Master

Hva karakteriserer en gruppe 9.trinnselevers strategier og argumentasjon med utforskende volumoppgaver?

Silje Kristin Langaker

VEILEDER
Kristoffer Heggelund Knutsen
Cengiz Alacaci

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på mitt femårige masterløp på Universitetet i Agder, og er til ære for alle de fantastiske lærerne jeg har hatt oppgjennom skolegangen, kanskje spesielt matematikklærerne mine. Det har vært fem krevende og lærerike år, med flere oppturer og nedturer. Jeg setter pris på all den kunnskapen jeg har tilegnet meg gjennom studietiden. Denne oppgaven har gitt med mye verdifull kunnskap som nyutdannet lærer, som jeg vil kunne ta nytte av i arbeidslivet.

Jeg vil gjerne takke mine to veiledere Kristoffer Heggelund Knutsen og Cengiz Alacaci for utrolig god veiledning gjennom hele perioden. De har gitt meg mye ny kunnskap, god konstruktiv kritikk, ros og motivasjon. Jeg er veldig takknemlig for deres store engasjement og alle de interessante samtalene på veiledningsmøtene.

Silje Kristin Langaker
Universitetet i Agder
Kristiansand mai 2023

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en kvalitativ kasusstudie som tar for seg hva som karakteriserer elevers arbeid med volum. Hensikten er å se hvordan en 9.klasse løser to problemløsningsoppgaver om volum. Studiens problemstilling er derfor *Hva karakteriserer en gruppe 9.trinnselevers strategier og argumentasjon med utforskende volumoppgaver?* Teorien vil ta for seg store begrep som geometri, algebra og aritmetikk, og nivåene fra Van Hiele modellen. Den skal også se på tidligere forskning og de fem «sammenflettede trådene» til Mathematical Proficiency. Læreplanen i matematikk for 8.trinn og kjerneelementene vil være sentrale, i tillegg til at geometrisk, algebraisk og aritmetisk tenkning er viktig for teorien i denne studien. Matematikkoppgavene kan kategoriseres som LIST-oppgaver og handler om å forklare hvilke av de to prismene, laget av et A4-ark på to ulike måter, har størst volum, og hvor mye du må klippe av hjørnene av et kvadrat for å få størst mulig volum. Disse skulle løses av en niendeklasse, som var delt inn i grupper. Senere deltok fem frivillige på et semi-strukturert intervju, for å kunne få mer utdypende svar fra elevene.

For å analysere datamaterialet ble det tatt ut elementer av Grounded Theory, ved å kode datamateriale og tematisere, og fra dette utvikle kategorier. Fra disse kategoriene ble det laget til ny teori som kunne forklare funnene og bli brukt i analysen. Studien viser at flertallet av elevene mener at to prismer brettet av et A4-ark på langsiden og kortsiden, vil ha likt volum. Det er først når de regner ut at de finner ut at den lave prismen har størst volum. Når de skal finne ut hvor mye de må klippe fra hjørnene til et kvadrat, klipper de ut ulike størrelser og ved hjelp av utregning ser hvem som vil gi de størst volum. Funnene fra studien tyder på at denne niendeklassen er svært visuelle og bruker sin intuisjon og logiske tankning for å argumentere. I tillegg er de sterkere i geometrisk tenkning enn algebraiske tenkning. Til tross for dette, vil de likevel trenge mer trening i geometrisk tenkning og modellering, og har muligens vanskeligheter med dette fordi de mangler algebraisk resonnering. De har vanskeligheter med å se sammenhenger mellom algebra og praktiske situasjoner. Elevene ser ut til å ha manglende grunnkunnskaper, som også vil gjøre det vanskelig å anvende algebra.

Summary

This master's thesis is a qualitative case study that looks at what characterizes students' work with volume. The purpose is to see how a 9th grader solves two problem-solving tasks about volume. The study's research question is therefore *What characterizes a group of 9th grade students' strategies and argumentation with exploratory volume tasks?*
The theory will deal with major concepts such as geometry, algebra and arithmetic, and the levels from the Van Hiele model. It will also look at previous research and the five "intertwining threads" of Mathematical Proficiency. The curriculum in mathematics for 8th grade and the core elements will be essential, as well as geometric, algebraic, and arithmetic thinking is also important for the theory in this study. The mathematics tasks can be categorized as NRICH-tasks and are about explaining which of the two prisms, made from an A4 sheet in two different ways, has the largest volume, and how much you have to cut off the corners of a square to get the largest possible volume. These were to be solved by a ninth-grade class, which was divided into groups. Later, five volunteers took part in a semi-structured interview, in order to get more in-depth answers from the students.

To analyze the data material, elements of Grounded Theory were taken out, by coding the data material and thematizing, and from the themes the categories got developed. From these categories, new theory was added that could explain the findings and be used in the analysis. The study shows that the majority of students believe, of the two prisms folded from an A4 sheet on the long side and the short side, they will have the same volume. It is only when they calculate that they find out that the low prism has the largest volume. When they are finding out how much they have to cut from the corners of a square, they cut out different sizes and, using calculations, see which give them the largest volume. The findings from the study suggest that these ninth graders are highly visual and use their intuition and logical thinking to argue. In addition, they are stronger in geometric thinking than algebraic thinking. Despite this, they will still need more training in geometric thinking and modelling. They may have difficulty with this because they lack algebraic reasoning. They have difficulty seeing connections between algebra and practical situations. The students seem to lack basic knowledge, which will also make it difficult to apply algebra.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Hensikten med denne masteroppgaven var å både forstå og oppdage matematisk tenkning hos elever på 9.trinn. Matematisk tenkning kan forklares som logisk resonnering og utvikling av ny kunnskap (Duval, 2017). Den nye læreplanen fra 2020 sier at «matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvending. Matematikk skal bidra til at elevene utvikler presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering. Matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi de kompetanse i utforskning og problemløsning» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2). Kunnskapsdepartementet (2020) sier at for at elever skal mestre matematikkfaget bedre og fullføre videregående skole, må det være en tilrettelagt opplæring rettet mot elever som presterer svakt. Likevel, er det mangel på kunnskap for hvordan man skal gjøre dette mest effektivt. Elevenes læringsutbytte har mye å gjøre med undervisningens kvalitet. TIMSS-undersøkelsen fra 2015 viser at norske elever på 9.trinn presterer lavt i arbeid med oppgaver som legger til rette for bruk av algebra. Dette kommer på tross av at det i perioden 2011-2015 ble registrert en fremgang i åttendeklassinger resultater innen tall og tallforståelse og geometri. Det er også registrert fremgang i flere andre temaer fra tidligere, men når det gjelder algebra fremstår tallene nesten uendret siden 2007 (Bergem et al., 2016).

I matematikk er det hensiktsmessig å kunne argumentere godt for strategien man bruker, slik at det ikke vil være noe usikkerhet i hva den vil føre til. I tillegg vil det være viktig å bruke strategi til å generalisere og for å argumentere at det vil kunne gjelde for alle tall. Når elevene argumenterer for strategien de bruker, må en skille på hva, hvorfor og hvordan. Bak strategien deres ligger det en argumentasjon. Man vil ha en svak argumentasjon om man regner ut og sjekker med noen eksempler, fordi vi må sjekke med «alle tall» for at det skal være gyldig. Videre vil man ha kunnskapen til algebraisering av regning. Elever må vite hvorfor det fungerer for å vite at det fungerer generelt. Utfordringen med å argumentere for regnestrategier gjennom algebraisk notasjon, er at her vil målet være å vise at noe er generelt. For at elever skal oppfatte matematikk som et nyttig fag er det viktig at de opplever at reglene og regnestrategiene har en forklaring og en mening (Enge & Valenta, 2011).

Gjennom erfaringer fra praksis har jeg observert hvordan elever jobber med ulike problemløsningsoppgaver, og har blitt nysgjerrig på hvordan de tenker og hvorfor de tenker som de gjør. Det var spesielt den siste praksisen på studiet, hvor jeg oppdaget noe jeg syntes at var veldig interessant. Elevene i klassen var allerede delt inn i «høyt-presterende» og «lavt-presterende», og skulle hver for seg jobbe med en problemløsningsoppgave. Dette var en Pytagoras oppgave der elevene blant annet skulle «sette på bokstaver» og finne arealet av en figur med både kvadrat og 30-60-90-trekanter. Forskjellen mellom disse to gruppene var at de «høyt-presterende» klarte å navngi lengdene og finne arealet med bruk av disse. De «lavt-presterende» derimot, forsto ikke hva som mentes med dette og valgte heller å måle med linjal og regne ut med de tallene de fikk. Jeg ble utrolig nysgjerrig på hvorfor disse elevene ikke gjorde det samme. Hvorfor forstod de ikke hvordan de skulle navngi de forskjellige lengdene? Hvorfor klarte de «høyt-presterende» å bruke algebra som et «verktøy» til å løse slike problemløsningsoppgaver? Dette startet derfor en interesse for å finne ut mer, men ikke se på en spesifikk elevgruppe. Jeg ville heller observere en litt tilfeldig klasse og se på hvilke strategier de bruker for å løse problemløsningsoppgaver. Jeg har et personlig ønske om å forstå elevers tankegang, slik at jeg bedre kan tilrettelegge for dem gjennom arbeidet mitt som lærer. Kunnskapen vil jeg og kunne dele fra og gi fremtidige kolleger de erfaringene jeg har fått fra funnene mine.

1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å finne ut av hvordan elever løser problemløsningsoppgaver i geometri i arbeid med volum og hvilke løsningsstrategier de har for å løse disse. Mitt forskningsspørsmål for masteroppgaven er derfor:

> *«Hva karakteriserer en gruppe 9.trinnselevers strategier og argumentasjon med utforskende volumoppgaver?»*

Videre har jeg tre avgrensede delforskningsspørsmål:

- Hvilke løsningsstrategier bruker elevene når de skal løse problemløsningsoppgaver med volum?
- Har elevene nok algebrakunnskaper til å løse problemløsningsoppgaver med volum, og klarer de å bruke det som et verktøy?

- Har elever nok kunnskaper geometri, algebra og aritmetikk til å se sammenhenger, og dermed kunne bruke dette om hverandre?

1.3 Kort om metode

Dette er en kvalitativ kasusstudie som tar i bruk observasjon og intervju for å samle inn data i en niendeklasse, som ble gjennomført på en stor LU-skole som jeg ikke hadde kjennskap til. For gjennomføring har det blitt sendt søknad til NSD og informasjonsskriv til foreldre for at elevene skulle delta. Det ble tatt i bruk problemløsende matematikkoppgaver som handler om volum. Disse kan også kategoriseres som LIST-oppgaver, som jeg kommer inn på i metodekapittelet. I observasjonen var elevene delt inni seks grupper, på tre og fire elever. En kort periode senere kom jeg tilbake for å intervjue fem frivillig deltakende elever fra denne klassen. Dette var et semi-strukturert intervju og ble tatt lydopptak av, og transkribert senere. Det vil bli tatt ut elementer fra analyseverktøyet Grounded Theory. Datamaterialet fra observasjonen og intervjuet er blitt gjennomgått og kodet, og gjort om til kategorier, som teorien og analysen vil gå ut ifra.

1.4 Oppgavens oppbygning

Masteroppgaven er bygd opp av syv kapitler. I dette første kapittelet beskrives bakgrunnen for studien og forskningsspørsmålet. Metoden vil også bli kort presentert. I kapittel 2 kommer teori kapittelet, hvor det først vil bli redegjort for viktige begreper for oppgaven. Videre vil det presenteres teoretiske utgangspunkt som konstruktivistisk læringsteori, Van Hiele modellen (Van de Walle, 2001) og aritmetisk og algebraisk tenkning. Det vil og komme en oversikt over tidligere forskning rundt temaet, som matematikk i undervisningen og Mathematical Proficiency, som er «sammenflettede tråder» og beskriver grunnlaget for matematikk ferdigheter. I slutten av teorikapittelet vil det komme en oversikt over det viktigste fra læreplanen 2020 og kjerneelementene, som er mest relevant for denne oppgaven. Metodekapittelet kommer i kapittel 3 og vil ta for seg hvordan denne kvalitative studien ble planlagt, hvordan det skulle gjennomføres, hva slags metodisk tilnærming og hvordan data ble samlet inn. Videre blir de problemløsende matematikkoppgavene som ble brukt presentert, forklart og et løsningsforslag for hvordan jeg kunne løst oppgaven. Etter dette skal de ses på hvordan innsamling av data fra elevgruppene ble gjennomført. Dette vil være forarbeid gjort før studien startet, observasjonen, innsamling av data, utvalget, lydopptak og intervjuet. Deretter skal analyseverktøyet Grounded Theory, som det blir tatt inspirasjon fra og brukt i analysekapittelet, bli presentert. Slutten av kapittelet vil trekke fram studiens validitet og relabilitet, i tillegg til forskningsetiske problemstillinger. Dernest kommer kapittel 4 med fremstilling av resultatene fra studien. Analysekapittelet i kapittel 5, tar for seg koding av datamateriale og analyse ut ifra kategorier. I kapittel 6 skal det drøftes og diskuteres ut ifra teori fra teorikapittelet. Oppgaven avsluttes i kapittel 7 med en avsluttende refleksjoner av studien.

2 Teori

Teorikapittelet skal ta for seg viktige begreper, teorier og læreplan, som vil blir brukt for analyse av funnene og diskusjonen rundt dem. Geometri, algebra og aritmetikk er begrep som studien baserer seg mye på. Teoretiske utgangspunktet bli presentert, som er konstruktivistisk læringsteori, van Hiele modellen og aritmetisk og algebraisk utgangspunkt. Videre vil det ses på tidligere forskning, matematikk som fag og hvorfor det er viktig å mestre matematikk i samfunnet og hvilken rolle forskningen har for å forbedre skolematematikken. Deretter vil jeg se på de «sammenflettede trådene» i Mathematical Proficiency og de viktigste punktene fra læreplanen 2020 i matematikk, samt kjerneelementene.

2.1 Begrepsforklaring

2.1.1 Geometri

I følge Brannan et al. (1999) er geometri læren om form (s.1). Det defineres også som «vitenskapen som behandler formen og størrelsen på ting. Studiet av invariante egenskaper til gitte elementer under spesifikke transformasjonsgrupper» (James et al., 1992, s.186, egen oversettelse). Van de Walle (2001) sier det at når vi snakker om geometriske aktiviteter og geometri grunnskolen, kan vi kalle dette for uformell geometri. Her får elevene utforske former ved å se, føle, bygge, observere, tegne og bruke ulike modeller. Videre forteller han at slike aktiviteter vil innebære å konstruere, visualisere, sammenlikne, transformere og klassifisere geometriske figurer, og fokuset er på å utforske i form av aktiviteter. Når elever har en intuisjon om form og forholdet mellom andre former, kaller Van de Walle (2001) dette «Spacial Sense», som jeg vil oversette til «romforståelse». Elever med en slik sans har en følelse for geometriske aspekter og for former se ser rundt dem. Dette er noe som kan trenes og bli bedre på. Elever som jobber godt med dette over tid, vil etter hvert få erfaring med form og rom. Gjennom å utforske geometri, kan elevene bli bedre på problemløsning, og geometri kan overføres til andre temaer i matematikk. I tillegg til dette brukes geometri daglig av veldig mange og geometriske former kan kunne sees i naturen, slik som solsystemet og planter (Van de Walle, 2001).

Arcavi (2003) sier at visualisering «er evnen til, prosessen om og resultatet av å lage, tolke, bruke og reflektere bilder» (s.217). Derfor vil det være nødvendig med evne til å visualisere, når en jobber med geometri. Videre forteller Nakken & Thiel (2014) at «visualisering handler om å kunne lage og forandre mentale bilder av todimensjonale og tredimensjonale objekter» (s.156). For at barn skal få til dette, må de ha erfaring med figurer, ved at de allerede har sett det i virkeligheten. På den måten kan de gjenskape de i hodet (Nakken & Thiel, 2014).

2.1.2 Algebra

Å definere algebra er komplekst og hva vi tenker at algebra er, kan påvirke måte vi nærmer oss det (Kaput et al., 2008). En kan si at algebra er en matematisk gren, der man ofte vil bruke bokstaver for å forklare sammenhenger (Nakken & Thiel, 2014). Kaput et al. (2008) beskriver algebra blant annet som læren om strukturer og systemer, og om funksjoner og relasjoner, i tillegg til å lære å kunne bruke et modelleringsspråk i flere sammenhenger. I følge Carraher & Schliemann (2007), handler algebra om å jobbe med variabler og det å «representere og modellere konkrete situasjoner med uttrykk, og sette opp likninger» (Carraher & Schliemann, 2007, s.2, egen oversettelse). Selv ville jeg, inspirert av Birkeland et al. (2018), forklart at algebra handler om å jobbe med kjente og ukjente størrelser, og variabler. Vi kan og si at det handler om ligninger, og det å regne med tall og variabler. På folkemunne vil man kanskje beskrive det som bokstavregning (Hervik, 2021). Med algebra kan vi for eksempel ta $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$ og generalisere til $x + x + x = 3x$. Her vil x kunne være hvilket som helst tall, som generalisert med mål om å vise gjentatt addisjon (James et al., 1992).

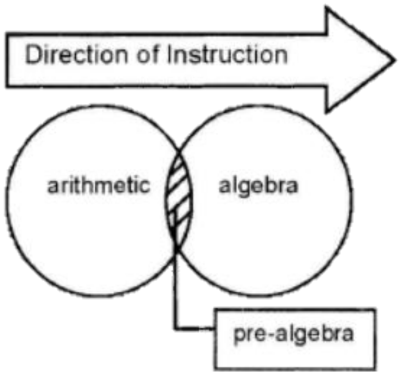
2.1.3 Aritmetikk

Aritmetikk kan forklares som "Written language is to oral language what algebra is to arithmetic" (Brekke et al., 2000, s.7). Vi kan si at aritmetikk er vitenskapen om tall, mengder og størrelser. Gjennom flere år vil elevers kunnskap og forståelse om tall utvikles, hovedsakelig gjennom bruken av heltall og rasjonelle tall (Carraher & Schliemann, 2007). James et al. (1992) definerer det som «studien av positive hele tall 1, 2, 3, 4, 5, … under operasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, og bruken av resultatene fra disse studiene i hverdagen» (s.20, egen oversettelse).

2.1.4 Tidlig algebra

Tidlig algebra handler om nye synspunkter og sammenhengen mellom aritmetikk og algebra Man vil ofte kunne se at aritmetikk og algebra er to ulike ting. Derfor vil det være behov for en «bro», som er det skraverte område illustrert i figur 1, og vil nå fra «slutten av aritmetikk og «starten» av algebra (Schliemann et al., 2007, xi). Med tidlig algebra skal fremme en måte å tenke på. Elevene skal ha en vane i å kunne lete etter regularitet, artikulere, teste og bevise.

Det vil være viktig at elever får mulighet til å reflektere rundt de observasjonene de gjør får å nå et nytt nivå av generalisering og argumentasjon (Kieran et al. 2016).



Figur 1: (Schliemann et al., 2007)

2.2 Teoretisk utgangspunkt

2.2.1 Konstruktivistisk læringsteori

Konstruktivisme er læringsteorien om elevers konstruksjoner av kunnskap. Teorien sier at vi konstruerer vår forståelse ut ifra erfaringer og opplevelser, og refleksjoner rundt dette. I møte med ny kunnskap, vil det være nødvendig å se det i lys av tidligere opplevelser. Da må man kanskje endre det man allerede vet eller «glemme» gammel informasjon om det er irrelevant. For å kunne skape denne kunnskapen, må vi være nysgjerrige ved å spørre og utforske (Bada & Olusegun, 2015, s.67).

Det er en strategi som vil hjelpe elevene med å konstruere kunnskap, i tillegg til å kunne sette kunnskapen i ulike kontekster. Ved å gjøre aktiviteter for å tilegne mer kunnskap og videre kunne reflektere og forklare hvordan de forstår de, vil de kunne oppnå nettopp dette. Kunnskap bør ikke bli «plantet» inn i hodet til elevene, men heller blir konstruert gjennom aktiviteter og opplevelser. Læreren bør så få elevene til å oppsummere og analysere ideene. Denne læringsteorien er først og fremst basert på at læring ikke kan gis direkte fra læreren til elevene. Elevene blir mer engasjert når de får gjøre gruppearbeid, ulike prosjekter og snakke (Oanh & Nhung, 2022, 93-94).

Denne læringsteorien er relevant for denne studien i og med at elevene gjør erfaringer gjennom utforskning og reflektering med andre elever og forsker. De bruker den kunnskap de har fra før til å bygge på ny kunnskap gjennom opplevelser. Noen misoppfatninger kan komme opp under utforskning og elever vil noen ganger være nødt til å legge fra seg det de allerede vet. Gjennom aktivitet med andre elever ved å analysere og reflektere, vil ny kunnskap kunne utvikles (Bada & Olusegun, 2015; Oanh & Nhung, 2022).

2.2.2 Van Hiele modellen

Van Hiele begynte i 1959 å jobbe med de ulike nivåene i geometrisk tenkning og har blitt godt kjent, spesielt i Amerika. Han studerte barns forståelse av geometri og utarbeidet en modell som beskriver elevers geometriske utvikling i fem nivåer. De beskriver hvordan elevene tenker, og hvilke geometriske ideer man har på de ulike nivåene. Etter hvert som man kommer på det neste nivået, endrer den geometriske tenkningen seg (Van de Walle, 2001, s.309).

Nivå 1: Visualisering

På dette nivået gjenkjenner elever geometriske figur av formene som en helhet, hvordan de ser ut og ikke egenskapene deres (Crowley, 1987). Egenskapene til en geometrisk form ligger ubevisst og de ser at et kvadrat er et kvadrat fordi det ser ut som et kvadrat (Birkeland et al., 2018). Her vil elevene sortere og klassifisere former ut ifra utseende og setter figurer sammen fordi «de ser ganske like ut» (Van de Walle, 2001, s.309).

Nivå 2: Analyse

Her begynner elevene å være i stand til å analysere geometriske konsepter. Dette kan gjøres gjennom observasjon og eksperimentering og elevene begynner å skille det som er karakteristisk for figurene (Crowley, 1987). Elevene ser etter egenskaper i et rektangel som om den har fire sider, om de motstående sidene er parallelle og like lange, om den har fire rette vinkler og om den har to diagonaler om gjør at figuren kan deles i to like trekanter (Crowley, 1987). Dermed bruker de dette til å klassifisere figurene og de i samme klasse har felles egenskaper. På dette nivået kan elevene liste opp egenskapene til et kvadrat, rektangel, parallellogram, rombe og drake. Likevel klarer de kanskje ikke se at et kvadrat også er et rektangel (Birkeland et al., 2018)

Nivå 3: Abstraksjon og uformell deduksjon

På dette nivået klarer elevene å se sammenhenger mellom de ulike figurene, og de klarer i større grad å resonnere. De vil for eksempel se at et kvadrat også er et rektangel og at et rektangel og er et parallellogram som har rette vinkler. Logiske bevis er ofte ikke så aktuelt her, da det kan oppfattes mer intuitivt (Birkeland et al., 2018). Elever på dette nivået vil gjerne sette mer pris på uformelle intuitive argumenter. Bevisene er ofte mer intuitivt enn deduktive (Van de Walle, s.310, 2001).

Nivå 4: Deduksjon

Med deduksjon kan elevene i større grad bruke logikk framfor intuisjon for å jobbe med geometriske påstander (Birkeland et al., 2018). På dette nivået kan elevene ikke bare huske, men også forstå og konstruere (Crowley, 1987). De kan også utlede setninger og bevise, og forstår behovet for dette fra flere deduktive argumenter (Birkeland et al., 2018). Elevene kan i mye større grad jobbe abstrakt med geometriske egenskaper og gjøre konklusjoner. Elever på videregående skole kan møte på problemstillinger som kan kreve at de kan arbeide på denne måten (Van de Walle, 2001, s.310).

Nivå 5: Stringens

Dette er det høyeste nivået i modellen og studentene kan jobbe med aksiomatiske systemer, ikke bare deduksjonene i et system. Geometri blir sett som abstrakt, i tillegg til at de kan grunnbegrepene godt (Van de Walle, s.310, 2001). Stringens er gjerne et nivå som er aktuelt å analysere etter først i arbeidet med studenter på høyskole og universitet. Dette nivået har ikke blitt utviklet i like stor grad siden grunnskolen hovedsakelig lærer i de tre første nivåene og de har derfor fått mer oppmerksomhet (Crowley, 1987).

2.2.3 Aritmetisk og algebraisk tenkning

På barneskolen er det hovedsakelig *hele tall* som er i fokus: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$. Elevene lærer å telle og kalkulere ved å addere, subtrahere, multiplisere og dividere. Videre jobber elevene med negative tall og rasjonale tall. Når de har oppnådd denne kompetansen vil måling være det neste temaet, som former en bro mellom tall og geometri. Å kunne tenke i tallsystem hjelper å forstå det grunnleggende i aritmetikk (Kilpatrick et al., 2001, s.72). John Mason (Kaput et al.,2008) forklarer at aritmetikk og algebra er sammenflettede, og for å lykkes i aritmetikk trengs algebraisk tenkning til et visst nivå.

Aritmetikk tenkning

Aritmetikk kan ofte bli sett på som det algebra er bygd på, men det vil heller være viktigere å tenke algebraisk for å forstå aritmetikk, sier John Mason (Kaput et al, 2008). Dersom undervisningen har et vedvarende fokus på oppgaver av typen «tolv pluss femten blir til 27», kan dette bygge opp under en operasjonell forståelse av likhetstegnet. Dette kan være grunnen til at flere elever ikke egentlig forstår hva likhetstegnet betyr. De vil har vanskeligheter med å forstå at $1 + 3 = 3 + 1$ eller at $2 + 5 = 9 - 2$, nettopp fordi de tenker at det «blir til» og at utregningen går fra venstre til høyre. Når elevene blir introdusert til algebra blir de lært å tenke at likhetstegnet som en operator og at det skal være ekvivalent på begge sider. Dette kan gjøre algebraiske likninger vanskelig for elever når det for eksempel er en ukjent på begge sider av likhetstegnet, for eksempel $8 + 2x = 4x$ (Schliemann et al., 2007).

Algebraisk tenkning

John Mason sier at algebraisk tenkning hjelper oss med å løse komplekse problemer, fordi det får oss til å anerkjenne det vi ikke vet. Å tenke algebraisk er også nødvendig for å få aritmetikk til å gi mening (Kaput et al., 2008). Ved algebraisk tenkning mener man gjerne evnen til å kjenne igjen mønstre, generalisere og analysere, og dette ved bruk at symboler. Det handler om å løse problemer og forstå det abstrakte. Barn klarer i en tidlig alder å se mønstre og kan kategorisere og generalisere disse mønstrene. Ved kunnskap om mønstre og sammenhenger, bygger et grunnlag for å bygge mer kunnskap om tall, symboler, likninger og uttrykk. Det er en prosess å bygge opp aritmetisk tenkning (Seelay, 2004). Selv vil jeg forklare algebraisk tenkning som å klare å se sammenhengen mellom formelle formler og bevis og figurer og modeller. Med algebraisk tenkning har man og gode evner til å generalisere, og man kan bruke og resonnere ved bruk av variabler (Kunnskapsdepartementet, 2019).

2.3 Tidligere forskning og studiens kontekst

2.3.1 Å lære matematikk

I mange år har det vært slik at elever har lært matematikk uten å faktisk forstå det de lærer. Dessverre har matematikkundervisning ofte blitt et fag med mer fokus på det å pugge og huske. Det ser ut til at de som ikke har ferdighetene til å resonnere matematisk blir fratatt muligheter og kunnskaper for å gjøre daglige gjøremål. Derfor vil det være svært verdifullt for både en selv og samfunnet at alle har god grunnleggende matematisk kompetanse. Dermed må alle elever lære seg å tenke matematisk, og i tillegg tenke matematisk for å lære (Kilpatrick et al., 2001, s.16).

Botten (2016, s.70) forklarer at matematikk skal være til hjelp for å klare seg bedre i hverdagen og forstå virkeligheten rundt seg. Det skal gjøre at elevene utvikler intellektet og kunne tenke abstrakt. Matematikkunnskaper kan og videreføres og brukes i andre fag. Ifølge flere studier som er blitt gjort, viser det seg at svært mange elever har vansker med spesielt algebra, fordi de ikke har gode nok kunnskaper om det grunnleggende. Elevene trenger å kunne generalisere i algebra ved å gjøre seg tanker om resultatene man får med regneoperasjonene istedenfor å ikke ha alt for mye oppmerksomhet på et riktig svar. I matematikk trenger man flere ulike kunnskaper, og ofte må man bruk en syklus for å løse problemer ved å matematisere, manipulere og tolke. Å matematisere er å se en matematisk sammenheng i problemet. Når vi manipulerer, må vi omforme disse sammenhengene for å få fram nye aspekter av problemet vi har. Dermed tolker vi disse aspektene i konteksten for å få fram ny innsikt i problemet vi hadde fra starten av (Brekke et al., 2000, s.5). Å forstå utfordringene som elever har med algebra og finne ut hva som skal til for å forbedre læringen deres, er svært viktig for at elevene skal lykkes i algebra (Barbieri et al., 2019).

Lee & Freiman (2006) har undersøkt hvordan det å jobbe med å utforske mønster, kan gi bedre forståelse av algebra. Når elever klarer å uttrykke mønstre på en matematisk måte, vil de ha et godt grunnlag for å lære algebra og kunne uttrykke et algebraisk språk. Det kan se ut til at det er en sammenheng mellom det å utforske mønster og algebraisk tenkning, om man tar med utforskning og arbeid med mønster inn i algebra. Forskningen på algebraisk tenkning og læring, har gjennom flere år vært fokusert på elevers feil og hindringer, og har vist at elever har vanskeligheter med tolkning av symboler (Kaput et al., 2008).

2.3.2 Forskningens rolle i forbedring av skolematematikk

Forskning kan ikke alene si noe om hvilke læringsmål lærere bør prioritere eller hva som er viktigst. Etter at dette har blitt etablert kan forskningen generere informasjon for å gjøre det lettere for lærerne å avgjøre om målene kan gjennomføres og hvordan. Videre er det slik at man aldri kan være helt sikker på hvordan man skal hjelpe elevene med å nå læringsmålene. Det er også viktig å påpeke at forskning rundt det å lære matematikk er svært mangfoldig og derfor vil forskningen kunne gi flere ulike type svar (Kilpatrick et al., 2001).

Mange elever kan tenke at algebra er en pause fra aritmetikken, men algebra bygger heller på den kunnskapen og ferdighetene de allerede har tilegnet seg fra aritmetikken (Kilpatrick et al., 2001). Likevel oppleves algebra veldig annerledes i forhold til aritmetikk, noe som kan være utfordrende. Vi kan tenke på algebra som en måte å systematisk uttrykke abstraksjon, i tillegg til at algebra også er generalisert aritmetikk. Disse aspektene har ført til aktiviteter som representasjon, transformasjon og generalisering. Representasjon handler om å gjøre verbal informasjon til symbolsk uttrykk og likninger som noen ganger inneholder funksjoner. Eksempler på dette er kvantitative problemer som blir presentert gjennom likninger hvor en eller flere av størrelsene er ukjente. Funksjoner som kan beskrive geometriske mønstre eller en rekke (Kilpatrick et al., 2001). Representasjoner handler og om å kunne utrykk for numeriske sammenhenger. Mye av tidligere forskning viser at elever har vanskeligheter med å forstå bokstaver som variabler. Senere arbeid har forsøkt å finne ut av hvordan elevene lærer å bruke bokstaver for å representere en verdi (Kilpatrick, 2001).

2.3.3 Mathematical proficiency

Kilpatrick et al. (2001) beskriver *Mathematical proficiency* med fem “sammenflettede tråder”. Disse fem trådene legger grunnlaget for å kunne diskutere kunnskap og evner som utgjør matematiske ferdigheter. Det er viktig å la seg merke at disse trådene er sammenflettet og avhengig av hverandre og beskriver hvordan elever tilegner seg matematiske ferdigheter, hvordan lærerne utvikler denne ferdigheten hos sine elever og hvordan lærere er utdannet for å oppnå dette (Kilpatrick et al., 2001, s.117). Å lære med forståelse er mye mer verdifullt enn å bare memorere. Tanken om at kompetansen må sammenflettes for å være nyttig, tilsier å ha en dypere forståelse og krever at elever kobler sammen deler av kunnskapene sine, som kan brukes til å produktiv løse problemer. Videre viser studier fra kognitiv vitenskap om problemløsning vist betydningen av adaptiv kompetanse og det som kalles metakognisjon, altså kunnskapen om egen tenkning og evnen til å overvåke egen forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Begrepsforståelse

Å forstå matematiske begreper, operasjoner og relasjoner (Kilpatrick et al. 2001, s.116). Disse elevene kan forså hvorfor en ide er viktig og skjønner mer enn bare fakta og metoder, og i kombinasjon med forståelse vil det være lettere å forstå og bruke. (Kilpatrick et al., 2001, s.118)

Prosedyremessig flyt

Ferdigheter i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig (Kilpatrick et al. 2001, s.116). Her har elevene kunnskap om prosedyrer, altså i hvilke sammenhenger man skal bruke de. Dette er viktig for å forstå stedsverdi og rasjonelle tall, i tillegg til å kunne forskjeller og likheter mellom beregningsmetodene. (Kilpatrick et al., 2001, s.121).

Strategisk kompetanse

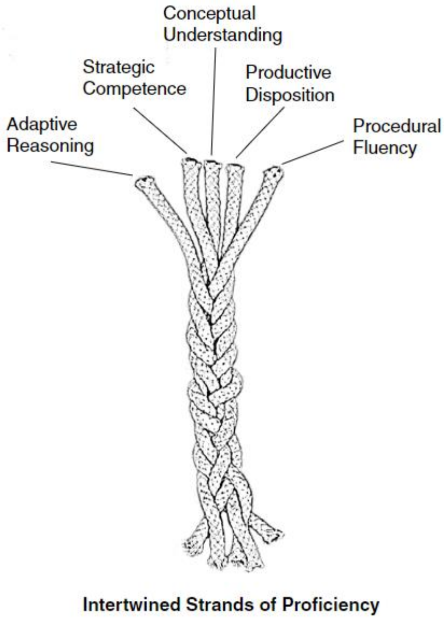
Evnen til å formulere, repetere og løse matematiske problemer (Kilpatrick et al. 2001, s.116). Her handler det om å kunne formulere matematiske oppgaver, presentere og løse de. Dette blir også ofte kalt problemløsning i matematisk undervisning, som det har blitt forsket mye på (Kilpatrick et al., 2001, s. 124).

Adaptivt resonnement

Evnen til logisk, tenkning, refleksjon, forklaring og begrunnelse (Kilpatrick et al. 2001, s.116). Her snakker vi om evnen til å tenke logisk og å se sammenhengen mellom relasjonen mellom konsept og situasjon. Adaptivt resonnement kan beskrives som limet som holder alt sammen (Kilpatrick et al., 2001, s.129)

Produktiv disposisjon

Vanemessig tilbøyelighet til å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt, kombinert med en tro på ens egen effektivitet. (Kilpatrick et al., 2001, s.116)



Figur 2: (Kilpatrick et al., 2001, s.117)

2.3.4 Læreplanen

For å kunne vite hva som kan forventes av elevene som deltar i studien, så jeg på det som hensiktsmessig å se på læreplanen i matematikk. Læreplanen vil da bli brukt til å se om elevene når opp til kompetansemålene.

Kunnskapsløftet 2020

I august 2020 kom den nye læreplanen og er mer omfattende med flere kompetansemål, som er fordelt på klassetrinnene. I LK20 repeteres det etter hvert klassetrinn, med at temaene arbeides inngående med at en beveger seg vider (Kunnskapsdepartementet, 2019). LK20 skal tilrettelegge for at elevene lærer både mer og bedre. Læreplanen skal gjøre at flere av fagene blir mer praktisk og utforskende, i tillegg til at det er fokus på fordypning og det å se sammenhenger. Fagfornyelsen vil gjøre det tydeligere for lærerne hva som er viktigst og en får tid til å gå mer i dybden (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Denne studien har undersøkt i en niendeklasse og derfor skal det ses på kompetansemålene for 8.trinn, som er mest relevant for forskningsspørsmålet. Ved å se på nettopp disse, vet jeg at det kan forventes at elevene skal kunne dette:

- Utforske algebraiske regneregler
- Beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk
- Lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner
- Lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner
- Utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner
- Representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene

(Kunnskapsdepartementet, 2019, 11-12)

2.3.5 Kjerneelementene

I matematikkundervisningen på grunnskolen, er kjerneelementene svært sentrale. Disse handler om utforskning og problemløsning, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering og matematiske kunnskaper (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er viktig å påpeke at kjerneelementene ikke er en teori, men det er viktig for oppgaven at den gir et overblikk over hvilke føringer læreplanen legger opp til. Kjerneelementene vil være sentrale for denne studien fordi de brukes til å analysere og diskuter om elevene mestrer de og om det vil komme fram i observasjonen og i intervjuet.

Utforskning og problemløsning handler om at «elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse». Her er det mer fokus på problemløsning, der elevene må analysere og vurdere, i tillegg til å bruke strategier og fremgangsmåter, for å løse ukjente problemer (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2).

Modellering og anvendelse innebærer at «elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers». Elevene skal kunne lage modeller, tenke kritisk og vurdere modellers gyldighet. Når elevene klarer å anvende matematikk, har de evnen til å bruke faget i andre situasjoner og andre fag (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2-3).

Resonnering og argumentasjon «handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker». Elevene har kunnskaper om at «regler og resultat ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser». Når elever klarer å argumentere vil dette si at de kan begrunne og bevise løsninger og tankegangen deres (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3).

Representasjon og kommunikasjon, der representasjon er «måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på», som for eksempel gjennom visuelle, verbale og symbolske representasjoner. Gode kommunikasjonskunnskaper vil si at elevene kan snakke matematikk og bruker et matematisk språk for å argumentere sine tanker (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3).

Abstraksjon og generalisering vil si at «elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk» og «oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning». De klarer altså utforske og se sammenhenger, og deretter overføre dette til noe formelt (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3).

Matematiske kunnskapsområder «omfatter tall og tallforståelse, algebra, funksjoner, geometri, statistikk og sannsynlighet» og «danner grunnlaget som elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse ved å utforske sammenhenger innenfor og mellom kunnskapsområdene» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3-4).

3 Metode

I dette metodekapittelet skal jeg redegjøre og begrunne for oversikt og planlegging av studien, design og metodiske tilnærminger. Deretter skal det sees på utvalget som har deltatt i studien og hvordan det har blitt undersøkt med datainnsamlingen og undersøkelsesdesign. Videre skal matematikkoppgavene som er blitt brukt i observasjonen bli presentert og begrunnes. Her vil det og komme et løsningsforslag for hvordan de vil kunne løses. Gjennomføringen av studien vil gjennomgås med forarbeidet, hvordan observasjonen ble gjennomført, hvordan oppgavene ble samlet inn og utvalget til intervjuet blir begrunnet. Etter dette blir metode for lydopptak og intervju presentert. Deretter vil analyseverktøy og strategi bli gjennomgått. Avslutningsvis vil jeg vurdere studiens validitet og relabilitet, som etterfølges av forskningsetiske problemstillinger og etiske betraktninger.

3.1 Oversikt og planlegging av studien

Planleggingen startet med å legge meg noen tanker for hva som skulle studeres. Det ganske tydelig for meg hvilken retning jeg ville gå, men vanskeligere å finne ut av hvordan jeg skulle gå frem og nøyaktig hva jeg ville finne svar på. I startet av prosessen var jeg i samtale med tidligere lærer og mine masterveiledere for å konkretisere hvordan masteroppgaven min skulle bli. Etter å ha skrevet ferdig prosjektbeskrivelse i november 2022, ble dette mer tydelig. Det gjorde resten av prosessen mer oppklarende, og jeg kunne begynne å planlegge hvordan observasjonen og intervjuene skulle gjøres. Selv om jeg ville planlegge godt for å ha god kontroll over studien, var jeg obs på at ting ikke vil nødvendigvis gå etter planen. I forveien av observasjonen ble det lagd et undervisningsopplegg, slik at de to timene ble gjennomført med en oversiktlig plan. På denne måten kunne jeg ha noe mer fast å forholde med til og den andre læreren ville fort kunne forstå meningen med opplegget, og hva han skulle bidra med.

Masteroppgaven skal se nærmere på hvordan elever jobber med problemløsningsoppgaver med volum. For å finne ut av dette, så jeg på det som hensiktsmessig å få en skoleklasse til å løse problemløsningsoppgaver, som dermed kunne bli analysert for å undersøke hvilke strategier og løsninger de har. Jeg ville undersøke de elevene som har gjennomgått mest mulig av det som står i læreplanen om algebra, og ville derfor bruke en tiendeklasse, men disse elevene har sitt siste halvår på ungdomskolen. Disse månedene vil være veldig viktige for dem og jeg ville ikke forstyrre den siste tiden til en tiendeklasse, og landet derfor på at det ville være best å undersøke på trinnet under. Ut ifra kompetansemålene for 9.trinn, vil elevene ha kunnskaper og gode grunnleggende ferdigheter i tidligere algebra. Som Kilpatrick et al. (2001) sier om *Mathematical proficiency*, vil eleven kunne ha en grunnleggende begrepsforståelse, kunne utføre enkle prosedyrer, jobbe strategisk, tenke logisk og kunne se matematikk på som noe fornuftig og verdifullt.

3.2 Design og metodisk tilnærming

Dette er en kvalitativ studie som «innhenter informasjon om virkeligheten gjennom ord eller språk» (Postholm & Jacobsen, 2021, s.89). Med tanke på hva jeg ville finne ut av og mitt forskningsspørsmål, så jeg på det som hensiktsmessig å bruke kvalitativ metode, for å kunne gå i dybden på et spesifikt tema. En kasusstudie ville gjøre at jeg kunne gå inn i klasserommet og selv møte elevene, komme nærmere innpå deres tankemåter og løsninger i arbeid med problemløsning. Jeg valgte å ikke ha kvantitativ studie, fordi det ville kunne gi meg mer generelle resultater og ikke den dybdekunnskapen jeg søker etter, ved å i praksis se hvordan elevene arbeider med oppgavene. Det vil si at jeg kan gå glipp av informasjon som ikke kan tallfestes. Uansett, vil det kreve mange respondenter for validiteten av resultatet, og vi snakker om en gruppe der svarprosenten eventuelt ikke vil bli så høy, eller at spørsmålene vil bli for kompliserte (Postholm & Jacobsen, 2021).

Observasjon skulle gjennomføres med en hel niendeklasse hvor elevene var i grupper. I arbeid i grupper får elevene brukt sin evne til å uttrykke seg matematisk, trekke kunnskapene deres sammen og forklare sine ideer. I grupper på flere elever vil det naturligvis kunne komme uenigheter og diskusjoner, men elevene vil på denne måten få trening i å snakke matematikk (Brekke et al., 2000). Elevene har erfart og deltatt i observasjonen, og videre skulle noen av de være med på gjennomføring av et gruppeintervju, og der svare på flere utdypende spørsmål fra observasjonen. Intervjuet vil gi svar på «hva» og «hvordan» fra observasjonen. Intervjuet vil gjøre de første beskrivelsene av hvordan elevene opplevde observasjonen (Postholm & Jacobsen, 2021).

3.3 Utvalg - Skolen og klassen

Veilederne mine for denne masteroppgaven, hjalp meg å få kontakt med en lærerutdanningsskole, altså en LU-skole, noe jeg ser på som en fordel da lærerne og elevene er vant til å ha studenter på skolen. For å hjelpe meg, fikk jeg en kontaktperson til å hjelpe meg med organiseringen for datainnsamlingen. Denne læreren var også lærer for klassen jeg observerte og eleven jeg intervjuet. Skolen var en middels stor ungdomsskole med 370 elever og 42 ansatte, og har flere ganger hatt lærerstudenter i praksis. Klassen jeg hadde var en niendeklasse med 20 elever på selve observasjonsdagen. Jeg kjente ikke denne klassen og fikk ingen informasjon om de, noe som kan være bra, da det kunne gi feilkilder for undersøkelsen, om jeg vet hvordan elevene er på forhånd. Hadde jeg visst hvilke elever som var svak- og sterkt presterende ville jeg kunne undervurdert og overvurdert elevene. Det var derfor en distanse mellom meg og elevene på skolen, og mye var derfor fremmed og jeg får et perspektiv fra sidelinjen (Postholm & Jacobsen, 2021). Det eneste jeg visste var at de ikke har hatt algebra siden åttendeklasse og ikke skulle ha det som et eget tema i niendeklasse. Dette kunne være en ulempe da de ikke husker like mye, med også fordel da jeg kan finne ut av hva de faktisk har kunnskaper om og hva de vet, og ikke hva de akkurat har pugget og husket til den siste matematikk prøven. Det blir derfor tydeligere hvilke kunnskaper de har med seg og om de klarer å bruke dette til å løse geometriske problemløsningsoppgaver.

3.4 Datainnsamlingsmetode og undersøkelsesdesign

For å samle inn data var det viktig at jeg hadde god oversikt over hvordan observasjonen skulle skje. Dette mener jeg er lurt da man alltid vil vite hva man skal gjøre. Likevel vil det komme uforutsigbare hendelser, og det vil ikke nødvendigvis gå som planlagt, noe jeg var klar over. Det kan også være ulempen med observasjon, og det kan føles som man ikke får tak i det materiale og dataene man trenge. Likevel vil ting som gå galt også være et data for studien.

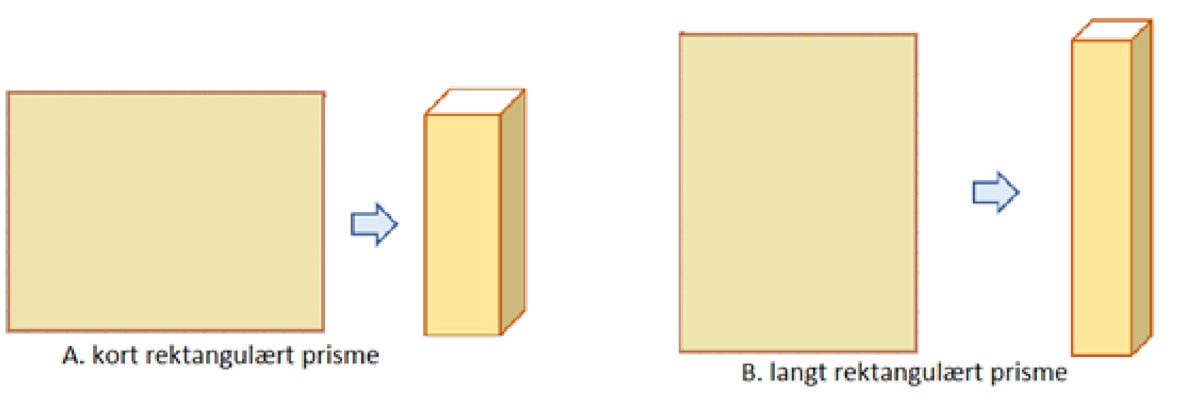
Med mitt forskningsspørsmål, var det behov for problemløsningsoppgaver, og det var nødvendig at disse oppgavene var gode, for at de skulle gi meg de verdifulle dataene. Derfra kunne jeg bruke disse oppgavene til å se hvordan de arbeider med oppgavene, hvordan de svarer, hvilke løsningsforslag de har og videre hvordan de oppfatter det. Jeg tenkte også at med intervju vil elevene kunne gi meg en dypere forklaring i hvordan de tenker, og jeg vil dermed få mer innsikt i deres strategier. Denne studien skal verken se på lavt- eller høy presterende elever, men alle typer elever i en niendeklasse. I en skoleklasse vil det alltid være ulike nivåer blant elevene, som betydde at jeg trengte oppgaver som alle elevene kunne klare å gi et svar til. Med LIST-oppgaver vil alle elevene på alle nivå kunne svare på oppgaven. En LIST-oppgave er altså oppgaver som har Lav Inngangsterksel og Stor Takhøyde (Nosrati, 2019). Her kan lavt presterende gi et svar og vil kunne føle på mestring i matematikk, samtidig som de høytpresterende elevene får en utfordring og har mulighet til å bruke mye av sin kunnskap. Oppgavene kan derfor utføres på flere ulike nivå, og man vil kunne se på hvilket nivå elevene presterer på.

3.5 Matematikkoppgavene

Ut ifra kompetansemålene for matematikk fra LK20, som er nevnt i 2.3.4, ville jeg finne oppgaver som kunne forvente at elevene hadde kunnskaper nok til å svare på oppgaven. Tiden i forkant hadde elevene allerede hatt om areal og volum, og kan derfor som ha kjennskap til «utforske og argumentere for formler for areal og volum av tredimensjonale figurer» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Studien trengte oppgaver som alle elever på alle nivå kunne gi et svar på, samtidig som de ville få utfordringer og bruke matematikkunnskapene sine. Den trengte oppgaver som ville se hvordan elever arbeider med volum. Av erfaring fra praksis og FoU-oppgaven, har jeg sett at LIST-oppgaver er verdifulle oppgaver, da elever som har vanskeligheter med matematikk klarer å svare på noe og «komme seg inn» på oppgaven, i tillegg til at elever som presterer høyt blir utfordret. Ulempen med LIST-oppgaver kan være at elevene ikke klarer helt å se at oppgaven kan gjøres på et høyere nivå enn det de vil gjøre. Den vil kanskje ikke vise hele potensiale til eleven og ikke vise hvor mye eleven faktisk kan. Ikke alle LIST-oppgaver vil sikre at alle elever vil kunne delta. Oppgavene som er brukt i denne studien ville nok ikke være en LIST-oppgave for elever på barnetrinnet. Alle LIST-oppgaver vil derfor ikke passe på alle mulige trinn. Det vil være nødvendig å se på om en LIST-oppgave er nettopp en slik oppgave for de trinnet man skal gjennomføre det på. Oppgaven bør altså vurderes godt i forhold til hva eleven har av kunnskaper og skal ha av kunnskaper. For meg er en LIST-oppgave en oppgave hvor alle elevene som deltar, opplever en form for mestring. Den vil gi elevene mulighet til utforskning og samarbeid med medelever. En god LIST-oppgave vil og kunne skape aktivitet, nysgjerrighet og undring blant elevene. I samarbeid med veileder, har vi sammen funnet LIST-oppgaver, som oppfylte nettopp disse kravene jeg hadde. To oppgaver og gruppeaktivitet som alle elevene kunne delta i og der elevene får bruk for forkunnskapene sine i matematikk. Popcorn-oppgaven og «volum av en boks»-oppgaven som blir brukt i denne oppgaven, er laget av mine to veileder og deres kollega (Alacaci et al., 2023)

3.5.1 Popcorn-oppgaven

I denne oppgaven skulle eleven sammenlikne volum av to prismer, begge brettet ut ifra et A4-ark, der den ene var brettet på langsiden og den andre på kortsiden. Den ene vil derfor være lav og bred og den andre høy og smal (se figur 3).



Figur 3: prisme A og B fra popkorn-oppgaven (Alacaci et al. 2023) (vedlegg 5).

Oppgaven sa: «Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B). A: Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? registrer gjettingen din ved å sette av en hake nedenfor. B: Hvorfor kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utføre den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen».
Elevene må i denne oppgaven sammenligne volumet til de to prismene, og får dermed kunne bruke forkunnskapene de har i volum og algebra.

Algebraisk løsningsforslag av «popcorn-oppgaven»:

Denne oppgaven kan besvares på ulike måter. Om jeg først tenker logisk, tenker jeg at prisme A vil ha størst volum, fordi den ha størst grunnflate. Grunnflaten kan vi si er «tom» eller det er ingen overflatearealet der, men det er likevel med i utregningen av volumet. Løsningen under er slik jeg ville løst oppgaven, både med prisme og sylinder. I løsningen bruker jeg for eksempel liten og stor h. Prisme A vil ha høyden med liten h fordi det er den laveste figuren og prisme B vil ha høyde med stor h fordi det er den høyeste prismen. V vil stå for volum av en figur, hvor for eksempel v_A er volumet til prisme A.

<u>Løsning prisme:</u>

Vi har prisme A og prisme B (se figur 3).

Grunnflaten G til prisme A: $G_A = s_A \cdot s_A$.

Grunnflaten G til prisme B: $G_B = s_B \cdot s_B$.

Volumet til prisme A kan uttrykkes: $v_A = G_A \cdot h_A = s_A^2 \cdot h_A$.

Volumet til prisme B kan uttrykkes: $v_B = G_B \cdot H_B = s_B^2 \cdot H_B$.

<u>Løsnings sylinder:</u>

Vi har sylinder A og sylinder B.

Sylinder A har radius $r_1 = \frac{H}{2\pi}$ og sylinder B har radius $r_2 = \frac{h}{2\pi}$. Videre kan volumet til sylinder A bli uttrykt slik:

$$v_A = \pi r_1^2 \cdot h$$

$$v_A = \pi \cdot (\frac{H}{2\pi})^2 \cdot h$$

$$v_A = \pi \cdot \frac{H^2}{4\pi^2} \cdot h$$

$$v_A = \frac{H^2 \cdot h}{4\pi}$$

Volumet til sylinder B vil bli uttrykt slik:

$$v_B = \pi r_2^2 \cdot H$$

$$v_B = \pi \cdot (\frac{h}{2\pi})^2 \cdot H$$

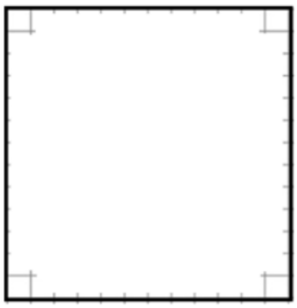
$$v_B = \pi \cdot \frac{h^2 \cdot H}{4\pi}$$

$$v_B = \frac{h^2 \cdot H}{4\pi}$$

3.5.2 «Volum av en boks»-oppgaven

I denne oppgaven skal man finne ut hvor stort kvadrat man måtte klippe av fra hvert hjørne, for at det skulle bli en boks med størst mulig volum (se figur 4). Oppgaven lød som følger: «Et ark har like lange sider på 12 cm. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en åpen boks. A: Hvilken størrelse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger. B: Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?»

Saks og ark lå på kateteret om elevene ønsket å bruke det til å utforske oppgaven og teste ut teorier de har.



Figur 4: Kvadratet fra «Volum av en boks»-oppgaven (Alacaci et al. 2023) (vedlegg 6).

Løsningsforslag av «Volum av en boks»-oppgaven:

<u>A-oppgaven</u>

Alle sidene er 12 cm og n er antall centimeter som klippes fra hver side. Derfor må $n =< 0, 6 >$. Tar man bort 6cm fra hver side vil det bli $12 - 2 \cdot 6 = 0$ og volumet blir null. Om $n = 0$ vil volumet bli $12 - 2 \cdot 0 = 0$.

$$(12 - 2n)^2 n = (144 - 4n + 4n^2)n = 4n^3 - 48n^2 + 144n$$

$$A = (x, n) = (x - 2n)^2 n = (x - 2n)(x - 2n)n$$
$$= (x^2 - 2xn - 2xn + 4n^2)n = x^2 n - 4xn^2 + 4n^3$$

$$A = (x, n) = x^2 n - 4xn^2 + 4n^3$$
$$x \in [4, 6, 8, \dots]$$

3.6 Gjennomføring

3.6.1 Forarbeid

Prosessen før gjennomføringen av observasjon og intervju opplevdes lang, da det var flere valg som skulle tas i forveien. Datainnsamlingen ble satt i gang så fort NSD-søknaden (se vedlegg 2) ble godkjent. Jeg hadde stadig kontakt med læreren for klassen angående gjennomføring og tid for gjennomføring. Vi rakk ikke ha noe formelt møte før verken observasjonen eller intervjuet, men jeg fikk forklart hva jeg skulle og hvordan, i tillegg til at han fikk tilsendt et dokument for undervisningsopplegget (se vedlegg 4).

3.6.2 Observasjon

Observasjonen ble gjennomført i en dobbelttime med matematikk mot slutten av dagen. Elevene hadde på forhånd fått med seg et informasjonsskriv (se vedlegg 1) hjem til foreldre/foresatte, som skulle skrives under på. De visste dermed at de skulle bli observert. Min rolle i observasjonen var fullstendig deltaker, som betyr at forskeren er en del av det som observeres og kan for eksempel observere egen undervisning, slik jeg gjorde (Postholm & Jacobsen, 2021). Jeg var svært aktiv i observasjonen og gikk rundt i klasserommet for å stille spørsmål til elevgruppene og observere hva de diskuterer. På forhånd hadde jeg notert meg ned hvordan jeg skulle gjøre observasjonen. Det var en vikarlærer med meg og var med på å diskutere med elevene. Vi brukte «Samtaletrekk» av Wæge (2014) som utgangspunkt i hvordan vi skulle stille spørsmål og føre en matematisk diskusjon med elevene. Klassens lærer var borte fra jobb den dagen.

Observasjonen begynte med at jeg presentere meg selv og hadde en kort introduksjon, før jeg startet med popcorn-oppgaven. Jeg viste fram de to prismene jeg hadde brettet av et A4 ark på forhånd, hvor den ene var brettet på langsiden og den andre på kortsiden. De får så spørsmålet: "Hva slags figur er dette?". Flere av elevene sier da "Et prisme". De får så beskjeden: "Uten å snakke med sidemannen, hvilken av prismene mener du har størst volum? Den høye, den lave eller er de like store? Tenk for deg selv". For å finne ut hvor mange av elevene som tenker hva, ber jeg alle lukke øynene for å så ta en avstemning med håndsopprekning, og jeg teller antall elever. Klassen pleier å snu seg til hverandre når de samarbeider, og derfor gjorde jeg dette her også. Elevene flyttet seg til gruppene for å starte på oppgavene. Fire av gruppene hadde tre elever og to av gruppene hadde fire på en gruppe.

Før jeg startet på «Volum av en boks»-oppgaven, fikk elevene en kort pause. Oppgaven ble forklart nøye slik at elevene forstod oppgaven god. Her spurte jeg ikke noen spørsmål i forveien slik som i den forrige oppgave. De ville allerede være godt «varmet opp» for oppgaven og fått frisket opp matematikkunnskaper. Elevene var i de samme gruppene som sist. Igjen gikk jeg og vikarlæreren rundt, snakket og brukte «Samtaletrekk» (Wæge, 2014) for å hjelpe elevene med å starte en matematisk diskusjon, og noterte de viktige tingene jeg fikk med meg.

I begge oppgavene hadde elevene mulighet til å bruke hjelpemidler slik som saks, ark, kalkulator og skrivesaker, men ikke internett og de kunne ikke snakke med andre grupper. Jeg og vikarlæreren som var med, hjalp de minst mulig med oppgaven for at jeg i størst mulig grad kunne finne ut hvordan nettopp de vil løse oppgaven. Observasjonen som er blitt gjort, kan gi intervjuet mer verdi, da det kan gi en mer utfyllende informasjon. Det vil gjøre at intervjuet og observasjonen kan komplimentere hverandre (Postholm & Jacobsen, 2021).

3.6.3 Innsamling av oppgaver

Når oppgaven ble avsluttet, ba jeg elevene å skrive tydelig hvilken gruppe de var og la det ligge på pulten når de gikk for å ha friminutt. Dette var for at jeg selv kunne kontrollere arkene og samle de inn oversiktlig. Spesielt med «Volum av en boks»-oppgaven, lagde alle gruppene flere bokser. For å passe på at jeg hadde riktige bokser til riktige oppgave samlet jeg inn disse selv. Om elevene selv skulle levert elevbesvarelsene (se vedlegg 7), kunne det ha hendt at bokser hadde blitt mistet eller kommet på feil plass

3.6.4 Utvalg til intervju

Ut ifra hva jeg observerte i studien, kunne jeg vurdere hvilke av gruppene jeg ville velge å ha med til intervju. Jeg ville ha med meg to grupper, slik at jeg kunne få to ulike perspektiv. Noen av eleven hadde flere spennende tanker og løsninger, som jeg ville spørre mer i dybden om i intervjuet. Det var frivillig å bli med, så elevene jeg planla å intervjue hadde ikke lenger lyst. Derfor fikk jeg med meg fem jenter som hadde lyst til å være med. De ble tatt ut av undervisningen, for å så gjøre intervjuet på et grupperom.

3.6.5 Lydopptak

For denne studien ble det bestemt å bruke lydopptak kun under intervjuet. Det ble ikke brukt under observasjon, da jeg så for meg at det ville være mye mer å transkribere enn det som var nødvendig, og at det ville være greit mulig å kun observere på vanlig vis. Ved å ta lydopptak av på intervjuet, kan jeg lett gå inn å se på transkripsjonen for å se tilbake på hva forskningsdeltakerne sa. Fordi det ikke ble brukt tid på å skrive ned hva deltakerne sier, kan det heller brukes tid på å legge merke til kroppsspråk og hva de eventuelt illustrerer og forklarer på et ark, som kan være viktig informasjon og data for forskningen.

3.6.6 Intervju

Intervjuet foregikk ansikt til ansikt med informantene. Samtalen var muntlig og ble tatt opp med en lydopptaker, og videre blitt transkribert. Innenfor et konstruktivistisk perspektiv vil vi kunne kategorisere intervjuet som et fenomenologisk intervju. Her transkriberer forskeren og kan bruke dokumenter og observasjoner som datakilde. Denne typen intervju bruker ofte observasjon for å se tydeligere hvordan deltakerne erfarer fenomenet gjennom kroppsspråket. I intervjuet er målet å få svar på "hva" og "hvordan" (Postholm & Jacobsen, 2021). Hva gjør elevene og hvordan gjør de det?

Intervjuet var semi-strukturert, hvor jeg hadde spørsmål klare på forhånd, men ikke noe jeg var låst til. Verken rekkefølgen eller stille nøyaktig de forberedte spørsmålene. Jeg ville ha muligheten til å kunne stille spontane spørsmål. Siden jeg ikke visste hva elevene ville svare, kunne jeg heller ikke vite hvilke spørsmål jeg burde stille. Elevene kan dermed også komme med andre temaer og problemstillinger, som jeg ikke kunne forutse (Postholm & Jacobsen, 2021). Et kvalitativt intervju pleier å være mye mindre strukturert enn i kvantitativ. Her vil det være mer fokus på den som blir intervjuet sine perspektiver. Man vil også ofte løsrive seg fra intervjuguiden og stille ulike oppfølgingsspørsmål til svarene som blir gitt (Bryman, 2016).

3.7 Analyse og analyseverktøy

For bearbeiding av datamateriale, hentet jeg inspirasjon fra analyseverktøyet Grounded Theory, der forskeren går fra empiri til teori, altså induktiv metode. Forskeren går ut i feltet uten noe særlige forventninger og åpent sinn, og videre får oversikt og struktur på datamaterialet. Det er fra dette teoriene blir dannet (Postholm & Jacobsen, 2021). I Grounded Theory vil teorier «dannes ut ifra det som observeres» (Postholm & Jacobsen, 2021, s.101). Det er viktig å nevne at jeg gikk deduktivt til verks for datainnsamlingen, med en del teori knyttet til algebraisk og aritmetisk tenkning, men i etterkant har forsøkt å omstille meg og se på datamaterialet med «nye» øyne. Jeg har mer eller mindre brukt Grounded Theory som en tankeprosess, og bruker de elementene som vil hjelpe med analysering av datamateriale. Analysestrategien har gitt tydelighet på hva som har blitt funnet i undersøkelse, da det i startet var uklart og forvirrende hva funnene er.

For dette analyseverktøyet, er det ifølge Glaser & Strauss (1967), viktig at kategoriene som blir brukt passer inn i det som studeres. Teorien skal gi tydelige kategorier, som er meningsfulle og relevante, og som er i stand til å forklare studien. Videre skriver de at meningen er ikke å komme med ren fakta, men å generere teori. Den som analyserer kan justere teorien kontinuerlig i prosessen, for at den skal passe inn i datamaterialet, men at den likevel skal bli lagt til på et fornuftig tidspunkt i analysen. For å kunne samle inn koder fra data, må teori først testes ut i prosessen for datainnsamlingen, for å så generere denne teorien. Derfra kan forskeren analysere datainnsamlingen og kode, og så bestemme hva slags data, og hvor han skal finne det. Dermed kan forskeren utvikle en teori ut ifra dette. I starten er det nødvendig at forskeren er «teoretisk sensitiv», for at det kan formuleres en teori som passer datamaterialet som kommer fram. Forskeren vil kunne utvikle forskjellige kategorier og etter hvert «miste» sin «teoretiske sensitivitet», fordi man vil da forplikte seg til den spesifikke teori, og ser ikke etter noe ny. Med den teorien man har kommet fram til, vil man bruke til å teste og se ut ifra (Glaser & Strauss, 1967).

En ting som er verdt å nevne, er det med en forhåndsbestemt datainnsamlingsmetode. Dette kan føre til at den som analyserer kan komme på avveie av det som analyseres og i en irrelevant retning for studien. Det vil og kunne gjøre at det avdekkes uventede og uforutsette hendelser hos de som deltar i undersøkelsen, men det vil komme et tidspunkt der det ikke vil være rimelig å endre innsamlingsmetoden eller designet av studien. Leseren av studien vil kunne anse studien som forstyrret og kontrollert av forskerens upersonlige regler, om oppgaven endres for å møte disse uventede hendelsene i studien (Glaser & Strauss, 1967).

Det som gjøres litt ulikt i denne studien i forhold til Grounded Theory, er at det har ikke blitt testet ut teori for å så se på hva slags data som skal samles inn, og jeg har derfor ikke vært «teoretisk sensitiv». Mye av teorien var allerede på plass før datainnsamlingen, og det betyr at jeg har samlet inn data basert på teorien jeg hadde fra tidligere. Heldigvis var det det relevant for studien. Ny teori har blitt lagt til ut ifra kategoriene som ble utviklet fra kodingen. Fordi jeg hadde teori fra før og datainnsamlingsmetoden var forhåndsbestemt, vil dette ifølge Glaser & Strauss (1967) kunne være risikabelt for studien. Likevel ser det ut til at dette heller har styrket denne studien mer enn det har svekket, fordi det har gjort funnene mer tydelig å avklarende.

3.8 Validitet og relabilitet

Validitet

Validitet til en studie vil være om den er meningsfull og om den svarer på problemstillingen og forskningsspørsmålet (Drost, 2011). Oppgavene som er brukt i denne studien hjelper meg med datainnsamling for nettopp mitt forskningsspørsmål: *Hva karakteriserer en gruppe 9.trinnselevers strategier og argumentasjon med utforskende volumoppgaver*? Mine veiledere, også matematikk didaktikere, har bidratt med å foreslå og velge ut oppgaver og vi har sammen diskutert en eventuell effekt av dem og tidligere erfaringer med bruk av de. Matematikkoppgavene gir elevene mulighet til å bruke ulike ferdigheter og kunnskaper, da de kan svare på ulike måter og nivåer. Funnene i studien vil også gi en indikator på hva elevene strever med, og hva matematikkundervisningen trenger å rette fokuset mot. Det vil ikke være noen fasit fra denne studien, da det bare blir sett på en skole klasse, men kan forhåpentligvis være en oppsiktsvekker for andre. For å passe på studiens validitet, valgte jeg å observere en klasse jeg ikke hadde kjennskap til fra før, og dermed visst jeg ikke noe om hvilket nivå elevene var på. Dette var for å ikke forhåndsdømme eller at det jeg vet om de fra før av vil ubevisst påvirke hvordan jeg analyserer elevbesvarelsene.

Relabilitet

Drost (2011) skriver i sin artikkel at reliabilitet er når målingene kan gjentas med andre personer, andre anledninger, andre forhold og man vil få ganske like resultater. Det vil være konsistente målinger uansett variasjonene i forholdene og resultatene vil inneholde det samme. Om observasjonen hadde blitt gjentatt, kunne det kommet fram nye og tydeligere funn, men fordi jeg ikke gjør et nytt eksperiment med det samme utvalget, vil det være vanskelig å vite hvilke andre utfall det ville kommet fra det. Fordi dette er en kvalitativ studie, og det forskes på elever i felt, vil det være flere ting som gjør det vanskelig å tolke relabiliteten til studien.

Jeg som forsker kan påvirke forskningen med min subjektivitet og egenteori. Fordi jeg er deduktivt i fremgangen i starten av prosessen, kan det være at jeg som forsker har hatt en baktanke om hva jeg tenker elevene skal svare og «vil» de skal svare. Det kan være at jeg i større grad enn tenkt, har prøvd å føre elevene til mitt løsningsforslag, da jeg ville prøve å se om de klarte å bruke algebra for å løse oppgaven. Elevene har kanskje ikke den kunnskapen til å svare det jeg ønsker at de skal svare eller den retningen jeg vil de skal svare. Det kan og gjøre at de ikke løste oppgavene akkurat slik de de hadde gjort uten min påvirkning.

Gruppene kan og ha påvirket hverandre ved at de har overhørt hva andre grupper har gjort eller gått bort og spurt, uten at jeg har lagt merke til det. Samme morgning som observasjonen, fikk jeg beskjed om at læreren til klassen ikke kom på observasjonen, og det var derfor en vikarlærer der, men som ikke kjente klassen. Jeg kunne ikke utsette det, og utførte det derfor denne dagen, selv om det ikke ble utført helt som planlagt. Det gjorde at jeg måtte bruke mye tid til klasseledelse og organisering av observasjonen. Hadde læreren til klassen vært til stede, kunne jeg i større grad gjort det som var planlagt, nettopp å observere samtalen læreren hadde med elevene og komme med tilleggsspørsmål. Det var planlagt at jeg skulle være deltaker-som-observatør og ikke fullstendig deltaker, som jeg ble (Postholm & Jacobsen, 2021). Likevel, vil ikke dette nødvendigvis ha påvirket funnene i studien. Spørsmålene jeg stiller i intervjuet ser jeg i etterkant at har muligens forvirret elevene, som enten kan være fordi jeg formulerer meg problematisk eller at de ikke har nok kunnskaper til å kunne forstå hva jeg vil med spørsmålet.

Denne studien starten med en interesse for å finne algebraisk og aritmetisk tankegang hos elevene når de skulle løse geometriske oppgaver, men det viste seg at svaret ble oppsiktsvekkende, da de gjorde dette i svært liten grad. For å se funnene fra datamaterialet tydeligere, var det og brukt elementer fra Grounded Theory til stor hjelp. Koding har vært med på å finne kategorier, og videre teori som kunne forklare disse funnene. Dermed drøfte og analysere funnene ut ifra teorien.

Refleksjoner rundt undersøkelsens kvalitet

I forskning er det selvklart slik at ingen kan tvinges til å delta. Jeg hadde før intervjuet sett for meg hvilke grupper jeg skulle intervjue, fordi de ut ifra svarene deres i observasjonen hadde interessante svar. Når det var tid for å ha intervjuet, hadde klassen kroppsøving, noe som var litt uheldig. Noen av elevene jeg hadde planlagt å ha med i intervjuet, ville ikke lenger være med og ønsker heller å være med i kroppsøvingstimen. Jeg spurte så hele klassen om noen ville bli med frivillig på intervjuet, og fem jenter rakk opp hånden. Disse jentene opplevde jeg som høyt- og middels presterende elever. Ved å ta lydopptak får man med seg alt som blir sagt, men likevel kan dette bli mistolket. Elevene som deltok i intervjuet snakket og litt over hverandre, som kunne gjøre det vanskelig å høre hva alle sa. Det var og utfordrende å høre forskjellen på stemmene til jentene, men jeg lærte meg å høre hvem som var hvem under skrivingen av transkripsjonen.

3.9 Forskningsetiske problemstillinger/etiske betraktninger

I god tid før gjennomføringen, søkte jeg om tillatelse fra NSD (Norsk senter for forskningsdata, nå Sikt) for å kunne gå ut i skolen og forske på elever. Jeg skulle og ta lyd-opptak av de jeg skulle intervjue og ved lyd-opptak under et intervju er det viktig å ta vare på anonymiteten til deltakerne. En utfordring med at det ble brukt Grounded Theory, er at jeg har lest en del teori og litteratur i forveien av observasjonen og intervjuet. Dette kan ha påvirket datainnsamlingen og gjort at jeg kan ha stilt spørsmål, og ubevisst stilt spørsmål som vil svare på det jeg «vil» de skal svare. Det kan være at jeg i for stor grad har prøvd å få elevene til å svare på en algebraisk måte, slik som i løsningsforslaget mitt, og ikke latt de svare uavhengig av hva jeg mener er riktig.

4 Resultat

I dette kapittelet presenteres resultatene av elevbesvarelsene (se vedlegg 7), som kom fram i observasjonen av gruppene i klassen og i intervjuet. Det vil gjennomgås hva elevene sa og snakket om, hva de eventuelt regnet ut og hva de svarte på oppgavearket til slutt. Først vil resultatene til gruppene fra popcorn-oppgaven bli presentert, og videre resultatene fra «volum av en boks»-oppgaven.

4.1 Fremstilling av gruppenes løsningsstrategier

4.1.1 Popcorn-oppgaven

Denne oppgaven startet med å finne ut hvor mange av elevene som tenker hva. Jeg spør først: "Hva slags figur er dette?". Flere av elevene sier da «Et prisme». Elevene får beskjed om å lukke øynene for å så ta en avstemning med håndsopprekning, og jeg teller antall elever. Jeg spør klassen: De får så beskjeden: «Uten å snakke med sidemannen, hvilken av prismene mener du har størst volum? Den høye, den lave eller er de like store? Tenk for deg selv». Av 20 elever som var til stede denne dagen, svarte 6 stykk at den lave prismen er størst og 14 stykk mener begge prismene er like.

Gruppe 1 – Pernille, Adam og Per

Det var Pernille som bidro mest og guttene "hang seg på" det hun sa og mente. De mente først at begge prismene var like store. Senere byttet de mening til «den lave». Når jeg spurte hvorfor, sa Pernille at hun regnet det i hodet sitt og da var den litt større. Jeg spurte Adam og Per om de var enige i det hun sa. Det var de, kun fordi hun sa det. Jeg spurte Pernille: «Du sa du regnet ut noe? Hva regnet du? Volumet, men jeg vet ikke om det er riktig». På oppgavearket de fikk svarte gruppen: «A og B har like mye plass fordi arkene er like store. Alle andre sier de er like store så da tror vi også det».

Gruppe 2 – Jacob, Markus og Thomas

På denne gruppen mente de tre guttene først at volumet er likt på begge fordi arkene er helt like. "Du bretter de like mange ganger, bare feil vei". Men så begynte de å skifte mening og ville regne ut. De sa og "Popcorn har forskjellig form og størrelse og de vil ha mellomrom mellom dem. Antall vil da variere". De brukte linjalen til å måle lengden og bredden på modellen på arket og regnet ut dette. De kom da fram til at den lave har mest volum. “Man finner ut noe annet når vi regner ut”.

Gruppe 3 – Ane, Kristian og Isak

Elevene på denne gruppa var svært lite delaktige, og det var vanskelig å få de til å komme i gang med oppgaven. Derfor måtte jeg spørre de flere spørsmål for å få noe som helst svar fra dem. Når jeg spurte hva de først tenkte, sa svarte Kristian raskt at han tenkte de var like store og hadde like mye volum. Isak sa «sikkert riktig, vet ikke». Ane mente hun var enig, men visste ikke hvorfor. Jeg ba Ane gjenta det han Kristian sa: «ja, den ene er høy og tynn og den andre er bred og lav». De målte lengdene på A4 arket og vurderte å regne ut volumet av sylindrene for å sjekke, men det sa de ikke gadd dette. På oppgavearket svarte de: «Det er like mye plass i prismen fordi den ene er kort og brei og den andre er høy og tynn».

Gruppe 4 – Emma, Pia, Sara og Thea

Her var det litt uenigheter blant de fire jentene på gruppa. Emma, Pia og Sara er veldig sikre på at prismene er like store, nettopp fordi arkene er like store. Thea mener den lave fordi hun sier den har plass til mer, og står fast ved det, selv om hun ikke hadde noe bestemt forklaring på det. Jeg spør jentene om det hadde vært noe forskjell om det var små frø i stedet for popcorn, men de mener det hadde vært det samme. Emma, som mener de er like, forklarer hvordan hun tenker: «Hvis du har to glass, det ene er høyere og smalere, og det andre er bredere og lavere, da får du jo det samme. Den høye er jo tynnere». Thea er fortsatt uenig, så jeg ber hun prøve å forklare mer. «Fordi den er breiere. Kun derfor». Alle jentene er veldig bestemt på svaret sitt, men uten å egentlig ha noen tydelig forklaring på hvorfor. På oppgavearket svarer de: «Noen mener at A får plass til mere fordi den er mer bred. Noen andre mener at A og B får plass til like mye fordi arkene er like store. Thea tenker A. Emma, Pia og Sara tenker at A og B har plass til like mye».

Gruppe 5 – Lise, Johan og Lars

Disse elevene ble jeg fortalt var faglig sterke, men på denne gruppen måtte jeg også være litt streng med dem, siden de plutselig kunne reise seg å gå til en annen gruppe eller snakke om helt andre ting. Jeg fikk uansett noe svar fra de, og her også mente alle tre at prismene var like store, fordi de begge var lagd av et A4 ark. «De er bretta like mange ganger, bare snudd litt». Jeg spør «har dere prøvd å tenke noe annet?». «Vi kommer bare fram til det samme. Det er like mye ark på begge, det er ikke noe mer eller mindre ark. Da burde de holde like mye». Litt senere begynte de å måle arkene og regne ut volumet, som gjorde at de fant ut at den lave prismen har mest volum. På oppgavearket svarte de: «A: vi tenker begge har like stort volum fordi begge er lagd ut ifra en like stor flate. B: sjekke». Med «sjekke» vil jeg tro de mener at de sjekker svarer ut ved å regne ut.

Gruppe 6 – Bendik, Mads, Anna og Amalie

Allerede i starten vipper de mellom om begge prismene er like store eller om den lave er størst. Bendik sier at «den korte er 5 og lengden er 10, 5 ganger 5 blir 25». Altså at bredden på prismet er 5cm og høyden er 10. Dette tror jeg var et eksempel han hadde for å forklare hvordan han tenker. Bendik spurte om han kunne måle prismene jeg viste frem i starten av timen. Han måler de og regner ut volumet på både det høye og lave prismet. Han forklarte slik om det korte prismet: «21cm er bredden og deler den på 4 for å finne hva en side er. Så gange det tallet med seg selv for å finne arealet av grunnflaten og så høyden». Dette gjorde han og med det høye prismet, bare at er bredden på den korte siden av A4 arket. På oppgavearket skrev de: «A: vi tror figurene er like store fordi det er brukt det samme arket, men det kan også være at A er størst fordi den øverste flaten er større på den enn på B. Vi ender på at A er størst fordi vi prøvde å regne ut volumet, og så endte vi opp med det. Vi fant hvor store hver av sidene var og ganget $h \cdot b \cdot d. 5 \cdot 5 \cdot 10 = 250, 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 15 = 93{,}75$. Jeg velger å tro at med d-en mener de dybden eller lengden.

4.1.2 «Volum av en boks»-oppgaven

Gruppe 1 - Pernille, Adam og Per

Gruppa begynte med å klippe ut et kvadrat på 12cm, for å så klippe 1cm kvadrat av hjørnene. Jeg spør hvorfor de begynner med å klippe 1cm, og det var fordi det var lite, som alle var enige i. De klipper ut flere kvadrat for å se hva som vil skje da. De klipper en med 2cm og regner så volumet av begge de åpne boksene de nå har fått. De finner så ut at den med 2 cm klippet bort fra hjørnene har størst volum. De skriver på oppgavearket: «Vi lagde fire bokser den ene hadde 100 i volum og den hadde 1cm med papir opp, men så klippet vi en med 4 cm opp og da fikk vi 44 i volum, men så klippet vi en med 2cm opp og da ble volumet 128»

Gruppe 2 – Jacob, Markus og Thomas

Elevene lager kun to bokser, en med 2 cm klippet bort fra hjørnene og den andre med 4 cm. De lager senere en med 0,5 cm for å «begynne lavt». De tenker at den er lavest og vil da ha mindre papir klippet vekk. De skriver på oppgavearket «først tokk vi av 0,5cm på hjørnene. Brettet den opp på hver side så regne volum $11 \cdot 11 \cdot 0{,}5 = 60{,}5$».

Gruppe 3 – Ane, Kristian og Isak

Gruppa slet med å forstå oppgaven, og jeg prøvde dermed å forklare uten å si for mye til dem. Kristian spør «Må man klippe ut 12 cm da?». «Ja, for eksempel», sier jeg. De klipper tre forskjellige kvadrat, og klipper hjørner på 1 cm, 2 cm og 3 cm. De finner ut volumet av boksene og skriver på oppgavearket «hvis du får vekk 2cm på hver side får du 128. Så det vil si at det er det høyeste tallet du kan få».

Gruppe 4 – Emma, Pia, Sara og Thea

Jentene starter raskt med å klippe i arket for å lage en boks, hvor de klipper en med 1cm klippet bort fra hjørnene og en med 2cm. Thea mener fort at det er den med 2cm klippet av på hvert hjørne har størst volum. «Den korte får bare et tynt lag, den andre har høyere vegger». De finner lengden, bredden og høyden på boksene de har lagd. Da finner de ut at den hvor de har klippet et 2cm kvadrat laget størst volum. «Vi har funnet ut at jo mere du klipper, jo større volum blir det» skriver de på oppgavearket.

Gruppe 5 – Lise, Johan og Lars

Lise spør først «hva er et likesidet kvadrat? Er det sånn boks?». Gruppa klipper ut fire bokser. En med 1cm, 1,5cm, 3cm og 4cm, og regner ut volumet på alle. De svarte på oppgavearket: «Vi prøvde oss fram med ulike mål på hvor mye vi klippet inn. Vi prøvde først 4cm, så 3cm, så 1,5cm og til slutt 1cm. Det som ga størst volum var 1,5 cm. Da fikk vi $121{,}5\ cm^3$».

Gruppe 6 – Bendik, Mads, Anna og Amalie

Denne gruppa også forsto ikke oppgaven helt. Jeg sier de må klippe et like stort kvadrat på hvert hjørne. «Må man ikke klippe minst mulig da?» spør Mads. «Hva skjer med høyden om du klipper mer?» spør jeg. Da sier Bendik «den blir høyere. Men det er umulig å finne ut hvem som er størst. Det er veldig mange kombinasjoner med tre sifre». Jeg synes Bendik har noen interessante tanker og ber han forklare mer. «Du må kombinere lengde, bredde og høyde. Man må finne den beste kombinasjonen. Hvor du for eksempel har 15, er det mange forskjellige måter å få det på». De regner etter hvert ut volumet av de to boksene, den ene med 4cm og den andre 2 cm. Elevene sier da at det er den med 2cm som gir størst volum. «Det blir mindre jo mer vi gjorde. Når blir det mindre når figuren blir høyere». På oppgavearket sier de «vi tror at det bli mest volum når vi klipper et kvadrat på $2 \cdot 2cm$ fordi det var mindre volum på $1 \cdot 1$ og mindre på $3 \cdot 3$».

4.2 Oppsummerende resultat av elevbesvarelsene

I popcorn-oppgaven viser det seg at alle gruppene starter med å si at prisme A og B er like store, bortsett fra Thea på gruppe 4, som den eneste som var veldig bestemt på at prisme A var størst. Ingen av elevene mente at prisme B er størst. Gruppe 3 og 4 konkluderer med at prisme A og B er like store, men disse gruppene prøvde ikke å regne ut noe. De andre gruppene og Thea fra gruppe 4 konkluderer med at det er prisme A som har mest volum. Det alle gruppene gjorde likt, var å klippe ut en eller flere bokser.

I oppgaven «volum av en boks», mente gruppe 1, gruppe 3, gruppe 4 og gruppe 6 at man må klippe et kvadrat på $2\ cm \cdot 2cm$ fra hvert hjørne av kvadratet på 12 cm, for å få størst mulig volum. Likevel mener gruppe 5 at å klippe bort 1,5 cm vil gi størst volum, ut ifra de tallene de testet ut. Gruppe 2 konkluderte med 0,5 cm, selv om de prøvde med flere ulike tall. De mente altså at den laveste ville ha mindre papir klippet vekk, og dermed mer volum. Felles for begge oppgavene var at ingen av gruppene ga noe formell forklaring eller argumenterte for hvorfor de fikk det svaret de fikk. Kun ut ifra det de regnet ut kunne de se hvem som har størst volum.

4.3 Intervjuet

Intervjuet ble holdt på et grupperom, når resten av klassen hadde gym, og ble transkribert i etterkant. Transkripsjonen (se vedlegg 8) viser hele samtalen med jentene og tings som skjedde underveis. De fem jentene som deltok, fikk spørsmål fra intervjuguiden (se vedlegg 3) og andre spørsmål som passet svarene deres.

5 Analyse

I dette analysekapittelet vil datamaterialet bearbeides gjennom analyseverktøyet «Grounded Theory», som på norsk blir omtalt som grunngitt teori (Postholm & Jacobsen, 2021). Teorien fra kapittel 2 vil bli brukt for å analysere datamaterialet fra observasjonen og intervjuet. Analysen vil hjelpe med å finne et svar på forskningsspørsmålet.

5.1 Koding av datamateriale

For å kode materiale, har viktige og interessante ord, sitat og utregninger blitt notert. Dette er ord som vil beskrive hva og hvordan elevene tenkte og hva de gjorde. Ordene, sitatene og utregningene har derfra blitt sortert i temaene algebraiske begreper, utførelser og utsagn, aritmetiske begreper, utførelser og utsagn, og geometriske begreper, utførelser og utsagn. Med algebraiske, aritmetiske og geometriske begreper mener jeg begreper og uttrykk som typisk kan kategoriseres innenfor en av disse tre. Noen av begrep og uttrykk vil kunne komme i mer enn ett av temaene. For eksempel vil ord som eksponent og formel forekomme i temaet algebraiske begreper. Gange, kommatall og prosent vil havne i aritmetiske begreper, og A4-ark, overflate og volum ses i kategorien geometriske begreper. Når det gjelder algebraiske, aritmetiske og geometriske utførelser, menes det noe som elevene gjør eller forslag de har kommet med, slik som å regne ut. For eksempel at elevene sier eller bruker $lengde \cdot bredde \cdot høyde$ for å finne fram til svaret eller sier det som et forslag. Dette vil tematiseres i algebraisk utførelser, da det her er snakk om formel og variabler. Aritmetiske utførelser vil være utregninger uten generalisering og variabler i formler, men heller utregninger som $2cm \cdot 2cm$. Geometriske utførelser vil være klippe, tegne og måle. Med algebraiske utsagn menes noe elevene har sagt, som for eksempel «kombinere lengde, bredde og høyde», da eleven tenker på kombinasjonen av variabler. Når det snakkes om aritmetiske utsagn, vil det si noe eleven har sagt som vil sees på som en aritmetisk tanke. Et geometrisk utsagn vil kunne være «brette like mange ganger» og «like store», altså noe som handler om det visuelle. Utfordringer og konflikter er et tema i kodingen som vil innebære noe elevene synes var vanskelig, noe som demotiverte de, og usikkerheter, som vil kunne påvirke svarene deres, slik som «husker ikke», «vet ikke» og «skjønner ikke»

In vivo koder	Tema	Kategori
Algebra, generell formel, ABC, formel, eksponent, generell formell,	Algebraiske begreper	Algebraisk tenkning
$Lengde \cdot bredde \cdot høyde$, $\pi r^2, omkrets \cdot lengde, x \cdot y, a \cdot b, side \cdot side,\ kat + kat = hypotenus$, ABC	Algebraiske utførelser	
Utregning, «kombinere lengde, bredde og høyde», mange kombinasjoner av sifre, mange kombinasjoner med sifre, antall kan variere, vise med noen tall, finne beste kombinasjonen	Algebraiske utsagn	
Likhet, tall, gange, kommatall, prosent, tallene, «to- tallet», det dobbelte, regnet i hodet, for lite, begynner lavt, mindre jo mer vi gjorde, mindre når figuren blir høyere, ^2	Aritmetiske begreper	Aritmetisk tenkning
Endre mening, $2cm \cdot 2cm$, gange med seg selv, $2 \cdot 5 \cdot 2$	Aritmetiske utførelser	
Prøvde, prøve oss fram, dele langsiden på to,	Aritmetiske utsagn	
Pytagoras, geometri, trekanter, likhet, trekant, kongruens, boks, prisme, A4-ark, overflate, toppen og bunnen, lengde, volumet, firkant, sylinder, areal, radius, sidene, sirkel, omkrets, boks, diameter, kortsiden, volumet av sylinder, bredde, lengde, grunnflate, kvadrat, centimeter, tallene, bredden, korte siden, likesidet trekant, lavest, annerledes, ser større ut, halvparten,	Geometrisk begreper	Geometrisk tenkning/visualisering

større volum, størrelse, ikke så mye forskjell, litt forskjell, mye større, radius er større, større volum, den lave, arkene er helt like, forskjellig form og størrelse, mellomrom, høy og tynn, lav og bred, like store, like mye ark, holde like mye, det høyeste tallet du kan få, tynt lag, høyere vegger, kvadrat, klippe mer, A3-ark, blir høyere		
Linjal, modell, saks, figurene, måle, klippe ut, tegne, tegne strek, brette like mange ganger, regne ut volum, klippe bort, lage bokser, klippe i arket, finne sidelengdene, uenig, teste ut, klippe ut, klippe hjørne, klippe minst mulig, klippe mer, klippe flere kvadrat, regne ut volum, lage bokser	Geometriske utførelser	
Prøve oss fram, begge var like, toppen og bunnen, samme ark, brette ut arket, teste ut, peke, brette like mange ganger, sjekke, like store, like lange, den er rundt, ser litt større ut, klippe minst mulig, jo mer du klipper, jo større volum, ulike mål, finne sidelengdene,	Geometriske utsagn	
Endre mening, like store, uenigheter, hvorfor, hvordan, kjedelig, vanskelig, prøve, husker ikke, vet ikke, glemt, skjønner ingenting, skjønner ikke, hva vil skje, vanskelig å forstå oppgaven, umulig å finne hvem som er størst	Barrierer, uenigheter, usikkerhet	Utfordringer og konflikter

5.2 Aritmetisk tenkning

Når det gjelder analysen, tenker jeg på aritmetisk tenkning (som er forklart i kapittel 2.2.3) som matematisk tenkning der det ikke handler om å generalisere. Du bruker ikke variabler eller generelle formler, men du bruker de tallene og det du vet til å finne fram til svaret.

Popcorn-oppgaven

Bendik på gruppa 6 sier at «den korte er 5 og lengden er 10, 5 ganger 5 blir 25». Her ser det ut til at han mener 25 er arealet av grunnflaten, men dette er tall han har valgt selv. Han går så og måler prismet for å regne med riktige tall. Her viser Bendik evnen til å utforskende problemløsing, der han prøver å komme fram til en metode for noe han ikke er så kjent med. Det kan se ut til at han gjetter seg litt fram til lengdene og velger disse intuitivt. Han velger så å anvende måling for å få riktige tall og vise at disse er gyldige for løsningen.

I intervjuet med de fem jentene, er en av de siste spørsmålene jeg stiller de, hvor mange prosent vil prisme A og B fylle hverandre. Om jeg tar prisme B fullt av popcorn og heller dette opp i prisme A, hvor mye av prisme A vil være fullt opp? De gir meg mange ulike svar, og det virker som de gjetter og tar det litt på øyemål. De begynner med å si 75 eller 80, og Lise og Anna foreslår også 89 og 90. Elevene kommer de med noen tanker:

610.	Pia	Fordi det er hvert fall over halvveis.
611.	Amalie	Det er ikke så mye forskjell på de
612.	Forsker	Det er ikke så mye forskjell?
613.	Sara	Nei, ikke så mye forskjell, men det er fortsatt litt
614.	Forsker	Det er litt forskjell? Uansett?

Det kan tenkes at de ser for seg i hodet at de heller prisme B opp i prisme A, og at det vil fylles opp litt mer enn halvveis, uten noe mer forklaring. De trodde først at prismene var like, og når de regnet ut volumet at de hadde ulikt volum. Ut ifra det de har regnet ut, kan de se at volumet ikke er alt for langt unna hverandre og derfor er det «ikke så mye forskjell». Elevene ser ut til å en viss grad av abstraksjon, da de prøver se relasjonen mellom de to prismene og resonnerer rundt dette. I tillegg til at de bruker intuisjonen og visualisering til å argumentere for løsningen (Kunnskapsdepartementet, 2019; Birkeland et al., 2018).

«Volum av en boks»-oppgaven

Når elevene i intervjuet fikk spørsmålet om hvordan de kom fram til svaret sitt, fortalte Amalie hva hun først tenkte:

413.	Amalie	Jeg tenkte først at det kom til å bli størst hvis det var 4 ganger 4 ganger 4, tror jeg tenkte.
414.	Forsker	Mhm alle sidene er fire cm, ja.
415.	Amalie	Men det var jo minst tror jeg. Da prøvde vi å gå ned også, også når vi var på 1,5 så ble det mest, også gikk vi au ned til 1 tror jeg, men da ble det mindre igjen.

Hun har da tenkt at en boks med sidelengder $4cm \cdot 4cm \cdot 4cm$, vil kunne gi størst volum og kanskje fordi dette er en «mellomting». Ikke det høyeste med ikke det laveste heller og boksen vil få en god høyde og bredde. Det kan være Amalie tenkte 1 cm og 1,5 cm vil kunne påvirke volumet mindre. Hun prøver å generalisere ved å finne en sammenheng mellom figuren og en utregning, og prøver senere i intervjuet å formalisere dette ved bruk av algebra (Kunnskapsdepartementet, 2019). Anna fortsetter med:

419.	Anna	Jeg tror vi tok au en med fire ganger fire og en med to ganger to og en med en ganger en, som vi klippet av. Og da fant vi ut av både fire ganger fire og en ganger en, ikke ga så høy eller ikke var så mye og da tror jeg vi landa på to.

Gruppa til Anna prøvde under observasjonen, både på høye og lave tall, som 4 cm, 2 cm og 1cm, men når de regnet ut volumet av alle disse, fikk de et høyere volum med 2 cm. Det kan være at Amalie og Anna ikke har noe spesifikk tanke om hvorfor de velger disse tallene, men om de har det kan det være at de tenker at det først og fremst bør være hele tall. I tillegg til at det er en mellom ting, men ikke for høyt fordi elevene kanskje tenker at de «klipper av for mye». De viser likevel en viss grad av adaptivt resonnement, bruker matematiske representasjoner, og dermed reflekterer rundt svaret de fikk (Kilpatrick et al. 2001; Kunnskapsdepartementet, 2019).

5.3 Algebraisk tenkning

Algebraisk tenkning har blitt definert i kapittel 2.2.3, men når jeg bruker det i denne analysen, legger jeg vekt på det som handler om å generalisere uttrykk og formler, og bruke variabler til å finne generelle uttrykk for det elevene vil finne ut av. Altså hvordan elevene klarer å bruke dette til å utføre og svare på oppgaven.

Popcorn-oppgaven

I intervjuet ble elevene spurt om hva de regnet ut når de jobbet med popcorn-oppgaven under observasjonen, siden jeg allerede hadde sett på besvarelsene at de hadde regnet på noe. De forteller da:

123.	Amalie	Emm vi tok en linjal også målte vi sidene også regnet vi lengde ganger høyde ganger bredde
124.	Forsker	Mhm og hva er det?
125.	Amalie	Åssen man regner …
126.	Forsker	Hva er lengde ganger bredde ganger høyde? Hva finner du ut av da?
127.	Anna	Ehh sånn ... volumet

Elevene bruker altså formelen for volum av en boks, altså $v = l \cdot b \cdot h$ som en matematisk representasjon for volumet, og er en erfaring de har fra før (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette ser vi de andre elevene under observasjonen også velger å gjøre. De bruker denne formelen som de har lært, og setter inn de tallene de får når de måler prismene. Ut ifra hva de får som svar, kan de se hvilken av prismene som har størst volum. Gruppe 6 i denne oppgaven bruker formelen $h \cdot b \cdot d$, og bruker en litt annen rekkefølge og bruker d for det jeg mener de tenker er dybde. Elevene tenker det samme her, formel for volum av et prisme, men ved bruk av ulike bokstaver for variablene. Elevene viser en grad av prosedyremessig flyt, ved at de forstår prosedyren med formelen for volum og når den kan brukes (Kilpatrick et al, 2001).

Litt utover i intervjuet med de fem jentene, prøvde jeg å lede de inn på en algebraisk tenkning, samtidig som de tenker selv og jeg ikke hjelper de for mye. Jeg ville se om de klarte å forklare med begreper eller algebraisk utregning. De har alle fått et kladdeark, og Amalie prøver å vise:

165.	Amalie	[Begynner å skrive på papiret]
166.	Forsker	[leser] A ganger B ganger C?

167.	Amalie	Jaa hvis det, assa, liksom svaret er de tre A ganger B ganger C=ABC hvis det gir mening
168.	Sara	Hvis du liksom har forskjellig tall der, så blir det jo ...
169.	Amalie	Du kan jo skrive volum, ehh volum der
170.	Sara	Hvis du tar noen tall ...
171.	Forsker	Er det ABC der?
172.	Amalie	Ja det var bare for å vise at det var svar, at det ...
173.	Sara	Kan du ikke bare vise med noen tall?
174.	Amalie	Okei. 2 ganger 5 ganger 2 (…) tjue? Tjue?
175.	Forsker	At det er lengdene? [viser på arket]
176.	Anna	Men volumet da?
177.	Forsker	Så nå bare valgte du noen tall for å vise?
178.	Amalie	Ja
179.	Forsker	Var det noen grunn til at du tok ABC?
180.	Amalie	Ehmm det er det vi har
181.	Anna	Men to av sidene er jo like lange?
182.	Amalie	Ja, det er derfor jeg tok 2 ganger 5 ganger 2
183.	Anna	Hvorfor tok du ABC da? Og ikke A ganger A ganger B? [ler litt]
184.	Amalie	Det er et veldig godt spørsmål. [jentene fniser litt]

Amalie begynner med $A \cdot B \cdot C = ABC$, noe jeg mener hun vil forklare som sidene av prismet; lengde, bredde og høyde, og at hun vil sette inn de tallene hun får når hun måler.
Men videre velger hun tallene 2 cm og 5 cm, som jeg tenker må være sidene til figuren. Ut ifra dette ser det ut til at hun mener at grunnflaten til prismen er $2\ cm \cdot 2cm$ og høyden er 5 cm. Disse valgte tallene virker veldig tilfeldig, og til bruk for å kunne vise en tankegang.
Anna kommer med et godt poeng der hun sier at to av sidene er like lange, der jeg vil tro hun mener sidene til grunnflaten, og spør videre i utsagn 183 «hvorfor tok du ABC da? Og ikke A ganger A gange B?». Det ser ut til at Anna ser at man kan tenke at $a = 2$ og $b = 5$, ut ifra de tallene Amalie bestemte. Om jeg har tolket Anna riktig, beveger hun seg i en retning av å utvise prosedyremessig flyt, ved at hun skjønner operasjonen med volum, fordi hun ser at $a \cdot a \cdot b$ kan overføres fra $l \cdot b \cdot h$ eller $G \cdot h$. I tillegg har hun en begrepsforståelse, siden hun ser viktigheten av å kommentere at det vil være en forskjell på $A \cdot B \cdot C$ og $a \cdot a \cdot b$, og dermed ser denne forskjellen (Kilpatrick et al., 2001). Til tross for dette har de egentlig byttet ut l og b med andre bokstaver, og setter så inn tall i dette. Elevene klarer ikke se hvordan de kun kan bruke bokstaver og tror løsningen alltid må innebære tall.

Mot slutten av intervjuet ser vi på en utregning Anna har gjort for volumet av sylinderen med $\pi r^2 \cdot h$, og jeg spør om de klarer å bruke formelen til å se hvorfor den laveste vil være størst.

681. Anna		Fordi radiusen er større
682. Forsker		Fordi radiusen er større?
683. Anna		Jaa …
684. Forsker		Den er bredere?
685. Anna		Jaa
686. Forsker		Men klarer du å peke på noe i formelen som … som gjør det? [Anna peker på2-eren]. Du peker på?
687. Anna		To tallet kanskje?

Her får de litt mer hjelp enn det som er tenkt. Anna mener at det er fordi radiusen til den lave sylinderen er større enn den høye, som viser en generalisering rundt sammenhengen mellom grunnflatens radius og formel for arealet (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kilpatrick et al. (2001) sin modell av Mathematical Proficiency snakker blant annet om adaptivt resonnement som evnen til å tenke logisk, som Anna gjør fordi hun vet når radiusen er større og sylindere bredere, vil dette gi større volum. Videre ser Anna på formelen og peker på eksponenten til πr^2. Hun fortsetter med:

691.	Anna	Fordi man r ganger … det blir jo veldig … liksom …
692.	Amalie	Det blir ganga med seg sjøl, og da blir det jo
693.	Anna	Ganske mye større på en måte
694.	Amalie	Jaa
695.	Forsker	Jaa, gange med seg selv?
696.	Anna	Fordi … radius er alltid ganger to uansett, men hvis liksom radiusen er større så blir jo tallet større igjen

Det jeg tror Anna tenker i utsagn 696 og har litt vanskeligheter med å uttrykke, er at når radiusen er et større tall og ganget med seg selv, så blir det «ganske mye større». Når radiusen blir større, så blir åpenbart arealet grunnflaten større. Amalie ser også ut til å forstå dette, men begge har noen vanskeligheter med å uttrykke og forklare tankegangen sin. Anna forsetter med å si:

700.	Anna	Høyden på den høye er jo større, liksom … større
701.	Forsker	Mhm
702.	Anna	Men det har ikke like mye å si liksom

Utsagnene over tyder på at Anna mener at høyden til både et prisme og en sylinder er kun et tall og radiusen kvadreres i forbindelse med at grunnflaten regnes ut, som deretter multipliseres med høyden, og høyden har derfor «ikke så mye å si» for volumet. Både Anna og Amalie klarer å resonnere litt rundt hvorfor radiusen til grunnflaten av sylinderen vil påvirke volumet i større grad enn volumet.

«Volum av en boks»-oppgaven

For denne oppgaven hadde blant annet gruppe 5 et interessant svar. De klippet ut fire ulike bokser, og for hver av disse hadde de klippet kvadrat fra hjørnene, med sidelengder på 1cm, 1,5 cm, 3 cm og 4 cm. Vi kan og se på dette som et aritmetisk resonnement, fordi det ikke refereres til variabler. Ved utregningen fant de ut at 1,5 cm ga størst volum. Det er vanskelig å si hvorfor de forsøkte med 1,5 cm og ikke med 2 cm, når de andre tallene er hele tall. Det kan godt være at dette er litt tilfeldig og at det ikke er noe spesiell tanke bak dette. Læreplanen sier blant annet at «utforskning i matematikk handler om at elevene leter etter mønster, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til felle forståelse» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2), og vi kan se at denne gruppa prøver å utforske gjennom å teste ut bokser av forskjellige størrelser, men de prøver ikke å finne noen sammenheng med det de fant og figuren.

Hos gruppe 6 diskutertes det om hva som ville skje om du klipper mer fra hjørnene til kvadratet. Bendik sier at «den blir høyere, men det er umulig å finne ut hvem som er størst. Det er veldig mange kombinasjoner med tre sifre. Du må kombinere lengde, bredde og høyde. Man må finne den beste kombinasjonen. Hvor du for eksempel har 15, er det mange forskjellige måter å få det på». Med 15 tenker jeg Bendik mener at boksen må ha volum på 15 cm^3, og at det er mange kombinasjoner med tre sifre som vil gi 15. Det kan hende at Bendik tenker at lengde, bredde og høyde er tre ulike variabler, og om du kombinerer disse tre variablene med mange ulike tall, vil det bli mange av kombinasjoner av dette. Forsto Bendik da at om du klipper kvadratene på 2 cm, vil sidelengdene bli 8 cm og høyden 2 cm? Når vi klipper 2 cm av hjørnene av et 12 cm kvadrat vil dette bli den eneste «kombinasjonen». Samme om du klipper 1 cm, så vil sidelengdene være 10 cm og høyden 1 cm. Det kan være han ikke forstod oppgaven helt, eller tenkte at oppgaven var mer komplisert enn den var, og dermed tenkte for avansert. Bendik viser at han i liten grad har evne til å resonnere, da det ser ut til at han ikke forstår denne matematiske tankerekken. Likevel, klarer han å utforske problemet gjennom problemløsning, fordi han ivrig prøver å finne en strategi og prøver å se sammenhengen, samtidig som han prøver å få en forståelse og finne en mening med oppgaven. Han prøver å generalisere ved å prøve å se sammenhenger og finne utregninger, men tankegangen er feil (Kunnskapsdepartementet, 2019). Han klarer ikke helt å anvende algebraisk tenkning, men befinner seg likevel på tidlig algebra, fordi han tenker på å kombinere ulike variabler. Bendik generaliserer ikke fult ut, men han er klar over at det eksisterer en form for sammenheng

I intervjuet har jeg prøvd å lede samtalen inn på en algebraisk forklaring. Amalie prøver på dette ved å forklare eller finne en generell formell for oppgaven:

472.	Amalie	Man kan … x ganger y ganger y, kan man
473.	Forsker	X ganger y ganger y? at y-en er sidene?
474.	Amalie	Ja

Dette ligner på tankegangen Amalie hadde om popcorn-oppgaven, hvor hun bruke $A \cdot B \cdot C$ for sidelengdene til prismen. I denne oppgaven bruker hun x og y, som kan være fordi hun tenker at hun må bruke andre bokstaver nå, det er tilfeldig valg av bokstaver eller så kan det være at hun tenker at abc og x og y, representerer ulike ting. Uansett tenker Amalie at y er lengden for sidene og x er høyden, og viser at y er det samme tallet, fordi det er snakk om et kvadrat. Amalie viser noe evne til algebraisk tenkning fordi hun prøver å løse problemet algebraisk og klarer å se det på en litt abstrakt måte. Hun ser at hun kan bruke variabler som kan representere lengdene av boksen, og bruke de til å vise en generell utregning (Seelay, 2004). Likevel, ser det igjen ut til at hun egentlig bytter ut $l \cdot b \cdot h$ med $a \cdot a \cdot b$, som vil kunne bety det samme. Lise kommer så med et forslag:

479.	Lise	Ehh A i andre
480.	Forsker	A i andre? Hva a i andre?
481.	Lise	Ehh ganger B i andre
482.	Forsker	Nja, du er inne på noe
483.	Amalie	Ja, man tar x ganger y i andre eller a ganger b i andre

Lise ser ut til å prøve seg på noe liknende, men hun har nok ikke forstått det slik Amalie har forklart. Amalie forstår hva Lise prøver på, og forklarer med sin tidligere forklaring med $x \cdot y^2$, men forklarer også at dette blir det samme som $a \cdot b^2$, der x og a vil være høyden til boksen i dette tilfelle. Amalie viser da en refleksjon og forståelse for at dette representerer det samme, og det spiller ingen rolle hvilke bokstaver man bruker. I forhold til LK20, er hun på vei til å kunne «lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019, 11-12), fordi hun klarer å lage en likning, men har vanskeligheter med å løse den, forklare og forstå det.

5.4 Geometrisk tenkning og visualisering

Når geometrisk tenkning og visualisering skal ses på i analysen, tenker jeg på noe som noe elevene ser visuelt og forklarer på en visuell måte, slik som på nivå 1 i Van Hiele modellen (kapittel 2.2.2.). De bruker logisk tenkning og intuisjon til å forklare hvorfor. For eksempel sa flere av elevene at de mente prisme A og B popcorn-oppgaven hadde like stort volum, fordi arkene var like store. Altså de bruker sin logiske tenkning og det visuelle til å forklare hvorfor det er slik. De har ikke nødvendigvis en begrunnelse eller en begrunnelse som er god nok, men det er det intuisjonen og logikken forteller de og gir mest mening for dem.
På dette nivået gjenkjenner elever geometriske figur av formene som en helhet, hvordan de ser ut og ikke egenskapene deres (Birkeland et al., 2018).

Popcorn-oppgaven

I observasjonen svarer gruppe 6 at de tenkte først at de to prismene er like store fordi det er brukt det samme arket, men tenker at det er mulig prisme A kan ha størst volum fordi «den øverste flaten er større på den enn på B. Med «den øverste flaten» mener jeg de tenker på toppflaten av figuren. Det stemmer at prisme A har større toppflate og grunnflate, og at dette er grunnen til at volumet vil være større, men elevene gir meg ikke noe forklaring på hvorfor større toppflate kan bety at volumet er større. Når de så regner ut volumet av begge, finner de ut at prisme A gir størst volum. I følge Van Hiele modellen er denne gruppa på nivå 1 ved at de bruker intuisjon og ser på de geometriske egenskapene til figurene. Ut ifra nivå 2, klarer de også å analysere prismene, og kan se at det samme arket kan gi forskjellige egenskaper til figuren. De er også innpå nivå 3, fordi de er klar over at det kan være en ulikhet. Dette er likevel en usikkerhet, og det ser mer ut som at intuisjonen deres er sterkest og ser ut til i dette tilfelle at de mener prismene er like store (Birkeland et al.2018). Det vil indikere at elevene har «romforståelse» fordi de har en følelse for de formene de ser (Van de Walle, 2001).

Gruppe 3 valgte å ikke regne ut volum, men mente at prismene var like store fordi «den ene er kort og brei og den andre er høy og tynn». Det virker som at de tenker at de to prismene er det motsatte av hverandre, at de er det samme, men brettet på en annen måte. Elevene ville jeg «plassert» på nivå 1, da de bruker mest intuisjon og svarer det som gir mest mening for dem (Birkeland et al. 2018). Denne gruppa viste svært lite interesse i å utforske og det kan virke som de mangler ferdigheter i å kommunisere i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Elevene på gruppe 5 argumenterer med at prismene er like fordi «det er like mye ark på begge, det er ikke noe mer eller mindre ark. Da burde de holde like mye». De utforsker med tanke på at de prøver å finne en sammenheng, men har ikke gode argumenter og begrunnelser for svarene deres (Kunnskapsdepartementet, 2019). Her er det altså enda et eksempel fra observasjonen på at elevene i stor grad bruker intuisjonen sin. Det var først når de regnet ut volumet at de så at prisme A har størst volum. Dette gikk igjen hos flere av gruppene. Prismenes overflateareal og volum, ser det ut til at elevene tenker er det samme. At overflatearealet til en figur vil også gi nøyaktig det samme volumet, selv når den er brettet på en annen måte. Manglende forståelsen for sammenhengen og forskjeller på areal og volum kan være grunnen til dette. I starten av intervjuet snakket jeg og elevene om popcorn-oppgaven, og jeg spurte de hva de husker at de svarte på dette:

128.	Anna	Jeg tror det var A, den som var breiest.
129.	Forsker	Jaa, A var den bredeste, den laveste
130.	Anna	Jaa
131.	Forsker	Mhm så alle fant ut av det?
132.	Sara	Ja til slutt ja
133.	Forsker	Jaa
134.	Sara	Men jeg trodde først at ... De var like
135.	Forsker	Alle trodde de var like?
136.	Anna	Jeg trodde egentlig det var den dærre lave fordi den overflaten som ikke hadde noe ark på seg på en måte, den var større
137.	Forsker	Ja
138.	Anna	Sånn, i toppen og bunnen
139.	Forsker	At den bunnen var størst?
140.	Anna	Og toppen? At den er større enn på den andre. Selv om du har samme ark, så er det noe som ikke har ark på seg på en måte.

Vi ser her at elevene først mener at de er like, helt til de begynte å regne ut volumet av prismene. Likevel, sier Anna at hun mente den laveste prismen var størst fordi «overflaten som ikke hadde noe ark på seg på en måte, den var større». Grunnflaten og toppflaten av prismene har, som hun sier ikke noe ark «på seg», men areal av denne overflaten blir likevel brukt i utregningen av volumet. Det ser ut til at Anna tenker at figuren får «gratis» overflatearealet, og vil derfor få større volum, og at prisme A må være størst fordi arealet til grunnflaten og toppflaten, er større enn på prisme B. Da må volumet til A være størst. Anna klarer å resonnere rundt det at prisme A er størst, men klarer ikke helt den grundige argumentasjonen. Det virker som hun forstår, men har vanskeligheter med å kommunisere det. Likevel har hun adaptivt resonnement, med tanke på at hun tenker en del logisk, reflekterer og forklarer rundt det hun tenker (Kilpatrick et al. 2001). Vi forsetter samtalen:

150.	Forsker	Men dere endra mening med en gang dere regna ut?
151.	Lise	Ja
152.	Forsker	Mhm
153.	Sara	Men det første man tenker på er jo at de er like fordi de har likt ark

Slik som Sara sier i sitat 153, at de har likt volum fordi de har likt ark, går igjen hos veldig mange av elevene. Det ser til ut at logikken til elevene sier at når overflatearealet er likt, må også volumet til figurene være likt. De starter med å svare ut ifra intuisjon og etter hvert som de regner ut, klarer de i større i grad å analysere og reflektere rundt det de har funnet ut. Videre er jeg nysgjerrig på hvordan de tenker om det heller hadde vært to sylindere. Endrer de mening da?

190.	Forsker	Mhm men hva om det hadde vært sylinder? Vært sånn [lager en sylinder med et A4 ark for å vise]. Og sånn [viser andre vei]. Hva hadde skjedd da? Hadde det vært noe annerledes?
191.	Lise	Ja [litt bestemt]
192.	Forsker	Ja, hva blir annerledes?
193.	Lise	Volumet.
194.	Forsker	Volumet blir annerledes?
195.	Lise	Ja, det tror jeg
196.	Forsker	Hvorfor tenker du det?
197.	Lise	Fordi den er rund [fniser litt]
198.	Forsker	Ja, og da blir det et annet volum?
199.	Lise	Ja

200.	Forsker	Tenker dere det samme?
201.	Anna	Det føles iallfall sånn ehh..
202.	Forsker	Så den her og den her har samme volum [viser sylinder begge veier]
203.	Anna	Jeg føler den andre ser litt større ut
204.	Forsker	At den lave er større?
205.	Lise	Det tror jeg og
206.	Forsker	Ja, hvorfor det?
207.	Sara	Det ser sånn ut [ler litt]
208.	Forsker	Det ser sånn ut?
209.	Amalie	Fordi atte siden prismen så var det sånn, så kanskje det er sånn med denne?

Lise sier at volumet blir annerledes når det er en sylinder. Det ser ut til at hun mener at prisme A vil ha et annet volum enn en sylinder A, fordi grunnflatene vil være ulike. De blir etter hvert enige om at en sylinder A vil ha større volum enn en sylinder B, nettopp fordi det var slik med prismene eller begrunner de med at ser slik ut. Det gir tegn til at de har evnen til adaptivt resonnement, ved at de tenker, reflekterer og begrunner, men gjør det gjennom erfaring fra forrige oppgave eller se visuelt på det, for å forklare hvor den laveste sylinderen vil ha størst volum. Senere i intervjuet går jeg tilbake til sylinderne og spør hva som ville skjedd om de var av et A3-ark:

542.	Forsker	Hadde det skjedd noe annerledes da?
543.	Lise	Ja ...
544.	Sara	Ja
545.	Forsker	Ja?
546.	Pia	Det blir større volum
547.	Forsker	Større volum?
548.	Pia	Ja
549.	Anna	Men formen hadde jo vært lik

De forstår fort at volumet ville blitt større med et A3-ark, men hvem av de to sylinderne er størst nå?

551.	Lise	Den [peker på den lave]
552.	Anna	Ja
553.	Lise	Siden det er det samme på de andre tingene

Av erfaring fra prismene og sylinderne laget av A4-ark, der de laveste figurene hadde størst volum, ser det ut til at deres logikk sier at det må være slik for et A3-ark også. De kan visuelt se at volumet er større, men at den laveste vil uansett være størst, for dette har de erfart to ganger tidligere. Vi kan se en grad av nivå 3 fra Van Hiele modellen, abstraksjon og uformell deduksjon, fordi de er mer oppmerksomme på relasjonene til figurene, samtidig som de fortsatt bruker intuisjon og logikk. Å forstå et logisk bevis ville kunne være vanskelig for de å forstå (Birkeland et al., 2018).

Mot slutten av intervjuet snakket vi om hvor mange prosent sylinder A vil fylle prisme B, og jeg ber de peke eller tegne strek der de tenker at den fyller opp, om vi tenker at hele sylindere er 100 %. De begynner å tegne streker.

626.	Sara	Får du 10 av de samme strekene nedover?
627.	Lise	Og den andre er 80 … nei kanskje
628.	Sara	Jeg tror mer det er sånn åtti …
629.	Lise	Seks
630.	Amalie	Åtti fem eller noe
631.	Forsker	Ja?
632.	Lise	Jeg tror 93
633.	Amalie	Jeg tror au det er 90
634.	Sara	Jammen det kan jo ikke, får du 10 av de samme strekene nedover?
635.	Amalie	Nei, men … Åja ja ja ja

Sara tenker det at må kunne ha 10 streker nedover, og det ser ut til at hun mener én strek som 10%, og anvender derfor tidligere kunnskap om prosent. Fordi hun systematisk «deler opp» figuren, vil hun tydeligere se hvordan figuren er delt opp ut ifra prosent, og kan ta utgangspunkt i disse strekene. Dette ser ut til å være metoden de bruker for problemløsningen. Elevene ser sammen på modellen og diskuterer ut ifra de strekene de har tegnet, og prøver å få en felles forståelse. Etter hvert spør jeg de om å gi meg et felles svar og jeg får svar fra 76 til 89, men de klarer ikke her å generalisere helt, da de ikke utforsker noe med utregninger eller representasjon ved bruk av algebra for formelle bevis og argumentasjon (Kunnskapsdepartementet, 2019).

«Volum av en boks»-oppgaven

Flere av gruppene under observasjonen, starter med å klippe lite av kvadratet. Gruppe 1 begrunner dette med at «det var lite» og gruppe 2 forteller at de tenkte at «den er lavest og vil da ha mindre papir klippet vekk». Logikken til disse elevene forteller de at desto mer papir du tar vekk, jo mindre volum. Jeg kan forstå denne tanken, i og med at ting med stort volum vil ha mer overflate enn noe som har lite volum. Gruppa lagde en boks med 2 cm klippet bort, men regnet ut kun for 0,5 cm. Siden de allerede tenkte at 0,5 cm vil gi størst, så de ikke behovet for å regne ut med høyere tall. Igjen ser vi at elevene følger logikken og intuisjon sin, og bruker den til å se en sammenheng, men har ingen formelle bevis. Siden de allerede er overbevist om at de tenker riktig, gjør at de heller ikke finner ut om de i det hele tatt har riktig svar. Elevene stiller seg ikke kritisk til svaret sitt, fordi logikken deres er så sterk. Det er altså en liten grad av resonnering og argumentasjon rundt løsningen deres.

Gruppe 4 svarer at de må klippe 2 cm, men argumenterer med at «vi har funnet ut at jo mere du klipper, jo større volum blir det», noe som ikke helt samsvarer med hverandre. Det er nok ikke slik at de mener at man kan klippe mer og mer og få større volum, men heller at de var uheldige med forklaringen sin. De fikk et høyere volum for når de klippet 2 cm enn når de klippet 1 cm. Her har gruppen utforsket i større grad enn gruppe 2, ved å prøve ut forskjellige bokser og dermed kommet fram til en løsning ut ifra det. Igjen er dette et eksempel på elever som i liten generaliserer ved bruk av utregninger. De regner ut arealet av det de måler, men bruker ikke algebra som et redskap til å finne løsningen, som mest sannsynlig har med å gjøre at de ikke har nok kunnskaper og erfaring for å bruke det i denne sammenhengen.

Når vi i intervjuet kom til «volum av en boks»-oppgaven, ble de spurt om de husker hva de fikk som svar, og de sier:

416.	Anna	Jeg tror vi tok en og en halv eller to. Jeg husker ikke helt
417.	Forsker	En og en halv eller to?
418.	Lise	Vi brukte en og en halv
419.	Sara	Jeg husker ikke
420.	Amalie	Vi prøvde oss litt fram, jeg tror vi lagde tre eller fire forskjellige
421.	Forsker	Tre-fire bokser? For å teste ut litt?
422.	Amalie	Ja

423.	Anna	Også fant vi ut at det måtte være over en. Fordi da, hvis man bare ganger en ganger en, så blir det bare én på en måte.
424.	Forsker	Ja, da blir det ikke …
425.	Anna	Det må være mer enn det, men heller ikke for mye fordi da klipper man av veldig mye

Observasjonsnotatene jeg tok under observasjonen, forteller at alle disse jentene var på grupper som svarte at de ville klippe av 2 cm fra hjørnene, så at de sier at de brukte 1,5 cm, antyder på at de ikke husker helt hva de har svart. De forteller at de lagde tre-fire bokser, noe alle gruppene gjorde. Dette var noe som ikke var nødvendig for å kunne svare på oppgaven, men de brukte det til hjelp, slik at de kunne visualisere det som skulle bli løst. Det kan også være mulig at de forsto oppgaven slik at de faktisk skulle klippe ut, selv om oppgaven sa «se for deg at du klipper et likesidet kvadrat».
I utsagn 401, forklarer Anna at svaret var nødt til å være over 1 cm, som hun forklarer med at «hvis man bare ganger en ganger en, så blir det bare en på en måte». Det jeg tror Anna mener er at hvis man bare klipper 1 cm av hjørnene, så vil det ikke påvirke volumet noe særlig, da det bare vil være 1 cm i høyde. Dette viser antydning til adaptivt resonnement, i og med at Anna har reflektert rundt svaret sitt og gir en begrunnelse. Selv om begrunnelsen svak prøver hun likevel å resonnere rundt det hun vet.

5.5 Utfordringer og konflikter

Gjennom observasjonen og intervjuet kunne det komme opp uenigheter blant elevene i gruppene, de har vanskeligheter med å forstå oppgaven og temaet eller de ikke har noen begrunnelser.

Hele intervjuet starten med at jeg ville snakke rundt hva de syntes om matematikkfaget. Deres syn på faget, vil kunne ha noe å si for deres motivasjon og prestasjon.

1.	Forsker	Først så lurer jeg på hvordan oppleves matematikkfaget for dere?
2.	Lise	Vanskelig
3.	Forsker	Vanskelig?
4.	Pia	Helt greit, det kommer an på hva det er.

De synes det er vanskelig, men at det også kan være nyttig og gøy. Dette vil påvirke deres evne til å lære i faget, fordi produktiv disposisjon det er en av de fem «sammenflettede trådene» i Kilpatrick et al. (2001). Om elevene ser verdien i faget, og som noe fornuftig og verdifullt, vil elevene ha større motivasjon og driv. Dette vil og være et godt grunnlag for å bygge på kunnskapen deres.

Popcorn-oppgaven

Det er en gjenganger i alle gruppene at de mener de to prismene er like store fordi begge er brettet av et A4-ark, likevel vet de ikke hvorfor. Guttene på gruppe 2 argumenterer med at «du bretter de like mange ganger, bare feil vei». I tillegg sier de at «popcorn har forskjellig form og størrelse og de vil ha mellomrom mellom dem. Antall vil variere». Det ser ut til at de tenker at popcornets form og størrelse vil ha mye å si for hvordan prismene blir fylt opp. De tenker at de skal ta hensyn til at det er popcorn som skal fylle prismene. Det over litt overaskende at det ikke var flere av gruppene som tenkte dette, men de fleste elevene var ikke så opptatt av popcornet, men selve volumet til figurene.

Jentene på gruppe 4 hadde uenigheter blant seg, da tre av dem, Emma, Pia og Sara, var helt sikre på at de var like store. Thea, derimot, er fast bestemt på at den lave er størst, men har ingen forklaring på hvorfor. Hun er også den eneste av elevene som mener prisme A har størst volum helt fra starten. Thea generaliserer ikke fordi hun prøver på noe utregning eller utforsker andre løsninger gjennom algebra. Hun tenker veldig visuelt og intuisjonen hennes er veldig sterk, og vurderer ikke andre løsninger. På grunn av dette vil Thea være på nivå 1 av van Hiele modellen og fordi hun nærmest forbyr argumentasjon (Birkeland et al., 2018). Emma kommer med en forklaring på hva hun tenker: «hvis du har to glass, det ene er høyere og smalere, og det andre er bredere og lavere, da får du jo det samme». Dette er det som virker mest logisk for Emma og hun virker veldig selvsikker i forklaringen. Samtidig har hun ingen matematisk argumentasjon for det. Van Hiele modellen i nivå 2 sier blant annet at elevene kan «resonnere logisk på grunnlag av figurenes egenskaper» (Birkeland et al., 2018, s.14), noe jeg mener Emma gjør til en grad, selv om hun har tenkt feil. Hun prøver å argumentere rundt svaret sitt, men ser ut til å ikke han nok kunnskaper om relasjonen mellom figurene. Som nevnt tidligere, kan det virke som elevene tenker at overflatearealet vil gi det samme volumet til ulike figurer. Det samme A4-arket vil gi det samme volumet. Det kan virke som hun også tenker, men prøver å forklare dette ved å bruke glass som eksempel. Emma bruker likevel i størst grad logikken sin til å svare og generaliserer ikke rundt dette.

«Volum av en boks»-oppgaven

Jeg spør elevene om de prøvde med tre, noe de trodde de gjorde, og jeg foreslo at de kunne vise. Lise kommenterte at de ikke hadde saks, men jeg oppfordrer de til å tegne. De virker veldig usikre på utførelsen:

433.	Forsker	Finner dere ut av noe?
434.	Amalie	Nja, kanskje
435.	Amalie	[Hvisker lavt] jeg skjønte ikke
436.	Forsker	Hva skjønte du ikke?
437.	Amalie	Ehh … jeg skjønner egentlig ingenting føler jeg
438.	Forsker	Nei … hva har du gjort nå da?
439.	Amalie	Jeg føler det gir mening, men … jeg vet ikke

Fra før av har det regnet ut volum av ulike bokser, men det kan virke som at når de ikke får klippe ut at dette setter en stopper for dem. De ser ikke ut til å skjønne hvordan de skal gjøre det uten å klippe ut en boks, men hvorfor føler de at de trenger den når de kun bruker sidelengdene?

Utover intervjuet spør jeg om de klarer å finne en generell formell for oppgaven. Men det kan se ut til at de ikke forsto hva jeg mente med det.

508.	Lise	Bare i algebra? Ikke noe sånn Pytagoras?
509.	Forsker	Hvis du vil kan du gjøre det.
510.	Lise	Er det formelen kat+kat=hypotenus?

Elevene som deltok i intervjuet, informerte meg om at de nylig hadde hatt om Pytagoras i matematikk, og Lise fortalte helt i starten at hun likte Pytagoras. Derfor ser det ut til at Lise har opplevd mestring for dette og prøver å bruke det hun nettopp har lært for å løse andre problemløsningsoppgaver. Det ser ikke ut til at hun vet helt hvorfor hun foreslår Pytagoras, hva det egentlig er eller forstått det og hvor og hvordan den brukes. Hadde hun forstått det, vill hun ikke foreslått det her. Likevel prøver hun å utforske og anvende den kunnskapen hun har for å finne en løsning, men klarer ikke å vurdere om det er et godt forslag til metode. Lise prøver flere ganger gjennom intervjuet å anvende matematikkunnskaper hun allerede har, men har ikke nok kunnskap eller evne til å bruke de, for å finne en løsning.

6 Diskusjon

Denne masteroppgaven har sett på forskningsspørsmålet *Hva karakteriserer en gruppe 9.trinnselevers strategier og argumentasjon med utforskende volumoppgaver*? I dette kapittelet skal det som ble analysert i forrige kapittel bli drøftet. Først skal det diskuteres rundt funnene i popcorn-oppgaven, og deretter på funnene i «volum av en boks»-oppgaven. I slutten av dette kapittelet kommer det en oppsummerende drøfting og egenkritisk perspektiv, samt forslag til videre undervisning og forskning.

6.1 Popcorn-oppgaven

Denne oppgaven skulle se om elevene klarte å finne ut om prisme A eller B fikk plass til mest popcorn, eller om de fikk plass til like mye. Dette var en LIST-oppgave og det var altså ingen bestemt fasit på løsningen. Likevel var det en tanke om at noen av elevene skulle kunne klare å løse oppgaven på en algebraisk måte til en viss grad, noe det var lite å se av. Det er tydelig at elevene har manglende kunnskap i algebraisk tenkning.

I starten hadde flertallet av elevene en forståelse om at begge prismene hadde likt volum, fordi de er brukt av det samme A4-arket. Elevene starter med en sterk intuisjon om at dette er riktig, men ingen annen begrunnelse enn at de er av det samme arket. I starten er dette mer logisk for de, og det kan være at de tenker at overflatearealet til en figur, vil gi det samme volumet om figuren er brettet på en annen måte. Kan det være en manglende forståelse for sammenhengen mellom areal og volum?

En kan se at i starten av observasjonen, begynner elevene med å lytte til intuisjonen sin, men det er først når de regner ut volumet til prisme A og B, at de klarer å finne ut av at prisme A er størst. Dette er ofte en av veldig få begrunnelser de har til at det må være sånn. Flere av elevene viser en evne til utforskende problemløsning, da de prøver å finne en metode for løsningen. Siden jeg hadde tatt med et prisme og vist fram det til klassen, brukte flere denne til å måle riktige sidelengder og bruke disse målene til å sette inn i formelen for volum. Formelen $v = l \cdot b \cdot h$ er en matematisk representasjon for volumet til en boks og en formel de kan og skal kunne fra før. Det ser ut til at de forstår den også, fordi de setter inn målene de fikk på «riktig plass» i formelen. De regner dette ut ifra målene til prisme A og B, den som gir høyest sum vil da ha det største volumet.

Prosedyremessig flyt kan observeres hos elevene fordi de forstår formelen for volum, kan bruke den og algoritmen for multiplikasjon. Samtidig tyder det på at noen av elevene i starten klarer å generalisere, da for eksempel gruppe 6 diskuterer at prisme A kan være størst fordi «den øverste flaten er større enn på B». De kommer ikke med noe videre forklaring, men det indikerer på at de har forstått noe, men har kanskje en begrenset begrepsforståelse og evne til å kommunisere det de tenker. På bakgrunn av dette kan denne gruppa være på nivå 2 i Van Hiele fordi de delvis analyserer figuren og resonnerer rundt om det da kan være andre løsninger enn det de først tenkte (Birkeland et al., 2018). Anna viser også antydning til dette fordi hun sier «overflaten har ikke noe ark på seg», og det kan tenkes at hun har forstått det med har ikke evne nok til å kunne kommunisere dette, fordi hun ikke presenterer en formell argumentasjon. Når vi i intervjuet diskuterer rundt volumet til en sylinder A og B, utforsker Anna formelen og ser at når radiusen er et høyere tall og blir i tillegg ganget med seg selv, vil dette kunne gi et høyere volum enn et høyere tall for høyden. Dette indikerer på at hun har evne til resonnering ved at hun begrunner ut ifra de matematiske reglene.

Under observasjonen fikk elevene svært lite hjelp til å finne fremgangsmåte, for å se hva de faktisk kunne. De eneste tegnene til algebraisk tenkning, var bruken av formelen for volum, og ellers var det svært få tegn til algebraisk tenkning. Elevene klarer å reflektere metoder for problemløsning, men viser i liten grad utforskning av utregning med algebra og bevis. De utforsker kun på det nivået de er på, og ut ifra den kunnskapen de allerede har.
Når jeg da i intervjuet leder intervjudeltakerne inn i denne retningen, prøver de på en algebraisk tenkning. Derimot kan det oppfattes som at for eksempel Amalie «bytter ut» $l \cdot b \cdot h$ med $a^2 \cdot b$, og bruker denne formelen til å vise med noen tall i stedet. Kanskje den formelen minner mer om en algebraisk formel enn formelen for volum. En kan se i intervjuet at når elevene kommer med algebraiske løsninger, vil de bruke disse til å sette inn tall igjen, og ikke bare bruke bokstavene til å vise en formell argumentasjon. De har ikke nok kunnskaper til å kunne vise en generell løsning og tenker kanskje at det ikke er noe svar i «bare» bokstaver.

6.2 «Volum av en boks»-oppgaven

I denne oppgaven skulle elevene finne ut hvor store kvadrat de måtte klippe av hjørnene av et $12\ cm \cdot 12\ cm$ kvadrat, for at det skulle bli en boks med størst mulig volum. Dette var også en LIST-oppgave, som alle elevene hadde mulighet til å svare på, men også på ulike måter. Selv om oppgaven ikke sa noe om at de faktisk skulle klippe ut et kvadrat, gjorde alle elevene dette. De klippet ut kvadrat for å faktisk klippe av hjørnene, og lage ulike modeller. Igjen tyder dette på at elevene er svært visuelle og modellen vil gi de dette visuelle inntrykket, og det ser ut til at dette hjelper de å forstå oppgaven. Det indikerer på at elevene trenger noe å se og ta på, i stedet for å kun se for seg oppgaven. Derimot er det ikke nødvendigvis slik at de ikke hadde klart det uten å klippe en modell, men at det var veldig naturlig for alle å gjøre det likevel selv om det ikke var behov for det.

Flere av elevene tenker at boksen må ha litt høyde, men at de ikke kan klippe av for mye fordi da blir det «mindre ark». Også i denne oppgaven viser elevene at de først og fremst følger logikken og intuisjonen, og der resonnerer de ikke noe særlig rundt andre løsninger. Det er først når de måler og regner ut at som regel får et annet svar, men klarer ikke begrunne ut ifra de nye løsningene, hvorfor det blir sånn. Om de allerede er overbevist om at de har riktig svar, vil de ikke nødvendigvis stille seg kritisk eller reflektere rundt svaret, eller se etter andre løsninger. Bendik for eksempel viser at han kan utforske og prøver å finne en mening, men viser liten grad av resonnering fordi han ikke forstår den matematiske tankerekken. Han prøver å finne riktig strategi og se sammenhengen, men tenker dessverre feil.

6.3 Oppsummerende drøfting og egenkritisk perspektiv

Både popcorn-oppgaven og «volum av en boks»-oppgaven får fram hvilke kunnskapsnivå og ferdighetsnivå elevene er på. Funnene i denne oppgaven tyder på at elevene viser liten grad av abstraksjon og for noen er det helt fraværende. Likevel er det enkelte av de nære i å nå nivå 3 for abstraksjon og uformell deduksjon, da de til en grad resonnerer og prøver å tenke på andre løsninger. Samtidig som dette er tilfellet, vil de ikke ha den forståelsen for logiske bevis og er fortsatt mest intuitiv. Noen av elevene vil være på nivå 2 fordi de viser mer bevissthet rundt at figuren kan ha ulike egenskaper, men vil ha hindringer i å kommunisere noe særlig, da det ser ut til at mange har en mangel på matematiske begreper. På den andre siden vil alle elevene gjenkjennes i nivå 1 i denne modellen, nettopp fordi alle er høyest visuelle av seg og ikke minst har de en sterk intuisjon. Det kan være at visualisering gjør det mer konkret for dem og at det vil være mer logisk for de å se det slik (Birkeland et al., 2018).

Van Hiele modellen snakker ikke om algebra i forhold til geometri, men noen av elevene ser ut til å være på nivå 3 eller mellom 2 og 3. De er mer intuitive og har uformelle argumenter. De sier noe ut ifra instinkt og logikk, men kan ikke gi et formelt argument og bevis. Det vil være behov for deduksjon for å løse oppgavene godt. På dette nivået, nivå 4, vil elevene kunne bruke mye mer logikk enn intuisjon, fordi de klarer i større grad å jobbe med geometriske påstander og kunne argumentere for dem. Til tross for dette, er det hovedsakelig nivå 1-3 som er i hovedfokus for grunnskolen, og det kan derfor ikke forventes at elevene skal være på nivå 4 (Birkeland et al., 2018)

Ved å se på Kilpatrick et al., (2001) sin modell om Mathematical proficiency, tyder resultatene på at elevene ikke har disse «sammenflettede» kunnskapene, og vil derfor medføre at elevene har enda mer vanskeligheter med å forstå matematikk. Overordnet viser funnene at eleven har liten grad av begrepsforståelse. Det tyder på at de kan formlene, men evner ikke å bruke formlene i rett sammenheng. Det igjen kan tyder på at de har en «passiv» læring.
De kan metoder, men det virker som de ikke forstår de helt og det blir dermed vanskeligere å bruke. Derimot er det en større grad av prosedyremessig flyt blant elevene, ettersom de forstår prosedyren for å finne volum av en boks og et prisme, men mangler muligens kunnskaper om disse prosedyrene. Strategisk kompetanse handler blant annet om å formulere et matematisk problem og løse det. Elevene skulle ikke formulere et problem, og denne «grenen» vil derfor ikke være like relevant. Oppgavene er problemløsningsoppgaver, som elevene klarer å løse greit, men utforsker lite med forskjellige løsninger.

Under både observasjonen og intervjuet, opplevde jeg elevene som relativt engasjerte. Selv om begrunnelsene og forklaringen deres var noe svake og noen ganger feil, ble det observert at de tenkte og reflekterte sammen med gruppen, og kom med forklaringer og begrunnelser. En så også en høy grad av logisk tenkning. Med andre ord viser dette at de har evnen til adaptivt resonnement, men trenger å utvikle dette mer (Kilpatrick et al., 2001). Intervjuet startet med at jeg spurte hva de syntes om å ha matematikk. Noen synes det var vanskelig og noen synes det var gøy, men dette kom veldig an på hva slags tema de har, som blant annet var Pytagoras, sannsynlighet og likninger. Heldigvis mente alle intervjudeltakerne at matematikkfaget er nyttig. Dette fikk jeg ikke spurt elevene om under observasjonen, men en kan håpe flesteparten tenker dette. Det vil i så fall vise produktiv disposisjon, der elevene opplever matematikk som noe nyttig og har verdi (Kilpatrick et al., 2001). Når vi samlet sett ser på alle disse «sammenflettede trådene», viser funnene antydning til at de mangler flere av dem, som også kan være grunnen til at elevene har vanskeligheter med å forstå og lære.

Det som har blitt analysert i denne oppgaven indikerer at elevene i studien har vanskeligheter med å utvikle matematisk modellering av problemet. Når de skal overføre informasjonen fra oppgaven til et matematisk språk og formler, mangler de kunnskap til å klarer å anvende kompliserte metoder. Ettersom det viser seg at elevene har en del kunnskapsmangler, blir det åpenbart vanskelig å bruke kunnskap en ikke har. Til tross for dette, kan man se at flere av elevene prøver å utforske og klarer greit å resonnere ut ifra det kunnskapsnivået de er på. En kan og se en grad av generalisering ofte gjennom bruk av symboler, og gjennom representasjon endrer de variabler. Slik som Amalie sitt forsøk i popcorn-oppgaven, der hun ser ut til å «bytte ut» variabelen fra $l \cdot b \cdot h$ med $a^2 \cdot b$.

Ifølge læreplanen skal elevene blant annet «beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.11-12), som med andre ord vil si at de skulle klart å lage en algebraisk representasjon og formell løsning for oppgaven. I tillegg til dette skulle man sett at elevene kunne «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.11-12). Elevene i intervjuet lagde regneuttrykk ut ifra deres kunnskapsnivå, men så ut til å streve med å forklare det de hadde lagd. Det tyder på at de ikke helt ser sammenhengen mellom en praktisk situasjon og utrykk med tall variabler og konstanter.

Flere av funnene kan tyde på at elevene har en formell læring i algebra, ved at de har pugget og husket, som kan føre til at de ikke klarer å bruke det som et redskap eller til hjelp for problemløsningsoppgaver. Kanskje elevene er i en tidlig algebra fase nå, og ikke bygd nok kunnskap til å se det i sammenheng med andre emner og situasjoner. Mangler på grunnleggende ferdigheter vil gjøre det vanskelig å lære algebra (Botten, 2016). Denne studien har i en grad sett på hva elevenes utfordringer er, som er nødvendig for hjelpe elevene til å kunne lykkes i matematikk (Barbieri et al., 2019). Samtidig finnes det ikke et svar på hva som vil være den beste løsningen, men funn kan indikere på hvilken retning man bør ta seg.

Under både observasjonen og intervju, får elevene litt mer hjelp og veiledning en planlagt. De fikk en liten ledetråd mot algebraisk tenkning, men til tross for det, er det ikke mye funn i retning av den slags tenkning. Selv om de fikk hjelp, klarte de ikke å bruke det, som kan bety at de har mangel på kunnskap. Jeg vil tro at de hadde et ønske om å vise alt det de kan og vise seg fra sin beste side, og har derfor svart så godt de kan. På den andre siden, kan spørsmålene jeg har stilt vært litt vinklet feil og vært vanskelig formulert. Hadde jeg vært kjent med klassen og hva de faktisk kan, kunne jeg tilpasset spørsmålene i større grad. Det kan også være mulig at jeg har overvurdert kunnskapsnivået til elevene.

Det er viktig å påpeke at elevene har kommet med et løsningsforslag på oppgaven, og siden de jobbet med LIST-oppgaver, er mange av løsningene riktige. Likevel skulle man tro at flertall av elevene hadde klart å løse de på flere måter eller utforsket med algebraiske løsninger, i alle fall når de får hjelp til å tenke i denne retningen. Generelt ser vi at elevene er svært visuelle og bruker intuisjon i aller høyeste grad, og bruker det som sin strategi til å løse oppgaven og argumentere for svarene deres. Elevene mangler flere grunnleggende kunnskaper, som gjør at de bruker sin egen logikk, men som de likevel ikke kan bevise eller forklare. De har ikke nok kunnskap til å gi argumenterende bevis, spesielt ved bruk av uttrykk med variabler og konstanter.

6.4 Forslag til videre undervisning og forskning

Før resultatene ble analysert, var det ikke tydelig hva funnene var. Men etter hvert som datamaterialet ble gjennomgått og kodet, ble det mer klart. Det har gjort at ny teori og refleksjoner har måttet ta plass. Funnene var noe annet enn forventet og har gitt meg flere nye spørsmål. Hva gjør at elevene ikke ser sammenhengen mellom praktiske situasjoner i geometri og algebraiske representasjoner, bevis og argumentasjon? Hvordan kan undervisning forbedres for at elevene skal kunne få grundige grunnleggende egenskaper, for å så få evnen til god resonnering og generalisering? Har elevene tydelige mangler i en tidlig algebra fase? Er undervisninger for temabasert og ikke fokusert på å se sammenhengen i alle matematiske temaer?

Elevene er svært visuelle og trenger å lære å se sammenhengen mellom algebraisk tenkning og modeller. En trenger å jobbe med alle «trådene» i Mathematical Proficiency og ha som mål å få elevene på et stødig nivå 3 for van Hiele modellen på ungdomstrinnet. Elevene må forstå det de lærer, for og så kunne bruke det og forstå hva de bruker. Det er hensiktsmessig å ikke ha algebra som at tema alene, men bruke det til å aktivt løse problemer (Kaput et al., 2008). Det hadde vært interessant å se hvordan en åttendeklasse eller tiendeklasse hadde løst popcorn-oppgaven og «volum av en boks»-oppgaven. Ville de løst det henholdsvis likt eller hadde de i større grad sette den algebraiske sammenhengen, i og med at de har hatt algebra mer nylig? Hva ville skjedd om elevene hadde blitt presentert fasiten? Hadde de forstått den? Hvordan kan vi på best mulig måte hjelpe elever til å få en bedre forståelse i matematisk tenkning?

7 Avsluttende refleksjoner

Denne masteroppgaven har tatt for seg bruk av problemløsende LIST-oppgaver for å se hvilke strategier og argumentasjoner elevene har. Overordnet viser funnene fra denne studien at elevene er svært visuelle og logiske. Elevene har ikke gode grunnleggende matematikk ferdigheter og mestrer ikke kjerneelementene godt nok til å kunne å løse studiens problemløsningsoppgaver på en algebraisk og formell måte. Av det som har kommet fram i observasjonen og intervjuet, tyder det på at elevene tenker mer geometrisk, de har nylig hatt mer om dette i forveien, men jeg ville tenkt at de skulle se mer algebraiske løsninger. Det vil kunne være at disse elevene ikke har nok erfaring i å se ting på en abstrakt måte. Geometri er mer visuelt enn algebra, som er veldig abstrakt. Geometri er mer «fysisk», «synlig» og praktisk. De bruker altså intensjon og visualisering til å argumentere for strategien de bruker.

Når jeg i etterkant ser på datainnhentingen, skulle jeg ønske at jeg gjorde flere ting annerledes. Jeg ville først og fremst passet på å ikke ha noen forventninger til elevenes løsningsforslag. Siden studien startet i en annen retning hvor jeg ville se hvordan elever oppfatter algebra, hadde jeg derfor et ønske om å finne algebraiske løsninger. Når jeg da ikke fant dette i den graden jeg så for meg, måtte jeg endre perspektivet på oppgaven og heller se det i retning av hvordan de løser det uavhengig av forventninger. Selv om jeg ga de litt for ledende spørsmål, så viser ikke funnene at de har gode grunnleggende kunnskaper i hovedsakelig algebra. Oppgaveteksten sier ikke noe om hvordan den skal løses, men det kan være noen andre elever enn de som var med i intervjuet, kunne klart å løse den algebraisk, men fant ikke dette som en åpenbar løsning. Det kan være dette rett og slett har mye med at de har hatt geometri mer nylig enn algebra. Jeg kan og skjønne hvorfor de bruker så mye logikk i svarene deres. Selv så jeg på det som åpenbart å bruke algebra i løsningen i starten, fordi det var dette jeg var interessert i å finne hos elevene. Men etter å ha sett på løsningene og hørt tankene til elevene, er logisk matematisk tenkning godt nok for å gi et godt argumenterende svar på ungdomstrinnet.

Oppgaven har hentet ut elementer fra Grounded Theory som var hensiktsmessig å bruke for analyse av studiens datamateriale. Jeg har ikke gjort alt «etter boka» fordi jeg hadde deler av teorien fra før og gikk inn i forskningen med noen forventninger. Når jeg hadde sett gjennom datamaterialet og fått oversikt over hva som kommer frem, fant jeg Grounded Theory som en god metode for analysen min. Det gjorde at jeg måtte vinkle forskningsspørsmålet mitt på en annen måte og legge til teori ut ifra hvilke kategorier kodede kom fram til. Heldigvis kunne jeg bruke veldig mye av teorien jeg allerede hadde.

Det vil være spennende å se hvordan undervisningen i matematikk utvikler seg og hvordan en som lærer kan gi elever en kunnskapsrik matematikkundervisning. Vi trenger mer kunnskap og erfaring om hvordan og hvorfor elever løser oppgaver, slik at vi bedre kan tilrettelegge for bedre undervisning. Denne oppgaven har lært meg utrolig mye og gitt meg mange svar for min problemstilling, men jeg sitter likevel igjen med flere spørsmål. Jeg undrer fortsatt på hvorfor på mange elever strever i algebra og med å se sammenhenger mellom matematikemner. Lærere må muligens begynne tidligere og se hvilke mangler som finnes fra tidlig skole alder. En god grunnmur vil være viktig for videre læring for elevene.

Litteraturliste

Alacaci, C., Shaista, K. & Knutsen, K.H. (2023). *Utforskende oppgaver og aktiviteter for skolematematikk: En ressursbok for barneskolelærere* [Under utarbeidelse]. Institutt for matematiske fag, UiA.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bada & Olusegun, S. (2015). Constructivism Learning Theory: A Paradigm for Teaching and Learning. *Journal of Research & Method in Education*, 5(6), 66-70.

Barbieri, C. A., Miller-Cotto, D & Booth, J. L. (2019). Lessening the load of misconceptions: design-based principles for algebra learning. *Journal of the learning science*, 28:3, 381-417, https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1573428

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (Red.) (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Resultater og analyser fra TIMSS 2015. Universitetsforlaget

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 2*. Universitetsforlaget.

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening: mening for alle*. Caspar forl.

Brannan, D. A., Esplen, M. F., & Gray, J. J. (1999). *Geometry*. Cambridge University Press.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til algebra. Nasjonalt læremiddelsenter.

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. (5.utg). Oxford University press.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 669-705.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. *Learning and Teaching Geometry, K-12*. 1-16.

Drost, E. A. (2011). Validity and reliability in social science research. *Education research and perspective, 38*(1), 105-123.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The Registers of Semiotic Representation*. Springer

Enge, O. & Valenta, A. (2011). *Argumentasjon og regnestrategier*. Matematikksenteret.

Glaser, & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. Aldine de Gruyter.

Hervik, S. (2021, 23.juni). Algebra. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/algebra

James, G., James, R. C. & Alchian, R. C. (1992). *Mathematics dictionary* (5. Utg.). Van Nostrand Reinhold.

Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the Early Grades*. Routledge

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (1.utg). Springer Nature.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & Mathematics Learning Study Committee & National Research Council Center for Education, Division of behavioural social science education. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics.* National Academy press.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan I matematikk* 1.-10.trinn (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16

Kunnskapsdepartementet. (2019, 18.november). *Nye læreplaner skal gi elevene tid til mer fordypning* [Pressemelding]. https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/nye-lareplaner-skal-gielevene-tid-til-mer-fordypning/id2678138/

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Intensiv matematikkundervisning kan gi mindre frafall.* https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/intensiv- matematikkundervisning-kan-gimindre-frafall/id2690088/

Lee, L. & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428-433.

Nakken, A. H. & Thiel, O. 2014. *Matematikkens kjerne*. Fagbokforlaget.

Nosrati, M. (2019). Matematiske aktiviteter med lav inngangsterskel og stor takhøyde. I E. Klaveness., K. Lisbeth & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk*. Fagbokforlaget

Oanh, P. T. K. & Nhung, N. T. H. (2022). Constructivism learning theory: A Paradigm for Teaching and Learning English in secondary education in Vietnam. *International Journal of Scientific and Research Publications*, *12*(12), 93-98. http://dx.doi.org/10.29322/IJSRP.12.12.2022.p13211

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2021). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm Akademisk.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. & Brizuela B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum.

Seelay, C. L. (2004). A Journey in Algebraic thinking. *The national Council of Teachers of mathematics.*

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (4.utg.). Allyn and Bacon.

Wæge, K. (2014). Samtaletrekk – redskap I matematiske diskusjoner. Matematikksenteret.

Vedlegg

Vedlegg 1- Informasjonsskriv til foreldre

Vil du delta i forskningsprosjektet «Niendeklassingers oppfatninger innenfor algebra»

Mitt navn er Silje Kristin Langaker og jeg er student på grunnskolelærerutdanningen 5-10 med matematikk som masterfag ved Universitetet i Agder. Dette er et spørsmål til deg om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se hvordan niendeklassinger oppfatter algebra. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære.

Formål
Jeg skriver en masteroppgave hvor jeg vil finne mer ut om hvordan elevene oppfatter algebra. Jeg ønsker å gjennomføre en undersøkelse på niendetrinn, hvor elevene skal få arbeide med én stor eller flere mindre algebraiske oppgaver. Intensjonen med oppgavene er å få fram hva slags oppfatninger elevene har innenfor algebra og hvilke strategier de bruker. Resultatene vil bli skrevet om i masteroppgaven.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Silje Langaker (student), Kristoffer Heggelund Knutsen og Cengiz Alacaci (veiledere og vitenskapelig tilsatte) ved Universitet i Agder er ansvarlige for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg vil gjerne forske på hvordan elever på ungdomstrinnet jobber med algebra og deres oppfatninger innenfor dette temaet. Det gjør at jeg trenger godkjennelse fra foreldre/foresatte om at ditt barn kan være med i forskningen. Alle elevene i ditt barns klasse har fått forespørsel om å være med. Det er ingen spesiell grunn til at akkurat denne klassen ble valgt.

Hva innebærer det for deg å delta?
Elevene vil få hver sin oppgave/oppgaver som de skal svare på. Samtidig som de gjør dette vil jeg gå rundt i klasserommet, observere, stille spørsmål og ha samtaler med dem om hvordan de tenker når de løser oppgaven(e). Jeg kommer til å ta notater underveis i observasjonen og stille elevene spørsmål. Etter de har fullført arbeidet med oppgavene vil jeg samle inn elevsvarene og analysere hvordan elevene har løst oppgaven. Basert på løsningene til elevene ønsker jeg å velge ut noen av elevene til et gruppeintervju eller individuelle intervju. I intervjuet vil det bli tatt opp lyd, og samtalen vil dreie seg om oppgaven generelt, hva de tenkte om de, hvilken vanskelighetsgrad hadde den, opplevde de mestringsfølelse, hvilke strategier bruker de og hvordan de resonnerer rundt algebra. Du som forelder kan på forespørsel få se intervjuguiden på forhånd, ved å ta kontakt med meg på e-post eller telefon Jeg kommer ikke til å samle inn annen data om elevene, kun data fra oppgavene og intervju.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis eleven i samråd med foreldrene velger å delta, kan man når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven dersom den velger å ikke delta eller senere velger å trekke seg.
Siden forskningen vil gjennomføres i undervisningstiden, vil de som ikke er med å delta være med på opplegget, men det vil ikke bli samlet inn resultater fra disse elevene.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De som vil ha tilgang til opplysningene er Silje Kristin Langaker (student), Kristoffer Heggelund Knutsen og Cengiz Alacaci (veiledere).
- Navnet til eleven vil bli byttet ut med fiktive navn og/eller kode og lagret ved forskningsserveren ved Universitetet i Agder.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes juni 2023. Etter prosjektslutt vil datamaterialet bli anonymisert. I januar 2024 vil alt av lydopptak bli slettet fra forskningsserveren. Flere av resultatene vil likevel kunne komme med i masteroppgaven, i form av transkriberte vedlegg. Hvis transkripsjonen inngår som en del av oppgaven, vil disse også kunne bli gjenbrukt i videre forskning og undervisning. I den ferdigstilte masteroppgaven vil det imidlertid ikke være mulig å knytte dataene til elevene eller skolen, da disse vil være i anonymisert form.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Silje Langaker ved Universitetet i Agder.
  Mail: siljel18@uia.no
- Kristoffer Heggelund Knutsen UiA ved institutt for matematiske fag.
  Mail: kristoffer.h.knutsen@uia.no
- Cengiz Alacaci Mail UiA ved institutt for matematiske fag.
  Mail: cengiz.alacaci@uia.no
- Vårt personvernombud: Trond Hauso
  Mail: personvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Silje Kristin Langaker (Student/forsker) | Kristoffer Heggelund Knutsen (Veileder) | Cengiz Alacaci (Veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Niendeklassinger oppfatninger innenfor algebra», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn:

- ☐ deltar i intervju
- ☐ deltar i gjennomføring av matematikk-oppgaver.

Eventuelle kommentarer til samtykket

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

---

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2 - Godkjennelsesbrev fra NSD (Sikt)

Sikt

Meldeskjema / Niendeklassingers oppfatninger av algebra / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
628156	Standard	13.12.2022

Prosjekttittel
Niendeklassingers oppfatninger av algebra

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
Kristoffer Heggelund Knutsen

Student
Silje Kristin Langaker

Prosjektperiode
01.01.2023 - 01.01.2024

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 01.01.2024.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 01.01.2024

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Vi vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med

prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke typer endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3 - Intervjuguide

Intervjuguide

1. **Matematikk som fag**
    a. Hvordan oppleves matematikkfaget for dere som elev?
    b. Opplever dere matematikkfaget som nyttig?
2. **Motivasjon i matematikk**
    a. Hvordan er motivasjonen når dere kommer til matematikktimene?
    b. Hva tenker/føler du?
    c. Hva synes dere om egen innsats i matematikk?
3. **Repetere**
    a. Husker dere hva dere gjorde før dere dro på skiskole?
    b. Har dere tenkt på oppgavene i mellomtiden?
    c. Hva synes dere om oppgavene?
4. **Avslutning**
    a. Hva om det hadde vært en sylinder?
    b. Hva om det hadde vært et A3 ark eller større?
    c. Hvor mange prosent fyller de hverandre? (om de klare å komme i dybden)

Vedlegg 4 - Undervisningsopplegg

Undervisningsopplegg til utforskningen

Generelt

- Presenterer meg selv og hvorfor jeg er her
- Elevene sitter alene og tenker
- Elevene jobber i grupper
- Student observerer, og lærer bruker samtaletrekk (se Wæge)
- Student/lærer snakker med elever i plenum (oppsummerer)
- 1 uke med analyse
- (uke 6) fokusgruppe intervju, med 2-3 grupper individuelt

Oppgave 1: Popcorn oppgave, list-oppgave

- Elevene er først en og en for å tenke selv
- Her er to forskjellige prismer, hvem rommer mest volum? Eller er de like?
- Elevene lukker øynene, hvem tror den lange har mest volum og hvem tror den korte? (De rekker opp hånda) Hvor mange?
- Hvorfor tror de dette? Setter seg i grupper på 3 (noen fire)
- Snakker sammen og argumenterer for svaret sitt. Skriver dette ned på arket sitt.
- Diskuterer sammen – lærer **observerer** og bruker **samtaletrekk**
- Få elevene til å resonnere og forklare hva de tenker
- Elevgruppen viser hva de har tenkt på tavla?
- Sammen i plenum: tar popcorn i den høye og så den lave

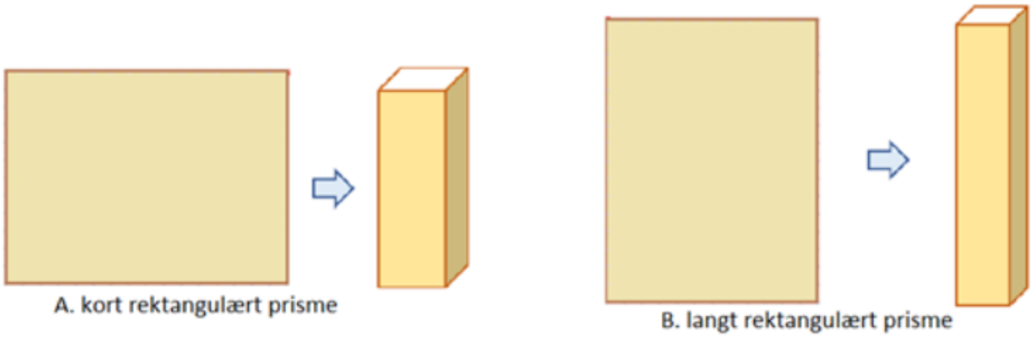
Oppgave 2: Boks og volum

- Gruppene på 3-4 stykk får et oppgaveark hver
- Gruppene får et ark og en saks hver og tester ut det som står på oppgavearket.
- Hva finner de ut av? Hvordan tenker de? Aritmetisk? Algebraisk?
- Klarer de å tenke matematisk her?
- Hvor mange av elevene/gruppene
- Elevgruppen viser hva de har tenkt på tavla?

Vedlegg 5 - Popcorn-oppgaven

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
   ( ) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass ( ) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

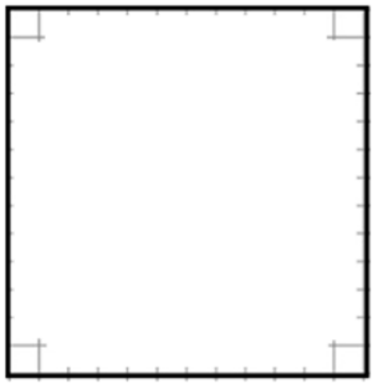
Vedlegg 6 - «Volum av en boks»-oppgaven

Oppgave algebra LIST-oppgaver

****

Volum av en boks

Et ark har like lange sider på 12 cm. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en <u>åpen</u> boks.



A. Hvilken størrelse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?

Vedlegg 7 - Elevbesvarelser

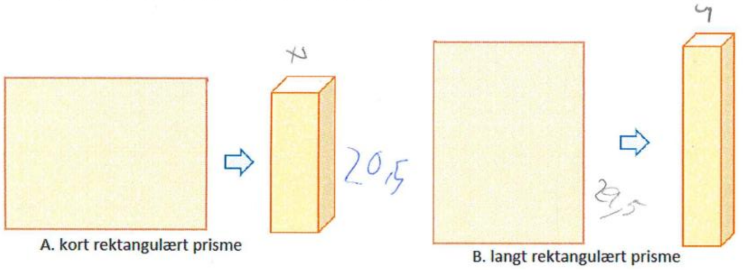
Elevenes navn er fjernet. Om elevene har skrevet navnet sitt på arket, er dette visket vekk.

Popcorn-oppgaven

Gruppe 1

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
( ) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass (X) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

A og B har like mye plass fordi arken e er like store

Alle andre sier de er like store så da trov vi også det

høyde · Lengd · Bredde

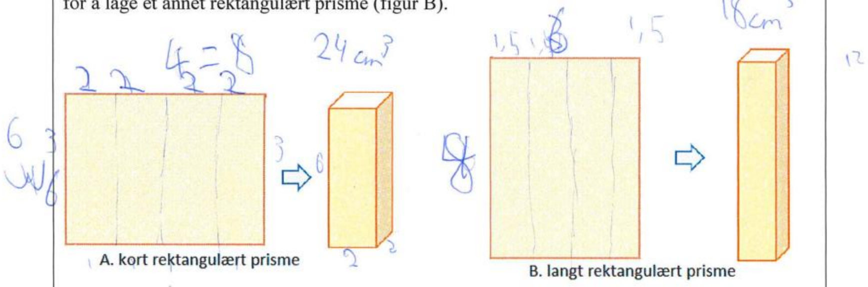
A

Ferdig

Gruppe 2

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
( ) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass ~~(X) **A og B** har plass til like mye~~

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

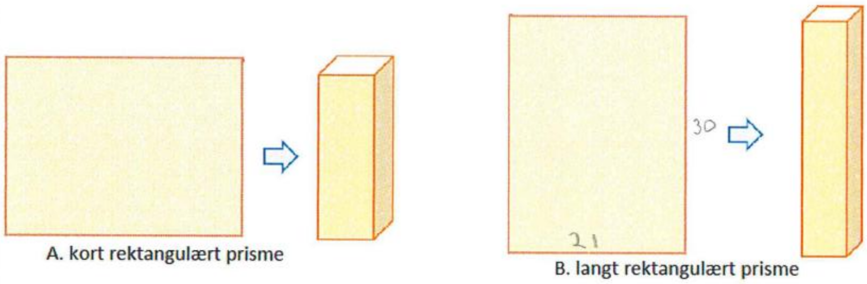
https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

A) Vi tenker at prismene har like mye plass fordi de er IDENTISKE, siden de grunnleggende formene er lik altså før ~~de~~ du brettet de så har det ikke noe å si.

Gruppe 3

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
( ) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass (●) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

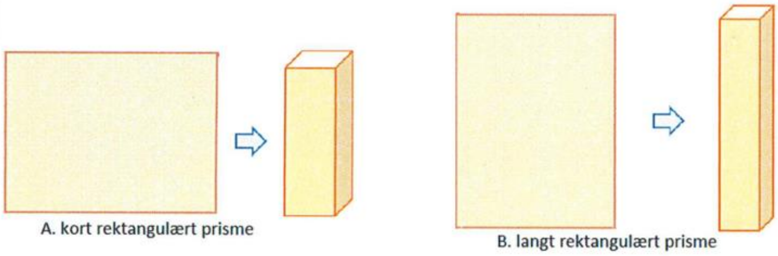
ttps://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

Det er like mye plass i prisman fordi den ene er kort og brei og den andre er høy og tynn.

Gruppe 4

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
(X) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass (X) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003). M

https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

Noen mener at A for plass til mere fordi den er : mer Bred.

Noen andre mener at A og B for plass til like mye fordi arkene er like store.

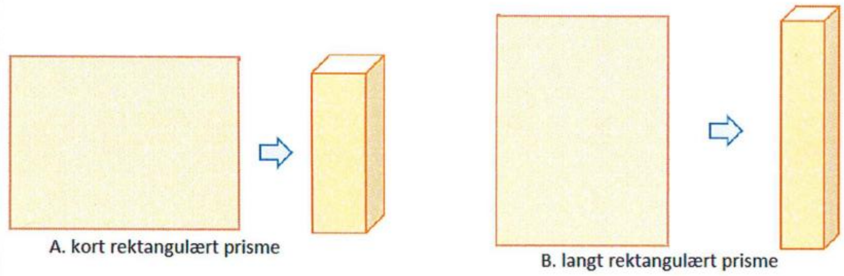
[illegible] tenker A

[illegible] og [illegible] tenker at A og B har plass til like mye.

Gruppe 5

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
( ) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass ( ) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

A. Vi tenker begge har like stort volum fordi begge er lagt utifra en likestor flate.

B. skjekke

29,5 5 5

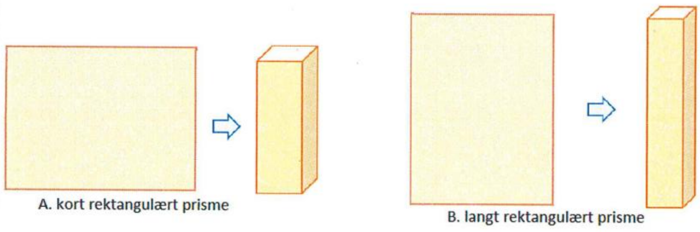
29,5 · 5 · 5 737,5 cm³

21 · 7,5 · 7,5 1187 cm³

Gruppe 6

Popkornoppgaven

Du har to identiske rektangulære A4-ark. Tenk deg at du bretter det første arket etter lengderetningen slik at det blir et rektangulært prisme (figur A), og det andre etter høyderetningen for å lage et annet rektangulært prisme (figur B).



A. Gjett hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popkorn (hvilket prisme som har størst volum), A eller B? Registrer gjettingen din ved å sette en hake nedenfor.
(X) **A** har mest plass ( ) **B** har mest plass ( ) **A** og **B** har plass til like mye

B. Hvordan kan du være sikker på hvilket rektangulært prisme som vil ha plass til mest popcorn? Diskuter med sidemannen din, utvikle en strategi og utfør den for å sammenlikne de to prismene. Vær forberedt på at dere i etterkant av utforskningen skal diskutere funnene med hele klassen.

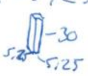
Figur 1: Popkornoppgaven (tilpasset fra Alacaci et al., 2003).

https://figurethis.nctm.org/challenges/c03/challenge.htm

A. Vi tror figurene er like store fordi det er brukt det samme arket, men det kan også være at A er størst fordi den øverste flaten er større på den enn på B. Vi endte på at A er størst fordi vi prøvde å regne volumet, og da endte vi opp med det. Vi fant hvor store hver av sidene var og ganget h·b·d

$5 \cdot 5 \cdot 10 = 250$ $2,5 \cdot 2,5 \cdot 15 = 93,75$

$21 : 4 = 5,25$



$5,25 \cdot 5,25 \cdot 30 = 826$ = Figur B

735

A $30 : 4 = 7,5 \cdot 7,5 \cdot 21 = 1181$

$5,4 \cdot 5,5$

25 1125

Volum av en boks-oppgaven

Gruppe 1

Oppgave algebra LIST-oppgaver

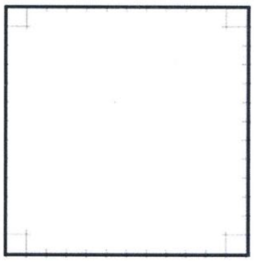
****

Volum av en boks

Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en åpen boks.

A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?



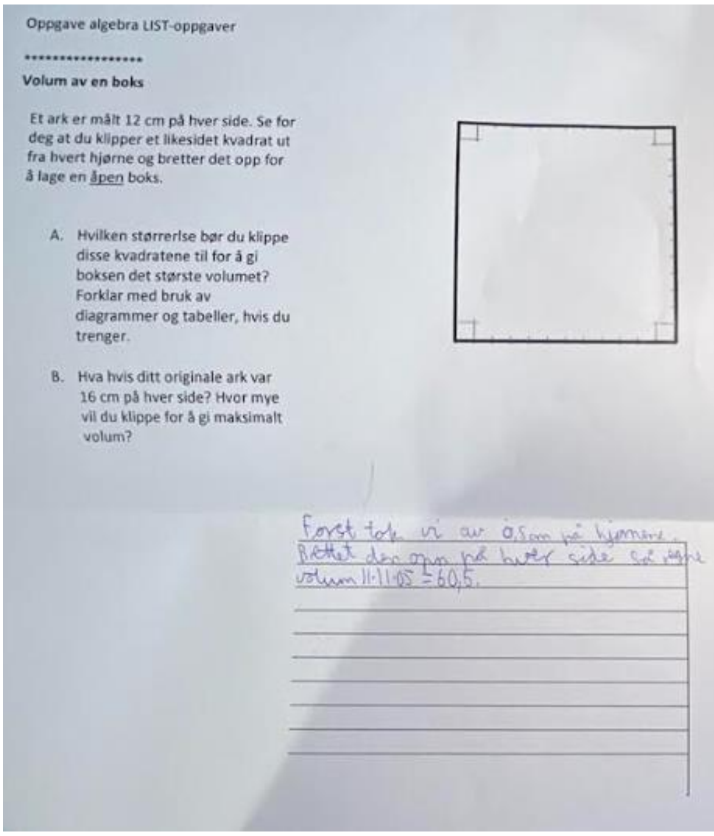
Vå lagde fire bokser
den ene hadde 100 i
volum og den hadde
1cm med papir opp
men så klippet vi
en med 4cm opp og
da fikk vi 44 i volum
men så klippet vi en
med 2cm opp og da
ble volumet 128

$4 \cdot 11 \cdot 11$

$10 \cdot 10 \cdot 1$

$2 \cdot 8 \cdot 8$

Gruppe 2



Oppgave algebra LIST-oppgaver

****

Volum av en boks

Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en <u>åpen</u> boks.

A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?

Først tok vi av 0,5cm på hjørnene. Brettet den opp på hver side så regne volum 11·11·05 = 60,5.

Gruppe 3

Oppgave algebra LIST-oppgaver

****

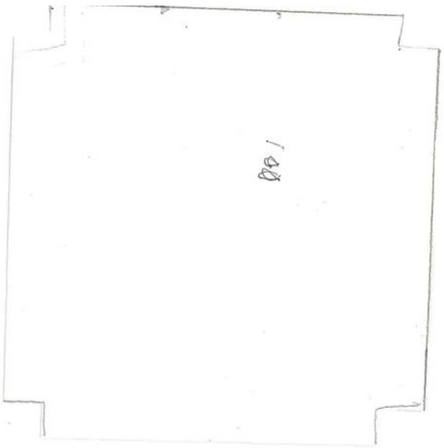
Volum av en boks

Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en åpen boks.

A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?

128 hvis du tar vekk ~~2~~ cm
på hver side får du 128.
Så det vil si at det er
det høyeste tallet du kan få



Gruppe 4

Oppgave algebra LIST-oppgaver

****

Volum av en boks

Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en åpen boks.

A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?

Vi har funnet ut at jo mere du klipper, jo større volum blir det.

64
+64
=128

90,25
+90,25
=180,50

L 8
B 8
H 2
128

L 9,5
B 9,5
H 1
90,25

Gruppe 5

Oppgave algebra LIST-oppgaver

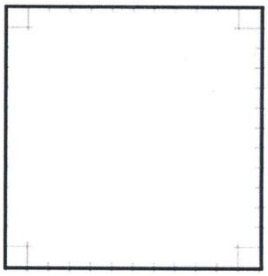
****

Volum av en boks

Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en åpen boks.

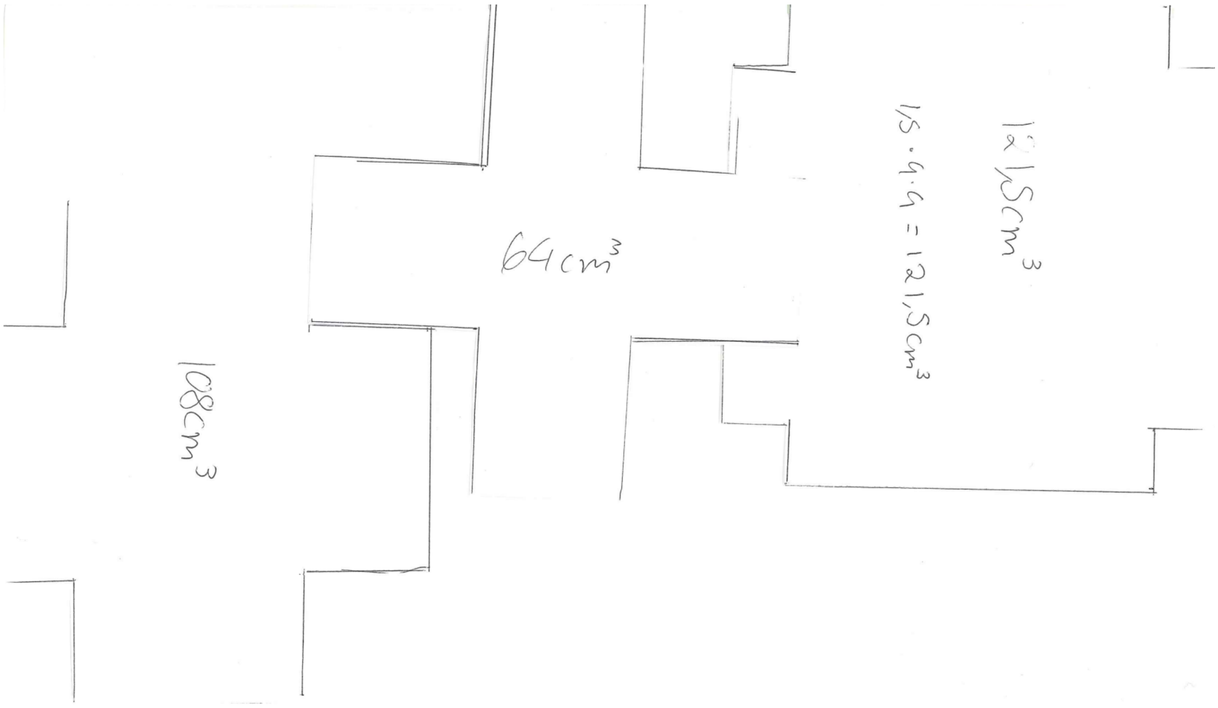
A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?



a)

Vi prøvde oss fram
med ulike mål på
hvor mye vi klippet inn.
Vi prøvde først 4cm
så 3 cm så 1,5cm og
til slutt 1cm. Det som ga størst volum var 1,5cm.
Da fikk vi 121,5cm^3.


121,5cm³
15·9·9 = 121,5cm³
64cm³
108cm³

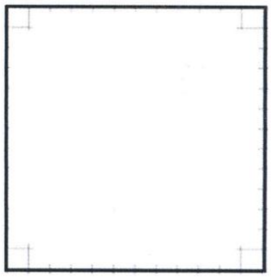
Gruppe 6

Oppgave algebra LIST-oppgaver

****

Volum av en boks

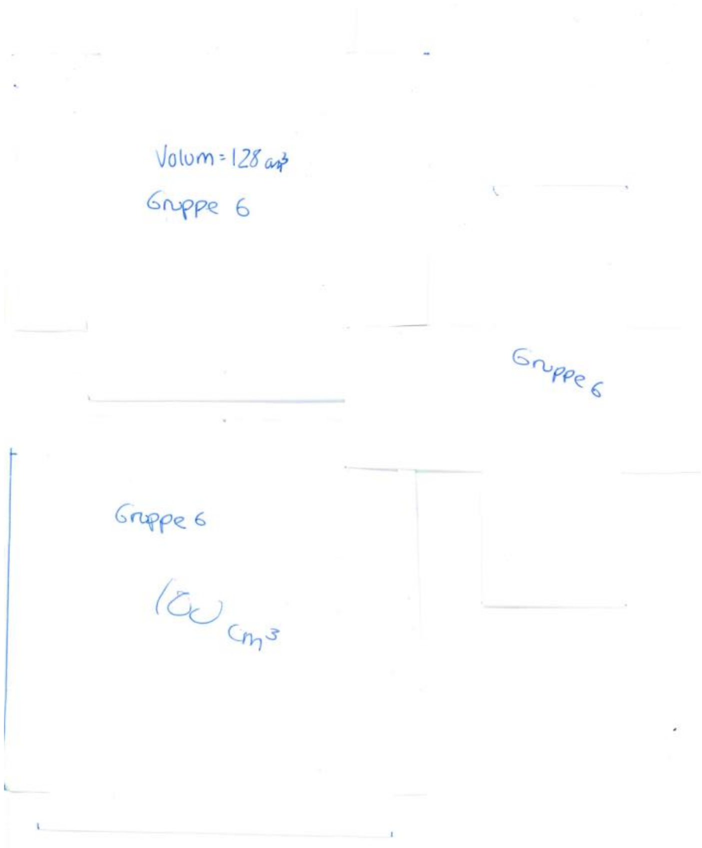
Et ark er målt 12 cm på hver side. Se for deg at du klipper et likesidet kvadrat ut fra hvert hjørne og bretter det opp for å lage en <u>åpen</u> boks.



A. Hvilken størrerlse bør du klippe disse kvadratene til for å gi boksen det største volumet? Forklar med bruk av diagrammer og tabeller, hvis du trenger.

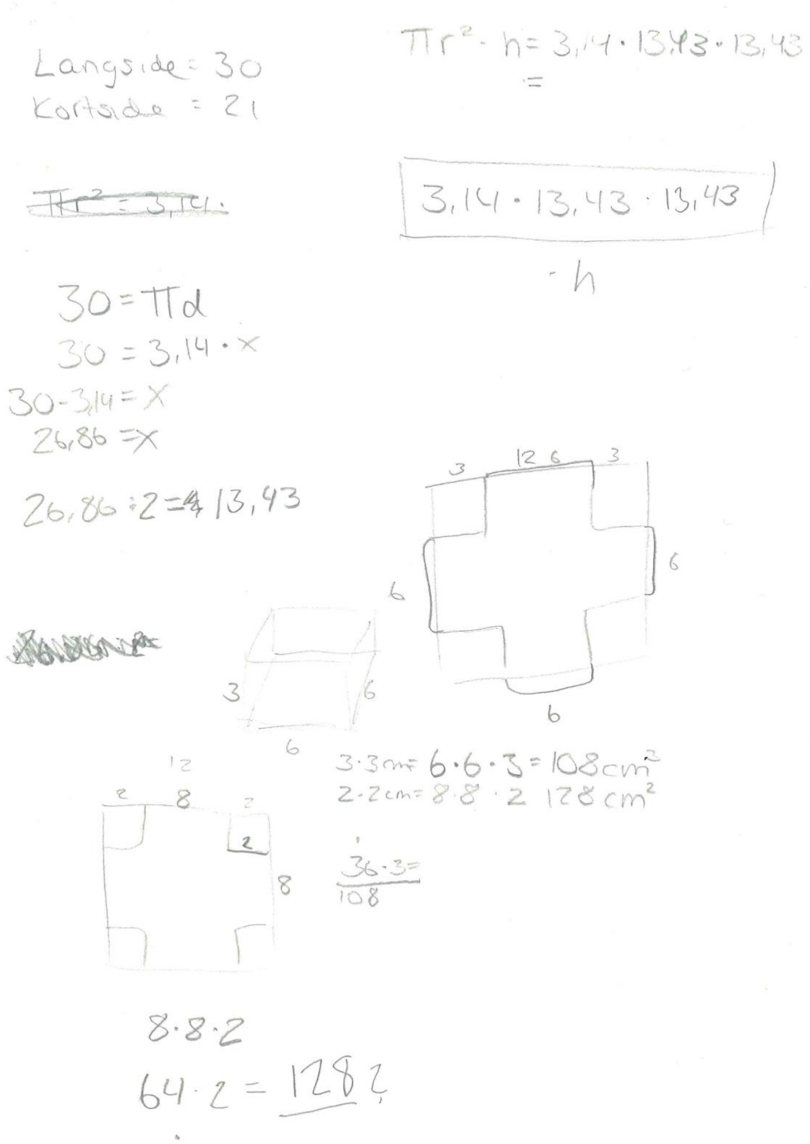
B. Hva hvis ditt originale ark var 16 cm på hver side? Hvor mye vil du klippe for å gi maksimalt volum?

A. Vi trur at det blir mest volum når vi klipper et kvadrat på 2·2 cm fordi det var mindre volum på 1·1 og mindre på 3·3

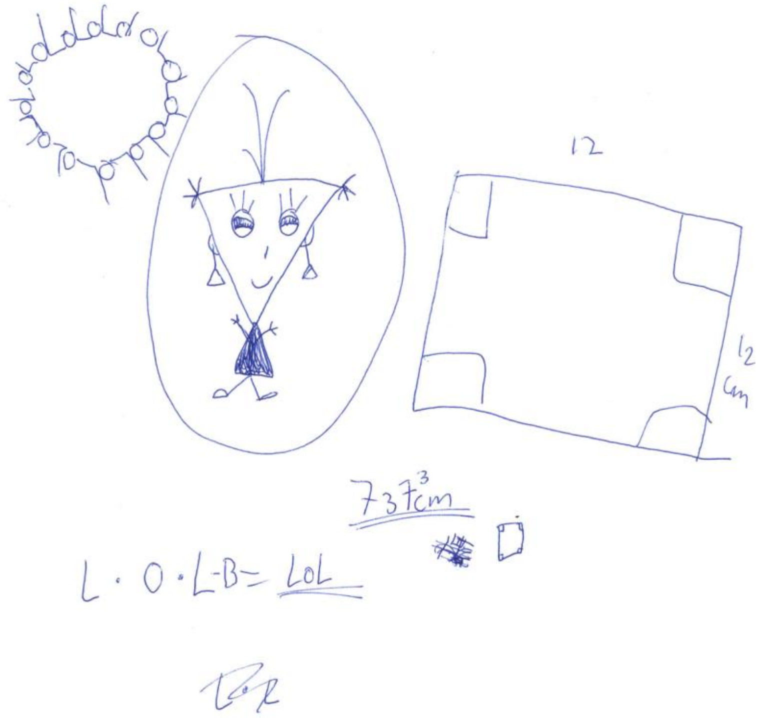

Volum = 128 cm³
Gruppe 6
Gruppe 6
Gruppe 6

Utregninger fra intervjuet

«Anna»



«Lise»



«Amalie»

$A \cdot B \cdot C = ABC$

$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \, cm^3$

$2 \cdot 8 \cdot 8 = 128 \, cm^3$

$16 \cdot 8 = 128$

$\pi r^2 \cdot h$

$= 3.14 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 30$

$= 3.14 \cdot 25 \cdot 30$

$= 3.14 \cdot 750$

$=$

$25 \cdot 30 = 750$

$16 \cdot 8 = 128$

$750 \cdot 3,14$

3000
7500
225000
$229200 \, cm^3$

$3 \cdot 6 = 18$

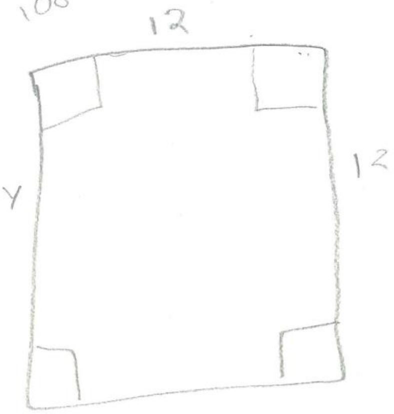
$3 \cdot 6 \cdot 6 = 108 \, cm^3$

$18 \cdot 6 = 108$

$\pi r^2 \cdot h$

$3,14 \cdot x \cdot x \cdot y$

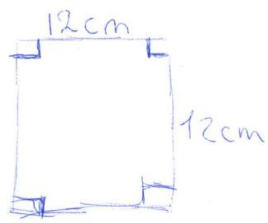
$3.14 \cdot x^2 \cdot y$



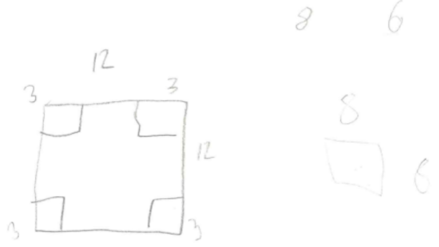
«Sara»

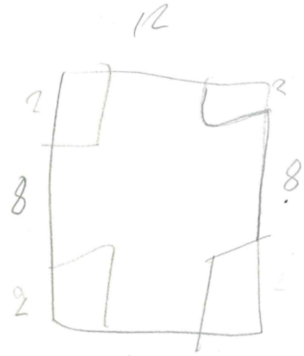
$\pi r^2 \cdot h$

$= 3,14 \cdot$



«Pia»





$8 \cdot 8 \cdot 2 = 56 =$

56

$Pr^2 \cdot h$

kort. lang
21 30

$\sqrt{47,16}$

$\cdot 30$

$P = 3.14 \cdot 10.5$

~~4710~~

$3.14 \cdot 15 =$

3.14 · 15
15.76
3.14

21.6

15.76
3.14
= 47.16

15.76
3.14

6

Vedlegg 8 – Transkribering

Transkribering fra intervju

…	Pause i samtale under 5 sekunder
(…)	Pause i samtale på over 5 sekunder
(Setning)	En forklaring fra forskeren for at leseren skal forstå
[Hendelse]	Hendelse som skjer under samtalen
Alle	Alle jentene sier det samtidig

Nr.	Navn	Uttalelser
1.	Forsker	Først så lurer jeg på hvordan oppleves matematikkfaget for dere?
2.	Lise	Vanskelig
3.	Forsker	Vanskelig?
4.	Pia	Helt greit, det kommer an på hva det er.
5.	Forsker	Ja
6.	Anna	Ganske gøy
7.	Forsker	Ganske gøy?! Så bra! Hvorfor er det gøy?
8.	Anna	Fordi det er ... jeg vet ikke
9.	Lise	Det er gøy hvis du kan det
10.	Alle	Ja
11.	Anna	Alt er gøy hvis du kan det
12.	Forsker	Mhm ... Så det er gøy hvis det er et greit tema?
13.	Alle	Ja
14.	Forsker	Hva er det som er de beste temaene da?
15.	Lise	Sjanse
16.	Forsker	Sjanse? Sannsynlighet?
17.	Lise	Ja
18.	Forsker	Noe annet?
19.	Pia	Brøk
20.	Forsker	Brøk? Det er enkelt?
21.	Amalie	Geometri
22.	Forsker	Geometri? Ja.
23.	Lise	Ja, det er gøy. Og sånne koordinater. Det er ganske gøy.
24.	Pia	Koordinater er gøy
25.	Forsker	Sånn på kart?
26.	Anna	Ja, jeg liker egentlig likninger [jentene ler]
27.	Forsker	Ja!
28.	Sara	Det derre Pytagoras! Det er veldig gøy!
29.	Amalie	Ja, Pytagoras er gøy!
30.	Forsker	Pytagoras er gøy?! Ahh så fantastisk å høre!

31.	Karoline	Det var gøy når man klarte det. Hvis man fikk det til så ble det veldig gøy å jobbe med.
32.	Forsker	Ja, så gøy. Hva med algebra da?
33.	Lise	Ehh nei jeg skjønner ikke det fortsatt
34.	Anna	Vi hadde Student en gang, og det gikk ikke bra. Etter det så ...
35.	Anna	Vi har hatt veldig mye vikarer så daa
36.	Forsker	Ja, da er det litt vanskelig?
37.	Anna	Jaa
38.	Forsker	Det er bedre å ha en lærer?
39.	Lise	Ja
40.	Forsker	Skjønner. Ehm hmm synes dere at matematikkfaget er nyttig?
41.	Anna	Ja
42.	Sara	Ja
43.	Pia	Ja
44.	Amalie	Ja
45.	Forsker	Ja?
46.	Lise	Ja
47.	Pia	Men ikke alt!
48.	Forsker	Ikke alt?
49.	Forsker	Det er jeg faktisk litt enig i. I noen ting
50.	Sara	Mye av det får du bruk for. Men det er stort det meste det sånn obligatoriske som pluss og minus og algebra og sånn.
51.	Forsker	Det må man jo kunne
52.	Sara	Det det jeg bruker mest, jeg bruker ikke noe av det andre. Man bruker ikke Pytagoras
53.	Forsker	Nei ...
54.	Anna	Men da kan jo være noen kommer til å bruke det. Noen kommer til å gjøre det, sånn hvis man skal tegne hus og sånn, så må man jo kunne det
55.	Forsker	Jaa ... ja, ikke sant. Ehm hvordan er motivasjonen deres ehh når det kommer til matematikk timene?
56.	Pia	Kommer an på hva det er.
57.	Forsker	Kommer an på hva slags tema?
58.	Amalie	Hvis jeg får det til så, så er det ganske stor motivasjon egentlig, men
59.		Jaa
60.	Amalie	Hvis man, hvis det er veldig kjedelig, såå ... Da bare orker man ikke
61.	Sara	Hvis du vet at du kommer til en matte-time, nei det er ikke gøy. Du vet at du ikke får det til. Da liker du ikke å gå inn der på en måte.
62.	Forsker	Mhm da er det ikke så motiverende?
63.	Sara	Neii ...
64.	Forsker	Men når dere er motiverte så jobber dere godt?
65.	Anna	Jaa
66.	Forsker	Mhm

67.	Lise	Jaa
68.	Forsker	Så bra.
69.	Lise	Det vi gjør nå er kjedelig da. Jeg skjønner ikke noen ting. Hva vi gjør …
70.	Forsker	Hva er det dere har nå da?
71.	Lise	Vi har sånne trekanter. Stor og liten. Likhet, hva er det?
72.	Forsker	Kongruens?
73.	Lise	Jaa. Ja jeg liker ikke det. Skjønner ikke shit.
74.	Forsker	Hahaha
75.	Amalie	Det skjønner jeg ikke hvorfor vi skal få bruk for i livet.
76.	Forsker	Nei ... Okei
77.	Amalie	Kanskje om man skal bli lærer
78.	Forsker	Ja! Absolutt ... Ehm hva synes dere om egen innsats i matematikk?
79.	Alle	Bra!
80.	Forsker	Alle er bra? Dere synes dere gjør det greit?
81.	Anna	Ja
82.	Lise	Nei
83.	Amalie	Helt greit
84.	Lise	Det kommer an på
85.	Forsker	Okei
86.	alle	Heheh hm
87.	Lise	Jeg kan gjør det greit hvis jeg vil, men hvis ... Det tar så lang tid å lære det så gidder jeg ikke
88.	Forsker	Neii.. Okei
89.	Lise	Stress
90.	Forsker	Ehmm hva husker dere ehm av hva dere gjorde før skiskolen? Altså med meg da. Når jeg var her. Hva husker dere av det?
91.	Sara	Det var noe bokser og ett eller annet
92.	Anna	Vi skulle finne ut av hvor ... Mest popcorn ...
93.	Forsker	Popcorn?
94.	Lise	Ja, vi fikk aldri spist det
95.	Forsker	Nei, jeg brente den
96.	Alle	Heheheh
97.	Forsker	Husker dere at jeg luktet brent popcorn?
98.	Alle	Jaa
99.	Forsker	Ehm husker dere den prismen? Prisme-oppgaven?
100.	Lise	Jaa
101.	Pia	Jaa
102.	Forsker	Mhm den så sånn ut. [viser oppgaven på PC-skjermen]. Husker dere jeg hadde med to prismer, en som var litt lav og en som var litt høyere? Men lagd av et A4 ark begge to?
103.	Anna	Ja
104.	Forsker	Mhm. Hmm husker dere hva dere sa, og hva dere mente om den? Hva hvem som var høyest eller lavest eller om de var like?

105.	Lise	Jaa
106.	Forsker	Hva sa du da?
107.	Lise	Ehh jeg mente at begge var like fordi begge var liksom lagd av A4 ark
108.	Forsker	Mhm
109.	Lise	Også fant jeg ut av ... Husker egentlig ikke hva jeg fant ut av. Men en av de hvert fall, når vi regnte de, så fant vi ut at en var større og husker ikke hvilke det var
110.	Anna	Jeg tror det var A, den som var breiest.
111.	Forsker	Jaa, a var den bredeste, den laveste
112.	Anna	Jaa
113.	Forsker	Mhm så alle fant ut av det?
114.	Sara	Ja til slutt ja
115.	Forsker	Jaa
116.	Sara	Men jeg trodde først at ... De var like
117.	Forsker	Alle trodde de var like?
118.	Anna	Jeg trodde egentlig det var den dærre lave fordi den overflaten som ikke hadde noe ark på seg på en måte, den var større
119.	Forsker	Ja
120.	Anna	Sånn, i toppen og bunnen
121.	Forsker	At den bunnen var størst?
122.	Anna	Og toppen? At den er større enn på den andre. Selv om du har samme ark, så er det noe som ikke har ark på seg på en måte.
123.	Forsker	Jaa, for det var jo en åpen boks. Så det var jo bare, den var jo bretta sånn [viser med et A4 ark]. Det var jo ikke noe på sidene. Ehh joo jeg så flere dere regna ut noe. Hva var det dere regna ut?
124.	Amalie	Emm vi tok en linjal også målte vi sidene også regne vi lengde ganger høyde ganger bredde
125.	Forsker	Mhm og hva er det?
126.	Amalie	Åssen man regner …
127.	Forsker	Hva er lengde ganger bredde ganger høyde? Hva finner du ut av da?
128.	Anna	Ehh sånn ... volumet
129.	Forsker	Volumet ja! Mhm hvorfor tenkte dere at det var lurt?
130.	Amalie	Det var jo spørsmålet. Hvilke av dem som hadde størst volum.
131.	Forsker	Jaa
132.	Amalie	Så det er jo lurt å vite
133.	Jentene	Hehehe
134.	Forsker	Heheh ja veldig lurt. Kan være flere måter. Ehm også fant dere ut at ved å regne ut så var den lave størst?
135.	Pia	Mm
136.	Forsker	Den brede? Hvorfor kan det være slik?
137.	Lise	Ehh jeg hørt ikke hva du sa?
138.	Alle	Hahaaha
139.	Forsker	Hvorfor er det sånn?

140.	Anna	Fordi den overflaten ... Det jeg sa i stad egentlig.
141.	Forsker	Ja, at den er størst?
142.	Anna	Ja
143.	Forsker	Er det noen andre grunner? Er det noen annen måte vi kan tenke på? (…) Vanskelig spørsmål?
144.	Lise	Jaa
145.	Forsker	Ehm mener dere fortsatt det samme?
146.	Lise	Om hva da?
147.	Forsker	Om det dere ...
148.	Amalie	Jaa
149.	Anna	Ja
150.	Forsker	Men dere endra mening med en gang dere regna ut?
151.	Lise	Ja
152.	Forsker	Mhm
153.	Sara	Men det første man tenker på er jo at de er like fordi de har likt ark
154.	Forsker	Jaa det tenkte faktisk jeg også
155.	Jentene	heheh
156.	Forsker	Det gir jo mest mening det?
157.	Lise	Ja det gjør det
158.	Forsker	Men så regner man det ut også gir det også mening? Er ikke det litt rart?
159.	Sara	Jo
160.	Forsker	Ehm kan dere … kan en av dere prøve å regne ut, vise meg en utregning. Prøv å bruke, klarer dere bruke noen begreper eller matematikk på [jentene fniser] en eller annen måte?
161.	Amalie	Hæ? [jentene ler]
162.	Forsker	Kan du vise meg hvordan du fant ut av det?
163.	Amalie	Ja. Uten noen tall? Eller bare …
164.	Forsker	Ehm hva du vil. Spiller ingen rolle
165.	Amalie	[Begynner å skrive på papiret]
166.	Forsker	[leser] A ganger B ganger C?
167.	Amalie	Jaa hvis det, assa, liksom svaret er de tre A ganger B ganger C=ABC hvis det gir mening
168.	Sara	Hvis du liksom har forskjellig tall der, så blir det jo ...
169.	Amalie	Du kan jo skrive volum, ehh volum der
170.	Sara	Hvis du tar noen tall ...
171.	Forsker	Er det ABC der?
172.	Amalie	Ja det var bare for å vise at det var svar, at det ...
173.	Sara	Kan du ikke bare vise med noen tall?
174.	Amalie	Okei. 2 ganger 5 ganger 2 (…) tjue? Tjue?
175.	Forsker	At det er lengdene? [viser på arket]
176.	Anna	Men volumet da?
177.	Forsker	Så nå bare valgte du noen tall for å vise?
178.	Amalie	Ja

179.	Forsker	Var det noen grunn til at du tok ABC?
180.	Amalie	Ehmm det er det vi har
181.	Anna	Men to av sidene er jo like lange?
182.	Amalie	Ja, det er derfor jeg tok 2 ganger 5 ganger 2
183.	Anna	Hvorfor tok du ABC da? Og ikke A ganger A ganger B? [ler litt]
184.	Amalie	Det er et veldig godt spørsmål. [jentene fniser litt]
185.	Alle	[Vi ler litt alle sammen]
186.	Sara	Jeg tror ikke hun får de svarene hun trenger akkurat nå [heheh]
187.	Anna	Gjør du det?
188.	Forsker	Vi får se hehe [jentene ler] Ehm så lurer jeg på hva hadde skjedd ... Nå hadde vi et prisme. Den hadde firkanta bunn. Enig?
189.	Anna	Ja
190.	Forsker	Mhm men hva om det hadde vært sylinder? Vært sånn [lager en sylinder med et A4 ark for å vise]. Og sånn [viser andre vei]. Hva hadde skjedd da? Hadde det vært noe annerledes?
191.	Lise	Ja [litt bestemt]
192.	Forsker	Ja, hva blir annerledes?
193.	Lise	Volumet.
194.	Forsker	Volumet blir annerledes?
195.	Lise	Ja, det tror jeg
196.	Forsker	Hvorfor tenker du det?
197.	Lise	Fordi den er rund [fniser litt]
198.	Forsker	Ja, og da blir det et annet volum?
199.	Lise	Ja
200.	Forsker	Tenker dere det samme?
201.	Anna	Det føles iallfall sånn ehh..
202.	Forsker	Så den her og den her har samme volum [viser sylinder begge veier]
203.	Anna	Jeg føler den andre ser litt større ut
204.	Forsker	At den lave er større?
205.	Lise	Det tror jeg og
206.	Forsker	Ja, hvorfor det?
207.	Sara	Det ser sånn ut [ler litt]
208.	Forsker	Det ser sånn ut?
209.	Amalie	Fordi atte siden prismen så var det sånn, så kanskje det er sånn med denne?
210.	Forsker	Ja, det var sånn med prismene og da tenker du at det er det samme når det er sylinder?
211.	Anna	Ja det tenker jeg au
212.	Forsker	Hvordan ville dere brukt matematikk til å finne det ut da?
213.	Anna	Linjal
214.	Forsker	Linjal?
215.	Anna	Også regna det ut
216.	Lise	Og Pytagor … nei …
217.	Forsker	Pytagoras?

218.	Anna	Ikke pytagoras, jo? Nei.
219.	Anna	Du kan brette ut arket sånn pi r i andre og sånn også finne ut ...
220.	Forsker	Pi r i andre.. kan du vise meg hvordan du tenker da?
221.	Anna	Nei vent. Jeg vet ikke.
222.	Amalie	Vent vent kan jeg prøve? Ehm eee ...
223.	Forsker	Ja!
224.	Amalie	Først, hvis man ... først finner man lengden også arealet av toppen så kan man kanskje gange arealet på toppen med lengden
225.	Forsker	Mhm er det ... hva er toppen?
226.	Amalie	5. jeg vet ikke
227.	Forsker	5? hva er toppen på den modellen her? [viser modellen]
228.	Amalie	En sirkel
229.	Forsker	Ja, en sirkel
230.	Amalie	Ja
231.	Forsker	Hva vil du gjøre med den sirkelen?
232.	Amalie	Vet ikke
233.	Anna	Vi har jo ikke radius? Eller?
234.	Forsker	Vi har ikke radius? Er det noe annet vi har da?
235.	Pia	Kan man ikke bare brette ut arket og måle sidene?
236.	Forsker	Jo, kanskje det? Ja, hvordan da?
237.	Lise	Ehm
238.	Amalie	Linjal?
239.	Forsker	Mhm. Hva ville du gjort hvis du skulle funnet den sirkelen?
240.	Pia	Hvis du skal finne ut av den her? [peker på modellen?]
241.	Forsker	Mhm
242.	Pia	Ta den sida [peker på kortsiden], for å måle høyden.
243.	Forsker	Mhm
244.	Pia	Og den her [peker på langsiden] for å måle … hvor brei den er. Sånn … eller liksom rundt
245.	Forsker	Hva rundt? Kan vi kalle det noe? Det som er rundt?
246.	Anna	Omkretsen
247.	Forsker	Ja, omkretsen. Ja, kan vi gjøre noe med den? Kan vi bruke den til noe?
248.	Alle	[Jentene tenker]
249.	Anna	Kanskje finne radius eller … diameter?
250.	Forsker	Bruke den til å finne radius eller diameter?
251.	Anna	Ja.
252.	Forsker	Ja.
253.	Pia	Kan vi ikke måle det her da
254.	Forsker	Måle hva da?
255.	Pia	Radius og diameter
256.	Forsker	Måle radius og diameter? Ja
257.	Pia	Måle her (kortsiden på A4 arket, når vi ser på det lave sylinderet) også gange vi det med lengden.

258.	Forsker	Gange omkretsen med lengden?
259.	Pia	Ehh hehe gange diameter
260.	Forsker	Ja.. Hvordan finner vi volumet av en sylinder? Det var noe som sa det litt i stad. Nesten
261.	Amalie	Gange lengden med arealet av toppen?
262.	Forsker	Ja.. Men har vi noe formel for det?
263.	Jentene	(…) [de ser litt forvirret ut]
264.	Forsker	Hva er formelen for volum av en sylinder?
265.	Anna	Det tror jeg ikke vi har lært
266.	Forsker	Ikke? Har dere lært arealet av en sirkel?
267.	Amalie	Ja
268.	Anna	Ja
269.	Forsker	Hva er arealet av en sirkel?
270.	Anna	Pi r i andre
271.	Forsker	Pi r i andre ja. Og hvis vi skal finne volumet da? (…) dere fant jo prismen?
272.	Anna	Pi r i tredje? Nei? …
273.	Forsker	Nei ... Dere hadde jo prismen. [viser prismen]. Hvordan fant dere ut den?
274.	Anna	Tok høyden ganger lengde nei … eller liksom. Bredde ganger lengde eller noe sånn
275.	Forsker	Lengde ganger bredde? Altså grunnflaten og høyden [viser på modellen]. Og vi gjør jo akkurat det samme på en sylinder. Grunnflaten ganger høyden [viser grunnflaten og høyden på modellen]
276.	Anna	ja
277.	Forsker	Og hva sa vi grunnflaten var? Dere sa det akkurat
278.	Anna	Pi r i andre
279.	Forsker	Pi r i andre ja. Hvordan finner vi volumet av en sylinder da?
280.	Anna	Tar det man får, kommer fram til da ganger høyden.
281.	Forsker	Ja, pi r i andre ganger …
282.	Amalie	H
283.	Forsker	Ja, ganger høyden. Ja! Klarer dere gjøre det? Nå har dere fått formelen
284.	Anna	Ja
285.	Forsker	Prøve? Jeg har flere blyanter [deler ut blyanter]
286.	Sara	jeg vet ikke åssen man … [jentene ler]
287.	Amalie	Skal vi bruke noe tall?
288.	Forsker	Nei, hvis vi tar et tall da. Jeg tror den her er ehh 21, kortsiden er 21, og langsiden er cirka 30. 30 … ja
289.	Sara	Hæ hva? Hehe
290.	Forsker	Hvis vi tar 21 og 30 [skriver det på et A4 ark får å vise hvor lange sidene er] bare for å si et tall. Nå har dere fått formelen og tall.
291.	Jentene	[de regner ut på sitt ark]
292.	Anna	Jeg husker ikke hvordan man regner dette her
293.	Anna	Jeg husker ikke åssen … hva er radiusen
294.	Sara	Radius er ikke det …

295.	Anna	Er det halvparten av denne? *peker på kortsiden av A4 arket*
296.	Sara	Halvparten av kort … er det ikke?
297.	Forsker	Radiusen er halvparten av kortsiden?
298.	Amalie	Nei?
299.	Anna	Skulle vi finne denne? Som var sånn eller sånn [viser den lave og den høyde sylinderen]
300.	Forsker	Vi kan prøve den korte, lave først. Så ser vi.
301.	Anna	Det er halvparten av langs … nei …
302.	Sara	Langsia?
303.	Anna	Ja. Men det er jo omkretsen?
304.	Forsker	Mhm
305.	Amalie	Tror ikke det her er riktig
306.	Anna	Men Amalie hva brukte du som radiusen?
307.	Amalie	Jeg vet ikke
308.	Pia	22 000?
309.	Amalie	Ja!
310.	Forsker	22 000 i volum?
311.	Amalie	Ja! Hahaha
312.	Sara	0,5 ganger 5
313.	Amalie	Jeg vet ikke jeg skjønte ikke hva radiusen var
314.	Amalie	Jeg tok 5 som radius men jeg tror det er feil
315.	Forsker	Det var vanskelig å finne radiusen?
316.	Amalie	Ja
317.	Anna	Ja
318.	Amalie	Så jeg bare tok noe [alle jentene ler litt]
319.	Pia	Kan vi ikke bare dele langsida på 2?
320.	Anna	Men det er jo omkretsen … jeg skjønner den ikke helt.
321.	Forsker	Vi vet jo omkretsen.
322.	Anna	Ja
323.	Sara	30? nei? …
324.	Amalie	Har glemt omkretsen hehe
325.	Forsker	Ja det er omkretsen, ja
326.	Sara	Det er 30?
327.	Forsker	Klarer dere finne diameteren?
328.	Pia	Dele på to
329.	Forsker	Dele på to?
330.	Sara	15
331.	Amalie	Oja jeg tenker at det var toppen
332.	Anna	Men 30 også tar man
333.	Amalie	30 var høyden
334.	Anna	Okei jeg må bare skrive … [skriver på arket sitt]
335.	Sara	Jeg klarer ikke regne sånn her jeg
336.	Lise	Hvor mye er klokka?

337.	Forsker	12.04
338.	Pia	Hmm jeg skjønner ingenting
339.	Sara	22 000, 4 000, 200, neii..
340.	Forsker	Hva om dere prøver å …
341.	Alle	[Jentene ler litt]
342.	Sara	22 4200 er et fint svar hehe
343.	Amalie	Ferdig
344.	Forsker	Hva om dere ikke bruker tall og bare bruker algebra? Til å bevise hvem som er størst? [De blir litt stille]. Var det vanskelig forklart? Klarer dere å bruke algebra til å bevise at den lave er størst?
345.	Lise	Det var kaldt her
346.	Forsker	Hæ? Ja det er litt kaldt her
347.	Forsker	Hvis dere glemmer talla og bare bruker algebra og formler? [De begynner å skrive på arket sitt]
348.	Amalie	Jeg gir opp
349.	Jentene	(…)
350.	Pia	Har du et svar?
351.	Forsker	Jeg har et slags svar ja. Jeg kan vise dere etterpå. [De ler litt]
352.	Pia	Jeg kom fram til 47,16 eller 471,6
353.	Forsker	Som er volumet?
354.	Pia	Ja
355.	Amalie	Jeg tror det var bedre enn mitt svar heheh
356.	Sara	Jeg kom på 224 000
357.	Forsker	Hvordan gjorde du det da? [Spør jeg Pia]
358.	Pia	Ehhh … 3,14 ganger 15.
359.	Forsker	3,14 ganger 15. Hva er 15?
360.	Pia	Radius?
361.	Forsker	Ja, tok du halvparten av lengden?
362.	Pia	Ja
363.	Forsker	Ja, greit
364.	Anna	Jeg klarte å finne … Liksom … Jeg skrev sånn 30 siden det er omkretsen, er lik pi ganger d. Siden det er formel for sirkel, også fant jeg hva d er, og delte det på 2. men jeg vet ikke hvordan jeg skal regne ut dette. Med så mye kommatall og …
365.	Forsker	Hva har du gjort der? [peker på regnestykket]
366.	Anna	Hæ?
367.	Forsker	Hva har du gjort der?
368.	Anna	Der har jeg finnet radiusen. Prøvd i hvert fall.
369.	Forsker	Hvordan har du funnet radiusen?
370.	Anna	Fordi jeg tok ehh jeg vet jo at omkretsen er 30, også setter jeg det opp sånn [viser på arket sitt], siden det er …
371.	Forsker	Pi ganger d?

372.	Anna	Også gjorde jeg liksom som en likning. Og da kom jeg fram til 26,86. også delte jeg det på 2 for å finne radiusen.
373.	Forsker	Mhm
374.	Anna	Også, ja …
375.	Forsker	Også brukte du 13,43 i formelen?
376.	Anna	Ja
377.	Forsker	Mhm … greit, vil noen flere forklare?
378.	Lise	Ehm
379.	Forsker	Vil du?
380.	Lise	Jeg fikk 757 cm i tredje
381.	Forsker	Hvordan fikk du det?
382.	Lise	Ehh jeg regnte noen tall. [Jentene fniser litt] 20 ganger 30
383.	Forsker	Hvordan regnet du det?
384.	Lise	Jeg brukte Pytagoras
385.	Forsker	Pytagoras? Hvorfor tenkte du det?
386.	Lise	Jeg følte for det egentlig hehehe
387.	Forsker	Har Pytagoras noe med sirkler å gjøre?
388.	Lise	Nei, jeg skjønte egentlig ikke det her. Jeg er ikke så veldig god på det her.
389.	Forsker	Men jeg synes vi skal gå videre til den andre oppgaven
390.	Sara	Hva var svaret?
391.	Forsker	Jeg kan vise dere etterpå. Ehmm husker dere den da? [Viser de oppgaven]. Det var en annen boks, den så sånn ut.
392.	Amalie	Ja!
393.	Forsker	Det var et kvadrat på 12 cm på hver side, også skulle dere klippe av hjørnene. Hvis du klipper av litt på hver side, så får du jo en boks etter hvert. Mhm ... husker dere hva dere svarte der?
394.	Anna	Jeg tror vi tok en og en halv eller to.Jeg husker ikke helt
395.	Forsker	En og en halv eller to?
396.	Lise	Vi brukte en og en halv
397.	Sara	Jeg husker ikke
398.	Amalie	Vi prøvde oss litt fram, jeg tror vi lagde tre eller fire forskjellige
399.	Forsker	Tre-fire bokser? For å teste ut litt?
400.	Amalie	Ja
401.	Anna	Også fant vi ut at det måtte være over en. Fordi da, hvis man bare ganger en ganger en, så blir det bare en på en måte.
402.	Forsker	Ja, da blir det ikke …
403.	Anna	Det må være mer enn det, men heller ikke for mye fordi da klipper man av veldig mye
404.	Forsker	Ja, og da blir det veldig høye vegger? I forhold til flaten?
405.	Anna	Ja
406.	Forsker	Mhm hvordan kom dere fram til det da? Hvorfor, hvordan fikk dere … var det 1,2?
407.	Sara	1,5

408.	Forsker	1,5 og 2?
409.	Anna	Ja jeg husker ikke helt, var hvert fall det vi svarte
410.	Forsker	Hvordan gjorde dere det?
411.	Lise	Vi starta med høye vegger også bare jobba vi mindre
412.	Forsker	Åå dere begynte med høye vegger? Istedenfor lave?
413.	Amalie	Jeg tenkte først at det kom til å bli størst hvis det var 4 ganger 4 ganger 4, tror jeg tenkte
414.	Forsker	Mhm alle sidene er fire cm, ja
415.	Amalie	Men det var jo minst tror jeg. Da prøvde vi å gå ned også, også når vi var på 1,5 så ble det mest, også gikk vi au ned til 1 tror jeg, men da ble det mindre igjen.
416.	Forsker	Ja, du kunne ikke ha for mye og ikke for lite?
417.	Amalie	Ja
418.	Forsker	Ja
419.	Anna	Jeg tror vi tok au en med fire ganger fire og en med to ganger to og en med en ganger en, som vi klippet av. Og da fant vi ut av både fire ganger fire og en ganger en, ikke ga så høy eller ikke var så mye og da tror jeg vi landa på to.
420.	Forsker	Hva med tre da?
421.	Amalie	Jeg tror vi prøvde tre?
422.	Lise	Jeg vet ikke
423.	Forsker	Dere prøvde ikke tre?
424.	Amalie	Hæ?
425.	Forsker	Dere prøvde ikke tre?
426.	Amalie	Jeg husker ikke
427.	Forsker	Kan prøve nå da. Hva skjer hvis dere klipper tre centimeter?
428.	Lise	Vi har ikke saks.
429.	Forsker	Dere kan lage en liten tegning? [De begynner å tegne]
430.	Anna	Var det tolv ganger tolv? Kvadratet?
431.	Forsker	Ja, selve kvadratet er tolv, også klipper du av tre.
432.	Jentene	[De skriver og tegner]
433.	Forsker	Finner dere ut av noe?
434.	Amalie	Nja, kanskje
435.	Amalie	[Hvisker lavt] jeg skjønte ikke
436.	Forsker	Hva skjønte du ikke?
437.	Amalie	Ehh … jeg skjønner egentlig ingenting føler jeg
438.	Forsker	Nei … hva har du gjort nå da?
439.	Amalie	Jeg føler det gir mening, men … jeg vet ikke
440.	Forsker	Nei … du har skrevet at begge sidene er tolv. Det er riktig.
441.	Amalie	Også tenkte jeg siden … at vi tar vekk tre så blir det jo minus seks på hver, som blir da seks.
442.	Forsker	Ja
443.	Amalie	Også blir da, siden den er 3cm høy så blir 3 ganger 6 ganger 6

444.	Forsker	Ja, og hva fikk du da?
445.	Amalie	108, men jeg vet ikke helt om det er helt riktig regna, men
446.	Sara	Jeg fikk au det samme, så …
447.	Forsker	Husker dere hva dere fikk når dere regna med 2cm?
448.	Amalie	Nei ...
449.	Sara	Nei …
450.	Forsker	Skal vi prøve det? [De skriver på arket sitt]
451.	Forsker	Har noen fått noe svar?
452.	Amalie	128 cm i tredje
453.	Forsker	Mhm
454.	Lise	Same
455.	Forsker	Så hvem er størst av 2cm og 3 cm da
456.	Amalie	2
457.	Sara	2
458.	Pia	2
459.	Forsker	2? To gir størst? Mhm, flott
460.	Sara	[Nyser]
461.	Lise	Prosit
462.	Sara	Takk
463.	Forsker	Klarer dere å bruke algebra til å forklare det?
464.	Lise	Nei
465.	Sara	Nei …
466.	Pia	Nei eh
467.	Forsker	Ikke? Ikke prøve en gang?
468.	Sara	Hehe hva er egentlig algebra? Haha
469.	Anna	X i andre og ...
470.	Sara	Og sånn jaa ...
471.	Forsker	Ved bare bruk av bokstaver … til å forklare det … uten å bruke tall
472.	Amalie	Man kan … x ganger y ganger y, kan man
473.	Forsker	X ganger y ganger y? at y-en er sidene?
474.	Amalie	Ja
475.	Forsker	Mhm … noe annet eller noe mer man kan gjøre?
476.	Anna	2x ganger y
477.	Forsker	2x ganger y? hvorfor det
478.	Anna	Det er jo sånn … nei det er det ikke …
479.	Lise	Ehh A i andre
480.	Forsker	A i andre? Hva a i andre?
481.	Lise	Ehh ganger B i andre
482.	Forsker	Nja, du er inne på noe
483.	Amalie	Ja, man tar x ganger y i andre eller a ganger b i andre
484.	Forsker	Ja, du kan gjøre sånn
485.	Lise	Hva er den på toppen? Det tallet som er på toppen, jeg vet ikke hva det heter
486.	Forsker	Eksponenten?

487.	Lise	Eksponenten
488.	Forsker	Ja … hva er arealet av en firkant? Hva er det? hvis du har kvadrat da.
489.	Lise	Fire
490.	Anna	Side ganger side
491.	Forsker	Side ganger side?
492.	Anna	Ja
493.	Anna	De er begge like. Da kan du for eksempel si at grunnflaten er a i andre.
494.	Lise	Ja
495.	Forsker	Mhm og hva kan vi si for høyden da?
496.	Amalie	B!
497.	Forsker	Ja! For eksempel. A i andre ganger b? at da har man en generell formel? For volumet?
498.	Lise	Oja! Er det der at man gjør a ganger a? a ganger a ganger a ganger a? er det det derre. Er det a i eksponent?
499.	Forsker	Ja mhm
500.	Amalie	Oja …
501.	Forsker	Hva er a ganger a?
502.	Anna	A i andre
503.	Forsker	Ja! Flott. Mhm ... kan vi gjøre noe mer eller er det en annen måte vi kan gjøre det på? nå har vi funnet arealet, nei ... volumet av en boks … noe generell formel vi kan vise mer på?
504.	Lise	En formel?
505.	Forsker	Ja ... eller kan vi løse det algebraisk på noe måte? Eller kan dere bruke noen begreper?
506.	Jentene	[Jentene ser på hverandre og ler]
507.	Forsker	Var det vanskelig spørsmål? [De ler igjen] ja?
508.	Lise	Bare i algebra? Ikke noe sånn pytagoras?
509.	Forsker	Hvis du vil kan du gjøre det.
510.	Lise	Er det formelen kat+kat=hypotenus?
511.	Forsker	Mhm
512.	Lise	I andre da
513.	Forsker	Vil du prøve å vise med pytagoras?
514.	Lise	Ehh hehen formelen?
515.	Forsker	Ja, eller hvordan tenkte du?
516.	Lise	Jeg tenkte bare den her formelen [jentene fniser sammen]
517.	Forsker	Ja, hvordan tenkte du skulle bruke den i den oppgaven her?
518.	Lise	Nei jeg tenkte ikke, jeg ville bare vise formelen heheh
519.	Forsker	Du sa i stad at du likte pytagoras
520.	Lise	Jaa ...
521.	Forsker	Så du har lyst til å bruke den
522.	Lise	Jaa
523.	Forsker	Men vet ikke helt hvordan?
524.	Lise	Går det an?

525.	Forsker	Nja, jeg hadde ikke klart det.
526.	Lise	Nei …
527.	Forsker	Så jeg håper ikke det heheh ... ehm noe mer dere vil si?
528.	Jentene	Nei
529.	Forsker	Om den her eller den forrige
530.	Jentene	Nei
531.	Forsker	Jeg har tre spørsmål til … cirka hehe
532.	Pia	Hehehe jaa …
533.	Forsker	Ehm hvis vi går litt tilbake da … til sylindere
534.	Sara	Hahaha [jentene ser på hverandre og ler]
535.	Forsker	Hvis det her hadde vært et A3 ark?
536.	Sara	[Jentene ler litt mer]
537.	Forsker	Et A3 ark, vet dere hvordan et A3 ark ser ut?
538.	Lise	Ja
539.	Forsker	Det er litt større. Det er cirka sånn [demonstrerer med et A4 ark cirka hvor mye større]
540.	Lise	ja
541.	Amalie	Ja
542.	Forsker	Hadde det skjedd noe annerledes da?
543.	Lise	Ja ...
544.	Sara	Ja
545.	Forsker	Ja?
546.	Pia	Det blir større volum
547.	Forsker	Større volum?
548.	Pia	Ja
549.	Anna	Men formen hadde jo vært lik
550.	Forsker	Formen er lik? Mhm ... si dette er et A3 ark da [viser med A4 ark]. Hvem er størst av den [viser høye sylindere] og den da [viser det lave sylindere]?
551.	Lise	Den [peker på den lave]
552.	Anna	Ja
553.	Lise	Siden det er det samme på de andre tingene
554.	Forsker	Den?
555.	Lise	Nei
556.	Forsker	Den?
557.	Sara	De er samme
558.	Forsker	De er samme?
559.	Anna	Ja
560.	Forsker	Mhm … så uansett størrelsen på arket, om det er prisme eller sylinder, så vil alltid den korte være … ha mest volum?
561.	Lise	Ja
562.	Anna	jaa
563.	Forsker	Mhm … enig i det?
564.	Anna	Jaa

565.	Forsker	Ehm også kanskje litt vanskelig spørsmål ... men nå har jeg … de forskjellige. Den lave [viser lav sylinder] og den høye [viser høy sylinder].
566.	Lise	Ja
567.	Forsker	Vi mente jo alle at den lave var størst? Mhm … men hvor mange prosent fyller de hverandre?
568.	Lise	Hva mener du?
569.	Pia	Hæ?
570.	Forsker	Si jeg har den her full [det lave sylindere]. Den er full med … popcorn [jentene ler] eller hva enn … Frø. Også skal jeg putte det oppi den her [den høye]
571.	Amalie	Ojaa
572.	Forsker	Mhm hvor mye fyller jeg opp den her da?
573.	Lise	Overfullt
574.	Forsker	Hvis den … den her har mest volum. Ikke sant? Det var jo mer oppi den her [lave sylindere] enn den her [høye sylinder*]
575.	Lise	Ja, overfullt
576.	Forsker	Blir det høye overfullt? [prøver å teste de litt]
577.	Lise	Jaa
578.	Sara	Blir den ikke det da? Hvis det er mest oppi den?
579.	Lise	Joo
580.	Sara	Heller den oppi der?
581.	Forsker	Den har jo minst volum?
582.	Sara	Jaa
583.	Lise	Minst plass
584.	Forsker	Ja
585.	Anna	Og hvis den har mer oppi, og den har mindre plass
586.	Forsker	Så blir den over svømt?
587.	Anna	Mhm
588.	Lise	Jaa
589.	Forsker	Hva hvis jeg hadde fullt opp den her da, den høye
590.	Anna	Ja
591.	Forsker	Med popcorn? Eller noe annet. Også tatt det oppi her
592.	Sara	Da hadde det ikke blitt overfullt
593.	Forsker	Nei … hvor mye hadde det fullt opp cirka da? Kan vi si det i prosent?
594.	Amalie	Sytt [på vei til å si sytti]
595.	Lise	75
596.	Amalie	75 eller 80
597.	Forsker	75 eller 80?
598.	Amalie	Ja?
599.	Forsker	Veldig nærme. Det er en fasit på det faktisk.
600.	Pia	80
601.	Lise	90? 89?
602.	Anna	81

603.	Forsker	81?
604.	Lise	83
605.	Anna	90
606.	Amalie	82
607.	Forsker	82? Heheh mye tall her
608.	Anna	Sier du ja hvis det er riktig?
609.	Forsker	Jeg vil høre først. Hvorfor tenker dere de tallene?
610.	Pia	Fordi det er hvert fall over halvveis.
611.	Amalie	Det er ikke så mye forskjell på de
612.	Forsker	Det er ikke så mye forskjell?
613.	Sara	Nei, ikke så mye forskjell, men det er fortsatt litt
614.	Forsker	Det er litt forskjell? Uansett?
615.	Lise	86
616.	Forsker	86?
617.	Sara	92
618.	Forsker	92?
619.	Sara	Sytti …
620.	Anna	Ni
621.	Pia	Åtte
622.	Forsker	Okei, hvor vil den cirka stoppe da? [Tar fram sylindere så de kan peke]. Kan dere peke? Eller tegne med en strek?
623.	Sara	Skal vi tegne strek?
624.	Forsker	Hvor vil den stoppe? [holder oppe sylindere]
625.	Sara	heheh
626.	Pia	Kan du tegne for meg også? Her. [Jentene tegner strek på modellen og ler litt]
627.	Forsker	Mhm ... og hvor mye prosent er det cirka hvis det her er 100 [hele sylinderet]
628.	Anna	90, eller øverste strek er 90
629.	Forsker	90?
630.	Sara	Får du 10 av de samme strekene nedover?
631.	Lise	Og den andre er 80 … nei kanskje
632.	Sara	Jeg tror mer det er sånn åtti …
633.	Lise	Seks
634.	Amalie	Åtti fem ellerno
635.	Forsker	Ja?
636.	Lise	Jeg tror 93
637.	Amalie	Jeg tror au det er 90
638.	Sara	Jammen det kan jo ikke, får du 10 av de samme strekene nedover?
639.	Amalie	Nei, men … oja ja ja ja
640.	Forsker	Mhm
641.	Amalie	80!
642.	Lise	80!
643.	Forsker	Har dere et felles avgjørende svar?

644.	Pia	76
645.	Anna	Nei, syttii …
646.	Forsker	76?
647.	Sara	Men jeg føler liksom.. [de snakker en del oppå hverandre] mellom 76 og 80. okei 82!
648.	Pia	79!
649.	Amalie	Jeg gjetter 89
650.	Sara	82
651.	Anna	81
652.	Pia	89
653.	Amalie	Åtti …
654.	Lise	79 … komma 5 … komma 7
655.	Forsker	Hahaha vil dere ha fastien
656.	Jentene	Ja!
657.	Forsker	Ja … dere er litt for høye faktisk
658.	Amalie	Ahh
659.	Forsker	Det er … ish 70.. kanskje bittelitt mer, 71, 72
660.	Lise	Oja jeg var nærmest
661.	Forsker	Mhm … og det er det et algebraisk bevis for. Har dere lyst til å se det?
662.	Lise	Nei …
663.	Amalie	Nei [jentene ler]
664.	Forsker	Det går bra? hehe
665.	Lise	Ja …
666.	Forsker	Okei … var litt komplisert, skjønte nesten ikke selv jeg heller.
667.	Lise	Oja …
668.	Forsker	Ehm skal vi se … er det noe annet dere føler dere ikke har klart å forklare til meg?
669.	Lise	Nehh
670.	Forsker	Som jeg har misforstått?
671.	Lise	Klart alt tror jeg
672.	Forsker	Klart alt?
673.	Sara	Jaa, jeg vet ikke hva mer jeg kan forklare hehe
674.	Lise	Nei, tror ikke det er noe mer nå
675.	Forsker	Men sånne sylindere … så, vi har jo regna ut matematisk at den lave er størst …
676.	Anna	Ja
677.	Forsker	Men er det noe … hvis du ser på den formelen dere har lagd, kan dere se hvorfor? Klarer dere se hvorfor det? … du har den her [peker på utregningen til Anna]. Pi r i andre ganger h, klarer du å se hvorfor?
678.	Anna	Ehm
679.	Forsker	Hvorfor bredden eller grunnflaten har mer å si
680.	Amalie	ehh
681.	Anna	Fordi radiusen er større

682.	Forsker	Fordi radiusen er større?
683.	Anna	Jaa …
684.	Forsker	Den er bredere?
685.	Anna	Jaa
686.	Forsker	Men klarer du å peke på noe i formelen som … som gjør det? [Anna peker på2-eren]. Du peker på?
687.	Anna	To tallet kanskje?
688.	Forsker	To tallet ja?
689.	Pia	Radius
690.	Sara	Det er jo … jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det ... ehm ... Anna? [Jentene ler]
691.	Anna	Fordi man r ganger … det blir jo veldig … liksom …
692.	Amalie	Det blir ganga med seg sjøl, og da blir det jo
693.	Anna	Ganske mye større på en måte
694.	Amalie	Jaa
695.	Forsker	Jaa, gange med seg selv?
696.	Anna	Fordi … radius er alltid ganger to uansett, men hvis liksom radiusen er større så blir jo tallet større igjen
697.	Forsker	Jaa, hvis radiusen er større, så blir det større volum fordi den har veldig mye å si?
698.	Anna	Jaa
699.	Forsker	Fordi da har du det to tallet?
700.	Anna	Høyden på den høye er jo større, liksom … større
701.	Forsker	Mhm
702.	Anna	Men det har ikke like mye å si liksom
703.	Forsker	Ja, for høyden det er jo bare et tall på en måte?
704.	Anna	Ja
705.	Forsker	Men den er det dobbelte liksom?
706.	Amalie	Ja
707.	Forsker	Ja! Flott! Ehm også lurer jeg på til slutt heheh [jentene ler]. Dårlig tid?
708.	Pia	Ja
709.	Lise	Jaa!
710.	Forsker	Hva synes dere om å jobbe sånn her med matematikk?
711.	Sara	Gøy
712.	Anna	Greit
713.	Forsker	Greit?
714.	Amalie	ja
715.	Pia	Det er greit, det er liksom ikke bare å skrive på …
716.	Sara	Du kan få diskutert litt mer!
717.	Anna	Jaa
718.	Forsker	Meninger?
719.	Anna	Ikke bare tenke sitt eget hode, for da tror jeg det er lettere å gjøre feil
720.	Forsker	Ja, diskutere?

721.	Anna	Ja
722.	Forsker	At det er litt greit?
723.	Lise	Enig
724.	Forsker	Reflektere litt sammen?
725.	Lise	Enig
726.	Forsker	Ikke bare sitte med en oppgave selv?
727.	Lise	enig
728.	Forsker	Mm [jentene ler]
729.	Forsker	Hva skal dere rekke i dag da? [Jentene er veldig klare for å gå tilbake til gymtimen]
730.	Pia	Ehmm gym [jentene ler]
731.	Forsker	Okei, da håper jeg har fått svar på alt
732.	Forsker	Da sier jeg tusen takk! [Jentene reiser seg fort opp]
733.	Lise	Det var veldig gøy!
734.	Forsker	Så bra! Det er hyggelig å høre
735.	Pia	Håper du fikk litt informasjon! heheh