, samt muligheter til å engasjere elever i algebraisk tenkning. Bergqvist (2007) peker på at eksameners innhold har påvirkning på studentenes forestillinger i faget. Det er et stort fokus på algebraisk tenkning i nasjonal deleksamen i algebra, noe som sender et signal til lærerstudentene om at algebraisk tenkning er viktig. Det er likevel noen meta-level aktiviteter som har blitt høyere prioritert i eksamenssettene enn andre.

6.2.1 Globale meta-level aktiviteter i beskrivelsen av algebraisk tenkning

I tillegg til de fire læringsutbyttebeskrivelsene er en beskrivelse av algebraisk tenkning også angitt i de nasjonale retningslinjene for grunnskolelærerutdanningen trinn 5-10. Der står det:

> «Algebraisk tenkning går på tvers av ulike matematiske temaer som det jobbes med på 5.–10. trinn. Slik tenkning innebærer søk etter samvariasjon, generelle strukturer, mønstre og relasjoner, beskrivelse av disse ved bruk av ord og symboler, og resonnering og argumentasjon. Det skjer her i arbeid med tall og regneoperasjoner, og situasjoner fra matematikk eller "virkeligheten" som omhandler samvariasjon mellom størrelser. Et viktig aspekt ved algebraisk tenking er bruk av ord eller symboler til å beskrive vilkår en størrelse skal oppfylle, som for eksempel i arbeid med ligninger og ulikheter.» (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44).

Denne beskrivelsen kan knyttes til flere globale meta-level aktiviteter. Kieran beskriver de globale meta-level aktivitetene som aktiviteter som ikke nødvendigvis krever formell algebra, men der algebra kan brukes som et verktøy (Kieran, 2004). Dette kan tolkes som at aktivitetene kan gå på tvers av ulike matematiske temaer.

Å søke etter samvariasjon, generelle strukturer, mønstre og relasjoner, kan direkte knyttes til de globale meta-level aktivitetene å legge merke til struktur, studere endring og analysere forhold mellom mengder. Videre kan «beskrivelse av disse ved bruk av ord og symboler, og resonnering og argumentasjon» knyttes til aktivitetene å generalisere og begrunne. Disse fem globale meta-level aktivitetene var aktivitetene som forekom flest ganger på de nasjonale deleksamenene, noe som tilsier at den algebraiske tenkningen som ble prioritert i eksamenssettene samsvarer med den algebraiske tenkningen som beskrevet i de nasjonale retningslinjene i grunnskolelærerutdanningen for trinn 5-10 (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44).

6.2.2 Argumentasjon og resonnering

«Begrunne» og «analysere forhold» er meta-level aktivitetene som forekommer oftest på nasjonal deleksamen i algebra. Dette tyder på at NOKUT legger stor vekt på å teste kandidatenes evner til å argumentere for, og resonnere rundt algebraiske sammenhenger. Kaput (1998) snakker om algebraisk resonnering, som er nært knyttet til algebraisk tenkning. Siden læring kan kobles til aktivitetene og prosessene studenter engasjeres i, peker Bergqvist (2007) på at det er viktig å undersøke hva slags resonnering studenter møter på i utdanningen. Mange av lærerstudentene som gjennomfører nasjonal deleksamen i algebra ender opp som matematikklærere. En av arbeidsoppgavene til matematikklærere er å vurdere elever i matematikkfaget, noe som ofte innebærer å utforme skriftlige prøver. Senk et al. (1997) analyserte over 100 tester utviklet av lærere til elever og fant at det var behov for resonnement, i form av begrunnelse, forklaring eller bevis, i kun 5% av oppgavene. Dette er langt lavere enn de 58% av oppgavene på nasjonal deleksamen i algebra som inneholdt samme form for resonnement. Matematikkfaget er i stadig utvikling og Senk et al. (1997) sin studie kan anses som utdatert ettersom det er over 25 år siden den ble gjennomført. Lærerne i den norske skolen skal følge læreplanen i matematikk som ble reformert i 2020. Kompetansemålene etter hvert trinn beskriver hva elevene skal kunne og springer ut fra kjerneelementene i faget (utdanningsdirektoratet, 2023). Et av kjerneelementene i matematikkfaget er resonnering og argumentasjon, noe som blant annet innebærer å begrunne og bevise (Kunnskapsdepartementet, 2019). Ettersom faginnholdet i eksamener kan legge føringer for hva slags resonnering studenter oppfatter som viktig i matematikk (Bergqvist, 2007), bidrar NOKUT til å ruste fremtidige matematikklærere til å legge til rette for utvikling av algebraisk tenkning hos elever, med et spesielt fokus på å beherske argumentasjon og resonnering.

6.2.3 Algebraiske aktiviteter

Den første læringsutbyttebeskrivelsen som studentene skal prøves i på nasjonal deleksamen i algebra handler om å ha dybdekunnskap om matematikken elevene arbeider med på trinn 5-10 (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Matematikken elevene arbeider med er gitt i lærerplanen i matematikk (utdanningsdirektoratet, 2023). Tradisjonelt har algebra i skolen blitt koblet til «bruken av bokstaver» (Radford, 2010). Mason (1996) hevder at manipulasjon av symboler kun er en liten del av hva algebra handler om og at det er mulig å praktisere abstrakt algebra uten å tenke algebraisk. Det er spesielt de transformerende aktivitetene i Kierans (2004) modell som knyttes til manipulasjon av symboler. En kan argumentere for at oppgaver som innebærer transformerende aktiviteter kan løses ved bruk av imitativ resonnering ettersom det sentrerer seg rundt regnetekniske prosesser slik som å huske regler og steg til prosedyrer og algoritmer. Tidligere forskningsfunn antyder at mange oppgaver på universitetsnivå kan løses ved bruk av imitativ resonnering (Lithner, 2003, 2004; Bergqvist, 2007) og at hele eksamener kan bestås kun ved bruk av slik resonnering (Bergqvist, 2007). 27,3% av samtlige oppgaver på nasjonal deleksamen i inneholdt transformerende aktivitet uten å inneholde genererende aktivitet. Det er dermed svært få oppgaver som kan løses kun ved bruk av regel-basert algebra sammenlignet med tidligere forskningsfunn (Lithner, 2003, 2004; Bergqvist, 2007). Samtlige av disse oppgavene inneholdt én eller flere meta-level aktiviteter. Selv om det kan være mulig å drive med transformerende aktiviteter uten å tenke algebraisk slik Mason (1996) hevder, viser dette at NOKUT ikke inkluderer slike oppgaver på nasjonal deleksamen i algebra.

Eisenmann & Even (2009) peker på at alle tre algebraiske aktiviteter kan kobles til krevende oppgaver selv om transformerende aktiviteter ofte dukker opp i oppgaver på lavt nivå i lærebøker. Hva «lavt nivå» innebærer kan diskuteres, men det kan tolkes som lite omfattende oppgaver, og i denne sammenheng kan oppgaver som inneholder få meta-level aktiviteter beskrives til å inneha et lavere nivå enn oppgaver som inneholder relativt mange meta-level aktiviteter. Resultatene i denne studien viste at oppgaver som inneholdt transformerende aktivitet uten å inneholde genererende aktivitet, begrenset seg til å inneholde en, to eller tre meta-level aktiviteter. De rikeste og mest omfattende oppgavene i forbindelse med meta-level aktiviteter, og dermed algebraisk tenkning, inneholdt alle genererende aktivitet selv om noen stimulerte til transformerende aktivitet i tillegg. Rike og omfattende oppgaver kan tolkes som krevende ettersom de utfordrer ulike deler av kandidatenes algebraiske tenkning. Alle de tre algebraiske aktivitetene kan dermed kobles til krevende oppgaver i nasjonal deleksamen i algebra samtidig som oppgaver at som kun krever transformerende aktiviteter begrenser seg til oppgaver på lavere nivå. Dette samsvarer med det Eisenmann & Even (2009) peker på.

7.0 Avslutning

Formålet med denne studien er å undersøke faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebraisk tenkning for studenter som går grunnskolelærerutdanning for 5.-10. trinn. For å gjøre dette har jeg analysert oppgavene ved hjelp av et teoretisk rammeverk som bygger på begrepene til Ball et al. (2008) og Kieran (2004). Forskningsspørsmålet lyder: *Hva slags undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og algebraisk aktivitet stimulerer oppgavene i nasjonal deleksamen i algebra til?.* I dette kapittelet vil hovedkonklusjonene fra studien legges frem og forskningsspørsmålet besvares. Til slutt vil forslag til videre studier presenteres.

7.1 Konklusjon

Samtlige For å svare på forskningsspørsmålet vil jeg konkludere med at nasjonal deleksamen i algebra stimulerer til fagkunnskap i svært høy grad, med et stort fokus på allmenn fagkunnskap og et noe mindre fokus på spesialisert fagkunnskap. En av tre oppgaver stimulerer til fagdidaktisk kunnskap, som er en del mindre enn fagkunnskap men fortsatt en akseptabel andel av oppgavene. For å få en jevnere fordeling av undervisningskunnskapene i eksamenssettene kan NOKUT blant annet se til den ferskeste eksamenen, fra våren 2023, som har fokusert noe mer på spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap, og noe mindre på allmenn fagkunnskap.

Jeg vil også konkludere med at algebraiske aktiviteter er godt representert i oppgavene på nasjonal deleksamen i algebra. Det er et økende fokus på genererende aktiviteter over transformerende aktiviteter, noe som tyder på at NOKUT legger økende vekt på representasjoner og meningsskaping på bekostning av rene regnetekniske prosesser i algebra. Nesten samtlige oppgaver stimulerer til globale meta-level aktiviteter, som direkte knyttes til utvikling av algebraisk tenkning, og mange oppgaver inneholder mer enn én slik aktivitet. Meta-level aktivitetene som vektlegges høyest er «begrunne» og «analysere forhold», noe som tyder på at NOKUT fokuserer på at kandidatene skal beherske å argumentere for, og resonnere rundt algebraiske sammenhenger.

Jeg har i tillegg studert studiens resultater opp mot de fire læringsutbyttebeskrivelsene NOKUT skal prøve lærerstudentene i. Faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebra samsvarer høyt med de to første læringsutbyttebeskrivelse, som er kunnskap om matematikken elever arbeider med og kunnskap om representasjoner (Universitets- og høyskolerådet, 2018, s. 44). Omtrent en femtedel av oppgavene samsvarer med den fjerde læringsutbyttebeskrivelsen som handler om å vurdere elevers argumentasjon og løsningsmetoder, og enda færre oppgaver kan knyttes til den tredje læringsutbyttebeskrivelsen som går ut på å vurdere læremidler.

7.1 Videre forskning

I arbeidet med denne masteroppgaven er det tatt i bruk et didaktisk og algebraisk rammeverk for å identifisere faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebraisk tenkning for GLU 5-10. Under analysen merket jeg at mange av oppgavene som inneholdt forholdsvis mange globale meta-level aktiviteter, var mønsteroppgaver. Som en utvidelse av akkurat denne oppgaven kunne det vært interessant å se på hva slags oppgavetyper som gikk igjen, og hvordan undervisningskunnskap og algebraisk aktivitet fordelte seg utover disse oppgavetypene. En kunne for eksempel delt oppgavene inn i kategorier som mønster, formel, likning, algebraiske uttrykk og funksjon. Det ville gitt en annen dimensjon til faginnholdet.

Denne studien kan ikke si noe om studentenes kunnskaper, den kan kun gi en pekepinn på hvilke kunnskaper studentene blir testet i. Studentene får generelt svake resultater på nasjonal deleksamen i algebra (NOKUT, 2023). Til videre forskning kunne det også vært interessant å se på studentenes resultater opp mot faginnholdet i eksamenssettene. Hvilke oppgaver mestrer de? Hvilke oppgaver sliter de med? Er det noen sammenheng mellom undervisningskunnskap, algebraisk aktivitet og suksessrate på oppgavene? Videre kunne en analysert studentenes skriftlige besvarelser for å identifisere hvilke undervisningskunnskaper som kommer frem skriftlig slik som Fadum og Tellefsen (2022) gjorde da de analyserte eksamensbesvarelser i emnet *tall og algebra* fra videreutdanningsstudiet i matematikk 1 for 5.-10. trinn. Fauskanger og Mosvold presiserer at «læreres konstruerte kunnskap imidlertid aldri vil kunne studeres i sin helhet av utenforstående forskere, da en ikke uten videre kan anta at læreres kunnskap kan uttrykkes skriftlig eller muntlig» (Fauskanger & Mosvold, 2015, sitert i Fadum & Tellefsen, 2022, s. 50). Likevel ville det vært interessant å undersøke eventuelle sammenhenger mellom faginnholdet i nasjonal deleksamen i algebra og studentenes besvarelser.

8.0 Litteraturliste

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180.

Bender, E. A. (2000). *An introduction to mathematical modeling*. Dover Publications Inc.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforlaget

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 348-370. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (s. 27-50). Springer.

Eisenmann, T. & Even, R. (2009). Similarities and differences in the types of algebraic activities in two classes taught by the same teacher. I Remillard, J. T., Herbel-Eisenmann, B. A. & Lloyd, G. M. (Red.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (s. 152-170). Routledge.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 94–116.

Fadum A. H. & Tellefsen, H. K. (2022). Videreutdanningsstudenters undervisningskunnskap relatert til likhetstegnets betydning i algebra. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *27*(2), 43–61.

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova* (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Fagbokforlaget.

Haakens, M. & Bråten, H. (2023). *Grunnskolelæreres resultater på nasjonal deleksamen i matematikk: betydningen av forkunnskaper*. Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. https://www.nokut.no/globalassets/nokut/notater/2023/grunnskolelareres-resultater-pa-nasjonal-deleksamen-i-matematikk_betydningen-av-forkunnskaper_2023.pdf

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42*(2), 371–406.

Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. I T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Red.), *Developing research in mathematics education: twenty years of communication, cooperation and collaboration in europe* (s. 32-44). Routledge.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 5-17). Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. I S. Fennel (Red.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (s. 25–26). National Research Council.

Kasmer, L. A. & Kim, O.-K. (2011). The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 79, 175–191. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9336-z

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 27-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_6

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. I C. Kieran (Red.), *teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (s. 79-106). Springer.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707-762). Information Age.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I Alsina, C., Alvarez, J. M., Hodgson, B., Laborde, C. & Pérez, A. (Red.), *8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (s. 271-290). S.A.E.M. THALES.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kunnskapsdepartementet. (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?lang=nob

Kunter, M., Klusmann, U., Baumert, J., Voss, T. & Hacfeld, A. (2013). Professional competence of teachers: effects on instructional quality and student development. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 805–820.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Doktorgradsavhandling]. University of Nottingham.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 29–55. http://www.jstor.org/stable/3483334

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 405–427.

Magiera, M. T., van den Kieboom, L. A., & Moyer, J. C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 93-113. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9472-8

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2017). K8 pre-service teachers' algebraic thinking: Exploring the habit of mind "Building rules to represent functions". *Mathematics Teacher Education and Development*, *19*(2), 25-50.

Marshall, J., Chinna, U., Nessay, P., Hok, U. N., Savoeun, V., Tinon, S. & Veasna, M. (2009). Student achievement and education policy in a period of rapid expansion: assessment data evidence from Cambodia. *International Review of Education*, *55*, 393–413.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Red.), *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

McAuliffe, S. & Vermeulen, C. (2018). Preservice teacher's knowledge to teach functional thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (s. 403-425). Springer.

Mosvold, R. (2017). Studier av undervisningskunnskap i matematikk: Internasjonale trender og nordiske bidrag. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *22*(2), 51–69.

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2015). Kartlegging av læreres kunnskap er ikke enkelt. *Acta Didactica Norge*, *9*(1), 16 sider. https://doi.org/10.5617/adno.1395

NESH (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

NOKUT (2023, 19. juni). Svake resultater på nasjonal deleksamen i matematikk for lærerstudenter. Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. https://www.nokut.no/nyheter/svake-resultater-pa-nasjonal-deleksamen-i-matematikk-for-larerstudenter/

NOKUT (u.å.a). Om NOKUT. Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. https://www.nokut.no/om-nokut/

NOKUT (u.å.b). Nasjonal deleksamen. Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. https://www.nokut.no/utdanningskvalitet/nasjonal-deleksamen/

NOKUT (u.å.c). Nasjonal deleksamen for grunnskolelærerutdanningene (GLU 1–7 og 5–10). Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. https://www.nokut.no/utdanningskvalitet/nasjonal-deleksamen/nasjonal-deleksamen-for-grunnskolelarerutdanningene-glu-17-og-510/

Opplæringsloven. (1998). Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#%C2%A71-1

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Senk, S. L., Beckmann, C. E., & Thompson, D. R. (1997). Assessment and grading in high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 187–215. https://doi.org/10.2307/749761

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), 15 sider. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869

Svingen, O. L. & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/kunnskapsgrunnlag-for-kvalitetskriterium-for-laremiddel-i-matematikk/

Tirosh, D., Even, R. & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics*, *35*(1), 51–64. https://www.jstor.org/stable/3482865

Universitets- og høyskolerådet. (2018). *Nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanning trinn 5-10.* https://www.uhr.no/_f/p1/iffeaf9b9-6786-45f5-8f31-e384b45195e4/revidert-171018-nasjonale-retningslinjer-for-grunnskoleutdanning-trinn-5-10_fin.pdf

Usiskin, Z. (1988). Conception of school algebra and uses of variables. I B. Moses (Red.), *Algebraic thinking, grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (s. 7-13). https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/nwo/documents/camp/Aug11-2016/conceptionofschoolalgebra_Usiskin.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2023, 15. august). *Hvordan bruke læreplanene?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvordan-ta-i-bruk-lareplanen/

Valenta, A. (2015). Matematikklærerkompetanse. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20Matematikkl%C3%A6rerkompetanse.pdf

van den Kieboom, L. A., Magiera, M. T., & Moyer, J. C. (2014). Exploring the relationship between K-8 prospective teachers' algebraic thinking proficiency and the questions they pose during diagnostic algebraic thinking interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(5), 429-461. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9264-1

Walkoe, J. (2014). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523-550. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9289-0

Vedlegg

Vedlegg A: Kategorier av undervisningskunnskap

Allmenn fagkunnskap	**Spesialisert fagkunnskap**	**Fagdidaktisk kunnskap**
	Kjennetegn	
• Matematiske ferdigheter og kompetanse • Kunne matematikken som elever skal lære	• Matematiske ferdigheter og kompetanse unik for lærere/undervisning • Matematikk lærere må kunne for å drive undervisning	• Kunnskap om hva elever tenker og gjør i matematikk • Kunnskap om hvordan undervise matematikk
	Oppgavetyper	
1.1 Løse matematisk oppgave 1.2 Avgjør om et svar er rett eller galt 1.3 Definere begreper eller regler	2.1 Lag oppgave/løsningsforslag 2.2 Lag en representasjon (illustrasjon, eksempel) til elever 2.3 Begrunne hvorfor elevens løsning er riktig/feil 2.4 Avgjøre om elevens metode/strategi vil fungere generelt 2.5 Forklare prosedyrer, strategier og løsninger for elever	3.1 Forutsi/gi eksempel på hvordan elev kan løse oppgave 3.2 Gi eksempler på feil/misoppfatninger/utfordringer elever kan ha 3.3 Vurdere ulike modeller og representasjoners nytte i undervisning 3.4 Velge/tilpasse eksempel, oppgave eller forklaring å bruke i undervisning/til lærerens formål
	Begrunnelser basert på formuleringer i Ball et al (2008) content knowledge for teaching	
1.1 "simply calculating an answer or, more generally, correctly solving mathematics problems" og "In short, they must to be able to do the work that they assign their students." (s.399) 1.2 "A teacher must be able to spot that	2.1, 2.2 "Likewise, determining the validity of a mathematical argument, or selecting a mathematically appropriate representation, requires mathematical knowledge and skill important for teaching yet not entailing knowledge of students or teaching." og "Teaching also involves considering what numbers are strategic to use in an example" (s. 398)	3.1 "When choosing an example, teachers need to predict what students will find interesting and motivating. When assigning a task, teachers need to anticipate what students are likely to do with it and whether they will find it easy or hard" (s. 401) 3.2 "familiarity with common errors and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of

261 is incorrect. This does not require any special knowledge to do: Anyone who can solve the problem above can readily see this." (s. 397) 1.3 "When teachers write on the board, they need to use terms and notation correctly." (s. 399)	2.3 " Skillful teaching requires being able to size up the source of a mathematical error"; "Error analysis is a common practice among mathematicians in the course of their own work; the task in teaching differs only in that it focuses on the errors produced by learners"; og "They have to figure out what students have done, whether the thinking is mathematically correct for the problem"(s. 397) 2.4 "deciding whether a method or procedure would work in general requires mathematical knowledge and skill, not knowledge of students or teaching." (s. 398); "but figuring this out is not a straightforward task for those who only know how to do the subtraction as they themselves learned it"; og "How might you describe the method the student is using and how would you justify it mathematically?" (s. 397) 2.5 "Teaching also involves explaining procedures. (s. 397) og "to show what the steps of the procedure mean and why they make sense" (s. 398); "In developing survey questions to measure such knowledge, we ask, for example,... , which statement best explains why we find common denominators when adding fractions,"; og "Accountants have to calculate and reconcile numbers and engineers have to mathematically model properties of materials, but neither group needs to explain why, when you multiply by 10, you "add a zero."" (s. 401)	knowledge of content and students" (s. 401) 3.3 "Teachers evaluate the instructional advantages and disadvantages of representations used to teach a specific idea and identify what different methods and procedures afford instructionally" (s. 401) 3.4 "They choose which examples to start with and which examples to use to take students deeper into the content" (s. 401)

Vedlegg B: Kategorier av algebraisk aktivitet

<table>
<tr><th>Genererende</th><th>Transformerende</th><th>Meta-level</th></tr>
<tr><td colspan="3">Kjennetegn</td></tr>
<tr><td>• Lage eller frembringe noe
• Endre representasjonsform</td><td>• Regel-basert algebra
• Manipulere uttrykk og likninger</td><td>• Aktiviteter som ikke nødvendigvis krever algebra, men der bokstav-algebra kan brukes som verktøy
• Algebraisk tenkning</td></tr>
<tr><td colspan="3">Oppgavetyper</td></tr>
<tr><td>5.1 Lage/utforme et uttrykk, en likning, en formel eller en figur/illustrasjon
5.2 Representere funksjoner ved graf, tabell, illustrasjoner eller symboler
5.3 Verbale fremstillinger</td><td>6.1 Løse en likning/ulikhet
6.2 Manipulere et uttrykk/formel eller forkorte brøk
6.3 Kunnskap om regler
6.4 Erstatte</td><td>7.1 Problemløsning
7.2 Modellering
7.3 Legge merke til struktur
7.4 Studere endring
7.5 Generalisere
7.6 Analysere forhold
7.7 Begrunne
7.8 Bevise
7.9 Forutsi</td></tr>
<tr><td colspan="3">Begrunnelser basert på formuleringer i Algebraic thinking in the early grades (Kieran, 2004)</td></tr>
<tr><td>“The generational activities of algebra involve the forming of the expressions and equations that are the objects of algebra.” (s. 142)</td><td>“The second type of algebraic activity – the transformational (“rule-based”) activities – includes, for instance, collecting like terms, factoring, expanding, substituting, adding and multiplying polynomial expressions, exponentiation with polynomials, solving equations, simplifying expressions, working with equivalent expressions and equations, and so on. A great deal of this type of activity is concerned with changing the form of an expression or equation in order to maintain equivalence.” (s. 142)</td><td>“They include problem solving, modeling, noticing structure, studying change, generalizing, analyzing relationships, justifying, proving, and predicting – activities that could be engaged in without using any algebra at all. In fact, they suggest more general mathematical processes and activity. However, attempting to divorce these meta-level activities from algebra removes any context or need that one might have for using algebra. Indeed, the global meta-level activities are essential to the other activities of algebra, in particular, to the meaning-building generational activities; otherwise all sense of purpose is lost.” (s. 142)</td></tr>
</table>

Meta-level underkategori	Beskrivelse
1. Problemløsning	Å utvide eller utvikle et problem, velge og bruke en strategi for å løse det. En oppgave der metoden for løsing ikke er åpenbar.
2. Modellering	Å lage en modell for å beskrive virkeligheten. F eks en graf, en funksjon, en tabell, en likning, en illustrasjon
3. Legge merke til struktur	Identifisere, trekke ut eller uttrykke struktur i tall, figurer, funksjoner
4. Studere endring	Se etter endring i tallrekker, figurer, mønstre
5. Generalisere	Formulere noe som gjelder generelt: en påstand, en formel
6. Analysere sammenhenger mellom forhold	Sammenligne to eller flere mengder, for eksempel forholdet mellom x og y
7. Begrunne	Utvikle matematiske argument for å forsvare eller tilbakevise validiteten av en fremgangsmåte, et resonnement eller en løsning, f eks gjengi regler, bruke eksempler, illustrere eller bevise
8. Bevise	Matematisk vise at noe er rett eller galt, direkte eller indirekte bevis
9. Forutsi	Bruke informasjon i oppgaven til å forutsi hva svaret er, for eksempel neste tall eller figur i en rekke, eller formulere en hypotese