UiA Universitetet i Agder

Aspekter av algebraisk tenkning i problemløsningsoppgaver

En kvalitativ studie av elevers introduksjon og forståelse av algebra på mellomtrinnet.

Jon Martin Børresen & Sondre Berdal

Antall ord: 20940

VEILEDER

Jorunn Reinhardtsen
David Alexander Reid

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven setter en strek under vår femårige lærerutdanning. Arbeidet med denne oppgaven har vært innholdsrik med både opp- og nedturer. Den største gleden var møtet med elevene som prosjektet tar utgangspunkt i, og gjennomførelsen av intervjuet. Utdypningen vi har foretatt oss har gitt oss mer innsikt og fordypning i algebraisk tenkning og problemløsning, noe vi ønsker å ta med oss videre i vår egen lærerpraksis.

Det er mange personer vi ønsker å takke i forbindelse med vår forskning. Vi vil begynne med våre veiledere Jorunn Reinhardtsen og David Alexander Reid, som har bidratt til gode innvendinger og samtaler. Takk for samarbeidet!

Vi ønsker også å takke lærer og klassen som deltok i forskningen, spesielt de elevene som deltok på intervju. Uten deres engasjement og bidrag, ville det vært utfordrende å fullføre denne forskningen.

Vi vil takke familien for den kontinuerlige støtten de gir.

Sist, men ikke minst, ønsker vi å takke våre samboere, som har holdt ut med oss gjennom dette spesielle halvåret. Deres oppmuntringer har vært til stor hjelp.

Kristiansand, mai 2023

Jon Martin Børresen & Sondre Berdal

Sammendrag

Temaet for masteroppgaven er algebraisk tenkning og forståelse. Tidligere studier viser til at elever i den norske skole opplever algebra som utfordrende (Kaarstein et al., 2020). Det vil derfor være hensiktsmessig å rette fokuset mot hvordan elever utrykker sin algebraiske tenkning og forståelse, for å videreutvikle undervisningen i skolen. Algebra og problemløsning er forankret i læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2019) og leder inn mot vår problemstilling. Forskningsspørsmålet som denne studien baserer seg på er:

- *Hvordan kommer algebraisk tenkning og forståelse for begreper til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7. trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger?*

Som teoretisk rammeverk for analyse av empirien, går vi blant annet ut fra Blanton et al. (2015) sin idé om ekvivalens, uttrykk, likninger og ulikheter, og Kieran (2004) sin tilnærming til algebraisk tenkning. I denne sammenhengen har det teoretiske rammeverket bidratt til å oppdage deltagernes algebraiske tenkning og forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger i problemløsningsoppgaver.

Denne forskningen er en kvalitativ multiple casestudie med oppgavebasert intervju. Innhentingen av data foregikk hos en 7. klasse på mellomtrinnet. Her ble det tatt i bruk lyd- og filmopptak, observasjoner og elevnotater. Undervisningsøktene ble brukt som et grunnlag for intervjuet av tre elever. Det er resultatene i de oppgavebaserte intervjuene som svarer på forskningsspørsmålet. Det oppgavebaserte intervjuet inneholdt tre problemløsningsoppgaver av algebraisk natur. Besvarelsene og resonneringen blant deltagerne var verdifulle i vår forskning da vi kunne vise til algebraisk tenkning og forståelse for begreper.

Funnene i denne studien viser til varierende forståelse for begrepene og uttrykkelse av algebraisk tenkning. Samtlige deltagere fra intervjuet viser til aspekter til algebraisk tenkning og forståelse for begrepene i løsningen av gitte problemløsningsoppgaver. Det varierer mellom deltagerne hvordan og når de kommer til syne. En forståelse for ekvivalens, uttrykk og likninger og evnen til å tenke algebraisk viser seg både gjennom arbeid med penn og papir, samt under oppgaveløsning i Excel.

Abstract

The topic of the master's thesis is algebraic thinking and understanding. Previous studies show that students in the Norwegian school system experience challenges with algebra (Kaarstein et al., 2020). Therefore, it is useful to focus on how students express their algebraic thinking and understanding of concepts to further develop teaching in schools. Algebra and problem-solving are anchored in the curriculum (Kunnskapsdepartementet, 2019) and lead to our research question. The research question for this study is:

- *How do algebraic thinking and understanding of concepts appear in relation to equivalence, expressions, and equations when 7th-grade students solve problems using spreadsheets and drawings?*

As a theoretical framework for analyzing the empirical data, we rely on Blanton et al.'s (2015) idea of equivalence, expressions, equations, and inequalities, and Kieran's (2004) approach to algebraic thinking. In this context, Blanton et al. and Kieran's theories have given us an indication of the participants' algebraic thinking and understanding of concepts.

This research is a qualitative multiple case study with task-based interviews. The data was collected from a 7th-grade class in middle school. Audio and video recordings, observations, and student notes were used for data collection. The instructional sessions were used as a basis for interviewing three students. The results of the task-based interviews answer the research question. The task-based interview included three algebraic problem-solving tasks. The participants' answers and reasoning were valuable in our research as they revealed their algebraic thinking and understanding of concepts.

The findings of this study show varying levels of understanding of concepts and expression of algebraic thinking. All participants in the interview demonstrated aspects of algebraic thinking and understanding of concepts in solving given problem-solving tasks. However, this was apparent in varying ways among the participants. An understanding of equivalence, expressions and equations, and the ability to think algebraically appear in both when working with pen and paper and during problem-solving in Excel.

1. Innledning

Denne oppgaven vil se nærmere på ulike tilnærminger til algebra hos elever på mellomtrinnet. Den norske skolen har i tiden mellom 1995 til 2003 oppnådd svake resultater i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2023). I nyere tid fra og med 2003 til 2019 har rapporter som TIMSS vist en positiv utvikling i den norske skolen (Kaarstein et al., 2020). Selv om utviklingen i matematikk er positiv, har rapportene vist til at algebra er et område elever opplever som utfordrende (Utdanningsdirektoratet, 2023) Læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019) forklarer algebra som å kunne å utforske strukturer, mønstre og relasjoner, og dette er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk. Kaput (1998) har en oppfattelse av at en integrering av algebraisk tenkning over alle trinn vil være fordelaktig, og løse en rekke problemer i skolen. For å følge utviklingen til samfunnet kan det være gunstig å rette søkelyset mot selve praksisen i undervisningen, og utbedre denne. Fra våre opplevelser i skolen varierer forståelsen hos elever når det kommer til algebra. Hva kan det komme av? Er dette en trend lærere kan forbedre og gjøre noe med, eller vil det for alltid være utfordrende med algebra i skolen? Denne studien ønsker derfor å se på hvilke aspekter av algebraisk tenkning som kommer til syne ved løsning og forståelse av begreper i problemløsende algebraoppgaver.

Oppgaven vår er en del av et større prosjekt som ønsker å svare på om skolen trenger en annen vinkling til algebra. Dette algebra-prosjektet er et samarbeid mellom professorer, lærere og internasjonale kollegaer. Målet med prosjektet vil være å:

- Utvikle og demonstrere effektiviteten til læringsaktiviteter for algebraisk tenkning i mellomtrinnet
- Etablere bærekraftige metoder som kan implementere slike aktiviteter for algebraisk tenkning i den norske skolen

Prosjektet involverer en rekke skoler, og tester ulike vinklinger til algebra på mellomtrinnet. Vår forskning vil foregå på syvende trinn. Elever i den norske skolen strever som sagt med algebra (Kaarstein et al., 2020). Dette er fanget opp av utdanningsdirektoratet, som har inkludert algebra-relaterte kjerneelementer som eksempelvis utforskning og problemløsning inn i læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det vil derfor være hensiktsmessig å se på hvordan elevene uttrykker sin algebraiske tenkning og forståelse av begreper, for å være i stand til å videreutvikle undervisningen innenfor temaet

1.1 Bakgrunn for valg av oppgave

Vi har en generell interesse for matematikkfaget og ønsket derfor å arbeide videre med dette. Muligheten til å kunne fordype seg videre i et så viktig og sentralt fag i skolen ga mersmak. Det vil være fordelaktig for elevene at læreren innehar en viss kompetanse i et område som elever i den norske skolen strever med. Bakgrunnen for valg av algebra som fokusområde stammer fra vår fascinasjon av hvordan algebra blir undervist i faget, og algebra i seg selv. Hvordan elever oppnår forståelse ved bruk av forskjellige fremgangsmåter og strategier vil være en sentral del. Dette prosjektet er som tidligere nevnt en del av et større forskningsprosjekt. Prosjektet ønsker å sette søkelys rundt nettopp algebra, og vil gi oss en mulighet til å se nærmere på vårt felt av interesse. Prosjektet ønsker også å gi innsikt i skolens håndtering av algebra. Det kan derfor gi nyskapende tenkning, ideer og håndtering av algebra i skolen, noe vi finner spennende. At skolen da viser til en endringskompetanse for elevenes beste står sentralt.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

På bakgrunn av at norske elever strever med algebra, velger vi å forme vårt forskningsspørsmål basert på denne påstanden. Vi finner det derfor interessant å se nærmere på hvilke algebraiske aspekter som fremtrer hos hver enkelt elev under oppgaveløsning. Det vil mest sannsynlig være en variasjon av fremgangsmåter og disse kan være med på å fortelle hvorvidt eleven innehar algebraisk tenkning og forståelse for begreper. Basert på våre tanker og ideer har vi kommet frem til et forskningsspørsmål som denne oppgaven forsøksvis skal svare på.

Forskningsspørsmål

- *Hvordan kommer algebraisk tenkning og forståelse for begreper til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7. trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger?*

1.3 Matematikkens relevans og sentrale verdier

Den norske skolen har et bredt samfunnsmandat, gitt gjennom læreplaner og lover. Læreplanverket for kunnskapsløftet er satt hjemmel i opplæringsloven og er et forpliktende dokument, skolen er nødt til å forholde seg til (Haug, 2014). I den overordnede delen av opplæringen erkjennes dette hvor det sies at skolen skal utøve sin praksis i henhold til opplæringslovens formålsparagraf (Kunnskapsdepartementet, 2017). I forskrift til opplæringsloven § 1-1 om formålet med opplæringen står det at:

> “Opplæringa i skole og lærebedrift skal, i samarbeid og forståing med heimen, opne dører mot verda og framtida og gi elevane og lærlingane historisk og kulturell innsikt og forankring “(Opplæringsloven, 1998, § 1-1).

Alle fag i skolen skal bidra til å oppnå verdigrunnlaget for opplæringen (Kunnskapsdepartementet, 2019). Matematikken er et sentralt fag som blant annet skal forberede sine elever på samfunnet og arbeidslivet etter skolen, ved å gi dem kompetanse i utforskning og problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019). For å svare på problemstillingen til oppgaven er problemløsende algebraoppgaver sentralt.

1.4 Oppbyggingen av oppgaven

I denne oppgaven vil det innledningsvis være en redegjørelse av tidligere forskning på områder som inngår undervisning, algebra og algebraisk tenkning. Videre vil dette punktet bli tatt som utgangspunkt til hvordan elevene opptrer med dette i praksis. I metodedelen vil det begrunnes hvilke metodiske valg vi har tatt underveis. Resultater fra innhentingen av data vil bli presentert, og senere diskutert på et dypere plan. Avslutningsvis vil det komme en konklusjon som oppsummerer våre opplevelser med arbeidet rundt algebra i skolen, og vi vil forsøke å besvare forskningsspørsmålet.

2. Teoretisk perspektiv og tidligere forskning

For at oppgaven skal kunne diskutere hvordan algebraisk tenkning og forståelse for begreper kommer til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger, vil vi starte med å presentere relevant teori som bygger opp under denne problemstillingen. Dette kapittelet vil inneholde den teorien som analysen av våre resultater vil bygge seg på. Vi vil se på ulike definisjoner og tolkninger av algebra og forståelse for begreper. Til slutt vil vi vise til tidligere forskning som kan relateres til vår problemstilling.

2.1 Algebraisk tenkning

Definisjonene på hva algebra er har variert gjennom tiden. Algebra gir oss muligheten til å regne flere oppgaver på et enklere vis. Ved å ta i bruk variabler i stedet for tall kan man generalisere uttrykk til å gjelde i flere situasjoner. Ifølge læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019) omhandler algebra det å kunne å utforske strukturer, mønstre og relasjoner, og dette er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk. Aritmetiske ferdigheter er en avgjørende faktor for elevers matematiske kompetanse både i skolen, men også ellers i samfunnet. Hvordan disse ferdighetene tilegnes, er av stor betydning for enkeltindividets videre forståelse i faget (Butterworth, 2005). Aritmetiske ferdigheter innebærer ifølge Butterworth de fire regneartene: addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Elever tar i bruk et bredt spekter av forskjellige tilnærminger og strategier i løsning av problemstillinger. Disse består oftest av bruk av konkreter, mentale strategier og skrevne strategier (Gilmore et al., 2018). Forskning tyder på at overgangen fra aritmetikk til algebra skaper utfordringer for elevene. Feltet har gradvis kommet til enighet om at elever kan og burde eksponeres for algebraiske tanker og ideer når de utvikler sin aritmetiske kompetanse (Cai & Knuth, 2011). I tillegg til dette er det kommet frem til at løsningen ikke vil innebære å kun forskyve algebra til tidligere i skoleløpet. Den vil derimot kreve en utvikling av algebraiske ideer i de tidligere klassetrinnene med en fundamental reformering av hvordan aritmetikk skal sees på og undervises i skolen, og i tillegg til dette vil et økt fokus rettes mot hvorfor elever opplever overgangen mellom aritmetikk og algebra som utfordrende (Cai & Knuth, 2011). Kaput (1998) mener at en integrering av algebraisk tenkning over alle trinn vil være fordelaktig, og løse en rekke problemer i skolen. Det vil derfor være ønskelig å starte med algebra så tidlig som mulig. Kaput beskriver algebra som todelt, og at de to hovedområdene består av tre grener.

1. En systematisk generalisering av regler og begrensninger innenfor mønstre, aritmetisk- og kvantitativ tenkning.
2. Algebra som syntaktisk styrt manipulasjon av formalisering.

Kaput sier det at de to hovedområdene 1 og 2 begge omfatter tre grener i algebraen. Underkategoriene er vår oversettelse og tolkning av begrepene:

3. Algebra som studiet av strukturer og systemer abstrahert fra beregninger og relasjoner.
4. Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og samvariasjon.
5. Algebra som en samling av modellering og algebra som språk (Kaput, 1998, s.26).

Maria Blanton et al. (2015) har i nyere tid videreutviklet James Kaput (1998) sine beskrivelser av algebraisk tenkning. Blanton et al. mener at et sentralt argument i omformingen av algebra er tilnærmingen til aritmetikk først, og deretter algebra. I dette oppsettet blir aritmetikken vektlagt i de tidligere år i grunnskolen, og har dermed nedprioritert elevenes algebraiske tenkning, noe som resulterer i mangel på elevenes dybde innenfor algebra. En slik nedprioritering kan videre føre til en omfattende skolesvikt og påfølgende begrensede karriere- og økonomiske muligheter. Som et resultat av dette er det ifølge Blanton et al. allment akseptert at algebra bør behandles mer helhetlig slik at elever har langsiktige og vedvarende erfaringer med algebra. Det vil da være mulighet for at elevenes naturlige intuisjoner om mønstre og relasjoner til formaliserte måter for matematiske tenkning styrkes. Grunnet dette behovet for en mer fullverdig innførelse av algebra har det vært en voksende mengde forskning på algebraisk tenkning i grunnskolen gitt viktige svar på hvordan barn tenker algebraisk.

Fra forskningen til Blanton et al. (2015) ble det identifisert fem store ideer som er videreutviklet fra Kaputs (1998) innhold. Disse store ideene gir betydelige muligheter for å engasjere seg i algebraisk kjernepraksis for å generalisere, representere, rettferdiggjøre og resonnere med matematiske sammenhenger, inkluderer:

1. Ekvivalens, uttrykk, likninger og ulikheter.
2. Generalisert aritmetikk.
3. Funksjonell tenkning.
4. Variabler.
5. Proporsjonalt resonnement (Blanton et al., 2015, s. 43).

Den første ideen om ekvivalens, uttrykk, likninger og ulikheter inkluderer det å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet, representere og resonnere med uttrykk og likninger i deres symbolske form, og beskrive sammenhenger mellom og hos generaliserte størrelser som enten kan være likeverdige eller ikke (Blanton et al., 2015). Generalisert aritmetikk involverer generaliserende aritmetiske relasjoner, inkludert grunnleggende egenskaper ved tall og operasjoner som for eksempel den kommutative lov ved addisjon. Det vil også innebære resonnement om strukturen til aritmetiske uttrykk i stedet for deres beregningsverdi. Funksjonell tenkning innebærer generaliserende relasjoner mellom samvarierende mengder, representasjon og resonnering mellom disse relasjonene gjennom et naturlig språk som algebraisk notasjon, tabeller og grafer. Variabler omhandler symbolsk notasjon som et språklig verktøy for å representere matematiske ideer og inkluderer de ulike rollene variablene spiller i ulike matematiske kontekster. Det femte og siste punktet proporsjonalt resonnement refererer til muligheter til å resonnere algebraisk om to generaliserte størrelser som er relatert slik at forholdet mellom størrelsen og den andre er uforanderlig. Ideene skal ikke ansees som gjensidig utelukkende. For eksempel integrerer de variabler gjennom de andre store ideene fordi den reflekterer en mer organisk tilnærming til undervisning, det vil si at studenter lærer ideelt sett om variabler som en varierende ukjent størrelse i studiet av funksjonelle sammenhenger og som et generalisert tall. På grunnlag av variabelens rolle innenfor algebra, er det viktig å identifisere den som en distinkt stor ide i studiet av elevers algebraiske tenkning.

Disse fem ideene er sentrale i Blanton et al. (2015) sitt arbeid og tilnærming for å legge til rette for algebraisk tenkning, og de reflekterer hennes oppfatning om at elever trenger å utvikle en dypere forståelse av algebraiske aspekter for å lykkes i matematikken. De fem store ideene blir ansett som grunnleggende for å forstå algebra siden de gir rike kontekster der algebraisk tenkning kan forekomme. Grunnet oppgavens vinkling og omfang, vil studien ta utgangspunkt i en av de fem store ideene. Begrepene ekvivalens, uttrykk, likninger og ulikheter er fremtredende i dette punktet, og er fra vårt ståsted i denne studien mer relevant enn øvrige ideer. Det å forstå disse begrepene er viktig for elever som lærer algebra. Grunnet en mangel av ulikheter i denne forskningen, vil ikke dette begrepet involveres videre. Studien til Blanton et al. viser til hvilke momenter som omhandler elevers forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger.

- Tolke et algebraisk uttrykk i sammenheng med et problem
- Identifisere betydningen av likhetstegnet som uttrykk for en relasjon mellom størrelser
- Løse problemer med manglende verdier ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen
- Kontrollere løsningen på en likning eller bestemme om løsningen er rimelig ut fra problemstillingens sammenheng
- Analysere strukturen i likningen for å finne verdien av variabelen

Vektleggeningen av den første ideen gir forskningen vår muligheten til å gå mer i dybden hos hver enkelt hendelse med forskningens deltagere. Eksemplene som er nevnt fra Blanton et al. (2015) sin studie er i all hovedsak sentrert rundt problemløsningsoppgaver, noe som passer denne oppgaven.

Kieran (2004) beskriver punkter som kan bidra til at elever kan gå fra aritmetisk- til algebraisk tenkning. Disse punktene er en passende representasjon av Blanton et al. (2015) sine store ideer som gir betydelige muligheter for generalisering, representering, rettferdiggjøring og resonnering.

1. Fokus på forhold og ikke bare på beregning av et numerisk svar,
2. Fokus på inverser av operasjoner, ikke bare operasjonene selv, og på den relaterte ideen om å gjøre/ikke gjøre,
3. Fokus på både å representere og løse et problem i stedet for bare å løse det,
4. Fokus på både tall og bokstaver, ikke kun tall alene. Dette inkluderer:
   - Arbeid med bokstaver som til tider kan være ukjente, variabler eller parameter,
   - Akseptere åpne uttrykk av bokstaver som svar,
   - Sammenligne uttrykk for ekvivalens basert på egenskaper i stedet for en numerisk evaluering.
5. Endre fokus av betydningen til likhetstegnet (Kieran, 2004, s.140-141).

Disse punktene gir en oversikt over hva hun mener er viktig å arbeide med for elever før ungdomstrinnet. Algebra innføres annerledes i USA, men sammenligninger kan hjelpe på utviklingen i undervisning i Norge. Disse fem punktene er områder Kieran (2004) mener at de største utfordringene oppstår. På bakgrunn av det Cai & Knuth (2011) belyser om temaet: hva er tidlig algebra, og hvorfor bør innføringen av algebra forandres? Tidligere innføring av algebraisk tenkning bør påvirke mestringen av aritmetikk og flyten av beregninger, noe som vil ivareta den underliggende strukturen til matematikken. En tidligere innføring av algebraisk tenkning og vinkling av innføringen krever en utvikling av spesielle tankesett. Inkludert det å: analysere forhold mellom mengder, legge merke til strukturer, studere endring, generalisering, problemløsning, modellering, bevise og evnen til å forutse. Med andre ord så vil tidlig algebra ifølge Cai & Knuth ikke kun utvikle nye verktøy elever kan ta i bruk, men nye kognitive vaner.

For å svare på forskningsspørsmålet til oppgaven er problemløsende algebraoppgaver en viktig del av denne forskningen. I problemløsning brukes mangfoldet av ord til å betegne et problem, og bruken av dette innenfor teorien, som igjen indikerer en rekke underliggende begreper. Disse begrepene varierer fra en enkel anvendelse av regler til en mer spesifikk løsning som krever visse ferdigheter. Det varierer også om løsningen er spesifikk eller generell der reglene og problemene som er tatt i bruk skal utvides (Bednarz et al., 1996). Problemløsningsoppgaver blir fra forskningen til Bednarz & Janvier (1996) delt inn i tre hovedtyper. Denne inndelingen baseres på naturen til størrelsene som er involvert og relasjonen mellom disse. De tre typene er: problemer med ulik deling, problemer som involverer en størrelsestransformasjon og problemer som involverer ikke-homogene størrelser og en hastighet. Fra samme perspektiv forklarer Alan Bell (1996) problemløsning som løsninger av problemer med å forme og løse likninger. En bredere forklaring av begrepet er å utforske problemer fritt, utvide og utvikle disse i søken etter flere resultater og mer generelle problem. Bell mener derfor at læring basert på mulighetene i matematikken bør bli sentrert rundt utforskning av problemer. Plassen for symbolsk språk og dens manipulasjon som blir påpekt av Bell, som minner oss om den viktige rollen symboler utgjør i utviklingen av algebraisk tenkning. Dermed bør problemløsnings-tilnærminger, ifølge Bell, ta hensyn til samspillet som flettes sammen mellom formuleringen av likninger og deres manipulasjon i løsningsprosessen.

På bakgrunn av hva Kaput (1998), Blanton (2015) og Kieran (2004) sier om algebra i skolen, og i sammenligning med det som står i lærerplanen om hva elever på mellomtrinnet skal lære om algebra, vil denne forskningen anse algebra i skolen som arbeid med problemløsningsoppgaver av algebraisk natur. Denne forskningen vil basere seg på en av Blanton sine store ideer til den algebraiske tenkningen hos elever, nemlig ekvivalens, uttrykk og likninger.

I oppgavens kontekst defineres algebraisk tenkning som forståelse og anvendelse av begrepene ekvivalens, uttrykk og likninger under et problemløsningsmiljø, med utgangspunkt i Blanton et al. (2015) sine momenter og Kieran (2004) sine punkter mot algebraisk tenkning. Det teoretiske rammeverket er ment for å hjelpe oss til å oppdage deltagernes algebraiske tenkning og forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger i problemløsningsoppgaver.

2.2 Kognitive krav

Stein et al. (2000) diskuterer begrepet kognitive krav. Begrepet omhandler nivået av mental innsats som kreves for å fullføre en oppgave eller løse et problem. Ifølge Stein et al. kan kognitiv etterspørsel deles inn i fire ulike nivå: lavt-, moderat-, høyt- og svært høyt kognitivt krav. Oppgaver som krever lave kognitive krav er relativt enkle og krever ikke mye mental innsats, mens oppgaver som krever svært høyt kognitive krav er vanskelige og krever omfattende mental innsats. Stein et al. påstår at elever har størst utbytte når de utfordres til å arbeide på et nivå av kognitiv etterspørsel, som er rett over deres nåværende nivå av evne. Dette skaper et miljø som kan sammenlignes med den proksimale utviklingssonen til Vygotsky (1978). Den proksimale utviklingssonen anses å være et læringsmiljø som fremmer utviklingen av elevenes tenkning og problemløsningsevner. Den nærmeste utviklingssonen gir ifølge Vygotsky forskjellen mellom det en elev klarer på egenhånd på det kognitive området, og det eleven kan løse av oppgaver ved hjelp av en voksen.

Stein et al. (2000) legger vekt på betydningen av å utforme oppgaver som gir elevene passelig med utfordringer, og igjen krever at elevene engasjerer seg mer mentalt. Stein et al. argumenterer for at slike oppgaver kan fremme utviklingen av studentenes kognitive ferdigheter og hjelpe dem med å bli mer dyktige i læringsprosessen.

2.3 Tidligere forskning

Her vil det presenteres empiri fra studier som viser til relevante ståsted og hendelser. Det er for å være i stand til å kunne sammenligne våre funn med andre studier.

2.3.1 Lærer-elev-problemet

En viktig del av algebraen er variabler. Variabler er en av de mest fundamentale ideene i matematikk gjennom hele skolegangen. Samtidig indikerer forskning at elever opplever vanskeligheter ved bruk av variabler. Philipp (1992) sier at en av grunnen til dette, kan være at variabler innenfor matematikken kan bli brukt på mange forskjellige måter.

En vanlig mistolkning innenfor algebraen er å feiltolke variabler i algebraiske problemer og likninger. Clement (1982) har nevnt at førsteårs ingeniørstudenter sliter med å oversette en problemløsningsoppgave i algebra til en likning. Forskningen viste at de fleste klarte enkle oppgaver som handlet om å løse likninger, men med en gang det ble en tekstoppgave og studentene skulle lage en likning selv, slet dem.

Clement (1982) ga 150 første års ingeniørstudenter en test med seks oppgaver. Oppgave 5 og 6 tilhører en klasse med problemer som skulle vært trivielt for disse studentene, men de ble løst feil av et stort antall av dem. På oppgave 1-4 klarte mer enn 90% av gruppa oppgavene, men oppgave 5 og 6 svarte under halvparten av gruppa riktig. Den store kontrasten på antallet som svarte riktig på oppgave 1-4 og antallet som svarte rett på 5 og 6 viser at de fleste feilene kom grunnet vanskeligheter med å oversette ord til en algebraisk likning, og ikke vanskeligheter med å løse simple algebraiske likninger.

> Oppgave 5: Lag en likning ved bruk av variablene S og P for å representere følgende utsagn: "Det er seks ganger så mange studenter som professorer på dette universitetet.
>
> Bruk S for antall studenter og P for antall professorer.
>
> Riktig svar: 6P=S Feil svar: 6S=P
>
> (Clement, 1982, s. 17).

Clement (1982) trodde først at årsaken til disse feilene var grunnet mangel på å gi nok oppmerksomhet til oppgaven, men det var et sterkt mønster i feilene. I oppgave 5 var 68% av feilene reverser. Altså at 6S=P, istedenfor det riktige svaret som er 6P=S.

Clement (1982) sammen med andre forskere har også sett på testdata som viser at problemet med å reversere er sterkt ettersom det dukker opp kontinuerlig i andre symbolsystemer også. Dette gjelder oversettelse fra bilder til likninger, tabeller til likninger og likninger til setninger.

For å se på hva som skjer kognitivt da studentene svarte på denne oppgaven tok Clement (1982) intervjuer med 15 av studentene. Her ble det oppdaget to konseptuelle kilder til revers-feilen, en syntaktisk tilnærming der en matcher ord i problemet direkte over til likningen og en statisk sammenlikningsprosess der en i dette problemet ofte kan se på variabelen S som et symbol for studenter, istedenfor som en variabel som står for en uspesifisert mengde. Likhetstegnet blir sett på som at det skal symbolisere en sammenheng mellom ulike grupper, istedenfor at det skal symbolisere likhet.

Den tredje tilnærmingen en kan ha til slike oppgaver er den operative tilnærmingen. Dette er den tilnærmingen som oftest fører til riktig løsning og mest forståelse. Analyse av forskningen til Clement (1982) viser at nøkkelen til forståelse for å få en passende oversettelse fra språk til likning ligger i evnen til å lage en operasjon. I dette tilfelle kan det være å øke mengden professorer, dette vil generere en likhet. Denne likningen beskriver ikke direkte hva som skjer i problemet, men den beskriver likhetsrelasjonen som ville oppstått hvis en skulle gjennomføre en hypotetisk operasjon. Det man egentlig gjør er å gjøre den minste gruppen, altså professorene seks ganger så stor.

2.3.2 Regneark I problemløsningsoppgaver

Rojano (1996) forsket på hvordan elever bruker algebra for å løse problemer i regneark. Det finnes beviser på at bruken av regneark kan hjelpe elever til å utvikle fundamentale aspekter i algebraisk tenkning. En av oppgavene Rojano (1996) brukte ser slik ut:

> Måling av en bane:
>
> Omkretsen på banen er 102 meter.
>
> Lengden på banen er dobbelt så lang som bredden
>
> Hvor stor er lengden og bredden?
>
> (Rojano, 1996, s.5).

Hun ser på to forskjellige prosesser i arbeidet med slike oppgaver. Når elevene jobber fra den kjente til den ukjente (før-algebraisk prosess) og når elevene jobber fra den ukjente til den kjente (Algebraisk prosess). Da jobber elevene med den ukjente som at den er kjent (Rojano,1996).

Da elevene ble testet i denne oppgaven uten bruk av regneark var det kun 2 av 15 elever som klarte å løse problemet, og ingen av disse brukte en algebraisk fremgangsmetode.

I en annen økt jobbet elevene med en lignende oppgave (Rojano, 1996). Elevene ble lært en regneark-algebraisk metode for å løse problemet. Denne metoden var algebraisk fordi man jobbet fra det ukjente til det kjente. Den ukjente ble her representert som en celle i regnearket, denne ville vært x i en algebraisk løsning på papir. De andre matematiske sammenhengene blir videre uttrykt ved bruk av den ukjente.

Da Rojano (1996) gjennomførte et postintervju, der elevene fikk mulighet til å bruke regneark til å løse oppgaven, ble resultatene ganske annerledes enn i førintervjuet. Da var det tre elever som klarte å løse oppgaven om måling av en bane uten regneark. Ingen av de som klarte oppgaven løste den algebraisk, ettersom samtlige brukte en føralgebraisk prosess som "hel/del". Det var 10 elever som kom frem til riktig løsning ved bruk av regneark. Da brukte to elever før-algebraisk prosess, og åtte elever løste den algebraisk. Det var med andre ord en stor økning av elever som klarte å løse oppgaven da de fikk bruke regneark. Og mange flere løste den da ved hjelp av en algebraisk prosess.

2.3.3 Gjett og sjekk

Mark Driscoll (1999) påpeker at elevers uformelle tenkning er til tider ikke ulik formelle symbolske tilnærminger. Han foreslår at lærere bør se etter muligheter for å utvikle tankemønstrene til elevene som blir tatt i bruk under algebraisk tenkning før selve innføringen av algebra. I sammenheng med gjett og sjekk som metode, forklarer Driscoll at elevene gjetter et tall og undersøker om hvilken løsning tallet gir. Ved at eleven revurderer og prøver ut andre tall inn i det samme systemet, tester de numerisk et generelt system som de mener representerer situasjonen i problemet. En slik resonnering er funksjonell i praksis og gjenspeiler tenkningen man tar i bruk for å bygge regler for å representere funksjoner.

Det er mange som tror at strategier som gjett og sjekk for å løse algebraiske problemer er problematiske og kan være til hinder for at elevene skal lære algebraiske metoder. Det er faktisk sammen med andre uformelle strategier en viktig del av grunnlaget for hvordan metoder og strategier er til hjelp for å konstruere algebraisk tenkning (Rojano, 1996).

Johanning (2007) har forsket på elever som bruker systematisk gjett og sjekk, og om det er noe som kan tjenes på dette. For å gjøre dette så hun på to algebraiske tekstoppgaver. Vi har sett på funnene hun fant fra den oppgaven som var mest relevant for oss.

> Kjeledyrproblemet: Det er 280 dyr meldt opp til dyreshowet. Det er fire ganger så mange hunder som katter og det er dobbelt så mange fugler som katter. Hvor mange av hvert dyr er meldt opp til dyreshowet? (Johanning, 2007, s. 125).

For det gitte problemet var det flere ulike systematiske gjett og sjekk strategier som ble tatt i bruk. Det hyppigst anvendte gjett og sjekk systemet baserte seg på at de tok i bruk den ukjente kvantiteten som hadde de enkleste linkene. Her var for eksempel antall fugler og antall hunder begge en multiplikasjon av antall katter. Ved å ta i bruk antall katter som utgangspunkt ga det mulighet for at elevene kunne legge til relasjonene fra problemet. En annen tilnærming enkelte elevene tok i bruk, var å bruke antall hunder som utgangspunkt. Dette gjorde at elevene måtte endre et av forholdene fra "fire ganger så mange" til en fjerdedel. En av elevene forklarte at ved å ta i bruk katter som utgangspunkt kunne hun skape forholdene. Og ved å se hvor mye disse ble til sammen kunne hun se hvor mange katter hun eventuelt måtte legge til eller trekke fra.

Debra Johanning (2007) omtaler gjett og sjekk som en klar mulighet til å utvikle ideene til algebra. Funnene i Johanning sin studie antyder viktigheten i å se nøye på elevenes systematikk og resonnering under gjett og sjekk.

2.3.4 Hjelpetegning

Det er et bredt spekter med forskning på effekten av hjelpetegninger innenfor problemløsning. Flere empiriske studier viser at bruken av en slik representasjon kan resultere i en positiv effekt på problemløsningsytelsen hos eleven. Van Essen & Hamaker (1990), Zahner & Corter (2010) og Rellensmann et al. (2016) har funnet en positiv effekt på problemløsning i matematikk ved bruk av hjelpetegninger. Faktorer som påvirker verdien av hjelpetegninger, inkluderer blant annet vanskelighetsgrad av oppgaven og elevens alder. Van Essen og Hamaker (1990) oppfattet at hjelpetegningen bidro positivt blant elever på femte trinn, men ikke for yngre elever som for eksempel første eller andre trinn. Dette kan tyde på at utnyttelsen av en slik representasjon avhenger av hvilke vanskeligheter elevene møter under problemløsningen.

3. Metode

I dette kapittelet beskriver vi metodene som er brukt til innsamling, bearbeidelse og analyse av empiri. Vi har brukt observasjon og intervju som datainnsamlingsmetoder. Majoriteten av resultatene våre er hentet fra intervjuene.

3.1 Metodisk tilnærming

Formålet med dette prosjektet er å se på hvordan algebraisk tenkning og forståelse for ekvivalens, uttrykk og likninger kommer til syne når elever på 7.trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger. For å oppnå dette har vi valgt å ta i bruk kvalitativ forskningsmetode. Det vil si at det vil bli tatt utgangspunkt i at virkeligheten er noe som konstrueres og skapes av oss som forskere og personene som deltar i studien.

Nøkkelen til å forstå kvalitativ forskning ligger i ideen om at mening er konstruert sosialt av enkeltmennesker i sin verden (Postholm & Jacobsen, 2018). Forståelsen og konstruksjonen av denne virkeligheten er i stadig endring. Derfor vil denne typen forskning legge et prosessperspektiv på virkeligheten. Det vil si at forskningen vil vise perspektiver fra en spesifikk tid og den vil vise hvordan virkeligheten så ut der og da. Vi vil derfor forsøke å løfte frem meningen elevene har konstruert i samsvar med sitt syn på verden og sine egne erfaringer. På denne måten vil vi prøve å rette oppmerksomheten mot elevenes perspektiv på virkeligheten og hvordan dette samspiller med våre perspektiv. Kvantitative forskere ser derimot på virkeligheten som objektiv. Det vil si at den befinner seg utenfor den enkelte person og forsker. Her vil man ha et større antall deltagere og se på større fenomener.

Forskningsspørsmålet er kjernen i denne studien. Dette har vi forsøkt å svare på ved hjelp av observasjoner og intervjuer i samsvar med det teoretiske rammeverket vårt og tidligere forskning. Vi har først observert deltagerne i klasserommet ved utførelse av undervisningsopplegget. Dette datamaterialet har så blitt brukt for å se på hvordan klassen er og hvordan deltagerne våre fremtrer i klassen. Dette er med på å skape kontekst til datamaterialet vårt. Deretter intervjuet vi tre av elevene hver for seg. Intervjuene er datamaterialet vi henter ut funnene våre fra i resultatkapitlet.

Interpretivisme er et begrep i epistemologien som er i stor kontrast til positivismen. Dette er en epistemologi der forskere mener at konteksten har spiller en rolle under gjennomførelsen av forskning. En viktig del av å forske på mennesker er å få tilgang til deres tanker angående sunn fornuft og hvordan de handler i hverdagen fra deres perspektiv (Bryman, 2012). I oppgaven vår er konteksten før og under intervjuene en viktig del av analysen vår. Vi ser på resultatene våre og sammenligner disse med det teoretiske rammeverket. I studien har vi tatt på våre briller for å se på verden, og oppgaven vil bære preg av dette. Samtidig er vi klar over at andre forskere kan se på forskningen annerledes.

Vi har valgt å gjøre en kvalitativ multiple case-studie. En case-studie er en detaljert analyse av en case (Bryman, 2012). Vi har gjennomført en detaljert analyse av tre caser. En multiple case-studie gir oss muligheten til å gå i dybden på deltagernes arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk. Vårt mål er at forskningen skal være en representativ eller eksemplifiserende case. Dette vil si at casen/casene velges fordi de symboliserer en bred kategori (Yin, 2009). Vi har forsøkt å representere et utvalg av en typisk mellomtrinns klasse.

3.2 Observasjon og intervju som datainnsamlingsverktøy

En viktig del av datainnsamlingen vår har vært å innhente data gjennom observasjon i klasserommet. Som Bryman (2012) sier er observasjon at man som observatør/forsker tar del i en gruppe over en lengre periode. Her observerer man oppførsel, hører på hva som blir sagt mellom deltagerne og stiller spørsmål. Alt dette gjorde vi i klassen på 7.trinn som jobbet med vår ALTA.

Bryman (2012) sier at enkelte forskere vil hevde at et mer dekkende begrep for det som ble gjort i forskningsfeltet ville være etnografi. Dette er begrunnet med at observasjon ofte ble simplifisert med at man bare observerte. Om man ser på seg selv som en etnograf vil man også hente data fra intervjuer, dokumenter og oppgaver. I tillegg legger en også til rette for å studere kulturen i klasserommet og får dermed utviklet en bedre kontekst som kan bidra til bedre validitet i resultat og analysedelen. Siden vår master ikke gir oss mulighet til å følge klassen over en lengre periode har vi anvendt det Bryman har beskrevet som micro-etnografi. Under våre observasjoner og intervjuer har vi fokusert på et avgrenset og spesifikt tema.

Vi valgte å ta rollen "observatør som deltager". Da var vi først og fremst med som observatører, og var ikke involvert i aktiviteten vi observerte. Ved å velge denne rollen fikk vi mulighet til å svare vennlig på spørsmål som ikke omhandlet aktiviteten, noe som gjorde at vi kunne skape en god relasjon til elevene. Fikk vi spørsmål som handlet om aktiviteten måtte vi be dem henvende seg til læreren. På den måten ble vi ikke en del av prosessen som ble observert (Postholm & Jacobsen,2018).

Når vi var ute i praksisfeltet var det viktig at vi som forskere passet på å holde oss nøytrale og ikke bli helt slukt opp i det og de som studeres (Bryman, 2012). I og med at vi ikke var i praksisfeltet over en lengre periode, ble ikke dette noe problem.

Sammen med observasjon, er kvalitative intervjuer de hyppigst brukte strategiene i kvalitativ forskning (Bryman, 2012). Det er fleksibiliteten i bruk av intervju som metode som gjør det så attraktivt å bruke. Det er tre forskjellige typer intervju, ustrukturert, semi-strukturert og strukturert. I kvalitativ forskning er det vanligst å bruke semi-strukturert eller ustrukturert.

Det er oss som forskere som leder intervjuet. Dette gjør vi med utgangspunkt i forskningsspørsmålene våre. Intervjuer kan i disse dager både være ansikt til ansikt eller det kan foregå over telefon og internett. Våre intervju ble utført ansikt til ansikt på skolen til intervjuobjektene. Ved å velge kvalitativt intervju har vi mulighet til å gå i dybden og forstå elevenes tanker og strategier. Siden vi gjennomførte intervjuene på deres skole, var dette et egnet miljø som la til rette for trygge rammer for deltagerne.

Målet for denne studien er å se på hvordan algebraisk tenkning og forståelse kommer til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7.trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger. For å nå dette målet vil det være hensiktsmessig å gjennomføre et oppgavebasert intervju. Et slikt intervju er en god metode innenfor kvalitativ forskning da det gir oss innsikt i deltagernes tanker og resonnement i arbeidet med oppgavene (Goldin, 1997). Denne tilnærmingen gjør det mulig å vektlegge arbeidet og prosessen involvert, ikke bare resultatene (Goldin, 2000). Dette er vesentlig for å utforske problemløsning i matematikken.

Vi har valgt å ta i bruk et semistrukturert intervju som metode for innhenting av data. Denne formen for intervju har som målsetting å forstå elevenes perspektiver (Bryman, 2012). I et slikt intervju skapes kunnskap i møte mellom oss som forskere og elevene. Fordelen med å velge dette er at det gir oss muligheten til å være fleksible da vi kan lage vår egen intervjuguide med spørsmål og oppgaver. Intervjuguiden var et utgangspunkt for intervjuet. Spørsmålene trenger ikke komme i samme rekkefølge som de står i intervjuguiden og spørsmålene kan omformuleres. I tillegg kan nye spørsmål legges til dersom vi som intervjuere kommer på noe nytt i løpet av intervjuet. I og med at studien hadde flere deltagere og dermed gjennomførte flere intervjuer, måtte vi likevel gjennomføre intervjuene relativt likt. De fleste spørsmålene i intervjuguiden ble stilt til alle deltagerne, men de ble stilt i ulik rekkefølge og formulert på ulike måter tilpasset den enkelte deltageren.

Vi antar det ville blitt statisk og ikke virkelighetsnært om det ble valgt et strukturert intervju. Bryman (2012) sier at et semistrukturert intervju er bra for å være sikker på at en får et genuint innblikk i hvordan deltagerne ser ting gjennom sine egne øyne. Vi har et spesifikt tema vi vil forske på, og derfor vil denne intervjuformen gi oss den beste muligheten til å finne resultater som er i relasjon til temaet vårt. Da vi er to forskere som skal være med under gjennomførelsen av intervjuet og observasjonene nevner Bryman at semi-strukturert intervju er formen som passer best for oss. Da det blir sett på tre forskjellige deltageres arbeid med algebra, er prosjektet vårt en multiple-case studie. Bryman mener at man vil ha god nytte av semistrukturerte intervjuer i en slik studie.

3.2.1 Utvelgelse av deltagere

Kvalitative metoder kjennetegnes av ønsket om å innhente informasjon om et begrenset antall individer (Bryman, 2012). For å oppnå dette på optimal måte har vi valgt å benytte oss av observasjon i klasserommet og et oppgavebasert intervju med deltagerne våre. Videre er det blitt valgt ut tre deltagere. For å skape et bra utvalg har vi samarbeidet med læreren i klassen til elevene. Det var viktig for oss at elevene engasjerte seg i undervisningsopplegget. Under datainnsamlingen var det flere elever som svarte nei på skjema om å være med i prosjektet. I samråd med lærer valgte vi ut 5-6 elever som kunne være gode deltagere. Fire av disse elevene var positive til å være med som deltager. Videre valgte vi ut tre av disse til intervju. Oppgaven vil ta utgangspunkt i disse tre deltagerne.

3.3 Transkripsjon

Transkripsjonene våre ble gjort i kort tid etter intervjuene ble gjennomført. Vi gjorde transkripsjonene selv, da vi som forskere gjør analyser underveis i dette arbeidet. I første omgang ble intervjuene grovtranskribert. Da skrev vi ned det elevene sa og forklarte uten å legge til bilder og beskrivelser. Hver linje ble nummerert for å lettere kunne henvise til transkripsjonene i analysen. Videre valgte vi ut de delene av transkripsjonen som skulle brukes som funn. Funnene skulle så analyseres. Disse delene av intervjuet ble grundigere transkribert. Her ble det satt inn hjelpetegninger og utklipp fra Excel. I tillegg la vi til beskrivelser av situasjonene ved hjelp av klammeparenteser.

3.4 Dataanalyse

Studien vår vil i hovedsak ta i bruk en deduktiv analysemetode. Vi har lest mye teori og tidligere forskning i forkant av gjennomførelsen av datainnsamlingen, og ut ifra dette har det blitt formet et teoretisk rammeverk som utgangspunkt for analysen av resultatene. Her har vi definert algebra i skolen og algebraisk tenkning i arbeid med ekvivalens, uttrykk og likninger.

I denne studien har vi tatt utgangspunkt i tre elever i en klasse på 7.trinn. Vi er med i en større prosjektgruppe som lager ALTAs (Undervisningsopplegg for bedre undervisning i algebra).

Vi var en del av dette prosjektet i en to ukers periode. Gjennom disse to ukene ble det samlet data fra seks etterfølgende undervisningstimer i et klasserom som jobber med en ALTA utviklet for sitt trinn. Dette inkluderte videoopptak i tre av øktene. Disse timene ble tatt opp med kamera og det ble dermed mulighet til å se gjennom timene i etterkant. Rollen vår under observasjonen var delvis deltagende observatør i klasserommet.

Hensikten ved en kvalitativ analysemetode er å sortere den dataen som er samlet inn. Dette er for å gjøre materialet leselig og forståelig for mottakerne våre. Denne delen av analysen handler om å lete etter mønster for å kunne samle materialet i kategorier. Vi har valgt å kategorisere funnene våre til hver enkelt deltager, og innad i hvert kapittel har funnene blitt kategorisert etter oppgavene fra intervjuet. I slutten av hvert kapittel har funnene blitt oppsummert. Vi har brukt det teoretiske rammeverket vårt for å analysere funnene våre. Her er noen eksempler på hvordan vi har sett på funnene i lys av teorien:

*Ser man på hvordan Amalie har plassert pilene, så kan man se at hun skaper en likhet mellom alle boksene. F+1000=S, og S*2=M. Dette viser at hun forstår betydningen av likhetstegnet, og identifiserer det som et uttrykk for en relasjon mellom størrelser.*

Denne metoden viser også at hun har et fokus på forholdene i oppgaven og ikke bare beregningen av et numerisk svar.

I diskusjonen har funnene blitt kategorisert etter tema. Disse er: hjelpetegningens rolle i problemløsningen, hvordan oppfattes elevers arbeid i regneark i form av algebraisk tenkning, funksjonen til gjett og sjekk under oppgaveløsningen, forståelse av likhetstegnet og resonnering med uttrykk og likninger i deres symbolske form. I denne delen av oppgaven har funnene blitt diskutert og sammenlignet med tidligere forskning, samt sett på mulige alternative tolkninger.

3.5 Studiens validitet og reliabilitet

Forskning er både en prosess og et resultat (Postholm & Jacobsen, 2018). Prosessen vi har gjennomgått har involvert integrering av et forskningsspørsmål etterfulgt av en grundig analyse av empirisk data. Det essensielle kjennetegnet ved god forskning, er at den presenterer kunnskap. Kunnskapen skal bli sett som nyttig over tid. Vi betrakter forskning som en kontinuerlig prosess som avdekker og forstår deler av virkeligheten, og dermed utvide vår egen og andres kunnskap.

Forskningens kvalitet er ikke utelukkende knyttet til det resultatet vi kommer frem til (Postholm & Jacobsen, 2018). Vi kan få et resultat som er representativt til vår studie i år, men det kan bli utfordret av andre forskere i fremtiden som har ny kunnskap og andre metoder og perspektiver. Dermed er det viktig at vi vet at kvalitet på forskning handler om hvordan kunnskapen og resultatene er produsert. Vi som forskere må derfor kritisk kunne beskrive hvordan kunnskapen i oppgaven vår er konstruert. Kunnskapen som vi presenterer i teksten, er ofte kalt "funn". Funnene er vår oppfatning. Denne er utviklet i situasjoner og settinger som er studert. Disse situasjonene og settingene er begrenset til vårt forskningsspørsmål. Denne kunnskapen er kontekstuell, da den er konstruert med utgangspunkt i møte mellom oss som forskere og den konkrete settingen til forskningen. Derfor er ikke forskningen vår en søken etter objektiv, universell kunnskap.

I vitenskapelig arbeid er det avgjørende å være bevisst på studiens validitet og reliabilitet (Postholm & Jacobsen, 2018). Validiteten i en studie viser hvilke konklusjoner forskere har dekning for å trekke ut fra de data som er samlet inn. Validitet kan videre deles inn i ytre- og indre validitet. Indre validitet dreier seg hovedsakelig om to forhold. Det ene er i hvilken grad det er samsvar mellom den virkeligheten som analyseres, og begrepene og teorien som brukes for å beskrive den. Det andre forholdet dreier seg om hvilken grad av grunnlag vi har for å uttale oss om kausaliteten i studien.

Det er blitt produsert et teoretisk rammeverk som definerer hvordan vi ser på algebra i skolen og hva som er algebraisk tenkning i konteksten vår. I disse definisjonene bruker vi en rekke begreper som hjelper oss til å beskrive og analysere casene.

Ytre validitet angår evnen til å være stand til å overføre og generalisere funnene (Postholm & Jacobsen, 2018). Målet for denne studien var ikke å generalisere konklusjonene våre om algebraisk tenkning og forståelse for ekvivalens, utrykk og likninger. I stedet er formålet å gå dypt inn i casene med fokus på deltagerne sin algebraiske tenkning og forståelse for ekvivalens, uttrykk og likninger.

Reliabiliteten i en studie refererer til hvordan forskeren og undersøkelsen kan ha påvirket resultatet i studien (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er av stor betydning for oss som forskere å reflektere rundt dette. For å kunne gjøre en slik refleksjon er en avhengig av at vi som forskere selv reflekterer over påvirkningen vår. Derfor har vi gjennomført forskningsprosessen på en transparent og synlig måte, noe som gjør det mulig for andre å reflektere over den. Det vil si at vi må være oppmerksomme på vår egen subjektivitet. Det finnes flere faktorer som vi må kunne beskrive for oss selv og andre: relasjonen mellom forsker og forskningsdeltageren, koblingen mellom problemstillingen og forskningsdeltageren, forskningens kontekst, hvem har vi ikke fått tak i og har vi fått registrert alt det viktigste.

I starten av datainnsamlingsperioden ble det gjennomført observasjoner i klassen som gjennomførte undervisningsopplegget. Vi observerte som "observatør som deltager", det vil si at vi var i klasserommet og observerte, men vi snakket lite med elevene og hjalp ikke til med spørsmål som angikk undervisningen. Disse observasjonene brukte vi for å få et innblikk i hvordan elevene var i klasserommet og for å kunne velge ut deltagere til intervjuene. Problemstillingen vår passet bra til deltagerne våre. De var på riktig alder og de viste engasjement rundt undervisningsopplegget. Under resultat og analysedelen av prosjektet har vi vært svært nøye på å vise til konteksten rundt datainnsamlingen. Det vi oppdaget under observasjonen var at læreren forklarte alt elevene skulle gjøre. Det var lite rom for frihet og egen tenkning. Derfor løste de fleste elevene oppgavene på samme måte og med samme fremgangsmåte som læreren hadde vist dem. Dette var en viktig del av konteksten. Vi brukte film- og lydopptak under observasjonene våre og det ble tatt opp lyd under intervjuene. Dette er med på å øke sjansen for at vi har fått med de viktigste resultatene. Samtidig er vi fullt klar over at dette er de resultatene vi syns er viktigst for vårt forskningsspørsmål. Andre forskere kunne lagt mer vekt på andre resultater.

3.6 Etiske betraktninger

Studien vår berører både oss, lærere, elever og deltagerne våre. Dette medfører at det forekommer en rekke etiske spørsmål vi må håndtere i møte med forskningsdeltagerne. Diener & Crandall (1978) har nevnt fire hovedområder en må tenke på når en gjennomfører et forskningsprosjekt: Kan forskningen skade deltagerne på noen måte? Er det informert samtykke? Er det noen form for invasjon av privatlivet? Blir forskningen framstilt på en representativ måte?

For å passe på at ikke noe av dette skjedde var det viktig at studien vår foregikk i trygge rammer. Det var viktig for oss at alle som deltok i studien hadde full oversikt over studiens hensikt og deres rettigheter. Det ble tatt i bruk både film- og lydopptak under datainnsamlingsperioden. Ved bruk av film- og lydopptak er det viktig at vi tenker gjennom hva slags konsekvenser publisering av disse funnene kan ha for deltagerne. Alle opptak ble tatt rett over på datamaskinen og slettet fra kamera/lydopptaker etter hver time. Da vår forskning er en del av et større prosjekt vil ikke film- og lydopptakene slettes før etter prosjektet er gjennomført. Vi vil bare ta i bruk transkripsjonene våre som funn i oppgaven, verken lydklipp eller filmopptak vil være tilgjengelig for andre enn deltagerne i prosjektet.

I forkant av prosjektet, ble et samtykkeskjema sendt ut til foreldre og foresatte. tte inneholdt informasjon om prosjektet: formålet, hvem som leder prosjektet, hvorfor de får spørsmål om å delta, hva det betyr for de å delta, at det er frivillig å delta, hvordan vi oppbevarer og bruker innsamlet data, deltagernes rettigheter, hva som gir oss rett til å samle inn personidentifiserende data og hvor de kan finne mer informasjon. Alle elevene som deltok i studien, har levert samtykker fra foresatte.

Da vår studie innebar å behandle personopplysninger, var vi pliktige til å melde prosjektet til NSD. Studien vår er som tidligere nevnt en del av et større forskningsprosjekt på UIA. Derfor søkte lederne av prosjektet til NSD og sendte ut informasjonsskriv og samtykkeerklæring til elevene og deres foresatte. Prosjektet fikk tillatelse. Dette betyr at prosjektet og forskningen vår er vurdert til behandling av personopplysninger i samsvar med regelverk om personvern.

3.7 Anonymisering

Vi har valgt å gi elevene fiktive navn. Dette er for at ingen individer skal kunne bli gjenkjent og det vil være mer konkret for leserne når man henviser til dem videre i oppgaven. Dette kan føre til at leserne blir mer kjent med deltagerne som henvises til i teksten. Alternativet var å gi dem navn som “deltager 1” etc.

Tabell 1. Anonymisering av deltagere

Elev 1	Elev 2	Elev 3
Morten	Amalie	Janne

3.8 Introduksjon av deltagerne

3.8.1 Morten

Ut ifra observasjonene i klasserommet legger man fort merke til at Morten er en aktiv og pliktoppfyllende elev. Han engasjerer seg i undervisningen og gjør som regel det han får beskjed om. Han er aktiv i undervisningen under observasjonen og svarer ofte på matematiske spørsmål foran klassen. Samtidig kan det virke som Morten har litt dårlig selvtillit når det kommer til matematikk.

3.8.2 Amalie

Vi opplever Amalie som en flittig og pliktoppfyllende elev. Hun engasjerer seg aktivt i undervisningen og bidrar til et godt læringsmiljø for resten av klassen. Hun fremstår som faglig sterk og interessert i faget.

3.8.3 Janne

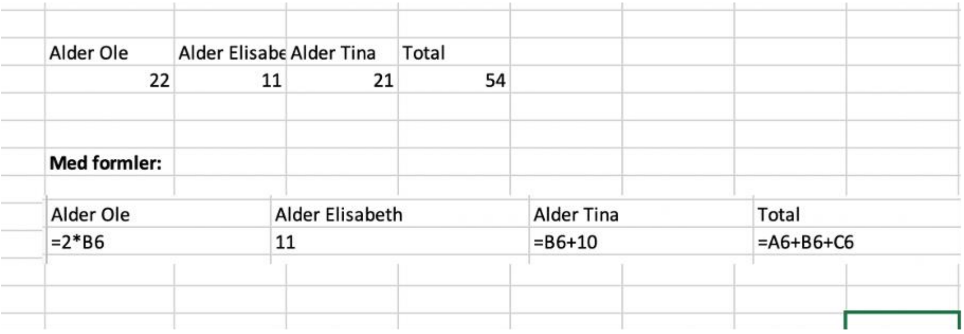
Janne er en elev som ikke deltar i undervisningen i like stor grad som de øvrige deltagerne. Hun virker mindre fokusert og har en tendens til å bruke tiden til andre ting enn matematikk, som for eksempel å tegne. Til tross for manglende interesse virker det som hun innehar en viss kompetanse i faget.

3.9 Oppgaver fra undervisningsopplegget

Under innsamlingen av data ble elevene presentert for et nytt emne. Undervisningen utfordret elevene med en rekke problemløsningsoppgaver. Under viser til hvilke oppgaver elevene arbeidet med i vilkårlig rekkefølge.

Alder på søsken:

> Tre søsken er til sammen 54 år. Ole er dobbelt så gammel som Elisabeth. Tina er 10 år eldre enn Elisabeth. Hva er alderen på hver av disse tre?



Alder Ole	Alder Elisabe	Alder Tina	Total
22	11	21	54

Med formler:

Alder Ole	Alder Elisabeth	Alder Tina	Total
=2*B6	11	=B6+10	=A6+B6+C6

Figur 1. Alder på søsken - eksempel i Excel.

Klatreparken:

> Eirik skal på et klatresenter på fredag lørdag og søndag, han betaler 800 kr totalt. I helga er det dobbelt så dyrt som på ukedager og på søndag må man i tillegg betale 50 kr for en klatresele. Hvor mye koster de forskjellige dagene?

Klinkekuler:

> Tre barn leker med klinkekuler. Truls har dobbelt så mange som Trine og Alf har 3 ganger flere enn Truls. Til sammen har de 198 klinkekuler. Hvor mange klinkekuler har de til sammen?

Kornsilo:

> Gundersen, Hansen og Berg maler en kornsilo med en overflate 3000 m^2. Gundersen maler 600 m^2 mer enn Hansen. Berg maler 300 m^2 mer enn Gundersen. Hvor stor overflate maler Hansen?

Sport:

> På en skole er det 380 elever. Det er 3 ganger så mange elever som går på fotball enn de som går på håndball. Det er 35 flere elever som går på håndball enn svømming. Hvor mange elever holder på med de forskjellige aktivitetene?

3.10 Introduksjon av oppgaver fra intervjuet

Under gjennomførelsen av prosjektet ble det i klasserommet jobbet med ulike algebraiske oppgaver. Bell (1996) konstaterer at læring basert på mulighetene i matematikken bør være sentrert rundt utforskning av problemer. Oppgavene i intervjuet vil derfor basere seg rundt utforskning av problemer, disse var av kategorien problemer med ulik deling. Problemene åpnet opp for egen tenkning, og krever en høyere grad av mental aktivitet (Stein et al., 2000). Dette var oppgaver som kunne løses ved hjelp av forskjellige metoder. I klassen vi observerte ble elevene bedt om å bruke hjelpetegning for å få en struktur på oppgaven og deretter regneark (Excel) for å løse den. Det er en viktig del av konteksten under analyse- og drøfting av resultatene. Vi vil kort introdusere oppgavene og våre tanker rundt disse vil danne grunnlag for resultatene fra intervjuene.

3.10.1 Oppgave 1 – Pris på mobiltelefoner del en

Denne oppgaven er blitt konstruert på samme måte som oppgavene elevene arbeidet med under undervisningen i klasserommet. Det vil si at elevene har kjennskap til denne typen oppgave fra før av. Tall, forhold og tema er endret

Oppgaven:

> Mohammed, Silje og Fredrik har alle kjøpt seg ny mobil. Til sammen betalte de 20000. Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin. Mohammed sin mobil kostet dobbelt så mye som Silje sin. Hvor mye kostet hver enkelt mobil?

Den første oppgaven deltagerne fikk under intervjuet var en problemløsningsoppgave. Oppgaven sammen med konteksten la til rette for at oppgaven kunne løses med en algebraisk tenkemåte og ved hjelp av gjett og sjekk strategien. Konteksten er som tidligere nevnt at de har løst oppgaver av lignende natur og fått en innføring i hvordan oppgavene kan løses av lærer. Rojano (1996) sier at bruken av strategier som gjett og sjekk og andre uformelle strategier er en viktig del av grunnlaget for metoder og strategier for å skape algebraisk tenkning hos elevene. Rojano gjorde også forsøk med lignende oppgaver. Hun skriver at det er mange studier som indikerer at elever har stor sannsynlighet for å bruke den "før-algebraiske" prosessen når de møter slike oppgaver. I vår oppgave hadde elevene fått innføring i hvordan de kunne løse slike oppgaver ved hjelp av regneark. Denne strategien skriver Rojano at er en algebraisk metode for å løse oppgaven, da den la opp til at en skulle ta utgangspunkt i det ukjente og jobbe seg til det kjente. Det ble tatt i bruk regneark som hjelpemiddel for å få elevene til å benytte seg av en ofte kjent og intuitiv gjett og sjekk metode. Ved å bruke regneark til å løse oppgaver med gjett og sjekk, kunne oppmerksomheten rettes mot problemets forhold. På denne måten slapp elevene å bruke tid på å regne ut for hånd.

3.10.2 Oppgave 2 – Pris på mobiltelefoner del to

Denne oppgaven er av samme form som de oppgavene elevene har kjennskap til. Her brukes samme problemstilling og personer, men forholdene mellom prisene er ulik fra den første oppgaven.

Oppgaven:

> Mohammed, Silje og Fredrik har alle kjøpt seg ny mobil. Til sammen betalte de 20000 kr. Fredrik sin kostet 1250 kr mer enn Silje sin. Mohammed sin mobil kostet halvparten så mye som Fredrik sin. Hvor mye kostet hver enkelt mobil?

Den andre oppgaven var tilnærmet lik den første, med noen justeringer. Forholdet mellom pris på hver person sin mobil var endret og deltagerne ble utfordret ytterligere om sin algebraiske kompetanse. Kieran (2004) sier det at et større fokus på forhold og ikke kun på numerisk kalkulasjon av et svar vil hjelpe elever mot algebraisk tenkning. Observasjoner fra klassen gjorde oss oppmerksomme på at elever lærer seg prosedyrer og fremgangsmetoder, og samtidig tar det for gitt at disse gjelder for neste oppgave. Derfor er en endring i forhold aktuell for å se om deltagerne kan endre sine fremgangsmetoder som passer til lignende oppgaver.

3.10.3 Oppgave 3 - Likningen

Den siste oppgaven deltagerne fikk under intervjuet var en likning. Denne likningen var problemet i oppgave 1 satt opp som en likning. Dette var for å se om deltagerne så denne sammenhengen, og for å få et innblikk i elevenes kunnskap om likninger og hva de skjønte om generalisering. Klarte deltagerne å se at problemene i oppgave 1 og oppgave 2 bare inneholdt en ukjent? Er det noen sammenheng mellom de som løste oppgave 1 og 2 og hva slags oppfattelse av likningen de innehar?

Oppgaven:

Hva tenker du når du ser denne likningen og kan du reflektere rundt den?

X+(X-1000)+2X=20000

Den tredje oppgaven var en oppgave som ble tatt med på slutten av intervjuet for å se om elevene kjente igjen likningen som representerte den første oppgaven. Kieran (2004) introduserte fem punkter som kan utvikle elevers kompetanse fra en aritmetisk til algebraisk tenkning. Hun sier blant annet det at elevene bør fokusere mer på forholdet i oppgaven og ikke kun være i stand til å løse den. Kieran (2004) får også frem det at et fokus på både tall og bokstaver fremfor kun tall vil være fordelaktig i utviklingen mot en algebraiske tenkning. Denne oppgaven vil i all hovedsak dreie seg om det algebraiske språket og hvorvidt eleven benytter algebraisk tenkning. Kaput (1998) vektlegger språket som en av hovedområdet innenfor algebraisk tenkning. Elevgruppen i vår studie er i det tidlige løpet av algebra i skolen, men ifølge Kaput (1998) så er det ønskelig å starte med algebra så tidlig som mulig. Har elevene kjennskap til slike oppgaver av algebraisk form, kan de i fremtiden dra nytte av slik forkunnskap. Før gjennomføringen av intervjuet var vi ikke kjent med deltagernes kompetansenivå om likninger.

4. Resultater

I dette kapittelet vil resultater fra de oppgavebaserte intervjuene legges frem. Innledningsvis vil det bli presentert forskningsspørsmålet oppgaven forsøksvis ønsker å svare på. Videre vil en fremvisning av våre resultater i denne forskningen vise til momenter vi anser som interessante. I resultatene blir det lagt vekt på hvordan deltagerne opptrer i intervjuet og hva som kommer frem. Her har vi valgt å svare for hver enkelt deltager, og kategorisert funnene etter oppgaver. Avslutningsvis vil vi forsøke å konstruere en enkeltvis oppsummering av resultatene.

Resultatene som fremvises skal bidra til å besvare problemstillingen. I starten av dette studiet stilles følgende forskningsspørsmål:

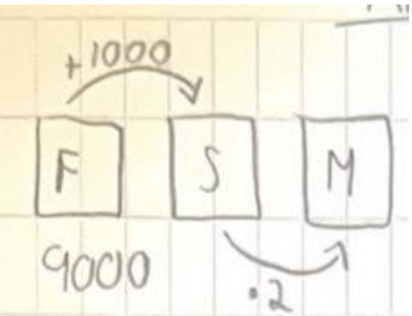
- *Hvordan kommer algebraisk tenkning og forståelse for begreper til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7. trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger?*

4.1 Amalie

Formålet med intervjuet ble fremvist og eleven fremstod underforstått med hva som skulle foregå under oppgaveløsningen. Resultater som anses som relevante for problemstillingen vil bli vektlagt.

4.1.1 Oppgave 1

I spørsmål om hva Amalie tenker i sitt møte med den første oppgaven sa hun: "Mmm, den ser grei ut" (16.). Videre ble hun stilt spørsmålet om hvordan hun ønsket å starte arbeidet med oppgaven. Hun responderte med en tilnærming som innebar en hjelpetegning i form av tre firkanter. Samtalen kan tyde på at Amalie har en klar tanke angående hvordan hun skal ta fatt på oppgaven. Videre lagde hun hjelpetegningen.



Figur 2. Amalie - hjelpetegning fra oppgave 1

Deretter sier Amalie følgende i konstruksjonen av hjelpetegningen:

22. Sondre: Hvem er det du tar utgangspunkt i her?
23. Amalie: Jeg tegner Fredrik først så Silje og så Mohammed. Og her skal jeg liksom ta pluss tusen og så ja.
24. Jon Martin: Er det en grunn til at du velger å ta Fredrik først?
25. Amalie: Han betaler minst.
26. Jon Martin: Ja, ok.
27. Sondre: Vil du fortsette?
28. Amalie: Ja, det kan jeg.
29. Sondre: Hvorfor er det greit at den du tar utgangspunkt i har minst?
30. Amalie: For da er det enklere å regne.
31. Jon Martin: Og da har du skrevet at?
32. Amalie: At jeg skal plusse på tusen på Silje og doble Silje sin for å få Mohammed sin.

I møtet med problemet konstruerte Amalie en hjelpetegning ved hjelp av tre bokser som representerer de ulike personene i oppgaven. I figur 2 har Amalie presentert forholdet mellom dem ved hjelp av piler med gitte forhold. Det fremstår som at Amalie har en tanke angående hva hun velger å gjøre og hvorfor. Amalie valgte å ta i bruk hjelpetegning for å konkretisere problemet. Hjelpetegningen viser at Amalie plasserer de ulike personene ut ifra hvilken som er "lettest" å ta utgangspunkt i. Boksene har heller ikke fått noen verdier, men representerer de forholdene som er oppgitt i oppgaven. Det viser at hun forstår kriteriene oppgaven, uten noen konkrete tall å gå etter.

Det kan være et tegn på at hun er i stand til å analysere strukturen for og senere være i stand til å finne verdien av variabelen. Som viser til et av Blanton et al. (2015) sine momenter som omhandler elevers forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger. Kieran (2004) sine punkter til utviklingen mot algebraisk tenkning fremkommer også i dette funnet. Henholdsvis punkt en, tre og fire er representert i form av at Amalie fokuserer på: forholdet og ikke kun beregningen av et numerisk svar, å representere og løse et problem i stedet for kun å løse det og både tall og bokstaver, ikke kun tall alene. Ser man på hvordan Amalie plasserte pilene, så kan det observeres at hun skaper en likhet mellom boksene. F+1000=S, og S*2=M. Dette kan tyde på at hun forstår betydningen av likhetstegnet, og identifiserer det som et uttrykk for en relasjon mellom størrelser.

Videre ønsket Amalie å finne frem til et svar på papir. Det ble stilt spørsmål angående hvilke tall som kunne fungere, og hvilket tall hun innledningsvis tenkte på. Responsen ble: “Det var egentlig 9000. Da blir det feil” (46). Hun prøvde ut verdien og fikk 9000, 10000 og 20000, noe som hun oppfattet som for mye. Det ble stilt et oppfølgingsspørsmål angående om hun skulle lavere eller høyere, hun mente selv at verdien måtte være lavere for å finne svaret. Derfor forsøkte hun med 2000, men ser at hun var litt unna svaret, hun velger derfor å øke neste verdi med 1000 for å nærme seg svaret.

I denne samtalen uttrykker Amalie sine første tanker angående hvordan løsningen kan være. Hun innser raskt at dette svaret ikke vil stemme, gitt forholdene og summen som oppgaven oppgir. Det kan virke som at hun allerede nå har en viss formening til hvor mye hver enkelt telefon bør koste.

I dette funnet kan det observeres at Amalie prøver å finne svaret ved hjelp av gjett og sjekk. Amalie identifiserer betydningen av likhetstegnet som uttrykker relasjonen mellom størrelsene, da hun erkjenner forholdet mellom personene i samsvar med totalen.

Amalie gikk senere over til Excel for å regne videre. Etter at hun hadde satt formlene inn i regnearket satt hun inn tallet en i Fredrik sin rute. Årsaken til dette begrunnet hun med et ønske om å dobbeltsjekke at regnearket var satt opp fornuftig.

	A	B	C	D
1	Fredrik	Silje	Mohammed	Fasit
2	1	1001	2002	3004
3				

Figur 3. Amalie - kontrollering av formler

Følgende ble sagt angående oppsettet av oppgaven i regnearket:

67. Jon Martin: Kan du fortelle mens du skriver?
68. Amalie: Ja. Jeg skriver Fredrik i A1, Silje i B1 og Mohammed i C1. Også skal jeg skrive en for å starte med, og i B2 er lik a2 pluss 1000.
69. Jon Martin: Ja, ok. For da er b2 Silje?
70. Amalie: Ja.
71. Jon Martin: Mhm.
72. Jon Martin: Og nå?

73. Amalie: der er B2 ganger 2.
74. Jon Martin: Og den siste cellen viser?
75. Amalie: Summen. Da må jeg ta a2 pluss b2 pluss c2.

Denne strategien kan tyde på at hun tar i bruk algebraisk tenkning, ettersom hun kontrollerer formlene i regnearket. Dette styrker vår antagelse fra forrige funn om at hun identifiserer betydningen av likhetstegnet, da hun bruker denne tilnærmingen for å sjekke om Silje, Mohammed og Fredrik sine sammensatte verdier tilsvarer resultatet hun får i cellen som beregner “fasiten“. Ved bruk av denne metoden kan det tyde på at hun har et fokus på forholdene i oppgaven og ikke bare beregningen av et numerisk svar. Metoden kan hjelpe Amalie til å analysere strukturen i problemet for å senere kunne finne verdien av variabelen.

Amalie har tidligere prøvd ut tallene 9000, 2000 og 3000 med penn og papir. Da så hun at verdien til Fredrik måtte være et sted mellom 3000 og 9000 for å komme frem til riktig løsning.

	A	B	C	D
1	Fredrik	Silje	Mohammed	Fasit
2	4000	5000	10000	19000
3	4500	5500	11000	21000
4	4050	5050	10100	19200
5	4075	5075	10150	19300
6	4200	5200	10400	19800
7	4300	5300	10600	20200
8	4250	5250	10500	20000

Figur 4. Amalie - utprøvde verdier under gjett og sjekk

I figur 4 presenteres hvilke tall Amalie velger å prøve ut i arbeidet med å finne løsningen. Hun følte det var naturlig å fortsette utprøvingen med 4000, før hun senere øker til 4500. Hun ser at svaret ble både for høyt og for lavt med 4000 og 4500. Påfølgende tall var som figur 4 viser: 4050, 4075, 4200, 4300 og 4250. Vi spurte Amalie deretter om hun hadde noen form for strategi eller taktikk.

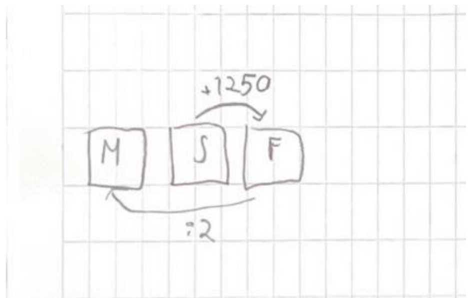
103. Jon Martin: Hadde du noe spesiell taktikk når du valgte de tallene du prøvde?

104. Amalie: Ja, jeg prøvde først å gå opp 1000 om gangen, og så se hva som er nærmest. Og så prøvde jeg å ta først halvparten av det tallet og så bare bygde jeg meg oppover eller nedover. … Om det var for høyt eller for lavt.

Her viser Amalie til sine strategier og tanker rundt gjett og sjekk. I våre observasjoner fra klasserommet var det en tilnærming som læreren anbefalte sine elever. Dette funnet viser til at Amalie analyserer strukturen i problemet, for deretter å ta i bruk gjett og sjekk for å finne verdien til Fredrik. Her forsøker hun å løse oppgaven ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i problemet som er et av Blanton et al. (2015) sine momenter innad i ideen om ekvivalens, uttrykk og likninger.

4.1.2 Oppgave 2

I den andre oppgaven hadde elevene muligheten til å velge løsningsmetode, og Amalie valgte å ta i bruk en hjelpetegning også her.



Figur 5. Amalie – hjelpetegning fra oppgave 2

Amalie har illustrert forholdet mellom de ulike personene i oppgaven i figur 5 ved hjelp av en hjelpetegning. Denne består av tre bokser og piler med gitte forhold, slik som i den første oppgaven. Samtidig har Amalie endret rekkefølgen og forholdene på hjelpetegningen for å tilpasse seg problemstillingens sammenheng. Da hun ble spurt om hvorfor, responderte hun slik:

119. Amalie: Jeg tok Mohammed først, så Silje og så Fredrik. For det var litt enklere å tegne mellom Silje og Fredrik og Fredrik og Mohammed.

120. Jon Martin: Mhm.

121. Amalie: For da kan du bare ta strek fra Fredrik til Mohammed med dele på to. Og Silje til Fredrik med pluss 1250.

Det virker som Amalie hadde en klar tanke om hvordan hun skulle tilnærme seg oppgaven. Hun oppfatter umiddelbart forholdene mellom de ulike mobiltelefonene. Det kommer klart frem i denne samtalen at Amalie er klar over hvilke valg hun tar og hvorfor hun velger disse fremfor noe annet. Kieran (2004) sitt første punkt foreslår en vektlegging på forhold og ikke kun kalkulasjonen til et numerisk svar. Denne prioriteringen av forholdet og ikke utelukkende kalkulasjonen representerer valgene Amalie tar på en god måte. Hun oppfyller henholdsvis det tredje og fjerde punktet til Kieran med at hun representerer problemet og opererer med tall og bokstaver, ikke kun tall alene. Under løsningen velger hun å ta i bruk hjelpetegningen, dette viser til momentet til Blanton et al. (2015) om å analysere strukturen i en likning for å senere være i stand til å finne verdien av variabelen.

I det øyeblikket hjelpetegningen hadde tatt form og skapt et bilde over hvordan det skulle se ut, gikk Amalie videre til Excel. Figur 6 og 7 viser oppsettet i Excel etter oppgaveløsningen.

Mohammed	Silje	Fredrik	
4250	7250	8500	20000

Figur 6. Amalie - løsning på oppgave 2 i Excel

	A	B	C	D
1				
2				
3	Mohammed	Silje	Fredrik	
4	4250	=C4-1250	=A4*2	=A4+B4+C4

Figur 7. Amalie - løsning på oppgave 2 i Excel med formler

I intervjuet kom det frem hvordan Amalie valgte å sette opp cellene.

> 134. Amalie: Uhm, jeg skriver Silje og så Fredrik og så skal jeg skrive Mohammed. Så skriver jeg en som start. Og så er det Silje sin for da.. er lik Fredrik sin minus 1250. Mohammed sin gange 2.

Vi så i hjelpetegningen fra figur 5 at hun representerte forholdet mellom Mohammed og Fredrik ved å dividere Fredrik sin verdi på to. I figur 7 vises utklippet fra Excel som viser forholdene og formlene Amalie har tatt i bruk, her velger hun å representere forholdet mellom dem ved å multiplisere Mohammed sin med to. Det samme gjelder forholdet mellom

Silje og Fredrik, i hjelpetegningen har hun tatt i bruk addisjon, og i regnearket har hun tatt i bruk subtraksjon.

Dette viser at hun forstår og har et fokus på inverser av operasjoner, og ikke bare operasjonene i seg selv. Noe som viser til et av punktene Kieran (2004) mener kan bidra til å gå fra en aritmetisk- til algebraisk tenkning.

Også i denne oppgaven benyttet Amalie muligheten til å sjekke at formlene i regnearket var stemte med forholdene i problemet, ved å sette en som verdien til Mohammed.

Bruken av gjett og sjekk er tiltredende i denne oppgaven også. Hun viser da at hun er i stand til å løse problemer med manglende verdier ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen.

4.1.3 Oppgave 3

Amalie kom frem til en løsning og viser til velveide resonneringer i oppgave 1 og oppgave 2. Et av Kaput (1998) sine hovedområder er algebraens regler. Han nevner hvilken sentral rolle det algebraiske språket spiller i matematikken. Intervjuets tredje og siste oppgave rettet søkelyset mot forståelsen til det algebraiske språket. Videre kommer det frem hva Amalie tenkte da likningen i oppgave 3 ble introdusert.

178. Jon Martin: Hva er det du umiddelbart tenker her nå?
179. Amalie: Mmm, den ser litt vanskelig ut.
180. Jon Martin: Den ser vanskelig ut?
181. Amalie: Ja.
182. Jon Martin: Hva tror du denne oppgaven handler om?
183. Amalie: Kanskje som den der eller som den? (Oppgave 1 og oppgave 2).
184. Jon Martin: Hvorfor tenker du det da?
185. Amalie: Fordi det var x minus 1000 også var det med svaret også var det tre stykker på en måte.
186. Jon Martin: Mhm, du ser at det er tre forskjellige personer?
187. Amalie: Ja.
188. Jon Martin: Klarer du å se noe forskjellig på hver enkelt av de tre?

189. Amalie: Mmm, nei.

190. Jon Martin: Hva skal det bli til sammen da?

191. Amalie: mm, 20000. så det er det samme svaret.

192. Jon Martin: Samme svaret?

193. Amalie: Ja

194. Jon Martin: Som?

195. Amalie: Begge.

Amalie resonnerte seg frem til at likningen kunne forbindes med en av de første oppgavene. Hun påpeker at likningen involverer tre individuelle personer og at svaret blir det samme som tidligere. Og etter en samtale angående likningen spurte vi om hun så noe felles i leddene.

196. Sondre: Ser du noe felles i hvert ledd? mellom pluss og pluss.

197. Amalie: Ja

198. Sondre: Hva er det?

199. Amalie: X

200. Sondre: Ja

201. Amalie: Bare at den til høyre har 2x og den ene har en x.

202. Sondre: Men alle inneholder x?

203 Amalie: Ja.

Amalie identifiserer at likningen inneholder tre forskjellige verdier og at det sannsynligvis er prisen Silje, Mohammed og Fredrik betaler. Dette kan tyde på at Amalie tolker likningen i sammenheng med problemet. Hun antyder at x sannsynligvis er prisen for den ene telefonen og de andre har en sammenheng med variabelen x. Hun demonstrerer en formening om hvilke deler av likningen som representerer de individuelle verdiene i oppgaven. Amalie kan med dette ha et fokus på at både tallene og bokstavene i likningen er relevante. Noe som Kieran (2004) trekker frem som verdifullt i veien mot algebraisk tenkning.

4.1.4 Oppsummering av Amalie

Analysen av oppgaveløsningen indikerer at Amalie oppfyller en rekke punkter Kieran (2004) vektlegger i utviklingen mot algebraisk tenkning. Dette fremtrer ved at hun gjennom hele intervjuet har et fokus på: forhold og ikke bare beregning av et numerisk svar, både å representere og løse et problem i stedet for å bare løse det, og tall og bokstaver. I tillegg tar hun i bruk og viser til forståelse av inverser til operasjoner i den andre oppgaven.

Helt fra starten av intervjuet viser hun til indikasjoner av forståelse for likhetstegnets betydning. Amalie viser til at hun har skjønner hvordan formlene i Excel fungerer. Dette gjør Amalie med å teste om de er satt opp på en logisk måte, da hun setter Fredrik sin verdi som en. Hun setter opp formlene i både oppgave 1 og 2 på en fornuftig måte. Hun viser til forståelse av ekvivalens ved å sette opp den siste formelen i Excel ved å summere cellene til personene i oppgaven. Når hun testet om formlene var satt opp riktig viser Amalie at hun identifiserer betydningen av likhetstegnet som uttrykker relasjonen mellom størrelsene, ettersom hun erkjenner forholdet mellom personene i samsvar med totalen.

Vi antar at hun tar i bruk en hjelpetegning under oppgaveløsningen for å skape et bilde av relasjonene. Det kan være et tegn på at hun er kapabel til å analysere strukturen i problemet for og senere være i stand til å finne verdien av variabelen.

Under gjett og sjekk viser Amalie at hun er i stand til å analysere strukturen i problemet for å nærme seg svaret. I tillegg til dette skaper Amalie en mening om hva svaret kan være ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen.

I den siste oppgaven viser Amalie at hun er i stand til å tolke likningen i sammenheng med problemet. Hun viser at hun forstår hvilke deler av likningen som representerer individenes verdier.

4.2 Morten

Formålet med intervjuet ble fremvist og eleven fremstod underforstått med hva som skulle foregå under oppgaveløsningen. Resultater vi anser som relevante for problemstillingen vil bli vektlagt.

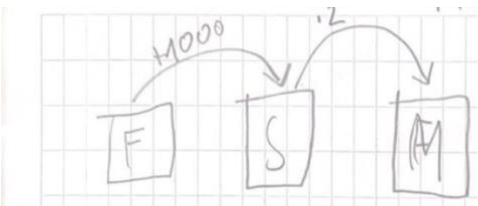
4.2.1 Oppgave 1

Morten ble fremvist den første oppgaven. Han kommenterte etter fremvisningen at Mohammed sin mobil var dobbelt så dyr som Silje sin, og at Silje sin kostet 1000 mer enn Fredrik sin. Morten ønsket å finne ut hva hver enkelt mobil kostet.

12. Morten: 20000 til sammen og det er tre personer. jeg har lyst til å ta 20000 og dele på tre, men det er hmmm, la meg se. Det ville vært 5000 for hver enkelt mobil, men Silje sin kostet 1000kr mer enn Fredrik sin og Mohammed kostet dobbelt så mye som Silje sin sååå.

Her kommer Morten sine umiddelbare tanker og refleksjoner frem. Han gjengir forholdene mellom pris til hver enkelt telefon. Morten antydet også det at summen kunne divideres på tre for å finne omtrentlig pris for hver enkelt telefon. Han forsøkte videre å se hvordan forholdene var satt opp for å se om han kunne nærme seg svaret. Dette viser at han forsøker å analysere strukturen i problemet for å finne verdien av variabelen. Noe som henviser til et av momentene Blanton et al. (2015) mener omhandler elevers forståelse av ekvivalensluttrykk og likninger. På spørsmål om hvordan Morten ønsket å løse oppgaven på papir, ønsket vi å registrere hvordan han gikk frem.

13. Sondre: Hvordan ville du begynt hvis du skulle gjort dette på ark?
14. Morten: Jeg ville lagd hjelpetegning og sett hvem som… den minste til den dyreste mobilen.



Figur 8. Morten - hjelpetegning fra oppgave 1

Morten har i figur 8 laget en hjelpetegning ved hjelp av tre bokser som representerer de ulike personene i oppgaven. Han har representert forholdet mellom dem ved hjelp av piler med gitte forhold. Legges fokuset over på hvordan pilene er plassert, så kan det observeres at han skaper en likhet mellom boksene. F+1000=S, og S*2=M. Dette viser at han forstår betydningen av likhetstegnet, og identifiserer det som et uttrykk for en relasjon mellom størrelser. Morten forsøkte innledningsvis med noen tall i hodet.

20. Morten: Da vil Silje sin.. Da ville jeg tatt Fredrik sin også plusse på eller gjort dette. Såå. også tatt pluss 1000. og da ville jeg tatt Silje sin. Ehh sånn. også ville jeg tatt gange to her. så da må jeg bare finne ut hvor mye hver enkelt mobil kostet. så hvis ja. dette kan være mange svar. det kan være 5000 for hver, det kan være andre ting. jeg er ikke så god på disse oppgavene sånn egentlig. jeg ville sikkert sagt sånn her,

men hvis kanskje Fredrik sin kostet 4000 og Silje sin kostet 5000 og Mohammed kostet 10000, da er det 19000 til sammen. Ja jeg er ikke god på matte.

Videre prøver han å resonnere seg frem til hva løsningen kan være. Han kommer frem til at Fredrik sin kan koste 4000, noe som gjør at han er nærme løsningen kun ved hjelp av hoderegning og analyse av strukturen.

Morten og Amalie har en lignende tilnærming til oppsettet av hjelpetegningen. Dette kan være et tegn til at også han er i stand til å analysere strukturen i problemet for og senere være i stand til å finne verdien av variabelen. Kieran (2004) sine punkter til utviklingen mot algebraisk tenkning fremkommer også i dette funnet. Morten fokuserer på: forholdet og ikke kun beregningen av et numerisk svar, å representere og løse et problem i stedet for kun å løse det og både tall og bokstaver, ikke kun tall alene.

Det kom senere frem i intervjuet at han ønsket å prøve seg frem i Excel uten å danne ytterlige representasjoner til mulige svar i oppgaven. Morten mener at hjelpetegningen ikke bidrar i løsningen. Morten begynte med å gi cellene navnene F, S og M. Han forteller oss at Silje sin kostet 1000 mer enn Fredrik sin, men opplever problemet som utfordrende etter dette. Han sier at "Det er mye lettere i klasserommet, jeg vet ikke hvorfor" (47). Slik utviklet denne samtalen seg.

49. Morten: Hmm. hvis jeg hadde bare visst hvor mye Fredrik sin hadde kostet hadde det vært mye lettere, men det er vanskelig.
50. Jon Martin: Trenger du å vite det i starten?
51. Morten: Jeg vet egentlig ikke, vi pleier bare å starte liksom og ta det tallet som er først også skal ta der er lik A2 pluss tusen eller pluss hvor mye vi plusser. den her er lik b2 ganger to.
52. Jon Martin: Mhm. Prøv på det da.
53. Morten: Ok. Da tar jeg 5000.
54. Sondre: Ja.
55. Morten: A2 pluss 1000. Uhm. Det blir 6000. Også er det A2 ganger 2 det blir 10000. Også total er lik A2+B2+C2. Da er det 21000.
56. Jon Martin: Mhm.
57. Morten: Hvis jeg tar her for eksempel jeg vet ikke 6000, da kan jeg være nærmere, ånei mindre.

58. Morten: 7500 siden. 19000, jeg tror hvis det er i mellom så er det . ja. Da fant jeg det ut. Da betalte Fredrik 4750, Silje 5750 og Mohammed 9500.

I starten hadde Morten problemer ettersom han føler at han må vite hva Fredrik sin kostet for å kunne finne ut av hva de andre mobilene kostet. Noe som viser til at han ikke oppfatter at det er Fredrik sin celle som er den ukjente variabelen. I det vi merker at han sitter fast kommer vi med et hint om at han kanskje ikke trenger å vite det. Det gjør at han prøver med noen tall og kommer fram til en løsning som gir totalsummen 200000. Videre spør vi om Morten kan forklare det han har gjort i de ulike cellene.

61. Morten: Ja. først så var det her jeg tok det tallet jeg trodde 5000. også gikk jeg til neste og satte er lik a2 pluss 1000. også tok jeg enter. så da plusset det på 1000 fra a2. også gikk jeg på Mohammed er lik tegnet og tok a2 gange to. ikke b2 gange 2 siden dobbelt så mye som Silje, nei vent litt. da må jeg ta.. er lik b2 ganger 2. da ville det vært litt for mye.

I forklaringen til Morten kommer det frem at cellene i regnearket ikke har de korrekte forholdene. Oppgaven sier at Mohammed sin mobiltelefon koster dobbelt så mye som Silje sin. Løsningen til Morten forteller at Mohammed sin mobiltelefon er dobbelt så dyr som Fredrik sin. Dette finner han ut ved å kontrollere løsningen på problemet, og identifiserer at forholdene i regnearket ikke samsvarer med problemet. Dette kan tyde på at han viser til et av momentene Blanton (2015) beskriver som viktig for forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger. Videre forsøkte han en rekke verdier mot en løsning.

	A	B	C	D
1	F	S	M	Total
2	4000	5000	10000	19000
3	5000	6000	12000	23000
4	6000	7000	14000	27000
5	4750	5750	11500	22000
6	3000	4000	8000	15000
7	4250	5250	10500	20000

Figur 9. Morten - utprøvde verdier under gjett og sjekk

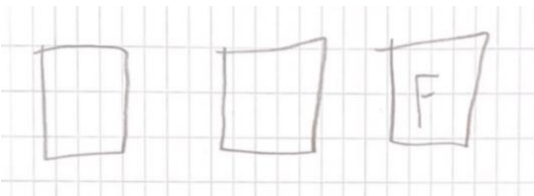
I figur 9 fremkommer hvilke tall Morten velger å prøve ut i arbeidet med å finne løsningen til oppgaven. Han følte at det var naturlig å fortsette utprøvingen med 4000, før han senere øker til 5000. Han ser ikke at svaret ble både for høyt og for lavt med 4000 og 5000. Påfølgende tall var som figur 9 viser: 6000, 4750, 3000 og 4250.

Selv om Morten ikke virker til å forstå strukturen og hva påfølgende tall bør være under gjett og sjekk, viser han å være i stand til å løse problemer med manglende verdier ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen.

4.2.2 Oppgave 2

Etter den første oppgaven presenteres Morten for den andre oppgaven, her er relasjonene endret.

80. [Eleven leser oppgaven]
81. Morten: Da ville jeg gjort på en måte det samme igjen. Så jeg vet ikke hvor mye Fredrik sin koster, så først tegner jeg opp boksene enkelt og greit.
82. Jon Martin: Mhm.
83. Morten: Hvis Fredrik sin koster mer enn Silje sin og den koster halvparten av Fredrik sin så er det Fredrik sin som koster mest. ehhmm og da er det 1250 mer enn Silje sin. Mohammed sin kostet halvparten av Fredrik sin. den kostet halvparten, da må vi finne ut hvor mye den koster for hvis halvparten er mer enn 1250 da er Mohammed sin minst, men hvis den er mindre 1250 da er Silje sin minst. og det vet jeg ikke hvordan jeg skal finne ut akkurat nå. men til sammen betalte de 20000 kr. det regnearket kunne hjulpet meg igjen. jeg tror jeg går inn på regnearket.



Figur 10. Morten - hjelpetegning fra oppgave 2

Morten forsøkte i figur 10 å konstruere en hjelpetegning, men var ikke i stand til å identifisere hvordan den skulle ta form. Han valgte derfor å gå over til Excel for videre utprøving.

85. Morten: til nå så vet vi bare at… hvis jeg hadde gjetta så er halvparten til Mohammed sin ville vært mindre sikkert enn Silje sin. for en mobil koster ikke så

mye. Mohammed sin er minst. og da ville jeg bare gjette hvor mye Mohammed sin koster. da ville jeg bare gjettet 2000.

86. Morten: Men Silje sin hvis den koster mer. Åja, Silje sin koster mer enn. Åja nå er jeg litt dum, jeg trodde det stod mindre. Ups. da bare bytter vi på den også er det.. Fredrik er her siden Silje sin koster mer. Ånei, Fredrik sin koster mer. jeg kan ikke lese i dag.
87. Sondre: Det går fint, vi har god tid
88. Morten: Så jeg leste riktig første gang ok. Så da tar jeg =a2
89. Jon Martin: På Silje?
90. Morten: Koster mer enn Silje sin. Da er det minus tror jeg, jeg vet ikke jeg har aldri gjort minus på denne. 2750. Også kostet halvparten så mye som Fredrik sin, da vil jeg ta, ville jeg tatt at =a2/2. Det ville vært 1000. Og da har jeg glemt å skrive total. Også total da er det =a2+b2+c2. Sånn da ville det vært 3750. Men så hvis det koster 20000. Da er det bare å gjette seg frem til svaret. Men, Mohammed sin koster mest nå men det er fordi at jeg tok en veldig stor pris, så hva hvis jeg tar sånn der 750. Det kan ikke være det. Da tar jeg litt høyere så da er det 5000. Bare gjetter. Da er det 11000. Oh my god hvor mye koster Mohammed sin? Men, Mohammed sin, men er det. Mohammed sin mobil koster halvparten så mye som Fredrik sin. Da er det denne her. Denne her er litt vanskelig. Vi har bare lært om liksom ganging og pluss, ikke minus og deling. Fredrik sin kostet 1000 kr mer. Mohammed sin mobil kostet halvparten så mye som Fredrik sin.

Morten hadde en klar formening om hvordan han ønsket å finne frem til svaret. Innledningsvis var det forvirring rundt hvordan forholdene mellom de ulike skulle være. Det kan ha sammenheng med at han omtrent gikk direkte til løsning i regneark, fremfor å skape et bilde ved hjelp av en hjelpetegning.

Morten opplever utfordringer med subtraksjon og divisjon. Dette begrunnes med at de tidligere ikke har vært ute for problemløsningsoppgaver som inneholder disse regneartene. Dette kan tyde på en mangel til forståelse for bruken av inverser, noe Kieran (2004) trekker frem som verdifullt i veien mot en algebraisk tenkning. Ved en senere anledning oppdager Morten at formelen til Fredrik ikke er er i samsvar med forholdene.

102. Morten: Jeg har skrive = å nei feil. [Oppdager her at han har gjort feil og retter på det) =c2 istedenfor dele på 2(c2/2].

Selv om han innser at formelen til Fredrik er feil, så har han ikke oppfattet at Silje sin heller ikke stemmer. Siden han ikke endrer på dette blir utfallet feil, men man kan fremdeles se hvordan han velger verdier under gjett og sjekk.

M	S	F	TOTAL
7000	5750	14000	26750
5000	3750	10000	18750
5750	4500	11500	21750
4750	3500	9500	17750
5350	4100	10700	20150
5150	3900	10300	19350
5160	3910	10320	19390
5400	4150	10800	20350
5100	3850	10200	19150
5225	3975	10450	19650
5335	4085	10670	20090
5275	4025	10550	19850
5315	4065	10630	20010
5310	4060	10620	19990
5320	4070	10640	20030

Figur 11. Morten - utprøvde verdier under gjett og sjekk i oppgave 2

I bruken av gjett og sjekk fremsto han som noe usikker, figur 11 viser til hvilke verdier han forsøkte. Morten starter med et tilfeldig tall og jobber seg videre med andre tall for å finne en sammenheng. Her starter han logisk med å enten forsøke et lavere eller et høyere tall basert på hvordan totalsummen til slutt blir. Senere i oppgaven virker han ikke like sikker på verken metoden eller egen kompetanse. Det er liten, eller ingen sammenheng i hvilke tall han velger å forsøke. Morten sier "Nå bare gjetter jeg mange svar liksom i midten her. Jeg føler at jeg burde ha fått svaret til nå" (120).

Selv om regnearket til Morten var satt opp feil fikk man sett på hans strategier for gjett og sjekk. I figur 11 presenteres verdiene han forsøkte, og her demonstrerer han en mer effektiv strategi sammenlignet med oppgave 1. Han forsøker å løse problemet ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen. Samtidig kan det tyde på at han tolker det algebraiske uttrykket i sammenheng med problemet feil. Dette er årsaken til at forholdene i regnearket blir feil og det fører til at det blir vanskelig å komme frem til løsningen da dette ville ført til at Mohammed sin verdi ville blitt et desimaltall.

Grunnet mangel på tid ble prioriteringen lagt mot en besvarelse av den tredje og siste oppgaven.

4.2.3 Oppgave 3

I den siste oppgaven ble Morten fremvist likningen. Han så at det kunne være en sammenheng mellom likningen og en av de tidligere oppgavene.

126. Jon Martin: Hva tenker du når du ser det?
127. Morten: Jeg føler at det er så mye de betalte for telefonen.
128. Jon Martin: Fordi?
129. Morten: Fordi, for det første svaret er 20000 også må x-1000 også +*2 også x kan være det man skal betale for telefonen. Også er det minus 1000 også skal de gange med 2 også skal det bli 20000. Det er kanskje en ny mobil oppgave. Jeg tenker at den er grei hvis det bare er sånn: en setning der det bare er sånn han og han og han eller hun og hun og hun kjøper en mobil og sånt.
130. Jon Martin: Mhm, fordi nå sa du. Hvor mange personer sa du nå at det var?
131. Morten: Tre.
132. Jon Martin: Tre? Hvor er de forskjellige tre personen i dette stykket?
133. Morten: Ehm, så x det er algebra så det kan være et svar. Da er det x pluss noe minus 1000. Så kanskje det er det svaret minus 1000 også ganger man med to på den første, så da er det tre folk.
134. Jon Martin: Ja
135. Morten. Og det har vært tre folk i de siste to oppgavene
136. Sondre: Så du mener da at x er en person, også mente du at x-1000 er en person.
137. Morten: Mm, ja sånn ja liksom litt at liksom det går fra den personen og da er det minus 1000 også går det fra den personen og da ganger du med to fra den personen.

Morten ser sammenhengen mellom likningen og de andre oppgavene. Han ser at totalen blir 20000 og at det involverer tre personer, men funderer rundt om det er en ny oppgave med andre forhold enn tidligere. Morten identifiserer at likningen inneholder tre forskjellige verdier og at det sannsynligvis er prisen Silje, Mohammed og Fredrik betaler. Dette funnet kan tyde på at han er i stand til å tolke likningen i sammenheng med problemet. Han forstår at x sannsynligvis er prisen for den ene telefonen og de andre har en sammenheng med variabelen x. Morten viser at han har et fokus på at både tallene og bokstavene i likningen er relevante. Noe Kieran (2004) trekker frem som verdifullt i veien mot algebraisk tenkning.

4.2.4 Oppsummering av Morten

Analysen kan tyde på at Morten viser tegn til algebraisk tenkning. Dette gjør han ved å vise til enkelte av punktene som Kieran (2004) vektlegger i utviklingen mot algebraisk tenkning. Dette fremtrer ved at han har et fokus på: forhold og ikke bare beregning av et numerisk svar, både å representere og løse et problem i stedet for å bare løse det, og tall og bokstaver. Samtidig viser han til en manglende forståelse for bruken av inverser, da han har vanskeligheter med å løse oppgave 2, som inneholder subtraksjon og divisjon. Det kommer frem i intervjuet at han mener hjelpetegningen ikke bidrar i løsningen av problemet. Det kan derfor diskuteres om Morten fokuserer på å representere og løse et problem i stedet for å bare løse det med tall og bokstaver.

Innledningsvis i intervjuet kan det oppleves at Morten ikke fullt forstår betydningen til likhetstegnet og hvordan likhetstegnet uttrykker relasjoner mellom størrelsene i problemet. Morten sin umiddelbare tanke var at summen kunne divideres på tre for å finne svaret. Da kom han frem til 5000 per person, noe som ikke stemmer, og forholdene i oppgaven ble heller ikke prioritert. Ved senere anledning i oppgaveløsningen fremstår ikke dette problemet i like stor grad og han ser bort fra denne vinklingen. Dette kan tyde på at han likevel forstår betydningen av likhetstegnet, og identifiserer det som et uttrykk for en relasjon mellom størrelser.

Under gjett og sjekk virker Morten noe usikker på hvilke tall som faller naturlig å prøve ut. Selv om vi ikke oppfatter tankesettet, kommer han frem til riktig løsning etter kort tid. Dette viser at han er i stand til å analysere strukturen i problemet for å nærme seg svaret. I tillegg til dette skaper Morten en formening om hva svaret kan være ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i problemet.

I den siste oppgaven indikerer funnene at Morten er i stand til å tolke likningen i sammenheng med problemet. Morten viser at han oppfatter hvilke deler av likningen som representerer de ulike individene.

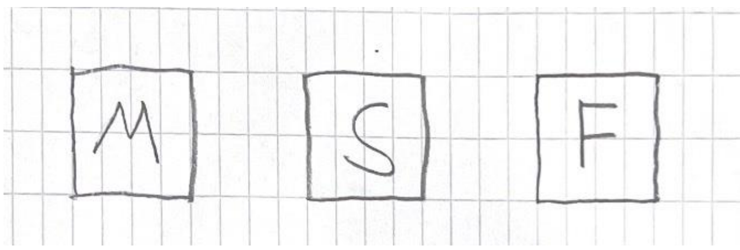
4.3 Janne

Formålet med intervjuet ble fremvist og eleven fremstod underforstått med hva som skulle foregå under oppgaveløsningen. Resultater vi anser som relevante for problemstillingen vil bli vektlagt.

4.3.1 Oppgave 1

I introduksjonen av den første oppgaven kommer Janne sine første tanker rundt oppgaven. Janne fremsto som noe usikker innledningsvis og hun påpekte at det oppleves utfordrende med høye tall. Janne gjengir også noen forhold mellom personene, før hun igjen blir usikker.

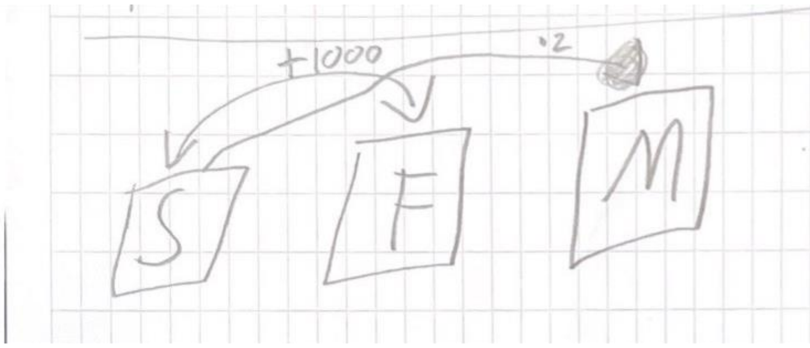
25. Jon Martin: Du skal få muligheten til etterpå å prøve på Excel, men kan du først prøve på ark?
26. Janne: Ja!
27. Jon Martin: Hvordan hadde du valgt og gjort det da?
28. Janne: Hmm, da ville jeg tatt tre firkanter [Eleven tegner opp tre firkanter]. Sånn.



Figur 12. Janne - rekonstruksjon av hjelpetegning en fra oppgave 1

For å svare på oppgaven ved hjelp av papir ønsket Janne å konstruere en hjelpetegning. I figur 12 ser man en rekonstruert versjon av Janne sin hjelpetegning. Hun har konstruert tre bokser som hver representerer individene i oppgaven. Figur 12 viser hvordan hjelpetegningen så ut innledningsvis under oppgaveløsningen.

Janne har i intervjuet riktig forklaring til forholdet mellom pris hos hver enkelt, men hjelpetegningen viste ikke denne tankegangen. Hun fortalte at Mohammed sin mobiltelefon kostet dobbelt så mye som Silje sin og at Silje sin mobiltelefon kostet 1000kr mer enn Fredrik sin. Oppfattelsen og tankegangen var riktig, men gjennomførelsen viste ikke til dette. Det kan tyde på at hun ikke forstår pilenes funksjon i hjelpetegningen, da disse ikke er med. Etter en lengre diskusjon om hva pilene i hjelpetegningen representerer velger hun senere å sette opp en ny hjelpetegning med piler, for å forsøke å rette opp i besvarelsen.



Figur 13. Janne - hjelpetegning to fra oppgave 1

I figur 13 ser man Janne sin nye hjelpetegning. Hun har konstruert tre bokser som hver representerer de ulike individene i oppgaven. Rekkefølgen er endret fra forrige forsøk. Pilene over firkantene skal gjengi forholdet mellom personene.

95. Janne: Strek under her (For å vise at det er en ny tegning) Så nye firkanter (Tegner tre nye firkanter). Sånn også skriver jeg: "S, F også M. Så kan jeg ta sånn altså en pil over her også skriver jeg + 1000, også ehhhm, ta, da må jeg tilbake må jeg ikke det?

Under konstruksjonen av hjelpetegningen ble pilene misplassert. Slik oppdaget hun feilen:

102. Jon Martin: Hva betyr det da? [Peker på pilene mellom S og M]

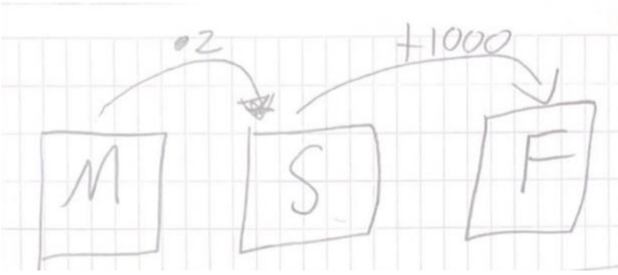
103. Janne: Fordi det står jo at ehm Mohammed sin mobil kostet dobbelt så mye som Silje sin

104. Jon Martin: Mhm, så ifra Mohammed så til Silje så er det dobbelt så mye her? [Peker på Ruten med S].

105. Janne: Nei, det skal egentlig være motsatt, altså at det er dobbelt så mye der. Ehhhhh da må jeg kanskje gjøre det samme her igjen, og ha det sånn [Snur på pilen mellom S og M igjen].

Janne innser feilen selv, og i forsøket blir en pilspiss feilplassert. Da den nye hjelpetegningen Janne konstruerte var misvisende, gikk hun tilbake til den opprinnelige tegningen.

107. Janne: Ehhhm, så hvis jeg tar, så hvis jeg tar den over her også skriver jeg + 1000 også tar jeg ehhhm, den over her og skriver *2. [Er tilbake på den første tegningen og setter pil fra M til S og skriver *2, og pil fra S til F og skriver +1000] ... sånn. Fordi da blir det fordi Silje sin mobil kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin og Mohammed kostet dobbelt så mye som Silje sin.



Figur 14. Janne - endret hjelpetegning en fra oppgave 1

I forklaringen av de nylig påsatte pilene viser hun en riktig gjengivelse av relasjonene. Selv om forklaringen er riktig, viser ikke hjelpetegningen i figur 14 til den samme resonneringen. Det kan tyde på at Janne ikke forstår hvordan fremstillingen av forholdene viser til differansen mellom hver enkelt.

Senere beveger Janne seg over i Excel for å svare på oppgaven. Hun begynner med å markere S, M, F og svar for å kategorisere cellene. Etter at hun har satt opp forholdene mellom cellene benyttet hun seg av gjett og sjekk.

S	M	F	Svar
1000	2000	3000	6000
2000	4000	5000	11000
3000	6000	7000	16000
4000	8000	9000	21000
3500	7000	8000	18500
3600	7200	8200	19000
3650	7300	8300	19250
3675	7350	8350	19375
3685	7370	8370	19425
3900	7800	8800	20500
3800	7600	8600	20000

Figur 15. Janne - utprøvde verdier under gjett og sjekk

I figur 15 valgte Janne å operere etter det faktum at Mohammed sin verdi er dobbelt så stor som Silje sin, og at Fredrik er 1000 mer enn Mohammed. Forholdet skal egentlig være at Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin og Mohammed sin mobil kostet dobbelt så mye som Silje sin. Selv om oppsettet ikke er riktig, kan vi fremdeles tolke fremgangsmetoden gitt valgene hun har tatt. Hun nevner etter to forsøk at verdien bør være mellom 3000 og 4000, siden svaret ligger mellom summen av disse. Hun finner til slutt frem til en løsning, gitt at forholdene hun viser til er gjeldene.

Dette funnet kan tyde på at Janne ikke analyserer strukturen i problemet riktig, for deretter å ta i bruk gjett og sjekk for å finne verdien til Silje. Under gjetningen viser hun til en klar formening om hva verdien bør være. Her forsøker hun å løse oppgaven ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i problemet som er et av Blanton (2015) sine momenter innad i ideen om ekvivalens, uttrykk, likninger.

Janne viser i oppgaveløsningen at hun ikke har et fokus på forholdene i problemet og er kun opptatt av å komme frem til et numerisk svar, og hun har bare fokus på å jobbe med tall og ikke bokstavene. Dette fordi hun ikke legger merke til eller bryr seg om forholdene blir feil i forhold til det oppgaven spør om. Disse funnene tyder på at hun har en aritmetisk tenkning under løsningen av denne oppgaven. Hadde hun benyttet algebraisk tenkning i denne løsningen ville hun vist et større fokus til forholdene og tallene og bokstavene sammen. Da Janne kom frem til løsningen sin valgte hun ikke å kontrollere løsningen i samsvar med problemet. Hadde hun gjort dette hadde hun sett at forholdene ikke stemte overens med problemet. Dette indikerer at Amalie ikke viser til momentet om å kontrollere løsningen på en likning (Blanton, 2015). Det tyder på at Janne kun har fokus på å beregne et numerisk svar, og ikke på forholdene i problemet. Dette kan tyde på at Janne benyttet seg av aritmetisk tenkning under løsningen av denne oppgaven.

Grunnet mangel på tid fikk ikke Janne muligheten til å svare på de to siste oppgavene. Det ble heller prioritert å fokusere på hva som ble gjort i den første oppgaven.

4.3.2 Oppsummering av Janne

Analysen kan tyde på at Janne viser til momenter av punktene Kieran (2004) vektlegger i utviklingen mot algebraisk tenkning. Dette fremtrer ved at viste et fokus på: forhold og representering. Hun fokuserte på forholdet i den kontekst at hun gjengir riktige relasjoner i forklaringen, men under gjennomføringen forsvant denne relasjonen mer eller mindre. Det samme kan observeres under representasjonen der denne forklaringen ikke framkom. Øvrige punkter som Kieran (2004) nevner er tilsynelatende ikke til stede, dette kan tyde på at Janne har en mer aritmetisk tilnærming til oppgaven.

Fra starten av intervjuet ser man at Janne har tegn til forståelse for likhetstegnets betydning, ettersom hun viser til forståelse av ekvivalens ved å sette opp den siste formelen i Excel ved å addere cellene til personene i oppgaven sammen.

Bruken av hjelpetegningen kan virke i en negativ forstand, da hun ikke konstruere denne i samsvar med det hun forklarer. I og med at hun ikke konstruerer og bruker den riktig, kan det tyde på at hun ikke er i stand til å analysere strukturen i likningen for og senere finne verdien av variabelen i problemet.

Janne analyserer strukturen i problemet feil, og skaper dermed andre forhold mellom personene. Selv om forholdene mellom personene ikke er satt opp riktig under gjett og sjekk, viser hun å være i stand til å analysere strukturen i problemet for å nærme seg svaret. I tillegg til dette skaper Janne en formening om hva løsningen kan være ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen ved hjelp av gjett og sjekk.

5. Diskusjon

I dette kapittelet blir resultatene som er presentert i forrige kapittel diskutert. Resultatene vil legge grunnlaget for videre diskusjoner. Deretter vil disse diskuteres i forhold til tidligere forskning på område, og eventuelle avvik drøftes opp mot tidligere funn. Det skal også diskuteres mulige alternative tolkninger av resultatene våre, og vi ønsker å vurdere om resultatene kan svare på vår problemstilling.

I starten av dette studiet stilles følgende forskningsspørsmål:

- *Hvordan kommer algebraisk tenkning og forståelse for begreper til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7. trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger?*

Vi ønsker å drøfte forskningsspørsmålet ut fra funn og analyser av egne notater, transkripsjoner og elevbesvarelser som er nevnt i forrige kapittel. I denne drøftingen vil fokuset rettes mot elevene og vi vil studere hvordan algebraisk tenkning og forståelse av begreper fremtrer hos hver enkelt. Det er viktig å påpeke at denne forskningen har som hensikt å avdekke elevenes uttrykkelse av algebraisk tenkning og forståelse av begreper, og ikke en årsak for disse.

5.1 Hjelpetegningens rolle i problemløsningen

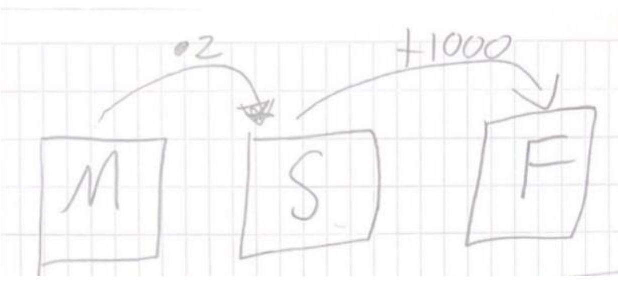
Med erfaringer i arbeid med lignende oppgaver var det lik tankegang hos deltagerne. Alle valgte som vist å ta i bruk hjelpetegning. Det var individuelt hvorvidt denne representasjonen bidro i løsningen av oppgaven.

Både Amalie og Morten fremstod med lik tankegang om hvordan de skulle sette opp hjelpetegningen. Begge ville starte med den som hadde minst og fortsette videre i stigende rekkefølge. Læreren hadde i undervisningen, fortalt at dette var det mest hensiktsmessige i slike oppgaver. Samtidig vet vi at det nødvendigvis ikke gjelder for alle problemløsningsoppgaver. En må analysere forholdene i oppgaven for å se på hva som gir den beste rekkefølgen. Dette er en viktig del i momentet til Blanton et al. (2015) om å tolke et algebraisk uttrykk i sammenheng med et problem. Det er ikke nødvendigvis slik at den som har minst verdi bør stå først. Når vi i oppgave 3 gjorde problemet i oppgave 1 om til en likning tok vi for eksempel utgangspunkt i Silje. Dette var fordi det førte til at forholdene i likningen var enklere å regne med, da Silje var bindeleddet mellom de tre variablene. I og med at oppgaven var av typen problemer med ulik deling, var det til stor hjelp for deltagerne at de klarte å forme og løse hjelpetegningen. Alan Bell (1996) forklarer problemløsning som løsning av problemer med å forme og løse likninger. I konteksten til oppgave 1 og 2, vil hjelpetegningen være en representasjon som skal forme og løse problemet. Det at elevene tar i bruk hjelpetegning for å representere problemet, hjelper dem til å utforske problemet fritt, utvide og utvikle disse i søken etter flere resultater og mer generelle problem. Som er viktige momenter i Bell sin forklaring av problemløsning.

Janne brukte likevel ikke samme strategi. Hun merket boksene opp etter rekkefølgen i oppgaven. Hun la senere merke til at dette ble feil og tegnet da opp en ny hjelpetegning med en annen rekkefølge. Etter dette gikk hun tilbake igjen til den første hjelpetegningen. Det er viktig å nevne at rekkefølgen i hjelpetegningen ikke nødvendigvis er feil, men en mer gunstig rekkefølge kan gjøre det enklere å uttrykke forholdene. Dette kan gjøre det enklere å analysere strukturen i problemet for å finne variabelen.

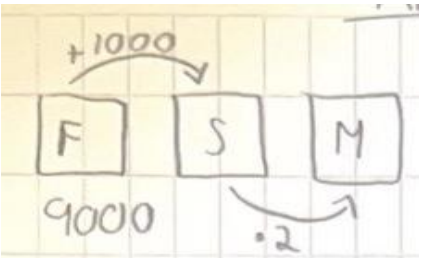
Neste steg i hjelpetegningen er å representere forholdene mellom variablene i hjelpetegningen. Morten og Amalie valgte å gjøre dette ved piler som gjengir forholdene fra problemet i oppgaven. Morten og Amalie satt pilene riktig og det de forklarte oss om forholdene hadde en sammenheng med hvordan hjelpetegningene var konstruert. Janne lagde først en hjelpetegning uten piler, men etter noen hint fra oss, kom hun på at hun kunne bruke piler for å representere forholdene. Janne satt opp pilene med andre forhold, noe som gjorde at forholdene ikke stemte overens med problemet i oppgaven. Å markere forholdene i problemet med piler kan være med på å gjøre det lettere å løse problemet ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen. Som er et av momentene Blanton et al. (2015) nevner som sentrale i forståelsen av ekvivalens, uttrykk og likninger.

Figur 14. Janne - endret hjelpetegning en fra oppgave

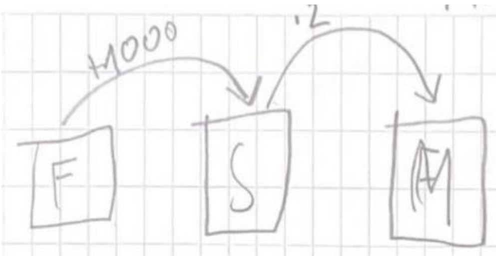


Figur 14. Janne - endret hjelpetegning en fra oppgave 1

I figur 14 ser man at pilene som skal representere forholdene i oppgaven er satt opp i samme rekkefølge som oppgaven har fortalt oss. Dette kan vi sammenligne med en av de tre fremgangsmåtene til Clement (1982). Altså den statiske sammenlikningsprosessen. Hun leser i oppgaven at Mohammed sin er dobbelt så dyr som Silje sin. Derfor har hun tegnet en pil fra Mohammed til Silje, og skrevet gange to over denne. Det som er interessant her er at Janne forklarer forholdene i samsvar med problemet, men hun satt pilene feil vei og det kan derfor virke som hun ikke har forståelse for hva pilene betyr. Dette kan sammenlignes med de studentene som leste at det var seks ganger så mange studenter som professorer i "student-professor problemet", og derfor skrev disse studentene 6S=P istedenfor S=6P.



Figur 2. Amalie - hjelpetegning fra oppgave 1



Figur 8. Morten - hjelpetegning fra oppgave 1

Det kan i disse funnene se ut som Morten og Amalie brukte den operative tilnærmingen (Clement, 1982). Der Morten og Amalie uttrykte at S *2=M, da problemet i oppgaven oppgir at Mohammed sin mobil koster dobbelt så mye som Silje sin. Som vi ser i figur 2 og figur 8 Janne uttrykte dette problemet som M*2=S (se figur 14). Her viser Morten og Amalie til den operative tilnærmingen fordi de lager en operasjon, da de øker mengden på S. Dette genererer en likhet. Da begge sider av likhetstegnet er like. Her viser Morten og Amalie til at de identifiserer betydningen av likhetstegnet som uttrykk for en relasjon mellom størrelser. Som er et av momentene Blanton et al. (2015) nevner som sentrale i forståelsen av ekvivalens, uttrykk og likninger. Som tidligere nevnt innebærer algebra i matematikk det å kunne utforske strukturer, mønstre og relasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019). Amalie og Morten viser i dette tilfellet at de er i stand til å utforske nettopp dette.

Janne har en misoppfattelse som er omtalt av Clement (1982). Da han gjennomførte forsøk med liknende oppgaver la han merke til at over 50 prosent av første års ingeniørstudenter ikke klarte å løse "student-professor problemet". Det er derfor ikke overraskende at en elev på 7.trinn også har problemer med liknende oppgaver.

Flere empiriske studier viser at bruken av en hjelpetegning kan resultere i en positiv effekt på problemløsningsytelsen hos elevene. Van Essen & Hamaker (1990), Zahner & Corter (2010) og Rellensmann et al. (2016) har funnet en positiv effekt på problemløsning i matematikk ved bruk av hjelpetegninger. Det er to faktorer som påvirker verdien av en hjelpetegning, dette er vanskelighetsgrad av oppgaven og elevenes alder. Det kan i vår forskning se ut som Morten og Amalie har god nytte av hjelpetegningen. Det kan se ut som bruken av hjelpetegning forvirrer Janne mer enn det hjelper. Årsaken til dette kan være grunnet med at oppgaven er for vanskelig for henne, og fordi hun ikke har nok kunnskap om temaet. Hvis vi vurderer Janne i denne oppgavesettingen, kan det sammenlignes med det Stein et al. (2000) definerer som kognitiv etterspørsel som stiller svært høye kognitive krav. Her arbeider Janne tilsynelatende på et nivå som er over hennes daværende nivå av evne. Det kan også anses som et optimalt læringsmiljø, hvis oppfølgingen fra en annen er involvert, noe den ikke var under intervjuet.

5.2 Hvordan oppfattes elevers arbeid i regneark i form av algebraisk tenkning?

I dette prosjektet har fokuset vært å se på hvordan elevene løser problemløsningsoppgaver ved hjelp av regneark og hjelpetegning. Alle deltagerne startet med å lage en hjelpetegning. Her er en viktig del av konteksten at det var slik de hadde lært å gå frem i lignende problemløsningsoppgaver. Det var derfor ikke noen overraskelse at alle begynte med dette. Morten og Amalie prøvde først å finne frem til svaret ved hjelp av gjett og sjekk sammen med hjelpetegningen. Amalie skrev ned verdiene på arket, og Morten gjorde alt i hodet. Morten kom ganske nærme løsningen, men ga opp og gikk over til Excel. Amalie var lengre unna løsningen da hun ga opp og gikk over til Excel. Janne ble oppfordret til å prøve med noen tall på arket, men mente dette ble vanskelig da hun var vant til å kunne bruke Excel. Derfor ville hun ikke prøve ut noen verdier før hun fikk ta i bruk Excel.

Da elevene fikk tatt i bruk Excel satt samtlige deltagere inn formler for å representere forholdene i oppgaven. Her tok Amalie i bruk en metode for å sjekke om formlene stemte overens med problemet. Hun satt Fredrik sin verdi som en for å lettere kunne se om formlene i regnearket var satt opp riktig. Noe som hjelper henne til å analysere strukturen i problemet for å senere finne verdien av variabelen. Dette viser også at Amalie har fokus på forholdene i problemet og ikke bare på beregningen av et numerisk svar. Da elevene hadde satt opp formlene i regnearket gikk samtlige i gang med gjett og sjekk. Både Amalie og Morten hadde en hjelpetegning som representerte problemet i oppgaven 1 logisk, og overførte dette til regnearket slik at formlene stemte overens med forholdene. Janne sin hjelpetegning representerte forholdene i problemet på en annen måte enn oppgaven tilsa, dermed var det naturlig at formlene i regnearket også ble oppført feil. Det som var litt mer overraskende var at hun byttet om på noen av forholdene fra hjelpetegning til Excel, men de ble likevel feil representert.

Rojano (1996) har gjennomført et lignende forskningsprosjekt. Her fant hun ut at økningen av antall elever som løste oppgaven riktig og med en algebraisk fremgangsmetode økte drastisk når elevene fikk bruke regneark til å løse oppgaven.

Sammenligner vi dette med våre resultater ser vi at ingen av våre deltagere løste oppgaven kun ved hjelp av hjelpetegningen og gjett og sjekk. Da de tok i bruk regnearket, kom alle frem til en løsning. Amalie kom frem til riktig løsning på både oppgave 1 og oppgave 2. Morten kom frem til riktig løsning på oppgave 1, men hadde formler som representerte feil forhold i regnearket på oppgave 2. Disse forholdene førte til at svaret ville bli et desimaltall, og grunnet prioritering av tiden til den siste oppgaven avbrøt vi han før han hadde kommet frem til riktig løsning, men vi så at han var veldig nærme og ville sannsynligvis kommet frem til løsningen med litt mer tid. Janne hadde også formler som representerte feil forhold i regnearket og hadde dermed heller ikke noen mulighet til å komme frem til løsningen, men hun løste likningen slik at det stemte overens med hennes forhold. Janne fikk ikke tid til å løse oppgave 2.

5.3 Funksjonen til gjett og sjekk under oppgaveløsningen

Det er mange som tror at strategier som gjett og sjekk for å løse algebraiske problemer er problematiske og kan være til hinder for at elevene skal lære algebraiske metoder. Rojano (1996) sier at sammen med andre uformelle strategier er dette en viktig del av grunnlaget for hvordan metoder og strategier er til hjelp for å skape algebraisk tenkning.

Oppgavene fra intervjuet legger til rette for at elevene kan ta i bruk gjett og sjekk for å løse problemet. Deltagerne brukte ulike strategier for å løse oppgaven med denne metoden. Også her er en viktig del av konteksten at læreren hadde lært dem en strategi for hvordan man på den mest effektive måten kom frem til løsningen. Elevene hadde lært at man først gjettet sånn omtrent det man trodde, for deretter å korrigere opp eller ned i forhold til hva man fikk med det første tallet. Deretter var trikset å ta tallet midt imellom de to foregående tallene til man kom frem til svaret. Gjett og sjekk er en metode som kan gi oss antydninger om elevene er i stand til å analysere strukturen i problemet for å finne verdien av variabelen.

Deltagerne hadde ulik fremgangsmåte for å sette opp et system som kunne hjelpe dem til å løse problemet ved hjelp av systematisk gjett og sjekk. Amalie og Morten tok utgangspunkt i Fredrik. Noe som gjorde at de kunne finne verdiene av de andre med å plusse på tusen for å få Silje sin verdi og gange Silje sin verdi med to for å få Mohammed sin verdi. Janne viste til usikkerhet rundt hvem hun skulle ta utgangspunkt i. Først prøvde hun med Mohammed for deretter å bytte til Silje, men til slutt gikk hun tilbake til Mohammed igjen. Videre viste hun til feil forhold i samsvar med problemet. Ved bruk av gjett og sjekk og muligheten til å sette opp systemet og rekkefølgen i problemet som man selv ville fikk elevene gode muligheter til å utforske problemet fritt. Dette nevnte Bell (1996) som viktig i problemløsningsoppgaver.

I oppgave 2 tok Amalie utgangspunkt i Mohammed. Da fant hun Silje sin verdi ved å ta Fredrik sin minus 1250 og Fredrik sin ved å ta Mohammed sin verdi gange to. Dette viser at hun tar i bruk inverser, og viser til forståelse av for begrepet. Morten forsøkte å løse denne oppgaven, men fikk vanskeligheter da han ikke var vant til å regne med divisjon og subtraksjon i algebraiske problemløsningsoppgaver. Dette viser til manglende kunnskap og forståelse om inverser.

Sammenligner vi systemene deltagerne våre satt opp i oppgave 1 med funnene til Johanning (2010) ser vi at ingen av våre deltagere har tatt utgangspunkt i den variabelen som har en link til begge de to andre. Dette var den vanligste fremgangsmåten i funnene til Johanning. En årsak til dette kan være at elevene våre hadde tilgang til Excel som hjelpemiddel til å løse problemet ved hjelp av gjett og sjekk. Her trenger ikke elevene å endre på andre verdier enn variabelen som elevene har tatt utgangspunkt i. Dette var på grunn av at Excel beregner de andre verdiene for deg. Johanning sine elever var avhengig av å regne på de andre forholdene på egenhånd, hver gang de endret på variabelen de hadde tatt utgangspunkt i.

Driscoll (1999) påpeker at elevers uformelle tenkning til tider ikke er ulik formelle symbolske tilnærminger. Ved gjett og sjekk sier han at elevene tester numerisk et generelt algoritmisk system som de mener representerer situasjonen i problemet. En slik resonnering er funksjonell i praksis og gjenspeiler tankegangen man tar i bruk for å bygge regler for å representere funksjoner. Funnene våre viser hvordan deltagerne har tatt i bruk systematisk gjett og sjekk for å representere problemene.

Johanning (2007/2010) fremhever gjett og sjekk som en mulighet til å utvikle elevers ideer til algebra. Hun understreker viktigheten til elevers resonnering og systematikk under oppgaveløsningen. I samsvar med denne påstanden, har vi i vår oppgave lagt vekt på om elevene er i stand til å analysere strukturen i likningen for å finne verdien av variabelen. Her vil elevenes resonnering og systematikk vise til om de forstår hva de gjør og hvorfor.

5.4 Resonnering med uttrykk og likninger i deres symbolske form

Det andre hovedområdet som introduseres av Kaput (1998) er algebraens regler. Han nevner hvilken sentral rolle det algebraiske språket spiller i matematikken. Intervjuets tredje og siste oppgave rettet søkelyset mot forståelsen til det algebraiske språket.

Amalie blir umiddelbart usikker på oppgaven da den ikke er av samme form som de foregående. Hun mener at likningen ser vanskelig ut, men klarer etter en stund å koble at likningen har fellestrekk med den første og andre oppgaven. Morten ser sammenhengen fra likningen til de andre oppgavene. Han ser at totalen blir 20000 og at det involverer tre personer, men funderer rundt om det er en ny oppgave med andre forhold enn tidligere. Janne fikk ikke tid til å løse denne oppgaven.

Denne oppgaven utfordret deltagerne til å arbeide på et nivå av kognitiv etterspørsel som er litt over deres daværende nivå av evne, som ifølge Stein et al. (2000) fremmer utviklingen av elevenes tenkning og problemløsningsevner. Selv om deltagerne viste til en form for forståelse rundt likningen i oppgave 3, var det ingen som innehadde kompetansen til å løse den på egenhånd. For at elevene skulle utvikle seg kognitivt ble det i dette tilfellet tatt i bruk den nærmeste utviklingssonen til Vygotsky (1978) for å utnytte utviklingspotensialet hos hver enkelt. Uten å vite hvilke oppgaver disse elevene hadde løst tidligere, ble det nevnt at lignende oppgaver har vært en del av undervisningen for en tid tilbake. Deltagerne hadde med andre ord kjennskap til slike likninger fra tidligere. Både Amalie og Morten er i stand til å tyde hva likningen representerer, det tilsier at de har et fokus på forhold og ikke kun på beregning av et numerisk svar og at de er i stand til å skape en representasjon av problemet. Som Kieran (2004) trekker frem som viktige områder på veien mot algebraisk tenkning. Det vil også være et tegn på at de kan tolke et algebraisk uttrykk i sammenheng med et problem, som kan kobles til Blanton et al. (2015) sin ide om ekvivalens, uttrykk og likninger.

5.5 Indikasjoner til algebraisk tenkning og forståelse

Deltagerne har vist til ulike former for algebraisk tenkning og forståelse. Og vi har både sett tegn til at elevene har en algebraisk- og en aritmetisk tilnærming til algebraiske problemløsningsoppgaver. Vi vil først forsøke å svare på forskningsspørsmålet individuelt blant deltagerne, deretter vil vi prøve å trekke generelle slutninger.

Ved hjelp av intervjuet og observasjonene, har vi fått en oppfattelse om at Amalie benytter seg av algebraisk tenkning og innehar en forståelse av begreperi løsningen av gitte problemløsningsoppgaver. Gjennom hele intervjuet er det tydelig at hun etterkommer Kieran (2004) sine punkter. Dette gjør hun med å ha fokus på forhold, ikke bare på å beregne et numerisk svar. Hun er opptatt av å både representere og løse et problem, og ikke bare finne en løsning. I tillegg viser hun forståelse for inverser av operasjoner i den andre oppgaven ved å aktivt ta i bruk denne kunnskapen. Sett ut ifra Blanton et al. (2015) kan vi si noe om hvordan Amalie viser til forståelse av begrepene ekvivalens, uttrykk og likninger. Hun viser at hun har evnen til å tolke det algebraiske uttrykket i sammenheng med et problem, hun identifiserer betydningen av likhetstegnet som uttrykk for en relasjon mellom størrelser, hun klarer å løse problemer med manglende verdier ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen, hun kontrollerer løsningen på en likning ut fra problemstillingens sammenheng og hun klarer å analysere strukturen i likningen for å finne verdien av variabelen.

Ut ifra våre funn kan det tyde på at Amalie er en elev som viser til algebraisk tenkning og forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger innenfor gitte problemløsningsoppgaver. Dette har hun gjort ved at hun viser at hun oppfyller flere av punktene Kieran (2004) beskriver som viktige for å gå mot algebraisk tenkning, og viser samtidig til flere av momentene Blanton et al. (2015) trekker frem som viktige for forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger.

Ved hjelp av intervjuet og observasjonene våre har vi fått en oppfattelse om at Morten tidvis benytter seg av algebraisk tenkning i løsningen av gitte problemløsningsoppgaver. I enkelte deler av intervjuet er det tydelig at han er opptatt av å forstå forholdene i problemet, og ikke bare på å finne en numerisk løsning. Han fokuserer også på å representere problemene og ikke bare på å løse det. Og han viser til et fokus på både tallene og variablene i problemet. Samtidig viser han til manglende forståelse for bruken av inverser. Sett ut ifra Blanton et al. (2015) kan vi si noe om hvordan Morten viser til forståelse av begrepene ekvivalens, uttrykk og likninger. Han viser at han i noen situasjoner har evnen til å: tolke et algebraisk utrykk i sammenheng med det gitte problemet, identifisere betydningen av likhetstegnet som uttrykk for en relasjon mellom størrelser, løse problemer med manglende verdier ved å resonnere ut fra den strukturelle sammenheng, se om løsningen samsvarer med problemet ved å kontrollere forholdene i likningen, analysere strukturen i likningen for å finne verdien av variabelen.

Ut ifra våre funn kan det tyde på at Morten er en elev som tidvis viser til algebraisk tenkning og forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger innenfor gitte problemløsningsoppgaver. Dette har han gjort ved at han han til tider oppfyller noen av punktene Kieran (2004) beskriver som viktige for å gå mot algebraisk tenkning, og han viser tidvis til noen av momentene Blanton et al. (2015) trekker frem som viktige for forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger.

Ved hjelp av intervjuet og observasjonene har vi fått en oppfattelse om at Janne sjeldent tar i bruk algebraisk tenkning og forståelse av begreper i løsningen av gitte problemløsningsoppgaver. I denne forskningen viser Janne i visse situasjoner at hun oppfyller noen av Kieran (2004) sine punkter. Dette gjør hun med å ha fokus på forholdet i den kontekst at hun gjengir korrekte relasjoner i forklaringen, men under gjennomføringen forsvinner denne relasjonen mer eller mindre. Det samme kan observeres under representasjonen der denne forklaringen ikke fremkommer. Øvrige punkter som Kieran nevner er tilsynelatende ikke til stede, dette kan tyde på at Janne har en mer aritmetisk tilnærming til oppgaven. Sett ut ifra Blanton et al. (2015) kan vi si noe om hvordan Janne viser til forståelse av begrepene ekvivalens, uttrykk og likninger. Hun identifiserer betydningen av likhetstegnet som uttrykk for en relasjon mellom størrelser og resonnerer ut fra den strukturelle sammenhengen i likningen ved hjelp av gjett og sjekk. Hun var derimot ikke i stand til å analysere strukturen i likningen for og senere være i stand til å finne verdien av variabelen i en likning. Det kom også frem at Janne viser til en misoppfatning under oppgaveløsningen, som underbygger en mangel på forståelse av relasjonene i oppgaven.

Ut ifra våre funn kan det tyde på at Janne er en elev som sjeldent viser til algebraisk tenkning og forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger innenfor gitte problemløsningsoppgaver. Dette har hun gjort ved at hun ikke er i stand til å oppfylle punktene Kieran (2004) beskriver som viktige for å gå mot algebraisk tenkning, og hun viser samtidig til mangler av momentene Blanton et al. (2015) trekker frem som viktige for forståelse av ekvivalens, uttrykk og likninger.

Fra et mer generelt ståsted viser samtlige deltagere aspekter til algebraisk tenkning og forståelse av begreper i løsningen av gitte problemløsningsoppgaver. For å registrere den algebraiske tenkningen og forståelsen har vi sett etter tegn til momenter fra Blanton et al.

(2015) sin idé om ekvivalens, uttrykk og likninger, og Kieran (2004) sine punkter innenfor gitte problemløsningsoppgaver. Det er individuelt hvorvidt disse kommer til syne. Alle deltagerne hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet og ideen om ekvivalens i en likning. Det var variasjoner i deres evne til å forstå relasjonene mellom størrelsene og å løse likninger. Algebraisk tenkning og forståelse for begreper fremkommer både i arbeid med penn og papir, og når deltagerne jobber med oppgavene i Excel.

6. Avslutning

I denne oppgaven har vi innledningsvis gjort rede for relevant teori som bygger opp under vår problemstilling. Denne teorien er senere utgangspunktet for analysering av våre funn. Det har i tillegg blitt fremstilt hvilke metoder og etiske vurderinger som er blitt tatt i bruk og overholdt i vårt arbeid. Analyseringen har vært i tråd med Blanton et al. (2015) sin ide om ekvivalens, uttrykk og likninger, Kieran (2004) sine punkter mot algebraisk tenkning, våre tanker og formeninger, og en rekke andre vitenskapelige standpunkt av relevans. Samtidig har vi belyst og vurdert en rekke utfordringer ved slike arbeidsmåter som kan være av interesse å undersøke videre. Avslutningsvis ønsker vi å oppsummere denne forskningen, samtidig som vi prøver å svare på problemstillingen.

6.1 Oppsummering og konklusjon

Studier viser til at elever i den norske skolen strever med algebra (Kaarstein et al., 2020). Det vil derfor være hensiktsmessig å se på læringssituasjoner hvor elevene viser tegn til algebraisk tenkning, for å være i stand til å videreutvikle undervisningen innenfor temaet. I denne studien har forskningsspørsmålet vært selve fundamentet på hva vi ønsker å svare på.

- *Hvordan kommer algebraisk tenkning og forståelse for begreper til syne i sammenheng med ekvivalens, uttrykk og likninger når elever på 7. trinn løser problemer ved bruk av regneark og hjelpetegninger?*

For å være i stand til å svare på problemstillingen har vi tatt utgangspunkt i rammeverket som vi utviklet i sammenheng med denne forskningen. Vi har tatt i bruk observasjoner og et oppgavebasert intervju for å hente inn data. Tilnærmingen til dette spørsmålet har gitt et innblikk i elever på 7. trinn sine fremgangsmåter og resonnementer, i form av observasjoner fra undervisning, og transkripsjoner fra oppgavebaserte intervjuer. Vår forskning viser til ulike situasjoner hvor algebraisk tenkning og forståelse av begreper fremkommer. Det er tydelige forskjeller på hvordan og når disse kommer til syne, men samlet sett viser samtlige deltagere en antydning til algebraisk tenkning og forståelse av begreper. Alle hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet, og ideen om ekvivalens i en likning. Samtidig var det forskjeller i hvorvidt de forstod relasjonene mellom størrelser, og i deres evne til å løse likninger. Den algebraiske tenkningen og forståelse av begreper vises både i arbeid med penn og papir, og når deltagerne arbeider med oppgavene ved hjelp av regneark.

Vi håper denne studien kan være til nytte for lærere som er på utkikk etter nye metoder for hvordan man kan holde undervisning i algebra. I tillegg til dette håper vi oppgaven kan være en pekepinn på hva slags momenter en kan se etter/forvente fra elevene under arbeid med algebraiske problemløsningsoppgaver.

Videre forskning kan undersøke mulige progresjoner i algebraiske problemløsningsoppgaver. Mulige progresjoner i undervisningsopplegget kunne vært overgang til algebraisk notasjon og løsning av ulikheter. En fin overgang ville vært å se på hvordan tidligere problemer kunne bli representert ved bruk av en likning. Oppgave 3 i intervjuene våre var en start på muligheten til å gjøre en overgang til algebraisk notasjon. En annen mulighet til videre forskning er å se på de resterende ideene til Blanton et al. (2015). Det kan også være av interesse å se på nytten av representasjoner som hjelpetegninger, i arbeid med problemløsningsoppgaver. I denne studien viste en deltager til misvisende bruk og oppfattelse av hjelpetegningen.

6.2 Implikasjoner og kritisk blikk

Denne studien har gitt oss mulighet til å se hvordan elever på mellomtrinnet jobber med algebraiske problemløsningsoppgaver. Oppgavene i studien la til rette for flere av kjerneelementene i matematikk. Det mest sentrale er utforskning og problemløsning. Forskningsspørsmålet vårt har lagt til rette for at vi kan se på deltagerne sine fremgangsmåter i møte med algebraiske problemer. Vi har sett på hvordan algebraisk tenkning og forståelse av begrep fremtrer.

Arbeidet med algebraiske læringsaktiviteter har vært innlysende og relevant for vår videre profesjonsutøvelse. Vi opplever denne forskningen med observasjoner og intervju som en berikelse av vår utvikling som fremtidige lærere. Algebrafeltet er et omfattende og viktig område i matematikken i grunnskolen. Undersøkelser som TIMSS viser til svake resultater i algebra hos norske skoler (Utdanningsdirektoratet, 2023). Det vil derfor være et skritt i riktig retning å studere praksisen i undervisningen av algebra, og videreutvikle denne. Forskningen har virkeliggjort forholdet et utvalg elever har til arbeid med oppgaver av algebraisk natur.

I denne kvalitative studien kan våre subjektive holdninger og meninger ha spilt inn i tolkningen av funn. Vår subjektive mening kan eksempelvis tilsi at det var tegn på funn, mens andre kan tolke samme situasjon annerledes. I intervjuene har vi forsøkt å skape et trygt rom for deltagerne ved å legge de til kjente omgivelser. Oppgavene var gjenkjennbare for deltagerne, ettersom de hadde jobbet med lignende oppgaver tidligere. For å sikre at vi har tolket deltagerne i intervjuet så presist som mulig har vi stilt dem konkrete spørsmål og oppfølgingsspørsmål. Et problem i slike intervjuer kan være at deltagerne blir for opptatt av å “hjelpe” oss, og dermed svarer det de tror at vi vil høre. Det å sikre at dette ikke skjer er nærmest umulig. Derfor er det viktig at vi er klar over at enkelte funn kan ha blitt påvirket av oss som forskere.

Analysedelen av oppgaven har vært krevende. Vi har hatt et ønske om å se hvordan algebraisk tenkning og forståelse for begreper kom frem i arbeid med problemløsningsoppgaver. Dette har vi gjort med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket vårt. Dette rammeverket har gitt oss en rekke momenter og punkter for å kunne beskrive og oppdage algebraisk tenkning og forståelse om ekvivalens, uttrykk og likninger i problemløsningsoppgaver. Andre forskere ville kanskje brukt andre teoretikere for å tolke empirien. På bakgrunn av at vi har tatt for oss en av de store ideene som Blanton et al. (2015) viser til, vil våre resultater kun være en besvarelse på nevnt fokusområde. Vi vil få en dypere og grundigere gjennomgang av denne, men forskningen dekker ikke de andre ideene.

I ettertid sitter vi igjen med hva vi kunne gjort annerledes og hvilke spørsmål vi kunne stilt under intervjuet. Med en grundigere gjennomgang av våre funn og annen empiri, dannet vi oss et bilde av hvordan vi kunne gjennomført forskningen annerledes. Selv om vi forberedte oss godt i forkant av datainnsamlingen, var det flere deler av forskningen vi kunne tilnærmet oss annerledes. Hvordan kunne vi ha skapt en setting der deltageren tydeligere viser til sin forståelse av begreper og algebraiske tenkning? Hvilke spørsmål er passende? Det er funderinger vi sitter igjen med, og mest sannsynlig ville vært i stand til å svare på hadde vi gjennomført studien igjen.

Referanser

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (vol. 18, s. 3-14). Kluwer Academies Publishers.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (vol. 18, s. 115-136). Kluwer Academies Publishers.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (vol. 18, s. 167-186). Kluwer Academies Publishers.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, A. & Kim, J-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods.* (4.utg.). Oxford University Press.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Cai, J. & Knuth, E. (Red.). (2011). *Early Algebraization: A early dialogue from multiple perspectives.* Springer-Verlag.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in mathematics education*, *13*(1), 16-30. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.13.1.0016

Diener, E., & Crandall, R. (1978). *Ethics in social and behavioral research*. University of Chicago Press.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10.* Heinemann Educational Books.

Essen, G. V., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *The Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312. https://doi.org/10.1080/00220671.1990.10885976

Gilmore, C., Göbel, S. M., & Inglis, M. (2018). *An introduction to mathematical cognition.* Routledge.

Goldin, G. A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, s. 40-62. https://doi.org/10.2307/749946

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (s. 517-545). Lawrence Erlbaum.

Haug, P. (2014). Rammer for lærerarbeidet: Læreplanens betydning. I R. J. Krumsvik (Red.), *Lærerarbeid: For elevenes læring* (s.239-240). Høyskoleforlaget.

Johanning, D. I. (2007). Is there something to be gained from guessing? Middle school students' use of systematic guess and check. *School Science and mathematics*, 107(4), 123-131. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2007.tb17927.x

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. I National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Red.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (s.25-26). National Academies Press.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kunnskapsdepartementet. (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregående opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#KAPITTEL_1

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The mathematics teacher*, 85(7), 557-561. https://doi.org/10.5951/MT.85.7.0557

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., and Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. Educ. Stud. Math. 95, 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (vol. 18, s. 115-136). Kluwer Academies Publishers.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards based mathematics instruction: A casebook for professional development.* Teachers College Press.

Utdanningsdirektoratet. (2023, 10.03). Den internasjonale studien TIMSS. Hentet 03.04.2023 fra: https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss/#a157830

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental processes*. Harvard University Press.

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods. (4.utg.). Sage.

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 177-204. https://doi.org/10.1080/10986061003654240

Vedlegg

Vedlegg I - Intervjuguide

Innledningen til intervjuet:

- Takke for at deltageren ville stille opp
- Forklare formålet med intervjuet
- Forklare at intervjuet er anonymt
- Fortelle deltageren at vi bruker lydopptaker, og spørre deltageren om dette er greit
- Kort gjennomgang av hva intervjuet skal handle om
- Hvor lang tid deltageren kan regne med at intervjuet tar

Oppklarende spørsmål:

- Hvordan ville du startet?
- Kan du gi en mer detaljert beskrivelse av det du gjorde nå?
- Hva tenker du her?
- Hva gjorde du nå?
- Hvorfor ble det slik?
- Hva mener du med det?
- Kan du fortelle steg for steg hva du gjorde her?
- Hvordan kom du frem til dette?
- Det var interessant, kan du si litt mer om det?
- Hva følte du da..?

Avsluttende spørsmål:

- Hvis du skulle trekke ut tre ting som du mener er det viktigste vi har snakket om, hva ville det vært?
- Er det noe mer du vil si eller legge til?
- Kan vi kontakte deg igjen hvis det blir aktuelt? (teste ideer)
- Tusen takk for at du stilte opp!

Oppgave 1:

Mohammed, Silje og Fredrik har alle kjøpt seg ny mobil. Til sammen betalte de 20000. Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin. Mohammed sin mobil kostet dobbelt så mye som Silje sin. Hvor mye kostet hver enkelt mobil?

Oppgave 2:

Mohammed, Silje og Fredrik har alle kjøpt seg ny mobil. Til sammen betalte de 20000 kr. Fredrik sin kostet 1250 kr mer enn Silje sin. Mohammed sin mobil kostet halvparten så mye som Fredrik sin. Hvor mye kostet hver enkelt mobil?

Oppgave 3:

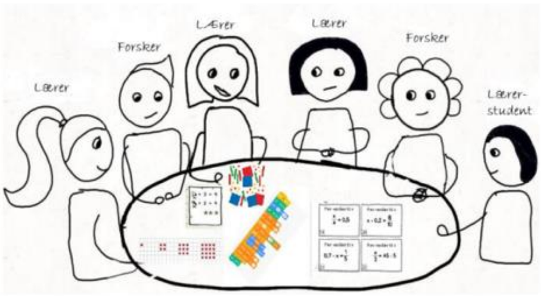
Hva tenker du når du ser denne likningen, og kan du reflektere rundt den?

$X+(X-1000)+2X=20000$

Vedlegg II - Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet *"ALGEBRA"*?

Hei! Har du lyst å være med i et forskningsprosjekt? Vi ønsker å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.



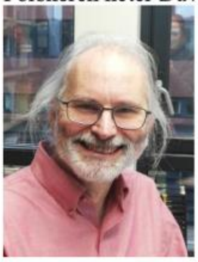
Formål
I dette prosjektet vil vi samarbeide med lærere om utvikling av læringsaktiviteter som legger til rette for at du kan bli god i matematikk, og da med spesielt fokus på algebra. Disse læringsaktivitetene vil inkludere matematiske problemer å bryne seg på, redskaper for å kunne løse problemene, sånn som konkretiseringsmateriell, og anbefalinger for lærerhandlinger, sånn som strategier for å stille spørsmål, hvordan gruppere elever hensiktsmessig, ledelse av gruppediskusjoner og helklassediskusjoner osv. Vi har lyst å se hvordan du og dine medelever deltar i disse aktivitetene, hvilke ideer og tanker dere gjør dere og hvilke muligheter dere får til å lære algebra. Vi håper du vil være med!

Vi vil for eksempel undersøke spørsmål som:
- Hvilke elementer i designet av aktivitetene støtter elevens utvikling av algebraisk tenking?
-Hvilke muligheter og utfordringer for læring av likninger opplever elevene når de jobber med konkretiseringsmateriell, diagrammer og symboler?

Hvis du har lyst å være med, kan det også være at vi ber deg om å forklare oss litt mer om hvordan du tenker når du løser matematikkproblemer. Om du kan tenke deg det så kan du krysse av litt lengre nede for at du også er villig til å gi et intervju.

Dette prosjektet er et forskningsprosjekt fra Universitet i Agder.

Hvem leder forskningsprosjektet?
Forskeren heter David Reid.



Det er også fire forskere til fra UiA med i prosjektet. De heter Martin Carlsen, Linda Gurvin Opheim, Elin Røkeberg Lid og Jorunn Reinhardtsen.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi spør deg om å være med, fordi du er en elev på mellomtrinnet og din lærer i matematikk samarbeider med oss om å lage gode læringsaktiviteter.

Vi vet enda ikke hvem du er eller hva du heter, men din matematikklærer gir deg dette brevet fra oss.

Hvis du har lyst å være med i forskningsprosjektet, må du skrive under på siste ark i dette brevet, og da gir du tillatelse for at vi får inkludere det du gjør og bidrar med i undervisningen når vi samler inn data i ditt klasserom.

Hvis du ikke har lyst å være med, så utelater vi dine bidrag i klasserommet.

Hva betyr det for deg å delta?
Hvis du har lyst å delta i forskningsprosjektet, så følger du matematikkundervisningen på skolen som vanlig. Vi ønsker å filme undervisningen for å kunne gå i detaljer å se hva som hjelper deg å løse utfordrende problemer i matematikk og hvordan undervisningen kan støtte din videre utvikling. Det

kan hende at vi ønsker å ha et intervju med deg. Et intervju er en samtale der vi stiller deg forskjellige spørsmål. Spørsmålene vil handle om hvordan du tenker når du løser problemer og hvilke hjelpemidler du liker å bruke.

Både Linda og Jorunn vil være med under intervjuet, og vi vil gjøre lydopptak av intervjuet. Intervjuet vil ta ca. 30 minutter.

Hvis du synes det er greit, vil vi også samle inn skrevne løsninger som du har jobbet med i klasserommet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det betyr at du kan velge selv om du har lyst å være med eller ikke. Ingen andre kan velge dette for deg. Det er bare du sammen med dine foreldre som kan samtykke. Samtykke betyr at du sier at du synes noe er greit.

Hvis du vil delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Det betyr at det er lov å ombestemme seg, og det er helt i orden. All informasjon om deg vil da bli slettet.

Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller om du først sier «ja» og så «nei». Ingen vil bli sur eller lei seg.

Dersom du ikke ønsker å delta så vil du likevel få likt tilbud om undervisning som dine medelever og du vil få delta i de samme læringsaktivitetene. Vi vil sørge for at du ikke blir med på videoopptakene som gjøres i ditt klasserom. Dersom helklassesamtaler blir aktuelle å filme vil du få tilbud om tilsvarende samtale på et grupperom.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker innsamlet data
Vi vil bare bruke data til å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.
Vi vil ikke dele innsamlet data med andre. Det er bare forskerne i prosjektet som har tilgang til data.
Vi lagrer all data på en sikker datamaskin.
Vi sletter video- og lydopptak fra klasserom og intervjuet når prosjektet er over.
Vi passer på at ingen kan kjenne deg igjen når vi skriver forskningsartikler. Vi vil for eksempel finne opp et annet navn når vi skriver om deg.
Vi følger loven om personvern.

Hva skjer med dine personidentifiserende data når vi avslutter forskningsprosjektet?
Vi er ferdig med forskningsprosjektet 31.12.2030. Innsamling av data kan foregå frem til 31.12.2024, men vi ønsker å beholde innsamlet data frem til prosjektslutt for videre forskning.
Da vil vi passe på at all personidentifiserende data (video- og lydopptak) er slettet.

Dine rettigheter
Du kan klage til Datatilsynet dersom du synes at vi har behandlet dine personidentifiserende data på en uforsiktig måte eller på en måte som ikke er riktig.

Hva gir oss rett til å samle inn personidentifiserende data?
Vi behandler data som inkluderer deg bare hvis du sier at det er greit og du skriver under på samtykkeskjemaet.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål om studien, kan du ta kontakt med:

- *Universitet i Agder* ved
  Jorunn Reinhardtsen, jorunn.reinhardtsen@uia.no, 40 49 23 33
  David Reid. david.reid@uia.no
- Vårt personvernombud:
  Trond Hauso, Personvernombud@uia.no, 936 01 625

Universitet i Agder har bedt Personverntjenester se om prosjektet følger loven om personvern. Personverntjenester har gjort dette, og mener at vi følger loven.

Hvis du lurer på hvorfor Personverntjenester mener dette, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen David, Martin, Linda, Elin og Jorunn

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *ALGEBRA*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at barnet mitt:

- ☐ kan delta i intervju hvor det gjøres video- og lydopptak
- ☐ kan observeres og tas video- og lydopptak av i klasserommet
- ☐ jeg samtykker til at mitt barns skriftlige arbeider kan samles inn/kopieres

Jeg samtykker til at mitt barn, ____,
får delta i prosjektet og innsamlet data kan behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

Samtykkeerklæring 5.- 7. trinn

Klassegruppe	Barnet kan delta i intervju der	Barnet observeres i klasseromme	Barnets skriftlige arbeider	Vi samtykk er ikke til	Besvart når, dato
5	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		21.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		23.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5					
6				Ja	20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7					
6					
5					
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5				Ja	22.01.2023
7				Ja	22.01.2023
6					
5			Ja		23.01.2023
7					
5					
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
6					
6	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
6				Ja	20.01.2023
5					
7					
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
6					
7					
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		21.01.2023
6	Ja		Ja		23.01.2023
5				Ja	23.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7					
5	Ja	Ja			19.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5					
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023

5	Ja	Ja			22.01.2023
7	Ja				19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5					
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
6				Ja	22.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
6		Ja	Ja		21.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		23.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
7					
6				Ja	22.01.2023
6	Ja	Ja		Ja	20.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
5				Ja	19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		19.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		23.01.2023
7	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
7	Ja		Ja	Ja	19.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023
6	Ja	Ja			20.01.2023
5	Ja	Ja	Ja		22.01.2023
6	Ja	Ja	Ja		20.01.2023

Vedlegg III - Meldeskjema NSD

Sikt

Meldeskjema / ALGEBRA-prosjektet / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	**Vurderingstype**	**Dato**
849691	Standard	09.01.2023

Prosjekttittel
ALGEBRA-prosjektet

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
David A. Reid

Prosjektperiode
01.01.2023 - 31.12.2030

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2030.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2030.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og

konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg IV - Algebraprosjektet

ALGEBRA – Algebra Learning: Generalizing, Expressing, Balancing, Reasoning and Argumentation

1. EXCELLENCE

To meet the needs of 21st century societies it is necessary to change the nature of algebra teaching (U.S. Dept. of Education, 2008). Challenges such as climate change and pandemics require understanding of patterns of growth and change of complex systems and engaging in public discourse about these challenges requires the ability to argue in general terms about abstract quantities. Algebra is the area of mathematics focused on generalization, but for many people, school algebra consisted of rearranging strings of symbols according to rules, without developing the ability to reason with generalizations. There is a need for approaches to algebra teaching that develop the ability to use generalizations to describe, analyze and solve problems in real life, an ability we call ‘algebraic reasoning’. The ALGEBRA project is a collaboration of University of Agder mathematics education researchers, teachers, and international colleagues. Its goals are:

· Developing and demonstrating the effectiveness of learning-teaching activities for algebraic reasoning in middle school mathematics teaching, and

· Establishing ways to widely and sustainably implement learning-teaching activities for algebraic reasoning in Norwegian schools.

The project is innovative in its ambition to conduct research in a way that has a direct and sustained impact of school mathematics teaching, and in its research methods that combine the long-term vision of longitudinal research with the refinements of design research. The products of the ALGEBRA project will be developed in collaboration with teachers and will offer to the wider body of practitioners unique algebra resources, designed with the needs of teachers in mind.

1.1 State of the art, knowledge needs and project objectives

1.1.1 State of the art

Norwegian students struggle with algebra (Kaarstein et al., 2020). At the same time, algebra is vital to academic and economic success (Moses & Cobb, 2001) and an essential part of professional skills for the 21st-century (Blanton et al., 2011). This has been recognized by the Norwegian Directorate for Education and Training, which has included algebra related competences, such as generalization and reasoning, as key elements in the 2020 Norwegian mathematics curriculum (Kunnskapsdepartementet, 2019). The focus of the ALGEBRA focus is on reasoning with generalizations, which we refer to as 'algebraic reasoning', Algebraic reasoning is one of four "essential algebraic thinking practices" (Blanton et al., 2019, p. 1934) and involves acting on the generalization as an object and applying it in a novel situation (p. 1935). It is vital for participation in public debate around the complex issues facing contemporary societies. For example, consider the task of estimating sea level rise if the entire volume of ice in Antarctica were to melt. While it is important to know volume formulae and the relative densities of water and ice to accomplish this, simple knowledge is not sufficient. The formulae must be combined in novel ways, treating them as objects to be thought about, not simply instructions to guide calculations.

A small number of well-developed studies have investigated algebra interventions in schools, prior to the usual introduction of algebra in Grade 8. Blanton et al. (2019) conducted a longitudinal study in which they established clear learning goals related to algebraic thinking practices and designed a teaching intervention to achieve these goals in Grades 3 to 5. Quantitative analysis showed that their intervention allowed students to meet the desired learning goals. Radford (2010, 2018) conducted a longitudinal study of students' developing algebraic thinking in Grades 2–6, and developed methods to identify and describe algebraic thinking in the actions of students with limited ability to express themselves in writing. Drijvers et al. (2010) used design research to refine Grade 8 algebra teaching resources through three integrations, with a particular focus on teachers' use of the resources. Zwetzschler (2015) conducted a design-based research study on algebraic equivalence, addressing algebraic reasoning in concrete and accessible situations. The ALGEBRA project will use Blanton et al.'s approach to designing activities, Radford's in-depth analysis of algebraic thinking and Drijvers et al.'s focus on teachers' use of learning-teaching activities. It also introduces to mathematics education

the innovative method of longitudinal design study, combining the longitudinal approach taken by Blanton et al. and Radford with the design approach used by Drijvers et al. and Zwetzschler.

1.1.2 Knowledge needs

International surveys like TIMSS (Kaarstein et al., 2020) and PISA (OECD, 2019) have shown that Norwegian students perform poorly on algebra tasks in comparison both to other areas of mathematics and to students in other countries (Kaarstein et al. 2020). This may be because the emphasis in school on algebra as a symbolic language, associated with rearranging symbols according to rules, has decontextualized and demotivated the teaching of algebra (Kongelf, 2019). Therefore, there is a need for further knowledge on the effective teaching of algebra at the middle school level in Norwegian schools.

It is widely recognized that it is difficult to achieve change in educational systems. Reviews of research on professional development consistently point out that most interventions have no sustained effect (see for example Cohen & Hill, 1998, 2000). It has been suggested that two factors are crucial in effective teaching intervention: consideration of teachers' motivations and the process of teacher change itself (Guskey, 1986). These factors are often missed out when studying the effectiveness of teaching approaches and resources. As Kieran (2014) notes, there is a "need for a certain kind of support by the teacher in order to promote students' algebraic reasoning – support involving both task design and whole-class teacher questioning. However, as has also been noted, research involving the development of such support in teachers has been hindered, at least up to the early 2000s, by a lack of appropriate methodological and theoretical tools." (p. 31). Therefore, there is a need to integrate teachers into research processes, and to develop theoretical and methodological tools for sustainable implementation of new algebra learning-teaching activities in Norwegian schools.

Longitudinal research provides a window into the long-term effects of an educational intervention, realistically capturing the evolutionary nature of learning (Singer & Willett, 2003). However, it does not permit refinement of methods and exploration of different approaches. These are strengths of design research (Prediger, 2019; Bakker, 2018). To develop and implement effective resources for teaching algebraic reasoning, it is essential to both examine their long-term effects and also to refine them, so that the end products are as useable and effective as possible. Therefore, there is a need for a research approach that permits long-term effects of teaching to be observed, while at the same time allowing for refinement of algebra learning-teaching activities.

In summary, there is a need for research that takes a long-term view of algebra learning, that takes an iterative approach to refining algebra learning-teaching activities, and that actively involves teachers in order to produce sustainable changes to algebra teaching in schools.

1.1.3 Project objectives

This project aims to generate knowledge about the nature of research-based Algebra Learning-Teaching Activities (ALTAs) in middle school mathematics teaching, and knowledge about ways to sustainably implement ALTAs in schools. The key objectives are:

· To design and use ALTAs in Grade 5–7 classrooms and demonstrate how they support the development of students' algebraic reasoning.

· To design ALTAs so that they fit the needs of teachers for sustainable use in Norwegian schools.

· To develop a design theory for developing sustainable ALTAs in schools, consisting of:

◦ models which describe and explain how to conduct and sustain ALTAs

◦ learning-teaching design sequences illustrating ALTAs.

◦ generative design principles allowing the re-design of ALTAs for other contexts.

The project will produce design principles applicable to algebra and other contexts, a set of ALTAs with support materials that can be used in schools and develop a network of experienced teachers who can support colleagues in adopting the ALTAs in their own teaching. The ALTAs will include tasks (e.g., problems embedded in realistic contexts), tools (concrete materials, digital environments, etc.) and teacher actions (questioning strategies, grouping strategies, etc.).

1.2 Research questions, theoretical approach and methodology

1.2.1 Research questions and hypotheses

To achieve the objectives of the ALGEBRA project, it is necessary to research ALTAs, to research use of ALTAs by teachers, and to research design principles that can be applied to other contexts.

These needs suggest the following research questions:

RQ1: What elements in the design of ALTAs support students' development of algebraic reasoning?

RQ2: What elements in the design of ALTAs fit the needs of teachers and allow their use in a sustainable way?

RQ3: What design principles can be derived from empirical investigations of ALTAs in middle school classrooms?

As middle school is a developmentally significant period, we expect that age and gender will be important when considering these research questions and these aspects are discussed in section 1.2.5.

1.2.2 Theoretical approach

Two main theoretical sources will be used, tied to the design of ALTAs and the analysis of their effects in classrooms.

The design of the ALTAs will be based on the work of Blanton and her colleagues (Blanton et al., 2019), who build of the foundational work of Kaput (1998) and Kieran (2018). They used "four essential algebraic thinking practices … as organizing principles for the intervention: generalizing, representing, justifying, and reasoning with mathematical structure and relationships" (p. 1934). Generalizing is the process of extracting an underlying structure or relationship from specific instances. Generalizations can be represented in many ways, including traditional algebraic symbols, but also concrete objects, drawings, gestures and natural language. For example, 4, 9 and 25 share a structure, that they are products of a factor multiplied by itself, and this generalization can be symbolized as n2. Justifying involves building "an argument about the validity of a generalization within a given representational system" (p. 1935). What we call 'algebraic reasoning' corresponds to Blanton et al.'s "reasoning with a generalization" in which "one acts on generalizations as mathematical objects … themselves in novel situations" (p. 1935).

Radford's research (e.g., 2002, 2014) focuses on the concept of indeterminacy, as it is central to reasoning with generalizations. He notes that students' development of algebraic reasoning needs to be studied "as a whole, by taking into account the interrelated dialectic development of its various components" (2014, p. 268). The analysis of the classroom data will be guided by Radford's sociocultural Theory of Objectification. In this theory, learning occurs through "objects, artifacts, linguistic devices and signs that are intentionally used by individuals in social processes of meaning production, in order to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions and to carry out their actions" (2002, p. 14). These actions both shape algebraic activity in learning and at the same time are established by operations with tools considering the specific constraints and conditions in classrooms. The linking between gestures, natural language, algebraic signs etc., are important elements of students' meaning making processes in algebraic activity and are central to the investigation of learning in algebra (Radford et al., 2003). Learning with these tools allows the students' algebraic reasoning to be transformed during the course of the activity.

Vedlegg V - Transkripsjoner

Amalie

1. Sondre: Takk for at du ville stille opp.
2. Amalie: Takk for at jeg kunne være med.
3. Sondre: Formålet med dette intervjuet er at vi skal se hvordan du tenker i disse oppgavene. Det er derfor veldig greit hvis du prøver å forklare oss hva du gjør underveis, så godt du kan.
4. Amalie: Ja.
5. Sondre: Det er bare oss to som skal bruke dette intervjuet. Ingen andre vil verken se eller høre det. Vi bruker en lydopptaker, er dette greit for deg?

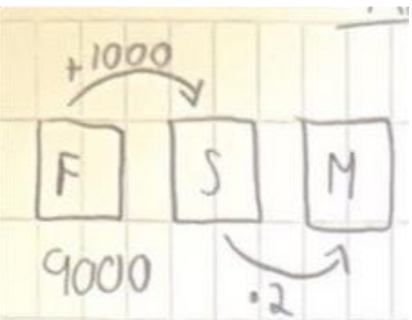
6. Amalie: Ja.
7. Sondre: Så bra.
8. Sondre: Vi har laget en oppgave som er av samme form som de vi har arbeidet med den siste tiden. Denne oppgaven skal løses ved hjelp av papir og deretter Excel. Veldig kjent og likt som vi har hatt i klasserommet
9. Amalie: Ja.
10. Sondre: Intervjuet vil vare i ca. 20 minutter.
11. Sondre: Har du oppgaven?
12. Jon Martin: Ja, den ser sånn ut.

Oppgave 1

13. [Eleven leser oppgaven]

14. Amalie: Ja.
15. Sondre: Hva tenker du når du ser denne oppgaven?
16. Amalie: Mmm, den ser grei ut.
17. Sondre: Så bra. Hvordan ville du startet?
18. Amalie: Kanskje med tre firkanter
19. Sondre: Ja, en hjelpetegning?
20. Amalie: Ja.

21. [Eleven tegner]



Figur 2. Amalie - hjelpetegning fra oppgave 1

22. Sondre: Hvem er det du tar utgangspunkt i her?

23. Amalie: Jeg tegner Fredrik først så Silje og så Mohammed. Og her skal jeg liksom ta pluss tusen og så ja.
24. Jon Martin: Er det en grunn til at du velger å ta Fredrik først?
25. Amalie: Han betaler minst.
26. Jon Martin: Ja, ok.
27. Sondre: Vil du fortsette?
28. Amalie: Ja, det kan jeg.

29. Sondre: Hvorfor er det greit at den du tar utgangspunkt i har minst?
30. Amalie: For da er det enklere å regne.
31. Jon Martin: Og da har du skrevet at?
32. Amalie: At jeg skal plusse på tusen på Silje og doble Silje sin for å få Mohammed sin.
33. Jon Martin: Mhm.
34. Jon Martin: Har du lyst til å regne litt? Se om du får et svar som nærmer seg svaret?
35. Amalie: Ja.

36. [Eleven regner]

37. Amalie: Jeg skal finne ut at alle til sammen blir 20 000, ikke sant?
38. Sondre: Ja.

39. [Eleven regner videre]

40. Amalie: Litt usikker.
41. Jon Martin: Du sa du tok utgangspunkt i Fredrik, sant?
42. Amalie: Ja.
43. Jon Martin: Har du tenkt på noe tall som kan fungere? Hva var det første tallet som du tenkte på?
44. Amalie: Det var egentlig 9000. Da blir det feil.
45. Jon Martin: Hvor langt unna svaret var du da?
46. Amalie: Ganske langt unna tror jeg.

47. Jon Martin: Ganske langt unna? Må du høyere eller lavere for å nærme deg svaret?
48. Amalie: Lavere.
49. Jon Martin: Lavere? Du kan prøve en gang til og se om det endrer seg nå?
50. Amalie: Mhm.

51. [Eleven regner]

52. Sondre: Kom du nærmere nå?
53. Amalie: Ja.

54. [Eleven regner videre]

55. Sondre: Hvorfor valgte du å øke med… Nei, du er på samme nå fortsatt kanskje?
56. Amalie: Jeg er på tre tusen istedenfor to tusen.
57. Sondre: Ja du er på tre tusen ja.
58. Sondre: Hvorfor valgte du å øke med tusen?
59. Amalie: Fordi jeg var litt langt unna også tenkte jeg hvis jeg øker med tusen er jeg nærmere.
60. Sondre: Ja ok.
61. Sondre: Vil du kanskje ha Excel?
62. Amalie: Ja.

63. [Finner frem Excel]

64. Jon Martin: Sånn. Hvis du bare kan kalle det nederste arket for A.
65. Amalie: Ja.

66. [Jobber på Excel]

	A	B	C	D
1	Fredrik	Silje	Mohammed	Fasit
2	1	1001	2002	3004
3				

Figur 3. Amalie - kontrollering av formler

67. Jon Martin: Kan du fortelle mens du skriver?
68. Amalie: Ja. Jeg skriver Fredrik i A1, Silje i B1 og Mohammed i C1. Også skal jeg skrive en for å starte med, og i B2 er lik a2 pluss 1000.
69. Jon Martin: Ja, ok. For da er b2 Silje?
70. Amalie: Ja.
71. Jon Martin: Mhm.
72. Jon Martin: Og nå?
73. Amalie: der er B2 ganger 2.
74. Jon Martin: Og den siste cellen viser?
75. Amalie: Summen. Da må jeg ta a2 pluss b2 pluss c2.
76. Jon Martin: Ja
77. Jon Martin: Og du har allerede prøvd noen tall på papir?
78. Amalie: Ja
79. Jon Martin: startet med 9000 så 2000 og så 3000
80. Amalie: Ja
81. Jon Martin: Hva tenker du er naturlig å prøve nå da?
82. Amalie: 4000
83. Jon Martin: 4000?
84. Amalie: Ja.
85. Jon Martin: Og da fikk du?
86. Amalie: 19000
87. Jon Martin: 19000, så det er nærmere?
88. Amalie: Ja.
89. Jon Martin: Mhm. Neste tall du prøvde var?
90. Amalie: 4500. og da fikk 21000 som er litt for mye.
91. Jon Martin:Det var litt for mye ja.
92. Amalie:Så da prøver jeg 4050, og det var litt for lite igjen

93. Amalie: 4075 kanskje? Det ble også for lite.
94. Amalie:4200 kanskje. også for lite
95. Jon Martin: Nærmer seg.
96. Amalie: Ja
97. Amalie: 4300 kanskje? det tror jeg blir litt nærmere. det var for mye.
98. Jon Martin: Litt for mye.
99. Amalie: Ja
100. Amalie:4250, ja.
101. Jon Martin: Der ja. Der fant du ut av det.
102. Amalie: Ja.

	A	B	C	D
1	Fredrik	Silje	Mohammed	Fasit
2	4000	5000	10000	19000
3	4500	5500	11000	21000
4	4050	5050	10100	19200
5	4075	5075	10150	19300
6	4200	5200	10400	19800
7	4300	5300	10600	20200
8	4250	5250	10500	20000

Figur 4. Amalie - utprøvde verdier under gjett og sjekk

103. Jon Martin: Hadde du noe spesiell taktikk når du valgte de tallene du prøvde?
104. Amalie: Ja, jeg prøvde først å gå opp 1000 om gangen, og så se hva som er nærmest. Og så prøvde jeg å ta først halvparten av det tallet og så bare bygde jeg meg oppover eller nedover. … Om det var for høyt eller for lavt.
105. Jon Martin: Mhm. Bra, du fikk til den.
106. Amalie: Ja.
107. Jon Martin: Vi har tid til å prøve på den andre oppgaven også, hvis du har lyst til det?
108. Amalie: Ja.
109. Jon Martin: Da kan du bare bla ned her, så kan du lese det litt. Akkurat samme navn bare litt annerledes.

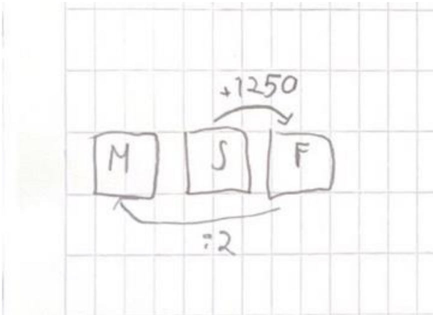
110. Amalie: Ja.

Oppgave 2

111. [Eleven leser oppgaven]

112. Jon Martin: Så kan du velge hvordan du ønsker å løse den selv.
113. Amalie: Ja, jeg kanskje begynner med å tegne så kan jeg gå over på det arket.
114. Jon Martin: Mhm.

115. [Eleven lager hjelpetegning]



Figur 5. Amalie – hjelpetegning fra oppgave 2

116. Jon Martin: Jeg ser at du har valgt en litt annerledes rekkefølge
117. Amalie: Ja
118. Jon Martin: Kan du forklare litt om det?
119. Amalie: Jeg tok Mohammed først, så Silje og så Fredrik. For det var litt enklere å tegne mellom Silje og Fredrik og Fredrik og Mohammed.
120. Jon Martin: Mhm.
121. Amalie: For da kan du bare ta strek fra Fredrik til Mohammed med dele på to. Og Silje til Fredrik med pluss 1250.
122. Jon Martin: Mhm. Da kan du egentlig velge selv om du vil gjette og sjekke på papir eller i Excel. Gjør du føler hjelper deg.
123. Amalie: Kanskje rett på Excel? Det er enklere
124. Jon Martin: Ja.

125. Jon Martin: Da har du startet med oppgaven i samme ark?

126. Amalie: Ja.

127. [Eleven løser oppgaven på Excel]

Mohammed	Silje	Fredrik	
4250	7250	8500	20000

Figur 6. Amalie - løsning på oppgave 2 i Excel

	A	B	C	D
1				
2				
3	Mohammed	Silje	Fredrik	
4	4250	=C4-1250	=A4*2	=A4+B4+C4

Figur 7. Amalie - løsning på oppgave 2 i Excel med formler

128. Jon Martin: Hva tenker du nå?
129. Amalie: Helt ok.
130. Jon Martin: Mhm.
131. Jon Martin: Nå skriver du navnene på nytt?
132. Amalie: Ja, men i forskjellig rekkefølge.
133. Jon Martin: Ja, hvorfor gjør du det?
134. Amalie: Uhm, jeg skriver Silje og så Fredrik og så skal jeg skrive Mohammed. Så skriver jeg en som start. Og så er det Silje sin for da.. er lik Fredrik sin minus 1250. Mohammed sin gange 2.
135. Jon Martin: Mhm.
136. Amalie: Den pluss den, alle plusset sammen.
137. Sondre: Hvorfor valgte du å starte med en på Mohammed?
138. Amalie: Eh, en start så det er enklere å få skrevet inn de.
139. Sondre: Ja, skjønner.
140. Amalie: Starter med 1000, det ble altfor lite.
141. Amalie: Det ble for mye.
142. Jon Martin: Neste tallet du prøvde var?
143. Amalie: 10000, det ble for mye. Så prøver jeg 5000. Det var litt for mye.

144. Jon Martin: Litt for mye ja.
145. Amalie: Så 3000.
146. Jon Martin: Det ble?
147. Amalie: Det ble for lite.
148. Jon Martin: Mhm.
149. Amalie: 4000 da - det ble litt for lite. 4500 - det ble litt for mye.
150. Jon Martin: Mhm, hva vet vi da?
151. Amalie: Da må jeg gå litt ned.
152. Jon Martin: Mhm
153. Amalie: 4250 kanskje? Ja.
154. Jon Martin: Der ja.
155. Jon Martin: Hva syns du om det å løse slike oppgaver i Excel?
156. Amalie: Jeg synes det er ganske gøy.
157. Jon Martin: Det er gøy?
158. Amalie: Ja.
159. Jon Martin: Føler du at det er hjelpsomt?
160. Amalie: Ja, veldig.
161. Jon Martin: Mhm. Klarer du like lett å se sammenhengen som når du tegner?
162. Amalie: JA.
163. Jon Martin: Hvis du kunne valgt mellom enten excel eller papir, eller ville du tatt i bruk begge?
164. Amalie: Hmm, begge.
165. Jon Martin: Begge?
166. Amalie: Ja.
167. Jon Martin: Hvorfor tenker du det?
168. Amalie: Fordi det er lettere når man først setter det opp på ark og så skriver man det inn på Chromebook.
169. Jon Martin: Mhm.
170. Jon Martin: Nå i den siste tiden har vi tatt i bruk oppgaver som er reelle, sant? Som mobiler eller klatresele eller hva annet hadde vi?
171. Amalie: Klinkekuler.
172. Jon Martin: Klinkekuler! Ser du mer sammenheng når vi jobber med slike konkrete ting?
173. Amalie: Ja.

174. Jon Martin: Ja? Det hjelper deg?
175. Amalie: Ja.

Oppgave 3

176. Jon Martin: Nå kan du fortelle oss hva du tenker når du ser den oppgaven som kommer nå.
177. Amalie: Ja.
178. Jon Martin: Hva er det du umiddelbart tenker her nå?
179. Amalie: Mmm, den ser litt vanskelig ut.
180. Jon Martin: Den ser vanskelig ut?
181. Amalie: Ja.
182. Jon Martin: Hva tror du denne oppgaven handler om?
183. Amalie: Kanskje som den der eller som den?
184. Jon Martin: Hvorfor tenker du det da?
185. Amalie: Fordi det var x minus 1000 også var det med svaret også var det tre stykker på en måte.
186. Jon Martin: Mhm, du ser at det er tre forskjellige personer?
187. Amalie: Ja.
188. Jon Martin: Klarer du å se noe forskjellig på hver enkelt av de tre?
189. Amalie: Mmm, nei.
190. Jon Martin: Hva skal det bli til sammen da?
191. Amalie: Mm, 20000. Så det er det samme svaret.
192. Jon Martin: Samme svaret?
193. Amalie: Ja
194. Jon Martin: Som?
195. Amalie: Begge.
196. Sondre: Ser du noe felles i hvert ledd? Mellom pluss og pluss.
197. Amalie: Ja
198. Sondre: Hva er det?
199. Amalie: X
200. Sondre: Ja

201. Amalie: Bare at den til høyre har 2x og den ene har en x.
202. Sondre: Men alle inneholder x?
203. Amalie: Ja.
204. Sondre: Hva vil det si da? Hvis den tar utgangspunkt i en av disse oppgavene?
205. Amalie: Det vil vel egentlig si at hvis man tar så blir det samme tall, bare at den til høyre har to av de og den i midten har tusen mindre.
206. Jon Martin: Mhm.
207. Jon Martin: Gjorde du noe lignende når du jobbet i Excel?
208. Amalie: Det vet jeg ikke.
209. Sondre: Helt i starten når du løste denne her
210. Amalie: Ja.
211. Sondre: Så valgte du Fredrik først, hva var grunnen til det, husker du hva du svarte da?
212. Amalie: Uhm, det var det minste.
213. Sondre: Ja, og da tok du utgangspunkt i Fredrik?
214. Amalie: Ja.
215. Sondre: Ser du noen sammenheng med det jeg spurte om i denne oppgaven?
216. Amalie: Ja, litt. Man skal på en måte finne det som er minst og det i midten for det er parentes rundt, og at det blir det minste.
217. Jon Martin: Hva føler du om slike oppgaver når du kun ser de på papir?
218. Amalie: Det er litt vanskeligere enn sånne oppgaver vi gjør nå.
219. Jon Martin: Mhm. Du sa det hjalp med ekte og konkrete ting - har det noe med saken å gjøre?
220. Amalie: Kanskje.
221. Jon Martin: Den oppgaven her er den samme som den
222. Amalie: Mhm.
223. Jon Martin: Og det er fordi at vi har tatt utgangspunkt i den nå
224. Amalie: Ja
225. Jon Martin: Fordi at den er knyttet til både den og den
226. Amalie: Ja.
227. Jon Martin: Klarer du å se det?
228. Amalie: Ja.
229. Jon Martin: For hvis vi har den x, så vet vi at den der er åssen i forhold til den?
230. Amalie: 1000 mindre

231. Jon Martin: Og den?
232. Amalie: er to ganger mer
233. Jon Martin: To ganger mer ja. Så det er egentlig den samme oppgaven, bare at den kun er tekst egentlig.
234. Amalie: Ja.
235. Jon Martin: Men der var klokka
236. Sondre: Det er ikke noe mer du vil føye til over hva du har tenkt?
237. Amalie: nei egentlig ikke
238. Jon Martin: jeg synes det gikk bra
239. Sondre: takk for at du stilte opp
240. Amalie: Takk for at jeg fikk komme.
241. Jon Martin: Vi kommer og henter neste, så får vi tid til å ta over lyd og sånn.

Morten

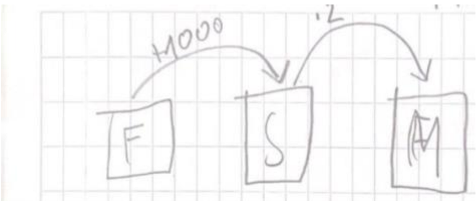
1. Sondre: Takk for at du ville stille opp og hjelpe oss.
2. Morten: Ja.
3. Sondre: Formålet med intervjuet er at vi skal se på hvordan du jobber når du jobber med de oppgavene vi har jobbet med i det siste. Sånn som den klinkekule-oppgaven osv.
4. Sondre: Det er bare oss som skal se dette intervjuet, og det vil bli tatt opp med lydopptaker.
5. Sondre: Vi har laget en oppgave som er av samme form som de tidligere oppgavene. Denne skal du løse ved hjelp av papir og deretter kan du bruke excel. Vi vil gjerne at du prøver å forklare hva du gjør underveis. Det vil ta ca. 20 minutter.
6. Sondre: Da har du oppgaven her.
7. Morten: Ja.

Oppgave 1

8. [Eleven leser oppgaven]

9. Morten: Nå tenker jeg bare å finne ut av hvor mye må Mohammed sin koster, og den kostet…. Silje sin kostet 1000 mer enn Fredrik sin. Mohammed sin må koste dobbelt så mye som Silje sin.
10. Sondre: Mhm.
11. Morten: Ehh ja. hvor mye kostet hver enkelt mobil

12. Morten: 20000 til sammen og det er tre personer. jeg har lyst til å ta 20000 og dele på tre, men det er hmmm, la meg se. Det ville vært 5000 for hver enkelt mobil, men Silje sin kostet 1000kr mer enn Fredrik sin og Mohammed kostet dobbelt så mye som Silje sin sååå.
13. Sondre: Hvordan ville du begynt hvis du skulle gjort dette på ark?
14. Morten: Jeg ville lagd hjelpetegning og sett hvem som… den minste til den dyreste mobilen.
15. Jon Martin: Mhm.



Figur 8. Morten - hjelpetegning fra oppgave 1

16. Morten: Silje sin kostet mer enn Fredrik sin.
17. Sondre: ja
18. Morten: Hvis den kostet dobbelt så mye som Silje sin, da må Fredrik sin være minst og Mohammed sin være størst.
19. Jon Martin: Ja.
20. Morten: Da vil Silje sin.. Da ville jeg tatt Fredrik sin også plusse på eller gjort dette. Såå. også tatt pluss 1000. og da ville jeg tatt Silje sin. Ehh sånn. også ville jeg tatt gange to her. så da må jeg bare finne ut hvor mye hver enkelt mobil kostet. så hvis ja. dette kan være mange svar. det kan være 5000 for hver, det kan være andre ting. jeg er ikke så god på disse oppgavene sånn egentlig. jeg ville sikkert sagt sånn her, men hvis kanskje Fredrik sin kostet 4000 og Silje sin kostet 5000 og Mohammed kostet 10000, da er det 19000 til sammen. Ja jeg er ikke god på matte.
21. Jon Martin: Det var ikke langt unna det da.
22. Morten: Ja.
23. Sondre: Vil du prøve å gjette med noen tall?
24. Morten: Jeg ville egentlig bare sagt 5000 kr per mobil hvis de kjøpte samme mobil.
25. Sondre: Ja. Hvis du skulle ta utgangspunkt i dette også prøver du med noen tall?
26. Jon Martin: Du sa et tall nå som bare var 1000 unna.
27. Morten: Vi pleier å bruke regneark, så det blir mye lettere.
28. Jon Martin: Mhm.

29. Morten: så denne her er litt vanskeligere siden jeg ikke er den beste i matte i klassen
30. Jon Martin: Det er ikke farlig, du var ikke langt unna på første gjett.
31. Morten: Jeg har lyst til å si 5000, men det er sikkert ikke svaret.
32. Sondre: Vil du prøve å skrive det opp de forskjellige?
33. Morten: Vent litt hvis det er 20000 også er det tre personer. Ehmm. Matte vil bare ikke virke i hodet mitt i dag.
34. Jon Martin: Vi har god tid.
35. Sondre: Du har en hjelpetegning som kan hjelpe deg.
36. Morten: Hjelpetegning hjelper meg egentlig ikke så mye.
37. Sondre: Ok.
38. Morten: Jeg bruker mest regneark og bruker den der tingen som bare ganger for meg.
39. Jon Martin: Det virker som du regner mye i hodet?
40. Morten: Det gjør jeg faktisk. Jeg pleier å regne i hodet, for det er lettest på en måte.
41. Jon Martin: Du kan prøve i Excel hvis du vil?

42. [Finner frem Excel]

43. Morten: Her ville jeg tatt F, S og M. også skrive to tall her
44. Jon Martin: ja
45. Morten: Her ville jeg skrive er lik, nei først ville jeg skrevet hvor mye Fredrik sin kostet.
46. Jon Martin: Mhm.
47. Morten: Silje sin kostet 1000 mer enn Fredrik sin. Ehm la meg finne ut hvor mye Fredrik sin kostet. jeg vil si at det er 20000 delt på tre. Hmm. nei jeg vet ikke. hvert fall er lik tegnet også er det. Hmm, det er mye lettere i klasserommet jeg vet ikke hvorfor.
48. Jon Martin: Heheh.
49. Morten: Hmm. hvis jeg hadde bare visst hvor mye Fredrik sin hadde kostet hadde det vært mye lettere, men det er vanskelig.
50. Jon Martin: trenger du å vite det i starten?
51. Morten: Jeg vet egentlig ikke, vi pleier bare å starte liksom og ta det tallet som er først også skal ta der er lik A2 pluss tusen eller pluss hvor mye vi plusser. den her er lik b2 ganger to.

52. Jon Martin: Mhm. Prøv på det da.
53. Morten: Ok. Da tar jeg 5000.
54. Sondre: Ja.
55. Morten: A2 pluss 1000. Uhm. Det blir 6000. Også er det A2 ganger 2 det blir 10000. Også total er lik A2+B2+C2. Da er det 21000.
56. Jon Martin: Mhm.
57. Morten: Hvis jeg tar her for eksempel jeg vet ikke 6000, da kan jeg være nærmere, ånei mindre.
58. Morten: 7500 siden. 19000, jeg tror hvis det er i mellom så er det . ja. Da fant jeg det ut. Da betalte Fredrik 4750, Silje 5750 og Mohammed 9500.
59. Sondre: Ja, ehm.
60. Jon Martin: Kan du vise hva du har gjort i de ulike cellene?
61. Morten: Ja. først så var det her jeg tok det tallet jeg trodde 5000. også gikk jeg til neste og satte er lik a2 pluss 1000. også tok jeg enter. så da plusset det på 1000 fra a2. også gikk jeg på Mohammed er lik tegnet og tok a2 gange to. ikke b2 gange 2 siden dobbelt så mye som Silje, nei vent litt. da må jeg ta.. er lik b2 ganger 2. da ville det vært litt for mye.
62. Jon Martin: Mhm.
63. Morten: Da ville jeg prøvd 3000. det ville vært litt for lite. også jeg gjetter at det ville vært 4250. Ja.
64. Jon Martin: Der ja.

	A	B	C	D
1	F	S	M	Total
2	4000	5000	10000	19000
3	5000	6000	12000	23000
4	6000	7000	14000	27000
5	4750	5750	11500	22000
6	3000	4000	8000	15000
7	4250	5250	10500	20000

Figur 9. Morten - utprøvde verdier under gjett og sjekk

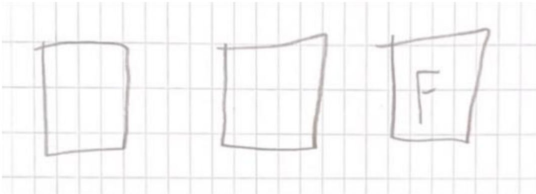
65. Morten: Da er det litt annerledes for jeg leste litt feil.
66. Jon Martin: Du leste feil?
67. Morten: Ja.

68. Jon Martin: Mhm
69. Morten: Jeg trodde det var Mohammed sin som kostet dobbelt så mye som Fredrik sin.
70. Jon Martin: Mhm. Men da hadde det vært riktig hvis det hadde vært sånn?
71. Morten: Ja, da tok jeg det samme
72. Sondre: og du tenkte riktig her først, så du glemte deg sikkert litt når du skulle skrive det inn
73. Morten: Ja. Da skriver jeg under her, Fredrik sin er… også Silje sin … også 10500. også to streker under svaret.
74. Jon Martin: Skal vi prøve på den andre oppgaven også?
75. Morten: Ja.
76. Jon Martin: Det gikk veldig greit dette, synes du det?
77. Morten: Mhm.
78. Sondre: Så bra.
79. Jon Martin: Da har vi laget en oppgave som har de samme med samme navnene, samme total, men forholdene er litt annerledes.

Oppgave 2

80. [Eleven leser oppgaven]

81. Morten: Da ville jeg gjort på en måte det samme igjen. Så jeg vet ikke hvor mye Fredrik sin koster, så først tegner jeg opp boksene enkelt og greit.
82. Jon Martin: Mhm.
83. Morten: hvis Fredrik sin koster mer enn Silje sin og den koster halvparten av Fredrik sin så er det Fredrik sin som koster mest. ehhmm og da er det 1250 mer enn Silje sin. Mohammed sin kostet halvparten av Fredrik sin. den kostet halvparten, da må vi finne ut hvor mye den koster for hvis halvparten er mer enn 1250 da er Mohammed sin minst, men hvis den er mindre 1250 da er Silje sin minst. og det vet jeg ikke hvordan jeg skal finne ut akkurat nå. men til sammen betalte de 20000 kr. det regnearket kunne hjulpet meg igjen. jeg tror jeg går inn på regnearket.



Figur 10. Morten - hjelpetegning fra oppgave 2

84. [Finner frem Excel]

85. Morten: til nå så vet vi bare at… hvis jeg hadde gjetta så er halvparten til Mohammed sin ville vært mindre sikkert enn Silje sin. for en mobil koster ikke så mye. Mohammed sin er minst. og da ville jeg bare gjette hvor mye Mohammed sin koster. da ville jeg bare gjettet 2000.
86. Morten: Men Silje sin hvis den koster mer. Åja, Silje sin koster mer enn. Åja nå er jeg litt dum, jeg trodde det stod mindre. Ups. da bare bytter vi på den også er det.. Fredrik er her siden Silje sin koster mer. Ånei, Fredrik sin koster mer. jeg kan ikke lese i dag.
87. Sondre: Det går fint, vi har god tid
88. Morten: Så jeg leste riktig første gang ok. Så da tar jeg =a2
89. Jon Martin: På Silje?
90. Morten: Koster mer enn Silje sin. Da er det minus tror jeg, jeg vet ikke jeg har aldri gjort minus på denne. 2750. Også kostet halvparten så mye som Fredrik sin, da vil jeg ta, ville jeg tatt at =a2/2. Det ville vært 1000. Og da har jeg glemt å skrive total. Også total da er det =a2+b2+c2. Sånn da ville det vært 3750. Men så hvis det koster 20000. Da er det bare å gjette seg frem til svaret. Men, Mohammed sin koster mest nå men det er fordi at jeg tok en veldig stor pris, så hva hvis jeg tar sånn der 750. Det kan ikke være det. Da tar jeg litt høyere så da er det 5000. Bare gjetter. Da er det 11000. Oh my god hvor mye koster Mohammed sin? Men, Mohammed sin, men er det. Mohammed sin mobil koster halvparten så mye som Fredrik sin. Da er det denne her. Denne her er litt vanskelig. Vi har bare lært om liksom ganging og pluss, ikke minus og deling. Fredrik sin kostet 1000 kr mer. Mohammed sin mobil kostet halvparten så mye som Fredrik sin.
91. Jon Martin: Så hvem er størst av Mohammed og Fredrik?
92. Morten: Det er Fredrik, tror jeg.

93. Jon Martin: Ja, hva gjorde du på Fredrik sin celle da?
94. Morten: Jeg tok a2/2 fordi at Mohammed sin mobil kostet halvparten så mye som Fredrik sin, men nå bytter jeg på Mohammed sin tror jeg.
95. Jon Martin: Så du tok det som står i Mohammed sin og delte det på to i Fredrik sin?
96. Morten: Ja, altså hvis jeg skriver sånn her: 5000 igjen…
97. Jon Martin: Ja, så skal Fredrik ha?
98. Morten: 2500, men hvis det er Mohammed sin mobil som koster halvparten så mye. Så hvis jeg kanskje tar her: =a2/2. Da er det null. Hvorfor er det null? jeg vet ikke, men her må det i hvertfall være, Det er her skal det være det normale svaret. Hvis jeg prøver dette, og hvis jeg gjør litt høyere. 5000.
99. Jon Martin: Nå ser jeg at det bare står null på den første kolonnen.
100. Morten: Ja, jeg vet ikke hvorfor
101. Jon Martin: Hva har du skrive da?
102. Morten: Jeg har skrive = å nei feil [Oppdager her at han har gjort feil og retter på det) =c2 istedenfor dele på 2(c2/2].
103. Jon Martin: Ja
104. Morten: 2500. Da må jeg bare komme meg frem til svaret! Yeyyy. Da tar jeg at Mohammed sin er 1250. Det ble totalt 14000. Nei hva hvor mye kostet Mohammed sin?? Ehm da er det kanskje 6000. Sikkert ikke det er litt for lite. Hva hvis jeg tar cirka det samme som sist gang 10500. Vent her bare står det 5000 fortsatt, den her bytter bare ikke på seg. Da må den her være bare normal. Da er det a= a2*2 i guess, tror jeg, jeg vet ikke. a2*2.
105. Jon Martin: Hvorfor skriver du gange 2 da?
106. Morten: Fordi liksom den er halvparten da
107. Jon Martin: Mhm
108. Morten: Så er 5000. Prøv igjen yey. Da gjetter jeg at det er bare 6250. Nei det ble for mye. Oi, nå blir den jo 12000. Okei da må jeg gå på 4750. Okei nå forstår jeg ingenting. hehe.
109. Jon Martin: Det er ikke langt unna.
110. Morten: Okei hvis jeg bare tar noe liksom random. Da er det ikke. Prøver med 4200. Hæ var det hele tiden 5750? Okei den her har ikke lyst til å være med meg idag.

111. [Eleven prøver ut forskjellige tall]

112. Morten: Hva hvis jeg bare tar 7000, nei da blir det for mye. Okei da, jeg føler svaret må være komma noe. Kanskje.
113. Jon Martin: Hvor var du nærmest riktig total? Hvilket tall hadde du da?
114. Morten: Jeg vet faktisk ikke. Jeg må bare gå på 5000 igjen. Nei jeg tror den nærmeste summen var 5750. Som ga meg 21750
115. Jon Martin: Mhm, og er det for høyt eller for lavt?
116. Morten: Det er for høyt. Men hvis jeg tar 4750 blir det bare 18000 eller noe.
117. Jon Martin: Mhm, så det er en plass imellom det da?
118. Morten: Da må jeg prøve en plass mellom det da. Okei da må jeg prøve 5350 kanskje da. Da får jeg 20150.
119. Jon Martin: Det var litt for høyt?
120. Morten: Kanskje, hva hvis jeg tar 5150. Nei. Okei hva hvis jeg tar den jeg var nesten nærmest på også tar jeg bare komma 5. Nei, det virker bare ikke. Oh my god dette her er bare gjetting nå. Ehh, nei jeg føler at det ikke er det. 5160. Da får jeg 19790. Jeg føler at liksom svaret er sånn 5000, jeg har prøvd 350. Hva hvis jeg prøver 5400. Jeg føler meg dum hvis det er svaret. Nei ok. Prøver 5100. Nei det er ikke det. det er i midten liksom, men hva hvis det ikke er det. Hva hvis det er 5225. Det kan det ikke være. Hva med 5335? Okei det der var det nærmeste. Hva hvis jeg prøver sånn 5275. Å denne her var vanskelig. Prøver 5315. Oh my god, åja jeg tror jeg vet hva svaret er.! Nei sure. Det nærmeste jeg har vært er 5335. Hva med 5310 da. 5320. Nå bare gjetter jeg mange svar liksom i midten her. Jeg føler at jeg burde ha fått svaret til nå.

M	S	F	TOTAL
7000	5750	14000	26750
5000	3750	10000	18750
5750	4500	11500	21750
4750	3500	9500	17750
5350	4100	10700	20150
5150	3900	10300	19350
5160	3910	10320	19390
5400	4150	10800	20350
5100	3850	10200	19150
5225	3975	10450	19650
5335	4085	10670	20090
5275	4025	10550	19850
5315	4065	10630	20010
5310	4060	10620	19990
5320	4070	10640	20030

Figur 11. Morten - utprøvde verdier under gjett og sjekk i oppgave 2

121. Jon Martin: Det går nok fint det. Du fikk til den første da.
122. Morten: Yay.

Oppgave 3

123. Jon Martin: Vi har en oppgave som du bare skal se kjapt på og fortelle hva du tenker. Du trenger ikke å løse den eller noe.

124. [Eleven får se oppgaven]

125. Morten: Å
126. Jon Martin: Hva tenker du når du ser det?
127. Morten: Jeg føler at det er så mye de betalte for telefonen.
128. Jon Martin: Fordi?

129. Morten: Fordi, for det første svaret er 20000 også må x-1000 også +*2 også x kan være det man skal betale for telefonen. Også er det minus 1000 også skal de gange med 2 også skal det bli 20000. Det er kanskje en ny mobil oppgave. Jeg tenker at den er grei hvis det bare er sånn: en setning der det bare er sånn han og han og han eller hun og hun og hun kjøper en mobil og sånt.
130. Jon Martin: Mhm, fordi nå sa du. Hvor mange personer sa du nå at det var?
131. Morten: Tre.
132. Jon Martin: Tre? Hvor er de forskjellige tre personen i dette stykket?
133. Morten: Ehm, så x det er algebra så det kan være et svar. Da er det x pluss noe minus 1000. Så kanskje det er det svaret minus 1000 også ganger man med to på den første, så da er det tre folk.
134. Jon Martin: Ja
135. Morten. Og det har vært tre folk i de siste to oppgavene
136. Sondre: Så du mener da at x er en person, også mente du at x-1000 er en person.
137. Morten: Mm, ja sånn ja liksom litt at liksom det går fra den personen og da er det minus 1000 også går det fra den personen og da ganger du med to fra den personen.

138. Jon Martin: Hva syns du med å løse sånne oppgaver på papir kontra Excel?
139. Morten: Ehm, ja det er veldig fint, liksom å løse sånne oppgaver som det her på papir?
140. Jon Martin: Mhm.
141. Morten: Det har jeg på en måte gjort alle mine 7 år så jeg syns det er veldig fint, men jeg syns det er litt bedre på regneark. Fordi der kan man lage liksom matematisk kalkulator som bare gir deg svaret.
142. Jon Martin: Mhm. Det går litt fortere?
143. Morten: Ja, går litt fortere enn ark.
144. Jon Martin: Mange av de oppgavene som var denne uken med klatresele og klinkekuler og alder og alt sånn.
145. Morten: Med de klinkekulene var jeg syk.
146. Jon Martin: Ja, alle de er jo faktiske ting som er reelle. Hjelper det deg i å løse oppgaver?
147. Morten: Ehm, ja eller hvis du tenker liksom på sånne type oppgaver. Hvis kanskje dette hadde vært sånn der klinkekule oppgaven for eksempel. Det er litt lettere å skrive liksom. Den, den og den har hvor mange klinkekuler. Hvor mange må hver

ha for å ha 484 som svaret var. Det er litt lettere når det står sånn i stedet for hvis det står sånn [Likningen vi viste]. Da tenker man liksom å nei dette er umulig.

148. Jon Martin: Så hvis du kun hadde fått det der uten noe annet.
149. Morten: Åja, men da ville dette her [likningen] liksom ha vært det letteste fordi vi har øvd på det sant? Den her [klinkekule oppgaven] kunne ha vært lettere hvis vi bare hadde øvd på sånne isteden for de andre.
150. Sondre: Den likningen vi viste deg ista er den samme som den første oppgaven du fikk i dag, bare satt opp som en likning i stedet.
151. Morten: Wow, kult. Så jeg har på en måte løst den oppgaven ved hjelp av to duder som heter Mohammed og Fredrik og en jente som het Silje. Ja, det er gøy. Mye lettere.
152. Sondre: Ja, nei det er bare det.
153. Morten: Jeg tror ikke moren min ville ha greid den oppgaven.
154. Sondre: Haha nei, det tror jeg ikke min mor heller ville klart.
155. Jon Martin: Haha, nei mamma ville kanskje klart den, men ikke pappa.
156. Sondre: Ja, da tror jeg bare vi vil takke for at du stilte opp.

157. [Vi hadde nå skrudd av lydopptakeren og småpratet litt med eleven, da han plutselig begynte å snakke om hvordan han regnet matte når han var yngre. Derfor skrudde vi på lydopptakeren igjen og ba han gjenfortelle]

158. Jon Martin: En gang til:
159. Morten: Jeg brukte liksom mange viskelær og sånn for å hjelpe meg med ganging, men læreren min hun gadd ikke å ta de vekk fordi hun sa at jeg begynte å bli veldig god i matte bare på grunn av de tingene.
160. Sondre: Så du brukte reelle ting for å regne rett og slett?
161. Morten: Ja, hvis jeg ikke kunne bruke liksom fingrene mine så brukte jeg det andre.
162. Sondre: Interessant.

Janne

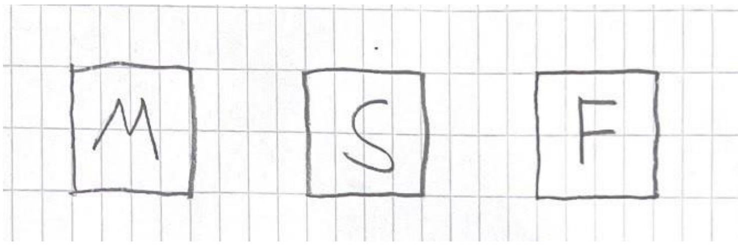
1. Sondre: Takk for at du ville stille opp. Formålet med intervjuet er å se på hvordan du tenker når du jobber med de oppgavene som vi har jobbet med de siste ukene, og noe lignende.

2. Janne: Mhm
3. Sondre: Det er som sagt bare oss og vi som skal bruke dette intervjuet her, og det blir jo tatt opp med en lydopptaker. Det var greit for deg?
4. Janne: Ja
5. Sondre: Vi har laget en oppgave som er i samme form som de vi har hatt de siste ukene med Eirik.
6. Janne: Mhm
7. Sondre: Og den skal du da prøve å løse først ved hjelp av papir og deretter ved hjelp av Excel. Og vi vil gjerne at du prøver å forklare oss hva du tenker når du jobber med oppgavene.
8. Jon Martin: Bare prøv å snakke mens du jobber og også si hvorfor du for eksempel tok det tallet også. Ikke sant?
9. Janne: Mhm.
10. Sondre: Intervjuet vil ta cirka 20 minutter.
11. Janne: Ja
12. Sondre: Da har vi oppgaven her, har vi ikke det?
13. Jon Martin: Ja

Oppgave 1

14. Janne: Bruker noen sekunder på å se over oppgaven.
15. Jon Martin: Hva tenker du når du ser denne oppgaven?
16. Janne: Jeg tenker det kan være litt vanskelig siden det er så høye tall.
17. Jon Martin: Mhm,.. Hvordan hadde du gått frem om du hadde løst den?
18. Janne: Ehhhm, hvis jeg skulle gjort det på regneark da.
19. Jon Martin: Ja
20. Janne: Eller på den vi bruker i klasserommet, så ville jeg tatt å, ehhm, først skrive ehhm, skrive navnene også skrive, eh ehm under hvor mye det er hvor det står, Silje sin kostet 1000 kr, ehm mer enn Fredrik sin. Så kunne jeg tatt liksom sånn, ehm nå ble jeg litt usikker igjen. Hehe.
21. Jon Martin: Mhm
22. Janne: Det var litt vanskelig sånn når det er så høyt tall.
23. Jon Martin: Ja
24. Sondre: Ja

25. Jon Martin: Du skal få muligheten til etterpå å prøve på Excel, men kan du først prøve på ark?
26. Janne: Ja!
27. Jon Martin: Hvordan hadde du valgt og gjort det da?
28. Janne: Hmm, da ville jeg tatt tre firkanter [Eleven tegner opp tre firkanter]. Sånn.

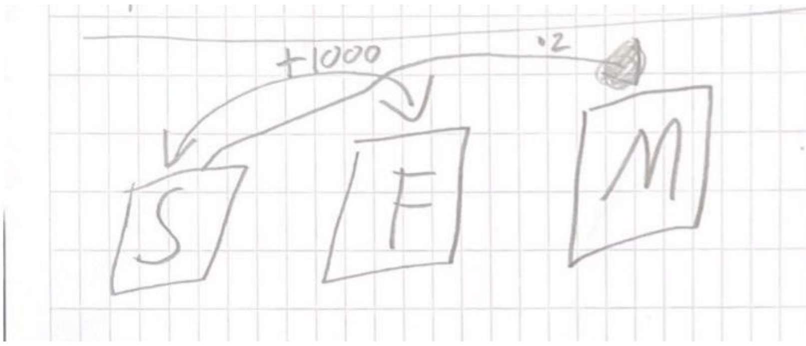


Figur 12. Janne - rekonstruksjon av hjelpetegning en fra oppgave 1

29. Jon Martin: Mhm
30. Sondre: Bra! Store og fine firkanter sånn at det blir tydelig.
31. Janne: Så ville jeg da skrevet navnene, sånn at det blir ikke hele navnet, men så ville jeg skrevet M, S og F.
32. Jon Martin: Mhm
33. Janne: Også liker jeg å skrive hvor mye de har her [Over firkantene]. Eller da hvor mye de kjøpte da for eksempel telefonen for.
34. Jon Martin: Mhm
35. Janne: Så hvis da Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin, så… Ok, så da til sammen så betalte de 20000. Det er veldig mye penger.
36. Jon Martin: Mhm det er veldig mye penger.
37. Sondre: Ja det er veldig mye penger det.
38. Jon Martin: Det er dyrt med mobil.
39. Janne: Ja
40. Jon Martin: Mhm
41. Janne: Ehh, altså hvis de betalte 20000, og vi minuser 1000, så blir det 19000. Blir det ikke det? Jo.
42. Sondre: Ja
43. Jon Martin: Ja
44. Janne: Men jeg bare skjønner ikke, det er sånn.
45. Sondre: Hva er det du pleier å gjøre etter du har tegnet firkantene og skrive disse bokstavene?

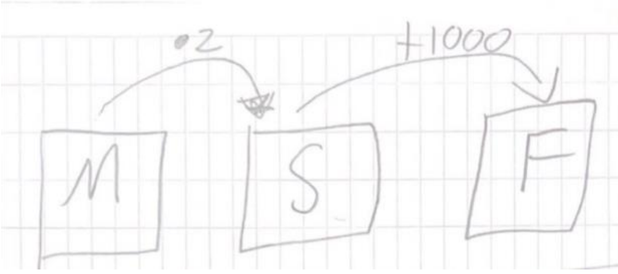
46. Janne: Da prøver jeg å finne ut liksom hva, hvor mye de for eksempel da betaler og så skrive det under her.
47. Sondre: Ja, skjønner.
48. Janne: Det er litt vanskelig. Hehe
49. Jon Martin: Er det vanskelig?
50. Janne: Ja
51. Jon Martin: Mhm.
52. Sondre: Ja, fordi du tenker at du skal prøve og feile, eller gjette og sjekke?
53. Janne: Ja
54. Sondre: Er det det han kaller det kanskje?
55. Janne: Ja
56. Jon Martin: Hva er det vi vet om alle de forskjellige personene da? Med tanke på prisen?
57. Janne: Det er jo, ehehe, litt vanskelig når det er så høye tall.
58. Jon Martin: Mhm, du har skrevet opp at det er tre personer sant? Vet vi noe spesielt om de tre?
59. Janne: De betalte 20000. til sammen ja.
60. Jon Martin: De betalte 20000 til sammen ja. Mhm
61. Jon Martin: Vet vi noe mer eller er det?
62. Janne: Hæ?
63. Jon Martin: Vet vi noe mer om hver sin pris?
64. Janne: Nei, det sto jo at ehm Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin og Mohammed sin kostet dobbelt så mye som Silje sin.
65. Jon Martin: Mhm, så vi vet det?
66. Janne: Ja
67. Jon Martin: Mhm, kan vi bruke den informasjonen til noe?
68. Janne: Ehhm, ja vi kan det tror jeg.
69. Jon Martin: Ja
70. Janne: Hvis jeg bruker regneark så kan jeg ta å skrive navnene også skrive inn i den andre ruten, ehh som da blir b2
71. Sondre: Mhm
72. Janne: Er jeg ganske så sikker på. Ehhm, så kan jeg skrive "er lik" også a2
73. Jon Martin: Som er?
74. Janne: Som da er Silje sin

75. Jon Martin: Mhm
76. Janne: Også kan jeg ta ehh at eh det er lik altså a… a2 ehm også pluss 1000 også går jeg i neste rute og skriver ehhm og skriver da ehh “er lik” ehm b2
77. Jon Martin: Mhm
78. Janne: ehhh gange 2
79. Sondre: Mhm
80. Jon Martin: Har du lyst til å prøve litt på papir og se på noen tall og se hva som skjer?
81. Janne: Det tror jeg blir litt vanskelig hehehe
82. Jon Martin: Du tror det blir litt vanskelig?
83. Janne: Ja
84. Jon Martin: Mhm
85. Janne: Når jeg kan det på regneark så tror jeg det blir litt vanskelig om jeg skal gjøre det på ark.
86. Sondre: Ja, jeg skjønner
87. Janne: Fordi det er litt lettere på sånn regneark
88. Sondre: Ehm, husker du hva Eirik pleide å gjøre når han tegna opp disse tre?
89. Janne: Hmmmm
90. Sondre: Pleide han å bruke…
91. Janne: Han satt noen piler
92. Sondre: Ja!
93. Janne: Også vent, men så hvis jeg skriver nye firkanter da..
94. Sondre: Ja!
95. Janne: Strek under her [For å vise at det er en ny tegning] Så nye firkanter [Tegner tre nye firkanter]. Sånn også skriver jeg: “S, F også M. Så kan jeg ta sånn altså en pil over her også skriver jeg + 1000, også ehhhm, ta, da må jeg tilbake må jeg ikke det?



Figur 13. Janne - hjelpetegning to fra oppgave 1

96. Sondre: Hva er det du skriver når du skriver +1000 her da? Hva tenker du da?
97. Janne: Hmmm, nei da må jeg jo, da er det liksom samme som jeg gjør på regneark da.
98. Sondre: Jaa, men ehh jo i oppgaven så står det.. du har jo lest at Silje sin kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin.
99. Janne: Mhm, hvis jeg gjør sånn, over her tar her (tegner pil mellom S og M), nei da må det være den veien. [Tegner først pilen i retningen fra S til M, men ombestemmer seg og snur]. Her skal det stå ganger 2 [Mellom S og M], da blir det litt sånn feil vei egentlig.
100. Jon Martin: Mhm
101. Janne: Som betyr at jeg må sette navnene litt annerledes
102. Jon Martin: Hva betyr det da? [Peker på pilene mellom S og M]
103. Janne: Fordi det står jo at ehm Mohammed sin mobil kostet dobbelt så mye som Silje sin
104. Jon Martin: Mhm, så ifra Mohammed så til Silje så er det dobbelt så mye her? [Peker på Ruten med S].
105. Janne: Nei, det skal egentlig være motsatt, altså at det er dobbelt så mye der. Ehhhhh da må jeg kanskje gjøre det samme her igjen, og ha det sånn [Snur på pilen mellom S og M igjen].
106. Jon Martin: Det er helt opp til deg
107. Janne: Ehhhm, så hvis jeg tar, så hvis jeg tar den over her også skriver jeg + 1000 også tar jeg ehhhm, den over her og skriver *2. [Er tilbake på den første tegningen og setter pil fra M til S og skriver *2, og pil fra S til F og skriver +1000] ... sånn. Fordi da blir det fordi Silje sin mobil kostet 1000 kr mer enn Fredrik sin og Mohammed kostet dobbelt så mye som Silje sin.



Figur 14. Janne - endret hjelpetegning en fra oppgave 1

108. Jon Martin: Mhm, har du lyst til å, er du sikker på at du ikke har lyst til å prøve med noen tall bare for å se hva som skjer på papir? Når du vet..
109. Janne: Jeg tror det blir litt vanskelig.
110. Sondre: Hvis du vil prøve med 1 eller noe
111. Janne: Ehh hehe jeg tror fortsatt det blir litt vanskelig hehe
112. Jon Martin: Mhm, ja ehh, men du kan prøve på Excel hvis du vil?
113. Janne: Ja
114. Sondre: Da er det bare å ta opp dataen så tror jeg excel skal komme med en gang
115. Jon Martin: Ehm, tror vi er inne på riktig, ja!
116. Janne: Ehhm hvis jeg skriver her, ehm så skriver jeg navnene da, jeg skriver bare M, S og F, sånn som jeg gjorde ista
117. Sondre: Mhm
118. Jon Martin: Mhm
119. Janne: Også tar jeg her
120. Jon Martin: Under Silje?
121. Janne: Ja det blir vel a2, ehhhhh….. nei det er kanskje her jeg må ta, (hvisker noe veldig lavt som ikke vi klarer å høre…) ta den også + 1000 også neste
122. Jon Martin: Mhm, hvorfor tok du +1000 på den?
123. Janne: å, vent det blir kanskje ikke + 1000, det blir vel ehh sånn
124. Jon Martin: Nei, eh, jeg bare spurte hvorfor jeg. Hva tenkte du?
125. Janne: Ehm, jeg så egentlig på den, men jeg må se på den… så ehh da blir det ikke den, men også a2 sånn! Fordi da blir det den til den, så står det fortsatt 0 her fordi jeg har ikke satt noe tall.
126. Jon Martin: Okei
127. Janne: Ehm, også må jeg ta "er lik" ehhhm
128. Jon Martin: Fordi nå er du på Fredrik sin rute?

129. Janne: Ja, så må jeg ta den også + 1000 også har jeg, ehh så må jeg skrive "er lik" den pluss den pluss den. Sånn
130. Jon Martin: Mhm
131. Janne: Også må jeg skrive, ehhm så hvis jeg for eksempel da skriver "1", på den, er det den her? hmm. Den skjønner jeg ikke helt nå.. blir det riktig hvis jeg skal ta den?
132. Jon Martin: Fordi nå er du på Fredrik sin, og hva vet vi om Fredrik?
133. Janne: Ehm, det skulle jo være, Mohammed sin kostet dobbelt. Ehh, hva står det her? hehehe trykker "er lik" også ser jeg hva som står her. Her må det stå. Og her må det stå "er lik" ehh er lik også den + 1000 eh jeg skjønner ikke.. Det er dette jeg ikke skjønner…
134. Jon Martin: Mhm, hva er det du ikke skjønner?
135. Janne: Fordi hvis, eh eller kanskje det er riktig. Jeg tror jeg har gjort det riktig fordi hvis jeg skriver da for eksempel at 1000 på den så får jeg 6000 også skriver jeg 2000, så det blir da 11000. Så tar jeg 3000 som blir 16. Her blir det da 21000 på 4000 så da blir det jo ehh noe mellom 4000 og 3000 da kanskje
136. Jon Martin: Ja.
137. Janne: Ehh, så pleier jeg å gå nedover bare sånn, for eksempel at 3500, som blir 18500, også kan jeg ta 3600 som er 19000 også pleier jeg å ta 3650 også går jeg egentlig da fra den
138. Jon Martin: Hva fikk du da?
139. Janne: Da får jeg 19250
140. Jon Martin: Mhm
141. Janne: Så hvis jeg da fortsetter opp så jeg tar feks da 73, ehhm 3675, eller ehm nå er vi på 19400, det var på 3685, så da prøver jeg på 3900, okei så da har vi 20500, på 3900. så da…
142. Jon Martin: Det nærmer seg.
143. Janne: Så da må jeg ta, da tar jeg 3800, der 3800.
144. Jon Martin: Mhm, da fikk du 20000?
145. Janne: Ja!

S	M	F	Svar
1000	2000	3000	6000
2000	4000	5000	11000
3000	6000	7000	16000
4000	8000	9000	21000
3500	7000	8000	18500
3600	7200	8200	19000
3650	7300	8300	19250
3675	7350	8350	19375
3685	7370	8370	19425
3900	7800	8800	20500
3800	7600	8600	20000

Figur 15. Janne - utprøvde verdier under gjett og sjekk

146. Jon Martin: Mhm
147. Janne: Så da har Mohammed betalt 3800, Silje har betalt ehh 7600 og Fredrik har betalt 8600.
148. Jon Martin: Mhm, kan du vise meg på alle de forskjellige cellene hva du har skrive og forklare hva du har tenkt på de forskjellige?
149. Janne: Ja! Ehmmm,
150. Jon Martin: Starte med den første
151. Janne: Så her har jeg ikke skrive noe fordi her er det ikke meningen å skrive noe på første som da er a2
152. Jon Martin: Hvem er det da?
153. Janne: Det er Mohammed
154. Jon Martin: Ja
155. Janne: Så her kan jeg ikke skrive noe fordi da blir det litt sånn feil i regning. Så her kan jeg jo skrive "er lik" også ta den der da også ganger 2
156. Jon Martin: På Silje sin?
157. Janne: Ja ehm, på b2. Så ehm hvis jeg da tar, hvis jeg da tar og ganger ehh fordi da blir det liksom fordi da har Mohammed dobbelt så mye, men blir ikke det litt feil da? Hvis den. Hvis jeg bytter da om sånn også står S der.

158. Jon Martin: Hvorfor byttet du der da?
159. Janne: Fordi Mohammed har ehm er den som har dobbelt så mye
160. Jon Martin: Ja
161. Janne: Som Silje, så da kan jeg jo ikke ha Mohammed på første, hvis jeg skal ha, skrive =a2*2
162. Jon Martin: Ja, i neste?
163. Janne: Ja
164. Jon Martin: Mhm, fordi da blir den neste med Mohammed a2*2. Hvem er a2 da?
165. Janne: Ehh, a2 er da Mo.., ehh Silje.
166. Jon Martin: Silje ja
167. Janne: Også blir b2 Mohammed også blir Fredrik ehh siste
168. Jon Martin: Siste. Og hva har du skrevet i Fredrik sin da?
169. Janne: Der har jeg skrive ehhh =b2+1000. Og det blir denne her + 1000
170. Jon Martin: Mhm…
171. Janne: Hvis jeg bare leser denne her som var, ehh jeg tror det var riktig.
172. Jon Martin: Mhm, og da er ja mhm. Hva syns du når du jobber, syns du Excel er veldig bra, dårlig, ehh er det? hva syns du…
173. Janne: Jeg syns det kan være vanskelig noen ganger og noen ganger kan det være veldig veldig veldig lett.
174. Jon Martin: Mhm, sånn med tanke på sånne oppgaver som det her da? Er det greit eller
175. Janne: Ja, da kan det kan være litt vanskelig, men når jeg først får sånn ehm får meg i gang så kan, så blir det lettere og lettere egentlig
176. Jon Martin: Mhm. Var det en grunn til at du syntes det var lettere på Excel enn på papir?
177. Janne: Ja, jeg er ikke veldig vant til å regne på papir. Jeg har mest regnet på, jeg er mest vant til å liksom skrive på datamaskinen
178. Jon Martin: Mhm. Sånn i de timene vi har hatt med Eirik nå så har han brukt sånn: Klinkekuler, klatreseler, vi brukte mobil
179. Janne: Mhm
180. Jon Martin: Hva syns du om å bruke sånne konkrete ting?
181. Janne: Det er vel kanskje noen ganger litt vanskeligere og kanskje noen ganger lett. Kommer an på hva oppgaven er da.
182. Jon Martin: Hvem syns du var lett og hvem syns du var vanskelig da?

183. Janne: Ehm, den som vi hadde med Eirik i dag [Oppgaven klassen hadde jobbet med i timen mens intervjuene foregikk] syns jeg var veldig lett. Det var med sånn ja det var noen som ha.. tre søsken som var 54 år til sammen.
184. Jon Martin: Hva syns du om denne her da?
185. Janne: Den var litt vanskelig
186. Jon Martin: Du sa på starten at du syns det var et veldig høyt tall?
187. Janne: Ja
188. Jon Martin: Mhm, og mens på alderen som dere hadde i timen ista så var det et lavt tall.
189. Janne: Ja
190. Jon Martin: Mhm, nei jeg tror vi har det vi trenger jeg
191. Sondre: Ja
192. Jon Martin: Mhm
193. Sondre: Takk for at du ville stille opp, det var veldig greit
194. Jon Martin: Håper det var greit
195. Janne: Ja!