UiA Universitetet i Agder

Master

Grenseverdi og derivasjon i matematikk R1

En lærebokanalyse av hvordan de nye lærebøkene i matematikk R1, fra de tre store lærebokforlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, legger til rette for at elevene skal kunne nå et utvalg av kompetansemålene som omhandler grenseverdi og derivasjon

Tor Kristian Grandalen

Veileder
Trond A. Abrahamsen

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på min master i matematikkdidaktikk. Jeg startet på dette masterstudiet da jeg flyttet tilbake til Grimstad etter å ha jobbet som lærer i matematikk og naturfag i Tromsø i fem år. I løpet av denne tiden fikk jeg gradvis mer lyst til å lære mer matematikk enn hva jeg hadde fra min bachelor i kjemi. Ved siden jobb i Tromsø, tok jeg da en bachelor i matematikk og statistikk ved UiT. I løpet av dette masterstudiet i matematikk ved UiA har jeg lært veldig mye. Jeg har blant annet fått et innblikk i en analytisk og abstrakt matematikkverden hvor aksiomer, definisjoner og bevis spiller hovedrollen. Jeg har også lært mer fagdidaktikk, ulike former for skoleforskning og om utforskende arbeidsmetoder og problemløsning som en del av matematikkundervisningen.

Jeg har vært så heldig å få undervise alle tre realfagskursene i matematikk på videregående skole. Det var inspirerende å få undervise og se den faglige utviklingen til de ungdommene som valgte realfag de årene jeg underviste 1T, R1 og R2 i Tromsø. Jeg trives veldig godt sammen med elevene mine i klasserommet uansett om det er realfagsmatematikken eller den mer praktisk orienterte matematikken som jeg underviser. Det å være sammen med unge mennesker og lære bort fagene jeg brenner for, er verdens beste jobb for meg. Men realfagsmatematikken har en spesiell plass i hjertet mitt. Jeg har selv studert kjemi og matematikk, og slik sett har jeg fått et lite innblikk i hvor mye spennende som finnes innenfor realfagene. Det å kunne inspirere og åpne elevenes øyne for denne realfagsverdenen, og mulighetene som finnes der, er en av mine hjertesaker.

Jeg ønsker å takke min nåværende arbeidsgiver for støtte, oppmuntringer og tilrettelegging i forbindelse med eksamener. Tusen takk til alle de dyktige og engasjerende foreleserene og gruppelærerene jeg har hatt i løpet av studiet ved UiA. Dere har virkelig bidratt til å øke min forståelse og interesse for matematikk, og dere har gitt meg nye perspektiver på formidlingen av matematikk til elevene.

Jeg ønsker å takke veilederen min for gode tilbakemeldinger og nyttige innspill i denne skriveprosessen. Du har stilt tydelige krav til meg, og du har vært tilgjengelig for veiledning og hjelp når jeg har trengt det.

Jeg ønsker til slutt å takke min kone for støtte, og for tålmodigheten som hun har hatt med meg gjennom denne studietiden.

Grimstad, mai 2023

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg gjort en innholdsanalyse av de nye lærebøkene i matematikk R1 som ble gitt ut i år 2021 i forbindelse med den nye læreplanen, Kunnskapsløftet 2020. Forskningsspørsmålet for denne oppgaven er: "Hvordan legger de nye lærebøkene i matematikk R1, fra de tre store lærebokforlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, til rette for at elevene skal kunne nå et utvalg av kompetansemålene som omhandler grenseverdi og derivasjon?" Jeg har valgt ut deler av kompetansemål som er knyttet til forståelse og utforskning av de to begrepene grenseverdi og derivasjon. Jeg har videre delt dette overordnede forskningsspørsmålet opp i fire underspørsmål knyttet til kognitive krav i oppgaver, læringsmuligheter i oppgaver, muligheter for utforskende oppgaver og til slutt hva slags måter påstander og resultater blir bevist på.

For å svare på forskningsspørsmålene, har jeg analysert oppgaver med tre ulike rammeverk og bevis med ett rammeverk. Jeg har hovedsakelig brukt en kvalitativ tilnærming. Kvantitative innslag kommer i form av antall i og prosentsandeler av de ulike analysekategoriene. Kognitive krav i oppgaver ble analysert med rammeverket Mathematical Tasks Framework av Stein og Smith (1998). Det er få oppgaver på det høyeste kognitive nivået. Det er et flertall av oppgavene som er prosedyreoppgaver. Samtidig er det 42.2%, 71.2% og 47.4% av oppgavene i de tre bøkene som har høye kognitive krav innenfor min avgrensning. Mange oppgaver kunne blitt kategorisert med et høyere kognitivt nivå med små endringer i oppgaveformuleringen og/eller ved å endre på de tilgjengelige hjelpemidlene som er indikert i oppgavene.

Jeg undersøkte læringsmuligheter i oppgaver knyttet til ulike læringsobjekter med rammeverket MDITx av Ronda og Adler (2017). Denne analysen viser at flertallet av oppgavene handler om, og gir elevene muligheter til å lære om, det aktuelle læringsobjektet. Det er også flere oppgaver som gir muligheter for å knytte relasjoner mellom ulike begreper. Muligheter til matematisk utforskning i oppgaver ble analysert med Skovsmose (1998) sitt rammeverk Undersøkelseslandskaper. Denne analysen viser at det er et flertall av oppgaver innenfor oppgaveparadigmet. Andelen utforskende oppgaver er mellom 6.9% og 14.6% i de tre bøkene. Til slutt har jeg analysert hva slags type bevis som blir gitt for ulike resultater og påstander knyttet til de to begrepene grenseverdi og derivasjon med rammeverket til Thompson mfl. (2012). For begrepet grenseverdi har de tre bøkene store forskjeller i fremgangsmåte. Det varierer mellom å ha flest bevis med spesifikke eksempler, flest bevis som er overlatt til elevene gjennom oppgaver og flest tilfeller av å ikke gi noe bevis for resultatene. For derivasjon er det også variasjoner, men her gis det i større grad generelle bevis for resultatene. Det er flere interessante tilfeller av oppgaver som overlater bevis til elevene i alle tre bøkene.

Summary

In this master's thesis, I have done a content analysis of the new textbooks in mathematics R1 that were published in the year 2021 in connection with the new curriculum plan, Kunnskapsløftet 2020. My research question is: "How do the new textbooks in mathematics R1, from the three major textbook publishers Cappelen Damm, Gyldendal and Aschehoug, enable students to achieve a selection of the competence goals that deal with limit values and the derivative?" I have selected parts of the competence goals which are linked to understanding and exploration of the two concepts limit value and the derivative. I have further divided the main research question into four subquestions related to cognitive demands in tasks, opportunities-to-learn in tasks, exploration opportunities in tasks and finally what kind of proofs that are given for mathematical claims and results.

To answer the research questions, I have analyzed the tasks with three different frameworks and the evidences with one framework. I have mainly used a qualitative approach. Some quantitative elements come in the form of counting and percentages of the various analysis categories. Cognitive demands in tasks were analyzed with the Mathematical Tasks Framework by Stein og Smith (1998). There are few tasks at the highest cognitive level. A majority of the tasks are procedural tasks. At the same time, 42.2%, 71.2% and 47.4% of the tasks in the three books have high cognitive demands. Many tasks could have been categorized with a higher cognitive level with small changes in the task wording and/or by changing the available aids indicated in the tasks.

I investigated opportunities-to-learn in tasks related to various objects of learning with the framework MDITx by Ronda og Adler (2017). This analysis shows that the majority of the tasks in all three books are about, and give students opportunities to learn about, the object of learning in question. There are also several tasks that provide opportunities to make relationships between the different mathematical concepts. Possibilities for mathematical exploration in tasks were analyzed with the framework of Skovsmose (1998) called Investigation landscapes. This analysis shows that there is a majority of tasks within the task paradigm. The proportion of investigative tasks is between 6.9% and 14.6% in the three books. Finally, I have analyzed the type of proofs that is given for various results and claims related to the concepts of limit value and derivation with the framework of Thompson mfl. (2012). For the concept of limit value, the three books have major differences in approach. It varies between giving most proofs with specific examples, most proofs that are left for the students and most cases where no proofs are given for the results. For the topic of the derivative, there are also variations between the three books. But there are more general proofs given for this topic. There are several interesting instances of exercises that leave the proof for the students to figure out in all the three books.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

Jeg vil i dette kapitlet presentere temaet for denne masteroppgave og dets relevans. Deretter vil jeg presentere forskningspørsmålet mitt og dele det opp noen underspørsmål. Til slutt kommer en kort oversikt på strukturen i resten av oppgaven.

1.1 Tematikken og oppgaven sin relevans

Matematikk R1 startet med den nye læreplanen, Kunnskapsløftet 2020 (LK20), skoleåret 2021/2022. I denne forbindelse har det blitt laget nye lærebøker basert på denne nye læreplanen. Den fysiske læreboken er bare ett blant flere mulige læremidler som læreren kan bruke i undervisningen. Opplæringsloven definerer et *læremiddel* som "[...] alle trykte, ikke-trykte og digitale elementer som er utviklet til bruk i opplæringen." (Svingen og Gilje, 2018, s. 5). Digitale læremidler og andre nettressurser har blitt mer og mer vanlig og lettere tilgjengelige de siste årene. Slike læremidler fra forlagene og andre aktører kan være til hjelp for elevenes læring, og det kan bidra til nye undervisningsmuligheter for lærerene i klasserommet. På forlagene sine hjemmesider kan det for eksempel finnes forslag til undervisningsopplegg, oppgaver, rettelser på feil i de trykte bøkene, forslag til årsplan i faget og forslag til kapittelprøver. Noen andre norske eksempler på digitale læremidler er nettstedet NDLA (Nasjonal digital læringsarena), Kikora og Campus Inkrement. For å avgrense omfanget av denne masteroppgaven, velger jeg kun å se på de nyutgitte fysisk trykte lærebøkene fra de tre største lærebokforlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug.

Læreboken har hatt og har fortsatt en sentral rolle i undervisningen av matematikkfag i skolen for både lærere og elever (Kongelf, 2019; Fan mfl., 2013; Rezat og Sträßer, 2015; Törnroos, 2005). Med begrepet *lærebok* så menes den fysisk trykte klassetrinn- eller fagspesifikke boken som brukes i undervisningen (Kongelf, 2019). Kongelf skriver også at "[. . .] læreboken er det mest sentrale bindeleddet mellom kompetansemålene i læreplanen og praksisene i skolen, og må dermed kunne antas å være en sentral brikke elevenes utvikling av matematisk kompetanse." (Kongelf, 2019, s. 14). Svingen og Gilje (2018) støtter dette ved å referere til en rekke lærebokforskere når de skriver at "Både internasjonale og nasjonale studier viser at lærebøker i matematikk har vært den mest sentrale koblingen mellom pedagogiske praksiser (arbeidsformer) og læreplanverket." (s. 14). Rezat og Sträßer (2015) skriver at "Various papers descripe textbooks as the main source for teachers preparing lessons, not only suggesting exercises, activities, procedures and definitions, but globally defining the course of teaching in terms of structure and concepts to be taught [...]" (s. 248). Dette underbygger viktigheten av lærebøker med høy kvalitet, og det at lærere og skoleledere er i stand og tar seg tid til å evaluere dem.

Matematikk er det faget som samlet sett, sammen med Norsk, har flest skoletimer i grunnskolen og videregående skole. Det forteller oss at matematikk er et fag som anses som svært viktig for elevene i norsk skole. Veien til realfagsmatematikken i videregående skolen starter i første klasse med faget matematikk 1T. Elever som velger dette faget, starter da på et løp med fem timer matematikk i uken. De elevene som fortsetter med matematikk R1 og R2, har da dette timetallet i matematikk gjennom hele videregående skole. Matematikken som elevene lærer her, skal danne det matematiske grunnlaget de trenger for å kunne studere realfag videre på høyskole eller universitet. Regjeringen hadde læremidlenes viktige rolle i undervisningen som en av begrunnelsene for å få et utvalg, ledet av Olaug Svingen og Øystein Gilje, til å se på kvalitetskriterier for lærebøker i matematikk (Svingen og Gilje, 2018). I oppdragsbrevet som Svingen og Gilje fikk, står det at de blant annet skulle se på kriterier for lærebøkenes koblingen til læreplanverket, faglighet og pedagogisk kvalitet. Kunnskapsdepartementet skriver i sin strategiplan for skolen, Tett på realfag, at "Læremidlene i realfag har varierende kvalitet. I matematikk har flere læremidler didaktiske svakheter og mangler problemløsningsoppgaver som kan bidra til å utvikle elevenes forståelse for faget." (Kunnskapsdepartementet, 2015c, s. 18). Kunnskapsdepartementet (2015a) uttrykker også et ønske om "[...] å se på tiltak som kan gjøre skolene og lærerene mer bevisst på valg og bruk av læremidler. Økt bevisstgjøring skal styrke deres vurdering av læremidlenes kvalitet." (s. 76).

Det er selvsagt mange faktorer som spiller inn for hvordan elevene blir introdusert for og lærer begreper i matematikkfaget. Læreren er viktig for klassemiljøet, elevenes motivasjon for matematikk og hvordan elevene instrueres til å jobbe med faget både i og utenfor undervisningstimene. Læreren er også viktig for hvordan matematikken fremstilles i undervisningen, og hvordan elevene blir veiledet og fulgt opp (Grevholm, 2011). Svingen og Gilje (2018) refererer til flere internasjonale forskere når de skriver at "Den viktigste enkeltfaktoren for elevers læringsutbytte er kvaliteten på lærerens undervisning." (s. 12). Waagene og Gjerustad (2015) gjennomførte en spørreundersøkelse om valg av læremidler i norsk grunnskole og videregående skole. De ønsket å skaffe mer kunnskap om bruken av læremidler i blant annet matematikkundervisningen. De fant ut at lærere i videregående i større grad enn grunnskolen velger eller er med å påvirke hvilken lærebok skolen deres bruker, og at dette er noe de ønsker. På bakgrunn av det jeg har tatt opp i dette delkapitlet, så mener jeg at det er høyst relevant å gjøre lærebokforskning på nye lærebøker i matematikkfaget.

1.2 Forskningspørsmål

Forskningsspørsmålet mitt er

> "Hvordan legger de nye lærebøkene i matematikk R1, fra de tre store lærebokforlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, til rette for at elevene skal kunne nå et utvalg av kompetansemålene som omhandler grenseverdi og derivasjon?"

Jeg er interessert i å undersøke disse to matematiske begrepene fordi dette er relativt nytt for elevene når de kommer til matematikk R1. Dermed kan det matematiske innholdet i mindre grad knyttes til den allerede eksisterende matematikkunnskapen som elevene har.

Disse to begrepene er også knyttet sammen, ved at den deriverte er definert i form av en grenseverdi. Elevene som tar matematikk R1 har som hovedregel hatt matematikk 1T i første klasse på videregående skole. Der har de riktignok blitt introdusert for grenseverdi, definisjonen av den deriverte og derivasjon av polynomer. Dermed starter de ikke helt på bar bakke når de kommer til matematikk R1. Men jeg har erfart at elevene har glemt mye over sommerferien når jeg har startet et undervisningsår med matematikk R1. En tilsvarende erfaring nevner også Aksdal (2016) i sin masteroppgave, hvor han skriver at mange av elevene i matematikk R2 fortsatt synes derivasjonsbegrepet er vanskelig å forstå. Han refererer til flere forskere da han skriver at "[..] en god del elever og studenter har problemer med å forstå derivasjonsbegrepet og de sentrale komponentene som inngår i dette begrepet." (Aksdal, 2016, s. 1). Dette mener jeg understreker viktigheten av å analysere hvordan lærebøkene i matematikk R1 behandler disse to begrepene, og at lærebokforfatterene ikke bør lene seg for mye på at grenseverdi og derivasjon skal være kjent fra før.

Hele seks av tolv kompetansemål i den nye læreplanen til matematikk R1 er knyttet til grenseverdi eller den deriverte. Det må da kunne sies at grenseverdi og derivasjon er to helt sentrale begreper i matematikk R1. Kompetansemålene i læreplanen knyttet til grenseverdi og derivasjon er som følger:

Eleven skal kunne

- forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer
- bruke ulike strategier for å utforske og bestemme grenseverdier til funksjoner, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier
- bestemme den deriverte i et punkt geometrisk, algebraisk og ved numeriske metoder, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter
- analysere og tolke funksjoner ved å bruke derivasjon
- anvende derivasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett
- utforske, analysere og derivere ulike funksjoner og deres omvendte funksjoner, og gjøre rede for egenskaper til og sammenhenger mellom slike funksjoner

I noen av kompetansemålene står det at elevene skal kunne *forstå* og *utforske*. Disse ordene ble ikke brukt i den forrige læreplanen. Jeg er interessert i disse to begrepene, hva som legges i dem og hvordan det kommer til uttrykk i de nye lærebøkene. I beskrivelsen av læreplanens kjerneelementer står det at "Utforskning i matematikk R handler om å lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse" (Utdanningsdirektoratet, 2018, s. 2). Jeg vil se nærmere på den nye læreplanen i et eget delkapittel i teorikapitlet. Ulike perspektiver på utforskning og forståelse i matematikk vil også bli gjennomgått i teorikapitlet. Jeg ønsker å avgrense omfanget ved å se på den første delen av det førstnevnte kompetansemålet som omhandler det at elevene skal forstå grenseverdi og derivasjon Jeg vil også se på delene av det andre og siste kompetansemålet i listen som knytter utforskning til begrepene grenseverdi og derivasjon. Jeg vil videre avgrense oppgaven ved å kun se på de delene av lærebøkene som introduserer disse to begrepene og deres mest sentrale regnereglene. Jeg vil analysere oppgaver og bevis som gis for påstander og resultater. Denne avgrensningen vil bli nærmere omtalt i metodekapitlet.

Forskningsspørsmålet mitt består av to matematiske begreper, og jeg har valgt meg ut begrepene forståelse og utforskning fra et utvalg av kompetansemålene. Dette ønsker jeg å dele opp i følgende underspørsmål knyttet til forståelse:

- Hva slags kognitive krav stilles det i oppgavene?
- Hvilke læringsmuligheter finnes det i oppgavene?
- Hvordan begrunner eller beviser lærebøkene påstander og regneregler?

Jeg vil også se på hva slags muligheter elevene får til matematisk utforskning i oppgaver. Derfor stiller jeg følgende underspørsmål knyttet til utforskning:

- Hvordan legger lærebøkene til rette for muligheter til matematisk utforskning?

1.3 Strukturen i oppgaven

I dette introduksjonskapitlet har jeg forsøkt å motivere temaet for oppgaven, dets relevans, lærebokens betydning i matematikkundervisningen og forskningsspørsmålene mine. I kapittel 2 vil relevant teori bli presentert. Det blir først en gjennomgang av den nye læreplanen, og en beskrivelse av arbeidet som ledet opp til innføringen av denne. Deretter gir jeg en gjennomgang av hva lærebokforskning er og et utvalg med eksempler på tidligere forskning. Ulike måter å se forståelsesbegrepet på blir gjennomgått i et eget delkapittel. Jeg vil også se på utforskning og utforskende matematikkundervisning. Videre vil de teoretiske rammenverkene, som ligger til grunn for analysen, bli gjennomgått. I metodekapitlet presenteres innholdsanalyse som metode, og jeg begrunner valg av lærebøker. Jeg vil videre gå gjennom hvordan hvert av rammeverkene blir brukt i analysen. Til slutt i dette kapitelet vil jeg se på noen begreper knyttet til kvaliteten av studien og etikken knyttet til en slik studie. Resultatene fra analysen blir presentert i kapittel 4. Diskusjon av resultatene kommer i kapittel 5 sammen med et forsøk på å besvare forskningsspørsmålene jeg har stilt. Til slutt vil jeg komme med en oppsummering, gi noen tanker om implikasjoner av denne studien og noen forslag til videre forskning.

Kapittel 2

Teori

2.1 Kunnskapsløftet

Ludvigsenutvalget fikk i 2013 et mandat av utdanningsmyndighetene til å vurdere hva slags kunnskap elevene og samfunnet trenger 20 til 30 år frem i tid. Hovedområdene de trakk frem var fagspesifikk kompetanse, det å kunne lære, det å kunne kommunisere, samhandling og deltakelse og det å kunne utforske og skape (Kunnskapsdepartementet, 2015b). Begrepet *kompetanse* definerer Kunnskapsdepartementet ved at "Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innbærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning." (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11). I år 2015 gav Kunnskapsdepartementet ut strategiplanen Tett på realfag. Med *realfag* så menes det alle fag med "[...] innhold som er relatert til matematikk, naturvitenskap og teknologi [...]" (Kunnskapsdepartementet, 2015c, s. 12). I dette strategidokumentet argumenteres det for et behov for en fornyelse av læreplanene i alle realfagene. Et av målene var at "Barn og unges kompetanse i realfag skal forbedres gjennom fornyelse av fagene, bedre læring og økt motivasjon." (Kunnskapsdepartementet, 2015c, s. 19). De baserte dette behovet blant annet på lave prestasjoner i matematikk og naturfag. Hele 40% av eksamenskarakterene på 10. trinn i matematikk lå på karakter 1 eller 2, og det har holdt seg stabilt slik over mange år. Omtrent 20% av eksamenskarakterene i år 2014 i matematikk 1P var karakter 1, og i den andre enden av karakterskalaen var det få elever på de to høyeste karakterene (Kunnskapsdepartementet, 2015c).

I stortingsmelding 28 ble det uttrykt et ønske om å styrke dybdelæring og forståelse i matematikk. Med begrepet *dybdelæring* så menes det at "[...] elevene gradvis over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fag." (Kunnskapsdepartementet, 2015a, s. 14). Begrepet *forståelse* blir gjennomgått senere i dette teorikapittelet. Dybdelæringsbegrepet står da i motsetning til begrepet *overflatelæring*, "[...] som legger vekt på innlæring av faktakunnskap uten at kunnskapen settes i sammenheng [...]" (Kunnskapsdepartementet, 2015a, s. 14). Det er et uttalt mål i denne strategiplanen at det skal legges vekt på dybdelæring i hele skoleløpet.

LK20 ble vedtatt av Utdanningsdirektoratet 26. mai 2020, og den ble gjeldende fra 1. august 2021 (Kunnskapsdepartementet, 2021). Læreplanen er det styrende dokumentet som gir læreren og eleven en oversikt på de konkrete kompetansemålene for opplæringen i faget, fagets relevans, fagets kjerneelementer, grunnleggende ferdigheter i faget, informasjon om fastsettelse av standpunktkarakter og vurderingsform ved eksamen. Törnroos (2005) kaller læreplanens innhold for *intended curriculum*. Dette er altså det som er kunnskapsmyndighetene sine intensjoner for hva elevene skal lære og møte på som pensum i faget. Når det gjelder matematikk R sin relevans og sentrale verdier, trekkes det frem at "Faget gir mulighet til å utvikle et presist språk for kritisk tenkning, evne til problemløsning og matematisk forståelse." (Kunnskapsdepartementet, 2021, s. 2). Med *kritisk tenkning*, så menes det her evne til å vurdere gyldigheten av matematiske resonnementer og argumenter både fra læreboken og andre kilder som for eksempel medelever. Det står også at faget skal gi et grunnlag for videre utdanning innenfor fagfelt som krever matematisk forståelse.

Den nye læreplanen i matematikk R1 er gjengitt i sin helhet som vedlegg A, og den har tolv kompetansemål (Kunnskapsdepartementet, 2021). Dette er seks færre kompetansemål enn i den forrige læreplanen (LK06), som er gjengitt i sin helhet som vedlegg B (Kunnskapsdepartementet, 2006). Det er mulig at et mindre antall kompetansemål vil kunne gi mer tid til å gå i dybden i hvert enkelt kompetansemål, og at det vil kunne gi mer tid for elevene til å utforske og oppnå forståelse av de ulike matematiske begrepene. Læreplanen for matematikk R gir følgende seks punkter som kjerneelementer i matematikkfagene (Utdanningsdirektoratet, 2018):

- Utforskning og problemløsning
- Modellering og bruk
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

Hvilken kompetanse som elevene skal utvikle i et faget i løpet av skoleåret, er altså styrt av læreplanen. Dermed vil den nye læreplanen sette rammebetingelser for de nye lærebøkene. I overgangen til den nye læreplanen i matematikk R1, har noen temaer forsvunnet, noen temaer har blitt med videre og et nytt tema har blitt lagt til. Kompetansemålene i LK06 som omhandlet temaene geometri, logikk, bevis og sannsynlighet har blitt tatt bort. Temaene algebra, grenseverdier, derivasjon, funksjoner og funksjonsanalyse, kontinuitet, vektorregning og parameterfremstilling, har blitt tatt med videre. Tre av målene i LK20 handler om det nye temaet dataanalyse og modellering. Læreplanen sier for eksempel at elevene skal kunne "planlegge og gjennomføre et selvstendig arbeid med reelle datasett knyttet til naturvitenskapelige temaer og forhold, og analysere og presentere funn" (Kunnskapsdepartementet, 2021). Dette innebærer blant annet at elevene skal kunne lage matematiske modeller ut fra et datasett. Med LK20 har også dataprogrammering kommet inn i skolen for alle matematikkfagene, hele veien fra barneskolen og opp til og med videregående skole. Dette gir mange nye muligheter for utforskning i realfagsmatematikken. For eksempel når det gjelder grenseverdier, så kan numerisk metoder bli brukt for å utforske og konkretisere dette begrepet for elevene. Numerisk derivasjon ved hjelp av programmering kan også gi elevene nye måter å utforske derivasjonsbegrepet på. Det å lære programmering allerede i skolegangen, vil også være med på å forberede elevene på eventuelle realfag- eller ingeniørstudier på høyskole eller universitet. Der har programmering kommet inn som en større eller mindre del av de fleste slike studier de siste årene.

De to verbene *å forstå* og *å utforske* ble, som allerede nevnt, ikke brukt i den forrige læreplanen LK06. Jeg vil i de neste to delkapitlene se nærmere på noen perspektiver på hva som menes med *å forstå* og *å utforske* i matematikk. Disse to begrepene ser ut til å være i samsvar med Kunnskapsdepartementet sin strategiplanen, hvor det er et mål om å ha mer av dybdelæring i faget. Ulike verb i de ulike kompetansemålene forteller om hva slags kompetanse elevene skal oppnå i et gitt mål. For eksempel brukes *å anvende* og *å bruke* der det er meningen at elevene skal mestre praktiske regneferdigheter. Mens verbene *å forstå* og *å utforske* stiller større kognitive krav til elevene. Hvilke verb som brukes i kompetansemål vil også være styrende for hva eleven kan blir spurt om på eksamen innenfor et gitt kompetansemål. I læreplanen på Utdanningsdirektoratet sine nettsider har verbene egne forklaringer på hva som menes med dem (Kunnskapsdepartementet, 2021). Der står det følgende om *å forstå* og *å utforske*:

> *Å forstå er å oppfatte meningen med noe, skjønne hva som blir kommunisert eller hvordan noe henger sammen. Forståelse kan vises gjennom å forklare, drøfte ulike alternativer, sammenligne aktuelle metoder eller vurdere kvalitet.*

og

> *Å utforske handler om å oppleve og eksperimentere og kan ivareta nysgjerrighet og undring. Å utforske kan bety å sanse, søke, oppdage, observere og granske. I noen tilfeller betyr det å undersøke ulike sider av en sak gjennom åpen og kritisk drøfting. Å utforske kan også bety å teste eller prøve ut og evaluere arbeidsmetoder, produkter eller utstyr.*

La oss se på et par eksempler på hvordan ordlyden har forandret seg fra den gamle til den nye læreplanen. For eksempel har kompetansemålet som handler om potenser og logaritmer endret formuleringen fra at eleven skal kunne

> *utlede de grunnleggende regnereglene for logaritmer, og bruke dem og potensreglene til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter*

til det nye målet der eleven skal kunne

> *utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger.*

Det matematiske innholdet i det gamle og det nye målet er ganske likt. Men i det nye kompetansemålet er det en presisering av at utforskende metoder skal være en del av hvordan elevene oppnår denne kunnskapen. Det er også et spesifisert mål om at elevene skal forstå disse regnereglene. Dette vil også legge føringer for hvordan elevene skal vurderes i grad av måloppnåelse av dette læringsmålet.

Et annet eksempel på endret ordlyd, er i målet om grenseverdier, kontinuitet og derivasjon. I LK06 var det ett kompetansemål som inneholdt grenseverdi, mens i LK20 er det to stykker. Det har endret seg fra at eleven skal kunne

> *gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare*

til to nye mål der eleven skal kunne

> *forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer*

og

> *bruke ulike strategier for å utforske og bestemme grenseverdier til funksjoner, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier.*

I det første av de to nye kompetansemålene kommer det klart frem at elevene skal forstå disse begrepene. Dette kompetansemålet har også en tydeliggjøring av at elevene sin kunnskap om disse begrepene skal kunne brukes til å løse praktiske problemer. I det andre kompetansemålet er det en gitt at bruk av ulike strategier og utforskning skal være en del av hvordan elevene jobber for å oppnå dette målet. Den siste delen av det gamle kompetansemålet, som har med det å kunne gi eksempler på ikke-deriverbare og ikke-kontinuerlige funksjoner, har blitt flyttet over til to andre kompetansemål i LK20 (se vedlegg A).

Det er noen dataprogrammer som brukes i utstrakt grad i skolen. Dette er aktuelt i oppgaver hvor elevene skal bruke digitale hjelpemidler. Her kommer en kort beskrivelse av dem, slik at det er avklart før de eventuelt blir omtalt senere i denne teksten. Dataprogrammet GeoGebra er et såkalt CAS-program (Computer Algebra System). GeoGebra er et fleksibelt program som gir elevene et komplett verktøy blant annet for utregninger, tegning av grafer, løse likninger og symbolsk manipulering av algebraiske uttrykk. Det neste er programmeringsspråket Python. Dette er da et programmeringsspråk hvor elevene skal lære det mest grunnleggende for bruk i matematikk R1. Det siste programmet jeg vil nevne, er regnearkprogrammet Excel som er en del av office-pakken til Microsoft. Dette programmet kan være nyttig å bruke for å lage diagrammer og se på statistikk knyttet til innsamlede data.

2.2 Forskning på lærebøker i matematikk

Kongelf (2019) plasserer forskning på lærebøker i matematikk i kategorien matematikkdidaktisk forskning. Det er et uttalt mål fra Kunnskapsdepartementet at lærere skal ha "[...] tid og kompetanse til å vurdere ulike læremidler og læringsressurser, til å velge blant dem og bruke dem riktig." (Kunnskapsdepartementet, 2015c, s. 22). Svingen og Gilje gav i 2018 ut en rapport om kvalitetskriterier for læremidler. Der skrev de at "Læremiddelforskere i Norden har inntil ganske nylig vært svært lite opptatt av lærebøker (og andre læremidler) i matematikk." (Svingen og Gilje, 2018, s. 16). I denne rapporten brukte de internasjonale studier supplert med norske og nordiske studier som kunnskapsgrunnlag. De ønsket å gi lærere og skoleledere veiledning i hva man kan se etter for å velge hvilken lærebok som skal brukes, og de nevner at tilsvarende arbeid har blitt gjort andre steder som i USA, Hong Kong, Sverige og Danmark. Svingen og Gilje ønsket seg at "[...] arbeidet med valg av læremiddel skal øke bevisstheten hos lærerene og bli en del av det systematiske kvalitetsarbeidet i skolen." (Svingen og Gilje, 2018, s. 27). I Danmark ble det utviklet en veileder for vurdering av et læremiddel. Kriteriene de valgte å gi vurdering etter var: legitimitet, tilgjengelighet, progresjon, differensiering, lærerstøtte og sammenheng (Svingen og Gilje, 2018). En tilsvarende veileder har blitt utviklet i Norge, og den er tilgjengelig på Udir sin hjemmeside. Barbro Grevholm ledet et nettverk for lærebokforskning for de nordiske og baltiske landene. Hun mente at behovet for mer lærebokforskning var der fordi har vært så lite fokus på det (Grevholm, 2011). Hun uttrykte også et ønske om at lærebokforskning skal tas med i lærerutdanningen for å kunne gjøre fremtidige lærere i bedre stand til å evaluere lærebøkene de bruker eller står ovenfor valget om å bruke. Med tanke på læreboken sin sentrale rolle i matematikkundervisningen, så gir det mening å øke bevisstheten til lærere og lærerstudenter om dette.

2.2.1 Nordisk lærebokforskning

Rezat og Sträßer (2015) analyserte hvilke metoder som ble brukt i nordisk og baltisk lærebokforskning. De baserte seg på et utvalg på 24 forskningsartikler. De beskriver lærebokforskning som et relativt lite forskningsfelt, men samtidig at det er voksende. De konkluderte med at kvantitativ eller kvalitativ innholdsanalyse, spørreundersøkelser og case-studier er de mest vanlige metodene som brukes. De nevner også at lærebokanalyse er særlig utbredt i Norden. Rezat og Sträßer deler lærebokforskning inn i tre hovedområder: *påvirkninger på læreboken*, *læreboken i seg selv* og *bruken av læreboken og dens påvirkning.*

Kategorien *påvirkninger på læreboken* handler om hva som påvirker forfatterene med tanke på måten de skriver læreboken, fagdidaktiske valg, hva som tas med av innhold, hvilken rekkefølge de ulike matematiske temaene skal komme i og hvordan matematikken fremstilles. Spørreundersøkelser og intervjuer er de foretrukne metodene i slike studier. Oskarsdottir (2016) gjorde en studie om lærebokforfattere sine didaktiske valg i sin masteroppgave. Hun intervjuet tre lærebokforfattere om deres tanker om bevis sin rolle i lærebøkene i matematikk R1. Det er læreplanen som er styrende for hva et fag skal inneholde. Men læreplanmålene gir ikke en full detaljert styring av hva en lærebok skal inneholde, eller hvor langt læreboken skal gå med tanke på hva som skal tas med innenfor et matematisk tema. Dermed er det et visst rom for tolkning, og det er flere valg som lærebokforfattere må gjøre. Forfatterene av lærebøkene kan ha gjort didaktiske valg som de mente var hensiktsmessige, men som læreren er uenig i eller mener er mangelfull. I undervisningen er det da opp til læreren å velge hvordan et matematisk tema skal presenteres og hvor tett læreboken skal følges. For eksempel står det i læreplanen for matematikk R1 at eleven skal kunne *forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer*. Lærebokforfatterene må da gjøre valg på hvor mye de skal ta med på hvert av begrepene, og hvor detaljert de skal fremstille fagstoffet.

Bremler (2003) påpeker at "Dagens läromedel har ju inte uppstått ut ett vakuum. Snarare kan man betrakta läromedelsutgivning som en process, där inslag i böcker kan spåras bakåt." (s. 45). Det finnes noen "tradisjoner" i de ulike matematikkfagene for hva som har blitt tatt med eller ikke av regneregler, definisjoner og bevis. Noen eksempler på dette i matematikk R1 kan være at L'Hôpitals regel ikke tas med som et resultat for grenseverdier, men det finnes eksempler på at L'Hôpitals regel presenteres i en oppgave. Kontinuitet defineres som regel ikke med ϵ-δ-metoden i matematikk R1. Det kan også variere hvilke resultater som begrunnes med formelle bevis. Her gjøres det altså avveininger fra forfatterene sin side på hva som elevene er matematisk modne nok til å kunne forstå. Det er ikke noe i formuleringen av læreplanmålet ovenfor som tilsier at for eksempel kontinuitet ikke skal defineres med ϵ-δ-metoden. Det kan være interessant å diskutere disse valgene om hva som er for avansert til å ha med eller ikke. For eksempel så argumenterer Njølstad (2019) i sin masteroppgave for hvordan en kan lære bort ϵ-δ-definisjonen av kontinuitet i matematikk R1.

Kategorien *læreboken i seg selv* er den mest utbredte av de tre nevnte kategoriene. Her brukes innholdsanalyse av læreboken som metode. Krippendorf omtaler denne analysemetoden som "a research technique for making replicable and valid inferences from texts [...] to the context of their use." (Rezat og Sträßer, 2015, s. 251). Innholdsanalyse som metode vil bli nærmere presentert i metodekapitlet, da denne masteroppgaven bruker nettopp denne metoden. Det er en rekke ulike temaer som har vært av interesse for forskere å se på i forbindelse med denne typen lærebokforskning. Rezat og Sträßer (2015) gir blant annet følgende eksempler:

- Matematisk sammenheng (coherence)
- Nøyaktighet i forklaringer
- Kvalitet på oppgaver
- Design av bøker: format, farger og illustrasjoner
- Nivådifferensiering for elevene

Rezat og Sträßer (2015) understreker at innholdsanalyse av lærebøker kan avdekke muligheter for læring. Men også at det ikke er mulig å videre trekke konklusjoner om elevenes faktiske læringsutbytte kun ved å analysere lærebøkene. Dette vil i så fall kreve en annen metodikk enn bare innholdsanalyse.

Bergwall (2017) undersøkte et teoretisk rammeverk som kan brukes for å analysere lærebøker med tanke på muligheter for å lære bevis og matematisk resonnering. Han ønsket å utvide og nyansere Thompson mfl. (2012) sitt rammeverk for å kategorisere bevis i lærebøker. I denne studien så Bergwall på behandlingen av fundamentalteoremet i Kalkulus i et utvalg av de mest brukte bøkene i realfagsmatematikken på siste året av videregående skole i Sverige og Finland. Kongelf (2019) så på hvilke problemløsningsmetoder (heuristikker) et utvalg av lærebøker i ungdomsskolen brukte i matematikkoppgaver. Han tok utgangspunkt i ni kjente heuristikker. Om funnene sine skriver han at "[...] selv de enkle og tradisjonelle oppgavene inneholder ingredienser fra de ni problemløsningsmetodene som ble undersøkt." (Kongelf, 2019, s. 7). De fire mest utbredte problemløsningsmetodene utgjorde hele 96%. Dette var strategiene: løse problemet delvis, visualisering av problemet, endring av innfallsvinkel og systematisering i form av en tabell. Myge (2021) brukte i sin masteroppgave rammeverket til Kongelf for å undersøke hvilke problemløsningsmetoder som fantes i eksempler innenfor algebraemner i et utvalg av lærebøkene til matematikk 1T. Han fant at det i gjennomsnitt var 2.4 problemløsningsmetoder per eksempel. Han merket seg også at "Til tross for dette er det sjelden at det står eksplisitt hvilke problemløsningsmetoder det brukes i eksemplene [...]" (Myge, 2021, s. 69). Han brukte også rammeverket til Stein og Smith (1998) for å se på kognitive krav i oppgaver, og fant at nesten 50% av oppgavene stiller høye kognitive krav til elevene.

Eklund (2021) undersøkte blant annet nivået på derivasjonsoppgaver i svenske lærebøker. Hun brukte Lithner sitt rammeverk for matematisk resonnering som har tre ulike nivåer. Direkte kopiering av metoden brukt i et eksempel er det laveste nivået og kalles for *immitativ resonnering (IR)* hos Lithner. Eklund poengterer at lærebøkene gjerne er skrevet slik at elevene skal kunne bruke dem på egenhånd. Dermed er det ofte at oppgaver som følger etter eksempler kan løses på samme måte som i eksempelet. Det neste nivået, *local plausible* *reasoning (LPR)* er hvor eleven delvis kan følge metoden fra et eksempel. Det siste nivået, *global plausible reasoning (GPR)*, brukes på krevende oppgaver hvor eleven ikke har en ferdig oppskrift å følge. Hun fant totalt sett for alle lærebøkene at 59.2% var i kategorien IR, 19.7% var i kategorien LPR og 19.7% var i kategorien GPR (Eklund, 2021).

I kategorien *bruken av læreboken og dens påvirkning* er metoder som klasseromsobservasjoner, intervjuer og spørreundersøkelser de vanligste å bruke. Lærebokens fremstilling og lærerens undervisning i klasserommet kalles for *implemented curriculum* av Törnroos (2005). Med dette begrepet menes altså det lærestoffet som elevene møter i læreboken, og det som faktisk blir gjennomgått sammen med læreren i klasserommet. En av studiene Rezat og Sträßer trakk frem, var en studie gjort av Monica Johansson i 2006, og den handlet om bruken av læreboken i undervisningen i svensk skole. Her ble undervisningstimer filmet og analysert etter tre kategorier. *Direkte bruk* er deler av timen hvor læreboken konkret brukes i undervisningen. *Indirekte bruk* er når læreren enten henviser til boken eller parafraserer den enten muntlig eller skriftlig. *Fravær av læreboken* beskriver situasjoner der ingen kobling til læreboken er tilstede i undervisningen. Denne studien kom frem til at "[...] despite differing use of textbooks in each lesson of each teacher there are only few occations of textbook absence and the textbook dominates the mathematical content of the lessons" (Rezat og Sträßer, 2015, s. 256).

Når det gjelder lærebokens påvirkning på elevenes prestasjoner, trekker Rezat og Sträßer frem en studie gjort av Jukka Törnroos i 2005 i den finske grunnskolen. Han undersøkte forskningspørsmålet "What kind of correlations can be found between opportunity-to-learn data of different kind and student achievement?" *Læringsmuligheter* (*opportunities to learn*) er et begrep som beskriver hvordan en seksjon av en lærebok eller en del av en undervisningstime kan legge til rette for elevenes læring av et bestemt begrep eller metode. Fan mfl. (2013) skriver at "[...] there is a strong need for more conffirmatory research about the relationship of the textbook and students' learning outcome." (s. 643). Törnroos (2005) bruker begrepet *attained curriculum* om det som elevene faktisk sitter igjen med av kunnskap som et resultat av undervisningen de har fått og læreboken de har brukt. Datamaterialet i denne studien var elevresultater fra TIMSS-undersøkelsen sammen med lærebokanalyse av et utvalg bøker som dekket de aktuelle temaene i TIMSS-oppgavene. Her ble konseptet læringsmuligheter målt på tre ulike måter. Den første måten så på hvor stor andel av lærebøkene som var satt av til de ulike matematiske temaene. Denne andelen, et tall mellom 0 og 1, fungerte som et estimat på læringsmulighetene innenfor et gitt tema (Törnroos, 2005). Den andre måten var en spørreundersøkelse blant lærerene. De svarte på hvor lenge siden det var at hvert av 34 utvalgte temaer var undervist. Den siste måten var å se på de 162 ulike oppgavetemaene i TIMSS. Deretter ble det undersøkt i hvilken grad hver av lærebøkene la til rette for læring for hver av dem. I analysen så han etter korrelasjoner mellom læringsmuligheter innenfor de ulike temaene med resultatene fra tilsvarende temaer i TIMSS-undersøkelsen. Han konkluderte med at "When we take into account these limitations on the approaches used in this study, the correlations found between opporunity to learn and student achievement can be considered faily high." (Törnroos, 2005, s. 325). Han mener altså at det finnes en målbar sammenheng mellom elevprestasjoner og antall læringsmuligheter som blir gitt elevene i lærebøkene og gjennom undervisning.

2.2.2 Internasjonal lærebokforskning

Fan mfl. (2013) oppsummerte den internasjonale lærebokforskningen. De skriver at det var lite lærebokforskning i matematikk før år 1980. Derfor valgte de hovedsakelig å sammenfatte forskningen som fantes fra år 1980 og fremover. Datamaterialet deres var et utvalg på på 100 studier. Fan mfl. (2013) deler lærebokforskning inn i følgende fire retninger:

- *lærebokens rolle*
- *innholdsanalyse og sammenligning*
- *bruken av læreboken*
- *andre områder*

I kategorien *lærebokens rolle* er det studier som handler om nettopp lærebokens rolle i undervisning og i elevenes læring av matematikk. Det finnes funn som tyder på at læreboken påvirker undervisningsstilen til lærere. Fan mfl. (2013) skriver at i en tidligere studie de selv gjorde, så konkluderte de med at "textbooks appear to play a role in teachers' pedagogy by conveying pedagogical messages and providing an encouraging or discouraging curricular environment for them to employ different teaching strategies" (s. 636). Kompetansemålene i læreplanen er styrende for hva elevene skal utvikle av kompetanse gjennom skoleåret. Læreboken fungerer som et mellomledd for læreplanens intensjoner og den faktiske undervisningen og aktivitetene som skjer i klasserommene (Fan mfl., 2013).

Kategorien *Innholdsanalyse og sammenligning* er den mest utbredte retningen innenfor lærebokstudier (Fan mfl., 2013). Dette er studier hvor innholdet i en eller flere lærebøker blir analysert. De fant at 63 % av studiene de så på i sin oppsummeringsartikkel handlet om tekstbokanalyse og sammenligning av tekstbøker. Det kan for eksempel være bøker fra samme land, en lærebokserie over flere klassetrinn eller en sammenligning av lærebøker på samme årstrinn fra ulike land. Slike studier ser for eksempel på hvordan et eller flere temaer eller begreper blir behandlet i bøkene. Når en studie ser på flere lærebøker, analyseres bøkene først hver for seg med det samme analytiske rammeverket. Deretter er det mulig å sammenligne dem og diskutere funnene.

Sidenvall (2019) så i sin doktorgrad blant annet på hvordan en kan gi elever i svensk videregående skole bedre forutsetninger for problemløsning. Han analyserte oppgavene i et utvalg av lærebøker og fant at så mye som 84% av oppgavene kunne løses ved å følge en fast oppskrift (algoritme) som var presentert i boken. Kun 16% av oppgavene var slik at eleven måtte skape sine egne løsningsmetoder. I en annen delstudie så Sidenvall (2019) på oppgavenivå i lærebøker fra 12 ulike land: Australia, Finland, India, Irland, Kanada, Nepal, Singapore, Skottland, Sverige, Tanzania, USA og Sør-Afrika. Resultatene hans her hadde en tilsvarende prosentfordeling til det han fant i de svenske lærebøkene. Stylianides (2009) undersøkte hvilke muligheter de mest brukte lærebøkene i den amerikanske grunnskolen gav elevene til å lære *resonnering og bevis* (min oversettelse av *reasoning-and-proving* (RP)). Med dette begrepet menes det å finne mønstre, lage påstander, argumentere for påstander og bevise eller motbevise disse påstandene. Stylianides presenterer her også et teoretisk rammeverk for å analysere slike muligheter i lærebøker. Han skriver at læreboken kan ha en viktig rolle for å fremme slike muligheter. Han så at det typisk var for geometriske resultater at bøkene førte argumentasjon og bevis.

Kategorien *Bruken av læreboken* handler om hvordan læreboken brukes av elevene, og hvordan lærerene bruker boken i undervisning i klasserommet. Metodene som brukes her er typisk observasjonsstudier, intervjuer og spørreundersøkelser. For eksempel kan en studie i denne kategorien se på i hvilken grad lærere bruker andre kilder i tillegg til læreboken for å oppnå kompetansemålene i læreplanen. Lepik mfl. (2015) så på hvordan lærere i Norge, Estland og Finnland brukte lærebøkene i matematikk i planlegging og gjennomføringen av undervisning. De brukte spørreundersøkelse som metode, hvor ulike påstander skulle besvares med grad av enighet på en skala fra 1 (helt uenig) til 5 (helt enig). Det var totalt 402 lærere i de nevnte landene som deltok, og 67 av disse var norske. De fant blant annet at 49 % av de norske lærerene svarte 4 eller 5 i enighet i at læreboken var hovedkilden i undervisningsforberedelsene. Dersom vi også tar med enighet på nivå 3, så blir andelen så mye som 83 %. Disse norske tallene var noe lavere enn hva som ble resultatet i Estland og Finland.

Kategorien *andre studier* ble tatt med for å inkludere studier som ikke passet inn i de tre førstnevnte kategoriene. Blant annet så blir studier av elektroniske bøker plassert i denne kategorien. Fan mfl. (2013) gir også eksempler på flere studier som så på hva slags oppgaver som gis på prøver sammenlignet med hva slags oppgaver elevene har jobbet med i lærebøkene. En annen studie så på hva slags lærebøker i matematikk som blir foretrukket av lærere i Australia. Et funn som ble gjort her, var at lærere vurderte bøkene med tanke på hva de mente passet best til elevenes bruk. Lærerene så da på oppgaver og aktiviteter for klasserommet og til hjemmelekser for å vurdere hvilken lærebok de ønsket å bruke. Schubring og Fan (2018) argumenterer for at digitale læremidler fra forlagene har blitt så vanlige de siste årene, at de i større grad bør studeres sammen med de fysisk trykte lærebøkene.

2.3 Matematisk forståelse

Matematikk er kunnskap som har kommet frem fra menneskelig nysgjerrighet, et ønske om å forstå virkeligheten og det å finne mønstre og sammenhenger ved fenomener i det universet og den verdenen vi lever i. Matematikk er interessant i seg selv, og det er samtidig fascinerende hvordan matematikk kan brukes i rekke anvendte problemstillinger. Nyere eksempler på dette kan være innenfor robotikk, automatisering av prosesser og maskinlæring. Matematikk er det språket som brukes i de ulike naturvitenskapelige fagene for å beskrive, modellere og forklare mye det som er av interesse. Matematikk er også viktig med tanke på bruk av statistikk for å behandle empiriske data og finne sammenhenger som kan sies å være signifikante. Matematikken som fag står på et fundament av grunnleggende aksiomer og definisjoner. Ut i fra antagelsen om sannheten til disse aksiomene og definisjonene, kan egenskaper og sammenhenger utledes ved hjelp av matematisk logikk. Det vi kjenner som etablert lærebokmatematikk i dag, har blitt oppdaget og utviklet en gang i tiden ved utforskning, grubling, diskusjon og prøving og feiling. Det å gjøre elevene klar over dette aspektet ved matematikkfaget, og at det fortsatt er mange uløste problemer og mer å oppdage innenfor matematikk, realfag og ingeniørfag, kan kanskje bidra til å gjøre matematikken mer levende og spennende. Det er ingen liten oppgave læreren og lærebøkene har med tanke på det å åpne dørene til matematikk- og realfagsverdenen for elevene!

Kilpatrick mfl. (2002) beskriver noen ulike trender i matematikkundervisningen som gjennom årenes løp grovt sett har vekslet på vektlegging av forståelse eller praktiske utregningsferdigheter. “Procedural fluency and conceptual understanding are often seen as competing for attention in school matematics. But pitting skill against understanding creates a false dichotomy.” (Kilpatrick mfl., 2002, s. 122). Med LK20 har det blitt større vektlegging av forståelse og utforskning når det gjelder hvordan læreplanmålene er formulert. Det er en forskjell på det å kunne gjøre noe, og å samtidig vite hvorfor det er sant og fungerer. Dette er grovt sett et skille som kan brukes for å dele opp forståelsesbegrepet i matematikk. I dette delkapitlet skal vi se på noen av måtene begrepet *forståelse* i matematikkfaget blir omtalt på. I strategiplanen, som ble beskrevet i kapitel 2.1, er det et mål at elevene i større grad skal forstå begreper og sammenhenger i matematikkfaget. Sfard (1991) beskriver et *matematisk begrep* som en matematisk idé i sin formelle form sammen med sine ulike representasjonsformer. Men hva menes med det å ha forståelse av et begrep i matematikk? Hvorfor skal vi strebe etter forståelse, og ikke bare det å kunne bruke regneteknikker og metoder for å løse oppgaver og få et riktig svar på en oppgave, for så å få nok riktige svar til å bestå en prøve, og så i løpet av skoleåret bestå nok prøver til å få en karakter i faget?

Cuoco mfl. (1996) skriver om fremtiden som elevene vil møte at "Thinking about the future is risky buisness. Past experience tells us that today's first graders will graduate high school most likely facing problems that do not yet exist" (s. 1). Her er det for eksempel høyst relevant å trekke inn spørsmål om hva utviklingen av kunstig intelligens vil gjøre for automatisering av arbeidsplasser og arbeidsoppgaver i fremtiden. Hvordan skal vi tilpasse oss dette? Hva slags kunnskap og ferdigheter vil være relevante for ulike typer arbeidsplasser om 20 til 30 år? På skolen kan det fremstå for elevene som at matematikk er et statisk fag hvor vi lærer å regne ut ting ved å bruke regler og formler, og at vi jobber med problemer som alltid har et riktig fasitsvar. Dette fanger imidlertid ikke den prosessen, mengden kreativitet og forestillingsevne som ligger bak det å utforske og komme frem til nye resultater og teorier i matematikk og realfag. Nosrati og Wæge (2015) skriver at "[...] forskning har vist at vi bør bevege oss vekk fra ideen om at matematikk hovedsakelig består av regler og algoritmer som må læres utenat. Fokuset bør snarere rettes mot de rike tankeprosessene som underligger matematisk aktivitet [...]" (s. 2). En slik måte å tenke på og undervise på vil da i større grad kunne gjøre elevene i stand til å bli gode problemløsere, og det kan bidra til å takle fremtidens nye typer problemstillinger som Cuoco mfl. beskriver i sitatet over.

2.3.1 Relasjonell og instrumentell forståelse

Skemp (1976) tenkte på hva vi mener når vi snakker om forståelse i matematikk. Han kom frem til et skille mellom det han kaller *relasjonell forståelse* og *instrumentell forståelse*. Det førstenevnte beskrives som å vite både *hva* og *hvorfor*. En elev som skal løse et problem vet da *hva* som må gjøres, og *hvorfor* denne metoden fungerer. Den andre typen forståelse beskrives som å bare vite *hva*. Eleven kan da bruke en regneregel, formel eller en metode for å løse et problem på riktig måte, men uten å ha en forståelse av *hvorfor* det fungerer. Skemp kaller dette for *regler uten begrunnelse* (min oversettelse av *rules without reasons*). Et eksempel på dette kan være i forbindelse med at elevene lærer at produktet av to negative tall er et positivt tall. Det er ikke rett frem og intuitivt at dette er sant, men det er heller ikke veldig vanskelig å vise elevene med logiske argumenter at det faktisk er sånn det må være. La oss si at elevene lærer dette uten å få en forklaring av hvorfor det er slik annet enn at "sånn er det bare", samt at det er veldig viktig å kunne dette. Elevene lærer da å multiplisere negative tall riktig ved å pugge en regel, som for eksempel "minus gange minus blir pluss". De får da en god instrumentell forståelse når det blir mestret. Men elevene har da ingen forståelse av hvorfor det er slik det henger sammen. Et annet eksempel kan være når elevene lærer å derivere funksjoner. Det er flere ulike regneregler for å derivere ulike typer av funksjoner. Elevene skal kunne bruke disse reglene både hver for seg og i kombinasjoner med hverandre. Instrumentell forståelse vil da være å kunne bruke regnereglene riktig og komme frem til et rett svar. Men uten en forståelse for hvordan den deriverte er definert som en grenseverdi, vil ikke elevene kunne få en relasjonell forståelse av hvorfor disse reglene er gyldige og hvor de kommer fra.

Skemp (1976) bruker en analogi med et kart og en veibeskrivelse for å illustrere forskjellen mellom de to typene av forståelse. Instrumentell forståelse tilsvarer da å kunne følge en veibeskrivelse punkt for punkt for hvordan en kommer seg fra et bestemt sted til et annet. Men samtidig er vedkommende helt avhengig av denne veibeskrivelsen og vil kanskje ikke klare å orientere seg i kartet igjen dersom det blir gjort en feil et sted. Eleven mangler da et overblikk på hvor en befinner seg og hva en kan gjøre for å komme tilbake på riktig rute, eller over til en alternativ rute som også leder til målet. Dette overblikket og denne fleksibiliteten knyttes da til relasjonell forståelse. Det blir da en forståelse av hvor en er underveis i en problemløsningsprosess. Men også at en ser hvordan begreper er relatert til hverandre, og hvordan en kan bruke de ulike verktøyene en har til rådighet for å løse eller undersøke et problem.

Skemp så nødvendigheten av et slikt skille når vi snakker om forståelse, fordi han mener det ikke er helt opplagt hva som menes med *å forstå* noe i matematikk. Før han utforsket dette, oppfattet han forståelse i matematikk som det samme som relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Eleven vet både *hva* og *hvorfor*. Men han så at utbredelsen av instrumentell forståelse var stor, og i tillegg at mye av undervisningen i skolen var rettet mot å gi elevene instrumentell forståelse. Dermed så han et behov for å nyansere forståelsesbegrepet. Nosrati og Wæge (2015) skriver at "[...] instrumentell forståelse ofte knyttes opp mot tradisjonell undervisning, mens relasjonell forståelse gjerne forbindes med undersøkende fremgangsmåter i faget." (s. 4). For mange elever vil nok det å kunne bruke en regneregel riktig og få riktig svar på oppgaver gi en opplevelse av forståelse i matematikk. Men med en gang eleven møter en oppgave hvor vinklingen er slik at regelen ikke passer direkte inn, så kan det stoppe opp, og eleven blir usikker på fremgangsmåten eller hvordan en skal manøvrere for å komme seg videre. Det trengs da flere regler, flere varianter av regelen eller mer relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

Skemp argumenterer for at relasjonell forståelse gjør elevene mer tilpasningsdyktige til nye typer oppgaver og vinklinger. Instrumentell forståelse krever mer memorisering av hva slags problemer en metode fungerer for og ikke (Skemp, 1976). "I motsetning til dette har elever med relasjonell forståelse bygd mentale strukturer slik at de nærmest kan lage uendelig mange planer for å komme seg fra et punkt til et hvilket som helst annet punkt." (Nosrati og Wæge, 2015, s. 4). Det å jobbe mot å oppnå relasjonell forståelse gjør altså elevene mer tilpasningsdyktige til nye situasjoner, eller når de blir sittende fast i et problem. Det kan ta mer tid å jobbe mot å få relasjonell forståelse, men det er en mer fruktbar type forståelse som virker å være i samsvar med utdanningsmyndighetenes ønske om mer dybdelæring i skolen og med Cuoco mfl. sin beskrivelse i sitatet på starten av dette kapitlet om å være i stand til å løse nye typer problemer i fremtiden.

2.3.2 Strukturell og operasjonell forståelse

Sfard (1991) deler forståelse av et matematisk begrepet inn i *strukturell forståelse* og *operasjonell forståelse*. Ved å se på et matematisk begrep strukturelt, så ser vi på det som et abstrakt matematisk objekt med visse egenskaper og representasjonsformer. Dersom vi ser på et matematisk begrep operasjonelt, så er det det operasjonelle eller mer håndfaste ved begrepet som er i fokus. Da knyttes begrepet til utfallet av selve operasjonen eller en handlingen. Som et eksempel på dette skillet, trekker Sfard frem hvordan vi kan forstå hva en sirkel er. Det kan sees på strukturelt som en mengde med punkter som er definert ved å være i en gitt avstand til et fiksert sentrumspunkt. Operasjonelt sett kan vi tenke på en sirkel som den kurven, eller figuren, vi får når en passer roteres rundt et fiksert sentrumspunkt. Her er det tydelig at den strukturelle måten å se det på er abstrakt og matematisk presis, mens den operasjonelle måten er mer visuell og knyttet til utfallet av en handling.

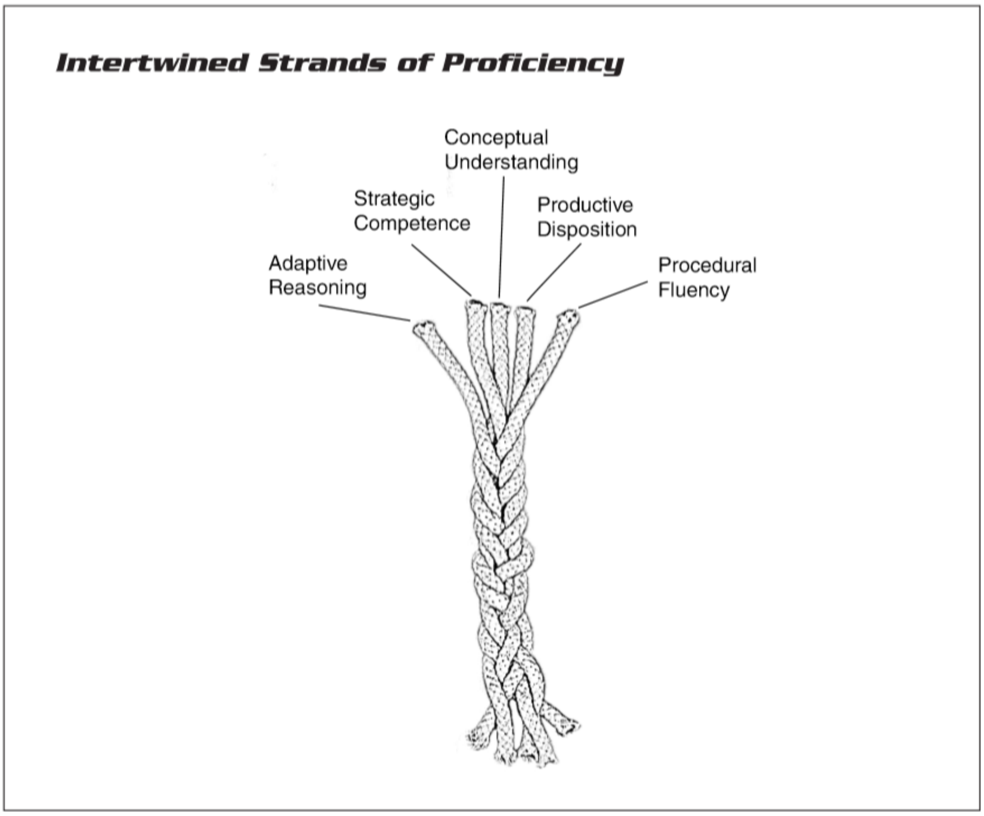
Et annet eksempel kan være hvordan en forstår vektorer i klassisk geometri. Strukturelt sett er vektorer objekter i et vektorrom, og dette er tydelig matematisk definert. Vektorer har regler for hvordan de kan adderes, multipliseres med skalarer og de har en matematisk beskrivelse av lengde ved *normen* av en vektor. En operasjonell forståelse av vektorer kan for eksempel komme frem når elevene lærer om fysiske krefter. Dette beskrives ved hjelp av vektorer, og det kan visualiseres som piler i et koordinatsystem eller kraftdiagram. Pilen har en retning, og i tillegg har den en lengde som direkte beskriver størrelsen på kraften. Slik kan vektorer bli mer konkrete og operasjonelle når det kan knyttes til effekten av én eller flere krefter på en gjenstand. Resultatet av en sum av to eller flere vektorer er da en resultantkraft som bestemmer retningen gjenstanden beveges i.

Sfard reflekterer rundt de to forståelsestypene ved å si at "The structural approach invites contemplation; the operational approach invites action; the structural approach generates insight; the operational approach generates result." (Sfard, 1991, s. 28). Hun argumenterer for de to formene for forståelse ikke utelukker hverandre, og at det er uunnværlig å kunne se et matematisk begrep både på en strukturell og en operasjonell måte for å ha en dypere matematisk forståelse av det. Hun kaller dette for *dual-naturen* til matematiske begreper. Selv om det kan virke slik, så insisterer hun på at det ikke er snakk om en dikotomisk oppdeling av matematisk forståelse, men heller at de to formene er hver sin side av samme mynt.

2.3.3 Konseptuell forståelse og prosedyrekunnskap

Kilpatrick mfl. (2002) ønsket å se på hva det er som kjennetegner matematisk kompetanse (*mathematical proficiency*). Arbeidet deres ble basert på forskning innenfor kognitiv psykologi og forskning innenfor matematikkdidaktikk. De kom frem til følgende oppdeling av hovedbestandelene av dette begrepet: *konseptuell forståelse* (også kalt *begrepsmessig forståelse* på norsk), *prosedyrekunnskap*, *strategisk kompetanse*, *adaptiv resonnering* og *produktiv disposisjon*. Jeg har her oversatt begrepene ganske direkte fra engelsk til norsk. Svingen og Gilje (2018) har i sin rapport valgt å oversette begrepene henholdsvis til: forståelse, beregning, bruk, resonnering og engasjement. Disse fem komponentene beskrives som at de er avhengige av hverandre, og at de alle er deler av den helheten de kaller for matematisk kompetanse (Kilpatrick mfl., 2002). En bildemetafor for dette er vist på figur 2.1. Her er alle disse fem bestandelene tråder i et sammenflettet tau, hvor tauet som helhet symboliserer matematisk kompetanse. Jeg ønsker her å se nærmere på de to førstnevnte begrepene, nemlig konseptuell forståelse og prosedyrekunnskap.

Konseptuell forståelse beskrives som "[...] an integrated and functional graps of mathematical ideas" (Kilpatrick mfl., 2002, s. 118). Videre beskrives det som at en slik forståelse er mer enn å kunne enkeltstående fakta og metoder. Det er en organisert helhet. En introduksjon av nye begreper står da i en relasjon til de begrepene som eleven allerede forstår. "Because facts and methods learned with understanding are connected, they are easier to remember and use, and they can be reconstructed when forgotten" (Kilpatrick mfl., 2002, s. 118). Denne beskrivelsen minner om hvordan Skemp beskriver at elever med relasjonell forståelse er mer tilpasningsdyktige, og det at denne typen forståelse krever mindre memorisering av fakta og metoder. Kilpatrick mfl. skriver at "[...] students who learn with understanding can modify or adapt procedures to make them easier to use." (s. 124). Et tegn på at en elev har konseptuell forståelse, er evnen vedkommende har til å representere en matematisk situasjon på ulike måter, og at eleven klarer å velge hvilken, eller hvilke, av dem som er mest nyttig i en gitt situasjon (Kilpatrick mfl., 2002). En styrke eleven da har, er å kunne undersøke et problem på ulike måter for å se om en kommer frem til samme svar eller konklusjon. Det blir da en måte å sjekke sine egne svar. Dersom to fremgangsmåter gir to helt ulike svar, så vet eleven at noe er feil et sted, og eleven må da finne ut av hvor denne feilen ligger.



Figur 2.1: En billedliggjøring av de fem komponentene i begrepet matematisk kompetanse. Bildet er hentet fra Kilpatrick mfl. (2002).

Prosedyrekunnskap beskrives hos Kilpatrick mfl. (2002) som "[...] knowledge of procedures, knowledge of when and how to use them appropriately, and skill in performing them flexibly, accurately, and efficiently. (s. 121). I dette begrepet legges det også til at eleven bør kunne evaluere gyldigheten av svaret sitt. Prosedyrekunnskap ligger nær til Skemp sin instrumentelle forståelse, siden det er snakk om utførelsen av metoder for å løse problemer. Men samtidig har Kilpatrick mfl. større krav om forståelse i begrepet prosedyrekunnskap enn hva Skemp legger i instrumentell forståelse. Dersom elevene lærer prosedyrer uten forståelse, kan de som oftest ikke gjøre mer enn å bruke metoden i gitte situasjoner hvor metoden kan brukes direkte (Kilpatrick mfl., 2002).

2.4 Matematisk utforskning

Ordet *utforske* blir brukt i fire av tolv kompetansemål i den nye læreplanen (se læreplanen i vedlegg A). Utforskning er også med som et av kjerneelementene i læreplanen til R-matematikken. *Å utforske* beskrives som at elevene skal kunne "[...] lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse." (Utdanningsdirektoratet, 2018, s. 2). I læreplanen står det videre at utforskning også handler om at fremgangsmåten er viktigere enn løsningen elevene kommer frem til. Dette kan innebære utforskning av ulike løsningsmetoder samt refleksjon omkring andre sine fremgangsmåter.

2.4.1 Problemer med åpen/lukket start/slutt

Før jeg ser mer på undersøkende matematikkundervisning, vil jeg se på noen begreper om ulike typer matematiske problemer som er uavhengig av det matematiske temaet. Her blir det tydelig at noen av disse oppgavetypene egner seg bedre enn andre til utforskning. Oppgaver kan kategoriseres med utgangspunkt i om de har åpen eller lukket start og åpen eller lukket slutt. Pehkonen skriver at "One promising method to develop mathematics teaching in school seems to be the so-called open approach. There the teacher offers the class an open learning environment, in the form of an open-ended problem." (Pehkonen, 1995, s. 43). La oss se på følgende fire kategorier:

- Start
  - Åpen:
    Det er flere fremgangsmåter som vil kunne gi et svar på problemet, og det er ikke gitt hvilken fremgangsmåte eleven kan eller bør velge. Disse oppgavene kan gjerne assosieres med utforskende oppgaver.
  - Lukket:
    Problemet krever en bestemt løsningsmetode.
- Slutt
  - Åpen:
    Det er ikke noe fasitsvar, eller det finnes flere riktig svar. Her elevene må vurdere i hvilken grad sluttsvaret de kommer frem til passer til situasjonen og problemstillingen. Slike oppgaver assosieres også gjerne med utforskende oppgaver (Pehkonen, 1995).
  - Lukket:
    Det finnes et riktig sluttsvar på problemet.

Et problem med åpen start og åpen slutt kan for eksempel være et såkalt *Fermi-problem*:

Hvor mange riskorn er det i to kilo ris?

Problemet er kort skrevet, og det er ikke gitt noe hint om hvordan elevene skal angripe problemet. Fermi-problemer stammer fra fysikeren Enrico Fermi som en gang stilte spørsmålet "Hvor mange pianostemmere er det i Chicago?" (Ärlebäck og Bergsten, 2013). Tanken bak slike problemer er at en skal kunne gjøre estimater ved å kun bruke pen og papir. Her må elevene gjøre noen antagelser for å komme i gang med et regnestykke knyttet til dette antallet av riskorn. Det går også an å gå frem på en praktisk måte ved å for eksempel bruke en kjøkkenvekt. En kan da for eksempel finne antall riskorn i ett gram og så gange seg opp til antallet riskorn i to kilogram. Det er uansett vanskelig å si hvor nøyaktig sluttsvaret er utover det å vurdere i hvilken grad det virker rimelig. I en undersøkende matematikktime med dette problemet, kan det legges til rette for gode diskusjoner om ulike fremgangsmåter og hvordan klassen kan komme frem til et samlet sluttsvar.

Et annet eksempel på et problem med åpen start og åpen slutt kan være at elevene skal planlegge en reise med et gitt budsjett. Da er det opp til elevene hvordan de går frem og hva slags verktøy de bruker for å løse oppgaven. I en slik oppgave vil det også være nødvendig å gjøre prioriteringer av hva som er viktigst å bruke den gitte pengesummen på. Her finnes det heller ikke et fasitsvar, så elevene må diskutere og gjøre en vurdering av hvor fornuftig pengefordelingen de har kommet frem til er.

Problemer med lukket start og lukket slutt kan være å løse en likningsoppgave som for eksempel:

Hvilken x-verdier løser likningen $2x^2 - 4x + 1 = 0$*?*

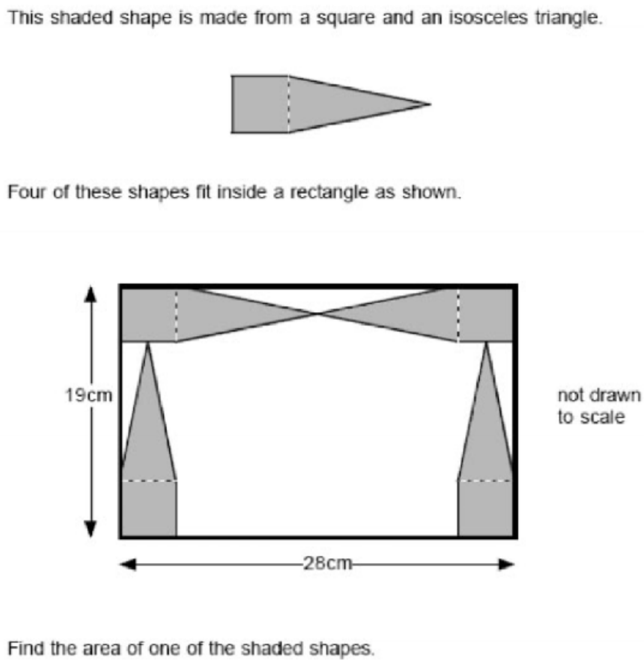
Da følger elevene bestemte løsningsmetoder, og det finnes et riktig sluttsvar på problemet.

Et problem med lukket start og åpen slutt kan for eksempel være som denne oppgaven:

En venn av deg har muligheten til å velge mellom to ulike sommerjobber og trenger dine råd for å gjøre et valg. Begge jobbene går ut på å selge en vare. Men han er usikker på hvilken jobb som er best å gå for og ber derfor deg om råd. Den ene jobben gir kun en fast lønn på 160 kr per time, mens den andre jobben gir en fast lønn på 100 kr per time pluss 20 kr i provisjon per solgte vare. Hvilke råd vil du gi?

Her er det bestemte metoder som elevene kan bruke for å lage formler og regnestykker på hvor mye en vil tjene i de to ulike jobbene. Men rådene en gir vil avhenge av hvor god vedkommende er, eller anser for seg å være, til å gjennomføre salg. Som en del av rådene bør det da komme frem hvor mange salg som må gjøres i gjennomsnitt per time for at de to timelønningene skal være like.

Figur 2.2 viser et eksempel på en oppgave med åpen start og lukket slutt. Dette er et geometriproblem som er kort beskrevet med tekst, og det har en hjelpefigur med to lengdemål som viser geometrien. Her finnes det et riktig svar på arealstørrelsen det spørres etter, men det er ingen hint i oppgaven om hvordan elevene kan eller bør gå frem. Dermed legger denne oppgaven til rette for utforskning og kreativitet. Monaghan mfl. (2009) argumenterer for at slike problemer kan være en måte å løse det såkalte "teaching-for-the-test-problemet". Med dette uttrykket så menes da instrumentell undervisning og mengdetrening i oppgaveløsning med mål om at elevene skal få riktige svar på oppgavene i en matematikkprøve. Dette er nok noe mange lærere kan kjenne på, i hvertfall når det nærmer seg en prøve eller en eventuell eksamen. Utgangspunktet for arbeidet med artikkelen til Monaghan mfl., var skolesystemet i Storbritania og et ønske om å gjøre elevene til mer kreative og bedre problemløsere. Dette kan være vanskelig å måle i en skriftlig vurderingssituasjon på skolen. Men i problemer med åpen start og lukket slutt finnes det da et riktig sluttsvar som gjør det enklere å gi en poengvurdering. I tillegg er det rom for en vurdering av kreativitet, og hvordan eleven har argumentert for sin fremgangsmåte underveis. Slik sett går det da også an å få poeng for en kreativ og godt begrunnet fremgangsmåte, selv om sluttsvaret ikke er riktig. Dette er da i tråd med den nye læreplanen i matematikk R som sier at utforskning handler om at fremgangsmåten er mer viktig enn sluttsvaret. Denne typen oppgaver med åpen start og lukket slutt vil da kunne være relevante og gjennomførbare for å vurdere elevene i kompetansemål som har med utforskning å gjøre.



Figur 2.2: Et eksempel på en oppgave med åpen start og lukket slutt. Bildet er hentet fra Monaghan mfl. (2009).

2.4.2 Rike oppgaver

Rike oppgaver er en betegnelse på en oppgavetype som inviterer til utforskende elevarbeid. Figur 2.3 viser et eksempel på en slik oppgave. Hedrén mfl. (2005) la frem kriterier de mener bør være oppfylt for å kalle et problem for en rik oppgave. De skriver blant annet at problemet skal være lett å forstå. Videre må det være slik at problemet kan legge til rette for diskusjon av ulike fremgangsmåter og ulike måter å se problemstillingen på. Problemet bør også være en bro mellom ulike deler av matematikkfaget, og legge til rette for at elevene skal kunne utvide problemet (Hedrén mfl., 2005). Arbeid med slike oppgaver kan for eksempel gjøres i grupper slik at elevene kan utforske, diskutere, øve på å argumentere for sitt syn og finne en løsning sammen med andre. En slik måte å jobbe på er også støttet i læreplanen under overskriften muntlige ferdigheter. Der står det at "Muntlige ferdigheter i matematikk R innebærer å skape mening gjennom å samtale i og om matematikk. Det vil si å være med i samtaler, å kommunisere ideer og å drøfte matematiske problemer, strategier og løsninger med andre." (Kunnskapsdepartementet, 2021, s. 4).

I det rike problemet vist på figur 2.3 er delproblemene kort beskrevet med tekst, og bildet gir en utfyllende beskrivelse av situasjonen. Det er en åpen start fordi oppgaven gir ingen hint om fremgangsmåten elevene kan eller bør velge. Slutten på de tre første deloppgavene er lukket fordi det finnes et riktig svar. Den siste deloppgaven legger opp til at elevene kan lage sitt eget problem av samme type. Her kan en gruppe for eksempel presentere sitt egenproduserte problem for hele klassen eller for en annen elevgruppe. Med utgangspunkt i dette eksempelet, kan vi tenke oss at alle elever kan få til noe. Det er flere mønstre her som elevene kan beskrive med sine egne ord. Geometrien i dette mønsterproblemet er sett delvis ovenfra og inn fra siden i denne figuren. Elevene kan lage egne tegninger og prøve å skille ut hva som er mest relevant for å få frem hva mønsteret er og kunne telle alle klossene. Det går også an å bygge figurene med fysiske byggeklosser og utforske på denne måten. For de flinkeste og mest kreative, skal det også være rom for å kunne utfolde seg. De kan for eksempel gruble på et mer generelt mønster. Dette mønsteret kan de så prøve å beskrive

Tornet

a) Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?

b) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?

c) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är *n* kuber högt?

d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Figur 2.3: Et eksempel på en rik oppgave. Bildet er hentet fra Hagland mfl. (2005) sitt oppgavehefte med rike oppgaver.

symbolsk, og deretter lage en funksjon som gir totalt antall klosser når antall klosser i høyden på tårnet er gitt. I den siste deloppgaven gis det rom for at elevene kan være kreative, da de inviteres til å lage sitt eget mønsterproblem. Dette legger også til rette for at de kan utvide et mønster de allerede forstår og mestrer fra de tre første deloppgavene. Det går også an å lage og utforske en ny geometri som gir opphav til et tilsvarende mønsterproblem. Det er stor takhøyde for elevenes kreativitet i den siste deloppgaven her.

Hvis elevene ikke er vant til å jobbe på denne måten, må det nok litt øvelse og tålmodighet til fra både læreren og elevene for å få det som ble beskrevet som utforskende matematikkundervisning. Her har læreren en viktig rolle. Goos (2004) beskriver det som at

> "[...] this process begins with the teacher's demonstration of a mathematical attitude, that is, a willingess to deal with mathematical concepts and to engage in mathematical reasoning according to the accepted values in the community, and consequently, from the teacher's mathematical expectations about the learner's activity." (s. 262).

Læreren må lede vei ved å vise at det er mulig å stille spørsmål, undersøke, diskutere og prøve og feile. Dette er en måte å jobbe og tenke på i matematikkfaget som er annerledes enn mer tradisjonell og lærerstyrt matematikkundervisning. Det å ta seg tid til å prøve dette med elevene, vil kunne øke sjansene for å lykkes med undersøkende undervisning og gjøre elevene til bedre og mer kreative problemløsere. Dette ser også ut til å støttes av

Kunnskapsdepartementet når de, som nevnt i kapittel 2.1, sier at dybdelæring skal legges vekt på i hele skoleløpet.

2.4.3 Undersøkende matematikk

"Matematikklasserom i Norge følger ofte en tradisjonell, lærebokstyrt undervisningsform hvor læreren introduserer dagens tema, viser eksempler på tavlen og deretter ber elevene om å løse oppgavene som står i boken" (Nosrati og Wæge, 2015, s. 3). En motsetning til denne måten å undervise på er det som kalles *undersøkende matematikkundervisning* (*inquiry based teaching*). Jaworski og Goodchild (2006) trekker frem at det å stille spørsmål, undre seg og finne mulige svar på spørsmålene er en helt sentral del av et undersøkende undervisningsopplegg. Det engelske ordet *inquiry* betyr i vitenskapelig sammenheng, ifølge Oxford dictionary, det å stille spørsmål og å skaffe informasjon om noe.

Svingen og Gilje (2018) refererer til flere forskere når de gjør en inndeling av undervisningskvalitet i fire dimesjoner: god klasseromsledelse, støttende lærer, tydelige intensjoner og faglige/kognitive utfordringer. I en undersøkende matematikktime kan man for eksempel ta utgangspunkt i en mønsteroppgave som vist på figur 2.3. Slike oppgaver legger til rette for faglige og kognitive utfordringer for elevene, samt muligheter for kreativitet i arbeidet. Her er det viktig at læreren gir tydelige føringer for elevarbeidet på en slik måte at alle elevene vet hva de skal gjøre. Elevene kan jobbe i mindre grupper hvor de får god tid til å utforske i felleskap. Grupper på to til fire elever vil kunne gjøre det lettere for elevene å diskutere og finne en felles fremgangsmåte. Slike gruppearbeid har støtte i læreplanens beskrivelsen av kjerneelementet *Representasjon og kommunikasjon*. Der står det blant annet at "Kommunikasjon i matematikk R handler om å bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer." (Kunnskapsdepartementet, 2021, s. 3).

Hvis læreren instruerer med en tydelig intensjon om at hver gruppe skal komme frem til en felles måte å løse problemet på, så kan det forhindre at elevene ikke kommer til enighet og istedet jobber hver for seg med egne løsninger fordi gruppearbeidet ikke fungerte. I læreplanens generelle del står det beskrevet at faget skal "bidra til at elevene ser verdien av å sette seg inn i og forstå andres resonnementer." (Kunnskapsdepartementet, 2021, s. 2). En måte å jobbe på her, kan være at gruppene skal først snakke sammen og legge frem alle de ulike forslagene til mulige fremgangsmåter som dukker opp i diskusjonen. Lærerens rolle i en slik time blir annerledes enn i en tradisjonell matematikktime. Goos (2004) beskriver dette ved å si at "Rather than rely on the teacher as an unquestioned authority, students in these classrooms are expected to propose and defend mathematical ideas and conjectures and to respond thoughtfully to the mathematical arguments of their peers." (s. 259). Læreren kan være støttende ved å gå rundt i klasserommet, snakke med elevene og lytte til hvordan de diskuterer seg i mellom. Da kan også læreren utfordre elevene på å forklare sin forståelse av en av de andre elevene sitt forslag til fremgangsmåte. Dette vil kunne bidra til at elevene øver på å se problemer fra ulike synsvinkler, og nettopp det å forstå andre sine resonnementer.

Det er viktig at læreren ikke blir en "svarmaskin" for elevene med tanke på om det de gjør eller lurer på er riktig eller galt. Dersom elevene sitter fast, kan læreren for eksempel gi hint om hvilken retning de kan gå i, eller hva de kan undersøke nærmere. Det er også mulig å oppfordre dem til å grundig tenke gjennom det de lurer på, og la elevene diskutere det nærmere i gruppen først. Spørsmål fra læreren som for eksempel "Hvordan forstår du dette?", "Hva tenker dere andre om det som ble sagt nå?", "Kan dere lage en tegning som beskriver det dere lurer på?" og "Finnes det andre måter å se dette på?" kan være med på å stimulere diskusjonen og arbeidet i gruppen. Nosrati og Wæge (2015) trekker frem at det å la elevene streve med matematiske problemer er viktig for å fremme relasjonell forståelse. I samme artikkel refererer de til en rekke forskere når de skriver at "I de senere årene har også matematiske diskusjoner og kommunikasjon blitt fremhevet som avgjørende faktorer for utvikling av begrepsmessig forståelse." (Nosrati og Wæge, 2015, s. 5).

I en artikkel av Borgersen (1994) blir det vist et eksempel på undersøkende undervisning i matematikk på høyskolenivå. Studentene, som tok et kurs i geometri i det 2. semesteret, jobbet i grupper med geometriproblemer som hadde en åpen slutt. Målet med prosjektet var å gi studentene bedre forståelse av matematisk tenkning og det å oppleve matematikken som en prosess. Studentene valgte selv ut hvilke problemer de ville jobbe med fra en utdelt oppgavesamling. Figur 2.4 viser oppgaven som fremheves som eksempel i denne artikkelen. Ved å jobbe med et sett av problemer over en periode på én måned, fikk studentene tid til å gruble, utforske, diskutere og la forståelsen av problemene modne og utvikle seg. Dette arbeidet gikk da parallelt med pensumundervisningen. Studentene loggførte hvordan de jobbet og organiserte gruppearbeidet sitt. De måtte i tillegg skrive ned refleksjoner omkring arbeidet, hindre de møtte på underveis, nye ideer som kom og forslag som dukket opp (Borgersen, 1994). Det ble også gjort et valg om å ikke gi karakter på gruppearbeidet, men heller en skriftlig tilbakemelding som fokuserte på det positive ved arbeidet som studentene leverte inn. Til den individuelle skriftlige slutteksamen fikk hver student én av oppgavene fra sitt eget gruppearbeid som en del av sin eksamen. Et tilsvarende opplegg kan også fint gjennomføres i matematikkundervisningen i skolen.

Best place on Stadium
Given a soccer field or handball field.
You have a ticket for "the long side" of the field.
Which place is the best for watching the goal of your home team?

Figur 2.4: Geometrioppgave med åpen start fra Borgersen (1994).

Det er tydelig at en slik måte å jobbe på setter elevene til å ta en mer aktiv rolle i matematikktimene sammenlignet med om de sitter hver for seg og regner oppgaver. Det er da viktig at læreren tenker gjennom kvaliteten på oppgavene som brukes i et slikt undersøkende undervisningsopplegg. Hvis det blir for vanskelig, vil elevene kunne bli frustrerte og gi opp. Og hvis det blir for lett eller mangler nok utfordringer, vil det kunne føre til at elevene kjeder seg og ikke deltar i arbeidet (Liljedahl, 2018). Det er også en viktig del av en slik time at det blir satt av tid slik at elevene får høre hvordan de forskjellige gruppene har tenkt på oppgaven. Slike oppgaver har mange måter å gå frem på, og det kan være mye læring i å se på problemet fra ulike vinkler. Dette kan legges inn som en avsluttende del av timen med en lærerstyrt klasseromsdiskusjon av de ulike gruppene sitt arbeid.

Det er da viktig å skape et miljø i klassen hvor det er rom for å tenke høyt, akseptabelt å ta feil, lov å være uenige og at det er lov å skifte mening dersom en blir overbevist av gode argumenter fra andre. "Eit klima i klasserommet som lar elevane dele idear, oppklare misforståingar, argumentere og utvikle eit matematisk språk, bidra til djupare forståing og er kritisk for framtidig suksess i matematikk." (Svingen og Gilje, 2018, s. 12). Det å være usikker og å diskutere seg frem til løsninger sammen med andre i klassen er en viktig del av denne læringsprosessen. Læreren kan prøve å få elevene til å snakke om hva de lurte på underveis, hvordan de gikk frem for å finne ut av det de lurte på og hva de kom frem til. Det at elevene har fått tid til å jobbe og snakke sammen innad i gruppen først kan gjøre at det oppleves tryggere for dem å fortelle høyt for hele klassen om hvordan de tenkte. Da har elevene allerede snakket innad i gruppen og fått en respons på det de har sagt.

2.5 Matematiske begreper

Grenseverdi er et helt grunnleggende begrep i matematikk. I matematikk R1 er dette begrepet viktig som et tema i seg selv. Det er også viktig for blant annet definisjonen av kontinuerlige funksjoner og for definisjonen av den deriverte. Den deriverte i matematikk R1, med sine tilhørende regneregler, behandles først som et tema i seg selv. Deretter blir det gått gjennom en rekke anvendelser som for eksempel funksjonsanalyse og optimeringsproblemer. I dette delkapitlet vil matematiske begreper som er relevante for denne masteroppgaven bli definert, og tilhørende sentrale regneregler vil bli presentert. Min fremstillingen av denne matematikken bygger på hvordan Ross (2013) og Lindstrøm (2017) legger det frem.

2.5.1 Grenseverdi

La f være en funksjon med definisjonsmengde $D_f = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, og la $c \in (a, b)$. La $L, M, N \in \mathbb{R}$ være tre tall. L er da *grenseverdien* til f når x nærmer seg c, hvis det er slik at for enhver $\epsilon > 0$, så finnes det en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Det er altså mulig å få funksjonsverdien, $f(x)$, vilkårlig nær L, bare vi velger δ liten nok. Hvis denne grenseverdien eksisterer, så er den også unik. Denne grenseverdien får notasjonen

$$\lim_{x \to c} f(x) = L. \tag{2.1}$$

Vi kan også skrive dette som

$$f(x) \to L \text{ når } x \to c.$$

Det finnes situasjoner der en må spesifisere om grenseverdien skal nærme seg fra venstre eller høyre side av $x = c$. Det gir oss begrepene *venstresidig grenseverdig* og *høyresidig grenseverdi*. Funksjonen f har *venstresidig grenseverdi* N for $x = b$, notert som

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = N, \tag{2.2}$$

hvis det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$b - \delta < x < b \implies |f(x) - N| < \epsilon.$$

Funksjonen f har *høyresidig grenseverdi* M for $x = a$, notert som

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = M, \tag{2.3}$$

hvis det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$a < x < a + \delta \implies |f(x) - M| < \epsilon.$$

Hvis $\lim_{x\to c} f(x) = L$, så er høyresidig og venstresidig grenseverdi for $x = c$ lik hverandre:

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x). \tag{2.4}$$

La g være en funksjon hvor $\lim_{x\to c} g(x)$ er definert, og $k \in \mathbb{R}$ er en konstant. Vi har da følgende regneregler for grenseverdier:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x) + g(x) &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \\ \lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \\ \lim_{x\to c} k \cdot f(x) &= k \cdot \lim_{x\to c} f(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Den siste regneregelen, som sier at vi kan sette en konstant utenfor grenseverdien, er bare et spesialtilfelle av produktregelen. Men det er vanlig å liste den opp som en egen regneregel i matematikk R1.

Hvis $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, så har vi følgende regel for grenseverdien av en brøk med en funksjon i teller og i nevner:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}. \tag{2.6}$$

For å bevise disse regnereglene, trenger vi å bruke et ϵ-δ-bevis. Dette er vanligvis betraktet som å være utenfor rammene av matematikk R1. Men det er mulig å se på om disse regnereglene stemmer i spesifikke tilfeller med konkrete funksjoner, og la elevene utforske gyldigheten av dem på denne måten.

2.5.2 Derivasjon

La $D_f \subseteq \mathbb{R}$ være en åpen delmengde, og $x \in D_f$. La f være en funksjon

$$f : D_f \to \mathbb{R}.$$

Den deriverte til f i x gis notasjonen $f'(x)$ og defineres som grenseverdien

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{2.7}$$

gitt at denne grenseverdien eksisterer og er endelig. Hvis f er deriverbar for alle $x \in D_f$, så sier vi at f er deriverbar i D_f.

La f og g være deriverbare funksjoner i x, og la $k \in \mathbb{R}$ være en konstant. Da gjelder følgende regneregler:

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\ (f(x)\cdot g(x))' &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \\ (k\cdot f(x))' &= k\cdot f'(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Regel nummer to i denne listen er kjent som *produktregelen*. Den siste regneregelen, som sier at vi kan sette en konstant utenfor derivasjonsoperatoren, er bare et spesialtilfelle av produktregelen. Men det er vanlig å liste den opp som en egen regneregel i matematikk R1. Som vi ser av den første regneregelen i (2.8), så er den deriverte av en sum av funksjoner er lik summen av den deriverte av hver enkelt funksjonen. Dette, sammen med det at vi kan sette konstanter utenfor derivasjonsoperatoren, gjør at den deriverte er en såkalt *lineær operator*.

La f og g være deriverbare i x. Hvis $g(x) \neq 0$, så er f/g deriverbar i x. Dette er da gitt ved *brøkregelen*:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{2.9}$$

Ut ifra definisjon (2.7) kan en relativt enkelt vise hvorfor disse reglene er gyldige ved å bruke regnereglene for grenseverdier.

Til slutt skal vi se på den deriverte for sammensatte funksjoner. Dette er gitt ved den såkalte *kjerneregelen*. La f og g være funksjoner med definisjonsmengder henholdsvis D_f og D_g. La $x \in D_f$ og $f(x) \in D_g$. La $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ være en sammensatt funksjon. Hvis f er deriverbar i x, og g er deriverbar i $f(x)$, så sier kjerneregelen at

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{2.10}$$

2.6 Begrepslæring i matematikk

Prosessen med å lære seg et nytt matematisk begrep beskrives hos Sfard (1991) som bestående av tre faser: *internalisering* (*interiorization*), *kondensering* (*condenzation*) og *reifikasjon* (*reification*). I denne modellen av læringsprosessen kan de tre fasene kan bare oppnås i denne oppgitte rekkefølgen. *Internaliseringen* består av å møte det nye begrepet for første gang og bli kjent med det. Hva går det ut på? Hvordan er det definert? Hvordan kan det representeres? Hvordan står det i relasjon til tidligere kjent matematikk? Dette kan fremstilles på mange måter i en lærebok eller i et klasserom. En første introduksjon kan være med konkrete eksempler som viser hva et begrep eller en metode går ut på. Slike eksempler kan da vise elevene hva som er fellestrekk og hva som kan variere innenfor spesifikke tilfeller av dette begrepet eller denne metoden. Senere kan en formalisere det mer med definisjoner, regneregler og begrunnelser eller beviser.

Innføringen av et nytt begrep kan motiveres ved å vise til en type problemstilling vi hittil ikke har hatt matematiske verktøy til å kunne løse. Det kan også være å utvide eller generalisere et begrep som elevene allerede kjenner til. Når elevene skal lære seg derivasjon, kan en fremgangsmåte være å motivere at i mange situasjoner er vi interessert i hvor raskt en størrelse endrer seg med tiden. La oss si at vi har en funksjon som har tid som variabel, $f(t)$, og at vi har en tilhørende graf til denne funksjonen. Vekstfarten kan uformelt, og upresist, beskrives som "hvor bratt" kurven er i et gitt punkt. I skolegangen før matematikk R1, har elevene lært om stigningstall til lineære funksjoner og knyttet dette til vekstfarten til funksjonen. Dermed kan elevene etterhvert se at derivasjonsbegrepet er en generalisering av dette. Elevene kjenner allerede til grenseverdier når derivasjonsbegrepet introduseres. Da ligger det også til rette for en formell definisjon av den deriverte og begrunnelser for tilhørende regneregler.

Kondensasjon beskrives som perioden etter internaliseringen. Her blir omfattende prosesser forkortet ned, og eleven blir mer i stand til å tenke på begrepet i en større sammenheng. Et eksempel på dette kan være at elevene i starten lærer å derivere ved å bruke derivasjon slik det er definert som en grenseverdi. Dette tar mye lengre tid enn å bruke de ulike regnereglene for derivasjon. Ved å vise at gyldigheten av disse regnereglene kommer nettopp fra definisjonen, kan en lang prosess bli dramatisk forkortet ned. Overgangen til å bruke regneregler i stedet for definisjonen av den deriverte, vil også gjøre eleven i stand til å derivere langt mer kompliserte funksjoner enn hva en ville klart kun ved hjelp av definisjonen. Sfard inkluderer også mestring av ulike representasjoner som en del kondensasjonsbegrepet. "A progress in condensation would manifest itself and in growing easiness to alternate between different representations of the concept." (Sfard, 1991, s. 19). Det å kunne veksle mellom ulike måter et begrep representeres på, er også en sentral del av relasjonell forståelse slik det beskrives hos Sfard.

Både internalisering og kondensasjon beskrives som gradvise prosesser. Det siste nivået beskrives derimot som et skifte hvor en plutselig ser begrepet i et nytt lys (Sfard, 1991). Med *reifikasjon* ser en da begrepet frigjort fra måtene begrepet ble introdusert på i startfasen. Alle aspektene rundt relasjonell forståelse er da tilstede i hvordan begrepet sees på. Sfard (1991) skriver avslutningsvis i sin artikkel: "[...] insight cannot always be expected as an immediate reward for a persons direct attempt to a fathom a new idea. The reification, which brings relational understanding, is difficult to achieve, it requires much effort, and it may come when least expected, sometimes in a sudden flash." (s. 33). Alle som har studert matematikk kan nok kjenne seg igjen i dette etter å ha jobbet og strevet med å forstå et begrep over en tidsperiode, for så å oppleve at "brikkene faller på plass".

2.7 Teoretisk rammeverk

Jeg vil i dette kapitlet gå gjennom de ulike rammeverkene som skal brukes til å analysere og kategorisere innholdet i lærebøkene inn i forhåndsdefinerte kategorier.

2.7.1 Horisontal analyse

Hver lærebok har en rekke fakta knyttet til seg. Det er blant annet et forlag som boken er gitt ut på, én eller flere forfattere, et utgivelsesår, et antall kapitler, et antall delkapitler, et antall sider og en sidestørrelse. Charalambous mfl. (2010) bruker begrepet *horisontal analyse* for å beskrive en analyse av slike fakta om boken. Det er også inkludert i dette begrepet hvilke temaer som dekkes av læreboken, og i hvilken rekkefølge dette gjøres i. Slike fakta kan bli oversiktlig satt opp i en tabell, som skissert i tabell 2.1. Bøkene som er med i analysen kan settes ved siden av hverandre i kolonner, og de ulike karakteristikkene plasseres i hver sin rad nedover. Dette gjør det enklere å se visse likheter og forskjeller ved bøkene. Både grenseverdi og derivasjon er begreper som dukker opp i flere andre deler av matematikk R1 sitt innhold. En tabell med innholdsoversikt vil da kunne være en god måte å se hvordan de ulike lærebøkene strukturerer rekkefølgen på innholdet sitt.

Tabell 2.1: Horisontal analyse av lærebøker kan fremstilles oversiktlig i tabellform.

	Bok 1	Bok 2	Bok 3
Forfattere	-	-	-
Forlag	-	-	-
Utgivelsesår	-	-	-
Antall sider	-	-	-
Sidestørrelse (mm)	-	-	-
Antall kapitler	-	-	-

2.7.2 MTF - Kognitive krav i oppgaver

Jeg vil bruke Stein og Smith (1998) sitt rammeverk for å analysere hvilke kognitive krav elevene stilles ovenfor i matematikkoppgaver. Det har fått navnet *Mathematical tasks framework* (*MTF*). Stein og Smith skriver om læringsmuligheter i oppgaver at "Tasks that ask students to perform a memorized procedure in a routine manner lead to one type of opportunity for student thinking; tasks that require students to think conceptually and that stimulate students to make connections lead to a different set for opportunities for student thinking." (Stein og Smith, 1998, s. 269). Oppgavene i lærebøkene har tradisjonelt sett en sentral rolle i matematikkundervisningen og leksearbeid. Dermed har læreboken en betydning for hvilke læringsmuligheter elevene får, og i hvilken grad elevene kan bli faglig utfordret. Hvilke kognitive krav elevene møter på samlet sett i alle oppgavene de jobber med i løpet av skolegangen, vil dermed også kunne ha noe å si for hva slags matematiske ferdigheter og forståelse de utvikler i faget. De kognitive kravene i dette rammeverket deles inn i fire kategorier:

- *hukommelse*
- *prosedyre uten sammenheng*
- *prosedyre med sammenheng*
- *matematiske oppgaver* (min oversettelse av *doing mathematics*)

Her følge en beskrivelse av hver av de fire kategoriene slik de fremstilles hos Smith og Stein (1998).

Hukommelse

Oppgaver i kategorien *hukommelse* (*LavH*) er det laveste kognitive nivået, og det krever ikke noe mer av elevene enn hva de kan fra før. Det kan være fakta, regler, formler eller definisjoner som gjør at oppgaven lar seg løse raskt og direkte. Et eksempel på slike oppgaver kan være å finne stigningstallet og konstantleddet til lineære funksjoner, $f(x) = ax + b$. For eksempel så vil oppgaveformuleringen "Hva er stigningstallet og konstantleddet til funksjonen $f(x) = 3x + 5$?" passe i denne kategorien. Det som blir spurt om i oppgaven kan leses rett ut av uttrykkene, dersom eleven husker hva som var stigningstall og hva som var konstantleddet. Slike oppgaver kan være nyttige i en første innlæringsfase. Men denne oppgaveformuleringen gir ikke noe mer mening til begrepene stigningstall og konstantledd utover det at elevene kan identifisere hva som er hva i en slik funksjon.

Prosedyrer uten sammenheng

Det neste nivået er *prosedyre uten sammenheng* (*LavP*). Dette ansees også som et lavt nivå i MTF. Her må eleven bruke en bestemt metode for å løse oppgaven. Men metoden som kreves er enten spesifikt nevnt i oppgaven, eller så er det klart ut fra sammenhengen den gis i hvordan oppgaven skal løses. Hvis en seksjon av boken handler om å bruke en bestemt derivasjonsregelen, og oppgavedelen som følger den ber eleven om å derivere en rekke funksjoner som passer til denne regelen, så er det klart ut i fra denne konteksten hvilken formel/fremgangsmåte eleven skal bruke. Eleven får da øve på bruk av den aktuelle formelen eller metoden. Dette kan være nyttig i den første innlæringsfasen for å bli kjent med for eksempel en regneregel. Men det er ingen dypere mening knyttet til oppgavene, og oppgavene fremmer ikke relasjonell forståelse hos elevene. Fokuset er å produsere riktige svar ved hjelp av formelen eller metoden. Et eksempel kan være at elevene har lært regelen for derivasjon av polynomer ved å bruke regelen $(ax^n)' = anx^{n-1}$ på hvert ledd i polynomet. Å derivere en mengde med polynomfunksjoner på denne måten krever ikke noe mer av elevene enn å i hvert ledd sette ned eksponenten foran x, gange den med a og så endre eksponenten i svaret til én mindre enn hva en startet med. Slik sett er dette en form for reproduksjon av kunnskap eller pugging av et begrep eller formel sin enkle form for betydning.

Prosedyrer med sammenheng

Det neste nivået er *prosedyre med sammenheng* (*HøyP*). Dette ansees som et høyere nivå i dette rammeverket, og slike oppgaver har et formål om å gjøre elevens forståelse av et begrep dypere. Slike oppgaver kan bruke ulike representasjoner og kan for eksempel handle om å knytte sammen meningsinnholdet i de ulike representasjonene. Selv om oppgaven kan gi hint om fremgangsmåten, er de kognitive kravene som stilles i slike oppgaver større enn de tidligere to nevnte. Eleven er her nødt til å ha en forståelse av begrepene som ligger til grunn for oppgaven. Slik sett er det flere læringsmuligheter i slike oppgaver enn i de to første kategoriene. Stein og Smith (1998) skriver om dette nivået at "Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with conceptual ideas that underlie the procedure to complete the task successfully and that develop understanding." (s. 348). Et eksempel på en slik oppgave kan være å derivere en funksjon som krever en kombinasjon av flere derivasjonsregler. For eksempel vil funksjonen $f(x) = e^{2x} \cdot 4x^2$ kreve en kombinasjon av både produktregelen og kjerneregelen. Det å gå fra å mestre reglene hver for seg til å så kunne bruke dem i passende kombinasjoner, vil gjøre elevene i stand til å derivere langt flere og mer kompliserte funksjoner. Det vil også være en øvelse i å finne riktig regel, eller kombinasjon av regler, til riktig situasjon dersom det ikke er gitt hvilke regler som må brukes. Et annet eksempel kan være følgende oppgave uten hjelpemidler: "Finn grenseverdien $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$, dersom den eksisterer". Her kan ikke eleven bare sette inn tallet 1 og konkludere. Eleven må her også ha en forståelse av hva det vil si at en grenseverdi eksisterer eller ikke.

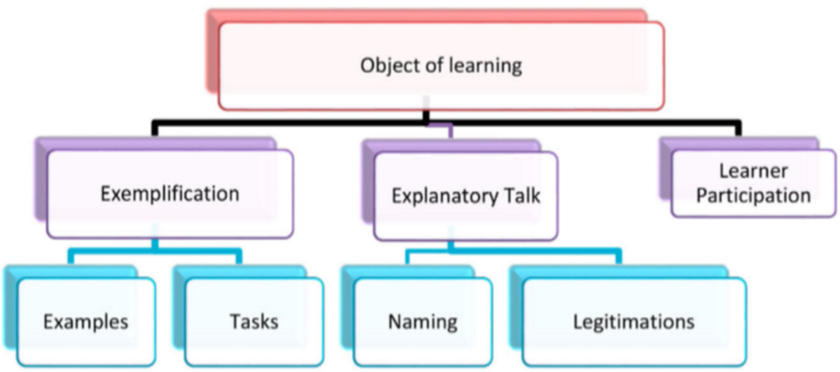
Matematiske oppgaver

Den siste kategorien er *matematiske oppgaver (HøyM)*. Dette er min oversettelse av kategorinavnet *doing mathematics* i rammeverket til Stein og Smith (1998). Slike oppgaver er komplekse og krever stor fleksibilitet i elevens tenkning. Det er ikke opplagt hvordan en skal gå frem, så eleven må være bevisst på sin egen tenkning og vurdere fremgangsmåten sin. Det kan være å vurdere hva slags representasjon av matematikken som er mest nyttig for å finne en vei gjennom problemet. Det kan også være nyttig å kunne veksle på hvilken representasjon en bruker underveis for å forstå problemet. Eksempler på slike oppgaver kan være en rik oppgave. Det kan også være et geometriproblem med åpen start og lukket slutt. Disse utforskende oppgavetypene ble nærmere beskrevet tidligere i dette kapitlet. Slike oppgaver krever en relasjonell type forståelse fordi slike oppgaver "Require students to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships." (Stein og Smith, 1998, s. 348). En kan også tenke seg at oppgaver eller oppfordringer til at elevene selv skal finne ut av et matematisk bevis, kan havne på dette nivået.

2.7.3 MDITx for analyse av læringsmuligheter i lærebøker

Adler og Ronda (2015) lagde et rammeverk for å analysere matematisk diskurs og elevdeltakelse i matematikkundervisning. Det fikk navnet *Mathematical Discourse in Instruction* (MDI). Figur 2.5 viser strukturen og hovedelementene i dette rammeverket. Etter dette arbeidet ble de også interessert i å se på lærebøker i lys av et tilsvarende rammeverk. Dette fikk navnet MDITx. De var da interessert i hvordan lærebøker åpner eller lukker for læringsmuligheter i matematikk (Ronda og Adler, 2017). De skriver at

> "As the textbook is a different empirical text (from a classroom lesson), we have adapted our description of some of the indicators while retaining the characteristic features of the tool, in particular, indicators that posit a trajectory towards developing scientific discourse in the textbook." (Ronda og Adler, 2017, s. 1100).



Figur 2.5: Oversikt på hovedelementene i MDI-rammeverket. Hentet fra Adler og Ronda (2015).

I MDITx vil ikke *Learner Participation*, elevdeltakelse, legges noe vekt på (se oversikt på figur 2.5). Det er rett og slett fordi det er vanskelig, eller umulig, å si noe om hva slags elevaktiviteter eller elevdeltakelse som faktisk vil foregå i et klasserommet kun basert på analyse av innholdet i læreboken. Men det er mulig å si noe om hvordan læreboken gir muligheter for ulike elevaktiviteter. Det kan legges til rette for elevaktiviteter ved at for eksempel elevene oppfordres til å tenke gjennom noe ved at det blir stilt spørsmål i teksten, at det blir oppfordret til å diskutere med andre i klassen eller at det blir oppfordret til å på egenhånd skrive ut detaljene i et argument eller å fullføre et uferdig bevis. "We argue that the way the author uses examples, tasks, words and legitimations affords or constrains opportunities for learning mathematics." (Ronda og Adler, 2017, s. 1101). Det kan også være at læreboken kommer med forslag til elevaktiviteter som kan gjennomføres i klasserommet. Slike muligheter for deltakelse kan komme frem i forklarende tekst, i eksempler eller i oppgaver.

Törnroos (2005) definerer begrepet *læringsmuligheter* gjennom et sitat fra Torsten Husén: "One of the factors which may influence scores ... is whether or not the students have had an oppotunity to study a particular topic or learn how to solve a particular type of problem ..." (s. 316). Boaler (2022) beskriver *læringsmuligheter* ved å si at "Put simply, if students spend time in classes where they are given access to high-level content, they achieve at higher levels." (s. 174). Denne omtalen av begrepet *læringsmuligheter* en ganske generell og en noe løs måte å definere et begrep på. Men en kan tenke seg at hvis elever skal ha muligheten til å bli gode på for eksempel utforskende matematikkoppgaver, så må de få mange og varierte muligheter til å jobbe med dette. Slike muligheter kan komme i læreboken gjennom tekst, eksempler, oppgaver og i undervisningen hvor læreren setter av tid til det.

Læringsobjekt

Øverst i MDITx er begrepet *object of learning* (se oversikt i figur 2.5), som jeg vil oversette til *læringsobjektet*. Dette er det matematiske temaet som en seksjon av læreboken handler om. Det kan for eksempel være et matematisk begrep, en metode eller en relasjon mellom matematiske begreper. En slik seksjon kan være en del av eller et helt delkapittel. Dette vil variere ut hva hva slags valg lærebokforfatterene har gjort med tanke på bokens oppbygning. Begrepet læringsobjekt innebærer både hva eleven skal lære, og hva eleven skal være i stand til å gjøre etter å ha fullført denne seksjonen av boka. Dette oppnås med forklarende tekst, eksempler, oppgaver og andre elevaktiviteter som er beskrevet i boken. Begrepet læringsobjekt er altså ikke det samme som et læringsmål for en time eller et kompetansemål i læreplanen. Det er ment for å brukes i analysen av en spesifikk seksjon av læreboken. Slik sett kan det være at læringsobjektet og læringsmålet for en matematikktime sammenfaller. Det kan også være at læringsmålet, eller læringsmålene, for en time består av flere læringsobjekter i læreboken. Læringsobjektet angis gjerne av en overskrift til et kapittel eller en seksjon av boken. Men et navn i en overskrift gir ikke nødvendigvis innsikt i meningsinnholdet til læringsobjektet. Dette kommer frem gjennom innholdet av den aktuelle seksjonen. Et skille mellom to læringsobjekter kan komme i form av en ny overskrift. Det kan også komme i form av en tekstdel eller et eksempel som markerer et skille fra det tidligere innholdet og som så introduserer et nytt læringsobjekt.

Oppgaver

En *oppgave* defineres som "[...] what learners are asked to do with the examples [...]" (Ronda og Adler, 2017, s. 1102). Et *eksempel* er hos Ronda og Adler definert som *et spesifikt tilfelle av en større klasse*. Denne definisjonen av en oppgave fokuserer da på hva eleven blir bedt om å gjøre med et slikt spesifikt tilfelle. I analysen av oppgaver, tar MDITx for seg om en oppgave ber elevene gjennomføre matematiske prosedyrer knyttet til læringsobjektet, og om det er muligheter for å se sammenhenger mellom ulike deler av bokens matematiske innhold (Ronda og Adler, 2017). Hvis læringsobjektet er den deriverte av polynomer, så vil "Deriver $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, og tegn grafene til $f(x)$ og $f'(x)$ i samme koordinatsystem." være en oppgave knyttet til dette læringsobjektet. Funksjonen $f(x)$ er et spesifikt tilfelle fra klassen av alle polynomer, og eleven blir bedt om å gjøre handlinger med denne funksjonen. Definisjonen av læringsobjekt innebærer også hva slags handlinger eleven skal være i stand til å gjøre. Dermed blir oppgavene en test på om eleven har oppnådd forståelse eller ferdigheter som kreves i det aktuelle læringsobjektet.

Kategorisering av oppgaver

Følgende kategorier brukes for å kategorisere enkeltoppgaver i MDITx. *Known procedure/fact* (KPF) brukes hvis en oppgave kun innebærer tidligere gjennomgått kunnskap eller prosedyrer om læringsobjektet. *Current topic/procedure* (CTP) brukes når en oppgave er knyttet til det nåværende læringsobjektet. Det kan handle om et begrep eller en prosedyre som er introdusert i samme seksjon som oppgaven gis i. *Application/making connections tasks* (AMC) kategoriserer en oppgave som krever at eleven gjør et valg om hva slags metode og matematiske begreper som er relevante for å kunne svare på oppgaven. MDITx bruker tre nivåer for å beskrive oppgavene innenfor et læringsobjekt. Nivå 1 er dersom det bare er oppgaver av typen KPF. Nivå 2 er dersom det er oppgaver av typen CTP, men ikke noen av typen AMC. Nivå 3 har både oppgaver av typen CTP og AMC (Ronda og Adler, 2017).

2.7.4 Undersøkelseslandskaper

Jeg vil bruke Skovsmose (1998) sitt rammeverk Undersøkelseslandskaper for å analysere utforskende oppgaver. Han gjør en distinksjon mellom det han kaller et *undersøkelseslandskap* og et *oppgaveparadigme*. Et *undersøkelseslandskap* beskrives som en situasjon der elevene sammen med læreren kan undre seg og utforsker et matematisk problem. Noen perspektiver på slik undersøkende matematikkundervisning ble beskrevet i kapittel 2.4. Problemer som utforskes her kan for eksempel være av typen rik oppgave eller et åpen-slutt-problem. Skovsmose (1998) vektlegger det at elevene blir invitert med til å stille spørsmål av typen "Hva om ...?" og "Hvorfor er det sånn at ...?". Her bør det også være rom for at elevene stiller spørsmål, selv om de ikke kan svare på dem. Det gjør at elevene får satt ord på det de legger merke til, selv om de ikke kan forklare det. Det å stille slike spørsmål kan fungere som en oppvarming eller inngangsport for elevene til å starte en matematiske undersøkelse.

Skovsmose (1998) bruker begrepet *oppgaveparadigmet* for å beskrive matematikkoppgaver i mer tradisjonell undervisning. Med tradisjonell undervisning så mener han undervisning hvor læreren går gjennom et tema og viser eksempler på tavlen, for deretter å gi elevene noen utvalgte oppgaver som tar for seg det samme temaet. Dette begrepet står da som en motpol til et undersøkelseslandskap. Begrepet *fasitparadigme* brukes for å beskrive arbeid med oppgaver hvor det er ett riktig fasitsvar. "Opgavediskursen kan sætte sig på hele matematikk undervisningen. Målet bliver at få afklaret nogle matematiske forhold, således at bestemte opgaver kan besvares, og besvares korrekt." (Skovsmose, 1998, s. 29). Oppgaver innenfor dette paradigme har en riktig løsning, altså en lukket slutt. Men dersom slike oppgaver har en åpen start, kan den også brukes til utforskning. Eksempler på dette ble gitt i delkapitlet om utforskende matematikk med referanse til artikkelen skrevet av Monaghan mfl. (2009). Figur 2.6 viser de seks ulike kategorier som Skovsmose (1998) deler oppgaver inn i. Det skilles på om man er i et undersøkelseslandskap eller i et oppgaveparadigme. Videre skilles det på i hvilken grad det er en referanse til virkeligheten som elevene kan knytte oppgaven til. Jeg vil bruke denne inndelingen til å analysere oppgaver med tanke på muligheter til utforskning.

La oss se på noen eksempler på de seks ulike kategoriene. Kategori 1 er rene matematiske oppgaver med et fasitsvar. Det kan være å finne grenseverdien $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$, eller det kan være

	Opgave-Paradigmet	Undersøgelses-landskaber
Referencer til «ren» matematik	(1)	(2)
Semi-referencer til «virkeligheden»	(3)	(4)
Reelle referencer	(5)	(6)

Figur 2.6: Oversikt på kategoriene i Skovsmose sitt rammeverk. Hentet fra (Skovsmose, 1998).

å derivere en konkret funksjon som for eksempel $f(x) = 4x^2$. Dette er da rene matematisk oppgave uten noen kontekst eller referanser til virkeligheten. Kategori 2 er rene matematiske oppgave som befinner seg i et undersøkelseslandskap. Et eksempel på dette kan være en undersøkelse kun med pen og papir av hva som skjer med funksjonsverdien til $f(x) = 1/x$ når $x \to \infty$. For å stimulere til utforskning og undring, kan oppgaven for eksempel be to og to elever gå sammen og se hvem som finner hvilken x-verdi som gir den minste mulige verdien av $f(x)$. En slik konkurranse kan få elevene til å innse at den ene kan hele tiden komme med en ny x-verdi som er større enn den andre sin verdi og slik lede konkurransen. En undring over hva som er nærme nok til å si at en grenseverdi blir fastsatt, kan også lede elevene inn på en ϵ-δ-tankegang, som brukes til å formelt bestemme denne grenseverdien i matematikken. En kan også tenke seg at oppgaveformuleringen har noe å si for kategoriseringen. Ta for eksempel funksjonen $fx) = e^{2x}$. Formuleringen "Deriver $f(x)$ ved hjelp av produktregelen, og deretter ved hjelp av kjerneregelen." er forskjellig fra "Bruk to ulike fremgangsmåter for å derivere $f(x)$". Slutten er lukket i begge tilfellene, da det finnes et korrekt fasitsvar. Men starten på problemet, avhengig av formuleringen, er henholdsvis lukket og deretter åpen.

Kategori 3 er oppgaver med et fasitsvar og hvor det er en virkelighet som kan finne sted, eller oppgaven har en konstruert virkelighet. Vi kan for eksempel se på terminalfarten til en fallskjermhopper før fallskjermen utløses. La farten, $f(t)$, være gitt som en funksjon av tid. Svaret finner en da ved å se på grenseverdien til $f(t)$ når $t \to \infty$. Andre eksempler kan være at det matematiske innholdet i oppgaven er knyttet til for eksempel utviklingen av prisen på en vare eller et folketall over tid. Da vil den deriverte beskrive den momentane endringen i et gitt tidspunkt. Kategori 4 er i et utforskningslandskap med en virkelighet som kan finne sted. Et eksempel er å se på en funksjon som er kontinuerlig overalt i sin definisjonsmengde, men ikke deriverbar overalt. Dersom oppgaven presenterer et konkret tilfelle som eleven skal vurdere, vil dette havne i kategori 3. Men formuleringen "Gi ulike eksempler fra virkeligheten som kan beskrives av en funksjon som er kontinuerlig overalt, men ikke deriverbar overalt." vil kunne stimulere til utforskning og havne i kategori 4.

Kategori 5 er oppgaver med et fasitsvar og hvor det er en reell referanse til elevenes virkelighet. Et eksempel på dette kan være et gitt pengebeløp på en sparekonto eller i et fond som vokser med en gitt prosent i året, og hvor elevene så skal regne ut hvor mange kroner beløpet vokser med på et gitt antall år. Det kan også være et elevarbeid hvor elevene selv skal gjøre målinger eller samle inn data, for så å gjøre statistiske beregninger på dette datasettet. Kategori 6 er en utforskende oppgave med en reell referanse til elevenes virkelighet. Skovsmose (1998) gir et eksempel på dette ved å beskrive hvor mange aspekter det er ved planleggingen og design av et nytt klasserom. Han beskriver en klasse som ble delt i grupper for å gjøre dette som et prosjekt på en skole. Blant annet er det mulig å trekke inn perspektivtegningen, budsjett, innkjøpsvalg, areal og volum. Dette arbeidet skulle så settes sammen og presenteres som en forslag for skoleledelsen.

Et annet eksempel på en oppgave i kategori 6 er å undersøke hvor lang en sofa kan være for å kunne skyve den langs gulvet bortover i en gang og rundt et 90-grader hjørne. De eneste målene som gis er da bredden på gangen og bredden av sofaen. Dette er da en forenklet variant av det såkalte "The moving sofa problem". Dette problemet har mange muligheter for å lage fysiske modeller, som kan gi et utgangspunkt for utforskning og modellering av situasjonen. Et annet eksempel kan være å modellere veksten av en plante. Elevene planter da et frø og måler med jevne mellomrom høyden til planten. Disse høydemålingene kan brukes til å lage en matematisk modell av høyden til planten, og hvor den deriverte beskriver vekstfarten til planten i ulike tidspunkt. Med utgangspunkt i disse kategoriene vil jeg i lærebokanalysen skille på oppgaver som er i oppgaveparadigme og oppgaver som kan legge til rette for utforskende matematikk. Min analysetabell vil da følge oppsettet som er vist på figur 2.6.

2.7.5 Kategorisering av bevis

Jeg velger å bruke rammeverket til Thompson mfl. (2012) for å kategorisere bevis og begrunnelser av matematiske regler og påstander. Dette rammeverket deler begrunnelser inn i fire kategorier, som vist i tabell 2.2. MDITx inneholder også et rammeverk for dette som er nesten helt tilsvarende de tre kategoriene G, S og N. Men rammeverket til Thompson mfl. (2012) har i tillegg med kategorien L, der beviset for et resultat eller en påstand er overlatt til eleven selv. Jeg ser på dette som et interessant aspekt å ha med i analysen av bevis. Det er fordi slike oppfordringer til å finne ut av noe på egenhånd kan være en god læringsmulighet for elevene. Det vil kunne bidra til en relasjonell forståelse av hvor en formel kommer fra, og hvorfor den er gyldig. Det kan også gi økt forståelse av hvordan nye resultater i matematikk kommer frem når en tar utgangspunkt i allerede etablerte definisjoner og resultater. Dette går tilbake til beskrivelsene av forståelse i matematikk i kapittel 2.3. Slike læringsmuligheter kan komme i form av en oppgave eller en utforskningsdel. I slike tilfeller kan det være deloppgaver som eleven skal løse, og som leder frem til et hovedresultat. Det kan også komme som et spørsmål i en tekstdel hvor elevene kan bli oppfordret til å undersøke og finne ut av et bevis på egenhånd.

Tabell 2.2: Oversikt på kategoriene i rammeverket til Thompson mfl. (2012).

Kode	**Navn**	**Forklaring**
G	Generell	Begrunnelse med et matematisk bevis.
S	Spesifikk	Begrunnelse med deduktive argumenter basert på ett eller flere spesialtilfeller.
L	Overlatt til eleven	Det er overlatt til eleven å finne ut av begrunnelsen for resultatet. Dette kan være i en egen utforskende del av teksten eller i en oppgave hvor deloppgaver leder frem til hovedresultatet.
N	Ingen begrunnelse	Det gis ingen begrunnelse for resultatet, og det er heller ingen oppfordring om at eleven skal finne ut av det på egenhånd.

For å konkretisere disse kategoriene, vil jeg eksemplifisere dem ved å se på resultatet som sier at *hvis en funksjon er deriverbar i* $x = a$*, så er den kontinuerlig i* $x = a$.

Dette resultatet er helt vanlig å ta med å matematikk R1, og det knytter en relasjon mellom egenskapene deriverbarhet og kontinuitet til en funksjon. Et bevis i kategorien G vil da gå gjennom et formelt bevis for denne påstanden. Her trenger vi også å vite at hvis en funksjon er kontinuerlig i $x = a$, så er det ekvivalent med at $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ved å bruke definisjonen av den deriverte og regnereglene for grenseverdier, lar dette beviset seg fint gjennomføre for elever i matematikk R1. Jeg skriver ut beviset nå som om det skulle stått i en lærebok for matematikk R1. Dette beviset er et direktebevis hvor resultatet følger relativt enkelt fra antagelsen om at funksjonen er deriverbar.

Bevis: La f være en funksjon som er deriverbar i $x = a$. Da er grenseverdien

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definert og endelig. Fordi nevneren går mot null når $x \to a$ og $f'(a)$ eksisterer, så må også telleren gå mot null. Det gir oss

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0.$$

Da har vi at $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, som så impliserer at f er kontinuerlig i $x = a$. Dermed har vi vist at deriverbarhet i et gitt punkt impliserer kontinuitet i det samme punktet, og beviset er ferdig.

Et bevis av dette resultatet ovenfor i kategorien S vil kunne være å ta for seg en spesifikk funksjon med samme eller en tilsvarende fremgangsmåte som ovenfor. Elevene vil da kunne se at resultatet stemmer i et spesifikt tilfelle. Det vil være nok av konkrete eksempler for å vise at et resultat er gyldig i spesifikke tilfeller, men det kan også være viktig å gjøre elevene klar over at dette alene ikke gjør at en anser et resultat som gyldig i matematikken. I kategorien L er det overlatt til eleven å finne ut av begrunnelsen for resultatet. Dette kan være i en egen utforskende del av teksten eller i en oppgave. Her kan det variere hvor mye hint eller hjelp eleven får til å komme i gang. Det kan også være at beviset er delvis beskrevet, men at det er opp til eleven å fullføre det. Det kan også være at en slik oppgave er delt inn i flere deloppgave der delresultater etableres, og som til slutt skal settes sammen til ett resultat. Som en annen oppgave i kategorien L knyttet til dette beviset, kunne elevene fått utfordringen å vise at kontinuitet ikke nødvendigvis impliserer deriverbarhet. Dette lar seg greit bevise ved å komme opp med et moteksempel, som da viser at denne påstanden ikke er sann generelt sett.

Den siste kategorien, N, er tilfeller der det gis ikke noen begrunnelse for resultatet. Det kan være at lærebokforfatterene ikke ser på det som relevant å vite hvorfor regelen eller resultatet er gyldig, men at det viktige er at elevene kan bruke det i praksis til å løse matematiske problemer. Det kan også tenkes at det er utenfor rammene av faget å forstå beviset. Det er allerede nevnt i kapittel 2.5 at bevisene for grenseverdiregnereglene vanligvis holdes utenfor rammene av matematikk R1. Dermed må elevene stole på at slike resultater er gyldige basert på en autoritet som læreboken eller matematikklæreren. Eleven må da pugge formelen og lære å bruke den. Dette blir da en instrumentell forståelse av det aktuelle resultatet. Det å måtte godta at noe er utenfor rammene av hva vi klarer å bevise her og nå, er nok kjent for de fleste uansett hvilket nivå som en studerer matematikk på. Dette kan være frustrerende. Men det kan også være en motivasjon for å fortsette å lære mer matematikk, og så tenke at man en gang i fremtiden vil være i stand til å forstå et slikt bevis.

Kapittel 3

Metode

I dette kapitlet vil jeg se på metodikken til denne masteroppgaven. Jeg vil først ta for meg innholdsanalyse som forskningsmetode. Så vil jeg se på valg av lærebøker, og jeg vil avklare hvordan jeg har begrenset omfanget av studien. De aktuelle teoretiske rammeverkene ble gjennomgått hver for seg i teorikapitlet. I dette kapitlet vil jeg se på hvordan disse rammeverkene skal brukes i analysen av lærebøkene. Fremgangsmåten min og kodeskjemaene for analysen av oppgaver og bevis vil bli presentert og forklart. Til slutt vil jeg reflektere litt rundt etikken i en slik studie, og jeg vil ta for meg studiens kvalitet ved å se på begrepene validitet og reliabilitet.

3.1 Innholdsanalyse som metode

Felles for studier i læremiddelanalyse, er at de bygger på innholdsanalyse som metode. Generelt sett kan kildematerialet i studier innenfor innholdsanalyse være av ulik karakter som skriftlig, verbalt, lyd og video. I denne studien er det utvalgte deler av de nyutgitte fysiske lærebøkene som er læremidlene og datagrunnlaget. Denne masteroppgaven er da en multiple-case-studie innenfor innholdsanalyse av lærebøker, hvor hver lærebok er én case. Bryman (2012) definerer innholdsanalyse som "[...] an approach to the analysis of documents and texts that seeks to quantify content in terms of predetermined categories and in a systematic and replicable manner." (s. 290). Elo og Kyngäs (2008) siterer Krippendorff (1980) når de skriver at innholdsanalyse dreier seg om "[...] replicable and valid methods for making inferences from observed communications to their context, with the purpose of providing knowledge, new insights, a representation of facts, and a practical guide to action." (s. 108). Dette er to overordnede formuleringer som beskriver hva innholdsanalyse innebærer. To aspekter som trekkes frem i disse måtene å definere innholdsanalyse på, er at analysemetoden må være systematisk og replikerbar for andre.

Bryman (2012) påpeker at objektiviteten i slike typer studier avhenger av at forskeren gjør nøye rede for fremgangsmåten sin, og hvordan det teoretiske rammeverket har blitt brukt i analysen. Dette er da for å gjøre studien etterprøvbar for andre, og for å redusere faren for at resultatene påvirkes av forskerens egne preferanser eller en underliggende agenda. Et relevant eksempel på dette kan være at forskeren har en favorittbok som gir en skeivhet i analysen som er i favør av denne boken. Innholdsanalyse beskrives også som en svært fleksibel forskningsmetode med mange anvendelsesområder (Bryman, 2012). Det å bruke innholdsanalyse som metode i denne masteroppgaven, var nærliggende da forskningsspørsmålet mitt går ut på hvordan de nye lærebøkene legger til rette for oppnåelse av noen utvalgte kompetansemål knyttet til grenseverdi og derivasjon i de nye lærebøkene.

Elo og Kyngäs (2008) skriver at "Content analysis is a flexible method and there are no simple guidelines for data analysis, which makes it challenging for the researcher." (s. 113). Denne fleksibiliteten kan være en fordel som gjør at en kan tilpasse seg en rekke ulike problemstillinger. Det kan også være en utfordring med tanke på å strukturere fremgangsmåten i analysen. Det er viktig å redgjøre for rammeverkene som skal brukes i analysen. Dette ble gjort i teorikapittelet. Man må være bevisst på å holde seg til hvordan rammeverket, og kategoriene i det, er definert og ment å brukes. Hvis en skal gjøre egne tilpasninger av et eksisterende rammeverk, må dette komme tydelig frem og begrunnes. I denne masteroppgaven brukes alle rammeverkene slik de er beskrevet i de respektive artiklene som jeg baserer min forståelse av dem på.

Når det gjelder innholdsanalyse av lærebøker i matematikk, er det ikke nødvendigvis bare det matematiske innholdet som er av interesse. Det kan også være at didaktiske valg blir analysert (Kongelf, 2019). Det er også viktig å huske på at lærebøker i matematikk først og fremst er skrevet med tanke på eleven som mottaker, ikke læreren eller en lærebokforsker. Kongelf (2019) poengterer at det ikke er sikkert at en elev, en lærer og en forsker tolker et gitt innhold i en lærebok på samme måte. Det finnes en rekke ulike teoretiske rammeverk som kan brukes innenfor innholdsanalyse. Valg av slike teoretiske rammeverk avhenger av hva som er av interesse med forskningen og typen datamaterial som ligger til grunn. Med utgangspunkt i ett eller flere forskningsspørsmål, så finner man da ett eller flere passende teoretiske rammeverk for å kunne komme frem til noen svar på det en ønsker å finne ut mer om. I studier med innholdsanalyse som metode, er det også typisk flere forskningsspørsmål i samme studie (Bryman, 2012). Det er tilfellet i denne masteroppgaven hvor jeg har et hovedspørsmål som videre er delt opp i fire delspørsmål.

Elo og Kyngäs (2008) skriver at innholdsanalyse kan være "[...] a method that may be used with either qualitative or quantitative data and in an inductive or deductive way" (s. 107). Kvantitativ innholdsanalyse er, ifølge Bryman (2012), en godt etablert forskningsmetode hvor målet er å kunne gi en kvantitativ beskrivelse av datamaterialet i form av kategorier som er spesifiserte på forhånd. Kvantitative innslag vil i denne studien komme i form av tabeller som viser antall forekomster og prosentandelene til de ulike analysekategoriene. Det vil også komme i form av diagrammer for å presentere resultatene mer visuelt og oversiktlig. Til slutt vil konklusjonene jeg gjør være av kvalitativ art. I en *induktiv tilnærming* er det ikke et fastsatt rammeverk med forhåndsdefinerte kategorier for analysearbeidet. Disse kategoriene blir da til underveis, mens innholdet i datamaterialet studeres (Kongelf, 2019; Elo og Kyngäs, 2008). En av delstudiene hos Kongelf (2019) er av denne typen. Dette er en fremgangsmåte som egner seg godt når det finnes lite kunnskap om det som skal studeres fra før. Da må forskere se etter mønstre og fellestrekk i datamaterialet og konstruere passende kategorier som settes sammen til et rammeverk, eller som brukes for å utvide et eksisterende rammeverk. Bergwall (2017) gjorde et slikt type arbeid med for å utvide og nyansere Thompson mfl. (2012) sitt rammeverket for kategorisering av bevisføring i realfagsmatematikken.

I en *deduktiv tilnærming* er kategoriene som brukes i analysen, forhåndsdefinerte av ett eller flere teoretiske rammeverk (Kongelf, 2019). Dette er fremgangsmåten som blir brukt i denne masteroppgaven. Lærebøkene utgjør et kvalitativt datamateriale, og jeg har valgt å bruke både kvalitative og kvantitative tilnærminger. Det kvalitative kommer i form av beskrivelser av læreboken, eksemplifisering av hvordan lærebøkene fremstiller det matematiske innholdet og avgjørelsene jeg tar med tanke på hvilken kategori oppgaver og bevis plasseres i. Det vil til en viss grad være et tolkningsspørsmål fra min side hvilken kategori ulike oppgaver og eksempler havner i når jeg gjør analysen. Målet er selvsagt at min bruk av rammeverkene skal være så presis og objektiv som mulig, slik at om noen andre gjorde det samme kategoriseringsarbeidet, så ville det vært så lite avvik som mulig. Men dette innslaget av subjektivitet i slike studier er nesten umulig å unngå (Bryman, 2012).

3.2 Valg av lærebøker

Det er gitt ut tre nye lærebøker for matematikk R1 fra de tre store forlagene Cappelen Damm, Aschehoug og Gyldendal i forbindelse med den nye læreplanen. Etter flere søk på internett, var dette de eneste lærebøkene jeg kunne finne som dekker hele matematikk R1. Bøkene fra de største forlagene gir meg da et datamateriale som viser de lærebøkene jeg antar vil bli brukt på de aller fleste skolene. Jeg begrunner denne antagelsen med den beskrevne sentrale rollen som de fysiske lærebøkene har i skolen, og at disse tre forlagene er de største innen utgivelser av lærebøker. Dersom en skole velger å bruke de digitale lærebøkene fra disse forlagene, så er de identiske med de fysiske lærebøkene bare at de er elektroniske. Dermed går jeg ut i fra at det er en av disse tre lærebøkene de fleste elevene vil bruke i sin opplæring i matematikk R1.

Jeg gjorde et valg om å se på alle disse tre bøkene. Jeg har argumentert for, og sitert en rekke ulike kilder på, lærebokens sentrale rolle i matematikkundervisningen. Ved å se på alle tre bøkene, får jeg da en oversikt over hva de tilbyr elevene av muligheter til å forstå og utforske begrepene grenseverdi og derivasjon. Jeg måtte vurdere omfanget av antall delkapitler og oppgaver som skal analyseres. Dette vil bli gjort rede for i neste delkapittel. Her følger en liste over de tre lærebøkene med forlag, tittel og det første forfatternavnet på forsiden:

- Cappelen Damm: Sinus R1 (Oldervoll mfl., 2021)
- Aschehoug: Matematikk R1 (Borgan mfl., 2021)
- Gyldendal: Mønster R1 (Kalvø mfl., 2021)

Jeg vil omtale disse bøkene som henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Disse lærebøkene vil bli nærmere presentert i starten av resultatkapitlet.

3.3 Avgrensning av denne studien

Det er nødvendig å avgrense omfanget av en masteroppgave, da den skrives i et begrenset tidsrom og med en begrensning på lengde. Valg av det matematiske temaet i matematikk R1 ble presentert og begrunnet i introduksjonskapitlet. Her prøvde jeg også å motivere relevansen av lærebokstudier. Grenseverdi og derivasjon er begreper som innføres tidlig i lærebøkene i matematikk R1. Begge begrepene brukes i flere kapitler i lærebøkene enn i de delkapitlene som introduserer dem og deres grunnleggende egenskaper og regneregler. Grenseverdi er et begrep som må læres for seg selv, men det er også avgjørende for å forstå definisjon av den deriverte og for å forstå gyldigheten av regnereglene i derivasjon. Videre er grenseverdibegrepet viktig for å forstå hvordan vi definerer at en funksjon er kontinuerlig, og for å forstå hva asymptoter til funksjoner er. Derivasjon har på sin side anvendelser og tolkninger i for eksempel analyse av funksjoner, optimeringsproblemer og parameterfremstillinger. Det å skulle ta for seg alt som har med grenseverdi og derivasjon å gjøre i lærebøkene, ville dermed blitt for omfattende denne masteroppgaven. Jeg valgte å avgrense denne studien ved å kun se på introduksjonen av grenseverdi og derivasjon, og hvordan de mest sentrale regnereglene presenteres og begrunnes. Det ble, som allerede nevnt, gjort et valg om å ikke se på noen av de tilgjengelige digitale ressurser på forlagene sine nettsteder. Slike nettsteder tilbyr typisk videoleksjoner for elevene, flere forklaringer, flere eksempler, ekstra oppgaver og undervisningsopplegg for klassen.

For å avgrense temaet grenseverdi, vil jeg se på regnereglene for sum, produkt, brøk. Selv om det å kunne sette konstanter utenfor en grenseverdi egentlig er et spesialtilfelle av produktregelen, behandles denne gjerne som en egen regneregel i matematikk R1. Derfor velger jeg også å behandle dette som en egen regel i min analyse. For å avgrense temaet derivasjon, vil jeg se på regnereglene for polynomer, eksponential- og logaritmefunksjonen, sum av funksjoner, produkt av funksjoner, brøkfunksjoner, kjerneregelen og det å kunne sette konstanter utenfor derivasjonsoperatoren. Selv om det å derivere en konstant er et spesialtilfellet av å derivere et polynom, blir dette også gjerne behandlet som en egen regneregel i matematikk R1. Derfor vil jeg også behandle det som en egen regneregel i min analyse.

De konkrete delkapitlene og sidene i de tre lærebøkene som blir inkludert i analysen, vil bli presentert i den horisontale analysen i resultatkapitlet. Jeg vil identifisere alle påstander og resultater innenfor denne avgrensningen og se på hvordan disse er bevist eller begrunnet. Jeg vil også ta for meg alle oppgavene og eksemplene som er knyttet til de aktuelle delkapitlene i lærebøkene. Jeg vil ta med alle relevante oppgaver i oppgavesamlingen som er til slutt i hovedkapitlene, og de relevante oppgavene som er gitt i egne oppgavesamlinger bakerst i bøkene. Ved å dekke alle disse oppgavene vil det gi største mulige utvalget av oppgaver som elever kan møte på innenfor min avgrensning. Det vil også gi et inntrykk av hva en elev vil møte på, dersom denne eleven hypotetisk sett jobber med alle disse delkapitlene av boken med sine tilhørende oppgaver og bevis.

3.4 Gjennomføringen av analysen og kodeskjemaene

I dette delkapitlet vil jeg beskrive hvordan jeg vil gå frem for å plassere oppgaver og bevis i kategoriene til de ulike rammeverkene. Alt dette er da en deduktiv analyse basert på de beskrevne kategoriene i rammeverkene. Kodeskjemaene er en viktig del av å gjøre analysen systematisk, og det er grunnlaget for de kvantitative resultatene i denne studien. Kodeskjemaene vil bli laget i Excel, og de vil bli beskrevet og eksemplifisert i dette delkapitlet. For å holde oversikt underveis og i etterkant i analysen av lærebøkene, vil jeg bruke ulike farger til å markere kategoriene som oppgavene og bevisene får. Dette gjør at jeg ser hva jeg har kategorisert, og hva som gjenstår. Det gjør det også enklere å telle antall elementer i hver av kategoriene, og det å se over et delkapittel på nytt ved behov.

3.4.1 Horisontal analyse

I teorikapitlet beskrev jeg hva en horisontal analyse er, slik det blir beskrevet hos Charalambous mfl. (2010). Her blir denne analysen delt inn i *lærebokens bakgrunnsinnformasjon* og *lærebokens helhetlige struktur*. Jeg vil forholde meg til disse to kategoriene ved å først finne overordnede fakta om bøkene som forfattere, forlag, utgivelsesår, antall sider og antall kapitler. Dette vil bli presentert i form av en tabell som samler denne informasjonen om de tre bøkene. Deretter vil jeg se på oppbygningen, strukturen og i hvilken rekkefølge de ulike lærebøkene presenterer det aktuelle matematiske innholdet. Dette vil bli presentert i form av tabeller med innholdsfortegnelser og med beskrivende tekst.

3.4.2 Kognitive krav i oppgaver

Jeg vil analysere kognitive krav i oppgaver ved å bruke Stein og Smith (1998) sitt rammeverk, MTF. De kognitive kravene som stilles i oppgavene, vil si noe om hva slags muligheter elevene får til å jobbe mot det å oppnå forståelse av grenseverdi, derivasjon og de mest sentrale regnereglene for disse to begrepene. Vedlegg C viser en oversikt på de viktigste kriteriene knyttet til de ulike kategoriene i dette rammeverket (Stein mfl., 2009). Denne oversikten ble brukt aktivt for å plassere oppgavene i de fire kategoriene. I dette rammeverket kategoriseres hver enkelt oppgave for seg selv. I de utvalgte delkapitlene vil jeg se på alle tilhørende oppgaver, og jeg vil se på alle de relevante oppgavene i oppgavesamlingene på slutten av hovedkapitlene og bakerst i lærebøkene.

Jeg vil nå avklare nærmere hvordan oppgavene vil bli kategorisert. I oppgaver som består av flere delspørsmål, vil jeg kategorisere hvert delspørsmål for seg selv. Dette er fordi det kan være variasjon i hvor omfattende og krevende de ulike deloppgavene er. Det kan også være at ulike måter deloppgavene er formulert på vil få en betydning for kategoriseringen. Hvis det er en deloppgave som inneholder flere spørsmål, vil jeg telle hvert spørsmål som én oppgave. For å holde oversikt på hva som har blitt kategorisert underveis i analysearbeidet, vil jeg bruke en egen farge til hver kategori for å markere hver av oppgavene i lærebøkene. Dette vil også gjøre det lettere å se over analysen på nytt for en kontroll av arbeidet.

Formuleringen i en oppgave kan ha en betydning for hvilken kategori de havner i når det gjelder MTF-rammeverket. Oppgaver hvor eleven blir bedt om å begrunne eller forklare et svar, vil stille større kognitive krav enn om dette ikke kreves. En tilfredstillende begrunnelse av sluttsvaret, kan bety at eleven har, eller blir nødt til å jobbe mot å få, en relasjonell forståelse av de relevante begrepene i oppgaven. Det er én ting å tenke at noe gir mening og at en ser sammenhenger. Det er noe annet, og mer krevende, å klare å uttrykke det på en tilfredstillende måte skriftlig eller muntlig. Prosedyreoppgaver med krav til begrunnelse av svaret, vil derfor bli kategorisert som HøyP i stedet for LavP. Prosedyreoppgaver som inneholder flere ulike representasjoner, eller som handler om å gjøre koblinger mellom disse, vil bli kategorisert som HøyP. Det er fordi en viktig del av relasjonell forståelse er å kunne veksle mellom representasjoner, og det å forstå koblingene mellom dem. En deloppgave som kun ber om at en graf skal tegnes med hjelpemidler, vil bli kategorisert som LavH. Dette er da det laveste nivået i MTF-rammeverket. Dette begrunner jeg med at det krever ikke noe mer av eleven enn å huske hvordan en legger funksjonsuttrykket inn i et program som GeoGebra, som da tegner opp grafen for eleven. Dette er da kun en reproduksjon av stegene en må gjøre i et dataprogram for å få frem en graf på skjermen. Derimot vil det å skissere eller tegne en graf for hånd basert på informasjon i oppgaven havne på et høyere kognitivt nivå. I en prosedyreoppgave, vil dette da havne i kategorien HøyP.

Jeg vil også se på om læreboken indikerer om oppgaven skal gjøres med eller uten hjelpemidler. Lærebøkene har gjerne et ikon ved siden av oppgavenummeret, for eksempel en blyant, som indikerer at oppgaven skal gjøres for hånd og uten hjelpemidler. Det kan også være at formuleringen i oppgaven, eller en deloppgave, sier om den skal gjøres med eller uten hjelpemidler. Formuleringer som "Vis ved regning at ..." eller "Vis med digitale hjelpemidler at ..." er eksempler på dette. Dersom en prosedyreoppgave gis som en oppgave med hjelpemidler, vil jeg kategorisere den som LavP i stedet for HøyP. Hvis en oppgave er formulert som at den skal gjøres både med og uten hjelpemidler, vil den kategoriseres som HøyP. Her kan det tenkes at læreren legger andre føringer for elevene med tanke på bruk av hjelpemidler enn det læreboken angir, men dette kan jeg ikke ta hensyn til i en lærebokanalyse. Jeg vil gjøre analysen basert på hvordan læreboken formulerer oppgavene. Som eksempel på dette, kan vi se på det å finne grenseverdien $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x-5}$. Uten hjelpemidler og hint om metode, må eleven vurdere fremgangsmåten sin og manipulere uttrykket for å komme frem til svaret. Dette er noe annet enn å legge inn samme uttrykk i GeoGebra, eller et passende Python-script, for å få svaret rett ut. Med slike hjelpemidler er det bare å følge en gitt prosedyre for å få ut et fasitsvar, og det gir ikke nødvendigvis noen dypere forståelse av begrepet grenseverdi.

I noen oppgaver kan det være at eleven skal finne ut av et bevis for et resultat. Da vil jeg telle dette både som en oppgave, og som et bevis i kategorien L. Det er fordi slike oppgaver kan være krevende og bidra til økt relasjonell forståelse. For å fange det generelle, må en bruke symboler, relevante resultater og definisjoner for å komme frem til det nye resultatet. Slik sett, vil jeg at den skal telle med i antall kognitivt krevende oppgaver, og samtidig ønsker jeg å få slike oppgaver telt med i bevis-kategoriseringen. Det kan også være oppgaver der innhold fra flere kapitler og delkapitler inngår i ulike deloppgaver. Dette er typisk for oppgavesamlinger, kapitteltesten på slutten av et hovedkapittel og for oppgavesamlingen bakerst i læreboken. Dersom oppgavesamlingen er delt inn etter delkapitler, vil jeg kun se på oppgaven som tilhører de relevante delkapitlene. På slutten av et kapittel er det ønskelig at elevene skal kunne mestre temaet som helhet, og ikke bare enkeltdeler hver for seg. I slike tilfeller vil jeg ta med oppgaver som tar for seg det å tegne en graf, regne ut funksjonsverdier og ikke minst det som har relevans til det jeg har beskrevet som avgrensningen av omfanget på denne masteroppgaven. Deloppgaver som for eksempel har med funksjonsanalyse eller optimeringsproblemer vil ikke bli kategorisert.

For å telle antall oppgaver i de ulike kategoriene, har jeg laget et kodeskjema i Excel. Et utdrag av dette er vist på figur 3.1. Dette skjemaet er først delt inn etter kapittel, oppgavenummer og deloppgave. Kommentarfeltet angir om det er flere delspørsmål i en oppgave, og eventuelt andre kommentarer som er verdt å notere ned. En egen celle øverst teller totalt antall oppgaver som er analysert. Oppgavene føres i kronologisk rekkefølge nedover. Øverst til høyre er kategoriene i rammeverket sammen med hver sin celle som teller antall forekomster. Under disse cellene er det hver sin celle som regner ut prosentandelen av disse frekvensene.

3.4.3 Læringsmuligheter i oppgaver

Jeg vil bruke Ronda og Adler (2017) sitt rammeverk, MDITx, for å se på hva slags læringsmuligheter det finnes i oppgavene gitt i de ulike delkapitlene. Hvert delkapittel blir delt inn i seksjoner på ett og ett læringsobjekt. Et nytt læringsobjekt markeres gjerne med en ny overskrift i kapitlet, men det kan også tenkes at en slik overgang skjer med en tekstdel eller et eksempel som lager et skille til det neste læringsojektet. Hvis et delkapittel bare har ett

Kapittel	Oppgave	Deloppg	Kommentar		LavH	LavP	HøyP	HøyM
					Sum =		31	
					MTF			
Kapittel	Oppgave	Deloppg	Kommentar		LavH	LavP	HøyP	HøyM
				Sum	0	22	9	0
				Prosent	0,0%	71,0%	29,0%	0,0%
2.1 Grenseverdier	Utforsk		27 delspm			18	9	
	2,10	a				1		
		b				1		
		c				1		
		d				1		

Figur 3.1: Kodeskjema for å kategorisere oppgaver i MTF-rammeverket.

læringsobjekt, så vil hele delkapitlet analyseres som én seksjon. Jeg vil kun se på de aktuelle delkapitlene, og ikke oppgavesamlingene, når det gjelder analysen av oppgaver med denne rammeverket. Det er fordi dette rammeverket er ment for å brukes på denne måten i konteksten av ett og ett læringsobjekt i læreboken.

Kategoriene KPF (Known Procedyre Fact), CTP (Current Topic or Procedure) og AMC (Application or Making Connections) ble beskrevet i teorikapitlet. Disse brukes for å kategorisere oppgavene hver for seg. Bruken av disse kodene er knyttet til læringsobjektet, og de avhenger også av sammenhengen oppgavene blir gitt i. Nivåinndelingen i MDITx ble beskrevet i teorikapitlet, og den vil bli brukt på hele læringsobjektet. For å telle antall oppgaver i de ulike kategoriene, har jeg laget et kodeskjema i Excel. Et utdrag av dette skjemaet er vist på figur 3.2. Fra venstre side er delkapittelet, oppgavene og deloppgavene angitt. Deretter følger en beskrivelse av læringsobjektet. De tre kategoriene i rammeverket har hver sin kollonne, og de samme har den samlete nivåinndelingen for seksjonen av boken. Egne celler summerer opp antall oppgaver i hver kategori og prosentandelen hver kategori utgjør.

Kapittel	Oppgave	Deloppg	Kommentar		KPF	CTP	AMC	Sum	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Sum
					MDITx							
				Sum	0	36	7	43	0	1	2	3
				Prosent	0,0%	83,7%	16,3%		0,0%	33,3%	66,7%	
				Læringsobjekt								
2.1 Grenseverdier	Utforsk		27 delspm	Grenseverdier med fire regneregler: hele kap 2.1 s.51-54		1						
	2,10	a				1						
		b				1						
		c				1						
		d				1						
	2,11	a				1						
		b				1						
		c				1						
		d				1					1	
		e				1						
	2,12	a				1						
		b				1						
		c				1						
		d				1						
	Diskuter	1					1					
		2					1					
		3					1					

Figur 3.2: Kodeskjema for å kategorisere oppgaver i MDITx-rammeverket.

Jeg ønsker å eksemplifisere de tre kategoriene. La læringsobjektet være, som i kodeskjemaet på figur 3.2, grenseverdi med de fire regnereglene. La $\lim_{x \to 5} x^2$ være et eksempel å gå ut i fra. KPF vil da være oppgaver som for eksempel å tegne grafen til funksjonen $f(x) = x^2$, og regne ut funksjonsverdien i $x = 5$. Dette er tidligere kjent kunnskap som ikke i seg selv gir elevene noen ny innsikt i begrepet grenseverdi. Det kan også være deloppgaver med matematikk som har blitt gjennomgått i et tidligere kapittel. CTP vil være oppgaver som gjør at elevene må jobbe med det aktuelle læringsobjektet. La f og g være gitte funksjoner. Oppgavene $\lim_{x\to 2}[5f(x)+g(x)]$ og $\lim_{x\to 5} f(x)^2$ vil da havne i kategorien CTP. Oppgaver i kategorien AMC krever at eleven gjør et valg om hva slags metode og matematiske begreper som er relevante for å kunne svare på oppgaven. Dette er da mer krevende oppgaver. La for eksempel P og Q være polynomer, og vi ser på grenseverdien $\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x)$. En oppgave i kategorien AMC kan da være å undersøke denne grenseverdien når P har høyere, samme eller lavere grad enn Q.

3.4.4 Utforskende oppgaver

Jeg vil se på hvordan bøkene legger til rette for at elevene skal få muligheter til å utforske ved å bruke Skovsmose (1998) sitt rammeverk *Undersøkelseslandskaper* til å kategorisere oppgaver. Dette rammeverket ble beskrevet i teorikapitelet sammen med eksempler på hver av kategoriene i rammeverket. Utforskende matematikk ble beskrevet i teorikapitlet sammen med flere konkrete eksempler. Det er særlig problemer med åpen start og/eller åpen slutt som vil legge til rette for matematisk utforskning. Altså oppgaver der det for eksempel ikke umiddelbart er klart hvilken løsningsstrategi som vil lede frem til et svar. Oppgaver som oppfordrer til diskusjon og refleksjon kan også bli telt som utforskende oppgaver. Et eksempel på dette er oppgaver hvor elevene skal vurdere en gitt fremgangsmåte og utregning som en tenkt elev i teksten har gjort. Det er fordi slike oppgaver egner seg til å få elevene til å sette seg inn i hvordan noen andre har tenkt i en oppgave, og at de da skal vurdere og diskutere denne fremgangsmåten.

For å telle antall oppgaver i de ulike kategoriene, har jeg laget et kodeskjema i Excel. Et utdrag av dette er vist på figur 3.3. Dette skjemaet er først delt inn etter kapittel, oppgavenummer og deloppgave. Kommentarfeltet angir om det er flere delspørsmål i en oppgave, og eventuelt andre kommentarer som er verdt å notere ned. En egen celle øverst teller totalt antall oppgaver som er analysert. Oppgavene føres i kronologisk rekkefølge nedover. Til høyre er kategoriene i rammeverket sammen med hver sin celle som teller antall forekomster. Under disse cellene er det hver sin celle som regner ut prosentandelen av disse frekvensene. Lengst til høyre er en celle som summerer totalt antall oppgaver som har blitt analysert.

					Skovsmoses Undersøkelseslandskaper						
					Oppgaveparadigmet			Undersøkelseslandskap			
Kapittel	Oppgave	Deloppg	Kommentar		(1) Ren matematikk	(3) Semi-referanse til virkeligheten	(5) Reelle referanser	(2) Ren matematikk	(4) Semi-referanse til virkeligheten	(6) Reelle referanser	Sum
				Sum	31	0	0	12	0	0	43
				Prosent	72%	0%	0%	28%	0%	0%	
2.1 Grenseverdier	Utforsk		27 delspm		18			9			
	2,10	a			1						
		b			1						
		c			1						
		d			1						
	2,11	a			1						
		b			1						
		c			1						
		d			1						

Figur 3.3: Kodeskjema for å kategorisere oppgaver i Skovsmose sitt rammeverk.

3.4.5 Bevis

Rammeverket til Thompson mfl. (2012) blir brukt for å kategorisere bevis og begrunnelser for påstander og regneregler, og det ble beskrevet i teorikapitlet. Dette rammeverket har fire kategorier for å beskrive behandlingen av bevis: G, S, L og N. For å telle antall bevis i de fire kategoriene, lagde jeg et kodeskjema i Excel. Et utdrag av dette er vist i figur 3.4. Skjemaet er først delt inn etter lærebok, kapittel, delkapittel og navn på resultatet eller regelen som bevises. En egen kolonne angir hvilken side i boka resultatet er gitt på. Dette er gjort for å gjøre det lettere for andre å etterprøve analysearbeidet mitt. Resultatene blir ført i kronologisk rekkefølge nedover. Øverst til høyre er kategoriene i rammeverket sammen med hver sin celle som teller antallet, og hver sin celle som regner ut prosentandelen til hver kategori. Lengst til høyre er det en egen celle som teller totalt antall bevis som er analysert.

Bok: Sinus R1							
Kapittel	**Side**	**Påstand/Regel**	**Begrunnelsestype**				
			G	**S**	**L**	**N**	**Sum**
		Sum	**14**	**7**	**8**	**3**	**32**
		Prosent	**43,8%**	**21,9%**	**25,0%**	**9,4%**	
2.1 Grenseverdier	52	Grenseverdi sum		1			
	52	Grenseverdi produkt		1			
	52	Grenseverdi konstanter		1			
	52	Grenseverdi brøk		1			

Figur 3.4: Kodeskjema for å kategorisere bevis og begrunnelser for resultater og påstander.

Bevis i kategorien G kommer i form av formelle matematiske bevis. Det kan godt være at det er noe tilpasset til det nivået som er forventet i matematikk R1, og at det ikke er full matematisk formalitet rundt alle detaljene. Bevisene i matematikk R1 er gjerne *direkte bevis* som tar utgangspunkt i et etablert resultat eller en definisjon. Ved å gå gjennom en rekke steg med matematiske operasjoner og argumenter, kommer en til slutt frem til den endelige konklusjonen. Bevisene for regnereglene i derivasjon, som kommer ut av definisjonen på den deriverte som en grenseverdi, er gode eksempler på slike direktebevis. Det kan hende at en påstand eller regneregel ikke blir bevist eller begrunnet på samme sted som den presenteres, men at det er en henvisning til at dette kommer senere. I slike tilfeller velger jeg å kategorisere i henhold til hvordan det er bevist i denne senere delen som det henvises til.

Bevis i kategorien S kommer gjerne i en forklarende tekstdel av boken eller i form av et eksempel. Bevis i denne kategorien eksemplifiserer den generelle regelen gjennom et spesifikt tilfelle, også kalt et generisk eksempel. Hvis for eksempel et resultat blir presentert med en beskrivelse som ikke tilfredsstiller et generelt bevis, men har en beskrivelse sammen med en graf eller illustrasjon, vil jeg kategorisere det som S. Slike begrunnelser bygger på noe som vi kan se at gir mening, selv om det ikke er ordentlig matematisk begrunnet. Som et eksempel, så kan vi se på resultatet $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ sammen med grafen til $f(x) = 1/x$. Her kan en argumentere for at funksjonsverdien blir mindre og mindre desto større nevneren blir. Samtidig vil $1/x$ aldri bli negativ når x vokser seg større og større i positiv retning. Det å samtidig vise til en graf som ser ut til å avta mot null når x vokser, vil kunne være overbevisende for eleven. Men samtidig er det ikke et fullgodt matematisk bevis i kategorien G.

Bevis i kategorien L kan komme i form av en oppfordring i teksten til å forklare eller vise at en påstand er sann. Det kan også komme i form av en oppgave. Slike oppgaver kan dele arbeidet med beviset opp i flere deloppgaver, som da bygger opp det som er nødvendig for å sette sammen det generelle resultatet. Det kan også være at oppgaven gir et hint eller ber eleven bruke en gitt fremgangsmåte for å vise et resultat. Det kan tenkes at en oppgave ber om at eleven skal finne ut av et resultat som er utenfor avgrensningen min til de grunnleggende regnereglene, men allikevel har en tilknytning til det som er innenfor min avgrensning. Da velger jeg å ta det med i kategoriseringen min som et tilfelle av L. Det er fordi slike oppgaver kan befinne seg på et høy nivå, og jeg ønsker derfor å ha det med i analysen min både som en oppgave og som et bevis. Det kan også tenkes at et slikt bevis bygger på resultater som allerede er gjennomgått, og slik sett kan bidra til å gi dype forståelse og knytte nye relasjoner mellom begreper som er innenfor min avgrensning.

3.5 Studiens kvalitet

Jeg vil her reflektere litt rundt studiens kvalitet. Det er viktig å spørre seg om i hvilken grad fremgangsmåten og metodene i studien egner seg til å si noe om det en ønsker å studere eller måle. Jeg vil si noe om dette ved se å på begrepene *reliabilitet* og *validitet*.

3.5.1 Reliabilitet

Begrepet *reliabilitet*, også kalt pålitelighet på norsk, blir delt inn i *ekstern reliabilitet* og *intern reliabilitet* hos Bryman (2012). Ekstern reliabilitet beskrives her som i hvilken grad resultatene i en studie er mulig å replikere for andre. "The coding scheme and the sampling procedures can be clearly set out so that replications and follow-up studies are feasible. It is the transparency that often causes content analysis to be reffered to as an objective method of analysis." (Bryman, 2012, s. 304). Lærebøkene som brukes i denne studien er utgitte og tilgjengelige for å kunne etterprøve arbeidet mitt. Jeg har også avklart hvordan jeg vil avgrense omfanget av denne studien. De teoretiske rammeverkene er gjort rede for i teorikapitlet. Jeg har også eksemplifisert de ulike kategoriene i alle rammeverkene for å konkretisere forståelsen av dem for både meg selv og leseren. Hvordan jeg skal analysere oppgaver og bevis ble beskrevet i dette metodekapitlet sammen med beskrivelser av kodeskjemaene. Dette gjør at andre også kan etterprøve resultatene og vurdere den eksterne reliabiliteten i denne studien ved å sammenligne med sine egne funn. Kongelf (2019) presiserer at "Prosedyrene skal sørge for at en kommer frem til funn som er replikerbare og valide. Dersom prosessen skal være replikerbar, må den være styrt av regler som er eksplisitt angitt og anvendt likt på alle analyseenhetene." (s. 57). Dette har jeg etter beste evne forsøkt å etterstrebe i analysearbeidet mitt for å styrke den eksterne reliabiliteten. Hvis det er tilfeller som er vanskelige å kategorisere, må det gjøres med åpenhet om fremgangsmåten og avveiningene som ble tatt. Objektiviteten i slike typer studier avhenger av åpenhet om rammeverket for analysen og at fremgangsmåten som brukes er tydelig beskrevet (Bryman, 2012).

Den interne reliabiliteten går ut på om det er flere som har gjort observasjonene eller analysearbeidet sammen. Det er mulig at to ulike personer, som ser på samme del av en lærebok med det samme rammeverket, kan være uenige om noen av kategoriseringen. Men rammeverket bør være slik at det er minst mulig sjanse for feilkategoriseringer. "Det ideelle innenfor innholdsanalyse, spesielt den kvantitative, er å beskrive og følge prosedyrene så nøyaktig som mulig, hvor målet er at enhver som benytter seg av de samme prosedyrene på det samme datamaterialet vil få det samme resultatet." (Kongelf, 2019, s. 58). For å styrke den interne reliabiliteten, kunne innholdet også ha blitt kategorisert av en annen person. Da kunne jeg fått et mål på grad av enighet om kategoriseringene. Det kan tenkes at ikke alle kategoriseringene jeg har satt, ville vært de samme som det en annen ville ha satt. Men siden jeg har skrevet denne masteroppgaven alene, så har jeg på egenhånd stått for analysen og ikke involvert noen andre. Dermed vil jeg beskrive den interne reliabiliteten som lav i denne studien. Som et eksempel på god intern reliabilitet skriver Thompson mfl. (2012) at gruppen deres, som sammen jobbet med lærebokanalyse, var enige om rundt 96% og 93% av kodene som ble satt på henholdsvis type resonnering i oppgaver og graden av generalitet i oppgavene.

3.5.2 Validitet

Med begrepet *validitet* så menes det i hvilket grad funnene som gjøres er gyldige (Kongelf, 2019). Det må være slik at det konseptet som skal måles faktisk er det som blir målt. Hvis metodene som brukes er egnet for å undersøke det som forskeren ønsker å undersøke, så er validiteten høy. Jeg har beskrevet forskningspørsmålet med de tilhørende underspørsmålene i introduksjonskapitlet. De teoretiske rammeverkene er beskrevet i teorikapitlet, og de er tatt i bruk uten å gjøre noen endringer på dem. Bryman (2012) deler *validitet* opp i *ekstern validitet* og *intern validitet*. *Intern validitet* beskrives "[...] whether there is a good match between researcer's observations and the theoretical ideas they develop." (Bryman, 2012, s. 389). Denne formen for validitet er ikke aktuell for denne studien, da jeg ikke skal utvikle noen teorier basert på funnene. Jeg vil kun beskrive lærebøkene og funnene jeg gjør med de beskrevne rammeverkene, for å kunne svare på forskningsspørsmålene jeg har stilt.

Ekstern validitet beskrives som i hvilken grad resultatene og funnene kan generaliseres. Hvis en studie kun ser på noen utvalgte lærebøker fra en større mengde, kan en spørre om i hvilken grad funn fra denne studien kan generaliseres til alle lærebøkene. I slike tilfeller bør en også begrunne det utvalget som har blitt gjort. Dette er ikke en aktuell problemstilling her, da jeg undersøker alle tre lærebøkene som er gitt ut i forbindelse med den nye læreplanen. Jeg har argumentert for den sentrale rollen til de fysiske lærebøkene i skolen. Dermed ser jeg det som rimelig å anta at de fleste elevene i matematikk R1 vil bruke disse lærebøkene. Hvis jeg hadde gjort et utvalg på to lærebøker, kunne jeg ikke brukt resultatene gjort på disse til å si noe nøyaktig om hvordan den tredje læreboken var. Fordi jeg har valgt å se på alle tre lærebøkene fra de store forlagene, og ikke et mindre utvalg av dem, vil jeg kunne si noe mer generelt om hva elevene i matematikk R1 møter på i lærebøkene når det gjelder grenseverdi og derivasjon innenfor min avgrensning.

Jeg ser på en begrenset del av disse lærebøkene. Et annet aktuelt spørsmål er om funnene jeg gjør for grenseverdi og derivasjon, kan generaliseres til behandlingen av andre begreper som for eksempel vektorregning eller potenser og logaritmer. Jeg mener at fremgangsmåten og rammeverkene som brukes, vil også være mulige å bruke for å se på andre matematiske begrep i dette faget. I denne masteroppgaven ser jeg på to matematiske begreper ut av en lang liste med begreper som elevene møter i løpet av hele R1-kurset. Det er mulig å tenke seg at en vil komme frem til liknende resultater for hvordan et annet tema som for eksempel vektorer blir behandlet. Men denne påstanden forblir usikker så lenge det ikke har blitt undersøkt. Det er den samme forfattergruppen som står bak hele boken. Men det kan også tenkes at de ulike forfatterene av bøkene har konsentrert seg om ulike deler av boken, og at det dermed er gjort noen ulike didaktiske valg i ulike deler av bøkene.

3.6 Etikk

Innholdsanalyse som metode gjør at studien ikke er avhengig andre personer som for eksempel deltakere til et eksperiment, deltakere til en spørreundersøkelse eller skoleklasser og lærere for observasjoner eller intervjuobjekter. Dermed vil ikke studier innenfor lærebokanalyse ha samme grad av etisk regelverk rundt seg med tanke på å få studien godkjent av en etikkomité (Bryman, 2012). Jeg underviser ikke matematikk R1 på nåværende tidspunkt, og har slik sett ikke noen egen "favorittbok" blant de nye lærebøkene i dette faget. Men jeg bruker Gyldendal sine lærebøker, Mønster 2P og Mønster 2PY, i de to fagene matematikk 2P og 2PY på skolen jeg underviser på i skrivende stund. Jeg mener det er etisk riktig og viktig å være åpen om mitt nevnte forhold til disse bøkene i Mønster-serien. Bøkene i Mønster-serien har de samme forfatterene, og de har likhetstrekk i hvordan de er utformet. Slik sett vil kanskje boken Mønster R1 virke kjent for meg i analysearbeidet. Nøytralitet i måten rammeverket brukes på er viktig. Jeg etterstreber å analysere lærebøkene objektivt i henhold til de beskrivelsene av rammeverkene som jeg har gitt.

Kapittel 4

Resultater

I dette kapitlet vil jeg presentere resultatene mine. Først vil jeg gå gjennom resultatene fra den horisontale analysen. Her vil det bli presentert fakta om bøkene, en beskrivelse av oppbygningen til hver av dem og en beskrivelse av den rekkefølgen som det matematiske innholdet har. Deretter vil jeg ta for meg resultatene fra kategoriseringen av oppgavene og bevisene. Det er totalt 276 sider i de tre bøkene som er innenfor de avgrensningene jeg har gjort i denne masteroppgaven. Samlet sett i de tre bøkene er det 1539 antall oppgaver og 97 bevis som har blitt analysert. Fordelingen av disse i de tre bøkene presenteres i tabellform i de neste avsnittene. Videre har hvert analyserammeverk sitt eget delkapittel hvor funnene blir presentert. Oppgavene vil først bli analysert med hensyn til kognitive krav, deretter læringsmuligheter og så med hensyn på muligheter for matematisk utforskning. Til slutt vil jeg presentere resultatene fra kategoriseringen av bevis.

4.1 Horisontal analyse

Tabell 4.1 viser en oversikt med fakta knyttet til de tre lærebøkene. De er alle gitt ut i år 2021. Alle tre lærebøkene har flere forfattere. Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis fire, syv og fire forfattere. Navnene deres er ført opp i denne tabellen i den samme rekkefølge som de har på forsiden til hver av bøkene. Dette første navnet til hver bok, kommer da som referansenavnet når jeg refererer til dem i teksten. Som vi kan se av tabell 4.1, så er det noen forskjeller i antall sider i de tre bøkene. Sinus R1 har henholdsvis 54 og 63 sider mer enn Matematikk R1 og Mønster R1. Denne forskjellen kan ha flere årsaker. Forklaringer som sidestørrelse, størrelse på margen, utforming av sidene, antall bilder og hvor tettskrevne bøkene er, vil alle kunne påvirke det totale sideantallet. Det kan også være en forskjell i hvor mange sider som er satt av til oppgaver, fasit, instruksjoner til Python, instruksjoner til GeoGebra, annen info og stikkordsliste. Matematikk R1 og Mønster R1 har satt av henholdsvis 13 og 19 sider til Python- og GeoGebra-instruksjoner, mens Sinus R1 ikke har brukt noe plass i boken til dette. Denne masteroppgaven tar for seg behandlingen av begrepene grenseverdi og derivasjon, og ikke hele læreboken. Dermed er det mer interessant å se hvor mange sider som er satt av til disse to begrepene innenfor den avgrensningen jeg har gjort. Dette blir presentert i de avsnittene som tar for seg oppbygningen av hver enkelt bok. Tabell 4.1 viser også at det er store forskjeller i hvor mange delkapitler hver av de tre bøkene har. Det gjenspeiles også i antall delkapitlet som er innenfor avgrensningen av denne masteroppgaven. Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis 50, 33 og 25 delkapitler, hvor henholdsvis 9, 7 og 5 delkapitler blir analysert.

Tabell 4.1: Fakta og informasjon om de nye lærebøkene i matematikk R1.

Boktittel	**Sinus R1**	**Matematikk R1**	**Mønster R1**
Forfattere	Tore Oldervoll Otto Svorstøl Einar Gustavsson Robin B. Jacobsen	Ørnulf Borgan Inger C. Borge John Engseth Odd Heir Håvard Moe Tea T. Norderhaug Sigrid M. Vie	Tove Kalvø Jens CHristian L. Opdahl Knut Skrindo Øystein J. Weider
Forlag	Cappelen Damm	Aschehoug	Gyldendal
Utgivelsesår	2021	2021	2021
Sidestørrelse (mm)	264×178	261×192	261×210
Antall sider	468	414	405
Antall kapitler	6	7	5
Antall delkapitler	50	33	25

Tabell 4.2 viser en oversikt på hovedkapitlene i de tre lærebøkene. Sinus R1 har fordelt det matematiske innholdet på seks kapitler, mens Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis syv og fem kapitler. Som et eksempel på disse variasjonene, har forfatterene av Sinus R1 valgt å dekke vektorregning og parameterfremstilling i hvert sitt kapittel, mens både Matematikk R1 og Mønster R1 har dette samlet i ett kapittel. Vi kan også se av tabell 4.2, at forfatterene av Matematikk R1 har valgt å bruke et eget kapittel til omvendte funksjoner, mens de to andre bøkene har dette temaet sammen med den øvrige gjennomgangen av funksjoner. Boken Matematikk R1 skiller seg ut ved å ha et eget kapittel om anvendelser og modeller. Dette er da knyttet til de nyinnførte læreplanmålene om modellering i dette faget. De to andre bøkene har dette bakt inn i funksjonskapitlene. Lærebokforfatterene har altså gjort noen ulike valg når det gjelder kapittelplasseringen av de ulike temaene. Begrunnelser for slike valg ble omtalt i kapitel 2.2.1 som relevant for lærebokforskning som handlet om påvirkninger på læreboken. Det er også flere variasjoner i hvilke hovedkapittel de to begrepene grenseverdi og derivasjon er plassert. Dette blir nærmere gjennomgått sammen med beskrivelsen av oppbygningen til hver av bøkene i de neste delkapitlene.

Tabell 4.2: Oversikt på alle hovedkapitlene i de tre lærebøkene.

Sinus R1	**Matematikk R1**	**Mønster R1**
Kap 1 Potenser og logaritmer	Kap 1 Potenser og logaritmer	Kap 1 Potenser og logaritmer
Kap 2 Grenseverdier og derivasjon	Kap 2 Grenseverdi og kontinuitet	Kap 2 Funksjoner
Kap 3 Funksjonsdrøfting	Kap 3 Derivasjon	Kap 3 Derivasjon
Kap 4 Eksponential- og logaritmefunksjoner	Kap 4 Bruk av derivasjon	Kap 4 Funksjonsdrøfting
Kap 5 Vektorer	Kap 5 Omvendte funksjoner	Kap 5 Vektorer
Kap 6 Skalarprodukt og parameterfremstilling	Kap 6 Vektorer	
	Kap 7 Anvendelser og modeller	

Alle tre bøkene har til felles at grenseverdi og derivasjon introduseres tidlig. Rekkefølgen på de store temaene i de tre bøkene er, grovt sett, som følger: potenser og logaritmer, grenseverdi, den deriverte, funksjoner og funksjonsanalyse og til slutt vektorer og parameterfremstilling.

Alle tre bøkene starter med et kapittel om potenser og logaritmer. Deretter introduseres grenseverdi og derivasjon i denne nevnte rekkefølgen. Denne rekkefølgen er helt naturlig da definisjonen av den deriverte, og begrunnelsene for regnereglene i derivasjon, er avhengig av at elevene først kjenner til og har en forståelse av begrepet grenseverdi. Tabell 4.3 viser kapittelnavn og antall sider i de hovedkapitlene som har innhold knyttet til grenseverdi og derivasjon innenfor min avgrensning. Denne kapittelplasseringen av begrepene grenseverdi og derivasjon, har blitt gjort på ulike måter i alle tre bøkene. Sinus R1 har fordelt det relevante innholdet på tre hovedkapitler, mens Matematikk R1 og Mønster R1 har begge fordelt dette på to kapitler.

Tabell 4.3: Oversikt på relevante hovedkapitlene som tar for seg grenseverdi og derivasjon.

	Sinus R1	**Matematikk R1**	**Mønster R1**
Kapittel 2	Grenseverdier og derivasjon	Grenseverdier og kontinuitet	Funksjoner
Antall sider	59	53	73
Kapittel 3	Funksjonsdrøfting	Derivasjon	Derivasjon
Antall sider	65	53	69
Kapittel 4	Eksponential- og logaritmefunksjonen		
Antall sider	39		

4.1.1 Oppbygningen til Sinus R1

Sinus R1 har totalt 468 sider, og det matematiske innholdet er fordelt på seks hovedkapitler og 50 delkapitler. Den siste delen av boken har en oppgavesamling på 131 sider som etterfølges av en fasitdel til oppgavene på 32 sider. Forsiden til hvert hovedkapittel er gitt på en enkeltside. Det overordnede temaet angis med en overskrift, og et foto som skal illustrere noe ved hovedtemaet. Som et eksempel på dette, har kapitlet om funksjonsdrøfting et foto i fugleperspektiv av en svingete bilvei i et vinterlandskap. Denne mørke asfaltveien står i kontrast til det hvite vinterlandskapet i skogen rundt veien, og den er nok ment til å symbolisere grafen til en funksjon. Nederst på hver forside er de aktuelle kompetansemålene fra læreplanen listet opp under overskriften "Mål for opplæringen er at eleven skal kunne". I forordet til denne boken har forfatterene skrevet at boken er utviklet etter den nye læreplanen. De trekker også frem at "Boka legger spesielt vekt på utforskende matematikk. Når elevene skal i gang med et nytt tema, inneholder boka ofte utforskende opplegg der elevene skal finne ut av egenskaper og regler på egenhånd, før de er behandlet i boka." (Oldervoll mfl., 2021, s. 3). Disse utforskende oppleggene kommer da på den siden i boken som er rett før delkapitlet det er knyttet til. Dette gir elevene en mulighet til å utforske sammen i grupper, eller på egenhånd, noen aspekter ved det nye temaet før de starter ordentlig på det.

For eksempel i forkant av det første relevante delkapitlet, 2.1 Grenseverdier, så skal regnereglene for grenseverdier utforskes ved hjelp at et lite Python-script, som er skrevet i boken, sammen med to gitte polynomfunksjoner. Elevene skal her utforske og se etter noen mønstre og sammenhenger når dette Python-programmet estimerer grenseverdien av de to funksjonene hver for seg, som en sum, som et produkt, som en brøk og hver av funksjonene multiplisert med en konstant. Formuleringen "Hvilken regel ser ut til å gjelde?" i teksten er da en oppfordring til å foreslå en generell regneregel basert på de generiske tilfellene som elevene jobber med i denne delen. Denne utforskningen fungerer da også som en begrunnelse for regnereglene knyttet til grenseverdi, før de blir presentert sin generelle form. Dette opplegget kan brukes til en utforskende undervisningstime for å introdusere begrepet grenseverdi med sine tilhørende regneregler. Slike utforskende opplegg ble omtalt teorikapitlet i delkapittel 2.4 om utforskende matematikk. Forfatterene har valgt å introdusere grenseverdi og dets regneregler i samme hovedkapittel som den deriverte, Kapittel 2 Grenseverdier og derivasjon. Definisjonen av den deriverte og derivasjon av polynomer blir gjennomgått i dette hovedkapitlet. De øvrige derivasjonsreglene er fordelt på ulike delkapitler i kapittel 3 Funksjonsdrøfting og kapittel 4 Eksponetial- og logaritmefunksjoner.

Tabell 4.4 gir en oversikt på antall sider, oppgaver, eksempler og bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Sinus R1. Det er totalt 122 sider i Sinus R1 som er innenfor de avgrensningene jeg har gjort i denne masteroppgaven. Totalt antall oppgaver og bevis er på henholdsvis 678 og 33. Tabell D.3 i vedlegg D viser den fulle innholdsfortegnelsen til disse tre hovedkapitlene. Dette gir en oversikt på hva som kommer før og etter de delkapitlene jeg vil ta for meg i analysen. Delkapitlene gjennomgår teori, definisjoner, formler og resultater. Etter en teoridel, kommer det gjerne ett eller flere eksempler som konkretiserer det som nettopp har blitt gjennomgått. Deretter kommer det typisk en eller flere oppgaver som gir elevene ytterligere muligheter til å jobbe med det aktuelle stoffet. I delkapitlene er eksempler tydelig avgrenset ved at de har overskriften "Eksempel" i blått og med en blå ramme rundt seg. Viktige definisjoner, resultater og regneregler markeres med en gul sirkel med pil til den aktuelle teksten som er innlemmet i en gul boks. Alle de nevnte designvalgene gjør at boken fremstår oversiktlig og med tydelige skiller i overgangene mellom ulike deler av sidene i boken. Det gis både oppgaver underveis og i en liten samling av oppgaver til slutt i delkapitlet. Noen steder gis det utforskningsoppgaver under overskriften "Diskuter" markert i lilla. I forordet oppfordrer forfatterene til å gjøre slike oppgaver som et gruppearbeid "[...] der elevene får trening i å kommunisere matematikk." (Oldervoll mfl., 2021, s. 3).

Tabell 4.4: Oversikt på antall sider, antall oppgaver, antall eksempler og antall bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Sinus R1.

Sinus R1	**Antall sider**	**Antall oppgaver**	**Antall eksempler**	**Antall Bevis**
Kap 2.1 Grenseverdier	3	43	8	10
Kap 2.4 Grenseverdi der teller og nevner blir 0	5	26	3	2
Kap 2.6 Vekstfart som grenseverdi	7	17	5	4
Kap 2.8 Derivasjon av polynomfunksjoner	5	31	8	5
Kap 2 Repetisjonsoppgaver	2	14	0	0
Kap 3.5 Potens- og rotfunksjon	7	13	13	2
Kap 3.6 Kjerneregelen	5	33	5	1
Kap 3 Repetisjonsoppgaver	2	19	0	0
Kap 4.1 Funksjonen $f(x) = \ln x$	4	16	3	1
Kap 4.2 Derivasjon av eksponentialfunksjoner	6	15	7	4
Kap 4.3 Derivasjon av et produkt	4	45	5	2
Kap 4.4 Derivasjon av rasjonale funksjoner	4	7	4	1
Kap 4 Repetisjonsoppgaver	2	13	0	0
Oppgavesamling Kap 2	21	163	0	0
Oppgavesamling Kap 3	24	86	0	0
Oppgavesamling Kap 4	21	137	0	1
Sum	**122**	**678**	**61**	**33**

Det er en oppbygning av alle hovedkapitlene i boken som er felles. Etter alle delkapitlene i et hovedkapittel, gis det et sammendrag som lister opp de viktigste resultatene, begrepene og formlene som elevene har møtt på. Deretter følger en mer omfattende prosjektoppgave som er knyttet til et utvalgt tema i hovedkapitlet. Se tabell D.3 i vedlegg D for å se denne strukturen for kapittel 2, 3 og 4. For eksempel har kapittel 2, som handlet om grenseverdier og derivasjon, en prosjektoppgave om Hookes lov fra fysikkfaget. Dette presenteres på en dobbeltside med en teoridel som beskriver fysikken til en springfjær, og hvordan den deriverte er knyttet til dette gjennom Newtons andre lov. Prosjektet går ut på å gjøre et eksperimentelt arbeid og å bruke numerisk derivasjon på de innsamlete dataene til å bestemme fjærstivheten til springfjæren.

Til slutt i hovedkapitlene er det en oppgavedel kalt "Repetisjonsoppgaver". Disse blir omtalt i forordet som "[...] et oppgavesett som er egnet til repetisjon av kapitlet." (Oldervoll mfl., 2021, s. 3). En større oppgavesamling på 131 sider er plassert bak i boken før fasiten og stikkordslisten. 66 sider av denne oppgavesamlingen hører til de relevante hovedkapitlene 2, 3 og 4. Denne oppgavesamlingen er delt inn etter navn på hovedkapitlene og delkapitlene. På forsiden til oppgavesamlingen er det gitt en beskrivelse av tre oppgavetyper. Det skilles på *øv mer*, *blandede oppgaver* og *åpne oppgaver*. Kategorien *øv mer* skal gi "[...] mer trening i grunnleggende regneteknikker fra hvert delkapittel." (Oldervoll mfl., 2021, s. 304). Videre beskrives *blandede oppgaver* som at det er mer variasjon i tema i oppgavene. *Åpne oppgaver* beskrives som mer omfattede og kompliserte, og de er gjerne uten en fasit. Disse to siste oppgavekategoriene har ingen inndeling med overskrifter etter delkapitlene. Her er det mange større oppgaver hvor deloppgavene tar inn begreper og metoder fra hele hovedkapitlet.

4.1.2 Oppbygningen til Matematikk R1

Denne boken har totalt 414 sider, og det matematiske innholdet er fordelt på syv hovedkapitler og 33 delkapitler. En oppgavesamling på 27 sider er plassert mot slutten av boken, og denne er betegnet som kapittel 8 i innholdsfortegnelsen. De siste sidene av boken består av en oppgavefasit, en instruksjonsdel for GeoGebra, en instruksjonsdel for Python og et stikkordsregister. Tabell 4.5 viser en oversikt på antall sider, antall oppgaver, antall eksempler og antall bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Matematikk R1. Det er totalt 77 sider som vil bli analysert i denne boken. Totalt antall oppgaver og bevis er på henholdsvis 495 og 26. Forsidene til hovedkapitlene er alle gitt på en dobbeltside. En tegning eller et foto, pynter siden og illustrerer noe ved temaet for kapitlet. Her blir hovedtemaet angitt med overskriften, og en egen boks med en innholdsfortegnelse gir navnene på delkapitlene og deres sidetall. En kort tekst på forsiden forteller leseren noe om hva som venter i kapitlet. Det kan være i form av en beskrivelse av innholdet, en motivasjon av hvorfor dette temaet er nyttig, eller noen spørsmål som skal vekke nysgjerrigheten hos leseren.

Der forsiden har en oppgaveformulering eller et spørsmål, kan dette også fungere som et utforskende opplegg i klasserommet, før elevene starter på det første delkapitlet. For eksempel så står det på forsiden av kapittel 2 om grenseverdi og kontinuitet, at elevene skal få vite hva vi kan mene med uttrykk som $0/0$ og $\infty - \infty$. Noen av forsidene har også en kort presentasjon av en historisk viktig person eller en viktig anvendelse knyttet til temaet i kapitlet. For eksempel for å motivere kapittel 3 om derivasjon, så gis det en kort presentasjon av hvem Isaac Newton var. Her står det blant annet om at Newton utviklet matematikken knyttet til derivasjon for å kunne beskrive planetene sine baner rundt sola. Denne teksten avsluttes med at "I ettertid har derivasjon blitt et fantastisk hjelpemiddel til å studere alt som har med forandringer å gjøre." (Borgan mfl., 2021, s. 115).

I delkapitlene er eksempler tydelig avgrenset ved at de har overskriften "Eksempel" i grønt og med en lysegrønn ramme rundt seg. Egne oppgaver med overskriften "Utforsk" og "Snakk"

Tabell 4.5: Oversikt på antall sider, antall oppgaver, antall eksempler og antall bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Matematikk R1.

Matematikk R1	**Antall sider**	**Antall oppgaver**	**Antall eksempler**	**Antall Bevis**
Kap 2B Grenseverdier	11	63	10	7
Kap 2 Blandede oppgaver	4	20	0	0
Kap 2 Kapitteltest	1	10	0	0
Kap 3A Funksjonsuttrykket til den deriverte	8	52	4	1
Kap 3B Noen derivasjonsregler	7	69	3	5
Kap 3C Den algebraiske definisjonen av den deriverte	6	37	2	2
Kap 3D Deriverbarhet	6	26	2	3
Kap 3F Kjerneregelen	5	56	3	3
Kap 3G Produkt- og brøkregelen	6	56	4	5
Kap 3 Blandede oppgaver	4	71	0	0
Kap 3 Kapitteltest	2	15	0	0
Oppgavesamling	17	20	0	0
Sum	**77**	**495**	**28**	**26**

er spredt utover delkapitlene. Disse omtales i forordet som at de er ment for å få "[...] elevene til å gå i dybden og se sammenhenger i faget." og gi "[...] elevene mulighet til å kommunisere matematikk." (Borgan mfl., 2021, s. 5). Viktige definisjoner, resultater og regneregler markeres med en rød ramme rundt seg. Alle de nevnte designvalgene gjør at boken fremstår oversiktlig og med tydelige skiller i overgangene mellom ulike deler av sidene i boken. Det gis både oppgaver underveis og som en liten samling av oppgaver til slutt i delkapitlet. Oppgavene som gis i slutten av et delkapittel, er delt inn i det de kaller for røde og blå oppgaver. Denne inndelingen beskrives i forordet til boken som at de røde oppgavene "[...] er en naturlig fortsettelse av innlæringsoppgavene." og at de blå oppgavene "[...] gir større utfordringer." (Borgan mfl., 2021, s. 5).

Alle hovedkapitlene har en felles overordnet struktur. Den fullstendige innholdsfortegnelsen til de relevante hovedkapitlene er gitt i tabell D.1 i vedlegg D. Her vises hele innholdsfortegnelsen til de to hovedkapitlene som tar for seg grenseverdi og derivasjon. Dette gir en oversikt på hva som kommer før og etter de delkapitlene jeg vil ta for meg. Etter alle delkapitlene i et hovedkapittel kommer en oppgavesamling med blandede oppgaver. Disse oppgavene er ikke delt inn etter hvilket delkapittel de hører til. Dermed må elevene tenke mer gjennom hvilken løsningstrategi som vil lede frem til et svar. Forfatterene skriver i forordet til boken at disse oppgavene skal gi elevene mengdetrening og dybdelæring. Etter dette, er det et sammendrag som lister opp de viktigste resultatene, begrepene og formlene som elevene har møtt på i kapitlet. Til slutt kommer en kapitteltest på én eller to sider. Det indikeres også om en oppgave skal løses med eller uten hjelpemidler. Dersom en oppgave skal løses med pen og papir, er dette angitt med et lite bilde av en skrivende hånd til høyre for oppgavenummeret. Forfatterene skriver i forordet til boken at "En del oppgaver bør løses uten hjelpemidler for å gi tiltenkt læringsutbytte." (Borgan mfl., 2021, s. 5).

Forfatterene av Matematikk R1 har valgt å introdusere grenseverdi i samme kapittel om begrepene kontinuitet og asymptoter. Disse to sistnevnte begrepene følger da i hvert sitt delkapittel etter innføringen i grenseverdibegrepet i kapittel 2B. Derivasjon blir som sagt behandlet i to ulike hovedkapitler. Hele kapittel 3 tar for seg introduksjonen av derivasjon og alle regnereglene som er innefor min avgrensning. Her det er kun delkapittel 3E om numerisk derivasjon som blir utelatt fra analysen. Kapittel 4 fortsetter med anvendelser av derivasjon. Temaene her er optimeringsproblemer, Newtons metode og L'Hôpitals regel. Dette er da utenfor min avgrensningen, som ble gjort rede for i metodekapitlet. Oppgavesamlingen (kapittel 8) på 17 sider, er satt sammen av kun blandede oppgaver. Her er det mange større oppgaver hvor deloppgavene tar inn begreper og metoder fra hele hovedkapitlet. Ved siden av hvert oppgavenummer blir det angitt hvilket eller hvilke hovedkapitler som inneholder relevant teori for å kunne løse oppgaven.

4.1.3 Oppbygningen til Mønster R1

Denne boken har totalt 405 sider, og det matematiske innholdet er fordelt på fem kapitler og 25 delkapitler. Tabell 4.6 viser en oversikt på antall sider, antall oppgaver, antall eksempler og antall bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Matematikk R1. Det er totalt 77 sider, fordelt på to hovedkapitler og oppgavesamlingen, som vil bli tatt med i analysen. Totalt antall oppgaver og bevis er på henholdsvis 365 og 37. Tabell D.2 i vedlegg D viser hele innholdsfortegnelsen til de to hovedkapitlene som tar for seg grenseverdier og derivasjon. Dette gir en oversikt på hva som kommer før og etter de delkapitlene jeg vil ta for meg. I kapittel 2 vil jeg ta for meg delkapitlene 2.2 og 2.3, da det er her grenseverdibegrepet introduseres. I kapittel 3 vil jeg ta for meg delkapitlene 3.1, 3.2 og 3.3, da det er her derivasjonsbegrepet og dets regneregler blir introdusert. I tillegg til oppgavene i delkapitlene, vil jeg gå gjennom og kategorisere alle oppgavene som er tilknyttet disse delkapitlene i "Test deg selv"-delen og i oppgaveseksjonene bakerst i hovedkapitlene. I forordet til boken skriver forfatterene at "Mønster legger vekt på å lære matematikk gjennom å se mønstre og sammenhenger ved å utforske og løse matematiske problemer." (Kalvø mfl., 2021, s. 5). Videre beskriver de også at en intensjon med boken er at den skal legge til rette for dybdelæring og forståelse. Dette er da en formulering som er i tråd med LK20 slik det ble beskrevet i teorikapitlet.

Tabell 4.6: Oversikt på antall sider, oppgaver, eksempler og bevis de i relevante delkapitlene og oppgavesamlingene i Mønster R1.

Mønster R1	**Antall sider**	**Antall oppgaver**	**Antall eksempler**	**Antall Bevis**
Kap 2.2 Grenseverdier	9	34	7	5
Kap 2.3 Grenseverdier når x går mot uendelig	8	30	6	14
Kap 2 Test deg selv	2	3	0	0
Kap 2 Oppgaver	10	77	0	0
Kap 3.2 Deriverbarhet	10	20	4	5
Kap 3.3 Derivasjonsregler	17	59	23	13
Kap 3 Test deg selv	3	14	0	0
Kap 3 Oppgaver	10	110	0	0
Øv til eksamen	8	18	0	0
Sum	77	365	40	37

Alle hovedkapitlene har en felles overordnet struktur. Etter alle delkapitlene i et hovedkapittel, kommer det et sammendrag over to sider som lister opp de viktigste resultatene, begrepene og formlene som elevene har møtt på i kapitlet. Deretter kommer det en kapitteltest med blandede oppgaver. Til slutt er det en oppgavesamling med blandede oppgaver. Disse oppgavene er delt inn etter hvilket delkapittel de hører til. Forsiden til hvert hovedkapittel er gitt som en dobbeltside. Det overordnede temaet angis med overskriften sammen med et foto som pynter siden og illustrerer noe ved kapitteltemaet. Nederst er det en tidslinje som går over hele dobbeltsiden. Det er her valgt ut noen viktige årstall sammen med en setning om viktige matematikere og deres relevante bidrag til hovedtemaet i kapitlet. På den høyre delen av dobbeltsiden er det satt av plass til utforskende opplegg, og til spørsmål som skal vekke nysgjerrigheten hos leseren. Dette kan da fungere som et utforskende opplegg for klasserommet før elevene starter på det første delkapitlet. Disse spørsmålene har ingen fasit som elevene kan sjekke. Dermed legges det til rette for at elevene kan snakke og utforske sammen i grupper og med læreren, slik det ble beskrevet i kapittel 2.4 om utforskende matematikk.

I starten av boken er det satt av en dobbeltside som gir en forklaring på bokens fargekoding av ulike deler av innholdet i delkapitlene. Tittelen på denne siden er "Slik bruker du boken". Boken har egne utforskningsdeler som markeres med overskriften "Utforsk", og disse er omsluttet av en grønn ramme. Hvert delkapittel starter med en slik utforskningsdel. En kan se for seg at dette passer som en klasseromsaktivitet for introduksjonen av et nytt begrep. Dette vil da stå i kontrast til en lærerstyrt introduksjon hvor læreren viser teori og eksempler til mer passivt lyttende elever. Hensikten fra forfatterene her er å ha "[...] aktiviteter som legger til rette for utforskende matematikk, diskusjon og samarbeid." (Kalvø mfl., 2021, s. 6). Det er en gul ramme med overskriften "Reflekter og diskuter" rundt deler hvor "Boken legger til rette for dybdelæring gjennom muntlig aktivitet og samarbeid." (Kalvø mfl., 2021, s. 6). Eksempler er tydelig avgrenset ved at de har overskriften "Eksempel" med nummerering og en rød ramme rundt seg. Viktige resultater og regneregler markeres med overskriften "Viktige setninger", og disse er omsluttet av en blå ramme. Alle de nevnte designvalgene gjør at boken fremstår oversiktlig og med tydelige skiller i overgangene mellom ulike deler av sidene i boken.

Underveis i delkapitlene er det kun oppgaver i form av de beskrevne reflekteringsoppgavene. Hvert delkapittel avsluttes med en oppgavesamling på et par sider. I margen er det noen steder gitt egne oppgaveforslag i form av oppgavenummer som refererer til denne oppgavesamlingen. Dette gjør at elevene kan øve på det som nettopp har blitt gjennomgått av teori og eksempler. Det er også markert inn noen steder at det finnes videoleksjoner fra forlaget som er tilgjengelige på lærebokens nettsted. Disse videoene "[...] forklarer teori, eksempler og løsninger eller viser bruk av digitale verktøy." (Kalvø mfl., 2021, s. 6). Oppgaver har fire ulike ikoner som indikerer hvordan elevene skal jobbe med dem. Et blyant er satt på oppgaver som er ment for å løses uten hjelpemidler. Fravær av ikon indikerer at alle hjelpemidler er tillat. En firkant markerer at dette er en ekstra utfordrende oppgave. Til slutt viser to puslespillbrikker at oppgaven "[...] krever at du jobber utforskende, bruker problemløsningsstrategi eller samarbeider. Noen av disse oppgavene tar for seg andre sider av fagstoffet." (Kalvø mfl., 2021, s. 6). Kombinasjoner av disse ikonene forkommer også. For eksempel vil en blyant sammen med en firkant, indikere en utfordrende oppgave som eleven skal løse uten hjelpemidler.

4.2 Resultater fra analysen av oppgaver

4.2.1 Kognitive krav, MTF

Jeg vil her presentere resultatene fra analysen av de kognitive kravene i oppgavene. Dette ble gjort med Stein og Smith (1998) sitt rammeverk, MTF. Totalt ble 1539 oppgaver i de tre lærebøkene analysert med dette rammeverket. Tabell 4.7 viser resultatene fra denne analysen. Jeg vil, for oversiktens skyld, gi en kort påminnelse om kategoriene i dette rammeverket. *Hukommelse (LavH)* er oppgaver som ikke krever noe mer av elevene enn det de kan fra før. *Prosedyre uten sammenheng (LavP)* er en prosedyreoppgave hvor eleven skal bruke en bestemt metode som gjerne er indikert av oppgaveformuleringen eller temaet i delkapitlet. *Prosedyre med sammenheng (HøyP)* er en prosedyreoppgave med mål om at eleven skal få en dypere forståelse av det aktuelle begrepet eller metoden. *Matematiske oppgaver (HøyM)* er krevende oppgaver hvor eleven må vurdere hvilken fremgangsmåte og representasjonsform som er best egnet for å løse problemet.

Tabell 4.7: Resultatene av analysen av kognitive krav i oppgavene.

		LavH	**LavP**	**HøyP**	**HøyM**	**Sum oppgaver**
Sinus R1	**Antall**	22	370	265	21	678
	Prosent	3,2%	54,6%	39,1%	3,1%	
Matematikk R1	**Antall**	7	136	343	9	495
	Prosent	1,4%	27,5%	69,3%	1,8%	
Mønster R1	**Antall**	7	185	168	6	366
	Prosent	1,9%	50,7%	45,8%	1,6%	

I denne tabellen har hver av bøkene to rader. Den ene raden viser antall oppgaver som ble plassert i hver kategori, og den andre raden viser andelen av oppgaver i hver kategori. Fordelingen av antall oppgaver fra hver av de tre bøkene vises i kolonnen lengst til høyre i denne tabellen. Det er også en klar forskjell i antall oppgaver som ble analysert i de tre bøkene. Sinus R1 har klart flest oppgaver (678 oppgaver), etterfulgt av Matematikk R1 (495 oppgaver) og deretter Mønster R1 (366 oppgaver). Tabellen viser at det er en tydelig overvekt av prosedyreoppgaver, representert ved kategoriene LavP og HøyP, i alle tre bøkene. Mens kategoriene LavH og HøyM er på mellom 1.4 % og 3.2 % i hver av de tre bøkene. Disse resultatene vil bli nærmere diskutert i neste hovedkapittel.

4.2.2 Læringsmuligheter, MDITx

Jeg vil her presentere resultatene fra analysen av læringsmulighetene i oppgavene. Dette ble gjort med Ronda og Adler (2017) sitt rammeverk, MDITx. Totalt ble 611 oppgaver, innenfor de ulike læringsobjektene, analysert med dette rammeverket. Dette er langt færre oppgaver enn i de to andre rammeverkene for oppgaveanalysen. Det er fordi oppgavesamlingene ikke ble tatt med her. Denne fremgangsmåten ble beskrevet i metodekapitelet. Tabell 4.8 viser resultatene fra analysen av oppgavene med MDITx-rammeverket. Jeg vil, for oversiktens skyld, gi en kort påminnelse om kategoriene i dette rammeverket. *Known procedure/fact (KPF)* brukes når en oppgave kun innebærer tidligere kjent kunnskap. *Current topic/procedure (CTP)* brukes når en oppgave er knyttet til det nåværende læringsobjektet. Det kan handle om et begrep eller en prosedyre som er introdusert i samme seksjon som oppgaven gis i. *Application/making connections tasks (AMC)* er en oppgave som krever at eleven gjør et valg om hva slags metode og matematiske begreper som er relevante for å kunne svare på oppgaven. Innenfor et læringsobjekt gis det en nivåinndeling basert på sammensetningen av oppgavekategoriene. Det er tre nivåer som kategoriserer oppgavene innenfor læringsobjektet som en helhet. Nivå 1 er dersom det bare er oppgaver av typen KPF. Nivå 2 er dersom det er oppgaver av typen CTP, men ikke noen av typen AMC. Nivå 3 har både oppgaver av typen CTP og AMC

Tabell 4.8: Resultatene av analysen av oppgavene med MDITx-rammeverket.

		KPF	**CTP**	**AMC**	**Nivå 1**	**Nivå 2**	**Nivå 3**	**Sum oppg.**
Sinus R1	**Antall**	36	163	47	0	5	9	246
	Prosent	14,6%	66,3%	19,1%	0,0%	35,7%	64,3%	
Matematikk R1	**Antall**	29	170	25	0	4	9	224
	Prosent	12,9 %	75,9 %	11,2 %	0,0 %	30,8 %	69,2 %	
Mønster R1	**Antall**	16	113	12	0	3	5	141
	Prosent	11,3 %	80,1 %	8,5 %	0,0 %	37,5 %	62,5 %	

I denne tabellen har hver bok to rader. Den ene raden viser antall oppgaver som ble plassert i hver kategori, og den andre raden viser andelen av oppgaver i hver kategori. De tre nivåinndelingene har hver sin kolonne som viser antallet og prosentandelen av disse. Fordelingen av antall oppgaver fra hver av de tre bøkene vises i kolonnen lengst til høyre i denne tabellen. Også med dette rammeverket er det Sinus R1 som har flest oppgaver (246 oppgaver), etterfulgt av Matematikk R1 (224 oppgaver) og Mønster R1 (141 oppgaver). Det er en klar overvekt av oppgaver i kategorien CTP i alle tre bøkene. Det er også en overvekt av at læringsobjektene havnet på nivå 3 i alle tre bøkene. Dette nivået innebærer altså at det er både oppgaver i kategoriene CTP og AMC innenfor læringsobjektet. Ingen av læringsobjektene havnet på nivå 1. Disse resultatene blir nærmere diskutert i neste hovedkapittel.

4.2.3 Undersøkelseslandskaper

Jeg vil her presentere resultatene fra analysen av muligheter til utforskning i oppgavene. Dette ble gjort med Skovsmose (1998) sitt rammeverk, Undersøkelseslandskaper. Totalt ble 1539 oppgaver i de tre lærebøkene analysert med dette rammeverket. Tabell 4.9 viser resultatene fra denne analysen. Navnene på kategoriene i denne tabellen er kun nummerert av plasshensyn med tanke på bredden på siden. Jeg gjentar derfor navnene på kategoriene her, sammen med en kort påminnelse om hva kategoriene i dette rammeverket betød. I oppgaveparadigmet har vi kategoriene 1, 3 og 5. Kategori 1, ren matematikk, er rene matematiske oppgaver med et fasitsvar. Kategori 3, semi-referanse til virkeligheten, er oppgaver med et fasitsvar og med referanser til en virkelighet elevene kan kjenne seg igjen i eller se for seg at kan finne sted. Kategori 5, reelle referanser, er oppgaver direkte knyttet til elevenes virkelighet som har et fasitsvar. Innenfor undersøkelseslandskap har vi kategoriene 2, 4 og 6. Kategori 2, ren matematikk, er rene matematiske oppgave som befinner seg i et undersøkelseslandskap. Kategori 4, semi-referanse til virkeligheten, er i et utforskningslandskap med en virkelighet som kan finne sted. Kategori 6, reelle referanser, er utforskende oppgaver med en reell referanse til elevenes virkelighet.

I denne tabellen har hver lærebok to rader. Den ene raden viser antall oppgaver som ble plassert i hver kategori, og den andre raden viser andelen av oppgaver i hver kategori. Fordelingen

Tabell 4.9: Resultatene av analysen av undersøkelseslandskap i oppgavene.

		Oppgaveparadigmet			Undersøkelseslandskap		
		(1)	**(3)**	**(5)**	**(2)**	**(4)**	**(6)**
Sinus R1	**Antall**	489	90	0	95	4	0
	Prosent	72,1%	13,3%	0,0%	14,0%	0,6%	0,0%
Matematikk R1	**Antall**	439	2	0	54	0	0
	Prosent	88,7%	0,4%	0,0%	10,9%	0,0%	0,0%
Mønster R1	**Antall**	323	17	0	24	1	0
	Prosent	88,5%	4,7%	0,0%	6,6%	0,3%	0,0%
Totalt	**Antall**	1251	109	0	173	5	0
	Prosent	81,3%	7,1%	0,0%	11,2%	0,3%	0,0%

av antall oppgaver fra hver av de tre bøkene vises i kolonnen lengst til høyre i denne tabellen. De nederste to radene viser antall og prosent av oppgaver i hver av de seks kategoriene for de tre bøkene samlet sett. Det er en klar overvekt av oppgaver innenfor oppgaveparadigmet i alle tre bøkene, hvor kategori 1 ren matematikk er klart størst. Innenfor utforskningslandskap er også kategori 2, ren matematikk, størst. Disse resultatene blir nærmere diskutert i neste hovedkapittel.

4.3 Resultater fra analysen av bevis

Jeg vil her presentere resultatene fra analysen av bevis. Dette ble gjort med Thompson mfl. (2012) sitt rammeverk. Dette rammeverket har fire ulike kategorier for å karakterisere et bevis. Totalt ble 97 elementer i de tre lærebøkene identifisert som påstander og resultater som kunne ha et bevis eller en begrunnelse knyttet til seg. Tabell 4.10 viser oversikten på resultatene av analysen av bevis og påstander i lærebøkene. Jeg vil, for oversiktens skyld, gi en kort påminnelse om kategoriene i dette rammeverket. Kategori G er matematiske bevis som går detaljert gjennom hvordan en kommer frem til det aktuelle resultatet. Kategori S er en begrunnelse av et resultat ved hjelp av et eller flere generiske eksempler. Kategori L er når beviset for et resultat overlates til eleven å finne ut av. Dette skjer da gjerne i form av en oppgave. Kategori N er når det ikke gis noen begrunnelse for et resultat.

Tabell 4.10: Resultatene av analysen av bevis i lærebøkene

		G	S	L	N	Sum
Sinus R1	**Antall**	15	3	12	3	**33**
	Prosent	45,5%	9,1%	36,4%	9,1%	
Matematikk R1	**Antall**	6	2	8	10	**26**
	Prosent	23,1%	7,7%	30,8%	38,5%	
Mønster R1	**Antall**	10	14	5	9	**38**
	Prosent	26,3%	36,8%	13,2%	23,7%	

I denne tabellen har hver av bøkene to rader. Den ene raden viser antall bevis som ble plassert i hver kategori, og den andre raden viser prosentandelen av bevis i hver kategori. Fordelingen av antall bevis fra hver av de tre bøkene vises i kolonnen lengst til høyre i denne tabellen. Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis 33, 26 og 38 slike elementer. I denne tabellen kan vi se at det er en del variasjon fra bok til bok på hvordan fordelingen i de fire beviskategoriene er. Sinus R1 har en overvekt på generelle bevis (45.5%), mens

Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis 23.1% og 26.3% i denne kategorien. Mønster R1 har flest bevis i kategorien S (36.8%), mens Sinus R1 og Matematikk R1 har henholdsvis 9.1% og 7.7%. Her brukes generiske eksempler for å begrunne en regneregel eller påstand. Alle tre bøkene gir elevene muligheter til å utføre bevis selv. Sinus R1 og Matematikk R1 har henholdsvis 12 og 8 slike oppgaver, mens Mønster R1 har 5 stykker. Disse kom da i form av oppgaver. Matematikk R1 hadde flest antall i kategorien N (38.5%). Dette er da resultater uten noen begrunnelse. Sinus R1 og Mønster R1 hadde henholdsvis 9.1% og 23.7% i denne kategorien. Disse resultatene blir nærmere diskutert i neste hovedkapittel.

Kapittel 5

Diskusjon

I dette kapitelet vil jeg diskutere resultatene som ble presentert i forrige hovedkapittel. Jeg vil bruke dette som grunnlag for å svare på forskningsspørsmålene mine. Disse spørsmålene ble presentert i introduksjonskapitelet, men jeg ønsker å gjenta dem her for oversiktens skyld. Det overordnede forskningsspørsmålet mitt var:

> "Hvordan legger de nye lærebøkene i matematikk R1, fra de tre store lærebokforlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, til rette for at elevene skal kunne nå et utvalg av kompetansemålene som omhandler grenseverdi og derivasjon?"

Dette ble videre delt inn i de fire følgende underspørsmålene:

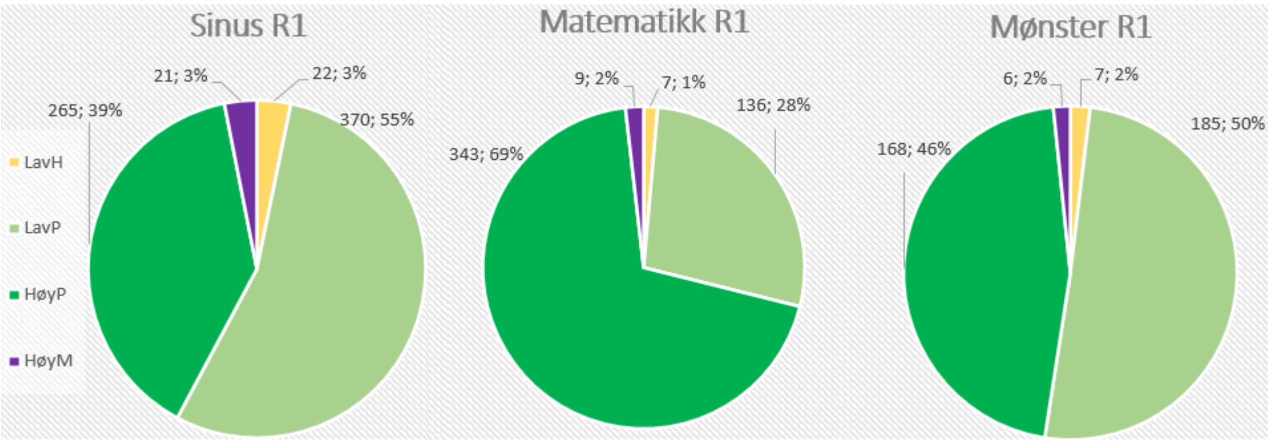
- Hva slags kognitive krav stilles det i oppgavene?
- Hvilke læringsmuligheter finnes det i oppgavene?
- Hvordan legger lærebøkene til rette for muligheter til matematisk utforskning?
- Hvordan begrunner eller beviser lærebøkene påstander og regneregler?

Jeg vil svare på forskningsspørsmålene ved å diskutere resultatene fra analysen av oppgavene og bevisene. Jeg vil diskutere dette i lys av teori, tidligere forskning og trekke frem eksempler på hvordan de tre bøkene fremstilte enkelte aspekter ved de to begrepene grenseverdi og derivasjon. Det har vært utfordrende å finne tidligere relevant forskning for akkurat det jeg undersøker for matematikk R1. Men jeg vil trekke frem forskning med tilsvarende tema og med bruk av tilsvarende rammeverk der det er relevant. Jeg velger å la gjennomgangen av den horisontale analysen stå for seg selv i resultatkapitlet. Denne analysen gav en gjennomgang av fakta og oppbygningen av hver bok, men dette er ikke direkte knyttet til å kunne svare på forskningsspørsmålene mine. Den horisontale analysen ble gjennomgått i en del detalj der, og jeg ønsker ikke å tilføre mer til den her. I neste og siste hovedkapittel vil jeg komme med en oppsummering av funnene jeg har gjort, og noen forslag til videre forskning.

5.1 Kognitive krav, MTF

Totalt ble 1539 oppgaver analysert med tanke på hvilke typer kognitive krav som fantes i dem. Denne analysen ble gjort med rammeverket MTF. Jeg vil koble de kognitive kravene som elevene møter i oppgavene mot hvilke muligheter de får til å jobbe mot en relasjonell forståelse av grenseverdi og derivasjon. I teorikapitlet ble det blant annet trukket frem at det å streve og oppleve motstand på veien til en løsning i oppgaver, er en viktig del av det å oppnå forståelse i matematikk (Nosrati og Wæge, 2015; Warshauer, 2015). Høye kognitive krav i oppgaver vil på denne måten kunne gi muligheter til å oppnå en relasjonell forståelse av de to begrepene. MTF-rammeverket fokuserer på hva slags kognitive krav oppgavene stiller. Hva slags oppgaver elevene jobber med gjennom skoleåret, blir gjerne satt opp i en arbeidsplan som læreren bestemmer. Basert på det jeg skrev tidligere om læreboken sentrale rolle i matematikkundervisningen, kan det tenkes at en lærer stort sett velger oppgaver fra læreboken. I et slik tilfelle blir oppgavene som finnes i læreboken være viktig for hvilke læringsmuligheter elevene møter på, og hvilke muligheter de får til å bli utfordret faglig. Dette kommer til uttrykk da Stein og Smith skriver at "The day-in and day-out cumulative effect of classroom based tasks lead to the development of students' implicit ideas about the nature of mathematics - about whether mathematics is something about which they can personally make sense [...]" (Stein og Smith, 1998, s. 269).

Det er ikke meningen å tenke at elevene kommer til å jobbe med alle disse oppgavene i løpet av skoleåret. Målet med lærebokanalysen er derimot å gi et bilde av hva slags muligheter læreboken tilbyr elevene gjennom de oppgavene som finnes i boken. Jeg valgte å ta med alle relevante oppgaver i oppgavesamlingene i tillegg til oppgavene i delkapitlene. Dette var for å få en størst mulig oppgavemengde til analysen. Dersom jeg for eksempel ikke tok med oppgavene i oppgavesamlingene, så ville resultatene om hvilke kognitive krav som elevene møter i oppgavene innenfor min avgrensning i de tre bøkene ha stått svakere. Resultatene av analysen ble gitt i tabell 4.7 i forrige hovedkapittel. Figur 5.1 viser disse samme resultatene i form av tre sektordiagram. Her har hver kategori sin egen fargesektor, som er markert med antall og prosentandel. Disse prosentandelene er avrundet til nærmeste heltall. Fargekodene og kategoriene er angitt lengst til venstre i denne figuren. Kategoriene er gitt i stigende rekkefølge etter hvor kognitivt krevende de er for elevene: LavH, LavP, HøyP og HøyM.



Figur 5.1: Resultatene fra analysen av de kognitive kravene i oppgavene med MTF-rammeverket.

Oppgaver som ble klassifisert som LavH, var deloppgaver hvor en skulle regne ut en funksjonsverdi eller tegne en graf med digitale hjelpemidler tilgjengelig. Dette er altså oppgaver som kun spør etter noe eleven skal kunne fra før. Det var ingen oppgaver som var direkte knyttet til begrepene grenseverdi eller den deriverte som ble kategorisert som LavH. Kanskje det mest iøynefallende med resultatene på figur 5.1, er den høye prosentandelen av oppgaver som ble kategorisert som prosedyreoppgaver (LavP og HøyP). Samlet sett for alle tre bøkene, ble hele 95.3% av oppgavene kategorisert som prosedyreoppgaver: LavP med 44.9% og HøyP med 50.4%. Denne overvekten av prosedyreoppgaver kommer tydelig frem i sektordiagrammene på figur 5.1, hvor disse to kategoriene er farget med henholdsvis lysegrønt og mørkegrønt. Hvis vi ser på de tre bøkene hver for seg, var det 93.7%, 96.8% og 96.4% av oppgavene LavP og HøyP i henholdsvis Sinus R1, matematikk R1 og Mønster R1.

Av sektordiagrammene kan vi se at Sinus R1 og Mønster R1 ligger nær hverandre prosentmessig i hvordan oppgavene i kategoriene LavP og HøyP er fordelt. Matematikk R1 skiller seg ut fra de to andre bøkene ved at 27.5% og 69.3% av oppgavene er i henholdsvis LavP og HøyP. Matematikk R1 er også den boken med flest antall HøyP-oppgaver (343 stykker). Prosedyreoppgaver kan være viktige for eksempel i innlæringsfasen av nye begreper og regneregler. Oppgavene følger da gjerne etter en teoridel sammen med ett eller flere eksempler. På denne måten gir oppgavene elevene muligheten til å teste kunnskap og ferdigheter i det de nettopp har lest om i boken. Oppgaver innenfor kategorien LavP kan da relativt enkelt løses med den aktuelle regneregelen, eller ved å se på løsningsmetoden i de gjennomgåtte eksemplene og teorien i delkapitlet. Slike oppgaver vil da i mindre grad gi elevene kognitive utfordringer med å løse oppgavene. Oppgaver i kategoriene HøyP og HøyM er mer krevende. Slike oppgaver vil også gi tilfeller der elevene i større grad må streve for å komme frem til et svar, og de vil slik sett i større grad kunne gi elevene mulighet til jobbe mot en relasjonell forståelse.

Denne høye andelen av oppgaver i kategoriene LavP og HøyP, er også sammenlignbar med funn i noen tidligere studier hvor MTF-rammeverket ble brukt i analysen. Myge (2021) undersøkte i sin masteroppgave 1624 oppgaver i bøkene Sinus 1T, Matematikk 1T og Mønster 1T. Dette ble da gjort med de nyutgitte bøkene i forbindelse med LK20. Dette er altså bøker fra de samme forlagene som har gitt ut de lærebøkene som jeg undersøker. Disse tre lærebøkene i matematikk 1T har, med noe små variasjoner, de samme forfatterene som lærebøkene for matematikk R1. Fokuset for Myge sin analyse, var oppgaver knyttet til temaet algebra. Dette er et annet matematisk tema enn det jeg studerer her, men matematikk 1T har den samme overordnede læreplanen med fokus på forståelse, utforskning og dybdelæring. Dette gjenspeiles også i lærplanen til matematikk 1T hvor verbene forstå og utforske blir brukt i flere av kompetansemålene. Dermed mener jeg at det er interessant å se hvordan Myge sine resultater sammenfaller med mine. Samlet sett i alle de tre lærebøkene blant alle oppgavene Myge så på, var 92.2% i kategoriene LavP eller HøyP. Andelen oppgaver i LavH lå på mellom 0.7% og 1% i de tre bøkene. Andelen oppgaver i LavP lå på mellom 43.0% og 53.8% i de tre bøkene, og andelen oppgaver i HøyP lå på mellom 38.5% og 47.2% i de tre bøkene. Andelen oppgaver i HøyM var 3.9%, 7.8% og 9.1% i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Alle disse funnene, samt antall oppgaver analysert, ligger da i nærheten av mine funn med MTF-rammeverket. Prosentandelen i kategorien HøyM var en del høyere enn hva som var tilfellet for oppgavene knyttet til grenseverdi og derivasjon i de tre lærebøkene i matematikk R1.

Anda (2020) så i sin masteroppgave på kognitive krav i 900 oppgaver innenfor temaet funksjoner med MTF-rammeverket. Han så på fem lærebøker for 8., 9. og 10. trinn på ungdomskolen fra forlagene Gyldendal og Cappelen Damm. Dette var da for ungdomsskolen både før og etter fagfornyelsen. Dette var bøkene Maximum 9 (Gyldendal), Faktor 9 (Cappelen Damm), Faktor 10 (Cappelen Damm), Maximum 8 (Gyldendal) og Matematikk 8 (Cappelen Damm). De tre førstnevnte lærebøkene er skrevet for LK06, og de to sistnevnte var skrevet for LK20.

Han oppsummererer funnene sine blant annet ved å samle resultatene for de bøkene som er skrevet til LK06, og de som er skrevet til LK20. For bøkene skrevet til LK06 var 4.6%, 57.2%, 34.3% og 4.0% av oppgavene i henholdsvis LavH, LavP, HøyP og HøyM. For bøkene skrevet til LK20 var 1.8%, 54.0%, 37.9% og 6.3% av oppgavene i henholdsvis LavH, LavP, HøyP og HøyM. Anda gjorde også en hypotesetest for å undersøke om de kognitive kravene hadde økt etter LK20. Han fant, med signifikansnivå på $\alpha = 1\%$, at det ikke var grunnlag for å hevde at det var noen slik økning. Han beholdt dermed nullhypotesen om at det ikke var noen forskjell i de kognitive kravene fra LK06 til LK20 for de kapitlene han undersøkte. En slik sammenligning av kognitive krav i gamle og nye lærebøker hadde vært veldig interessant å gjøre i matematikk R1 også. Jeg nøyer meg med å sette dette opp som et forslag til videre forskning. Selv om matematikk på ungdomsskolen er langt unna matematikk R1, fant jeg det interessant at prosentandelene i de fire kategoriene var sammenlignbare med mine funn.

Jeg har også lyst til å trekke frem noen resultater fra masteroppgaven til Nordli (2017). Hun så på kognitive utfordringer i 3454 oppgaver innenfor temaene algebra og funksjoner i matematikk R1 med LK06 som læreplan. Lærebøkene som ble analysert, var de tre bøkene Sinus R1, Matematikk R1 og Sigma R1. Den sistnevnte læreboken er fra Gyldendal forlag, som etter LK20 fikk navnet Mønster R1. Jeg ønsker å trekke frem noen av resultatene hennes fordi analysen er gjort innenfor matematikk R1, og fordi jeg mener temaet hennes har fellestrekk med det jeg ser på i denne masteroppgaven. Det teoretiske rammeverket for Nordli sin studie var av Johan Litner. Jeg ønsker å se på resultatene fra følgende kategorier: *imitativ resonnering (IR)*, *lokal kreativ resonnering (LCR)* og *global kreativ resonnering (GCR)*. Disse kategoriene har en tilsvarende økning i krav til elevens resonnering for å komme frem til en løsning av oppgavene. IR er det laveste nivået, deretter følger LCR og til slutt er GCR det høyeste nivået. Oppgaver i IR kan løses ved å imitere hvordan eksempler og gjennomgang av teori for eksempel bruker en regneregel. I de to kategoriene av kreativ resonnering må eleven være mer kreativ og foreta egne valg for å kunne løse oppgaven. Det kan være innenfor begreper og regneregler i det aktuelle delkapitlet (LCR), eller på en måte som dekker større deler av eller hele boken (GCR). Jeg velger å trekke frem de samlede resultatene for de to temaene algebra og funksjoner. Hun fant at det var henholdsvis 63%, 58% og 58% oppgaver innenfor kategorien IR Sinus R1, Matematikk R1 og Sigma R1. For LCR var det 29%, 38% og 38%. Til slutt var det 2.2 %, 4.0% og 4.2% i kategorien GCR. Disse prosentandelene er i nærheten av mine funn med MTF-rammeverket for henholdsvis kategoriene LavP, HøyP og HøyM.

I min analyse, er oppgaver av typen LavP knyttet til et begrep eller prosedyre hvor fremgangsmåten for å løse oppgaven kommer ut i fra konteksten oppgaven gis i. Anbefalt fremgangsmåte kan også komme fra hint eller instruksjoner i oppgaveformuleringen (Stein mfl., 2009). Slike prosedyreoppgaver kan være viktige for å trene på bruken av nye regneregler og begreper. Men hvis for mange av oppgavene ikke stiller kognitive krav som krever begrepsmessig forståelse, eller gir muligheter for å oppnå en slik forståelse, mister elevene muligeter til å nettopp få en dypere forståelse av et begrep eller regneregel. Nosrati og Wæge (2015) skriver at "[...] forskning har vist at vi bør bevege oss vekk fra ideen om at matematikk hovedsakelig består av regler og algoritmer som må læres utenat. Fokuset bør snarere rettes mot de rike tankeprosessene som underligger matematisk aktivitet [...]" (s. 2). En elev uten begrepsmessig forståelse vil kunne klare å løse oppgaver ved å pugge eller lete opp den aktuelle regneregelen i de enkelte tilfellene. Men etter en stund går dette kanskje i "glemmeboken". Uten den begrepsmessige forståelsen, er det da mindre sjanse for at eleven klarer å tenke seg frem til hvordan denne glemte regneregelen fungerte. Oppgaver innenfor HøyP kan i større grad gi elevene mulighet til å øke forståelsen av et begrep. Selv om en fremgangsmåte også her kan komme frem av konteksten eller hint i oppgaveteksten, er det ikke nødvendigvis rett frem å komme til et sluttsvar.

En observasjon som ble gjort flere ganger underveis i analysearbeidet, var at mange av oppgavene som ble klassifisert som LavP kunne ha blitt klassifisert som HøyP med noen små endringer. Dette var dersom boken hadde indikert at de skulle gjøres uten hjelpemidler, at de skulle gjøres både med og uten hjelpemidler eller at oppgaven stilte tydelige krav til å forklare eller begrunne gyldigheten av svaret. Dette var tilfellet med mange oppgaver i alle tre lærebøkene. Mange oppgaver ble plassert i kategorien LavP fordi oppgaveformuleringen var av typen "finn svaret", og oppgaven var markert som at den var med hjelpemidler tilgjengelig. Mange av disse oppgavene ville havnet i kategoriene HøyP dersom de var uten hjelpemidler. En endring i oppgaveteksten kunne vært å oppfordre elevene til å gjøre oppgavene uten hjelpemidler, for så å gjøre oppgaven og sjekke svaret med hjelpemidler. Det er mulig for en lærer å gi slike føringer, men lærebokanalysen kan ikke ta hensyn til dette. For å være konsekvent med bruken av rammeverket, ble kategoriseringen gjort etter hvordan oppgavene var fremstilt i boken og hvilke hjelpemidler som det ble indikert at skulle brukes.

Et eksempel på en oppgave som slik sett kunne vært HøyP, kan være oppgave 2.27 b) fra Matematikk R1 i kapittel 2B om grenseverdi:

Hva skjer med $f(x)$ når $x \to \infty$? Og hva skjer når $x \to -\infty$?

b) $f(x) = e^{-2x+1}$.

Denne oppgaven er gitt med alle hjelpemidler, og den havner derfor på LavP. Det er fordi svaret i slike oppgaver kan eleven få rett ut ved å bruke en kommando for å finne en grenseverdi i GeoGebra. Det stilles heller ingen krav til å forklare svaret i oppgaven. En kan også tenke seg at ved å plotte grafen til funksjonen i GeoGebra, så kan eleven hoppe til konklusjonen, uten noen begrunnelse, at $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$ og $f(x) \to \infty$ når $x \to -\infty$. Hvis oppgaven skulle gjøres uten hjelpemidler, i tillegg til at svaret skulle sjekket med GeoGebra, ville oppgaven blitt kategorisert som HøyP. Slike kategoriseringsvalg ble gjennomgått i metodekapitelet. Det stilles høyere kognitive krav til en elev som må gjøre en slik oppgave uten hjelpemidler. Det stilles også høyere kognitive krav til eleven dersom oppgaven ber om at gyldigheten av svaret må evalueres og forklares. Det vil også være muligheter for eleven til å utforske og få økt forståelse ved å jobbe med slike oppgaver uten hjelpemidler. Denne oppgaven kunne også blitt kategorisert som HøyP dersom eleven måtte knytte sammen ulike representasjoner som grafen til funksjonen og det algebraiske uttrykket.

Det var også oppgaver med alle hjelpemidler som ble kategorisert som HøyP. For eksempel kan jeg trekke frem oppgave 2.11 e) fra Sinus R1:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) + 2g(x)}{g(x) - f(x)}.$$

Denne oppgaven er knyttet til begrepet grenseverdi og dets regneregler. Her er det gitt at $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ og $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$. Deretter skal eleven vurdere fem ulike grenseverdier i hver sin deloppgave. Grenseverdiene i deloppgavene består av ulike sammensetninger av funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ når $x \to 3$. Den overordnede oppgaveformuleringen er "Bruk grenseverdisetningene til å finne disse grenseverdiene". Denne grenseverdien er sammensatt, og eleven må kombinere flere av regnereglene for grenseverdier for å kunne finne sluttsvaret. Det gir også et økt abstraksjonsnivå når funksjonene ikke er spesifisert. Vi får kun vite utfallet av grenseverdien av de to funksjonene hver for seg når $x \to 3$.

I alle tre bøkene er andelen oppgaver av typen HøyM svært lav. Sinus R1 var den boken som hadde flest oppgaver innenfor min avgrensning, og denne boken hadde også flest oppgaver av typen HøyM (21 stykker og 3.2%). Matematikk R1 og Mønster R1 hadde henholdsvis 9 (1.8%) og 6 (1.6%) oppgaver i kategorien HøyM. Det er også et interessant funn at alle disse oppgavene av typen HøyM, unntatt 2 stykker i Mønster R1, var knyttet til den deriverte. Jeg vil trekke frem oppgave 2.20 i Mønster R1 som var denne nevnte oppgaven av typen HøyM knyttet til grenseverdi. Denne oppgaven har to deloppgaver og er markert med ikon av en firkant og en blyant. Det betyr at det er en krevende oppgave som skal gjøres for hånd. Denne oppgaven presenterer grenseverdien

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 - kx + 6}{x^2 + x - 6}.$$

Den første av de to deloppgavene ber om at eleven skal bestemme verdien av k slik at grenseverdien eksisterer. Den andre deloppgaven ber om at eleven skal finne grenseverdien for denne verdien av k. Da må eleven først forstå hva det vil si at en grenseverdi eksisterer. Det er ingen hint om hvordan eleven skal gå frem for å finne ut av dette. Dermed ligger en mulighet til å få en bedre forståelse av begrepet grenseverdi, hva det vil si at en grenseverdi eksisterer og muligheter til å utforske hva slags fremgangsmåte som fører frem til et svar.

Som et eksempel på en oppgave i kategorien HøyM knyttet til den deriverte, vil jeg trekke frem oppgave 9 fra repetisjonsoppgavene til kapittel 3 i Sinus R1. Oppgaven presenterer funksjonen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, og oppgaveteksten er som følger:

Utforsk og finn hvilken sammenheng det er mellom tallene a og b når likningen $f'(x) = 0$ har 0, 1 eller 2 reelle løsninger.

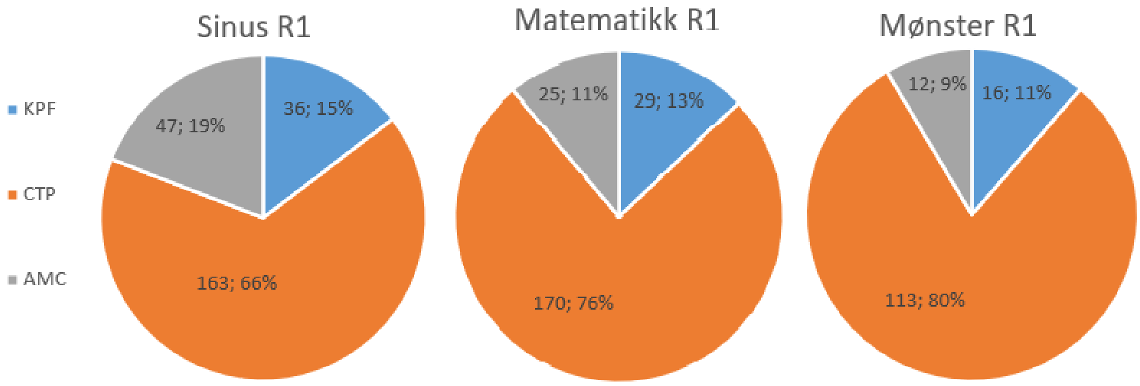
Denne oppgaven er kognitivt krevende på flere måter. Funksjonen kan ikke plottes og slik gi en visuell representasjon av problemet da a og b ikke er spesifiserte tall. Det er selvsagt mulig å velge ut noen konkrete verdier for a og b, tegne grafen i GeoGebra og slik få en idé om hvordan funksjonen kan se ut. Men det er kun relasjonen mellom disse to ukjente tallene som skal utforskes og finnes ut av. Oppgaven befinner seg i en oppgavesamling uten en kapittelinndeling, og slik sett er det ingen hint om hvilket delkapittel oppgaven kan passe inn i. Det gis heller ingen retningslinjer eller hint i oppgaveteksten om hvordan eleven skal gå frem. Derimot står det at eleven skal utforske og finne sammenhengen mellom a og b i disse tre ulike situasjonene.

Det fremstår som vanskelig for meg å si hva som er en best mulig sammensetning av oppgaver med tanke på disse fire kategoriene. Men det var mange av oppgavene i alle tre bøkene som ved små endringer, kunne havnet på et høyere kognitivt nivå. Dette var da grep som for eksempel å be elevene begrunne svaret og gjøre oppgavene både med og uten hjelpemidler. Det kan virke som at den høye andelen prosedyreoppgaver, er et funn som ville blitt tilsvarende dersom jeg hadde undersøkt andre tema innenfor matematikk R1 også i de tre bøkene. Jeg begrunner dette med de tidligere studiene jeg sammenlignet mine funn med. Men jeg kan ikke si dette for sikkert uten å faktisk ha undersøkt det. Hvis elevene jobber mest med oppgaver med lavere kognitive krav, så er det nærliggende å tenke at det er den instrumentelle forståelsen som får mest trening. Jeg vil også merke meg den lave andelen oppgaver på det høyeste nivået, HøyM. Alle disse var krevende oppgaver som vil utfordre elevene, gi mulighet til å utforske ulike fremgangsmåter og kunne gi en bedre forståelsen av de aktuelle begrepene.

5.2 Læringsmuligheter, MDITx

Totalt ble 611 oppgaver analysert med MDITx-rammeverket til Ronda og Adler. Dette oppgaveantallet er under halvparten av hva som er tilfellet i oppgaveanalysen av kognitive krav og undersøkelseslandskaper, hvor det var 1539 oppgaver. Det er fordi kapitteltester og oppgavesamlingene ikke ble tatt med her. Denne fremgangsmåten med å begrense analysen til læringsobjektene innenfor hvert delkapittel, ble beskrevet i metodekapitlet. Jeg vil knytte funn med dette rammeverket til antall muligheter elevene får til å jobbe med oppgaver i de aktuelle læringsobjektene. Det å jobbe med mange oppgaver til et læringsobjekt gir elevene muligheter til å bli kjent med det, se ulike eksempler på hva et begrep innebærer og muligheter til å jobbe mot å få en relasjonell forståelse av det.

Resultatene ble presentert i tabell 4.8 i forrige hovedkapittel. Figur 5.2 viser de samme resultatene i form av sektordiagram. Her er prosentene avrundet til nærmeste heltall. De tre bøkene har ulik oppbygning med tanke på antall og lengden på delkapitlene. Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1 har henholdsvis 50, 33 og 25 delkapitler, hvor henholdsvis 9, 7 og 5 delkapitler blir analysert. Sinus R1 deler opp det matematiske innholdet i flere og mindre delkapitler enn de to andre bøkene. Dette ble nærmere omtalt i den horisontale analysen i resultatkapitlet. Denne fordelingen av antall delkapitler, gjenspeiles også i antall læringsobjekter som ble funnet i de tre bøkene. Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1 hadde henholdsvis 14, 13 og 8 læringsobjekter. Jeg har tatt for meg det samme matematiske innholdet i alle tre bøkene, men den ulike oppbygningen av delkapitlene resulterte i noen variasjoner i antall læringsobjekter.



Figur 5.2: Resultatene fra analysen av læringsmulighetene i oppgavene.

Kategorien KPF er når oppgavene kun spør om tidligere kjent matematikkunnskap. Den andre kategorien, CTP, er oppgaver som handler om det aktuelle læringsobjektet. Den siste kategorien, AMC, er når eleven i større grad må gjøre valg av fremgangsmåte og se sammenhenger mellom det aktuelle begrepet og andre begrep . Disse kategoriene tar ikke med i betraktning hva slags hjelpemidler oppgavene skal gjøres med. Jeg mener at kategoriene i MDITx har en viss grad av økende kognitive krav i rekkefølgen KPF , CTP og AMC. Men de to artiklene av Ronda og Adler (2015 og 2017), som jeg bygger min forståelse av dette rammeverket på, bruker ikke begrepet kognitive krav. Jeg vil derfor bare gjøre en forsiktig sammenlikning med resultatene fra analysen av kognitive krav med MTF-rammeverket. Fokuset for dette rammeverket er hvilke læringsmuligheter som elevene møter i oppgavene innenfor hvert sitt læringsobjekt.

Figur 5.2 viser at fordelingen mellom de tre kategoriene i de tre lærebøkene har noen variasjoner, men at de samtidig er ganske like hverandre i den prosentmessige fordelingen.

Kategorien KPF er den minste i Sinus R1, og den er den nest minste i Matematikk R1 og Mønster R1. Det var 14.9%, 12.9% og 11.3% av oppgavene i kategorien KPF i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Denne oppgavetypen består kun av tidligere kjente prosedyrer og begreper. Dette vil da være nærmest til kategorien LavH, som også er navngitt som *hukommelse*, i MTF-rammeverket. Typiske KPF-oppgaver gikk ut på å tegne en graf og regne ut funksjonsverdier. Dette var den samme observasjonen jeg gjorde for MTF-rammeverket med kategorien LavH. Det var heller ingen oppgaver som var direkte knyttet til grenseverdi eller derivasjon som ble kategorisert som KPF.

Sektordiagrammene i figur 5.2 viser at alle bøkene hadde et klart flertall av oppgaver i kategorien CTP. Det var 66.3%, 75.9% og 80.1% av oppgavene i denne kategorien i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Dette er altså oppgaver som handler om det aktuelle læringsobjektet. Dette vil da være nærmest til kategoriene LavP og HøyP i MTF-rammeverket med tanke på deres prosentandeler. Kategorien AMC er oppgaver som i større grad gir muligheter til en dypere forståelse av læringsobjektet, da disse krever at elevene må ta stilling til fremgangsmåte og hva slags representasjoner og begreper som er relevant for å løse oppgaven. Dette vil da være nærmest å sammenligne med oppgaver i kategoriene HøyP og HøyM i MTF-rammeverket. Det var 19.1%, 11.2% og 8.5% av oppgavene i kategorien AMC i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1.

Funnene jeg har gjort, kan sammenlignes med funn i noen tidligere studier med det samme teoretiske rammeverket. Myge (2021) undersøkte i sin masteroppgave 1664 oppgaver i bøkene Sinus 1T, Matematikk 1T og Mønster 1T med MDITx-rammeverket. Dette ble da gjort for de nyutgitte bøkene i matematikk 1T i forbindelse med LK20. Dette er altså lærebøkene i de tilsvarende lærebokseriene som jeg undersøker. Fokuset for hans analyse var oppgaver knyttet til temaet algebra. Jeg mener det er interessant å se hvorvidt hans resultater sammenfaller med mine resultater. Andelen oppgaver i KPF var hos Myge 6.0%, 7.6% og 5.7% i henholdsvis Sinus 1T, Matematikk 1T og Mønster 1T. Myge fant videre at andelen oppgaver i kategorien CTP var 89.6%, 83.4% og 84.2% i henholdsvis Sinus 1T, Matematikk 1T og Mønster 1T. Dette er høyere, men fortsatt i nærheten av de prosentandelene jeg hadde i mine funn for CTP. Andelen oppgaver i AMC var 4.3%, 9.0% og 10.1% i henholdsvis Sinus 1T, Matematikk 1T og Mønster 1T. Dette er lavere, men også i nærheten av de prosentandelene jeg hadde i mine funn for AMC. Myge gjorde et valg om å ta med mange flere oppgaver utenfor delkapitlene enn det jeg har gjort. Vi har altså gjort to ulike tolkninger i bruken av MDITx-rammeverket. Det kan tenkes at resultatene mine ville vært annerledes dersom jeg også hadde inkludert flere oppgaver. Men dette kan jeg ikke si for sikkert, da jeg ikke har gjort denne undersøkelsen. Det er også snakk om to ulike tema i to forskjellige fag som har blitt analysert.

Anda (2020) så i sin masteroppgave på læringsmuligheter i 905 oppgaver med MDITx-rammeverket. Han så på temaet funksjoner i fem lærebøker for 8., 9. og 10. trinn på ungdomskolen fra forlagene Gyldendal og Cappelen Damm. Dette var bøkene Maximum 9 (Gyldendal), Faktor 9 (Cappelen Damm), Faktor 10 (Cappelen Damm), Maximum 8 (Gyldendal) og Matematikk 8 (Cappelen Damm). De tre førstnevnte lærebøkene er skrevet for LK06 og de to sistnevnte lærebøkene var skrevet for LK20. Jeg velger å gjengi resultatene hans som et skjermbilde av oversiktstabellen hans. Denne er vist på figur 5.3. Her er de to Faktor-bøkene slått sammen til én rad. Ungdomsskolematematikken er langt unna matematikk R1 både i tid og faglig nivå, men det er interessant at Anda sine resultater er sammenlignbare med mine resultater med tanke på MDITx-rammeverket. Kategorien KPF er markant høyere for disse ungdomsskolebøkene enn i mine resultater. Kategorien CTP er den klart største og varierer mellom 65.3% og 72.2%, mot en variasjon mellom 66.3% og 80.1% i mine resultater.

Andelen oppgaver av typen AMC er i nærheten av mine resultater for bøkene Maximum 8 (LK20) og Faktor 9 og 10 (LK06). Mens de to bøkene Matematikk 8 (LK20) og Maximum 9 (LK06) er nede på henholdsvis 1.5% og 1.8%.

Lærebok/Kategori	KPF	CTP	AMC	Totalt
Faktor	44	109	14	167
Prosentvis fordeling	(26,4%)	(65,3%)	(8,4%)	-
Matematikk 8	43	90	2	135
Prosentvis fordeling	(31,9%)	(66,7%)	(1,5%)	-
Maximum 9	87	242	6	331
Prosentvis fordeling	(26%)	(72,2%)	(1,8%)	-
Maximum 8	64	185	23	272
Prosentvis fordeling	(23,5%)	(68%)	(8,5%)	-

Figur 5.3: Skjermbilde av tabell 4.28 hos Anda (2020) med resultatene av hans oppgaveanalyse med MDITx-rammeverket.

I min analyse av matematikk R1 var flertallet av oppgavene i alle tre bøkene var av type CTP. Jeg har lyst til å trekke frem noen oppgaver for å eksemplifisere kategoriseringsarbeidet. Oppgave 3.48 i Matematikk R1 er knyttet til læringsobjektet deriverbarhet, og den er med alle hjelpemidler tilgjengelig. Denne oppgaven tar for seg funksjonen $g(x) = |x-2|$. Den første deloppgaven ber eleven om å tegne grafen til funksjonen (KPF), og i den andre deloppgaven skal eleven vurdere om funksjonen er deriverbar i $x = 2$ (CTP). Denne oppgaven kommer etter at all teori og eksempler har blitt presentert, så elevene har da mulighet til å bla tilbake for å se på hvordan oppgaven kan løses dersom de sitter fast. Her er det mulig å tegne grafen i GeoGebra og se at grafen har et knekkpunkt som tilsier at den er kontinuerlig, men ikke deriverbar i dette knekkpunktet. Oppgaven ber ikke om noen begrunnelse av svaret, men spør bare om g er deriverbar i $x = 2$.

Som et eksempel på en oppgave i kategorien AMC innenfor grenseverdi, vil jeg trekke frem oppgaven "Diskuter" fra kapittel 2.1 Grenseverdier i Sinus R1. Her er vi gitt to polynomer $P(x)$ og $Q(x)$, og elevene skal undersøke grenseverdien $\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x)$. Oppgaveteksten lyder:

Hva kan dere si om denne grenseverdien når graden av P(x) er
1) lavere enn Q(x), 2) lik graden av Q(x) og 3) høyere en graden av Q(x).

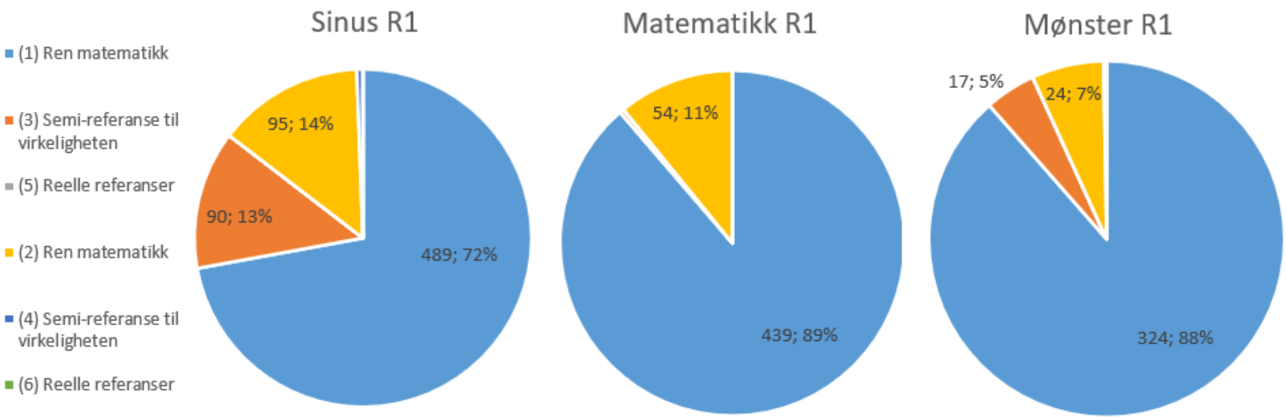
Denne oppgaven egner seg godt som et gruppearbeid hvor elevene kan diskutere og jobbe med oppgaven sammen. "I de senere årene har også matematiske diskusjoner og kommunikasjon blitt fremhevet som avgjørende faktorer for utvikling av begrepsmessig forståelse." (Nosrati og Wæge, 2015, s. 5). Her må altså elevene ta stilling til hvilken fremgangsmåte de skal bruke for å kunne svare på dette generaliserte problemet om grenseverdier av rasjonale funksjoner. For å kunne gå frem på en generell måte, må elevene argumentere med begreper og regneregler som de har en forståelse av. Det kan også være et alternativ å undersøke noen ulike generisk tilfeller av P(x) og Q(x) som er tilpasset de tre delene 1), 2) og 3). Elevene kan da se etter mønstre i hva som skjer der. Deretter kan elevene forsøke å si noe om denne generelle grenseverdien i oppgaven i de tre ulike tilfellene.

Det store flertallet av oppgavene som ble analysert var i kategorien CTP. Hvis vi samler kategoriene CTP og AMC blir prosentandelene 85.4%, 87.1% og 88.7% i henholdsvis Sinus

R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Dette gir altså elevene mange muligheter til å jobbe med oppgaver som har med det aktuelle læringsobjektet å gjøre. Når det gjelder nivåinndelingen for læringsobjektene, var ingen av dem på nivå 1 (bare oppgaver av type KPF). Omtrent én tredjedel av læringsobjektene i alle tre bøkene havnet på nivå 2 (CTP, men ingen AMC) og to tredjedel på nivå 3 (CTP og minst én AMC) (se tabell 4.7). Dermed har flertallet av læringsobjektene minst én oppgave av typen AMC. Dette var da oppgaver hvor eleven må ta stilling til fremgangsmåte, og hva som er relevante begreper for å løse oppgaven. Det er da mange muligheter for elevene gjennom disse oppgavene til å bli kjent med de ulike læringsobjektene, mestre regneferdigheter og til å knytte relasjoner mellom de ulike begrepene.

5.3 Undersøkelseslandskaper

Totalt ble 1539 oppgaver i de tre lærebøkene analysert med Skovsmose sitt rammeverk Undersøkelseslandskaper. Jeg vil knytte resultatene fra denne analysen til spørsmålet om hva slags muligheter elevene får til å utforske begrepene grenseverdi og derivasjon. Resultatene fra denne analysen ble gitt i tabell 4.9 i forrige hovedkapittel. Figur 5.4 viser disse resultatene i form av sektordiagram. Kategoriene 1, 3 og 5 hører til oppgaveparadigmet, og kategoriene 2, 4 og 6 hører til undersøkelseslandskap. Hver av disse to hovedkategoriene ble delt opp i de tre underkategoriene *ren matematikk*, *semi-referanse til virkeligheten* og *reelle referanser til virkeligheten*. Disse ble gjennomgått og forklart med eksempler i teorikapitlet. Prosentene i sektordiagrammene er avrundet til nærmeste heltall. For oversiktens skyld har jeg i disse sektordiagrammene valgt å ikke ta med markeringen av de minste kategoriene. Disse resultatene synes knapt i sektordiagrammet, og de kan mye bedre leses ut av tabell 4.9.



Figur 5.4: Resultatene fra analysen av undersøkelseslandskaper i oppgavene. Kategoriene 1, 3 og 5 hører til oppgaveparadigmet, og kategoriene 2, 4 og 6 hører til undersøkelseslandskap.

Det store flertallet av oppgaver var innenfor oppgaveparadigmet (kategori 1, 3 og 5): 85.4% i Sinus R1, 89.1% i Matematikk R1 og 93.2% i Mønster R1. Den klart største underkategorien innenfor oppgaveparadigmet var ren matematikk (blå sektorer i figur 5.4). Den nest største kategorien i oppgaveparadigme var oppgaver med en semi-referanse til virkeligheten (oransje sektor). I undersøkelseslandskap var det samlet sett i de tre kategoriene 14.6% (99 oppgaver), 10.9% (54 oppgaver) og 6.9% (25 oppgaver) av oppgavene i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Også her var underkategorien ren matematikk dominerende (gule sektorer i figur 5.4). Fire og én av oppgavene i henholdsvis Sinus R1 Mønster R1 var innenfor undersøkelseslandskap og underkategorien semi-referanse til virkeligheten.

Oppgaver som ble kategorisert som HøyM i MTF-rammeverket for kognitive krav, havnet også typisk i et av undersøkelseslandskapene. Jeg mener grunnen til dette er at slike oppgaver ikke er rett frem å løse. Eleven må ta stilling til hva slags fremgangsmåte en skal prøve, og eleven må utforske og revurdere underveis om arbeidet fører frem til en mulig løsning. Et eksempel på dette er oppgave 2.304 i Sinus R1. Denne oppgaven er plassert innenfor et undersøkelseslandskap og ren matematikk, og den er kategorisert som HøyM i MTF-rammeverket. Denne oppgaven presenterer funksjonen $f(x)$ med følgende oppdelte uttrykk:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & , x < -1 \\ g(x) & , -1 \leq x \geq 3 \\ 3x - 7 & , x > 3 \end{cases}$$

Deretter ber oppgaven om å bestemme et funksjonsuttrykk for $g(x)$ slik at funksjonen er både kontinuerlig og deriverbar i $x = -1$ og $x = 3$. Oppgaven er gitt i oppgavesamlingen bakerst i boken under seksjonen "Åpne oppgaver". Det er ingen hint i oppgaveteksten om hvordan eleven kan gå frem for å undersøke denne problemstillingen. Dermed må eleven bruke sin forståelse av hva det innbærer at en funksjon er kontinuerlig i et punkt, og hva det betyr at en funksjon er deriverbar i et punkt. Denne oppgaven stiller høye kognitive krav til eleven, samtidig som det er en god mulighet til å utforske ulike fremgangsmåter for å komme frem til en løsning. Det er noen bestemte grenseverdier som må undersøkes for at g(x) skal oppfylle kravene som stilles. Dermed blir det en oppgave med lukket start. Siden det kan være med enn én riktig løsning på funksjonen g(x), så har denne oppgaven har en åpen slutt.

En annen interessant oppgave innenfor undersøkelseslandskap og ren matematikk kommer inn på tenkemåten i et ϵ-δ-bevis, men da uten å bruke dette begrepet noe sted i oppgaveteksten. Oppgave 2.28 i Matematikk R1 tar for seg grenseverdien $\lim_{x\to 1} 2x = 2$. Oppgaveteksten lyder som følger:

> "Vi påstår altså at vi kan få uttrykket 2x så nær 2 vi vil ved å velge x nær nok 1. Det vil si at vi kan få avstanden mellom 2x og 2 så liten vi vil ved å velge avstanden mellom x og 1 liten nok. Dette kan vi skrive med absoluttverditegn: Vi kan få verdien av |2x-2| så liten vi vil ved å velge verdien |x-1| liten nok." (Borgan mfl., 2021, s. 91).

De to deloppgavene ber elevene først regne ut noen verdier av $|2x - 2|$ for x-verdier nær 1. Deretter utfordres eleven til å finne ut hvor liten $|x - 1|$ må være for at $|2x - 2| < 0.01$. Denne oppgaven kunne ha blitt utvidet til å komme inn på tenkemåten i et ϵ-δ-bevis. Selv om dette vanligvis ikke tas med i matematikk R1, så mener jeg at det kunne vært interessant for eleven å lære om at dette er en fremgangsmåte som brukes til å både bevise regnereglene for grenseverdier, og for å vise at en funksjon er kontinuerlig i et punkt. Oppgaven kunne vært utvidet til å fortsette ved å spørre om hvor liten $|x-1|$ må være for at $|2x-2| < 0.001$ og så videre. Dette kunne også blitt gjort til en slags konkurranse mellom to elever. Den ene kommer med et krav om hvor liten $|2x - 2|$ skal være, og den andre må så lete etter en x-verdi som er slik at $|x - 1|$ blir liten nok for å tilfredstille dette kravet.

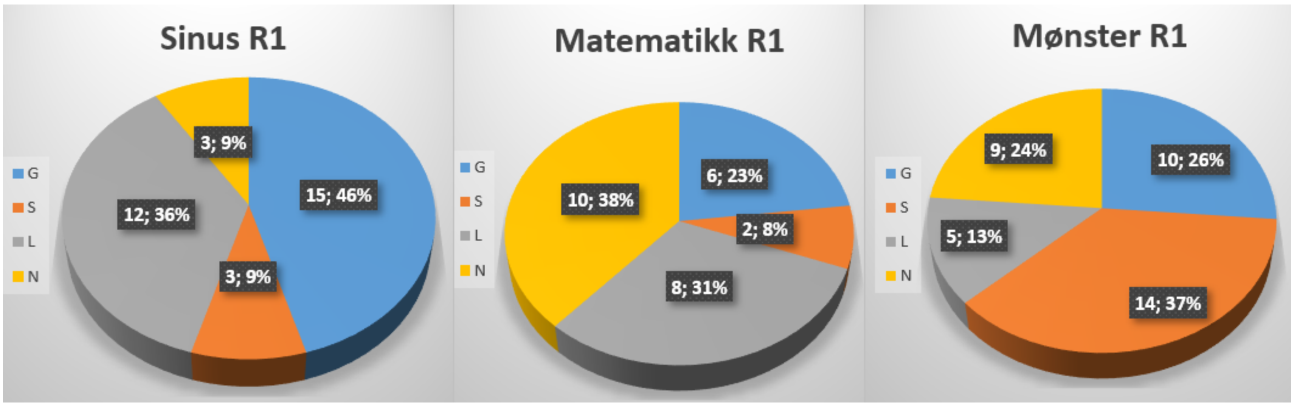
Denne masteroppgaven fokuserer på et utvalg av kompetansemål knyttet til begrepene grenseverdi og derivasjon. Videre valgte jeg å avgrense til å se på introduksjonen av begrepene og hvordan de grunnleggende regnereglene behandles. Dette er i seg selv teoretiske begrep innenfor matematikk R1. Det finnes selvfølgelig også en rekke anvendelser av de to begrepene i dette faget. Men i prosessen med å avgrense omfanget av denne masteroppgaven, så valgte jeg å holde temaer som for eksempel optimeringsproblemer og funksjonsanalyse utenfor. Det at jeg ikke har valgt å ta med mer anvendte områder for bruken av disse begrepene, har nok påvirket fordelingen som oppgavene har fått i dette rammeverket sine kategorier. Jeg ser for meg at dersom jeg hadde inkludert for eksempel funksjonsanalyse, som blant annet inneholder optimeringsproblemer, så ville andelen av oppgaver med referanser til virkeligheten blitt større. Men jeg har jeg ikke noe grunnlag for å si om en slik endring ville påvirket antall undersøkende oppgaver.

5.4 Bevis

I de tre lærebøkene ble det samlet sett funnet 97 påstander og regneregler som kunne ha et bevis knyttet til seg. Det var 33, 26 og 38 slike påstander eller regneregler i henholdsvis Sinus R1, Matematikk R1 og Mønster R1. Denne analysen ble gjort med rammeverket til Thompson mfl. (2012). Jeg vil knytte funn med dette rammeverket til spørsmålet om hva slags muligheter elevene får til å jobbe mot forståelse av begrepene grenseverdi og derivasjon, samt spørsmålet om hvordan lærebøkene begrunner eller beviser påstander og regneregler. Ved å jobbe gjennom detaljene i et bevis, vil en kunne få en forståelse av hvor resultatet kommer fra og hvorfor det er gyldig. Dette vil da kunne bidra til en relasjonell forståelse av det aktuelle begrepet eller regneregelen. Thompson mfl. (2012) understreker bevis sin viktige rolle, ved å skrive at bevis er "[...] the *lifeblood of mathematics*. Both professional societies and individual scholars proclaim that curriculum materials should provide opportunities for students to learn these important mathematical processes." (s. 282).

Resultatene av denne analysen ble gitt i tabell 4.10 i forrige hovedkapittel. Figur 5.5 viser de samme resultatene i form av sektordiagram. Prosentene er avrundet til nærmeste heltall. Hver av de fire kategoriene i dette rammeverket har sin egen farge i disse sektordiagrammene, som er indikert til venstre for hvert diagram i denne figuren. Jeg vil, for oversiktens skyld, gi en kort påminnelse om kategoriene i dette rammeverket. Disse ble gjennomgått i mer detalj, og med eksempler, i teorikapitlet. Kategori G er matematiske bevis som går detaljert gjennom hvordan en kommer frem til det aktuelle resultatet. Kategori S er en begrunnelse av et resultat ved hjelp av et eller flere generiske eksempler. Kategori L er når beviset for et resultat overlates til eleven å finne ut av. Bevis av denne sistnevnte typen presenteres gjerne i form av en oppgave, eller det kan komme som en oppfordring i teksten at eleven skal eller bør undersøke det. Kategori N er når det ikke gis noen begrunnelse for et resultat. Hvis det derimot kom tydelig frem at beviset blir gjennomgått senere i boken, så valgte jeg å kategorisere det etter hvordan det blir gjort på dette senere stedet i boken.

I tabell 5.1 kan vi se resultatene av analysen av bevis delt opp i de to begrepene grenseverdi og derivasjon. Jeg valgte å gjøre denne oppdelingen fordi det var så mye variasjoner mellom de tre bøkene, slik det fremkommer av sektordiagrammene i figur 5.5. Ved å dele opp i de to begrepene, kom det noen tydeligere skiller frem. Samlet sett i de tre bøkene var 38 av bevisene (39.2%) knyttet til grenseverdi, og 59 bevis (60.8%) var knyttet til den deriverte. Denne overvekten av bevis knyttet til derivasjon gir mening da derivasjon er et større tema enn det grenseverdi er, både innenfor min avgrensning og i hele matematikk R1. Lengst til høyre i tabell 5.1 oppgis det hvor mange prosent av bevisene som er knyttet til henholdsvis grenseverdi og derivasjon, i hver enkelt bok. Her skiller boken Mønster R1 seg ut med å ha flest bevis totalt sett, og den har en 50/50-fordeling mellom antall bevis i de to temaene.



Figur 5.5: Sektordiagrammet viser antallet og andelen av hver beviskategori i de tre lærebøkene. Hver kategori har sin egen farge som er indikert til venstre for hvertdiagram.

Tabell 5.1: Resultatene fra analysen av bevis. Her er det delt opp etter de to begrepene grenseverdi og derivasjon.

				Grenseverdi			
		G	**S**	**L**	**N**	**Sum**	**Prosent**
Sinus R1	**Antall**	0	3	7	2	12	36,4%
	Prosent	0,0%	25,0%	58,3%	16,7%		
Matematikk R1	**Antall**	0	1	0	6	7	26,9%
	Prosent	0,0%	14,3%	0,0%	85,7%		
Mønster R1	**Antall**	1	13	0	5	19	50,0%
	Prosent	5,3%	68,4%	0,0%	26,3%		
				Den deriverte			
		G	**S**	**L**	**N**	**Sum**	
Sinus R1	**Antall**	15	0	5	1	21	63,6%
	Prosent	71,4%	0,0%	23,8%	4,8%		
Matematikk R1	**Antall**	6	1	8	4	19	73,1%
	Prosent	31,6%	5,3%	42,1%	21,1%		
Mønster R1	**Antall**	9	1	5	4	19	50,0%
	Prosent	47,4%	5,3%	26,3%	21,1%		

Begrepet grenseverdi har en overvekt av bevis i kategori S (68.4%) knyttet til seg i Mønster R1. Da blir de ulike regnereglene og resultatene begrunnet ved å vise at de stemmer i generiske tilfeller. I Sinus R1 er det en overvekt av bevis i kategori L (58.3%) knyttet til grenseverdi. I Matematikk R1 er det flest tilfeller av N (85.7%) når det gjelder grenseverdi. Da presenteres regnereglene uten noen begrunnelse. Her har de tre bøkene gjort helt forskjellige valg i hvordan de har fremstilt dette begrepet med sine tilhørende regneregler. Derivasjon er det begrepet som har flest bevis av typen G knyttet til seg. Vi skal se at regnereglene for derivasjon stort sett har bevis av typen G. Det er også flere tilfeller av kategorien L som er interessante.

Grenseverdi

Delkapittel 2.2 Grenseverdier i Mønster R1 er det første stedet i denne boken som tar for seg begrepet grenseverdi. Uten å gi dette begrepet noe mer meningsinnhold, starter kapitlet med en utforskningsdel. Her skal elevene undersøke funksjonen $f(x) = 1/x$ og se hva som skjer med funksjonsverdien når x-verdien vokser mot $+\infty$, avtar mot 0 ovenfra og vokser mot 0 nedenfra. Grafen til funksjonen er tegnet inn i margen av boken. I oppgaveteksten står det at elevene skal jobbe sammen to og to eller i grupper. Det står også at de skal bruke GeoGebra til denne undersøkelsen. Denne utforskningsdelen fungerer da som en motivasjon for begrepet grenseverdi, og den gir noen eksempler på hva slags problemstillinger en kan finne ut av med dette begrepet. Dette skjer uten at begrepet grenseverdi blir direkte nevnt i teksten. Deretter presenteres påstanden om at det ikke gir mening å dele på null. Det argumenteres for at $1/x$ har grenseverdi $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$. Jeg har kategorisert dette som et bevis av typen S, da det gis uformelle argumenter sammen med et bilde av grafen til denne funksjonen. Etter denne utforskningen, legges det mer meningsinnhold til begrepet grenseverdi. Forfatterene skriver at "Å regne med grenseverdier handler om å avgjøre hva som skjer med en funksjon når x nærmer seg bestemte verdier - og hva som skjer når x går mot uendelig til høyre eller venstre langs tallinja." (Kalvø mfl., 2021, s. 85).

Grenseverdi defineres i Mønster R1 ved å skrive at b er grenseverdien til $f(x)$ dersom $f(x)$ nærmer seg b når x nærmer seg a. Da ϵ-δ-måten å definere dette på er utenfor rammene av matematikk R1, vil denne definisjonen være den mest formelle måten å definere grenseverdier som elevene møter i denne læreboken. I et eksempel rett før denne definisjonen, får elevene imidlertid en uformell versjon av ϵ-δ-måten å tenke på knyttet til et generisk tilfelle. Der står det at "[...] vi kan få funksjonsverdien til f så nærme vi vil 0.5 hvis vi bare lar x være nærme nok 2." (Kalvø mfl., 2021, s. 85). Notasjonen $\lim_{x\to a} f(x) = b$ blir også innført her. Ensidige grenseverdier blir så motivert ved å se på et eksempel med funksjonen $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$. Grafen til denne funksjonen er vist i margen av boken, og det er da tydelig ut ifra dette bildet at grenseverdiene blir forskjellige om vi lar x nærme seg -1 nedenfra eller ovenfra.

Det er kun Sinus R1 som har bevis i kategorien L knyttet til grenseverdi. Et eksempel på dette er en diskusjonsoppgave i kapittel 2.1 Grenseverdier. Dette er da en oppgave som tar for seg grenseverdier av rasjonale funksjoner når $x \to \infty$. Her er vi gitt to polynomer $P(x)$ og $Q(x)$, og elevene skal undersøke grenseverdien $\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x)$. I tre ulike deloppgaver skal elevene komme med påstander om hva denne grenseverdien blir når $P(x)$ har lavere, samme og høyere grad enn $Q(x)$. Denne formen for utforskning, og oppfordring til å komme med en generaliserende påstand, har jeg kategorisert som et bevis av typen L. Bevis knyttet til grenseverdi, er preget av å være i kategori S, L eller N i de tre bøkene. Det er flere resultater som ikke har noe bevis eller begrunnelse i teksten i alle tre bøkene. Eleven må da stole på boken, eller på læreren, som en fagautoritet på at resultatet er gyldig. I lys av læreboken sin sentrale rolle i matematikkundervisningen, er det også mindre sannsynlig at resultater som ikke bevises i læreboken blir bevist i klasserommet (Thompson mfl., 2012; Bremler, 2003).

I både Matematikk R1 og Mønster R1 blir de fire regnereglene for grenseverdi presentert uten noe bevis, eller noen omtale av at bevisene finnes. Dermed blir disse resultatene kategorisert som N. Sinus R1 sin fremgangsmåte for å bevise de fire regnereglene for grenseverdier, er gitt som en utforskende oppgave. Grenseverdier introduseres som det første begrepet i kapittel 2 om grenseverdi og derivasjon. Det er i alt 12 resultater som er identifisert i tilknytning til begrepet grenseverdi i Sinus R1. Ingen av dem er i kategori G. Men her er det potensielt mange muligheter for å utforske gyldigheten av regnereglene i generiske eksempler. Begrepet grenseverdi introduseres uformelt i en egen utforskningsdel før delkapittel 2.1 om grenseverdi starter. Her står det at vi er interessert i hva som skjer med funksjonsverdien, $f(x)$, når x går mot en verdi a. Deretter følger et ferdig python-script i teksten som elevene kan bruke til å utforske hva som skjer med grenseverdien av to spesifikke funksjonsuttrykk hver for seg, som en sum, som et produkt og som en rasjonal funksjon.

I forbindelse med at programmering har kommet inn i skolematematikken, så er dette et passende eksempel på at numeriske metoder kan brukes til å konkretisere matematiske ideer som for eksempel grenseverdi. Formuleringen “Hvilken regel ser ut til å gjelde?” i denne utforskningsdelen, inviterer elevene til å se etter mønstre og foreslå hva som kan være en gyldig og generell regneregel. Jeg valgte å kategorisere begrunnelsene for alle fire regnereglene for grenseverdier i Sinus R1 som L. Delkapitel 2.1 Grenseverdier i Sinus R1, starter med setningen “Når vi arbeider med grenseverdier, kan vi bruke disse *grenseverdisetningene*.” (Oldervoll mfl., 2021, s. 52). Deretter presenteres de fire regnereglene for grenseverdier (likninger 2.5 og 2.6 side 30). Det er det ingen begrunnelse for dem etter at reglene presenteres. Det skrives heller ikke noe om at utforskningsdelen som kom rett før dette er bevis med konkrete eksempler. Det er ingen tekst som prøver å oppklare meningsinnholdet i hver av reglene, men i eksemplene som følger får elevene se fire ulike tilfeller på bruken av dem. Slik sett er det opp til eleven, enten alene med boken eller sammen med læreren i klasserommet, å utdype dette meningsinnholdet og forståelsen av regnereglene.

I Mønster R1 presenteres påstanden om at vi ikke kan definere det å dele på null. Dette begrunnes ved å se på hva som skjer med grenseverdien $\lim_{x\to 0^-} 1/x$. Grafen til $f(x) = 1/x$ er vist i margen, og det argumenteres med at å dele på null ikke gir mening siden denne grenseverdien er ubegrenset og dermed udefinert. Siden dette er en begrunnelse med spesifikk funksjon, vil jeg kategorisere denne begrunnelsen som S. Null i nevner er markert som et viktig resultat med egen blå ramme. Det står at hvis $\lim_{x\to a} p(x) \neq 0$ og $\lim_{x\to a} q(x) = 0$, så er grenseverdien $\lim_{x\to a} p(x)/q(x)$ enten lik ∞ eller -∞. Begrunnelsen for dette resultatet er gitt, som beskrevet ovenfor, med eksempler. Det klassifiseres dermed som S. Grenseverdien til a^x, for ulike verdier av a, når $x \to \infty$ er markert som et viktig resultat i boken Mønster R1. Det spesifiseres med konkrete eksempler. Boken tar for seg 2^x (a>1) sammen med grafen til funksjonen og argumenterer for at den er ubegrenset. Den samme fremgangsmåten gjøres for 0.2^x (a<1), hvor det argumenteres ut fra grafen av den må gå mot null. Disse begrunnelsene kategoriseres dermed som S.

Definisjonen av den deriverte

Fremstillingen av definisjonen av den deriverte, anser jeg som såpass viktig at jeg har valgt å kategorisere den som om det var et bevis. I Sinus R1 blir definisjonen av den deriverte gjennomgått i kapittel 2.6 Vekstfart som grenseverdi. På dette stedet i boken, er begrepene vekstfart og gjennomsnittlig vekstfart allerede etablert. Ved hjelp av disse to begrepene, presenteres den formelle definisjonen av den deriverte som en grenseverdi. Dette skjer da sammen med en visuell fremstilling av en graf, og hvordan sekanten gjennom to punkt vil gå mot tangenten i dette ene punktet når $\Delta x \to 0$. Det er også to beskrivelser i teksten av hvordan vi kan tolke $f'(x)$. Det står at “$f'(x)$ gir vekstfarten til f i punktet $(x, f(x))$” og at “$f'(x)$ gir stigningstallet for tangenten til grafen i punktet $(x, f(x))$” (Oldervoll mfl., 2021, s. 81). Matematikk R1 og Mønster R1 har en tilsvarende grundig gjennomgang av definisjonen av det deriverte i henholdsvis delkapittel 3C Den algebraiske definisjonen av den deriverte og 3.2 Deriverbarhet. Også her er det en kombinasjon av argumenter og en visuell fremstilling slik jeg beskrev for Sinus R1. For å få en relasjonell forståelse av et begrep, er det viktig å mestre ulike måter å tolke og representere et begrep på (Skemp, 1976). Det at bøkene gir flere måter å tolke og representere den deriverte på, vil kunne bidra til dette. I en relasjonell forståelse av et begrep, er det også viktig å kunne veksle på og se hvilken representasjon og tolkning som er mest hensiktsmessig i ulike situasjoner. Jeg har valgt å kategorisere begrunnelsen og fremstillingen av denne definisjonen som G i alle tre bøkene, på grunn av den grundige gjennomgangen med ulike representasjoner i form av algebra, tekst og bilde.

Den deriverte av polynomer

Delkapittel 2.8 Derivasjon av polynomer i Sinus R1 presenterer regnereglene for derivasjon av polynomer. De første resultatene er $(c)' = 0$, $(ax + b)' = a$ og $(x^n)' = nx^{n-1}$ der $x \in \mathbb{N}$ og $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alle disse er overlatt til eleven å bevise gjennom oppgaver. De kategoriseres dermed som L. De to førstnevnte er gitt som oppgaver, hvor eleven blir bedt om å bruke definisjonen av den deriverte for å bevise dem. Beviset for regneregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$ er gitt som en veiledet og stegvis utforskningsoppgave med elleve delspørsmål. Dette blir da også et bevis i kategori L. Eleven blir her bedt om å se etter et mønstre i hva den deriverte av x^2, x^3, x^4 og x^7 blir. Fremgangsmåten er gitt i oppgaveteksten. Det står at elevene skal bruke definisjonen av den deriverte og Pascals trekant (binomialformelen) til å finne ut av dette. Deretter spør boken eleven hva vedkommende tror det generelle resultatet for den deriverte av x^n blir. Beviset blir ikke fullt ut formelt med denne fremgangsmåten. Men til tross for dette, vil nok denne begrunnelsen kunne virke overbevisende for elevene om at $(x^n)' = nx^{n-1}$ er en gyldig sammenheng for den deriverte av x^n. Beviset er kategorisert som L.

Et mer formelt induksjonsbevis, kombinert med bruk av produktregelen, blir gjort senere i delkapittel 4.3 Produktregelen for derivasjon i Sinus R1. Da er produktregelen etablert som et resultat. Beviset for $(x^n)'$ gjøres som en utforskende del hvor eleven blir ledet gjennom alle stegene i induksjonsbeviset. Dette er også en fin mulighet til å se hvordan et resultat kan brukes til å bevise et nytt resultat. Dette vil kunne knytte relasjoner mellom ulike begreper og bidra til en relasjonell forståelse. Ordet induksjonsbevis blir ikke brukt i denne oppgaven, muligens da den formelle gjenomgangen av induksjonsbevis er en del av matematikk R2. Til slutt i delkapittel 2.8 i Sinus R1, gis det et formelt bevis av regnereglene for den deriverte av en sum, og for at vi kan sette konstanter utenfor derivasjonsoperatoren. Begge disse bevisene utføres ved hjelp av definisjonen av den deriverte, og de er dermed i kategorien G.

I Matematikk R1 møter vi beviset for $(x^n)' = nx^{n-1}$, der $n \in \mathbb{N}$, i en oppgave kalt "Utforsk" i kapittel 3A Funksjonsuttrykket til den deriverte. Beviset er da av typen L. Denne oppgaven har 8 deloppgaver, og fremgangsmåten ligner på hvordan det ble lagt opp i Sinus R1. Eleven skal her bruke CAS i GeoGebra til å finne den deriverte av x, x^2, x^3, og x^4. Deretter blir eleven bedt om å bruke resultatene av dette til å formulere en regneregel for $(x^n)'$. I kapittel 3B Noen Derivasjonsregler, blir følgende regneregler presentert uten noe bevis: $k' = 0$, $(k \cdot u(x))' = k' \cdot u'(x)$ og $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$. I kapittel 3F Kjerneregelen, blir $(x^n)' = nx^{n-1}$, der $x > 0$ og $n \in \mathbb{R}$, bevist gjennom en oppgave. Her skal eleven bruke kjerneregelen for derivasjon, potensregneregler og $x = e^{\ln x}$ til å vise at $(x^n)' = nx^{n-1}$ er gyldig. I Mønster R1 kapittel 3.3 Derivasjonsregler, blir regnereglene som har blitt omtalt i dette avsnittet kun presentert, uten at det gis noen form for bevis av dem. Dermed blir de kategorisert som N.

Bremler (2003) sammenlignet introduksjonen av den deriverte i svenske lærebøker i perioden 1967 til 2002. Han argumenterte for, og tok utgangspunkt i, læreboken sin sentrale rolle i skolen. Målet med studien var å se på behandlingen av den deriverte av $f(x) = x^n$, og hvordan den forandret seg over denne tidsperioden. Han så på bevis, eller fraværet av bevis, av regneregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$, og oppgaver knyttet til denne regneregelen. Resultatene ble delt opp i delperiodene 1967-1993, 1967-2002 og 1994-2002. Andelen av lærebøkene som gjennomfører et bevis for den nevnte regnerelen endret seg over disse periodene fra 32% til 23% og til 0% i den siste perioden. De to andre kategoriene, som da utgjør de resterende prosentene i hver periode, er enten at beviset ikke blir omtalt eller at beviset blir omtalt uten gjennomføring. Bremler skriver at "Isället för att välja en svår väg *igenom* matematiken så väljer dessa böcker at "sväva förbi ovanför". Det kan tyckas vara en smidig lösning med leder ofelbart till att eleverna missar en viktig aspekt av matematiken." (Bremler, 2003, s.

83). Ingen av bøkene jeg har sett på beviser formelen for den deriverte av x^n med et generelt bevis. Det er bare Mønster R1 som presenterer dette resultatet uten noe bevis. Sinus R1 og Matematikk R1 har valgt å gi beviset som en utforskende oppgave, som beskrevet ovenfor. De to fremgangsmåtene er ulike i disse to bøkene, men begge variantene har en oppbygning som i et induksjonsbevis.

Deriverbarhet impliserer kontinuitet

Alle tre bøkene presenterer påstanden om at deriverbarhet i et punkt impliserer kontinuitet i dette punktet. Sinus R1 og Matematikk R1 gir et bevis av type G, mens Mønster R1 bare presenterer resultatet uten et bevis. På dette stedet i Sinus R1 har kontinuitet i et punkt, $x = a$, blitt definert som at hvis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, så er $f(x)$ kontinuerlig i $x = a$. For dette resultatet, gis det et bevis ved hjelp av denne nevnte definisjonen av kontinuitet og regnereglene for grenseverdier. Alle tre lærebøkene beviser påstanden om at kontinuitet ikke generelt sett impliserer deriverbarhet ved å gi et moteksempel. Da ett moteksempel er nok til å avvise at kontinuitet impliserer deriverbarhet generelt sett, så mener jeg at dette også kvalifiserer til å være bevis i kategori G.

Produkt-, brøk- og kjerneregelen

Sinus R1 gir beviset for produktregelen som en veiledet og stegvis utforskningsoppgave. I denne oppgaven skal da eleven knytte sammen detaljene og komme frem til den endelige konklusjonen. Matematikk R1 og Mønster R1 har valgt å gi bevis av typen G. Her blir definisjonen av den deriverte brukt, og alle detaljene blir skrevet ut for eleven. Når det gjelder brøkregelen, velger Sinus R1 å gi et bevis av typen G. Matematikk R1 og Mønster R1 velger på sin side å gi det som en oppgave med klare retningslinjer om fremgangsmåten. Både Sinus R1 og Matematikk R1, vier et helt delkapittel til kjerneregelen. Mønster R1 har inkludert kjerneregelen i kapittel 3.3 Derivasjonsregler, sammen med produkt- og brøkregelen. Sinus R1 og Mønster R1 gir bevis av typen G, mens Matematikk R1 kun presenterer resultatet som en regel uten bevis. Det etterfølges av mange eksempler og oppgaver, men da det ikke skrives noe spesifikt om at disse viser at kjerneregelen fungerer i generiske tilfeller så velger jeg å kategorisere dette som N.

Andre sine resultater

Nordli (2017) analyserte i sin masteroppgave 120 bevis innenfor temaet algebra, og 115 bevis innenfor temaet funksjoner i matematikk R1 under læreplanen LK06. Lærebøkene som ble analysert, var Sinus R1, Matematikk R1 og Sigma R1. Den sistnevnte er læreboken fra Gyldendal forlag, som etter LK20 fikk navnet Mønster R1. Rammeverket for denne analysen, var Nordli sin egenkomponerte sammensetning av rammeverket til Otten mfl. (2014) og Thompson mfl. (2012). Her følger en kort beskrivelse av kategoriene, og hva jeg mener dette tilsvarer i rammeverket som jeg bruker. *Deduktiv begrunnelse* er å bruke matematisk logikk for å vise et resultat, og det svarer slik sett til kategorien G. *Empirisk begrunnelse* er å vise at et resultat stemmer i spesifikke eksempler. Dette er da som kategorien S hos Thompson mfl. *Teori som eleven må fullføre* (også kalt for *Ikke fullført*) er da som kategorien L i min analyse, hvor eleven må fullføre beviset. Til slutt svarer kategorien *Ingen begrunnelse* til beskrivelsen av kategorien N. Jeg har valgt å samle resultatene fra Nordli (2017) i en egenlagd tabell, slik at de får samme form som tabell 4.10 med mine resultater. Nordli sine resultater, er vist i tabell 5.2.

Dette er da to andre matematiske temaer, og det er en annen læreplan enn hva jeg har tatt for meg. Det gjør at jeg vil være forsiktig med å sammenligne Nordli sine resultater for mye

Tabell 5.2: Nordli (2017) sine resultater av bevis innenfor temaene algebra og funksjoner i matematikk R1 under LK06.

Tema Algebra		Deduktiv	Empirisk	Ikke fullført	Ingen begrunnelse	Sum
Sinus R1	**Antall**	16	25	0	4	45
	Prosent	36%	56%	0%	9%	
Matematikk R1	**Antall**	12	12	5	14	43
	Prosent	28%	28%	12%	33%	
Sigma R1	**Antall**	7	13	0	12	32
	Prosent	22%	41%	0%	38%	
Tema Funksjoner		**Deduktiv**	**Empirisk**	**Ikke fullført**	**Ingen begrunnelse**	**Sum**
Sinus R1	**Antall**	18	24	0	6	48
	Prosent	40%	53%	0%	13%	
Matematikk R1	**Antall**	15	11	7	10	43
	Prosent	35%	26%	16%	23%	
Sigma R1	**Antall**	9	11	0	4	24
	Prosent	28%	34%	0%	13%	

med mine resultater. Resultatene hennes viser en overvekt av bevis i kategoriene Deduktiv (G) og Empirisk (S). Hvis vi kun ser på disse to kategoriene, så er det også en tendens til at det er flere bevis av typen Empirisk enn Deduktiv. For begge de to temaene Nordli har sett på, så er det kun Matematikk R1 som har bevis av typen Ikke fullført (L). Alle tre bøkene har mellom 4 og 14 tilfeller hvor resultater blir gitt uten begrunnelse (N). Nordli sin analyse ble gjort på bøkene knyttet til LK06. Det kunne vært interessant å undersøke nærmere om mengden av bevis som elevene må fullføre selv har økt fra LK06 til LK20 i matematikk R1. Jeg ikke har noe grunnlag å påstå dette, men noterer det som et spørsmål jeg mener det kunne vært interessant å vite mer om. Det er fordi LK20 i større grad vektlegger utforskning og dybdelæring.

Det å undersøke et bevis på egenhånd kan bidra til en relasjonell forståelse av den aktuelle regneregelen eller påstanden. Det å undersøke slik bevis sammen i en gruppe kan også bidra til en relasjonell forståelse da elevene må diskutere og argumentere for sitt syn. I teorikapitlet ble slike matematiske diskusjoner fremhevet som en viktig faktor for utvikling av en begrepsmessig forståelse. (Nosrati og Wæge, 2015). Det er viktig å la elevene få muligheter til å forstå gyldigheten av et resultat ved at de får muligheten til å studere dets matematiske bevis (Stylianides, 2009). Alternativt, som vi har sett flere eksempler på i min analyse, så kan elevene få muligheter til å fullføre bevis gjennom oppgaver. Disse oppgavene er gjerne delt opp i deloppgaver hvor eleven veiledes frem til sluttresultater. Slike muligheter vil også bidra til at elevene kan jobbe mot en relasjonell forståelse av begreper og regneregler, og ikke bare en instrumentell forståelse. Bevis kan også være viktige for å knytte relasjoner mellom begreper og resultater, fordi gyldigheten av et bevis gjerne avhenger av gyldigheten til andre resultater.

Kapittel 6

Konklusjon

6.1 Oppsummering

I denne masteroppgaven har jeg undersøkt hvordan de tre nye lærebøkene fra Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, legger til rette for at elevene skal kunne oppnå et utvalg av kompetansemålene som er knyttet til grenseverdi og derivasjon. Jeg valgte ut den første delen av ett kompetansemål som var knyttet til å forstå begrepene grenseverdi og derivasjon, og jeg valgte ut deler av to ulike kompetansemål som sier at elevene skal bruke utforskning til å bestemme grenseverdier og derivasjon av funksjoner. Jeg formulerte deretter de fire følgende delspørsmålene:

- Hva slags kognitive krav stilles det i oppgavene?
- Hvilke læringsmuligheter finnes det i oppgavene?
- Hvordan legger lærebøkene til rette for muligheter til matematisk utforskning?
- Hvordan begrunner eller beviser lærebøkene påstander og regneregler?

For å svare på forskningsspørsmålene, analyserte jeg oppgavene med tre ulike rammeverk og bevisene med ett rammeverk. Jeg så på kognitive krav i oppgaver med Stein og Smith sitt rammeverk MTF. Det var ingen oppgaver direkte knyttet til grenseverdi og derivasjon på det laveste kognitive nivået (LavH). Jeg fant at det var en svært høy andel av prosedyreoppgaver (LavP og HøyP). MTF skiller på lave og høye kognitive krav innenfor prosedyreoppgaver. Sinus R1 og Mønster R1 hadde flest oppgaver på lavt nivå (LavP), og Matematikk R1 hadde flest oppgaver på høyt nivå (HøyP). En observasjon som ble gjort i alle tre bøkene, var at mange oppgaver kunne havnet på et høyere kognitivt nivå med små endringer. Dette var da endringer som for eksempel at oppgavene skulle gjøres både med og uten hjelpemidler, og at eleven i større grad måtte begrunne eller forklare svaret. Mengden oppgaver på det høyeste kognitive nivået, var svært lav i alle tre bøkene.

Jeg så på læringsmuligheter i oppgaver med Ronda og Adler sitt rammeverk MDITx. Hovedfunnet her var at flertallet av oppgavene innenfor de ulike læringsobjektene var knyttet til det aktuelle læringsobjektet. Et flertall av læringsobjektene hadde også oppgaver hvor eleven måtte ta stilling til valg av fremgangsmåte, og hvor oppgavene gav muligheter for å knytte relasjoner mellom ulike begreper. Jeg brukte Skovmose sitt rammeverk for å se på undersøkende matematikkoppgaver. Alle tre bøkene brukte utforskende opplegg som en måte å introdusere mange begreper på før de ble ordentlig behandlet i boken. Underveis i delkapitlene, var det også flere oppgaver med overskrift som "Diskuter", "Reflekter" og "Snakk", hvor elevene blir oppfordret til å snakke sammen om et gitt spørsmål. Slike matematiske diskusjoner ble fremhevet i teorikapitlet som en viktig faktor for utvikling av en relasjonell forståelse. Et klart flertall av oppgavene, var innenfor oppgaveparadigmet og underkategorien ren matematikk. Blant de undersøkende oppgavene var flertallet av typen ren matematikk. Dette gir mening da avgrensningen min handler om den teoritunge delen knyttet til grenseverdi, derivasjon og deres viktigste regneregler. Jeg ser for meg at dersom jeg hadde inkludert flere anvendelser av disse to begrepene, så ville det vært flere oppgaver med referanser til virkeligheten. Jeg har ikke noe grunnlag for å si noe om dette ville påvirket antall utforskende oppgaver.

Til slutt analyserte jeg bevis av resultater og påstander med Thompson mfl. (2012) sitt rammeverk. Bevis knyttet til begrepet grenseverdi og dets regneregler ble gjort på ulike måter i alle tre bøkene. Det var en overvekt av bevis i kategori S i Mønster R1, flest i kategori L i Sinus R1, og i Matematikk R1 var det flest tilfeller av N. Når det gjelder bevis knyttet til den deriverte sammen med sine viktigste regneregler, var det en overvekt av generelle bevis i Sinus R1 og Mønster R1. Matematikk R1 skilte seg ut her ved å ha flest bevis i kategori L knyttet til den deriverte. I alle tre bøkene var det også mange interessante oppgaver, hvor bevis var overlatt til eleven å finne ut av.

6.2 Implikasjoner for læreren

Jeg ønsker her å trekke frem noen implikasjoner av funnene mine som jeg mener kan være av betydning for faglæreren og undervisningsarbeidet knyttet til grenseverdi og derivasjon i matematikk R1. Jeg vil igjen trekke frem betydningen av læreren med sitatet: "Den viktigste enkeltfaktoren for elevers læringsutbytte er kvaliteten på lærerens undervisning." (Svingen og Gilje, 2018, s. 12). Det er viktig at læreren er i stand til å vurdere lærebøkene og ulike digitale læringsressurser som er tilgjengelige. Det kan være at den valgte læreboken er god på noen områder, og at den er mangelfull på andre. Da er det lærerens oppgave å vurdere hvordan lærestoffet skal fremstilles for elevene i klasserommet, og hvordan de skal jobbe med det.

Det er ikke alle kompetansemål som sier at elevene skal forstå det aktuelle begrepet. Men i denne masteroppgave valgte jeg ut deler av kompetansemål med dette som et fokus. Jeg har beskrevet flere ulike måter å jobbe utforskende på, og måter å jobbe på som kan bidra til elevenes relasjonelle forståelse. Når elevene skal vurderes i oppnåelse av et slikt kompetansemål, er det viktig at læreren har gitt elevene nok og varierte muligheter til å jobbe med oppgaver med høye kognitive krav. Det å oppleve motstand og å streve med oppgaver, har blitt trukket frem som en viktig del av det å jobbe mot en relasjonell forståelse. Tilsvarende er det for kompetansemål hvor det er beskrevet at utforskende metoder skal være en del av hvordan elevene jobber med det aktuelle begrepet. Det å la gruppearbeid og faglige diskusjoner blant elevene være en del av måtene det jobbes på, ble også trukket frem som en viktig del av det å oppnå en relasjonell forståelse. Det er også viktig at læreren kan finne eller lage gode utforskende opplegg der bøkene mangler det på et tema.

Læreren har en viktig jobb i å kritisk vurdere oppgaver som velges ut til elevene, og eventuelt modifisere dem slik at oppgavene blir enda bedre. Det er også viktig å se på om det er nok oppgaver til et læringsobjekt, om de kognitive kravene er høye nok og om det er nok muligheter til at elevene kan jobbe utforskende. Blant de tre bøkene jeg har analysert, er det flere ulike måter å begrunne de samme regnereglene og påstander på. Det er viktig at læreren er trygg nok til å kunne supplere elevene med bevis der det mangler, og hvor det er hensiktsmessig å jobbe med dem. Alle resultatene i lærebøkene har en formell matematisk begrunnelse, men det er ikke alltid det er på et nivå som elevene er i stand til å forstå. Hvis det er utenfor nivået i matematikk R1 til å forstå et bevis, mener jeg det er viktig at læreren opplyser om dette i stedet for å gå forbi dette i stillhet. Alternativer til slike vanskelige bevis er å utforske begrunnelser med generiske tilfeller og peke ut det som er sentrale argumenter i det generelle beviset.

6.3 Forslag til videre forskning

Underveis i arbeidet med denne masteroppgaven har jeg gjort meg noen tanker om hva som kunne vært interessant å undersøke videre. Jeg ønsker her å presentere noen slike forslag.

Anda (2020) analyserte lærebøker i ungdomskolen i sin masteroppgave. Han sammenlignet kognitive krav i et utvalg av lærebøker skrevet for LK06 med et utvalg for LK20. Dette hadde også vært interessant å gjøre i matematikk R1. En slik studie kan da handle om å sammenligne lærebøkene skrevet for LK06 med de nye bøkene skrevet for LK20 fra de samme forlagene. Dette kan for eksempel være en fortsettelse av arbeidet jeg har gjort her i matematikk R1, og da med fokus behandlingen av grenseverdier og derivasjon i lys av de to læreplanene LK06 og LK20. Jeg mener også at det ville vært interessant å gjøre dette med andre temaer i matematikk R1, eller for et annet matematikkfag i videregående skole. En slik studie vil i større grad kunne se på hva slags endringer som har skjedd i læreboken i forbindelse med fornyelsen av læreplanen. Det ville også vært interessant å her bruke kvantitative metoder og hypotesetester for å kunne tallfeste om det er grunnlag for å påstå om det har skjedd signifikante endringer.

Lærebokforfatterene må nødvendigvis foreta mange valg underveis i skriveprosessen. Oskarsdottir (2016) gjorde en studie hvor hun gjennomførte intervjuer med et utvalg på tre lærebokforfattere. Hun var interessert i hva disse forfatterene tenkte om bevis sin rolle i matematikk R1. Dette ble gjort mens læreplanen LK06 var gjeldende. Det kunne vært interessant med en tilsvarende studie hvor et utvalg lærebokforfattere blir intervjuet, og hvor en går mer i dybden på hvilken valg som har blitt gjort for å tilpasse læreboken til den nye læreplanen LK20. Et slikt intervju kan ta for seg bevisets rolle i matematikk R1 i lys av den nye læreplanen. Det er også mulig å se for eksempel på hva forfatterene tenker om hvordan læreboken kan legge til rette for at elevene skal oppnå kompetansemål knyttet til forståelse og/eller utforskning.

Det kunne også vært interessant å se hvordan lærebøkene legger til rette for at elevene skal oppnå kompetansemålet som er knyttet til vektorregning, da dette er et tema elevene møter for aller første gang i matematikk R1. Dette kompetansemålet er formulert som at eleven skal kunne "Forstå begrepet vektor og regneregler for vektorer i planet, og bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet". Slik sett kan en også her bruke Stein og Smith sitt rammeverket MTF om kognitive krav i oppgaver, og rammeverket til Thompson mfl. for å kategorisere bevisene.

Referanser

Adler, J. & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237–254.

Aksdal, T. (2016). *Alternative læringsmåter for derivasjon i R1-en komparativ analyse* (Masteroppgave). The University of Bergen.

Anda, S. (2020). *Læringsmuligheter i matematiske lærebøker–før og etter fagfornyelsen.* (Masteroppgave). uis.

Bergwall, A. (2017). Conceptualizing reasoning-and-proving opportunities in textbook expositions: Cases from secondary calculus. *CERME 10*.

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching.* John Wiley & Sons.

Borgan, Ø., Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2021). *Matematikk R1.* Aschehoug.

Borgersen, H. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *2*(2), 6–35.

Bremler, N. (2003). *Matteboken som redskap och aktör: en studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002.* Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm.

Bryman, A. (2012). Social research methods 4th ed.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117–151.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375–402.

Eklund, L. (2021). Derivata i matematikläroböcker för gymnasiet–en läromedelsanalys utifrån tre centrala aspekter.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of advanced nursing*, *62*(1), 107–115.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633–646.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for research in mathematics education*, *35*(4), 258–291.

Grevholm, B. (2011). Network for research on mathematics textbooks in the Nordic countries. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 91–102.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). Rika matematiska problem. *Stockholm: Liber.*

Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till. *Nämnaren 32 (1)*, 36–41.

Jaworski, B. & Goodchild, S. (2006). Inquiry community in an activity theory frame. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 353–360.

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K. & Weider, Ø. J. (2021). *Mønster R1*. Gyldendal.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2002). Adding it up: Helping children learn mathematics. *The National Academies Press. The book is available free on the Web. Accessed*, *2*(4), 04.

Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra? *Doctoral dissertations at University of Agder*.

Krippendorff, K. (1980). Validity in content analysis.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplan i matematikk R1 (REA3022). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.* https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r1 (Hentet 5.3.2022)

Kunnskapsdepartementet. (2015a). *En fornyelse av Kunnskapsløftet.* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/ (Hentet 1.3.2022)

Kunnskapsdepartementet. (2015b). *NOU 2015:8 Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser.*

Kunnskapsdepartementet. (2015c). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015-2019).* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/tett-pa-realfag/id2435042/ (Hentet 1.3.2022)

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper*. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/ (Hentet 7.09.2022)

Kunnskapsdepartementet. (2021). *Læreplan i matematikk R1 (REA3056). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.* https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv293 (Hentet 5.3.2022)

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 129–156.

Liljedahl, P. (2018). On the edges of flow: Student problem-solving behavior. *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving* (s. 505–524). Springer.

Lindstrøm, T. L. (2017). *Spaces: An Introduction to Real Analysis* (Bd. 29). American Mathematical Soc.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T. & Threlfall, J. (2009). Open-start mathematics problems: an approach to assessing problem solving. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *28*(1), 21–31.

Myge, H. (2021). *Heuristiske tilnærminger og kognitive krav i lærebøker laget for faget Matematikk 1T* (Masteroppgave). uis.

Njølstad, H. L. (2019). *Kontinuitetsbegrepet: En lærebokanalyse om behandlingen av kontinuitet i videregående skole* (Masteroppgave). Universitetet i Agder; University of Agder.

Nordli, S. S. (2017). *En komparativ studie av tre lærebøkers presentasjoner av matematisk innhold og deres krav til elevene* (Masteroppgave). UiT Norges arktiske universitet.

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Hentet*, *10*, 2017.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Gustafsson, E. & Jacobsen, R. B. (2021). *Sinus matematikk R1*. Cappelen Damm.

Oskarsdottir, V. (2016). Bevis i lærebøker for R1. En kvalitativ studie av tre lærebokforfatteres didaktiske refleksjoner.

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M. & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(1), 51–79.

Pehkonen, E. (1995). On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *3*(4), 43–57.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 247–266.

Ronda, E. & Adler, J. (2017). Mining mathematics in textbook lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1097–1114.

Ross, K. A. (2013). *Elementary analysis*. Springer.

Schubring, G. & Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: An overview. *ZDM*, *50*(5), 765–771.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sidenvall, J. (2019). *Lösa problem: om elevers förutsättningar att lösa problem och hur lärare kan stödja processen* (Doktoravhandling). Umeå universitet.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. *Dalvang & V. Rohde, red: Matematikk for alle. Rapport for LAMIS*, *1*.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344–350.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(4), 268–275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258–288.

Svingen, O. & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk*. https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf (Hentet 23.10.2021)

Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253–295.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in educational evaluation*, *31*(4), 315–327.

Utdanningsdirektoratet. (2018). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R)*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT03-02.pdf?lang=nob (Hentet 23.01.2022)

Warshauer, H. K. (2015). Strategies to support productive struggle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(7), 390–393.

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere.

Ärlebäck, J. B. & Bergsten, C. (2013). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (s. 597–609). Springer.

Tillegg A

Læreplan matematikk R1 LK20

Kompetansemål etter matematikk R1
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- planlegge og gjennomføre et selvstendig arbeid med reelle datasett knyttet til naturvitenskapelige temaer og forhold, og analysere og presentere funn
- forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer
- bruke ulike strategier for å utforske og bestemme grenseverdier til funksjoner, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier
- bestemme den deriverte i et punkt geometrisk, algebraisk og ved numeriske metoder, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter
- analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon
- anvende derivasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett
- utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger
- modellere og analysere eksponentiell og logistisk vekst i reelle datasett
- gjøre rede for og argumentere for om en funksjon er kontinuerlig eller diskontinuerlig i et punkt i et definisjonsområde, og gi eksempler på anvendelser av diskontinuerlige funksjoner
- utforske , analysere og derivere ulike funksjoner og deres omvendte funksjoner, og gjøre rede for egenskaper til og sammenhenger mellom slike funksjoner
- anvende parameterframstillinger til linjer og bruke parameterframstillinger til å løse naturvitenskapelige problemer
- forstå begrepet vektor og regneregler for vektorer i planet, og bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet

Tillegg B

Læreplan matematikk R1 LK06

Geometri
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bruke linjer og sirkler som geometriske steder sammen med formlikhet og setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger
- utføre og analysere konstruksjoner definert av rette linjer, trekanter og sirkler i planet, med og uten bruk av dynamisk programvare
- utlede og bruke skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant
- gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras' setning, både matematisk og kulturhistorisk
- regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform
- beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer

Algebra
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- faktorisere polynomer ved hjelp av nullpunkter og polynomdivisjon, og bruke dette til å løse likninger og ulikheter med polynomer og rasjonale uttrykk
- omforme og forenkle sammensatte rasjonale funksjoner og andre symbolske uttrykk med og uten bruk av digitale hjelpemidler
- utlede de grunnleggende regnereglene for logaritmer, og bruke dem og potensreglene til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter
- gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, og gjennomføre direkte og kontrapositive bevis

Funksjoner
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare
- bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene
- bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner
- tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen
- finne likningen for horisontale og vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner og tegne asymptotene
- bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon

Kombinatorikk og sannsynlighet
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre rede for begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet, og utlede og anvende Bayes' setning på to hendelser
- drøfte kombinatoriske problemer knyttet til ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, og bruke dette til å utlede regler for beregning av sannsynlighet

Tillegg C

The Task Analysis Guide

Lower-Level Demands	Higher-Level Demands
Memorization • involve either reproducing previously learned facts, rules, formulae or definitions OR committing facts, rules, formulae or definitions to memory. • cannot be solved using procedures because a procedure does not exist or because the time frame in which the task is being completed is too short to use a procedure. • are not ambiguous. Such tasks involve exact reproduction of previously-seen material and what is to be reproduced is clearly and directly stated. • have no connection to the concepts or meaning that underlie the facts, rules, formulae or definitions being learned or reproduced.	Procedures With Connections • focus students' attention on the use of procedures for the purpose of developing deeper levels of understanding of mathematical concepts and ideas. • suggest pathways to follow (explicitly or implicitly) that are broad general procedures that have close connections to underlying conceptual ideas as opposed to narrow algorithms that are opaque with respect to underlying concepts. • usually are represented in multiple ways (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations). Making connections among multiple representations helps to develop meaning. • require some degree of cognitive effort. Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with the conceptual ideas that underlie the procedures in order to successfully complete the task and develop understanding.
Procedures Without Connections • are algorithmic. Use of the procedure is either specifically called for or its use is evident based on prior instruction, experience, or placement of the task. • require limited cognitive demand for successful completion. There is little ambiguity about what needs to be done and how to do it. • have no connection to the concepts or meaning that underlie the procedure being used. • are focused on producing correct answers rather than developing mathematical understanding. • require no explanations or explanations that focuses solely on describing the procedure that was used.	Doing Mathematics • require complex and non-algorithmic thinking (i.e., there is not a predictable, well-rehearsed approach or pathway explicitly suggested by the task, task instructions, or a worked-out example). • require students to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships. • demand self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes. • require students to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task. • require students to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions. • require considerable cognitive effort and may involve some level of anxiety for the student due to the unpredictable nature of the solution process required.

Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000, p.16

Tillegg D

Innholdsfortegnelser til relevante hovedkapitler

Tabell D.1: Innholdsfortegnelse til de relevante kapitlene i Matematikk R1.

Tabell D.2: Innholdsfortegnelse til de relevante kapitlene i Mønster R1.

Mønster R1 Innhold	
Kapittel 2 - Funksjoner	**Side**
2.1 Omvendte Funksjoner	66
2.2 Grenseverdier	84
2.3 Grenseverdier når x går mot uendelig	93
2.4 Kontinuitet	101
2.5 Asymptoter	108
Mønster og oversikt	124
Test deg selv	126
Oppgaver	128
Kapittel 3 - Derivasjon	**Side**
3.1 Vekstfart og den deriverte	140
3.2 Deriverbarhet	150
3.3 Derivasjonsregler	160
3.4 Derivasjon av omvendte funksjoner	177
3.5 Numerisk derivasjon	182
Mønster og oversikt	193
Test deg selv	195
Oppgaver	198

Tabell D.3: Innholdsfortegnelse til de relevante kapitlene i Sinus R1.