Multiple representasjoner av romfigurer og praktisk undervisningsopplegg

Behandlinger og konverteringer – fra teori til praksis

CHARLOTT HAAGENSEN

VEILEDER

Andrè Martiny

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for Teknologi og Realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Bakgrunnen for denne studien er tidligere erfaring som faglærer i matematikk og undervisningsperioder med tema volum og overflate på ungdomstrinn.
Erfaringsmessig er temaet vanskelig å tilegne seg god nok og forventet kunnskap i – for store deler av elevgruppen.
Et inspirerende møte med praktisk undervisningsmetode presentert av Michael Swan, under avsluttende studier som lærerspesialist i matematikkdidaktikk vår 2022 - engasjerte meg til å teste ut Swans undervisningsopplegg tilknyttet algebrarepresentasjoner i egen klasse. Elevenes respons var meget positiv og de jobbet engasjert stort sett alle sammen. Det ordinære opplegget ble gjennomført slik det er presentert (Swan, 2008) - ingen endringer gjort. I etterkant har jeg utviklet liknende undervisningsopplegg under tema areal og omkrets. Jeg velger å se på dem som pilotprosjekt tilknyttet denne studien. Denne masteravhandlingen utvikler undervisningsmetoden videre - nå under temaet volum og overflate.
I denne sammenhengen ses det også på elevenes konseptuelle forståelse og deres utfordringer ved transformasjoner innen involverte semiotisk registre (Duval, 2006).

Jeg starter derfor med å takke tidligere faglærer Hans Kristian Nilsen - som presentere meg for Michael Swans artikkel om multiple representasjoner og læring innen algebra. Uten denne ville jeg muligens hatt et annet fokus i dag.

Videre takker jeg elevgruppen som deltok underveis i gjennomføringsperioden, og spesielt fokusgruppen som sa seg villig til å bidra med det lille ekstra slik at jeg fikk gjennomført lydopptak av gruppesamarbeid og avsluttende gruppeintervju.
Jeg vil også takke min masterveileder Andre Martiny - for gode råd og veiledning i prosessen med planlegging og gjennomføring av masteravhandlingen.

Til slutt vil jeg selvfølgelig også få takke min familie - for all motivasjon underveis og for å gi meg den tiden jeg trengte til å ferdigstille oppgaven på toppen av alt det andre. Dere er både rause, tålmodige og hjelpsomme.

Mandal, mai 2023

Sammendrag

I dette masterstudiet lyssettes 9. trinn elevers praktiske gruppesamarbeid om multiple representasjoner av romfigurer. Fokus på elevers representasjonskompetanse finner vi igjen i både LK20, læreplan i matematikk (MAT01-05), nasjonale prøver og internasjonal forskning. Bakenforliggende årsak for valg av tema er forhenværende faglærererfaringer med elevers utfordringer innenfor temaet volum og overflate. Temaet er del av 9. trinns pensum og jeg har et indre ønske om å endre innfallsvinkel av undervisningen for å støtte elevenes individuelle utvikling. Forskningsspørsmål er dermed formulert:

«Hva kjennetegner et utvalg elevers konseptuelle forståelse og praktisk undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner innen romgeometri – og hvilke utfordringer tilknyttet individuell behandlings- og konverteringskompetanse synliggjøres i elevenes arbeidsprosess?»

Som delspørsmål belyser studiet hvordan man kan transformere en undervisningsmetode fra et tema til et annet òg hvordan man praktisk kan overføre teori om representasjonsregistre til praksis og anvende denne for å forstå elevers utfordringer. Valgte teorier vektlegger derfor spesifikt rammeverk for utvalg og dannelse av matematikkoppgaver, samt kjennetegn på kognitive krav og oppgaver som fremmer konseptuell forståelse. Videre utbroderes semiotiske systemer av ulike representasjoner og det ses nærmere på utfordringer tilknyttet transformasjoner innen valgt tema.

Anvendte metoder for å besvare forsknings- og delspørsmål har kvalitativ tilnærming og baserer seg på både pilotprosjekter, begrepskartlegging, deltakende observasjon og lydopptak av fokusgruppearbeid samt fokusgruppeintervju.

Kartlagte resultat kan implisere at elevgruppen utvider individuelt representasjonsrepetoar og profiterer på undervisningsmetodens tilnærming, og det fremkommer tegn på hvilke transformasjoner elevgruppen sliter mest med. Dessverre tilsier også resultatene at ikke alle i elevgruppen utnytter tildelt tid optimalt eller engasjerer seg for utfordringer i arbeidsprosessen. Undervisningsmetoden er dessuten en krevende prosess å orkestrere som faglærer alene i store klasser.

Summary

In this Master's study, 9th grade students' practical group collaboration on Multiple Representations of Spatial figures is highlighted. The focus on pupils' representation skills can be found again in both LK20, the Norwegian mathematics curriculum (MAT01-05), National tests and in International research. The underlying reason for choosing the topic is perceived previous subject teacher experiences with pupils' challenges within the topic of Volume and Surface. The topic is part of the 9th grade syllabus and I have a personal inner desire to change the approach in teaching to support the students' individual development. The research questions are thus formulated:

"What characterizes a selection of students' conceptual understanding and practical teaching arrangement with a focus on multiple representations within spatial geometry - and what challenges associated with individual treatment and conversion skills are made visible in the students' work process?"

As a sub-question, the study sheds light on how to transform a teaching method from one topic to another and how to practically transfer theory of representational registers to practice and apply this to understand students' challenges. Selected theories therefore emphasize a specific framework for the selection and formation of mathematics tasks, as well as characteristics of cognitive demands and tasks that promote conceptual understanding. Furthermore, semiotic systems of various representations are elaborated and challenges associated with transformations within the chosen theme are looked at in more detail.

Methods used to answer research and sub-questions have a qualitative approach and are based on both pilot projects, concept mapping, participant observation and audio recording of focus group work as well as focus group interview.

Mapped results may imply that the student group expands its individual representation repertoire and benefits from the teaching method's approach, and there are signs of which transformations the student group struggles with the most. Unfortunately, the results also indicate that not everyone in the student group makes optimal use of the allocated time or

commits to challenges in the work process. The teaching method is also a demanding process to orchestrate as a subject teacher alone in large classes.

Innhold

1.0 Innledning

Hensikten med masteravhandlingen er å forske på om elever på 9. trinn kan forbedre individuell konseptuell forståelse av romfigursammenhenger ved å benytte en praktisk innfallsvinkel. Spørsmålet er om jeg ved å tilrettelegge for gruppebasert undervisnings-opplegg med fokus på multiple representasjoner, kan øke elevers individuelle behandlings- og konverteringskompetanse på tredimensjonalt plan. Når jeg som faglærer legger opp undervisning - planlegges den på bakgrunn av gjeldende læreplan og forskning innen feltet.

Grunnleggende ferdigheter er sentralt begrep, først innført med LK06 og videreført i LK20 (Læreplaner – Kunnskapsløftet 2020). I matematikkfaget gjelder ferdigheten *å kunne regne* som grunnstamme, mens ferdighetene å *kunne uttrykke seg muntlig* og *skriftlig,* samt *å kunne lese* og *bruke digitale verktøy* også danner grunnlag for elevenes helhetlige forståelse og beherskelse av faget. De grunnleggende ferdighetene i norsk læreplan er blant annet inspirert av en dansk rapport (Niss & Jensen, 2002). I rapporten beskrives at helhetlig matematisk kompetanse tilrettelegger for hensiktsmessig handling i møte med ulike former for matematiske utfordringer. I følge Niss og Jensen er matematisk kompetanse sammensatt av åtte delkompetanser - fordelt under to hovedgrupperinger som vist i tabell under.

Å kunne spørre og svare i, med og om matematikk	Å omgås språk og redskaper i matematikk
Tankegangskompetanse Problembehandlingskompetanse Modelleringskompetanse Resonnementskompetanse	Representasjonskompetanse Symbol- og formalismekompetanse Kommunikasjonskompetanse Hjelpemiddelkompetanse

Figur 1: Niss` matematiske kompetanser (Hinna, Rinvold & Gustavsen, 2011, s. 945)

Det poengteres at overnevnte delkompetanser ikke anses som strengt atskilt, men har glidende overganger.

Første kompetanse i andre hovedgruppe er *Representasjonskompetanse.* Representasjonskompetanse uttrykker forståelse for og kunnskap om hensiktsmessig bruk av representasjoner i matematikk, og sees på som et av fire ulike støtteverktøy for å nå kompetansene i første hovedgruppe. En representasjon står for noe annet enn seg selv; en konkret, noe visuelt eller et virkelig fenomen - og tilfeller av slike er for eksempel figurer, uttrykk og volum. I forhold til representasjoner av spesifikt romfigurer er det vesentlig at elevene arbeider med forskjellige overgangsformer - selv om slike overganger kan være krevende for elevene.

Matematisk kompetanse favner alle områder innen matematikk som videre konkretiseres i fagets læreplan under kompetansemål. Med LK20 ble disse spesifikt fordelt på 8.-10 trinn. Kompetansemålet tilknyttet masteravhandlingens spesifikke undervisningsopplegg er hentet fra LK20 - 9. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020):

- utforske og argumentere for formlar for areal og volum av tredimensjonale figurar

Nytt elementet i LK20 er unike kjerneelement tilknyttet alle fag. I matematikk foreligger seks kjerneelement. Overnevnte kompetansemål er ifølge Utdanningsdirektoratet tilknyttet kjerneelementene *Utforskning og problemløsning* samt *Abstraksjon og generalisering*.

Utforskning omhandler elevenes søken etter mønster og å finne sammenhenger gjennom diskusjon med mål om felles forståelse, og fortrinnsvis vekt på strategi og fremgangsmåte fremfor løsning. *Problemløsning* skildrer at elevene skal utvikle metoder for å finne løsning på et problem de ikke har kjennskap til fra før. *Abstraksjon* fremstiller utvikling av formaliserte tankebaner, strategier og matematisk fagspråk; fra det konkrete hverdagsspråk mot det formelle symbolspråk. *Generalisering* uttrykker sammenhenger og at elevene gjennom utforskning av for eksempel figurer kan finne forbindelser og på sikt lære å formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner.

Gjeldende læreplanen vektlegger således sterkt bruk av ulike representasjoner i matematikkopplæring - det samme legges opp til i nasjonale prøver som krever at elever kan tolke representasjoner for å kunne besvare spørsmål.

Forhenværende erfaringer tilsier også at elevgruppen sliter med tilegnelse av nødvendig behandlings- og konverteringskompetanse innen todimensjonalt plan – et moment som påvirker elevenes videre læring på tredimensjonalt plan. Dette danner grunnlag for masteroppgavens hovedtema; definert rundt multiple representasjoner av romfigurer.
På bakgrunn av romfigurers sammensetting av todimensjonale grunnfigurer foreligger naturlige forhold som er vesentlig å sammenkoble. Jeg velger videre å avgrense temaet ved å fokusere på relevant teori som skildrer representasjoner, konseptuell forståelse, behandlings- og konverteringskompetanse, samt utforming av matematikkoppgaver og kognitive krav.

Masteravhandlingens hoved tittel er dermed:
Multiple representasjoner av romfigurer og praktisk undervisningsopplegg

Forskningsspørsmålet formuleres:
«Hva kjennetegner et utvalg elevers konseptuelle forståelse og praktisk undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner innen romgeometri – og hvilke utfordringer tilknyttet individuell behandlings- og konverteringskompetanse synliggjøres i elevenes arbeidsprosess?»

Tilknyttet delspørsmål:
«Hvordan transformere Swans undervisningsmetode «Matching cards» (2008) og anvende Duvals tabell (2006) over semiotiske representasjonsregistre – fra teori til praksis i et romfigurfokus?»

Involverte elevgruppe responderer positivt på samarbeid i faget og har tidligere erfaring med «Matching cards» innen både algebra òg plangeometri. På tidspunkt for gjennomføring av masterstudiet skal elevgruppen fokusere på romgeometri - og det er tid for å se nærmere på kjennetegn av undervisningsopplegg som fokuserer på multiple representasjoner. Hva medfører innfallsvinkelen og hva karakteriserer tilnærmingen? Er dette konstruktiv anvendelse av avsatte timer i faget – eller bør jeg benytte tiden på en annen måte?

Min hypotese er at elevene profiterer på innfallsvinkelen, at det er vel anvendt tid - men også at dette er krevende prosess å lede som enkeltstående lærer i store elevgrupper.

Avhandlingen videre er formulert fra synsvinkel som faglærer i elevgruppen det forskes på, og studien er gjennomført som integrert del av ordinær undervisning på 9. trinn. Avhandlingens disposisjon er sammensatt etter ordinær mal for generelle erfaringsbaserte masteroppgaver. Etter innledning følger første hovedkapittel med kort oppsummering av tidligere forskning innen emnet multiple representasjoner og transformasjoner mellom ulike semiotiske registre. Deretter kommer hovedkapitler som tar for seg relevante rammeverk og teori innen matematikkoppgaver, kognitive krav, konseptuell forståelse og undervisningsmetode som tilrettelegger for fokus på multiple representasjoner samt system for semiotiske representasjonsregistre. Videre beskrives anvendte metoder og gjennomførte pilotprosjekter. Det utarbeidede undervisningsopplegget presenteres og analyseres som start av resultat og analyse kapittelet - etterfulgt av fremstilling og analyse av andre involverte metoder. Deretter følger drøftingsdel med påfølgende konklusjon og implikasjon for fremtidig undervisning innen temaet. Avslutningsvis fremlegges egenvurdering av prosjektet i sin helhet.

For å arrangere bredde i datagrunnlag har jeg foretatt en metodisk overveielse som tilrettelegger for sammenlikningsgrunnlag ved at oppgavens forskningsdata innhentes fra to parallelle klasser. Datagrunnlag er samlet i form av kartlegging av før- og etterkunnskaper, deltakende observasjon samt lydopptak av fokusgruppearbeid med påfølgende fokusgruppeintervju.

Innledningsvis avslutter jeg med noen formelle begrepsavklaringer.

«Konseptuell forståelse» kjennetegnes av forståelse for matematiske konsept som innebærer relasjoner, begreper og operasjoner. Elever med konseptuell forståelse ser sammenhenger og kan orientere seg matematisk både i dybde og bredde. I sammenheng med denne masteravhandlingen knyttes det spesielt opp mot bearbeidelse av romfigurer.

Begrepet «*praktisk undervisningsopplegg*» handler om gruppebaserte undervisningsmetode som krever at elevene engasjerer seg i samarbeid om å praktisk løse en gitt matematisk utfordring. I denne konteksten visuelle konkreter laget som ulike representasjoner av romfigurer på papir. Elevene må benytte seg av artefakter som saks, lim, kalkulator og blyant for å løse oppgaven. Et artefakt er et verktøy for å løse en oppgave dersom det blir benyttet.

Når jeg benytter formuleringen «*multiple representasjoner innen romgeometri*» handler det om ulike representasjonsformer for romfigurer. Med utgangspunkt i for eksempel romfiguren *kube* er fagbegrepet «kube» som figurnavn én representasjonsform. En konkret kube er en annen representasjonsform og et bilde, eller en skisse er alle forskjellige representasjoner av samme objekt. Videre vil en skriftlig forklaring av figuren være en ny representasjonsform og formel for kubens volum eller overflate andre representasjoner av kuben. Senere i avhandlingen utdypes dette videre.

Hva menes med «*behandlings- og konverteringskompetanse*»? I kapittel 3.0 *Teori og begrepsrammeverk*, analyseres tabell (Duval, 2006) over semiotiske representasjonsregistre. Her beskrives en *behandling* som kompetanse for omgjøring av en representasjon innen samme representasjonsregister; for eksempel sammenhengen mellom romfigurens navn og dens geometriske beskrivelse. Videre beskrives en *konvertering* som kompetanse for transformering av en romfigur fra et register til et annet; for eksempel sammenhengen mellom en visuell tredimensjonal romfigur og en utbrettet overflate av samme romfigur. Teorien utgreier hvilke overganger som antas intuitive eller kompliserte.

Hva menes med «fra teori til praksis»? I denne sammenheng anvender jeg ordlyden for å vise til hvordan man, ved å la seg inspirere av til dels vanskelig tilgjengelig teori, gjennom analyse kan omsette denne i praksis. Dette er mitt forsøk på å tilgjengeliggjøre teori i et praktisk romfigurfokus.

2.0 Tidligere forskning innenfor temaet representasjoner

Innen matematikkfeltet har bruk av multiple representasjoner, i læring og undervisning, blitt viet stor grad av interesse blant matematikere over flere år. Stadig flere klasseromsbaserte forskningsstudier har bidratt til overbevisning om fordeler ved bruk av multiple representasjoner (Tripathi, 2008). Fokus har skiftet fra *om* man skal bruke forskjellige representasjoner - til *hvordan bruke* multiple representasjoner med fordel for læring og undervisning av spesifikke konsepter og hvordan dette fostrer matematisk læring. Tripathi beskriver dette med den enkle setningen:

«Each representation communicates some aspects of a line while ignoring other aspects».

Å lære et konsept innebærer vanligvis ikke kun å vite meningen med konseptet - men også den multiple relasjonen som kobler konseptet til andre ideer. Dess bredere dette bildet er - resulterer i ganske kompleks og innviklet struktur som er det elever streber å forstå.

> «Using these different representations is like examining the concept through a varity of lenses, wich each lens providing a different perspective that makes the picture (concept) richer and deeper. As the number of perspectives increases, we develop better insight into the concept» (Tripathi, 2008)

Tripathi henviser til Shulman og Quinlan (1996) som påpekte at bruk av multiple representasjoner er del av matematikklæreres pedagogisk innholdskunnskap. «In what forms would I like my students to see this concept? Are those contexts accesible to my students in terms of their cognitive level?» Videre refererer Tripathi til Lesh, Post & Behr (1987) som foreslo klassifisering av matematiske representasjoner under henholdsvis; konkrete (manipulasjoner), språk, symboler (notasjoner), semikonkrete (billedlige) og kontekstuelle (virkelige situasjoner). Senere påpekte Arcavi (2003) at visualiseringer anerkjennes som nøkkelkomponent i både resonnement, problemløsning - og til og med i bevis (Tripathi, 2008). Avslutningsvis hevder Tripathi at elevenes representasjoner og evne til å overføre ideer fra en representasjon til en annen - indikerer elevenes forståelse.

Å undervise matematikk ved bruk av multiple representasjoner kan hjelpe elevene å utvikle evne til å representere matematiske ideer i ulike former men samtidig være utfordrende oppgave å orkestrere for faglærere (Tripathi, 2008).

Hyde et al. refererer til Lesh, Lester & Hjalmarson (2003) som hevder at den første utviklingen av meningen av algebraiske begreper er sterkt kontekstavhengig og at elever bygger konseptuell forståelse gjennom omfattende arbeid med multiple representasjoner av et spesielt konsept - i en sammenheng. Videre tilfører Hyde et al. at elever bør bevege seg fra en relativt konkret representasjon til mer abstrakte - den mest abstrakte representasjonen er likninger uten kontekst (Hyde, et al., 2006).

Matematematiske objekt er således abstrakte og kun tilgjengelig gjennom forskjellige representasjoner. En representasjon av et matematisk objekt, for eksempel begrepet kube, er del i komplekst semiotisk system - representasjonen er noe som står for noe annet. Raymond Duval har over årrekker studert elevers bruk av representasjoner og publisert flere artikler. I en av disse fremstiller han tabell som viser hvordan ulike semiotiske system henger sammen, videre beskriver han ulike transformasjoner og hvordan disse varierer i vanskegrad. Tabellen kan hjelpe lærere å forstå elevenes besvær med spesifikke overganger (Duval, 2006). I kapittel *3.0 Teori og begrepsrammeverk* vil tabellen belyses og i kapittel *5.0 Resultat og analyse* beskrives hvordan jeg praktisk har tolket tabellen i lys av hovedtemaet; romfigurer.

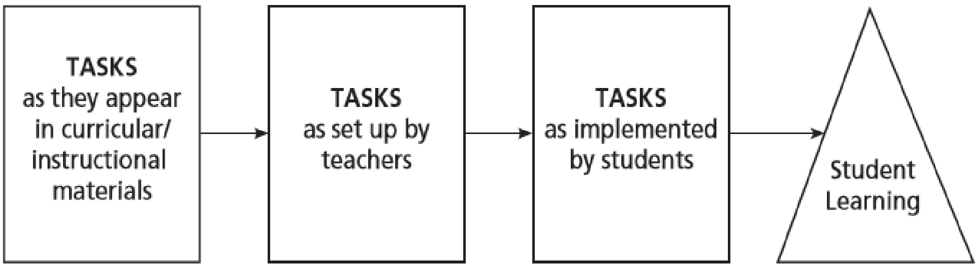
Swan legger føringer for hvordan man kan tilrettelegge for elevers praktiske arbeid med multiple representasjoner for å øve relasjon mellom dem ved bruk av «Matching cards» (Swan, 2008). I kapittel *3.0 Teori og begrepsrammeverk* blir hans materiale og undervisningsmetode utdypet og i kapittel *5.0 Resultat og analyse* refereres hvordan jeg bearbeidet hans materiale til spesifikt romfigurtema.

3.0 Teori og begrepsrammeverk

I dette kapittelet presenteres relevante teoretiske rammeverk i logisk rekkefølge. Utvalg av rammeverk vil støtte besvarelse av forskningsspørsmål og tilknyttet delspørsmål. Hvordan det utrettes forklares under hver enkelt teori. Kapittelet starter med presentasjon av Stein & Smiths rammeverk for refleksjon rundt matematikkoppgaver (2011) - som anses å legge grunnlag for elevenes læringsutbytte i det lange løp. Deretter presenteres Stein & Smiths teori om kognitive krav tilknyttet matematikkoppgaver etterfulgt av kort oppsummering av forskjell mellom instrumentell og relasjonell undervisning fremlagt av Skemp (1976). Så gjengis Swans beskrivelse av oppgaver som fremmer konseptuell forståelse (2008) med videre hovedvekt på multiple representasjoner som arbeidsmetode avløst av kort oppsummering av van Hieles teori om utvikling av barns geometriforståelse fra 1950- tallet gjengitt av Smedstad (2008). Deretter følger analyse av Duvals tabell over semiotiske representasjonsregistre (2006) konkretisert ved hjelp av eksempel fra Swans multiple undervisningsopplegg og representasjoner av algebra. Avslutningsvis påpekes kobling fra Duvals tabell via Janviers matrise (1987) og utgreiing av direkte og indirekte oversettelsesprosesser mellom semiotiske registre.

3.1 Matematisk rammeverk for refleksjon rundt matematikkoppgaver

Stein og Smith utarbeidet rammeverk for matematikkoppgaver visualisert i figur under (Stein & Smith, 1998). Teorien er relevant for forskningsspørsmålet da undervisningsopplegg tilknyttet avhandlingen er utformet av meg som faglærer med utgangspunkt i andres undervisningsmateriell og arbeidsmetode.



Figur 2: Rammeverk for matematikkoppgaver (Stein & Smith, 2011, s. 211)

Figur 2 viser at matematikkoppgaver gjennomgår tre faser før eventuelt læringsutbytte fremkommer. Først kontekstualisert som kompetansemål i læreplan eller visualisert som oppgaver i instruksjonsmateriell. Dette er ulike hjelpemidler læreren har under utvelgelse av oppgaver. Deretter foretar læreren oppgaveprioritering og hvordan oppgaven presenteres for elevene. Deretter handler det om hvordan elevene tar imot og implementerer oppgavene i klasserommet. Alle tre fasene, men spesielt implementeringsfasen, er ifølge Stein og Smith; avgjørende for elevenes læringsutbytte (Stein & Smith, 1998).

3.2 Kognitive krav i matematikkoppgaver

Videre i utvelgelse og/eller utforming av oppgaver er det vesentlig å se nærmere på hvilke kognitive krav som stilles i matematikkoppgavene. Først beskrives forskjell mellom instrumentell og relasjonell tilnærming (Skemp, 1976). Deretter beskrives ulike kognitive nivå oppgavene kjennetegnes av (Stein & Smith, 1998). Teorien er relevant for forsknings-spørsmålet da multiple representasjoner kjennetegner oppgaver på høyere kognitivt nivå.

Grunnleggende del av arbeidet til faglærere i matematikk er som beskrevet i forrige delkapittel - å velge eller formulere oppgaver som presenteres elever. Hva elevene lærer og hvor motiverte de blir - påvirker elevenes oppfatning av faget. Er det i deres øyne viktigst å huske formler eller å benytte logisk tenkning? Dette bringer oss til Skemp (1976) og hans teori om relasjonell og instrumentell forståelse. Tradisjonell undervisning er kjent for fokus på regelpugging, standardalgoritmer og gjentatt prosedyre. Denne formen for undervisning kaller Skemp instrumentell. I denne settingen er lærer dominerende, fokus tillegges om produkt er korrekt og anvendte oppgaver tilrettelegger for kun én «riktig» vei til svaret. Elevene pugger regler uten aktiv tankegang og følger passivt steg for steg prosedyrer. De lærer hva og hvordan - men ikke hvorfor. «Rules without reasons» (Skemp, 1976). Etter en måned husker elevene ca 8 prosent av det de lærte jamføre glemselskurven (Strand, 2023).

I moderne undervisning slipper elevene mer til og læreren inntar større veilederfunksjon; Skemp kaller denne formen relasjonell tilnærming. Lærer inntar en proaktiv og relasjonsorientert klasseledelse ved å åpne opp for samtale. Fokus endres i stor grad mot matematisk diskurs og prosessorientert undervisning - moment som hjelper elevene å få dypere forståelse for matematiske sammenhenger. Elevene lærer å argumentere for hvorfor metoder fungerer og å reflektere over svar og metodene som benyttes. En slik tilnærming tilrettelegger for aktive elever som kan løse oppgaver på flere måter. «Knowing both what to do and why» (Skemp, 1976). En relasjonell tilnærming blir dermed ønskelig - men ifølge Stein & Smith (1998) fordeler matematiske oppgaver seg mellom enten lave eller høye kognitive krav. I den sammenheng er det viktig å være bevisst matematikkoppgavers kjennetegn.

3.2.1 Oppgaver med lave kognitive nivå

Oppgaver med lave kognitive krav beskrives på første nivå som memorerings oppgaver, slike karakteriseres av puggestoff som regler og formler eller eksempelvis at $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$. Andre eksempler er spørsmålet om hvor mange hekto er i en kilo, antall kilometer i mil eller arbeid med horisontale innfyllingsoppgaver og automatisering av den lille gangetabellen. Oppgaver som på andre nivå karakteriserer prosedyrer *uten* sammenheng kan eksempelvis være å utføre omgjøring fra desimaltall til prosent ved å flytte komma to hakk til høyre eller arbeid med standardalgoritmer ved innfylling av sum i vertikalt oppsatte regnestykker. Generelt oppgaver som implisitt indikerer hvilken prosedyre som skal utføres uten at prosedyrene blir tilknyttet sammenhenger eller underliggende begrep (Stein & Smith, 1998). Oppgaver preget av lave kognitive krav vil ifølge Skemp danne grunnlag for instrumentell forståelse (Skemp, 1976).

3.2.2 Oppgaver med høye kognitive nivå

Oppgaver med høye kognitive krav presenteres på tredje nivå som arbeid med prosedyrer *med* sammenhenger. Slike oppgaver kjennetegnes ved at begrep og prosedyrer representeres på ulike måter ved bruk av for eksempel begrep, symboler eller illustrasjoner. Utvikling av begrepsmessig forståelse kan støttes ved å benytte ulike representasjoner i en og samme oppgave. Eksempelvis utfordres elevene til å videreutvikle egen strategiforståelse ved å resonnere med utgangspunkt i tekstoppgaver, eller de kan bli utfordret til å formulere egne oppgaver for å øke bevissthet om mulige utfordringer i for eksempel divisjon av brøker. Oppgaver på høyeste nivå krever matematisk tenkning og utforskning, resonnering, systematisering og utvikling av strategier. Kompleks tenkning kreves for å finne fremgangsmåte til løsning – dermed kan elevene utvide forståelse av matematiske relasjoner, begrep og prosesser. Det kreves selvregulering fra elevenes side hvor de må benytte relevant forkunnskap og tidligere erfaringer (Stein & Smith, 1998). Slike oppgaver kan skape usikkerhet blant elevene da de gjerne møter ukjente elementer. Eksempel på oppgave kan være: «Hvor mange personer er det plass til i kantina på skolen?». Elevene må selv sette rammer de finner sannsynlige - moment som kan vippe selv den sterkeste av pinnen. Ifølge Skemp vil overnevnte oppgaver tilrettelegge for relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

Det er ikke til å stikke under stol dersom man tar innover seg overnevnte beskrivelser - erkjenner man at tradisjonell undervisning i Norge direkte kan kobles til oppgaver på lave kognitive nivå. Det er fremdeles gjengs oppfattelse at matematikk er faget hvor det gjelder å huske regler og prosedyrer. Erlwanger løftet allerede i 1973 diskusjonen om hva elevene lærer i og om faget når regler og prosedyrer uten forståelse vektlegges. Med utgangspunkt i observasjoner av en elevs læring og oppfatning av faget - utgav Erlwanger samme år, artikkel som i dag regnes som klassiker innen matematikkdidaktisk forskning (Valenta, 2016). I ettertid har mange studier påvist betydning av fokus på utvikling av forståelse ved utfordring til å resonnere, fremlegge hypoteser og utvikle egne strategier (Stein & Smith, 1998; Boaler, 1997, 1998). Boaler sammenliknet i sin undersøkelse to skoler hvor den ene skolen stort sett arbeidet med lave kognitive nivå og den andre skolen hovedsakelig jobbet med høye kognitive nivå. Datagrunnlag ble samlet inn over flere år og resultatene viste at skolen som stilte høye krav gav høyere læringsutbytte og mer motivert elever (Valenta, 2016).

Hva så med lavt presterende elevene? Hvordan responderer de på oppgaver med høye kognitive krav og hvordan tilrettelegger lærerne for dem? Gjennom studie påviste Boaler et al. (2000) at det blant lærere er vanlig å anta at elevgruppen ikke drar nytte av slike oppgaver, mens flere studier (eksempelvis Ahmad, 1987; Watson, 2001) viser at også denne gruppen kan tenke matematisk og har høyere læringsutbytte dersom de gis mulighet til å kommunisere og utforske i undervisningssammenheng (Valenta, 2016).

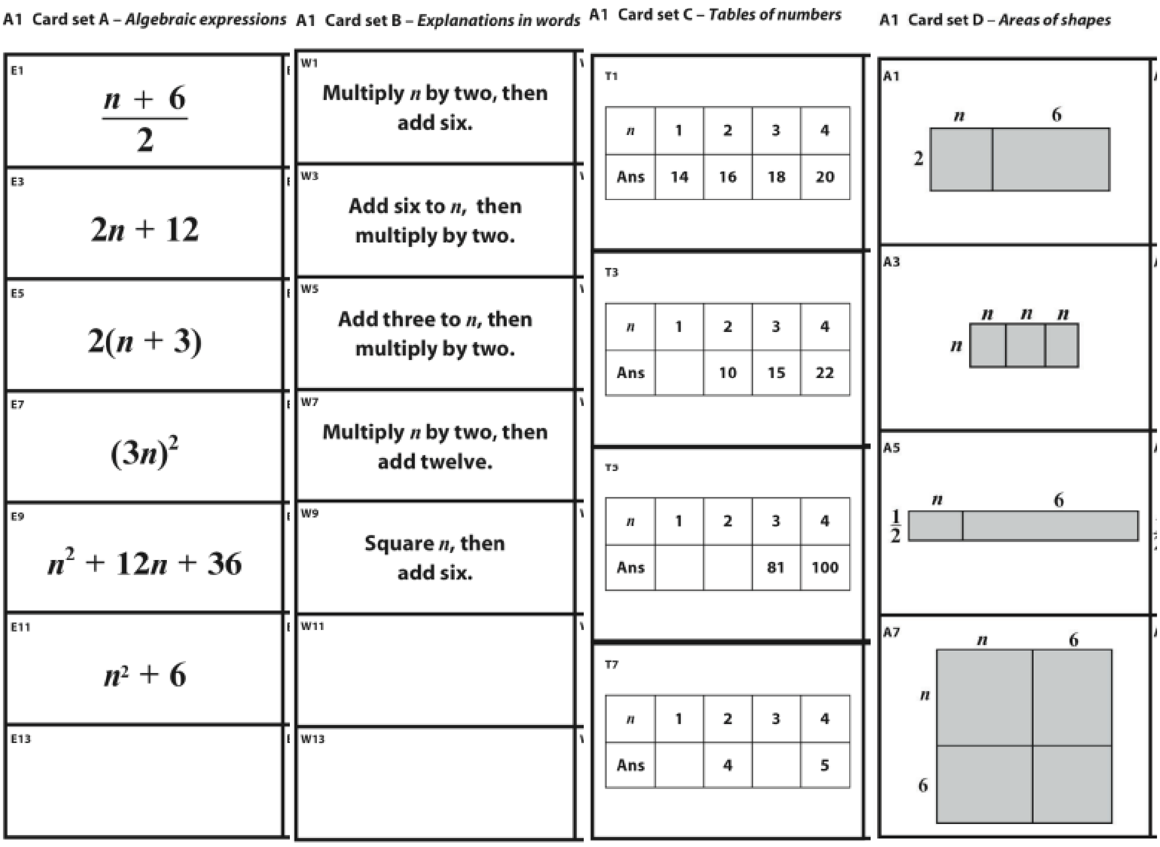
Som beskrevet over vil oppgaver med høye kognitive krav være å foretrekke, men Valenta påpeker også utfordringer ved gjennomføring av slike. Da oppgavene er krevende ber ofte elevene læreren om hjelp. Lærerne kan da fort havne i fella ved å forenkle spørsmålet – og av og til forenkle så mye at spørsmålet til slutt blir trivielt ved å stille ledende spørsmål gjennom såkalt traktkommunikasjon (Mehan, 1979). Således er oppgaver med høyere kognitive krav utfordrende for både elever og lærere (Valenta, 2016).

3.3 Oppgaver som fremmer konseptuell forståelse

Konseptuell forståelse kan kort sagt sammenstilles med relasjonell forståelse da begge begrep inkluderer gjennomgripende innsikt mellom sammenhenger hvor kunnskap veves sammen, dette innebærer både relasjoner mellom gammel kunnskap og tilknyttet ny kunnskap. Swan presenterte i artikkelen «A Designer Speaks» (2008), en oversikt over fem oppgavetyper som fremmer konseptuell forståelse. 1. Å klassifisere matematiske objekt. 2. Å tolke multiple representasjoner. 3. Å vurdere matematiske utsagn. 4. Å lage problemoppgaver og 5. Å analysere begrunnelser og løsninger. Hans læringsteoretiske bakteppe er inspirert av sosialkonstruktivister som Bakhtin (1981) og Vygotsky (1996) som hevder at språk og symboler tilegnes og internaliseres gjennom sosialt samarbeid hvor kommunikasjonen er grunnleggende for kultivering av begrep. En måte å oppnå dette på er å bevege seg «From a transmission to a collabrative orientation» (Swan, 2005) (Swan, 2008).
Swan formulerte videre ulike designprinsipper som bør følges under utarbeiding av undervisningsopplegg generelt: oppgaver bør bygge på kunnskap de lærende allerede har og søke utvikling av matematisk språk gjennom kommunikativ aktivitet ved bruk av rike samarbeidsoppgaver. Underveis bør både lærer og elev konfrontere vanskeligheter fremfor søke å unngå dem og uttrykke og diskutere vanlige misforståelser og andre overraskende fenomen. Lærer bør bruke høyere ordens spørsmål og hensiktsmessig bruke individuell-, samarbeid i små grupper og helklasseinteraktiv læring. Videre bør lærer oppmuntre til begrunnelser fremfor å finne svar og skape forbindelser mellom emner både innenfor og utenfor matematikken. Mål for lærer bør være å gjenkjenne både hva som blir lært og hvordan (Swan, 2008).

Sett i forhold til fokus i denne avhandlingen vil videre bruk av Swan kobles mot type to oppgaver; tolke multiple representasjoner.

Swan presenterte i artikkelen et spesifikt undervisningsopplegg som omhandlet multiple representasjoner underlagt temaet algebra. Elevene skulle koble algebraiske uttrykk med tilhørende ordforklaringer, tabeller og arealmodeller med mål å utvikle konseptuell forståelse. Swan har revidert undervisningsopplegget flere ganger. Artikkelen tar utgangspunkt i tilfellet hvor opplegget ble utprøvd i en svak blandet elevgruppe fra 16 – 19 år, som tok matematikk på ny på FE (Further Education) college. Elevene ble satt i grupper på 2-4 deltakere. Det kommer ikke tydelig frem i artikkelen hvor lang tid det er avsatt til arbeidsprosessen, men det beskrives at de i oppstarten brukte noe tid på å få elevene på sporet av hva oppgaven innebar (Swan, 2008).

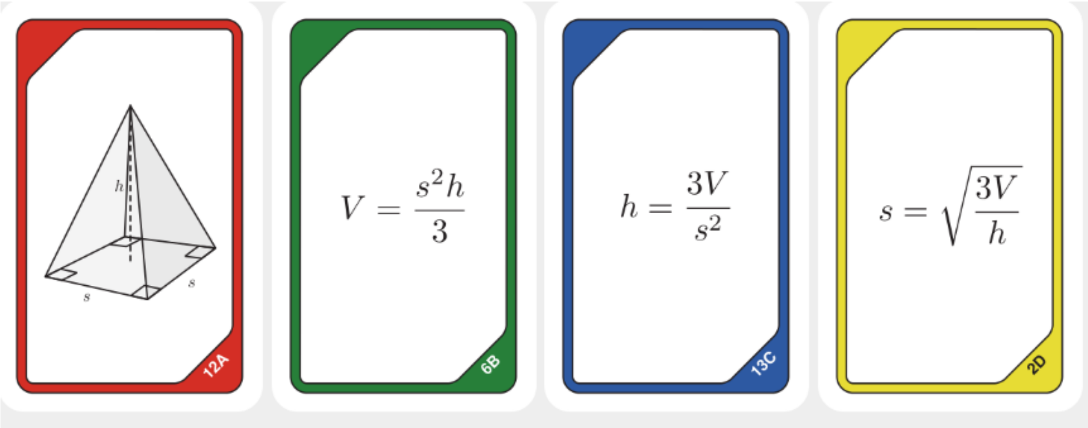


Figur 3: Utsnitt av "Cards for matching" (Swan, 2008, s. 5)

Figur 3 viser at undervisningsopplegget er rammet inn i ulike «kort» som elevene fikk utdelt, forstørret fra A4 til A3. Over vises et utsnitt av involverte representasjoner. Elevene ble presentert for de ulike i rekkefølgen: 1. Sette sammen algebraisk utrykk (kortsett A) og ordforklaring (kortsett B). 2. Legge til tabellene (kortsett C). 3. Legge til arealmodellene (kortsett D). Som figur 5 viser er noen av rammene blanke; dette utfordret elevgruppen til å fylle inn eventuelle mangler. Blanke rammer kunne for eksempel mangle algebraisk uttrykk, en ordforklaring eller deler av tabell. Innimellom vil også noen representasjoner under samme kategori kunne ha samme verdi for at elevene skulle bli fortrolig med at en og samme verdi kan være ulikt representert. Avslutningsvis gjennomførte Swan plenumsoppsummering hvor eleven argumenterte for sine løsninger og beskrev hva de hadde lært og eventuelle utfordringer (Swan, 2008); *Tasks as they appear in curricular/instructional materials* (Stein & Smith, 1998).

Artikkelen viser avslutningsvis hvordan Swan tok tak i tre andre matematiske emner og benyttet samme arbeidsmetode. Han viser da til for eksempel multiple representasjoner av desimaler (tilknyttet del av 10x10 kvadrat og posisjon på tidels skala) og rasjonale tall (tilknyttet del av enhetskvadrat og posisjon på assortert skala). Sistnevnte anses som meget krevende oppgave som omhandler å koble blant annet verbale beskrivelser, frekvensgrafer og kumulative frekvensgrafer. Samtlige av oppgavene begrenser seg til fire ulike representasjoner, og Swan hevder avslutningsvis at metoden kan videreføres til alle emner innen matematisk læreplanmål (Swan, 2008).

Liknende tilnærming finnes tilgjengelige i norske matematikkrelaterte kortspill. «getSmart» er en kortserie utgitt av GettingBetter som eies av Skage Hansen. Firmaet startet opp i 2006 og produkter som tilbys er alt fra spill til bøker, videolæreverk og konkreter;
Tasks as they appear in curricular/instructional materials (Stein & Smith, 1998).
Innenfor «getSmart» serien foreligger lærerike spill som spenner over mange forskjellige (både norskfaglige- og) matematiske tema. Kortseriene minner sterkt om Swans undervisningsopplegg. Nærmeste romfigurtemaet som foreligger på GettingBetter i dag - er kortsettet *getSmart Formelomgjøring*. Ulike innfallsvinkler ved bruk av disse kortsettene er nærmere beskrevet på getSmart.no



Figur 4: Kortsettet «getSmart Formelomgjøring» - med tillatelse fra Skage Hansen (GettingBetter, getSmart Formelomgjøring, 2006-2023)

Som i Swans kortsett forekommer det også her kun fire ulike representasjoner. Begrunnelse for avgrensningen har jeg ikke funnet. Kortsettet er beregnet for barn i aldersgruppen 12 år og oppover. Da temaet romfigurer bygger på planfigurer henviser jeg også til getSmart kortsett i forhold til todimensjonale figurer. Det heter *Jossie Geometrisk planfigurer* og er beregnet for samme aldersgruppe.

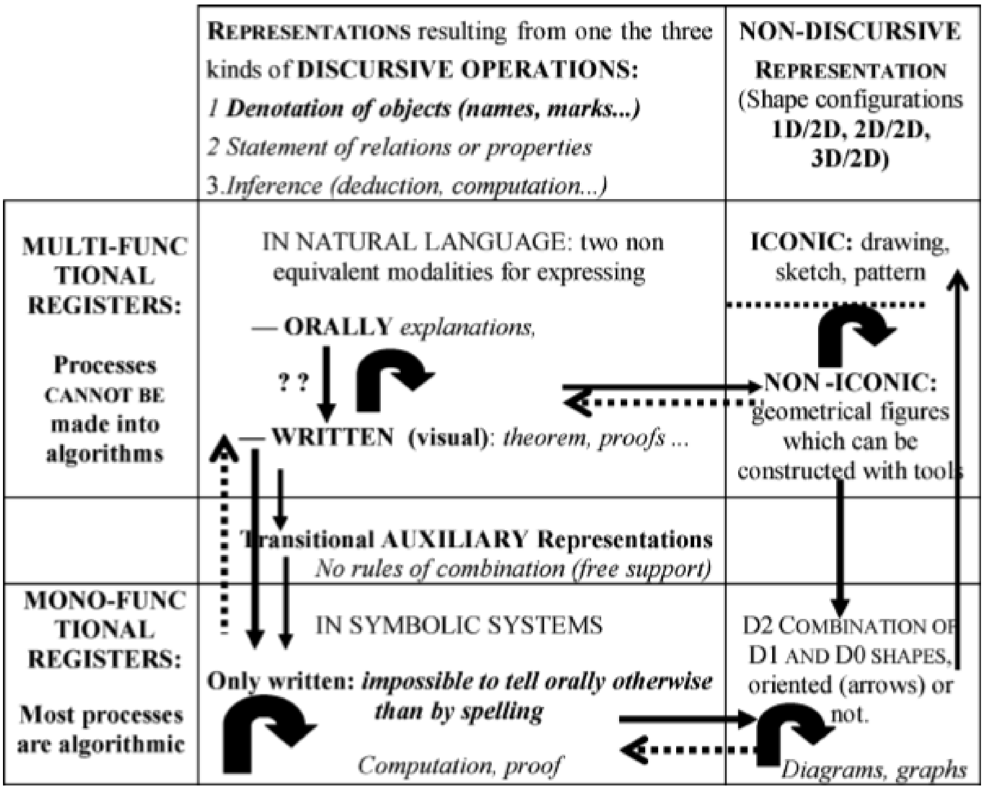
Figur 5: Kortsettet «Jossie Geometriske planfigurer» - med tillatelse fra Josefine Haugen (GettingBetter, Jossie Geometriske planfigurer, 2006-2023)

Inspirasjonskilde til sistnevnte kortsett er som beskrevet på deres nettside; Van Hiele modellen - og kan benyttes på de tre første nivåene: visualisering og gjenkjennelse (av geometriske figurer), analyse (kunne beskrive egenskaper til geometriske figurer) og logisk ordning/uformell deduksjon (kunne se hvordan de geometriske figurene forholder seg til hverandre).

På bakgrunn av dette vil jeg nå kort presentere oppsummering av van Hieles teori.
Van Hiele & Van Hiele utviklet på 1950-tallet teori som fremstilte utvikling av barns geometriforståelse (Smedstad, 2008). Van Hiele kategoriserte forståelsen under fem nivå men ble i ettertid kritisert for å ikke ha et nivå 0 – nivået før gjenkjennelse av figurer (da barn forholder seg til figurer uten å ha konkrete navn på de forskjellige figurene). Teorien er interessant for forskningsspørsmålet fordi den kan hjelpe å forstå hvor elevene er i utvikling av forståelse innen plangeometri - grunnlag for forståelse av romgeometri. Smestad påpeker i artikkelen at man bør være skeptiske til å nivåplassere elever, men det kan hjelpe lærere til å vite hvor elevene ligger i forhold til individuelle utvikling. I følge van Hiele kommer nivåene etter hverandre og under utvikling kan det *ikke* hoppes over et nivå. Det vil si at dersom undervisning foregår over elevens nivå presses eleven til å pugge fremfor å skape grunnlag for relasjonell forståelse. De fem ulike nivåene har spesifikke språk, egne symboler og nettverksrelasjoner. I kontrast til Piagets teori om barnets alder og modenhetsnivå - mente van Hiele at bevegelsen, fra ett nivå til neste - avhenger av undervisningserfaringer og at hvert nivåskifte innebærer flere faser. I følge Smestad vil midlertidig norske studenter først på universitetsnivå møte på nivå 4 og 5. I 1986 skrev van Hiele: «Til tider vil halvparten av klassen snakke et språk som den andre halvparten ikke forstår. Dette er uunngåelig». Det er altså vesentlig, i planlegging av geometriaktiviteter, å vurdere om undervisningsopplegget er egnet elever på forskjellige nivå. Samtidig må man vurdere om planlagt aktivitet kan bidra til at elever oppnår ny innsikt og derpå økt nivå. Det er ifølge van Hiele likevel viktig at lærere ikke forenkler i så stor grad at både utfordring og motstand uteblir (Smedstad, 2008).

3.4 Kognitiv analyse av problemer med forståelse i læring av matematikk

Matematikkfaget anses som abstrakt og er domenet hvor vi finner de største semiotiske representasjonssystemene. Eneste tilgjengelige vei og behandling av matematiske objekt er gjennom bruk at tegn og semiotiske representasjoner. Evne til å gå fra et representasjons-system til et annet er kritisk for læringsprogresjon og problemløsning (Duval, 2006).
Duval utviklet og presenterte tabell for å beskrive forskjellige matematiske prosesser. Teorien er vesentlig for forskningsspørsmålet da den kan bidra til å se etter hvilke representasjoner elevene foretrekker og benytter, og for å avdekke hvilke representasjoner jeg som faglærer bør fokusere mer på i fremtidig undervisning innen temaet.



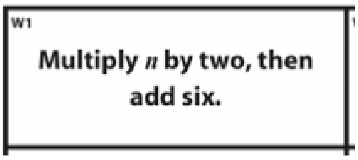
Figur 6: Classification of the registers that can be mobilized in mathematical processes (Duval, 2006, s. 110)

Figur 4 viser Duvals tabell fremstilling av ulike semiotiske registre – denne kan med første øyekast virke noe uoversiktlig. Han deler to ulike semiotiske system, horisontalt, inn i henholdsvis multi- og monofunksjonelle registre. Disse anses som hovedkategorier av representasjonssystem.

3.4.1 Multifunksjonelle og monofunksjonelle registre

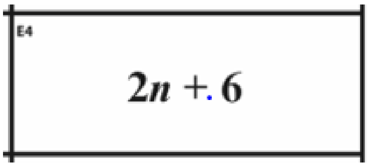
Multifunksjonelle registre har lav grad av stringens (logisk klarhet) og kjennetegnes ved naturlig språk. Videre deles det her inn i muntlige og skriftlige formuleringer. Sistnevnte inkluderer kategorier som teoremer, bevis og så videre. Registeret innbefatter altså både fag- og hverdagsspråk - disse prosessene kan aldri omgjøres til algoritmer. Vi kan merke oss at Duval markerer vekslinger mellom verbal og skriftlig formulering med enten to spørsmåltegn eller en rett pil; ulike piler er nærmere utdypet i 3.4.4. Spørsmålstegnene kan derfor tolkes som at Duval på publiseringstidspunktet fremdeles var usikker på om en overgang fra muntlig til skriftlig anses vanskeligere enn en overgang fra det skriftlige til det muntlige.

Eksempel fra Swans «Matching cards» (Swan, 2008) kan være kortet W1 (*Card set B* - Explanations in words) - som beskriver et algebraiske uttrykket med ord; en diskursiv operasjon utdypet i 3.4.3:



Figur 7: Kort fra A1 Card set B – Explanations in words (Swan, 2008, s. 5)

Monofunksjonelle registre har derimot høy grad av stringens og innebærer algoritmer. Registeret er kun skrevet visuelt og umulig å forklare verbalt annet enn med staving ved hjelp av symbolsk system. Symbolsk notasjon av beregninger og bevis hører til her, og de fleste prosessene her er algoritmer.
Eksempel fra Swans «Matching cards» (Swan, 2008) kan være kortet E4 (*Card set A* - Algebraic expressions) - som beskriver det algebraiske uttrykket med symbolsk notasjon ved anvendelse av diskursiv operasjon:



Figur 8: Kort fra A1 Card set A – Algebraic expressions (Swan, 2008, s. 5)

En overgang fra kortsett *B* til kortsett *A* innebærer konvertering fra multifunksjonelt til monofunksjonelt register og kan for mange elever være svært krevende. Algebra vil i mange elevers øyne fremstå som gresk for å ta en sammenlikning. I dette tilfellet medfører det i tillegg behov for å oversette fagbegrep fra et språk (engelsk) til et annet (norsk), men det er jo fullt mulig å oversette Swans undervisningsmateriale før norske elever eventuelt får det presentert; *Tasks as set up by teachers* (Stein & Smith, 2011). Elever vil kanskje også ha behov for å støtte seg på hverdagsspråk for å gjenkjenne den algebraiske notasjonen; «Gang n med to og legg til/pluss seks». Dersom de gjør det benytter de i tillegg en behandling innen det multifunksjonelle registeret før de kan konvertere til det monofunksjonelle.
Konverteringer blir sammen med *behandlinger* nærmere utdypet i kapittel 3.4.4.

I tabellen er det verdt å merke seg at begrepet *bevis* oppgis å tilhøre under både multi- og monofunksjonelle registre. Det finnes flere typer matematiske bevis - og i et bevis kommer argumentene skritt for skritt. Innenfor geometri består bevisene av spesielle typer, visuelt fremstilt med tilhørende skriftlig notasjon kombinert med symbolsk notasjon (Hinna, Rinvold, & Gustavsen, 2011).

Bevis hentet fra for eksempel tallære kan med utgangspunkt i multifunksjonelt register være: «Produktet av to oddetall er alltid et oddetall»; muntlig eller skriftlig formulert. Men dette i seg selv er kun en påstand om tall. Derfor kan man spesialisere med konkret eksempel; «tre ganger fem er femten» eller liknende. Konvertert til monofunksjonelt register gir dette eksempelet; $3 * 5 = 15.$ Videre kan oddetallene generaliseres ved å foreta behandling innen monofunksjonelt register ved å transformere til symboler. Vi benevner første oddetall $2n + 1$ og andre oddetall $2m + 1$ (vi trenger to variabler, n og m, fordi to oddetall kan være, og i dette tilfellet er, forskjellige) og kan deretter benytte algebraisk notasjon og bevise:
$(2n + 1)(2m + 1) = 2(2nm + n + m) + 1$ Q.E.D.
For å bevise benytters således både multi- og monofunksjonelle registre. Derfor vil jeg påstå at bevis i stor grad kan argumenteres å tilhøre hjelpemiddelraden nærmere beskrevet under.

3.4.2 Midlertidig hjelperepresentasjon registre

Mellom multi- og monofunksjonelle semiotiske registre plasserer Duval nemlig en «midlertidig hjelperepresentasjon». Her foreligger ingen regler for kombinasjon og representasjonen kan benyttes som brukerstøtte ved konverteringer fra det multifunksjonelle til det monofunksjonelle registeret eller motsatt. Konkreter tilhører denne raden.
Videre deler Duval overnevnte registre i vertikale kolonner; henholdsvis underlagt diskursive operasjoner og ikke-diskursive representasjoner. Disse anses som bikategorier av representasjonssystemet.

3.4.3 Diskursive operasjons registre og ikke-diskursive representasjons registre

Begrepet *diskursiv* betyr sammenhengende språklige enheter uttrykt i gitt kontekst. Diskursive operasjoner er ord, symboler og tegn. Herunder deles det videre inn i tre ulike operasjoner: 1) betegnelse på gjenstander (begrep, merker …), 2) erklæring om forhold eller egenskaper og 3) slutning (deduksjon, beregning …). Her representert som muntlige forklaringer eller skriftlige, visuelle representasjoner.

Ikke-diskursive representasjoner er figurer i ulike dimensjoner og kombinasjoner av disse. Tilknyttet multifunksjonell rad deles de ikke-diskursive operasjonene videre inn i *ikoniske* (skisser, tegninger og mønster) og *ikke-ikoniske* (geometrisk figurer konstruert med verktøy). Eksempel fra Swans «Matching cards» (Swan, 2008) kan være kortet T6 (*Card set C* - Tables of numbers) - som beskriver det algebraiske uttrykket ved bruk av tabell, ikke-diskursiv ikonisk representasjon:

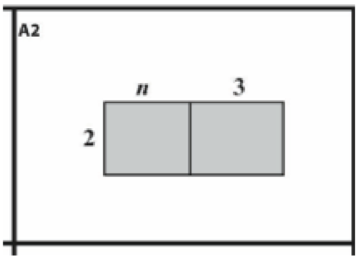
T6

n	1	2	3	4
Ans		10	12	14

Figur 9: Kort fra A1 Card set C – Tables of numbers (Swan, 2008, s. 5)

Elever som tidligere mestret å konvertere kortsett *B* til *A* må deretter konvertere tilbake til multifunksjonelt register - denne gangen transformert til en ikke-diskursiv ikonisk (mønster) representasjon. Tilhørende tabell mangler svar når variabelen $n = 1$. Elevene må se etter relasjonen mellom kortsett *A*, algebraisk uttrykk, ved å sjekke kortsett *C*, tabell, og kontrollere om tabellens verdier stemmer for nettopp dette uttrykket. Elever kan da ha behov for å gå *via* det multifunksjonelle registerets diskursive operasjon og benytte hverdags- eller fagspråk «To multiplisert med n, deretter adder seks» for å fullføre konvertering til det multi-funksjonelle, ikke-diskursive registeret. Først må de sjekke om verdiene stemmer for $n = 2, 3\ og\ 4$ (tilbake til det diskursive; beregnings operasjon i monofunksjonelt register). Dersom de løser dette kan de videre foreta en behandling av uttrykket $2n + 6$ med $n = 1$ som gir $2(1) + 6 = 8$. Dermed har de funnet svar på den tomme ruten tilhørende tabell i kortsett *C*. Dette viser behovet som kan oppstå for å anvende det Janvier (1987) kaller en *indirekte oversettelsesprosess* som beskrives i 3.4.5.

Tilknyttet monofunksjonell, ikke-diskursive register tilhører todimensjonale kombinasjoner av null- (punkt) og endimensjonale- (linjer) kombinasjoner (diagrammer og grafer).
Eksempel fra Swans «Matching cards» (Swan, 2008) kan være kortet A2 (*Card set D* - Areas of shapes) - som beskriver det algebraiske uttrykket ved bruk av arealmodell; ikke-diskursiv representasjon:



Figur 10: Kort fra A1 Card set D – Areas of shapes (Swan, 2008, s. 5)

Dersom elevene tidligere har behersket konverteringene fra kortsett *B* - *A* - *C* må de nå, atter engang, konvertere til det monofuksjonelle-, denne gangen underlagt det ikke-diskursive representasjonsregisteret. Representasjonen krever at elevene har kunnskap om hvordan lese arealmodeller. De må tolke 2 tallet på venstre side av modellens totalareal og først multiplisere dette tallet med første ledd, variabelen n, deretter addere tilhørende ledd og multiplisere videre med 3 tallet. Elevene kan deretter konvertere tilbake til det monofunksjonelle registeret underlagt en diskursiv operasjon og gjennomføre beregningen $2 * n + 2 * 3 = 2n + 6$ (diskursiv - erklæring om forholds operasjon).

Behersker de dette kan de da se sammenhengen mellom alle fire representasjonsregistrene. Dersom elevene ikke er fortrolig med arealmodeller kan det være forvirrende element at modellen viser til tallet 3 og ikke tallet 6 - som i opprinnelige representasjon i kortsett *B*. Arealmodeller er forøvrig en representasjonsform jeg har merket meg som mer benyttet i nyere matematikkoppgaver; *Tasks as they appear in curricular/instructional materials* (Stein & Smith, 2011).

3.4.4 Behandlinger og konverteringer

I figuren fremkommer ulike piler; buede tykke, rette tynne og stiplete. Pilene viser til ulike *vanskelighetsgrader av omgjøring innen samme register og overganger mellom ulike registre*. Under presenteres en forklaring på de ulike pilene.

Tykke buede piler viser til enkel omgjøring innen samme register. Duval benevner disse omgjøringene for «treatments»; på norsk «*behandlinger*». Behandlinger er likevel ikke alltid like intuitive. Ifølge Duval kan man gjøre slike behandlinger innen alle fire semiotiske register system (opptil 4 stk).

Tynne rette piler viser til en noe vanskeligere overgang. Dette kan være en behandling innenfor det multifunksjonelle registeret (fra muntlig til skriftlig språk), eller en overgang mellom ulike semiotiske registre. Ifølge Duval foreligger det her flest muligheter for overganger (opptil 8 stk).

De stiplete tynne pilene viser til mest krevende overganger; disse overgangene går direkte fra et semiotisk register til et annet. Her foreligger det ifølge Duval kun tre muligheter (opptil 3 stk) (overganger mellom ikke-diskursive multi- og monofunksjonelle registre anses dermed ikke like krevende av Duval i hans fremstilling).

Duval benevner disse overgangene mellom ulike registre for «conversions», oversatt til norsk som «*konverteringer*». Det eksisterer videre kongruente og ikke-kongruente konverteringer. En *kongruent konvertering* innebærer naturlig sammenheng mellom representasjonenes bestanddeler hvor det ikke er behov for særskilt tolkning for å gjennomføre konverteringen. En *ikke-kongruent konvertering* har stort behov for høy grad av tolkning fordi det foreligger lite eller ingen naturlig sammenheng som grunnlag for at konverteringen skal kunne finne sted.

Oppsummert kan man si at både behandlinger (innen samme register) og konverteringer (mellom ulike registre) er transformasjoner og at noen av disse er mer eller mindre intuitive. Duvals poeng i fremstillingen er derimot;
«If treatment is the more important from a mathematical point of view, conversion is basically the deciding factor for learning» (Duval, 2006).

Undervisningsopplegget tilknyttet denne masteravhandlingen vil i kapittel 5.0 *Resultat og analyse* beskrive hvordan ulike registre er involvert og kan dermed benevnes som opplegg med fokus på multiple representasjoner. Ved å benytte meg av Duvals tilsynelatende komplekse tabell vil jeg senere, i kapittel 6.0 *Drøfting*, se nærmere på hvilke behandlinger og konverteringer som kjennetegner elevenes arbeid med romfigurer – fra teori til praksis.

3.4.5 Direkte og indirekte oversettelsesprosesser

En oversettelsesprosess involverer en psykologisk prosess ved at man går fra en representasjonsmodus til en annen; for eksempel fra en likning til en graf. Bell (1979) identifiserte dette som fundamental komponent innen matematisk kompetanse (Janvier, 1987). Teorien er interessant for forskningsspørsmålet da man også innen temaet romfigurer beveger seg frem og tilbake mellom ulike representasjonsregistre.

I 1987 beskrev Claude Janvier oversettelsesprosesser i matematikkundervisning tilknyttet temaet funksjoner. Han begrenset antall moduser av representasjoner til en variasjon av fire; verbal beskrivelse, tabell, graf og formel (likning). Videre fremstilte Janvier matrise som er anvendbar ved behandling av funksjoner. Han navngav de ulike overgangsprosessene. Med utgangspunkt i for eksempel tabell handler det om «plotting» for å foreta overgang til graf (man plotter inn punkter i grafen) - går man motsatt vei handler det om «avlesning» av graf for å fylle inn tabell. Janvier fylte ikke inn diagonalen selv om slike prosesser eksisterer - prosessen kan da bli kalt en transponering; det er dette Duval (2006) omtaler behandlinger innenfor samme register!

Videre beskriver Janvier forskjell mellom direkte og indirekte oversettelsesprosesser.
En indirekte oversettelse er en alternativ overgang som går via en tredje modus. Overgang fra tabell til formel blir ofte utført gjennom å se fra tabell via graf til formel, og formel til graf utført fra formel via tabell til graf. Indirekte overgangsprosesser er derfor *vesentlig forskjellig* fra en direkte overgang, og en studie av flere matematikk program viser at elever eksklusivt utvikler indirekte versjon i mange av prosessene innen tabellen når de arbeider med funksjoner. Ved samarbeid om overganger spiller kommunikasjon eller konkrete begrep en sentral rolle; selv i «grafisk kontekst» er verbale beskrivelser essensielt (Janvier, 1987).

Tradisjon i norsk skole er å øve noen få av disse overgangene under arbeid med funksjoner, spesielt overgangene fra tabell til graf og motsatt samt fra formel til tabell. I utgangspunktet er *alle overgangene like vesentlige* og lærere må jobbe for å tilrettelegge slike oppgaver - da lærebøkene ikke er gode nok på det (Sitert: Monica Nymoen Hansen vår 2020, digital forelesning).

På samme grunnlag vil jeg derfor rette oppmerksomheten mot behovet for å øve overganger innen flere emner i matematikken. Som tidligere beskrevet gjorde Swan dette - blant annet innen både algebra og rasjonale tall. Denne gangen ønsker jeg å gjøre det med et romfigurfokus. Dessverre finner jeg ikke teori som går direkte på transformasjoner innen romfigurer, slik Janvier presenterer i forhold til funksjoner.

4.0 Metode

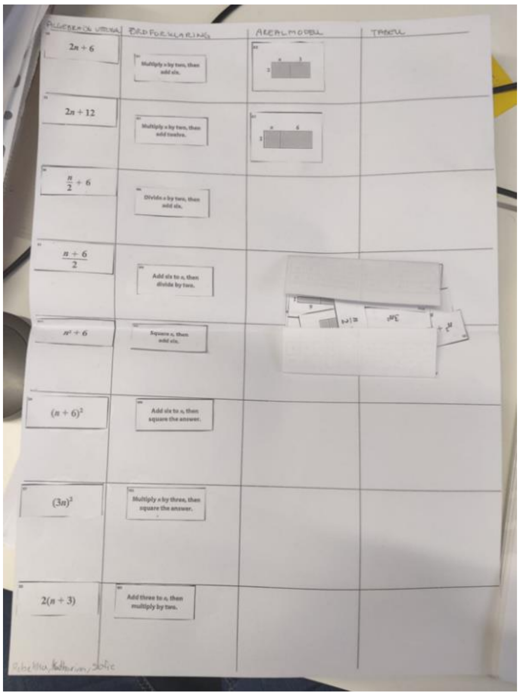
I dette kapittelet beskrives valgte metoder. Aller først presenteres et par gjennomførte pilotprosjekt etterfulgt av studiedesign beskrivelse og utvalg av informanter. Deretter skildres forløp i tilknyttet undervisningsperiode og anvendte forskningsmetoder (kartlegginger, lydopptak av fokusgruppearbeid og fokusgruppeintervju). Avslutningsvis fremlegges forskningsetiske problemstillinger etterfulgt av avhandlingens validitet og reliabilitet.

4.1 Pilotprosjekter

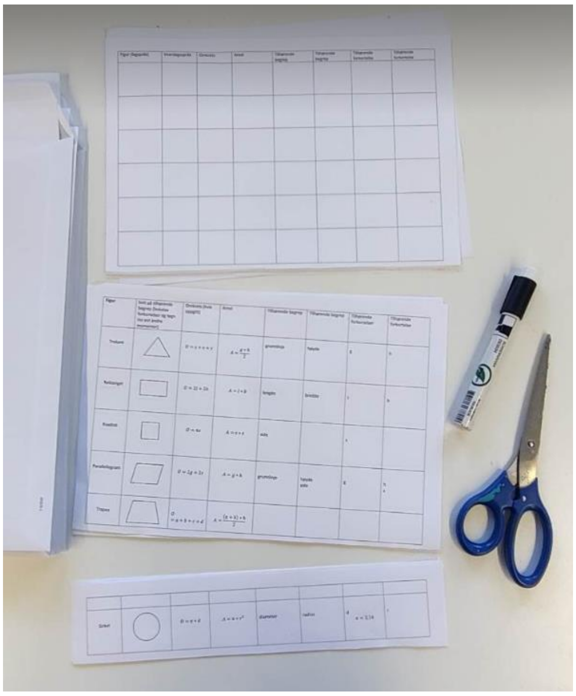
Et pilotprosjekt kjennetegnes ved at man i forkant av en større undersøkelse gjennomfører et liknende eksperiment for å teste utformingen av det endelige prosjektet (Det Norske Akademi for Språk og Litteratur, 2023). I forkant av denne studien gjennomførte jeg to pilotprosjekt som del av valgte metoder. Begge prosjektene er undervisningsopplegg gjennomført i egen klasse, 9x. Rammen for begge oppleggene er multiple representasjoner - underlagt forskjellige matematiske emner. Pilotprosjektene er bygd opp med samme struktur som undervisningopplegg tilknyttet denne masteravhandlingen og kan dermed relateres direkte til forskningsspørsmålet.

4.1.1 Pilotprosjekt 1

Pilot 1 ble gjennomført vår 2022, på 8. trinn, i 8x, og innebar at jeg som faglærer gjennomførte Swans opplegg slik det er beskrevet i hans artikkel (Swan, 2008). Dette gjorde jeg som en del av min avsluttende studierunde av lærerspesialistutdanningen MA – 933; hvor vi på tidspunktet fokuserte på matematikkoppgaver og oppgavedesign. Klasse 8x jobbet samtidig med algebra og jeg ønsket avslutningsvis å variere undervisningen med gruppearbeid. Swans opplegg passet da ypperlig. Elevene (28 stk) ble fordelt på ni grupper på bakgrunn av nytt klassekart. Ut ifra tidsrammen for gjennomføring bestemte jeg meg for å lette deres systematiseringsarbeid. Jeg lagde derfor et A3 ark i form av tabell med overskrifter (algebraisk uttrykk – ordforklaring – arealmodell – tabell) samt ferdigklipte deler i én konvolutt pr gruppe; *Tasks as set up by teachers* (Stein & Smith, 1998). Elevene responderte positivt på opplegget og var over seg av begeistring for å få jobbe sammen på et praktisk gruppearbeid. Gjennomføringen føltes noe kaotisk for egen del - det er vanskelig å veilede 9 grupper samtidig som jeg håpet på størst mulig utbytte for alle på avsatt tid; en skoletime - 45 minutt. Under konklusjon fant jeg dessverre at vi burde prioritert mer tid til både gjennomføring og plenumsoppsummering. I etterkant ser jeg at det hadde vært fordelaktig og oversatt materialet til norsk så ikke språket kunne bli et hinder. Jeg burde også byttet rundt kolonner for arealmodell og tabell – på linje med Swans originale opplegg. Omtrent halvparten av gruppene hadde påbegynt arbeidet med å koble til arealmodeller og tabeller (se figur 11), og plenumsoppsummering ble minimalisert til gruppevis diskusjon tilknyttet gruppeveiledning.



Figur 11: Et grupperesultat pilot 1



Figur 12: Prosessbilde før pilot 2

4.1.2 Pilotprosjekt 2

Pilot 2 ble gjennomført høst 2022 på 9. trinn, avslutningsvis i forbindelse med temaperiode innen plangeometri. Teamet ligger forut romgeometri, og det var derfor naturlig å videreføre tanker fra pilot 1, siden forskningsspørsmål tilknyttet denne avhandlingen henger på fokus av multiple representasjoner. Inspirert av Swan måtte jeg med denne innfallsvinkelen starte fra bunnen og lage materiell selv. Jeg valgte å fokusere på grunnfigurene (trekant, rektangel, kvadrat, parallellogram, trapes og sirkel) og ulike representasjoner ble denne gangen kategorisert under: fagbegrep, planfigur, formel for omkrets, formel for areal, tilhørende begrep (for eksempel lengde og bredde, grunnlinje og høyde, side, radius og diameter) og tilhørende variabler (l, b, g, h, s, r og d). Jeg delte elevene inn i grupper på 3-4 elever og delte ut en konvolutt til hver gruppe med ferdigklipte deler og fysisk ark med tabellmal inkludert overskrifter. Dette gjorde jeg igjen for å lette elevenes arbeid med å systematisere representasjonene (se figur 12). Opplegget ble denne gangen gjennomført i to klasser med rundt 30 elever i hver klasse; 9x og 9y. Målet med opplegget var både å få flere elever bevisst korrekt fagterminologi og relasjonen tilknyttet de ulike representasjonene. Konklusjon var også den gang at elevene likte oppgavetypen - men at det heller ikke da ble tid til å gjennomføre helklasseoppsummering. Tidsbruk 2 x 45 min.

4.2 Kasusstudie

En kasusstudie kjennetegnes av kartlegging av spennende forhold knyttet til enkeltindivider på arbeidsplasser som for eksempel på en skole (SNL, Kasusstudier, 2023). Innenfor skole som institusjon kan man videre snevre inn og se på ledelsen, andre ansatte, elever på et isolert trinn, en klasse med elever eller en gruppe elever innad en klasse. I kasusstudier brukes ofte intervju som én metode blant flere (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg valgte å gjennomføre en kasusstudie med håp om å utvikle både meg som faglærer og mine elevgrupper som i år består av to klasser på 9. trinn - og samtidig følge opp den naturlige progresjonen for klassene i forhold til trinnet og fagets årsplan. Denne kasusstudien foregår derfor i lukket klasserom i matematikkfaget og kvalifiserer dermed som kvalitativ kasusstudie. En kvalitativ studie er en forskningsmetode som kjennetegnes ved at datainnsamling og analyse foreligger i tekstform (SNL, Kvalitativ metode, 2023). Dette kvalitative kasusstudie refererer sterkt til studiets forskningsspørsmål.

4.2.1 Utvalg av informanter

Utvalgte fokusgruppe består av tre elever på 9. trinn, en jente og to gutter i klasse 9x. Utvalget anses som sammensetning av elever som tidligere har vist anlegg til å kommunisere matematikk gjennom muntlig aktivitet i foregående matematikkundervisning; kriteriet for lydopptak med relevant innhold. Fokuselevene er et utvalg representativt for klassens gjennomsnittlig faglige nivå. Tilsammen ble det dannet ti grupper innad i klassen som består av 30 elever totalt. Samtlige grupper ble dannet med hensyn til involvert delingstime (klassen deles i to grupper på grunn av praktiske fag som mat & helse). Gruppemedlemmer var altså avhengig av å være fra samme gruppe i forhold til delingstimen. Utvalget speiler siste del av forskningsspørsmålet. Jeg har videre benyttet meg av elevbidrag fra to klasser, 9x og 9y, i forhold til inn- og utsjekksmateriale, nærmere utdypet under kapittel 4.2.3 *Innsjekk og utsjekk.*

4.2.2 Forløp i undervisningsperioden

I denne delen gjengis den helhetlige perioden tilknyttet forskningsstudiet - kort og konsist som bakteppe for at leser i videre avhandling skal få rett innsikt i kommende kapitler.

Som faglærer i to 9. klasser startet jeg med å kartlegge elevgruppenes førkunnskaper ved å benytte innsjekk som del av valgte metoder. Deretter jobbet begge klassene i en tre ukers periode seg gjennom delemnene under overflate og volum - som presentert på Campus Inkrement supplert med fagboka Matemagisk 9. Vi har tre timer matematikk hver uke.
De to påfølgende ukene jobbet klasse 9y med diskusjonsoppgaver tilknyttet temaet på Campus Inkrement. Diskusjonsoppgavene løses i læringspar og elevene får utrykke seg matematisk gjennom helklassediskusjon og ved å lytte til hverandres resonnement gjennom argumentasjon. Den andre klassen, 9x, jobbet disse timene med to praktiske undervisningsopplegg. Hovedsakelig er kun siste undervisningsopplegg tilknyttet denne avhandlingen, presentert og analysert i kapittel *5.1 Utforming av undervisningsopplegg.*

Da elevene arbeidet med det multiple undervisningsopplegget benyttet jeg samme gruppekonstellasjon som ved det første undervisningsopplegget. Elevene trengte da ikke være usikre for hvem de skulle jobbe sammen med - og jeg hadde en kort intro i oppstart for hele klassen. Jeg forklarte at opplegget liknet det elevene hadde arbeidet med tilknyttet omkrets og areal (pilot 2) og beskrev innholdet i konvolutten og annet nødvendig materiell (artefakter som gråpapir, blyant, saks, kalkulator og limstift). Konvolutten inneholdt kortsett fordelt i to bunker festet med binders. Jeg bad elevene starte med den øverste bunken som inneholdt; begrepskort, romfigurkort, geometriske beskrivelser av romfigurene og overflateillustrasjoner av romfigurene. Dette gjorde jeg fordi jeg anså det som enkleste startgrunnlag med tanke på omfanget samtlige kort utgjorde – i tråd med hvordan Swan gav elevene litt av materialet om gangen. Den andre bunken inneholdt kortsett tilknyttet formler for volum og overflate. Siden elevene var kjent med arbeidsmetoden var de raskt i gang med oppgaven; *Tasks as implemented by students* (Stein & Smith, 1998). Elevene hadde nå tre timer til disposisjon for å løse oppgaven og gjennomføre plenumsdiskusjon. Avslutningsvis ble det i begge klasser gjennomført digital temaprøve på Campus Inkrement etterfulgt av kartlegging av etterkunnskap i form av utsjekk og til sist - fokusgruppeintervju.

4.2.3 Innsjekk og utsjekk

Studiets datamateriell startet som nevnt ved at to klasser, 9x og 9y (ca 60 elever), ble bedt om å gjennomføre innsjekk omkring det nye temaet klassene skulle starte med; volum og overflate. Temaet berører tredimensjonale romfigurer, og ved hjelp av tavla viste jeg hvordan elevene kunne begynne ved å tegne en sirkel med stråler som en sol. Inni sirkelen skrev jeg «tredimensjonale figurer» og ba dem individuelt skrive ned alt de tenkte på som tilhørte begrepet som ved en «brainstorming». Med visshet om at elever har gjennomgått emnet som barneskolepensum, ønsket jeg å kartlegge hva de individuelt kunne fremhente av førkunnskap – som en form for «igangsetter». Enkelt og greit presentert som et tankekart. Kjært barn har mange navn, og tankekart kan også benevnes som begrepskart eller innsjekk og utsjekk.

Hansson (2003) fremla fordeler ved bruk av «begreppskartor» med tanke på oppfatningen av funksjonsbegrepet. Hansson forsket på 6. semesters lærerstudenter som arbeidet med funksjoner og bygger sin studie på Blomhøjs artikkel (1997) som omhandler 9. klasses forståelse av funksjonsbegrepet. Hansson gjennomførte datainnsamling ved å benytte begrepskart i start og slutt av semesteret samt studentintervjuer. Utgangsspørsmålet han gav studentene var: «Vi skriver $y = x + 5$. Vad betyder det?». Studentene fikk så i oppgave å lage begrepskart over utsagnet $y = x + 5$. Hansson kartla stor utvikling i begrepskartene selv om studentene selv, under intervju, ikke så kvalitetsforskjellene i egne svar. Hansson kartla at relevante begrep er relasjonsmessig forstått, som bevist ved at studentene anvendte færre begrep og koblinger mellom begrepene i siste begrepskart. Fordeler ved begrepskart er ifølge Hansson at de som regel viser til flere begrep enn hva som fremkommer ved intervju, og at de viser tydelig bilde av studentenes kompetanse (Hansson, 1-2003).

Innsjekk og utsjekk som metode ble presentert av Trude Slemmen i boka VURDERING FOR LÆRING I KLASSEROMMET (2010). Boka viser til ti prinsipper for underveisvurdering og konkrete metoder som fremmer eleveres læring forankret i internasjonal forskning (Slemmen, 2010). Innsjekk og utsjekk som prinsipp ble presentert som metode man kan anvende på en enkelttime og hvilket spørsmål som stilles er åpent. Det kan for eksempel være et regnestykke som skal besvares eller et begrep som skal utgreies. Innsjekken kan altså fungere som en sjekk på om elevene husker læringsmål fra forrige time, eller som en sjekk om de evner et spesifikt matematisk tema. Utsjekken kan være å sjekke om elevene har oppnådd timens læringsmål (Slemmen, 2010).

I min studie benytter jeg Slemmens ordlyd innsjekk og utsjekk om valgte metode for å kartlegge hvilke representasjonsformer elevenes individuelle førkunnskap innebærer – og om elevenes individuelle etterkunnskap viser om de har utvidet representasjonsrepetoar og hvilke representasjonsformer som eventuelt foretrekkes og anvendes blant elevgruppene. Mine elevgrupper ble, i motsetning til Hanssons, ikke vist resultatet grunnet tidsaspekt.
I sammenheng med denne masteravhandlingen er det interessant å se om elevene i 9x har utbytte av å gjennomføre undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner sammenliknet med elever i 9y som ikke gjorde det. Målet med kartleggingen er også å se om elever optimalt sett; naturlig benytter seg av alle fire representasjonsregistrene. Dermed er metoden relevant og begrunnet i forskningsspørsmålet og tilknyttet delspørsmål.

4.2.4 Deltakende observasjon

Å forske i eget klasserom innebærer kvalitativ tilnærming (Postholm & Moen, 2018).
I min rolle som faglærer må jeg nødvendigvis fungere som deltakende observatør. Ved å benytte metoden «deltakende observasjon» kan jeg fange opp deler av arbeidsprosessen til elever som ikke er i fokusgruppen. I slik setting er det nært samspill mellom meg som forsker og elevene i rolle av forskningsdeltakere. Mitt mål som kvalitativ forsker og deltakende observatør blir å fremstille elevenes perspektiv med hensikt å referere antatt kompleksitet ved å lyssette undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner av romfigurer. Hvilke transformasjoner vil utpeke seg som mest krevende, eller sagt med Duvals ord; være ikke-kongruente konverteringer? (Duval, 2006). I løpet av arbeidsprosessen vil jeg kontinuerlige gjennomføre en rekke veiledninger på direkte spørsmål fra elever. Slike uformelle samtaler kan omtales som ustrukturerte intervju (Postholm & Moen, 2018).

I tillegg til deltakende observasjon og slike ustrukturerte intervju benyttet jeg observasjonslogg underveis for fortløpende oppdatering av observasjoner i etterkant av gjennomførte timer. Studieperioden pågikk i oktober og november 2022.

4.2.5 Lydopptak og transkripsjon av fokusgruppearbeid

For å støtte deltakende observasjonsnotater valgte jeg å benytte lydopptak av fokusgruppens arbeid med det multiple undervisningsopplegget. I forkant av studiet utarbeidet jeg derfor et informasjonsskriv. Etter velvilje til deltakelse i fokusgruppe blant utvalgte elever – organiserte jeg formell tillatelse fra deres foresatte gjennom underskrift på informasjonsskrivet. Elevene skulle i en periode på en uke arbeide skjermet på grupperom tilknyttet klasserommet. Her var tilrettelagt for å foreta lydopptak av gruppesamarbeid i arbeidsprosess. Klassen har som nevnt ordinært tre matematikktimer hver uke, elevene skulle jobbe gruppevis i to av dem og deler av den tredje timen skulle disponerer til plenumsdiskusjon. Lydopptak av samarbeidet ble transkribert like etter gjennomføring av gruppeintervjuet. Transkripsjonen vil gjøre det enklere å fange opp hva som kjennetegner arbeidet med multiple representasjoner og dermed hjelpe å besvare forskningsspørsmålet. I ettertid ser jeg det kunne vært fordelaktig å tilrettelegge videoopptak fremfor lydopptak. Det kunne skapt bedre grunnlag for innsikt i elevenes arbeidsprosess i form av nonverbal kommunikasjon som ikke lar seg fange opp av rene lydfiler.

4.2.6 Lydopptak og transkripsjon av fokusgruppeintervju

Da elevene var ferdig med hele perioden foretok jeg fokusgruppeintervju. Intervjuguiden ble brukt under opptaket. Guiden er av formen semistrukturert begrepsintervju. Semistrukturerte intervjuer kjennetegnes av ferdigstilte intervjuspørsmål, med planlagt rekkefølge og åpning for eventualiteter som oppstår underveis (Postholm & Moen, 2018). Formål med intervju er i denne sammenhengen å kartlegge fokusgruppens begrepsstruktur av fenomenet tredimensjonale figurer og ulike representasjoner. Dermed kan det også kalles et begreps-intervju (Kvale & Brinkmann, 2015). Fokusgruppeintervju vil støtte og utdype kjennetegn på arbeidet med multiple representasjoner og utfordringer tilknyttet individuell behandlings og konverteringskompetanse - og vil dermed kunne hjelpe til med å besvare forskningsspørsmålet.

Lydopptak ble transkribert etter samme mal som gruppearbeidet, nærmere beskrevet under.

4.2.7 Transkribering

Da lydopptakene var tapet ble opptakene transkribert. Bakenforliggende årsak for å velge å transkribere materialet er ønske om å bruke deler av transkripsjonen i kapittel 5.0 *Resultater og analyse*. Det finnes ikke noen universell kode for transkribering, men noen standardvalg må foreligge. Kommunikasjon mellom fysisk tilstedeværende personer fikseres abstrahert i skriftlig form fra tale til skriftspråk. En oversettelsesprosess som går fra én narrativ form til en annen; fra muntlig til skriftlig diskurs. Dersom transkripsjoner skal benyttes til språklig analyse, eller kommunikasjonsanalyse, er det strengere krav enn ved transkripsjon av en lettlest utgivelse av intervjupersonenes kommunikasjon. Det foreligger kjente transkripsjons-konvensjoner - for eksempel etter mal til Paul ten Have (1999) (Kvale & Brinkmann, 2015). Under presenteres ten Haves transkripsjonskonvensjoner i bearbeidet form:

[	Enkel venstreklamme er tegn for start av en overlapping
]	Enkel høyreklamme er tegn for punkt hvor en ytring ender og en annen starter
=	Likhetstegn i slutt av linje og begynnelse av ny linje antyder at det ikke foreligger «hull» i/eller mellom linjeskifter
(.)	Punktum inni parentes viser til lite «hull» i/mellom replikker
:	Kolon tyder på forlenging av lyd forut, flere kolon tyder på lang lyd
<u>Ord</u>	Understrek av ord henviser til tonehøyders ulike betoninger, eventuelt kan dette markeres i *kursiv*
ORD	Ord med store bokstaver tyder på tale mer høyere lyd enn generell taleflyt
()	Tom parentes betyr at den som utfører transkripsjon ikke hører hva lydopptak tilsier
(())	Dobbel parentes betyr at den som utfører transkripsjon skildrer forløp snarere enn hva transkripsjonen tilsier

(Kvale & Brinkmann, 2015)

Da jeg i min studie har lydopptak av til sammen tre skoletimer (3 x 45 minutter) samt 45 minutters fokusgruppeintervju har jeg forenklet kodearbeid i egen form uten hensyn til transkriberingskonvensjon. Min transkribering begrenset seg til ordrett avskrift, tidspunkt underveis er notert hvert 2-3 min, pauser i kommunikasjon ble notert som tre etterfølgende punktum og observerte, nonverbale fakter, ble beskrevet i parentes. Utsnitt av transkripsjonen som vedlegges oppgaven i kapittel 5, *Resultat og analyse*, er forsøkt omformulert nær form av ten Haves transkripsjonskonvensjon etter ny gjennomgang av materialet (lydfil og tekst).

4.3 Forskningsetiske problemstillinger

Forskningsetikk handler om holdninger, kultur og god vitenskapelig praksis med formål om å fremme forsvarlig forskning. Nasjonal forskningsetisk komite innen samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) publiserte nye retningslinjer 16.12.21. (Utdanningsforbundet, 2022).
Fra ståsted som forsker blant egne elever, står jeg ansvarlig for å sikre at både forberedelse, gjennomføring og rapportering av kasusets resultater foregår i henhold til forskningsetiske normer. Jeg har taushetsplikt, er ansvarlig for anonymisering av involverte deltakere, skal opptre sannferdig og respektere individenes ulikheter. Samtykkeinnhenting er et av de forskningsetiske hovedprinsippene og personvern er betydningsfullt i denne sammenheng (personopplysningsloven). Som forsker er jeg ansvarlig for formidling av resultater og deltakerne skal ikke på noen som helst måte stå i fare for å bli gjenkjent i publisert materiale eller frykte negative konsekvenser av deltakelse. Universitetet i Agder har sikret at min forskning foregår i henhold til gjeldene normer og regler, og formel veiledningskontrakt mellom meg og min veileder foreligger.

Utdanningsforbundets mål er at all forskning innen utdanningsfelt har god kvalitet, relevans for yrkesutøverne og utvikling av blant annet grunnskole. Forskningen skal være praksisrettet og kjerneorientert i forhold til profesjonen (Utdanningsforbundet, 2022).
Min forskning er relevant for arbeidsmetoder i utdanningssektoren spesielt rettet mot matematikkfaget. Forskningen kan på sikt bidra til skoleutvikling.

Da jeg som del av datagrunnlag i min studie ønsket å foreta lydopptak av arbeidsprosess i fokusgruppa og foreta fokusgruppeintervju - måtte jeg søke tillatelse for gjennomføring gjennom NSD (Norsk senter for forskningsdata). Lydfilene er under prosess lagret på ekstern harddisk og vil bli slettet etter perioden for masteravhandlingen. I søknaden til NSD måtte prosjektskisse (vedlegg 10.1) vedlegges; først godkjent av Universitetet i Agder, sammen med informasjonsskriv (vedlegg 10.2) og utarbeidet intervjuguide (vedlegg 10.4).

I informasjonsskrivet fremkommer tydelig at informantene deltar frivillig og under prosessen har rett til å trekke samtykke. Deres deltakelse vil ikke få videre konsekvenser for vår samhandling som lærer og elev. Elevene anonymiseres og har innsynsrett i intervju-transkripsjon og analyse. De involverte er videre informert om at kun veileder har adgang til materialet underveis i prosessen og at deler av transkripsjonen vil kunne bli offentlig publisert (Kvale & Brinkmann, 2015). Søknad til NSD innebar omfattende forberedelser, digital søknad og lang behandlingstid og ble etter små justeringer godkjent.

4.3.1 Validitet og reliabilitet

«Attaining absolute validity and reliability is an impossible goal for any research model» (LeCompte & Goetz, 1982)

Med dette som utgangspunkt må man som forsker, i forhold til validitet og reliabilitet, gjøre sitt ytterste for at planlegging, gjennomføring og funn er så troverdige som mulig.
Validitet omhandler i hvilken grad studiets resultater er gyldige. Videre kan denne gyldigheten deles inn i indre (intern) og ytre (ekstern) validitet. Intern validitet omhandler i hvilken grad resultatene er gyldige for utvalget og undersøkte fenomen. Ekstern validitet angir i hvilken grad resultatene kan overføres andre utvalg og situasjoner; generaliserbarhet (Kvale & Brinkmann, 2015).

Tradisjonelle forskere er kritiske til samfunnsforskning tilknyttet kasusstudier, men Flyvbjerg avviste i 2006 fem av disse. Det angår misforståelsene at man ikke kan generalisere på et enkeltstående kasus, kontekstuavhengig kunnskap anses viktigere enn kontekstavhengig, kasusstudier kan kun benyttes til å utvikle hypoteser, kasusstudier har en grunnleggende verifiseringstendens og det er vansker med å fremstille generelle teorier med spesifikke kasusstudier som grunnlag (Flyvbjerg, 2006).

Det anses derfor mulig at resultatene som fremkommer etter denne spesifikke kasusstudien kan gjelde andre enn involverte parter. Andre elevgrupper kan også profitere på tilrettelegging av ekstra fokus på multiple representasjoner av romfigurer, og resultatene kan være holdbare i andre matematiske kontekster. Arbeidsmetoden er generaliserbar, ikke bare for andre elevgrupper på ungdomstrinn - men også ned på barnetrinn og opp til videregående trinn (Kvale & Brinkmann, 2015). Dermed vil validitet av resultatene som fremkommer referere til studiets forskningsspørsmål.
Reliabilitet henviser til resultatenes pålitelighet og handler om i hvilken grad studien kan etterprøves. Det vil si i hvilken grad andre lærere/forskere vil erfare samme resultat i liknende

situasjoner. Reliabilitet innebærer, som validitet, indre og ytre reliabilitet. Intern reliabilitet omhandler i hvilken grad andre lærere/forskere kan benytte samme begrepsapparat for analyse av egne data - lik min innfallsvinkel. Ekstern reliabilitet handler om i hvilken grad andre lærere/forskere vil kunne avdekke samme utfall i liknende situasjoner (Kvale & Brinkmann, 2015).

Med utgangspunkt i intern reliabilitet anses det dermed mulig at andre kan benytte samme innfallsvinkel i forhold til begrepsapparat for analyse, men det er uvisst om andre vil finne samme utfall sett i lys av utvalgt fokusgruppe. Elevers tidligere erfaringer kan ha stor påvirkning av utfall. Ekstern reliabilitet anses derfor som et mer usikkert moment i lys av resultatene som fremkommer referert til studiets forskningsspørsmål.

5.0 Resultat og analyse

I dette kapittelet analyseres først det utarbeidede undervisningsopplegget for å bekrefte at det har et multippelt representasjonsfokus. Deretter vil jeg gå nærmere inn på forskningsspørsmålet og beskrive kartlagte kjennetegn som ble observert i elevenes arbeidsprosess etter nærmere analyse av involverte datainnsamlinger.

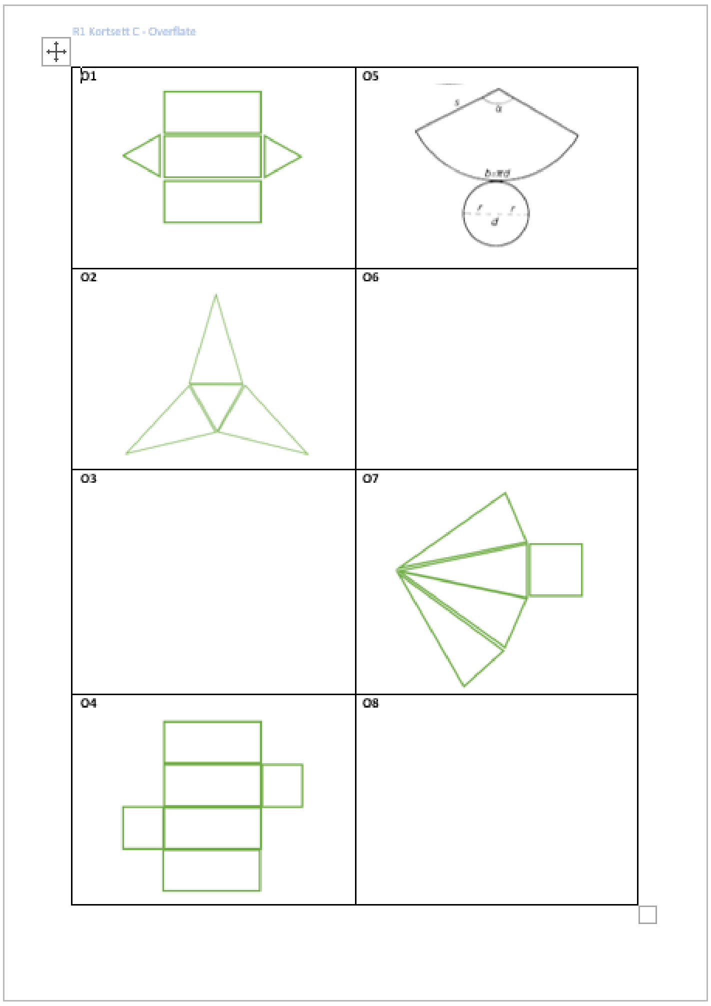
5.1 Utforming av undervisningsopplegg

Under analyseres hvordan tilknyttet undervisningsopplegg ble planlagt og valg jeg foretok i utarbeidingsprosessen - i lys av forskningsspørsmål og tilknyttet delspørsmål.

Aktiviteten tilrettelegger for elevsamarbeid, og som i pilot 2 er også dette opplegget inspirert av Swan. I undervisningsopplegget skal elevene samarbeide om både å systematisere ferdigstilte og produsere manglende deler av ulike romfigur representasjoner.
Det var tidkrevende å utarbeide de ulike kortsettene da jeg også i dette undervisnings-opplegget måtte lage alt fra bunnen av; *Tasks as set up by teachers* (Stein & Smith, 1998). Jeg startet med å avgjøre hvilke romfigurer som skulle involveres og valget falt på henholdsvis: kube, firkantet og trekantet prisme, firkantet og trekantet pyramide, kjegle, sylinder og kule. Figurene er hentet som bilder fra google underlagt Creative Commons lisens som tilsier at man fritt kan bruke og bearbeide bildene så lenge opphavsmann refereres, liste over romfigurer og lisenser er oppgitt etter litteratur og figurliste.

Videre måtte jeg blant annet avgjøre hvordan de ulike representasjonene skulle presenteres med hensyn til layout, ordlyd og imaginære proporsjoner, samt bestemme hvilke av representasjonskortene som skulle være «blanke». Dessuten måtte jeg foreta valg av antall representasjoner som skulle fokuseres tilhørende hver romfigur. Jeg valgte denne gangen å utelukke egen kolonne for variablenes forkortelser for å avgrense antall representasjoner - men endte likevel opp med ikke mindre enn 8 ulike representasjoner av hver romfigur (vedlegg 10.3). Jeg anså antallet som nødvendig for å hjelpe elevene med å øve opp konseptuell forståelse for sammenhengen mellom plan- og romgeometri og for å fremheve relasjonen mellom ulike representasjoner.

Kognitive krav som involveres i undervisningsopplegget anses å være på høyere nivå. Slik er det fordi det tilrettelegges for arbeid med både prosedyresammenheng og matematisk tenkning (Valenta, 2016). Dermed anses også opplegget å utfordre elevenes relasjonelle forståelse (Skemp, 1976), eller beskrevet med Swans ordlyd; stimulere elevenes konseptuelle forståelse (Swan, 2008). Elevenes nivå av geometriforståelse vil også påvirke individuell resonering underveis i arbeidsprosess – men, som van Hiele påpekte, man må ikke forenkle opplegget slik at utfordring og motstand uteblir (Smedstad, 2008).



Figur 13: R1 Kortsett C1 – Overflate

Eksempel fra materialet. Som vist i eksempelet er det blanke felt som krever at elevene tegner overflatene av figurene som mangler (i dette kortsettet mangler representasjoner for overflater av romfigurene kube, kule og sylinder). Spesielt krevende i denne sammenheng er det for de fleste å fremstille en representasjon for kulens overflate. Har du noen gang sett en slik representasjon? Se for deg en stilisert blomst med lange kronblader, uten selve blomsten i sentrum, - eller en globus før den «brettes sammen». Kan du nå klare å fremstille denne representasjonen på enda en måte? Med utgangspunkt i for eksempel en kube foreligger det til sammen ikke mindre enn 11 ulike representasjonsformer av overflaten (Kongnes & Wallace, 2020).

I de andre kortsettene har jeg variert hvilke figurer som mangler representasjoner, og har tatt høyde for å gi elevene tilgang til for eksempel formel for overflate av kjegle og firkantet pyramide da dette enda ikke har vært pensum for elevene. På bakgrunn av dette har jeg på kort for kjeglen (OF2) gitt både skriftlig forklaring (G2) og symbolske formler (AO1 og VF7). Etter inspirasjon fra Swan navnga jeg selve kortsettet R1, hvor R markerer at kortsettet omhandler Romfigurer og 1 angir at dette er førsteutkast av kortsettet. Videre er de involverte representasjonene kategorisert under ulike bokstaver som vist på figur 13 og nærmere beskrevet under.

Andre kortsett i serie R1 består av kortsett; A *Fagbegrep*, B *Romfigur,* C1 *Overflate*, C2 *Overflate*, C3 *Overflateformel*, C4 *Overflateareal, D Geometrisk beskrivelse og noen hverdagsbegrep*, E1 *Volumformel* og E2 *Volum*. Se kortsettene på neste side, satt i tabell, for full oversikt og hvilke kort som er blanke.

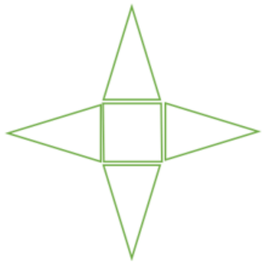
A Fagbegrep	B Romfigur	C1 Overflate	C2 Overflate	C3 Overflate formel	C4 Overflate areal	D Geometrisk beskrivelse	E1 Volum formel	E2 Volum
F1 Kjegle BLANK	R5	O5	Ox BLANK	OF2	AO1	G2	VF7	V5
F2 Sylinder	R6	O3	Ox BLANK	OF5	AOx BLANK	G8	VF6	V4
F3 Rett firkantet prisme BLANK	R2	O4	Ox BLANK	OF7	AOx BLANK	Gx BLANK	VF1 <u>eller</u> VFx BLANK	V8
F4 Rett trekantet pyramide BLANK	R4	02	Ox BLANK	OFx BLANK	AO2	G7	VF5 <u>eller</u> VFx BLANK	V6
F5 Rett firkantet pyramide	R8	O7	O9	OF8	AOx BLANK	Gx BLANK	VF5 <u>eller</u> VFx BLANK	V1
F6 Rett trekantet prisme	R3	O1	Ox BLANK	OFx BLANK	AOx BLANK	G4	VF1 <u>eller</u> VFx BLANK	V2
F7 Kule	R7	O8 BLANK	Ox BLANK	OF6	AOx BLANK	G5	VF2	V7
F8 Kube – prisme	R1	O6	Ox BLANK	OF3	AO5	G3	VF3	V3

Figur 14: Kortsett R1 satt i tabellsammenheng

Merk at det vises til to ulike kortsett som bearbeider overflate av romfigurene; C1 og C2. Dette er et bevisst valg fordi en romfigur i utgangspunktet kan utbrettes på flere måter – og derfor er også hver representasjon i disse kortsettene nummerert fra O1 til O16 på bakgrunn av denne sammenhengen. Som vist tidligere i figur 13 manglet det tre overflater på C1, på C2 derimot; mangler 7 av 8 overflater og kun overflaten av firkantet pyramide er gitt - nå i annen form enn vist på C1. Denne er ment som et konkret bevis på hvordan man enkelt kan endre sammensetning av involverte geometriske planfigurer.

R1 Kortsett C2 - Overflate

O9
ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN



Figur 15: Utsnitt av Kortsett C2

Årsaken til mange blanke overflatekort i kortsett C2 bunner i ønske om at elevene skulle oppdage sammenhengen mellom de presentert overflatene i kortsett C1, og at de ved hjelp av en enkel behandling skulle kunne fremstille samme overflate med en annen vinkling. Dermed øker forhåpentligvis også forståelse for at romfigurenes sideflater avhenger av presist beskrevne todimensjonale flater. I utgangspunktet tenkte jeg at dette var en aktivitet som de fleste ville mestre uten stor kognitiv motstand. Overflaterepresentasjonene bringer meg videre til kortsett D *Geometrisk beskrivelse og noen hverdagsbegrep*.

Kortsett D består som navnet tilsier av skriftlige beskrivelser av romfigurens konstruksjon og har nær sammenheng med kortsett C1 og C2. Noen av disse representasjonene har i tillegg tom linje hvor elevene skulle fylle inn hverdagsbegrep for romfiguren. For eksempel benytter mange hverdagsbegrepet «terning» når det henvises til kube, den naturlige benevnelsen «eske» ved henvising til ulike prismer eller begrepet «ball» som enkelte omtaler romfiguren kule.

Kortsett C3 *Overflateformel* mangler formlene trekantet prisme og trekantet pyramide. Begrunnelsen for denne avgjørelsen er ønsket om å utfordre elevgruppen til å fremkomme formlene selv. I kortsett C4 *Overflateareal* viser kun tre av kortene til areal; figurene kjegle, trekantet pyramide og kube. Resten overlater jeg til elevene å beregne.

Kortsett A *Fagbegrep*, henviser videre til korrekt begrepsmessig fagterminologi av alle involverte romfigurer. Begrepene kjegle, rett firkantet prisme og trekantet pyramide mangler for å rette fokus mot nettopp terminologi.

Kortsett B *Romfigur,* viser ikke kun til en visuell, multifunksjonell ikke-ikoniske tredimensjonal fremstilling - men gjør at både kortsett C3, C4, E1 og E2 videre avhenger av gitte imaginære proposisjoner og tilleggsinformasjon. Representasjonen i seg selv kan ses på som en komprimert tekstoppgave fordi den kombineres også med skriftlige begrep, gitte proporsjoner og tilhørende symbolske tegn. Elevene fikk ingen blanke kort i dette kortsettet. I kort R8 (rett firkantet pyramide) får elevene hint om behov for Pytagoras i kort R4 (rett trekantet pyramide) ved informasjon om høyden i sideflaten likebent trekant.

Kortsett E1 *Volumformel* er ferdig utfylt på seks av åtte kort, og ved nærmere analyse vil man kunne se at de som foreligger vil kunne dekke samtlige romfigurer. En nøtt her er at en formel er vist på to forskjellige måter. I kortsett E2 *Volum* har jeg i førsteutkastet valgt å fylle inn alle representasjonene – utfordringen for elevene vil da bli å gjøre volumberegningene for å finne hvilket volum som tilhører de ulike romfigurene.

Totalt er det 22 blanke kort i kortsett R1, av 72 kort tilsammen. I motsetning til Swans opplegg som bør forstørres fra A4 til A3 har ikke dette kortsettet behov for forstørrelse ved utskrift i A4 format.

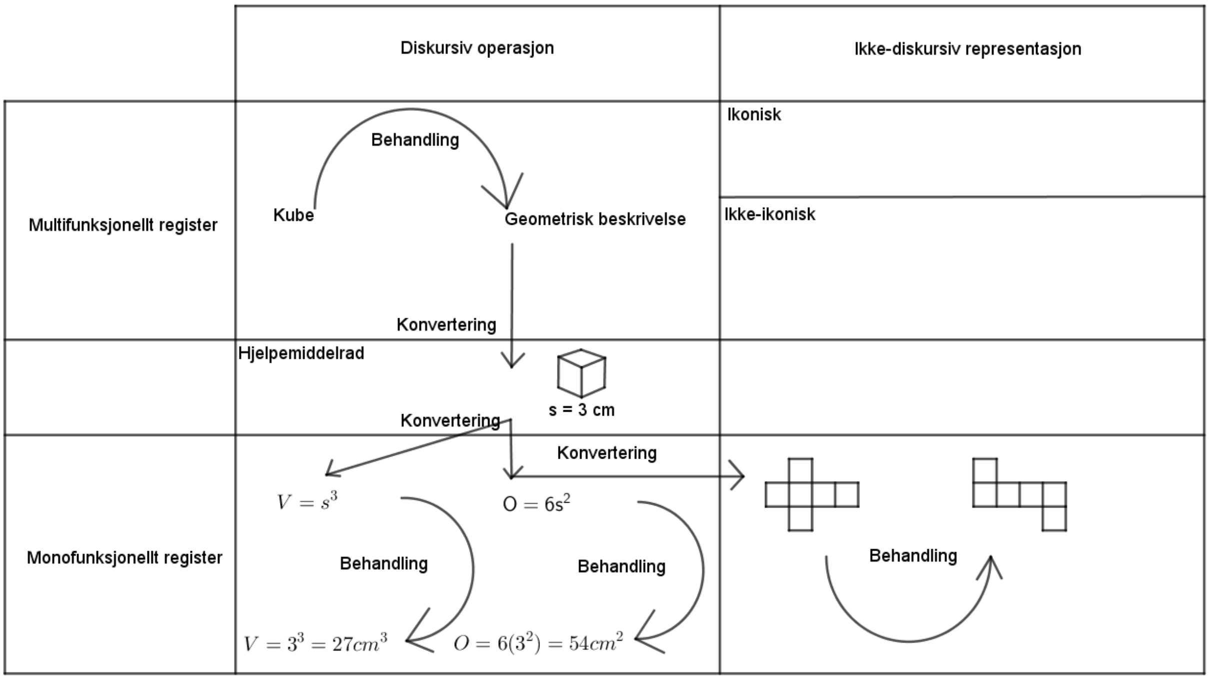
Under gjennomføring av opplegget har jeg som nevnt valgt å dele kortsettet i to bunker; en bunke med kortsett A, B, C1, C2 og D og en annen bunke med C3, C4, E1 og E2. Dette er et bevisst forsøk av å lette elevenes arbeid - på linje med hvordan Swan delte ut ulike representasjoner innen algebra i stigende vanskelighetsgrad. I mitt tilfelle fordi deler av utregningene elevene må foreta handler om *å gjøre matematikk* som anses som oppgaver på det høyeste kognitive nivå jamføre Stein & Smith (2011). I denne sammenhengen er det spesielt krevende å finne overflateareal av trekantet pyramide - da dette involverer bruk av Pytagoras læresetningen i to påfølgende omganger.

	Diskursiv operasjon	Ikke-diskursiv representasjon
Multifunksjonelt register	R1 Kortsett A Fagbegrep R1 Kortsett D Geometriske beskrivelser og noen hverdagsbegrep	Ikonisk Ikke-ikonisk (R1 Kortsett B Romfigurer, uten gitte mål!)
	Hjelpemiddelrad R1 Kortsett B Romfigur (kombinert med gitte mål)	
Monofunksjonelt register	R1 Kortsett C3 Overflateformel R1 Kortsett C4 Areal av overflaten R1 Kortsett E1 Volumformel R1 Kortsett E2 Volum	R1 Kortsett C1 Overflate R1 Kortsett C2 Overflate

Figur 16: Plassering av de ulike kortsettene i Duvals tabell

Som vist i min fortolkning i figur 16 kan de ulike kortsettene plasseres innenfor alle de fire hoved registrene. Begrunnelse for å plassere Kortsett B *Romfigur* i hjelpemiddelraden er kombinasjonen av ikke-ikonisk, digitalt konstruert romfigur òg tildelte proporsjoner med tilleggsinformasjon hentet fra både multi- og monofunksjonelle registre. Rene romfigurer uten dette tillegget vil naturlig plasseres som vist i parentes.

Tabellen viser tydelig at opplegget kan tolkes som et undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner. Det er verdt å merke seg at tyngden av utfordringer er tildelt monofunksjonelle register (6 av 9) - som beskrevet av Duval regnes som mest stringent. Undervisningsopplegget følger videre flere av Swans presenterte designprinsipp (2008) ved at det er et opplegg som bygger videre på elevenes kunnskap, søker å utvikle elevenes fagspråk og tilrettelegger for å skape forbindelser innenfor matematikkfaget. Ved å la elevene tolke multiple representasjoner kan elevene utvikle individuell konseptuell forståelse.
Videre kan det poengteres at undervisningsopplegget har en sterk prosessorientering hvor samarbeid og kommunikasjon er nøkkelkomponenter som fremhevet av Erlwanger allerede på 70- tallet (1973).



Figur 17: Eksempel på registerbruk for romfiguren kube i Duvals tabell

I figuren over vises konkret eksempel på hvordan man kan bevege seg fra et register til andre for å finne alle involverte representasjoner - her med start i begrepet kube. Jeg vil poengtere at det ikke er kun én vei for å finne løsning. Noen kan for eksempel finne det mer logisk å konvertere fra geometrisk beskrivelse via ikke-ikonisk (eller ikonisk, dersom de i prosessen lager en skisse) representasjon av kuben – for deretter å konvertere til en monofunksjonell fremstilling av kubens utbrettede overflate. Dette avgjør behov for involvering av antall representasjonsregistre. Andre kan velge å starte i et annet representasjonsregister eller ha behov for å benytte hverdagsspråk for å støtte en behandling over til fagspråk i det multifunksjonelle registeret. Enkelte vil også ha behov for å gå flere ganger frem og tilbake mellom ulike representasjoner, som beskrevet av Janvier i forhold til funksjoner; direkte og indirekte overganger (Janvier, 1987). Som referert i underkapittel 3.4.4 tyder stiplet linje mellom ulike registre til de mest krevende overgangene. Et eksempel kan være en overgang mellom en formel for volum og romfiguren. Elever som gjenkjenner formelen vil sannsynligvis ikke finne denne overgangen krevende likevel, et moment som er verdt å merke seg ved anvendelse av Duvals tabell (2006); *Tasks as implemented by students* (Stein & Smith, 2011).

Innledningsvis i denne masteravhandlingen knyttet jeg an til et spesifikt kompetansemål fra 9. trinn. Kompetansemålet dekkes ved blant annet gjennomføring av dette undervisningsopplegget. Samtidig viste jeg til representasjonskompetanse som del av den grunnleggende ferdigheten å kunne regne i matematikkfaget og hvordan flere kjerneelement speiles i opplegget. I dette delkapittelet er dermed undervisningsopplegget analysert med hensyn til både gjeldende læreplan, henvist teori, forsknings- og delspørsmål.

5.2 Bearbeiding og analyse av elevenes inn- og utsjekk

Under bearbeiding og analyse av elevenes inn- og utsjekk benyttet jeg firekolonnes tabell i Word med overskriftene; elevkode, innsjekk/utsjekk, antall representasjoner, antall ulike representasjonstyper (jamføre Duval). Dette gjorde jeg for å systematisere deres bidrag for videre bearbeiding. Elevenes ulike representasjonsnotat ble videre tildelt fargekoder.

Fargekodene representerer henholdsvis:

- Rosa markerer det naturlige språket (multifunksjonelt register; diskursive operasjoner).
- Grønn markerer skisser av 2- og 3- dimensjonale figurer (multifunksjonelt register; ikke-diskursive representasjoner – ikonisk).
- Gul markerer overgangs hjelperepresentasjoner (her legges kombinasjoner av ulike registre).
- Lys blå markerer det symbolske systemet (monofunksjonelt register; diskursive operasjoner).
- Mørk blå markerer kombinasjoner av ulike dimensjoner (monofunksjonelt registre; ikke-diskursive representasjoner).

Bak noen av elevenes notater har jeg skrevet markert *(FEIL)* i rødt; her har elevene ulike feil i for eksempel formel og liknende. Andre steder har jeg markert *(«FEIL»)* for å markere feil bruk av store og små variabler i formler.
Fargevalg er ikke tillagt noen annen mening enn å forenkle opptelling av representasjonene.
På neste side viser jeg et utsnitt fra materialet.

Elevkode	Utsjekk	Antall representasjoner	Antall ulike representasjonstyper
9x_2_5_2	**1. Romfigurer** **2.** Skisse: kube 3. Skisse: overflate kube **4. kube** **5.** $V = Grunnflate * Høyde$ **(«FEIL»)** **6.** $O = summer\ arealene\ av\ sidene$ **7. 6 flater** **8. 4 hjørner** 9. Skisse: prisme 10. Skisse: overflate prisme **11. prisme** **12.** $V = G * H$ ("FEIL") **13.** $O = summer\ arealet\ av\ sidene$ **14. 6 flater** **15. 4 hjørner** 16. Skisse: sylinder 17. Skisse: overflate sylinder **18. sylinder** **19.** $O = 2\pi r^2 + 2\pi r * h$ **20.** $V = \pi r^2 * h$ **21. 3 flater** **22. 0 hjørner**	(38) 37	5

Figur 18: Anonymisert utsnittseksempel av kodematerial etter utsjekk

Utsnittet over viser et bilde av en elevs bidrag etter utsjekken. Til sammen oppga eleven ikke mindre enn 38 systematiserte representasjoner som etter kodemalen forelå under alle «fem» registrene. Eleven hadde kun en formell feil, derfor er materialet registrert som 37. Som nevnt markerer gul en representasjon fra hjelpemiddelrad ved at eleven har anvendt både symboler, variabler òg fagspråk; en diskursiv kombinasjons operasjon fra både multi- og monofunksjonelle register (den femte representasjonsformen; jeg utvidet til fem register da flere elever tilsynelatende stagnerte i hjelpemiddelraden).

Samtlige av elevenes notater fremkommer i dokumentet slik jeg subjektivt tolket dem - hvorpå noen av notatene fremstod i naturlig system, mens andre fremstod mer usystematisert. Et systematisert notat kjennetegnes ved at eleven har samlet ulike representasjoner av for eksempel kube; begrep, skisse (tredimensjonale og/eller overflater) og formler for overflate og volum. Usystematiserte elevnotater ramser opp ulike representasjoner uten å vise tegn til systematisering og kan kjennetegnes ved at for eksempel et rombegrep er tillagt feil volumformel. Sistnevnte kan muligens si noe om elevenes nivå i forhold til van Hiele modellen.

Etter koding ved hjelp av farger i Word- dokumentene (et for inn- og ett for utsjekk) overførte jeg resultatene numerisk til Excel. Elevene ble da systematisk tildelt elevkoder, for eksempel 9x_1_7_1 og 9y_2_15_2, hvor hver elev beholdt sin plassering innenfor klassen/gruppen uavhengig av inn- (_1) og utsjekkmaterialet (_2). Av hensyn til anonymiseringskrav er også eleven i figur 18 fremstilt etter samme kodingsmal selv på Word dokumentet.

44	UTSJEKK 9x									
45	elev	skrift	skisse	overgang	symbol	kombodim	(FEIL)		Antall rep	
46	9x_1_1_2	10	6	6	1	0	3		23	
47	9x_1_2_2	5	5	3	0	0	0		13	
48	9x_1_3_2	1	4	0	0	0	5		5	
49	9x_1_4_2	2	0	2	1	0	3		5	
50	9x_1_5_2	8	4	10	0	6	2		28	
51	9x_1_6_2	8	0	3	0	0	2		11	
52	9x_1_7_2	7	6	0	1	6	1		20	
53	9x_1_8_2	10	7	10	0	4	2		31	
54	9x_1_9_2									fravær
55	9x_1_10_2	4	3	3	2	0	3		12	
56	9x_1_11_2	5	0	2	2	0	0		9	
57	9x_1_12_2	7	0	0	8	0	0		15	
58	9x_1_13_2									fravær
59	9x_1_14_2									fravær
60	9x_1_15_2									fravær
61	9x_2_1_2	1	4	0	1	0	6		6	
62	9x_2_2_2	0	6	5	4	0	1		15	
63	9x_2_3_2	5	2	1	7	0	11		15	

Figur 19: Utsnitt av Excel bearbeiding

Videre bearbeidet jeg dette deskriptive materiellet statistisk og benyttet Excel til å utforme visuelle diagrammer med påfølgende kontekstuell analyse.

I prosessen med behandling av materialet foretok jeg et valg i forhold til hvilke elever jeg skulle analysere nærmere. Det viste seg at både ved inn- og utsjekk var enkelte av elevene ikke tilstede av ulike grunner. Tre elever av totalt 59 var hverken tilstede under inn- eller utsjekk. Videre var det en andel elever som ikke var tilstede ved innsjekk og en annen andel manglet ved utsjekk. Med dette som grunnlag valgte jeg å luke bort samtlige av disse elevene fra det totale materialet (markert med røde navnekoder i Word dokumentet og blå tomme linjer på Excel dokumentet). Da endte jeg opp med 24 elever i 9x og 20 elever i 9y. Grunnlaget kan da formidle et bedre helhetlig bilde og dermed skapes mest optimalt sammenlikningsgrunnlag for videre statistisk behandling av inn- og utsjekk ved bruk av grafer som vist i underkapittel *5.2.2. Resultater og funn etter innsjekk og utsjekk.*

5.2.1 Utarbeiding av tabelltilpasning i forhold til Duval

Under analyse av inn- og utsjekk datamaterialet oppstod behov for å tilpasse Duvals tabell til temaet romfigurer. Jeg kopierte mal for Duvals tabell og fylle inn relevante representasjoner. Under presenteres min fortolkning.

	Diskursiv operasjon	Ikke-diskursiv representasjon
Multifunksjonelt register	Hverdags- og fagspråk Fagbegrep romfigurer Fagbegrep som volum og overflate Egenskaper til romfigurer Geometriske beskrivelser av romfigurer	Ikonisk Skisser av romfigurer — Ikke-ikonisk
	Hjelpemiddelrad Kombinasjon av skriftlige begrep og symboler Kombinasjon av romfigurskisser og tildelte mål	
Monofunksjonelt register	Formler for volum og overflater Variabler π	Skisser av romfigurers overflate

Figur 20: Plassering av elevers bidrag etter inn- og utsjekk i Duvals tabell

Det er igjen viktig å presisere at ved analyse har jeg økt fra fire til fem ulike semiotiske system, da elevene viste seg å benytte hjelpemiddelraden som egen representasjon – oftest uten å ta steget videre i hovedregister for symbolsk system. Jeg henviser til Duvas originale fremstilling hvor pil fra multifunksjonell diskursiv rad går inn i hjelpemiddelraden og stopper der – og en ny pil går fra denne raden videre ned til den monofunksjonelle diskursive raden.

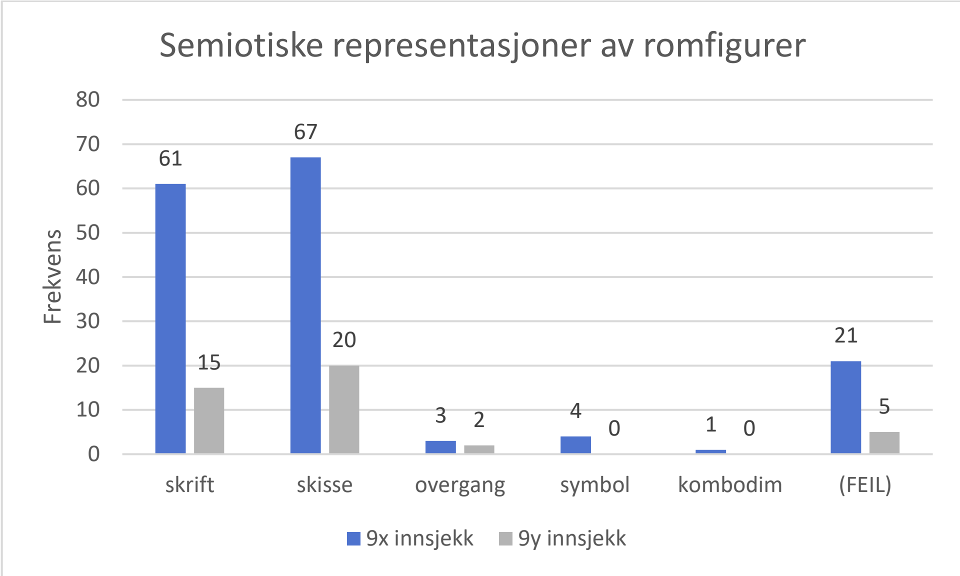
$\longrightarrow$ antyder som nevnt en noe vanskeligere overgang, og i dette tilfellet en overgang fra et register til et annet, selv om dette ikke fremlegges av Duval som en av de fire hoved registrene (Duval, 2006)

5.2.2 Resultater og funn etter innsjekk og utsjekk

Jeg velger å vise både inn- og utsjekkresultatene samtidig for å lette sammenlikningen og benytter diagrammer for å visualisere og analysere resultatene. Først vises det til to sitater verdt å merke seg.

To av elevene er kodet rosa under analyse. Det betyr at jeg har tatt med skriftlige sitater fra utsjekk av elevene i min tekst. Innledningsvis formulerer 9x_2_11_2 seg slik: *«Greier ikke å bare ramse opp det jeg kan, må ha spørsmål for å huske det»*. Eleven har likevel skrevet 12 notater hvorav én er markert som *(FEIL)*. De andre representasjonene fordeler seg innenfor kun to ulike registre; multi- og monofunksjonelle diskursive operasjoner. Sammenliknet med innsjekk skrev samme elev 11 notater fordelt innenfor tre ulike registre; multifunksjonelt diskursivt og ikke-diskursivt register samt et notat tillagt hjelpemiddelraden hvor eleven benytter seg av både symboler og naturlig språk. Mener eleven at hen ville kunne vise til representasjoner underlagt flere registre dersom innfallsvinkel for utsjekksspørsmål hadde vært mer presist? Eller sier dette mer om elevens foretrukne register etter fokus på multiple representasjoner? Kanskje tilsier det bare at eleven ikke finner behov for å bruke representasjoner fra de ikke-diskursive representasjonene.
Liknende tilfelle finner jeg i utsjekken til elev 9y_1_13_2: *«Litt vanskelig å svare på men hadde vært lettere om jeg bare hadde fått en oppgave»*. Denne eleven har kun skrevet et notat i tillegg, innenfor det multifunksjonelle registeret, diskursivt, med naturlig språk. Sammenliknet med innsjekk har eleven også da kun et notat i samme register. Viser dette mangel på representasjonsregistre - eller sier det mer om engasjement for å bidra med sin kunnskap i utsjekksøyeblikket?

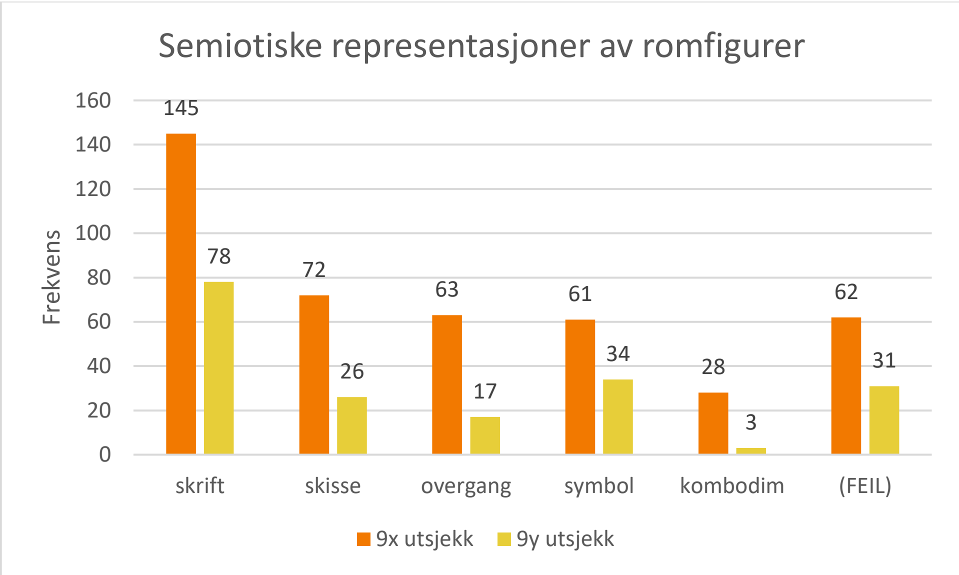
Videre viser jeg til ulike diagram basert på analysen gjennomført ved bruk av Excel.



Figur 21: Tabell 1 - Semiotiske representasjoner av romfigurer – klassevis innsjekk

Tabell 1 fremstiller hvordan klassenes totale frekvens forekom innenfor ulike representasjonsregistre ved innsjekk. Innsjekken fungerer som nevnt som en igangsetter, og formålet er å hente frem førkunnskap i oppstart av nytt tema. Umiddelbart ser det ut som elever i 9x husker mer om temaet enn elever i 9y. Det er viktig å minne om at klasse 9x har fire flere elever totalt enn i klasse 9y – et moment som påvirker relativ frekvens. Ved å se på gjennomsnittlig bidrag fremkommer det likevel at elevene i klasse 9x har omtrent 3 ganger flere bidrag enn elevene i 9y (gjennomsnittlig 5,666 bidrag pr elev i 9x mot 1,85 pr elev i 9y – uten inkludering av bidrag merket (FEIL)). Det fremkommer tydelig av bidragene at elevene i begge klassene på tidspunktet anvender representasjoner innen multifunksjonelle registre. Bidragene fordeler seg omtrent likt mellom diskursive operasjoner (begrep og skriftlige beskrivelser) og ikke-diskursive representasjoner (skisser). I begge klassene er det flest bidrag tilknyttet ikke-diskursive register. Søylen markert (FEIL), den sjette søylen; innebærer som tidligere beskrevet feil tilknyttet ulike registre. For eksempel feil i formler eller en representasjon tilknyttet geometriske planfigurer (2D). Her fremstiller elever i 9x fire ganger så mange feil som elevene i 9y, noe som kan ha sammenheng med at elever i 9x, i høyere grad, forsøkte å vise førkunnskap.

Videre følger en forklaring på diagramsøylenes titler. Første søylepar er merket «skrift» og tilhører multifunksjonelt register - diskursiv operasjon. Andre søylepar er merket «skisse» og tilhører multifunksjonelt register, ikke-diskursiv representasjon. Tredje søylepar er merket «overgang» som plasseres i hjelpemiddelrad; diskursiv operasjon. Fjerde søylepar er merket «symbol» og tilhører monofunksjonelt register, diskursiv operasjon. Femte søylepar er merket «kombodim» (kort for kombinasjonsdimensjon), og tilhører monofunksjonelt register, ikke-diskursiv representasjon.

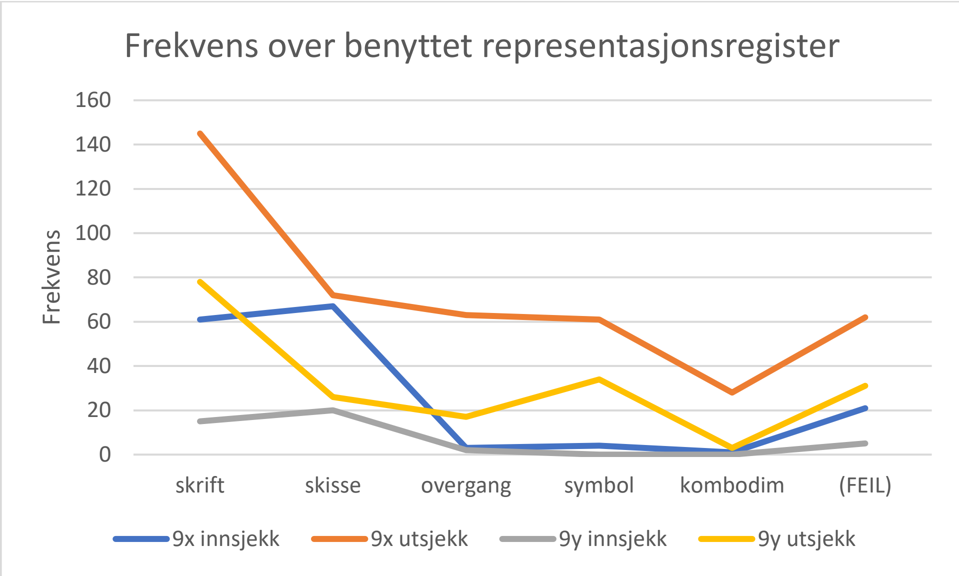


Figur 22: Tabell 2 - Semiotiske representasjoner av romfigurer – klassevis utsjekk

Tabell 2 viser resultat etter utsjekk. Dette er som nevnt tidspunkt etter gjennomføring av det praktiske opplegget i klasse 9x. Fremdeles er frekvensen høyere i 9x enn i 9y, men det er interessant å bemerke at det nå foreligger data tilknyttet alle de fire (fem) ulike registrene i begge klassene. Det fremkommer tydelig i begge klasser at på dette tidspunktet foretrekkes det naturlige språk (multifunksjonelt register, diskursiv operasjon), endring fra hovedvekt plassert i det multifunksjonelle ikke-diskursive registrert ved innsjekk. Dette kan tyde på at perioden har bidratt til at elever i begge klassene har økt faglig begrepsrepetoar.

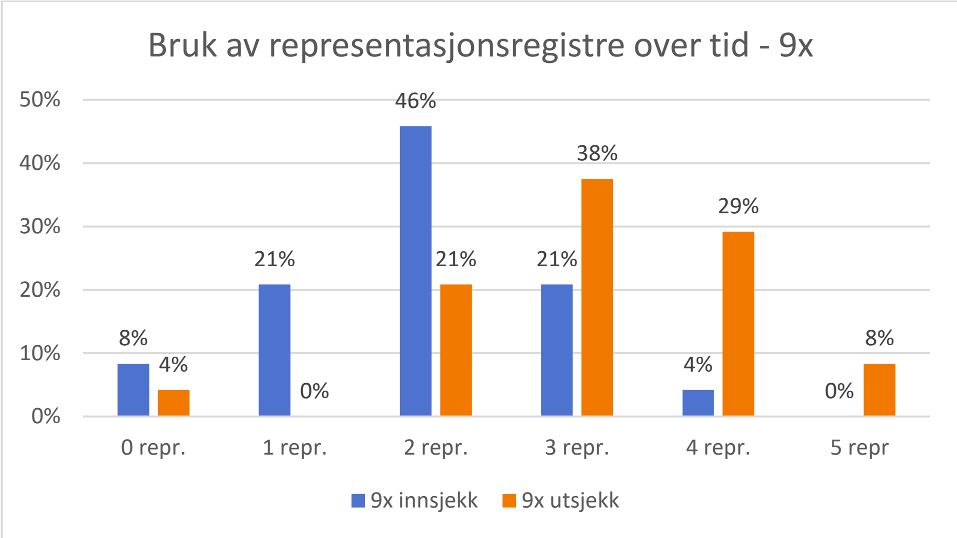
Det fremkommer at i 9x er trenden for foretrukket register synkende fra venstre mot høyre, men i 9y er bildet mer variert hvor nest mest frekventerte register noe overraskende tilknyttes det symbolske, monofunksjonelt diskursiv operasjon register.

Elever fra 9x bidrar gjennomsnittlig fremdeles mer enn elever i 9y, men nå er forskjellen nærmere 50 prosent (15,375 bidrag pr elev i 9x mot 7,9 i 9y). Det kan tolkes som om elevene i 9x etter det praktiske undervisningsopplegget er mest fortrolig med representasjoner innen multifunksjonelle registre – kjennetegnet av lav grad av stringens og kjent for å være mest intuitivt.



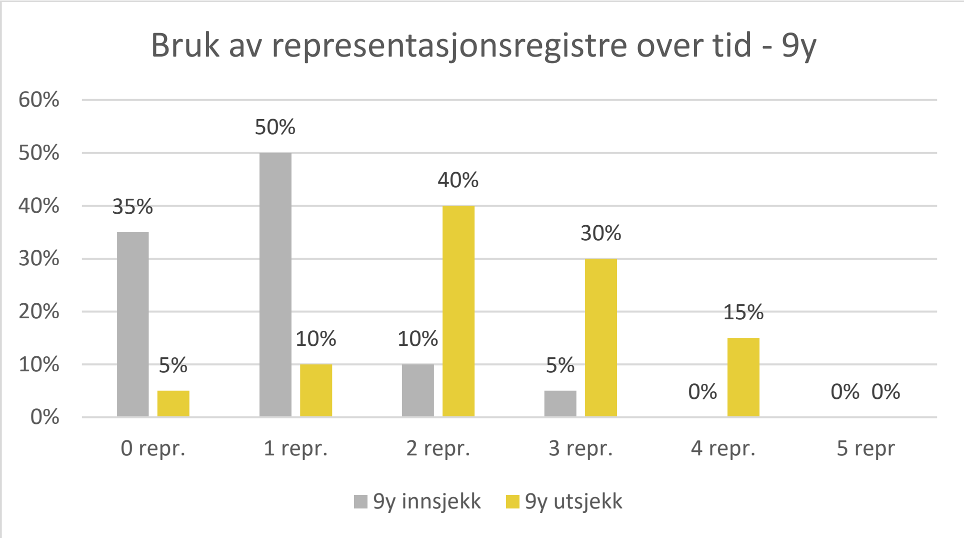
Figur 23: Tabell 3 - Frekvens over benyttet representasjonsregister – klassevis innsjekk òg utsjekk

Tabell 3 forenkler sammenlikning av klassene ved både inn- og utsjekk. Klassene viser ved innsjekk større forskjell innen multifunksjonelle enn i monofunksjonelle og overgangs-registeret (hjelpemiddelraden). Ved utsjekk ser det ut som klassene jevnt over følger hverandre, at multifunksjonelt diskursivt register foretrekkes – og figur 23 viser at det i løpet av testperioden har funnet sted en betraktelig økning innen monofunksjonelt diskursivt register i begge klasser. Det fremkommer også tydelig nærmest dobbelt så stort bidrag i utsjekk blant elever i 9x. Jeg velger derfor å se nærmere på elevenes prosentvise bidrag tilknyttet antall brukte representasjoner. Dette vil gjøre sammenlikningsgrunnlaget mer likeverdig uavhengig av antall involverte elever per klasse.



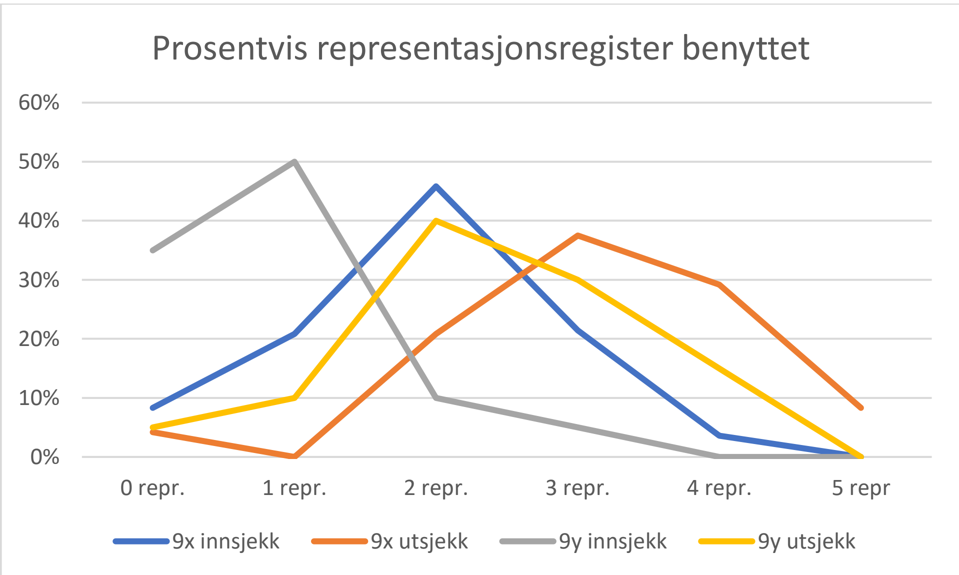
Figur 24: Tabell 4 - Prosentvis bruk av representasjonsregistre over tid – klasse 9x

Tabell 4 viser at flertallet av elevene, 46 prosent i 9x benyttet kun to register ved innsjekk. Som vist tidligere i tabell 1 svarer begge representasjonsformene til multifunksjonelle registre; naturlig språk og skisser av romfigurer. Vi kan merke oss at det parallelt var like stor prosentandel som enten benyttet kun én eller tre representasjonsregistre. Av de 24 involverte elevene utgjør fire prosent én elev, det tilsier at ved innsjekk var det to i klassen som ikke kunne vise til noen form for representasjoner innen romfigurer, mens én i klassen viste til hele fire ulike registre frembragt kun av førkunnskap. Forskjellen i elevenes førkunnskap ved oppstart av temaet er med andre ord betydelig. Ved utsjekk kan man se at det fremdeles er én elev som ikke viser noen form for representasjonskunnskap innen temaet, men nå benytter ingen andre elever i 9x kun én representasjon. Flertallet, 38 prosent, benytter nå minst tre registre og 29 prosent benytter fire. To elever benytter alle fem registertypene - dersom vi velger å anse hjelpemiddelraden som eget register.



Figur 25: Tabell 5 - Prosentvis bruk av representasjonsregistre over tid – klasse 9y

Tabell 5 viser at flertallet, 50 prosent i klassen benyttet kun én form for register ved innsjekk - tabell 1 viste at alle var underlagt multifunksjonelle register. Påfallende mange, 35 prosent, viser ingen registre. Ved utsjekk kan man se at det også i denne klassen fremdeles er en elev som ikke viser noen form for representasjonskunnskap innen emnet. Videre kan vi merke oss at flertallet, 40 prosent, nå benytter minst to registre hovedsakelig underlagt diskursive registre (se tabell 1) og at tre elever viser til fire registre. I klasse 9y utgjør én elev 5 prosent av datamaterialet.



Figur 26: Tabell 6 - Antall benyttet representasjonsregistre over tid – klassevis

Tabell 6 viser begge klassenes prosentvise anvendelse av ulike registre over tid. Størst forskjell finnes som nevnt ved å sammenlikne elevenes førkunnskap. Figur 26 viser at elever i 9x både har mer førkunnskap og en større positiv trend etter utsjekken enn elevene i 9y. Grovt sett kan det tolkes som om elever i 9y har tilnærmet lik kurve på sin utsjekk (gul linje) som elevene i 9x har ved sin innsjekk (blå linje). Gjennomsnittlig variasjonsbredde er omtrentlig likt i begge klassene, 11 i 9x mot 10 i 9y.

I utsjekken utpeker spesielt én elev seg blant materialet. Elev 9x_2_5_2 viser tilsynelatende å ha full kontroll på alle de ulike romfigurene ved å benytte en systematisk fremstilling/logisk ordning under alle fire (fem) registre. Dette kan tyde på at eleven kan tolkes innenfor van Hielemodellens nivå 3 , som igjen kan bety at eleven nærmer seg en konseptuell forståelse. Eleven ble i starten av kapittelet brukt som eksempel for å vise hvordan jeg kodet bidrag i inn- og utsjekk.

5.3 Resultater og funn etter deltakende observasjon

Beskrivelsen som fremkommer under er basert på observasjonsnotater som foreligger etter gjennomføring av undervisningsopplegget i 9x, og ses som forlengelse av beskrivelsen av forløp av undervisningsperioden som presentert i underkapittel 4.2.2

Etter hvert som arbeidsprosessen skred frem fant jeg det utfordrende å rekke over alle gruppene og veilede behov og samtidig nå innom fokusgruppen som arbeidet på grupperommet. Undervisningsopplegget kjennetegnes derfor av stort veiledningsbehov. Under vandring mellom gruppene ble jeg også oppmerksom på at de fleste elevgruppene stadig sporet av oppgaven og var mer opptatt av sosiale utenomfaglige kontekster. Dette er kjent for pedagoger flest og element som klart har innvirkning på oppgavens progresjon. Annet observert moment er forskjellen mellom gruppemedlemmers faglige engasjement; et annet kjennetegn på praktiske undervisningsopplegg. Jeg observerte i flere runder at elever «hvilte på» andre elevers arbeidsinnsats, og at den eller de elevene som arbeidet for progresjon tydelig viste frustrasjon over andre gruppemedlemmers manglende deltakelse og fokus. Burde jeg avsatt tid i oppstart av undervisningsopplegget til å diskutere med elevene hva som kjennetegner et godt gruppearbeid og på den måten bidra til å bedre både sosiale og faglige prosesser i gruppearbeidet?

Jeg erfarte at oppstart av timene krevde en del organisering som reduserer tiden elevene får til å arbeide med oppgaven. Det som startet med 10 grupper endte opp med 8 på grunn av frafall av elever. Dette gjorde ikke noe for helheten, det er kjent problematikk, men et uromoment som forstyrrer oppstart av timene. Som faglærer må man på strak arm omrokere fastlagte grupper med hensyn til at nye elevkonstellasjoner skal fungere optimalt. Stressende moment da man vet hvor mye andre hendelser i skolehverdagen innvirker pågående sosiale ikkefaglige prosesser.

Jeg opplevde underveis og spesielt mot slutten av avsatt tid at jeg atter en gang hadde lagt opp til for stort undervisningsopplegg. I løpet av tredje time begynte gruppene likevel å nærme seg ferdigstilling av arbeidsprosess - men planlagte plenumsdiskusjon måtte forkortes sterkt da gruppene kom ulik ut.

Det jeg kan oppsummere etter deltakende observasjon er at samtlige grupper slet tilsynelatende mest med å finne egne, alternative representasjoner av overflatene. Under veiledning gjentok jeg meg selv opptil flere ganger uten å gi dem svar som tilfredsstilte dem. Meningen var jo at de selv skulle finne løsningene, ikke at jeg skulle gi dem svar uten at det krevde noe av dem. Videre slet de med å lage egne, korrekte beskrivelser av figurens sammensetning. Store deler av elevmassen uttrykte underveis at det var unødvendig å være så pirkete på ordlyden, men gjennom dialog forsto de forskjell på presise beskrivelser, som for eksempel begrepet likesidet trekant og generelle formuleringer som begrepet trekant.
Mange grupper fullførte ikke å beregne romfigurenes overflateareal. Det kan tyde på en krevende konvertering med påfølgende behandling i monofunksjonelt diskursivt register.
Jeg observerte også at store deler av elevmassen tilsynelatende meldte seg ut ettersom vanskegraden økte mot slutten da gruppene jobbet med de siste kortsettene: volum og overflate.

Avsluttende oppsummering i klassen tilsa at elevene utrykte det var en ok oppgave; flertallet samstemte i et høylytt «JA!». Enkelte elever mente oppgaven var altfor vanskelig, men samtlige mente at det var gøy med gruppeoppgave og noen ønsket seg nye gruppesammensetninger neste gang. Ifølge flertallet var det enkleste med oppgaven å koble romfigurene til riktig fagbegrep. Under observasjon så jeg gruppene løste denne utfordringen

i løpet av første time uten å støtte seg til det fysiske læreverket Matemagisk. Dette var for øvrig eneste hjelpemiddel elevene fikk benytte under arbeidet. Noen grupper diskuterte hvilke figurer som het hva, og ved uenighet var det som regel flertallet som overbeviste med bakgrunn i hverdagslige, og delvis faglige - påpekte figuregenskaper. Mange elever mente videre det var utfordrende å koble gitte overflaterepresentasjoner til figurene og at det var enda mer krevende å visualisere og produsere alternative overflaterepresentasjoner. Dette var som beskrevet en stor del av oppgaven, da kortsett *C2 Andre måter å vise overflaten* innebar flest blanke kort. Under deltakende observasjon og veiledning ble det tydelig at flere elever sliter med å forestille seg hvordan en sammensatt overflate blir når den «brettes sammen», og motsatt – hvordan en romfigur ser ut når den «brettes ut».
Noen elever nevnte at det var vanskelig å formulere presise geometriske beskrivelser med egne ord, og gav uttrykk for at dette var uvant for dem. Generelt var det krevende for elevene å fylle ut blanke kort.

Å koble gitte formler for volum var lett blant elever som gjenkjente formel for enkelte figurer, men det var for de fleste vanskelig å koble algebraiske uttrykk i formlene til riktig romfigur. Videre var det krevende for flertallet å utvikle formler som ikke var gitt. Grupper som fant frem til riktige formler løste beregning av konkret volum. De fleste formlene for overflate var med to unntak gitt. Flere elever hadde imidlertid problemer, på linje med volumformlene, med å tolke bakenforliggende algebraiske uttrykk. For eksempel var det vanskelig for noen å koble uttrykket $\frac{g*h}{2}$ til formel for utregning av arealet av en trekant (tilhørende kvadratisk pyramide). Som vist i transkripsjonsutsnitt 19 i kapittel *5.4 Resultat og funn i lydopptak av fokusgruppearbeid* oppstod det også forvirring rundt gitte grunnflateareal (i denne sammenheng av rett trekantet prisme), da eleven var på vei til å dele det gitte grunnflatearealet på to fordi grunnflaten var en trekant. Dilemmaet oppstod også i andre grupper. Aller vanskeligst var det imidlertid for elevene å regne ut manglende overflateareal da disse utfordringene ofte besto av påfølgende delutregninger. Spesielt utfordrende var trekantet pyramide siden denne romfiguren la opp til behov for å anvende Pytagoras setning – et moment som er nevnt under analyse av oppgaven i delkapittel *5.1 Utforming av undervisningsopplegg*.

Så hvor langt kom de ulike gruppene i prosessen? Etter nærmere gjennomgang av elevenes resultater fant jeg i etterkant at gruppe (1) ikke hadde begynt sortering av kortsett C3, C4, E1 og E2. Gruppe (2) hadde limt på alle kortene men ikke fylt inn de blanke kortene for formel av overflaten til trekantet pyramide og areal av denne samt trekantet prisme. Gruppe (3) og (4) hadde fått med alt bortsett fra C4 og halve E2. Gruppe (5) manglet 5 av 8 fra C4 og alle E2 - de hadde også rotet bort en av lappene på kortsett D men løst dette ved å skrive forklaring direkte på gråpapiret. Gruppe (6) (fokusgruppen) manglet utfylling av de to blanke på C3 og 5 av 8 på C4. Gruppe (7) hadde limt på alle kortene men manglet de to blanke beskrivelsene av D samt utregning av overflaten til trekantet pyramide, mens gruppe (8) kun manglet utregning av overflateareal av trekantet- prisme og pyramide.

5.4 Resultater og funn i lydopptak av fokusgruppearbeid

Etter transkribering av gruppesamarbeidet var det flere seksjoner som utpekte seg for videre analyse sett i forhold til både egne erfaringer, hypotese og forskningsspørsmål. Utsnitt_1 er fra oppstart av første time med det multiple undervisningsopplegget.

Pål:	=Men denne prøven tror jeg kommer til å bli litt vanskelig tror jeg, det er så]
Jens:	[Har dere]
Pål:	[mange formler, med de her (.) Hva heter de her (.) Hva heter det her kapittelet? I matten. Det vi driver med nå]
Nina:	[Tredimensjo]
Pål:	[Tredimensjonale figurer! 2D og tredimensjonale. Det er så mange formler for de forskjellige. Jeg kommer ikke til å huske alle, det er det som er problemet (.) Skulle ønske vi kunne hatt regelboka med.

(Utsnitt_1)

Utsnittet beskriver en elevs egne ord for min tidligere utrykte erfaring. Dette er et tema som mange i elevmassen sliter med å få oversikt over. Siste setning henviser til ønske og behov for å benytte regelbok på kommende temaprøve. Pål nevner *formler*. Formler er som beskrevet i Duvals tabell (2006) plassert i monofunksjonelt diskursivt operasjonsregister kjennetegnet med høy grad av stringens. Representasjoner her er element innen temaet som ikke er konseptuelt, lett tilgjengelige - og krever en ikke-kongruent konvertering fra det multifunksjonelle register. Påls ønske om å bruke regelbok kan antyde at de algebraiske formlene for volum og overflate tilsynelatende ikke er tolket og forstått, og at han dermed har en instrumentell tilnærming.

Nina: [Skal jeg klippe, eller skal jeg lime?]
Pål: [Jeg kan klippe, så kan du bare lime, og finne ut av hvordan man gjør det. Jeg tror du skal (.) også er det er til lapp inni her, også ser du om det står noe (.)
Nina: Ja, det er bare de andre reglene. Skal vi ta det nedover mot meg da? (.)
Pål: Ja, sånn (.) og sånn (.) De første figurene her også tar du de beskrivelsene (.) Men::: Hva er dette for noe? (.) Skal vi liksom tegne andre måter å vise overflaten på?

(Utsnitt_2)

Utsnittet beskriver hvordan Pål «delegerer» ansvar over på Nina når han selv muligens er usikker på hvilke representasjoner som tilhører ulike romfigurer. Pål er videre overrasket over at de blir utfordret til å lage egne variasjoner av overflatene. Representasjoner for overflate av romfigurer plasseres også i det monofunksjonelle registeret, nå i det ikke-diskursive som også kjennetegnes av høy grad av stringens. Ved å be elevene produsere andre måter å vise overflatene utfordres elevenes behandlingskompetanse, men først må de øve konverteringskompetanse ved å tolke hvilke overflater som tilhører romfigurene.
Videre forteller utsnittet hvordan gruppen organiserte systematiseringen av ulike representasjoner som et kjennetegn for gruppearbeidet.

Pål: Hvor ble det av de andre? (.) Jeg hadde nettopp lagt det her (.) Åja! (.) Jeg la det bare:: (.) Jeg lar det bare ligge her.

(Utsnitt_3)

Utsnittet viser at elevgruppen finner materiellet stort å forholde seg til, et moment jeg delvis fryktet i forkant av gjennomføringen – dette kan også være et kjennetegn på selve gruppearbeidet. Da Pål omtaler de ulike representasjonene som «de andre» viser det også at han ikke benytter fagspråk, eller at hans begrepsforståelse ikke er utviklet til «forventet» nivå. Men det kan også være et tegn på hvordan elevene kommuniserer seg imellom under gruppearbeidet uten at det har noe sammenheng med elevenes individuelle begrepsforståelse.

Lærer: Ser dere at dette er to forskjellige måter å tegne den (peker på R8) (.) utbrettet på (.) overflaten (.) men det er akkurat samme figuren!? (.) To forskjellige måter å tegne (.) eller brette ut (.) overflaten på!
Pål: Mhm (.)
Nina: Må vi gjøre alle disse her selv da? (.)
Lærer: Ja (.) De skal dere finne ut av selv.
Pål: De her (.) De må vi tegne på selv da?

Lærer: Ja. Dere har noen blanke kort her (.) som skal fylles ut i forhold til de enkelte figurene]
Nina: [Men de tar vi tilslutt (.)

(Utsnitt_4)

Utsnittet viser hvordan jeg under veiledning på ny forklarte hva de skulle gjøre med de tomme kortene ved å henvise til gitte eksempel for to ulike måter å «brette ut»/vise overflaten av firkantet pyramide. Ideen var å sette dem på sporet av hvordan de selv kunne behandle en omforming av andre overflater. Dette krever utforskning fra elevenes side. Etter noe mer frem og tilbake oppsummerte Nina så fint med kommentaren:

Nina: Dette blir gøy. (Utsnitt_5)

Kommunikasjonen fortsatte videre og jeg sitter i ettertid igjen og lurer på om Nina var ironisk eller om dette var en ærlig mening. For noen elever kan dette være en morsom utfordring, mens for andre, kanskje heller noe de ikke ser hensikten med på tidspunktet. En behandling er ifølge Duval mer intuitiv og kongruent enn en konvertering - som vist med buede piler i hans tabell.

Pål: «Kan du finne andre måter å:::» (.) Du kan gjøre det imens jeg limer da. Tegne de på (.) Sånn som de enkle måtene der (.) og tegne de på (.) Sirkel, det er jo bare å tegne en sirkel]
Nina: [Hm? (.)
Pål: «Figuren består av to like store sirkler og et rektangel med lengde (.) Bla bla bla (.) Åkei! «Figuren består av en sirkel og en sirkelsektor» (.)

(Utsnitt_6)

Utsnittet antyder at Pål finner behandling av overflatene utfordrende og dermed overlater dette til Nina ved å fokusere på annen del av oppgaven som ligger i det multifunksjonelle, diskursive operasjonsregisteret. Ifølge Duval (2006) har dette registeret lav grad av stringens og er dermed lettere tilgjengelig. Selv om de geometriske beskrivelsene er formulert på fagspråk er de formulert i et naturlig språk, og elevene utfordres gjennom oppgaven til å utvikle evne innen abstraksjon.

Jens: Skal jeg tegne den der, sånn som du gjorde?]
Pål: [Hm? (.)

Jens: Jeg bare tegner (.)
Nina: Åkei::: (.) Det er egentlig bare å få bretta den fra hverandre (.) på forskjellige måter (.)
Pål: Ja, det er det (.)
Nina: Å::::: Håhåhå:::]
Jens: [Ja, hvordan er det man skal gjøre det?
Nina: Jeg vet ikke (.) Åkei:: Hvis jeg bare (.) Hmmm::::]
Jens: [Man må bare dele den opp!?]
Nina: [Nei vent! (.) Jeg vet en (.) Jeg vet en! Se (.) Du kan gjøre sånn (.) Nei, det her kommer til å bli helt forferdelig (.) Vent (.) Jeg kom på en!

(Utsnitt_7)

Utsnittet over viser at det i dette øyeblikksbildet gikk opp et lys for Nina - hun knekte en behandlingskode! Hun hadde jobbet en stund og utforsket ved å prøve og feile og tegnet ulike skisser, og på denne måten utviklet sin problemløsningsferdighet. Gjennom arbeidet har hun utvidet sin behandlingskompetanse innenfor monofunksjonelle overflater av romfigurer.
I slutten av delkapittelet viser figur 27 hvordan fokusgruppen totale resultat utartet seg. Avslutningsvis i første time kommer jeg innom og oppsummerer arbeidet så langt.

Lærer: Dere har funnet noen av sammenhengene og limt de på, og nå har dere begynt å fylle ut de tomme kortene (.)
Nina: Mhm.
Lærer: Yes::: (.) Så fint at sånn som her (.) som dere har tegnet overflaten av kuben (.) at den er sammenhengene (.) At ikke dere tegner seks ulike kvadrater (.) De skal liksom henge sammen slik at man kan brette disse til en figur i form av en kube (.)
Pål: Ja::]
Lærer: [Og der også (.) Helt riktig, fint forslag! Flott! Nå må vi sjekke klokka og ta oss tid til at dere får limt på de løse delene dere nå vet hvor hører til (.)

(Utsnitt_8)

Etter erfaring fra pilot 2 vet jeg det er viktig å passe på at elevene får limt på kartlagte sammenhenger ettersom de selv ikke er gode til å passe tiden. Jeg bekreftet arbeidet så langt, krediterte deres overflatebehandling av blant annet kuben og poengterte viktigheten av at de ulike overflatene har kontakt mellom sidekanter.

Under analysen av lydmaterialet blir det tydelig at store deler av tiden kommuniserer elevene om alle mulige andre forhold enn selve oppgaven. Denne første timen utpekte seg da elevene i transkripsjonsmaterialet diskuterte ikke mindre enn rundt 40 andre tema tilknyttet skole og fritid. En digresjon, men et tydelig bilde av hva som kan kjennetegne praktiske gruppe-oppgaver som metode. Elevene brydde seg tilsynelatende ikke om at alt ble tapet.
Som faglærer var dette både morsomt og frustrerende å ta innover seg.
I andre samarbeidstime kommer gruppen raskere i gang. Denne timen er kun to elever tilstede da Jens var fraværende denne dagen.

Pål: [Hva heter dette for noe? (.) Jeg har glemt navnet på den (.)
Nina: Eh::: firkantet pyramide]
Pål: [Nei nei nei nei (.) Den i midten!
Nina: Firkantet (.) Kvadrat. (Utsnitt_9)

Utsnittet viser øyeblikksbilde av hvordan samarbeid i gruppen fungerte som hjelp til begrepsavklaring. Pål arbeidet med utarbeiding av skriftlige geometriske beskrivelser og hadde behov for støtte til presis formulering. Med referanse til van Hieles teori; nivå av geometriforståelse - kan dette tyde på at Pål er på lavere nivå enn forventet på ungdomstrinn, med visshet om at vi i forkant av pågående tema arbeidet med plangeometri og tilhørende begrep. Påls geometriforståelse gir ham ekstra motstand under konvertering av den multifunksjonelle ikke-diskursive romfiguren, firkantet pyramide, til den multifunksjonelle diskursive skriftlige forklaringen av samme figur. Dette kan være et generelt kjennetegn under gruppearbeid med undervisningsopplegget; fordi dette ble også observert i andre grupper.

Pål: Tenk at svarene kanskje er mye enklere enn det vi tenker på]
Nina: [Jah::: (.) Åkei. Det er (.) Ikke sant!?
Pål: Mhm (.)
Nina: Åkei (.) Så vi har (.) bretta den ut så hvis du har (.) den:: (.) Herlifred! (.) Sånn (.) Også:: Åhrr:: Trekant (.) Sånn! Da henger den fast i den, og den der i den der. Funker ikke det?
Pål: Jo::: hvis]
Nina: [Litt finere enn den der da men]
Pål: [Ja:: litt finere. Men det er riktig det tror jeg. Det ser riktig ut (.) Vi har jo ikke noe bedre uansett.
(Utsnitt_10)

Utsnittet viser at Pål ønsker å uttrykke å ha forstått at å vise overflaten på annen måte er enklere enn de først tror. Han observerte Nina knekke koden selv om han på tidspunktet ikke selv har forstått hvordan man gjør behandlingen. Han følger tilsynelatende likevel Ninas resonnement når hun forklarer.

Pål: Jeg mente liksom sånn, bretta (.) men det blir jo liksom en sirkel igjen. Det tenkte jeg ikke på. Vi hopper over det vanskelige]
Nina: [Vi hopper over det vanskelige og går til det som er enda vanskeligere. Yes!
Pål: Vi må bare (.) Disse ser ikke vanskelig ut, de er bare formler.
Nina: Ja, åkei::: ()

(Utsnitt_11)

Utsnittet viser at Pål vil utsette utfordrende deler i oppgaven - men her kan det se ut som Nina tenker at dette ikke er riktig innfallsvinkel. Dette kan være et kjennetegn på hvorfor grupper generelt velger å utsette kognitivt utfordrende deloppgaver i undervisnings-opplegget. Pål nevner begrepet «sirkel», og jeg antar at de da jobbet med utarbeiding av overflater av kulen. Som nevnt i kapittel *5.1 Utforming av undervisningsopplegg* vil en overflate av kule være den minst kjente visualiserte overflaten. Elevenes arbeid med å produsere representasjonen vil da kanskje være i overkant av hva jeg kan forvente at de skal mestre alene!?

Lærer: [Jammen (.) Det her er riktig (.) «Fire like trekanter» (.) Men hva slags trekanter?]
Nina: [Likebente.
Pål: Hmm:: Likebente trekanter? (.)
Lærer: (.) Er du enig i at de er likebente, og ikke likesida?]
Pål: [Hva er forskjellen? (.)
Nina: Likesida – alle sider er like lange (.) Så de der, de er likebente. To sider er like lange (.)
Lærer: Flott! Det var den (.) Også har dere sagt at det er et kvadrat – helt riktig (.) Også var det her nede: «Figuren består av fire like store rektangler-» (.) Ja::]
Nina: [Også kunne det vært kvadrater]
Lærer: [«-og to like store firkanter» (.) Da blir jo det som Nina sier, mer presist, «to like store kvadrater».
Pål: Blir det mer presist å si at disse er likebente da?]
Lærer: [Ja! For to av sidene i trekantene er like lange. Likesida – da er <u>alle</u> sidene like lange. Husker dere den tredje, spesielle trekanten? Bare for å repetere det også!?
Pål: Spiss (.) Det var noe sånt (.) Tror jeg (.)

Nina: Likebent, likesidet (.) Rettvinkla!?]
Lærer: [Rettvinkla ja! (.) Hva kjennetegner en rettvinkla trekant?
Nina: Den ene vinkelen er 90 grader (Utsnitt_12)

Utsnitt 12 viser hvordan jeg veileder elevene til å benytte presis fagterminologi i geometriske beskrivelser av firkantet pyramide og rett firkantet prisme. Nina viser full kontroll over kjennetegn på ulike geometriske planfigurer og Pål får repetisjon som kan hjelpe ham til å bedre forstå de ulike egenskapene. Ninas relasjonelle forståelse viser med dette sin behandlingskompetanse innen multifunksjonelt, diskursivt operasjonsregister og gryende generaliseringsferdighet.

Nina: [Jammen, hun sa jo at vi burde få de til å henge sammen. Det er jo det som er greia. Hvis ikke kunne vi jo bare tegnet figurene opp ved siden av hverandre (.)
Pål: Denne her blir uansett den samme (.) Uansett om jeg snur den rundt så blir den den samme. Uansett på hvilken måte jeg bretter opp (.) blir den den samme. Hvis du bretter ut sidene (.) Nei. Det blir jo akkurat det samme!
Nina: Du kan (.) bare flytte de ett hakk opp!?]
Pål: [Det ja! (.) Det bør vi gjøre ja.
Nina: Hvorfor tenker vi alltid så vanskelig!?
(Utsnitt_13)

Utsnittet viser hvordan Nina intuitivt veileder Pål når han tydelig uttrykker frustrasjon under behandlingsarbeid i det monofunksjonelle ikke-diskursive representasjonsregisteret. Dette kjennetegner at i gruppearbeid kan medelever fungere som hjelpelærere for andre elever. På senere tidspunkt får Pål vist nyervervet behandlingskunnskap da jeg som faglærer er tilstede, som vist i utsnittet under.

Nina: Så jeg kan liksom bare (.) Oi, den var veldig (.) Også bare ha sirkelen her istedenfor!?]
Lærer: [Ja.]
Pål: [Ja, det er sant det.
Lærer: Ja, hvorfor er det sånn Pål?
Pål: Hm?
Lærer: Hvorfor er det sånn? (.)
Pål: Den derre?]
Lærer: [Ja!?
Pål: Fordi man kan jo egentlig bare (.) Man kan jo åpne den opp på forskjellige måter!

Lærer: Ikke sant!

(Utsnitt_14)

I andre time er avslutningsvis samarbeidet preget av stress fordi timen straks slutter, hvorpå Pål mister hodet et øyeblikk.

Pål: [Det er den!
Nina: Ja, det er de jeg holder på med. Jeg må bare regne de ut.]
Pål: [Det er den! Regn det ut med <u>en</u> gang. Se, nå caller det nesten.
Nina: Hva? (.) Hva er målene?
Pål: Hm::? (.) Det står ingen mål på disse! Det står <u>ingen mål</u>! (.)
Nina: Jo, det gjør det. «Side er lik tre cm» (R1).

(Utsnitt_15)

Elevene jobber her med utregning av volum (eller overflaten) av kuben, og Nina henviser til romfigurrepresentasjonen av kuben med tildelt proporsjon. Dette er en kongruent konvertering fra det multifunksjonelle til det monofunksjonelle diskursive operasjons-registeret jeg antar også Pål behersker - dersom han ikke hadde vært stresset på grunn av tidspunktet. Dette viser konverteringskompetanse mellom visuell representasjon og symbolsk representasjon. Elevene er gitt svar på både overflateareal (C4) og volum (E2) av kuben, men må anvende behandlingskompetanse i monofunksjonelt diskursivt operasjonsregister for å sjekke hvilke kort som relaterer til gitte proporsjon.

I tredje samarbeidstime er alle igjen tilstedeværende. Under presenteres utsnitt fra oppstart som viser at det hadde vært fordelaktig med videoopptak for å følge elevenes resonnement og hva de jobber med i undervisningsopplegget. Utsnittet kjennetegner at fagspråk ikke er sentrum for elevenes fokus gjennom gruppearbeidet.

Nina: Vi er ikke kommet så veldig mye lenger enn når du var her.
Jens: Heh:: (.)
Nina: Vi fikk til litt (.) Har fått to sakser i dag. Sånn (.)
Jens: Trenger vi mer saks?]
Nina: [Nei::: Vi trenger bare lim egentlig. Vi holdt egentlig på med de og de]
Jens: [Er alt limt på nå?
Nina: Ja. Jeg holder på med (.) Et øyeblikk (.) Hvor er de?]
Pål: [Hva er det vi sk () F () de figurene der?
Nina: Den blir vanskelig (.) Vi får bare]
Pål: [Hvilken? Den?]

Nina:	[Nei. Den.]
Pål:	[Okei.
Nina:	Jeg bare (.) Det irriterer meg at den er så bøyd (.)

(Utsnitt_16)

Videre viser jeg til utsnitt hvor det tydelig fremkommer at elever kan blande både fagbegrep og variabler. Pål viser da mangel på bevisst fagspråk og behandlingskompetanse innen det multifunksjonelle diskursive operasjonsregisteret. Jens forsøker forgjeves å rette opp Påls misforståelse.

Nina:	Trenger du noe å skrive på eller?
Pål:	Meg?]
Nina:	[Ja, du.
Pål:	Nei::: Jeg regner (.) Var det bare det? 4500 (.) Var det svaret på den? Grunnlinje gange høyde (.) Det er det eneste man skal gjøre? (.)
Nina:	For å finne volumet?]
Pål:	[Ja!]
Jens:	[Nei:: (.) Det er <u>grunnflate</u> gange høyde (.) Ikke sant!?]
Pål:	[Grunnflate gange høyde er det samme. Men liksom (.) Her står det G gange h. Det er jo det da, da er det 4500! Da må jeg lete etter den (.)

(Utsnitt_17)

Under viser jeg til utsnitt som eksempel på hvor forvirrende det er for elever at omskrevne formler kan ha samme betydning. Nina viser i den sammenheng å inneha behandlings-kompetanse innen monofunksjonelle diskursive operasjonsregisteret; generaliserings-kompetanse, i motsetning til Påls daværende mangel av kompetansen.

Pål:	Denne her ser litt feil ut (.) egentlig. Siden denne her med kjegla]
Nina:	[Nei, den er ikke det. Det og det er samme (ulike formler for kjegle/pyramide).

(Utsnitt_18)

Med romfigurer som har trekantet grunnflate kan det også oppstå forvirring når grunnflatene er gitt - som beskrevet under:

Lærer: Hvorfor dividert på to?
Pål:	Fordi at det liksom (.) det er halvparten av det. Det vil si at hadde det vært et helt (.) Jeg husker ikke helt navnet på det, kube?
Lærer: Er det rektangel du tenker på?
Pål:	Rektangel (.) eller kube (.)
Lærer: Men der står det jo her at <u>grunnflaten</u> er 15,6 kvadrat cm]

Pål: [Er det halve liksom? (.)
Lærer: (.) Hva betyr det?
Pål: Det betyr at grunnflaten er det!]
Lærer: [Ja:::! Så da, når du da multipliserer med høyden, så trenger du ikke dividere på to, for det er allerede tatt hensyn til.

(Utsnitt_19)

Utsnitt 19 får meg til å vurdere om det var dumt av meg å oppgi grunnflatearealet til flere av romfigurene på kortsett B. Dersom jeg hadde latt vær ville ikke dette vært et samtaletema - men elevene ville kanskje møtt andre utfordringer i stedet?
Romfigurer med kvadratisk grunnflate, i neste utsnitt med utgangspunkt i rett firkantet prisme, krever at elevene kobler behov for å benytte kvadratrot og fremhente tidligere kunnskap. Dette legges det opp til da oppgaven med å regne ut overflateareal krever at de gjør dette som deloppgave for å finne lengden av grunnflatens sidekanter. Det handler da om elevenes relasjonelle kompetanse og knytter sammen ulike deler av matematikken. Da oppsto et overraskende øyeblikk i veiledningssekvens - som beskrevet under:

Pål: Hvordan finner jeg lengden av den? (.) Lengde (.) Nei det er bredde og det er lengde, er det ikke?
Lærer: Her står det noe om grunnflaten. Grunnflaten er 225 kvadrat cm (.) Hvordan kan man da finne ut hvor lang en side er? Husker du det Jens?]
Jens: [Hæ? Jeg tipper at den er 25 (.)
Lærer: Hvis man har en grunnflate, den er kvadratisk og du har en grunnflate på 225 cm^2. Hva vil du gjøre for å finne ut hvor lang en side er?]
Jens: [15! Er det ikke 15!? (.)
Nina: Jeg husker ikke]
Jens: [Skriv 15 gange 15 der Pål! (Jens finner frem kalkulatoren og sjekker)
Pål: Fordi? (.)
Jens: JA! Det er jo det! Det er 15!]
Lærer: [Hvordan fant du ut det?]
Jens: [Jeg bare tenkte (.) Det er jo det, det står jo 225! (viser kalkulatoren)
Pål: 15 ganger 15 det er 225 liksom, hvorfor kom du frem til det?
Jens: Fordi at jeg har et hode (gliser).
Nina: Damn! (.)
Lærer: Men hvis du hadde tatt kvadratrota av arealet som er 225 - så hadde du funnet ut akkurat det. Siden kvadratroten av et tall - betyr at et tall ganget med seg selv, blir for eksempel 225 (.) Og da hadde dere funnet ut sidelengdene i kvadratet! (.) Ikke sant? Hvordan tenke du egentlig for å komme frem til 15 Jens?
Jens: Jeg tok 5 gange 5, som blir 25. Det tar jeg jo i hodet. Men det ble jo for lite (.) Så jeg tok 10 ganger 10 men det blir også for lite, 100 liksom. Og 20 ganger 20

blir jo for mye, for det blir jo 400 (.) Så, jeg tenkte, hva med midten av 10 og 20 – 15!? Og:::: 15 ganger 15 ble akkurat 225!

Lærer: Mhm (.) Men det er ikke alltid like lett å komme frem til et svar slik (.) Du kunne altså benyttet kvadratroten]

Jens: [Hva er det?]

Lærer: [Hva da?]

Jens: [Kvadratroten?

Lærer: Det er det tegnet der (peker på kalkulatoren) (.) Ikke sant? Når vi har 225 er kvadratroten 15. Fordi 15 ganger 15 er 225. For eksempel (.) Tallet 16. Hva er kvadratroten da?]

Jens: [Ått (.) Nei. Fire!]

Lærer: [Ja:::! Du har jo vært borte i det her, ikke sant? Da handler det om å huske på hva vi har jobbet med før. Åkei!? (.) Men nå, nå kan dere regne ut den (peker på prismets grunnflate), for nå vet dere lengden på sidene (.)

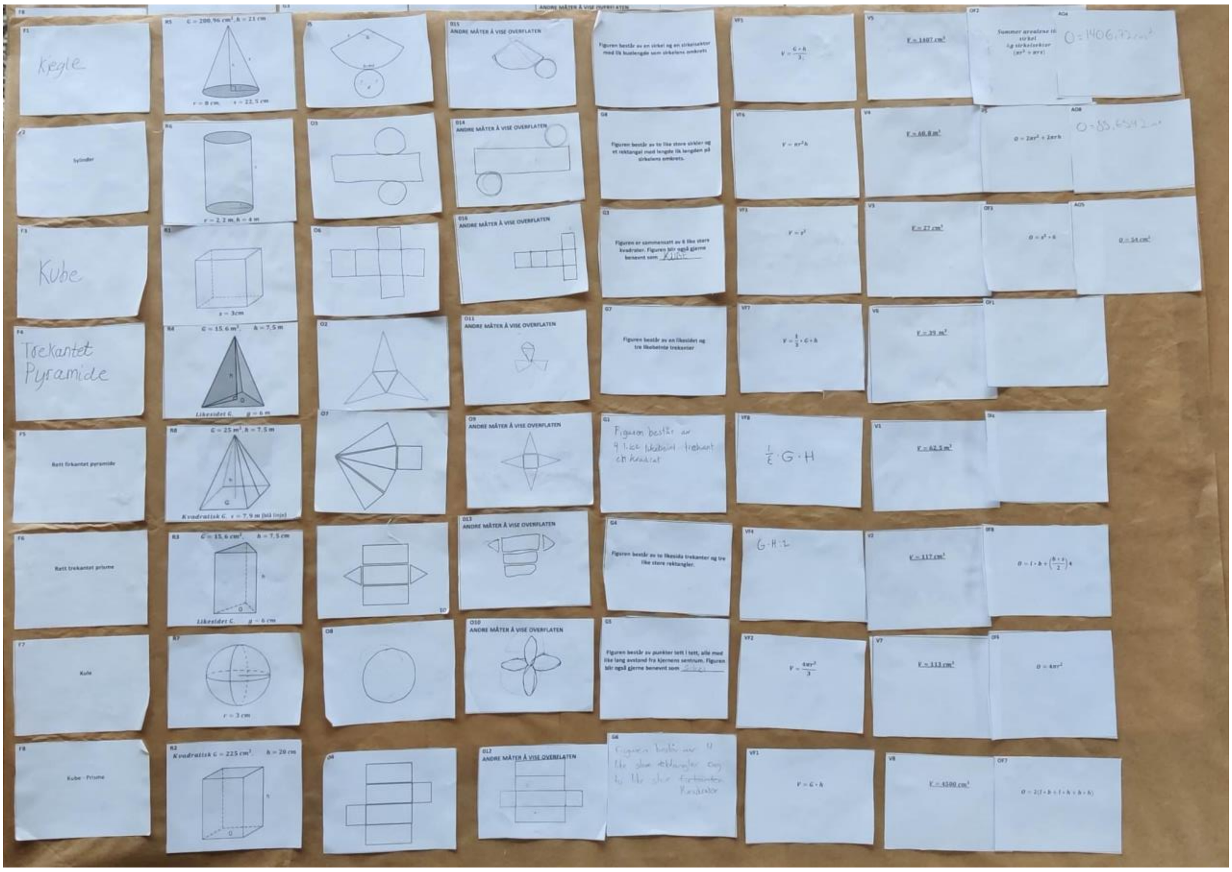
(Utsnitt_20)

Utsnittet viser eksempel på hvordan elever sporadisk kan finne løsninger ved hjelp av «prøve og feile» metode. Med annet utgangspunkt ville mest sannsynlig ikke sekvensen forligget. Det nærmer seg slutten av tredje time og jeg er innom for å høre hvordan gruppen ligger an. Her er et kort øyeblikksbilde av hvordan gruppen arbeider underveis - at de ikke limer på deler før de er helt overbevist - som et kjennetegn på arbeidet med dette multiple undervisningsopplegget.

Lærer: Men disse som er løse (.) De kan dere jo, eller er det litt usikkerhet fremdeles?

Pål: Ja, vi er litt usikre (.)

(Utsnitt_21)



Figur 27: Bilde av fokusgruppens resultat etter endt undervisningsopplegg

Figur 27 viser at gruppen ikke ble ferdig med å finne alle relasjonene. De jobbet systematisk, kolonne for kolonne men også litt frem og tilbake på de tomme kortene. Det resulterte i mangler under de siste kolonnene for formler av overflateareal samt utregninger av overflatearealene. Men, som det poengteres i teori – fokus er i dag endret fra produkt til prosess (Skemp, 1976) og elevene har gjennom arbeidet fått vist deler av sin behandlings- og konverteringskompetanse (Duval, 2006) og kjennetegn på undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner innen romgeometri.

5.5 Resultater og funn i lydopptak av fokusgruppeintervju

Å foreta gruppeintervju av fokusgruppe var nytt for meg - da jeg aldri før hadde foretatt formelt elevintervju. I tillegg til intervjuguide hadde jeg forberedt ulike artefakter; visuelle bilder av romfigurer, symbolske formler og fysisk fotball. Umiddelbart etter intervjuet syntes jeg det gikk over all forventning. Intervjuet varte omtrent en skoletime, så selv om jeg hadde organisert at vi eventuelt kunne fortsette timen etter var det ikke behov for å fortsette. Vi kom gjennom intervjuguiden og litt til. Innledningsvis nevnes at det var kun to av tre deltakende elever grunnet sykdom. Da jeg i utgangspunktet ønsket å foreta gruppeintervju falt det ikke naturlig å foreta intervju av den tredje fokuseleven, alene i etterkant. For å gjøre deltakende elever mest mulig anonyme har jeg derfor konsekvent benevnt dem henholdsvis; den første og den andre eleven.

Intervjuet innledet med å etterspørre om elevene kunne forklare hva en romfigur er og oppfordret dem til å eksemplifisere. Den ene eleven responderte først og sa: «Romfigur (.) Hva var nå det? (.)». Den andre eleven overtok og sa «Det er noe (.) har plass til noe inni». Da fulgte første elev opp og sa: «Man har plass inni (.) som volum liksom». Videre etterspurte jeg om romfigurer har navn. Den andre eleven nevnte da både kube, kule og prisme hvor den første skjøt inn «*Trekant*?». Den andre eleven responderte med et overraskende «Eeh:::» og fortsatte å ramse opp «(.) pyramide og sylinder. Trekanta prisme og firkanta pyramide». Hadde den første eleven bedre forstått spørsmålet dersom jeg isteden hadde etterspurt tredimensjonale figurer? Det får vi aldri svar på.
Deretter spurte jeg om de kunne si noe mer om figurene og la samtidig frem ark med ulike romfigurer. Den første eleven reagerte da raskt og sa «Ja, vi sa ikke kjegle, men (.) de er tredimensjonale!». Øyeblikksbildet tilsier at eleven ved støtte av visuelle bilder koblet på riktig spor, og forteller om behov for flere representasjoner enn kun begrep fra multifunksjonelt diskursivt register.
Den andre eleven overtok og sa «Eh:: de har forskjellige formler» hvorpå den første supplerte «Man må måle (.) Man kan måle volum og *omkretsen*, mens volum er bare å måle volumet (.) For eksempel i kjegle, så er det bare volum». Eleven hadde for så vidt rett, da vi i utgangspunktet ikke har hatt overflate av kjegle som pensum, men ordlyden viser at eleven lett blander to- og tredimensjonale begrep - som i utgangspunktet er i forskjellige semiotiske system.
Videre spurte jeg om de med egne ord kunne beskrive overflaten til en romfigur. Etter kort pause spør den andre eleven: «Vil du, eller skal jeg?» hvorpå den første svarte: «Hvis vi bare (.) Jeg skjønner ikke helt hva hun mener (.)». Den andre omformulerte da spørsmålet til medeleven med ordlyd: «Hvordan ville du beskrevet overflaten til en romfigur?». Da svarte den første «Liksom (.) Formel eller?». Da forsøkte jeg å omformulere meg igjen - og sa: «Med egne ord bare. Ikke formel, men med egne ord. Overflaten (.) til for eksempel den der (peker på en av romfigurene)». Den første eleven ble stille, og sa deretter «Du kan bare si det, jeg må

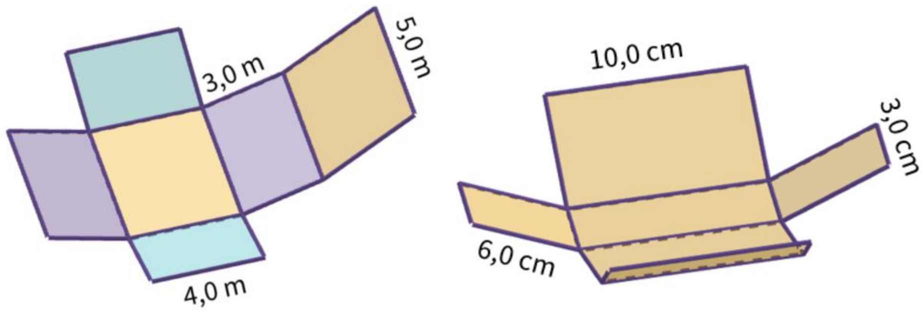
bare tenke litt (.)». Den andre eleven forklarte da, problemfritt, at «Hvis du bretter hele figuren ut, så er det hvor mye arealet er av hele figuren til sammen». Dette forteller at eleven naturlig anvender det multifunksjonelle, diskursive registeret.

Deretter spurte jeg etter hvilken benevning vi bruker dersom vi regner ut overflateareal. Den første eleven svarte da «Benevning? (.) Hvis det er cm så må vi ta det i kubikk. Er det ikke? (.) Kubikk cm (.) Hvis man skal ha benevning!?». Den andre eleven skjøt da inn «I andre». Da responderte først elev med «Ja, i andre (.) Det var det jeg mente med kubikk cm». Da spurte jeg eleven om det fremdeles var kubikk cm, og eleven svarte «Det er egentlig «Kvadrat cm!» Ja, kubikk (.) er det i tre». Så spurte jeg eleven hva vi måler når vi jobber med benevningen «opphøyd i tredje?» Da kom det raskt fra eleven «Volum!»

Eleven blander således også begrep innenfor samme semiotiske register. Utover i intervjuet blandet samme elev begrepene omkrets med overflate, grunnlinje med grunnflate, sirkel med kule, arealformel med omkretsformel og overflateformel med volumformel. Den andre eleven hjalp flere ganger å omformulere mine spørsmål for medeleven, dette gjorde at første elev fikk tak på hva som etterspurtes. Tilfellene andre elev hjalp å koble første elev på sporet - bidro til at medeleven innimellom «traff» på første forsøk. Mulig den første eleven var ukomfortabel og følte at intervjusituasjonen minnet om muntlig matematikkprøve, et moment som klart kan ha påvirket elevens respons. Jeg tror likevel ikke det er hele årsaken til utfallet, begge elevene gav kroppslig uttrykk for å være rolige og gjorde tilsynelatende bare som best de kunne.

På spørsmål om hvordan det var å arbeide med å systematisere ulike representasjoner av romfigurer tok andre elev ordet og sa: «Mmm::: Litt vanskelig til å begynne med (.) Vi måtte jo finne ut hvem som skulle gjøre hva». Så diskuterte elevene litt seg imellom og deretter sa den første eleven «Ja. Vi klipte og NN limte. Liksom navnene først (.) så tok vi bildene av de forskjellige figurene også gikk vi videre på en måte». Den andre eleven tilførte «Mm:: Vi prøvde jo å (.) vi prøvde jo først å bli ferdige med de på en rekke, men det var noen av de vi hoppet over siden vi ikke skjønte hva du ville vi skulle gjøre (.)». Elevene henviste til kortene med andre måter å vise overflaten (kortsett C2). Jeg spurte dem da om det var et rart spørsmål. Da svarte den andre eleven: «Nei, ikke rart men (.) det ble visst bare (.) vanskelig». Elevene uttrykte at dette var utfordrende men kom frem til at det ble lettere ettersom de forstod oppgaven - dette utfordret som beskrevet elevenes behandlingskompetanse. Deretter kom elevene med en referanse til Campus Inkrements oppgaver tilknyttet overflateareal av

romfigurer. Den første eleven ordla seg da slik: «Ja, overflaten til den (peker på firkantet prisme), siden jeg ble litt forvirra på begynnelsen når vi (.) etter vi begynte på kapittelet (.) siden hvordan? Det var jo så mange ulike tall og ulike ting, også skulle man (.)». Den andre eleven fullførte medelevens innskytelse med: «Det var den der, jeg feilet hver eneste oppgave vi hadde på Campus når jeg skulle regne ut overflaten av de (.) når vi begynte med det».
Under vises til et par eksempler:



Figur 28: To eksempler fra Campus Inkrement – utklipp fra to av fire vanskelighetsnivå

Campus Inkrement har oppgaver på flere nivå og benytter seg av både tekst og illustrasjoner på de tre første nivåene. Jeg har observert at overnevnte oppgaver likevel forvirrer mange elever selv om Campus Inkrement forenkler figuren til venstre ved hjelp av farger. Figuren til høyre forvirrer mange på grunn av perspektivet.

Den andre eleven fortalte videre at da de startet med å utforme alternative overflater, begynte de med den de fant enklest - det var kuben. Parallelt med dette arbeidet jobbet de med å formulere skriftlige geometriske beskrivelser av figurene som manglet denne. Det var pirkete - men lærerikt, og de forsto behovet for presis fagterminologi.
På spørsmål om hva annet som utfordret deres forståelse svarte elevene at delene de måtte regne ut var utfordrende. Dette inkluderte også de ferdig utfylte volumkortene (kortsett E2) - for de måtte regne seg frem til hvilken figur som tilhørte hvilket svar, selv om svaret var gitt. Elevene gav uttrykk for at de syntes det tok mest tid å utføre disse beregningene og at de under prosessen la kort de var usikre på, løst på arket, og limte dem først på da de var sikre. Tilfellene de ikke fant riktig kort, men hadde regnet seg frem til et svar, skrev de svaret midlertidig på gråpapiret hvor kortet skulle limes. Det var også utfordrende å finne hvilke gitte formler som tilhørte ulike figurer, og deretter formulere formler som ikke var gitt. Denne

delen av oppgaven faller som beskrevet inn under det monofunksjonelle, diskursive registeret, og er således kognitivt krevende. Det innebærer ikke-kongruente konverteringer og behandlingene er avhengig av nøyaktig bruk av gitte proporsjoner.

Fokusgruppen valgte å jobbe med volum før overflate. På spørsmål om begrunnelse for valget er svaret at det var tilfeldig: «Det var de som ble klippet ut først (.) så (.) gjorde vi det». De gav videre uttrykk for at det til tider var mange løse lapper å holde styr på.

På spørsmål om undervisningsopplegget hadde lært dem noe spesifikt, om de hadde lært noe mer om figurenes egenskaper og liknende, fortalte den andre eleven at den nå hadde blitt mer sikker på beregning av areal av sirkler og sa: «Jeg har aldri regnet <u>så</u> mye med pi i mitt <u>liv</u> før!». Den første gav uttrykk for å ha bedre kontroll på overflaten av prismer: «Jeg lærte litt mer om overflaten til den derre (.) åå::: hva <u>er</u> det nå den heter (.)». Oppfølgingsspørsmål til første eleven ble da: «Har du blitt litt sikrere på ulike typer trekanter?». Eleven svarte da: «Jeg er sånn (.) det er egentlig 50/50 (.) jeg bare (.) skjønner forskjellen på de, men det er vanskelig å huske hvem som er hva. Det er fagbegrepene jeg blander noen ganger (.)».

I overnevnt tekst har vi nettopp snakket litt ut ifra ulike illustrasjoner av overflatene til ulike pyramider. Vi var ca 30 minutter inn i intervjuet og jeg benyttet meg av ulike representasjonsformer og ba elevene fortelle hva de først tenkte på da de hørte/så de ulike. Under er et lengre utsnitt som beskriver et øyeblikksbilde og samspill underveis i intervjuet:

Lærer: Nå skal dere da *høre noen begrep* (.) Hvis jeg sier kube – hva tenker du først da?
1.: Kube – da tenker jeg terning.
Lærer: Ja.
2.: Side (.)
Lærer: Side (.) fordi?]
2.: [Side fordi den har den i formelen (.) Liksom side gange side]
Lærer: [Side gange side (.) Da får du?]
2.: [Grunnflaten
Lærer: Ja.
1.: At det er seks sideflater i kube.
Lærer: Ja. Mm:: Dere har jo lært masse!
1.: Og åtte hjørner, er det vel (.)
Lærer: Ikke sant!? (.) Skal vi se (.) Jeg har et til ark her (.) Nå skal dere får *se noen formler* (.) Vi tar en om gangen så jeg må bare brette over noe her (.) Hvis dere ser denne (.) Er det noe som popper opp i hodet deres da?]
1.: [Det er kule!]
2.: [Kule.
Lærer: Den kom fort! (.) Det er kule ja, hva]

1.: [Volum
Lærer: Volum av kule ja. Flott. Hvis dere ser på den der da (.)
1.: Det er]
1./2.: [prisme
Lærer: Prisme ja, og hva med prismet?]
1./2.: [Overflate]
Lærer: [Overflate! Så flinke dere er! Skal vi se, nå var det (.) Ja, nå skal jeg *lese en beskrivelse*, så skal dere si hvilken figur, eller hva du tenker på, når du får denne informasjonen: «Figuren er sammensatt av seks like store kvadrater»
1.: Det er]
1./2.: [kube
Lærer: Det også kom fort! (.) Også neste: «Figuren består av to likesida trekanter og tre like store rektangler» (.)
2.: Trekantet prisme (.) Er det ikke det? Det ser ut som de der Toblerone boksene.
1.: Ja (ler)
Lærer: Kan dere peke på den (trekantet prisme) her (viser ark med romfigurer)]
2.: [Den=
1.: =Yes!
Lærer: Er dere enige?
1: Ja (.) bare at NN tenker på den liggende og ikke sånn stående (.)
Lærer: Ja! (.) Men er det noen forskjell da? Vi kan vel ha en Toblerone stående også?
2.: Joo::: (ler)
1.: Jau:: (ler)]
Lærer: [Ja, men du pleier la den ligge? (ler)]
1.: [Ja, selvfølgelig (ler) (Utsnitt_22)

Utsnittet viser at begge elevene var kjappere mot slutten og vi kunne le litt sammen. Videre spurte jeg dem om de syntes det hadde vært mye arbeid i forhold til tiden de fikk til å løse oppgaven. Da svarte den andre: «Neei:: Jeg mener (.) det var jo ingen som ble helt ferdige, men det var jo flere som kom nærme i hvert fall», og den første tilførte: «Ja, hvis vi hadde fått en time til så kunne vi kanskje blitt ferdige med det (.) syntes jeg».
På spørsmål om hvordan de som gruppe opplevde å arbeide med lydopptaker på grupperommet forklarte elevene at det hadde vært litt kleint i starten til de ble vant til det. Etterhvert ble lydopptakeren bare en naturlig del av rommet. De følte seg heldige som fikk jobbe skjermet på grupperommet siden det var mindre støy der enn inne i klassen.
Deretter spurte jeg hva de syntes om å jobbe i grupper istedenfor én og én – da responderte den andre eleven med «Det er jo litt gøyere å ha noen å snakke med enn å sitte alene å jobbe. Vi kan liksom (.) hvis vi ikke fant ut av noe kan vi liksom (.) spør». Den første eleven sier seg enig i resonnementet. Videre spurte jeg elevene hva de tenkte de lærte mest av – gruppeoppgaver eller diskusjoner gjennom Campus Inkrement? Den andre eleven

responderte umiddelbart: «Gruppearbeid!». Den første sa seg enig. Begge mente at gruppearbeid også var veldig motiverende for egen læring.

Oppsummert kan man si den første eleven kjennetegnes under hele intervjuet av å blande fagbegrep og mangel av presist fagspråk. Eleven blander ukonsekvent forhold fra både to- og tredimensjonale plan, og gir på denne måten inntrykk av å ha en tilnærmet instrumentell forståelse og kan oppleves hjelpeløs uten å kunne forholde seg til en «regelbok». Den andre eleven utmerker seg til å både resonnere og å beherske å finne svar på det meste som etterspørres. Eleven kan derfor falle under kategorien relasjonell/konseptuell forståelse.

6.0 Drøfting

I dette kapittelet drøftes resultatene fremlagt i kapittel *5.0 Resultat og analyse*, understøttet av tidligere kapitler med hensyn til forsknings- og delspørsmål. Aller først starter jeg med å repetere hovedfokus i masteravhandlingen med henvisning til forskningsspørsmålet;

«Hva kjennetegner et utvalg elevers konseptuelle forståelse og praktisk undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner innen romgeometri – og hvilke utfordringer tilknyttet individuell behandlings- og konverteringskompetanse synliggjøres i elevenes arbeidsprosess?»

Med utgangspunkt i første del av forskningsspørsmålet vil jeg nå se på hvordan denne avhandlingen har grunnlag for å vise kjennetegn på elevutvalgets konseptuelle forståelse innen romgeometri. I kapittel *4.0 Metode* ble inn- og utsjekk beskrevet som del av metodene for å kartlegge elevenes forståelse innen romgeometri og i kapittel *5.0 Resultat og analyse* ble materialet analysert.

Ved å gjennomføre inn- og utsjekk kunne vi se forskjeller mellom klassenes før- og etterkunnskap, og som vist i diagrammene i kapittel *5.2.2 Resultater og funn etter innsjekk og utsjekk* - framstod store forskjeller både før og etter temaperioden.
På den ene siden kan man se på dette som bilde av forskjell mellom klassenes faglige nivå. Klassenes gjennomsnittlige måloppnåelse etter gjennomføring av temaprøven speiler inntrykket - uten å gå nærmere inn på de resultatene. Som beskrevet i kapittel *2.0 Tidligere forskning innenfor temaet representasjoner* hevdet Tripathi (2008) at elevens representasjoner (representasjonsrepetoar) og evne til å overføre ideer fra en representasjon til en annen indikerer elevens forståelse.
På den andre siden kan man med henvisning til Duvals tabell (2008) og gjennomføring av undervisningsopplegget med fokus på multiple representasjoner i 9x, tolke resultatene som om denne elevgruppen mer naturlig benytter representasjoner fra flere registre. Dette er element som tilsynelatende hjelper dem å skape bredere grunnlag for individuell, konseptuell forståelse - i kontrast til elevene i 9y som ikke gjennomførte undervisningsopplegget.

Fra en annen synsvinkel kan man si at resultatene fra inn- og utsjekk viser forskjell mellom klassenes holdninger til faget tilknyttet sosiomatiske normer og individuelle tankesett.
Elever på ungdomstrinn blir hele tiden vurdert. Når jeg gir dem en oppgave er det ikke sjelden jeg blir spurt «Får vi karakter på dette?», og inn- og utsjekk ble i denne sammenheng ikke unntak fra spørsmålet. Da elevene fikk i oppgave å gjennomføre inn- og utsjekk sa jeg at deres resultat ikke ble vurdert – dette kan ha innvirket på engasjement for å vise (konseptuell) kunnskap. Ville grunnlaget for å si noe om deres forståelse vært bredere dersom jeg sa at elevene ville bli vurdert med karakter/måloppnåelse? Ikke nødvendigvis, men det hadde ikke forringet avhandlingens datamateriell.

Med referanse til elevsitatene i start av kapittel *5.2.2* - hvor en elev skrev «Greier ikke å bare ramse opp det jeg kan …» og en annen skrev «… men hadde vært lettere om jeg bare hadde fått en oppgave» - sier dette så noe om formulering av inn- og utsjekksspørsmålet? Kanskje jeg ville fått andre resultater dersom jeg hadde spurt på en annen måte?
Som nevnt ble dette gjennomført ved at elevene ble bedt, muntlig, om å skrive ned alt de husket med utgangspunkt i begrepet «tredimensjonale figurer» - plassert inni en sirkel som på et tankekart for brainstorming, vist på tavla. Elevene fikk kun utdelt blankt A4 ark.

Med henvisning til Hansson (2003) og hans studier rundt «begreppskartor» ser jeg i ettertid at jeg kanskje ville funnet ut mer om elevenes konseptuelle forståelse ved å anvende inn- og utsjekks materiale tilknyttet fokuselevene - og gjennomført individuelle begrepsintervju.
Dette hadde i så fall endret deler av datagrunnlaget til avhandlingen, og ville fjernet sammenlikningsgrunnlag for å se om elever i 9x mer naturlig benyttet flere registre enn elever i 9y - etter gjennomføringen av undervisningsopplegget i 9x med fokus på multiple representasjoner.

Innledningsvis ble det poengtert at representasjonskompetanse er element av elevenes helhetlige matematiske kompetanse (Niss & Jensen, 2002). Kompetansen er også etter ny læreplan et av fagets kjerneelement - uten at kjerneelementet ifølge Udir er tilknyttet utvalgt kompetansemål. Men på dette grunnlaget er det vesentlig at lærere tilrettelegger for at elevene får øve representasjonskompetanse. Inn- og utsjekk gir oss et konkret bilde av elevenes konseptuelle forståelse - før og etter undervisning innen utvalgt emne. Det viser også at flere elever har en lang vei å gå for å oppøve helhetlig konseptuell forståelse.

Videre ser jeg derfor på andre del av forskningsspørsmålet og hva jeg fant som kjennetegn på undervisningsopplegget og fokus på multiple representasjoner innen romgeometri - og hvordan dette utfordret elevenes behandlings- og konverteringskompetanse.

Som vist i kapittel *5.3 Resultater og funn etter deltakende observasjon* var starten av undervisningsopplegget minst krevende for elevene - da de skulle koble romfigurene til fagbegrep og geometrisk beskrivelse. Utfordringen ble større da elevene skulle finne sammenhengene mellom kartlagte relasjoner og riktig overflaterepresentasjoner og tilhørende formler for volum og overflate. Dette understøttes av Hyde et al. (2006) som beskrev at elever bør bevege seg fra relativt konkrete representasjoner til mer abstrakte, på linje med Swans beskrivelse (2008) og hans fremlegging av elevenes materiell tilknyttet algebraiske representasjoner.

Under observasjon ble det som nevnt tydelig at deler av elevene tilsynelatende «meldte seg ut» jo mer komplekst utfordringene ble; *Tasks as implemented by students* (Stein & Smith, 1998). På den ene siden kan man si at dette er naturlig, men på den andre siden kan man ikke konkret kartlegge hva som foregikk inne i elevenes hoder på tidspunktet. De kan ha lært ved å jobbe på gruppe med andre elever, registrert sammenhengene, og koblet nye linker i sin spirende konseptuelle forståelse. Det som vi med sikkerhet kan fastsette, er at undervisnings-opplegget utfordret både individuelle behandlings- og konverteringskompetanser.

Å orkestrere undervisningsopplegget som faglærer alene var en stor utfordring, dette poengteres også av Tripathi (2008). Samtidig vil jeg påstå at det alltid vil være utfordringer tilknyttet orkestrering av nye undervisningsopplegg. Ved å implementere opplegget som del av undervisningen innen romgeometri vil jeg i fremtiden være mer forberedt på hvilke utfordringer jeg møter. Da vil jeg bli mer fleksibel og orkestreringen vil ha bedre flyt. Jeg har mange tanker om eventuelle endringer jeg først vil gjøre i undervisningsmaterialet; dette blir nærmer beskrevet senere.

Som vist i kapittel *5.4 Resultater og funn i lydopptak av fokusgruppearbeid* fremkom tydelig bilde av utfordringer tilknyttet kompetansene og kjennetegn på hvordan gruppearbeidet utspilte seg ble konkret kontekstualisert. Transkripsjon viste hvordan medelever underveis i gruppearbeidet fungerte som hjelpelærere for hverandre, og - da faglig kommunikasjon var fokus gav det tidvis positivt utslag for individuell forståelse som for eksempel vist i utsnitt_9 og _12. Med henvisning til Swans designprinsipper (2008) - skaper rike samarbeidsoppgaver på den ene siden grunnlag for utvikling av matematisk språk gjennom kommunikativ aktivitet - og selve arbeid med multiple representasjoner (som én av fem oppgavetyper) tilrettelegger for utvikling av konseptuell forståelse. På den andre siden ble det tegnet tydelig bilde av hvor mange digresjoner som kan fremkomme under gruppearbeid - som oppsummert etter transkripsjon av første samarbeidstime. Digresjonene kan på den ene siden være et kjennetegn på at noen av elevene tok avstand fra deler av oppgaver som var kognitivt utfordrende, men fra annen siden være kjennetegn på elevers motivasjon for å utvikle individuell ferdighet - innen både behandlings- og konverteringskompetanse.

Utsnitt_1 i transkripsjonsmaterialet, viser at elever - denne gang med utgangspunkt i «Pål», uttrykker behov for å støtte seg på regelbok med formler. Dette er konkret eksempel for elevers behov for hjelp til å vite hvilken formel som tilhører ulike romfigurer – og tegn på manglende konseptuell forståelse. Dette understøtter også at symbolske representasjoner er vanskelig tilgjengelig og at registeret er preget av høy grad av stringens. Utsnittet er fra oppstart av gruppearbeidet, og utover i transkripsjonsmaterialet synliggjøres at samme elev stadig valgte enkleste utvei fremfor å stå i utfordrende oppgaver, for eksempel utsnitt_6. Dette kan på den ene siden være uttrykk for at eleven ikke vil vise sin manglende ferdighet, men sett fra en annen vinkel kan det også være et uttrykk for at eleven ønsker å bidra på deler av oppgaven han føler mestring i; *Tasks as implemented by students* (Stein & Smith, 1998).

Fokusgruppen jobbet skjermet på grupperom under arbeidet - dette er i skolesammenheng en gode det ikke kan tilrettelegges for i alle grupper grunnet lokale forhold. På den ene siden kan man si at gruppen derfor var privilegert, men på den andre siden må nevnes at lydnivået som øker under gruppearbeid som metode, ikke nødvendigvis har samme innvirkning på elevene som skal utføre oppgavene - som på lærer som skal veilede elevenes arbeid i oppgaveprosess. Lydnivå øker betraktelig under gruppearbeid kontra timer hvor elevene jobber individuelt eller i læringspar. Jeg opplevde det slitsomt å konsentrere meg om hvordan veilede elevene på en god måte uten å falle i traktkommunikasjonsfella (Mehan, 1979). Det er mer usikkert i hvilken grad lydnivå påvirker elever med tanke på deres samarbeid og individuell utvikling av konseptuell forståelse og behandlings- og konverteringskompetanse.

Det som er sikkert er at elevene gav uttrykk for at undervisningsopplegget var krevende for nåværende; både behandlings- og konverteringskompetanse, moment som ble kontekstualisert i behov for veiledning innen både behandlinger og konverteringer underveis i arbeidsprosessen.

Som vist i kapittel *5.5 Resultater og funn i lydopptak av fokusgruppeintervju* var elevene samstemte i at gruppearbeidet hadde vært motiverende og positivt for egen læring, og at de foretrakk gruppearbeidet fremfor helklassediskusjon tilknyttet diskusjonsoppgaver som presentert gjennom Campus Inkrement. Fra elevperspektivet kan dette tyde på at gruppearbeid i seg selv er motivasjonsfaktor for læring og dermed positivt for individuell konseptuell utvikling, men på den andre siden kan man vurdere i hvor stor grad elevene benytter tiden effektivt da de i denne alderen er veldig opptatt av det sosiale aspektet og lett mister fokus på det faglige.

Gjennom intervjuet ble det tydelig at det var stor forskjell på elevenes konseptuelle forståelse og deres behandlings- og konverteringskompetanse. På den ene siden kan man si at dette ikke er uventet funn; elever har generelt forskjellige ferdighetsnivå i matematikkfaget, dette gjenspeiles i deres instrumentelle eller relasjonelle forståelse (Skemp, 1976).
På den andre siden fremhever det behovet for å endre innfallsvinkel av undervisningsform innen, ikke bare romgeometri, men også andre matematiske konsepter - tilknyttet dette tilfellet - kanskje spesielt innen plangeometri.

Elevenes utvikling av geometriforståelse starter tidlig som beskrevet gjennom van-Hieles teori (1950- tallet). Det faglige grunnlaget elevene kommer med til ungdomstrinn, er lagt på barnetrinn. Det er derfor veldig viktig at lærere allerede på barneskolen er bevist sin bruk og fremheving av fagbegrep. Men med blikk til van-Hiele dannes fundamentet for geometriforståelsen enda tidligere - vi snakker altså om at grunnlaget dannes allerede i småbarnsalder. Elevenes individuelle geometriforståelse på ungdomstrinn påvirker således gruppearbeidets samspill under dette multiple undervisningsopplegget, men arbeidsprosessen kan bidra til at individuell geometriforståelse utvides gjennom samhandling og engasjement i arbeidsprosess.

Videre i kapittelet drøftes resultat og analyse opp mot delspørsmålet;

«Hvordan transformere Swans undervisningsmetode «Matching cards» (2008) og anvende Duvals tabell (2006) over semiotiske representasjonsregistre – fra teori til praksis i et romfigurfokus?»

Med utgangspunkt i første del av delspørsmålet ser jeg nå undervisningsopplegget tilknyttet masteravhandlingen og teori formulert av Stein & Smith (2011). Som presentert i kapittel *3.0 Teori og begrepsrammeverk* omhandler deres artikkel refleksjon over matematikkoppgaver og ulike faser en oppgave gjennomgår. I denne sammenhengen er spesielt fasene *Tasks as set up by teacher, Tasks as implemented by students* og *Student learning* avgjørende. Opplegget ble, som beskrevet i kapittel *5.0 Resultat og analyse,* utarbeidet etter inspirasjon av Swans artikkel «A Designer Speaks» (2008).

Tasks as set up by teacher (Stein & Smith, 1998) handler om hvordan jeg lot meg inspirere av Swans undervisningsmetode og transformerte ideen til annet matematisk emne. Som beskrevet i kapittel *5.0 Resultat og analyse* har jeg benyttet representasjoner av romfigurer innenfor både multifunksjonelle og monofunksjonelle registre – og har dermed sørget for at opplegget ligger innunder alle fire hovedregistrene (Duval, 2006). I forhold til involverte kognitive krav presentert av Stein & Smith, argumenterte jeg for at undervisningsopplegget kunne anses som oppgave med høye kognitive krav grunnet behov for å se sammenheng og gjøre matematikk. På den ene siden er dette innlysende ved nærmere analyse av opplegget. Sett fra annen vinkel vil en elev som entrer oppgaven med instrumentell tilnærming kunne gjøre oppgavens kognitive krav lavere - og deler av opplegget kan stå i fare for å anses som memoreringsoppgave eller en prosedyre uten sammenheng. Dette gjelder spesielt delene hvor elevene skal konvertere til monofunksjonelt diskursivt register og behandle formler for volum og overflater. Ser elevene «den store sammenhengen» (konseptuell forståelse) med slik innfallsvinkel? Eller blir de ulike representasjonene fragmenter av helheten? Ved beregninger av figurenes volum og overflater vil elevene nødvendigvis måtte se tilbake og benyttet gitte proporsjoner. Som beskrevet avslutningsvis i delkapittel *5.3 Resultater og funn etter deltakende observasjon* manglet flere grupper utregning av overflatearealene. Tyder dette på at denne delen av oppgaven var mest utfordrende og ikke-kongruent? Har det sammenheng med tidligere utfordringer med å tolke og senere beregne overflateareal - eller skyldes det tildelt tid til å løse oppgaven?

Tasks as implemented by students (Stein & Smith, 1998) handler om hvordan elevene mottar undervisningsopplegget og hvordan de arbeider med det. Som beskrevet kom elevene raskt i gang da de kjente til gangen i arbeidsprosess etter pilotprosjektene. Underveis i prosessen viste det seg imidlertid at flere grupper tilsynelatende slet med mye av det samme, for eksempel behandling av overflaterepresentasjonene av romfigurene.

Kunne arbeidsprosessen fått bedre flyt dersom jeg i oppstart hadde vist et modulert eksempel på tavla? For eksempel kuben. Sammen kunne vi da ha beskrevet den geometriske sammensetningen av figuren med hverdagsspråk – deretter behandlet til fagspråk. Kuben har som sagt opptil 11 ulike måter å vise overflaten (Kongnes & Wallace, 2020), og ved å videre vise til 4-5 av disse kunne muligens elevene enklere behandlet andre overflate-representasjoner? Deretter kunne jeg vist til at man kunne finne volum av kuben ved å multiplisere grunnflaten (snakke om hva kjennetegner grunnflaten i romfigurer generelt) med høyden, og finne overflateareal ved å poengtere at fordi alle sideflatene i en kube er like store - blir dermed overflatearealet, areal av alle sideflatene tilsammen? Videre kunne vi formulert formler for volum og overflate med hverdagsspråk og sammen behandlet formulering til fagspråk og deretter konvertert til symbolspråk. Aller sist kunne vi sett tilbake på gitte proporsjoner og tatt det med i beregning av volum og overflaten av kuben. I ettertid ser jeg at overnevnte innfallsvinkel ville spart gjentatt gruppeveiledning av samme utfordring. Men ville eksempelet overfor vært godt nok da elevene skulle behandle andre romfigurer?

Kunne gruppenes resultat av undervisningsopplegget blitt fullført dersom jeg hadde kuttet ned på antall figurer fra starten? Meget sannsynlig. Til forskjell fra Swans opplegg, som forholdt seg til maks 4 ulike representasjoner la jeg opp til ikke mindre enn 8-9 ulike tilknyttet 8 ulike romfigurer (den 9. representasjonsformen utfordret elevene til å finne en annen måte å vise overflaten av figurene). Likevel er det en dobling av antall representasjoner som krever behov for mer behandlingstid, men på den andre siden legger det opp til et enda bredere overblikk over sammenhenger.

Student learning (Stein & Smith, 1998) gir uttrykk for elevenes læringsutbytte og kommer til uttrykk både på kort og lang sikt. Elevenes utbytte avhenger i denne sammenheng - av individuelt engasjement men også av oppgavens tilknyttede kognitive krav som presentert av lærer. Man kan i denne forbindelsen vurdere om deler av oppgaven var for krevende for elevgruppen, men som påvist av Boaler (1997, 1998) tilsier undervisning som stiller høye kognitive krav å tilrettelegge for høyere læringsutbytte. Videre kan vi se på elevenes utfordringer med å produsere egne presise geometriske beskrivelser og gjenkjenne deler av algebraisk notasjon for å anvende eller produsere formler for volum og overflate - kan sammenfalle med elevenes individuelle geometriforståelse jamføre van Hiele.
Ved å se på elevens utsjekk finner vi likevel at elever i 9x mer naturlig benytter flere representasjonsregistre enn elevene i 9y – det kan vi tolke som tegn på at undervisningsopplegget har bidratt til å gi elevene bredere bilde av konseptet romgeometri.

Kunne undervisningsopplegget gitt større læringsutbytte dersom elevene hadde fått mer tid? Færre romfigurer ville eventuelt frigitt tid til større vektlegging av fellesdiskusjon - i både intro og oppsummering av undervisningsopplegget innenfor tildelt tid. På den andre siden tilrettela undervisningsopplegget slik det forelå - for at elevene skulle få mulighet til å utforske og argumentere for formler for areal og volum av romfigurer i tråd med tilknyttet kompetansemål.

Etter gjennomført undervisningsopplegg sitter jeg igjen med mange tanker om hvordan jeg kunne tilrettelagt på en bedre måte – i tråd med Swans opplegg som er revidert opptil flere ganger. Deler jeg ville endret i undervisningsopplegget er følgende:
Elevene kunne uten stort krav blitt utfordret å fylle inn flere deler under kortsett A *Fagbegrep* – for eksempel begrepene sylinder og kule. På kortsett B *Romfigurer* ville jeg endret slik at elevene skulle regne ut alle grunnflatene selv - på denne måten skape større eierforhold til

figurene. I kortsett C1 *Overflate* ville jeg egentlig ikke endret noe, men jeg ville gitt elevene flere alternative overflater på C2; eksempelvis kube og kjegle.

I kortsett D *Geometriske beskrivelser og noen hverdagsbegrep* ser jeg i ettertid at det med fordel kunne vært opp til to flere blanke kort - for eksempel beskrivelsen av sylinder og rett trekantet prisme. Slik kunne elevene blitt mer bevisst presis fagterminologi. I tillegg kunne jeg i de gitte geometriske beskrivelsene endret ordlyd og inkludert begrep som (topp- og) grunnflate og benyttet videre beskrivelse slik «*Figuren består av en kvadratisk grunnflate med fire likebente trekanter som samles i en spiss».* Jeg ser i ettertid at jeg har formulert meg på to ulike måter i oppstart av beskrivelsene. Dette ville jeg gjort mer konsekvent, men vet ikke om jeg ville startet med *«Figuren består av …»* eller *«Figuren er sammensatt av …»*. Dette kunne for så vidt variert, men da mer 50/50 fordelt i gitte beskrivelser. Jeg ville også byttet alfabetisk rekkefølge på kortsett C og D, da dette kanskje kunne hjulpet elevene med organisering av overflatene – hvis de mot formodning velger å arbeide etter kortsettenes alfabetiske oppsett. Linjen med hverdagsbegrep ville jeg fjernet for å fokusere på fagterminologi.

På kortsett C3 *Overflateformel* ville jeg vurdert å tilføre forklaring over formel for firkantet pyramide siden dette hverken har vært pensum eller er kjent formel for elevene, og i C4 *Areal av overflate* ville jeg kanskje gitt dem et par flere svar.

På kortsett E1 *Volumformel* ville jeg tatt bort formel for kube og sylinder mens i kortsett E2 *Volum* ville jeg kanskje vært mer konsekvent og eventuelt ikke benyttet avrundet svar. Samtidig er dette en naturlig sammenheng å benytte avrunding i - og elevene får repetisjon i symbolet ≈.

Skulle jeg fra en annen vinkling, sett fra et tidsperspektiv, velge å forkorte kortsettet ville jeg tatt bort romfiguren kule da overflaten av denne aldri før har blitt vist så vidt jeg vet. Eventuelt ville jeg også tatt bort tre- og firkantet pyramide dersom elevgruppen ikke hadde vært borti Pytagoras (eller fant emnet anstrengende). Dersom man skulle tilpasset gruppene etter faglig nivå vil sistnevnte vært naturlig tilpasning for elevgruppe sammensatt på grunnlag av prestasjoner under middels til middels nivå. Jeg ville kanskje også vurdert å avkorte kortsettene C1 og C2 - *Overflate*; til kun én kolonne.

Med henvisning til getSmart kortsettene ville jeg muligens benyttet meg av ulike farger på kortene for å gjøre materialet mer tiltalende. Med blikk til både Duvals presentasjon over ulike representasjonsregistre og Swans begrensning til fire representasjoner - kunne jeg vurdert å avgrense opplegget til *1. kortsett: Geometrisk beskrivelse av romfiguren* (elevene må foreta en behandling innen det multifunksjonelle registeret, diskursiv operasjon og tolke hvilken romfigur som beskrives). *2. kortsett: Den tredimensjonale romfiguren* (konvertering til ikke-diskursivt multifunksjonelt register). *3. kortsett: Romfigurens overflate* (konvertering til ikke-diskursivt monofunksjonelt register). *4. kortsett: Formel for volum av romfiguren* og *5. kortsett: Formel for overflateareal av romfiguren* (kortsett 4. og 5. blir da mest krevende konvertering for dette er som sagt mest abstrakt - monofunksjonelt diskursivt register). Innenfor overnevnte kortsett kunne jeg involvert blanke kortdeler i tråd med Swan (2008). Sist, men ikke minst - så ville jeg sørget for at alle kortene hadde lik størrelse så det ikke ville blitt vanskelig å lime dem sammen ved siden av hverandre.

Med utgangspunkt i andre del av delspørsmålet ser jeg nå undervisningsopplegget tilknyttet denne masteravhandlingen og teori presentert av Duval (2006). Som presentert i kapittel *3.0 Teori og begrepsrammeverk* omhandler hans artikkel kognitiv analyse av problemer med forståelse i læring av matematikk. I denne sammenheng er spesielt behandlinger og konverteringer av ulike representasjoner for romgeometri i søkelyset.

Etter nærmere gjennomgang av elevenes resultater etter arbeidet med de multiple undervisningsopplegget tyder det på at elevgruppene samlet sett strevde mest med konverteringer til det monofunksjonelle registeret - dette har tydelig sammenheng med registrenes høye grad av stringens og at transformasjoner til spesielt det diskursive monofunksjonelle registeret preges av ikke-kongruente konverteringer til abstrakte formler. Oppsummert kan man si at praktisk undervisningsopplegg med multiple representasjoner av romfigurer kjennetegnes ved at det skapes rom for at lærer kan få bedre innsikt i elevenes forståelse av både planfigurer, romfigurer, begrepsrepetoar og generell matematikk. Videre skapes rom for anledning til nødvendig repetisjon og rom for at elever kan lære av hverandre. Det tilrettelegger for kommunikasjon og samarbeidslæring og rom for å øve konseptuelle relasjoner. Det er for mange tryggere å kommunisere i liten gruppe og ikke alle deltar under helklassediskusjoner (observasjonsmerknad). Undervisningsopplegget kjennetegnes, sist, men ikke minst av å innebære en krevende - men også lærerik arbeidsprosess for både elev og lærer.

7.0 Konklusjon

I dette kapittelet fremstilles min konklusjon og implikasjoner for kommende undervisning innenfor temaet romgeometri. Først gjentas forskningsspørsmålet:

«Hva kjennetegner et utvalg elevers konseptuelle forståelse og praktisk undervisningsopplegg med fokus på multiple representasjoner innen romgeometri – og hvilke utfordringer tilknyttet individuell behandlings- og konverteringskompetanse synliggjøres i elevenes arbeidsprosess?»

Resultatene som foreligger etter forskningsstudiet tegner et tydelig bilde av et utvalg elevers varierte forståelse og viser videre at det er en lang vei å gå for at alle elevene skal kunne oppnå relasjonell forståelse innen romgeometrien. Elevenes anvendelse av semiotiske registre viser, gjennom kartleggingene, hvilke representasjoner som er tilgjengelig i elevenes forståelse - før og etter prosjektet. Antall benyttede representasjonsregistre beskriver elevenes grad av representasjonskompetanse og hvordan elevene sorterer representasjonene kan videre speile elevenes, variable - konseptuelle forståelse.

Det ble under undervisningsoppleggets arbeidsprosess observert og kartlagt flest utfordringer tilknyttet konverteringer fra multifunksjonelle til monofunksjonelle registre og behandlinger innenfor sistnevnte. Det ble også kartlagt at flertallet av elevene foretrakk representasjoner innenfor multifunksjonelle registre på tidspunkt for gjennomføringen.

For å oppnå konseptuell forståelse må det tilrettelegges for elevaktivt samarbeid med fokus på multiple representasjoner. Gjennom transkribering av fokusgruppens arbeidsprosess kan kjennetegn på gruppearbeidet, og resultatene videre, vise til at elever i 9x generelt profiterte på dette praktiske undervisningsopplegget fremfor ensidig bruk av diskusjonsoppgaver utover ordinær undervisning.

Som nevnt er det for mange vanskelig å være fortrolig med å bidra i kommunikativ samhandling gjennom helklassediskusjoner - kontra samarbeid i mindre grupper. Ved å tilrettelegge for presenterte undervisningsopplegg kan undervisningen innenfor romgeometri bevege seg fra en overføringsbasert til en samarbeidsorientert prosess - som i tråd med nyere

forskning skaper rom for utforskning og argumentasjon og tilrettelegger for en mer relasjonell forståelse. Personlig er jeg av den oppfatning at dersom involverte elever hadde utnyttet tiden optimalt - ville de kommet lenger i arbeidsprosessen som åpner for både repetisjon og innlæring av element de ikke har engasjert seg nok i til å lære tidligere.
Refleksjon etter deltakende observasjon tilsier også at jeg som faglærer har en vei å gå for å få elever til å anvende gruppearbeid som metode for læring med fokus på faglig prosess.

Som en implikasjon for kommende undervisning innen romgeometri anser jeg derfor det utarbeidede undervisningsopplegget som et godt utgangspunkt for videre bearbeiding.
På nåværende tidspunktet har jeg som beskrevet mange refleksjoner om hva som burde endres for at undervisningsopplegget i fremtiden kan danne et enda bedre grunnlag, og bidra til utvikling av individuell behandlings- og konverteringskompetanse som danner grunnlag for konseptuelle forståelse. Jeg vil da, i neste runde - være bedre forberedt på utfordringer både elevene og jeg som faglærer møter.

Jeg har med denne avhandlingens delspørsmål - vist hvordan man kan transformere Swans undervisningsmetode «Matching cards» (2008) tilknyttet romgeometri og hvordan man kan anvende Duvals tabell (2006) over semiotiske representasjonsregistre - fra teori til praksis.

8.0 Egenvurdering av prosjektet

Avslutningsvis beskrives min egenvurdering av prosjektet i sin helhet.

Jeg har gjennom arbeidsprosessen med denne masteravhandlingen fått innsyn i hvordan større forskningsarbeid gjennomføres og hva som kreves av formelle tillatelser og konfidensialitet. Underveis i avhandlingen har jeg kjent på både glede og maktesløshet - da det til tider virket uoverkommelig, mens det andre dager føltes som en drøm som ble oppfylt. Jeg har bevist for meg selv at jeg kan når det gjelder og overbevist meg selv at jeg kan hvis jeg vil. Jeg er en person av mange ord, og atter en oppgave er produsert hvor jeg sikkert har tatt med mer enn strengt tatt nødvendig. Mén, i mitt hode henger alt sammen - alt er interessant.

Arbeidet med avhandlingen har gjort meg mer bevisst hvorfor elever sliter med å danne seg en konseptuell forståelse innenfor temaet romgeometri og samtidig økt min individuelle forståelse for årsaken til dette - gjennom analysearbeidet av Duvals tabell (2006).
Denne refleksjonen vil styrke meg som faglærer i fremtidig arbeid innenfor flere matematiske konsept. Prosjektet har vært veldig lærerikt men også krevende å gjennomføre på toppen av ordinær jobb – i dag ville jeg ikke vært foruten erfaringen.

Å skrive en masteravhandling var mer krevende enn først antatt og jeg er veldig glad for å kunne støtte meg på veileder underveis i arbeidsprosessen. Dersom jeg skulle gjort dette på ny - hadde jeg i neste runde vært bevisst hva det krever av meg som person. Jeg er en pedagog som higer etter faglig utvikling og elsker å lære nye ting. Etterutdanning er viktig for egen profesjonsutøvelse og har stor verdi for mine elever - slik kan jeg møte elever med oppdatert kunnskap og solid faglig kompetanse. På den andre siden er jeg også en praktisk faglærer som liker å ha flere konkrete samlingspunkt underveis i læringsprosesser –
enn selv en erfaringsbasert master i matematikk legger opp til.

9.0 Litteraturliste

Det Norske Akademi for Språk og Litteratur. (2023, 02 21). *NAOB DET NORSKE AKADEMIS ORDBOK.* Hentet fra https://naob.no/ordbok/pilotprosjekt

Duval, R. (2006). A COGNITIVE ANALYSIS OF PROBLEMS OF COMPREHENSION IN A LEARNING OF MATHEMATICS. I E. S. Mathematics. Springer.

Flyvbjerg, B. (2006). *Five misunderstandings about case-study research.* Qualitative Inquiry.

GettingBetter. (2006-2023). *getSmart Formelomgjøring*. Hentet fra getSmart: https://www.getsmart.no/no/products/43

GettingBetter. (2006-2023). *Jossie Geometriske planfigurer*. Hentet fra getSmart: https://www.getsmart.no/no/products/68

Hansson, Ø. (1-2003). En studie i lärarstuderandes begrepsuppfatning. *Tsunami*.

Hinna, R. C., Rinvold, R. A., & Gustavsen, T. S. (2011). *QED 5-10, MATEMATIKK FOR GRUNNSKOLELÆRERUTDANNINGEN Bind 1.* Oslo: Høyskoleforlaget.

Hyde, A., George, K., Mynard, S., Hull, C., Watson, S., & Watson, P. (2006). *Creating Multiple Representations in Algebra: ALL CHOCOLATE, NO CHANGE.* Hentet fra jstor.org: https://www.jstor.org/stable/41182299

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. Assosiates, Lawrence Erlbawn.

Kongnes, A. L., & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 9.* Aschehoug.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *DET KVALITATIVE FORSKNINGSINTERVJU.* Oslo: GYLDENDAL AKADEMISKE.

LeCompte, M. D., & Goetz, J. P. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Educational Research, Vol. 52, No 1*, ss. 31-60.

Mehan, H. (1979, 10 21). "What Time Is It, Denise?": Asking Known Information Questios in Classroom Discorse. I *Theory Into Practice* (ss. 285-294). Taylor & Francis, Ltd. Hentet fra "What Time Is It Denise?": Asking Know Information Questions in Classroom Discourse: https://www.jstor.org/stable/1476655

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* København: Undervisningsministeriet.

Postholm, M., & Moen, T. (2018). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen. En metodebok for lærere, studenter og forskere.* Oslo: Universitetsforlaget.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, ss. 20-26.

Slemmen, T. (2010). *VURDERING FOR LÆRING I KLASSEROMMET.* GYLDENDAL AKADEMISK.

Smedstad, B. (2008, 01). Geometriaktiviteter i lys av van Hieles teorier. *tangenten*.

SNL. (2023, 04 04). *Kasusstudier.* Hentet fra Store norske leksikon: https://snl.no/kasusstudier

SNL. (2023, 03 30). *Kvalitativ metode*. Hentet fra STORE NORSKE LEKSIKON: https://snl.no/kvalitativ_metode

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice.

Strand, R. (2023, 02 22). *Bedre skole.* Hentet fra Utdanningsnytt: https://www.utdanningsnytt.no/bedre-skole-dybdelaering-fagartikkel/dybdelaering-med-langtidsrepetisjonsprogram/300464

Swan, M. (2008). *A Designer Speaks: Malcolm Swan.* Hentet fra Educational Designer.

Tripathi, P. N. (2008). *Developing Mathematical Understanding through Multiple Representastions.* Hentet fra jstor.org: https://www.jstor.org/stable/41182592

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Matematikk 1-10 (MAT 01-05)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv15

Utdanningsforbundet. (2022, 01 14). *utdanningsforbundet.no.* Hentet fra Forskningsetikk og nye forskningsetiske retningslinjer: https://www.utdanningsforbundet.no/globalassets/var-politikk/publikasjoner/faktaark/faktaark_01.2022.pdf

Valenta, A. (2016, september). *Kognitive krav i matematikkoppgaver*. Hentet fra Matematikksenteret.

Vatne, J. E. (2023, 02 22). *Store norske leksikon*. Hentet fra snl.no/dimensjon_-_matematikk

9.1 Figurliste

9.2 Romfigurene i oppgavemateriealet er hentet fra

Kube, av Wikimedia Commons
(https://snl.no/volumenhet). CC BY-SA 3.0
Firkantet prisme og trekantet prisme, av Aanensen, S., Kristensen, O.
(https://ndla.no/article/7503). CC BY-NC-SA 4.0.
Firkantet pyramide og trekantet pyramide, av Aanensen, S., Kristensen, O.
(https://ndla.no/article/7501). CC BY-NC-SA 4.0.
Kjegle, av Aanensen, S., Kristensen, O.
(https://ndla.no/article/7500). CC BY-NC-SA 4.0.
Sylinder, av Aanensen, S., Kristensen, O.
(Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0 Internasjonal). CC BY-NC-SA 4.0
Kule, matematikk.org (med tillatelse gjennom mail korrespondanse med NSMO
(Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen))
(https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=155000&within_tid=154319)

10.0 Vedlegg

10.1 Prosjektbeskrivelse

Prosjektbeskrivelse: V-MATDID 22/23 **Charlott Haagensen**

Tittel/arbeidstittel:
Hoved tittel Romfigur representasjoner: overflate og volum
Undertittel *Hvilke utslag gir økt fokus på ulike representasjoner av romfigurer for elevenes læringsutbytte?

Kompetansemål - LK20, 9. trinn

- utforske og argumentere for formlar for areal og volum av tredimensjonale figurar (Udir)

Kjerneelement – Representasjon og kommunikasjon

Temabeskrivelse, mål og forskningsspørsmål*:
Jeg ønsker å forske på om jeg kan øke elevene forståelse for overflate og volum av romfigurer ved å tilrettelegge for praktisk gruppeaktivitet (inspirert av tidligere kollega; Gudrun L. Hagen) og ved i tillegg la dem arbeide i par/gruppe med sammenhengene mellom ulike representasjoner for et utvalg romfigurer (inspirert av Swan). Jeg vil samtidig benytte meg av inn- og utsjekk (tenkeskriving) i oppstart/avslutning med ordlyd; «Hva vet du om romfigurer?» (VFL).
Hvorfor jeg velger dette fokuset: tidligere erfaring tilsier at elever sliter med holistisk forståelse for tematikken. Det blir for teoretisk, abstrakt og «for mange baller i lufta».
Målet med planen er å gjøre arbeidet mot forståelse mer konkret - kontra å bakse med «oppgaver fra læreboka» -og *formelmiksen* det innebærer på bakgrunn av ren pugging..

Teoretisk perspektiv og/eller begrepsrammeverk:
Det bli i utgangspunktet naturlig for meg å koble denne erfaringsbaserte masteroppgaven til teorier/rammeverk som beskrevet av bl.a. i «van Hiele modellen» (1957?), av Janvier (1987), Duval (2006), Swan (2008) og Valenta (2016). Eksakte rammeverk er ikke absolutt.
Kort oppsummert innhold i de overnevnte:
Van Hiele & van Hiele (1957?); utviklet teori over oppbygging av geometriforståelse – fremstilt i *tabell med fem nivå* (nivå 1: visualisering/gjenkjennelse, nivå 2: analyse, nivå 3: uformell deduksjon/logisk ordning, nivå 4: deduksjon og nivå 5: stringens).
Janvier (1987); hovedfokus på funksjoner og ulike representasjonsoverganger fremstilt i - og kjent som Janviers *matrise*.
Duval (2006); hovedfokus på transformasjoner av semiotiske representasjoner (multi- og monofunksjonelle, diskursive og ikke diskursive operasjoner; *tabellfremstilt* s 110).
Swan (2008); belyser fem typer matematikkoppgaver som fremmer utvikling av konseptuell forståelse. Videre hovedfokus er tilegnet algebra og multiple representasjoner (type 2 oppgaver).
Valenta (2016); matematikkoppgaver og kognitive krav (lave krav: memorering/prosedyre uten forbindelse versus høye krav: prosedyre med forbindelse/matematisk tenkning).

Metode:
Oppgaven tilknyttes metoden; kasusstudie med kvalitativ tilnærming. Deltakende observasjon og lydopptak av gruppearbeid samt innsamling/bildedokumentasjon av elevarbeid. Muligens elevintervju!? Anledning for sammenlikning med «ordinær» undervisning i kontrollklasse (hvor jeg også er faglærer); da spesielt med tanke på «inn- og utsjekk».

Struktur:
Oppgaven struktureres under følgende over- og aktuelle tilhørende underoverskrifter:

Forord
Sammendrag
Innholdsfortegnelse

1. Innledning
2. Tidligere forskning (?)
3. Teori/begrepsrammeverk
4. Metode
5. Resultat
6. Drøfting (og diskusjon av resultater)
7. Konklusjon (og pedagogiske implikasjoner)
8. Egenvurdering av prosjektet
9. Litteraturliste
10. Vedlegg

Foreløpig litteratur:
(*klippet ut for det ødela hovedlitteraturlista i masteravhandlingen*)

Fremdriftsplan:

	aug	sept	okt	nov	des	jan	febr	mars	april	mai
Forberedelse Finne: aktuell teori Lage: aktuelle oppgaver arbeidsark 1+2 (overflate og volum) intervjuguide	x	x								
Pilot (omkrets og areal - Swan)		x								
Veiledningskontrakt		x								
Lage prosjektskisse		x								
Søknad NSD		x								
Samle data			x							
Analysere elevarbeid			x							
Transkribere fokusgruppearbeid/ elevintervju			x	x						
Strukturert litteratursøk				x	x					
Skrive teori				x	x					
Skrive metode					x	x				
Resultat/drøfting					x	x	x			
Konklusjon/egenvurd.						x	x	x		
Todagers masterseminar							x	x		
Korrektur								x	x	x
Innlevering										10.05.23

Undervisningsplan – foreløpig tiltenkt tidsbruk

- Innsjekk/tenkeskriving (9x+9y) 5-10 min
- Praktisk gruppearbeid (9x) 2-3 skoletimer inkl helklassediskusjon. Lydopptak av fokusgruppe (*som jobber på grupperommet tilknyttet klassen)
- Romfigur representasjoner (9x) 2-3 skoletimer inkl helklassediskusjon. Lydopptak av fokusgruppe (*)
- Lærebok Matemagisk/Campus Inkrement (9x+9y; resterende tid ila 3-4 skoleuker inkludert inn- og utsjekk og temaprøve)
- Temaprøve campus Inkrement (9x+9y) 1 skoletime (45 min)
- Utsjekk/tenkeskriving (9x+9y) 15 min
- Lydopptak av fokusgruppeintervju i etterkant av perioden

10.2 Informasjonsskriv

Vil du delta i forskningsprosjektet

Romfigurer – overflate og volum

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å øke din forståelse for romfigurer og hvordan deres overflate og volum henger sammen. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

- **Formål**

I neste temaperiode skal vi jobbe videre fra areal og omkrets av todimensjonale geometriske figurer -mot kunnskap om overflate og volum av tredimensjonale romfigurer. Jeg ønsker å forske på om økt bruk av ulike representasjoner vil hjelpe klassens forståelse for temaet ved å tilrettelegge for ulike gruppearbeid. Perioden strekker seg over en måned. I etterkant av perioden analyserer jeg resultatene og benytter meg av eventuelle funn som del av min pågående masteroppgave innen erfaringsbasert matematikk. Min hypotese er at dette kan være en konstruktiv innfallsvinkel som andre faglærere kan dra nytte av i sin fremtidige undervisning. Dersom det blir en suksess - vil jeg i ettertid ha som mål å forfatte en emneartikkel som kan bli publisert i et tidsskrift for matematikk interesserte, eksempelvis Tangenten.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du er, sammen med et par medelever i klassen, trukket ut i en fokusgruppe. Ditt bidrag blir å gi tillatelse til lydopptak av gruppearbeidene og avslutningsvis delta i et gruppeintervju. Din gruppe skal derfor få jobbe på klassens grupperom slik at lydopptaket ikke blir forurenset av summing inne i klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du samtykker til lydopptak av gruppearbeidene og deltakelse i gruppeintervju. Gruppearbeidene, 2 ulike, vil gjennomføres over tilsammen ca 4 skoletimer. Intervjuet tar ca en skoletime og dine foresatte kan om ønskelig få innsyn i intervjuguiden (spørsmålene i intervjuet). Jeg sørger for anonymisering og alle lydfiler blir slettet etter transkripsjon (fra lyd til tekst). Gruppearbeidene blir bildedokumentert - men ingen ansikt identifiseres.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dette vil altså ikke påvirke ditt forhold til meg som faglærer. Dine resterende medelever (resten av klassen) skal jobbe med samme gruppearbeid; kun foruten lydopptak og gruppeintervju i etterkant.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil kun bruke opplysningene om deg til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt (hemmelig) og i samsvar med personvernregelverket. Under dokumentasjonsbehandling av gruppearbeid og intervju har bare min veileder, førsteamanuensis Andrè Martiny, tilgang fra behandlingsansvarlig institusjon. Ditt navn vil bli

erstattet med en kode og lagres på ekstern privat harddisk. Dersom det viser seg at artikkelpublisering er aktuelt i fremtiden, vil du ikke kunne identifiseres annet enn ved alder og kjønn.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes medio mai/juni 2023. Anonymiserte opplysninger vil ikke bli slettet, men vil kunne gjenbrukes til for eksempel videre forskning.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke opplysninger jeg behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Faglærer Charlott Haagensen; 944 71464
- Universitetet i Agder ved Andrè Martiny; 381 42098
- Vårt personvernombud: Trond Hauso; 936 01625

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Andre Martiny   Charlott Haagensen

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[Romfigurer – overflate og volum]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i lydopptak av gruppearbeid
☐ å delta i lydopptak av gruppeintervju
☐ å gi tillatelse til bildedokumentering av gruppearbeidene

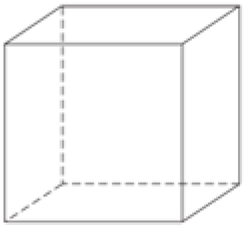
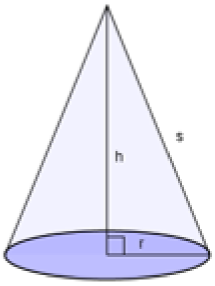
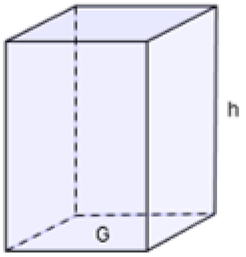
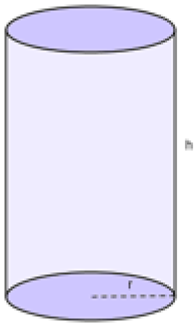
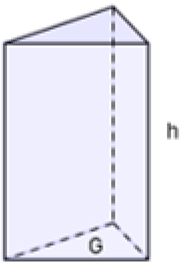
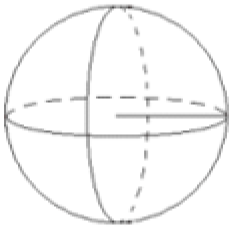
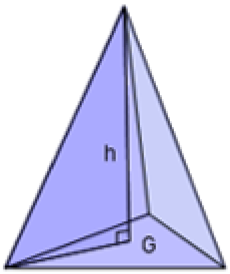
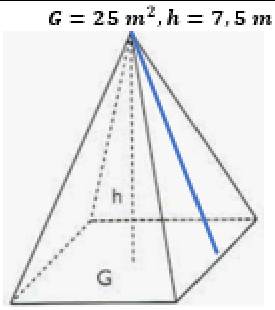
Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

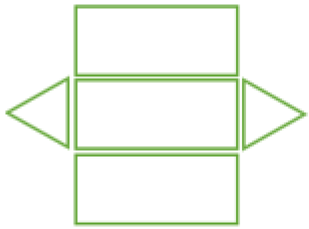
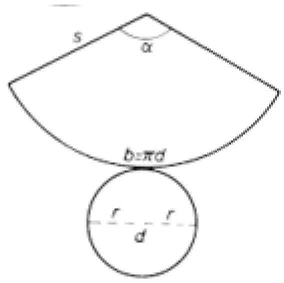
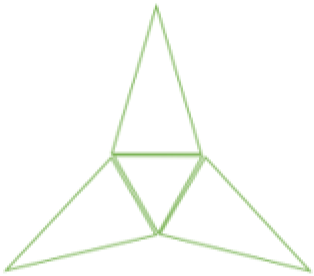
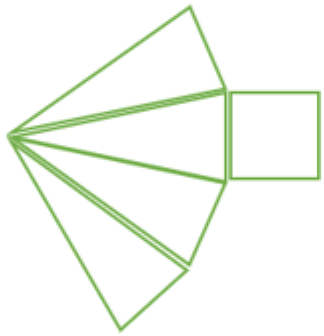
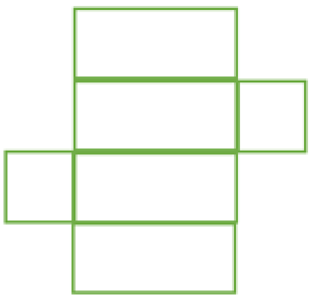
----
(Signert av prosjektdeltaker og foresatt, dato)

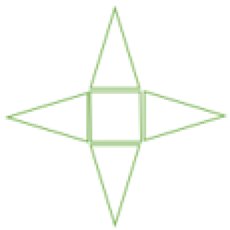
10.3 Undervisningsopplegg

R1 Kortsett A - Fagbegrep

F1	F5 **Rett firkantet pyramide**
F2 **Sylinder**	F6 **Rett trekantet prisme**
F3	F7 **Kule**
F4	F8 **Kube - Prisme**

R1  $s = 3cm$	R5 $G = 200,96\ cm^2,\ h = 21\ cm$  $r = 8\ cm,\quad s = 22,5\ cm$
R2 *Kvadratisk* $G = 225cm^2,\quad h = 20\ cm$ 	R6  $r = 2,2\ m, h = 4\ m$
R3 $G = 15,6\ cm^2,\quad h = 7,5\ cm$  *Likesidet* $G,\quad g = 6\ cm$	R7  $r = 3\ cm$
R4 $G = 15,6\ m^2,\quad h = 7,5\ m$  *Likesidet* $G,\quad g = 6\ m$	R8 $G = 25\ m^2, h = 7,5\ m$  *Kvadratisk* $G,\ s = 7,9\ m$ (blå linje)

O1 	**O5** 
O2 	**O6**
O3	**O7** 
O4 	**O8**

O9 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN 	O13 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN
O10 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN	O14 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN
O11 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN	O15 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN
O12 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN	O16 ANDRE MÅTER Å VISE OVERFLATEN

OF1	OF5 $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
OF2 *Summer arealene til sirkel òg sirkelsektor* $(\pi r^2 + \pi rs)$	OF6 $O = 4\pi r^2$
OF3 $O = s^2 * 6$	OF7 $O = 2(l * b + l * h + b * h)$
OF4	0F8 $O = l * b + \left(\frac{b * s}{2}\right)4$

AO1 $\underline{O \approx 766\ cm^2}$	**AO5** $\underline{O = 54\ cm^2}$
AO2 $\underline{O = 87\ m^2}$	**AO6**
AO3	**AO7**
AO4	**AO8**

G1	**G5** **Figuren består av punkter tett i tett, alle med like lang avstand fra kjernens sentrum. Figuren blir også gjerne benevnt som _______________**
G2 **Figuren består av en sirkel og en sirkelsektor med lik buelengde som sirkelens omkrets**	**G6**
G3 **Figuren er sammensatt av 6 like store kvadrater. Figuren blir også gjerne benevnt som _______________**	**G7** **Figuren består av en likesidet og tre likebeinte trekanter**
G4 **Figuren består av to likesida trekanter og tre like store rektangler.**	**G8** **Figuren består av to like store sirkler og et rektangel med lengde lik lengden på sirkelens omkrets.**

VF1 $V = G * h$	**VF5** $V = \frac{G * h}{3}$
VF2 $V = \frac{4\pi r^3}{3}$	**VF6** $V = \pi r^2 h$
VF3 $V = s^3$	**VF7** $V = \frac{1}{3} * G * h$
VF4	**VF8**

V1 $\underline{V = 62.5\ m^3}$	**V5** $\underline{V \approx 1407\ cm^3}$
V2 $\underline{V = 117\ cm^3}$	**V6** $\underline{V = 39\ m^3}$
V3 $\underline{V = 27\ cm^3}$	**V7** $\underline{V \approx 113\ cm^3}$
V4 $\underline{V \approx 60.8\ m^3}$	**V8** $\underline{V = 4500\ cm^3}$

10.4 Intervjuguide

Intervjuguide

Gruppeintervju - dato:

- Hva er en romfigur/3D figur? Kom gjerne med flere eksempler.. 5 hovedfigurer..
- Beskriv med egne ord overflaten til en romfigur:
- Beskriv med egne ord volumet til en romfigur:
  (*Funn kobles til teorier fra Van Hiele (1957), Duval (2006) og Swan (2008))

<u>GRUPPEARBEID 1:</u>

- Hvilken romfigur skulle gruppen deres arbeide med?
- Hvordan var det å arbeide i gruppe om denne romfiguren?
  - Hva motiverte/hva var utfordrende?
  - Hvordan opplevde dere å jobbe på grupperom med lydopptaker?
- Husker dere hvordan dere fant overflaten og volumet til denne figuren i dag?
- Gruppene hang opp sine plakater etter gruppearbeidene – lærte du/dere noe av plenums oppsummering i klassen før gruppearbeid 2? (kjennetegn 1-2 og 3D)
- Kan du/dere si noe om din/deres læring/forståelse for overflate og volum av romfiguren etter gruppearbeidet?
  (*Van Hiele (1957), Swan (2008) og Valenta (2016))

<u>GRUPPEARBEID 2:</u>

- Hvordan var det å jobbe i gruppe med å systematisere representasjonene av flere romfigurer?
- Hvilke forbindelser valgte dere å starte med og hvorfor?
- Hvilke forbindelser/representasjoner var mest utfordrende og hvorfor?
- Hva motiverte/var utfordrende?
- Etter arbeidet hadde vi en klassediskusjon. Lærte du/ble du bevisst noe spesielt under samtalen?
  (*Janvier (1987), Swan (2008) og Valenta (2016))

<u>SPØRSMÅL KNYTTET TIL BEGGE GRUPPEOPPGAVENE</u>

- Bidro/hjalp gruppeoppgavene deg/dere til å gjenkjenne egenskapene (kjennetegnene) til ulike geometriske figurer (2D)? Forklar …
- Er det noen (spesielle) faglige begrep som du/dere har blitt sikrere på/lært tilknyttet de praktiske oppgavene?

(Prismer; sammensatt av kun kvadrater vs sammensatt av både kvadrater og rektangler. Pyramider; sammensatt av kun likesidet trekanter vs sammensatt av kvadrat og 4 likesida/likebente trekanter)

(Van Hiele (1957) og Valenta (2016))

- Kan du si noe om din læring/forståelse for overflate og volum av ulike romfigurer etter disse gruppearbeidene?
- Med tanke på din egen kunnskap/læring: Hvordan oppleves det å jobbe med praktiske gruppeoppgaver kontra vanlig undervisning/ordinære mattetimer? Utdyp..
  (Janvier (1987), Swan (2008) og Valenta (2016))

Nikk - mm – liten pause
Oppfølgingsspørsmål
- Fortell mer om det

Oppklaringsspørsmål
- Hva mener du med det?

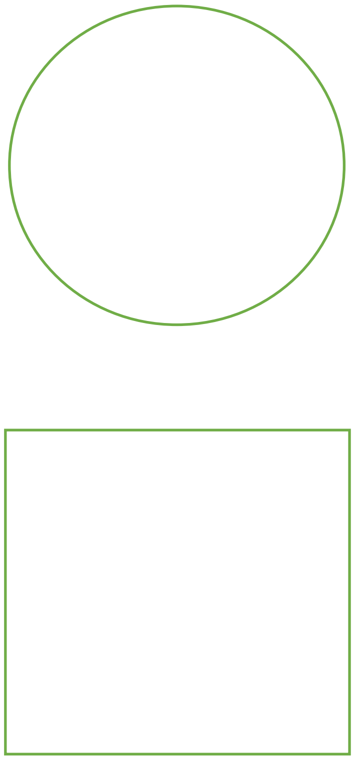
Spørsmål for å få frem deltakernes følelser
- Hva følte du da … Hva opplevde du …

REPRESENTASJONER

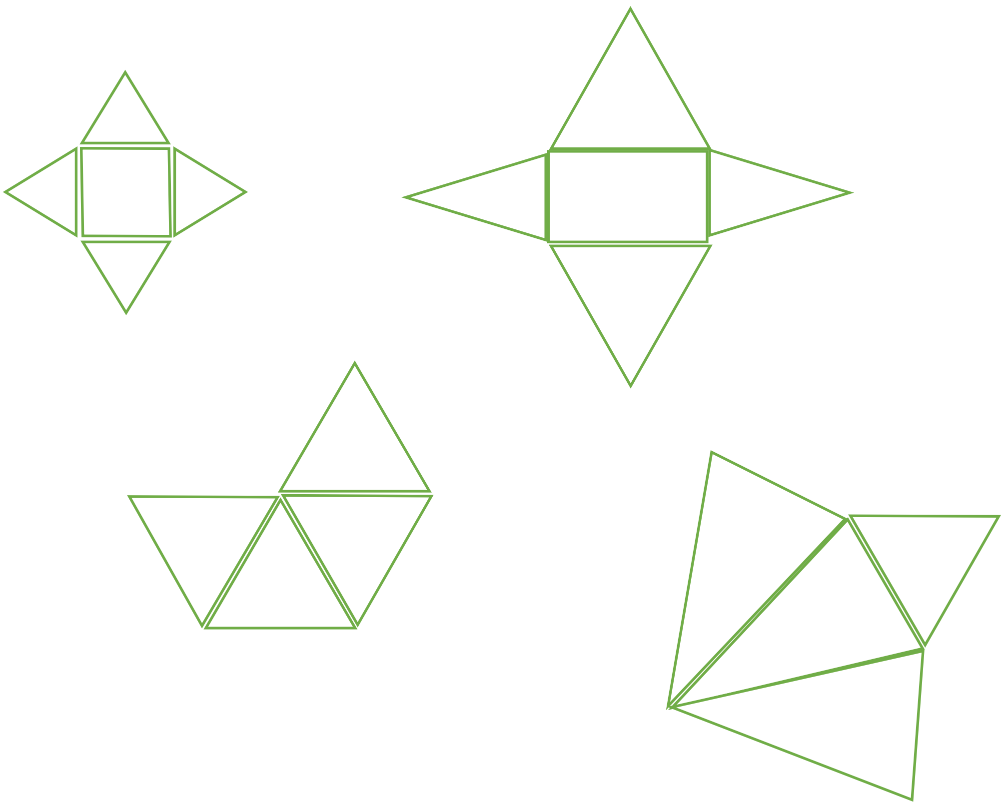
Til slutt skal dere få se noen ulike representasjoner innen 2 og 3 dimensjonal geometri.

1. Når du/dere ser disse formene (bilde av sirkel og kvadrat) hva er det første du tenker på? Begrep? Formler omkrets/areal? Benevning..
2. Når du ser disse illustrasjonene (Overflate pyramidene: Likesidet pyramide, likebent pyramide) Hva er det første du tenker på? Utdyp.
   Har du lært noen nye faglige begrep/blitt sikrere på noen av egenskapene til ulike figurer?
3. Når dere hører disse begrepene (sylinder, kube, kjegle) – hva tenker dere først da? Forbinder du/dere begrepene med noe mer?
4. Når du/dere ser denne formelen (volum kule, overflate prisme) – hva forbinder du/dere de med?

Nr 1



Nr 2



Nr 4 –

Nr 5

$$\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$l * b * 2 + l * h * 2 + b * h * 2$$

10.5 Godkjenning av prosjektet

Vurdering av behandling av personopplysninger

12.10.2022
Referansenummer
597925

Vurderingstype
Standard

Dato
12.10.2022

Prosjekttittel
V-MATDID - Romfigurer og representasjoner

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
Andrè Martiny

Student
Charlott Haagensen

Prosjektperiode
22.08.2022 - 22.06.2023

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 22.06.2023.

Meldeskjema

Kommentar

OM VURDERINGEN

Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg. VIKTIG

INFORMASJON TIL DEG

Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 22.06.2023.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

Vi vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen

- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål

- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke typer endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!