# En smågruppes arbeid med problemløsning i videregående skole

En studie av gruppas bruk av strategier og appropriering av ulike medierende verktøy i problemløsningsfasen

FORFATTER
Mona Emanuelsen

VEILEDER
Martin Carlsen

**Universitetet i Agder, 2023**
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematikk

Master

UiA Universitetet i Agder

Master

# Forord

30 år etter at jeg begynte på lærerutdanningen ved Høgskolen i Agder, ble det endelig min tur til å levere en masteroppgave i matematikkdidaktikk. I årene imellom har jeg jobbet 24 år som lærer, ti år i grunnskolen og 14 år i videregående skole. I tillegg har jeg fått to barn som nå er voksne, og selv studerer for å bli lærere. Da de begynte å studere, innså jeg at det var på tide at også jeg fullførte drømmen min om en mastergrad. Slik startet det som skulle bli fire lærerike, men svært krevende år. Først to år på NTNU med matematikkfag, og nå de to siste årene på masterstudiet ved Universitetet i Agder. Alt samtidig som jeg har jobbet fullt som lærer i videregående skole. Det har absolutt vært tider hvor det har vært over gjennomsnittet krevende, men jeg har aldri mistet motivasjonen eller lysten til å fortsette. Den aller største grunnen til det, er at det har vært utrolig spennende, gøy og nyttig å lære så mye nytt!

Jeg stortrives i jobben min som matematikklærer, og jeg brenner for å hele tiden utvikle meg som pedagog og fagperson. Det første semesteret ved UiA hadde vi emnet Arbeidsmåter i matematikk, og måten vi her jobbet med problemløsning, engasjerte meg spesielt. Det var så gøy! Jeg ville jobbe sånn med mine egne elever. Samtidig kom den nye læreplanen hvor utforskende arbeid og dybdelæring var i fokus. Jeg var aldri i tvil om hva jeg ville fordype meg i gjennom masterarbeidet mitt! Jeg har alltid vært opptatt av at elevene mine ser at matematikk er mer enn et skolefag, og problemløsning er absolutt en brobygger mellom det de lærer på skolen og hverdagsmatematikken. Nå gleder jeg meg til å fokusere fullt på jobben min som lærer igjen, og å sette alle planene og idéene mine ut i livet i klasserommet.

Intet menneske er en øy, og jeg hadde aldri klart å fullføre disse studieårene uten flokken min! Tusen takk til min kjære Frank som har støttet meg i motgang og medvind, hatt middagen klar og handlet inn sjokolade, trøstet med gode klemmer og ord. Det er uendelig godt å være to! Et stort takk må også gå til min mest trofaste heiagjeng, mine foreldre, som heier og tror på gull uansett hva jeg begir meg ut på. Det er godt å ha kjærligheten deres i ryggen! Så må jeg også få si tusen takk til mine to vidunderlige sønner – takk for støtten jeg har fått, interessen dere har vist for arbeidet mitt og for alle fagpratene vi har hatt disse årene. Dere er så fine, og dere har virkelig motivert meg! Så må jeg ikke glemme å takke min kjæreste venninne Nina! Du har fått meg til å ta pauser fra skrivingen for å sove i telt og brenne bål i Jegers, se på stjernene og bare være – tusen takk for alle fine øyeblikk!

Til slutt må jeg få uttrykke stor takknemlighet for min veileder, Martin Carlsen. Det var du som først inspirerte meg til å skrive om problemløsning gjennom ditt engasjement i Arbeidsmåter i matematikk. Som veileder har du vært engasjert, engasjerende, støttende og motiverende. Du har alltid hatt tid, vist stor interesse og kommet med konstruktive tilbakemeldinger. Jeg kunne ikke hatt en bedre veileder enn deg! Tusen takk!

## Sammendrag

Dette er en kvalitativ case-studie som tar for seg en liten gruppe med elever fra andre året i videregående skole som jobber med problemløsning i matematikk. Studien belyser hvilke strategier og medierende verktøy disse elevene tar i bruk i sitt problemløsningsarbeid, samt hvilken rolle de medierende verktøyene spiller for elevenes muligheter for å appropriere begreper og idéer innenfor ulike matematiske emner som for eksempel sannsynlighet og kombinatorikk i problemløsningsprosessen. Studien har også søkelys på hva som karakteriserer gruppas problemløsningsprosess. De tre forskningsspørsmålene som studien forsøker å svare på er som følger: 1. Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i dialogen blant elevene i en smågruppe når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver? 2. Hva karakteriserer gruppas problemløsningsprosess? 3. Hvilken rolle spiller medierende verktøy for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen?

Det empiriske materialet studien bygger på er hentet fra observasjon med lydopptak fra syv økter av en smågruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, semistrukturerte intervjuer av smågruppa før og etter observasjonsperioden, samt elevenes inskripsjoner. Disse inskripsjonene er hentet fra elevenes individuelle skrivebøker, elevenes Notebook'er, som de brukte under øktene hvor de jobbet med problemløsningsoppgavene. Studien bygger på et sosiokulturelt læringssyn da fokuset i gruppeobservasjonen er samtale og diskusjon, samarbeid og bruk av både fysiske og psykologiske medierende verktøy. Da denne studien bygger på en gruppe med fire elever og deres arbeid med matematiske problemer, vil det derfor være relevant å se på strategibruk med smågruppa som utgangspunkt heller enn enkeltindividet. Studien ser også på hvilken rolle medierende verktøy spiller for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen, og her vil eksempler på medierende verktøy være elevenes inskripsjoner, den muntlige samtalen, hverandre og gruppas strategibruk. Det er brukt en dialogisk tilnærming til datamaterialet da samtale og språkbruk står sentralt i et sosiokulturelt læringssyn. For å kunne identifisere hvordan elevene gir uttrykk for matematisk resonnering og meningsskaping, er hver episode delt opp i mindre sekvenser (Wells, 1999).

Det teoretiske rammeverket for studien bygger videre på de tre nært beslektede problemløsningsmodellene til Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason med kollegaer (2010),

og deres redegjørelse for hvordan elever og studenter løser matematiske problemer. Analyser av datamaterialet viser at elevene bruker tilsynelatende liten tid på å analysere og definere problemet de skal jobbe med, men heller går raskt i gang med å prøve å løse problemet. Det er ikke observert bevisste forsøk på å legge en plan for løsningsarbeidet. Analysen viser at elevene ofte holder fast på første idé, og bruker mye av tiden de har til rådighet på å finne regnemåter som kan føre dem frem til det antatte svaret. Elevene brukte liten eller ingen tid til å reflektere over løsningen de kom frem til, men uttrykte ønske om å få neste oppgave eller pause så fort de kom frem til ett svar de var fornøyd med. Analysen viser også at elevenes bruk av strategier, inskripsjoner, dialogen og hverandre, og hvordan disse anvendes som medierende verktøy, påvirker fremgangen i elevenes løsningsprosess.

## Abstract

This is a qualitative case study that examines a small group of second-year high school students working on problem-solving in mathematics. The study highlights the strategies and mediating tools these students use in their problem-solving work, as well as the role the mediating tools play in the students' opportunities to appropriate concepts and ideas within various mathematical topics such as probability and combinatorics in the problem-solving process. The study also focuses on what characterizes the group's problem-solving process. The three research-questions that the study seeks to answer are as follows: 1. What problem-solving strategies can be identified in the dialogue among students in a small group when they collaborate to solve problem-solving tasks? 2. What characterizes the group's problem-solving process? 3. What role do mediating tools play in students' opportunities to appropriate mathematical concepts and ideas in the problem-solving process?

The empirical material that the study is based on is derived from audio recordings of seven sessions of a small group's work on problem-solving tasks, semi-structured interviews with the small group before and after the observation period, as well as the students' inscriptions. These inscriptions were obtained from the students' individual writing books, the students' Notebook’s, which they used during the sessions where they worked on problem-solving tasks. The study is based on a sociocultural learning perspective as the focus of group observation is on conversation and discussion, collaboration and the use of both physical and psychological mediating tools.

As this study is based on a group of four students and their work with mathematical problems, it is therefore relevant to focus on the group's use of strategies rather than the individual's. The study also examines the role of mediating tools in the students' ability to appropriate mathematical concepts and ideas in the problem-solving process, with examples of mediating tools including the students' inscriptions, oral conversation, each other and the group's strategy use. A dialogic approach has been used to analyze the data, as conversation and language use are central in a sociocultural view of learning. To identify how students express mathematical reasoning and meaning-making, each episode is divided into smaller sequences (Wells, 1999).

The theoretical framework of the study builds upon the three closely related problem-solving models of Polya (1957), Borgersen (1994), and Mason et al. (2010), and their accounts of how students solve mathematical problems. Analysis of the data shows that the students appear to spend little time analyzing and defining the problem they are working on, but instead quickly jump into trying to solve the problem. No attempts to plan the solution process were observed. The analysis shows that the students often stick to their first idea and spend much of their available time trying to find computational methods that can lead them to the assumed answer. The students spent little or no time reflecting on the solution they found, but expressed a desire to move on to the next task or take a break as soon as they arrived at an answer they were satisfied with. The analysis also shows that the students' use of strategies, inscriptions, dialogue, each other, and how these are used as mediating tools, affect the progress of the students' problem-solving process.

# Innhold

# 1 Innledning

Jeg har valgt å gi masteroppgaven min tittelen «En smågruppes arbeid med problemløsning i videregående skole – en studie av gruppas bruk av strategier og appropriering av ulike medierende verktøy i problemløsningsfasen». Jeg vil altså studere hvordan elever arbeider med å løse matematiske problemer, og hvordan dette er med på å gi næring til læringsprosessen deres i matematikk.

## 1.1 Bakgrunn for valg av emne til studien

Programme for International Student Assessment (PISA) måler 15-åringers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag. I 2006 presterte norske skoleelever under OECD[1]-gjennomsnittet i både matematikk og lesing på den internasjonale PISA-testen, og sendte med det et sjokk gjennom skole-Norge (Sanden, 2010). I Norge har resultatene fra PISA-testen hatt stor innflytelse på offentlig debatt og utdanningspolitikk, og denne ligger i stor grad til grunn for Kunnskapsløftet som ble innført i 2006. De samme prinsippene herfra har blitt videreført i Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020, LK 20 (Sjøberg, 2021). Fra og med 2012 har PISA-testen også målt 15-åringers ferdigheter i problemløsning, en kompetanse som blir ansett som viktig i både skolegang, arbeids- og samfunnsliv. OECD (2013, s. 122) definerer problemløsning i rammeverket for PISA 2012 slik:

> *… an individual's capacity to engage in cognitive processing to understand and resolve problem situations where a method of solution is not immediately obvious. It includes the willingness to engage with such situations in order to achieve one's potential as a constructive and reflective citizen.*

I tillegg til at elevene må forstå problemet, planlegge og gjennomføre løsningsprosessen, står også elevenes evne til å tenke kreativt og kritisk sentralt. På problemløsningsområdet har de norske elevene prestert rundt gjennomsnittet i OECD, mens land som Japan og Sør-Korea har toppet resultatlisten (Kjærnsli et al., 2014). I Japan har problemløsning preget matematikk-undervisningen siden 1950-tallet (Hino, 2007), og i PISA-sammenheng har Japan vært blant de landene som også presterer best i matematikk (Kjærnsli et al., 2014). Det kan få en til å spørre

[1] Organisation for Economic Co-operation and Developement

seg om det er en sammenheng mellom det store fokuset på problemløsning i japanske klasserom og den gode prestasjonen i matematikk hos japanske skoleelever.

Også Kongelf (2011) viser til at land som presterer høyt i matematikk fokuserer sterkt på problemløsning. I Singapore, som også topper resultatlistene i PISA-testen, betraktes problemløsning som kjernen i matematikkundervisningen i rammeverket for læreplanen, og i lærebøkene er hele kapitler satt av til problemløsning hvor fokuset er på heuristikker, altså spesifikke strategier for problemløsning (Kongelf, 2011). I norsk skole har det, ifølge Kongelf (2011), ikke vært jobbet systematisk med slike problemløsningsstrategier tidligere.

PISA-undersøkelsen, samt liknende undersøkelser som Nasjonale Prøver og den internasjonale undersøkelsen i matematikk og naturfag for grunnskolen, TIMSS, måler bare deler av den totale kompetansen som blir uttrykt i den nasjonale læreplanen i matematikk. Samtidig er det verd å merke seg hvordan de alle legger vekt på problemløsning (Svingen & Gilje, 2018). Ved å vektlegge slike oppgaver, kan elevens helhetlige kompetanse i matematikk måles. «Oppgåver i problemløysing er viktige for å utvikle ein heilskapleg matematisk kompetanse som gjer elevane gode til å resonnere, argumentere, sjå samanhengar, trekke slutningar og samanfatte» (Svingen & Gilje, 2018, s. 9). Å jobbe med problemløsningsoppgaver gir altså elevene en mulighet til å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse da slike aktiviteter bidrar til økt forståelse og dybdelæring hos elevene (van Galen et al., 2008). Matematikkundervisningen i Norge har, ifølge Svingen og Gilje (2018), vært preget av rutineoppgaver og å memorere algoritmiske prosedyrer fra lærer. Denne måten å jobbe på betegner de som overflatelæring, som er motsatsen til dybdelæring (Svingen & Gilje, 2018, s. 10). Det var derfor interessant at den nye overordna delen av læreplanen, Verdier og prinsipper for grunnopplæringen, har lagt vekt på at skolen skal «gi rom for djupnelæring slik at elevane utviklar forståing av sentrale element og samanhengar innanfor eit fag, og slik at dei lærer å bruke faglege kunnskapar og ferdigheiter i kjende og ukjende samanhengar» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11). Ludvigsen-utvalget (2014, s. 14) skrev i sin rapport «Fremtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser» at «dybdelæring innebærer også at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse». Dybdelæring innebærer at elevene mestrer å bruke relevante læringsstrategier og reflektere over egen læring (Nosrati & Wæge, 2018). For å utvikle kompetanse og dybdelæring, kan det være nyttig at elevene blant annet jobber med problemløsning.

I den nye læreplanen har nettopp problemløsning fått en stor plass. Her kan vi lese at problemløsning og utforsking er viktig for dybdelæring. Utdanningsdirektoratet (2019) beskriver problemløsning ved at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. I læreplanens kjerneelementer for matematikk fellesfag Vg1, kan vi videre lese at elevene skal legge mer vekt på strategier og fremgangsmåter enn på selve løsninger og svar (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vi ser altså at strategier er en viktig del av den nye læreplanen i matematikk. I kjerneelementene står det at

> *Utforsking handler om å legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk (Kunnskapsdepartementet, 2019).*

Tradisjonelt sett har kommunikasjonen i matematikkundervisningen vært preget av læreboka ved at læreren forklarer det som står der, og elevene jobber videre med oppgaver som likner på dem som allerede har blitt gjennomgått av lærer (Carlsen & Fuglestad, 2010). Frem til nylig har ikke mange elever i norske matematikklasserom fått erfare og jobbe med rike oppgaver, som utforskende problemløsningsoppgaver kan være (Wæge & Nosrati, 2018). Ifølge Carlsen (2008) har det blitt et større fokus på dialog og kommunikasjon i forskningen som gjøres på læringen i matematikk de senere årene, og det benyttes mer samarbeidslæring i matematikkundervisningen nå enn tidligere. Samarbeidslæring kan beskrives ved at elevene jobber sammen i smågrupper for å maksimere læringsutbyttet både for seg selv og de andre elevene i gruppa (Johnson et al., 2006). Borgersen (1994) konkluderte i sin forskningsartikkel med at samarbeidslæring i smågrupper fungerte godt når studentene jobbet med problemløsningsoppgaver i geometri.

Kunnskapsløftet 2020 er nå gjeldende i norsk skole, og lærere må gjøre en del endringer med tanke på hvordan de legger opp undervisningen sin sammenliknet med tidligere år. At læreren går fra å være en person som har alle svarene lett tilgjengelig for elevene, til å ta rollen som veileder mens elevene jobber utforskende i matematikk, kan være utfordrende både for lærer og elever. Denne undervisningsformen er annerledes enn den tradisjonelle undervisningen både lærere og elever har vært vant til i norsk skole, og det krever en omstilling fra begge parter, noe som vil ta tid.

Jeg ønsker i denne studien å se på hvordan en gruppe på fire elever jobber med problemløsningsoppgaver og hvilke strategier de bruker i dette arbeidet. Hovedmålet mitt er å tilveiebringe ny innsikt om hva som kjennetegner problemløsningsprosessen hos elever i videregående skole som samarbeider om å løse matematiske problemer i smågrupper, samt deres appropriering av matematiske begreper og idéer. Sekundært håper jeg at dette arbeidet vil inspirere og trygge meg og andre lærere til å øke bruken av problemløsningsoppgaver og samarbeidslæring i egen undervisning, og på den måten ta i bruk den nye læreplanen på en hensiktsmessig måte.

## 1.2 Forskningsspørsmål

Matematisk problemløsning har lenge vært sett på som et viktig aspekt ved matematikk, undervisning i matematikk og læring av matematikk (Liljedahl, 2016). Å jobbe med problemløsning i skolen er tidkrevende, men resultatene fra PISA-testen og tidligere forskning, se for eksempel Carlsen (2008) og Schoenfeld (1985, 1992), tilsier at det gir gode resultater og er derfor verdifull bruk av tid. Med den nye læreplanen må nå lærere la problemløsnings-aktiviteter få større plass enn tidligere i matematikkundervisningen. Ved å sette av tid til samtale og diskusjon i matematikktimene, og la elevene samarbeide i smågrupper om å løse problemer, bidrar undervisningen til økt forståelse og dybdelæring hos elevene (van Galen et al., 2008). Det er allerede gjort en del forskning på strategier elever benytter seg av når de jobber med problemløsning i smågrupper, for eksempel av Bjuland (2002) og Kongelf (2011). Jeg vil i tillegg til å se på problemløsningsstrategiene i elev-elev dialogene, også se på hva som karakteriserer gruppas problemløsningsprosess og hvordan de approprierer matematiske begreper og idéer i denne prosessen. Jeg har derfor kommet frem til følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i dialogen blant elevene i en smågruppe når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver?
2. Hva karakteriserer gruppas problemløsningsprosess?

3. Hvilken rolle spiller medierende verktøy for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen?

For å besvare det første forskningsspørsmålet mitt vil jeg se på hvilke problemløsningsstrategier elevene jeg observerer bruker i gruppedialogene de har under arbeidet med de ulike problemløsningsoppgavene. Jeg vil i delkapittel 2.1.7 gjøre rede for hva jeg mener med problemløsningsstrategier, mens jeg i 2.1.2 gjør rede for hva som ligger i begrepet problemløsningsoppgave. Dette er et spørsmål som jeg besvarer ved å identifisere de ulike strategiene som blir brukt i problemløsningsarbeidet på gruppenivå. I det andre forskningsspørsmålet vil fortsatt problemløsningsstrategiene spille hovedrollen, men jeg vil løfte frem hva som karakteriserer gruppas problemløsningsprosess og hvilke strategier gruppa bruker som følge av det. Her vil jeg trekke inn problemløsningsmodellene jeg beskriver i delkapittel 2.1.5. For å besvare det tredje forskningsspørsmålet mitt, vil jeg se etter hvilken rolle medierende verktøy spiller for at gruppa approprierer matematiske begreper og idéer i sin problemløsningsprosess. Elevene arbeider med matematiske begreper og idéer knyttet til kombinatoriske tilnærminger som ordnet og uordnet utvalg med og uten tilbakelegging, samt polynomer. Når elever bruker medierende verktøy i arbeidet med problemløsningsoppgaver i smågrupper, kan dette i spesielle tilfeller sees på som ulike strategier. I delkapittel 2.2.3 vil jeg redegjøre for begrepene medierende verktøy og appropriering.

Det eksisterer ulike syn på problemløsning og hvilken rolle problemløsning skal ha i undervisningen (Schoenfeld, 1992). For å kunne besvare mine forskningsspørsmål, var det hensiktsmessig at elevene fikk arbeide med problemløsning slik det beskrives av blant andre Mason et al. (2010), Polya (1957) og Schoenfeld (1992). Jeg utarbeidet derfor et undervisningsopplegg basert på disse forskernes syn på problemløsning og problemløsningsstrategier som faglærer tilpasset til den aktuelle klassen hvor de fire elevene jeg observerte hørte til. Dette gjennomførte hun med hele klassen da vi var midtveis i observasjonsperioden. Dette gjorde at jeg kunne se etter en endring i gruppas tilnærming til problemene og strategibruk før og etter at de hadde gjennomgått et undervisningsopplegg i emnet. Alle forskningsspørsmålene har blitt besvart basert på observasjon og lydopptak av økter der gruppa samarbeidet om å løse de ulike problemløsningsoppgavene, i tillegg til elevenes inskripsjoner.

## 1.3 Tidligere forskning på problemløsning

I 2016 ble den trettende internasjonale kongressen om matematikkundervisning, ICME, arrangert i Hamburg, hvor problemløsning var og har vært et sentralt emne siden oppstarten i 1969. Til denne konferansen skrev Liljedahl og tre av hans kollegaer heftet «Problem Solving in Mathematics Education», Problemløsning i matematikkundervisningen, hvor de samlet fire forskjellige, men samtidig nært beslektede dimensjoner i matematisk problemløsning, og med det bidro til nyere forskning på emnet.

Det første kapitlet ble skrevet av den tyske matematikeren Regina Bruder, og hun presenterte her et nyansert syn på ulike heuristikker brukt i problemløsning. Hun åpnet sitt bidrag med historien om Arkimedes i badekaret, og fortalte at det var fra denne hendelsen ordet heuristikk ble knyttet til problemløsningsprosessen. Hun pekte på at det har blitt gjort mye forskning på problemløsningsprosesser basert på Polyas (1957) problemløsningsmodell som vektlegger viktigheten av heuristiske strategier, blant annet av Borgersen (1994) og Schoenfeld (1985, 1992). Fra denne forskningen har det blitt antatt at undervisning og læring av heuristiske strategier, prinsipper og verktøy vil gi elevene en orientering i problem-situasjoner og at dette dermed kan forbedre elevenes evne til å løse problemer (Bruder, 2016). Da mitt ønske for denne studien var å se på blant annet problemløsningsstrategier, var nettopp denne forskningen aktuell for å besvare mine forskningsspørsmål, og jeg har derfor anvendt blant annet Schoenfelds forskning fra 1985 og 1992 i arbeidet mitt med denne studien.

Liljedahl (2016) har selv skrevet det andre kapitlet, «En historie om kreativitet i matematikkundervisningen», hvor han ser på kreative aspekter ved problemløsning. Han åpnet også med historien om Arkimedes i badekaret og hans arbeid med problemer, og han pekte på at matematikken har vokst frem fra kreativitet. Også han så spesifikt på strategier i sin dimensjon, og han presenterte arbeidet til nøkkelforfattere og forskere som Mason med kollegaer (1991, 2010), Polya (1957) og Schoenfeld (1985, 1992), hvis arbeid har gitt oss innsikt i stadig mer kreative problemløsningsheuristikker for å løse ulike problemer. Liljedahl (2016) ble etterfulgt i det tredje kapitlet av Santos-Trigo (2016) som beskrev problemløsning i og med digitalt verktøy. Malaspina (2016) dokumenterte i det fjerde og siste kapitlet fremveksten av problemer i matematikkundervisningen generelt og problemløsningslitteratur spesielt.

Hver av disse fire dimensjonene refererte på en kritisk og sentral måte til arbeidet til Polya (1957) og Schoenfeld (1985, 1992), noe som ikke bør være en overraskelse da det banebrytende arbeidet til disse forskerne ligger i røttene til matematisk problemløsning (Liljedahl et al., 2016). Det som gjorde disse fire bidragene så interessante, var hvordan de på hver sine ulike måter fikk arbeidet til Polya (1957) og Schoenfeld (1985, 1992) til å passe inn i det større bildet av deres respektive dimensjoner. Dette viste ikke bare dybden og bredden i Polya (1957) og Schoenfelds (1985, 1992) innflytelsesrike arbeid, men også mangfoldet i hvordan de kan tolkes og brukes til å utvide vår tenkning om problemløsning (Liljedahl et al., 2016). Disse forskerne vil derfor også prege min studie.

Jeg valgte å støtte meg til forskningen til særlig Borgersen (1994), Mason med kollegaer (1991, 2010), Polya (1957) og Schoenfeld (1985, 1992) når jeg presenterte ulike problemløsningsmodeller og omtalte ulike problemløsningsstrategier. Polya (1957) var en av de første som beskrev problemløsning og problemløsningsstrategier slik vi i dag er kjent med disse begrepene, og mange forskere har studert problemløsning i skolen med Polyas (1957) forskning som utgangspunkt, blant andre Bjuland (2002), Borgersen (1994), Carlsen (2008), Mason med kollegaer (1991, 2010) og Schoenfeld (1985, 1992). Polya (1957) beskrev problemløsningsprosessen gjennom fire steg, og pekte samtidig på ulike strategier som kan være nyttige for problemløseren. Schoenfeld (1985, 1992) forsket også på problemløsning og bruken av strategier i skolen, og har sett på hvordan bruken av blant annet monitorerende spørsmål kan bidra positivt i elevens problemløsningsprosess. Mason har med flere kollegaer (1991, 2010) sett på ulike strategier i problemløsningsprosessen, og har også utviklet en problemløsningsmodell bestående av tre faser. I sitt arbeid er de mer opptatt av prosessen enn av selve svaret, og presenterer flere nyttige heuristikker problemløseren kan benytte i de ulike fasene. Borgersen (1994) har forsket på hvordan smågrupper med studenter arbeidet med problemer i geometri, og han utviklet en problemløsningsmodell bestående av syv trinn som tar utgangspunkt i Polyas (1957) fire steg. Borgersen (1994) studerte matematikk-studenters arbeid i smågrupper, og søkelyset på studenters arbeid i smågrupper har Bjuland (2002) tatt med seg i sin studie av lærerstudenters arbeid med problemløsningsoppgaver i geometri i smågrupper. Carlsen (2008) studerte smågrupper med elever i videregående skole som jobbet med problemløsningsoppgaver knyttet til skalarprodukt og geometriske rekker. Da jeg også ønsket å studere en smågruppes arbeid med problemløsningsoppgaver og deres appropriering av matematiske begreper gjennom det, har mitt perspektiv i denne studien vært preget av et sosiokulturelt syn på læring og utvikling.

## 1.4 Studiens oppbygning

Denne oppgaven består av syv deler; et innledende kapittel (kapittel 1), et kapittel som presenterer det teoretiske rammeverket studien bygger på (kapittel 2), en del med forskningsmetoder og hvordan disse ble gjennomført (kapittel 3), resultater fra observasjonen (kapittel 4), diskusjonsdel (kapittel 5), implikasjoner (kapittel 6) og til slutt egenrefleksjon (kapittel 7).

I kapittel 2 vil jeg presentere det teoretiske rammeverket som ble brukt som grunnlag for studien. Denne delen er delt inn i to hoveddeler. Den første delen, om problemløsning i matematikk, er delt inn i syv mindre delkapitler. Her starter jeg med å beskrive hva ulike forskere synes å enes om at matematisk tenking er, og Schoenfelds (1992) fem aspekter av kognisjon vil også bli presentert. I det andre delkapitlet vil ulike beskrivelser av et matematisk problem bli presentert, før jeg på bakgrunn av disse beskrivelsene definerer hva jeg selv legger i begrepet. Videre beskrives rike matematikkoppgaver slik som de tre forfatterne Hedrén, Hagland og Taflin (2005) beskriver slike med sine syv kriterier. I det fjerde delkapitlet presenteres de fire nivåene av kognitive krav Stein med kollegaer (2009) ser for seg at ulike matematikkoppgaver krever. Problemløsningsbegrepet og de tre problemløsningsmodellene til Borgersen (1994), Mason med kollegaer (2010) og Polya (1957) blir beskrevet i delkapittel 5, før Schoenfelds (1992) beskrivelse av nybegynnere og erfarne problemløsere blir presentert i delkapittel 6. Kapittel 2.1 avsluttes med et delkapittel om strategier i problemløsning, og her vil en kodingsmanual basert på Kongelfs (2011) manual bli presentert.

Den andre hoveddelen i kapittel 2 er viet det teoretiske perspektivet på læring og utvikling som er brukt i oppgaven, nemlig et sosiokulturelt perspektiv. Her vil de tre punktene Säljö (2001) mener er kjernen i et sosiokulturelt læringsperspektiv bli presentert. Begreper som appropriering, medierende verktøy samt dialog, samarbeid og læring vil bli forklart.

Kapittel 3 består av åtte deler, og her vil metodiske problemstillinger bli behandlet. Den første delen beskriver studiens forskningsdesign, og i den andre delen blir metodene som er brukt i datainnsamlingen forklart. Videre vil valg av observasjonsutvalg til studien bli grunngitt, før det gis en oversikt over datagrunnlaget. I den femte delen begrunnes valg av oppgaver som ble brukt som utgangspunkt for observasjonsøktene, og de fire episodene som ble brukt i analysen beskrives nærmere. Den sjette delen er viet analysen og den analytiske tilnærmingen, analyseprosessen og kodingen som er brukt i studien. Til slutt vil de forskningsetiske vurderingene og noen metodiske betraktninger bli drøftet.

I kapittel 4 vil resultater fra observasjonen presenteres, og her er kapitlet delt inn i tre hoveddeler, ett for å besvare hvert av de tre forskningsspørsmålene i studien. Det første delkapitlet presenterer strategiene som ble observert da elevgruppa jobbet med problemløsningsoppgavene, mens delkapittel to beskriver hva som kjennetegnet gruppas problemløsningsprosess da de befant seg på hvert av de fire stegene i Polyas (1957) modell for en problemløsningsprosess. Det siste delkapitlet presenterer de medierende verktøyene som ble observert at elevene benyttet seg av i problemløsningsprosessen. Kapittel 5, 6 og 7 er viet henholdsvis diskusjon, implikasjoner og egenrefleksjon.

# 2 Teoretisk rammeverk

I dette kapitlet ønsker jeg å presentere det teoretiske rammeverket som jeg har basert studien min på og som kan gi en teoretisk forankring for analysen av det innsamlede, empiriske materialet.

Fra og med 1980-årene og utover har det over store deler av verden blitt snakket mye om problemløsning i skolen (Alseth et al., 2003). Dette er ifølge forfatterne en konkretisering av det synet de ulike landene har på utdanning og oppdragelse. Siden det er et behov i alle samfunn for mennesker som har evnen til å løse problemer og håndtere ukjente situasjoner, har problemløsing med tiden fått en viktig rolle i læreplanen i matematikk. Matematiske problemer og problemløsning defineres på ulike måter i litteraturen (Schoenfeld, 1992), så jeg vil derfor starte med å presisere hva jeg legger i de to begrepene når jeg bruker dem i studien min. I kapittel 2.1 ønsker jeg å presentere ulike definisjoner av sentrale begreper jeg bruker i studien, begreper som *et matematisk problem*, *matematisk tenking* og *problemløsing*, før jeg ser nærmere på selve *problemløsningsprosessen*, noen kjente *problemløsningsmodeller* og de ulike *strategiene* som brukes for å løse et matematisk problem. Videre vil jeg redegjøre for det sosiokulturelle læringsperspektivet i kapittel 2.2, som er læringssynet denne studien har tatt utgangspunkt i. Der vil jeg gi en beskrivelse av *medierende verktøy* og teorien rundt det *å jobbe med problemløsningsoppgaver i grupper*.

## 2.1 Problemløsning i matematikk

Problemløsning i matematikk har vært mye diskutert blant lærere og andre fagfolk i de senere årene. Kongelf (2011) peker på at land som hevder seg i matematikk har et sterkt fokus på problemløsning. I tillegg til Japan som jeg nevnte i delkapittel 1.1, kan for eksempel Singapore nevnes, hvor problemløsning er kjernen i matematikkundervisningen om vi ser på rammeverket for læreplanen. Her vies store deler av lærebøkene til problemløsning med søkelys på heuristikker, som er spesifikke strategier elevene kan bruke i arbeidet med slike oppgaver. Til nå har det vært få slike oppgaver i norske lærebøker, og ingen fokus i opplæringen på generelle strategier for problemløsning (Kongelf, 2011). I den nye læreplanen, Kunnskapsløftet 2020, har emnet fått en stor og viktig plass, og står nå som det første kjerneelementet i planen for matematikkopplæringen for både grunnskolen og videregående skole. Her kan vi lese at «problemløsning i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Begrepet problemløsning kan allikevel forstås på flere ulike måter. Jeg vil derfor, i 2.1.5, definere og forklare dette begrepet samt presentere tre ulike problemløsningsmodeller. Før jeg gjør det, ønsker jeg å avklare hva matematisk tenkning er (2.1.1), hva et matematisk problem er (2.1.2), hva som legges i betegnelsen rike oppgaver (2.1.3) og i lave og høye kognitive krav (2.1.4). I kapittel 2.1.6 vil jeg gi et eksempel på hvordan nybegynnere og erfarne problemløsere jobber med et matematisk problem, før jeg til slutt, i 2.1.7, gjøre rede for ulike problemløsningsstrategier.

### 2.1.1 Matematisk tenkning

For å jobbe med problemløsning trenger elevene å beherske matematisk tenkning. Schoenfeld (1992) har utviklet fem aspekter av kognisjon som er viktige i arbeidet med problemløsnings-oppgaver. Det er ulike variasjoner blant detaljene rundt hva matematisk tenkning er hos ulike forskere, men flere virker å enes om hva som menes med kognisjon og problemløsning, og om at matematisk tenkning deles inn i de fem aspektene av kognisjon som Schoenfeld har utviklet. De fem kategoriene er:

1. Kunnskapsbase
2. Problemløsningsstrategier
3. Monitorering og kontroll
4. Oppfatninger og holdninger
5. Praksis

Ett av spørsmålene jeg ønsker å besvare gjennom min studie, er hvilke problemløsnings-strategier elevene jeg observerer tar i bruk. Derfor vil kategori 2 og 3 bli omtalt i delkapittel 2.1.7, hvor jeg beskriver nettopp problemløsningsstrategier. Kategori 1, kunnskapsbasen, anser jeg som et viktig utgangspunkt for elevene når de skal jobbe med problemløsningsoppgaver. Dette punktet vil jeg beskrive her sammen med en overfladisk beskrivelse av punkt 4 og 5. Punkt 5 vil få en mer omfattende beskrivelse i delkapittel 2.1.6, hvor jeg tar for meg nybegynnere kontra mer erfarne problemløsere.

Den første kategorien, kunnskapsbasen, er det elevene allerede har av tilegnet kunnskap og hvordan denne allerede er appropriert av elevene. Vi kan også si at kunnskapsbasen er det som danner elevenes grunnlag for å skape matematisk mening og hvordan eleven har tilgang til relevant informasjon (Schoenfeld, 1992). Dette er kunnskap og ferdigheter elevene kan hente frem og bruke. Elevene trenger en viss forkunnskap for å komme videre når de jobber med problemløsning, og de trenger ulik kunnskap for å løse ulike problemer. Det er denne forkunnskapen som utgjør kunnskapsbasen. I det følgende vil også lærerrollen bli kommentert siden forskere tar frem dette, selv om jeg ikke kommer til å fokusere på denne rollen i min studie. For at en lærer skal få en innsikt i hvordan elevene opptrer når de jobber med problemløsningsoppgaver i matematikk, er det nødvendig for læreren å ha innblikk i elevenes kunnskapsbase. Det være seg elevenes besittelse av matematisk informasjon eller av verktøy som er relevante for å løse det aktuelle problemet. Dette innebærer for eksempel kjennskap til fakta, definisjoner og algoritmiske prosedyrer som elevene har tilgjengelig i arbeidet med problemløsningsoppgavene. Den sosiale sammenhengen er avgjørende for elevens læring, og heller enn at kunnskapen kun har en plass i elevens hode, eksisterer kunnskapen i samfunnet og i menneskeskapte gjenstander, i menneskers samhandling og deres miljø. Dette er sentralt i Vygotskijs læringsteori, hvor den sosiale konteksten er avgjørende for elevenes læring (Säljö, 2001). Det er verd å merke seg at kunnskapsbasen til elevene kan inneholde feil og uriktige oppfatninger i forhold til ulike begreper. Disse tar eleven med seg inn i problemløsnings-arbeidet og vil da være en del av kunnskapsbasen eleven jobber ut fra.

Den fjerde kategorien til Schoenfeld (1992) har jeg oversatt fra det engelske «beliefs and affects» til oppfatninger og holdninger. En elev kan for eksempel ha en oppfatning av at han behersker matematikk bedre enn andre fag, og dette baserer seg på elevens tidligere erfaringer. Dette sees på som metakognitive ferdigheter, altså kunnskap om egne ferdigheter og egen læring. Holdning går ut på hvilke følelser og forestillinger elevene har og som danner grunnlaget for hvordan elevene skaper begreper og motiverer seg i matematikk. De holdningene elevene har med seg, påvirker hvor sterkt elevene ønsker å løse problemet og om de faktisk klarer det (Schoenfeld, 1992). For eksempel er det mange elever som har en holdning om at det kun finnes ett korrekt svar på et matematisk problem, eller at det kun er én metode for å løse problemet, og det er den læreren akkurat demonstrerte (Ajzen, 2005).

Den femte og siste kategorien Schoenfeld (1992) beskrev, er praksis. Den tar for seg hvordan en profesjonell matematiker angriper et matematisk problem i forhold til hvordan uerfarne elever jobber med å løse slike utfordringer. Dette kommer jeg også mer inn på i kapittel 2.1.6. Hva som legges i begrepet *et matematisk problem*, vil jeg gjøre rede for i neste avsnitt.

### 2.1.2 Problemer i matematikk

Når man leser om problemløsning i matematikk, er det tydelig at ulike forskere har ulike oppfatninger av hva et matematisk problem er (Schoenfeld, 1992). I min studie ønsker jeg å bruke begrepet slik jeg forstår det ut fra teorien jeg har lest, og jeg vil derfor gjennom denne teorien forklare hva jeg legger i dette begrepet.

Blum og Niss (1991) beskrev et matematisk problem som et åpent spørsmål uten en tydelig metode, algoritme eller prosedyre som skal brukes til å løse oppgaven og derfor vil gi elevene utfordringer med å finne en løsning. Av den grunn kan et slikt spørsmål være et utfordrende problem for enkelte elever, mens av andre oppleves det kun som en rutineøvelse. Polya (1957) beskrev matematiske problemer som oppgaver som ikke er rutineoppgaver, men som har som mål å utfordre elevenes nysgjerrighet. Han skrev at elevenes interesse for oppgavene de presenteres for raskt vil avta om de blir gitt oppgaver med rutinepreg. Ved å gi elevene problemer som er tilpasset deres kunnskapsnivå og ved at læreren stiller elevene stimulerende spørsmål, kan læreren trigge elevenes nysgjerrighet og gi elevene muligheter til å tenke selv (Polya, 1957). Solvang (1996, s. 135) hadde følgende definisjon på begrepet problem: «En utfordring vil for en person være et problem dersom denne personen ikke har noen algoritme som vil gi løsning når personen konfronteres med utfordringen». Et matematisk problem ble også definert som en oppgave hvor ingen standard prosedyre var kjent for eleven (English & Gainsburg, 2016, referert i Opsal & Tonheim, 2018). Mason og Davis (1991) skrev at det er en verdi i å ha en bred forestilling av hva som utgjør et problem, fordi det da legges vekt på at noe er et problem idet det blir et problem for en person. «A problem is something that gets inside you; it nags and «wants» to be resolved» (Mason & Davis, 1991). Hvis vi går tilbake til Schoenfeld (1992), kan vi lese at han definerte problemløsningsoppgaver som problemer hvor det ikke eksisterer en enkel standardalgoritme eleven kan bruke til å løse problemet.

Etter å ha valgt ut disse definisjonene fra litteraturen jeg har lest, velger jeg i studien min å se på et matematisk problem som en oppgave elevene har lyst til å løse, men hvor de blir utfordret gjennom ikke å ha en åpenbar og tydelig metode som de automatisk benytter til å løse oppgaven de har fått presentert.

I skolen brukes problemløsningsoppgaver, rike oppgaver og åpne oppgaver litt om hverandre. Valenta (2016) har beskrevet de ulike begrepene slik:

> «*Problemløsningsoppgaver er gjerne oppgaver der elever ikke har blitt presentert for en mulig fremgangsmåte på forhånd. Rike matematiske oppgaver er ofte oppgaver med flere mulige løsninger. Rike oppgaver er problemløsningsoppgaver som byr på muligheter til diskusjoner med andre når det gjelder idéer til løsninger og forståelse av matematiske begreper. Oppgaver der det er mulig å velge ulike fremgangsmåter eller få flere riktige svar kalles ofte for åpne oppgaver*».

Slik jeg forstår det er rike oppgaver en type åpne problemløsningsoppgaver, og jeg vil derfor beskrive den type oppgaver mer omfattende i neste avsnitt, da det beskriver flere av de oppgavene jeg brukte i min datainnsamling.

### 2.1.3 Rike oppgaver i matematikk

På Matematikksenterets nettside kan vi finne en oversettelse av hvordan de tre svenske forfatterne Hedrén, Hagland og Taflin presenterte rike oppgaver da de introduserte denne typen oppgaver i sin bok fra 2005. Ifølge disse tre forfatterne vil rike oppgaver kjennetegnes ved følgende syv kriterier (hentet fra www.matematikksenteret.no):

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske idéer eller løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå. Alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.
3. Problemet skal være utfordrende, anstrengende og kunne ta tid.
4. Problemet skal kunne løses på ulike måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon som omfatter ulike strategier, representasjoner og matematiske idéer.
6. Problemet skal fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder.

7. Problemet skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problemer.

Som jeg beskrev tidligere, sammenfaller problemløsningsoppgaver og rike oppgaver om det legges til rette for at elevenes idéer til løsning og elevenes meningsskaping om de ulike matematiske begrepene i oppgaven, kan samtales om og diskuteres i grupper med medelever. Rike oppgaver skal introdusere matematiske idéer og løsningsstrategier i tillegg til at elevene enkelt skal se en mening i dem. Det vil medføre at alle har en mulighet til å starte på oppgaven. Rike oppgaver skal altså ha en lav inngangsterskel (Wæge & Nosrati, 2018). Rike oppgaver vil oppleves som en utfordring for elevene, og det krever både innsats og tid for å løse dem. Oppgavene skal være av en slik art at det er flere veier til målet, og elevene skal kunne bruke ulike strategier og representasjoner. Disse skal kunne tas opp i en faglig samtale i klassen. Også Wæge og Nosrati (2018) vektlegger at rike oppgaver må gi elevene utfordringer og gi dem muligheter til å benytte ulike strategier for å komme frem til løsningene. Hvis oppgavene har en lav inngangsterskel, legges det til rette for at alle elevene kan jobbe på sitt eget nivå (Wæge & Nosrati, 2018). Siden oppgavene har lav inngangsterskel og muligheter for utvidelse, er disse oppgavene selvdifferensierende. Ved å jobbe seg gjennom en rik oppgave, skal elevene kunne formulere nye problemer, og oppgavene skal binde sammen forskjellige faglige temaer. Slike oppgaver gir elevene erfaring med problemløsning, utforsking, kritisk tenking, samarbeid og kommunikasjon i tillegg til ferdighetstrening. På Matematikksenterets nettside kan vi lese at rike oppgaver med Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde, blir omtalt som LIST-oppgaver.

### 2.1.4 Lave og høye kognitive krav

Ifølge et sosiokulturelt læringssyn må alle typer elever få utfordrende oppgaver uansett hvilket nivå de er på om alle skal lære mest mulig (Säljö, 2001). Det finnes mange ulike måter å kategorisere matematikkoppgaver på ut fra hva man vektlegger med tanke på læring og undervisning. Stein med kollegaer (2009) har satt søkelys på hvilke kognitive krav de ulike matematikkoppgavene krever av elevene, og de har laget et rammeverk som består av fire nivåer av krav til matematisk tenkning som vi kan kategorisere oppgavene under. Jeg har kategorisert oppgavene jeg har brukt i min studie innenfor disse fire kategoriene. De har kalt det «The Mathematical Tasks Framework» og her bruker de de kognitive kravene til å differensiere oppgaver i fire ulike nivåer. De fire nivåene er:

1. Memorering

2. Prosedyrer uten forbindelser
3. Prosedyrer med forbindelser
4. Å gjøre matematikk

Oppgaver som kan kategoriseres under punktene memorering og prosedyrer uten forbindelser anses som lave nivåer av kognitive krav, mens prosedyrer med forbindelser og å gjøre matematikk sees på som høyere kognitive krav. Da jeg valgte ut oppgavene mine elever skulle jobbe med under datainnsamlingen, valgte jeg ut oppgaver på nivå 3 og 4 (se kapittel 3.5). Det er viktig å presisere at dette ikke er en rangering av gode og dårlige oppgaver, men at det heller er en måte å gruppere oppgaver på som gir grunnlag for ulike matematiske utfordringer hos elevene.

Det laveste kognitive kravet er å beherske memorerende oppgaver, det vil si å reprodusere kunnskap ved å bruke formler, regneregler eller definisjoner. Eksempler på slike memorerende oppgaver kan være å løse multiplikasjonsstykkene $3 \cdot 4$, $2 \cdot 9$ og $7 \cdot 8$ etter at elevene har øvd på den lille gangetabellen. Her vil ikke elevene kunne bruke prosedyrer da slike ikke finnes eller det ikke er nok tid. Oppgavene er entydige og har ingen dypere mening (Stein et al., 2009). Under det andre kognitive nivået, prosedyrer uten forbindelser, finner vi problemer som lar elevene ta i bruk prosedyrer eller algoritmer. Eksempler på slike oppgaver kan være: «Vilde har fem lekebiler, så får hun to til fra bestemor til jul. Hvor mange lekebiler har hun nå?» For elever i tidlig skolealder kan denne oppgaven være krevende, mens for eldre elever som har jobbet mye med oppgaver som likner, handler slike oppgaver gjerne om en prosedyre. Elevene finner tallene og gjenkjenner signalordene de kjenner fra før (ord som *får* eller *til sammen* er signalord som betyr at eleven skal addere), skriver opp et regnestykke og regner så ut. Oppgaven gir ikke elevene en utfordring på hvorfor de skal bruke addisjon eller hvorfor strategien de bruker er gyldig. Disse oppgavene har begrensede kognitive krav og er relativt entydige, og fokuset er rettet mot å produsere et korrekt svar. Oppgavene krever heller ingen forklaring (Stein et al., 2009). Den tredje grupperingen er kalt prosedyrer med forbindelse. Her blir elevenes oppmerksomhet styrt mot å bruke prosedyrer slik at de kommer videre i approprieringsprosessen. Eksempler på slike oppgaver kan være: «Hvis vi tenker på $6 \cdot 18$ som 6 stekebrett med 18 boller på hvert brett, hvordan kan vi da forklare at $6 \cdot 18 = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 8$?». I denne oppgaven representeres multiplikasjon både symbolsk og gjennom en regnefortelling. Innen multiplikasjon er den fremhevede algoritmen, den distributive lov for multiplikasjon, en viktig prosedyre, og det legges til rette for at elevene skal komme videre i sin approprieringsprosess knyttet til denne algoritmen ved å resonnere mens de tar utgangspunkt i regnefortellingen. Disse oppgavene er ofte representert på ulike måter, det kan være seg ved diagrammer, tabeller eller symboler. Disse oppgavene krever en viss innsats når det gjelder resonnering ved at elevene selv må finne de underliggende begrepslige idéene slik at de kan jobbe seg gjennom problemene og på den måten komme videre i approprieringsprosessen (Stein et al., 2009). Det fjerde og øverste kognitive nivået er punktet «å gjøre matematikk». Oppgaver på dette nivået fordrer sammensatt og ikke-algoritmisk tenkning. Eksempler på slike oppgaver kan være: «Hvor mange elever er det plass til i kantina på vår skole?». Her må elevene selv gjøre noen antagelser de synes er rimelige. Hva skal elevene gjøre i kantina og hvor mye plass trenger hver elev til dette formålet? Elevene må selv finne ut hvilken informasjon de trenger og hvordan de kan innhente denne. De må også bestemme seg for hvordan de skal gå frem. Siden ingen fremgangsmåte på hvordan oppgaven kan løses blir presentert, krever disse oppgavene at elevene utforsker og anvender approprierte matematiske begreper. Disse oppgavene krever, ifølge Schoenfeld (1992), at elevene monitorerer, altså at de reflekterer over prosessen, og selvregulerer sine egne kognitive prosesser. Her forventes det at elevene bruker kunnskap som er relevant for å løse oppgaven og erfaringer de har med slike oppgaver fra før, i tillegg til å vite når disse brukes tjenlig. Elevene må aktivt analysere problemet og undersøke den oppgitte informasjonen som kan brukes til å avgrense bruken av løsningsstrategier og løsninger (Stein et al., 2009). Denne typen oppgaver kan få eleven til å føle en viss grad av stress og uro på grunn av at løsningsprosessen er såpass uforutsigbar. De høye kognitive kravene i slike oppgaver kan fremme approprieringsprosessen hos elevene og motivere frem flere løsninger, og oppgaver som er kognitivt krevende kan derfor fremme problemløsning og resonnering (Wæge & Nosrati, 2018). Som Polya (1957) også skrev, påpeker Wæge og Nosrati (2018) at oppgavene må skape nysgjerrighet hos elevene, motivere dem til å jobbe konsentrert over tid, og utfordre elevene i tillegg til å fremme refleksjoner omkring egen tenkning og egne arbeidsmåter. Slike oppgaver kan bidra til å fremme en positiv klasseromskultur hvor hele klassen jobber sammen mot et felles mål, mens alle allikevel jobber på sitt eget nivå.

### 2.1.5 Problemløsningsbegrepet og noen utvalgte problemløsningsmodeller

Mason og Davis (1991) slo fast at alle kan finne glede i problemløsning og at matematisk briljans ikke er nødvendig for å delta. Videre sa de at alle kan og alle tenker matematisk. Deres syn på problemløsning er erfaringsbasert, og denne type forskning innenfor problemløsning har for det meste fokusert på å skissere strategier (Mason & Davis, 1991). Problemløsning er en kognitiv, metakognitiv, sosiokulturell og affektiv prosess som omhandler å finne ut hvordan vi kan løse et matematisk problem når vi ikke allerede vet hvordan vi kan løse det (Bjuland, 2002). Det er altså et problem problemløseren ikke har sett tidligere, og derfor har han ikke en ferdig oppskrift på hvordan han skal løse det. Blum og Niss (1991) beskrev problemløsning som hele prosessen fra elevene begynner å lese problemet, via prosessen som er knyttet til å løse det, til de har reflektert over mulige løsninger på problemet. Jeg har på bakgrunn av disse beskrivelsene valgt å definere problemløsning i denne studien som hele prosessen med å løse et matematisk problem. Jeg har valgt å bruke problemløsningsmodellene til Borgersen (1994), Mason med kollegaer (2010) og Polya (1957) som grunnlag for selve problemløsnings-begrepet, da dette er mye brukte modeller i matematikkdidaktikk, i hvert fall Polya og Mason med kollegaers modeller. Jeg vil i de neste kapitlene gi en beskrivelse av de tre modellene.

#### *Polyas fire steg*

Polya (1957) var en av de første som skrev om problemløsning slik vi kjenner det i dag. I sin bok, How to solve it (1957), formulerer forfatteren en rekke spørsmål som kan være til stor hjelp når elever skal jobbe med problemløsningsoppgaver. Det kan være spørsmål som: «Hva er det ukjente?, «Hva vet jeg?» eller «Kjenner jeg til andre problemer som likner?». Han deler selve problemløsningsprosessen inn i fire steg, og til hvert steg introduserer han slike strategiske spørsmål som kan bistå elevene på sin vei mot en løsning på problemet de jobber med (Polya, 1957). De fire stegene er som følger:

1. Forstå problemet
2. Lag en plan
3. Gjennomfør planen
4. Se tilbake

Det første steget er å forstå problemet. “It is foolish to answer a question that you do not understand” (Polya, 1957, s. 6). For at elevene skal klare å løse problemet, er det viktig at problemene elever presenteres for er på et slikt nivå at elevene har reelle muligheter til å forstå dem og deretter løse dem. Språket i oppgaveteksten må være forståelig for eleven og oppgaven må være formulert slik at elevene føler at de forstår hva problemet handler om. «It is sad to work for an end that you do not desire» (Polya, 1957, s. 6). Elevene må altså ha et ønske om å finne løsningen på problemet i tillegg til å forstå det. Det er derfor viktig at læreren er bevisst på å velge ut problemer med relevant vanskelighetsgrad og problemer som vekker interesse og nysgjerrighet hos elevene når problemløsningsoppgaver blir brukt i undervisningssammenheng. I denne første fasen må elevene mestre å gjenkjenne hva som er kjent og hva som er ukjent i problemet. Elevene bør bli vant til å skille ut hva som hører til det kjente/det ukjente, og det kan være lurt å skrive dette ned (Polya, 1957). Tre spørsmål som læreren bør stille elevene eller som problemløseren bør stille seg selv når de har lest oppgaven, er: 1. Hva er det ukjente?, 2. Hva er dataene? og 3. Hva er betingelsene? (Polya, 1957, s. 7). Elevene bør betrakte de viktige delene av problemet oppmerksomt, flere ganger og fra ulike sider. Hvis eleven kan tegne en figur av problemet, bør dette gjøres, og både det eleven vet og ikke vet bør skrives på figuren. Det kan være nyttig å etablere en hensiktsmessig notasjon for det som er ukjent.

Det kan være en lang vei fra å forstå problemet til å lage en plan, som er steg 2. Noen ganger kan planen for å finne en løsning være åpenbar, andre ganger må elevene virkelig jobbe for å finne denne, og den åpenbarer seg litt etter litt. Vi kan si at eleven har en plan når han vet hva som må gjøres, altså hvilke beregninger, modelleringer og konstruksjoner han må gjøre for å finne en løsning (Polya, 1957). Kanskje eleven har løst et liknende problem tidligere som han kan dra nytte av nå? Da bør han se hvordan han løste dette problemet og kanskje få starthjelp til hvordan han kan løse det nye problemet. De idéene eleven kommer opp med, baserer seg på elevens tidligere erfaringer og kunnskaper. Denne erfaringen og kunnskapen kan hjelpe eleven til å finne en sammenheng mellom det han vet og det som er ukjent (Polya, 1957). Det er viktig at eleven selv lager planen og føler eierskap til den, ellers er det lett at han glemmer planen og ikke følger den i det han går i gang med å jobbe seg mot løsningen av problemet. Læreren kan og bør motivere elevene til å kontrollere hvert steg i planen slik at den ikke fører elevene i gal retning allerede fra start (Polya, 1957).

Den største jobben ligger i steg 1 og 2. Har eleven klart å forstå problemet og lage en god plan, vil det å gjennomføre planen være en enklere jobb enn å lage den (Polya, 1957). Steg 3 i Polyas modell er nettopp å prøve ut planen. Eleven må se til at hvert steg i løsningsprosessen er gjort riktig, og det inngår også i dette steget å bevise at hvert steg i arbeidet er matematisk korrekt.

Mange elever, også de som Polya beskriver som svært flinke, ser seg raskt om etter nye oppgaver når de har løst en oppgave. Ved å gjøre det, går de glipp av en viktig og lærerik fase av arbeidet (Polya, 1957). Polya mener det er viktig at elevene ser tilbake og revurderer både løsningsmetoden de har brukt og resultatet de har kommet frem til. Dette er det fjerde og siste steget i hans modell. Ved å bruke tid på å se tilbake på hele løsningsprosessen, ved å revurdere og gå over løsningene og veien til dem, kan elevene konsolidere kunnskapen sin og utvikle evnen sin til å løse problemer. En god lærer bør innprente hos elevene sine at ingen problemer er fullstendig oppbrukte – det finnes alltid noe mer du kan gjøre! Elevene kan alltid forbedre sin forståelse av problemet (Polya, 1957). Her bør elevene stille seg spørsmålene; «Kan vi sjekke resultatet?», «Kan vi sjekke argumentene vi har brukt?» og «Kunne jeg kommet frem til det samme svaret på en annen måte?». Til slutt bør elevene stille seg spørsmålet om de kan bruke resultatet de har fått til å løse andre problemer (Polya, 1957).

Polyas firetrinnsmodell for problemløsning er ikke en stringent metode, slik jeg tolker det. Denne modellen er syklisk, noe som fører til at de fire stegene ikke nødvendigvis må følges kronologisk. Modellen er heller en veiledende inndeling som skal hjelpe elevene til å stille strategiske spørsmål og til å tenke fremover. Polya (1957) var en av de første til å utvikle en trinnmodell for problemløsning. I årene som fulgte har andre forskere også laget slike modeller. En av dem er Borgersen (1994). Hans modell tar utgangspunkt i Polyas firetrinnsmodell for problemløsning, men han har utvidet modellen slik at den består av syv trinn. Jeg vil gå nærmere inn på denne modellen under.

#### *Borgersens syv trinn*

Borgersens (1994) syvtrinnsmodell er som nevnt en utvidelse av Polyas (1957) firetrinnsmodell. Denne modellen er i likhet med Polyas (1957) modell, også en syklisk modell. Modellen tar utgangspunkt i et geometrisk problem, men trinnene kan også brukes på andre matematiske problem. Den består av følgende syv trinn:

1. Analysere og definere
2. Modellere eller tegne
3. Kvalifisert gjetning gjennom prøving og feiling
4. Finne hypoteser
5. Utvikle bevis
6. Reflektere over løsninger og løsningsprosesser
7. Generalisere og formulere nye problemer

Det første elevene må gjøre når de skal jobbe med problemløsning, er å forstå problemet. De trenger å analysere oppgaveteksten og definere de ulike ordene og begrepene i denne. Som Polya (1957) formulerer også Borgersen (1994) strategiske spørsmål som elevene bør stille seg i arbeidet med problemet de skal løse. Hva er situasjonen og hva er problemet? Forstår vi alle ordene og meningen med dem? Forstår vi situasjonen og problemet? Det er viktig at elevene blir enige om hvordan problemet er definert. Det er også viktig at læreren gir elevene problemer hvor de kan bruke kunnskap de allerede har, og at elevene kan relatere seg til problemet (Borgersen, 1994). Gir problemet mening for meg, bør eleven spørre seg. Om ikke, er det mulig å finne en kontekst hvor problemet gir mening? Dette er også spørsmål problemløseren bør stille seg i trinn 1.

I det neste trinnet i Borgersens (1994) modell oppfordres elevene til å finne eller lage en modell eller tegning over situasjonen. Om elevene for eksempel skal jobbe med et problem som er relatert til en fotballbane, kan det være nyttig for elevene å besøke en slik bane og lage en modell eller en illustrasjon av banen i mindre målestokk. Det kan være nyttig på alle nivåer i matematikk å lage en tegning av problemet som problemløseren ønsker å løse (Borgersen, 1994). Det kan være en del av analysen og er en god måte å komme i gang på, samt at problemløseren kan oppdage spor som han kan følge videre.

Kvalifisert gjetning ved prøving og feiling er Borgersens (1994) tredje trinn. Når elevene har laget seg en god modell over problemet, ligger alt til rette for å prøve ut ulike idéer elevene har. Ved å prøve ut ulike idéer, får elevene en bedre oversikt over problemet. Ved å gjøre ulike beregninger, justere antagelsene etter resultatene og prøve på nytt, bygger elevene opp en intuisjon for problemet (Borgersen, 1994). Når hver ny antagelse er bygget på erfaringen av den forrige, kalles det kvalifisert gjetning. I prosessen med kvalifisert gjetning begynner elevene å se etter mønstre og idéer som kan gi dem grunnlag for å finne en hypotese. Dette er Borgersens (1994) fjerde trinn. På dette stadiet av prosessen må elevene se etter de essensielle delene og begrepene i problemet, og gjøre det rent matematisk. Her prøver elevene å formulere en generell løsning som skal bli deres hypotese. En hypotese er kun en antagelse som krever utprøving, og som kan føre til at elevene må moderere, reformulere eller kanskje til og med avvise hypotesen (Borgersen, 1994). Når elevene har utarbeidet en hypotese, vil det være naturlig å prøve å bevise denne. Om hypotesen kan bevises, er det et teorem. Dette trinnet krever mye arbeid, og det kan være nyttig å gå tilbake til tidligere trinn for å se på problemet med nye øyne (Borgersen, 1994). Det kan være mange måter å bevise et teorem på. Noen ganger vil elevene oppleve å stå fast og ikke komme seg videre, og da kan det være lurt å ta seg en pause for så å ta frem problemet igjen på et senere tidspunkt. Ikke alle problemer kan bevises, og det er derfor viktig at elevene øver seg opp til å sette pris på hele prosessen med å løse et problem, ikke bare den delen der løsningen åpenbarer seg og kan bevises (Borgersen, 1994). Det gir på den annen side en god følelse for elevene å se hvordan noe kan bevises og deretter klare å utføre dette beviset. Når dette trinnet er besteget, bør elevene reflektere over løsningene de har fått og de løsningsprosessene de har vært igjennom. Dette trinnet tilsvarer Polyas (1957) fjerde steg, å se tilbake. Når elevene er i denne fasen, har de også søkelyset på å se etter andre karakteriseringer. Før elevene legger fra seg problemet, er det svært verdifullt for dem å generalisere og se etter utvidelser av problemet (Borgersen, 1994).

#### *Entry, Attack, Review – Mason med kollegaers tre faser*

Mason med kollegaer (2010) beskriver problemløsning gjennom tre faser som de kaller;

1. Entry
2. Attack
3. Review

Jeg velger å oversette disse ordene til inngangsfasen, gjennomføringsfasen og vurderingsfasen. De tre fasene kobles naturlig sammen gjennom de matematiske tankeprosessene spesialisering, generalisering, conjecturing og convincing (Bjuland, 2002; Mason & Davis, 1991). Jeg velger i denne oppgaven å bruke oversettelsen antagelser/hypoteser og overbevisning for de to siste begrepene. Når elevene skal begynne å jobbe med en problemløsningsoppgave, bruker de ofte alt for liten tid på å lese oppgaveteksten og til virkelig å forstå problemet (Mason et al., 2010). Det er i inngangsfasen at elevene legger grunnlaget for en effektiv løsningsprosess, og det er derfor viktig at det legges ned tilstrekkelig med tid og innsats i denne fasen. Elevene bør starte med å lese oppgaven grundig, og å ta til seg informasjonen som gis i teksten, samt finne ut hva det egentlig spørres om (Mason et al., 2010). Arbeidet elevene legger ned i inngangsfasen, legger grunnlaget for hvor effektivt de klarer å jobbe i gjennomføringsfasen og derav løse problemet. Det er derfor viktig at de anerkjenner viktigheten av å sette seg inn i hva oppgaven egentlig spør om. I tillegg til å forstå problemet, anbefaler Mason med kollegaer (2010) at elevene gjør noen tekniske forberedelser til det videre arbeidet, som for eksempel å bestemme seg for en hensiktsmessig notasjon og/eller et verktøy for å registrere resultatene de får fra spesialiseringen, for eksempel tabell, diagram, graf eller liknende. Å spesialisere, altså prøve ut enkle tilfeller av problemet, kan ofte være til stor hjelp i denne fasen. Da vil elevene lettere se et mønster, og det kan føre elevene til en bedre forståelse av problemet. Mason med kollegaer (2010) presenterer tre spørsmål elevene bør stille seg selv som en hjelp til å strukturere arbeidet sitt i denne første fasen. Spørsmålene er som følger; 1. Hva vet jeg?, 2. Hva ønsker jeg å vite? og 3. Hva kan jeg introdusere?. Det kan være til stor hjelp å skrive ned det en vet (Mason et al., 2010). Hva vet elevene ut ifra spørsmålet og hva vet de fra tidligere erfaringer? Elevene har kanskje jobbet med et liknende problem før, og da vet de noe om hvordan de gikk frem for å løse det problemet. For å svare på det andre spørsmålet, trenger elevene å finne ut av hva de må gjøre. Det kan være nyttig å prøve å formulere spørsmålet med egne ord. Da kan det være lettere å se hva de skal finne ut av. Under spørsmålet om hva de kan introdusere, hører notasjon, diagrammer og tabeller til. Om elevene klarer å skrive ned noe til hvert av de tre spørsmålene, kan dette være gode strategier for å legge et godt grunnlag for det videre arbeidet med problemløsningen (Mason et al., 2010). Vi ser tydelige likhetstrekk mellom Mason og kollegaers første fase, Borgersens (1994) trinn 1 og 2 og Polyas (1957) første steg, ved at alle får frem viktigheten av at problemløseren forstår problemet før han begynner å jobbe med det.

Prosessen med å løse problemet går inn i gjennomføringsfasen når eleven føler at han har forstått problemet og gjort det til sitt eget. Denne fasen varer helt til problemet er løst. Denne fasen kan by på komplekse og varierte matematiske aktiviteter, og krever mer spesialisering i tillegg til generalisering (Mason et al., 2010). Å gå fra det spesielle til det generelle er ifølge Bjuland (2002) når spesielle tilfeller blir modifisert til generelle egenskaper ved å sette søkelyset på noen likhetsaspekter. Det handler altså om å generalisere antagelser eller problemer fra det spesielle til en mer modifisert sammenheng (Bjuland, 2002). Når elevene prøver ut flere enkle, spesielle tilfeller, er det som sagt lettere å se mønster og sammenhenger som kan lede dem til en generalisering. Når elevene har generalisert problemet, kan det igjen føre til antagelser/hypoteser som igjen kan sjekkes ved spesialisering (Mason et al., 2010). Det er altså en viktig del av denne fasen å finne antagelser og overbevisende begrunnelser for dem i tillegg til de nevnte spesialisering og generalisering. Elevene bør teste ut mange ulike tilnærminger til problemet og ulike idéer de har. Det å oppdage og å jobbe med mønster og sammenhenger er en kreativ handling, og det kan være en fordel å ha nødvendig matematisk kunnskap i dette arbeidet (Mason et al., 2010). Det er i denne fasen elevene vil oppleve frustrasjonen ved å sitte fast (STUCK), men også gleden ved plutselig å se en løsning (AHA). Når nye idéer oppstår, kan arbeidet gå raskt fremover. På den annen side, når alle idéene har blitt prøvd ut, kan lange perioder med venting på ny innsikt eller på ny tilnærming karakterisere fasen. Istedenfor å avslutte arbeidet for godt når dette oppstår, bør elevene øve seg på å gjenkjenne når de står fast, rolig akseptere det og tenke at dette er en mulighet til å lære (Mason et al., 2010). Å komme opp med antagelser er en viktig del av å utvikle matematisk læring, siden det å uttrykke hvordan vi tenker hjelper oss med å organisere tankene våre. Når elevene jobber med antagelsene sine, dukker det naturlig opp to spørsmål: «Why can it not be done?» og «All right, what can be done?» (Mason et al., 2010, s. 61). Overgangen fra at elevene spør seg om hvorfor antagelsen ikke stemmer til at de heller spør seg om hva som kan gjøres, er et viktig aspekt ved denne prosessen. Grunnen er at ved å åpne opp det opprinnelige spørsmålet, generalisere eller endre det, vil de kanskje oppdage en større sammenheng eller større mønstre vil dukke opp (Mason et al., 2010). Om antagelsene elevene har gjort kan bli overbevisende begrunnet, har elevene funnet løsningen på problemet (Mason et al., 2010). Overbevisning er å svare på hvorfor antagelsene du har gjort alltid er sanne. Å svare på hvorfor, innebærer å "convince yourself, convince a friend and convince an enemy» (Mason et al., 2010, s. 95). For å kunne være i stand til å overbevise både seg selv, en venn og en skeptiker, må elevene kunne rettferdiggjøre alle stegene i argumentasjonen de har brukt. Å overbevise seg selv om at en har korrekte antagelser krever minst innsats, men for å overbevise en skeptiker trenger problemløseren å begrunne antagelsene sine med solide bevis. Dette kan sees på som en utvikling av antagelsen (Mason et al., 2010). Som første fase, kan også gjennomføringsfasen knyttes til Borgersen (1994) og Polya (1957), henholdsvis 3., 4. og 5. fase i Borgersens syvtrinnsmodell, og 2. og 3. fase i Polyas firestrinnsmodell.

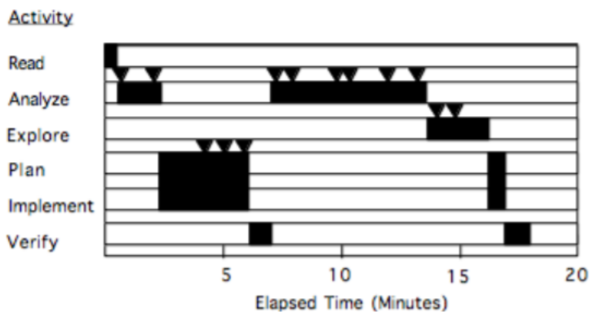
Den tredje fasen, vurderingsfasen, starter når elevene har funnet en rimelig tilfredsstillende løsning på problemet sitt, eller når de er i ferd med å gi opp (Mason et al., 2010). Polya (1957) kalte denne fasen for å se tilbake, Borgersen (1994) for å reflektere og generalisere. Mason med kollegaer (2010) refererte til en Jim Wilson som hadde påstått at Polyas fjerde fase blir mye snakket om, men lite brukt. Allikevel er de fleste pedagoger enige om at det er nødvendig for elevene å ta noen steg tilbake og vurdere arbeidet de har gjort etter at problemet er løst for å lære av erfaringene de har gjort seg. «After all, one thing we do not seem to learn from experience is that we do not often learn from experience alone» (Mason et al., 2010, s. 14). Vurderingsfasen handler altså om at vi må se tilbake på hva som har blitt gjort for å forbedre og utvide tankeferdighetene våre, og for å prøve og sette løsningen vi har funnet inn i en mer generell sammenheng. Mason med kollegaer (2010) nevner tre ord som er nyttige å huske på for elevene når de ser tilbake; å *kontrollere* hva du har gjort, å *reflektere* over viktige hendelser og å *utvide* prosessene og resultatene til en bredere kontekst. Elevene bør altså gå over hva de har gjort for å kontrollere argumenter, sjekke om de har gjort riktig og gå over beregninger for å påse at de er gjort slik det var tenkt. Hvis elevene skulle oppdage en feil, må de kanskje gå tilbake til fase 1 eller 2. I tillegg bør elevene se på resultatene av antagelsene sine og sjekke om de er rimelige. Til slutt bør elevene kontrollere at de virkelig har svart på det opprinnelige spørsmålet. Refleksjonsfasen kan sees på som den viktigste fasen for å forberede matematisk tenkning. Denne fasen er også sterkt knyttet til å utvide problemet, altså å sette resultatet inn i en bredere kontekst. Ved å gjøre slik, kan elevene lettere beherske matematikk og problemløsning. Det kan også være en idé i å skrive ned løsningen sin for noen utenforstående om en ønsker en større fordel av denne siste fasen (Mason et al., 2010).

De tre fasene til Mason et al. (2010) har en tendens til å være litt uklare rundt kantene fordi de er opptatt av erfaringskvaliteter og ikke mekanisk aktivitet. Når elevene jobber i én fase, kan de godt bli ført tilbake til en tidligere fase eller videre til endelig konkludering. Bak alle aktivitetene som er beskrevet i de tre fasene, så ligger prosessene spesialisering og generalisering.

Det er på flere måter de samme elementene som inngår i alle de tre problemløsningsmodellene jeg har beskrevet, selv om de er delt opp i litt ulike faser og steg. De kan alle være til god hjelp når elevene skal løse problemer i matematikk. Disse fasene eller stegene kan sees på som strategier elevene kan bruke når de jobber utforskende. Bjuland (2002) beskriver spesialisering og generalisering både som prosesser og som strategier, noe jeg også finner meningsfullt. Jeg vil derfor liste dem opp som egne strategier i kapittel 2.1.7.

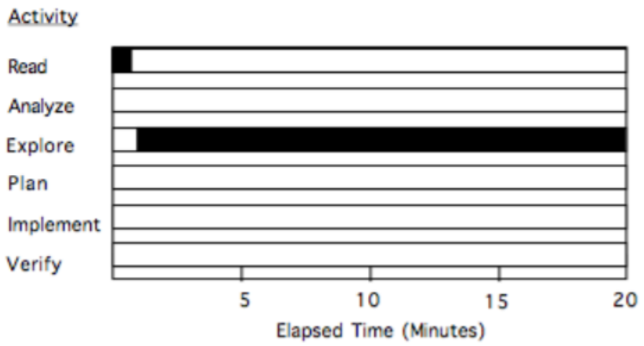
### 2.1.6 Nybegynnere og erfarne problemløsere

Før jeg går i gang med å beskrive de ulike strategiene som brukes i problemløsning, vil jeg bruke et avsnitt på den første fasen i alle tre modellene som Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason med kollegaer (2010) henholdsvis kaller «å forstå problemet», «analysere og definere» og «inngangsfasen», og trekke noen tråder til Schoenfeld (1985, 1992). I Schoenfelds PhD-avhandling (1985) gjennomførte han en studie hvor han så på én matematiker og hundre opptak av videregående-elever mens de jobbet med problemløsning-oppgaver. Den erfarne matematikeren (figur 1) brukte over halvparten av tiden han hadde til rådighet i denne første fasen, altså til å forstå problemet. Trekantene som er tegnet inn i figuren, viser til kommentarer problemløseren har gjort seg underveis med tanke på hvor han er i prosessen og hvor han har stilt seg monitorerende spørsmål. Han brukte de 20 minuttene han hadde fått tildelt til analysering og strukturert utforskning, heller enn å følge sin første idé. Han forsikret seg om at han var på riktig spor, og unngikk ustrukturert utforskning og implementering. Jeg vil derfor bruke tid på nettopp denne strategien, å forstå problemet, i kapittel 2.1.7, hvor jeg omtaler strategier i problemløsning.




Figur 1: Oversikt over hvordan en matematiker jobber med et matematisk problem (Schoenfeld, 1992, s. 356).

Elevene derimot, brukte i mange tilfeller følgende strategi: «Read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water!" (Schoenfeld, 1992, s. 356). Elevene (figur 2) startet altså med å lese problemet, valgte raskt en retning for arbeidet og holdt på denne resten av tiden de hadde til rådighet selv om den ikke tok dem fremover. Til tross for at de hadde kunnskapen de trengte, klarte ikke elevene å finne en løsning. Dette kan ha en sammenheng med at de fleste elever ikke har så mye erfaring med å jobbe med problemløsningsoppgaver i matematikk (Schoenfeld, 1992).




Figur 2: Oversikt over hvordan en elev uten særlig mye erfaring med problemløsning jobber med et matematisk problem (Schoenfeld, 1992, s. 356).

Lærerens oppgave må derfor være, gjennom metakognitive ferdigheter og veiledning, å hjelpe elevene til å bli mer bevisste på hvordan de kan jobbe utforskende. Jeg vil komme tilbake til denne studien i neste kapittel under avsnittet om monitorering og kontroll. For å innlede neste kapittel, Strategier i problemløsning, nevner jeg her at elevene i studien manglet verktøyet for å reflektere over og endre på de valgene de hadde gjort helt i starten av prosessen, og derfor ville et galt strategivalg forhindre at elevene fant en løsning på problemet (Schoenfeld, 1992).

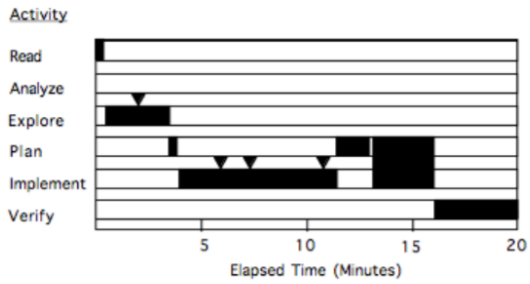
### 2.1.7 Strategier i problemløsning

Når vi leser litteratur om problemløsning skrevet av ulike forskere, oppdager vi at ordene metode, strategi, prosedyre, modell, heuristikk, tilnærmingsmåte, teknikk og måte brukes litt om hverandre (Kongelf, 2019). Jeg velger å se på en problemløsningsstrategi på samme måte som Kongelf (2019), altså som en metode en elev bruker bevisst når han eller hun jobber med problemløsning. I Store norske leksikon kan vi lese at «heuristikk er en enkel fremgangsmåte eller strategi som en problemløser kan ta i bruk for å øke sjansen til å løse en oppgave». Mason og Davis (1991) sier at heuristikker er prinsipper som gir problemløseren en følelse av hva som sannsynligvis er riktig før han har funnet et formelt bevis. «Hvis det er sant for disse tilfellene, så vil det sikkert være sant i alle tilfeller» er en heuristikk som blir brukt av matematikere, men som skoleelever helst ikke bør bruke før de har erfart gleden av å gi et skikkelig bevis (Mason & Davis, 1991). En annen kjent heuristikk er «reasoning by analogy», altså tanken om at hvis to ting er like, så fører det til at det som er sant for den ene, nødvendigvis også må være sant for den andre. Kongelf (2019) beskriver heuristiske tilnærmingsmåter som «rules of thumb», tommelfingerregler, som brukes for å klare og løse en problemløsningsoppgave med suksess, noe som bistår problemløseren med å lettere forstå problemet og komme inn på riktig spor mot en løsning. Mason og Davis (1991) hevder at begrepet heuristikk er blitt utvidet til også å dekke gode problemløsningsstrategier slik som; prøv å jobbe baklengs, se etter mønster, løs et enklere problem, gå til det ekstreme, kjenner du til et tilsvarende tilfelle? og prøv ut noen eksempler, i tillegg til mange flere. Resultatene av heuristisk tenkning er provisorisk, og krever verifisering og bevis (Mason & Davis, 1991).

I sine tre faser for problemløsning, beskriver Mason med kollegaer (2010) flere nyttige matematiske tankeprosesser, blant annet spesialisering og generalisering. Spesialisering er et begrep som refererer til når problemløseren forenkler problemet og prøver ut spesielle tilfeller av det som han enkelt kan beherske. For eksempel om en elev blir gitt oppgaven: Forestill deg at du skal brette et papir dobbelt, og så dobbelt igjen uten å rotere det, så dobbelt igjen et par ganger til. Hvor mange streker har papiret når du bretter det ut igjen? (Mason & Davis, 1991, s. 8). Her er det hensiktsmessig å bruke strategien spesialisering, altså forenkle problemet ved å prøve ut noen spesielle tilfeller. Istedenfor å forestille deg brettingen i hodet, kan det være enklere å fysisk brette papiret. I tillegg kan det være lurt å teste ut ett brett, så to brett, så tre brett osv., mens du skriver ned antall brett i en tabell for hvert tilfelle. Da har problemløseren spesialisert, og forhåpentligvis kan han etter hvert se et mønster og videre finne en generell løsning. For de aller fleste vil dette være en enklere tilnærming til problemet enn om de prøver å forestille seg brettingen og mønsteret i hodet. Spesialisering er altså en strategi som hjelper problemløseren å finne en vei inn til problemet som han behersker med mer selvsikkerhet enn om han skulle angrepet problemet direkte (Mason & Davis, 1991). Når elevene spesialiserer, kan de bruke flere andre strategier som for eksempel å se etter mønster, lage en tabell, løse et enklere problem og liknende. Meningen med spesialisering er alltid å gi en god følelse med problemet, å hjelpe til med å forstå hva problemet handler om og å gjøre det enklere for problemløseren å oppdage mønstre som legger grunnlaget for neste strategi, å generalisere. Mason med kollegaer (2010) kaller spesialisering og generalisering hver sin side av samme mynt. Å generalisere er å gå fra noen spesielle tilfeller til å lage antagelser om allmenngyldighet. «Generalizations are the life-blood of mathematics» (Mason et al., 2010, s. 8). Prosessen med å generalisere starter når problemløseren aner et mønster, selv om han ikke kan beskrive det fullt ut.

Hos Polya (1957) kan vi lese at heuristikker, på latin ars inveniendi som oversettes «kunsten å finne på», er navnet på en bestemt studiegren innen logikk, filosofi og psykologi som etter hva han skriver, nesten er glemt i dag. Direkte oversatt sier Polya at «målet med heuristikk er å studere metodene og reglene for oppdagelse og oppfinnelse» (Polya, 1957, s. 112, min oversettelse). Heuristikk viser til noe som gir hjelp til å oppdage, og strategier som brukes i dette arbeidet kommer ved erfaring og ved å observere andre løse problemer (Polya, 1957). Problemløsningsstrategier er en av de fem kategoriene Schoenfeld (1992) anser som sentral når elevene jobber med problemløsning. Når vi skal løse et problem, bruker vi bevisst ulike strategier for å drive arbeidet vårt fremover. Ved at problemløsningsmetoder brukes over en viss tid, kan slike problemløsningsstrategier utvikles (Kongelf, 2019). Ulike elever benytter seg av ulike strategier når de jobber med problemløsning (Schoenfeld, 1992). Prøving og feiling kan være et eksempel på en slik strategi. Her vil elevene prøve, gjennom kvalifisert gjetning, å komme frem til en antagelse som de senere kan bevise eller motbevise. Elevene kan også lete etter mønster, tegne figur eller lage tabeller og modeller, eller finne antagelser gjennom å resonnere logisk. Jo mer erfaring elevene får med problemløsning, jo flere strategier vil de ha i repertoaret sitt (Schonfeld, 1992).

Som nevnt over har Schoenfeld (1992) i sin studie sett på hvordan én matematiker og hundre skoleelever jobbet med en problemløsningsoppgave. Grunnen til at jeg vil komme tilbake til denne studien her, er at Schoenfeld (1992) beskriver hva som skjer når læreren stiller elevene monitorerende spørsmål som skal bidra til at elevene tenker gjennom hva de gjør og hvorfor de gjør dette. Ved at læreren stiller elevene slike spørsmål, vil læreren bidra til at elevene etter hvert blir bedre rustet til selvmonitorering. Dette kan sees på som en strategi i elevenes arbeid med problemløsningsoppgaver.




Figur 3: Oversikt over hvordan elever som har vært gjennom et kurs i problemløsning med fokus på monitorering jobber med et matematisk problem (Schoenfeld, 1992, s. 357).

Som vi ser av beskrivelsen, viser figur 3 en oversikt over hvordan den samme elevgruppa som vi så på tidligere (se figur 2) arbeidet med oppgaver i problemløsning etter at de hadde gjennomgått et kurs i problemløsning hvor de ble veiledet av læreren sin ved at denne stilte monitorerende spørsmål. Etter hvert ble elevene vant til at læreren stilte slike spørsmål, og begynte derfor å stille slike spørsmål til seg selv for å være forberedt før læreren kom. Trekantene i figuren viser til hvor og når elevene stilte seg selvmonitorerende spørsmål. Vi ser en tydelig endring i elevenes måte å jobbe med et matematisk problem på fra før (se figur 1) til etter at de hadde gjennomgått kurset (se figur 3). Tidligere brukte elevene svært liten tid på å forstå spørsmålet, men brukte mesteparten av tiden sin til å prøve og feile uten særlig refleksjon rundt hvorfor de gjorde som de gjorde (se figur 1). Etter kurset stilte elevene seg selv flere monitorerende spørsmål enn tidligere, og brukte mer tid til refleksjon over hva de gjorde og hvorfor (se figur 3). Det er ikke så lett for en lærer å undervise elevene i metakognitive ferdigheter, altså å hjelpe elevene til å bli bevisste på egen tenkning ved hjelp av et indre språk. Dette er allikevel en ferdighet som er nært knyttet sammen med problemløsning i matematikk og ulike strategier elevene kan ta i bruk i dette arbeidet. Når elevene jobber sammen i grupper, kan de stille hverandre monitorerende spørsmål om hverandres antagelser, arbeid og fremgang. Slik kan elevene øve seg på å eksternalisere tankene sine ved å argumentere for hvordan de har løst oppgaven, sette ord på hvordan de har appropriert problemet og sette disse strategiene inn i en matematisk sammenheng.

Jeg ønsket å velge ut konkrete strategier jeg skulle sette søkelyset på og se etter når jeg observerte elevene mine. I tillegg så jeg nytten av å ha en kodingsmanual som kunne hjelpe meg til å få en oversikt over hvilke strategier elevene jeg observerer brukte og hvor ofte de brukte disse. Jeg fant en slik kodingsmanual som Kongelf (2011) har utformet, og denne er brukt i flere masteroppgaver, blant annet masteroppgavene til Harder (2013) og Aaseth (2016). Jeg valgte derfor også å bruke denne i min studie.

Tabell 1: Kodingsmanual basert på Kongelf, oversatt til norsk av Harder (2013, s. 28)

| **Heuristiske metoder** | **Beskrivelse** |
|---|---|
| **1** Se etter et mønster | Identifisere mønster i den gitte informasjonen ved nøyaktig observasjon av felles egenskaper, variasjoner eller forskjeller ved tall, former og liknende i problemet |
| **2** Lag en systematisk tabell | Lage en systematisk liste eller tabell som inneholder den gitte informasjonen eller de ulike mulighetene. |
| **3** Lag en illustrasjon | Bruke den gitte informasjonen til å lage en illustrasjon/visualisering for å presentere problemet visuelt. |
| **4** Prøv og feil | Gjøre en rimelig antakelse om hva svaret er, og så sjekke om resultatet blir riktig. Gjenta prosedyren hvis nødvendig for å finne svaret eller en god tilnærming. |
| **5** Løs deler av problemet | Dele et problem i flere delproblemer, for så å løse disse ett etter ett, og finne løsningen på det opprinnelige problemet |
| **6** Jobb baklengs | Tilnærme seg problemet baklengs fra dets resultat eller løsninger for å finne hvilke krav som må tilfredsstilles |
| **7** Tenk på et liknende problem | Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet. |
| **8** Gjør problemet enklere | Forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet uten å endre problemet matematisk. |
| **9** Se problemet fra en annen side | Tilnærme seg problemet med en annen vinkling når tidligere tilnærminger ikke fører frem. |
| **10** Bruk digitale hjelpemidler | Bruke digitale hjelpemidler som CAS, Geogebra, MU, regneark eller andre programmer for å løse problemet. |

Som tidligere nevnt har forskere som for eksempel Borgersen (1994), Mason med kollegaer (1991, 2010), Polya (1957) og Schoenfeld (1985, 1992) beskrevet ulike heuristikker som kan være nyttig for elever å ha kjennskap til når de jobber med problemløsningsoppgaver i smågrupper. I min studie valgte jeg å bruke de ti heuristiske metodene beskrevet i Kongelf (2011) sin kodingsmanual, og jeg knyttet dem til strategiene som blir nevnt av de andre forskerne som er nevnt over.

## 2.2 Et sosiokulturelt perspektiv på problemløsning

I dette kapitlet vil jeg presentere det læringsteoretiske perspektivet jeg har valgt for min studie. I klasserommet foregår utforsking og problemløsning gjennom samarbeid mellom elever i smågrupper og mellom lærer og elever. Da jeg i min studie har observert fire elever som samarbeider i en smågruppe om å løse problemer, er det relevant å koble studien min opp mot et sosiokulturelt læringsperspektiv, et læringsperspektiv jeg presenterer i delkapittel 2.2.1. Her vil jeg hovedsakelig støtte meg på teorien fra Säljö (2001) og Vygotskij (1978). Et av forskningsspørsmålene mine spør hvilken rolle medierende verktøy spiller for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i sin problemløsningsprosess. Jeg vil derfor presentere aktuell teori fra blant andre Carlsen (2008, 2009, 2010), Dysthe (2001) og Säljö (2001), og om dette emnet i delkapittel 2.2.2. I det siste delkapitlet, 2.2.3, vil jeg ta for meg hvordan dialog og samarbeid i smågrupper kan påvirke læringen til elever som jobber med problemløsning. Her vil jeg blant annet bruke teorien fra Bjuland (2002), Carlsen (2008, 2010) og Dysthe (2001).

### 2.2.1 Et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling

Denne studien bygger på Vygotskijs læringsteorier og forsøk fra 1920- og 1930-tallet, samtidig som jeg bruker forskningen til blant andre Säljö (2001, 2005) som argumenterer for at et sosiokulturelt læringssyn har relevans for læring i en sosiokulturell institusjon som skole.

Et sosiokulturelt læringssyn handler om å se på hvordan læring skjer gjennom sosial og kulturell praksis. Det vil si at læring skjer gjennom interaksjon med andre mennesker, samspillet med miljøet rundt og bruken av verktøy som støtte for det som læres (Säljö, 2001). Læring og utvikling av kunnskap skjer altså først og fremst gjennom interaksjoner mellom mennesker, og senere blir denne kunnskapen en del av det enkelte menneskets tenkning og handling (jfr. Vygotskij, 1979b). En annen viktig grunnsetning er at det er kulturelt avhengig hvordan mennesker lærer. Menneskers intellektuelle kapasitet og evne til å tenke og lære, er ikke begrenset til medfødte mentale og biologiske evner, men som mennesker er vi kulturelle vesener som interagerer med og tenker sammen med andre mennesker i hverdagslige aktiviteter ved å bruke materielle ressurser (Säljö, 2001). Säljö (2001, side 23) lister opp tre punkter, som han mener er kjernen i sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling. Disse er:

1. Utvikling og bruk av intellektuelle (eller psykologiske/kommunikative) redskaper.
2. Utvikling og bruk av fysiske redskaper (eller verktøy).
3. Kommunikasjon og de ulike måtene mennesker utvikler samarbeidsstrategier i ulike kollektive virksomheter.

Utforskende arbeid og problemløsning i skolen gjøres best i smågrupper hvor elevene samarbeider om å komme frem til en løsning. Elevene har flere å støtte seg på om læreren lar dem jobbe sammen to og to eller i smågrupper. Å samtale om matematikk skjer i fellesskap, og det legges til rette for læring gjennom den matematiske samtalen kombinert med bruken av andre medierende verktøy (Säljö, 2001). Å jobbe med problemer på egenhånd kan være utfordrende, og det kan derfor være svært nyttig å samarbeide med andre elever for å se flere sider av det aktuelle problemet. Sosiokulturell læringsteori bygger nettopp på at det er de sosiale relasjonene som setter i gang læring (Dysthe, 2001). Elevene lærer gjennom samarbeid med andre, og bygger opp kunnskapen sin gjennom erfaringer ved å jobbe sammen og i dialog med andre (Dysthe, 2001). Vygotskijs læringssyn er derfor relevant når vi ser på utforskende arbeid og problemløsning i skolen.

Vygotskijs sosiokulturelle læringsteori er en av de mest betydningsfulle teoriene innen pedagogikk (Säljö, 2001). Ifølge teorien lærer mennesker gjennom aktive, sosiale og kulturelle interaksjoner. Læring manifesterer seg som følge av samspillet mellom individuelle evner og kulturen som mennesket er omgitt av. Vygotskij mener at opplæring ikke bare handler om å tilegne seg nye kunnskaper, men også om å endre sosiale interaksjoner (Säljö, 2001). Vygotskij hevder at læring forutsetter et to-veis samspill mellom individet og miljøet rundt dem (Säljö, 2001). Dette kan manifestere seg på flere måter; gjennom direkte interaksjon med andre, gjennom å observere støttende eller utfordrende modeller, eller via bruk av egnete verktøy (Säljö, 2001). Et sosiokulturelt læringssyn fremmer dialog og samhandling, og i klasserommet vil læreren veilede i form av å stille spørsmål og komme med hint. Disse virkemidlene gir elevene noen å identifisere seg med, og det hjelper dem med å komme videre når de støter på vanskeligheter. En annen del av Vygotskijs sosiokulturelle læringsteori handler om betydningen av språk og symboler (Säljö, 2001). Han antok at disse er avgjørende for kognitiv utvikling og læring, og han anså at barn lærer språket før de begynner å lære symboler. Vygotskijs sosiokulturelle læringsteori har hjulpet til å endre synspunktene på hvordan mennesker lærer. Det har også hjulpet til å forstå kompleksiteten i læring, vektleggingen av det sosiale miljøet samt betydningen av verktøy og teknologi i utdanning.

### 2.2.2 Medierende verktøy

Vygotskij sine skrifter fra 1920- og 1930-tallet la grunnlaget for sosiokulturell læringsteori, og bygger på en antakelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i sosial praksis. Han mente at det er de sosiale relasjonene som setter i gang læringen, og at læring skjer gjennom samhandling med andre. Læringssynet bygger på at språket blir et verktøy for det å tenke (Säljö, 1998). Mennesker tar i bruk språklige og fysiske tilgjengelige ressurser, verktøyer som kulturen legger til rette for. Disse verktøyene bruker menneskene til å skape mening i verdenen omkring seg (Säljö, 2001). Grafer, tegninger og matematiske symboler er eksempler på verktøy som er viktige i undervisningssammenheng. Slike verktøy er menneskeskapte og utviklet over tid.

«Begrepet mediering er derfor viktig. Som mennesker er vi ikke umiddelbart og direkte i kontakt med omverdenen. Den tolkes for oss, og vi håndterer den ved hjelp av ulike verktøy som utgjør deler av vår sosiale praksis» (Carlsen, 2008, side 31, min oversettelse). Mediering er et begrep som beskriver hjelpen eleven får i læringsprosessen, og både lærer og medelever kan være viktige medierende verktøy i en elevs læringsprosess. Medierende verktøy er formidlingsverktøy, og språket er det viktigste medierende verktøyet mennesker bruker (Dysthe, 2001). Medierende verktøy har stor betydning når elever jobber med problemløsning (Carlsen, 2008). Han illustrerer dette med en trekant hvor hvert av hjørnene representerer henholdsvis eleven (subjektet), problemløsningsoppgaven (objektet) og de medierende verktøyene og handlingene elevene bruker i problemløsningsprosessen, for eksempel lærebøker, matematiske symboler, grafiske kalkulatorer og inskripsjoner. Vi kan se på inskripsjoner som skriftlige tegninger og modeller som elevene lager når de jobber med problemløsning (Carlsen, 2009). Når elevene bruker inskripsjoner som medierende verktøy kan det hjelpe dem til lettere å forstå problemet, og i noen tilfeller føre direkte til løsning og bevis (Arcavi, 2003). Trekanten Carlsen (2008) refererer til symboliserer det tette forholdet mellom disse tre enhetene. Inskripsjoner er sammensatt av fysiske og intellektuelle verktøy, og når vi bruker inskripsjoner bevares intellektuelle verktøy fysisk gjennom at vi bruker skriveredskaper. Dette kan senere brukes til kommunikasjon (Säljö, 2001). Carlsen (2008) skriver at når eleven kombinerer bruken av inskripsjoner og språk, så blir dette et medierende verktøy elevene kan anvende i sin problemløsningsprosess og når de kommuniserer med medelever. Inskripsjoner kan medvirke til felles aktivitet og felles fokus blant elevene når de jobber i smågrupper (Carlsen, 2009). Som vi skal se senere, tar elevene i denne studien i bruk inskripsjoner i sitt arbeid med problemløsning.

Medierende verktøy og appropriering er tett knyttet sammen. For at elevene skal kunne appropriere de nye verktøyene er kommunikasjon mellom elevene avgjørende (Carlsen, 2008). Med appropriering menes at elevene gjør matematikken til sin egen ved å ta i bruk det de ser, hører og erfarer. Carlsen (2008) påpeker at appropriering ikke er imitering. Diskursen som skjer i smågruppa med elever er et viktig medierende verktøy. Her presenterer elevene tankene sine for hverandre, og forståelsen for problemet de jobber med utvikles gjennom diskusjonen. Elevenes diskurs gjør det også mulig å identifisere de ulike strategiene smågruppa tar i bruk for å løse problemet. Videre sier Carlsen (2008) at denne approprieringen skjer gjennom en gradvis prosess:

> *En grunnleggende antakelse her er at individer ikke umiddelbart tilegner seg den fulle og eksakte betydningen av begreper eller kulturelle verktøy. Snarere tilegner de seg aspekter ved begrepene og problemløsningsmetodene innenfor bestemte matematiske praksiser der de samhandler med gjenstander og andre mennesker. Prosessen med å tilegne seg begreper og verktøy er ikke enkel, men delvis og gradvis (Carlsen, 2008, side 97, min oversettelse).*

Carlsen (2010) lister opp fem aspekter som er sentrale i litteraturen og forskningen rundt appropriering av verktøy, for eksempel matematiske begreper. For det første må elevene involveres i en felles aktivitet. Videre må elevene dele et felles fokus med hverandre, elevene må utvikle en slags arbeidskonsensus om hva de skal være oppmerksom på i en matematisk oppgave. Så må de utvikle en felles mening av ord og begreper. Det fjerde aspektet går ut på at elevene tilpasser handlinger og ytringer fra medelever mens de jobber sammen med problemløsningsoppgaver og bruker dem i prosessen. Til slutt må eleven i sitt problemløsningsarbeid kunne bruke allerede eksisterende og etablert kunnskap fra klasserommet og fra smågruppen, altså den matematikkulturen som har utviklet seg over tid.

### 2.2.3 Dialog, samarbeid og læring

Det er en nær sammenheng mellom de tre begrepene dialog, samarbeid og læring (Dysthe, 2001). Det sosiokulturelle læringssynet fremmer et grunnleggende syn om at det er den sosiale gruppa og fellesskapet som den enkelte er en del av, som er selve utgangspunktet for læring (Dysthe, 2001). Læring kan ikke sees på som et isolert fenomen eller som individets egne mentale aktiviteter. Læring er tett knyttet sammen med samarbeid, og det er gjennom interaksjon med andre at vi utvikler oss (Dysthe, 2001). Vygotskij var spesielt opptatt av det verbale aspektet ved samarbeid, og i skolen er det innlysende at språket er det viktigste medierende verktøyet. Mye av læringen skjer gjennom å lytte, lese, skrive og snakke (Dysthe, 2001). Språket er selve bindeleddet mellom individuelle mentale prosesser og de sosiale læringsaktivitetene, sett fra et sosiokulturelt perspektiv (Dysthe, 2001).

#### *Å jobbe i grupper*

Gruppesamarbeid er begrepet vi bruker når tre eller flere elever jobber sammen for å løse et problem (Carlsen, 2008). I løpet av de siste tiårene er det mange som har forsket på samarbeidslæring i smågrupper, for eksempel Bjuland (2002), Borgersen (1994), Carlsen (2008, 2010) og Schoenfeld (1985, 1992). Forskningen til Borgersen (1994) konkluderte blant annet med at det var mulig å skape læringsmiljøer hvor matematikkstudentene samarbeidet og ga hverandre støtte til å gå gjennom prosessen sammen. I tillegg opplevde han at samarbeid i smågrupper var svært godt likt av studentene, og de anbefalte det sterkt. Forskningen til Bjuland (2002) viste at grupper med lærerstudenter som hadde ulik matematisk bakgrunn kunne gjøre betydelige framskritt i løsningsprosessen og finne løsninger på geometriske problemer uten lærerens hjelp hvis det ble lagt til rette for samarbeid om problemene over et lengre tidsrom. Dialog og samhandling er også sentralt i mye forskning hvor elever går fra å være noviser til eksperter (Carlsen, 2010; Schoenfeld, 1992). Det kan også være utfordringer med å kombinere ulike typer elever i ei gruppe (Rogat & Linnenbrink-Garcia, 2011). De ulike individene kan ha ulike mål for arbeidet, ulike prioriteringer og måter å jobbe på. Om disse prioriteringene ikke samsvarer, kan det resultere i lavere innsats gjennom nedsatt motivasjon til å bidra i gruppa. Ashman og Gillies (2013) peker på de samme utfordringene. Forskjellige individer kan ha ulike preferanser for hvordan de helst ønsker å arbeide, og dette kan skape konflikter innad i gruppa og effektiviteten svekkes. De påpeker at dette kan forhindres ved at elevene lærer hvilke ferdigheter som er viktige for å lykkes i et gruppearbeid.

# 3 Metode og gjennomføring

I dette kapitlet vil jeg redegjøre for mitt valg av forskningsdesign, metodene jeg har brukt for å svare på forskningsspørsmålene mine og begrunne valgene jeg har tatt. Jeg vil også diskutere hvordan jeg har valgt å analysere datamaterialet, de forskningsetiske vurderinger jeg har gjort og til slutt metodiske betraktninger. I kapittel 3.1 vil jeg gå nærmere inn på kvalitativ forskning og casestudie som forskningsdesign. Jeg vil beskrive designet, og begrunne hvorfor jeg valgte akkurat dette i min studie. Jeg vil videre i kapittel 3.2 greie ut om metodene jeg brukte for å samle inn data jeg har brukt i analysen. I kapittel 3.3 vil jeg gå inn på utvalget jeg har gjort under observasjonen, og valgene jeg gjorde rundt utvelgelsen av dette utvalget. En oversikt over datagrunnlaget og oppgavevalg blir presentert i kapittel 3.4 og 3.5, før metodiske valg med tanke på analysen (3.6), de forskningsetiske vurderingene (3.7) og noen metodiske betraktninger (3.8) utgjør de tre siste delkapitlene.

## 3.1 Kvalitativ casestudie som forskningsdesign

Jeg har valgt en kvalitativ strategi for å innhente data til min studie. Et kjennetegn på kvalitative metoder er at forskeren innhenter mye informasjon om et begrenset utvalg (Christoffersen & Johannessen, 2012). Da jeg ønsket å observere en liten elevgruppes arbeid med problemløsningsoppgaver og denne gruppas strategier i dette arbeidet, var kvalitativ metode et relevant valg. Kvalitative strategier brukes altså når forskeren ønsker dybdekunnskap og helhetlig forståelse av spesifikke sammenhenger (Thagaard, 2013). Det var derfor hensiktsmessig å velge et kvalitativt forskningsdesign i mitt tilfelle, og jeg har valgt å bruke casestudie.

Casestudier omfatter gjerne få undersøkelsesobjekter og baserer seg på mye data om hver enhet (Thagaard, 2013). Den klassiske casestudien innebærer en intensiv og detaljert analyse av en enkelt case, og er opptatt av kompleksiteten og den aktuelle casens spesielle karakter (Bryman, 2012). I en casestudie kan forskeren komme tett innpå virkelige situasjoner, og analysen fokuserer gjerne på hvordan casen utvikler seg over et bestemt tidsintervall, gjerne i en bestemt kontekst. Eksempler på casestudier kan være å studere et bestemt samfunn, en spesiell skole, en bestemt gruppe mennesker, en familie, en skoleklasse eller en person, eller som i mitt tilfelle, ei gruppe med fire 2P-elever.

Vi kan tilnærme oss en casestudie både kvalitativt og kvantitativt, og vi kan derfor ikke automatisk trekke en parallell mellom kvalitativ studie og casestudie. Hos Bryman (2012) kan vi lese at en casestudie både kan være forklarende og beskrivende i sin form. En forklarende studie ønsker å forklare ulike hendelser, situasjoner, fenomener eller liknende, og besvare hvorfor situasjonen er akkurat slik. En beskrivende casestudie ønsker å beskrive ulike forhold rundt det forskeren ønsker å studere, men kommer ikke med forklaringer på hvorfor det er som det er. Min studie har en beskrivende form og kan derfor kategoriseres under det Bryman (2012) kaller en representativ eller en typisk case. Et annet ord han bruker på slike caser er eksemplifiserende. I en beskrivende casestudie velger forskeren ut situasjoner som vil utgjøre en passende kontekst for å besvare bestemte forskningsspørsmål, og ikke nødvendigvis fordi de er så spesielle eller unike. Ved denne type forskningsdesign kan det både være en fordel og en ulempe at en casestudie kun fokuserer på en isolert hendelse eller et bestemt objekt. Fordelen er at forskeren kommer tettere innpå det han ønsker å observere, og han kan enklere identifisere og studere aspekter ved situasjonen han ellers ikke ville fått muligheten til. I mange tilfeller er ønsket å studere hvor godt casen man har valgt stemmer overens med allerede eksisterende teoretiske argumenter. Om casen faller godt inn under eksisterende teori, vil forskningsprosjektet bidra til å underbygge den allerede eksisterende teorien og styrke troverdigheten til denne. Vi kan se på casestudier som en induktiv tilnærming i relasjonen mellom teori og forskning siden man i en casestudie forsøker å samle inn kunnskap ved å gå fra virkelighet til teori. Ved denne type tilnærming bør forskeren samle inn data med et så åpent sinn som mulig. Ulempene ved en casestudie er at det av de allerede nevnte grunner er vanskelig å generalisere ut fra en isolert case. En forsker kan ikke uten videre påstå at casen han har studert er representativ for en kategori av hendelser, til tross for at han studerer typiske hverdagssituasjoner (Bryman, 2012).

## 3.2 Metoder for datainnsamling

Da jeg valgte casestudie som forskningsdesign, kunne jeg velge flere metoder for å gjennomføre datainnsamlingen jeg trengte for å besvare forskningsspørsmålene mine, blant annet observasjon som dokumenteres med feltnotater, video- eller lydopptak. Jeg kunne også samle inn nyttig data gjennom intervjuer og dokumentinnsamling (Bryman, 2012). Jeg har valgt å samle inn det empiriske materialet jeg trengte gjennom observasjon som dokumenteres med feltnotater, lydopptak, dokumentinnsamling i form av elevenes Notebook'er og intervju.

Før jeg kunne starte innhentingen av datamaterialet jeg trengte til studien min, måtte jeg søke om tillatelse fra NSD (Norsk senter for forskningsdata). Det innebar at jeg måtte sende inn en elektronisk søknad, og med den både prosjektbeskrivelse, informasjonsskriv og intervjuguide. Disse ble godkjent (Vedlegg 1).

Observasjon som metode i casestudier er mye diskutert, spesielt der hvor forskeren (observatøren) er deltagende i situasjonen. Det essensielle i diskusjonen er hvor grensen går før studien bør kalles en etnografisk studie. Casestudier kan utføres med varierende grad av observatørdeltagelse, og Wellington (2000) kategoriserer deltagelsen på en skala fra «ingen observatørdeltagelse» til «fullstendig observatørdeltagelse». Jeg bestemte meg for å innta rollen som delvis deltagende under observasjonen ved at jeg var fysisk til stede sammen med elevene mens de jobbet med oppgavene jeg hadde valgt ut, samt at jeg i enkelte tilfeller stilte spørsmål som skulle hjelpe elevene til å se flere muligheter med en oppgave de allerede anså som ferdig løst, eventuelt om de satt helt fast. Jeg vil på grunnlag av at jeg var til stede med gruppa og observerte dem under hele perioden, si at jeg hadde en etnografisk tilnærming til datainnsamlingen. Jeg så mange fordeler med å selv være til stede i rommet hvor elevene jobbet. Jeg ble godt kjent med de fire elevene jeg observerte, og jeg fikk med meg følelser og stemninger innad i gruppen jeg ellers ville gått glipp av ved kun å høre på lydopptaket i etterkant. Dette bidro positivt til analysen ved at jeg fant støtte i denne tilstedeværelsen under min tolkning av dataen i etterkant. En ulempe ved dette kan være at jeg som forsker fikk et personlig forhold til de fire elevene, og av den grunn har analyseresultatene mine muligens blitt farget av det ved at jeg har tillagt de ulike elevene egenskaper, tanker og ferdigheter jeg mente at de hadde. For å redusere risikoen for at dette skulle skje, gjorde jeg enkelte grep som å ta feltnotater i tillegg til lydopptaket.  Dialogene i lydopptakene ble analysert ut fra hvordan disse fremsto, og jeg gjennomgikk lydopptakene og transkripsjonene gjentatte ganger for å minimere risikoen for at jeg mistolket dataene. Under har jeg beskrevet de ulike metodene jeg brukte, altså observasjon (3.2.1), intervju (3.2.2), feltnotater (3.2.3) og innsamling av skriftlig materiale (3.2.4).

### 3.2.1 Observasjon og min rolle som forsker

Det er vanlig å bruke observasjon når målet er å studere hvordan mennesker forholder seg til hverandre og når man ønsker å se på personenes adferd, altså studere dagliglivets praksis (Thagaard, 2013). Som vi kan se ut fra forskningsspørsmålene mine, interesserte jeg meg for elevenes strategibruk i arbeidet med problemløsningsoppgaver, i tillegg til hvilken rolle gruppesamarbeidet spilte inn i problemløsningsprosessen. Jeg var interessert i hvordan elevene forholdt seg til hverandre, og derfor valgte jeg observasjon som primærmetode hvor jeg selv var delvis deltagende. Jeg deltok i alle øktene hvor elevene jobbet med ulike utforskende oppgaver i disse ukene, men for det meste var min eneste rolle å observere, styre lydopptaket og gjøre meg notater underveis. Jeg hadde en lang samtale med de fire elevene før datainnsamlingen startet hvor vi ble litt kjent og etablerte et trygt grunnlag for videre samarbeid. De fikk også muligheten til å spørre om alt de lurte på, og alle sammen fikk avklart forventninger vi hadde til prosjektet. Da det var disse elevenes strategier, samarbeid og samtaler underveis i arbeidet som ga grunnlaget for analysen i min studie, var jeg nøye med å gjøre feltnotater i tillegg til lydopptakene under hver økt. Dette i tilfellet noe uforutsett skulle skje med lydopptaket. Jeg skrev også logg etter hver observasjonsøkt hvor jeg oppsummerte økta, uthevet interessante hendelser og noterte meg det som kunne kategoriseres som strategibruk. Dette så jeg for meg ville bli nyttig når jeg senere skulle velge ut deler av øktene til analysedelen, og ifølge Thagaard (2013) kan det å ta notater underveis i observasjonsprosessen hjelpe forskeren å bearbeide erfaringene han gjør seg etter hvert som prosjektet skrider frem.

### 3.2.2 Intervju før og etter

Jeg ønsket allerede fra oppstart å etablere et godt og trygt forhold mellom meg og de fire elevene som jeg skulle observere. Jeg valgte derfor å gjennomføre et oppstartsintervju (se vedlegg 2) hvor jeg spurte om tidligere matematikkopplæring og vurderinger, forhold til matematikk og erfaringer med gruppearbeid og utforskende oppgaver, samt deres forventninger til sin deltagelse. Her holdt jeg en litt uformell tone, og det ble en hyggelig prat. Etter siste observasjonsøkt, gjennomførte jeg et semistrukturert gruppeintervju (se vedlegg 3) med elevene hvor jeg spurte spørsmål som gikk direkte på forskningsspørsmålene mine. Målet med gruppeintervjuet var at de fire elevene selv skulle forklare hvordan de hadde opplevd de ulike problemene de hadde jobbet med i denne perioden, og hvordan det hadde vært å jobbe som ei gruppe. Jeg ville også at elevene skulle få en mulighet til å tenke gjennom de ulike strategiene de hadde brukt i problemløsningsarbeidet sitt, om de hadde gjort noen nye erfaringer som de kunne ta med seg videre og reflektere over eget problemløsningsarbeid.

Intervjusamtaler er formålstjenlig for dette formålet (Thagaard, 2013). Når jeg intervjuer deltakerne i tillegg til å observere dem, gir det muligheter for å utdype episoder fra observasjonen, og på den måten skape mening rundt disse på en bedre måte. Jeg valgte å forberede semistrukturerte intervjuer hvor jeg hadde en intervjuguide (vedlegg 2 og 3) med planlagte spørsmål jeg ønsket å få svar på, men formen ga meg muligheten til å innhente annen relevant informasjon for å få en dypere forståelse av intervjupersonens tanker. Et semi-strukturert gruppeintervju er nyttig når man ønsker å ta i bruk flere individers forskjellige perspektiver og innspill til et bestemt tema. Det er ofte det beste alternativet når man sammenligner det med mindre fleksible metoder, som fokusgrupper eller dybdeintervjuer. Det kan hjelpe å belyse problemstillinger som potensielt involverer mange personer. Semi-strukturerte gruppeintervjuer kan også være nyttige for å gi informanter en plattform for å dele idéer, observere hvordan andre deltakere reagerer på problemstillingen, og hjelpe med å fremme konstruktive diskusjoner. Det gir muligheten til å utforske temaer mer dypt og målrettet med færre restriksjoner på hvilke spørsmål som kan bli stilt. Dette bidrar til å gi et bredere og mer variert spekter av informasjon som ellers ikke ville ha blitt utforsket.

Når en forsker ønsker å ha en åpen tilnærming i datainnsamlingen, er denne metoden hensiktsmessig (Bryman, 2012). Det er flere fordeler ved å bruke et semistrukturert intervju, blant annet at alle intervjuobjektene blir stilt de samme spørsmålene. Samtidig gjør denne intervjuformen det mulig å stille individuelle oppfølgingsspørsmål for videre utdypning og avklaring basert på hva den enkelte elev svarer. En annen fordel var at rekkefølgen på spørsmålene kunne endres underveis i intervjuet. Det gjorde det mulig å knytte spørsmålene opp mot elevenes forutsetninger, og det ga rom for at jeg som forsker kunne spille inn impulsive spørsmål om noe interessant skulle dukke opp underveis i intervjuet. Under utarbeidelsen av de to intervjuguidene (vedlegg 2 og 3), fokuserte jeg på å formulere spørsmålene slik at jeg kunne bruke elevenes svar som støtte til å besvare både forskningsspørsmålene og problemstillingen min. På denne måten var jeg godt forberedt i forhold til hva som var min oppgave å undersøke (Kvale & Brinkmann, 2009). Jeg hadde altså utarbeidet spørsmålene før intervjuet startet, men var likevel åpen for å spørre rundt relevante utsagn som intervjuobjektene kom med, og som jeg ikke hadde planlagt før intervjuet startet (Thagaard, 2013). Jeg var også forberedt på å variere oppfølgingsspørsmålene jeg stilte ut fra hvordan elevene svarte. På den måten kan intervjupersonene føle seg mer imøtekommet med tanke på at de får gjensvar (Thagaard, 2013). Jeg hadde gjennomført et testintervju, et lite pilotintervju, med en av mine egne elever på forhånd for å minske sannsynligheten for at noen av spørsmålene kunne misforstås.

Jeg valgte at hovedintervjuet mitt med elevene ble gjort som et gruppeintervju. Å gjennomføre et gruppeintervju kan gi flere fordeler da elevene ofte føler seg tryggere i gruppe og intervjueren kan, i tillegg til å få frem hver enkelt deltagers oppfatning, avdekke hvordan gruppemedlemmene diskuterer de ulike oppfatningene seg imellom. På den andre siden kan det være elever som ikke tør å være ærlige eller si så mye når andre elever hører på (Postholm & Jacobsen, 2011). I min gruppe opplevde jeg elevene som åpne og trygge, og det virket som om de svarte ærlig på spørsmålene jeg stilte dem.

### 3.2.3 Feltnotater

Jeg har som sagt valgt å ta lydopptak av de fire elevene når de jobber med problemløsningsoppgavene. Da det kunne skje uforutsette hendelser ved en slik datainnsamling, som for eksempel at lydopptageren ikke virket, opptaket ble slettet, lyden var dårlig osv., valgte jeg også å ta feltnotater fra hver observasjonsøkt. Her noterte jeg ned i korte trekk hva som ble sagt og av hvem, i tillegg til stemningen blant elevene, hvordan jeg oppfattet at motivasjonen og driven var hos hver enkelt av dem, samspillet mellom dem, om noen meldte seg ut osv. Dette er viktige elementer som spiller inn på gruppedynamikken og derav gruppas evne til å løse oppgavene i fellesskap, men som ikke kommer direkte fram på et lydopptak. Derfor ga disse notatene meg et verdifullt tilskudd til analysen jeg gjorde på et senere tidspunkt.

Jeg finner også støtte i litteraturen for verdien av feltnotater. Den menneskelige hukommelsen har svakheter, og derfor må forskere ta notater basert på hva de observerer (Bryman, 2012). Bryman (2012) skriver videre at dette bør være relativt detaljerte oppsummeringer av hendelser og atferd i tillegg til forskerens tidlige refleksjoner rundt det han observerer. Han lister opp noen gode tips til forskeren som skal ta feltnotater, og nevner blant annet at forskeren bør gjør notater så raskt som mulig etter at han har sett eller hørt noe interessant, uansett hvor korte de er. Notatene bør merkes med dato, hvem som er involvert, hva som førte til ulike hendelser og andre detaljer som kan være nyttige senere. Han nevner også at selv om man bruker en digital opptaker, kan det bli utfordrende å måtte transkribere så mye datamateriale i etterkant, og forskerens feltnotater kan da bli nyttige for å velge ut interessante hendelser fra observasjonene på et senere tidspunkt. Det er viktig at forskeren skriver tydelige notater slik at han ikke må spørre seg selv i etterkant hva meningen med hva han har notert er. Det er verdifullt å inkludere noen tidlige analytiske tanker om det som observeres og høres, da disse kan være nyttige senere når data skal utdypes i en analyse (Bryman, 2012). Dette tok jeg på alvor, og prøvde å lage gode feltnotater under og rett etter observasjonene av arbeidsøktene.

### 3.2.4 Innsamling av skriftlig materiale (Notebook)

I tillegg til lydopptak og feltnotater fra elevenes arbeidsøkter, ønsket jeg også å samle inn skriftlig materiale i form av elevenes egne Notebook'er. Med Notebook mener jeg en skrivebok hvor elevene merket hver ny arbeidsøkt med dato og hvilken oppgave de jobbet med. Videre skulle de gjøre alle sine matematiske beregninger, tegning av figurer og tabeller, bevisføring - altså alt det matematiske på venstre side i boka, mens de på høyre side noterte ned tanker de hadde rundt prosessen, følelser som eventuelt oppsto rundt arbeidet, strategier de måtte ta i bruk for å komme videre og ellers annet som hørte til prosessen rundt å løse problemet. Jeg ga elevene hver sin skrivebok i begynnelsen av vårt samarbeid, og forklarte dem hva formålet med denne boka var. Alle de fire elevene fikk hver sin Notebook som de skrev i. Formen skulle være uformell, men jeg presiserte at det var viktig at de i tillegg til å gjøre matematikk også skulle reflektere rundt tanker og følelser som oppsto underveis da de jobbet med de ulike problemene. Var noen problemer ekstra utfordrende? Hva gjorde de for å komme videre? Hva følte de når de eventuelt sto fast? Slike ting anså jeg som like viktig å dokumentere som selve løsningsprosessen. Disse bøkene ble også nyttige kilder i analysen jeg gjorde senere.

## 3.3 Utvalg

Der en kvantitativ studie tar for seg en stor gruppe forskningsdeltagere, tar altså en kvalitativ forskningsstudie for seg en liten gruppe deltagere. I dette prosjektet observerte jeg fire 2P-elever i en periode på fem uker i begynnelsen av andre termin i deres andre år på videregående skole. Jeg var så heldig at jeg fikk bruke elever fra klassen til en kollega som underviste 2P dette året, og hun foreslo et utvalg av elever som egnet seg til å delta i denne datainnsamlingen. Vi snakket på forhånd om at ei gruppe på fem positive og nysgjerrige elever med middels måloppnåelse i matematikk ville være det ideelle utvalget til denne gruppen da jeg antok at en slik sammensetning av elever ville gi meg relevante data til studien min. Blant elevene hun foreslo var det fire jenter som svært gjerne ønsket å delta. Disse fire svarte umiddelbart ja (se samtykkeskjema, vedlegg 4), og var fra før trygge på hverandre og vant til å samarbeide i andre fag. Jeg valgte derfor å endre gruppestørrelsen fra fem til fire slik at jeg unngikk å måtte overtale en femte elev til å delta, noe som kunne skapt en annen stemning. Jeg tenkte på forhånd at en miks av både gutter og jenter ville være ønskelig, men det var kun tre gutter i denne klassen, og ingen av dem ønsket å delta.

I løpet av en normal skoleuke hadde disse elevene tre enkelttimer á 45 minutter med matematikk, og vi avtalte at to av disse øktene skulle brukes på et eget grupperom sammen med meg mens de jobbet med utforskende oppgaver i matematikk. Den tredje økta skulle elevene være inne med klassen sin å ha vanlig undervisning med sin matematikklærer. Jeg var ikke til stede i disse timene.

## 3.4 Oversikt over datagrunnlaget

Jeg hadde et møte med faglæreren og de fire elevene i forkant av perioden for datainnsamling, og vi avtalte sammen hvordan vi skulle legge opp de fem ukene vi hadde til rådighet. Datamaterialet består av et oppstartsintervju med hver av de fire jentene, syv observasjonsøkter av elevgruppa som jobbet mens jeg observerte og tok lydopptak, og til slutt et gruppeintervju med de fire jentene etter endt observasjonsperiode. Tabellen nedenfor (tabell 2) gir en kort oversikt over denne femukersperioden. De fire elevene fikk hver sin skrivebok som de skulle bruke i timene jeg observerte dem. Dette er Notebook'en som jeg har beskrevet tidligere. Denne boka samlet jeg inn etter hver økt slik at jeg kunne følge med på om det skjedde en endring i måten elevene jobbet med problemløsningsoppgaver på.

Tabell 2: Oversikt over innsamlet empirisk materiale.

| Dato | Når? | Hva? |
|---|---|---|
| 18. januar 2022 | Før datainnsamling | Oppstartssamtale.<br>Gjennomgang av informasjonsskriv.<br>Oppstartsintervju.<br>Utdeling av Notebook og en forklaring på hvordan denne var tenkt brukt. |
| 20. januar 2022 | 1. observasjonsøkt | Oppgave 1: Hundegård<br>Oppgave 2: Sølvtråd |
| 25. januar 2022 | 2. observasjonsøkt | Oppgave 3: Hyttevindu |
| 27. januar 2022 | 3. observasjonsøkt | Oppgave 4: Kvadrat og sirkel<br>Oppgave 5: Tårn på Gardermoen |
| 01. februar 2022 | 4. observasjonsøkt | Oppgave 6: Bordkavaler |
| 03. februar 2022 | 5. observasjonsøkt | Oppgave 7: Forhold mellom gutter og jenter i en klasse |
| 26. april 2022 | 6. observasjonsøkt | Oppgave 8: Kuleis<br>Oppgave 9: Fire påfølgende tall |
| 3. mai 2022 | 7. observasjonsøkt | Oppgave 10: Terningkast<br>Oppgave 11: Vinkel h<br>Oppgave 12: Fire hus på rad |
| 20. juni 2022 | Etter datainnsamling | Gruppeintervju med de fire jentene. |

## 3.5 Oppgavevalg

Jeg brukte mye tid på å finne oppgaver som jeg kunne bruke i datainnsamlingen min. Jeg ønsket rike problemløsningsoppgaver som hadde lav inngangsterskel (se 2.1.3), motiverte elevene og samtidig stilte høye kognitive krav (se 2.1.4). Jeg ønsket å bruke noen av oppgavene fra kurset MA-424, Arbeidsmåter i matematikk, ved Universitetet i Agder (UiA), da jeg selv hadde opplevd disse oppgavene som svært engasjerende. I tillegg fant jeg oppgaver i boka «Motivasjon i matematikk» av Wæge og Nosrati (2018), lærebøker fra ulike forlag og i ulike oppgavesett fra Abelkonkurransen. Tanken min var å presentere elevene for varierte oppgaver som trigget deres nysgjerrighet og motiverte dem til å løse problemet, jamfør definisjonen av et matematisk problem (se 2.1.2). Jeg hadde også forskningsspørsmålene mine i tankene da jeg søkte etter oppgaver, og valgte ut oppgaver som jeg anså som gode utgangspunkt for at elevene skulle kunne bruke ulike strategier for å løse dem. Jeg hadde også i tankene at valget av oppgaver burde ta hensyn til elevenes begynnernivå og variere i vanskelighetsgrad.

Jeg valgte ut oppgaver innenfor emnene kombinatorikk, sannsynlighet, geometri og logikk. I løpet av perioden jeg observerte elevene, jobbet de med tolv ulike problemløsningsoppgaver. Noen av oppgavene ble de svært motiverte av, og av den grunn jobbet de engasjert med å løse problemet, mens andre oppgaver motiverte dem i mindre grad. Dette var veldig tydelig i måten de samarbeidet på, og det varierende ønsket om å løse oppgaven. Jeg har i min studie valgt å se nærmere på fire av oppgavene som motiverte min elevgruppe mest og som de jobbet med etter at faglæreren deres hadde gjennomført undervisningsopplegget om problemløsningsarbeid jeg hadde utarbeidet. De fire oppgavene var oppgave 8 (kuleis), oppgave 9 (fire påfølgende tall), oppgave 10 (terningkast) og oppgave 12 (fire hus på rad). Observasjonen av elevgruppas arbeid med disse fire oppgavene inneholdt mest relevant data for å besvare de tre forskningsspørsmålene mine, og det var derfor mest interessant å bruke transkripsjonene fra disse fire episodene i analysen min. I de videre kapitlene vil jeg gå nærmere inn på disse oppgavene ved å beskrive hensikten med oppgaven, det kognitive nivået knyttet til hver av dem, og hva jeg forventet av strategier elevene ville bruke i arbeidet med disse oppgavene.

### 3.5.1 Oppgave 8: Kuleis

Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler.

a. Hvor mange måter kan hun velge isen sin på?

b. Hva om det er flere smaker å velge mellom?

(Wæge & Nosrati, 2018, s. 107).

Oppgaven er hentet fra boken «Motivasjon i matematikk», og er en rik oppgave med lav inngangsterskel og stor takhøyde, altså en LIST-oppgave. Denne oppgaven kan løses på flere måter, og elevene kan bruke flere ulike strategier i arbeidet med oppgaven. Dette er en kombinatorikkoppgave som er formulert på en slik måte at elevene selv må bestemme forutsetningene for oppgaven før de går i gang med å finne løsninger. Det betyr at ulike elever kan få ulike svar ut ifra hvilke premisser/forutsetninger de legger til grunn for løsning av oppgaven. Oppgaven sier altså ingenting om at rekkefølgen på kulene betyr noe eller ikke, eller om man kan velge samme smak flere ganger. Elevene må ta stilling til om for eksempel jordbær nederst og sjokolade på topp er den samme isen som sjokolade nederst og jordbær på topp. Kan hun velge kun vanilje eller må isen bestå av to ulike smaker? Slike premisser/ forutsetninger må elevene avklare på forhånd, og hvordan elevene definerer oppgaven vil også påvirke vanskelighetsgraden og svaret på oppgaven.

Av de ti strategiene listet opp i tabell 1 (2.1.7), så jeg for meg at elevene ville bruke følgende strategier her; se etter mønster, lag en systematisk tabell og lag en illustrasjon. Jeg forventet at elevene ville tegne opp de ulike alternativene og systematisere dem i en tabell. Fra tabellen så jeg for meg at elevene ville se et mønster som de brukte for å generalisere problemet. Jeg forventet også at de ville prøve å gjøre problemet enklere ved å først se på én smak, så to smaker, tre smaker og til slutt fire smaker. Her kunne også bruk av digitale hjelpemidler være til hjelp når de skulle generalisere problemet. Strategien med at elevene gjorde antagelser om hva svaret kunne bli, for så å sjekke om resultatet ble riktig, var også en strategi elevene kunne tenkes å bruke her. Problemet hadde muligheter for utvidelse ved at elevene kunne se på hvordan de kunne sette sammen kuleisen om man utvidet til tre kuler, fire kuler osv., eller om de la til enda flere smaker. Dette åpnet opp for å generalisere problemet ved at elevene kunne se på mønster.

Jeg vurderte oppgavens kognitive krav til å være av typen «prosedyrer med forbindelser» (Stein et al., 2009). Siden elevene kunne finne kombinatorikkformler i lærebøkene sine, lå nok ikke denne oppgaven på det høyeste kognitive nivået. Men denne oppgaven krevde en viss innsats på det kognitive nivået ved at elevene selv måtte finne de underliggende begrepslige idéene slik at de kunne jobbe seg gjennom problemene, og på den måten kunne de komme videre i approprieringsprosessen (Säljö, 2001).

### 3.5.2 Oppgave 9: Fire påfølgende tall

Hvilke tall oppstår når du legger til 1 til produktet av fire påfølgende tall?

(Mason & Davis, 1991, s. 8)

Oppgaven er hentet fra et oppgavesett vi fikk av vår faglærer da jeg tok kurset Arbeidsmåter i matematikk ved UiA. Denne oppgaven hadde en lav inngangsterskel ved at elevene kunne begynne å utforske spesielle tilfeller av små tall som var enkle å multiplisere. Oppgaven åpnet også opp for utvidelse ved at elevene kunne se på flere påfølgende tall enn fire, påfølgende partall/oddetall o.l. Problemet kunne også generaliseres ved at elevene kunne finne en generell formel for kvadrattallet de ville få om de startet med det *n*'te tallet. Dette var derfor en rik oppgave som jeg forventet ville engasjere elevene.

Av de ti strategiene i Kodingsmanualen (se 2.1.7), forventet jeg at elevene ville begynne med å lage en systematisk tabell over spesielle tilfeller med lave naturlige tall. Jeg så for meg at de ville spesialisere problemet ved å systematisk prøve ut flere eksempler og deretter se etter et mønster. Jeg forventet at elevene ville gjøre problemet så enkelt som mulig ved å starte med å se på lave tall. Dette problemet kan generaliseres, og jeg så for meg at elevene ville bruke digitalt verktøy for å finne den generelle formelen for summen når de startet på det *n*'te tallet. CAS kan her benyttes til å legge inn en generell formel som $x \cdot (x+1)(x+2)(x+3)+1$, for så å ta kvadratroten av polynomet de får, og avgjøre hva svaret forteller dem. Ved å bruke CAS, unngår de å miste motet i regneprosessen, men heller fokusere på resultatene og hva de forteller dem.

Jeg vurderte også denne oppgavens kognitive krav til å være av typen «prosedyrer med forbindelser» (Stein et al., 2009). Da oppgavens forutsetninger allerede var klare, kunne elevene gå i gang med å løse problemet så fort oppgaven var forstått og de hadde lagt en plan for løsningsarbeidet. De trengte ikke tolke premissene for oppgaven slik som i oppgaven om kuleis hvor ulike premisser skapte ulike løsninger. Men denne oppgaven krevde allikevel en viss innsats på det kognitive nivået ved at elevene måtte gjenkjenne serier av tall, se sammenhenger og bruke prosedyrer, og på den måten kunne de komme videre i approprieringsprosessen (Säljö, 2001).

### 3.5.3 Oppgave 10: Terningkast

Du kaster en vanlig terning tre ganger. Hva er sannsynligheten for at produktet av resultatet (antall øyne opp i hvert kast) er et partall?

(Abelkonkurransen[2], 1. runde, 2021)

Denne oppgaven hadde jeg brukt med elevgrupper tidligere, og jeg hadde erfaring med at elevene ble engasjerte og likte å jobbe med denne oppgaven. Jeg ønsket derfor å bruke den som en del av oppgavesettet i studien min. Heller ikke her trengte elevene å bestemme premisser for oppgaven da de allerede var lagt. Når elevene hadde forstått oppgaven og begrepet «produkt» var avklart, kunne de begynne å legge en plan for hvordan de ville gå frem. Denne oppgaven hadde også lav inngangsterskel ved at de fleste elever kjenner til en vanlig terning og mestrer å multiplisere små naturlige tall, så jeg forventet at elevene ikke ville ha problemer med å komme i gang med spesialiseringen. Oppgaven lot seg også utvide ved at elevene kunne se på om flere kast ville endre hva de hadde kommet frem til. Problemet kunne videre generaliseres ved at elevene kunne finne en generell formel for om resultatet ble partall eller oddetall ved produktet av *x* antall partall og *y* antall oddetall, og derfra utarbeide en generell regel for hva som avgjorde om produktet ville bli partall.

Her så jeg for meg at elevene ville bruke erfaringen fra arbeidet med oppgave 9, og starte med å prøve ut spesielle tilfeller hvor de satt resultatet inn i en systematisk tabell. Deretter ville det vært naturlig å se etter mønster, for så å gjøre en rimelig antagelse om hva svaret ville bli. Deretter kunne de sjekke ved prøving og feiling om hypotesen kunne være riktig. Også her forventet jeg at elevene ville prøve å generalisere problemet ved hjelp av digitalt verktøy. Måten de her kan bruke CAS som støtte til å generalisere, er ved å legge inn $2n \cdot 2m \cdot 2p$ (tre partall), $2m \cdot 2n \cdot (2p-1)$ (to partall og et oddetall), $2n \cdot (2m-1) \cdot (2p-1)$ (ett partall og to oddetall) og til slutt $(2n-1) \cdot (2m-1) \cdot (2p-1)$ (tre oddetall), og analysere resultatene de får. Ved å bruke et digitalt verktøy, kan de konsentrere seg om resultatene de får, og ikke oppleve å få gale resultater grunnet regnefeil.

[2] Abelkonkurransen er en konkurranse i matematisk problemløsning for elever i videregående skole.

Da alle premisser for oppgaven allerede var lagt, og elevene kun trengte å forstå oppgaven før de gikk i gang med å legge en plan for løsningen, valgte jeg å kategorisere også denne oppgaven under «prosedyrer med forbindelser» (Stein et al., 2009).

### 3.5.4 Oppgave 12: Fire hus på rad

*Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge?*

*(Abelkonkurransen, runde 1, 2009)*

Oppgaven ble hentet fra første runde i Abelkonkurransen fra 2009, og er en rik oppgave med lav inngangsterskel og stor takhøyde, altså en LIST-oppgave. Oppgaven var formulert på en slik måte at én begrensning allerede er lagt, to nabohus kunne ikke ha samme farge. Dette kunne gjøre det enklere for elevene å gå i gang med oppgaven, da de selv ikke trengte å lage alle begrensningene selv før de startet. Denne begrensningen kan tas bort før elevene blir presentert for oppgaven om en ønsker å forenkle oppgaven, eventuelt tas bort etter at elevene har jobbet med den opprinnelige oppgaven for å brukes som en utvidelse av oppgaven. Uansett må elevene avgjøre om alle fargene må brukes på en gang, eller om kun to farger kan brukes for å lage kombinasjoner som for eksempel «hvitt, rødt, hvitt, rødt». Dette var også en kombinatorikkoppgave som kunne løses på flere måter, og elevene kunne bruke flere ulike strategier i arbeidet med oppgaven.

De strategiene jeg så for meg at elevene ville benytte seg av, var først og fremst at de ville tenke på et liknende problem. Gruppa hadde jobbet med kuleis-oppgaven i økta før, og jeg var spent på om de ville bruke erfaringen fra den oppgaven i tilnærmingen til dette problemet. For å bli en god problemløser, bør elevene erfare å stå i et problem over lengre tid for å trene opp sin matematiske utholdenhet. Elevene trenger altså å løse mange problemer for å forbedre sin problemløsningsevne, og ved å løse problemer som likner på hverandre, vil kanskje elevene bedre se nytten av, og innarbeide de ulike strategiene på en god måte. Også her var det naturlig at elevene lagde en systematisk tabell, illustrerte problemet, så etter mønster og forenklet problemet. Dette problemet hadde også gode muligheter for utvidelse, både ved å ta bort begrensningen om at to nabohus ikke kan ha samme farge, og ved å utvide antall farger og hus. Hva om husene står rundt et tun og ikke på rekke? Ville det endre antall muligheter om to nabohus ikke kan ha samme farge? Denne oppgaven hadde mange muligheter til å gi elevene utfordringer de kunne arbeide med om de raskt løste den opprinnelige oppgaven.

Oppgavens kognitive krav vurderes til å være av typen «prosedyrer med forbindelser» (Stein et al., 2009) av samme grunn som oppgaven om kuleis, terningkast og fire påfølgende tall. Oppgaven stilte krav til elevenes kognitive nivå ved at elevene selv måtte finne de underliggende begrepslige idéene slik at de kunne jobbe seg gjennom problemene og på den måten komme videre i approprieringsprosessen (Säljö, 2001).

## 3.6 Analyse

### 3.6.1 Utvelgelse av episoder og sekvenser

I de fleste øktene jeg observerte, jobbet alle fire elevene godt med oppgavene selv om graden av samarbeid varierte. Den ene eleven var fraværende under observasjonsøkt seks, så da var de bare tre elever som samarbeidet. Det var tydelig at noen av oppgavene motiverte dem mer enn andre, og at samarbeidet ble bedre etter hvert som gruppa ble mer og mer vant til arbeidsformen. Etter økt fire gjennomførte elevenes faglærer en undervisningstime om problemløsning i klassen, og det gjorde utslag på elevenes strategibruk fra og med økt fem. I etterkant så jeg at de fire første øktene ga forholdsvis lite data med tanke på forskningsspørsmålene mine, da disse øktene var preget av at det var én elev som dominerte og ledet arbeidet, mens de tre andre bare fulgte hennes tanker. Etter hvert som elevene ble mer vant til både meg og arbeidsformen, så deltok alle elevene mer og mer, og i de siste arbeidsøktene var alle fire elevene aktive i problemløsningsarbeidet. Jeg valgte derfor å transkribere de oppgavene som var mest aktuelle med tanke på å besvare forskningsspørsmålene mine, og endte av den grunn opp med å transkribere elevenes arbeid med seks av oppgavene i sin helhet. Dette førte da til at jeg forkastet, av ulike grunner, opptaket av elevenes arbeid med de resterende seks oppgavene. Jeg endte opp med å analysere fire av de seks episodene jeg transkriberte, da de to transkriberte episodene jeg forkastet ikke tilførte mye nytt til analysen.

Jeg transkriberte elevenes arbeid med oppgavene 4, 8, 9, 10, 11 og 12. Dette var alle oppgaver som motiverte elevene, og de jobbet motivert som gruppe over en viss tid for å løse disse problemene. Dette arbeidet inneholdt også data som jeg var på utkikk etter med tanke på studien min. Jeg vurderte det til at disse seks episodene inneholdt nok data for å besvare forskningsspørsmålene mine. Med begrepet episode mener jeg den sammenhengende tiden gruppa brukte på å jobbe med én oppgave (Wells, 1999, s. 236-237). Av de seks episodene valgte jeg å se nærmere på elevenes arbeid med oppgave 8 (kuleis), oppgave 9 (fire påfølgende tall), oppgave 10 (terningkast) og oppgave 12 (fire hus på rad) da disse inneholdt mye relevant og ulik data. Jeg lyttet derfor gjennom disse episodene på nytt, og justerte transkripsjonen etter transkripsjonsnøkkelen (se vedlegg 6) jeg lagde til formålet. Jeg valgte å transkribere elevenes ytringer, altså uttalelser som de kom med under episodene, ordrett og på bokmål av hensyn til deres anonymitet og transkripsjonens lesbarhet. Da jeg gjorde meg notater under observasjonene, la jeg også til slike observasjoner som om elevene var ivrige, slitne o.l. underveis. Disse har jeg skrevet i parentes i transkripsjonen. Ganske ofte oppsto det lange pauser mens elevene tenkte, og disse markerte jeg med (…). Om eleven tok en liten tenkepause under ytringen er dette merket med (..). Om elevene lo mens de snakket, har jeg synliggjort det på følgende måte med to stjerner, for eksempel *Vi er jammen smarte*. Ofte begynte en i gruppa å snakke mens en annen var midt i en setning, og den nye ytringen markerte jeg med ≈.

### 3.6.2 Analytisk tilnærming

Å kommunisere er en sosial aktivitet. For å kunne ha en dialog, er de involverte avhengig av hverandre. Ord og setninger som blir ytret i en samtale, danner grunnlaget for nye ytringer. De involverte er avhengige av en felles forståelse for det som blir kommunisert i samtalen, og fra disse forutsetningene skapes nye meninger og ytringer (Bjuland, 2002).

For å analysere datamaterialet fra gruppas arbeid med problemløsning, hadde jeg en dialogisk tilnærming til datamaterialet (Linell, 1998). Det vil si at jeg så på elevenes ytringer som elementer i en felles dialog som de bygde opp sammen. Det empiriske materialet tar derfor utgangspunkt i elevgruppas dialoger, noe som er i tråd med oppgavens sosiokulturelle syn på læring og utvikling, der læring og utvikling nettopp skjer i samhandling med andre gjennom bruk av kulturelle og medierende verktøy (Säljö, 2001).

Slektskapet mellom tenking og kommunikasjon fremheves i et sosiokulturelt perspektiv, samtidig som det også fremheves at tenking og språklig kommunikasjon ikke kan sidestilles med hverandre (Säljö, 2001). Da det ikke er mulig å få oversikt over andres tanker, er tenking individuelt, mens den språklige kommunikasjonen er noe vi kan observere og senere analysere. Det er viktig at vi skiller mellom det en person sier og tenker, da det ikke alltid stemmer overens. Vi kan derfor ikke bruke en persons utsagn til å identifisere personens tanker (Säljö, 2001). Det en person sier, vil ut fra et sosiokulturelt læringssyn bli sett på som en sosial handling som også er avhengig av kontekst. Dette må tas til følge når en tar en dialogisk tilnærming til datamaterialet (Linell, 2007). «(…) meanings are always made (or at least completed) in contexts, and abstracted linguistic resources are designed to be used in and adapted to contexts. Aspects of meaning potentials cue or prompt situated meanings; the relative stability pertains to regularities in cueing» (Linell, 2007, s. 612).

I en samtale bygger hver ny ytring på tidligere ytringer, og de blir uttrykt med tanke på fremtidige ytringer (Bjuland, 2002; Säljö, 2001). Når man skal gjøre en dialogisk tilnærming til datamaterialet, kan man ifølge Wells (1999) gjøre dette gjennom tre faser (gjengitt i Bjuland, 2002). I den første fasen kan man dele episodene inn i forskjellige sekvenser etter ulike temaer. I den andre fasen deler man igjen opp sekvensene i mindre fragmenter som inneholder monitorerende ytringer med tilhørende respons. Til slutt deler man opp fragmentene i ytringer. Slik kan vi dele inn samtalen systematisk, og samtidig ivareta sammenhengen som hver av ytringene er preget av. Om en deler inn samtalen slik, vil man sitte igjen med mindre byggesteiner som en senere kan analysere og slik identifisere de forskjellige strategiene smågruppa bruker (Bjuland, 2007).

### 3.6.3 Analyseprosessen

Det var altså dialogene i smågruppa, intervjuene og inskripsjonene i elevenes Notebook som var utgangspunktet for det empiriske materialet mitt, og jeg skulle på bakgrunn av dette materialet besvare de tre forskningsspørsmålene mine. Det første spørsmålet spør om hvilke problemløsningsstrategier som kunne identifiseres i dialogen blant elevene i smågruppa når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver. For å besvare det andre forskningsspørsmålet, så jeg etter hva som karakteriserte gruppas problemløsningsprosess, og i det siste spørsmålet skulle jeg svare på hvilken rolle medierende verktøy spilte for elevenes mulighet for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen. For å besvare disse tre spørsmålene, valgte jeg å ta utgangspunkt i det empiriske materialet fra elevenes arbeid med fire ulike problemer i sin helhet, og analysere elevenes strategibruk, samarbeid og bruk av medierende verktøy i disse fire episodene.

De fire episodene jeg valgte å presentere i studien min, fant alle sted i løpet av de to siste øktene jeg observerte elevene, altså økt 6 og 7. Da hadde elevene allerede blitt vant til å jobbe utforskende og de virket trygge på både hverandre, på meg, og på måten å jobbe med et problem på. Dialogen i smågruppen virket å være uanstrengt, og alle de fire elevene deltok aktivt i problemløsningsprosessen. Jeg valgte også å presentere oppgavene i kronologisk rekkefølge da elevene tok oppdagelser de gjorde i arbeidet med tidligere oppgaver med seg i det videre arbeidet med neste problem. Jeg presenterer data som senere brukes til å besvare det første forskningsspørsmålet under kapittel 4.1. Dette kapitlet er delt inn i fire underkapitler, ett til hver episode, hvor jeg trekker frem strategier elevene brukte i arbeidet med hver av de fire oppgavene. I alle de fire episodene blir flere av de ti strategiene i Kodingsmanualen (se tabell 1 i 2.1.7) brukt, og jeg har under hvert delkapittel gått nærmere inn på de aktuelle strategiene elevene bevisst brukte i problemløsningsarbeidet.

Datamaterialet som brukes for å besvare det andre forskningsspørsmålet mitt, presenteres i kapittel 4.2. Også her deler jeg inn i fire underkapitler, hvor jeg bruker Polyas (1957) fire steg som overskrifter for så å se på hva som karakteriserer elevenes samarbeid under hver av disse stegene. Dette gjorde jeg fordi Polya sine tanker rundt problemløsning i matematikk var viktig i mitt teoretiske rammeverk. Også de to andre problemløsningsmodellene jeg har presentert tidligere, Borgersens (1994) syv trinn og Mason med kollegaers (2010) tre faser, ble brukt her.

Jeg presenterer datamaterialet jeg bruker for å besvare forskningsspørsmål tre, om hvilken rolle medierende verktøy spiller for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen, i kapittel 4.3. Her tar jeg i hovedsak for meg elevenes bruk av inskripsjoner, og hvordan disse blir medierende verktøy for elevene og gir dem muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer. Inskripsjoner kan, som nevnt i kapittel 2.2.3, sees på som skriftlige tegninger og modeller som elevene konstruerer mens de jobber med et problem (Carlsen, 2009), og det var slik jeg brukte begrepet i min studie. Ved å bruke inskripsjoner som medierende verktøy kan elevene lettere forstå problemet, og det kan føre direkte til løsning og bevis i noen tilfeller (Arcavi, 2003). I tillegg ser jeg på hvordan elevene bruker språket og hverandre som medierende verktøy.

Jeg endte opp med å transkribere de fire utvalgte episodene i tabeller med ytringsnummer, fiktivt navn på eleven som snakket, ytringen og en kolonne for kommentarer. I tillegg la jeg til en kolonne til høyre hvor jeg i første gjennomlesning skrev inn strategier som ble brukt under problemløsningsarbeidet, i andre gjennomlesning noterte jeg hva som kjennetegnet gruppas problemløsningsprosess i de fire fasene, og ved siste gjennomlesning noterte jeg elevenes bruk av medierende verktøy. Slik fikk jeg tre ulike transkripsjoner som hver for seg ble brukt til å besvare forskningsspørsmålene mine. I kapitlet hvor jeg presenterer resultatene, kapittel 4, har jeg kun brukt ytringsnummer, elevnavn, ytringen og eventuelle kommentarer. Under ser vi et eksempel på hvordan dette kunne se ut:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | | (...) | |
| 5 | Anne | Ok, har vi skjønt oppgaven? Altså hvor mange kombinasjoner? | Polia steg 1 |
| 6 | I kor | ≈Ja! | |
| 7 | Cecilie | Er det ikke da man skal ta 4*3*2 | S4 |
| 8 | Anne | ≈ Ja, jeg skulle til å si det! | |
| 9 | Bente | Eller så kan vi bare tegne isen? | S3 |
| 10 | Anne | Vi kan gjøre begge deler da, og se om vi får samme svar. | S4 |
| 11 | Bente | Er det nå vi setter sånn (..) sånn utropstegn? | |
| 12 | Cecilie | Hæ? | |
| 13 | Bente | Når du skal regne på kalkulator. Er det fire-utropstegn? Eller hvordan det er? | |
| 14 | Cecilie | Vi prøver på kalkulator (..) jeg fikk 24. | S10 |
| 15 | Anne | 4*3*2*1 blir 24. Da stemmer det. | S4 |
| 16 | Cecilie | Nå klarte vi denne fordi vi kunne sannsynlighet. | |
| 17 | | (alle ler) | |
| 18 | Bente | Men vi kan jo tegne og lage kombinasjoner. | S2 S3 |
| 19 | I kor | Ja, ja, ja! | |

POLYA steg 2

Figur 4: Eksempel fra transkripsjonen av elevenes arbeid med Kuleis-oppgaven

## 3.7 Forskningsetiske vurderinger

Jeg sendte som sagt inn søknad til NSD (Norsk senter for forskningsdata) om tillatelse til å samle inn data til mitt forskningsprosjekt, og denne ble godkjent før innsamlingen startet (se vedlegg 1). Jeg formulerte også et informasjonsskriv med samtykkeskjema til elevene (Bryman, 2012). Her informerte jeg om hva jeg skulle bruke datamaterialet til, og hvilke forskningsspørsmål jeg ønsket å besvare. I tillegg kom det tydelig frem hvilke rettigheter de har som frivillige deltagere og at de kunne velge å slutte i observasjonsgruppen uten forklaring og konsekvenser om de måtte ønske det (Bryman, 2012). Alle elevene var over 17 år, så de kunne skrive under på egne vegne, noe de alle valgte å gjøre (se vedlegg 4). Jeg har brukt fiktive navn på de fire elevene, og personopplysninger kommer ikke på noe tidspunkt frem. Alle data er kryptert og lagret i sikker sone, og alle lydopptak vil bli slettet ved prosjektslutt. I tillegg har jeg som lærer og forsker taushetsplikt (Bryman, 2012).

## 3.8 Metodiske betraktninger

For å sikre kvaliteten i studien, er det nødvendig for meg som forsker å være bevisst på studiens reliabilitet og validitet. Disse to begrepene er ofte knyttet til en kvantitativ tilnærming, mens i en kvalitativ tilnærming brukes oftere begrepene troverdighet og pålitelighet. I metodelitteraturen hadde disse begrepene et større skille før, men nå flyter de litt mer inn under hverandre. Validitet i kvalitative studier setter søkelyset på i hvilken grad fremgangsmåtene forskeren bruker og de funnene han gjør, reflekterer studiens formål og virkeligheten av fenomenet som undersøkes (Bryman, 2012). Validiteten til studien er blant annet knyttet til overførbarhet, og i hvilken grad forskningsfunnene kan generaliseres til en gruppe som forskeren ikke har utforsket i sin helhet (Postholm & Jacobsen, 2016). For å kunne argumentere for at resultatene fra studien bidrar til mer kunnskap og innsikt, er det viktig at funnene forskeren gjør blir forankret i tidligere empiriske studier og teorier. Reliabilitet og pålitelighet er synonymer, og begrepet knyttes til nøyaktigheten av de innsamlede dataene, hvordan de er samlet inn og hvordan de er analysert i etterkant (Bryman, 2012).

I denne studien var jeg alene som forsker, og jeg observerte fire, for meg ukjente, elever utenfor klasserommet mens resten av klassen deres hadde undervisning. Det var både fordeler og ulemper ved en slik form på datainnsamlingen. For elevene var dette en unaturlig situasjon, de ble observert av en ukjent voksen mens de jobbet på en, for dem, uvant arbeidsmåte. I tillegg skulle de samarbeide over lengre tid mens jeg gjorde lydopptak av samtalene deres. Jeg var i utgangspunktet ikke deltagende i problemløsningsprosessen til elevene, men jeg kom med små hint i form av et spørsmål i de situasjonene hvor elevene var helt fastlåst. Dette valgte jeg å gjøre for at elevene ikke skulle miste motivasjonen og avslutte arbeidet før de hadde løst problemet. Denne typen observasjon påvirket derfor elevene til en viss grad, men ikke så mye som om jeg skulle vært en deltagende part. En forskers påvirkning på forskningssubjektene kalles i litteraturen for Hawthorne-effekt (Bryman, 2016). Denne effekten prøvde jeg å minimere ved at elevene skulle forsøke å løse oppgavene uten min innblanding. Jeg kan likevel fastslå at jeg nok har påvirket elevenes problemløsningsprosess i noen grad. Jeg valgte dessuten å være til stede under elevenes arbeid da det ga meg en bedre innsikt i de sosiale interaksjonene enn om jeg kun hadde brukt lydopptak. På denne måten var jeg bevisst på studiens reliabilitet og validitet, og innhentet pålitelige og nøyaktige empiriske data som jeg senere kunne bruke til å besvare de tre forskningsspørsmålene mine.

Jeg brukte semistrukturert (gruppe)intervju både før og etter de syv observasjonsøktene. Ved en slik intervjuform får elevene svare fritt på spørsmålene jeg hadde forberedt, og de kunne utdype svarene sine om de ønsket det. Allikevel er det kvalitative forskningsintervjuet en samtale med et asymmetrisk maktforhold. Jeg var lærer ved skolen disse fire elevene gikk på, jeg satt med en kompetanse om problemløsning de nødvendigvis ikke hadde, jeg hadde bestemt spørsmålene som jeg stilte i min bestemte rekkefølge, og jeg valgte ut hvilke utsagn som ble fulgt opp. I tillegg var det jeg som bestemte når intervjuet var over. Jeg brukte lydopptak og feltnotater under observasjonen av de syv arbeidsøktene, og det gjorde studien mer reliabel enn om jeg kun observerte. Muligheten for at jeg har feiltolket det elevene har sagt er til stede. Da transkripsjonen ble tolket og analysert opp mot teorien jeg valgte ut, har mine tolkninger betydning for drøftingen i kapittel 5 hvor jeg diskuterer resultatene. Min tolkning var farget av mine erfaringer og min kompetanse, som fikk som konsekvens at diskusjonen ble preget av dette da jeg tolket elevenes arbeid og bidrag. Da jeg ikke hadde kjennskap til noen av de fire elevene på forhånd, ble eventuell forutinntatthet redusert.

Jeg valgte ut sekvenser fra de fire episodene som kunne besvare de tre forskningsspørsmålene mine, og disse ble da tatt ut av sin opprinnelige sammenheng. Dette kan ha som risiko at ytringer kan bli feiltolket. Studiens omfang gjør at jeg måtte velge ut utdrag fra samtalene mellom elevene, og kunne ikke gjengi episodene i sin helhet. Min tilstedeværelse i gruppa, egne erfaringene med å transkribere observasjoner og intervjuer, samt innsikt som lærer på aktuelt trinn og matematikkemne, gjør likevel at jeg hevder at tolkningene mine er sannsynliggjort som så velfunderte som mulig, noe som styrker studiens validitet.

Dette var en case-studie hvor jeg gikk i dybden på fire elevers arbeid over syv økter. Da dette var en liten studie kan ikke mine funn generaliseres, men de er allikevel et viktig bidrag og kan være en støtte for den vitenskapelige utviklingen.

# 4 Resultater

Analysedelen er bygd opp ved at jeg i kapittel 4.1 presenterer de ulike strategiene elevene brukte i problemløsningsarbeidet sitt. Her deler jeg inn i fire underkapitler hvor jeg tar for meg strategiene som jeg identifiserte i smågruppedialogene under elevenes arbeid med hvert av de fire problemene jeg valgte å bruke i analysen min. Disse resultatene brukte jeg senere til å besvare det første forskningsspørsmålet mitt, «Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i dialogen blant elevene i en smågruppe når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver?». I kapittel 4.2 tar jeg for meg hva som kjennetegner gruppas problemløsningsprosess. Her ser jeg spesielt på hvordan smågruppa jobbet med hvert av Polyas (1957) fire steg; forstå problemet, lag en plan, utfør planen og se tilbake, og dette er også overskriften for hvert av de fire underkapitlene i dette kapitlet. Her var det også relevant å trekke inn modellene til Borgersen (1994) og Mason med kollegaer (2010). Disse resultatene brukte jeg senere til å besvare mitt andre forskningsspørsmål, «Hva karakteriserer gruppas problemløsningsprosess?». I kapittel 4.3 presenterer jeg resultater fra observasjonen som jeg brukte til å besvare mitt tredje forskningsspørsmål, som spurte hvilken rolle medierende verktøy spilte for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen. Da de fire episodene gikk over en viss tid, velger jeg å presentere utvalgte sekvenser fra de fire ulike episodene her i oppgaven.

## 4.1 Problemløsningsstrategier jeg identifiserte når elevene arbeidet i smågruppa

I dette kapitlet presenteres strategiene jeg identifiserte i elevenes problemløsningsarbeid i smågruppa. I hver episode så jeg etter de ti strategiene presentert i kodingsmanualen (se 2.1.7), og jeg kodet dem som S1, S2, …, S10 i transkripsjonene, hvor S1 står for strategi 1 (se etter mønster), S2 henviser til strategi 2 (lag en systematisk tabell) og så videre. Dette gjorde jeg for hver episode, og jeg samlet resultatene i en tabell. Det synliggjorde hvilke strategier elevene brukte hyppigst, og om det var noen strategier som ikke ble brukt. I delkapitlene under vil jeg altså identifisere hvilke av de ti strategiene jeg observerte at elevene brukte, og jeg vil gjøre det ved å presentere aktuelle sekvenser fra samtalen imellom elevene mens de jobbet i smågruppa. Jeg vil sette ytringsnummeret i parentes når jeg henviser til noe som skjer i dialogen mellom elevene.

### 4.1.1 Strategier brukt i arbeidet med oppgave 8: Kuleis

Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler.

a. Hvor mange måter kan hun velge isen sin på?

b. Hva om det er flere smaker å velge mellom?

(Wæge & Nosrati, 2018, s. 107).

I arbeidet med denne oppgaven jobbet elevene sammenhengende i 45 minutter, og de jobbet mesteparten av tiden uten innblanding fra meg. Jeg brøt inn med hint ved et par anledninger da jeg merket at de satt fast, eller da de ville avslutte oppgaven fordi de trodde den var ferdig løst. De jobbet med å løse det opprinnelige problemet i cirka 25 minutter før de begynte å utvide problemet og se etter en generell formel. Det er verd å merke seg at elevene tidlig bestemte seg for en gal løsning på problemet, nemlig at svaret skulle bli 24. De brukte mye tid på å prøve ut ulike måter de matematisk kunne komme fram til dette svaret, noe som fikk dem til å forkaste den riktige løsningen da den dukket opp i første del av episoden.

Tabell 3: Oversikt over strategibruk i arbeidet med oppgave 8.

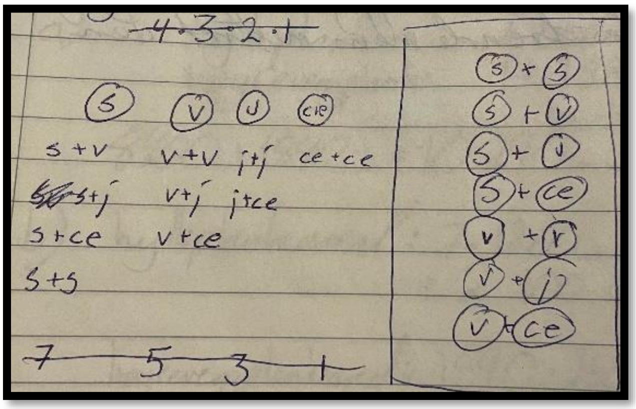
| Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger | Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger |
|---|---|---|---|
| 1. Se etter mønster | 2 | 6. Jobb baklengs | 3 |
| 2. Lag en systematisk tabell | 3 | 7. Tenk på et liknende problem | 0 |
| 3. Lag en illustrasjon | 4 | 8. Gjør problemet enklere | 2 |
| 4. Prøv og feil | 6 | 9. Se problemet fra en annen side | 1 |
| 5. Løs deler av problemet | 2 | 10. Bruk digitale hjelpemidler | 1 |

I løpet av episoden var de tre elevene (Dina var fraværende) innom ni av de ti strategiene fra kodingsmanualen. Det var kun strategi nummer 7, tenk på et liknende problem, de ikke brukte. Den strategien elevene brukte mest var å prøve og feile, altså å først gjøre en rimelig antagelse om hva svaret kunne være, for så å sjekke om resultatet ble riktig. Det kan vi se flere eksempler på i transkripsjonen under (se transkripsjonsnøkkel i vedlegg 6).

*Utdrag 1 Prøve og feile*

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Anne | Ok, har vi skjønt oppgaven? Altså hvor mange kombinasjoner |
| 6 | I kor | ≈Ja! |
| 7 | Cecilie | Er det ikke da man skal ta $4 \cdot 3 \cdot 2$ |
| 8 | Anne | ≈ Ja, jeg skulle til å si det! |
| 9 | Bente | Eller så kan vi bare tegne isen? |
| 10 | Anne | Vi kan gjøre begge deler da, og se om vi får samme svar. |
| (…) | | |
| 18 | Bente | Men vi kan jo tegne og lage kombinasjoner. |
| (…) | | |
| 23 | Anne | Ok, vi lager en figur på hvorfor det er 4!. |

Elevene konkluderte raskt med at de hadde skjønt oppgaven (5 og 6), og går så videre fra Polyas (1957) steg 1 til steg 3, løs problemet. Uten å verken ha lagd en tegning av de ulike kombinasjonene eller skrevet dem opp, bestemte de seg raskt for at svaret var $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, et svar som altså ikke var riktig. Både Cecilie og Anne er enige om dette (7 og 8). Dette regnet de også ut ved hjelp av kalkulator ved å sjekke at 4! ble 24. Med «den riktige» løsningen klar, ville Anne så lage en tegning for å vise at antall kombinasjoner stemte med 4! (23). Fra illustrasjonene de lager, ser de etter mønster og lager tabell, som er strategi 1 og 2. Strategi 3, lag en illustrasjon, ble også nevnt og brukt flere ganger i denne første delen av elevenes arbeid. I dialogen over, foreslår ulike elever tre ganger å tegne problemet (9, 18 og 23), noe de til slutt gjør. I figur 5 ser vi et eksempel på at elevene bruker en inskripsjon som medierende verktøy. Dette vil analyseres mer i detalj i kapittel 4.3.




Figur 5: Fra Bente sin Notebook

Elevene lagde premisser for oppgaven underveis, og de var allerede godt i gang med å prøve å løse oppgaven før de ble enige om det første premisset, nemlig at isen kunne bestå av to like kuler (uordnet/ordnet utvalg med tilbakelegging).

*Utdrag 2 Tilbakelegging*

| | | |
|---|---|---|
| 25 | Cecilie | Men kan hun ha to med sjokolade? |
| 26 | Bente | Selvfølgelig kan ho det! Så S+S. |

Her ser vi at Cecilie stiller spørsmål om isen kan bestå av to like kuler (25), noe Bente bekrefter at den kan (26). Dermed var det første premisset lagt. Etter et hint fra meg et par minutter senere, bestemte de at også rekkefølgen på iskulene skulle ha noe å si. Dette gjorde at de etter hvert fant to løsninger, én for når rekkefølgen på kulene ikke var av betydning (uordnet utvalg med tilbakelegging), og én løsning for når rekkefølgen på kulene hadde noe å si (ordnet utvalg med tilbakelegging). De ble også bevisste på at de hadde løst problemet uten tanke på at det fantes to ulike måter å løse det på, og ytret derfor at det var behov for å lage en plan for videre løsningsarbeid. Dette ser vi i dialogen under.

*Utdrag 3 Lage en plan*

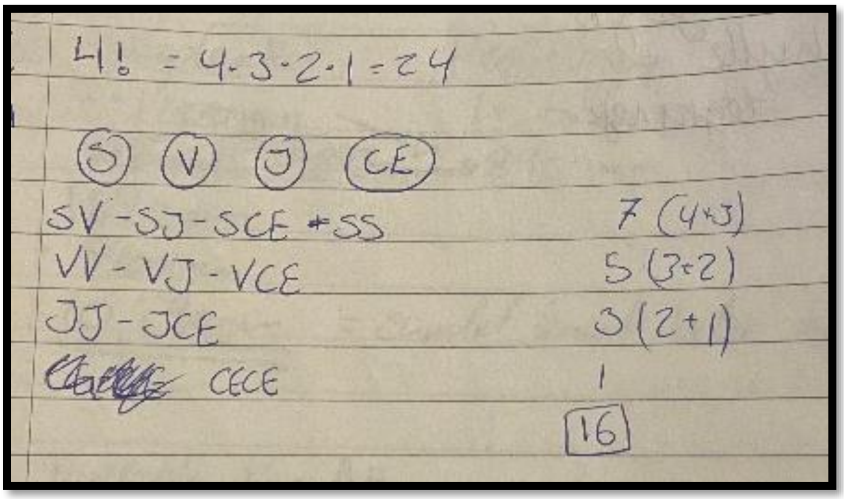
| | | |
|---|---|---|
| 30 | Anne | Og på den siste er det CE+CE. Da kan vi jo (..) da blir det 4+3+2+1. Det blir jo 10? |
| 31 | | (de ler) |
| 32 | Anne | Ja, er det sånn? Har vi løst oppgaven da? |
| 33 | Lærer | Dere foreslo jo 4! som blir 24, men her får dere 10. Er det forskjell på om for eksempel sjokolade og vanilje er på topp eller bunn? Eller er det samme is? |
| 34 | Anne | Åååja! Det vi har funnet ut gjelder om ikke det er forskjellig med topp og bunn! Vi må lage en plan! Det er gøy! |
| 35 | Bente | Så det vi har funnet er hvis det ikke har noe å si? Blir ikke det riktig? |

Her ser vi at elevene, etter å ha tegnet opp de ulike kombinasjonene (se kapittel 4.3 for inskripsjoner) for uordnet utvalg med tilbakelegging, kommer frem til at det fins ti ulike kombinasjoner, noe Anne utrykker litt spørrende (30). De begynner å le (31) siden de egentlig ønsket å vise hypotesen sin, at det var 4!, altså 24 ulike kombinasjoner. Derfor valgte jeg å bryte inn med et monitorerende spørsmål for å få dem til å tenke over hvorfor de her fikk ti kombinasjoner (33). Da utbryter Anne at de nå har funnet løsningen for når rekkefølgen ikke har noe å si, og at de må lage en plan for videre løsningsarbeid (34).

Mens elevene tegner i boka si, oppdager de at svaret ikke blir 24 når rekkefølgen spiller en rolle, men 16. De velger allikevel å holde fast på at svaret skal bli 24, og velger strategi 6, jobb baklengs, for å vise dette. De starter med 24, og prøver tallene de har. Dialogen under viser dette.

*Utdrag 4 Jobb baklengs*

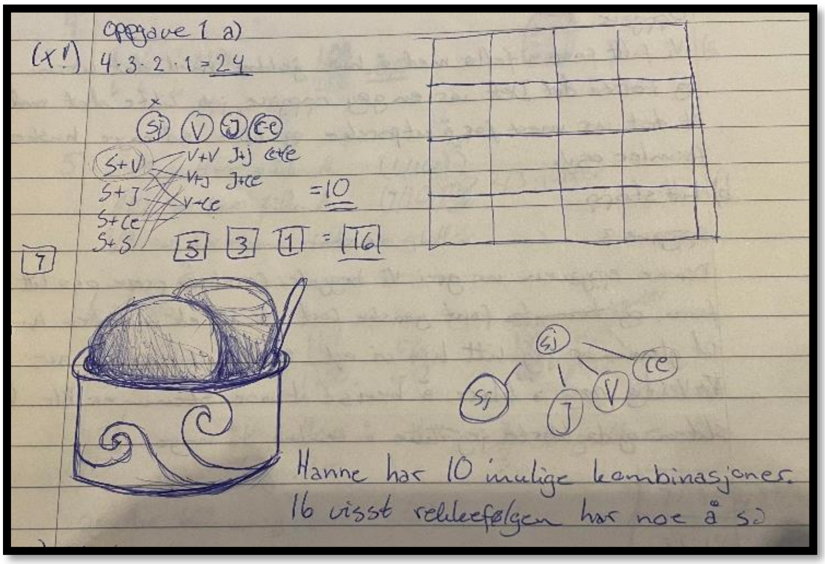
| | | |
|---|---|---|
| 48 | Bente | Vi har syv alternativer. Hvordan får vi 24? |
| 49 | Anne | Det lurte jeg også på! |
| 50 | Bente | Hvis du har fire komboer der (..) |
| 51 | Cecilie | Skal vi plusse da og ikke gange? |
| 52 | Anne | Hvis vi ganger den med den (..) det er fire muligheter med sjokolade, det er fire muligheter med hver smak. |
| 53 | Bente | Kan vi lage en tabell sammen som kan hjelpe oss? |
| 54 | | (de prøver å tegne opp en tabell i boka si) |




Figur 6: Fra Cecilie sin Notebook

I dialogen over ser vi elevenes ulike strategier for å finne den løsningen de tror er riktig, altså 24 kombinasjoner. De starter med 24, og jobber med tallene de har for å se hvordan de kan få svaret de ønsker. Bente uttrykker dette ved å si at de har syv alternativer, og spør så hvordan de kan få 24 (48). Da benytter de seg av strategi 6, jobb baklengs. Elevene virker forvirret rundt hvilken regneoperasjon som kan anvendes her. Flere ganger spør elevene seg selv og hverandre om de skal plusse eller gange, noe Cecilie igjen spør om i denne dialogen (51). Anne foreslår da at de skal gange de fire mulighetene som fins for hver smak med noe hun ikke sier, bare uttrykker som «den» (52). Her peker hun nok på noe i Notebook'en sin, men blir avbrutt av Bente som foreslår at de skal lage en tabell som kan hjelpe dem å finne løsningen (53), og elevene fortsetter å tegne opp alternativer i bøkene sine.

Det er interessant at de forkaster den riktige løsningen på 16 kombinasjoner de har funnet ved å lage en illustrasjon, se figur 6 og figur 7, og holder fast på 4!. Som vi ser av de tre figurene i elevenes inskripsjoner, har elevene prøvd å lage illustrasjoner som kan hjelpe dem å visualisere problemet, og vi ser også forsøk på å lage en tabell.




Figur 7: Fra Anne sin Notebook

I figur 5, figur 6 og figur 7 ser vi at elevene har visualisert alle de tre løsningene de har vært innom til nå, både 24, 16 og ti mulige kombinasjoner. De har ennå ikke klart å vise hvordan det kan bli 24 kombinasjoner, naturlig nok, da det ikke er en løsning på dette problemet. De to andre løsningene har de vist med både illustrasjon og regning. Elevene har ikke vært innom begrepene ordnet/uordnet utvalg, men har brukt uttrykk som «rekkefølgen har noe å si»/ «rekkefølgen har ikke noe å si».

Under arbeidet med å tegne opp antall kombinasjoner i boka si, foreslår Bente å bruke strategi 5, løse deler av problemet. Elevene ser kun på hvor mange kombinasjoner de får når den ene kula skal være sjokolade. Det kan være et forsøk på å dele problemet inn i flere delproblemer, for så å løse disse ett etter ett, og så finne løsningen på det opprinnelige problemet.

*Utdrag 5 (inneholder utdrag 2) Løse deler av problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 24 | Bente | Hvis vi begynner med sjokolade: S+V, S+J og S+CE. Blir ikke det riktig? |
| 25 | Cecilie | Men kan hun ha to med sjokolade? |
| 26 | Bente | Selvfølgelig kan ho det! Så S+S. |
| 27 | Anne | Ok, så da har vi tatt sjokolade. |
| (…) | | |
| 36 | Anne | Hvis vi ser på topp og bunn da (..) hvis du har sjokolade, så kan du ha |
| 37 | Bente | ≈ Da kan du ha alle de gange to (..) Nei, ikke den nederste. |
| 38 | Cecilie | Nei! Sjokolade – sjokolade har ikke noe å si. |
| 39 | Bente | Så da er det syv med sjokolade, blir ikke det riktig? |

Her ser vi at Bente ramser opp kombinasjonene som kan gjøres med sjokolade (24 og 26). Etter et par minutter bestemmer de seg også for at rekkefølgen kan ha noe å si, så da blir de enige om at det er syv kombinasjoner som inneholder sjokolade (39). Alle de tre elevene bidrar i dialogen. Nå har de løst én del av problemet, og fortsetter med kombinasjonene uten sjokolade. De tegner da opp hvor mange kombinasjoner det kan lages med de andre smakene når sjokolade «var brukt». De bruker fortsatt strategi 5, og løser deler av problemet hver for seg, selv om de ikke legger løsningen på hver del sammen til slutt. Det kan være fordi de er på jakt etter noe som skal bli 24.

*Utdrag 6 Løser deler av problemet videre*

| | | |
|---|---|---|
| 39 | Bente | Så da er det syv med sjokolade, blir ikke det riktig? |
| 40 | | (De andre sier seg enige) |
| 41 | Anne | Så blir det fem (..) så blir det tre (..) og den siste blir bare en. |
| 42 | | (de tegner de ulike kombinasjonene i stillhet en stund) |
| (…) | | |
| 55 | Anne | Nå tegner jeg opp alle kombinasjonene med sjokolade, så vanilje (..) Det er i grunnen det vi gjorde i stad, men nå er det i en tabell. |
| 56 | Bente | Men kan vi se på det vi gjorde i stad? |
| 57 | Anne | Kan vi se etter et mønster? Jeg tror det har noe med fire også tre også to også en å gjøre. |

I figur 5 ser vi at Bente har, ved å lage en systematisk tabell, funnet ut at det er syv kombinasjoner som alle inneholder sjokolade (39). Anne fortsetter med å legge frem sitt resultat for kombinasjoner som videre inneholder de tre andre smakene (41). Nå har de tallene 7, 5, 3 og 1. Dette er løsningen på hvert delproblem, men de velger ikke å legge disse tallene sammen. Nå foreslår Bente at de skal ta noen steg tilbake (56), og se på hva de gjorde tidligere. Vi ser i dialogen at de bruker riktig strategi, selv om Anne på slutten av dette utdraget tar frem fire, tre, to og en igjen på leting etter mønster (57). Dette kan tolkes som at hun ønsker at de skal tilnærme seg problemet fra en annen vinkel, altså bruke strategi 9, se problemet fra en annen side.

I neste utdrag kan vi se at elevene tar i bruk strategi 8, å forenkle problemet. Dette gjør de ved at de kun skal se på antall kombinasjoner med to smaker.

*Utdrag 7 Forenkle problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 59 | Anne | Hva er logisk hvis du har fire smaker? |
| 60 | | (…) |
| 61 | Anne | Hva er logisk hvis du har to smaker? Hvor mange muligheter har du da? |
| 62 | | (…) |
| 63 | Bente | Da har du tre (..) Sjokolade med sjokolade, vanilje med sjokolade og sjokolade med vanilje (..) Det er tre! |

Anne stiller først spørsmålet om hva som er det logiske svaret om en har fire smaker (59). Da ingen kommer med noe svar etter en tenkepause, så stiller hun spørsmålet på nytt, men nå om det er kun to smaker (61). Etter en stund svarer Bente at da er det tre kombinasjoner med sjokolade (63). Her forenkler de problemet ved å redusere antall smaker. Selv om de litt tidligere i samtalen hadde funnet riktig antall kombinasjoner med fire smaker, er de fortsatt på jakt etter hvordan de kan få 24 kombinasjoner, en løsning som altså ikke er riktig.

Da elevene hadde arbeidet 15 minutter med problemet, foreslår Anne at de må stoppe opp og lese problemet en gang til. De blir også enige om at de bør se på hva de har tegnet i bøkene sine, og telle kombinasjonene på nytt. Det skal vise seg å være en god strategi, altså å se problemet fra en annen side, for som vi ser i dialogen under, fører dette til at elevene endelig klarer å konkludere.

*Utdrag 8 Se problemet fra en annen side*

| | | |
|---|---|---|
| 79 | Anne | Kanskje vi skal lese oppgaven en gang til? |
| 80 | | (de leser i stillhet) |
| 81 | Bente | Kan det ha noe med at det ikke er fire kuler, men fire smaker? 4+3 er syv (..) +2 er ni (..) +1 er ti. |
| 82 | Anne | Det er hvis topp og bunn ikke har noe å si. Det er kun hvis det er smakene som gjelder. |
| 83 | Cecilie | Men tell de kombinasjonene du har tegnet opp i boka. Hvor mange blir det? |
| 84 | Bente | Fire, så tre (..) det blir ti. |
| 85 | | (de blir litt forvirret fordi de har tegnet litt rotete) |

| | | |
|---|---|---|
| 86 | Bente | Det blir ti kombinasjoner da! |
| 87 | Anne | Da stemmer det vi gjorde i stad når topp og bunn hadde noe å si, for da fikk vi syv, fem, tre og en. Da får vi 16. Det høres jo rimelig ut det? |
| 88 | Bente | Ja, hvis rekkefølgen har noe å si! |

Gruppa bestemte seg raskt for at svaret på oppgaven skulle være 24. Da de hadde forsøkt i over et kvarter å finne en måte å få dette svaret på, foreslår Anne at de skal lese oppgaven på nytt (79). De går tilbake til steg 1 i Polyas (1957) problemløsningsmodell. Cecilie foreslår at de skal telle kombinasjonene de har tegnet i bøkene sine (83), og Bente teller opp ti kombinasjoner (81). Anne påpeker at det er når rekkefølgen ikke har noe å si (82). Når de i ytring 86 konkluderer med at det er ti kombinasjoner ved det som matematisk kalles uordnet utvalg med tilbakelegging, ser Anne at de kombinasjonene de har tegnet for hver smak, må gi svaret for når rekkefølgen har noe å si (87). De konkluderer sammen at ved det som matematisk kalles ordnet utvalg med tilbakelegging, må antall kombinasjoner bli 16 (87 og 88).

Elevene kom endelig frem til to riktige løsninger etter cirka 25 minutters jobbing, én for uordnet utvalg med tilbakelegging, og én for ordnet utvalg med tilbakelegging. De brukte mange strategier i arbeidet sitt, men som en kan se av inskripsjonene fra Notebook'ene deres, kunne nok illustrasjonene og tabellene vært litt mer systematiske. Dette er strategier som nok hadde hjulpet dem mer om de hadde vært ryddigere. Jeg velger å ikke ta med noe fra generaliseringen av problemet da jeg veiledet elevene mye i arbeidet med å finne en generell formel.

### 4.1.2 Strategier brukt i arbeidet med oppgave 9: Fire påfølgende tall

*Hvilke tall oppstår når du legger til 1 til produktet av fire påfølgende tall?*

*(Mason & Davis, 1991, s. 8)*

Da elevene gikk i gang med denne oppgaven, hadde de allerede jobbet 45 minutter med kuleisoppgaven. De hadde hatt et lite friminutt før de leste oppgaveteksten til «Fire påfølgende tall». Elevene jobbet cirka tretti minutter med denne oppgaven, men det var tydelig at særlig Cecilie begynte å bli sliten. Hun uttrykte også at de ikke var vant til å jobbe med én oppgave så lenge av gangen, og at det var tungt. Jeg brøt inn et par ganger i løpet av episoden for å hjelpe dem med praktiske tips i CAS, én gang da elevene ikke visste hvordan de kunne skrive kvadratrot i CAS, og én andre gang da de ikke visste hvorfor det sto to vertikale streker rundt svaret de fikk (absoluttverdi). Jeg stilte et monitorerende spørsmål i løpet av episoden helt på slutten av økta da elevene ikke forsto hva resultatet de hadde fått i CAS betød.

Elevene løste det opprinnelige problemet ganske raskt, og brukte mesteparten av tiden på å finne en generell formel for tallet som oppsto når de la 1 til produktet av fire påfølgende tall. Til denne delen av arbeidet var elevenes hovedstrategi å bruke det digitale verktøyet CAS, strategi 10. De brukte CAS som kalkulator for å regne ut ulike produkter av fire påfølgende tall, legge til 1, for så å ta kvadratrota. Senere brukte de CAS til å finne et generelt uttrykk for produktet av fire påfølgende tall addert med 1. Her fikk de et fjerdegradspolynom som de ved hjelp av CAS tok kvadratrota av. I løpet av denne episoden brukte elevene fire av de ti strategiene i manualen. Disse fire viste seg å være svært hensiktsmessige strategier for å løse nettopp denne oppgaven. De fire strategiene som gikk igjen var å se etter mønster, lage en systematisk tabell, prøve og feile og den allerede nevnte strategi 10, bruke et digitalt verktøy.

Tabell 4: Oversikt over strategibruk i arbeidet med oppgave 9.

| Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger | Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger |
|---|---|---|---|
| 1. Se etter mønster | 8 | 6. Jobb baklengs | 0 |
| 2. Lag en systematisk tabell | 4 | 7. Tenk på et liknende problem | 0 |
| 3. Lag en illustrasjon | 0 | 8. Gjør problemet enklere | 0 |
| 4. Prøv og feil | 5 | 9. Se problemet fra en annen side | 0 |
| 5. Løs deler av problemet | 0 | 10. Bruk digitale hjelpemidler | 6 |

For å løse den opprinnelige oppgaven, trengte ikke elevene å legge noen premisser for løsningsarbeidet. De måtte bare avklare begrepene «produkt» og «påfølgende tall» før de kunne begynne. Det gjorde at oppgaven kun hadde ett svar, men det var allikevel en utforskende oppgave som hadde gode muligheter for spesialisering, antagelser og generalisering (Mason et al., 2010). Som vi skal se under, befant elevene seg et par minutter i Polya (1957) sin første fase, altså å forstå oppgaven, før Anne foreslo at de bare skulle prøve å løse oppgaven. Planen for løsningsarbeidet var at de skulle prøve noen tall for å se om de fant et mønster. Polyas (1957) steg 1 og 2 ble unnagjort i løpet av et par minutter.

*Utdrag 9 Se etter mønster*

| | | |
|---|---|---|
| 172 | Bente | Hvilke tall oppstår når du legger til 1 til produktet av fire påfølgende tall? |
| 173 | Cecilie | Er produktet når du ganger? For sum er pluss? |
| 174 | Bente | Ja, ja, produkt når du ganger. |
| 175 | Anne | Hva er påfølgende tall? 1, 2, 3, 4? 5, 6, 7, 8? Tall som følger etter hverandre? |
| 176 | Bente | Ja, ja, det følger etter hverandre. |
| 177 | Cecilie | Har vi skjønt oppgaven da? |
| 178 | I kor | Ja! |
| 179 | Cecilie | Er det mer vi trenger å definere her? |
| 180 | Anne | Er det ikke bare å prøve? |
| 181 | Bente | Ja! Vi bare prøver noen og ser om vi finner et mønster! |

Etter at Bente har lest oppgaven høyt (172), er alle de tre elevene med på å avklare begrepene i oppgaveteksten. Cecilie spør de andre om de har skjønt oppgaven (177), altså om de har skapt mening rundt oppgavens innhold, og de andre svarer bekreftende. Anne og Bente ønsker da å starte oppgaveløsningen (180 og 181), og å prøve seg frem for å se etter et mønster.

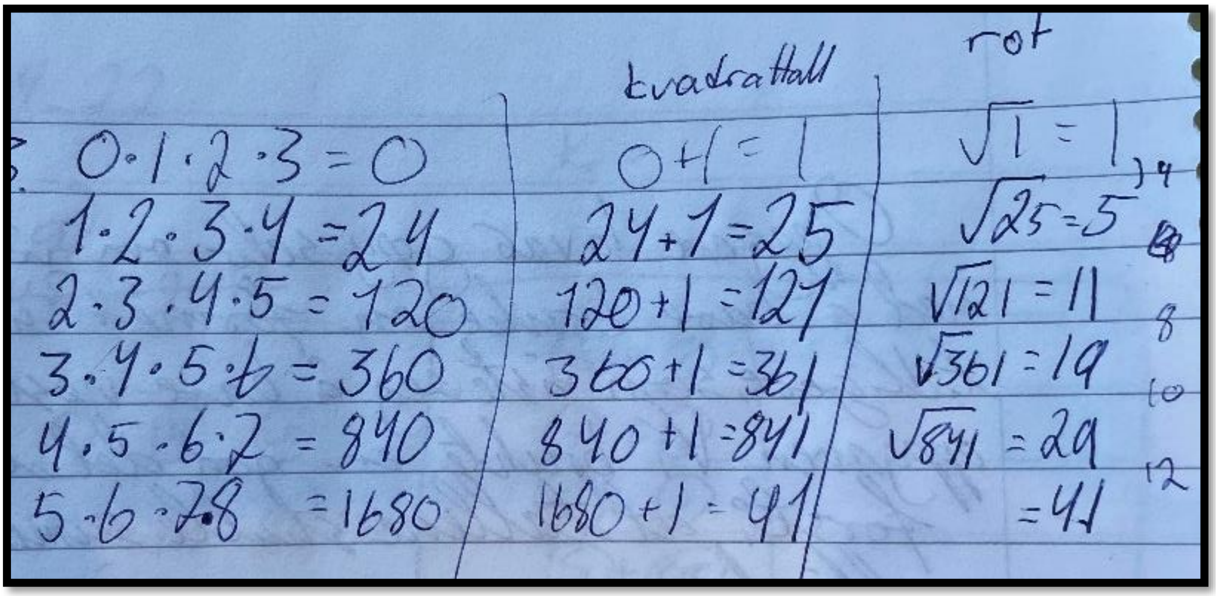
Også her var elevene raske til å prøve å løse problemet, og Bente foreslår tidlig at de skal teste ut noen tall og se etter mønster, som er strategi 1. Sammen med strategi 2, å lage en systematisk tabell, var denne strategien den mest brukte i elevenes arbeid med det opprinnelige problemet. I dialogen under ser vi at spesialiseringen av problemet er i full gang, etter at Cecilie foreslo at de skulle prøve med de fire påfølgende tallene som startet på 1. Her kommer Anne raskt med en antagelse om hvilke tall som oppstår, nemlig kvadrattall.

*Utdrag 10 Se videre etter mønster*

| | | |
|---|---|---|
| 182 | Cecilie | Da prøver vi de fire første tallene; 1, 2, 3, 4. |
| 183 | Bente | Hvordan skriver vi dette? Bare $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$? |
| 184 | Cecilie | Ja, det hadde vi i stad, det blir 24. |

185 Bente Også pluss 1 (..) 25.
186 Anne Det blir ikke sånne kvadrattall da? Nei, vi må ta det riktig. Vi prøver noen flere.
187 Cecilie Nå prøver vi fra 2, altså $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.
188 Anne Skal jeg gjette, så blir det 35 og pluss 1, så blir det 36.

Elevene går systematisk til verks, og spesialiserer problemet ved å regne ut eksempler med små tall. Bente leder an i å sette opp en oversiktlig tabell (se figur 8 under) over tallene som oppstår (182 og 187). Anne gjør en antagelse om at svaret er et kvadrattall, og foreslår å teste ut noen flere eksempler for å sjekke om resultatet blir nettopp det (186). Hun gjetter derfor på at summen skal bli 36 når de starter de fire påfølgende tallene på to (188), altså det neste kvadrattallet etter 25. Som vi ser i figuren under, ble summen 121, og det overrasket dem. Det førte til at de testet systematisk alle produkt + 1 som starter med tallene fra og med 1 til og med 5. Til dette brukte de CAS, og de skrev opp svarene i en tabell.




Figur 8: Fra Bente sin Notebook

At elevene her brukte strategi 2 og lagde en oversiktlig tabell, gjorde at det var enkelt å se et mønster. Kvadrattall var flere ganger oppe i dialogen mellom elevene, og etter hvert så de også at det var enda et mønster i tallene som oppsto.

*Utdrag 11 Tabell som utgangspunkt for mønster*

197 Bente Er det noen som ser noe mønster enda?
198 Cecilie Kan vi ta en til?
199 Bente At de slutter på 1 når vi legger til 1? Alle unntatt det første slutter på null.

| | | |
|---|---|---|
| 200 | Anne | Hva blir kvadratrota? (tastelyder fra kalkulator) Av 25 blir det 5, av 121 blir det 11, (..) av det neste er det 19, av 841 blir det 29. |
| 201 | | (…) |
| 202 | Anne | Det må ha noe med de kvadrattallene å gjøre! Har dere noen idé om hva vi kan bruke de til? |

(…)

| | | |
|---|---|---|
| 206 | Anne | Jeg tror det stemmer med kvadrattall! Vent da! Det øker med 6, 8, 10, 12 (..) Ok, la meg tenke! |
| 207 | | (Anne leser oppgaven høyt igjen) |
| 208 | Anne | Vi får et kvadrattall og når vi tar kvadratrota av det, så får vi tall som øker med to. |
| 209 | Bente | Hva om vi starter på 0? |
| 210 | Anne | Det er sant! La oss teste det. *Det blir jo null*. Også 1. Kvadratrota av 1 er 1. |
| 211 | Bente | Da øker det med 4. Så 4, 6, 8, 10, 12. |

De er innom at løsningen må bli kvadrattall flere ganger i løpet av episoden (for eksempel i 186, 202, 206, 208). Dette ble tydelig for dem fordi de brukte strategier som å se etter mønster, lage en systematisk tabell og å prøve og feile. Her oppdager Anne at rota av tallene øker på en bestemt måte (206). De reflekterer ikke mer over det, men sier seg fornøyd med å ha løst oppgaven så raskt.

Da de skulle begynne å generalisere problemet, i betydningen å vise at produktet + 1 alltid blir et kvadrattall, gikk de over til å bruke strategi 10, å bruke et digitalt verktøy, slik at de raskere kunne finne kvadratrota av det generelle uttrykket for produktet + 1. Som vi skal se under, utfører elevene riktige handlinger, men de reflekterer ikke særlig over resultatene de får eller hvorfor de blir som de blir.

*Utdrag 12 Bruk av digitalt verktøy - CAS*

| | | |
|---|---|---|
| 226 | Anne | Kom igjen! Hvis starttallet vårt er x, så vil y være x(x+1)(x+2)(x+3) |

(…)

| | | |
|---|---|---|
| 233 | Cecilie | Jeg fikk noen svar, men vet ikke helt hva de betyr. |
| 234 | Anne | $x^4+6x^3+11x^2+6x$ - det høres litt riktig ut? |
| 235 | Bente | Så må vi jo legge til 1? |
| 236 | Anne | Å ja, og ta kvadratrota. Hvordan tar vi kvadratrot? |
| 237 | Lærer | Alt R. |
| 238 | Anne | Så må vi ta parentes rundt hele. |
| 239 | | (de tar kvadratrota av $x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ og får $\left\|x^2+3x+1\right\|$) |

(…)

| | | |
|---|---|---|
| 243 | Anne | Da blir svaret $x^2+3x+1$ . |
| 244 | Cecilie | Hva har vi funnet ut? |
| 245 | | (...) |
| 246 | Lærer | Vil $x^2+3x+1$ alltid bli et helt tall når x er et helt tall? |
| 247 | Anne | Jaaa? |
| 248 | Bente | Kan vi ikke bare teste med noen tall? |
| 249 | Anne | Lurt. Vi setter inn 1. 1+3+1 blir 5. Det er rota av 25. |
| 250 | Bente | 4+6+1 er 11. Og det var jo kvadratrota av 121. Det stemmer! |
| 251 | Cecilie | Er vi ferdig da? |
| 252 | Bente | Vi leser oppgaven igjen. |
| 253 | | (Bente leser høyt for de andre) |
| 254 | Anne | Svaret er kvadrattall! |

Elevene er her litt usikre på hva de egentlig har funnet ut, noe Cecilie også spør om (244). Jeg spør dem om de alltid vil få et heltall om de setter et heltall inn i uttrykket (246). Dette spør jeg om for å få dem til å koble variabelen til starttallet i de fire påfølgende tallene, og få dem til å tenke videre på at uansett hvilket tall de starter med, vil de få et heltall som kan opphøyes i andre og gi dem et kvadrattall. Også her tester elevene ut om hypotesen deres stemmer med å prøve med noen tall, det vil si å gjenta spesialiseringen de gjorde innledningsvis, og de konkluderer med at svaret må bli kvadrattall. De reflekterer ikke videre hvorfor det blir sånn.

### 4.1.3 Strategier brukt i Terningkast

Du kaster en vanlig terning tre ganger. Hva er sannsynligheten for at produktet av resultatet (antall øyne opp i hvert kast) er et partall?

(Abelkonkurransen, 1. runde, 2021)

Denne oppgaven var den første av tre oppgaver elevene jobbet med under den siste økta jeg observerte dem. Alle de fire elevene var til stede, og de jobbet med denne oppgaven i cirka 15 minutter. Oppgaven hadde kun én løsning, men det var flere muligheter for utforsking, utvidelse og generalisering av problemet. Jeg forholdt meg stille og observerte gjennom hele episoden.

Jeg observerer at elevene benytter seg av fire av de ti strategiene fra kodingsmanualen (se 2.1.7); strategi 1 (se etter mønster), strategi 4 (prøv og feil), strategi 7 (tenk på et liknende problem) og strategi 8 (gjør problemet enklere).

Tabell 5: Oversikt over strategibruk i arbeidet med oppgave 10.

| Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger | Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger |
|---|---|---|---|
| 1. Se etter mønster | 2 | 6. Jobb baklengs | 0 |
| 2. Lag en systematisk tabell | 0 | 7. Tenk på et liknende problem | 3 |
| 3. Lag en illustrasjon | 0 | 8. Gjør problemet enklere | 1 |
| 4. Prøv og feil | 7 | 9. Se problemet fra en annen side | 0 |
| 5. Løs deler av problemet | 0 | 10. Bruk digitale hjelpemidler | 0 |

Ved hjelp av disse fire strategiene kommer elevene relativt raskt frem til det riktige svaret på oppgaven, nemlig at det er 50% sannsynlig at produktet av tre terningkast blir et partall. Elevene avklarer begreper og blir enige om hva oppgaven spør om ganske raskt. Bente har vært borti denne problemstillingen tidligere, og bidrar derfor til at gruppa raskt kommer inn på riktig spor. Vi ser i dialogen under at hennes strategi med å tenke på et liknende problem, setter fart i løsningsprosessen.

*Utdrag 13 Tenke på et liknende problem*

| | | |
|---|---|---|
| 268 | Anne | Ok, hvis du får tre enere, da har du en ganger en ganger en, det er en. |
| 269 | Bente | Er det ikke en sånn regel i partall også, at man må (..) hva var den? Jeg husker det er en regel som sier at hvis produktet skal bli et partall, så måtte det ganges med ett eller annet? |
| 270 | | (…) |
| 271 | Bente | Eller tar jeg helt feil? |
| 272 | Camilla | Du tar sikkert ikke det. |
| 273 | Bente | For at liksom to oddetall kan i hvert fall ikke bli et partall, er det ikke sånn? |

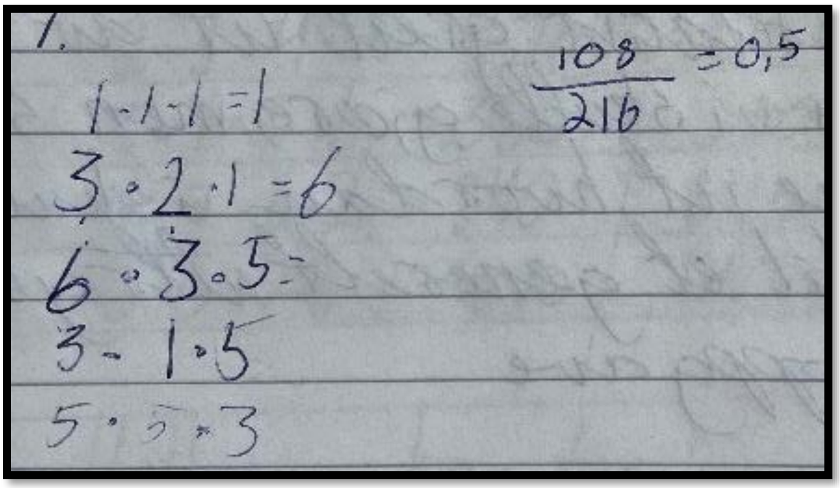
Her ser vi at Bente husker noe om at hvis et produkt skal bli partall, så må det ganges med «noe» (269). Videre erindrer hun at produktet av to oddetall i hvert fall ikke kan bli et partall (273). Her tenker hun antageligvis på noe hun har vært borti før, og videre bruker de dette resultatet i tilnærmingen til problemet. Anne husker også at hun har vært borti noe som likner før, og under ser vi hennes bidrag til den videre utforskingen av problemet.

*Utdrag 14 Tenke videre på et liknende problem*

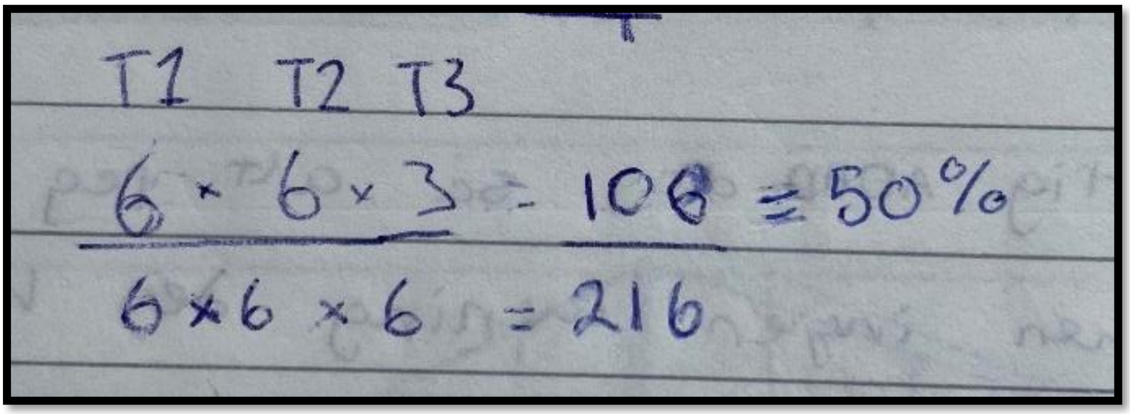
| | | |
|---|---|---|
| 276 | Anne | Det er i hvert fall med plussing. Hvis du plusser to oddetall, så blir det et partall. Men hvis du plusser to partall (..) Men det kan være det ligger noe i det. |
| 277 | | (…) |
| 278 | Anne | Jo, for ganging er jo bare å plusse flere ganger. Hvis du tar for eksempel tre ganger to, da får du seks. Det er et partall. Da har du et oddetall ganger et partall. Kan det være så enkelt at om du ganger med et partall, så blir det et partall? |
| 279 | Camilla | Det kan være det. Ett partall, eller? |
| 280 | Anne | Eller flere partall. Jeg vet ikke! La oss prøve! |

I ytring 276 slår Anne fast at resultatet blir et partall om du adderer to oddetall. Videre sier hun at det samme må gjelde for å multiplisere med partall, da multiplikasjon er gjentatt addisjon (278). Hun kommer i samme ytring med en antagelse om at det alltid blir et partall om du multipliserer med et partall. Siden hun fortsatt er usikker, foreslår hun at de skal prøve ut noen spesielle tilfeller og se om antagelsen stemmer (280).

Da jeg så etter hva elevene hadde skrevet i Notebook'en sin til dette problemet, fant jeg kun det som er avbildet på de to figurene under. Men som vi ser i utdraget under, prøver de muntlig ut noen forskjellige tall, og finner produkter som har kun partallsfaktorer, oddetallsfaktorer og en miks av begge. De bruker strategi 4, prøv og feil, hvor de har gjort en rimelig antagelse om hva svaret skal bli, og så sjekker de om resultatet stemmer ved å prøve spesielle tilfeller. Her kommer de også inn på hvordan de kan forenkle problemet for å regne ut sannsynligheten (strategi 8), altså kun se på sannsynligheten for at ett av tallene er partall.




Figur 9: Fra Camilla sin Notebook




Figur 10: Fra Anne sin Notebook

*Utdrag 15 Prøve og feile og forenkle problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 283 | Camilla | ≈la oss si du har fem ganger tre, ikke sant. Det er femten. Ganger to, det er tretti. Og det er et partall. |
| 284 | Anne | Er det hver gang du får et partall? Funker det med to partall også da? Det gjør vel det! |
| 285 | Camilla | To ganger to, fire ganger tre, (..) |
| 286 | Bente | Vi skal finne sannsynligheten. Vi kan ha hvilket som helst tall på den første, hvilket som helst tall på den andre, men den siste må være et partall. |
| 287 | Anne | Eh, ja? Ja! La oss ta tre ganger en ganger fem. Da får jeg femten, og det er jo ikke (..) |
| 288 | Bente | ≈ja, det er et oddetall. |
| 289 | Anne | Og fem ganger fem ganger (..) ja, ja! Da er det jo bare å finne sannsynligheten for at ett av tallene er et partall! |

Her ser vi at elevene tester ut forskjellige faktorer. I ytring 283 finner Camilla produktet av to oddetall og et partall, og konkluderer med at det blir partall. Anne spør og svarer selv bekreftende i samme ytring (284) på om det også gjelder for når to av faktorene er partall. Bente har sannsynligvis skapt mening av samtalen mens de andre har testet ulike tall, og kommer med en avgjørende ytring, nemlig at de skal finne sannsynligheten, og at det kun er det siste tallet som må være et partall (286). Anne følger dette opp, og sier helt korrekt at de kun trenger å finne sannsynligheten for at ett av tallene er et partall (289). Anne har da en mer generell idé. Det trenger ikke være det siste tallet/terningkastet som gir partall. Det er nok at minst ett av de tre tallene/terningkastene gir partall.

Da denne idéen er ute i gruppa, finner elevene ganske raskt ut at sannsynligheten er 50%, selv om ikke alle synes det hørtes riktig ut.

*Utdrag 16*

| | | |
|---|---|---|
| 295 | Anne | Da må vi ta $6 \cdot 6 \cdot 3$ og dele på $6 \cdot 6 \cdot 6$, for det er totalt antall muligheter. |
| 296 | Dina | Det tar vi på kalkulator. $6 \cdot 6 \cdot 6$ er 216. Og $6 \cdot 6 \cdot 3$ er 108. Da blir det 0,5. |
| 297 | Camilla | Betyr det at det er 50% sjanse? |
| 298 | Bente | Det gir jo ikke mening. |
| 299 | Anne | Nei, jeg følte det var større sannsynlighet. |
| 300 | Camilla | Jammen halvparten av tallene er oddetall og halvparten er partall. |
| 301 | Dina | Men siden vi har hatt flere kast. |
| 302 | Berit | Ja, men hvis vi tar bort de siden de er like, så er det tre av seks sjanser. For de har ingenting å si for utfallet uansett. |
| 303 | Anne | Det høres logisk ut, allikevel sier hodet mitt at nei, det er større sjanse. Men det er sikkert ikke det. |

Her ser vi at både Bente og Anne synes at svaret ikke gir mening (298 og 299), men de aksepterer svaret, og Anne spør et spørsmål som gjør at elevene utvider problemet og generaliserer løsningen.

*Utdrag 17 Utvidelse av problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 306 | Anne | Blir det alltid det? Hvis du kaster fire terninger da? |
| 307 | Bente | Ja? |
| 308 | Anne | $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3$ er 648. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ er 1296, er ikke det partall? |
| 309 | Dina | Det er jo gøy da! |
| 310 | Bente | Men så er det jo om det er regelen da? Hvis du bare ganger inn et partall, så blir det et partall? |
| 311 | Anne | Ja, vi har jo ikke kommet på noen eksempler hvor det ikke stemmer! For hver gang du ganger et tall med for eksempel to, så blir det et partall. |

Anne spør om det alltid blir slik, altså at produktet vil bli et partall om én av faktorene er partall (306). Med dette utvider hun problemet til å gjelde flere enn de opprinnelige tre faktorene. Bente spør om det kan være en regel (320), og Anne mener at ja, det er det. Siden gruppa ikke hadde kommet over eksempler hvor det ikke stemmer, så mener de at regelen må være at om du multipliserer med to, så blir det et partall (311), og elevene godtar dette som bevis. Med dette avsluttet elevene denne episoden, og de gjorde dessverre intet forsøk på å forklare hvorfor det ble slik. Jeg ser i etterkant at jeg kunne ha motivert dem til å bevise resultatet.

### 4.1.4 Strategier i Fire-hus-på-rad

*Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge?*

*(Abelkonkurransen, runde 1, 2009)*

Denne oppgaven er en kombinatorikkoppgave hvor et premiss allerede er lagt, to nabohus kan ikke ha samme farge. Det gjør at oppgaven kun har én løsning, men den har store muligheter for utvidelse og generalisering. Da elevene skulle i gang med denne oppgaven, hadde de allerede jobbet med to andre oppgaver før vi tok friminutt. Dette var den siste økta hvor jeg observerte at elevene jobbet med utforskende oppgaver. De samarbeidet om å løse denne oppgaven i cirka 20 minutter. I denne episoden brukte elevene alle de ti strategiene fra kodingsmanualen, og denne gangen var det særlig strategi 5, løs deler av problemet, som ofte ble snakket om og brukt. I tillegg gikk strategi 3 og strategi 7, lag en illustrasjon og tenk på et liknende problem, igjen flere ganger.

Tabell 6: Oversikt over strategibruk i arbeidet med oppgave 12.

| Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger | Heuristiske metoder | Nevnt antall ganger |
|---|---|---|---|
| 1. Se etter mønster | 3 | 6. Jobb baklengs | 1 |
| 2. Lag en systematisk tabell | 1 | 7. Tenk på et liknende problem | 3 |
| 3. Lag en illustrasjon | 4 | 8. Gjør problemet enklere | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. Prøv og feil | 1 | 9. Se problemet fra en annen side | 1 |
| 5. Løs deler av problemet | 6 | 10. Bruk digitale hjelpemidler | 1 |

Det som kjennetegnet denne episoden, var det Schoenfeld (1992) kalte «explore». Elevene leste oppgaven, og begynte umiddelbart å tegne opp ulike kombinasjoner uten noen synlig plan for hvordan de skulle gå frem. De begynte med å se på to farger, noe som egentlig var en relevant strategi, men de hoppet fort over til å se på tre farger uten å konkludere ferdig og notere seg løsningen på delproblemet med to farger. Dette kommer tydelig frem i dialogen under.

*Utdrag 18 Løse deler av problemet sammen med en illustrasjon*

| | | |
|---|---|---|
| 319 | Bente | Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge? |
| 320 | Anne | *OK, Dina er i gang* |
| 321 | Dina | Ja, jeg prøver å finne en løsningsretning. Vi kan jo for eksempel ta sånn hvitt, rødt, hvitt, rødt (..) |
| 322 | Anne | Ja, hva om vi begynner med hvitt, rødt, hvitt, rødt? |
| 323 | Bente | Så kan man gjøre motsatt. Vi kan ha rødt, hvitt, rødt, hvitt. |
| 324 | Anne | Da er det ingen flere kombinasjoner vi kan ha med bare de. |
| 325 | | (De andre bekrefter i kor) |
| 326 | Anne | Da vil det si at med hvitt og rødt så er det to måter. Så da må det bli det samme om vi tar hvitt og gult?! |
| 327 | Camilla | Ja, det blir to måter. Og det samme med rødt og gult. |
| 328 | Anne | Ja, men så kommer det vanskelige at vi skal ha med alle fargene. |

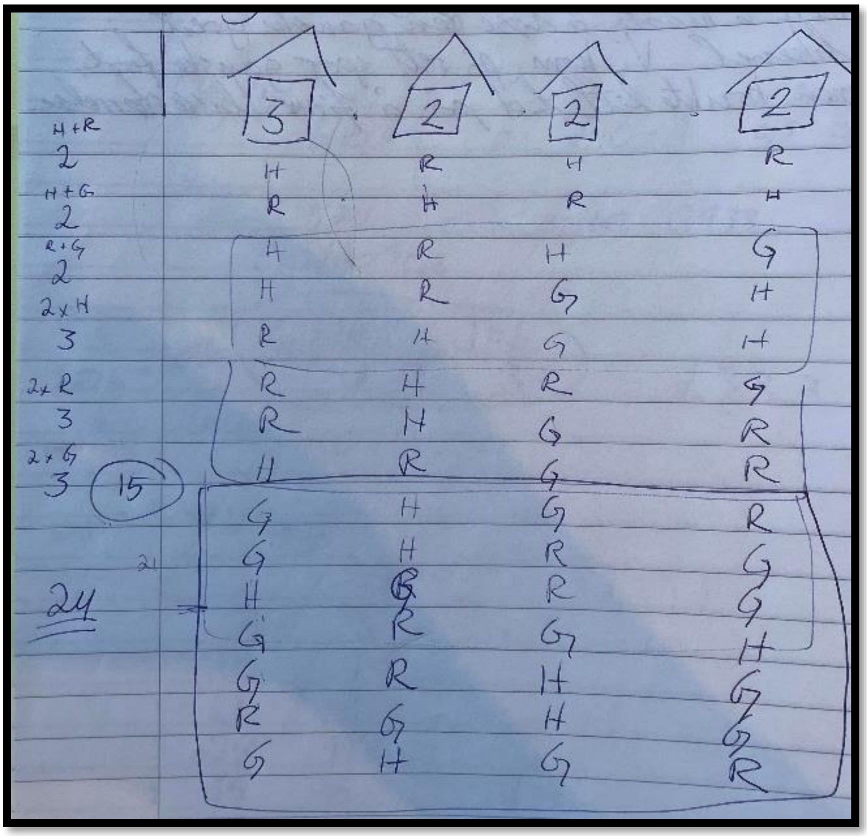
Her ser vi at Dina går raskt i gang med å lage kombinasjoner med rødt og hvitt. Hun løser deler av problemet ved å lage en visualisering av hvor mange kombinasjoner de kan lage om de kun bruker to farger. Anne oppsummerer denne starten med å si at det er to ulike kombinasjoner med hvitt og rødt, og at det da må bli det samme med hvitt og gult (326). Camilla følger opp med at det igjen også må stemme for rødt og gult (327). Istedenfor å avslutte delproblemet med å summere opp antall kombinasjoner med to farger, leder heller Anne gruppa videre til å se på kombinasjoner med tre farger (328).

Etter denne starten, begynte elevene å ramse opp ulike kombinasjoner med tre farger i en tilsynelatende tilfeldig rekkefølge. Det ble etter hvert så uoversiktlig at Camilla foreslo at de skulle ta noen steg tilbake, og Anne fant frem notatene fra kuleisoppgaven. Dette fikk gruppa til å forenkle problemet ved å tenke at de to husene som skulle ha lik farge, skulle være hvite. Igjen bruker de strategi 5 og løser deler av problemet.

*Utdrag 19 Forenkling av problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 344 | Camilla | Skal vi ta noen steg tilbake? Sånn bare med en gang? |
| 345 | Anne | Jeg skal bare se på det vi gjorde sist! |
| 346 | Bente | OK, nå har jeg det! Hvis vi tenker at vi skal ha to hvite hus, fins det da flere måter å plassere det på enn disse tre måtene her? Hvitt, rødt, hvitt, gult. Hvitt, rødt, gult, hvitt. Rødt, hvitt, gult, hvitt? |
| 347 | Anne | Vi kan bytte om på rødt og gult, men hvitfargen blir stående da. Så vi kan ikke flytte mer på hvitfargen?! Eller den det skal være to med? |
| 348 | Camilla | Neeeiii? |
| 349 | Bente | Da er det et mønster her. Du kan ha to der, to her og så må du bytte på de i midten. Da er det tre. Så to ganger H. Det er tre. |
| 350 | Camilla | Så gjør vi det med de andre også, så to ganger R, det er tre. Og to ganger G er tre. |
| 351 | Anne | Hvis vi summerer disse så er ni pluss seks er 15. Da har vi ett tall. |

Som vi ser over, foreslår Camilla å ta noen steg tilbake (344). Da hadde de i noen minutter foreslått ulike kombinasjoner med tre farger etter hvert som de kom på nye. Anne tenker på oppgaven med kuleis, som også var en kombinatorikkoppgave, og blar tilbake for å se hvordan de løste den (345). Bente kommer med et godt innspill i ytring 346, hvor hun foreslår å kun se på antall kombinasjoner de kan lage om de to husene som skal ha samme farge, må være hvite. Ved å illustrere den situasjonen, uttrykker Bente at det da fins et mønster, altså at de to hvite kan plasseres på tre ulike måter (349). Camilla følger opp, og påpeker at da må det gjelde for rødt og gult også (350). Bente sier i ytring 349 at når to farger er like, kan de plasseres på tre ulike måter, og de to andre fargene kan bytte plasser. Hadde hun fullført dette resonnementet, hadde hun kanskje sett at da blir det seks kombinasjoner for hver «dobbelt-farge». Istedenfor multipliserer Anne de tre kombinasjonene med de tre fargene, og får ni. Så legger hun sammen dette med noe jeg antar er de seks kombinasjonene fra da de så på kombinasjoner med to farger. Da sier hun i ytring 351 at de får tallet 15. Det har hun også tegnet i Notebook'en sin. Hadde elevene her kommet på å doble de ni kombinasjonene, hadde de vært i havn med oppgaven da 18 + 6 = 24, noe som også er svaret på problemet.



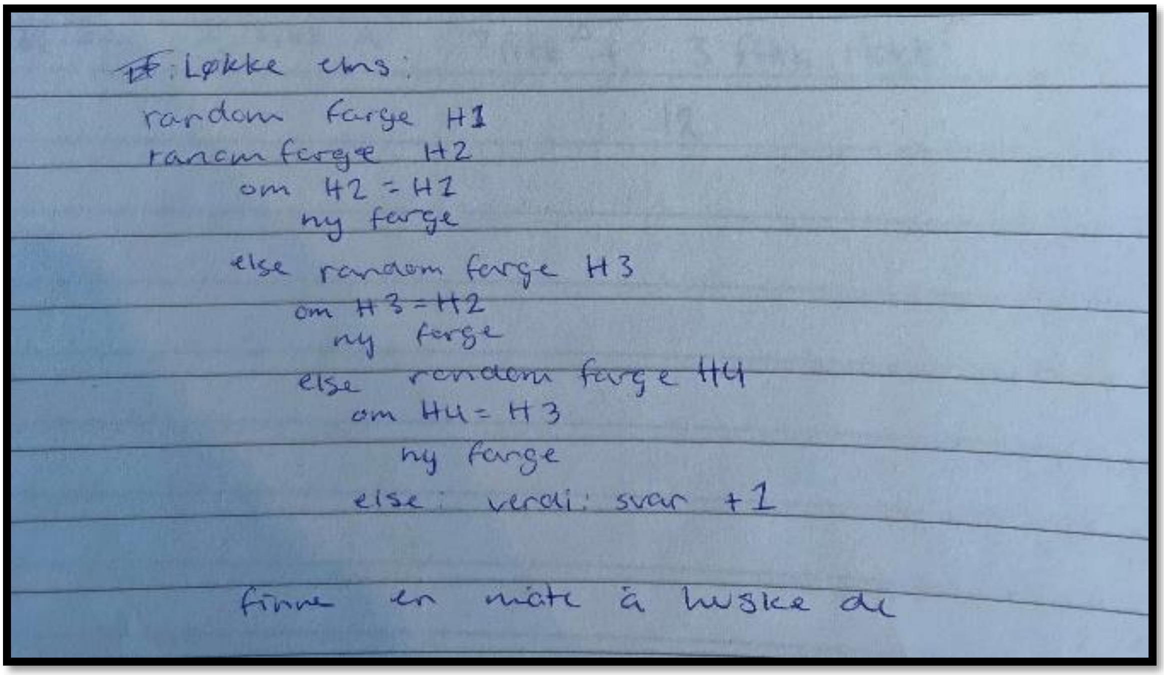
Figur 11: Fra Anne sin Notebook

Istedenfor begynner de å snakke seg gjennom problemet på nytt, og Dina foreslår å lage et program som kan løse problemet for dem (strategi 10).

*Utdrag 20 Bruk av digitalt verktøy*

| | | |
|---|---|---|
| 369 | Dina | Ja! Jeg merker at jeg begynner å tenke i koder akkurat nå. |
| 370 | | (De andre ler) |
| 371 | Anne | Koding? Ja, prøv da! |
| 372 | Dina | Vi har fire verdier for hvert av husene, og så gir vi hver farge en verdi. Så er det sånn: if house one, blabla, else, og hvis to nabohus får samme farge, så bytt liksom. Men jeg har ikke kapasitet til å lage det nå. |

Dina sier hun ikke har kapasitet til å lage programmet som kan løse problemet (372), men hun har gjort seg noen tanker om hvordan det kunne sett ut og skrevet det ned i Notebook'en sin. Dette er et forsøk på å bruke strategien med å anvende digitale hjelpemidler for å løse problemet.




Figur 12: Fra Dina sin Notebook

Dina har gode idéer om hvordan hun eventuelt kunne lagd et program, men hun velger å ikke følge det opp. Istedenfor fortsetter gruppa å tegne opp ulike muligheter, og til slutt gir de litt opp. Da velger jeg å stille noen monitorerende spørsmål for å hjelpe dem videre. Etter at de får tallene tre, to, to og to, kommer spørsmålet om de skal gange eller plusse som vi også så de lurte på i utdrag 4. Vi ser hvordan de avgjør dette mot slutten av dialogen under.

*Utdrag 21 Konkludere*

| | | |
|---|---|---|
| 391 | Dina | Kan vi ta en pause? Dette var vanskelig! |
| 392 | Lærer | OK, men jeg kan gi dere et hint! Dere har fire hus etter hverandre. Hvor mange farger kan dere velge på det første huset? |
| 393 | Alle | Tre! |
| 394 | Lærer | Hvor mange farger er da tilgjengelige for det andre huset? |
| 395 | Alle | Åja, to! |
| 396 | Lærer | Hvor mange er da tilgjengelige for det tredje? |
| 397 | Alle | To! |
| 398 | Lærer | Og til det siste? |
| 399 | Alle | To! |
| 400 | Anne | Så da blir det første tre, det neste blir bare to, og to og to. |
| 401 | Cecilie | Hva blir det da? Skal vi plusse? |
| 402 | Anne | Eller gange? |
| 403 | Bente | Hvorfor gange? |
| 404 | Anne | 3+2+2+2 er (..) ni og $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ er (..) 24. Da må det bli gange, for vi har jo tegnet mer enn ni. Da er det $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ som er 24. |

Here ser vi at Dina uttrykker ønske om å gi opp denne oppgaven (391), og derfor bestemmer jeg meg for å komme med et hint. Jeg spør om hvor mange farger det første huset kan males i (392), og alle svarer «tre» i kor. Så spør jeg videre hvor mange farger som er tilgjengelig for hus nummer to, og så videre. Elevene sitter nå med tallene tre, to, to og to. I episoden med kuleis har elevene diskutert om de skal multiplisere eller addere tall de finner (se utdrag 4), og det samme skjer her (401 og 402). Anne tester begge deler, og får ni når hun legger dem sammen, og 24 når hun multipliserer dem. Da konkluderer hun med at antall kombinasjoner må gis ved å multiplisere de fire tallene da hun allerede hadde tegnet 15 kombinasjoner, så ni blir for lite (404). Med denne konklusjonen avsluttet elevene arbeidet. Matematisk sett er dette ikke en fullgod begrunnelse, og denne avslutningen ga egentlig et godt bilde på gruppas problemløsningsprosess, som jeg vil gå nærmere inn på i neste kapittel.

## 4.2 Hva karakteriserte gruppas problemløsningsprosess i de ulike stegene

I dette kapitlet vil jeg presentere og analysere innsamlet data som jeg senere vil bruke til å besvare det andre forskningsspørsmålet mitt; «Hva karakteriserer gruppas problemløsningsprosess?». Jeg velger å dele kapitlet inn i fire delkapitler etter Polyas (1957) faser (se 2.1.5), og se på hva som kjennetegner gruppas prosess i hver av disse fasene. Det første delkapitlet, 4.2.1, vil jeg bruke til å presentere og analysere resultater fra transkripsjonen som viser hvordan elevene gikk frem for *å forstå problemet* de skulle jobbe med. Videre, i 4.2.2, vil jeg analysere hvordan gruppa *la en plan* for hvordan de skulle løse de ulike problemene. I det tredje delkapitlet, 4.2.3, vil jeg presentere og analysere data som viser hvordan elevene jobbet sammen i *gjennomføringsfasen*, altså Polyas (1957) tredje fase. I det fjerde og siste delkapitlet, 4.2.4, presenterer og analyserer jeg data fra transkripsjonen som viser hvordan elevene avsluttet arbeidet sitt med et problem, altså i den fasen Polya (1957) kaller *å se tilbake*.

### 4.2.1 Forstå problemet

I dette delkapitlet vil jeg vise eksempler fra transkripsjonen på hva som karakteriserte gruppa da de ble presentert for et nytt problem, og hvordan de gikk frem for å skape mening av problemet de skulle jobbe sammen for å løse. Dette er første fase i både Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason med kollegaer (2010) sine problemløsningsmodeller, henholdsvis kalt for «forstå problemet», «analysere og definere» og «inngangsfasen». Ifølge Polya (1957) bør elevene i denne fasen avklare hva som er ukjent, hva som er data og hva som er betingelsene. Også Borgersen (1994) nevner viktigheten av å forstå oppgaveteksten og definere de ulike ordene og begrepene i denne. Mason med kollegaer (2010) påpeker at det er i denne fasen at elevene legger grunnlaget for en effektiv løsningsprosess.

Da jeg analyserte de fire episodene jeg valgte å bruke i min studie, så jeg at mine elever brukte til sammen 153 sekunder i denne fasen for alle fire oppgavene. Det er i gjennomsnitt 38,25 sekunder per oppgave. Mine elever brukte altså under ett minutt på å forstå problemet og avklare begreper og betingelser i hver av oppgavene de skulle jobbe med. I den ene oppgaven, fire hus på rad, leste bare elevene oppgaven høyt før de gikk i gang med å løse problemet.

*Utdrag 22 (del av utdrag 18) Forstå problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 319 | Bente | Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge? |
| 320 | Anne | *OK, Dina er i gang* |
| 321 | Dina | Ja, jeg prøver å finne en løsningsretning. Vi kan jo for eksempel ta sånn hvitt, rødt, hvitt, rødt (..) |

Her ser vi at Bente leser oppgaven (319), og Dina går umiddelbart i gang med å ramse opp ulike kombinasjoner (321). De bruker åtte sekunder i den første fasen, før de hiver seg ut i løsningsfasen. Det samme skjedde da elevene skulle jobbe med kuleisoppgaven. Anne leser oppgaven, og Cecilie kommer med et forslag til løsning etter kun få sekunder.

*Utdrag 23 Forstå kuleis-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Anne | Ok, skal vi lese første oppgaven? |
| 2 | Bente | Mmm… |
| 3 | Anne | Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler. Hvor mange måter kan hun velge isen sin på? Hva om det er flere smaker å velge mellom? |
| 4 | | (…) |
| 5 | Anne | Ok, har vi skjønt oppgaven? Altså hvor mange kombinasjoner |
| 6 | I kor | ≈Ja! |
| 7 | Cecilie | Er det ikke da man skal ta $4 \cdot 3 \cdot 2$ |

Medregnet tiden elevene er stille (4), bruker gruppa 25 sekunder i denne fasen etter at Anne har lest oppgaven (3) og spurt om alle har skjønt problemet (5). Cecilie kommer umiddelbart med et forslag til løsning ved å foreslå å multiplisere $4 \cdot 3 \cdot 2$, hvor hun blir avbrutt med bekreftelse før hun rekker å fullføre setningen (7), og elevene er over i en ny fase.

Da elevene skulle i gang med oppgaven om fire påfølgende tall, brukte de litt lengre tid i den første fasen da de trengte å avklare to begreper i oppgaveteksten. Allikevel var de også her raskt over i en ny fase.

*Utdrag 24 (samme som utdrag 9) Forstå problemet med fire påfølgende tall*

| | | |
|---|---|---|
| 172 | Bente | Hvilke tall oppstår når du legger til 1 til produktet av fire påfølgende tall? |
| 173 | Cecilie | Er produktet når du ganger? For sum er pluss? |
| 174 | Bente | Ja, ja, produkt når du ganger. |
| 175 | Anne | Hva er påfølgende tall? 1, 2, 3, 4? 5, 6, 7, 8? Tall som følger etter hverandre? |
| 176 | Bente | Ja, ja, det følger etter hverandre. |
| 177 | Cecilie | Har vi skjønt oppgaven da? |
| 178 | I kor | Ja! |
| 179 | Cecilie | Er det mer vi trenger å definere her? |
| 180 | Anne | Er det ikke bare å prøve? |

Her ser vi at etter at Bente har lest oppgaveteksten (172), har elevene behov for å avklare begrepene «produkt» og «påfølgende tall». Cecilie spør om produkt er det du får når du ganger (173), og Anne spør om påfølgende tall er tall som følger etter hverandre (175). Da det er avklart, spør Cecilie om alle har skjønt oppgaven (177), og om det er mer som må defineres (179). Da foreslår Anne at de skal gå i gang å prøve (180), og elevene forlater første fase før det har gått ett minutt.

Det var i episoden med terningkast at elevene var lengst i fasen om å forstå problemet. Da gikk de ikke videre før etter 80 sekunder, inkludert 60 sekunders stillhet etter at Anne leste oppgaven. Det høres på lydopptaket ut som om de grubler over oppgaveteksten i dette minuttet da de lager lyder som «eeeehhh» og «hmmm».

*Utdrag 25 Forstå terningkast-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 261 | Anne | Ok! Du kaster en vanlig terning tre ganger. Hva er sannsynligheten for at produktet av resultatene, altså antall øyne opp i hvert kast, er et partall? |
| 262 | | (…) |
| 263 | Anne | Ok! Produkt er ganging. Så du har tre tall mellom en og seks som skal ganges sammen, og vi skal finne ut sannsynligheten for hvor mange ganger det blir et partall. Enig? |

| | | |
|---|---|---|
| 264 | Camilla | Ja. |
| 265 | Dina | Ok, så de skal kaste en terning tre ganger? Hvis de får for eksempel en første gang, og så fem og så seks, så ganger de de sammen og det skal bli et tall? |
| 266 | Anne | Ja. |

Etter at Anne har lest oppgaven høyt for gruppa (261), blir det stille i ett minutt. Mest sannsynlig arbeider elevene for å skape mening av problemet hver for seg. Etter ett minutt bryter Anne stillheten ved at hun definerer begrepet «produkt», oppsummerer oppgaveteksten og spør deretter om resten av gruppa er enige med hennes meningsskaping av problemet (263). Dina kommer med et eksempel på et spesielt tilfelle med tre tall for å sjekke at hun har tolket oppgaven riktig (265), og Anne bekrefter at det er korrekt (266). Med det går elevene over fra denne fasen til å spesialisere problemet.

I Polya (1957) sin problemløsningsmodell, er neste fase «lag en plan». Borgersen (1994) kaller sin neste fase for «modellere og tegne», mens Mason med kollegaer (2010) ikke forlater inngangsfasen før elevene har gjort noen tekniske forberedelser til det videre arbeidet i tillegg til å spesialisere problemet.

### 4.2.2 Lag en plan

Den største jobben ligger i de to første fasene, forstå problemet og lage en god plan (Polya, 1957). I dette delkapitlet vil jeg vise eksempler fra transkripsjonen på hva som karakteriserte gruppa da de var i Polyas (1957) andre fase og skulle lage en plan for problemløsningsarbeidet sitt. Jeg erfarte at i flere av episodene hoppet elevene fra å lese oppgaven rett over i å prøve å løse problemet uten noen form for synlig plan. Dette gjaldt for både arbeidet med terningkastoppgaven og husproblemet, mens i iskuleoppgaven og «Fire påfølgende tall» lagde elevene seg en plan underveis.

*Utdrag 26 (samme som utdrag 25) Plan for arbeidet med terningkast-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 261 | Anne | Ok! Du kaster en vanlig terning tre ganger. Hva er sannsynligheten for at produktet av resultatene, altså antall øyne opp i hvert kast, er et partall? |
| (…) | | |
| 265 | Dina | Ok, så de skal kaste en terning tre ganger? Hvis de får for eksempel en første gang, og så fem og så seks, så ganger de de sammen og det skal bli et tall? |
| 266 | Anne | Ja. |

| | | |
|---|---|---|
| 267 | Dina | Kult! |
| 268 | Anne | Ok, hvis du får tre enere, da har du en ganger en ganger en, det er en. |
| 269 | Bente | Er det ikke en sånn regel i partall også, at man må (..) hva var den? Jeg husker det er en regel som sier at hvis produktet skal bli et partall så måtte det ganges med ett eller annet? |

Over ser vi at elevene leser problemet (261) og er i fase 1 i noen sekunder (262-267), for deretter å gå rett over i å prøve ut spesielle tilfeller og løse problemet (268 og 269). De forfølger sin første idé, og dialogen gir ingen indikasjoner på at de legger en plan for problemløsningsarbeidet sitt. Det samme ser vi i transkripsjonen av episoden med oppgave 12 (fire hus på rad).

*Utdrag 27 (del av utdrag 18) Plan for arbeidet med problemet om fire-hus-på-rad*

| | | |
|---|---|---|
| 319 | Bente | Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge? |
| 320 | Anne | *OK, Dina er i gang* |

Her går elevene rett fra å lese oppgaven (319) over i løsningsfasen. Bente leser oppgaven høyt for gruppa (319), og Dina begynner å tegne opp kombinasjoner etter tilsynelatende tilfeldig rekkefølge. Det er iallfall slik jeg tolker dialogen deres. Dette kommenterer Anne lattermildt (320), før resten av gruppa følger Dinas eksempel og begynner å tegne hus. I begge disse episodene hopper elevene over fase to, og har ingen synlig plan for løsningsarbeidet. Dette kjennetegner den uerfarne problemløseren (Schoenfeld, 2010), og selv om de hadde den kunnskapen de trengte, som det skulle vise seg etter hvert, tok det svært lang tid før de klarte å finne en løsning på problemene.

I oppgave 8, hvor elevene skulle se på kombinasjoner av iskuler, kan vi se et forsøk på å lage en slags plan for det videre løsningsarbeidet.

*Utdrag 28 (del av utdrag 1) Plan for arbeidet med kuleis-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Anne | Ok, har vi skjønt oppgaven? Altså hvor mange kombinasjoner |
| 6 | I kor | ≈Ja! |
| 7 | Cecilie | Er det ikke da man skal ta $4 \cdot 3 \cdot 2$ |
| 8 | Anne | ≈ Ja, jeg skulle til å si det! |
| 9 | Bente | Eller så kan vi bare tegne isen? |
| 10 | Anne | Vi kan gjøre begge deler da, og se om vi får samme svar. |

Etter at elevene unisont svarer at de har skapt mening av oppgaven (6), presenterer Cecilie en mulig løsning (7), mens Bente foreslår at de kan tegne isen (9). Anne foreslår da at om de både regner ut Cecilie sitt regnestykke og tegner opp de ulike kombinasjonene, så kan de se om de får samme svar. Denne planen forfølger elevene gjennom nesten hele økta uten noen gang å sette spørsmålstegn ved om $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ kombinasjoner er den riktige løsningen, noe den faktisk ikke er. Så uansett hvor mye de tegner, får de aldri 24 kombinasjoner. Dette skaper tilsynelatende mye forvirring og frustrasjon hos elevene gjennom episoden.

I oppgaven om fire påfølgende tall kan vi også gjenkjenne et forsøk på å lage en plan for løsningsarbeidet.

*Utdrag 29 (del av utdrag 9) Plan for arbeidet med problemet om fire påfølgende tall*

| | | |
|---|---|---|
| 177 | Cecilie | Har vi skjønt oppgaven da? |
| 178 | I kor | Ja! |
| 179 | Cecilie | Er det mer vi trenger å definere her? |
| 180 | Anne | Er det ikke bare å prøve? |
| 181 | Bente | Ja! Vi bare prøver noen og ser om vi finner et mønster! |

Her ser vi at etter at elevene er enige om at de har skapt mening av oppgaven (177), foreslår Anne at de skal sette i gang å prøve (180). Dette støttes av Bente som en god plan, og hun legger til at de skal prøve noen eksempler og se om de finner et mønster (181).

I begge de to siste eksemplene kan vi se forsøk på å lage en plan, selv om den kanskje ikke er så gjennomtenkt og formålstjenlig som den kunne vært om elevene hadde hatt litt mer erfaring. Som vi skal se i neste kapittel, Gjennomfør planen (4.2.3), fører det at elevene ikke har brukt nok tid i de to første fasene til at de ofte opplever frustrasjon og forvirring i gjennomføringsfasen.

### 4.2.3 Gjennomfør planen

Steg 3 i Polyas (1957) problemløsningsmodell er å gjennomføre planen. Om elevene har klart å forstå problemet og lagd en god plan, vil det å gjennomføre planen være en enklere jobb enn å lage den (Polya, 1957). Jeg vil i dette delkapitlet presentere resultater fra transkripsjonen som kjennetegner elevenes arbeid i denne fasen fra de fire episodene jeg har valgt å bruke i studien min. Borgersen (1994) kalte denne fasen for «kvalifisert gjetning gjennom prøving og feiling». Her skal elevene kunne se etter mønstre og idéer som kan gi dem grunnlag til å finne en hypotese. Mason med kollegaers (2010) gjennomføringsfase starter når elevene mener de har skapt mening av problemet og gjort det til sitt eget, og varer helt til problemet er løst. Elevene jeg observerte brukte mesteparten av tiden sin i denne fasen hvor de jobbet for å løse problemet.

Gjennomføringsfasen var ofte preget av at elevene ikke hadde utarbeidet en konkret plan for hvordan de skulle løse problemene, men heller hev seg ut i forsøket med å løse oppgavene etter noe som kunne se ut som tilsynelatende tilfeldige innfall. De lot seg spore av i tilfeller hvor samtalen ledet dem inn på emner hvor de selv hadde erfaringer de ønsket å dele med resten av gruppa, men de hentet seg raskt inn igjen. Eksempler på dette ser vi i utdragene under.

*Utdrag 30 Løse kuleis-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 18 | Bente | Men vi kan jo tegne og lage kombinasjoner. |
| 19 | I kor | Ja, ja, ja! |
| 20 | Cecilie | Vi har en sjokoladeis. |
| 21 | Bente | Og vanilje (..) og jordbær(..) og (..) |
| 22 | | (de diskuterer en stund hvilke fire smaker de skal ha på de fire kulene. Samtalen sporer litt av da C forteller hun har jobbet i isbar og kommer inn på hvilke smaker som var populære der. De ender opp med smakene sjokolade, vanilje, jordbær og cola-eple(?)) |
| 23 | Anne | Ok, vi lager en figur på hvorfor det er 4!. |
| 24 | Bente | Hvis vi begynner med sjokolade: S+V, S+J og S+CE. Blir ikke det riktig? |

Her ser vi at gruppa engasjeres av forslaget til Bente om å tegne opp ulike kombinasjoner av iskuler som Hanne kan ha på kuleisen sin (18 + 19). Idéen blir ikke fulgt opp da de heller begynner å diskutere hvilke smaker de kan ha på iskulene, i tillegg til at Cecilie forteller om sine erfaringer med å jobbe i isbar (22). Da de tar opp problemet igjen, foreslår Anne at de skal lage en figur som viser hvorfor antall kombinasjoner blir 24, et svar de bestemte seg for tidlig, men som ikke var riktig (23). Gjennomføringsdelen av denne episoden var preget av at elevene prøvde å finne tall som ga dem 24 kombinasjoner, enten ved addisjon eller multiplikasjon, noe som også førte til at elevene forkastet korrekte løsninger når disse dukket opp.

*Utdrag 31 (Ytringene 39-42 er også med i utdrag 6) Videre løsning av kuleis-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 39 | Bente | Så da er det syv med sjokolade, blir ikke det riktig? |

| | | |
|---|---|---|
| 40 | | (De andre sier seg enige) |
| 41 | Anne | Så blir det fem (..) så blir det tre (..) og den siste blir bare en. |
| 42 | | (de tegner de ulike kombinasjonene i stillhet en stund) |
| 43 | Cecilie | Så kan hun sikkert ha sånn kjeks og beger. |
| 44 | | (de sporer fullstendig av og diskuterer kjeks/beger, strøssel, skje, miljøhensyn, softis osv.) |
| 45 | Anne | Nå må vi tilbake til oppgaven! Har vi regnet ut? |
| 46 | Bente | Må vi plusse eller gange? |
| 47 | Anne | Nå ble jeg i tvil! Vi må gange? |
| 48 | Bente | Vi har syv alternativer. Hvordan får vi 24? |

Her ser vi at elevene i fellesskap har funnet riktig antall kombinasjoner om de ser på et ordnet utvalg med tilbakelegging (39 + 41), altså syv is-varianter som inneholder sjokolade, fem som inneholder jordbær (uten sjokolade), tre med vanilje (uten sjokolade og jordbær), og til slutt kun én som inneholder bare cola-eple. Til sammen blir det 16 kombinasjoner, noe gruppa ikke regner ut her. Igjen sporer de litt av da Cecilie bringer valg av kjeks eller beger inn i samtalen (43). Da Anne får gruppa til å konsentrere seg om oppgaven igjen (45), spør Bente om de skal plusse eller gange tallene de har fått (46). Bente velger å kun nevne de syv kombinasjonene med sjokolade, og spør gruppa igjen om hvordan de kan få 24 (48). Fortsatt er gruppa på jakt etter tall som kan gi dem 24, og reflekterer ikke videre over de kombinasjonene de har funnet. Ikke før de velger å lese oppgaven på nytt, se på inskripsjonene sine og legge bort 24, finner gruppa de to løsningene på problemet.

Episoden hvor elevene jobbet med fire påfølgende tall, var preget av at elevene tidlig spesialiserte problemet for å finne et mønster. Her gikk de systematisk til verks og regnet ut flere eksempler med små tall (se figur 8). Dette viste seg å være en effektiv strategi som førte elevene raskt til en antagelse om hva den generelle løsningen kunne være.

*Utdrag 32 (deler av utdrag 10 og 11) Løse problemet om fire påfølgende tall*

| | | |
|---|---|---|
| 181 | Bente | Ja! Vi bare prøver noen og ser om vi finner et mønster! |
| 182 | Cecilie | Da prøver vi de fire første tallene; 1, 2, 3, 4. |
| 183 | Bente | Hvordan skriver vi dette? Bare $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ? |
| 184 | Cecilie | Ja, det hadde vi i stad, det blir 24. |
| 185 | Bente | Også pluss 1 (..) 25. |
| 186 | Anne | Det blir ikke sånne kvadrattall da? Nei, vi må ta det riktig. Vi prøver noen flere. |
| 187 | Cecilie | Nå prøver vi fra 2, altså $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ . |

(…)

| | | |
|---|---|---|
| 206 | Anne | Jeg tror det stemmer med kvadrattall! Vent da! Det øker med 6, 8, 10, 12 (..) Ok, la meg tenke! |
| 207 | | (Anne leser oppgaven høyt igjen) |
| 208 | Anne | Vi får et kvadrattall og når vi tar kvadratrota av det, så får vi tall som øker med to. |

Etter at Bente foreslo å prøve noen tall for å se om de fant et mønster (181), gikk elevene raskt i gang med å lage en systematisk tabell hvor de skrev inn flere spesialtilfeller av problemet. Anne kom tidlig med en antagelse om at resultatet ble kvadrattall (186), men foreslo selv å prøve ut flere spesialtilfeller for å være sikker (186). Etter å ha prøvd ut påfølgende tall med starttall fra en til fem, tok Anne igjen opp kvadrattall (206). Hun hadde i tillegg observert at kvadratet økte med to for hvert nytt starttall (208). Etter dette var gruppa raske med å generalisere problemet ved hjelp av CAS, og avsluttet oppgaven så fort de hadde et resultat.

Også i episoden hvor elevene jobbet med terningkastoppgaven, startet de med å regne ut noen spesialtilfeller av problemet. Her hentet de også frem tidligere kunnskap om multiplikasjon av partall og oddetall, og kom raskt med en antagelse om hva løsningen på problemet måtte være.

*Utdrag 33 (deler av utdrag 14 og 15) Løse terningkast-problemet*

| | | |
|---|---|---|
| 278 | Anne | Jo, for ganging er jo bare å plusse flere ganger. Hvis du tar for eksempel tre ganger to, da får du seks. Det er et partall. Da har du et oddetall ganger et partall. Kan det være så enkelt at om du ganger med et partall, så blir det et partall? |
| 279 | Camilla | Det kan være det. Ett partall, eller? |
| 280 | Anne | Eller flere partall. Jeg vet ikke! La oss prøve! |
| 281 | Camilla | Jo, for da må det kunne deles på et partall. Du dobler jo et tall, og da må du kunne dele på et tall, og da er det partall. |
| 282 | Anne | La oss si du har seks ganger (..) |
| 283 | Camilla | ≈la oss si du har fem ganger tre, ikke sant. Det er femten. Ganger to, det er tretti. Og det er et partall. |
| 284 | Anne | Er det hver gang du får et partall? Funker det med to partall også da? Det gjør vel det? |
| 285 | Camilla | To ganger to, fire ganger tre, (..) |
| 286 | Bente | Vi skal finne sannsynligheten. Vi kan ha hvilket som helst tall på den første, hvilket som helst tall på den andre, men den siste må være et partall. |
| 287 | Anne | Eh, ja? Ja! La oss ta tre ganger en ganger fem. Da får jeg femten, og det er jo ikke (..) |
| 288 | Bente | ≈ja, det er et oddetall. |
| 289 | Anne | Og fem ganger fem ganger (..) ja, ja! Da er det jo bare å finne sannsynligheten for at ett av tallene er et partall! |

### 4.2.4 Se tilbake

Det fjerde og siste steget i Polya (1957) sin modell, er å se tilbake og revurdere både løsningsmetoden man har brukt og resultatet man har kommet frem til. Ved å se tilbake på prosess og resultat kan man forsterke de erfaringene man gjorde underveis. Dette kan inspirere til nye matematiske idéer, som igjen kan gi næring til elevenes videre approprieringsprosess.

Her vil jeg presentere data som beskriver hvordan elevene jeg observerte avsluttet sine episoder etter å ha jobbet med de fire ulike problemene. Polya (1957) skriver at mange elever ser seg raskt om etter nye oppgaver når de har løst en oppgave, og med det går de glipp av en viktig og lærerik fase av arbeidet. Borgersen (1994) belyser også hvor viktig denne siste delen av prosessen er, og skriver at det er svært verdifullt for elevene å reflektere over løsningene de har fått, og de løsningsprosessene de har vært gjennom. Den siste fasen til Mason med kollegaer (2010) handler om at elevene må se tilbake på hva som har blitt gjort for å forbedre og utvide sin matematiske tenking, og for å prøve og sette løsningen de har funnet inn i en mer generell sammenheng. I de fire episodene jeg valgte å bruke i min studie, avsluttet elevene arbeidet så fort de fant en løsning, også når de var usikre på om løsningen var riktig. I to av tilfellene utviklet elevene en generell løsning på problemet, men i begge tilfellene skjedde dette først etter sterk påvirkning fra meg. Jeg vil under presentere hva som karakteriserte elevgruppas jobb med den siste fasen i hver av episodene fra transkripsjonen.

Aller først presenterer jeg avslutningen av oppgave 12, fire hus på rad. Elevene hadde jobbet med denne oppgaven i cirka 20 minutter, og begynte å bli synlig slitne. De fikk litt hjelp av meg til å samle tankene rundt en løsning, noe som fikk dem til å sitte igjen med tallene 3, 2, 2 og 2. Under ser vi transkripsjonen fra det siste halve minuttet av elevenes arbeid.

*Utdrag 34 (del av utdrag 21) Se tilbake på problemet om fire-hus-på-rad*

| | | |
|---|---|---|
| 400 | Anne | Så da blir det første tre, det neste blir bare to, og to og to. |
| 401 | Cecilie | Hva blir det da? Skal vi plusse? |
| 402 | Anne | Eller gange? |
| 403 | Bente | Hvorfor gange? |
| 404 | Anne | 3+2+2+2 er (..) ni og $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ er (..) 24. Da må det bli gange, for vi har jo tegnet mer enn ni. Da er det $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ som er 24. |
| 405 | Bente | Ja, det stemmer med det jeg har tegnet. |
| 406 | | (de ler) |
| 407 | Dina | Er det pause da!? |

Her ser vi at elevene er raske til å avslutte oppgaven og be om pause så fort de har et tall de kan presentere som løsningen på problemet de har jobbet med de siste tjue minuttene. De er fornøyde med å bruke 24 som løsning da de har tegnet mer enn ni kombinasjoner i boka si, som er det andre alternativet deres til løsning (404). Dialogen mellom elevene gir lite uttrykk for nysgjerrighet eller interesse for hvorfor det blir 24, heller ikke prøver de å tegne de 24 ulike kombinasjonene av hus. De legger bare fra seg oppgaven, og anser seg som ferdig med den og er klare for en ny oppgave (eller helst en pause). Det samme ser vi da elevene jobbet med oppgaven om fire påfølgende tall. Her finner elevene et forslag til løsning, og i løpet av sekunder har de konkludert og er klare for friminutt.

*Utdrag 35 Se tilbake på problemet om fire hus på rad*

| | | |
|---|---|---|
| 254 | Anne | Svaret er kvadrattall! |
| 255 | | (de skriver i boka si) |
| 256 | Anne | Vi skjønte det ganske fort! Og vi fant relativt fort den økninga! Det er bare å få det inn i et uttrykk som er litt vanskelig. |
| 257 | Bente | Selve oppgaven løste vi ganske |
| 258 | Cecilie | ≈ Raskt! Enig!! |
| 259 | | (de konkluderer i boka si og avslutter) |
| 260 | Cecilie | Nå tar vi friminutt! |

Denne oppgaven jobbet elevene med i cirka 30 minutter. Så fort de har et forslag til løsning, legger de fra seg oppgaven og går videre. Fra Anne ytret at løsningen er kvadrattall (254), tar det under ett minutt før Cecilie foreslår å ta friminutt (260). Heller ikke her ser elevene tilbake på hva de har gjort eller hvorfor svaret blir kvadrattall. De uttrykker kun at de løste oppgaven raskt (256, 257 og 258), og legger problemet fra seg.

I oppgaven om terningkast skal elevene finne sannsynligheten for at det blir et partall om du multipliserer resultatene av tre terningkast. Her spesialiserer elevene problemet, og kommer med en antagelse om at det må være 50% sannsynlig at produktet blir et partall. Etter å ha jobbet cirka 15 minutter med dette problemet, anser de seg som ferdige.

*Utdrag 36 Se tilbake på problemet om terningkast*

| | | |
|---|---|---|
| 310 | Bente | Men så er det jo om det er regelen da? Hvis du bare ganger inn et partall, så blir det et partall? |
| 311 | Anne | Ja, vi har jo ikke kommet på noen eksempler hvor det ikke stemmer! For hver gang du ganger et tall med for eksempel to, så bli det et partall. |
| 312 | Cecilie | Ja! Partall er jo bare 2, 4, 6, 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 313 | Anne | ≈ Hva heter det når du deler opp tall? Sånn der |
| 314 | Bente | ≈faktorisering? |
| 315 | Anne | Ja! Da er jo fire det samme som to ganger to. |
| 316 | Bente | Ja. Er det mer vi kan gjøre med oppgaven da? |
| 317 | | (…) |
| 318 | Camilla | Skal vi gå videre da? |

Her ser vi at Bente spør om løsningen de har funnet er den generelle regelen for multiplikasjon med partall (310). Anne mener at det må det være siden de ikke har funnet et eksempel som viser det motsatte (311). I de neste ytringene er de inne på det som kunne hjulpet dem med å bevise antagelsen de har. Men før de kommer så langt, foreslår Camilla at de skal gå videre til neste oppgave (318). Heller ikke her bruker elevene tid på å se tilbake og skape mening rundt hva de har gjort i løsningsprosessen.

I oppgaven om kuleis starter elevene med en hypotese om at løsningen er 24 kombinasjoner, som jeg har vært inne på før (se 4.1.1). Da det svaret ikke er riktig, er hele løsningsprosessen til elevene preget av frustrasjon da de ikke klarer å tegne 24 kombinasjoner av iskuler. De er innom antallene 10 og 16 flere ganger, som er de riktige løsningene, men forkaster disse da de hele tiden leter etter hvordan de kan få 24. Da de etter et kvarter velger å lese oppgaven på nytt, en handling som kan sees på som å se tilbake, finner de frem disse løsningene igjen og konkluderer raskt med at de har løst oppgaven.

*Utdrag 37 (utdrag 8) Se tilbake på problemet om kuleis*

| | | |
|---|---|---|
| 79 | Anne | Kanskje vi skal lese oppgaven en gang til? |
| 80 | | (de leser i stillhet) |
| 81 | Bente | Kan det ha noe med at det ikke er fire kuler, men fire smaker? 4+3 er syv (..) +2 er ni (..) +1 er ti. |
| 82 | Anne | Det er hvis topp og bunn ikke har noe å si. Det er kun hvis det er smakene som gjelder. |
| 83 | Cecilie | Men tell de kombinasjonene du har tegnet opp i boka. Hvor mange blir det? |
| 84 | Bente | Fire, så tre (..) det blir ti. |
| 85 | | (de blir litt forvirret fordi de har tegnet litt rotete) |
| 86 | Bente | Det blir ti kombinasjoner da! |
| 87 | Anne | Da stemmer det vi gjorde i stad når topp og bunn hadde noe å si, for da fikk vi syv, fem, tre og en? Da får vi 16. Det høres jo rimelig ut det? |
| 88 | Bente | Ja, hvis rekkefølgen har noe å si! |

Her ser vi at Anne foreslår at de skal lese oppgaven på nytt (79). Dette gjør at de ser på problemet med nye øyne, og ser på hva de har tegnet av løsninger i bøkene sine (83). De blir raskt enige om at de to løsningene de allerede har funnet, kan besvare oppgaven (86 og 87). De konkluderer med at de har to løsninger, én for ordnet utvalg og én for uordnet utvalg (82 og 88). Herfra oppfordrer jeg dem til å generalisere problemet og finne en generell formel. Da jeg var svært delaktig i denne delen av episoden, velger jeg å ikke ta med noe fra denne delen av elevenes arbeid. Analyse av dette er heller ikke nødvendig for å kunne svare på forskningsspørsmålene mine.

### 4.2.5 Oppsummering av hva som karakteriserte gruppas problemløsningsprosess

Etter at elevene hadde lest problemet, brukte de liten eller ingen tid på å forstå problemet og legge en plan for løsningsarbeidet. De brukte det meste av tiden de hadde til rådighet i explore-fasen, altså å forsøke å løse problemet. Da elevene hadde funnet et svar de var fornøyde med, ytret de raskt ønske om å avslutte oppgaven og få en pause.

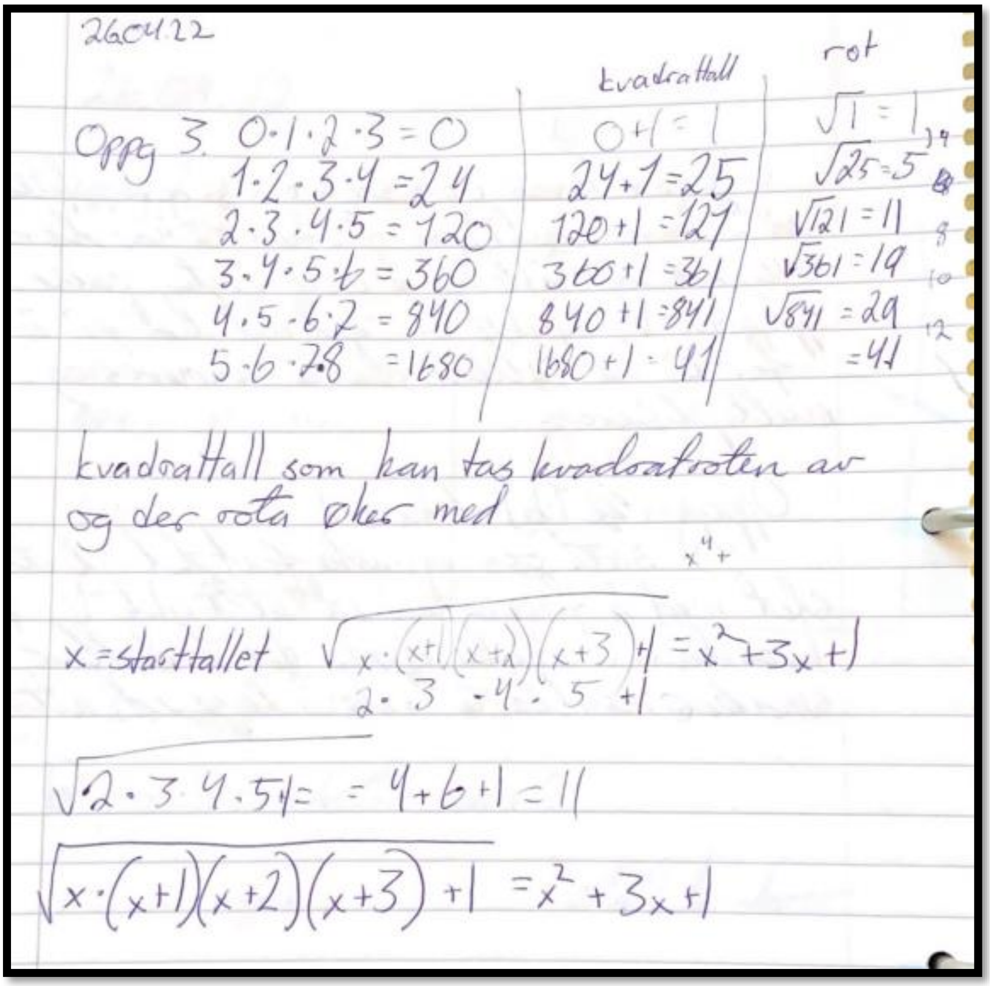
## 4.3 Elevenes bruk av inskripsjoner, språk og hverandre som medierende verktøy

I dette kapitlet ønsker jeg å se på elevenes bruk av medierende verktøy, og hvilken rolle disse spiller for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer mens de jobber med problemløsningsoppgaver i smågruppa. Jeg velger i dette kapitlet å presentere og analysere hvilke medierende verktøy jeg kan observere at elevene benytter i sitt problemløsningsarbeid, og jeg vil fokusere på elevenes bruk av inskripsjoner, språk og hverandre som medierende verktøy. Resultatene mine vil jeg bruke for å besvare det tredje forskningsspørsmålet mitt, «Hvilken rolle spiller medierende verktøy for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen». Jeg har valgt å dele dette kapitlet inn i to, hvor jeg i 4.3.1 presenterer og analyserer elevenes bruk av inskripsjoner, og i 4.3.2 presenterer og analyserer jeg elevenes bruk av språket og hverandre som medierende verktøy.

### 4.3.1 Elevenes bruk av inskripsjoner som medierende verktøy

Elevene jeg observerte brukte inskripsjoner i varierende grad i alle episodene jeg har analysert. I arbeidet med to av problemene, «Fire påfølgende tall» og «Kuleis», er det tydelig at elevenes inskripsjoner har vært en avgjørende støtte for elevenes løsningsarbeid. I oppgaven om terningkast løste elevene oppgaven før de i det hele tatt skrev ned noe i Notebook'en sin, og i «Fire hus på rad» kan elevenes innskripsjoner ha virket villedende på elevene da de ikke hadde valgt en systematisk måte å tegne opp antall kombinasjoner på, og derfor først kom frem til galt svar. I arbeidet med terningkastoppgaven virker elevenes notater kun som nedskrivelse av hva de allerede har snakket om og regnet ut, og inskripsjonene medvirker derfor tilsynelatende mindre som medierende verktøy som støtter elevenes appropriering av de matematiske begrepene og idéene i dette problemet. Dette skiller seg fra den medierende rollen inskripsjonene spilte i elevenes arbeid med de tre andre problemene. Jeg vil derfor presentere og analysere inskripsjonene til elevene fra «Fire påfølgende tall», «Kuleis» og «Fire hus på rad».

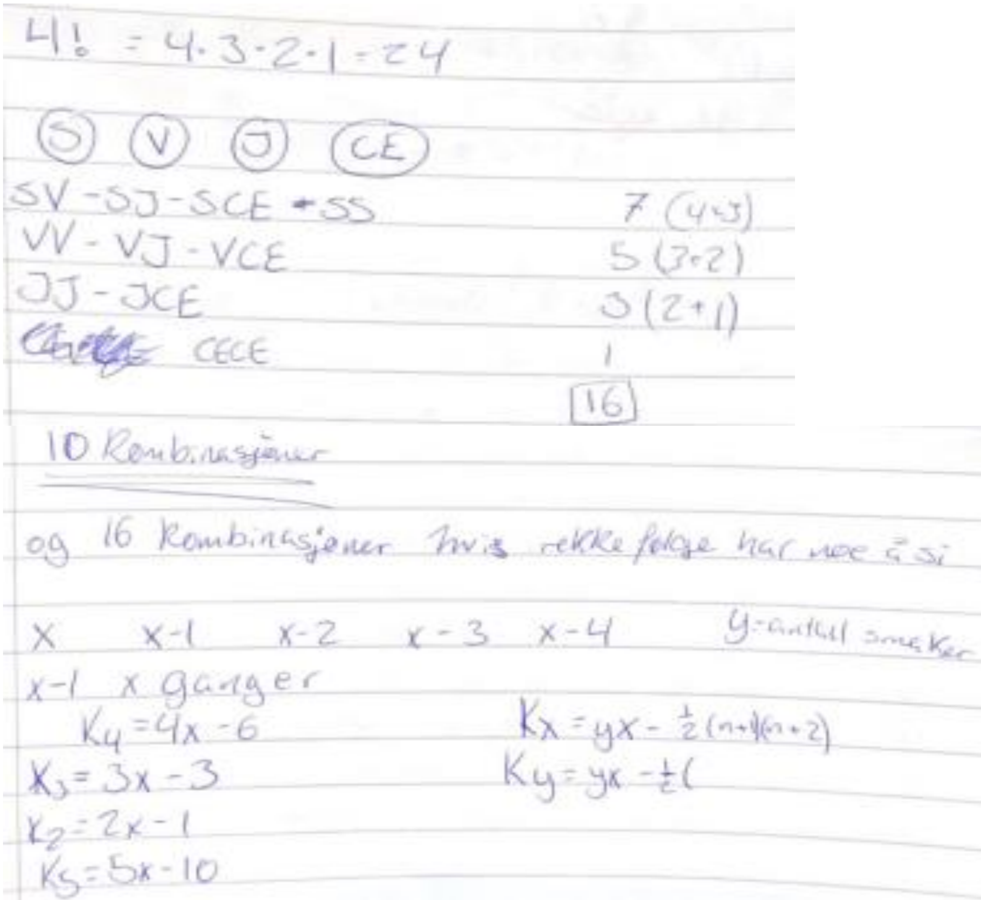
I arbeidet med oppgaven om fire påfølgende tall, hadde alle elevene tegnet den samme tabellen i bøkene sine, her vist med en side fra Bentes Notebook.




Figur 13: Fra Bente sin Notebook

Som vi ser over i figur 13, har elevene satt opp en systematisk tabell hvor de har spesialisert problemet ved å finne produktene av fire påfølgende tall med starttall fra og med en til og med fem. Utregningen har de notert ned i kolonne en. De har også lagd én kolonne som de har kalt «kvadrattall» hvor de har addert en til produktet av de fire påfølgende tallene. Den tredje kolonnen har de kalt «rot», og her har de funnet kvadratroten av svaret fra forrige kolonne. I tillegg har de i den tredje kolonnen notert ned differansen mellom de påfølgende resultatene de har fått. I dialogen mellom elevene virker det som om det er bruken av inskripsjoner som medierende verktøy, altså denne tabellen, som fører til at de raskt ser løsningen på problemet. Det kan virke som om inskripsjonene her medvirker til et felles fokus, og alle elevene i gruppa er delaktige i å løse problemet. Vi har tidligere sett i utdrag 11 at Anne ytrer følgende løsningsforslag etter at de har lagd denne tabellen; «Vi får et kvadrattall og når vi tar kvadratrota av det, så får vi tall som øker med to» (208). Dette kan elevene lese rett ut fra inskripsjonene sine. I tillegg har elevene brukt inskripsjonene sine til å generalisere problemet ved å bytte ut de spesielle tilfellene med generelle faktorer. Til å regne ut dette, brukte de CAS.

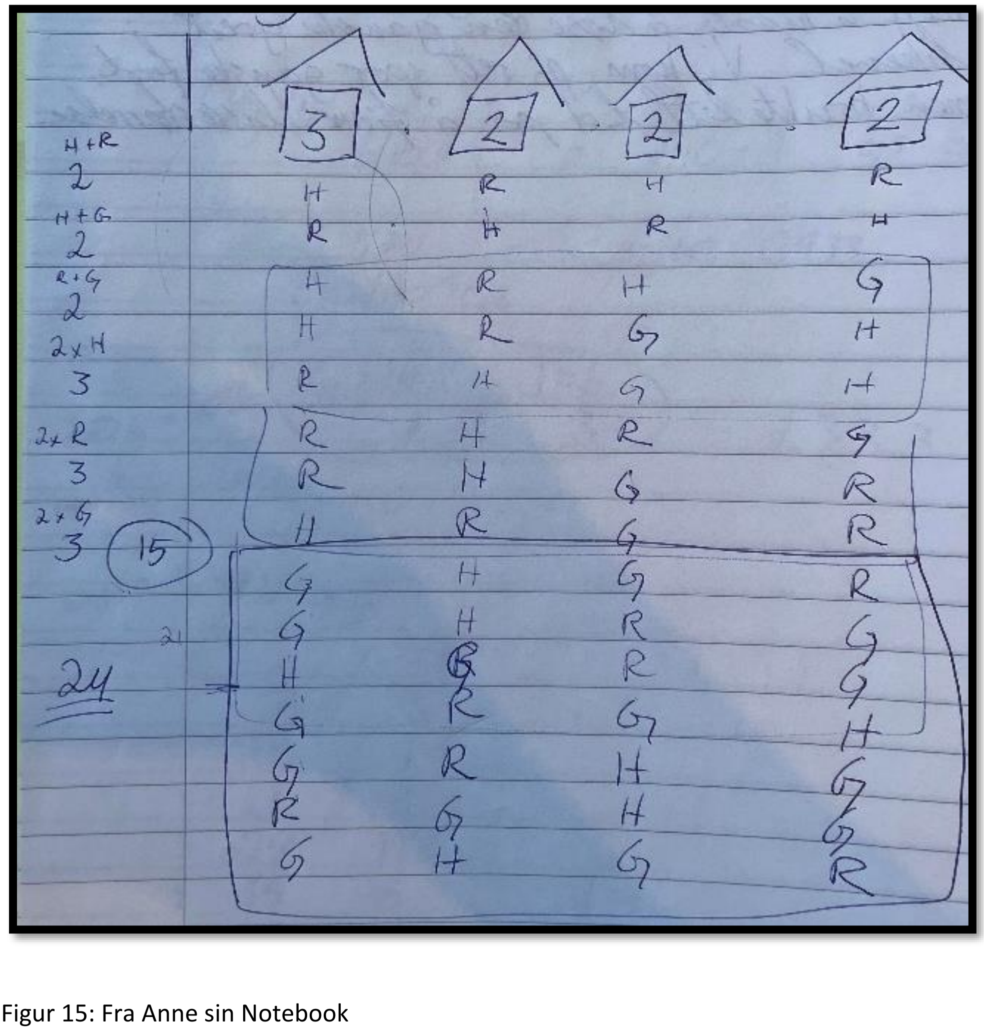
I elevenes arbeid med kuleisoppgaven, har jeg tidligere nevnt at eleven bestemte seg for et galt svar helt i starten av løsningsprosessen. Dette skapte utfordringer for dem, selv om notatene deres viste at de skapte riktig mening rundt problemet. De tre elevene som jobbet med denne oppgaven hadde ganske like notater, og jeg har valgt å ta med en side fra Cecilie sin Notebook for å vise hvilke inskripsjoner elevene brukte i løsningsarbeidet sitt.




Figur 14: Fra Cecilie sin Notebook

Øverst på arket ser vi at Cecilie har skrevet ned $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Dette var løsningen elevene bestemte seg for helt i starten av arbeidet med dette problemet. Inskripsjonene i nederste del inneholder begge løsningene på problemet, både løsningen for uordnet utvalg med tilbakelegging og for ordnet utvalg med tilbakelegging. Disse inskripsjonene lagde elevene ganske tidlig i arbeidet sitt, men de forkastet løsningene de ga dem. Da de senene i episoden leste oppgaven på nytt og så på hva de hadde tegnet i boka si, konkluderte de raskt med riktig løsning på problemet. Over, i figur 14, ser vi til venstre i Cecilie sine notater at hun har skissert opp alle kombinasjoner av iskuler om rekkefølgen på kulene ikke teller, men hun har ikke notert ned summen av disse kombinasjonene selv om hun har illustrert de ti kombinasjonene med forbokstaver på smaker ($4+3+2+1=10$). På høyre side har Cecilie skrevet det jeg antar er antall kombinasjoner av iskuler om rekkefølgen har noe å si. Jeg tolker inskripsjonen hennes som at sjokolade inngår i syv kombinasjoner, vanilje i fem kombinasjoner uten sjokolade, jordbær i tre kombinasjoner uten sjokolade og vanilje, og til slutt er det bare én kombinasjon som kun inneholder cola-eple. Dette har hun summert til 16, et korrekt resultat på antall kombinasjoner i et ordnet utvalg med tilbakelegging. I utdrag 8 sier Cecilie i ytring 83: «Men tell de kombinasjonene du har tegnet opp i boka di. Hvor mange blir det?», noe som fører til at Bente teller og svarer «Fire, så tre (..) det blir ti» (84). Anne følger opp Bentes svar og sier i ytring 87 at «det blir 16 kombinasjoner om rekkefølgen har noe å si». Inskripsjonene samler elevene og medvirker til en felles aktivitet etter Cecilie sitt utsagn. Her brukte elevene til slutt inskripsjonene sine til å løse problemet, og inskripsjonene spilte dermed en avgjørende rolle i elevenes løsningsprosess.

I arbeidet med oppgave 12, Fire hus på rad, hadde flere av elevene lagd inskripsjoner i bøkene sine. Under har jeg tatt med et bilde fra Annes Notebook hvor vi kan se hvordan hun har prøvd å tegne opp alle kombinasjonene av hus man kunne lage etter premissene som var lagt for oppgaven.




Figur 15: Fra Anne sin Notebook

Vi ser at hun til venstre har lagd en oversikt over hvor mange kombinasjoner vi kan få om vi kun bruker to farger; med hvit og rød er det to, med hvit og gul er det også to, og det samme gjelder for kombinasjoner med rød og gul. Under denne opptegningen, har hun notert antall plasser man kan sette to hvite hus, to røde hus og to gule hus, altså tre. Jeg antar at hun her har glemt at om du har to hus med samme farge, og de kan plasseres på tre forskjellige måter, kan de to andre fargene bytte plass og vi får derfor seks kombinasjoner. Jeg tolker det innringede femten-tallet som at hun har summert de kombinasjonene hun har skrevet opp i venstre marg, og at hun deretter har prøvd å tegne opp de antatte femten kombinasjonene. Da hun ikke har gått systematisk til verks, så har hun ikke fått med alle kombinasjonene. I tillegg har hun skrevet opp noen av kombinasjonene flere ganger (for eksempel i linje 9 og 15). Her villeder inskripsjonene elevene til å komme frem til galt svar. Øverst på arket har Anne tegnet de fire husene. Inni disse har hun skrevet tallene 3, 2, 2 og 2. Jeg antar at dette er antall farger som er tilgjengelige for hvert enkelt hus om de står slik som på tegningen, noe som er riktig tenkt. Nederst til venstre har Anne satt to streker under tallet 24, og det er produktet av disse fire tallene og også den riktige løsningen.

### 4.3.2 Elevenes bruk av språket og hverandre som medierende verktøy

Jeg har valgt å kun presentere utdrag fra elevenes arbeid med oppgavene «Kuleis», «Terningkast» og «Fire hus på rad», da arbeidet med påfølgende tall var preget av at elevene løste oppgaven raskt, hovedsakelig ved hjelp av inskripsjoner. Da elevene jobbet med is-oppgaven, var tre av de fire medlemmene av gruppa til stede.

*Utdrag 38 (inneholder utdrag 6 og 7)*

| | | |
|---|---|---|
| 56 | Bente | Men kan vi se på det vi gjorde i stad? |
| 57 | Anne | Kan vi se etter et mønster? Jeg tror det har noe med fire også tre også to også en å gjøre. |
| 58 | Bente | Ja! Men skal vi gange eller plusse? |
| 59 | Anne | Hva er logisk hvis du har fire smaker? |
| 60 | | (…) |
| 61 | Anne | Hva er logisk hvis du har to smaker? Hvor mange muligheter har du da? |
| 62 | | (…) |
| 63 | Bente | Da har du tre (..) Sjokolade med sjokolade, vanilje med sjokolade og sjokolade med vanilje (..) Det er tre! |
| 64 | Anne | Det kommer an på hvilken rekkefølge du har de i! Henger du med? |

Her ser vi at Bente først foreslår for gruppa at de kan se på hva de har gjort tidligere (56), og slik leder hun gruppas oppmerksomhet til inskripsjonene de har tegnet i bøkene sine. Da spør

Anne om de kan se etter et mønster (57), og følger slik opp forslaget til Bente om å se tilbake. Deretter stiller Anne gruppa et monitorerende spørsmål; «Hva er logisk hvis du har fire smaker?» (59). Hun følger raskt opp med to til da hun ikke får svar: «Hva er logisk hvis du har to smaker? Hvor mange muligheter har du da?» (61). Her virker Annes spørsmål som medierende verktøy som får gruppa til å komme videre i approprieringsprosessen, og Bente responderer på spørsmålet ved å komme med et forslag til løsning (63). Ytringene til Anne medvirker også til felles fokus og aktivitet i gruppa. Videre ser vi i neste utdrag at alle de tre elevene, gjennom det de sier og gjør, virker som medierende verktøy da de alle stiller monitorerende spørsmål som driver løsningsprosessen videre.

*Utdrag 39 (deler av utdrag 8)*

| | | |
|---|---|---|
| 79 | Anne | Kanskje vi skal lese oppgaven en gang til? |
| 80 | | (de leser i stillhet) |
| 81 | Bente | Kan det ha noe med at det ikke er fire kuler, men fire smaker? 4+3 er syv (..) +2 er ni (..) +1 er ti. |
| 82 | Anne | Det er hvis topp og bunn ikke har noe å si. Det er kun hvis det er smakene som gjelder. |
| 83 | Cecilie | Men tell de kombinasjonene du har tegnet opp i boka. Hvor mange blir det? |
| 84 | Bente | Fire, så tre (..) det blir ti. |
| 85 | | (de blir litt forvirret fordi de har tegnet litt rotete) |
| 86 | Bente | Det blir ti kombinasjoner da! |
| 87 | Anne | Da stemmer det vi gjorde i stad når topp og bunn hadde noe å si, for da fikk vi syv, fem, tre og en? Da får vi 16. Det høres jo rimelig ut det? |

Utdraget starter med at Anne foreslår at de skal lese oppgaven en gang til (79), noe som antagelig får gruppa til å se på oppgaven med nye øyne. Bente følger i hvert fall opp med et viktig bidrag til løsningen ved at hun retter oppmerksomheten mot at oppgaven spør etter antall kombinasjoner av fire ulike smaker på to kuler. Hun følger opp med å remse opp riktig antall kombinasjoner (81), noe Anne responderer på ved å påpeke at det antallet gjelder hvis rekkefølgen på kulene har noe å si (82). Cecilie er også delaktig i dialogen, og ber gruppa telle kombinasjonene de har tegnet i boka si (83), noe Bente gjør. Hun gir da enda en bekreftelse på at det er ti kombinasjoner når rekkefølgen ikke har noe å si (84 + 86). Disse monitorerende spørsmålene og dialogen mellom elevene fører løsningsprosessen fremover, og Anne bruker denne dialogen til å få en bekreftelse på at det de tidligere hadde regnet ut stemte, altså at det ble 16 kombinasjoner om rekkefølgen hadde noe å si (87). Det elevene sier, hvordan de formulerer seg og at de er lyttende til hverandre, medvirker til felles fokus og felles aktivitet. Alle de tre elevene og deres monitorerende spørsmål virker derfor som medierende verktøy for hverandre, og det er tydelig at de spiller en viktig rolle for gruppas muligheter for å appropriere de matematiske idéene i løsningsprosessen.

I oppgavene «Terningkast» og «Fire hus på rad» var alle de fire elevene til stede, og alle var delaktige i dialogen. Episoden hvor elevene jobber med husproblemet er preget av at gruppa ikke hadde en plan for løsningsarbeidet, men at de remset opp ulike kombinasjoner tilsynelatende tilfeldig. Allikevel finner jeg tegn på at elevene stiller hverandre monitorerende spørsmål, og av den grunn virker både de og det de sier som medierende verktøy som driver approprieringsprosessen fremover. Jeg vil under presentere og analysere to utdrag fra denne episoden.

*Utdrag 40 (del av utdrag 18)*

| | | |
|---|---|---|
| 322 | Anne | Ja, hva om vi begynner med hvitt, rødt, hvitt, rødt? |
| 323 | Bente | Så kan man gjøre motsatt. Vi kan ha rødt, hvitt, rødt, hvitt. |
| 324 | Anne | Da er det ingen flere kombinasjoner vi kan ha med bare de. |
| 325 | | (De andre bekrefter i kor) |
| 326 | Anne | Da vil det si at med hvitt og rødt så er det to måter. Så da må det bli det samme om vi tar hvitt og gult?! |
| 327 | Camilla | Ja, det blir to måter. Og det samme med rødt og gult. |
| 328 | Anne | Ja, men så kommer det vanskelige at vi skal ha med alle fargene. |

Her ser vi at Annes ytring (322) medvirker til at gruppa får et felles fokus på problemet, og til at gruppa deltar i en felles aktivitet, nemlig forenkling av problemet. Med det virker Anne og det hun sier som medierende verktøy som hjelper gruppa i å skape mening rundt problemet. Bente viser dette ved å følge opp idéen Anne foreslo (323) ved å nevne den andre kombinasjonen med de samme fargene. Like etter viser Camilla at hun også har skapt mening av det de to andre har sagt (327) ved å bekrefte at det blir to kombinasjoner når du har to farger. I utdraget under ser vi at det kan virke som at Bentes ytring tar løsningsprosessen videre, og med dette virker både hun og det hun sier som et medierende verktøy for gruppens mulighet til å komme videre i approprieringsprosessen.

*Utdrag 41 (del av utdrag 19)*

| | | |
|---|---|---|
| 346 | Bente | OK, nå har jeg det! Hvis vi tenker at vi skal ha to hvite hus, fins det da flere måter å plassere det på enn disse tre måtene her? Hvitt, rødt, hvitt, gult. Hvitt, rødt, gult, hvitt. Rødt, hvitt, gult, hvitt? |
| 347 | Anne | Vi kan bytte om på rødt og gult, men hvitfargen blir stående da. Så vi kan ikke flytte mer på hvitfargen?! Eller den det skal være to med? |
| 348 | Camilla | Neeeiii? |

| | | |
|---|---|---|
| 349 | Bente | Da er det et mønster her. Du kan ha to der, to her og så må du bytte på de i midten. Da er det tre. Så to ganger H. Det er tre. |
| 350 | Camilla | Så gjør vi det med de andre også, så to ganger R, det er tre. Og to ganger G er tre. |
| 351 | Anne | Hvis vi summerer disse så er ni pluss seks er 15. Da har vi ett tall. |

Dette utdraget starter der Bente deler med gruppa at hun har skapt mening rundt deler av oppgaven, og ved å remse opp antall måter man kan plassere de to husene som må ha samme farge (346). Ved å gjøre dette, virker både Bente og ytringen hennes som et medierende verktøy som medvirker til felles fokus i gruppa. Det ser i hvert fall ut som om Anne og Camilla skaper mening rundt det Bente sier ved at de videre bidrar i dialogen og i den felles aktiviteten om å løse problemet. Det de alle tre ytrer er viktige bidrag i løsningsprosessen, og de matematiske idéene drives frem av dialogen og elevene i gruppa.

Oppgaven med terningkast ble løst veldig raskt, og her var det særlig Bente som virket som et medierende verktøy ved å dele kunnskap hun hadde om emnet fra før.

*Utdrag 42*

| | | |
|---|---|---|
| 269 | Bente | Er det ikke en sånn regel i partall også, at man må (..) hva var den? Jeg husker det er en regel som sier at hvis produktet skal bli et partall så måtte det ganges med ett eller annet? |

Med denne ytringen medvirker Bente til et felles fokus i gruppa, og elevene bruker denne idéen til å resonnere seg frem til en riktig løsning på problemet. Her virker Bente som et medierende verktøy for gruppa, og ved å dele hva hun mente å vite om emnet fra før, satte hun i gang approprieringsprosessen i gruppa.

### 4.3.3 Oppsummering av gruppas bruk av medierende verktøy

Da elevene jobbet i smågruppa brukte de kommunikasjonen med hverandre for å skape mening rundt de ulike matematiske begrepene og idéene som preget problemløsningsarbeidet deres. Denne kommunikasjonen, hvordan de formulerte seg og at de var lyttende til hverandre, førte dem videre i approprieringsprosessen, og var avgjørende for at gruppa klarte å løse de ulike problemene. I tillegg medvirket elevene inskripsjoner som medierende verktøy som støttet elevenes appropriering av de matematiske begrepene og idéene i arbeidet med problemene.

# 5 Diskusjon

I dette kapitlet vil jeg samle trådene fra det foregående kapitlet, og se på resultatene fra analysen i lys av forskningsspørsmålene mine som jeg presenterte i kapittel 1.2. Jeg har valgt å dele dette kapitlet inn i tre delkapitler, hvor hver del tar for seg hvert av de tre forskningsspørsmålene i den rekkefølgen som de ble presentert. Jeg vil svare på de tre forskningsspørsmålene, og diskutere hvordan mine funn forholder seg til teorien og forskningslitteraturen jeg presenterte i kapittel 2.

## 5.1 Smågruppas problemløsningsstrategier i løsningsprosessen

Gjennom observasjonen og analysen av smågruppas arbeid med de fire problemløsnings-oppgavene, er elevenes strategibruk synliggjort. Dette gjør at jeg kan svare på det første forskningsspørsmålet mitt; «*Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i dialogen blant elevene i en smågruppe når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver?».* For å svare på dette spørsmålet vil jeg først diskutere gruppas strategibruk og løfte frem gruppas mest fremtredende strategier, blant andre «se etter et mønster», «lag en systematisk tabell», «prøv og feil», «tenk på et liknende problem» og «løs deler av problemet». Strategiene «se etter mønster» og «prøv og feil» ble observert brukt i alle de fire episodene jeg analyserte, mens strategien «lag en systematisk tabell» ble observert brukt i tre av episodene. De resterende strategiene fra manualen ble observert i én eller to av episodene, og her spilte nettopp disse strategiene en avgjørende rolle for elevenes løsningsarbeid. For eksempel ble strategien «tenk på et liknende problem» kun observert brukt i elevenes arbeid med to av problemene (terningkast og fire hus på rad), men det var ved at elevene brukte nettopp denne strategien at de fikk fremdrift i løsningsarbeidet. I oppgaven om terningkast hadde noen av elevene erfaring fra et liknende problem med partall og oddetall, og hadde denne erfaringen med seg inn i problemløsningen. I hus-oppgaven tenkte elevene tilbake på hvordan de gikk frem da de løste kuleis-oppgaven som også var en kombinatorikkoppgave. De brukte erfaringene sine fra løsningsprosessen med en tidligere oppgave til å komme videre i prosessen med det nye problemet. For å bruke denne strategien, må altså elevene ha jobbet med liknende problemer tidligere. Elevene i min studie hadde liten erfaring med problemløsningsarbeid fra før, og det var derfor ikke så overraskende at denne strategien sjelden ble tatt i bruk.

Fra analysen og tabellene 3, 4, 5 og 6 (oversikt over strategibruk i elevenes arbeid med de ulike oppgavene), kommer det frem at gruppa har brukt alle de ti strategiene i kodingsmanualen i sitt problemløsningsarbeid. Kodingsmanualen (tabell 1) er basert på Kongelfs (2011) kodingsmanual, og strategiene er også identifisert i hans analyse av lærebøker i matematikk. Mine funn samsvarer med Kongelfs (2011) funn da jeg observerte at disse strategiene var fremtredende også i min studie. Noen av strategiene i kodingsmanualen, som for eksempel «se problemet fra en annen side», ble observert kun ved et par anledninger i min studie. Det kan skyldes at dette er en liten studie med kun én elevgruppe og analyse av kun fire problemløsningsoppgaver. Det må også legges til at Kongelfs studie var en studie av strategier i lærebøker. En annen grunn til at strategien «se problemet fra en annen side» ikke ble benyttet så ofte, kan være elevenes manglende erfaring med problemløsning. Det er ifølge Schoenfeld (1992) erfaringer med problemløsning som danner elevenes grunnlag for å skape matematisk mening, og som gir elevene tilgang til relevant informasjon. Å se et problem fra flere sider stiller krav til elevens tidligere erfaringer, og det fremkommer at elevene hadde begrensede erfaringer med problemløsning.

Flere av de strategiene jeg observerte i analysen av de fire episodene, kan knyttes til Borgersen (1994), Mason med kollegaer (2010) og Polya (1957) sine nært beslektede problemløsningsmodeller. Det ble observert flere ganger at elevene i studien spesialiserte problemet ved at de forenklet problemet og prøvde ut spesielle tilfeller, og dette førte dem til nye strategier som å se etter mønster, lage tabell og løse et enklere problem. Dette er i tråd med Mason med kollegaers (2010) teori om strategier i problemløsningsarbeid. Schoenfeld (1992) nevner «å forstå problemet» som en strategi, og fremhever i tillegg monitorering som en viktig problemløsningsstrategi. Disse er begge observert i min studie ved at elevene i noen tilfeller leste oppgaven på nytt og sikret seg at de hadde forstått problemet, i tillegg til at de kontrollerte det de hadde gjort ved at de stilte hverandre monitorerende spørsmål underveis i problemløsningsprosessen.

Å se etter mønster var en strategi som elevene brukte i alle de fire episodene jeg har analysert. Denne strategien ble ofte brukt etter at elevene hadde benyttet seg av andre strategier som spesialisering, lag en systematisk tabell og lag en illustrasjon, og bruken av denne strategien førte til fremdrift i løsningsprosessen. Når elever prøver ut flere enkle, spesielle tilfeller er det lettere å se mønster og sammenhenger som kan lede dem til en generalisering (Mason et al., 2010). I elevenes arbeid med de ulike problemene, og spesielt med problem 9 (fire påfølgende tall), førte bruken av denne strategien elevenes løsningsprosess tydelig fremover. Det å oppdage og å jobbe med mønster og sammenhenger er en kreativ handling, og det er nødvendig med matematisk kunnskap i dette arbeidet (Mason et al., 2010). I dette tilfellet fant elevene tallmønstre med kvadrattall og partall etter at de hadde spesialisert problemet og satt resultatene opp i en tabell. Det var tydelig at elevene hadde de matematiske erfaringene de trengte for å se mønstrene som førte dem videre til en generell løsning av problemet.

Tredje trinn i Borgersens (1994) syvtrinnsmodell er kvalifisert gjetning gjennom prøving og feiling. Denne strategien gjør at elevene får en bedre oversikt over problemet, og blir ofte brukt etter at elevene har modellert problemet. Elevene i smågruppa benyttet seg ofte av denne strategien, men det kunne virke som om prøvingen ikke var særlig systematisk siden de ofte prøvde ut tilfeldige tall og kombinasjoner. Dette kommer særlig til syne i elevenes arbeid med problem 8 (kuleis) og problem 12 (fire hus på rad). Med mer problemløsningserfaring vil jeg anta at elevene utvikler denne strategien og bruker den mer formålstjenlig. Kongelf (2011) erfarte at «å dele opp problemet i flere deler» er den mest eksemplifiserte tilnærmingen til problemløsing i lærebøkene han analyserte. Elevene brukte denne strategien, kalt «løs deler av problemet» i kodingsmanualen, i to av episodene jeg analyserte. Det var først da elevene tok i bruk denne strategien i de to kombinatorikkoppgavene (kuleis og fire hus på rad) at de klarte å se en løsning på problemene. Ved å løse deler av oppgaven, virket det som om elevene skapte mer mening rundt problemet, og dette førte dem videre i løsningsprosessen.

I denne studien har jeg identifisert problemløsningsstrategiene elevene brukte da de jobbet i smågruppa, og svaret på forskningsspørsmål 1 er at elevene brukte alle strategiene i kodingsmanualen, samt flere av strategiene som er nevnt i problemløsningsmodellene til Borgersen (1994), Mason med kollegaer (1992) og Polya (1957).

## 5.2 Smågruppas problemløsningsprosess

I den andre delen av diskusjonen vil jeg svare på det andre forskningsspørsmålet mitt; *«Hva karakteriserer gruppas problemløsningsprosess?».* Jeg vil begrunne svaret ved å knytte analysen av hvordan elevene jobbet i de fire stegene i Polyas (1957) modell (forstå problemet, lag en plan, gjennomfør planen og se tilbake) opp mot relevant teori og forskningslitteratur fra blant andre Borgersen (1994), Mason med kollegaer (2010) og Polya (1957). Jeg har i det teoretiske rammeverket for oppgaven også presentert Schoenfeld (1985, 1992) sin studie av nybegynnere og erfarne problemløsere, og analysen jeg har gjort av elevenes arbeid, viser at de er gode representanter for nybegynnere slik Schoenfeld (1992) beskriver dem. Dette vil bli diskutert nærmere her sammen med andre kjennetegn på elevenes problemløsningsprosess.

I analysen kom det frem at gruppa brukte lite tid på å forstå problemet og legge en plan for løsningsarbeidet. I arbeidet med «Fire hus på rad» gikk elevene rett over i gjennomførings-fasen etter at de hadde lest problemet. Dette er i tråd med både Mason med kollegaers (2010) teori om hvordan elever jobber med problemløsning, og Schoenfelds (1985, 1992) funn. I alle de tre modellene påpekes det at problemløseren bør bruke hensiktsmessig nok tid i disse fasene for å danne et godt utgangspunkt for å mest mulig effektivt å løse problemet, og her bør de sikre seg at de har forstått oppgaveteksten, begrepene og betingelsene. I gruppas arbeid med et nytt problem, var det litt varierende hvordan elevene gikk i gang. I oppstartsfasen av kuleis-problemet, spør Anne gruppa om de har skjønt oppgaven etter at denne har blitt lest høyt. Da åpner hun opp for at de som eventuelt ikke har forstått problemet, kan spørre om det de lurer på. Allikevel blir de bare enige om at de har forstått problemet, og går så videre. De bruker ikke tid på å gjenkjenne hva som er kjent, og hva som er ukjent (Polya, 1957). Det kan være grunnen til at de i denne episoden brukte mye tid på å forfølge et galt svar. I oppgave 10 om terningkast, oppsummerer Anne oppgaven samtidig som hun avklarer begrepet «produkt». Hun avslutter ytringen sin med et «enig?» rettet til de andre i gruppa. Borgersen (1994) sier at problemløseren må forstå oppgaveteksten og definere de ulike ordene og begrepene, og det er nettopp det Anne gjør her. I oppstarten av samme problem, følger Dina opp Annes ytring ved å foreslå en spesialisering av problemet, og spør så om hun har forstått det riktig. Mason med kollegaer (2010) sier at nettopp spesialisering kan være til stor hjelp i oppstarten av et problem. Mitt inntrykk, på bakgrunn av analysen, er at det er litt tilfeldig hvordan elevene starter arbeidet med et nytt problem. De virker ikke bevisste på at arbeidet de legger ned her, legger grunnlaget for hvor effektivt de kan løse problemet senere (Mason et al., 2010). Det er også uklart om elevene vet hva som må gjøres for å finne en løsning, og jeg kan derfor ikke se at elevene har lagd en plan for løsningsarbeidet (Polya, 1957).

Ifølge Mason med kollegaer (2010) går prosessen med å løse problemet inn i gjennomføringsfasen når elevene føler de har forstått problemet og gjort det til sitt eget, og denne fasen varer helt til problemet er løst. Som nevnt tidligere tilbrakte elevgruppa det meste av tiden de hadde til rådighet i denne fasen. Gruppa brukte tiden sin her til å spesialisere, se etter mønster og deretter generalisere. Elevene i gruppa hadde ulik personlighet i tillegg til ulik matematisk kompetanse, og dette kan være årsaken til at jeg observerte at to av elevene til tider bidro mer mens de to andre da ble litt passive og trakk seg tilbake. Dette kan være en av utfordringene når elever skal samarbeide i ei gruppe, ifølge Ashman og Gillies (2013) og Rogat og Linnenbrink-Garcia (2011). Allikevel er hoved-inntrykket mitt at gruppas arbeid var kjennetegnet av samarbeid og inkludering. Alle elevene bidro i større eller mindre grad i hver episode, og hver enkelt elev kom med viktige bidrag som førte gruppas løsningsprosess videre.

Borgersen (1994), Mason med kollegaer (2010), Polya (1957) og Schoenfeld (1992) påpeker alle viktigheten av å reflektere over løsningen og løsningsprosessen etter at problemløseren har kommet frem til en løsning. Dette er en viktig og lærerik fase, men mange elever ser seg istedenfor om etter nye problemer eller avslutter arbeidet så fort de er ferdig med en oppgave (Polya, 1957). Jeg så ingen tydelige tegn til at elevene i min studie reflekterte over løsningen de kom frem til. Derimot observerte jeg at de raskt avsluttet arbeidet og ytret ønske om å gå videre så fort de hadde et svar. Dette kan igjen ses i sammenheng med elevenes erfaringer fra tidligere oppgaveløsning i matematikktimene hvor målet ofte er, etter elevenes egne ord i intervjuene, «å gjøre flest mulig oppgaver fortest mulig». Det er også i tråd med Svingen og Gilje (2018) som påpeker at norske elever har mest erfaring med å løse rutineoppgaver. Det er også viktig å påpeke at elevene i gruppa var satt sammen av elever med ulikt faglig nivå, og derav var ikke den matematiske erfaringsbakgrunnen den samme hos alle de fire elevene (Schoenfeld, 1992). Elevenes problemløsningskompetanse har en sammenheng med elevenes faglige nivå i matematikk (Kongelf, 2011). Dette kan også være grunnen til at elevene bidro ulikt inn i problemløsningsprosessen.

Det oppsummerende svaret på forskningsspørsmål 2 blir da: elevenes problemløsnings-prosess kjennetegnes av at de starter med å lese problemet, velger raskt en retning for arbeidet og holder på denne store deler av tiden de har til rådighet, også i de tilfellene hvor den ikke tar dem fremover. De bruker liten eller ingen tid på å reflektere over løsningsprosessen eller resultatet de kommer frem til.

## 5.3 Medierende verktøy

I denne siste delen av diskusjonen vil jeg besvare det tredje forskningsspørsmålet mitt; *«Hvilken rolle spiller medierende verktøy for elevenes muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen?».* Jeg vil begrunne svaret ved å diskutere hvilken rolle de tre medierende verktøyene jeg løftet frem i analysen, elevenes inskripsjoner, språket og hverandre, spilte for gruppas approprieringsprosess. Funnene fra analysen vil jeg drøfte opp mot relevant teori og forskningslitteratur fra blant andre Arcavi (2003) og Carlsen (2008, 2009).

Carlsen (2008) skriver at medierende verktøy har stor betydning når elever jobber med problemløsning, et utsagn som støttes gjennom mine funn fra analysen av de fire episodene. De tre medierende verktøyene spilte en avgjørende rolle i elevenes problemløsningsarbeid ved at elevene, ved å bruke inskripsjoner, ulike ytringer og samarbeid i gruppa, og ofte i en kombinasjon med hverandre, ble ført videre i approprieringsprosessen. I arbeidet med tre av de fire problemene (kuleis, fire påfølgende tall og fire hus på rad) brukte elevene aktivt inskripsjoner for å komme videre i løsningsarbeidet, og analysen av episode 8 (kuleis) og episode 9 (fire påfølgende tall) viser at det var inskripsjonene som hjalp elevene med å finne løsningen på problemene. Kombinert med det elevene ytret og samarbeidet dem imellom, var det tydelig at tabellene og illustrasjonene de lagde førte dem videre i løsningsarbeidet, og til slutt til et resultat. Ifølge Carlsen (2009) kan inskripsjoner medvirke til felles aktivitet og felles fokus blant elevene når de jobber i smågrupper, og dette fant jeg tydelige tegn på da jeg analyserte elevenes arbeid. Da elevene for eksempel samarbeidet om å løse kuleisproblemet, lagde de tidlig gode illustrasjoner av problemet. Selv om de brukte lang tid på å ta disse i bruk, var det til slutt disse inskripsjonene, kombinert med elevenes samarbeid og det hver enkelt ytret, som gjorde at de til slutt skapte mening rundt problemet. Elevene kom med ytringer som fikk gruppa til å fokusere, og ett eksempel var da Cecilie sa; «Men tell de kombinasjonene du har tegnet opp i boka di. Hvor mange blir det?», noe som førte til at Bente telte og svarte «Fire, så tre (..) det blir ti». Her virket Cecilie og det hun sa som et medierende verktøy for gruppa, og sammen fant de det ene svaret de var ute etter. Carlsen (2008) skriver at når eleven kombinerer bruken av inskripsjoner og språk, så blir dette et medierende verktøy elevene kan anvende i sin problemløsningsprosess. Denne kombinasjonen så jeg altså at elevene benyttet formålstjenlig flere ganger i arbeidet med de ulike problemene.

I arbeidet med «Fire påfølgende tall» var elevene raske til å lage en systematisk tabell hvor de fylte inn spesialtilfeller av problemet. Denne tabellen hjalp dem med å se et mønster, og de leste løsningen på problemet rett ut fra denne. Anne ytrer tidlig «Vi får et kvadrattall (...)». Dette kunne hun lese rett ut fra tabellen sin. Dette funnet støtter Arcavis (2003) utsagn om at når elevene bruker inskripsjoner, kan det hjelpe dem til lettere å forstå problemet, og i noen tilfeller føre direkte til løsning og bevis. Det ble tydelig i analysen at elevenes inskripsjoner hjalp gruppa med å visualisere og representere matematiske idéer på en måte som gjorde disse mer tilgjengelige for å skape mening rundt de fire problemene.

Da elevene jobbet med hus-oppgaven, viser analysen at de ikke var så systematiske og nøyaktige i sin illustrasjon av problemet. De hadde noen gale nedtegnelser, og her villedet inskripsjonene gruppa til å komme frem til galt svar. Problemet ble etter hvert løst ved at jeg stilte elevene et monitorerende spørsmål som fikk elevene til å se på oppgaven og illustrasjonene sine med nye øyne, og dette virket som et medierende verktøy (Säljö, 2001) som fikk gruppa videre i løsningsprosessen og frem til å finne løsningen på egen hånd. I arbeidet med terningkast brukte ikke elevene inskripsjoner som medierende verktøy, men her kom bruken av hverandre og språket mer frem. I denne episoden virket Bente som et medierende verktøy for gruppa ved å dele hva hun mente å vite om partall og oddetall fra før, og satte av den grunn i gang approprieringsprosessen i gruppa. Elevene i gruppa spilte her en viktig rolle i hverandres matematiske læring, da samarbeidet og diskusjonen med hverandre hjalp elevene med å utvikle sine matematiske idéer og bidro til meningsskaping rundt løsningsprosessen.

Svaret på det tredje forskningsspørsmålet er derfor: inskripsjoner, språket og hverandre, spilte en avgjørende rolle som medierende verktøy for gruppas muligheter for å appropriere matematiske begreper og idéer i problemløsningsprosessen.

## 5.4 Oppsummering og konklusjon

Jeg har gjort flere interessante funn i mine observasjoner av en smågruppes arbeid med problemløsningsoppgaver. Det er nødvendig å presisere at disse funnene ikke kan generaliseres, da dette er en liten casestudie hvor jeg kun har sett på ei gruppe med fire elever og deres arbeid med et begrenset antall problemløsningsoppgaver over syv økter. I dette kapitlet vil jeg oppsummere de viktigste resultatene fra analysen i forhold til forskningsspørsmålene mine.

I de fire episodene jeg analyserte, tok elevene i bruk alle de ti strategiene fra kodingsmanualen (se 2.1.7). Noen strategier ble mer benyttet enn andre, og det var særlig strategiene «prøv og feil», «se etter mønster», «lag en systematisk tabell» og «lag en illustrasjon» som var mest brukt. Strategien med å jobbe baklengs observerte jeg kun én gang, mens å bruke digitale verktøy ble brukt formålstjenlig i alle episodene. Elevene hentet også frem verktøy som spesialisering, visualisering, modellering og andre problemløsningsstrategier de hadde erfart hadde vært til nytte tidligere.

Mine funn viser at elevene jeg observerte ofte holdt fast på sin første idé, og brukte mye av tiden de hadde til rådighet på å finne regnemåter som kunne føre dem frem til svaret de ønsket. Etter at elevene hadde lest oppgaven, gikk de som regel umiddelbart i gang med å løse problemet, som regel uten å forsikre seg om at de hadde forstått problemet eller lagd en plan for løsningsarbeidet. Mine funn viser også at elevene brukte liten eller ingen tid på å reflektere over løsningene de kom frem til, men uttrykte ofte et ønske om en pause eller en ny oppgave så fort de kom frem til et svar de var fornøyd med.

Jeg observerte at elevenes bruk av strategier og medierende verktøy som inskripsjoner, språket og hverandre, påvirket fremgangen i elevenes løsningsprosess positivt.

# 6 Implikasjoner

## 6.1 Implikasjoner for videre forskning

Jeg har gjennomført en mindre, kvalitativ casestudie hvor jeg observerte ei smågruppe på fire elever mens de jobbet med problemløsningsoppgaver gjennom syv økter. Jeg hadde ingen kjennskap til elevene på forhånd, men alle de fire elevene hadde selv tatt initiativet til å være med i studien. Det hadde vært interessant å forske videre på samme tema over en lengre tidsperiode og i en full klasse. Da kunne jeg variert gruppestørrelsen, utforsket ulike gruppesammensetninger og observert elevenes eventuelle utvikling av problemløsnings-strategier over et lengre tidsrom. Elevene jeg observerte hadde ikke fått opplæring i problemløsningsstrategier, monitorerende spørsmålsstilling eller problemløsningsmodeller tidligere. De hadde ingen erfaring med å jobbe utforskende eller i smågrupper. Et spennende forskningsbidrag kunne derfor være å gjennomføre et problemløsningskurs med hele klassen for å bevisstgjøre dem på formålstjenlige strategier, problemløsningsmodeller og verdien av å stille monitorerende spørsmål, og deretter latt dem jobbe med samme type problemløsningsoppgaver og se hvorvidt denne kompetansen hadde bidradd positivt til elevenes evne til å løse problemene.

## 6.2 Implikasjoner for undervisning

Da vi ikke kan forvente at annen forskning vil få akkurat de samme resultatene som jeg har fått i denne studien, kan ikke disse funnene generaliseres. Mine funn støtter imidlertid tidligere forskning på samme emne, for eksempel Schoenfelds (1985, 1992) funn da han så på erfarne og uerfarne problemløsere. Studienes funn kan også brukes til å bevisstgjøre lærere på hvordan elever bruker strategier og medierende verktøy i arbeidet med utforskende oppgaver, og hvilke fordeler det kan gi at elevene jobber i smågrupper med slike oppgaver. Nå har også fagfornyelsen tredd i kraft på alle trinn i videregående skole, og sammen med funnene i studien min, samt resultater fra PISA-undersøkelsen (Kjærnsli et al., 2014), peker alt mot at vi må bruke mer tid på problemløsningsarbeid i klasserommet. Elevene bør få opplæring i ulike problemløsningsmodeller, problemløsningsstrategier og hvordan de kan stille monitorerende spørsmål for å utvikle sin problemløsningskompetanse. Strategiene som er observert i denne studien kan sees på som relevante med tanke på problemløsning og dybdelæring i lys av fagfornyelsen.

# 7 Egenrefleksjon

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært utrolig lærerikt, samtidig som det til tider har vært svært krevende. Jeg kjenner på en enorm stolthet og lettelse for å ha mestret fire år med studier samtidig som jeg har jobbet i full stilling som lærer, en jobb som jeg har stortrivdes i siden 1999. I løpet av disse 24 årene i yrket har jeg sett hvordan elevmassen har endret seg med tiden, og ønsket om å utvikle meg for å imøtekomme nye elevgrupper, og lære mer om hvordan jeg kan engasjere alle elevene mine, har vokst seg større i takt med disse endringene. Dette studiet var virkelig det jeg trengte. Jeg har lært så mye som jeg kan ta med meg tilbake til klasserommet. Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har jeg sett verdien av å jobbe utforskende med elevene, sett hvor viktig det er å lære elevene gode strategier de kan bruke i møte med et matematisk problem, og virkningen av å stille monitorerende spørsmål. Jeg har blitt inspirert til å la elevene jobbe mer i smågrupper og lære av samarbeidet med hverandre. Jeg har sett viktigheten av å la elevene stå i et problem, og ikke haste videre for å få gjort flest mulig oppgaver. Det er mye læring i samarbeid, og å bruket dialog og inskripsjoner som medierende verktøy. Den nye læreplanen løfter frem dybdelæring og problemløsning i både overordnet del og kjerneelementene, og jeg kjenner at arbeidet med denne oppgaven har gitt meg den tryggheten og kompetansen jeg trenger for å ta dette med inn i klasserommet.

# 8 Referanser


Ajzen, I. (2005). *Attitudes, personality and behavior.* Open University Press.

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering.* Telemarksforsking.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Ashman, A. F., & Gillies, R. M. (2013). Collaborative learning for diverse learners. In C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan, & A. M. O'Donnell (Red.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (s. 251-269). Routledge.

Bjuland, R. (2002). *Problem solving in geometry. Reasoning processes of student teachers working in small groups: A dialogical approach* (Publisert doktoravhandling). Universitetet i Bergen.

Bjuland, R. (2007). Adult students' reasoning in geometry: Teaching mathematics through collaborative problem solving in teacher education. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 1-30.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk matematikkdidaktikk, 2*(2), 6-35.

Bryman, A. (2012). *Social research methods (4th ed.)*. Oxford University Press.

Bryman, A. (2016). *Social research methods (5th ed.)*. Oxford University Press.

Carlsen, M. (2008). *Appropriating mathematical tools through problem solving in collaborative small-group settings* (Publisert doktoravhandling). Universitetet i Agder.

Carlsen, M. (2009). Reasoning with paper and pencil: The role of inscriptions in student learning of geometric series. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 54-84.

Carlsen, M. (2010). Appropriating geometric series as a cultural tool: A study of student collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 95-116.

Carlsen, M., & Fuglestad, A. B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry for matematikkundervisning. *Tidsskriftet FoU i praksis, 4*(3), 39-60.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag.

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Dialog, samspel og læring*. Abstrakt forlag.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education, 39*, 503–514. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0052-1

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. Liber.

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole: En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1*. (Masteroppgave) Universitetet i Oslo. https://www.duo.uio.no/handle/10852/38054

Johnson, D.W., Johnson, R.T., Haugaløkken, O.K., & Aakervik A.O. (2006). *Samarbeid i skolen: pedagogisk utvikling – samspill mellom mennesker*. Pedagogisk psykologisk forlag.

Kjærnsli, M., Nortvedt, G.A., & Jensen, F. (2014). Norske elevers kompetanse i problemløsning i PISA 2012. Hentet 18. mars 2022 fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/pisa2012_problemlosing.pdf.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 5–44.

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* (Publisert doktoravhandling). Universitetet i Agder.

Kunnskapsdepartementet (2015). *Fremtidens skole - Fornyelser av fag og kompetanser.* (NOU: 2015:8). Oslo Departementets sikkerhet- og serviceorganisasjon. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk.* Fastsatt som forskrift av Kunnskapsdepartementet 15.11.2019. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju (3. utg.).* Gyldendal Akademisk.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. I P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (s. 361-386). Springer.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. In G. Kaiser (Ed), *Problem Solving in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys* (p. 1–39). Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319- 40730-2

Linell, P. (1998). *Approaching dialogue. Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives.* John Benjamins.

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* Deakin University Press.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. utg.). Prentice Hall.

Nosrati, M., Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. Naturfagsenteret. Matematikksenteret. Hentet 19. mars 2022 fra https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2021-03/T3.P1.M1A-Dybdel%c3%a6ring%20i%20matematikk_2.pdf.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264190511-6-en

Opsal, H. & Tonheim, O. H. M. (2018). Students with low reading abilities and word problems in mathematics. I E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Red.), Norma17. The eighth *Nordic conference on mathematics education* (s. 149–157). SMDF

Pólya, G. (1957). *How to solve it.* (2. utg.) NJ, Princeton University Press.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk - Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Høyskoleforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm AS.

Rogat, T. & Linnenbrink-Garcia, L. (2011). Socially shared regulation in collaborative groups: An analysis of the interplay between quality of social regulation and group processes. *Cognition and Instruction*, *29*(4), 375-415. https://doi.org/10.1080/07370008.2011.607930

Sanden, C.H. (2010, 7. desember). PISA-testen ble et sjokk for Norge. *NRK*. https://www.nrk.no/norge/--pisa-ble-et-sjokk-for-norge-1.7413860.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334–370). MacMillan.

Sjøberg, Svein. (2021). PISA - internasjonal skoletest i Store norske leksikon på snl.no. Hentet 18. mars 2022 fra https://snl.no/PISA_-_internasjonal_skoletest.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk (2. utg.)*. NKI Forlaget.
Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2009). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: Casebook for Professional Development* (2. utg.). Colombia University.

Svingen, O. & Gilje, Ø. (2018). Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk. Hentet 19. mars 2022 fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf.

Säljø, R. (2001). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen Akademisk Forlag.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Fagbokforlaget.

Valenta, A. (2016). Kognitive krav i matematikkoppgaver. Matematikksenteret. Hentet 19. mars 2022 fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/2022-10/Kognitive%20krav%20i%20matematikkoppgaver.pdf

Van Galen, F., Feija, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and propotions- a learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Sense Publisher.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wellington, J. (2000). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches.* Continuum.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge University Press.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Universitetsforlaget.

# 9 Vedlegg

## Vedlegg 1: Tillatelse fra NSD

Vurdering av behandling av personopplysninger

**Referansenummer**
417405

**Vurderingstype**
Standard

**Dato**
18.01.2022

**Prosjekttittel**
2P-elevers arbeid med problemløsningsoppgaver når de utforsker Pytagoras læresetning.

**Behandlingsansvarlig institusjon**
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

**Prosjektansvarlig**
Martin Carlsen

**Student**
Mona Emanuelsen

**Prosjektperiode**
03.01.2022 - 30.06.2024

**Kategorier personopplysninger**

- Alminnelige

**Lovlig grunnlag**

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 30.06.2024.

**Kommentar**

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 18.01.2022, samt i meldingsdialogen.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.06.2023.

LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke til behandlingen av personopplysninger. I meldeskjemaet er det krysset av for at foresatte samtykker på vegne av deltakere 17 år, men i samtykkeskjemaet vil deltakeren selv samtykke. Ut fra en helhetsvurdering av opplysningenes art og omfang, vurderer vi det slik at ungdommer 17 år har forutsetninger for å forstå hva deltagelse innebærer og kan samtykke til behandlingen av personopplysninger på selvstendig grunnlag. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: · lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen · formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål · dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet · lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet DE

REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20). Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med. For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson: Eva J. B. Payne

Lykke til med prosjektet!

## Vedlegg 2: Intervjuguide oppstartsintervju

### Bakgrunnsspørsmål

a. Kjønn
   Jente Gutt
b. Faglig bakgrunn (1P eller 1T)
   1P 1T
c. Måloppnåelse i 1P/1T
   1 2 3 4 5 6
d. Måloppnåelse i 2P
   1 2 3 4 5 6
e. Forhold til faget på en skala fra 1 – 5 hvor 1 er «hater det» og 5 er «favorittfag».
   1 2 3 4 5

### Erfaring med utforskende oppgaver i grupper

På en skala fra 1 – 5, hvor 1 er «ikke i det hele tatt» og 5 er «svært godt»;

a. Hvor godt liker du å jobbe i grupper/ samarbeide med andre elever?
   1 2 3 4 5
b. Vet du hva utforskende oppgaver er? Forklar!
   Ja Nei
c. Har du erfaring med utforskende oppgaver fra før?
   Ja, mye Litt Nei
d. Hvor godt liker du å jobbe med utforskende oppgaver?
   1 2 3 4 5
   Hvorfor/ hvorfor ikke?

### Læring og motivasjon

a. Hvordan liker du best å jobbe i matematikktimene?
b. Hvordan lærer du nytt stoff best?
c. Hva motiverer deg i matematikktimene?
d. Hva gjør du om du ikke forstår oppgaven med en gang?
e. Har du noen strategier?
f. Hva er dine forventninger til disse øktene?
g. Er det noe du lurer på?

## Vedlegg 3: Intervjuguide gruppeintervju

1. Nå har dere hatt deres siste matematikktime. Hva tenker dere om faget matematikk?
    a. Kan du utdype det du sier? Begrunn/ kom med eksempler.
    b. Hva er gøy/ kjedelig/ interessant?
    c. Kan du gi eksempel på dette?
    d. La alle elevene få si sin mening.
2. Hvilket tema liker dere best i faget?
    a. Hva gjorde at du valgte å fremheve dette emnet?
3. Hvordan liker dere best å arbeide med matematikk?
    a. Lærer underviser på tavla
    b. Gjøre oppgaver alene
    c. Jobbe sammen med medelever
4. Hvordan oppgaver liker dere best å jobbe med?
    a. Oppgaver som går raskt
    b. Tradisjonelle oppgaver hvor vi vet fremgangsmåten
    c. Utforskende oppgaver
5. Hva forbinder dere utforskende oppgaver/ problemløsning med?
    a. Hva kjennetegner en slik oppgave?
    b. Jeg tar frem kuleisoppgaven og bruker denne som utgangspunkt for den videre samtalen.
    c. Hvilke strategier kan være nyttige å bruke i slike oppgaver?
    d. Hva gjør at disse er nyttige?
    e. Hva vil det si å generalisere? Hva tenker dere dette ordet betyr?
6. Liker dere å arbeide på denne måten som dere har gjort disse ukene?
    a. Hva likte dere/ hva likte dere ikke?
    b. Hva har dere lært som dere ønsker å ta med videre?
7. Hva gjør dere om dere ikke forstår en oppgave?
8. Hva gjør dere om dere ikke klarer å løse oppgaven?
9. Hvis du får til oppgaven, blir du motivert til å utvikle og generalisere et svar?
10. Hvis du får til en oppgave, blir du da motivert til å løse andre oppgaver?
11. Når spør dere læreren om hjelp?
12. Bruke noe fra oppgavebøkene (loggen) à Kuleis.
    a. Jeg ser du gjorde slik. Kan du utdype dette mer?
    b. Hva tenkte du her?
    c. Hvordan kunne du generaliser?
13. Er det greit at vi tar frem en problemløsningsoppgave nå?
    a. Hva tenker dere når dere får en oppgave som dette?
    b. Hvordan vil du starte opp?
    c. Hva vil du gjøre så?
    d. Hva tenkte dere da dere løste denne oppgaven?
    e. Hvordan kom dere frem til dette svaret?

## Vedlegg 4: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

# «2P-elevers arbeid med problemløsningsoppgaver når de utforsker Pytagoras læresetning»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se hvordan overgangen fra et tradisjonelt læringsmiljø til et mer utforskende miljø påvirker den kognitive delen av elevenes utvikling i matematikk, altså elevenes læring, elevers evne til å utvikle egne løsningsstrategier og elevenes resonnement i problemløsningssituasjonen.. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

## Formål

Jeg ønsker gjennom mitt arbeid med masteroppgaven å se hvordan overgangen fra et tradisjonelt læringsmiljø til et mer utforskende miljø påvirker den kognitive delen av elevenes utvikling i matematikk, altså elevenes læring, elevers evne til å utvikle egne løsningsstrategier og elevenes resonnement i problemløsningssituasjonen. Jeg vil observere den kognitive utviklingen til hver enkelt av de fem elevene gjennom de ti øktene de skal jobbe med emnet geometri. Spørsmål jeg ønsker å besvare er: Hva karakteriserer elevenes matematiske resonnement rundt problemløsningsoppgaver? På hvilken måte bidrar elevene inn i gruppas problemløsningsprosess? Hva gjør at det skjer en endring i elevens måte å jobbe med problemløsningsoppgaver på? Hva gjør elevene når de er stucked? Tar elevene i bruk ulike strategier for å komme videre når de er stucked?

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Til denne undersøkelsen trenger jeg fem elever fra Vågsbygd videregående skole som tar 2P våren 2022. Du blir spurt fordi jeg sammen med din faglærer Ragnhild Quist anser deg som en elev som vil bidra positivt inn i et slikt gruppearbeid.

**Hva innebærer det for deg å delta?**

Hvis du ønsker å delta, innebærer det at du blir intervjuet av meg før, under og etter de ti enkelttimene du og gruppen din skal jobbe med utforskende oppgaver i geometri.

Spørsmålene vil være knyttet til hvordan erfaring du gjør deg med å jobbe i grupper med utforskende oppgaver. De ti øktene vil være sammenfallende med de ordinære 2P-timene, så du og gruppen din vil da jobbe på et eget rom. Jeg og Ragnhild samarbeider slik at dere ikke går glipp av undervisning i andre emner mens dere jobber med disse oppgavene. Dette emnet er hentet fra læreplanen i 2P. Mens dere jobber sammen, vil jeg observere dere og gjøre lydopptak som jeg senere bruker til å analysere hvordan dere jobber. Alt av tid du bruker på dette er den timeplanlagte 2P-tiden (du må altså ikke bruke noe av fritiden din på dette).

**Det er frivillig å delta**
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun meg, altså Mona Emanuelsen, og min veileder på UiA, Martin Carlsen, som vil ha tilgang til opplysningene jeg samler inn. Jeg vil bruke fiktive navn og lagre alt innsamlet materiale på min jobbPC. Du vil altså ikke kunne bli gjenkjent i min masteroppgave.

**Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er våren 2023. Da vil alle notater jeg har gjort meg og lydopptak slettes.

**Dine rettigheter**
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Hvor kan jeg finne ut mer?**
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Martin Carlsen (38 14 16 59).
- Vårt personvernombud: Johanne Warberg Lavold Personvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

*Prosjektansvarlig* *Masterstudent*
(Forsker/veileder)

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Samtykkeerklæring**

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet 2P-elevers arbeid med problemløsningsoppgaver når de utforsker geometri, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i intervju
- ☐ å delta i spørreskjema
- ☐ å delta i lydopptak
- ☐ å bli observert mens jeg jobber med disse oppgavene

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

## Vedlegg 5: Problemløsningsoppgaver

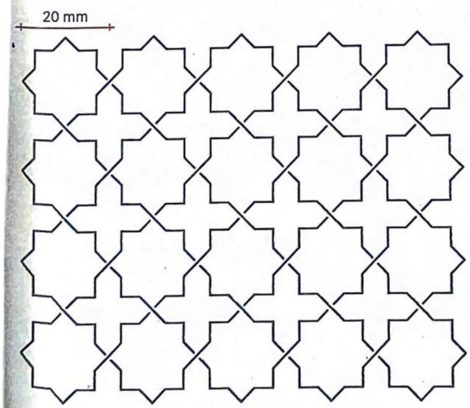
**Problemløsningsoppgaver**

<u>Oppgave 1</u>

Birje vurderer å kjøpe en valpegård som består av seks gjerder med bredde på 61 cm.

Hva er arealet av valpegården?

<u>Oppgave 2</u>




Damia skal lage mønsteret på figuren ved å sy fast en sølvtråd til et lerret.
Hvor lang sølvtråd trenger hun?

<u>Oppgave 3</u>

Bildet nedenfor viser et femkantet hyttevindu.
Den høyeste stolpen er 245 cm høy. Vinduet er 462 cm bredt. Høyre kant av vinduet er 156 cm høy. Spissen på venstre vindusflate treffer 129 cm over underkant av vinduet og 85 cm til venstre for venstre underkant av vinduet.

Beregn arealet av vinduet.

Fuglemyrhytta, Nordmarka i Oslo

## Oppgave 4

Ane skal lage et kvadrat og en sirkel.

Både kvadratet og sirkelen skal ha omkrets 1 meter.

a. Regn ut nødvendige lengder til både kvadratet og sirkelen.
b. Finn arealet av kvadratet og sirkelen.

Johan skal også lage et kvadrat og en sirkel. Men Johan vil lage dem slik at arealet av de to figurene er det samme, og at summen av omkretsene til de to figurene blir 2 meter.

c. Regn ut de nødvendige sidene.
d. Finn arealet av de to figurene.

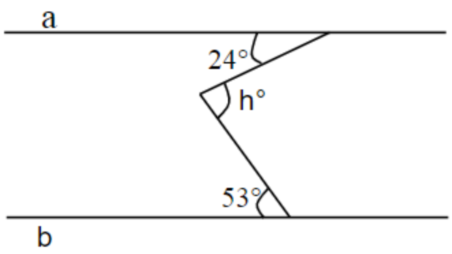
## Oppgave 5

## Oppgave 6

Nina inviterte 17 venner til middag og hun ga hver gjest et kort med et tall fra 2 til 18 og beholdt nummer 1 selv. Da alle hadde satt seg, viste det seg at summen av tallene på kortene til hvert par ble et kvadrattall. Hvilket tall hadde Ninas bordkavaler?

## Oppgave 7

Hva er verdien til *h*?




(Running Tasks, gitt av faglærer i kurset Ma-424)

## Oppgave 8

Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler. a) Hvor mange måter kan hun velge isen sin på? b) Hva om det er flere smaker å velge mellom?

(Wæge & Nosrati, 2018, Motivasjon i Matematikk, side 107).

## Oppgave 9

Hvilke tall oppstår når du legger til 1 til produktet av fire påfølgende tall?

(Running Tasks, gitt av faglærer i kurset Ma-424)

## Oppgave 10

Du kaster en vanlig terning tre ganger. Hva er sannsynligheten for at produktet av resultatene (antall øyne opp i hvert kast) er et partall?

(Abelkonkurransen, 1. runde, 2021)

## Oppgave 11

I en klasse fikk 3/5 av guttene A på prøve, og 7/10 av jentene fikk A. 2/3 av elevene som fikk A var gutter. Finn forholdet mellom antall gutter og jenter i klassen.

(Running Tasks, gitt av faglærer i kurset Ma-424)

## Oppgave 12

Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge?

(Abelkonkurransen, runde 1, 2009)

## Vedlegg 6: Transkripsjonsnøkkel

| Tegn | Beskrivelse |
|---|---|
| ≈ | Elev overtar snakkingen mens en annen snakker. |
| (..) | Lite opphold i snakkingen (2 sekunder). |
| (…) | Lengre opphold i samtalen/ tenkepause. |
| () | Tekst inni parentes beskriver hva elevene gjør når de ikke snakker. |
| ** | Elevene ler mens de snakker |
| | |
| | |