Elevers forståelse av sammenhenger mellom størrelser i modelleringsaktiviteter på 6. trinn

Hvordan resonnerer elever på 6. trinn med størrelser i modelleringssituasjoner?

CASPER VAKSDAL JAKOBSEN

SONDRE INDREBØ

VEILEDERE

DAVID ALEXANDER REID

JORUNN REINHARDTSEN

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Dette semesteret har vært en lærerik reise. Det å skrive masteroppgave har vært en krevende prosess, men det har bidratt til at vi er bedre rustet til å ta for oss nye utfordringer, når vi nå skal ut i læreryrket. Vi føler vi har fått en god innsikt i hvordan elever jobber med matematikk og det har vært veldig nyttig å forsøke å sette seg inn i elevenes perspektiv.

Det har vært interessant og spennende å være en del av et algebraprosjekt, der vi har fått et godt innblikk i hvordan forskere arbeider for å forbedre matematikkundervisning og legge til rette for at elever i fremtiden skal få et enda bedre læringsutbytte enn det de har i dag. Det har også vært kjekt å diskutere med lærere og høre hvordan de arbeider med matematikk i sine klasserom. Selv om det er en del tid og arbeid som er lagt ned for å lage disse algebraaktivitetene, føler vi at det har vært verdt det ettersom det har gitt oss gode erfaringer som vi tenker vi ta med oss til når vi skal planlegge og undervise i matematikk i fremtiden.

Det har vært en lang prosess å skrive denne oppgaven, men alle disse timene med hardt arbeid har gitt oss mange tanker om hvordan vi kan legge til rette for undervisning og hjelpe elever på ulike nivåer til å forbedre sin matematiske kompetanse. Vi har fått nye ideer om hvordan vi kan forbedre oss som lærere og gi et best mulig læringsutbytte for våre fremtidige elever.

Vi vil gjerne takke veilederne våre Jorunn og David, som har støttet oss hele veien. De har gitt oss gode tilbakemeldinger som har hjulpet oss å komme i mål med denne prosessen. Vi vil også takke medstudenter som har vært til støtte når det har vært krevende tider og som har gitt gode råd og tips på veien.

Casper Vaksdal Jakobsen og Sondre Indrebø

Kristiansand, mai 2023

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en kvalitativ kasusstudie av hvordan elever på 6. trinn resonnere med størrelser i modelleringssituasjoner. Vår kasus har bestått av en gruppe på fire elever (to gutter og to jenter). Det er et kjent problem at algebra er et emne som mange sliter med på skolen. Det er ofte lagt vekk på å lære algoritmer for å løse problemer, uten å opparbeide seg en forståelse av problemet og hvordan det kan løses. Utgangspunktet for denne masteroppgaven har vært et algebraprosjekt der målet har vært å skape ALTA-er (Algebra Learning-Teaching Activities). Ved å lage disse læringsaktivitetene er målet å forsøke å hjelpe elever til å oppnå en dypere forståelse for algebra og implementere ALTA-er inn i norske skoler. Hovedhensikten med disse ALTA-ene har vært å få elever til å engasjere seg i generalisering og å utvikle algebraisk tenkning. Vi har vært med på å utvikle én av disse ALTA-ene, som har handlet om modellering. Denne ALTA-en skulle bidra til at elevene øvde på å lage en modell som er en forenklet beskrivelse av en del av virkeligheten. Dette innebærer ifølge Lamon (1998) å gjøre antakelser, identifisere størrelser, beskrive og representere sammenhenger og klassifisere situasjoner. Disse stegene er en modelleringsprosess som er utviklet for å hjelpe elever å analysere sammenhenger mellom størrelser i en situasjon.

Det teoretiske rammeverket for denne studien har blant annet tatt utgangspunkt i teoriene om algebraisk tenkning fra Mason (1996), Kaput (1998) og Radford (2010) og teoriene til Blum (2015), Pollak (2011), Janvier (1996) og Lamon (1998) knyttet til modellering. I tillegg har vi benyttet oss av Carlsen og Reinhardtsen (2022) sin teori om kalkulerende og analytisk perspektiv.

Dataene i denne studien har blitt analysert ved bruk av narrativ analyse. Overordnet har vi belyst to narrative i denne oppgaven. Det første narrative handler om elever på sjette trinn som var ukjent med modellering, men som ble mer komfortable med dette i løpet av ALTA-en. Det andre narrative går ut på at elevene går fra å ha et kalkulerende perspektiv til et mer analytisk perspektiv. I denne studien har vi samlet inn data i form av intervjuer, elevbesvarelser, observasjonsnotater, lydopptak og videoopptak. Hovedfunnene i denne studien er at elevene virket å gå fra å tenke realistisk rundt situasjoner med fokus på tall og en numerisk løsning, til å tenke mer på sammenhenger og strukturer. De ble i stand til å gjøre antakelser som gjorde det enklere å beskrive hvordan størrelser samvarierte. I tillegg så vi flere tegn til at elevene tenkte algebraisk.

Abstract

This master`s thesis is a qualitative case study of how sixth graders reason with quantities in modelling situations. Our case was a group of four pupils (two girls and two boys). Algebra is regarded as a challenging subject for many pupils in school. The focus is often on learning ways of solving problems without being able to understand the reasoning behind it. The starting point for this master`s thesis was an algebra project, where the goal was to develop ALTAs (Algebra Learning-Teaching activities). The aim for this project, is to help pupils get a better understanding of algebra and to implement ALTAs in Norwegian schools. The main purpose of these ALTAs is to make the students engage in generalization and to develop algebraic thinking. We contributed to one of these ALTAs, which focused on modelling. This ALTA is supposed to help pupils create a model that is a simplified description of a part of the real world. According to Lamon (1998) this is about making assumptions, identifying quantities, describing, and representing relationships and classifying different situations. This is a part of a modelling process which is meant to help pupils analyze relationships between quantities in a situation.

The theoretical framework for this study has, among other sources, drawn on the theories of Mason (1996), Kaput (1998) and Radford (2010) about algebraic thinking and the theories of Blum (2015), Pollak (2011) and Lamon (1998) about modelling. Additionally, we have used the theory of calculating and analytical perspectives, by Carlsen and Reinhardtsen (2022).

We have used narrative analysis to analyze the data of our study. We have looked at two narratives in this master`s thesis. The first narrative describes sixth graders and their development of being unfamiliar to modelling to being more comfortable with it through the ALTA`s. The second narrative is about pupils transitioning from a calculating perspective to a more analytic perspective. We used pupil responses, observation notes, audio recordings and video recordings as our methods of data collection. The most significant finding of this study was that the pupils moved from focusing on numbers and numerical solution and thinking realistically around situations, to focusing more on structures and relationships. They managed to make assumptions so that they could describe how quantities co-varied. In addition to this, we saw signs of algebraic thinking among the students.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av masteroppgave

Ifølge Kaarstein et al. (2020) sliter norske elever med algebra i skolen. Mange har en oppfatning om at algebra handler om å omorganisere sett av symboler etter regler, uten å utvikle evnen til å resonnere med generaliseringer. Flere elever er ikke bevisste på generaliteter i matematikken, fordi lærere ofte har veiledet dem til å fokusere på metode fremfor å legge vekt på sammenhenger og forståelse (Mason, 1996). Kaput (1998) mente at generalisering og algebraisk tenkning er sentralt for å lykkes med algebra. Han understreket at det burde iverksettes allerede fra første trinn på barneskolen. Radford (2010) uttrykte at algebraisk tenkning blant annet handler om å finne sammenhenger. Mason (1996) trekker i tillegg frem at dersom skolen skal lykkes med å gjøre elever bevisst på generalisering vil algebra slutte å være en hindring for mange elever. Problematikken rundt algebra i skolen har blitt anerkjent av utdanningsdirektoratet som har inkludert algebra relatert kompetanse som generalisering og resonnering som kjerneelementer i den nye læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er også kommet flere kompetansemål inn i de første årene av skoleløpet som kan relateres til algebra. I kompetansemål etter 4. trinn står det: «utforske og forklare sammenhenger mellom de fire regneartene og bruke sammenhengene hensiktsmessig i utregninger» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 7). Her er det fokus på å «utforske» og «forklare sammenhenger» og dette kan knyttes til algebraisk tenkning, som Mason (1996), Kaput (1998) og Radford (2010) pekte på.

Utfordringen har derimot vist seg å være hvordan man utvikler en type undervisning med aktiviteter der elevene får mulighet til å engasjere seg i generalisering og utvikle algebraisk tenkning. Fra vår egen skolegang så kan vi kjenne oss igjen i at det har vært et fokus på metode fremfor forståelse. Vi lærte mange algoritmer for hvordan vi skulle løse oppgaver, men det var ikke alltid vi forstod hva vi gjorde og hvorfor. I forbindelse med masteroppgaven vår fikk vi muligheten til å være med i et prosjekt med mål om å utvikle læringsaktiviteter for algebraisk tenkning på mellomtrinnet, kalt ALTA (Algebra Learning-Teaching Activities). Vi syntes det virket veldig interessant å få et innblikk i hvordan vi kan skape algebraaktiviteter som engasjerer elevene og får dem til å generalisere og tenke algebraisk. Vi ønsket å bidra til at elever skal få en dypere forståelse av matematikk og algebra, slik vi ikke fikk da vi gikk på skolen. Vi støtter også Kaput (1998) sin tanke om at man bør introdusere algebra tidlig for elever, slik at det ikke blir en stor overgang når de møter det senere i skolegangen, og at man unngår at elever faller av. I tillegg er det viktig at elever øver seg i å se generaliteter for å kunne beskrive og analysere problemer i virkeligheten og kunne være med på diskusjonene om ulike problemer som oppstår i verden.

Mange elever har som sagt vært lært opp til å fokusere på metoder og algoritmer i matematikk (Mason, 1996). Når det gjelder modellering, kan ikke elevene bare bruke algoritmer, uten å forstå konteksten. De må kunne forstå situasjonen og lage en mental forestilling av den (Blum, 2015). Lamon (1998) har laget en modelleringsmodell som skal hjelpe elever å systematisere og analysere sammenhenger mellom størrelser i en situasjon. I denne oppgaven tar vi utgangspunkt i Janvier (1996) sin definisjon av "størrelse", der han knytter begrepet til "magnitude", som refererer til noe som kan måles. Dette betyr at størrelsen både har en tallverdi og en enhet, som for eksempel "12 cm", der "12" representerer tallet og "cm" er enheten. Vi har funnet det hensiktsmessig å diskutere hvordan flere størrelser henger sammen, og derfor bruker vi begrepet "størrelse" også som noe som kan variere og dermed ha ulike verdier avhengig av situasjonen.

I vårt forskningsprosjekt har vi vært med å utvikle et undervisningsopplegg som tar utgangspunkt i denne modellen. Hvis elever jobber med modellering som en tilnærming til algebra, så kan elever kanskje få en bedre forståelse for algebra, og det kan være et godt grunnlag for at elever i større grad kan tenke algebraisk og ha et analytisk perspektiv fremfor et kalkulerende perspektiv. Det vil blant annet si at elevene er mer opptatt av sammenhenger og strukturer (Sfard, 2007) og ha aksept for at størrelser kan være ubestemt (Radford, 2018), fremfor å kun være opptatt av tall og fasitsvar (Kieran, 1981). Samtidig er modellering en aktivitet som blir lite benyttet i skolen (Janvier, 1996) og det kan vær kognitivt krevende for elever ettersom det krever både matematisk kompetanse og ikke-matematisk kompetanse (Blum, 2015).

1.2 Avgrensning og valg av problemstilling

Algebra er et stort emne, og vi måtte derfor snevre inn hva vi ønsket å undersøke nærmere. I første omgang tenkte vi at skulle undersøke elever sine løsningsprosesser knyttet til algebra. Etter hvert som prosjektet utviklet seg, så fant vi ut at vi skulle være med på å utvikle undervisningstimer om modellering. I den modelleringsmodellen vi tok utgangspunkt i, var ikke det sentralt med løsninger og løsningsprosesser, men mer fokus på å resonnere om størrelser i modelleringssituasjoner. Vi skiftet dermed fokus til dette. Vårt ønske var å se på hvilken algebraisk tenkning vi kunne oppdage hos elever i arbeid med modelleringssituasjoner, og vi valgte å se etter tegn på dette gjennom elevenes kommunikasjon. Samt gikk vi ut ifra at det ikke finnes kun én sannhet (Burr & Dick, 2017) og at resultatene vi kom fram til er vår egen tolkning og ikke et fasitsvar. Ettersom vi fant lite og gjentakende algebraisk tenkning, så var det behov for å endre problemstilling. Vi valgte å heller fortelle et narrativ om hvordan elevene jobbet med størrelser i modelleringssituasjoner. Vi la merke til at elevene hadde fokus på tall og kalkulering i de første øktene, men at de viste en mer analytisk tilnærming etter hvert. I vårt forskningsprosjekt har vi valgt å undersøke én elevgruppe på fire personer over en tidsperiode på ti undervisningstimer. Vi har valgt å ta observasjonsnotater, video og-lydopptak og gjennomføre et intervju av hver elev.

1.2.1 Problemstilling

Hvordan resonnerer elever på 6. trinn med størrelser i modelleringssituasjoner?

1.3 Disposisjon

I denne oppgave vil vi først presentere vårt teoretiske rammeverk, deretter vil vi gå igjennom hvilke metoder vi har brukt og begrunne valgene vi har gjort. Videre vil vi gå gjennom analysen og funnene i vår studie. Avslutningsvis vil vi drøfte funnene våre og se på hvilke implikasjoner det kan ha for matematikkundervisningen og videre forskning om dette temaet.

2.0 Teori

2.1 Innledning

I dette hovedkapittelet vil vi presentere teorigrunnlaget for studien vår. Ettersom temaet for oppgaven vår er algebra på mellomtrinnet vil vi vise til teori om algebra, algebraisk tenkning og algebra i skolen. Deretter vil trekke inn teori om modellering som er relevant for vårt prosjekt. Til slutt vil vi gå gjennom teori relatert til kalkulerende og analytisk perspektiv som vi har hatt fokus på i analyse delen av oppgaven.

2.2 Hva er Algebra?

Helt fra det niende århundre da al-Khwārizmī og hans matematiske kollegaer arbeidet med matematikk, ble algebra sett på som vitenskapen bak det å løse ligninger (Kieran, 2004). Dette synet preger i stor grad algebra også i dag, men å enes om en tydelig definisjon har derimot vist seg å være vanskelig blant teoretikere (Usiskin, 1988). I løpet av 1980- og 1990-tallet var det ansett som umulig å komme fram til et minimum sett av karakteristikker av begrepet (Radford, 2010). Mason (1996) er tydelig på at algebra ikke er ensbetydende fordi det resonneres med et mangfold av erfaringer både fra ulike kulturer, men også individuelle. Likevel var det en tendens til å assosiere algebra med bokstaver på 80-tallet og tidlig 90-tallet, samtidig som flere teoretikere mente algebra ikke kunne reduseres til å kun handle om bokstaver (Radford, 2010). Eksempelvis har babylonerne vist tegn til å tenke algebraisk uten bruk av bokstaver, for flere tusen år siden (Radford, 2010; Powell, 1976). Betydning bak algebra har videreutviklet og utvidet seg til å handle både om et objekt, altså hva algebra er og en prosess, altså å tenke algebraisk (Mason, 1996). Det blir derfor ikke nok å bare assosiere algebra med symboler og tall. Det er også en måte å tenke på. Euclid brukte eksempelvis symboler uten å tenke algebraisk (Radford, 2010).

2.3 Algebraisk tenking

Algebra ble for folk flest forbundet med linjer bestående av tall og symboler, men Mason (1996) prøvde å utfordre dette snevre synet. Å oppdage likheter og ulikheter, gjøre unntak, repetere og sortere, klassifisere og merke er selve basisen for det han kaller algebraisk tenkning og roten til algebra. I hans tenkning er generalisering helt sentralt. Han påstår at generalisering er selve «hjerteslaget» i matematikken og er selve nøkkelen til å forstå algebra. Videre fremhever han at algebra er mer enn bare symboler, men at det omhandler selve tankegangen som ligger bak. Et eksempel som er ment å illustrere en generalitet, vil oppleves som noe spesifikt dersom man ikke klarer å se generaliteten som ligger bak. Generalisering handler derfor om å se generelle sammenhenger gjennom det spesifikke og motsatt. Generalisering står likeledes sentralt i Radford (2010) sin tankegang om algebraisk tenking. Samtidig tar han det et steg videre ved å beskrive tre ulike nivåer av algebraisk tenkning som han kaller faktabasert (factual), kontekstuell (contextual) og symbolsk (symbolic). Faktabasert handler om en form for algebraisk tenking der man prøver å se etter generalitet gjennom det partikulære. Dette mener Radford (2010) inneholder en form for algebraisk tenking ved at man må oppdage en viss sammenheng. Kontekstuell handler om at man klarer å oppdage en generell sammenheng og at man knytter det til en spesifikk kontekst. Den symbolske formen handler om å løsrive seg fra konteksten, og se det generelle gjennom symboler.

Kaput (1998) fremhever viktigheten av at diskusjonen og bruken av algebra begrepet må være tydelig. Han identifiserer fem aspekter ved algebraisk tenkning: 1) generalisering og formalisering 2) syntaktisk guidede manipulasjoner 3) studiet av struktur 4) studiet av funksjoner og relasjoner 5) et modelleringsspråk. Kaput (1998) tydeliggjør at generalisering er svært sentralt i hans definisjon ved at den inngår i alle disse fem aspektene. I tillegg mener han at generalisering er et av de viktigste kjennetegnene på at noe i det hele tatt kan beskrives som matematisk. Etter Kaput sin bortgang fortsatte Blanton og hennes kolleger videre på hans verk. De presenterte videre fem hovedideer fra Kaputs verk bestående av (a) ekvivalens, uttrykk, ligninger og ulikheter; (b) generalisert aritmetikk; (c) funksjonell tenkning; (d) variabel; og (e) proporsjonalt resonnement. Den første ideen (a) handler om å utvikle en forståelse for likhetstegnet, representere og resonnere med utrykk og likninger i symbolsk form og å beskrive forhold mellom generaliserte mengder. Den andre ideen (b) involverer generaliserende aritmetiske relasjoner som inkluderer grunnleggende egenskaper ved tall og operasjoner, og resonnering om strukturen til aritmetiske uttrykk i stedet for deres beregningsverdi. Et eksempel på denne ideen er at man forstår at 5+7 er likt 7+5 pga. strukturen a+b = b+a og ikke med bakgrunn i utregningen, at både venstre og høyre side gir 12.

Den tredje ideen (c) funksjonell tenkning, innebærer å generalisere relasjoner mellom samvarierende mengder og representere og resonnere med disse relasjonene gjennom naturlig språk, symbolsk notasjon, tabeller og grafer. Den fjerde ideen (d) variabel, refererer til symbolsk notasjon som et språklig verktøy for å representere matematiske ideer på kortfattede måter og inkluderer de ulike rollene variabler har i ulike matematiske kontekster. Til sist er den femte ideen (e) proporsjonalt resonnement, som de beskriver som muligheter for å resonnere algebraisk om to generaliserte størrelser som er relatert på en slik måte at forholdet mellom disse størrelsene er uforandret (Blanton et al., 2015). Et eksempel på den siste (ut ifra vår tolkning) er at man kan forandre på uttrykk uten at forholdet mellom to generaliteter endres. Det kommer tydelig fram i forklaringene av de fem ideene at generalisering også har en sentral rolle her.

Vår forståelse og bruk av begrepet algebraisk tenkning bygger på tanken om generalisering som står sterkt i både Mason (1996), Kaput (1998), og Radford (2010) sin tenkning. I tillegg vil vi ta utgangspunkt i at det finnes flere former eller nivåer for algebraisk tenkning som Radford (2010) beskriver. Videre vil vi ta utgangspunkt i de fem hovedideene til Blanton et al. (2015) som utdyper og spesifiserer Kaput (1998) sine fem kjennetegn på algebraisk tenkning.

2.4 Algebra i skolen

Usiskin (1988) mente at algebra i skolen handler om forståelsen av bokstavsymboler og at elever først studerer algebra når de møter på variabler. Det var vanlig at elevene på barneskolen ble lært opp i aritmetikk, mens algebra først ble introdusert på ungdomstrinnene. Dette viste seg derimot å ikke gi elevene rom for å utvikle dybde i algebraisk tenkning (Blanton et al., 2015). Tanken om både hva algebra i skolen skal være og når den skal bli introdusert har blitt utfordret. Kieran (2004) påpekte at algebraisk tenkning kunne bli mer tilgjengelig for de yngste elevene dersom kjernen i algebrabegrepet ble utvidet. Læreplaner fra ulike land har introdusert algebra til forskjellig tider, også med forskjeller i hvordan de definerer begrepet. Kieran (2004) trakk fram at det som var felles for dem var at de vektlagte sammenhenger mellom mengder, men at det eksempelvis har vært uenigheter i hvilken grad funksjoner skal være en del av algebra. Derimot hadde læreplanene et delt syn på å inkludere generalisering, begrunnelse, problemløsning, modellering og oppdage strukturer. Kieran (2004) mente at elevene kan engasjeres i aktiviteter hun kaller «global meta-level activities» uten å ta i bruk bokstavsymboler. Hun sier at elevene kan være i stand til å tenke algebraisk ved å analysere forhold mellom mengder, se etter strukturer, studere endring, generalisere, løse problemer, modellere, begrunne, bevise og predikere uten å nødvendigvis bruke symboler.

Dette er i tråd med Kaput (1998) sin tenkning som handler om at elevene kan uttrykke generaliteter gjennom å ta i bruk språket i tidlig alder. Ved språket vil elevene kunne øve på å tenke algebraisk og etter nok tid ville det algebraiske språket bli «flytende». Blanton et al. (2015) kunne også vise til funn der elevene var kapable til å tenke algebraisk, bredt og mangfoldig gjennom flere av de fem hovedideene inspirert fra Kaput (1998) sin tenkning, fra (a) generalisering av aritmetikk til (e) funksjonell tenkning. En tidlig introduksjon mener Blanton et al. (2015) i tillegg vil styrke elevenes muligheter til å lykkes i algebra i de senere årene. Mason (1996) støttet dette, han mente at ved å styrke elevers evne til å generalisere ville algebra slutte å være et hinder for de fleste. Algebraen i skolen mente han var nærmeste et dødt emne som var preget av memorering. Derimot kunne dette endres dersom elevene ble øvd opp i å uttrykke generaliteter. Til slutt ville dette bli naturlig og spontant, som kan relateres til det Kaput (1998) mente med å bli «flytende» i algebra språket. Det er i dag blitt en bred akseptert ide om at algebra bør implementeres i skolen gjennom en langvarig tilnærming. Dette bør skje allerede fra første til siste året på skolen, hvor elevene bygger på deres naturlige og uformelle intuisjon om å se mønstre og sammenhenger utviklet til mer formalisert algebraisk tenkning (Blanton et al., 2015).

2.5 Modellering

I boken *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* presenteres det fire ulike tilnærminger til å undervise i algebra; *generalisering, problemløsning, modellering og funksjoner* (Bednarz, Kieran & Lee, 1996). I ALTA-en vi har observert og vært med å utvikle var det kjerneelementet modellering som stod sentralt. Vi vil derfor utdype hva dette handler om basert på tenkningen fra Janvier (1996), Pollak (2011), Blum (2015) og Lamon (1998).

Blum (2015) beskriver en matematisk modell som en bevisst forenklet og formalisert beskrivelse av en del av virkeligheten. Meningen bak en modell er å både beskrive og forklare virkeligheten (deskriptive modeller), men i tillegg innebærer det å predikere og skape deler av den virkelige verden (normative modeller). Ifølge Pollak (2011) har mange mennesker en oppfatning av at matematikken de lærer på skolen og den som blir brukt i virkeligheten er veldig forskjellige. Virkeligheten er svært kompleks, og modellering innebærer å ta utgangspunkt i noen aspekter ved virkeligheten og beskrive det matematisk. Denne matematiske beskrivelsen av en idealisert virkelighet bør testes for å se om den gir samsvar med den faktiske virkeligheten. Dersom modellen avviker i stor grad må prosessen startes forfra for å justere aspektene man tok som utgangspunkt. Denne prosessen kan gjentas flere ganger til man har kommet fram til en akseptabel modell. Det er hele denne prosessen som blir kalt for matematisk modellering (Pollak, 2011).

Matematisk modellering er derimot en aktivitet som sjeldent benyttes i skolen (Janvier, 1996). Pollak (2011) er tydelig på at matematikkundervisningen bør lære elever hvordan matematikk henger sammen med virkeligheten. Videre tydeliggjør han at modellering ikke bare er en annen form for tekstoppgave eller problemløsning. Han mener først og fremst at tekstoppgaver brukes for å øve på bruken av matematiske algoritmer og utføre dem korrekt. I slike oppgaver er ofte all nødvendig informasjon allerede oppgitt. Modellering derimot handler i første omgang om å finne et problem før man kan løse det og sammenhengene man kommer frem til må stadig evalueres og måles opp mot virkeligheten, for å kunne si noe om gyldigheten av modellen. Blum (2015) påpeker at modellering er kognitivt krevende for elever ettersom det krever flere kompetanser som både inkluderer, og ikke inkluderer matematikk. I en modelleringsrelatert oppgave gitt ved en PISA-undersøkelse som involverte å regne ut et estimat for antall tilskuere på en konsert var det bare 26 % av 15-åringene som krysset av for riktig svar.

Modellering beskriver Blum (2015) som en prosess bestående av syv steg; *konstruere, forenkle, matematisere, jobbe matematisk, tolking, validere og ferdigstille*. Flere studier har vist at hvert av disse stegene kan være mulige kognitive barrierer for elevene. Konstruere, beskriver han som å forstå en situasjon og lage en mental forestilling av den. Det andre steget innebærer å strukturere og forenkle situasjonen for at man i tredje steg kan matematisere situasjonen, som handler om å beskrive situasjonen matematisk. Det fjerde steget, jobbe matematisk, handler deretter om å bruke matematisk kompetanse til å sammenligne og oppdage sammenhenger. Tolkning er femte steg og det handler om å oversette det matematiske tilbake til virkeligheten. Sjette steg, å validere, handler om å evaluere modellen og se at den gir mening i virkeligheten. Dersom modellen ikke er valid, starter hele modelleringsprosessen forfra ved å se på situasjonen på nytt. Dersom modellen er valid er man kommet til syvende steg som handler om å ferdigstille modellen som innebærer å skrive hele løsningen.

Spesielt fremhever Blum (2015) steg en, to og seks som krevende for mange elever. Mange elever har tidligere erfart at de kan ignorere konteksten i en tekstoppgave og implementere størrelsene i en bestemt algoritme for å komme fram til det riktige svaret. Derfor kan det første steget som handler om å forstå og konstruere en situasjon virke fremmed for mange elever. I det andre steget har det vist seg at mange elever er fremmed for å gjøre antakelser selv og fremstår usikre når de skal forenkle på egen hånd. Det sjette steget validering mener Blum (2015) nesten ikke er å se i elevers modelleringsprosess. Det kan virke som at det er en skjult «didaktisk kontrakt» der elevene har en forventing om at validering er noe som tilhører læreren sin oppgave. Janvier (1996) påpekte at en modell er en beskrivelse av en ideell situasjon og må derfor valideres selv om den aldri vil beskrive virkeligheten perfekt. Han mener at modellering kan beskrives som en dobbeltprosess av å (a) lage en modell basert på antakelser og (b) validere modellen. Derfor er det svært viktig at det forventes at elevenes trenes opp i å evaluere sine matematiske løsninger. Blum (2015) understreker viktigheten av at elevene øver opp en grad av selvstendighet i arbeidet med matematikk. Mange lærere har en tendens til å veilede elevene i stor grad for å unngå feil og blokader før de oppstår. Derimot har studier (Leiß, 2007, sitert i Blum, 2015) vist at dette ikke er en god tilnærming for langsiktig utvikling. Intervensjoner fra lærer som derimot hjelper elevene med strategier har vist seg å være formålstjenlig for utvikling av elevers matematiske kompetanse. I det virkelige liv er det ikke alltid en lærer for elevene å få støtte fra og de trenger derfor strategier for hvordan de kan løse dette selv.

Lamon (1998) utførte et undervisningseksperiment med fokus på modelleringsoppgaver for elever rundt elleve og tolv år. For å hjelpe elevene med å utvikle systematiske måter å analysere mengder i en situasjon på har hun utviklet en modelleringsprosess bestående av fem steg: *identifiser størrelser, gjøre antakelser, beskrive sammenhenger, representere sammenhenger og klassifisere sammenhenger*. Gitt en påstand: «En gutt kan klippe plenen på tre timer, da kan antakeligvis tre gutter klippe plenen på 1 time». Identifisere størrelser handler i dette tilfelle om å navngi mengdene som er opplyst. Lamon (1998) poengterer at det ikke bare bør oppgis «tid» eller «gutter», men «antall gutter» og «tid i timer». Gjøre antakelser innebærer å definere situasjonen ved å bestemme seg for noen utgangspunkt slik at den blir håndterbart. Man kan for eksempel ta utgangspunkt i at alle guttene jobber like effektivt for å skape en klarere sammenheng mellom variablene «tid i timer» og «antall gutter». Beskrive sammenhenger er i Lamon (1998) sin modelleringsprosess et verbalt utsagn om hvordan størrelsene er knyttet til hverandre. Eksempelvis kan en sammenheng beskrives forenklet ved at når antall gutter går opp går tiden ned. Representere sammenhenger har Lamon (1998) knyttet til å bruke piler til å beskrive sammenhenger mellom variablene. Klassifisere handler om å se likheter mellom ulike situasjoner og kategorisere dem. Elevene kan eksempelvis først klassifisere dem basert på pilene, men etter hvert som de oppdager at det er forskjeller på lineære og eksponentielle sammenhenger kan nye underkategorier dannes.

Det kan argumenteres for at modellering er tilknyttet algebraisk tenkning på flere måter. Kieran (2004) nevner for eksempel at algebraisk tenkning kan innebære modellering. Videre peker Mason (1996) blant annet på klassifisering og det å gjøre unntak som viktig kjennetegn på algebraisk tenkning. Dette mener vi kan kobles opp mot Lamon (1998) som fremhever antakelser (forenkle en situasjon), og klassifisere som viktige steg i hennes modelleringsprosess. Videre kan det sees likheter mellom det Lamon (1998) kaller for «beskrive sammenhenger» og «representere sammenhenger» og Blanton et al. (2015) sin beskrivelse av funksjonell tenkning. Funksjonell tenkning innebærer å generalisere relasjoner mellom samvarierende mengder som vi mener har mye til felles med det å beskrive sammenhenger. I tillegg innebærer det å representere disse relasjonene som vi mener kan kobles til å representere sammenhenger. Mason (1996) har nevnt at algebra undervisningen i skolen har vært mye preget av memorering. Han savnet et større fokus på forståelse gjennom generalisering. Blum (2015) legger vekt på at i modelleringsaktiviteter må man kunne danne en forståelse for situasjonen for å modellere den. Dermed kan modellering potensielt bidra til at elever skifter fokus fra memorering og kalkulering til å danne en dypere forståelse av situasjonen og algebraisk tenkning.

2.6 To matematiske perspektiver: kalkulerende og analytisk

Radford (2012) utdyper at det å ha et analytisk perspektiv, er en viktig del av algebraisk tenkning. Som sagt nevner han en type algebraisk tenkning som handler om å se sammenhenger, som kalles faktabasert (Radford, 2010). Dette kan knyttes til det å se matematikk fra et analytisk perspektiv. Dette samsvarer også med tanken om at elever kan tenke algebraisk ved å analysere forhold mellom mengder og se etter strukturer uten å bruke symboler (Kieran, 2004). Radford (2014) mente at tenkning er kulturelt, kroppslig og materielt. Matematisk tenkning hos elever er ikke bare noe som skjer inne i hodet til eleven, men det kan også skje når de bruker kulturelle artefakter som tabeller, funksjoner og syntaks. Han nevnte også at algebraisk tenkning handler om å håndtere ubestemte mengder (Radford, 2001). Reinhardtsen og Carlsen (2022) peker på et analytisk perspektiv i tillegg til et kalkulerende perspektiv, der elevene oftere har hatt mer fokus på kalkulering. Reinhardtsen og Carlsen (2022) mener at det er disse to perspektivene som er synlig i matematisk aktivitet i introduksjonen av algebra i skolen. Ut ifra tidligere forskning kan vi skille mellom kalkulerende og algebraisk perspektiv ved å dele inn i tre kategorier: 1) ulike metoder å tyde tegn og operasjoner; 2) løsningsstrategier; og 3) måter man kan begrunne en løsning (Reinhardtsen & Carlsen, 2022).

Når det gjelder den første kategorien synliggjorde Kieran (1981) at elever ofte ser en begrensning på hva en matematisk løsning skal være og de er ofte opptatt av å se etter en numerisk løsning, de føler at det ikke er et tilstrekkelig svar når de ikke får et tall til slutt. I stedet for å se på det med et kalkulerende perspektiv, kan man ha et analytisk perspektiv (Reinhardtsen & Carlsen, 2022). Dette innebærer at man ser på operasjoner gjennom et strukturelt syn. Dette går blant annet ut på at elevene ikke bare kan snakke om tall som regneoperasjoner, men også kan bruke dem som konkrete objekter som kan manipuleres og endres (Sfard, 2007). Dette handler om å akseptere at noe er ubestemt (Radford, 2018). På samme måte mente Mason (1996) at matematikken som foregår i skolen handler mye om memorering og dette kan kobles til funnene om at elevene bare ser på tall som regneoperasjoner. Likedan mener Pollak (2011) at i modellering handler det om å finne problemer og se etter sammenhenger. Dette mener hun er vesentlig forskjellig fra vanlige tekstoppgaver der det ofte er fokus på å øve på algoritmer. Det andre punktet går ut på at når elevene ikke klarer å akseptere ubestemthet og blir for opptatt av å gjøre beregninger med tall, så klarer ikke elevene å tenke algebraisk. Hvis de derimot klarer å se strukturen bak problemet, da har de forutsetninger for å oppnå algebraisk tenkning (Bednarz & Janvier, 1996).

Mason (1996) trekker likheter til Bednarz og Janvier (1996) og mener at det handler om blant annet å oppdage likheter og forskjeller og å klassifisere. Lannin (2005) sin studie viste at elever ofte tester reglene sine og begrunner generalisering ut ifra empirien deres, istedenfor å se på en generell sammenheng. De har da en tendens til å se på eksakte verdier, dette viser til det tredje punktet om ulike måter å begrunne en løsning. Både Sfard (2007), Radford (2018), Lannin (2005) og Bednarz og Janvier (1996) er alle inne på at elevene må generalisere og må kunne akseptere ubestemthet for å kunne lære algebra. Ut ifra disse teoriene har vi derfor valgt å definere et kalkulerende perspektiv som et overordnet blikk der elevene er opptatt av å se på tallene og fokuset ligger på å regne ut svaret og se vekk ifra konteksten. Vi vil definere et analytisk perspektiv som et overordnet blikk der man ser etter sammenheng mellom størrelser og prøver å finne strukturer og se mønster.

Det er ulike meninger blant forskere om disse perspektivene. Hewitt (2019) mener at elever bør ha fokus på strukturer og unngå å telle og gjøre om matematiske figurer til tall hvis de skal kunne utvikle sin algebraiske tenkning. I tillegg mener han at man bør legge vekt på å begrunne sin matematiske tenkning gjennom det man ser, og skrive ned hva man tenker man vil gjøre istedenfor å faktisk gjøre beregninger. Videre mener han at man må se på et objekt som noe mer enn en helhet, men som deler av et mønster. Hewitt (2019) fant at det var noen elever som prøvde å finne en regel for et problem. Elevene klarte først å finne en regel da de så på strukturen, istedenfor å ha en aritmetisk tilnærming til problemet. I likhet med Hewitt

(2019) mener Blanton et al. (2015) at elever må kunne forstå aritmetiske uttrykk ut ifra å se på strukturen og ikke gjennom kalkulering. Usiskin (1988) var også tydelig på at å studere strukturer er en viktig del av algebra. Blanton et al. (2015) var med på ideene til Hewitt (2019) at elever må kunne forstå aritmetiske uttrykk ut ifra å se på strukturen og ikke gjennom kalkulering.

3.0 Metode

I dette metode kapittelet vil vi presentere hvordan vi har forankret vår forskning, hvilke metoder vi har anvendt og hvilke teoretiske tilnærminger vi har tatt i bruk. Videre vil vi gi en redegjørelse for prosjektet vi har deltatt i, samt beskrive forskningens utvikling. Vi vil deretter forklare hvordan vi har foretatt vår dataanalyse. Avslutningsvis vil vise til hensyn vi har tatt i forhold til reliabilitet, validitet og etiske betraktninger. Vårt valgte forskningsspørsmål lyder som følger: *Hvordan resonnerer elever på 6. trinn med størrelser i modelleringssituasjoner?*

3.1 Forskningens forankring og design

I dette studiet har vi anvendt en kvalitativ metode. Vi har valgt denne metoden fordi den tar sikte på å forstå og beskrive hva mennesker gjør (Postholm & Jacobsen, 2018). Vår intensjon var å oppnå en dypere forståelse av elevers tenkemåter i forhold til modelleringsoppgaver. For å kunne oppnå dette, undersøkte vi en gruppe elever gjennom ti undervisningstimer, og observerte deres aktiviteter med det formål om å se situasjonen fra elevenes perspektiv. I denne sammenhengen preges datainnsamlingen ofte av tekstlige beskrivelser, til forskjell fra kvantitative metoder som ofte benytter tall og statistikk (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.1.1 Forskningsparadigme

Ettersom vi fortolker sosiale handlinger, har vi plassert vår studie i det interpretative paradigme (Bryman, 2012). Det legges vekt på at virkeligheten ikke er absolutt og blir påvirket av sansene som fortolker den (Rehman & Alharti, 2016). I interpretativt paradigme er det en viss aksept for at forskeren har innvirkning på forskningen. Ved å tolke resultater i lys av teori, og at forskeren velger ut relevant empiri for å oppnå en forståelse av gruppen som forskes på (Bryman, 2012).

3.1.2 Sosialkonstruktivisme

Innenfor det interpretative paradigme har valgt sosialkonstruktivisme som et epistemologisk utgangspunkt. Sosialkonstruktivisme understreker at virkeligheten er konstruert av menneskelige samspill og sosiale prosesser. Sentralt i denne retningen er ideen om at mennesker aktivt konstruerer sin egen virkelighet gjennom kommunikasjon og samhandling med andre mennesker. Dette betyr at det ikke finnes en objektiv og universell sannhet eller virkelighet, men at alle våre erfaringer og oppfatninger er kontekstavhengige og kulturelt betinget (Burr & Dick, 2017). Vår oppfatning er at det er vanskelig å si hva som er virkelig, men vi beskrev det vi observerte og gjorde en tolkning ut ifra det, men vi er klar over at andre kunne ha både observert og tolket det annerledes.

Thagaard (2009) fremhever at et konstruktivistisk perspektiv på kvalitative metoder vektlegger relasjonen mellom forskeren og de som blir studert. Det er forsker og informant som i felleskap utformer kunnskapen. Gyldigheten av forskningskunnskapen ses i lys av relasjonen mellom forskeren og de som studeres, og begge parter har innflytelse på den prosessen som danner grunnlaget for kunnskapsutviklingen.

Med et sosialkonstruktivistisk ståsted for vår studie er det viktig å fokusere på hvordan sosiale konstruksjoner og samhandling mellom mennesker skaper og former virkeligheten. Det er derfor sentralt å undersøke hvordan kunnskap og virkelighet konstrueres gjennom sosiale interaksjoner. I forskerrollen må vi være bevisst på vår egen posisjon og påvirkning i samhandlingen med deltakerne, og anerkjenne at kunnskapen som blir produsert er en sosial konstruksjon og ikke en objektiv sannhet. Det er også viktig å ta hensyn til konteksten og de kulturelle forholdene som påvirker konstruksjonen av virkeligheten i den studerte gruppen (Thagaard, 2009). Vi har sett på elevenes interaksjon med medelever, lærere og forskere. Deretter har vi reflektert rundt hva dette har å si for deres tenkning.

3.1.3 Studiedesign

Studiedesignet vårt tar utgangspunkt i en kasusstudie. En slik studie går ut på å gjøre en detaljert og intensiv analyse av en enhet, for eksempel en person eller en gruppe (Bryman, 2012). Vårt mål for denne studien var å gi en deskriptiv beskrivelse av hvordan elevene jobbet og tenkte matematisk. Det var ikke noe fasit på hva vi ville finne, men vi så på hva som kunne skje i en slik konktest vi observerte. I vårt tilfelle var vår kasus en elevgruppe på fire elver som vi forsket på med intensjon om å se hvordan disse elevene tenkte og handlet i ALTA-oppgaver om modellering.

3.2 Algebraprosjektet

Vi har deltatt i et algebraprosjekt som er et samarbeid mellom forskere, lærere, masterstudenter, doktorgradsstipendiat og internasjonale kollegaer. Målene for dette prosjektet er

- Å utvikle og demonstrere effektivitet av læringsaktiviteter for algebraisk tenkning på mellomtrinnet i skolematematikk.
- Etablere måter man kan implementere læringsaktiviteter på en utbredt og bærekraftig måte for algebraisk tenkning i norske skoler.

Målet med dette prosjektet er å øke kunnskapen om forskningsbaserte ALTA-er (Algebra Learning-Teaching Activities) som er utformet spesielt for 5.-7. trinn, med det formål å støtte elevenes algebraiske tenkning. Lærerne blir aktivt involvert i designprosessen, og ALTA-ene blir deretter testet i klasserommet. Etter gjennomføringen blir det arrangert workshops for å vurdere implementeringen av ALTA-ene, for å forbedre dem og for å utvikle nye. Vi har allerede bidratt til utviklingen av den første ALTA-en for 6. trinn, med fokus på modellering, og har samlet inn data i form av videoopptak, lydopptak, observasjoner og elevtekster. Videre har vi vært tilgjengelige for å støtte læreren og besvare eventuelle spørsmål vedrørende ALTA-en.

3.2.1 Workshop og utvikling av ALTA-er

Målet med den første workshopen var å fullføre utviklingen av ALTA-er for den første gjennomføringen med deltakelse fra lærere, forskere, masterstudenter og doktorgradsstipendiat. ALTA-en på sjette trinn ble ikke fullført på workshopen og vi måtte derfor utvikle denne på egen hånd sammen med veileder uten lærernes tilstedeværelse. Lærerne så igjennom og godkjente oppleggene i etterkant, men deres manglende deltakelse i utviklingsprosessen har ikke vært gunstig for prosjektet sin del. Undervisningsøktene har avdekket noen misforståelser om hva som har vært essensen i oppleggene. Dette ville trolig vært unngått gjennom et tettere samarbeid.

3.2.2 ALTA om modellering av sammenhenger mellom størrelser i reelle situasjoner

Det er utviklet flere ALTA-er, for 5. 6. og 7. trinn. Vi valgte å observere ALTA-en om modellering av sammenhenger mellom størrelser i reelle situasjoner ettersom det var denne vi var med å utvikle. Denne ALTA-en tar utgangspunkt i kjerneelementene modellering og anvendelse, generalisering og abstraksjon, representasjoner og kommunikasjon og kompetansemålet: «bruke variabler og formler til å uttrykke sammenhenger i praktiske situasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 10). Alle ALTA-ene skulle i utgangspunktet ha en varighet på seks til åtte undervisningstimer, men ALTA-en for sjette trinn endte opp med å vare i ti timer, ettersom vi hadde feilberegnet varigheten for noen av undervisningsoppleggene. I ALTA-en på sjette trinn skulle elevene jobbe med matematiske modeller av forenklede, men reelle situasjoner. Elevene fikk oppgaver om å undersøke sammenhenger mellom størrelser og jobbe med å uttrykke generaliteter de oppdaget ved bruk av ulike representasjoner. Ellers skulle de øve på å klassifisere ulike typer sammenhenger.

Denne ALTA-en har vært inspirert fra Lamon (1998). Hun har laget en representativ modell som illustrerer en modelleringsprosess med fem steg, som er utviklet for å hjelpe elevene å lage en systematisk måte å analysere sammenhenger mellom størrelser i en situasjon (se figur 1).

Figur 1: Egenprodusert skisse av Lamon (1998) sin modelleringsmodell.

Tanken bak undervisningsøktene var å øke elevenes bevissthet rundt størrelser, og trene dem opp i å gjøre antakelser og forenklinger for å kunne håndtere disse størrelsene i beregninger. Videre skulle elevene beskrive sammenhenger mellom størrelsene både ved hjelp av ord og piler, og til slutt klassifisere størrelsene i klasser og underklasser basert på pilene. Både Blum (2015) og Janvier (1996) legger stor vekt på validering i modelleringsprosessen, men da elevene ikke var forventet å uttrykke en fullstendig matematisk modell i første omgang, var ikke dette hovedfokus. I stedet ble elevene oppfordret til å evaluere egne antakelser og vurdere om de var realistiske.

3.3 Kontekst og rammer

ALTA-en på sjette trinn varte i ti undervisningstimer og ble ledet av én lærer. ALTA-en ble gjennomført i en klasse med 14 elever på en barneskole på Sørlandet. Vi hadde mulighet til å velge mellom to skoler, og vi valgte denne skolen basert på tilgjengelig tid til observasjon og utlån av lyd- og videoopptak utstyr. Elever i denne klassen var vant til å samarbeide i grupper. De utprøvde en organisering der de jobbet på tre ulike stasjoner. En stasjon for felles klasseromsdiskusjon, en stasjon for individuelt arbeid og en stasjon for gruppearbeid. Undervisningsplanen forutså at klassen skulle ha faste grupper over en lengre periode i alle fagene. Klassen ble delt inn i fire grupper, med tre til fire elever i hver gruppe, og elever roterte mellom stasjonene i løpet av timene. Undervisningen fant sted i et klasserom bestående av to rom, en amfisal og et arbeidsrom.

3.4 Gjennomføring av ALTA

3.4.1 Første og andre time

I første undervisningstime presentere læreren en påstand. Elevene skrev ned sine tanker om påstanden og diskuterte deretter i grupper. Mange elever fokuserte på å vurdere om påstanden var sann eller falsk. Diskusjonen i gruppene førte til en konklusjon om at det kunne handle om flere faktorer, blant annet mangel på kommunikasjon og urealistiske antakelser. Videre introduserte læreren Lamon (1998) sine fem steg og brukte god tid på å forklare betydningen av hvert steg. Elevene jobbet deretter med å gjøre antakelser, der målet var å komme fram til antakelser som kunne brukes til å regne med. Elevene var mer opptatt av å komplisere situasjonen og vurdere ulike scenarioer. Læreren veiledet elevene lite angående det å forstå hvorfor man gjør antakelser. Til slutt gjennomgikk læreren påstanden ved hjelp av Lamon (1998) sine fem steg, men på grunn av tidsbegrensningen gikk dette fort.

I neste oppgave viste læreren en video om en person som løp på løpebane innendørs og utendørs. Elevene ble bedt om å stille spørsmål basert på det de så i videoen, inkludert hvor lang tid personen ville bruke på å løpe en runde innendørs hvis han han løp så fort han kunne. Elevene kom med ulike tanker. Diskusjonen resulterte i at det var nødvendig å vite rundetiden både innendørs og utendørs, samt om personen løp med samme hastighet i begge situasjonene.

3.4.2 Tredje og fjerde time

I den neste timen fortsatte elevene å arbeide med løpeproblemet. Læreren benyttet notatene til elevene for å undersøke sammenhengen mellom strekning og tid når farten er konstant. Hun hjalp elevene til å forstå hvorfor man gjør antakelser. Videre gjorde hun dem oppmerksom på størrelser og hvordan man kan representere sammenhenger. Hun brukte piler for å representere forholdet mellom størrelser, med hjelp fra elevene. For eksempel viste læreren at når løpebanen blir større (pil opp), tar det lengre tid å fullføre runden (pil opp).

I fjerde time fikk elevene utdelt et ark med noen påstander. Elevene ble utfordret til å tenke kritisk og utforske sammenhenger mellom størrelser. De skulle avgjøre om de var enige eller uenige med påstandene og begrunne sine svar ved hjelp av antakelser. Noen grupper gjorde først antakelser, og brukte dem til å regne og sjekke om utregningen ga mening. Mens andre regnet først og gjorde deretter antakelser som passet til påstandene.

Avslutningsvis gikk læreren gjennom oppgavene og prøvde å gjøre elevene oppmerksom på sammenhengen mellom størrelsene ved å benytte en tabell. Deretter fikk hun elevene til å representere sammenhengen med piler. Til slutt diskuterte klassen i fellesskap hvor realistisk antakelsene var og hvilke antakelser som kan brukes i ulike situasjoner.

3.4.3 Femte og sjette time

I femte time ble elevene vist en video der en vannflaske ble fylt opp med vann. I etterkant stilte læreren spørsmål til elevene om hva de undret seg over med videoen. Mangen av elevene var forvirret og lurte på hva som var poenget med å se videoen. Læreren veiledet elevene til å tenke på hva som er nødvendig å vite for å kunne regne ut hvor lang tid det tar å fylle opp vannflasken. Etter dette begynte elevene å få en bedre forståelse og stilte spørsmål om hastigheten på vannet, størrelsen på flasken også videre. Gruppene diskuterte stegene i Lamon (1998) sin modelleringsprosess knyttet til vannflaskeproblemet.

Flertallet av elevene virket å forstå at det var en sammenheng mellom størrelsen på flasken og tiden det tok å fylle den opp. Mange kunne imidlertid bare se den sammenhengen når de ble veiledet av læreren og var lite selvstendig i denne prosessen. Læreren forsøkte å vise at det finnes forskjellige situasjoner. Deretter fikk elevene i oppgave å regne ut hvor lang tid det tar å fylle vannflasken. Til slutt regnet de ut hvor lang tid det tok å fylle ulike beholdere. Noen elever målte tiden ved å fysisk fylle vann, mens andre brukte informasjonen fra den forrige oppgaven til å forutsi hvor lang tid det ville ta. De fleste elevene forstod raskt at størrelsen på vannstrålen påvirket tiden det tok å fylle flasken.

3.4.4 Syvende og åttende time

I disse timene skulle elevene jobbe med å beskrive og representere sammenhenger samt klassifisere tidligere oppgaver. Først gikk læreren gjennom en eksempeloppgave. Deretter jobbet elevene individuelt med oppgaver. Etter hvert gikk elevene i grupper og jobbet med mer krevende oppgaver av samme type. Videre gikk læreren gjennom tabellen fra eksempelet og en tabell fra en av oppgavene. Læreren klassifiserte situasjonene basert på utviklingen de så i tabellene og guidet elevene til å se at de to tabellene kan representeres med like piler, men at de er forskjellige i forhold til hvordan de stiger. Hensikten var at elevene skulle prøve å forstå at situasjoner de har representert med de samme pilene kan være forskjellige. Elevene ble deretter oppfordret til å bruke andre type piler og tegninger til å illustrere samvariasjonen mellom størrelsene. Til slutt skulle elevene se på oppgave 5 på nytt og gi et forslag til hvilke piler man kunne bruke på den oppgaven.

3.4.5 Niende og tiende time

I de to siste timene skulle elevene lage tre modeller for virusspredning og bruke konkreter og tabeller til å eksperimentere hvordan et virus kan spre seg. I denne timen var det fokus på de tre siste stegene i Lamon (1998) sin modell: *beskrive sammenhenger, representere sammenhenger og klassifisere situasjonen*. I første del av timen introduserte læreren oppgaven for elevene. Videre lagde hun sammen med elevene tre forskjellige måter å vise hvordan et virus kan spres på ved å sette opp tabeller. Deretter skulle elevene fylle ut disse tabellene. Etter dette skulle de prøve å vise hvordan viruset kunne spre seg ved å bruke treklosser som konkreter. De kunne også tegne hvis de ønsket dette. Vi observerte ikke hele denne timen ettersom vi intervjuet elever, men vi tok videoopptak av deler av timen og så gjennom det i etterkant.

3.5 Metode for datainnsamling

Til datainnsamling har vi benyttet triangulering som innebærer å ta i bruk forskjellige metoder for å samle inn data, med hensikt om at de kan utfylle hverandre og gi mest mulig innsikt i studien vår (Bryman, 2012). Metodene vi har brukt er observasjon, videoopptak, lydopptaker, innsamlet arbeid fra elever og intervju.

3.5.1 Observasjon

Observasjon handler om å bruke alle sansene man har for å opparbeide seg en forståelse og oppfattelse av det man observerer (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er sett på som den mest grunnleggende måten å gjennomføre datainnsamling på (Adler & Adler, 1994, sitert i Postholm & Jacobsen, 2018). Når man skal observere noe, ser man hovedsakelig på hva folk gjør (Postholm & Jacobsen, 2016). Det er essensielt å jobbe målrettet og systematisk som forsker i et klasserom. For å systematisere dataene i forskningen er det gunstig å ha et fokusområde som er nært knyttet til problemstillingen (Postholm & Jacobsen, 2016).

Ettersom undervisningsoppleggene har vært utviklet med inspirasjon fra Lamon (1998) sin modelleringsprosess, har observasjonen hatt fokus på å se etter tegn på hennes fem modelleringssteg hos elevene. I tillegg er vår problemstilling tilknyttet algebraisk tenkning og vi har dermed vært observante på å se etter kjennetegn på dette med utgangspunkt i vårt teoretiske rammeverk.

Gold (1958) presenterer fire hovedroller for observasjon; *fullstendig deltaker, deltaker som observatør, observatør som deltaker og fullstendig observatør*. Disse rollene tar høyde for at det er en «åpen» observasjon, som innebærer at all observasjonen foregår i rommet der aktiviteten skjer (Postholm & Jacobsen, 2016). Vi har inntatt rollen som «observatør som deltaker» som innebærer at vi har tatt lite avstand til elevene og hatt liten grad av deltakelse (Postholm & Jacobsen, 2018). Formålet med denne rollen er at vi ønsker å være tett på elevene for å høre og se hvordan elevene jobber og diskuterer sammen, i tillegg til at vi vil ha mulighet til å stille oppklarende spørsmål underveis. Hensikten med denne fremgangsmåten har vært å få tilgang til nyttig informasjon uten å risikere å forstyrre situasjonen eller elevene i stor grad.

Vi startet med en induktiv observasjon, som betyr at vi først observerte uten et bestemt utgangspunkt og deretter brukte teori til å begrense fokuset vårt. Som forskere må vi være åpne i tilnærmingen vår når vi samler inn data (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er viktig å huske at en såkalt "åpen" observasjon alltid vil være påvirket av observatørenes erfaringer, oppfatninger og teori knyttet til det som undersøkes. Derfor vil observasjonen aldri være helt "åpen" (Postholm & Jacobsen, 2016). Før timene begynte anbefalte læreren at vi skulle følge spesielt med på to grupper, som vi derfor plasserte videokameraer på. Utover i undervisningsøktene ble vi mer opptatt av å se etter tegn på algebraisk tenkning og hvordan elevene snakket om matematiske størrelser.

I etterkant av de to første skoletimene så vi gjennom datamaterialet og brukte oppgavens teoretiske rammeverk til å snevre fokuset vårt og legge opp til en deduktiv metode med en klarere plan, der man for eksempel skriver ned hvor ofte noe skjer hvor det skjer også videre (Postholm & Jacobsen, 2016). Ved en slik metode, kan man få mer spesifikk informasjon om det man ønsker å finne ut av (Postholm & Jacobsen, 2016). Vi valgte videre å fokusere på de to gruppene vi hadde blitt anbefalt, som vi har for ordens skyld kalt gruppe 1 og gruppe 2. Fra syvende time fokuserte vi kun på én gruppe med fire elever. Den valgte gruppen mente vi var et godt representativt for klassen med variasjon i nivå og kjønn og derfor et godt utgangspunkt for å fokusere videre på.

Under alle ti skoletimene vi undersøkte har vi benyttet to kameraer og tre lydopptakere. Disse verktøyene har vi brukt for å fange opp felles klasseromsdiskusjoner, individuelt arbeid og gruppearbeid. Ett kamera vekslet mellom å filme hele klassen under felles diskusjoner og gruppe 1 mens de jobbet med oppgavene, mens det andre kameraet filmet gruppe 2 under gruppearbeidet. Vi valgte denne tilnærmingen fordi gruppe 1 satt i amfiet hvor diskusjonen ble holdt, slik at vi kunne snu kameraet når de byttet fra diskusjon til gruppearbeid.

I de to første timene var vi usikre på om vi skulle dokumentere lyden fra kun noen få grupper eller alle. En av oss tok en runde med lydopptakeren for å vurdere om det var verdt å fange opp noen interessante samtaler. Imidlertid opplevde vi at det var utfordrende å tilordne lyden til riktig gruppe etterpå. Vi valgte derfor å plassere opptakerne på faste steder for å forhindre forvirring når vi skulle analysere og transkribere dataene etter observasjonen. I alle undervisningsøktene ble det ført observasjonsnotater på PC. Disse inneholdt setninger og nøkkelord som kunne være nyttige ved analyse og transkribering av dataene senere. I tillegg har vi samlet inn elevarbeid for å få bedre oversikt over hva de hadde jobbet med, og at det ville være et godt supplement for å analysere opptak av video og lyd.

3.6 Intervju

3.6.1 Hvorfor intervju?

I vår masteroppgave har vi vært interessert i å undersøke elevenes tankeprosesser og forståelse knyttet til modelleringsoppgaver. Imidlertid kan vi ikke være sikre på hva elevene har tenkt, så vi har fokusert på kommunikasjonen deres som en indikasjon på hva de kan ha tenkt. Spesielt har vi vært opptatt av å identifisere tegn på algebraisk tenkning hos elevene. Vi har observert en gruppe på fire elever som kan gjøre det utfordrende å vite hva hver enkelt elev har forstått og tenkt, ettersom gruppekommunikasjonen er en blanding av alle deltakernes utsagn. I mange tilfeller har én elev kommet med et utsagn, og resten av gruppen har vært enige. I slike situasjoner er det imidlertid vanskelig å vite om de resterende på gruppen egentlig har forstått dette. Derfor har vi valgt å gjennomføre individuelle intervjuer for å få en dypere innsikt i hver enkelt elevs forståelse og tenkning. Ved å gjennomføre intervjuene individuelt mener vi at vi har større grunnlag for å si hva hver enkelt elev har tenkt og hvordan de har bidratt i gruppediskusjonen. Vi mener intervjuene vi har gjennomført har bidratt til å gi oss nye perspektiver, og på den måten gitt oss en grundigere og mer valid undersøkelse av elevenes tenkning. En kombinasjon av observasjon og intervju tror vi derfor har styrket vår analyse og tolkning i oppgaven.

Det er mange hensyn å ta i planlegging og gjennomføring av et intervju. Forskningsintervju har et tydelig asymmetrisk maktforhold mellom forskeren og den som blir intervjuet. Det er intervjueren som har den vitenskapelige kompetanse og definerer situasjonen, temaet, spørsmålene og hvilke svar som skal følges opp. Annerkjennelse av dette asymmetriske maktforholdet er viktig å være bevisst på når det gjelder å utføre et intervju på en ansvarlig måte (Kvale & Brinkmann, 2009). Ettersom vi undersøkte elever på 6. trinn, er det særlig viktig å være oppmerksom på disse forholdene. Barn kan lett la seg lede av voksnes spørsmål og kan gi upålitelige eller direkte misvisende informasjon. Pluss, at de godtar ofte spørsmål som voksne ville avvist og forsøker å besvare dem.

I tillegg har barn ofte en assosiasjon til lærere om at det kun finnes ett riktig svar på spørsmålet (Kvale & Brinkmann, 2009). Dette er forhold vi måtte ta hensyn til ved å informere elevene om at de ikke skulle testes, at det ikke nødvendigvis var et fasitsvar på spørsmålene og at elevene kunne velge å ikke svare om de ikke ønsket det. Det er også vesentlig å tilpasse spørsmålene og språket til elevers alder for at de skal forstå hva de blir spurt om (Kvale & Brinkmann, 2009). I planleggingen av intervjuet har vi vært bevisste på å skape trygge rammer for elevene. Hvert intervju startet derfor med å forklare elevene omtrent hvor lenge intervjuet ville vare, hva hensikten med intervjuet var, hva det skulle brukes til og at deltakelse var frivillig og at det alltid var lov til å trekke seg.

3.6.2 Kvalitative intervju

I kvalitative studier er intervju en av de mest brukte metodene for datainnsamling (Bryman, 2012). I kvalitative intervjuer er det av stor interesse å få innsikt i intervjuobjektet sine synspunkter. Målet i denne type intervju er å få frem ganske detaljerte data om intervjuobjektets tanker (Bryman, 2012). Observasjon og intervju kan fungere som likeverdige og komplimenterende strategier for datainnsamling (Postholm & Jacobsen, 2018). Der observasjonene må fortolkes gjennom observatørenes subjektivitet, har intervju den fordelen at elevenes egne meninger kommer frem (Postholm & Jacobsen, 2016).

3.6.3 Semistrukturert intervju

Vi har brukt en semi-strukturert intervjuform. Dette innebærer at vi hadde en planlagt intervjuguide med temaer og forslag til spørsmål knyttet til oppgavens problemstilling, samt at vi var åpne for å stille ekstra spørsmål og diskutere andre temaer dersom noe relevant og interessant skulle oppstå underveis (Postholm & Jacobsen, 2018; Postholm & Jacobsen, 2016). Det var ikke en bestemt rekkefølge på spørsmålene, men de ble presentert når det virket mest hensiktsmessig. På denne måten inneholder et semi-strukturert intervju en kombinasjon av deduktiv og induktiv tilnærming. Formålet med intervjuet var å få frem elevene sine perspektiver, og spørsmålene ble tilpasset underveis for å oppnå dette. Det foregår derfor en kontinuerlig analyse under slike intervju der vi som forskere må tilpasse spørsmålene ut ifra det som blir sagt (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.7 Transkripsjon

Hensikten med transkripsjon er å strukturere samtalene slik at de blir bedre egnet til analyse (Kvale & Brinkmann, 2009). I vår forskning har vi observert åtte skoletimer og samlet data med lydopptakere og kameraer fra ti skoletimer. I tillegg har vi samlet inn data fra intervju i form av video- og lydopptak. Med hensyn til oppgavens omfang måtte vi velge ut noen sekvenser som vi ønsket å transkribere. Hva som er en korrekt transkripsjon, er umulig å besvare. Det finnes ingen sann objektiv oversettelse fra muntlig til skriftlig form. Det ordrette transkriberte muntlige språket kan fremstå som usammenhengende og forvirret tale. Hvilken transkripsjonsmetode vil være mest hensiktsmessig for min forskning? Bør vi inkludere pauser, utbrudd eller latter, eller skal vi utelate noen av disse elementene og heller formalisere deler av språket for å bedre formidle budskapet i det som blir sagt? Man må gjøre et utvalgt av det som blir sagt og gjort som baserer seg på forskerens egen tolkning av datamaterialet. Det er derfor viktig å poengtere at leseren bør være bevisst på reliabiliteten og validiteten i transkripsjonen ettersom vi som forskere har stor innflytelse på hvordan dataen tolkes og avgjør hva som skal skrives ned (Kvale & Brinkmann, 2009).

Diskusjoner og utsagn som vi har oppfattet som irrelevant i forhold til kontekst og innhold har vi utelatt. Transkripsjonen har tatt utgangspunkt i video for å få med helheten av både lyd og hendelser, med lydopptakere som et supplement der det har vært vanskelig å tyde hva som ble sagt. I vår transkribering har vi benyttet en transkripsjonsnøkkel som inneholder enkle koder for lyder, tenkepauser, kroppsspråk, utydelig mumling også videre. Denne transkripsjonsmetoden er beskrevet mer detaljert i transkripsjonsnøkkelen (se vedlegg 13). For å anonymisere deltakerne tok vi i bruk fiktive navn som tidligere beskrevet. Disse fire elevene har vi valgt å kalle for Knut, Kai, Anne og Britt. Vi har transkribert omtrent halvparten av intervjuene og gruppediskusjonene hver. I ettertid har vi lest igjennom transkripsjonene for å sammenligne det med hva som ble sagt og gjort i videoene for å forsikre oss om at vi var samstemte og for å kontrollere for feil. Transkripsjonene er lagt med som vedlegg (se vedlegg 13). Utdrag vi anser for å være relevante fra transkripsjonene presenteres i analyse og resultatdel.

Da vi transkriberte dataene våre, valgte vi først kun å transkribere deler av syvende og åttende time og intervjuene vi hadde gjennomført. Grunnen til dette var at vi trodde at det var her vi kunne oppdage mest algebraisk tenkning. Senere fant vi ut at vi måtte fokusere på flere aspekter enn algebraisk tenkning. Dette førte til at vi måtte endre strategi. Deretter begynte vi å lage et narrativ, der vi transkriberte deler av alle timene, som var interessant for det vi ønsket å få frem. Transkripsjonene skrev vi da etter hvert som vi arbeidet med analysen. Da vi skulle systematisere funnene, kategoriserte vi de etter gruppediskusjonene. Transkripsjonene nummerte vi fra 1 og oppover på hver gruppediskusjon. Hensikten med denne systematiseringen var at det skulle vær enkelt for leseren og finne fram i transkripsjonene og for å få en god flyt i narrative. Senere i oppgaven, har vi også bruk hyperkobling for å referere til transkripsjonene for eksempel *se 1. Utdrag 1*. Dette har vi gjort for at det skal være enkelt for leseren å finne tilbake til transkripsjonene.

3.8 Dataanalyse

3.8.1 Valg av datanalyse

Vår tanke før vi begynte å forske, var at vi skulle gjøre en tematisk analyse. En tematisk analyse er en analyse der man organiserer og systematiserer datamateriale inn i temaer eller kategorier (Braun & Clarke, 2012). Vi tenkte å se om vi kunne finne noe algebraisk tenkning hos elevene og deretter sette de ulike funnene i kategorier. Vi kunne ha benyttet oss av en paradigmatisk tilnærming og gjort en analyse av narrativ, der man identifiserer noen aspekter og deler dem inn i kategorier ut ifra likhetstrekk (Polkinghorne, 1995).

Etter at vi hadde fullført datainnsamlingen, oppdaget vi at vi hadde funnet relativt små mengder av algebraisk tenkning. Det var ikke stor variasjon fra time til time, og det var vanskelig å dele inn i kategorier. På grunn av dette valgte vi å bruke en narrativ tilnærming og utføre en analyse som tok utgangspunkt i episoder. Vi utviklet et narrativ som kunne hjelpe oss med å forstå og beskrive dataene våre (Polkinghorne, 1995). Siden vi hadde sett på en elevgruppe over en periode på åtte undervisningstimer, var det passende å kunne se hvilket narrativ som ble fortalt fra første til åttende time og se hva som var «budskapet» i dette narrative. Vi tenkte at selv om det ikke hadde oppstått mye algebraisk tenkning, kunne vi se på hvordan tenkningen til elevene forandret seg i løpet av denne ALTA-en. Hvordan engasjerte elevene seg i modelleringsoppgavene? Tenkte elevene aritmetisk eller algebraisk løpet av prosessen? Vi hadde ikke fastsatt hva vi så etter, men vi hadde noen tanker om hva vi kanskje ville finne.

3.8.2 Narrativ analyse

Narrativ analyse er en metode for å kunne analysere en tekst (Postholm & Jacobsen, 2016). Ideen bak en analyse er at man skal foreta en slags transformasjon, der man begynner med en stor samling av data og prøver å forstå og få en dypere innsikt av disse dataene igjennom analysering (Stake, 1995). I vår forskning har vi innhentet en del empiri og det vil derfor være gunstig å bruke en slik metode. For å kunne skape en forståelse av dataene våre har vi gjort tre ting: 1. delt teksten opp i mindre episoder, studert dem og prøvd å forstå episodene bedre 2. bundet episodene sammen igjen til en helhet etter at vi har fått en bedre forståelse av dem 3. gitt mening til dataen vi har samlet inn. Angående det tredje punktet har vi brukt relevant teori (Postholm & Jacobsen, 2016). I narrativ metode bruker man narrativ for å beskrive hvordan mennesker handler. Narrativ er en diskursform der det handler om å bruke narrativ kognisjon. Det betyr at man kombinerer mange ulike episoder og lager et narrativ (Bruner, 1985, sitert i Polkinghorne, 1995). Vi ønsket å få kunnskap om hvorfor et individ handler som det gjør og ville danne en dypere forståelse for andres handlinger. Dette kunne vi oppnå med narrativ kognisjon (Polkinghorne, 1995). I en narrativ tilnærming ser man ikke bare på hva folk har sagt og beskrivelsene deres, men også på blant annet hvordan de uttalte seg og hvordan de opplevde situasjonen (Gibbs, 2007). I tillegg ser man på om mennesket klarer å løse og oppklare ufullstendige situasjoner (Polkinghorne, 1995). Ut ifra sitatet: «Other things exist in time, but only humans possess the capacity to perceive the connectedness of life and to seek its coherence» (Vanhoozer, 1991, s. 43) kan vi si at det kan være gunstig å se på mennesker handlinger for å få en dypere forståelse av hvordan ting henger sammen.

3.8.3 Vår rolle i narrativ analyse

Vi som forskere er også en del av situasjonen (se ovenfor for flere detaljer) og er aktive tolkere som gir mening til det vi observerer. Vi bestemte fokus på innholdet slik at det narrative som dannes gjennom den narrative analysen ga oss innsikt i elevenes algebraiske tenkning gjennom modelleringsaktiviteter. I likhet med elevenes forståelse av sammenhenger mellom størrelser er også vi i utvikling. I vår studie har vi tatt utgangspunkt i et teoretisk rammeverk og temaet algebra i forkant av observasjonen. Dette antar vi har preget vår observasjon og tolkning. Samtidig har vi vært opptatt av å se på hva elevene først og fremst forteller og har prøvd å ta utgangspunkt i dette, før vi har koble det til teori. I denne prosessen har vi tatt høyde for at det finnes ulike tolkninger av en situasjon, og at prosessen med å analysere og beskrive elevers handlinger vil bli påvirket av vår egen forståelse og våre egne forutsetninger. Ettersom vi har vi vært to observatører har vi vært bevisst på å diskutere observasjonene våre for å komme til enighet i hvordan vi tolket dem, både fra elevenes perspektiv og vårt teoretiske rammeverk. Vi har observert og notert våre observasjoner underveis i forskningsprosessen. Da vi var med å planlegge ALTA-oppgavene hadde vi et forskningsperspektiv, der vi lagde oppgaver først og fremst for å kunne få elevene til å tenke algebraisk. Vi tenkte ikke på perspektivet hos elevene under denne prosessen. Da vi senere skulle analysere dataene, innså vi at vi måtte endre vår tilnærming for å kunne se situasjonen fra elevenes perspektiv. Dette krevde at vi skiftet fokus fra et forskningsperspektiv til et elevperspektiv.

For å utføre en narrativ analyse må man knytte episodene sammen og prøve å skape sammenhenger mellom dem. Vi strebet etter å finne episoder som betinget hverandre. Et eksempel på dette kan være en elev som blir forstyrret av en medelev, som videre fører til at den eleven får tilsnakk av læreren (Postholm & Jacobsen, 2016). Først gjorde vi en mellommenneskelig tolkning, der vi prøvde å se situasjonen fra elevenes perspektiv. Da tok vi ifølge (Sfard, 2012) et «insider-perspektiv» der vi prøvde å beskrive hva elevene gjorde og sa ut ifra hvordan de snakker om og forstår matematikk. Da gikk vi ut ifra at dette var ikke en ekte beskrivelse av virkeligheten, men det handlet om hvordan elevene oppfattet situasjonen. Deretter gjorde vi en ny tolkning, der vi tolket observasjonene ut ifra vårt teoretiske rammeverk. Da så vi på elevenes handlinger og ytringer, og prøvde å se hvilken algebraisk tenkning som kom til syne. Da tok vi et «outsider-perspektiv», der vi tolket dataene gjennom hvordan vi forstår matematikk (Sfard, 2012). Måten vi prøvde å skape sammenheng mellom episodene var at vi først skrev ned hva vi observerte i videoene, elevbesvarelsene og lydopptakene. Deretter delte vi notatene våre inn i episoder som vi tenkte var relevante for det narrative vi ville fortelle. Videre tolket vi disse episodene hver for seg. I neste omgang skrev vi en sammenhengende tekst der vi beskrev episodene og våre tolkninger av dem. Vi strevde med å klare å se situasjonen fra elevenes perspektiv, uten å tolke for mye ut ifra det teoretiske rammeverket. Etter hvert klarte vi å få frem elevenes perspektiv i større grad. Vi hadde med transkripsjoner fra lydopptak og video, for å kunne vise til dette.

I første omgang tenkte vi at vi skulle tolke hver episode i narrative, men dette ble vanskelig fordi det ikke alltid var mye å hente ut ifra episodene, så da fant vi ut at det var bedre å heller ha en tolkning etter hver dobbeltime. På denne måten var det lettere å se sammenhengen i de ulike situasjonene og teksten ble ikke så oppstykket. På grunn av vårt forskningsspørsmål var dreiet mot elevenes arbeid med størrelser i modelleringssituasjoner, så måtte vi jobbe med å vinkle beskrivelsene og tolkningen innpå det. I begynnelsen tenkte vi at elevene hadde et veldig kalkulerende perspektiv, men etter hvert så oppdaget vi at de hadde hatt en mer analytisk tilnærming, enn det vi først la merke til. Vi justerte da tolkningene av enkelt episodene, etter hvert som vi fikk et mer helhetlig bilde av narrative.

Betydningen av de enkelte episodene i et narrativ er ikke nødvendigvis lett å oppdage før man har gått igjennom hele narrative. Hendelser som man først ikke trodde betydde noe, kan vise seg å ha en stor betydning for narrative enn først antatt (Polkinghorne, 1995). For eksempel i begynnelsen var vi veldig opptatt av å se etter tegn på algebraisk tenkning, men når man har ett sterkt fokus på dette, kan det føre til å utelate andre viktige aspekter ved narrative.

I gruppediskusjon 1 (se utdrag 1), snakket elevene om tid på ulike måter. Britt snakket om tid i timer, mens flere av elevene snakket om at tiden kom an på hvor fort de feiet, og hvem som feiet. Her snakket elevene om størrelsen «tid», og ettersom forskningsspørsmålet vårt er: «Hvordan resonnerer elever på 6. trinn med størrelser i modelleringssituasjoner?», så var dette veldig relevant. Derimot var ikke dette noe vi opprinnelig la vekt på, men etter hvert så viste det seg å være en viktig del av det narrative vi ønsket å fortelle. I tillegg så spiller elevene på hverandre i gruppediskusjonen (se utdrag 4). For eksempel sa Anne: «Det sier jo seg at den der inne, er en del mindre enn den ute». Videre sa Kai: «det kunne jo for eksempel være at halvparten … at innebanen er halvparten av det ute». Det at elevene hører på hverandre har innvirkning på hva de lærer og gjør. Vi innså ikke umiddelbart verdien av dette, men det viste seg å bli en viktig del av narrative senere.

Vi hadde som mål å formidle det vi mente var det viktigste budskapet i narrative. For å kunne oppnå dette spurte vi oss selv hva denne historien ville fortelle (Postholm & Jacobsen, 2016). Et narrativ kan bestå av flere viktige budskap, men det kommer an på forskeren, altså oss, hvilket narrativ som man ønsker å fortelle og hva man vektlegger (Postholm & Jacobsen, 2016).

3.9 Reliabilitet og validitet

Forskning er en prosess som bidrar til å øke vår forståelse av virkeligheten og øke vår kunnskap. Resultater er imidlertid ikke tilstrekkelig for å vurdere kvaliteten på forskningen. Disse kan utfordres i fremtiden når andre forskere tilegner seg ny informasjon om temaet. Derfor må man vurdere kvaliteten på forskningen ut fra metodene som ble brukt til å fremskaffe resultatene (Postholm & Jacobsen, 2018). Ved å bruke triangulering som i vårt tilfelle har vært videoopptak, lydopptak og observasjon og elevtekster, vil dette i følge (Postholm & Jacobsen, 2018) kunne styrke forskningens pålitelighet og gyldighet. En kritisk tilnærming er nødvendig for å forklare hvordan resultatene ble oppnådd (Postholm & Jacobsen, 2018). Når vi har vurdert vår forskning har vi forsøkt å være kritiske til funn og på hvilken måte vi har generert funnene. Siden kvaliteten på forskningen avgjøres av vår evne til å integrere arbeidet vårt med andre forskere sitt arbeid (Postholm & Jacobsen, 2018), har vi hatt fokus på å trekke inn ulike perspektiver, slik at vi kan underbygge funnene våre. Vi har prøvd å skape en dialog med andre forskere slik at vi kan sette vår egen forskning inn i en teoretisk kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018).

I forskning er det spesielt to forhold som bør tenkes nøye over: gyldigheten (validiteten) og påliteligheten (reliabiliteten) av resultatene. Gyldighet handler om hvilke konklusjoner forskeren kan trekke ut ifra fra innsamlet data. Pålitelighet dreier seg om i hvilken grad resultatene forskeren har generert er troverdige. Det finnes to typer gyldighet: indre og ytre. Indre gyldighet går ut på om resultatene våre er gyldig for det vi har utforsket (Postholm, 2018). Wellington (2015) mener at å gjennomføre en kasusstudie, kan gi et tydelig bilde av virkeligheten. Det som derimot kan tale imot å bruke kasusstudie er at det er en type studie som gjør det vanskelig å finne kausalitet. I vår studie har vi funnet flere forskjellige måter elever på sjette trinn resonnerer rundt størrelser i modelleringssituasjoner. Dette mener vi styrker den indre gyldigheten i vår studie. Ytre gyldighet handler om vi kan knytte resultatene våre til andre kontekster. Å gjenta en studie og se om man fikk likt resultat, er omtalt som den beste måten å teste pålitelighet. Det vil være svært vanskelig å gjenskape noe i en kvalitativ studie, fordi forskere og forskningsdeltakere vil oppføre seg annerledes fra studie til studie og forskjellige forskere har med seg sine egne tolkninger når de forsker. I tillegg har vi forsket på et få antall elever, og det vil da være vanskelig og generalisere funnene våre til andre studier. Når det er snakk om pålitelighet er det ofte gunstig å reflektere over hvordan man kan ha påvirket resultatet som forsker. Da kan man reflektere over hvordan man tenker man har påvirket selv og gjøre forskningsprosessen synlig slik at andre kan skape egne refleksjon rundt den (Postholm & Jacobsen, 2018).

Pålitelighet handler om de funnene som er gjort, er observatøruavhengige. Dette vil si at andre forskere som observerer ut ifra den sammen teorien og empirien, bør få de samme resultatene (Clark et al., 2021). Siden vi har vært med på å utvikle disse algebraaktivitetene har dette mye å si for hvilke resultater vi har fått. Vår forming av oppgavene har i stor grad vært avgjørende for hva elevene uttrykker (Postholm & Jacobsen, 2018). Vi har laget oppgavene nokså lukket, slik at vi styrer elevene litt innpå tema som vi ønsker, men samtidig har oppgavene vært åpne slik at elevene kunne komme med sine egne tolkninger. Vi har tatt utgangspunkt i en modelleringsmodell og i den er det ganske faste rammer for hva elevene skal jobbe med og oppnå. Siden vi har hatt en rolle som «observatør som deltaker» (Postholm

& Jacobsen, 2018), har vi vært aktive i elevaktivitetene. Vi har stilt spørsmål til elevene og noen ganger kan disse ha vært for ledende, og dette kan føre til at resultatene blir mindre troverdig, og funnene blir lite observatøruavhengig. Vi kan for eksempel ha spurt om hvorfor det er viktig å gjøre antakelser. Da impliserer vi at det er viktig å gjøre antakelser, men dette er noe eleven skulle komme fram til på egenhånd. Konteksten rundt forskningen er tydelig forklart tidligere i oppgaven, fordi når leseren får et godt innblikk i hvordan forskningen er gjennomført kan dette styrke forskningens reliabilitet (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.10 Etiske betraktninger

Det er mange etiske utfordringer som må vurderes i forskning. De har blitt kategoriserte i fire hovedområder*: skade på deltakerne, manglende informert samtykke, krenkelse av personvern og mulig bedrageri* (Diener & Crandell, 1978, sitert i Bryman 2012).

Skade på deltakerne er noe vi har måtte ta spesielt hensyn til ettersom vi har forsket på barn. I denne studien har vi som nevnt prøvd å skape trygge rammer for elevene slik at de føler seg ivaretatt i studien. I forbindelse med observasjon har vi introdusert oss selv for at elevene skal forstå hvorfor vi er der og hva vi gjør. I tillegg har personvernet vært ivaretatt ved å laste opp datamaterialet til en sikker server som deles av alle som deltar i forskningsprosjektet. Dataene som er innsamlet i forskningsprosjektet vil bli lagret til prosjektets slutt den 31.12.2030, med hensyn til fremtidig forskning. Ved denne sluttdatoen vil all personidentifiserende data være slettet. I transkripsjonen har vi tatt i bruk fiktive navn slik at verken elever eller skole skal kunne gjenkjennes.

Informert samtykke betyr at deltakerne skal bli gitt all nødvendig informasjon for å kunne avgjøre om de ønsker å delta i en studie (Bryman, 2012). For å ivareta dette prinsippet har forskningsteamet utarbeidet et informasjonsskriv med samtykkeerklæring for elever og et eget informasjonsskriv til de aktuelle lærerne. I disse skrivene har studiens formål, hva det innebærer for dem å delta og hensyn til personvern blitt utdypet. Siden deltakerne i denne studien var under 16 år, måtte foreldrene signere en samtykkeerklæring for at barna skulle kunne delta i forskningen (Postholm & Jacobsen, 2016). Samtykkeskjemaet inneholdt spørsmål om elevdeltakeren kunne delta i intervjuer med video- og lydopptak, om de kunne bli observert og om video- og lydopptak kunne tas i klasserommet, samt om skriftlig arbeid kunne innsamles eller kopieres. Vi har mottatt signert samtykkeskjema fra alle elevene som vi har forsket på.

Krenkelse av personvernet handler om å respektere retten til privatliv. Dette innebærer at vi måtte ta hensyn til at deltakerne selv bestemmer hva de ønsker å dele. Dette henger sammen med samtykkeskjemaet, og at vi som forskere holder oss til de premissene som er satt i informasjonsskrivet. I den sammenheng skal data oppbevares på en forsvarlig måte. Elevene sammen med foreldre har selv kunne valgt hva slags type data som kan samles inn med video- og lydopptak, intervju og skriftlig arbeid som alternativer. Personvernet innebærer også at elevene kan trekke seg til enhver tid og at det skal respekteres om de ikke ønsker å svare på enkelte spørsmål (Bryman, 2012).

Bedrageri handler om å representere forskningen som noe annet enn det den er (Bryman, 2012). Vi har som mål og ønske å opptre profesjonelt og representere studien på ærlig vis. Gjennom kurset MA-505 på UiA har vi fått en grundig innføring i etiske retningslinjer og vært bevisste på å følge disse. Ved å gi et grundig innsyn i metode, analyse og resultater har vi som mål å styrke studiens gyldighet og troverdighet. Ettersom flere forskere, masterstudenter og en doktorstipendiat deler samme datamateriale, mener vi dette vil være med på å styrke studiens troverdighet ved at vi har mulighet til å kontrollere hverandre. I tillegg har vi vært bevisste på å være kildekritisk og henvist til referanser i henhold til referansestilen APA 7th. Vi har gjennom hele studien vært bevisste på at leser skal kunne finne tilbake til de kildene vi har benyttet.

4.0 Analyse og resultater

4.1 Første og andre time

4.1.1 Introduksjon av påstand og modelleringssyklus

Målet for første og andre time var at elevene skulle bli kjent med de fem stegene i modelleringsprosessen til Lamon (1998). I den første og andre timen bestod gruppen av Kai, Anne og Britt, fordi Knut måtte bistå på en annen gruppe grunnet fravær av andre elever denne dagen. Det første som skjedde i denne timen, var at elevene ble introdusert for påstanden: "En elev bruker tre timer på å feie en skolegård. Da kan tre elever antakeligvis feie skolegården på en time».

4.1.2 Gruppediskusjon 1 – første time – diskusjon av påstand

Før dette utdraget gikk læreren igjennom påstanden: «En elev bruker tre timer på å feie en skolegård. Da kan tre elever antakeligvis feie skolegården på en time» og påpekte at det ikke nødvendigvis var et fasitsvar på oppgaven. Deretter fikk elevene tid til å jobbe selvstendig og skrive ned sine tanker om påstanden, før de samarbeidet og delte sine tanker med resten av gruppen. Elevene diskuterte påstanden og alle deltok i samtalen. Dette utdraget er fra starten av gruppediskusjonen.

Utdrag 1

1. Anne: Så jeg tenkte ja, det kan jo hende. For vi vet jo ikke hvor lenge de i så fall bruker.

2. Kai: Jeg tenkte på at det kommer jo an på hvilken elev. Kan godt være en i åttende feier fortere enn en i andre.

3. Britt: Jeg tenkte, at det er jo an på hvor fort de går, egentlig.

4. Kai: Ja

5. Britt: Siden hvis de ikke jobber så veldig kjapt, så kan jo det være det tar litt lengre tid enn en time.

(…)

6. Anne: Ja, har vi noe sånn ja eller nei, da?

7. Kai: Nei, jeg vil helst si nei.

8. Anne: Okey, hvorfor det?

9. Kai: Fordi det kommer veldig an på eleven.

10. Anne: Mhm.

11. Kai: Kan jo ikke akkurat klone.

12. Anne: Nei.

(…)

13. Kai: Trenger de egentlig å feie en ronse?

14. Britt: Nei, nei …

15. Anne: Det kommer jo, det kommer jo an på.

(…)

16. Anne: Dere, det kommer an på hva de feier? Om de feier. Eller sånn hvor grundige de er.

17. Kai: Mmm, ja det kommer egentlig an på hva de feier, feier de bakken eller feier de grus, eller blåser de at det er steiner.

18. Britt: Eller, hvilken plass de feier, det kan jo være at, si at det var denne herre skolegården. Så kan det være at de feide alt, utenom for eksempel stikkballbanen, eller fotballbanen eller no.

Gruppen snakket om at de måtte si om påstanden stemte eller ikke, de var usikre på hvordan de skulle finne ut av dette. Anne lurte på om noen hadde et ja eller nei svar på oppgaven. Kai var uenig og sa at man ikke kan "klone". Britt og Anne var opptatt av konteksten, og snakket om hvor mye tid de bruker, hvor nøyaktige elevene er, mens Kai var både interessert i personene og konteksten. Elevene gjorde mange antakelser og var opptatt av å se på flere scenarioer ved situasjonen. Kai begynte med å si: «det kommer an på» og videre brukte Anne og Britt også dette uttrykket. Både Anne, Britt og Kai, snakket om hvor lang tid elevene bruker. Britt snakket om tid i timer og Kai, Britt og Anne snakket om hvor fort de feier. Etter diskusjonen sa de seg uenig med påstanden.

Figur 2: Egenprodusert skisse av Lamon (1998) sin modelleringsmodell

4.1.3 Gruppediskusjon 2 – første time – stegene i modelleringsprosessen

I den andre delen av timen gjennomgikk læreren stegene i modelleringsmodellen i plenum. Deretter gikk gruppen igjennom hvert steg ut ifra påstanden: "En elev bruker tre timer på å feie en skolegård. Da kan tre elever antakeligvis feie skolegården på en time". Elevene startet med steget «identifisere størrelser». Da begynte de å snakke om identitet og Sondre prøvde å peile dem innpå hva størrelser er. Dette utdraget er noen minutter ut i gruppediskusjonen.

Utdrag 2

1. Sondre: Hva tror dere størrelse betyr for noe? Hvis dere ikke tenker på å identifisere, men bare ordet størrelse.

2. Kai: Hvor mye noe rommer.

3. Anne: Hvor stort.

4. Britt: Hvor stort det er.

5. Sondre: Hvis dere tenker på det eksempelet i sted. med tre timer og en, sant. En elev brukte tre timer og kanskje tre elever brukte en time. Ser dere noen størrelser der?

6. Kai: Elevenes størrelse

7. Anne: Skolegården.

8. Britt: Hvor mange de er. Eller størrelse på tallet, liksom tre timer og en time.

(…)

9. Sondre: Ja, tenker dere kanskje et tall kan være en størrelse?

10. Anne: Ja. Hvor store tallene er.

(…)

11. Lærer: Noen andre sa at identifisere var å finne noe.

12. Anne: Finne tall

13. Kai: Finne størrelsen på tall

14. Lærer: Finne noen størrelser på tall, okei. Er det noe vi kan finne her?

15. Kai: Tre timer og en time

16. Britt: En elev, tre elever.

Kai, Anne og Britt sa at å identifisere størrelser kunne være å kjenne igjen størrelsen til noe fysisk. De snakket om at størrelse dreide seg om hvilken størrelse noe har og hvor mye noe kan inneholde. I motsetning til Kai og Anne snakket Britt også om størrelser på tall og antall elever og ga «tre timer og en time» som eksempel på størrelse. Etter hvert med litt veiledning, begynte de andre også å komme innpå tall.

Da elevene fortsatte med å gå igjennom stegene i modelleringsprosessen og diskuterte steget «gjøre antakelser» begynte de å snakke om hva antakelser betydde, og Anne begynte å gjøre noen antakelser. Dette utdraget er rett etter elevene har diskutert steget «identifisere størrelser».

Utdrag 3

17. Lærer: Gjøre antakelser, vet dere hva det betyr? Antakelser. Gjøre antakelser?

18. Anne: Å anta noe det er jo på en måte, ja selvfølgelig. Å tenke noe på en måte eller …

19. Britt: Å anta jeg føler det er litt sånn å si ja til det. Jeg antar at du kan gjøre det og det.

20. Lærer: Ja! Du antar at du kan gjøre det og det.

21. Britt: Ja! Det er det at jeg tror jeg kan gjøre det og det!

(…)

22. Lærer: Må du anta noe i den situasjonen der?

23. Anne: Du må ha selvfølgelig at de jobber. Du må anta at de jobber. Hvis de er sånn. Jo selvfølgelig de jobber jo, liksom. Du må anta at de jobber, at de ikke bare slapper av.

(…)

24. Kai: Ja, men det jeg tror det er at sammenhengen er på en måte at, da kan tre, eller sannsynligvis at, hvis det da, kan gi mening at de da bruker tre personer på en time.

(…)

25. Anne: Men, hvis vi tar sånn sannsynligvis er det samme som antakelser, gjøre, å gjøre for eksempel.

26. Kai: Da kan tre elever antakelig, feile skolegården på en time, liksom.

27. Anne: Å gjøre kan man også si.

Det så ut til at elevene hadde hørt ordet antakelser før, men at de var usikre på hva det innebar. Elevene var interessert i å finne ut av hva å gjøre antakelser betydde. Noen av elevene brukte tidligere kunnskap for å kunne finne ut av hva det betydde. Britt sa for eksempel: «Jeg antar at jeg kan gjøre det og det». Når de hadde diskutert det litt med læreren begynte Anne å gjøre antakelser. Sammen prøvde de å finne andre ord for å forklare det, for eksempel «sannsynligvis», «tror» og «gjøre». Gruppen ble ikke helt enig om hva det betydde.

4.1.4 Løpebane-problemet

I andre time var målet for økten at elevene skulle øve på å identifisere størrelser og gjøre antakelser, som er de to første stegene i modelleringsmodellen.

4.1.5 Gruppediskusjon 3 – andre time – løpebaneproblemet

Det begynte med at klassen så en video av en gutt som løp på både inne- og utebane. De fikk vite rundetiden ute og at hvis han prøvde å bruke samme tid inne, endte han opp med å gå. Oppgaven var å finne ut hvor lang tid gutten ville bruke på å løpe en runde inne, hvis han løp like fort som han gjorde på utebanen. Klassen ble bedt om å stille spørsmål til videoen og læreren gikk igjennom spørsmålene i plenum. I gruppearbeidet diskuterte elevene spørsmålene og lagde antakelser til problemet. I dette utdraget diskuterer elevene om det var noe de la merke til i videoen. Utdraget starter noen minutter inn i diskusjonen.

Utdrag 4

1. Anne: For det som er greia er jo, at han sa jo at hvis han skulle bruke samme tiden inne, så måtte han gå. Sånn at, det sier jo litt, at hvis han løper rundt banen, og det blir ett minutt og femten sekunder. Og hvis han gjør det inne og han må gå, så sier jo det litt om, at hvor stor banen, og hvor stor den inne er. Det sier jo om at, det sier jo seg at den der inne, er en del mindre enn den ute. Hvis han for eksempel spurter alt han kan får å få en, femten, men inne så må han gå.

2. Kai: Det kunne jo for eksempel vært at halvparten ... at innebanen var halvparten av … det ute.

3. Anne: Ja, og jeg tenkte sånn. Ja, kunne det være sånn, okei at kanskje, hvis han skal løpe så må han kanskje ta dobbelt så langt, og ta to runder for en der ute. Men nå sa de jo ikke noe på det, så egentlig så får vi bare litt informasjon.

4. Kai: Hadde de sagt hvor lang den var inne og ute, så hadde det vært mye enklere.

5. Anne: Ja, men da vet vi ikke det, så da kan vi jo anta avstanden inne, eller dobbelt så liten som den ute. Men, men de sa jo bare noe om det var noen spørsmål, de sa ikke noe om at vi skulle løse en oppgave eller noe.

(…)

6. Sondre: Hvis dere skulle gjort noen antakelser for å finne ut hvor stor banen er inne. Hvilke antakelser ville dere gjort da?

7. Anne: Hvis han gikk helt vanlig. Også når han løp, så løp han helt vanlig.

8. Kai: Eller hvis han gikk på den store banen, så ville han brukt dobbelt så lang tid.

I dette utdraget var Anne opptatt av hvordan tiden og størrelsen på banene hang sammen. Hun så på tiden det tok å løpe rundt banen og sa at tiden har noe å si for hvor store banene er. Anne snakket om tiden i minutter og sekunder. Kai fortsatte på Anne sin tankegang med å si at kanskje banen inne er halvparten så lang som den ute. Videre sa Anne litt det samme som Kai at: «Kanskje han må ta to runder for en der ute». De diskuterte at de hadde for lite informasjon til å kunne løse oppgaven, og Kai uttrykte at det ville vært enklere hvis de hadde fått mer informasjon. Anne påpekte imidlertid at oppgaven ikke var spesifikt formulert som en oppgave som skulle løses. Hun bestemte seg for noen antakelser ut ifra informasjonen de hadde. Da Sondre litt senere spurte om antakelser så gjorde elevene antakelser, som lignet på det de hadde diskutert.

4.1.6 Tolkning av første og andre time

For at elevene skulle kunne starte på modelleringsprosessen, måtte de først og fremst forstå situasjonen de sto ovenfor. I den første oppgaven var det mye som tydet på at elevene hadde forståelse for situasjonen ved at de skapte gode diskusjoner om denne i gruppen. Utfordringen for elevene var å forstå at de måtte forenkle situasjonen for å kunne klare å modellere den. Elevene lagde mange antakelser som kompliserte påstanden og de var opptatt av detaljer. Det var ikke klart for elevene hva de skulle gjøre i den ukjente situasjonen de sto ovenfor. De forholdt seg til den gitte påstanden og reflekterte grundig over kompleksiteten i situasjonen. Det virket som de gjorde dette for å få en bedre oversikt over hvordan de kunne få et svar på om påstanden stemte eller ikke. At elevene hadde problemer med å forenkle situasjonen kan tyde på at de hadde lite erfaring med modelleringsoppgaver. Derimot er det helt naturlig at det tok lang tid for elevene å forstå modellering og de trengte derfor god tid for å kunne forstå hvordan man relaterer matematikk til reelle situasjoner.

Elevene bestemte seg for noen antakelser implisitt ved at de sa seg uenig i påstanden. Det kan se ut til at elevene tenkte at man måtte ha sikre tall for å kunne regne matematisk (se 8. Utdrag 1). I dette tilfellet slet de med å komme fram til en løsning, siden de ikke hadde noen tall å regne med. Det kunne virke som elevene syntes de trengte mer informasjon for å kunne få et nøyaktig svar på oppgaven og at de ikke forstod at de måtte forutsi noe (se 1.-8. Utdrag 1). Likevel bestemte de seg for å si seg uenig i påstanden. Det er mulig at de trodde at de måtte komme fram til et svar. Kai kommuniserte om tiden ved å sammenligne elevene, i forhold til alder og hvordan dette påvirker arbeidet og tidsbruken. Anne, Kai og Britt relaterte tiden til hvor grundige elevene er og hva de faktisk feier. I tillegg snakket Britt om tid i timer og var fokusert på om de jobber kjapt eller ikke og hvordan tiden endrer seg ut ifra det. Alle var veldig opptatt av å forstå situasjonen og gjorde mange antakelser, men hadde ulike tilnærminger til hvordan å snakke om størrelser.

Videre i timen da elevene diskuterte hva «identifisere størrelser» betyr, var de veldig opptatt av tallene og nevnte for eksempel at størrelse kan være «tre timer og en time» eller «en elev, tre elever». De snakket om timer og antall elever, men de var ikke bevisst på hva som var størrelsene i dette scenarioet, altså «tid» og «antall». Kai og Anne så på størrelse som noe fysisk og konkret (se 2.-6- Utdrag 2) og dette kan indikere at de hadde en annen forståelse av størrelser, enn hva Britt hadde. Hun mente at det kunne være størrelser på tall. Hun ga «tre timer og en time» som et eksempel, da hun snakket om størrelser på tall. Vår forståelse er at størrelse er ofte knyttet til et tall, men før det tallet får en betegnelse, så har ikke dette tallet noen verdi. Det kunne se ut som om Britt skjønte at størrelser var knyttet til tall og brukte betegnelse, men vi var usikre på om hun var bevisst på at hun måtte inkludere betegnelse for at det skulle være en størrelse.

Elevene fant det vanskelig å gjøre antakelser og forstå hvorfor det var nødvendig å gjøre antakelser. Anne gjorde relevante antakelser allerede i første time, men virket ikke som hun var bevisst på dette (se 23. Utdrag 3). I timen med løpebaneproblemet så Anne en sammenheng mellom tiden og størrelse på banene (se 1. Utdrag 4). Dette kan sees på som en god indikasjon på at hun begynte å se sammenheng mellom størrelsene i en situasjon. I denne episoden så hadde Anne en abstrakt måte å tenke på ved at hun så på hvordan størrelsene henger sammen, istedenfor å bare være opptatt av tallene å bruke dem til å regne seg fram til et svar. Vi kan si at dette var en form for faktabasert og funksjonell algebraisk tenkning, fordi eleven klarte å se at hvis tiden endrer seg, vil også størrelsen på banen endre seg og omvendt. I løpet av denne situasjonen sa Kai at innebanen kunne være halvparten av den ute og Anne sa videre at kanskje han måtte løpe dobbelt så langt. Her så det ut som at begge elevene laget hypotetiske numre for å hjelpe dem å forstå størrelsene bedre, siden de ikke hadde noen tall å arbeide med. Det så ut til at de tenkte igjennom spesifikke eksempler og mulige scenarioer, og brukte dem til å prøve å forstå hvordan størrelsene forholder seg til hverandre. Videre da elevene skulle gjøre antakelser, så brukte de disse hypotetiske numrene til å lage antakelser (se 6.-8. Utdrag 4).

I den foregående episoden viste Anne tegn til at hun kom litt videre i modelleringsprosessen. I første time gjorde hun antakelser, og nå begynte hun å bli bevisst på størrelsene i situasjonen og hvordan de samvarierte. På samme måte kan vi si at Kai startet på modelleringsprosessen ved at han bygget på det Anne sa, og begynte å tenke på sammenheng mellom størrelsene (se 2. Utdrag 4). Samtidig var gruppen usikker på hva de skulle gjøre og det virket som de følte at de hadde for lite informasjon for å kunne løse oppgaven, og at de trengte mer tall de kunne regne med. Dette så man da Anne sa: «så egentlig får vi bare for lite informasjon». Et viktig aspekt med modellering er at elevene må kunne teste sin matematiske modell for å sjekke om den samsvarer med virkeligheten. Hvis elevene er for opptatt av tall, kan det være vanskelig for dem å kunne relatere matematikken til virkeligheten. Da elevene ble usikre sa Anne at de måtte bestemme seg for noen antakelser, og bruke den informasjonen de hadde.

Etter elevene hadde gjort antakelser om løpebane-problemet, brukte lærer noen av notatene til elevene og lagde en tabell der hun så på rundetid, strekning og fart. Sammen med elevene illustrerte hun tydelig sammenhengen mellom strekning og tid med piler. Ettersom skoletimen snart var over ble dette litt forhastet, og istedenfor at elevene selv fant ut hvordan de kunne representere sammenhengen på egenhånd, fikk de tydelig veiledning fra lærer. Dette kan ha hatt påvirkning på elevenes videre arbeid med representering av sammenhenger.

4.2 Tredje og fjerde time

4.2.1 Påstander – enig/uenig

Tredje og fjerde økt gikk ut på at elevene skulle jobbe motsatt vei fra det de gjorde i de to foregående timene, fra påstand til antakelser. Målet var å kunne identifisere størrelser og gjøre antakelser. De skulle fortsette å jobbe med de to første stegene i modelleringsprosessen.

4.2.2 Gruppediskusjon 4 – tredje time – oppgave 1

Gruppen diskutert ulike påstander og uttrykte om de var enige eller uenige med dem (se vedlegg 8). Deretter forklarte de begrunnelsen bak valgene sine. Etter å ha gjennomført en oppgave, gikk læreren igjennom den med hele klassen. Dette mønsteret fortsatte igjennom timen, og totalt ble det gjennomført tre oppgaver. Transkripsjonen er fra begynnelsen av diskusjonen om påstand 1 på oppgave 1.

Utdrag 5

1. Knut: Hæ, hva sa du, var dere enig, jeg var enig i hvert fall. Det er jo akkurat sånn som forrige gang [kikker bort på kai sitt ark].

2. Kai: Vi snakket jo om det i sted.

3. Sondre: Hvorfor er dere enige?

4. Kai: Fordi hvis antallet går opp [bruker armbevegelse som signaliserer opp], så går tid …

5. Knut: men, det kommer an på. bruker de gressklipper?

6. Sondre: Men, hvis du tar utgangspunkt at de er like effektive. Gir det mening med tallene?

7. Kai: [kikker bort på Sondre mens han svarer] seks, pluss seks pluss seks, det er 18.

(…)

8. Lærer: hvilke antakelser, må dere gjøre da?

9. Britt: det kan jo være at de bare har én gressklipper …

10. Knut: Men, nå har de tre. Nå har de tre gressklippere [nikker med hodet for å understreke det han sier] …

11. Kai: Alle er like effektive! [slår blyanten i bordet]

(…)

12. Knut: Jo, men se nå. Nå tok vi en antakelse. [bruker armene og slår i bordet når han forklarer] Og det var at. Det er egentlig at de kloner en gutt, tre ganger.

13. Lærer: hva er det dere antar da, for at det skal stemme?

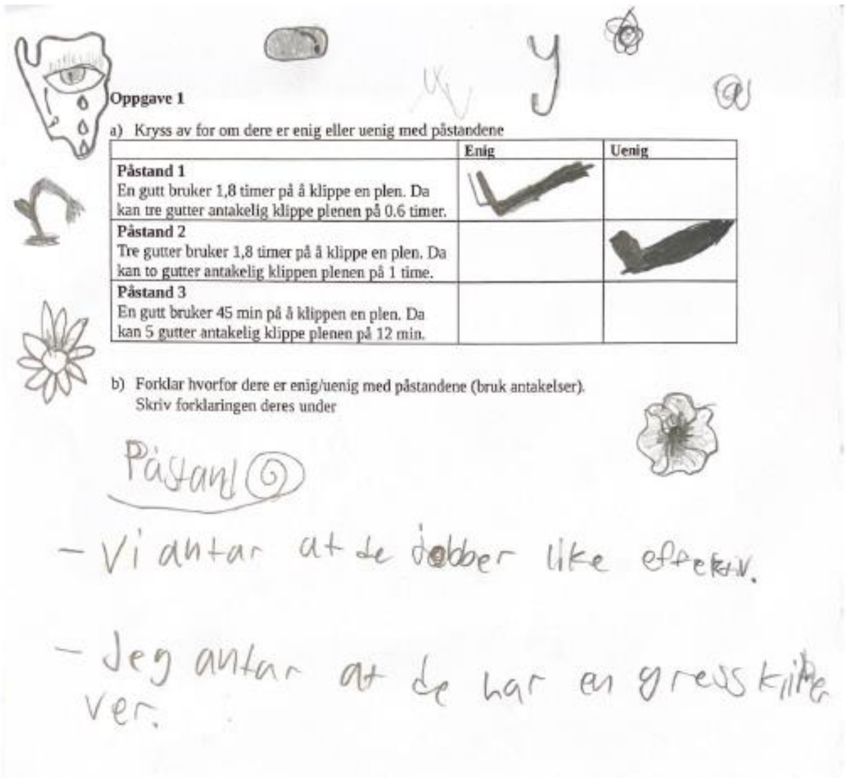
14. Kai: For hvis du tar vekk punktum [peker på påstand 1] så blir seks pluss seks pluss seks, og det er atten.

(…)

15. Sondre: oppdaget dere noen sammenheng også, mellom gutter og tiden?

16. Kai: Når det ble flere gutter gikk tiden ned [Knut taster på kalkulator imens].

Kai og Knut var enige i påstanden: "En elev bruker tre timer på å feie en skolegård. Da kan tre elever antakeligvis feie skolegården på en time» og refererte til det de hadde snakket om i første time (se 1.-18. Utdrag 1). Det første Knut sa var: «var dere enig?». I neste omgang begynte Kai å forklare en sammenheng i påstanden, men ble avbrutt av Knut. Kai var opptatt av å se på sammenhengen i situasjonen, mens Knut var mer opptatt av at det kommer an på situasjonen. Litt senere i timen kom Britt med en antakelse. Da sa Knut at de skulle bruke de antakelsene de hadde bestemt seg for. Han sa: «det er egentlig at de kloner». Her snakker Knut om det samme som Kai påpekte i utdrag 1 i første time (se 10. Utdrag 1). I det læreren spurte om hva de antok for at det skulle stemme, svarte Kai med å regne aritmetisk. Litt senere snakket Kai om sammenhengen mellom gutter og tiden.



Oppgave 1

a) Kryss av for om dere er enig eller uenig med påstandene

	Enig	Uenig
Påstand 1 En gutt bruker 1,8 timer på å klippe en plen. Da kan tre gutter antakelig klippe plenen på 0.6 timer.		
Påstand 2 Tre gutter bruker 1,8 timer på å klippe en plen. Da kan to gutter antakelig klippen plenen på 1 time.		
Påstand 3 En gutt bruker 45 min på å klippen en plen. Da kan 5 gutter antakelig klippe plenen på 12 min.		

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser). Skriv forklaringen deres under

Påstand 1

- Vi antar at de jobber like effektiv.

- Jeg antar at de har en gressklipper.

Figur 3: Oppgaveark fra tredje time – oppgave 1

Etter elevene hadde diskutert den første påstanden en stund spurte Sondre gruppen hva som er poenget med å gjøre antakelser.

Utdrag 6

17. Sondre: Hva tenker dere er poenget med å gjøre en antakelse. Hvorfor gjør vi det?

18. Kai: Fordi det er det vi trenger å vite, for å få et svar.

19. Sondre: For å regne med det?

20. Anne: det er lettere å regne.

Kai sa at antakelser handler om det man trenger å vite for å finne en løsning. I tillegg sa Anne at det er lettere å regne når man gjør antakelser. Gruppen begynte deretter å jobbe med påstand 2 på oppgave 1. Da elevene hadde jobbet med påstand 2 en liten stund kom læreren bort og spurte om elevene hadde lagt merke til noe spesielt på den oppgaven.

Utdrag 7

21. Lærer: Har dere lagt merke til noe på påstand 2? [peker på påstand 2]

22. Kai: Når antallet gutter går opp [peker blyanten opp], da går tiden ned [peker blyanten ned].

(…)

23. Knut: [Slår i bordet] En gutt bruker en 1,8 timer på å klippe gresset. Derfor bruker ikke to gutter en time.

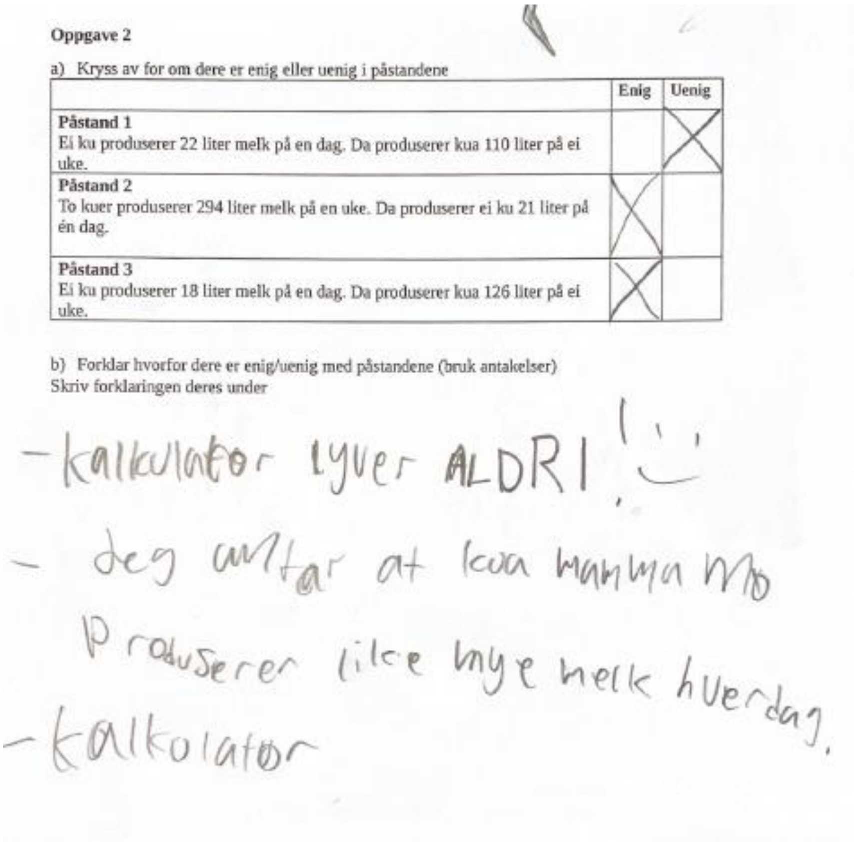
24. Lærer: Ja, for hvis det hadde stemt, hva hadde sammenhengen vært der da?

25. Anne: Jo mindre gutter det er, jo mindre tid.

26. Lærer: Ja! Når det blir færre gutter, så plutselig går tiden ned. Gir det mening? [Knut taster på kalkulator]

27. Anne: Nei, men da kommer ingen til å gjøre det også klipper plenen seg av seg selv.

Kai sa at det var samme sammenheng i påstand 2 som på påstand 1, men det han sa stemte ikke. Knut oppfattet at Kai svarte feil og brukte påstand 1 til å forklare påstand 2. Anne la merke til hvorfor påstanden var feil og forklarte dette til læreren med litt veiledning.



Oppgave 2

a) Kryss av for om dere er enig eller uenig i påstandene

	Enig	Uenig
Påstand 1 Ei ku produserer 22 liter melk på en dag. Da produserer kua 110 liter på ei uke.		X
Påstand 2 To kuer produserer 294 liter melk på en uke. Da produserer ei ku 21 liter på én dag.	X	
Påstand 3 Ei ku produserer 18 liter melk på en dag. Da produserer kua 126 liter på ei uke.	X	

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser)
Skriv forklaringen deres under

-kalkulator lyver ALDRI ! :)

- deg antar at kua mamma Mo produserer like mye melk hverdag.

-kalkolator

Figur 4: Oppgave ark tredje time – oppgave 2.

Noen minutter senere begynte elevene å diskutere påstand 3 på oppgave 1.

Utdrag 8

28. Britt: [leser påstand 3] en gutt bruker 45 min på å klippe en plen. Da kan fem gutter antakelig klippe plenen på 12 minutter.

29. Knut: Det er jo feil, se nå, jeg har jo kalkulator [begynner å taste på kalkulator].

(…)

30. Sondre: Hva har dere antatt nå da?

31. Knut: Oja, man kan. Jeg glemte at vi skulle sånn, jeg trodde dette bare var en regneoppgave.

Her var Knut veldig opptatt av å regne ut på kalkulator og vise at påstanden var feil. Han glemte også at de skulle gjøre antakelser.

4.2.3 Gruppediskusjon 5 – fjerde time - diskusjon om ukedager

Etter læreren hadde gått gjennom oppgave 2 i plenum, begynte elevene på oppgave 3. Her diskuterte de påstander som handlet om skoleuker. Da diskuterte gruppen hva som var forskjellen på en skoleuke og en vanlig uke. Etter hvert kom læreren bort og lurte på om de hadde lagt merke til noe spesielt.

Utdrag 9

1. Sondre: Kan det være at de har regnet gjennomsnittet ut ifra at hun ikke jobber noe på lørdag og søndag?

2. Anne: Nei, men jeg bare antar det jeg.

(…)

3. Sondre: Men, dere antar at de har tatt utgangspunkt i at uken er fem dager. Var det det du tenkte?

4. Anne: Ja [nikker].

5. Kai: Jeg tror ikke det er så mange som går på skole på lørdager.

(…)

6. Sondre: Hvilke antakelser, tror dere de har gjort på påstand to?

7: Kai: At det er seks timer hver dag og at hver skoletime varer like lenge [peker på påstand 3] og at de går på skole fem dager i uken [peker på påstand 3].

(…)

Hvis jeg sier at seks gange syv blir førtito, hva tenker dere da de har tenkt på påstand to?

8: Anne: At han går på skolen på lørdag og på søndag.

(…)

9. Lærer: Har dere tenkt over nå. I den oppgaven [peker på oppgave 3] så står det «skoletimer i uken.» I denne oppgaven står det «hvor mange liter i en uke». Det står uke i begge oppgavene, på samme måte. Hvorfor tenker dere forskjellig?

10. Anne: Hæ? [ser på lærer med et forvirret blikk]

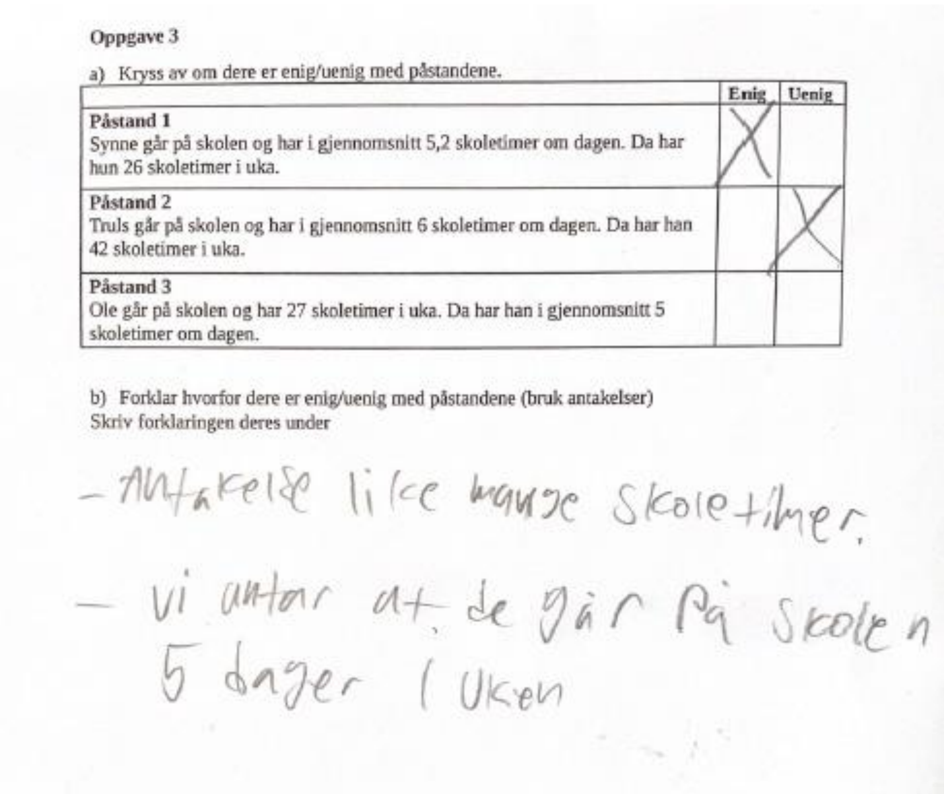
11. Kai: Fordi verden er sånn.

12. Anne: Fordi at de den andre. Her i den ku greia [peker på oppgave 2] så er det en uke og da tenker …

13. Lærer: Dere tenker at kuen ikke tar helg?

14. Anne: Ja. Og her tenker vi at det er helg [peker på oppgave 3].

Anne sa hun antar det som Sondre sa. Kai snakket videre om at han ikke tror folk går på skole på lørdager og sier hvilke antakelser han tror de har gjort på påstand 2. Noen av elevene ble forvirret da læreren stilte et spørsmål, spesielt Anne. Videre sa Kai: «fordi verden er sånn». Etter hvert begynte Anne å forstå spørsmålet til læreren og var den som svarte læreren.



Oppgave 3

a) Kryss av om dere er enig/uenig med påstandene.

	Enig	Uenig
Påstand 1 Synne går på skolen og har i gjennomsnitt 5,2 skoletimer om dagen. Da har hun 26 skoletimer i uka.	X	
Påstand 2 Truls går på skolen og har i gjennomsnitt 6 skoletimer om dagen. Da har han 42 skoletimer i uka.		X
Påstand 3 Ole går på skolen og har 27 skoletimer i uka. Da har han i gjennomsnitt 5 skoletimer om dagen.		

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser)
Skriv forklaringen deres under

- Antakelse like mange skoletimer.
- vi antar at de går på skolen 5 dager i uken

Figur 5: Oppgaveark tredje time – oppgave 3.

4.2.4 Tolkning av tredje og fjerde time

I oppgaven om påstander (se vedlegg 8), da læreren spurte om antakelser, fortsatte Kai å tenke på sammenhenger og vi mener det er grunnlag for å si at han hadde et analytisk perspektiv fordi han begynte å vise til hvordan tiden og antall elever samvarierte. Han sa på et tidspunkt: «hvis antallet går opp». Her bruker han begrepet «antall» som muligens kan være et tegn på at han hadde utviklet en bedre forståelse for «størrelse» begrepet enn hva han tidligere hadde gitt uttrykk for (se 2.-5. Utdrag 2). Etter dette spurte Sondre om det ga mening med tallene. Da regnet Kai aritmetisk for å forklare at det ga mening. Han sa at: «seks, pluss seks, pluss seks, er atten».

Litt senere i diskusjonen spurte læreren hvilke antakelser de hadde gjort, da svarte kai at beregningen ble slik, hvis man tok vekk punktum (0,6+0,6+0,6 = 1,8 → 6+6+6 =18). Det kan virke som at Kai synes det er lettere å regne hvis han forenkler tallene. Denne situasjonen kan indikere at Kai ikke var opptatt av å gjøre antakelser, men isteden regne med tall. En mulighet kan være at han ikke hørte etter på hva læreren hadde sagt og trodde at han svarte på spørsmålet. Vi mener at det er det siste som var tilfellet her, fordi han han hadde vist et analytisk perspektiv tidligere. Utsagnet til Kai kan også knyttes til spørsmålet Sondre stilte litt før som handlet om det ga mening med tallene. Det kan ha ført til at Kai, dermed svarte med regning.

I episoden der gruppen diskuterte hvorfor man gjør antakelser, så det ut som Kai begynte å forstå at man måtte gjøre antakelser for å kunne komme fram til en løsning i denne type oppgaver (se 18. Utdrag 6). Det samme kunne man se hos Knut, da elevene diskuterte påstand 1 i oppgave 3. Her var først Knut opptatt av at «det kommer an på». Litt videre i diskusjonen var han mer bestemt på at han skulle holde seg til et par antakelser (se 5.-12. Utdrag 5). Her kunne det se ut til at Knut forstod at i virkeligheten er ikke det alltid slik at vi har all informasjon for å finne ut av noe og at man av og til må bestemme seg for et par antakelser. Derimot sa Knut noe om «kloning», og dette viser at Knut enda ikke godtar at matematikken ofte handler om å approksimere virkeligheten. Han deltok i en ny aktivitet med nye regler, som han enda ikke klarte å akseptere. Man kan si at det motsatte av det Knut tenkte kan være at 0,6 timer er gjennomsnittstiden det tar for å feie 1/3 av skolegården, og at alle elevene har litt ulik effektivitet. Ved dette tilfellet har man mer aksept for at man ikke kan fremstille virkeligheten nøyaktig.

Litt senere i samme oppgave da elevene snakket om uker og skoleuker, tenkte elevene realistisk rundt situasjonen og klarte å knytte problemet til virkeligheten. Det kan tolkes som om at Kai mente at det var naturlig å tenke at en skole uke er fem dager og at når en ku produserer melk så tar den ikke helg, ut ifra utsagnet hans «fordi verden er sånn». Det kan tenkes at de hadde et analytisk perspektiv her fordi de bestemte seg for at kuen ikke tok helg, altså gjorde de unntak som forenklet situasjonen. Her bestemte elevene seg for at hvis påstanden skulle stemme, så måtte man gå ut ifra at kuen produserte melk hele uken, også på lørdag og søndag (se 12.-14. Utdrag 9).

Læreren spurte hvilke antakelser gruppen hadde gjort i utdrag 8. Da sa Knut: «Jeg glemte at vi skulle sånn, jeg trodde dette bare var en regneoppgave». Han var også opptatt av å bruke kalkulatoren. Dette er et godt bilde på at denne eleven var vant til å regne kalkulerende og ikke vant med modelleringsoppgaver, der man må gjøre antakelser og lage og vurdere en modell. I tillegg kan oppgavene ha blitt lagt opp slik at det var litt for enkelt å kalkulere for å finne en løsning på oppgaven. Vi kunne kanskje ha vært mer opptatt av å tilpasse oppgaven slik at det var mer lagt opp til å finne størrelser og sammenheng, enn tall og kalkulering, selv om dette sistnevnte ikke var vår hensikt.

I utdrag 9, der læreren spurte om elevene la merke til noe på påstand 2, prøvde Kai å forklare sammenhengen. Selv om Kai hadde feil, så viste dette at han fortsatt hadde et analytisk perspektiv og fokus på sammenhengen i situasjonen. Etterpå forklarte Knut hvorfor påstand 2 var feil. Han sa at «en gutt bruker 1,8 timer». Vi tror at han mente å si «tre gutter», fordi i påstand 2 sto det «tre gutter» og ikke «en gutt», og da ville forklaringen hans vært riktig (se 21.-23. Utdrag 7). Videre klarte Anne å se at den ene påstanden ikke kan gi mening, fordi da «klipper plenen seg av seg selv». I dette utdraget kan det virke som om Anne kom et steg videre i modelleringsprosessen, siden hun klarte å se sammenhengen og forskjellene mellom påstand 1 og påstand 2, altså to ulike situasjoner. Det virket som hun dannet et mentalt bilde av situasjonen, da hun forklarte hvorfor det ikke gir mening.

4.3 Femte og sjette time

4.3.1 Fokus på å beskrive sammenhenger

I denne timen var hensikten at elevene skulle jobbe med steg 3 (beskrive sammenhenger) og steg 4 (representere sammenhenger) i Lamon (1998) sin modelleringsprosess og opparbeide seg til å bli mer selvstendig på disse. De skulle først jobbe i felleskap ledet av lærer med en situasjon som handlet om å fylle en flaske med vann. Elevene skulle deretter jobbe litt selvstendig med steg 1 (identifisere størrelser) og steg 2 (gjøre antakelser) knyttet til situasjonen, men det var tiltenkt at de kunne få mer støtte i å beskrive og representere sammenhenger.

4.3.2 Gruppediskusjon – femte time – diskusjon av vannflaske situasjonen

I begynnelsen av denne timen ble elevene vist en video av en vannflaske som ble fylt med vann fra en dispenser. Videre fikk de i oppgave å analysere videoen individuelt ved hjelp av de fem stegene i modelleringsmodellen der de skulle prøve å fylle ut noen notater på hvert av stegene. De fikk vite at det tok 6.8 sekunder å fylle 2 desiliter og størrelsen på flasken var 0.65 liter. I etterkant gikk elevene i grupper for å diskutere hva de hadde funnet ut.

Utdrag 10

1. Anne: På identifisere størrelser så skrev jeg 6,8 sekunder er lik 2 dl og 0.65 liter er lik det vet jeg ikke.

2. Kai: 2 dl, 0.65 liter og 6.8 sek

3. Britt: Skrev jeg størrelsen på flasken, størrelsen på vann xx

4. Knut: Jeg skrev at flasken var 0.65 liter

5. Anne: På å gjøre antakelser så skrev jeg at jeg antok at flasken var tom

6. Knut: Jeg antok at det var helt tomt og at den skulle fylles helt opp.

7. Kai: Jeg tok en antakelse om at det går like fort, at den er tom og at alle sånne maskiner er helt lik.

8. Britt: Jeg antok at den var en tom flaske.

9. Anne: På beskrive sammenhenger så skrev jeg at når det er større flaske så tar det lengre tid og jo mindre flasken er jo mindre tid tar det.

10. Knut: Når tiden går opp så får flasken mer vann

11. Kai: Jeg skrev dessverre ingenting

12. Britt: Ikke jeg heller

(tull)

13. Sondre: Men Anne og Knut dere hadde to sammenhenger, var dere enige i dem?

14. Knut: Vannet går opp, tiden går opp

15. Anne: Vannet går ned, tiden går ned.

16. Knut: Hæ, nå skjønte jeg ikke.

17. Britt: Hæ, så vannet gikk opp og tiden gikk opp, men vannet gikk ned og tiden gikk ned?

18. Anne: Hvis det er mindre flaske så blir det mindre tid. Er det større flaske blir det mer tid.

19. Knut: Ah okei, ja da gir det mening!

Sondre oppfordret elevene til å diskutere forskjellene mellom sammenhengen i denne oppgaven med vanndispenseren og «feie skolegård» situasjonen. Elevene var litt ukonsentrerte og tullet en del, men etter hvert kom følgende frem fra Anne og Kai.

Utdrag 11

20. Sondre: Husker dere situasjonen med å feie en skolegård? [elevene nikker] Hvis dere ser på sammenhengene kan dere se at de er forskjellig på noen måter?

21. Anne: Denne typen oppgaven her er sånn type at jo større jo større blir det.

22. Kai: Stor mer. Denne er motsatt. På den med kids som skal feie skolegård så hvis tid går ned går kids opp.

I diskusjonen var Kai, Anne og Knut opptatt av tallene og tilhørende benevninger som var oppgitt i videoen. Anne hadde i tillegg fokus på å knytte sammen størrelsene og sa blant annet at 2 desiliter var lik 6.8 sekunder. Derimot var Britt opptatt av volumet til flasken og mengde vann, uten å knytte dette til de konkrete tallene som var oppgitt i videoen. Da elevene gjorde antakelser kom de alle frem til at flasken skulle være tom. De var alle oppmerksomme på volumet til flasken og hvor mye mer vann den kunne romme. Knut la videre til en antakelse om at flasken skulle fylles helt opp som gjorde det enklere å måle mengde vann som kom ut fra maskinen. Kai påpekte at flasken måtte fylles opp like fort hele tiden.

Da elevene skulle diskutere en sammenheng mellom størrelsene i vannflaske-situasjonen hadde ikke Britt og Kai kommet frem til noe. Anne og Knut hadde derimot beskrevet at fyllingstiden og størrelsen på flasken hadde en sammenheng. Knut beskrev en sammenheng ved at en større flaske ville ta lengre tid å fylle opp. Anne tilføyde at dersom mengden vann gikk ned, måtte også tiden gå ned. Dette forvirret de andre på gruppen. Anne forklarte at dersom man brukte en mindre flaske, ville tiden det tok å fylle opp flasken gå ned. Anne så for seg andre varianter av situasjonen som var i videoen. Hun uttrykte at størrelsen på flasken ville henge sammen med hvor lang tid det ville ta å fylle den opp. Knut og Britt syntes uttalelsen til Anne var merkelig ettersom det ikke kunne bli mindre vann når man fylte på vann, men da Anne eksemplifiserte det med at man kan bruke en mindre flaske, forstod Knut at det selvfølgelig ville ta mindre tid å fylle opp en mindre flaske enn en stor.

Etter spørsmål fra Sondre diskuterte elevene forskjellen på vannflaske-situasjonen og «feie skolegård» situasjonen som de hadde diskutert i en annen time. Anne uttrykte at i denne situasjonen hang tid og volum sammen ved at når en av størrelsene økte, ville også den andre øke. Kai la til at det var motsatt i «feie skolegård» situasjonen fordi der gikk tiden ned når antall elever gikk opp. Elevene var spesielt opptatt av om størrelsene steg eller sank i forhold til hverandre og brukte dette som en måte å skille situasjonene.

Gruppen fikk deretter vite fra læreren at det tok 6.8 sekunder å fylle opp 2 desiliter med vann og de fikk i oppgave å regne ut hvor lang tid det tok å fylle hele flasken på 0,65 liter. Denne delen ble ikke transkribert grunnet mye tull og krangling fra elevene. Elevene brukte antakelsene sine til å finne et mønster om at tiden økte med 6.8 sekunder for hver andre desiliter. Dette brukte de til å regne med. Først multipliserte de med tre for å finne tiden det tok for å fylle 6 desiliter. Deretter delte de 6.8 på to for å finne tiden for 1 desiliter og gjentok denne prosessen igjen for å finne tiden for 0.5 desiliter. Deretter adderte de tidene sammen for å finne svaret.

4.3.3 Tolkning av femte og sjette time

Da elevene skulle identifisere størrelser var de mer opptatt av tallene og det virket ikke som om de var bevisst på størrelsene. De nevnte tallene med benevning, men virket ikke å knytte det til verken volum eller tid. Med henhold til Lamon (1998) sitt rammeverk burde elevene kommet frem til volum i desiliter og tid i sekunder. Derimot ble ikke dette eksplisitt nevnt fra læreren i introduksjonen til timen som kan ha vært grunnen til at elevene ikke var oppmerksomme på dette. De reflekterte heller ikke over at i det ene tilfellet så var volum oppgitt i liter og det andre desiliter. Det var også interessant at Anne sa at 2 desiliter var lik 6.8 sekunder. Det virket ganske tydelig at hun ikke forstod hva som mentes med begrepet «lik». Istedenfor virket det som hun brukte ordet «lik» som at noe hang sammen.

Da elevene diskuterte en sammenheng virket det som om de hadde en enda større grad av analytisk tilnærming enn tidligere. Spesielt kunne dette observeres hos Anne som uttrykte at volum (hun sa isteden størrelse på flasken) og tid samvarierte. Hun virket å bruke uttrykket «størrelsen på flasken» istedenfor volum og hun beskrev hvordan fyllingstiden ville gå opp eller ned ut ifra om volumet til flasken gikk opp eller ned. Knut forstod først ikke hva Anne mente. Det kan tenkes at Knut var opphengt i videoen de hadde sett og syntes derfor det var rart at Anne sa at tiden gikk ned. Da Anne forklarte at dersom flasken var mindre så ville fyllingstiden være mindre, så virket det som om Knut forstod det og han sa seg enig. Kai virket også å forstå dette etter hvert ettersom at han involverte seg mer i samtalen. Britt derimot virket å være litt mer usikker på hele situasjonen. I intervjuet i etterkant av ALTA-en hadde Britt uttrykt at hun syntes disse oppgavene var vanskelige og spesielt å representere sammenheng med piler.

Utdrag: Intervju Britt

Britt: Jeg vil si at de vi vanligvis pleier å ha, de syns jeg kanskje er litte granne enklere. Også føler jeg at når jeg er i gruppa og jobber med sånne oppgaver som dette, så føler jeg at hvis jeg sier noe og det er feil, så føler jeg de andre blir irriterte.
Casper: Ja, hva er det som gjør at disse oppgavene er vanskelige da tenker du?
Britt: Kanskje det er litt mer, at vi må regne litt mer, og jeg synes disse symbolene har vært litt vanskelig.

Da elevene skulle regne seg frem til tiden det tok å fylle 6.5 desiliter opplevde vi at de hadde en analytisk tilnærming ettersom det virket som om de brukte antakelsene (Se 5.-8. Utdrag 10) til å se etter en fast utvikling der det økte med 2 desiliter for hvert 6.8 sekund. Deretter brukte de den situasjonen de definerte til å regne seg frem til riktig svar. Kort oppsummert virket det som om elevene i denne økten hadde i større grad forstått hensikten bak å gjøre antakelser enn ved de første fire timene. I denne økten var de mer opptatt av å forenkle en situasjon og beskrive sammenhengen mellom størrelsene gjennom naturlig språk.

4.4 Syvende og åttende time

4.4.1 Fokus på å beskrive og representere sammenhenger

I denne økten var målet at elevene skulle arbeide selvstendig rundt trinn en (identifisere størrelser), to (gjøre antakelser), tre (beskrive sammenhenger) og fire (representere sammenhenger) i Lamon (1998) sin modelleringsprosess. Til slutt skulle elevene øve seg opp i å klassifisere situasjoner med støtte fra lærer i fellesundervisningen. Avslutningsvis var intensjonen at elevene skulle utfordres i å ta i bruk nye piler eller tegninger for å skille situasjoner som ble plassert i samme kategori, men som likevel var forskjellige.

4.4.2 Gruppediskusjon – syvende time – diskusjon av badekar situasjonen

I syvende og åttende time fikk elevene i oppgave å diskutere ulike påstander. Hver oppgave gikk ut på å skrive ned hvilke antakelser som var gjort i en gitt påstand, beskrive sammenhengen mellom størrelsene i påstanden og representere sammenhengen med piler. De jobbet selvstendig med de tre første oppgavene, deretter gjorde eleven oppgave 4 og 5 sammen som en gruppe (se vedlegg 11). Oppgave 4 handler om et badekar fylt med vann der det hadde tatt ett minutt å tappe 12 liter vann. Oppgave 5 handler om et virus som spredte seg der hver person smittet to nye personer.

Utdrag 12

1. Kai: Antakelser, det er at, at det tappes 12 liter vann på ett minutt hele tiden. [Elevene skriver ned antakelsene sine]

(...)

2. Knut: Vannet går ned, men tiden går opp. [Bruker hendene til å vise.]

3. Kai: Ja. [Elevene skriver ned]

(...)

4. Sondre: Hva hadde skjedd hvis tiden hadde gått nedover?

5. Anne: Da hadde vannet gått oppover

6. Kai: Hvis vi hadde spolt tilbake i tid, da hadde vannet gått opp og tiden gått ned.

På oppgave fire ble gruppen raskt enige om å anta at badekaret ble tappet med 12 liter per minutt helt til det var tomt. De virket både trygge og bestemte på antakelsen og gikk raskt videre til å beskrive en sammenheng. De ble deretter enige om at det var en sammenheng mellom mengde vann og tid. Elevene var opptatt av hvordan størrelsene «antall liter» og «tappetiden» påvirket hverandre. De uttrykte at når mengden vann gikk ned, ville tiden øke. Etter et innspill fra Sondre diskuterte elevene om sammenhengen kunne beskrives omvendt. De oppdaget da at vannet ville gå oppover og brukte et eksempel om å filme situasjonen og spole filmen tilbake.

4.4.3 Gruppediskusjon – syvende time – diskusjon av virus situasjonen

Elevene gikk deretter videre til oppgave 5 som handlet om et virus (se oppgaven under). Utdraget under viser diskusjonen rundt oppgaven.

Modell: Et virus har spredt seg i mønsteret 1, 2, 4, 8, 16. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

Fyll ut tabellen	
Dag	Antall smittede
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Figur 6: Tabell og oppgavetekst fra oppgave 5.

Utdrag 13

1. Britt: Et virus har spredt seg i mønsteret …

(Tull)

2. Britt: En, to, fire, åtte, seksten. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

3. Alle: …

[Elevene skriver]

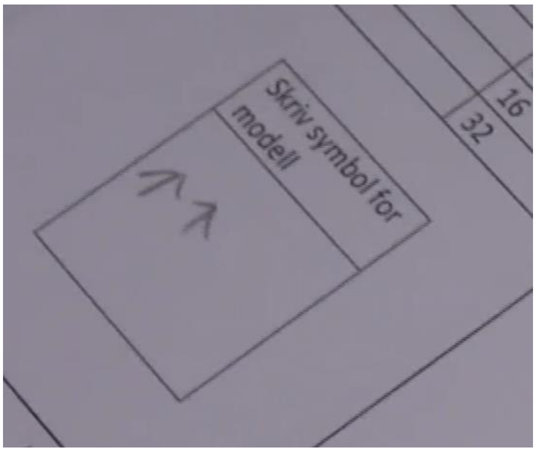
(Tull)

4. Anne: Bare skriv to oppover piler xx symbol

5. Britt: To oppover piler?

6. Anne: Ja, fordi du ser jo på tabellen, da går det tallet oppover, og da går også det tallet oppover.

7. Knut: Ja, hver dag, så går det mer. [Skriver to oppover piler]



Figur 7: Knut sine piler på oppgave 5.

8. Anne: Det dobles.

9. Knut: Ok, forklar hvordan antall. Hvis …

10. Anne: Mønsteret dobles.

11. Knut: Jo lenger tid det tar jo mer folk blir smittet av viruset akkurat sånn som korona.

13. Kai: Det blir doblet hele tiden. En blir doblet. Så blir to. to blir doblet det blir fire. Åtte blir doblet det blir seksten. [Kai peker på kolonnen som viser antall smittede per dag]

14. Britt: xx [mumlet]

15. Knut: Trettito gange to. det er seksifire, sekstifire gange to det er hundre og tjueåtte, hundre og tjueåtte gange …

16. Anne: Ja, det er greit.

(Tull)

17. Kai: Skriv symbol for modellen. Dag går opp, smittede går opp.

18. Sondre: Går det an å se det på en måte også, på den?

19. Anne: Dag går ned, smittetallet går ned.

20. Sondre: Kan du si det engang til Anne?

21. Kai: Folk blir vaksinert, folk blir friske igjen.

22. Knut: Dere må skrive pandemien stopper aldri.

23. Anne: Når dag går ned, går smittetallet ned.

24. Sondre: Hvordan ville du brukt piler til å vise det da?

25. Anne: Ned, ned.

26. Knut: Vi må skrive at den aldri stopper, fordi hvis den stopper, så er vår teori feil.

27. Sondre: Kan du si det en gang til Knut?

28. Knut: Fordi hvis det stopper, hvis viruset plutselig stopper, så er jo vår feil, fordi da går jo tallet nedover igjen. Eller så bare dør de … Ja, ingen dør [skriver ned på arket].

29. Knut: Fordi hvis, det stopper, hvis viruset plutselig stopper, så er jo vår feil, fordi da går jo tallet nedover igjen. Eller så bare dør de … Ja, ingen dør [Skriver ned på arket].

30. Kai: Alle blir vaksinert og da dør viruset!

31. Knut: Ingen dør av det, ingen dør.

32. Anne: Ja, det er det vi holder på med nå.

33. Knut: Ja, vi skriver at ingen dør, fordi hvis noen dør …

34. Kai: Pandemien stopper ikke.

35. Knut: For hvis noen dør av det da betyr jo ikke det

36. Britt: Da blir det mindre.

37. Knut: Da blir det kanskje bare en som blir smittet av det. Nei, nei da blir det null smitte akkurat av den personen.

38. Britt: Hæ? Fordi da er den vekke?

39. Knut: Se nå. Hvis det er trettito folk i dette her klasserommet. nei det er sekstifire folk i dette klasserommet og trettito av dem har korona.

40. Britt: Ja …

41. Knut: Da smitter jo en person to.

42. Britt: En person smitter to?

43. Knut: Ja. En person smitter to, står det her.

44. Britt: Åja, der står det ja.

45. Kai: Vi antar at hver person smitter to nye personer.

46. Knut: Og hvis en, han der som smitter to. hvis den som egentlig skulle smitte to, dør. Da blir det jo to vekke. Eller tre egentlig.

47. Britt: Da blir det to som ikke blir smittet?

48. Knut: Ja! Og derfor blir det ikke riktig, så derfor må ingen dø.

(Tull)

49. Sondre: Så, du sier at på et tidspunkt så vil det endre seg, at det ikke vil øke.
50. Knut: Ja!
51. Anne: Til slutt så er det ikke flere som kan få det, fordi da stopper jo alt.
52. Knut: Evige mennesker, evige mennesker.
(Ler)
53. Britt: Vi trenger ikke evige mennesker.
54. Anne: Ja, men, ja men. Hvis alle blir smittet, så fortsetter det jo …
(Tull)
55. Sondre: Men på antakelser, nå ser jeg på hva du har tatt Knut. Da har dere tatt ingen dør, evige mennesker, pandemien stopper ikke og …
56. Knut: Smitter to nye personer hele tiden.
57. Sondre: Ja.
58. Anne: For det kan være at, for plutselig er det ingen mer smitte, og da gir det ikke mening.

På oppgave 5 forenklet elevene virussituasjonen ved å anta at hver person ville smitte to nye personer uten unntak før de deretter beskrev og representerte sammenhengen med to piler som pekte oppover. De var første opptatt av at begge tallene gikk oppover og representerte sammenhengen ut ifra at de begge stiger eller synker samtidig. Anne oppdaget deretter et mønster om at antall smittede per dag doblet seg. Knut tenkte deretter at oppgaven lignet korona-situasjonen. Knut ønsket videre å regne på hvordan antall smittede utviklet seg og doblet antall smittede til han kom opp til 128. Elevene representerte deretter sammenhengen med to piler som gikk oppover. Etter et spørsmål fra Sondre kommenterte Anne at den kan beskrives andre veien. Derimot misforstod Kai hva Anne mente og tenkte at etter hvert kunne antall smittede synke når folk ble friske igjen. Knut tenkte videre på tanken til Kai og oppdaget at pandemien i oppgaven ikke måtte stoppe ellers ville ikke sammenhengen de hadde beskrevet være riktig.

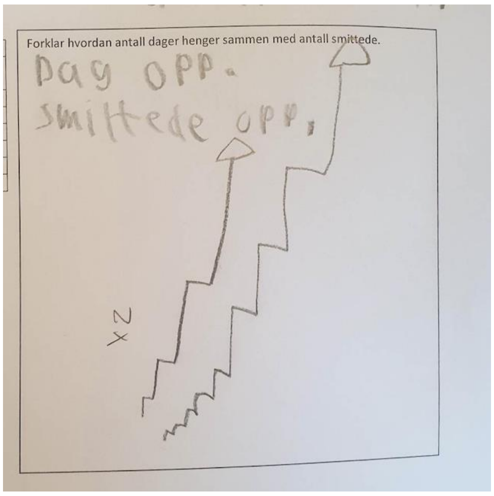
Anne var mer opptatt av å se på hvordan sammenhengen kunne representeres motsatt vei. Hun kom frem til at sammenhengen kunne representeres med både to piler opp og to piler ned alt ut ifra hvordan man så på situasjonen. Knut gjentok ideen sin. Han hadde innsett at tallet økte fort og at det ikke kunne stige slik for alltid. Elevene diskuterte ideen til Knut mens Britt ble litt forvirret. Knut forklarte til Britt at på et tidspunkt vil ikke det være mulig for antall smittede å øke neste dag dersom det er færre friske igjen enn antall smittede den aktuelle dagen. Gruppen ble til slutt enige om at de måtte gjøre flere antakelser for at deres beskrivelse av sammenhengen fremdeles skulle gjelde. De kom fram til at ingen måtte dø, det måtte være evig med mennesker og at pandemien ikke måtte stoppe. De virket å være opptatt av deres egen erfaring med korona der de hadde erfart at folk kunne bli vaksinert og dø, og da ville utviklingen endre seg.

4.4.4 Gruppediskusjon – åttende time – diskusjon av virus situasjonen etter veiledning fra lærer

Elevene fikk senere i oppgave å gjøre oppgave 5 om viruset på nytt etter læreren hadde introdusert at de kunne bruke andre type (bøyde) piler, tegninger eller annet for å representere sammenhenger. Elevene startet med å tegne noen piler for å illustrere utviklingen av viruset. Utdraget under er noen minutter inn i diskusjonen.

Utdrag 14

1. Knut: Haha, hva søren, det ser ut som business [peker på pilen til Kai].



Figur 8: Kai sin pil.

2. Britt: Det ser ut som en trapp.

(ler)

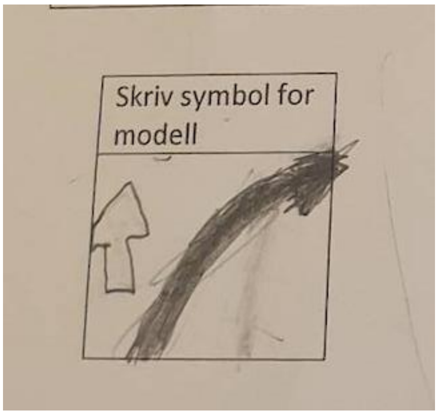
3. Kai: Men det gir jo mening.

4. Britt: Ja, det gir mening ja.

5. Anne: Ja, det gjør det jo.

(...)

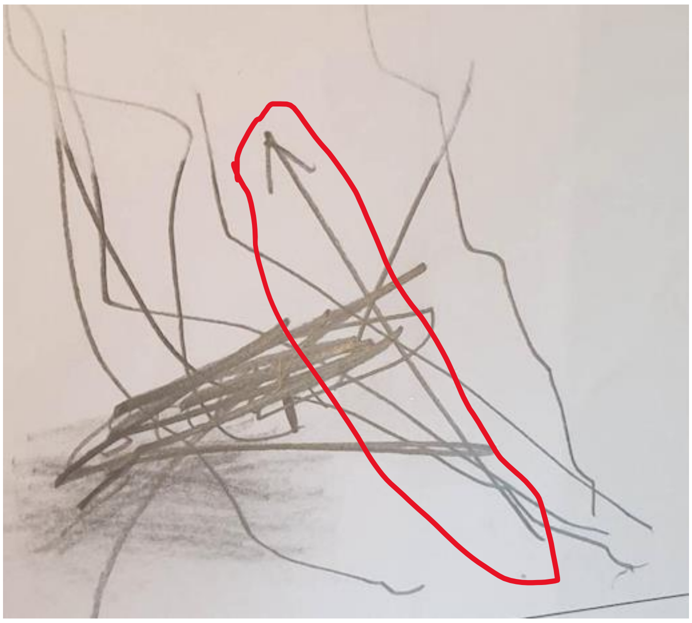
6. Sondre: For min del så ser det ut som om det øker veldig fort i starten, men ikke så mye på slutten [peker på pilene til Knut og Britt som har tegnet samme pil].



Figur 9: Britt sine piler på oppgave 5.

7. Anne: Ja!

8. Knut: Det skulle vært motsatt. [tegner en skrå pil oppover]

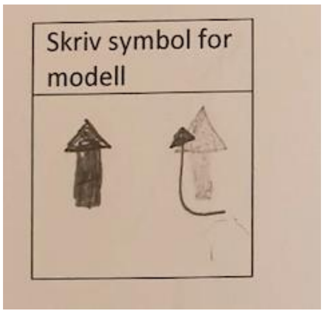


Figur 10: Knut sin skråpil.

9. Casper: Hva mente du med at den skulle gå skrå?

10. Knut: For i starten er det jo veldig lite, for den starter på 1, et veldig lite tall, så 2 som også er lite. Også etter hvert på 32 også boom så er den på over 100. Men den kommer ikke til å bli helt 100 fordi den vil gå 64, 128 osv.

11. Sondre: Hva har du gjort Anne? Kan du vise den til de andre og se hva de tenker? (Anne, viser frem en pil som buer oppover)



Figur 11: Anne sin pil.

13. Kai: Ja, jeg synes den gir mening. Det er lite også blir det bare masse masse mer. [De andre på gruppen nikker]

Kai lagde en pil som gikk oppover som en trapp. Elevene lo først av ideen, men Kai stod på sitt og de andre uttrykket til slutt at den ga mening. Kai virket å være veldig opptatt av at pilen måtte vise stigningen på samme måte som tabellen som også økte trinnvis. Knut og Britt lagde en pil som gikk opp og til siden. De uttrykte at antall smittede økte med ulikt tempo. Sondre påpekte at pilene til Britt og Knut så ut til å vise at antall smittede økte fort i starten, men ikke så mye på slutten. De sa seg enige og brukte deretter håndbevegelser til å vise at det isteden burde gå skrått oppover. Det kunne se ut til at Knut forstod hvordan det ville øke, men han strevde mer med å representere dette. Han virket å være opptatt av at pilen ikke kunne gå rett opp, men at den måtte illustrere en gradvis utvikling. Deretter spurte Sondre om Anne kunne forklare hva hennes pil viste. Pilen hennes bøyde seg oppover lignende en eksponentiell graf. De andre på gruppen var enige i at den ga mening fordi den illustrerte at det først var lite, men utviklet seg gradvis til å bli mer og mer når pilen ble brattere.

4.4.5 Tolkning av syvende og åttende time

I denne økten virket elevene å være veldig trygge på å gjøre antakelser ettersom de brukte kort tid på å bli enige om disse. De virket å gjøre antakelser som gjorde at utviklingen fulgte et fast mønster i begge oppgavene. På oppgave 4 var eksempelvis elevene enige om at badekaret ble tappet med like mye vann hele tiden. På oppgave 5 var elevene enige om at det ville bli smittet like mange per dag. Dette var til stor forskjell fra først time hvor elevene var mer opptatt av å tenke for realistisk rundt en situasjon for å finne ut om det var riktig eller ikke. Derimot på dette tidspunktet virket elevene å være bevisste på at de måtte forenkle for å kunne beskrive en sammenheng matematisk. Dette kom i tillegg frem i intervjuet der alle elevene ble spurt om hvordan disse oppgavene var annerledes fra de oppgavene som de pleide å jobbe med. Alle la da vekt på at disse oppgavene var mer realistiske og at det handlet om å gjøre antakelser for å forenkle situasjonen.

Utdrag: Intervju Britt

Britt: Fordi det er sånn at, på sånne oppgaver som vi ikke får så mye informasjon. Da er det viktig at vi kan ta noen antakelser, der det blir, hvor oppgavene kanskje blir litt enklere.

Utdrag: Intervju Kai

Kai: Fordi hvis vi ikke har noen antakelser, så kan det være veldig mange forskjellige svar.

Utdrag: Intervju Anne

Anne: For at det skal bli lettere å regne.

Sondre: Tenker du det kan handle om hva slags informasjon som er gitt?

Anne: Det jo litt som at det for lite informasjon xx

Utdrag: Intervju Knut

Knut: De gjør jo det mye lettere å skjønne og alle tenker jo ikke likt, så vi må, sånn er det, sånn skal vi tenke.

I tillegg klarte gruppen med initiativ fra Knut å forstå at sammenhengen de hadde beskrevet på oppgave 5 ikke ville være riktig med de antakelsene de først hadde kommet frem til. De gikk derfor tilbake igjen i oppgaven for å legge til antakelser som forenklet situasjonen ytterligere. Dette viste stor grad av selvstendighet og evnen til å se det fra et analytisk perspektiv ettersom verken predikering eller validering av modell var noe de hadde gjort tidligere.

Elevene virket også å ha en god forståelse for samvariasjonen mellom ubestemte størrelser. At de både i oppgave 4 og 5 klarte å beskrive hvordan størrelsene steg og sank i forhold til hverandre var et tegn på at de hadde et analytisk perspektiv da de så på situasjonen. Eksempelvis uttrykte de at antall smittede sank når antall dager gikk ned. Dette er jo ikke mulig i virkeligheten, og kan tyde på at de så forbi kun den aktuelle situasjonen, men var mer opptatt av samvariasjonen mellom størrelsene. Til tross for at elevene gjorde en god jobb med å beskrive hvordan størrelsene sank/steg i forhold til hverandre, så savnet vi en mer generaliserende beskrivelse i løpet av de åtte timene ettersom det regnes for å være et tegn på algebraiske tenkning.

Vi spurte derfor elevene i intervjuet om de kunne beskrive hvordan tiden endret seg når antall elever økte i «feie skolegård» situasjonen. Ingen av elevene kom frem til noe nevneverdig med unntak av Knut.

Utdrag: Intervju Knut

Casper: Her har vi en tabell som viser hvor lang tid elevene ville brukt hvis de jobbet like effektivt. Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen i den tabellen?

Knut: Eh ... Det er jo ... Jo flere elever det blir jo mindre tid blir det. Hvis en elev bruker 3 timer også … Det blir jo egentlig som å dele, for du sa jo at 3 delt på 3 blir jo en time. Du har tre timer først også er det tre elever som skal feie skolegården da blir det jo en time siden det er en som bruker tre. Det ville jo for eksempel. 3 delt på 2 er 1.5 og 3 delt på 3 er 1 og 4 delt på 3 er 0.75 altså 45 minutter ca.

I dette utdraget var det tydelig at Knut i større grad klarte å beskrive sammenhengen mer detaljert. Han uttrykte sammenhengen $\frac{3}{g} = t$ gjennom naturlig språk.

Da elevene fikk i oppgave i å representere oppgave 5 på nytt med andre type piler, virket elevene å være mer opptatt av hvordan størrelsene endret seg fremfor å kunne se om de bare steg eller sank i forhold til hverandre, slik som de hadde gjort i de tidligere timene. Kai var til å begynne med svært opptatt av å lage en pil som fulgte tallene i tabellen og endte dermed opp med en pil som lignet en trapp. Fra tidligere hadde vi sett eksempler på at Kai var opptatt av å forholde seg til informasjonen som var gitt slik som at han sa at man ikke kunne klone en elev (se 11. Utdrag 1). Han virket ikke å være bevisst på å forenkle situasjonen. Derimot hadde Knut og Britt laget en buet pil, men den bøyde seg feil vei. Knut tenkte riktig ved at antall smittede vil øke gradvis, men hadde vanskeligheter med å illustrere dette. Britt derimot virket å herme etter Knut ettersom hun virket å ha liten forståelse av denne oppgaven ut ifra i intervjuet. Anne derimot illustrerte dette på en meget god måte med en pil som lignet grafen til eksponentiell funksjonen $f(x) = 2^x$, til tross for at elevene ikke hadde lært om dette. Til forskjell fra Kai, viste Anne at antall smittede måtte gradvis øke. Både Knut og Kai virket å forstå tegningen til Anne som også kom fram i intervjuet i ettertid der de hadde tegnet lignende piler for å representere sammenhengen mellom tid og antall smittede per dag.

4.5 Kort oppsummering av sentrale funn i analysen

1-2 time: I de første to timene virket elevene usikre på hva som var hensikten med å gjøre antakelser og ønsket mer informasjon for å kunne forstå situasjonen bedre. Elevene hadde utfordringer med å forenkle situasjonen og forstå hva som var relevant for å kunne beskrive en matematisk sammenheng. I diskusjonen av begrepet «størrelse» knyttet de dette til noe fysisk og konkret.

3-4 time: I den tredje og fjerde timen begynte elevene å forstå at de måtte gjøre noen antakelser for å komme fram til en løsning. Elevene tenkte fortsatt veldig realistisk rundt situasjonene og viste tegn til både å ha et analytisk perspektiv og et kalkulende perspektiv. De begynte å se sammenhenger mellom variablene og hvordan de påvirket hverandre, men de var fortsatt opptatt av størrelsene og ønsket mer informasjon om hva som var relevant.

5-6 time: I femte og sjette time var elevene mer opptatt av tallene og ikke størrelsene. De virket å være mindre bevisste på hva tallene representerer i form av volum eller tid. Elevene beskrev sammenhenger mellom størrelsene ut ifra hvordan de steg/minket i forhold til hverandre.

7-8 time: I de siste to timene virket elevene å være trygge på å gjøre antakelser og justerte dem etter hvert som de gjorde seg opp nye tanker om den matematiske sammenhengen. De kunne beskrive hvordan størrelsene samvarierte og predikerte utviklingen i virusoppgaven. Elevene illustrere utviklingen av viruset med piler som viste samvariasjonen på en forståelig måte. Først tegnet de piler som viste at når tiden gikk opp/ned så ville antall smittede gå opp/ned. Videre utviklet de disse illustrasjonene til tegninger som viste utviklingen lignende en eksponentiell graf. Dette var gode indikasjoner på at elevene forstod den matematiske sammenhengen og hadde utviklet sin algebraiske tenkning gjennom timene.

5.0 Drøfting og avslutning

I denne masteroppgaven har vi vært opptatt av å se hvordan elever resonnerer med størrelser i modelleringssituasjoner. Vi har vært med på å utvikle en ALTA om modellering, der vi har fokusert på en gruppe bestående av fire elever. Undervisningseksperimentet vårt har tatt utgangspunkt i Lamon (1998) sin modelleringsprosess på fem steg*; identifisere størrelser, gjøre antakelser*, *beskrive sammenhenger*, *representere sammenhenger og klassifisere sammenhenger*. Disse har vi introdusert gradvis for elevene der vi i første omgang har hatt fokus på at elevene skal forstå situasjonen ved å identifisere størrelser og bruke antakelser til å forenkle og definere situasjonen ytterligere. Videre ble elevene utfordret til å beskrive sammenhenger med ord og representere dette med piler. Elevene fikk senere muligheter til å tegne og bruke diverse piler til å representere sammenhengen mellom størrelsene.

Mot de siste øktene var det også lagt inn noen oppgaver der elevene ble utfordret til å sammenligne ulike type situasjoner og se etter likheter og forskjeller mellom dem. For å besvare vårt forskningsspørsmål har vi studert elevene sin deltakelse over åtte skoletimer gjennom en kvalitativ metode og i etterkant brukt intervju for å i enda større grad få innsikt i deres tenkning. Vi har presentert relevant teori som har bygd opp vårt teoretiske rammeverk. Vi vil nå forsøke å besvare vårt forskningsspørsmål ved å drøfte noen av resultatene fra den narrative analysen opp mot teori og tidligere forskning.

Vårt forskningsspørsmål er:

Hvordan resonnerer elever på 6. trinn med størrelser i modelleringssituasjoner?

5.1 Forståelse av en reell situasjon og identifisere størrelser

Blum (2015) har som nevnt beskrevet modellering som en prosess bestående av syv steg. Det første steget handler om å forstå en situasjon og lage en mental forestilling av den. Han fremhever at dette første steget kan være problematisk for mange elever ettersom de ofte ignorerer konteksten og bare er interessert i å implementere størrelser i en bestemt algoritme for å komme fram til det riktige svaret. I vår forskning mener vi det var ganske klare indikasjoner på at elevene klarte å forstå de situasjonene de stod ovenfor. Dette kunne sees igjennom at de evnet å diskutere situasjonen, bruke gestikuleringer og eksempler til å beskrive og forklare situasjonen til hverandre. Flertallet av oppgavene vi ga til elevene la ikke stor vekt på å komme fram til et fasitsvar og vi opplevde at elevene var veldig interessert i å forstå hva som faktisk skjedde i situasjonene. Derimot så vi tendenser til at elevene i tredje og fjerde time i noen tilfeller hadde en kalkulerende tilnærming til problemet og kunne glemme å tenke over situasjonen.

I disse timene fikk elevene i oppgave om å krysse av om en påstand var riktig eller gal. Der så vi noen tilfeller av at elevene kunne glemme konteksten og var mer opptatt av at tallene skulle være riktig. Selv uttrykte Knut at han hadde glemt at de skulle gjøre antakelser og tenkte at det kun handlet om å regne. Likevel opplevde vi ikke nødvendigvis at elevene hadde problemer med å forstå situasjonen, men de tilpasset seg ut ifra hva de trodde oppgaven handlet om. I samme time så forklarte Anne hvorfor en påstand var feil ved at når antall gutter som klippet plen gikk ned så ville plenen klippe seg selv til slutt. Dette mener vi var et godt eksempel på at denne eleven var i stand til å danne mentale forestillinger av en situasjon. Med tanke på å identifisere størrelser virket elevene å være opptatt av finne tallene fremfor å knytte dem til ubestemte størrelser. Dette så vi også i intervjuene der vi prøvde å gjøre elevene mer bevisste på å knytte det til ubestemte størrelser. Derimot virket Knut å ha bevissthet rundt dette. Da han ble spurt om å finne størrelser i en påstand kom han frem til antall timer og antall elever.

5.2 Strukturere og forenkle en situasjon

Pollak (2011); Blum (2015); Janvier (1996) og Lamon (1998) poengterer alle at modellering innebærer å forenkle en reell situasjon for å kunne beskrive den matematisk. I vår ALTA var det derfor lagt stor vekt på at elevene skulle trenes opp i å gjøre antakelser som gjorde det mulig å beskrive matematiske sammenhenger. I de første timene tenkte elevene svært realistisk rundt situasjonene. De var mer opptatt av å finne ut om påstandene de var gitt var riktig eller gal selv om elevene ikke eksplisitt ble bedt om å gjøre dette. Det mente vi kunne være et tegn på at elevene var vant til å løse oppgaver med en kalkulerende tilnærming. At elevene ikke gjorde antakelser av seg selv var ikke så overraskende gitt at dette var en ny type situasjon for dem. Våre observasjoner samsvarte til en viss grad med Blum (2015) sin påstand om at elever ofte er vant til å bli instruert av en lærer og er fremmed og usikre på å gjøre antakelser selv. Elevene påpekte at de hadde for lite informasjon til å løse oppgaven om løpebanen, men etter hvert innså Anne at det ikke var en oppgave som nødvendigvis skulle løses.

Videre inn i tredje og fjerde time virket det som om elevene i større grad var komfortable og hadde forstått noe av essensen med å gjøre egne antakelser. Derimot viste elevene en kalkulerende tilnærming der de hadde fokus på å regne og løse en oppgave. I femte og sjette time så vi derimot en endring i tilnærmingen elevene hadde til situasjonen de ble presentert. Først og fremst gjorde de antakelser som forenklet situasjonen slik at det ble mulig å beskrive sammenhengen mellom størrelsene. I denne timen fikk de også muligheten til å validere sammenhengen de hadde beskrevet. De viste her at de var bevisste på at sammenhengen de hadde beskrevet ikke nødvendigvis var helt lik i virkeligheten. Videre mot syvende og åttende time virket det som elevene var veldig trygge på å gjøre antakelser og gruppen ble fort enige om noen felles punkter.

De viste også i disse timene at de kunne endre på antakelsen da de oppdaget at sammenhengen de hadde beskrevet krevde ytterligere forenklinger for at den skulle være korrekt. Elevene var ikke blitt bedt om å revurdere antakelsene i forkant, som derfor viste stor grad av selvstendighet og en sterk indikasjon på at de tok et analytisk perspektiv. Dette mener vi også er i tråd med modelleringsprosessen slik Pollak (2011); Janvier (1996) og Blum (2015) framstiller den, at det er en gjentagende prosess ved å ta utgangspunkt i noen konsepter for å beskrive de matematisk, validere modellen og starte prosessen forfra igjen til man har en akseptabel modell. I intervjuene undersøkte vi om elevene hadde forstått hensikten bak å gjøre antakelser. Der kom det frem at alle hadde i mer eller mindre grad lagt vekt på at man gjorde antakelser fordi det manglet informasjon og at det vil bidra til at det ble lettere å regne. Knut hadde i tillegg poengtert at man brukte antakelser til å definere en situasjon slik at alle i gruppen tok utgangspunkt i det samme.

5.3 Analytisk perspektiv gjennom å beskrive og representere sammenhenger

I vårt forskningsprosjekt har vi vært interessert i å se etter om elevene viser tegn til å ha et analytisk perspektiv og om de tenker algebraisk. I første time ønsket vi å se om elevene forstod situasjonen om å feie en skolegård. Vi hadde ikke introdusert Lamon (1998) sin modelleringsprosess for dem fordi vi ønsket å se hvordan elevene håndterte oppgaven uten noen forhåndsgitte strategier. Elevene viste tydelige tegn på at de forstod påstanden de ble gitt og dette kunne vi se gjennom hvordan de diskuterte den. De drøftet frem og tilbake om påstanden var korrekt eller ikke og kompliserte situasjonen for å få frem at påstanden ikke nødvendigvis var riktig. For at elevene skulle klare å analysere situasjonene og tenke algebraisk ved å se på likheter og forskjeller, repetere og oppdage sammenhenger slik Mason (1996) beskriver, så mener vi det var sentralt at de forstod situasjonen, noe vi mener at de gjorde.

Videre så vi tegn i første time til at de var veldig opptatt av å komme fram til et fasitsvar. Det virket som om de kompliserte situasjonen for å kunne vurdere om påstanden var riktig eller gal selv om dette ikke var et gitt mål med oppgaven. Det kunne se ut som om elevene ønsket mer informasjon og at de ikke turte å bestemme seg for noen antakelser som forenklet situasjonen. Dette så vi også da de jobbet med løpebane-situasjonen der elevene eksplisitt uttrykte at de hadde for lite informasjon. Dette opplevde vi samsvarte med tankene til Kieran (1981) om at elever ofte ser en begrensning på hva en matematisk løsning skal være og at de er opptatt av å finne en numerisk løsning, de føler ikke at det er et tilstrekkelig svar, når de ikke får et tall til slutt. Likevel så vi at Anne i denne timen, begynte å bli bevisst på at man ikke nødvendigvis skulle finne et fasitsvar. Med litt veiledning fra Sondre begynte hun å tenke på hvordan lengden på løpebanen og tiden hang sammen.

Utover i øktene opplevde vi at elevene stadig fikk et mer analytisk fokus der de var opptatt av å se på hvordan størrelsene i oppgavene hang sammen. Når det gjaldt å identifisere størrelser virket det ikke som om elevene var bevisste på at størrelsene kunne være en ubestemthet. I femte og sjette time så vi eksempelvis at de oppga størrelsene tid og liter, men det så ut til å ikke være like bevisst på at dette kunne være varierende størrelser. Lamon (1998) legger som nevnt vekt på at elevene bør bli bevisste på at størrelser kan variere ved å oppgi dem som eksempelvis «tid i timer» og «antall liter». Læreren hadde derimot ikke tydeliggjort dette i gjennomgangen og derfor var det ikke så rart at elevene ikke var bevisst på dette. Sfard (2007); Radford (2018); Lannin (2005) og Bednarz og Janvier (1996) er alle inne på at elevene må kunne akseptere ubestemthet og generalisere for å kunne lære algebra. Det innebærer at de ikke bare ser på tallene, men at de også klarer å se etter strukturer og mønstre. Vi opplevde ikke at elevene uttrykte noe bevissthet rundt at tallene de så i oppgaven kunne representere noe ubestemt, men vi opplevde derimot at de viste tegn til å generalisere gjennom naturlig språk. Dette så vi tegn til gjennom at de forklarte ved gjentatte anledninger hvordan størrelsene steg eller minket i forhold til hverandre.

Mot slutten av syvende og åttende time beskrev de mer detaljert hvordan den ene størrelsene doblet i forhold til den andre. Det var også interessant hvordan gruppen, men spesielt Anne hadde bevissthet rundt at størrelsene kunne beskrives på flere måter som for eksempel i sjette time, der tid i minutter gikk ned mens volum i liter gikk opp. Dette mener vi kan være en indikasjon på at de ble mer opptatt av hvordan størrelsene samvarierte og mindre opptatt av den realistiske konteksten. Mot siste del av åttende time fikk elevene mulighet til å tegne nye piler som i enda større grad viste hvordan størrelsene samvarierte. Selv om elevene tilsynelatende ikke hadde erfaring med grafer, observerte vi likevel at de gjennom tegninger og piler i stor grad forstod hvordan størrelsene samvarierte på en lignende måte som grafer ville vist. I denne sammenheng mener vi at elevene studerte endring, analyserte forholdet mellom størrelsene og predikerte utviklingen av viruset i oppgave 5.

Det var også veldig interessant å se hvordan elevene var bevisste på å gjøre ytterligere antakelser etter hvert som de oppdaget at modellen de beskrev ikke ville være riktig. Dette gjorde elevene på tross av at de ikke var oppfordret til å gjøre dette, og det var heller ikke lagt opp til validering av modell i Lamon (1998) sin modelleringsprosess. Vi mener derfor det er sterke tendenser til at elevene klarte å analysere situasjonen fremfor å kun finne et svar. Selv om elevene ikke testet modellen sin i en virkelig kontekst, så diskuterte de diverse faktorer som de måtte ta høyde for i beskrivelsen av sammenhengen mellom størrelsene. Til tross for at de ikke endret på beskrivelsen sin, så viste de stor bevissthet rundt hva slags unntak og forenklinger de måtte gjøre for at beskrivelsen skulle være riktig. Vi mener derfor at elevene viste tegn til validering av beskrivelsene sine som er nevnt som en sentral del av modelleringsprosessen ifølge Blum (2015); Janvier (1996) og Pollak (2011). I tillegg nevner Mason (1996) å kunne gjøre unntak som en viktig del av algebraisk tenkning.

Underveis i øktene mener vi at det var indikasjoner på algebraisk tenkning ut ifra rammeverket vårt. Elevene analyserte og beskrev gjentatte ganger relasjonen mellom samvarierende mengder gjennom naturlig språk og benyttet seg av tabeller og piler til å beskrive denne sammenhengen. Dette mener vi er i tråd med det Blanton et al. (2015) kaller for funksjonell tenkning og som er en del av en mer detaljert beskrivelse av Kaput (1998) sine fem sentrale kjennetegn på algebraisk tenkning. I tillegg mener vi at dette samsvarer med det Kieran (2004) kaller for «global meta-level activities», som understreker at algebraisk tenkning kan oppstå både med og uten bokstavsymboler. Generalisering regnes som en fundamental del i algebraisk tenkning av blant annet Mason (1996); Kaput (1998) og Radford (2010). Ettersom elevene i tilfeller, ved blant annet oppgave 5 om viruset, klarte å beskrive en detaljert sammenheng mellom størrelsene med ord, mener vi det var indikasjoner på faktabasert tenkning som Radford (2010) beskriver som en forenklet form for generalisering.

I tillegg imponerte Knut i intervjuet (se vedlegg 17)der han implisitt beskrev sammenhengen $\frac{3}{g} = t$, mellom antall gutter og antall timer i «feie skolegård» situasjonen gjennom naturlig språk. Dette mener vi ligner Radford (2010) sin beskrivelse av kontekstbasert tenkning som han regner som et høyere nivå av generalisering enn faktabasert tenkning. Det innebærer at

Knut beskrev en detaljert sammenheng og forklarte implisitt formelen uten bruk av symboler, men gjennom sitt naturlig språk. I utgangspunktet, la vi ikke opp undervisningen til at elever kunne skrive opp ligninger med bokstavsymboler ettersom vi trodde dette ville være for krevende for en alminnelig sjette klasse. Derimot så vi at Knut viste gjentatte ganger tegn til å bruke et analytisk perspektiv og tenke algebraisk. Derfor hadde det vært interessant i å se om klassen, men spesielt Knut hadde klart å representere noen av sammenhengene de beskrev som et symboluttrykk dersom de hadde fått noe veiledning.

Å bruke språket til å beskrive enkle generaliteter som en inngangsport for elevene til algebraisk tenkning er ifølge Kaput (1998) en god tilnærming for å lære algebra. Ettersom han mener at elevene får trening i å tenke algebraisk gjennom språket og at det etter hvert vil bli «flytende» og de vil bli i stand til å bruke symboler. Dette støtter Blanton et al. (2015) som også la vekt på at en tidlig introduksjon av algebraisk tenkning med fokus på å beskrive generaliteter vil styrke elevenes muligheter til å lykkes i algebra i fremtiden. I løpet av den korte tiden vi var der opplevde vi at elevene hadde et skifte i fokus fra å være opptatt av å finne ett fasit svar til å ha en mer analytisk tilnærming rundt en situasjon og studere sammenhenger, som er viktig for å lykkes i algebra.

5.4 Klassifisere

I utgangspunktet hadde vi planlagt at elevene skulle bruke mer tid på å klassifisere. Derimot tok undervisningsøktene lengre tid enn planlagt og det ble derfor ikke lagt stor vekt på. Det var noen tilfeller der elevene ble veiledet til å sammenligne to forskjellige situasjoner som i femte og sjette time da de sammenlignet «fylle vannflaske» situasjonen med «feie skolegård» situasjonen. I tillegg fikk elevene noe trening i å klassifisere, ved at de sammen med lærer, i en felles gjennomgang, lagde ulike kategorier basert på piler som ↑↑, ↓↑, ↑↓, ↓↓. Lærer viste at mange av situasjonene som hadde like piler til felles også kunne være forskjellige, som ble et utgangspunkt for at elevene tegnet de nye pilene og tegningene som i enda større grad enn tidligere illustrerte hvordan størrelsene samvarierte (se figurer fra utdrag 14). Basert på Mason (1996) sine uttalelser om klassifisering og merking, mener vi elevene viste tegn til algebraisk tenkning gjennom å oppdage likheter og ulikheter og nyansere forskjeller mellom ulike situasjoner.

5.5 Avslutning

I denne oppgaven har vi vært med på å utvikle læringsaktiviteter knyttet til en ALTA for et større forskningsprosjekt. I forskningen har vi vært opptatt av å se etter hvilke tegn på algebraisk tenkning som kommer til uttrykk gjennom elevenes kommunikasjon. Fra analysen og diskusjonen mener vi det finnes gode indikasjoner på at elevene hadde en analytisk tilnærming til flere av oppgavene som ble gitt. De viser at de forstår situasjonene gjennom måten de snakker, eksemplifiserer og gestikulerer rundt påstandene. I tillegg ble de etter hvert mer selvstendige i å gjøre antakelser både i forkant og underveis i diskusjonene, som var med på å forenkle og sette rammene for en matematisk modell. Elevene behersket å beskrive sammenhenger på et enkelt nivå ved å se på hvordan størrelsene steg eller minket i forhold til hverandre. Etter hvert klarte gruppen som helhet å illustrere piler som viste i enda større grad hvordan størrelsene samvarierte, som i virusoppgaven der elevene klarte å illustrere en eksponentiell vekst (se figurer i utdrag 14). I tillegg klarte elevene å se noen likheter og forskjeller mellom sammenhengene i de ulike situasjonene og kategoriserte dem på bakgrunn av hvordan størrelsene samvarierte. Det var tegn til varierende grad av forståelse på gruppen, men vi opplevde at alle elevene bidro til gruppen på forskjellige områder.

Ut ifra vårt rammeverk så mener vi det kan argumenteres for at elevene viste tegn til algebraisk tenkning gjennom at de gjorde forenklede generaliseringer av relasjoner mellom samvarierende mengder og representerte disse relasjonene gjennom naturlig språk, piler og tegninger. I tillegg studerte de endring, begrunnet sine beskrivelser og predikerte utvikling av størrelsene. Elevene viste derimot mindre bevissthet rundt at størrelsene representerte en ubestemthet eller en variabel. Det var ønskelig at elevene var i stand til å eksempelvis uttrykke «tid i timer» eller «antall elever» for å tydeliggjøre at det er varierende størrelser slik Lamon (1998) har poengtert. Elevene tok heller ikke i bruk symbolske formler, men de ble heller ikke oppfordret til å prøve på dette. Alt i alt opplevde vi at gruppen som helhet klarte å mestre flertallet av oppgavene de fikk. Dette kan ha vært en indikasjon på at vi utfordret de litt for lite og kunne eventuelt gitt de mer varierte oppgaver som fikk fram ulike type matematiske sammenhenger. Videre kunne vi også utfordret elevene i å ta i bruk bokstav symboler for å beskrive sammenhengene og på den måten vise til et høyere nivå av generalisering. Samtidig kom det fram i intervjuene at elevene hadde opplevd flere av oppgavene som krevende. Uansett så er vårt inntrykk at elevene har hatt en mer analytisk tilnærming til oppgavene enn tidligere og på denne måten har de fått øve seg i å tenke algebraisk.

Kort oppsummert så vi tendenser til en utvikling der elevene viste tegn til å tenke veldig realistisk rundt situasjonene og var veldig opptatt av en konkret eller numerisk løsning. Etter hvert utviklet de en mer analytisk tilnærming og klarte å gjøre antakelser som forenklet situasjonene for å deretter gjøre enkle beskrivelser av hvordan størrelsene samvarierte. Om elevene var bevisste på at størrelsene representerte en ubestemthet er vi usikre på. Derimot var de i stand til å vise på et enkelt nivå hvordan størrelser samvarierte og klarte også å kategorisere dem basert på dette. Med utgangspunkt i våre funn mener vi det var flere holdepunkter for å si at elevene tenkte algebraisk.

6.0 Implikasjoner om matematikkundervisning

Basert på funnene presentert i denne forskningen, mener vi at det er en tendens som tyder på at en modelleringstilnærming til algebra, med fokus på å identifisere størrelser, forenkle situasjoner og danne en forståelse rundt samvarierende størrelser, kan være en gunstig måte å øve opp elever til å tenke algebraisk. Flere av elevene viste tegn til et analytisk perspektiv og algebraisk tenkning. Dette støtter tidligere forskning som antyder at elever på barnetrinnet er i stand til å tenke algebraisk gjennom sitt naturlige språk, og vår forskning indikerer at denne tilnærmingen kan bidra til å utvikle algebraisk tenkning fra en tidlig alder, og at modellering kan være en effektiv metode for å lære algebra.

Denne ALTA-en tror og håper vi kan ha vært med på å bevisstgjøre elevene på hvordan størrelser kan samvariere og dermed gjøre overgangen til algebraiske bokstavsymboler i framtiden enklere. Igjennom modelleringsoppgavene opplevde vi også at elevene fikk en bedre forståelse over at matematikk er en idealisert beskrivelse av virkeligheten og at elevene forstod at de måtte gjøre antakelser for å beskrive reelle situasjoner matematisk. Ettersom vår masteroppgave er sentrert rundt en ALTA som er ment å være den første av mange undervisningsprosjekter i årene som kommer, ville det vært interessant å gjennomføre en mer omfattende kvalitativ studie for å kunne få en dypere innsikt i elevenes tenkning og forståelse. Videre kunne det vært lagt mer fokus på elevenes forståelse av ubestemthet og utfordre dem til å bruke bokstavsymboler.

7.0 Egenvurdering av prosjektet

Vi synes at det har vært veldig interessant å være en del av dette algebraprosjektet og skrive masteroppgave knyttet til det. Det har krevd mye tid og ressurser, og det har vært mange valg og avgjørelser som har blitt tatt underveis. Det har vært en god utfordring og erfaring å være en del av et forskningsteam, og vi føler at hele denne masteropplevelsen har hjulpet oss å utvikle oss som kommende matematikklærere. Vi har også blitt godt kjent med den nye læreplanen. Dette tror vi har gjort oss bedre forberedt til å ta steget inn i læreryrket.

I starten av forskningen var vi ukjent med modellering og vi brukte mye tid på å bli kjent med denne tilnærmingen til algebra. Hvis vi hadde valgt en tilnærming til algebra som vi var kjent med, for eksempel likninger, tror vi det ville vært enklere å analysere dataene våre. I tillegg tenker vi det da ville vært enklere å bestemme seg for et forskningsspørsmål. På den andre siden så har det vært veldig interessant å lære mer om modellering, og vi føler at vi har fått en god innføring i dette og er klar til å bruke modellering når vi skal begynne å undervise i matematikk. Da vi valgte modellering, førte dette til at vi var bundet til å observere mange undervisningsøkter, fordi modellering var ukjent for elevene og det tok tid før vi virkelig fikk se hvordan elevene jobbet med størrelser i modelleringssituasjoner. Dette har også gjort at vi fikk et veldig stort datamateriale, som kan være veldig positivt fordi da har man mye å velge mellom, men det var veldig tidkrevende fordi det var mange videoer og lydopptak å se igjennom og analysere. Vi har hatt en sosialkonstruktivistisk tilnærming til dette prosjektet, der vi har forsøkt å få frem elevenes perspektiver. Videre har vi vært bevisst på at det vi har funnet ut er kun vår tolkning og at det ikke finnes noen objektiv sannhet i det vi har observert.

Det var veldig lærerikt å være med på å utvikle disse ALTA-ene. På forhånd så fikk vi beskjed om at vi ikke skulle ta en stor del i prosessen om å planlegge undervisningsopplegg. Det var derfor litt uventet, da vi plutselig måtte lage store deler av undervisningsopplegget selv. Dette krevde mye arbeid, som kunne blitt brukt på andre områder i masterprosjektet. Med litt bedre kommunikasjon med læreren og professorene, så tror vi at det kunne ført til at undervisningsoppleggene ble enda bedre. Vi hadde også begrenset med tid til å lage disse aktivitetene. Dette kan også ha påvirket utfallet og elevenes utbytte. Til tross for dette så var det veldig nyttig å kunne øve seg på å lage slike engasjerende oppgaver, som vi selv ønsker å lage som lærer i fremtiden. Når vi ser tilbake, ser vi at vi kunne ha utformet oppgavene for tredje og fjerde time på en annen måte (se vedlegg 8). Vi kunne ha gjort det vanskeligere for elevene å finne svarene ved å redusere fokuset på tall og heller legge mer vekt på å få elevene til å tenke kreativt og gjøre antakelser. Oppgavene var også litt ensidige, og vi burde ha laget mer varierte oppgaver som ville utfordret elevene på ulike områder.

Det var utfordrende å lage et undervisningsopplegg for en klasse vi ikke kjente, i tillegg ble undervisningsopplegget gjort i et klasserom bestående av en amfisal og et arbeidsrom. Da vi planlagte undervisningsøktene, så vi for oss at elevene skulle sitte i grupper på tre-fire elever, og at læreren skulle ha en toveisdialog sammen med klassen. Vår intensjon var at elevene skulle jobbe i noen minutter også skulle læreren snakke med klassen i plenum, og at dette skulle det foregå vekselvis. På grunn av utformingen av klasserommet, så var ikke det mulig å gjennomføre det på denne måten. Derimot klarte læreren å finne en god løsning på dette problemet. Vi tror at det hadde vært enklere å lage gode undervisningsopplegg dersom vi hadde blitt kjent med klassen og skolen på forhånd. Ettersom det var ulike nivåforskjeller i klassen, kunne vi ha laget mer tilpassede oppgaver, som også kunne utfordre de «sterke» elevene på andre måter, for eksempel ved å legge til bokstavsymboler. Likevel var det god læring i å prøve å lage læringsaktiviteter som skal være tilpasset alle type elever, uten å kjenne til de ulike forutsetningene og rammene for klassen.

Styrken ved dette prosjektet mener vi ligger i at det er en sammenheng mellom forskningsspørsmålet, metoden som ble brukt og funnene som ble gjort. Vi mener forskningsspørsmålet var tydelig, og at det passet med kasus studie som metode til å besvare det. Den narrative analysen mener vi var godt egnet for å fange opp utviklingen av elevenes tilnærming til matematikk, og det resulterte i funn som ga en dypere forståelse av emnet. Studien viser også at den valgte kasusen på sjette trinn klarte å beskrive en matematisk sammenheng med ord og representasjoner, og at elevene kan utvikle en mer analytisk tilnærming gjennom modelleringssituasjoner. Alt i alt var dette en lærerik og minneverdig prosess, og vi er fornøyde med egen innsats.

8.0 Litteraturliste

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 115-137). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Vol. 18). Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. & Kim. J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I S. J. Cho, (Red), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: intellectual and attitudinal challenges* (s. 73-96). Springer International Publishing.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Red.), *APA handbook of research methods in psychology, Vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (s. 57–71). American Psychological Association.

Bryman, A. (2012). S*ocial research methods*. (4. utg.). Oxford University Press.

Burr, V. & Dick, P. (2017). Social Constructionism. I B. Gough (Red.), *The Palgrave Handbook of Critical Social Psychology* (2. utg., s. 59-80). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1057/978-1-137-51018-1_4

Clark, T., Foster, L., Sloan, L. & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods* (6. utg.). Oxford University Press.

Gibbs, G. R. (2007). *Analyzing qualitative data.* Sage Publication Ltd.

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces*, *36*(3), 217–223. https://www.jstor.org/stable/2573808

Hewitt, D. (2019). “Never carry out any arithmetic”: the importance of structure in developing algebraic thinking. I U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Red), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 558–565). Utrecht University og ERME.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (Vol. 18, s. 225 - 236). Kluwer.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A. C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. I S. Fennell (Red.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (s. 25-26). National Academies Press.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2004) Algebraic thinking in the early grades: What is It*? The mathematics Educator*, 8(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.) Gyldendal akademisk.

Lamon, S. (1998). Algebra: meaning through modelling. *Proceedings of the 22nd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 174-181. https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=269454f23cf0ec5a24a2e19b29ee6f0c5e3b9d95#page=175

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (Vol. 18, s. 65-86). Springer.

Polkinghorne, D. E. (1995). Narrative configuration in qualitative analysis. *International journal of qualitative studies in education*, *8*(1), 5-23.

Pollak, H. O. (2011). What is Mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2*(1), 63-64. https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.694

Postholm, M.-B. & Jacobsen, D. I. (2016). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Cappelen Damm Akademisk.

Postholm, M.-B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Powell Jr, M. A. (1976). The antecedents of old Babylonian place notation and the early history of Babylonian mathematics. *Historia Mathematica*, 3(4), 417-439. https://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90071-9

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.), *Perspectives in school algebra* (s. 13–36). Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in mathematics education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. I S. J. Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (s. 209–227). Springer Open eBooks.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM Mathematics Education*, *46*(3), 349–361. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 1–23). Springer.

Rehman, A. A. & Alharthi, K. (2016). An introduction to research paradigms. *International Journal of Educational Investigations*, *3*(8), 51-59. https://www.researchgate.net/publication/325022648_An_introduction_to_research_paradigms

Reinhardtsen, J. & Carlsen, M. (2022). Calculational and analytic perspectives in introductory algebra: a theoretical contribution. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12). https://hal.science/hal-03745191/*

Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse-Some insights from communicational research. *International Journal of Education Research.* 51-52, 1-9, https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Sage.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitative metoder* (3.utg.). Fagbokforlaget.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 19(8), 7-13. https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/nwo/documents/camp/Aug11-2016/ONLYPAGES1and2_conceptionsschoolalgebra_Usiskin.pdf

Vanhoozer, K. J. (1991). Philosophical antecedents to Ricoeur`s Time and Narrative. I D. Wood (Red.), *On Paul Ricoeur: narrative and interpretation* (s. 34-54). Routledge.

Wellington, J. (2015). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches* (2. utg.). Bloomsbury.

9.0 Vedlegg

9.1 Vedlegg 1: Intervjuguide

Halvstrukturet intervju

Tema:

- Hva slags type oppgaver elevene har jobbet med.
    - Forskjellen på disse type oppgavene og de elevene vanligvis jobber med?
    - Vanskelighetsgrad på oppgavene?
- Påstand: En elev bruker 3 timer på å feie skolegården da kan tre elever antakelig feie skolegården på 1 time.
    - Hva er hensikten med å gjøre antakelser?
    - Hva er størrelsene i påstanden?
    - Andre eksempler på hva en størrelse kan være?
- Vise tabell som viser hvor lang tid elevene ville brukt gitt at de jobber like effektivt.

Antall elever	Tid
1	3.0 t
2	1.5 t
3	1.0 t
4	0.75 t

- Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen?
- Kan du vise denne sammenhengen med piler?
- Kan du si noe om hvordan tiden endrer seg i forhold til antall elever?

9.2 Vedlegg 2: Vedlegg til intervju

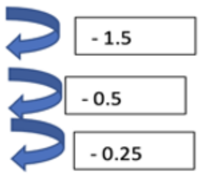
1) Påstand: En elev bruker 3 timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på 1 time.

2)

Antall elever	Tid
1	3.0 t
2	1.5 t
3	1.0 t
4	0.75 t

3)

Antall elever	Tid
1	3.0 t
2	1.5 t
3	1.0 t
4	0.75 t



9.3 Vedlegg 3: ALTA-hensikt

ALTA for 6. trinn – Modellering som tilnærming til algebra

Kjerneelementer som aktualiseres gjennom ALTA'n:

- Modellering og anvendelse
- Generalisering og abstraksjon
- Representasjoner og kommunikasjon

Kompetansemål som adresseres gjennom ALTA'n:

- bruke variabler og formler til å uttrykke sammenhenger i praktiske situasjoner

Hva er hensikten?

Elevene jobber med å lage matematiske modeller av forenklede, men reelle situasjoner. Elevers kjennskap til endringssituasjoner kan være en hjelp i det å forstå ubestemthet (variabelbegrepet). Elevene undersøker sammenhenger mellom størrelser og jobber med å uttrykke generalitetene de oppdager ved bruk av ulike representasjoner. Elevene jobber også med å klassifisere ulike typer sammenhenger. Undervisningsopplegget er inspirert av Lamon (1998).

Modelleringsprosessen

Modellformulering kan ses som en fem-stegs prosess utviklet for å hjelpe elevene å utvikle en systematisk måte å analysere sammenhengene mellom størrelser i en situasjon:

I første time jobber elevene med å analysere enkle påstander ved å bruke diagrammet. Eksempel på påstand:

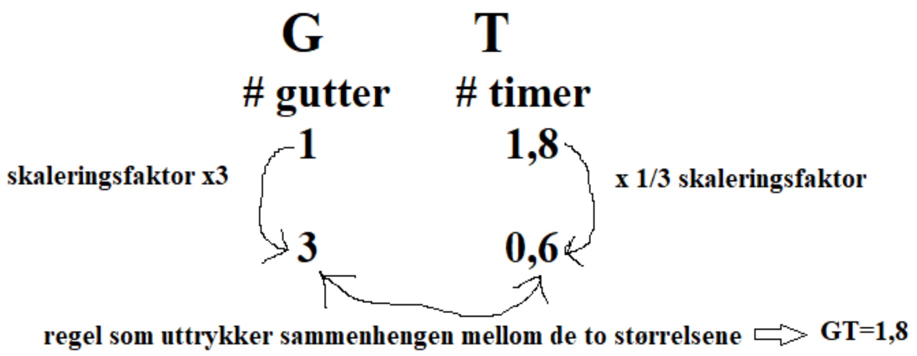
- En gutt bruker 1,8 timer på å klippe en plen, da kan tre gutter antakelig klippe plenen på 0,6 timer.
- En ku produserer 18 liter melk på en dag. Da produserer kua 126 liter melk på en uke.
- Synne går på skolen og har i gjennomsnitt 6 skoletimer om dagen. Da har hun 30 skoletimer i uka.

- Identifisere størrelser – Gi navn til de kvantitative størrelsene ved å bruke både et tall og en måleenhet. I stedet for å bare skrive gutter og tid, så skriver elevene *antall gutter* og *tid i timer*.
- Gjøre antakelser (definere situasjonen) – Gjøre eksplisitt nødvendige antakelser for at den forenklede situasjonen skal være fornuftig/relevant og samtidig håndterlig. Eks. Man antar at guttene er villige og i stand til å gjøre omtrent samme arbeidsmengde i løpet av en time.
- Beskrive sammenhenger – Å lage et verbalt uttrykk angående sammenhenger mellom de kvantitative størrelsene. Eksempler: "Om du har flere folk i arbeid så burde arbeidet bli fortere unnagjort enn om bare én person utfører den" eller "når antall personer øker, så går tiden det tar å gjøre jobben ned".
- Representere sammenhenger – Bruke pil-notasjon for å beskrive sammenhenger mellom sentrale størrelser i situasjonen, og senere, å representere sammenhengene i størrelse-diagrammer.

Eksempel: La G representere *antall gutter* og T representere *tiden i timer* det tar å klippe plenen. Da endrer størrelsene seg på denne måten: G ⇧ T ⇩

Når elevene forstår at ikke alle situasjoner innenfor de ulike kategoriene ⇧ ⇧ , ⇩ ⇩ og ⇧ ⇩ er like, så kan det gjøres videre analyser.

Mulig representasjon av situasjonen kan være et størrelsediagram:



- <u>Klassifisere situasjonen</u> – Å assosiere situasjonen med andre situasjoner med liknende sammenhenger og klargjøre kategorier ved behov.

  For eksempel: Etter å ha sammenliknet gressklipping-problemet med celledød-problemet kan elever oppdage at alle ⇧ ⇩ uttrykk ikke er like og at det er nødvendig å dele opp kategorien. Ettersom kategorier blir klargjort kan mer formelt algebraisk språk bli tatt i bruk for å beskrive sammenhenger (f.eks. proporsjonal, omvendt proporsjonal, eksponentiell)

9.4 Vedlegg 4: Planlagt undervisningssekvens etter første workshop

Undervisnings-sekvens

	Intensjon	**Aktivitet**
1. time	Elevene skal erfare en hel modelleringssyklus godt støttet av lærer. Elevene involveres i hvert enkelt steg, men lærer driver modelleringsprosessen fremover. De fem stegene i syklusen diskuteres i arbeid med påstand og underveis og i oppsummering av arbeidet med det mer åpne Feiing-av-skolegård situasjonen.	Jobbe på ulike måter med samme kontekst. Først vurdere en gitt påstand og så en åpen formulering av situasjonen. Lærer styrer fremdriften i timen.
2. time	Elevene får erfaring med de to første stegene i modelleringssyklusen, *identifisere størrelser* og *gjøre antakelser*. Mål om at elevene forstår at antakelsene som gjøres danner fundamentet for modellen som lages. Diskutere om modellen gir realistiske resultater og om det er behov for å justere antakelser.	Vis kort film som introduserer løp og rundetid. Elevene identifiserer størrelser og gjør antakelser. Lærer lager modeller med utgangspunkt i disse. Diskusjon om modellene gir realistiske svar og mulige endringer av antakelser.
3-4.time	Elevene jobber motsatt vei enn i forrige time – *fra påstander til antakelser*. Elevene skal nå vurdere hvilke påstander de er enige i og begrunner hvorfor. Mål om at de skal kunne identifisere størrelser og gjøre relevante antakelser og oppnå mer selvstendighet i å gjennomføre de to første stegene i modelleringssyklusen.	Elevene jobber med oppgaveark. Ca. 15 min på hver oppgave. Elevene jobber selvstendig med en oppgave i 8-10 minutter og så leder lærer en diskusjon av oppgaven på tavla (5-7 min).
5-6. time	Elevene jobber med å modellere ulike situasjoner. Jobber i felleskap ledet av lærer med fylle-vannflaske-situasjonen. Elevene jobber mer selvstendig med de to første stegene, men får støtte i å *beskrive og representere sammenhenger*. Det er steg 3 og 4 som er i fokus i undervisningen. Mål om at elevene opparbeider seg selvstendighet også i steg 3 og 4 i modelleringssyklusen.	Vis kort film som viser hvor lang tid det tar å fylle en vannflaske ved bruk av en vanndispenser. Så jobbes det med å lage en modell av situasjonen. Mye gruppe arbeid med å beskrive og representere sammenhenger. Om det er tid så jobber elever selvstendig med enkle situasjoner.
7-8. time	Elevene arbeider med steg 2.-5- med et ekstra fokus på å klassifisere oppgaver de har jobbet med tidligere og uttrykker likheter og forskjeller angående sammenhenger mellom størrelser og hvordan størrelsene samvarierer.	Elevene jobber med oppgaveark. Elevene jobber selvstendig og i grupper. Lærer går gjennom noen av oppgavene og veileder elevene i klassifiseringen.

		Elevene jobber deretter med oppgave 5 om virus på nytt for å ta i bruk nye piler inspirert fra klassifiseringen de gjorde i plenum
9- 10. time	Elevene benytter konkreter for å representere en ny oppgave om et virus. Elevene utforsker ulike scenarioer og ser hva som skjer,	Bruker klosser til å visualisere og representere ulike scenarioer.

9.5 Vedlegg 5: Første time

Første time

Intensjon

Elevene skal erfare en hel modelleringssyklus godt støttet av lærer. Elevene involveres i hvert enkelt steg, men lærer driver modelleringsprosessen fremover. De fem stegene i syklusen diskuteres i arbeid med påstand og underveis og i oppsummering av arbeidet med det mer åpne Feiing-av-skolegård situasjonen.

Gjennomføring

- Timen starter med «feie skolegård» problem.

  Påstand: En elev bruker 3 timer på å feie skolegården. Da kan tre elever antakelig feie skolegården på 1 time.

- Gi elevene litt tid til å tenke selvstendig først. Skriver på eget ark med angitte tekstbokser. Hva tenker du om påstanden? 3 min.

- Elever kan deretter snakkes sammen i grupper. Diskutere hvordan de har tenkt om oppgaven. Alle på gruppa skal få presentere sin ide. Gruppa blir enige om noen ideer som de skriver i en ny tekstboks. 5 min.

- En liten presentasjon om de 5 stegene i modelleringsprosessen. Hva betyr disse?
  - Hva tror dere første steget betyr? Elever diskuterer.
  - Lærer går gjennom det.
  - Går videre steg for steg i de neste boksene.

Spørsmål elevene kan få: Dersom en elev kan feie skolegården alene på 3 timer, hvor lang tid bør det ta dersom han får hjelp av vennene sine? Hva skjer dersom flere venner hjelper til?

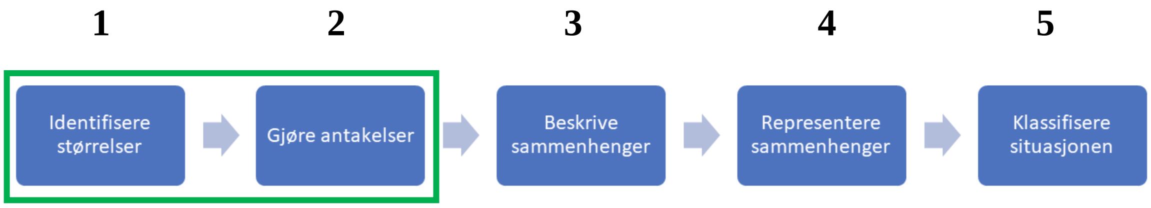
Kan komplisere situasjonen: Hva om det bare er 2 koster, men 5 elever?

9.6 Vedlegg 6: Andre time

Andre time

Intensjon

Elevene skal jobbe med å identifisere størrelser og gjøre antakelser rundt en situasjon (30 - 45 min). Lærer gjennomfører/demonstrerer stegene 3-4.



Gjennomføring

- Lærer viser video (https://delmatte.no/undervisning/rundetid.html)
- Deretter spør læreren elevene i klassen hvilke opplysninger de har fått vite i videoen. Dette skrives opp på tavlen. (3 min).
  Viktige opplysninger fra videoen: Ute: 1 min og 15 sekunder. Én runde. Løpe. Inne: 1 min og 15 sekunder. Én runde. Gå.
- Spør deretter hvilke spørsmål elevene har til videoen. Diskusjon 2 min
- Læreren spør klassen: Hvor lang tid vil han bruke på å løpe én runde inne hvis han løper så fort han kan? Hvilken informasjon trenger vi å vite da?
- Elevene diskuterer i grupper i 5-10 min.
- Lærer går deretter gjennom hva gruppene har tenkt og diskuterer hva som kan være nyttig å vite for å løse oppgaven. 3-5 min

  Eksempler:
  - Hvor lang er en runde ute?
  - Hvor lang er en runde inne?
  - Vil han løpe like fort inne og ute?
- Elevene jobber med å lage antakelser ut fra spørsmålene de har laget. 3-5 min (Antakelse: Noe man tar utgangspunkt i. For eksempel så kan vi ta utgangspunkt i at løpebanen er 400m slik at det lettere å regne)
- Gå gjennom antakelsene i plenum og diskutere de. 3-4 min
- Sett opp en tabell

	Rundetid	Strekning	Fart
Gruppe 1	?	?	5.33
Gruppe 2	?	?	5.33

Gruppe 3	?	?	5.33

- Gå ut fra at farten er den samme inne og ute. Ellers blir det veldig vanskelig å regne. La elevene komme med forslag til strekningen på innendørsbanen og hva som skjer med tiden. $tid = \frac{strekning}{5.34\ m/s}$ (lærer bruker kalkulator for å gi rask respons til elevene).

  Se om elevene oppdager at strekningen og tiden henger sammen. Viser dette med piler.

  strekning $\downarrow$ rundetid $\downarrow$ eller strekning $\uparrow$ rundetid $\uparrow$

(Hvis strekningen blir kortere/lengre, blir rundetiden også lavere/høyere, gitt samme fart)

- Vis fasit på video https://delmatte.no/undervisning/rundetid.html (del 3). Denne viser at han brukte 30 sekunder på banen inne.

  Se om elevene klarer å finne strekningen på innendørsbanen nå, gitt at utebanen er 400m og at han har samme fart inne og ute. En mulighet er å bruke tabell og gjette seg frem. (3-5 min)

Kort avslutning (1-2min)

Når vi skal bruke matematikk til å beskrive noe i virkeligheten så er det viktig å skrive ned det vi vet. I tillegg har vi ikke alltid den nødvendige informasjonen som trengs for å løse problemet og vi må da gjøre noen antakelser/gjetninger.

9.7 Vedlegg 7: Tredje og fjerde time

Tredje og fjerde time

Intensjon

I andre del jobber elevene motsatt vei (jobber fra påstand til antakelser). De skal vurdere hvilke påstander de er enige i og begrunner hvorfor. Elevene skal øve på å gjøre antakelser og bruke antakelsene sine for å begrunne hvorfor en påstand er riktig eller feil.

Gjennomføring

Introduksjon (2 min)

- Læreren tar en kjapp introduksjon av oppgave 1 (se oppgaveark)
- Elevene blir delt inn i grupper (par eller grupper, kommer an på klassen)
-

Oppgaver (ca. 13 min totalt per oppgave)

Elevene jobber i grupper (7-8 min)

- Elevene får en oppgave og skal diskutere påstandene og si seg enig/uenig med påstandene
- Utfordre elevene til å forklare hvorfor de er enig/uenig. De får tre oppgaver totalt. (Skal bruke antakelser for å begrunne svarene)
- Lærer observere og vet hvilke elver som skal bidra med sine ideer i felles diskusjon

Felles diskusjon (5-6 min per oppgave)

- Diskusjon med utgangspunkt i elevers ideer. Klassifiser situasjonen ved bruk av de identifiserte størrelsene (uttrykt med ord og/eller bokstaver) og bruk av piler

Oppsummering (3 min)

- Felles oppsummering av timen på tavla.

Mulige spørsmål fra lærer

Generelt:

- Hvilke påstander er dere enige/uenige i?
- Hvilke antakelser har dere?
- Hvordan er den antakelsen relevant for påstanden?
- Hvorfor er dere enig/uenig i den påstanden?
- Hva er forskjellen fra påstand 1 og påstand 2?
- Hva er forskjellen fra påstand 1 og påstand 3?

- Hva er forskjellen fra påstand 2 og påstand 3?
- Er det realistisk?

Oppgave 1 Gressklipping (se under)

- Hva hvis man har 2 gressklippere?
- Hva hvis man har 3 gressklippere?
- Hva hvis man har en automatisk og en manuell?
- Hva hvis man har 6 gutter?

Oppgave 2 Hva er en uke? (se under)

- Hvor mange dager er det i en uke?
- Hva hvis man har to kuer?
- Hva hvis man har 3 kuer?

Oppgave 3 Hva er en uke? (se under)

- Hvor mange dager er det i en uke?
- Hvor mange dager er det i en skoleuke?
- Hva hvis hun har 10 skoletimer i uka?
- Hva hvis hun har fri pga. avspasering en av dagene?

9.8 Vedlegg 8: Oppgaveark til tredje time

Elevark til tredje og fjerde time

Oppgave 1

a) Kryss av for om dere er enig eller uenig med påstandene

	Enig	**Uenig**
Påstand 1 En gutt bruker 1,8 timer på å klippe en plen. Da kan tre gutter antakelig klippe plenen på 0.6 timer.		
Påstand 2 Tre gutter bruker 1,8 timer på å klippe en plen. Da kan to gutter antakelig klippen plenen på 1 time.		
Påstand 3 En gutt bruker 45 min på å klippen en plen. Da kan 5 gutter antakelig klippe plenen på 12 min.		

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser).
Skriv forklaringen deres i boksen.

Oppgave 2

a) Kryss av for om dere er enig eller uenig i påstandene

	Enig	**Uenig**
Påstand 1 Ei ku produserer 22 liter melk på en dag. Da produserer kua 110 liter på ei uke.		
Påstand 2 To kuer produserer 294 liter melk på en uke. Da produserer ei ku 21 liter på én dag.		
Påstand 3 Ei ku produserer 18 liter melk på en dag. Da produserer kua 126 liter på ei uke.		

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser)
Skriv forklaringen deres i boksen under

Oppgave 3

a) Kryss av om dere er enig/uenig med påstandene.

	Enig	Uenig
Påstand 1 Synne går på skolen og har i gjennomsnitt 5,2 skoletimer om dagen. Da har hun 26 skoletimer i uka.		
Påstand 2 Truls går på skolen og har i gjennomsnitt 6 skoletimer om dagen. Da har han 42 skoletimer i uka.		
Påstand 3 Ole går på skolen og har 27 skoletimer i uka. Da har han i gjennomsnitt 5 skoletimer om dagen.		

b) Forklar hvorfor dere er enig/uenig med påstandene (bruk antakelser)
Skriv forklaringen deres i boksen under

9.9 Vedlegg 9: Femte og sjette time

5 og 6. time

Intensjon

Elevene jobber med å modellere ulike situasjoner. Jobber i felleskap ledet av lærer med Fylle-vannflaske-situasjonen. Elevene jobber mer selvstendig med de to første stegene, men får god støtte i å beskrive og representere sammenhenger. Det er steg 3 og 4 i modelleringssyklusen som er i fokus i undervisningen. *Mål om at elevene opparbeider seg selvstendighet også i steg 3 og 4 - elevene skal beskrive sammenhenger med egne ord og representere disse ved bruk av tegning, tall, tabell og/eller andre symboler*.

Gjennomføring

- Lærer viser film https://www.delmatte.no/undervisning/vannflaske.html
- Deretter spør læreren elevene i klassen hvor lang tid de tror det tar å fylle vannflasken.
  - 1. Hvor lang tid tar det å fylle flasken?
  - 2. Gjett så nær du kan.
  - 3. Gi et svar du vet er for lite.
  - 4. Gi et svar du vet er for høyt.
- Lærer spør elevene hvilke opplysninger de trenger for å kunne regne ut hvor lang tid det tar. Ikke bare for å vite hvor lang tid det tar å fylle Imsdalflasken, men hvilket som helst glass eller beholder i ulike størrelser.
- Det gjelder å *identifisere størrelser* som fyllingstid (s) og volum på beholder (dl)
- Elevene må gjøre antakelser
  - Volum vann som renner ut per sekund er konstant
  - Det søles ikke
  - Vanndispenseren går ikke tom (i dette tilfellet er den koblet opp med rør til vannforsyning)
- Lærer viser bilde av Imsdalflasken https://www.delmatte.no/undervisning/bilder/vanndel2.JPG

  Klarer elevene å hente ut den relevante informasjonen fra bildet?

- Lærer viser film av et desilitermål som fylles https://www.delmatte.no/undervisning/filmer/2dl.mp4

  Klarer elevene å hente ut nødvendig informasjon?

- Hvordan kan informasjonen som vi nå har hjelpe oss å svare på hvor lang tid det tar å fylle Imsdalflasken? Hva er sammenhengen mellom fyllingstiden og volumet på en beholder? Viktig at elevene uttrykker sammenhengen de ser med egne ord. Eks. Elev: «Jo større flaske, det lengre tid tar det å fylle flasken».

Hint: Om vi vet at det tar 6,8 sek å fylle 2 dl vann, hvor lang tid tar det å fylle 6,5 dl?

- Hvordan kan vi representere sammenhengen slik uttrykt? Kan bruk av en tabell være nyttig her? Andre måter å representere sammenhengen på? På hvilke måter representerer elever situasjonen på? Er noen representasjoner mer hensiktsmessige enn andre?

Volum på beholder i desiliter (dl)	Fyllingstid i sekunder (s)
1	?
2	6,8
3	?
4	?
5	?
6	22.1
7	?

- Etter å ha jobbet med å beskrive og representer sammenhenger så tas det opprinnelige spørsmålet opp igjen: Hvor lang tid tar det å fylle Imsdalflasken?
- Elever finner et svar på hvor lang tid de mener det tar og begrunner hvorfor.
- Lærer velger hvilke elever som skal presentere sin løsning på tavla.
- Lærer viser film av hvor lang tid det faktisk tok https://www.delmatte.no/undervisning/vannflaske.html
- Mulige utvidelser:
  - Se på ulike beholdere i klasserommet (melkekartong, o.l.) og finne ut hvor lang tid det vil ta om man bruker samme vanndispenser som i filmen.
  - Benytte vask i klasserommet og gjøre et eksperiment. Nå må elevene selv innhente informasjon nødvendig for å kunne si noe om hvor lang tid det tar å fylle en 1,5 liters flaske eller lignende.

Dersom det er mer tid og man ikke vil utvide oppgaven kan man gi enkle situasjoner som i time 1-3 som elevene kan jobbe selvstendig med.

9.10 Vedlegg 10: Syvende og åttende time

7-8. time

Intensjon

Elevene arbeider med å klassifisere oppgaver de har jobbet med tidligere og uttrykker likheter og forskjeller angående sammenhenger mellom størrelser og hvordan størrelsene samvarierer.

Gjennomføring

1) Gå gjennom eksemplet som står under (elevene har jobbet med denne før). **5-10 min**

Oppgave: En elev bruker 3 timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på 1 time.

- Skriv antakelser som er gjort
- Sett opp en tabell
- Beskriv sammenhengen med ord
- Bruk piler til å klassifisere situasjonen

Løsningsforslag:

Antakelser som er gjort
Alle elevene bruker like lang tid på å feie *Det tar like lang tid å feie de ulike delene av skolen.* *Det er nok utstyr til alle.* *Flere?*

Antall elever	Tid
1	3.0 t
2	1.5 t
3	1.0 t
4	0.75 t

Hvordan henger antall elever og tid sammen?
Når antall elever øker så går tiden ned. Eller når antall elever går ned så går tiden opp

Symbol (Eventuelt motsatt)


2) Elevene jobber med oppgaveark (ligger lengre nede): 10-15 min

Dersom noen elever sliter med å bli ferdig kan de hoppe til oppgave 4 og 5 som skal benyttes senere.

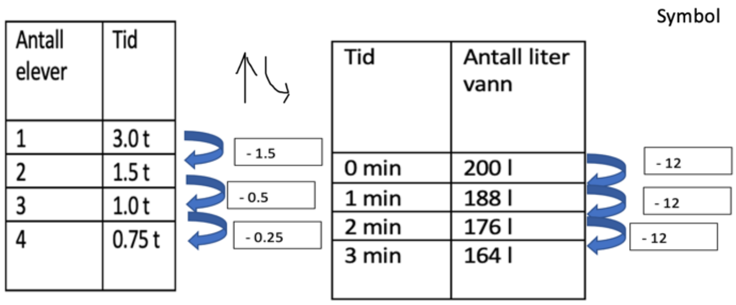
3) Lærer samler klassen og sammenligner tabellen fra eksemplet fra oppstarten med oppgave 4.

5-10 min

- Sett opp tabellene.

- Spør elevene hvilke piler de vil bruke for å klassifisere hver av dem.
- Guide elevene mot at de minker på forskjellige måter. (Den ene minker mindre og mindre, mens den andre minker konstant)
- Spør om elevene har forslag til piler som kan brukes nå for å dele de inn i hver sin kategori. Se om man kan komme fram til en buet pil som avtar gradvis på oppgaven om feie skolegården (se løsningsforslaget under).

Løsningsforslag:

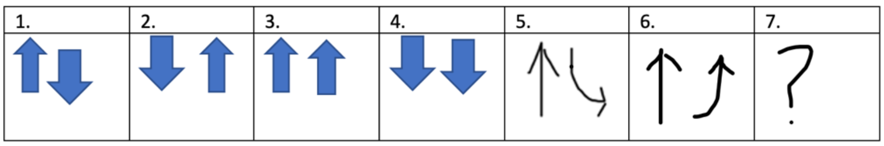


4) Gi elevene i oppgave å studere oppgave 5 på nytt og spør om de nå har forslag til andre piler som kan brukes. 5 min

5) Oppsummer forskjellige symboler/ piler elevene har brukt for å beskrive de ulike oppgavene.

Prøv å gjøre elevene bevisste på hva pilene symboliserer. (pil opp/ned kan symbolisere jevn stigning/synking, buet pil kan symbolisere gradvis økende eller synkende)

Forslag til piler/kategorier som kan benyttes:



9.11 Vedlegg 11: Oppgaveark til femte time

Oppgaveark om klassifisering – 5. time

Antakelser som er gjort

Oppgave 1

Modell: En gutt bruker 1 t og 30 min på å klippe en plen, da kan tre gutter antakelig klippe plenen på 30 min.

Gutter	Tid
1	90 min
2	45 min
3	30 min
4	22,5 min
5	18 min

Skriv symbol for modell

Forklar hvordan antall gutter henger sammen med tid.

Oppgave 2

Modell: En ku produserer 18 liter melk på en dag, da produserer kua 126 liter på en uke.

Fyll ut tabellen	
Liter melk på en dag	Liter melk på en uke
18	126
20	
22	154
24	
26	182

Forklar hvordan antall liter melk på en dag henger sammen med antall liter på en uke.

Oppgave 3

Modell: Synne går på skolen og har i gjennomsnitt 6 skoletimer om dagen, da har hun 30 skoletimer i uka

Fyll ut tabellen	
Skoletimer i gjennomsnitt	Skoletimer i uka
6	
5	25
4	
3	15
2	

Skriv symbol for modell

Forklar hvordan antall skoletimer i gjennomsnitt henger sammen med antall skoletimer i uka.

Oppgave 4

Modell: et badekar med 200 L tappes for 12 L vann på ett minutt. Da kan vi anta at badekaret vil fortsette å minke med 12 L per minutt til det er tomt for vann.

Fyll ut tabellen	
Liter i badekar	Liter som tappes per minutt

Skriv symbol for modell

Forklar hvordan liter i badekaret henger sammen med liter som tappes per minutt

Oppgave 5

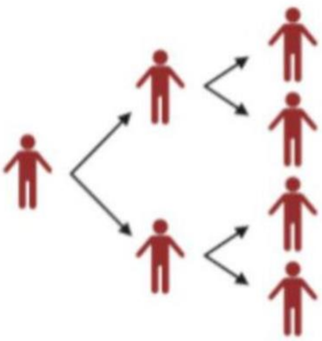
Modell: Et virus har spredt seg i mønsteret 1, 2, 4, 8, 16. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

Fyll ut tabellen	
Dag	Antall smittede
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Forklar hvordan antall dager henger sammen med antall smittede.

Dag 0	Dag 1	Dag 2

Skriv symbol for modell

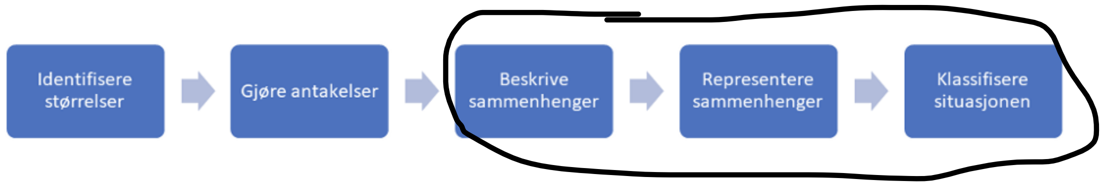


9.12 Vedlegg 12: Niende og tiende time

Niende og tiende – Alternativt opplegg om virusspredning

Intensjon

Elevene lager 3 modeller for virusspredning. Bruke dominobrikker og tabell til å eksperimentere. Jobber i hovedsak med de siste tre stegene.



Forberedelse:

Dominobrikker eller lignende. Minimum 16 stk pr gruppe.

Gjennomføring

Oppgave: Elevene skal lage tre ulike modeller for virusspredning.

Del 1:

- Elevene tenker seg ut tre forskjellige scenarioer**. 3 min**
- Deretter skriver lærer opp 3 forskjellige scenarioer som elevene skal illustrere med dominobrikker **5-10 min**
  - 1 smitter 1
  - 1 smitter 2
  - Det blir smittet en mer for hver dag som går

Del 2: Elevene lager en tabell til hver modell de lager **10-15 min**

Eksempel:

1 smitter 1

Dag	Antall smittede
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

1 smitter 2

Dag	Antall smittede
0	1
1	3
2	7
3	15

Det blir smittet en mer for hver dag som går

Dag	Antall smittede
0	1
1	3
2	6
3	10
4	15
5	

Del 3: Elevene får i oppgave å bruke tabellene, dominobrikkene og tegninger de har laget til å diskutere forskjeller mellom dem**. 10 min**

Del 4: Elevene prøver å beskrive modellene ved piler. **5 min**

Del 5: Oppsummere hva gruppene har gjort og tenkt. **5-10 min**

9.13 Vedlegg 13: Transkripsjonstabell

Transkripsjonsnøkkel	**Betydning**
(ler)	Latter
[tekst]	Beskriver hendelser, bevegelser eller kontekster som ikke uttrykkes verbalt, som for eksempel at noen peker/ viser noe.
xx	Utydelig prating
(tull)	Tulling, som ikke er relevant for intervjuet
...	Indikerer når en elev stopper for å tenke eller blir avbrutt
(Spør Navn)	Beskriver hvem som blir stilt et spørsmål.
(Navn)	Beskriver hvem av elevene det snakkes om eller til
(...)	Samtale som ikke er tatt med. / Pause mellom transkripsjonene.

9.14 Vedlegg 14: Intervju 1 Britt

Intervju 1

Casper: I disse ukene mens vi ha observert klassen, så har jo dere jobbet med litt andre typer oppgaver enn det dere vanligvis pleier. Hva vil du si er forskjellen på disse oppgavene og de oppgavene dere vanligvis pleier å ha?

Britt: Jeg vil si at de vi vanligvis pleier å ha, de syns jeg kanskje er littegranne enklere. Også føler jeg at når jeg er i gruppa og jobber med sånne oppgaver som dette, så føler jeg at hvis jeg sier noe og det er feil, så føler jeg de andre blir irriterte.

Casper: Ja, hva er det som gjør at disse oppgavene er vanskelige da tenker du?

Britt: Kanskje det er litt mer, at vi må regne litt mer, og jeg synes disse symbolene har vært litt vanskelig.

Casper: Ja, skjønner. Hva tenker du er poenget da, med å ha slike oppgaver, som du har hatt de siste ukene?

Britt: Jeg tror kanskje det er litt, for å se hvordan vi regner ogsånn.

Casper: Hva liker du best av de oppgavene dere har hatt nå da, og de dere pleier å ha?

Britt: Det er liker best med det vi har nå da, det må være at vi jobber mye mer i grupper.

Casper: Skjønner. Dere har flere ganger jobbet med denne påstanden (Viser en påstand til Britt). En elev bruker tre timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på en time. Og da gjorde dere antakelser om at elevene jobbet like effektivt. Hva tenker du på måte, er poenget med å gjøre slik antakelser?

Britt: Fordi det er sånn at, på sånne oppgaver som vi ikke får så mye informasjon. Da er det viktig at vi kan ta noen antakelser, der det blir, hvor oppgavene kanskje blir litt enklere.

Casper: Dere har jobbet med fem punkter, sant. Identifisere størrelser, gjøre antakelser. Og da har dere jobbet med å identifisere størrelser. Hva tenker du er størrelsene i feie skolegård situasjonen. Hvilke størrelser finner man der?

Britt: Jeg tror man finner ganske store. (Viser samme påstand til Britt). Ja.

Casper: Hvilke størrelser vil du si du har i den påstanden? Hvis du kan se om det er noen størrelser?

Britt: Jeg vil si at, ja, jeg tror de. Jeg må bare se på dette spørsmålet … Ja, Jeg har nok noen hvertfall.

Casper: Kan tid være en størrelse tror du?

Britt: Ja.

Casper: Hvorfor tror du tid kan være en størrelse?

Britt: Fordi, si at det er tre timer og tre minutt, da er jo tre timer mye lengre og mye større.

Casper: (Viser en tabell til Britt). Denne tabellen viser hvor lang tid elevene vill brukt hvis man jobber like effektivt. Hvis man antar det da. Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen i den tabellen?

Britt: Det er sånn at, når det er en elev så brukte den tre timer, og når det er 4 elever, så brukte den ca. 75 min, eller 75 sekund, jeg vet ikke. Men, så da blir det jo, når det blir høyere elever, så blir det mindre tid.

Casper: Kan du vise det med symboler eller piler, det du nettopp sa?

Britt. Ja (Britt tegner to piler). Da vil det bli sånn, sånn.

Casper: kan du forklare pilene du har tegnet?

Britt: (Peker mens hun forklarer det hun har tegnet). Så, den pila som går opp den menes at antall elever, det går oppover. Og den pilen som går ned, den viser at da går tiden nedover.

Casper: Kan du si noe om hvordan tiden endrer seg, når antall elever øker? (Viser tidligere tabell til Britt).

Britt: Hva var spørsmålet igjen?

Casper: Kan du si noe om hvordan tiden endrer seg, når antall elever øker?

Britt: Jeg tror det er fordi når man er flere, så går jo ting fortere.

Casper: Hvis du tenker på hva som skjer for hvert steg i tabellen.

Britt: Ja, det må jo være at alle gjør noe da, egentlig.

Casper: (Viser tabell med piler).

Sondre: Dette er samme tabell, men nå har vi vist hva som er forskjellen i hvert trinn i tabellen.

Britt: Ja.

Casper: Kan du si noe om hvordan tiden endrer seg hvis du får vite den tabellen der? Hvis du ser på de tallene du får vist? (Peker på tabell med piler).

Britt: Jeg tror at det går fem og fem oppover.

Casper: Ja, hva tror du skjer hvis antall elever, minker istedenfor øker?

Britt: Da tror jeg at … Litt vanskelig å svare på, jeg må tenke …

Casper: Bare tenk

Britt: Hvis elevene minker?

Casper: Ja, hvis det blir mindre elever.

Britt: Nei, jeg tror at hvis det blir mindre elever, så blir det mer tid.

Casper: Ja, (Peker på illustrasjon av piler). Hvis du ser her, så har vi noen bokser med ulike piler. Kunne du forklart litt hva de ulike pilene betyr, med og liksom bruke eksemplene der har gått igjennom?

Britt: Ja, for eksempel den første, pil opp og pil ned, det er den jeg har tegnet her, pilene opp betyr jo da at, si antall elever går opp da, også da går tiden ned. Også, og den andre når pilen går ned, og den andre pilen går opp. Si at, det er en tid som går nedover, eller. Så da vil den andre gå oppover.

Casper: Kan du knytte det til et eksempel? Den andre?

Britt: Sånn vi hadde, jeg tror at vi hadde, med han som løp. Så tror jeg at svaret var pil ned, pil opp.

Casper: Ok. Den tredje boksen da?

Britt: Der er det jo to piler som går oppover, så da, hvis … Hvis da to … hvis det er en for eksempel. To som skulle feie skolegården eller noe sånt. Hvis de da, da bruker de jo ca. 1 time, kanskje.

Casper: Kan du tenke på det vannflaskeproblemet? med den boks nummer tre. Husker du det? Det når de fylte vannflaske? Kan det forklares med den?

Britt: Jo mer vann, jo høyere gikk jo på en måte tiden.

Casper: Ja, og den fjerde da?

Britt: Der går begge to ned, var ikke den noe, med noe melk?

Casper: Ja, hva mener du med melk? Hvis du forklarer.

Britt: Hvis, jeg vet ikke helt egentlig. Hvis … den som. Dagene da, dagene blir mindre da, eller hva jeg skal si.

Casper: Ja

Britt: Ja, da blir jo og, hvis vi hadde hatt melk, da blir jo det og mindre.

Casper: Ja, forstår. Den femte pilen da. Kan du forklare den på noen måte. Husker du å ha sett den?

Britt: Jeg er litt usikker på den. Men oppover pilen, eller den som går litt på en måte hen, det var mening at den skulle gå litt sånn, den går ikke bare en vei, på en måte.

Casper: Nei. Den sjette da?

Britt: Den tror jeg er litt samme da, bare at den siste pila den går oppover, istedenfor nedover.

Sondre: Tror du hvor bratt den pilen er, kan være med på å vise noe?

Britt: Kanskje … Jeg vet ikke helt egentlig.

Sondre: Hvis du tenker på det viruset. At det var først en, så var det to også fire. Hvis du ser på den ene pilen der som, som går opp sånn. Tenker du at den kan vise det på noen måte?

Britt: Ja, jeg tror det.

Sondre: Kan du si noe om hvorfor du tenker det?

Britt: Fordi det blir jo da, hvis en blir smittet, da blir jo plutselig bare fem smittet. Sånn at det går veldig fort opp.

9.15 Vedlegg 15: Intervju 2 Kai

Intervju 2

Casper: I disse ukene mens vi har observert klassen. Så har jo dere jobbet med litt andre type oppgaver, enn dere vanligvis pleier. Hva vil du si er forskjellen på disse oppgavene og de oppgavene dere vanligvis pleier å ha?

Kai: Det er jo litt mer sånn jobber litt mer i grupper.

Casper: Noe mer?

Kai: Også, vi har hatt det og anta ting. Og til vanligvis har vi jo geometri, så det er veldig annerledes.

Casper: Hva tenker du er poenget med å ha slike oppgaver da, som dere har hatt disse ukene vi har observert?

Kai: Vet ikke …

Casper: Nei. Hva liker du best av disse oppgave, og de dere vanligvis pleier å ha?

Kai: Det var greit å jobbe med det derre anta ting. De oppgave vi jobbet med.

Casper: Du likte å gjøre antakelser?

Kai: Ja.

Casper: Hvordan synes du vanskelighetsgradene har vært på disse oppgavene der har hatt nå?

Kai: Vet ikke helt.

Casper: Har det vært vanskelig, lett?

Kai: Det har jo vært litt sånn … Oppgavene er vanskelig, men når vi antar ting så blir det jo enklere.

Casper: Ja, skjønner. Dere har jo flere ganger jobbet med en påstand. (Viser en påstand til Kai). En elev bruker tre timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på en time. Da gjorde dere antakelser om at elevene er like effektiv sant. Hva tenker du poenget er med å gjøre slike antakelser?

Kai: Det er jo for å finne ut tiden, og for å svare på oppgaven. Eller det er både det vi trenger for å kunne svare på oppgaven. Vi trenger antakelser for å kunne svare. Eller det vi antar, det trenger vi for å få et ordentlig svar på oppgaven.

Casper: Hvorfor tenker du at vi trenger det?

Kai: Fordi hvis vi ikke har noen antakelser, så kan det være veldig mange forskjellige svar.

Casper: Ja. Ett av de fem punktene dere har jobbet med er jo å identifisere størrelser. Hva tenker du størrelsene i den påstanden der er (Peker på påstanden). Hvilke størrelser kan man finne?

Kai: Det er jo tre timer, en time.

Casper: Er det noe mer?

Kai: En elev.

Casper: Hvilke størrelser. Hvis du skal gi navn på størrelsene da. Hva vil det være?

Kai: Tall for eksempel, eller …

Casper: Hvis du tenker på tre timer for eksempel, hvilken størrelse er det, hvis du skal gi et navn på det?

Kai: Tid.

Casper: På hvilken måte er tid en størrelse da. Hvorfor er tid en størrelse?

Kai: Det er jo …

Casper: Hvordan kan du forklare det?

Kai: Vet ikke helt.

Casper: Nei, hvis vi går videre da. Så har vi en tabell (Viser en tabell til Kai). Her har vi en tabell som viser hvor lang tid elevene ville brukt, hvis de jobbet like effektivt da. Dette er vel gressklipperproblemet, hvis du husker det. Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen i den tabellen?

Kai: Når du har tre timer og deler det på to, så får du 1,5. og hvis du deler på tre så får du en, siden det er jo, tre elever bruker en time. Hvis du deler på fire, så får du 0,75.

Casper: Ja. Kan du forklare hva som skjer med antall elever og tiden?

Kai: At … Når en bruker tre og to bruker 1,5 så blir det halvparten så mye tid, lite tid.

Casper: Ja, hvis du tenker. Hva skjer hvis antall elever øker?

Kai: Det blir mindre tid.

Casper: Ja. Kan du vise dette med noen piler. Hvis du tegner på arket der (Peker på et ark).

Kai: (Eleven tegner på arket, mens den forklarer). Hvis elevene går opp. Så går tiden ned.

Casper: Ja. Kan du si noe om på hvilken måte tiden endrer seg, når antall elever øker? Mer enn det du allerede har sagt?

Kai: Vet ikke.

Casper: Hvis du tenker liksom, på hvert steg i tabellen. Er det noe forskjell på hvordan tiden endrer seg? (Viser en tabell med piler)

Kai: … Hadde om det i går, men jeg husker det ikke helt.

Casper: Hvis du ser på de tallene på siden der, kan du si noe om hvordan det endrer seg, hvis du ser på de. (Peker på tabellen med piler).

Kai: At det blir minus mindre.

Sondre: Kan du bruke en pil, for å vise fram det der? Sånn at du ser at det blir mindre og mindre forskjell.

Alle: (Elevene tegner på arket).

Casper: Kan du forklare hva du tenker med den pilen?

Kai: Det går ganske høyt nedover, men så flater det ut, fordi det blir mindre.

Sondre: Vil det flate helt ut noen gang, tror du?

Kai: …

Casper: Husk at det ingen rette eller gale svar, det er bare å si det du tenker.

Kai: … Vet ikke.

Casper: Det går fint. Ja, da har vi noen bokser med ulike piler. (Viser illustrasjon av piler til Kai). Kunne du forklart liksom hva de ulike pilene betyr? Med å liksom bruke de eksemplene eller oppgavene dere har gått igjennom. Hvis du begynner med en og går oppover.

Kai: … At noe blir mer og noe blir mindre.

Casper: Ja, kan du bruke et eksempel dere har hatt med de pilene i første boksen?

Kai: At når antall elever gikk opp, så gikk tiden ned.

Casper: Ja, og andre boksen? Kan det være samme situasjon, hvis du ser på det på en annen måte

Kai: Åh, ja, hvis det er mindre elever så blir det mer tid. hvis elevene går ned, så går tiden opp.

Casper: Ja, noe mer du vil tilføye på den?

Kai: Nei.

Casper: Ok. På den boks nummer tre da? Husker du det vannflaskeproblemet? kan det eksempelet brukes på den?

Kai: …

Casper: Den der man fylte flasken med vann. Kan man bruke de pilene på det eksempelet?

Kai: Ja, jeg tror det.

Casper: På hvilken måte?

Kai: Når vannet går opp, så, nei da går tiden ned… nei, for tiden går opp, når vannet går opp.

Casper: Den fjerde da?

Kai: Er den den med badekaret, at når du tar ned vannet, så går tiden ned.

Casper: Den femte da. Hvis du ser på den pilen som går litt ned. Hvordan kan du forklare det? Men det var egentlig den du tegnet isted, så vi kan hoppe over den. Også boks nummer seks, da ser du at pilen går opp. Husker du det? Kan man bruke noe eksempel med den pilen, som vi har hatt? Husker du hva vi jobbet med i går?

Kai: Det derre viruset?

Casper: Ja, og hva var det som skjedde da? Hvis du skal forklare.

Kai: At pilen som går oppover, at det blir flere og flere smittet, eller i begynnelsen så var det liksom en og to smittet og etter hvert så ble det mellomrom mellom 16 og 32, så var det liksom mye mer mellomrom.

Sondre: Når du sier pilen som går oppover hvilen var det du mente da?

Kai: Det er den som går sånn her (Tegner buet pil som går oppover).

Sondre: Ja.

9.16 Vedlegg 16: Intervju 3 Anne

Intervju 3

Da skal vi bare begynne med litt informasjon så du vet hva vi skal gjøre.

Casper: Dette intervjuet vil bli brukt til å se på hvordan elever på sjette trinn tenker matematisk rundt ekte situasjoner eller reelle situasjoner. I dette intervjuet skal du ikke bli testet, men det er ønskelig om du svarer ærlig, og så godt du kan på spørsmålet. Det er ingen fasit svar og du kan svare akkurat det du vil. Intervjuet er helt anonymt, og ingenting du sier vil kunne spores tilbake til deg. Vi vil bruke lydopptaker og kamera for å ta opp det du sier, men vi sletter dette så fort det er skrevet ned og vi har brukt det. Du trenger ikke å svare om du ikke ønsker og kan trekke deg fra intervjuet når som helst og dette er helt frivillig. Intervjuet vil vare i cirka 10 til 12 minutt. Så før vi begynner så lurer vi på om du har noen spørsmål?

Anne: Jobber dere med noe sånn ting her da eller siden dere spør? Eller er det noe sånn utdanning siden dere spør?

Sondre: Ja, du vet om universitetet sant? (Anne nikker) Dere fikk jo et sånt skjema for at forskere skulle se litt på hvordan elever jobber med matematikk, så de prøver å utvikle liksom nye måter å jobbe på, så vi samler inn data for et lite prosjekt vi har, men også for forskerne, så vi er på en måte litt hjelpere da for de.

Casper: Så er du klar?

Anne: Ja.

I disse ukene mens vi har observert klassen så har dere jobbet med litt andre type oppgaver enn det dere vanligvis pleier. Hva vil du si er forskjellen på disse oppgavene og de oppgavene dere vanligvis pleier å ha?

Anne: Jeg føler disse er mer sånn, må en måte litt sånn, hva skal jeg si, relle eller noe sånn ekte.

Casper: Noe mer?

Anne: Jeg liker bedre sånne her oppgaver egentlig. For de andre føler er litt mer sånn ... jeg husker egentlig ikke så mye av det andre. De andre var mer sånn på en måte regne seg fram til.

Sondre: Føler du at de andre oppgavene er ute etter å finne et konkret svar? (Anne nikker)

Casper: Hva tenker du er poenget med å ha slike oppgaver som dere har hatt disse ukene da?

Anne: For at dere skal finne ut av hva vi tenker og hvordan vi regner.

Casper: Men hva tenker du er poenget for deres del, at dere har disse oppgavene?

Anne: Jo at vi kan liksom ... det blir mye mer sånn ekte eller noe sånn.

Casper: Hvordan synes du vanskelighetsgraden har vært på disse oppgavene?

Anne: Akkurat som det smitte greia, tror jeg egentlig ikke at jeg skjønte helt, fordi han Knut på gruppen sa så mye tall, så meg og Britt fikk ikke med oss noe særlig. Så den syntes vi var litt vanskelig.

Casper: Dere har flere ganger jobbet med denne påstanden. Jeg skal lese den opp: En elev bruker tre timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på en time. Da gjorde dere antakelser om at elevene jobbet like effektivt. Hva tenker du er poenget med å gjøre slike antakelser?

Anne: For at vi skal lære oss å gjøre antakelser egentlig, jeg har sikkert gjort det før, men har ikke tenkt over det. For jeg kan tenke meg at, var jeg egentlig bevisst på at vi gjorde antakelser tidligere?

Casper: Hva tenker du at du må være bevisst på? Eller hvorfor gjør man antakelser?

Anne: For at det skal bli lettere å regne.

Sondre: Tenker du det kan handle om hva slags informasjon som er gitt?

Anne: Det jo litt som at det for lite informasjon xx

Casper: Et av de 5 punktene dere jobbet med handlet om å identifisere størrelser, eller å finne størrelser. Hva tenker du størrelsene er i denne påstanden, feie skolegård situasjonen?

Anne: 3 timer ... 3 elever ... Og 1 time og 1 elev.

Casper: Kan du sette navn på de størrelse du nettopp sa?

Anne: ... Mener du sånn en og tre?

Casper: Hvis du skal gi de størrelsene et navn?

Anne: Jeg vet ikke helt xx.

Sondre: Hva tenker du at 1 og 3 representerer?

Anne: At de på en måte er motsatt. 1 elev 3 timer 3 elever 1 time. Så de er på en måte motsatt. De bare bytter om på 3 og 1.

Casper: Hva hvis du hører 3 timer hva tenker du det er hvis du skal gi navn på det?

Anne: Det er lenge. Tre timer er liksom litt tid.

Casper: Men kan tid være en størrelse?

Anne: Ja tenker det siden dere spør sånn.

Casper: Du må tenke det du tror. På hvilken måte kan tid være en størrelse?

Anne: Hvis jeg sier tre timer så tenker jeg at tre er jo et tall og da tenker jeg at tre er en størrelse.

Sondre: Du tenker størrelse har med at det er tall å gjøre?

Anne: At det har verdi

Sondre: At det har verdi? (Anne nikker)

[Viser fram en tabell til påstanden på dataskjermen]

Casper: Her har vi en tabell som viser hvor lang tid elevene ville brukt dersom de jobbet like effektivt. Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen i tabellen? Sammenhengen?

Anne: Jo flere elever det er, jo mindre tid er det, og jo færre elever det er i skolegården, jo mer tid tar det.

Casper: Kan du vise denne sammenhengen med piler? Hvis du tegner på dette arket?

Anne: Hvis det går opp i elever (Tegner en pil opp) ... så går tiden ned (Tegner en pil ned) Og hvis det er mindre elever (Tegner en pil ned), så er det mer tid. (Tegner en pil opp).

Casper: Hvis du ser på denne tabellen kan du si noe om hvordan tiden endrer seg når antall elever øker?

Anne: ... Jeg ser at 3 og 1.5 time det er jo ... 1.5 pluss 1.5 er jo 3 timer, men jeg skjønte ikke helt mønsteret. Jeg synes kanskje det var litt vanskelig xx.

Sondre: Hvis du ikke er så opptatt av å se et konkret mønster, men kan du si noe om hva som skjer med tallene.

Anne: Tallene på tid går ned når det blir flere og flere elever.

[Viser samme tabellen, men med piler og bokser som illustrer differansen mellom tidene når antall elever øker med 1]

Sondre: Nå har vi en lik tabell bare bare at vi har dette her på sidene (Peker på boksene og pilene ved siden av tabellen). Her kan du se at det går ned med 1.5 også 0.5 også 0.25. Kan du på en måte beskrive den utviklingen der?

Anne: Det er egentlig for ... 0.25 og 0.25 er jo 0.5 så det la jeg merke til med en gang, men så tenkte jeg at aller først 1.5 delt på 2 er 0.5, men det er jo det ikke. Det er de to siste som er på en måte ... Det dobbelte ... nei, halvparten av xx.

Sondre: Du tegnet jo pil ned i sted for tiden. Men når du ser at tiden går ned med 1.5 også 0.5 også bare 0.25 kan du på en måte beskrive det med noen ord?

Anne: Det blir på en måte mindre og mindre tid det går ned med.

Sondre: Kan du vise det med en pil. Har du forslag til en pil du kan bruke?

Anne: Først går det veldig mye ned også går det mindre og mindre ned (Tegner en buet pil som er går ned og flater ut), men det er ikke sånn vi tegnet i gruppen.

[Viser frem ulike bokser med piler]

Casper: Også har vi noen bokser med ulike piler (Peker på dataskjerm) kan du forklare hva de ulike pilene betyr hvis du begynner på boks nummer 1.

Anne: Hvis ett tall går opp så går det andre ned

Casper: Boks nummer to?

Anne: Hvis ett antall går ned så går det andre opp.

Casper: Boks nummer tre?

Anne: Hvis et antall går opp så går det andre antallet også opp.

Casper: Boks nummer fire?

Anne: Hvis et antall går ned så går det andre antallet også ned.

Sondre: Bare et lite spørsmål, når du sier at det ene går ned så går det andre også ned. Tenker du på en måte at de henger sammen? Påvirker de hverandre?

Anne: Ja de må jo det, for jeg tenkte jo litt på ... I boks nummer 3 tenkte jeg på det melke kua greien. For da var det jo det jo mer tid jo mer melk.

Sondre: Jo mer på en dag så ble det mer på en uke også?

Anne: (Anne nikker)

Casper: Kan du si noe om 5. boksen?

Anne: Når et antall går opp så går det andre liksom ... Litt mye ned også mindre og mindre ned.

Sondre: Synes du den ligner på noe du allerede har tegnet?

Anne: den (Peker på den bøyde pilen hun tegnet tidligere)

Sondre: Hva var det et eksempel på?

Anne: At det går litt mye ned også går det mindre og mindre ned.

Sondre: Hva var det som gikk litt mindre og mindre ned da.

Anne: Det var den antall elever og antall tid.

Sondre: Hvilke av pilene er elever og hvilke av pilene er tid i den?

Anne: Tiden er den (Peker på bøyd pil) sånn pil og elevene var den (Peker på oppover pil)

Casper: Kan du forklare sjette boks?

Anne: Det ene antallet går opp og det andre går forsiktig oppover så blir mer og mer.

Casper: Kan noen av disse pilene bli brukt til å beskrive samme situasjon?

Anne: Hmm ...

Casper: At to bokser kan bli brukt på samme situasjon liksom?

Anne: At en og to kan jo egentlig det fordi de er motsatt av hverandre og 3 og 4 også.

Casper: På hvilken måte er de motsatt av hverandre?

Anne: For på 3 er begge piler opp og på 4 er begge piler ned?

Sondre: Kan det ha med måten man ser problemet på i forhold til hvilke piler man velger å bruke?

Anne: Kan sikkert det.

Sondre: På den boks 1 så sa du at hvis antall elever går opp så går tiden ned. Hvordan kan boks 2 være det samme.

Anne: De bytter jo egentlig bare om på det hvis antall elever går ned så blir det mer tid.

9.17 Vedlegg 17: Intervju 4 Knut

Intervju 4

Casper: I disse ukene mens vi har observert klassen så har dere jobbet med litt andre type oppgaver enn dere vanligvis pleier. Hva er forskjellen på disse oppgavene og oppgaver dere vanligvis pleier å ha?
Knut: Før så har vi jobbet veldig mye på nettsider, nå har vi liksom fått mer sånne oppgaver som dere har laget selv. Så først har vi vært inne på skolestudio og alt det der, men nå har dere laget mer oppgaver også skal vi svare på.

Casper: Hva tenker du er forskjellen sånn matematisk?

Knut: Dette er mer sånn ... Antakelser som det handler om. Som liksom ... Det har vært mer Sånn ... Vet ikke helt hvordan du skal si det ... Så ... Nei jeg vet ikke helt.

Casper: Hva tenker du er poenget med å ha slike oppgaver som dere har hatt de siste ukene?

Knut: Det er jo liksom at vi skal tenke på andre typer svar. Det er som er helt normale svar. Det er det osv. At vi liksom at vi fordyper det litt. Vi går litt lengre inn i det.

Sondre: Tenker du at de oppgavene dere har hatt før har vært opptatt av å finne et fasitsvar?

Knut: Her har det vært litt sånn. At det er flere svar på en måte. Det er ikke akkurat riktig det du svarer, eller det er riktig hvis du har en god forklaring på det.

Sondre: Henger det sammen med de antakelsene du gjør, det svaret du får?

Knut: Ja, det gjør jo som regel det

Casper: Hva liker du best av disse oppgavene og de dere pleier å ha?

Knut: Vi har jobbet ganske mye sammen, så de oppgavene da har det vært, ikke så mye matte matte, at man skal tenke på ting, gå litt lengre inn i det. Ikke bare sånn 5 + 5 er 10. Man skal ha litt mer sånn med ord.

Casper: Hva liker du best av de metodene?

Knut: Det er sånn midt på begge to. Begge er helt greie.

Casper: Hvordan synes du vanskelighetsgraden var? Var oppgaven vanskelige eller lette?

Knut: Noen har vært helt middels, noen har vært litt vanskeligere og noen har vært lette ... noen har vært sånn rett på svaret og noen har vi måtte tenke litt på.

Casper: Dere har flere ganger jobbet med denne påstanden her (Viser en påstand på dataskjermen). En elev bruker 3 timer på å feie skolegården, da kan tre elever antakelig feie skolegården på 1 time. Husker du den?

Knut: Ja

Casper: Da gjorde dere antakelser om at elevene jobbet like effektivt. Hva tenker du er poenget med å gjøre antakelser når vi jobber med disse oppgavene?

Knut: De gjør jo det mye lettere å skjønne og alle tenker jo ikke likt, så vi må, sånn er det, sånn skal vi tenke. Hvis vi hadde tenkt at ingen hadde sagt at alle jobber like kjapt, så kan noen tenke at nei de gjør jo ikke det. Siden da går jo kanskje en å tar plutselig en pause og da må de to andre jobbe helt alene og det er ikke sånn at alle tenker likt ja.

Knut: Hvorfor gjør det lettere å løse oppgaver med antakelser?
Knut: Nei, jeg vet ikke. Det er jo bare litt sånn (ler).

Casper: Et av de fem punktene dere har jobbet med har vært å identifisere størrelser eller å finne størrelser. Hva vil du si er størrelsene i den påstanden der (Peker på påstanden på dataskjermen)

Knut: Størrelser ... Størrelser på tid og folk og greier, var det det?

Casper: Ja, bare hvilke størrelser kan man finne i påstanden?

Knut: Tre elever, det er jo liksom hvor mange elever det er.

Knut: Kan man sette et navn på det?

Casper: Jeg vet ikke helt.

Sondre: Du sa jo hvor mange elever?

Knut: Ja, det har jo mye å si, tre er ikke det samme som fem.

Casper: Er det noen flere størrelser enn bare elever?

Knut: Timer?

Casper: Hvordan kan man sette navn på det?

Knut: Hvor lang tid.

Casper: Hvordan kan du forklare at tid er en størrelse?

Knut: Eh ... Det er jo fordi ... Nei det vet jeg ikke helt ...

Casper: Har du noen tanker om det? Hvis du tenker litt?

Knut: Størrelser? Var det noen andre størrelser på det der. Hva var spørsmålet?

Casper: Hvorfor er tid en størrelse?

Knut: Hvor lang tid noe tar. Det er jo. Vet ikke helt hvordan jeg skal sette ord på det.

Sondre: Størrelse så er det lett for å tenke på noe fysisk som utstrekning, men må størrelse være noe fysisk?

Knut: Nei, det må ikke det, for eksempel. tid. Vet ikke helt hvordan jeg skal sette ord på det.

Sondre: Kan vi si at ting som har mengde eller verdi?

Knut: Ja verdi, det var det ja. Det handler om hvor mye verdi det har sånn egentlig.

[Viser fram en tabell til påstanden på dataskjermen]

Casper: Her har vi en tabell som viser hvor lang tid elevene ville brukt hvis de jobbet like effektivt. Kan du si noe om hvordan antall elever og tid henger sammen i den tabellen?

Knut: Eh ... Det er jo ... Jo flere elever det blir jo mindre tid blir det. Hvis en elev bruker 3 timer også … Det blir jo egentlig som å dele, for du sa jo at 3 delt på 3 blir jo en time. Du har tre timer først også er det tre elever som skal feie skolegården da blir det jo en time siden det er en som bruker tre. Det ville jo for eksempel. 3 delt på 2 er 1.5 og 3 delt på 3 er 1 og 4 delt på 3 er 0.75 altså 45 minutter ca.

Casper: Kan du vise den sammenhengen med piler?

Knut: (Tegner en oppover pil og nedover pil) Når vi har flere elever da går tiden ned (Peker på pil ned), siden jo flere vi er jo mer effektivt blir det.

Casper: Kan du si noe om hvordan tiden endrer seg når antall elever øker?

Knut: Sånn som når tiden går ned?

Sondre: Hvor fort går tiden ned?

Knut: I starten går den ned med 1 time og 30 minutter, så 30, så 15.

Casper: Kan du forklare hvordan den går ned uten tallene?

Knut: Den går ned med ... Jeg vet ikke helt.

Sondre: Hvis du kan bruke en pil til å vise hvordan den går ned?

Knut: En pil?

Sondre: Dere har jo jobbet med å lage piler.

Knut: Sånn ja, den går jo egentlig sånn (Tegner en buet pil som går oppover og blir flatere)

Sondre: Hva er det du har tenkt da, hvis du kan bruke pilen til å forklare?

Knut: Først går den veldig mye ned også går den mindre og mindre ned

Sondre: Kunne du vurdert å tegne en annen pil? Altså når vi går oppover med en pil, tenker vi ikke da at noe blir større? Så når jeg sier det, kunne du vurdert å snu pilen på noen måte?

Knut: Å snu den?

Sondre: Hvis du skal vise at det går fort ned også går det mindre og mindre ned.

Knut: Fort ned, mente du fort opp?

Sondre: Tiden går jo ned sant? 3 timer også ned til 1.5

Knut: Å ja, ja da går den sånn da siden den går nedover og ikke oppover (Tegner).

Casper: Hva skjer hvis antall elever går ned da? Hva skjer med pilene da?

Knut: Da ... Hvis det blir mindre elever blir det mer tid.

Casper Hvis du kan vise med piler?

Knut: Hvis antall elever går ned så går tiden oppover siden da er det færre elever til å jobbe. Hvis det er 3 som bruker 1 time da bruker 1 elev 1 time, nei ... xx Det blir mindre effektivt jo færre som gjør det.

Casper: Her har vi noen bokser med ulike piler. Kan du forklare hva de ulike pilene betyr?

Knut: Den første er jo pil opp og pil ned. Det betyr at det er noe som blir større og noe som blir mindre. Det kan være at det er flere elever og da går tiden ned. (Peker på boks 2) Mindre elever, tiden går opp på toeren. Også treeren da er det opp opp, så betyr at ... Jo mer melk pr dag jo mer blir det i uken. Også på fire så er det nedover da er det egentlig bare motsatt. Jo mindre en ku produserer pr dag jo mindre blir det i uken.

Casper: Kan du si at det er sammenheng mellom noen av de du snakket om nå da?

Sondre: Påvirker pilene hverandre?

Knut: Kommer an på hva vi prater om. Kommer an på hva påstanden er?

Sondre: Hvis vi snakker om «feie skolegård» problemet. Når man har flere elever. Henger det sammen med tiden? Henger antall elever og tid sammen?

Knut: ... ja det gjør jo på en måte det da.

Sondre: Kunne du forklart hvordan?

Knut: Så det er vel effektivitet ... Liksom med ... Med mindre ... Færre ... Eller mer elever mindre tid ... Så ...

Casper: Kan noen av de boksene brukes til å beskrive samme situasjon?

Knut: Ja de kan det. Sånn som (Peker på de to første) de. Sånn som feie skolegården, så er det jo, hvis det er flere elever på den første der, så da blir det mindre tid. Men mindre elever blir det mer tid. Er ikke det en sammenheng mellom de to?

Casper: Vi kan ikke svare på det. Hva tenker du om boks 5 da? Kan du forklare de pilene?

Knut: Eh... Den derre med ... Fordi ... Først så er det at noe går opp da er det jo antall eller tid eller sånt som går opp, også går det mindre og mindre ned ...

Casper: Du kan jo tenke på den feie skolegård problemet?

Knut: Ja, jeg ser tabellen der, så jeg ser på den litt. Først går antall elever opp og da går tiden mer og mer nedover ... Siden den starter med veldig mye også jo mindre vi kommer jo mindre tar vi vekk så liksom da begynner den liksom å miste mindre den herre, her så er det mye, denne delen her er delen vi tar ganske mye vekk og her tar vi mindre, her blir det mer sånn.

Casper: Kan du forklare den sjette boksen da?

Knut: At den går ... Åja dere starter sånn ja ... Dere starter med lite også blir det større og større. Den første pilen er jo bare at det går oppover som flere elever også den andre ...

Casper: Du kan jo bruke det virus problemet. Husker du den?

Knut: Ja, først starter vi med en person, og jo flere personer det blir ... Vi dobler jo det ... Jo flere dager det går jo flere smittede blir det.

Casper: Hva er forskjellen på boks fem og boks seks da?

[En elev åpner døren og forstyrrer]

Knut: Så på femmeren så starter den på veldig mye så blir det mindre og mindre. Her starter den på lite også går den på mye mye. Så nesten motsatt. Nesten.

Sondre: I går så sa du at på et tidspunkt så vil det være så mange smittede at de ikke vil være flere smittede å ta av. Kunne du vist eller tegnet hva du tenkte? Kan være en pil også.

Knut: ... Da går pila sånn (Tegner en pil som går brattere og brattere) også kommer vi her ... Nå har ikke jeg peiling på hva som skjer.

Sondre: Men hva skjer på toppen. Nå blir det færre smittede?

Knut: Da vil den jo gå ned igjen, men jeg vet ikke helt hvordan. Piler er rare vettu. Fordi når den går ned kan det være at mange har dødd.

9.18 Vedlegg 18: Transkripsjonsutdrag fra første og andre time

Transkripsjonsutdrag fra første og andre time

1. Anne: Så jeg tenkte ja, det kan jo hende. For vi vet jo ikke hvor lenge de i såfall bruker.

2. Kai: Jeg tenkte på at det kommer jo an på hvilken elev. Kan godt være en i åttende feier fortere enn en i andre.

3. Britt: Jeg tenkte, at det er jo an på hvor fort de går, egentlig.

4. Kai: Ja

5. Britt: Siden hvis de ikke jobber så veldig kjapt, så kan jo det være det tar litt lengre tid enn en time.

(…)

6. Anne: Ja, har vi noe sånn ja eller nei, da?

7. Kai: Nei, jeg vil helst si nei.

8. Anne: Okey, hvorfor det?

9. Kai: Fordi det kommer veldig an på eleven.

10. Anne: Mhm.

11. Kai: Kan jo ikke akkurat klone.

12. Anne: Nei.

(…)

13. Kai: Trenger de egentlig å feie en ronse?

14. Britt: Nei, nei …

15. Anne: det kommer jo, det kommer jo an på.

(…)

16. Anne: dere, det kommer an på hva de feier? Om de feier. Eller sånn hvor grundige de er.

17. Kai: mmm, ja det kommer egentlig an på hva de feier, feier de bakken eller feier de grus, eller blåser de at det er steiner.

18. Britt: Eller, hvilken plass de feier, det kan jo være at, si at det var denne herre skolegården. Så kan det være at de feide alt, utenom for eksempel stikkballbanen, eller fotballbanen eller no.

1. Sondre: Hva tror dere størrelse betyr for noe? Hvis dere ikke tenker på å identifisere, men bare ordet størrelse.

2. Kai: Hvor mye noe rommer.

3. Anne: hvor stort.

4. Britt: Hvor stort det er.

5. Sondre: Hvis dere tenker på det eksempelet i sted. med tre timer og en, sant. En elev brukte tre timer og kanskje tre elever brukte en time. Ser dere noen størrelser der?

6. Kai: Elevenes størrelse

7. Anne: skolegården.

8. Britt: hvor mange de er. Eller størrelse på tallet, liksom tre timer og en time.

(…)

9. Sondre: Ja, tenker dere kanskje et tall kan være en størrelse?

10. Anne: Ja. Hvor store tallene er.

(…)

11. Lærer: noen andre sa at identifisere var å finne noe.

12. Anne: Finne tall

13. Kai: Finne størrelsen på tall

14. Lærer: Finne noen størrelser på tall, okei. Er det noe vi kan finne her?

15. Kai: Tre timer og en time

16. Britt: En elev, tre elever.

17. Lærer: Gjøre antakelser, vet dere hva det betyr? Antakelser. Gjøre antakelser?

18. Anne: Å anta noe det er jo på en måte, ja selvfølgelig. Å tenke noe på en måte eller …

19. Britt: Å anta jeg føler det er litt sånn å si ja til det. Jeg antar at du kan gjøre det og det.

20. Lærer: Ja! Du antar at du kan gjøre det og det.

21. Britt: Ja! Det er det at jeg tror jeg kan gjøre det og det!

(…)

22. Lærer: Må du anta noe i den situasjonen der?

23. Anne: Du må ha selvfølgelig at de jobber. Du må anta at de jobber. Hvis de er sånn. Jo selvfølgelig de jobber jo, liksom. Du må anta at de jobber, at de ikke bare slapper av.

(…)

24. Kai: Ja, men det jeg tror det er at sammenhengen er på en måte at, da kan tre, eller sannsynligvis at, hvis det da, kan gi mening at de da bruker tre personer på en time.

(…)

25. Anne: Men, hvis vi tar sånn sannsynligvis er det samme som antakelser, gjøre, å gjøre for eksempel.

26. Kai: Da kan tre elever antakelig, feile skolegården på en time, liksom

27. Anne: Å gjøre kan man også si.

1. Anne: For det som er greia er jo, at han sa jo at hvis han skulle bruke samme tiden inne, så måtte han gå. Sånn at, det sier jo litt, at hvis han løper rundt banen, og det blir ett minutt og femten sekunder. Og hvis han gjør det inne og han må gå, så sier jo det litt om, at hvor stor banen, og hvor stor den inne er. Det sier jo om at, det sier jo seg at den der inne, er en del mindre enn den ute. Hvis han for eksempel spurter alt han kan får å få en, femten, men inne så må han gå.

2. Kai: Det kunne jo for eksempel vært at halvparten …. At innebanen var halvparten av … Det ute.

3. Anne: Ja, og jeg tenkte sånn. Ja, kunne det være sånn, okei at kanskje, hvis han skal løpe så må han kanskje ta dobbelt så langt, og ta to runder for en der ute. Men nå sa de jo ikke noe på det, så egentlig så får vi bare litt informasjon.

4. Kai: Hadde de sagt hvor lang den var inne og ute, så hadde det vært mye enklere.

5. Anne: Ja, men da vet vi ikke det, så da kan vi jo anta avstanden inne, eller dobbelt så liten som den ute. Men, men de sa jo bare noe om det var noen spørsmål, de sa ikke noe om at vi skulle løse en oppgave ellerno.

(…)

6. Sondre: Hvis dere skulle gjort noen antakelser for å finne ut hvor stor banen er inne. Hvilke antakelser ville dere gjort da?

7. Anne: Hvis han gikk helt vanlig. Også når han løp, så løp han helt vanlig.

8. Kai: Eller hvis han gikk på den store banen, så ville han brukt dobbelt så lang tid.

9.19 Vedlegg 19: Transkripsjonsutdrag fra tredje og fjerde time

1. Knut: Hæ, hva sa du, var dere enig, jeg var enig i hvert fall. Det er jo akkurat sånn som forrige gang (kikker bort på kai sitt ark).

2. Kai: Vi snakket jo om det i sted.

3. Sondre: Hvorfor er dere enige?

4. Kai: Fordi hvis antallet går opp (bruker armbevegelse som signaliserer opp), så går tid …

5. Knut: men, det kommer an på. bruker de gressklipper?

6. Sondre: Men, hvis du tar utgangspunkt at de er like effektive. Gir det mening med tallene?

7. Kai: (kikker bort på Sondre mens han svarer) seks, pluss seks pluss seks, det er 18.

(…)

8. Lærer: hvilke antakelser, må dere gjøre da?

9. Britt: det kan jo være at de bare har en gressklipper …

10. Knut: Men, nå har de tre. Nå har de tre gressklippere (nikker med hodet for å understreke det han sier) …

11. Kai: Alle er like effektive! (slår blyanten i bordet)

(…)

12. Knut: Jo, men se nå. Nå tok vi en antakelse. (bruker armene og slår i bordet når han forklarer) Og det var at. Det er egentlig at de kloner en gutt, tre ganger.

13. Lærer: hva er det dere antar da, for at det skal stemme?

14. Kai: For hvis du tar vekk punktum (peker på påstand 1) så blir seks pluss seks pluss seks, og det er atten.

(…)

15. Sondre: oppdaget dere noen sammenheng også, mellom gutter og tiden?

16. Kai: Når det ble flere gutter gikk tiden ned. (Knut taster på kalkulator imens).

17. Sondre: Hva tenker dere er poenget med å gjøre en antakelse. Hvorfor gjør vi det?

18. Kai: Fordi det er det vi trenger å vite, for å få et svar.

19. Sondre: For å regne med det?

20. Anne: det er lettere å regne.

21. Lærer: Har dere lagt merke til noe på påstand 2? (peker på påstand 2)

22. Kai: Når antallet gutter går opp (peker blyanten opp), da går tiden ned (peker blyanten ned)

(…)

23. Knut: (slår i bordet) En gutt bruker en 1,8 timer på å klippe gresset. Derfor bruker ikke to gutter en time.

24. Lærer: Ja, for hvis det hadde stemt, hva hadde sammehengen vært der da?

25. Anne: Jo mindre gutter det er, jo mindre tid.

26. Lærer: Ja! Når det blir færre gutter, så plutselig går tiden ned. Gir det mening? (Knut taster på kalkulator)

27. Anne: Neei, men da kommer ingen til å gjøre det også klipper plenen seg av seg selv.

28. Britt: (leser påstand 3) en gutt bruker 45 min på å klippe en plen. Da kan fem gutter antakelig klippe plenen på 12 minutter.

29. Knut: det er jo feil, se nå, jeg har jo kalkulator (begynner å taste på kalkulator).

(…)

30. Sondre: Hva har dere antatt nå da?

31. Knut: Oja, man kan. Jeg glemte at vi skulle sånn, jeg trodde dette bare var en regneoppgave.

1. Sondre: Kan det være at de har regnet gjennomsnittet ut ifra at hun ikke jobber noe på lørdag og søndag?

2. Anne: nei, men jeg bare antar det jeg.

(…)

3. Sondre: Men, dere antar at de har tatt utgangspunkt i at uken er fem dager. Var det det du tenkte?

4. Anne: Ja. (nikker)

5. Kai: Jeg tror ikke det er så mange som går på skole på lørdager.

(…)

6. Sondre: Hvilke antakelser, tror dere de har gjort på påstand to?

7: Kai: at det er seks timer hver dag og at hver skoletime varer like lenge (peker på påstand 3) og at de går på skole fem dager i uken. (peker på påstand 3)

(…)

Hvis jeg sier at seks gange syv blir førtito, hva tenker dere da de har tenkt på påstand to?

8: Anne: At han går på skolen på lørdag og på søndag.

(…)

9. Lærer: har dere tenkt over nå. I den oppgaven (peker på oppgave 3) så står det «skoletimer i uken.» I denne oppgaven står det «hvor mange liter i en uke». Det står uke i begge oppgavene, på samme måte. Hvorfor tenker dere forskjellig?

10. Anne: hæ? (ser på lærer med et forvirret blikk)

11. Kai: Fordi verden er sånn.

12. Anne: Fordi at de den andre. Her i den ku greia (peker på oppgave 2) så er det en uke og da tenker …

13. Lærer: dere tenker at kuen ikke tar helg?

14. Anne: Ja. Og her tenker vi at det er helg. (peker på oppgave 3)

9.20 Vedlegg 20: Transkripsjonsutdrag fra femte og sjette time

1. Anne: På identifisere størrelser så skrev jeg 6,8 sekunder er lik 2 dl og 0.65 liter er lik det vet jeg ikke.

2. Kai: 2 dl, 0.65 liter og 6.8 sek

3. Britt: Skrev jeg størrelsen på flasken, størrelsen på vann xx

4. Knut: Jeg skrev at flasken var 0.65 liter

5. Anne: På å gjøre antakelser så skrev jeg at jeg antok at flasken var tom

6. Knut: Jeg antok at det var helt tomt og at den skulle fylles helt opp.

7. Kai: Jeg tok en antakelse om at det går like fort, at den er tom og at alle sånne maskiner er helt lik.

8. Britt: Jeg antok at den var en tom flaske.

9. Anne: På beskrive sammenhenger så skrev jeg at når det er større flaske så tar det lengre tid og jo mindre flasken er jo mindre tid tar det.

10. Knut: Når tiden går opp så får flasken mer vann

11. Kai: Jeg skrev dessverre ingenting

12. Britt: Ikke jeg heller

(tull)

13. Sondre: Men Anne og Knut dere hadde to sammenhenger, var dere enige i de?

14. Knut: Vannet går opp, tiden går opp

15. Anne: Vannet går ned, tiden går ned.

16. Knut: Hæ, nå skjønte jeg ikke.

17. Britt: Hæ, så vannet gikk opp og tiden gikk opp, men vannet gikk ned og tiden gikk ned?

18. Anne: Hvis det er mindre flaske så blir det mindre tid. Er det større flaske blir det mer tid.

19. Knut: Ah okei, ja da gir det mening!

(...)

20. Sondre: Husker dere situasjonen med å feie en skolegård? [elevene nikker] Hvis dere ser på sammenhengene kan dere se at de er forskjellig på noen måter?

21. Anne: Denne typen oppgaven her er sånn type at jo større jo større blir det.

22. Kai: Stor mer. Denne er motsatt. På den med kids som skal feie skolegård så hvis tid går ned går kids opp.

9.21 Vedlegg 21: Transkripsjonsutdrag fra syvende og åttende time

Alle: xx

Knut: Men, dere se her. På denne herre hadde vi ikke trengt kalkulator. (Peker på tabell på oppgave 2)

Alle: xx

Knut: Du trenger bare å ta 14. plusse på 14.

Alle: xx

Knut: Men se, se, du bare øker med to.

Alle: xx

Kai: Et badekar med 200 liter tappes for 12 liter vann på ett minutt. Da kan vi anta at badekaret vil fortsette å minke med 12 liter per minutt til det er tomt for vann.

Britt: Hva er minke?

Knut: Forminske

Britt: Ja, okey.

Kai: Antakelser, det er at, at det tappes 12 liter vann på ett minutt hele tiden.

Britt: Tappes, at det kommer mer vann?

Kai: Tappes, det er jo at det blir mindre.

Britt: Oja.

Kai: Hvis du tapper blod, da blir det mindre blod

Britt: Okey, akkurat det eksempelet, greit.

Kai: xx

Anne: xx det tappes, 12 liter per minutt xx

[Elevene skriver individuelt]

Knut: Hva annet skrev du? (Ser på Kai sitt ark) Og du bare skrev det.

Anne: Jeg skrev bare at det tappes med xx.

Knut: Hva skrev du? At det tappes?

Anne: At det tappes med vann.

Knut: Det får ikke med alt. Men, greit. You do you, I guess.

Knut: Åhh, hele er fylt ut allerede, nå hadde jeg lyst å gjøre litt matte her. Ja, jeg hadde lyst å liksom regne litt. Skriv symbol.

Britt: Jeg har ikke skrevet symbol på noen. xx

Knut: Hvis …

Kai: Minuttene går jo opp xx

Knut: Hvis, hvis du tar mer vann, hvis du tar med vann vekk (Viser forklaring med bevegelser). Da går det nedover.

Kai: Ja

Knut: Ja.

Kai: Vannet går ned.

Knut: Ja, vannet går opp …

Britt: Så, hvis du …

Britt: Ja.

Kai: Vannet går ned.

Knut: Ja, vannet går ned.

Britt: Ja, så hvis …

Kai: Det var ikke elevene her, det var ikke to og en halv.

Knut: Vannet går ned, men tiden går opp.

Kai: Ja.

Knut: Jo men jo mer du tar ut …

Kai: Når du er på fire minutter da er du jo. Se her fire minutter, 152 liter, det er jo mindre. Den her går ned, den her går opp (Peker på pilene han har tegnet).

Britt: Hvis man har vann i hendene sånn (Holder hendene sammen som en skål) og det renner sånn og sånn, da går det jo ned og ned.

Knut: Opp, ned (T egner piler). Forklar hvordan liter …

(Tull)

Kai: Når tiden går opp, ja, så går vannet ned.

[Elevene skriver individuelt]

Britt: Hva var det du sa?

Anne: Når tiden går opp, går vannet ned.

Knut: Okey neste, plis si at det er matte.

Sondre: Kan eg bare spørre her, Knut, du sa du var glad i å regne litt. Kan dere se noe mønster her?

Kai: Det går bare ned, tolv, tolv, tolv, tolv hele tiden.

Knut: Tolv, tolv, tolv, ned.

Sondre: Okey.

Knut: De tar jo vekk

Anne: xx

Sondre: Også, dere sa når tiden går opp, går vannet ned. Går det an å se det på en annen måte også?

Anne: Når vannet går ned, går tiden opp.

Kai: Det starter jo på null.

Sondre: Ja. Men la oss si at vi hadde filmet dette også hadde vi gått motsatt vei.

Kai: xx

Knut: Vi kunne også tatt, at

Anne: Når vannet er, når det er null tid, også jo mer tid det blir, nei

Knut: Vi må ikke ha med tid, vi kan med bare vann, at når du tar vekk vann (Viser med bevegelser). Så går det oppover, liksom hvor mye du har tatt vekk, og det som er inni det går nedover.

Sondre: For å si det litt på en annen måte. Hvis tiden hadde gått nedover …

Anne: Da hadde vannet gått oppover

Britt: Hæ?

Kai: Hvis vi har spolt tilbake i tid.

Sondre: Ja.

Anne: Hvis vannet går nedover …

Kai: Vi filmer det, så har vi spolt tilbake.

Knut: xx (Snur arket til neste oppgave). Fillern. (Blir oppgitt over at tabellen allerede er fylt ut på neste oppgave). Et virus har spredt seg i mønsteret en, to, fire, åtte, seksten. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

Britt: Et virus har spredt seg i mønsteret …

(Tull)

Britt: En, to, fire, åtte, seksten. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

Alle: …

[Elevene skriver]

(Tull)

Anne: Bare skriv to oppover piler xx symbol

Britt: To oppover piler?

Anne: Ja, fordi du ser jo på tabellen, da går det tallet oppover, og da går også det tallet oppover.

Knut: Ja, hver dag, så går det mer. (Skriver to oppover piler)

Ann: Det dobles.

Knut: Ok, forklar hvordan antall. Hvis …

Anne: Mønsteret dobles.

Knut: Jo lenger tid det tar jo mer folk blir smittet av viruset akkurat sånn som korona.

Kai: Det blir doblet hele tiden. En blir doblet. Så blir to. to blir doblet det blir fire. Åtte blir doblet det blir seksten.

Britt: xx

Knut: Trettito gange to. det er seksifire, sekstifire gange to det er hundre og tjueåtte, hundre og tjueåtte gange …

Anne: Ja, det er greit.

(Tull)

Kai: Skriv symbol for modellen. Dag går opp, smittede går opp [Kai mener trolig at antall smittede per dag stiger].

Sondre: Går det an å se det på en måte også, på den?

Anne: Dag går ned, smittetallet går ned.

Sondre: Kan du si det engang til?

Kai: Folk blir vaksinert, folk blir friske igjen.

Knut: Dere må skrive pandemien stopper aldri.

Anne: Når dag går ned, går smittetallet ned.

Sondre: Hvordan ville du brukt piler til å vise det da?

Anne: Ned, ned.

Sondre: Ja.

Knut: Vi må skrive at den aldri stopper, fordi hvis den stopper, så er vår teori feil.

Sondre: Kan du si det engang til Knut?

Knut: Fordi hvis, det stopper, hvis viruset plutselig stopper, så er jo vår feil, fordi da går jo tallet nedover igjen. Eller så bare dør de … Ja, ingen dør (Skriver ned på arket).

Kai: Alle blir vaksinert og da dør viruset!

Knut: Ingen dør av det, ingen dør.

Britt: xx

Sondre: Men, har dere gjort noen antakelser da?

Anne: Ja, det er det vi holder på med nå.

Knut: Ja, vi skriver at ingen dør, fordi hvis noen dør …

Kai: Pandemien stopper ikke.

Knut: For hvis noen dør av det da betyr jo ikke det

Kai: Da blir det mindre.

Knut: Da blir det kanskje bare en som blir smittet av det. Nei, nei da blir det null smitte akkurat av den personen.

Britt: Hæ? Fordi da er den vekke?

Knut: Se nå. Hvis det er trettito folk i dette her klasserommet. nei det er sekstifire folk i dette klasserommet og trettito av dem har korona.

Britt: Ja …

Knut: Da smitter jo en person to.

Britt: En person smitter to?

Knut: Ja. En person smitter to, står det her.

Britt: Oja, der står det ja.

Kai: Vi antar at hver person smitter to nye personer.

Knut: Og hvis en, han derre som smitter to. hvis den som egentlig skulle smitte to, dør. Da blir det jo to vekke. Eller tre egentlig.

Britt: Da blir det to som ikke blir smittet?

Knut: Ja! Og derfor blir det ikke riktig, så derfor må ingen dø.

(Tull)

Sondre: Så, du sier at på et tidspunkt så vil det endre seg, at det ikke vil øke.

Knut: Ja!

Anne: Til slutt så er det ikke flere som kan få det, fordi da stopper jo alt.

Knut: Evige mennesker, evige mennesker.

(Ler)

Britt: Vi trenger ikke evige mennesker.

Anne: Ja, men, ja men. Hvis alle blir smittet, så fortsetter det job …

(Tull)

Sondre: Men på antakelser, nå ser jeg på hva du har tatt Knut. Da har dere tatt ingen dør, evige mennesker, pandemien stopper ikke og …

Knut: Smitter to nye personer hele tiden.

Sondre: Ja.

Anne: For det kan være at xx For plutselig er det ingen mer smitte, og da gir det ikke mening.

(Tull)

Sondre: Hva tenker dere er grunnen til at dere har gjort sånne antakelser? Hva tenker dere er poenget med å gjøre det?

Anne: Fordi hvis ikke så kan vi ikke vite noe, da kan vi ikke …

Kai: For hvis ikke, kan ikke vi ha skikkelig svar.

Alle: xx

Anne: For hvis ikke så kan jo det være at noen er første klassinger, i følge. Ikke sant …

(Tull)

Anne: Altså det kan, altså sånn hvis ikke vi tar antakelser så er det sånn. Da er på en måte ingen svar riktige, for man vet jo ikke. Hvis fem gutter, så vet man jo ikke. Da kan det være at de fem guttene er førsteklassinger. Og den ene gutten er en som si, er …

Kai: Videregående.

Anne: Ja, ikke sant. Og da blir det veldig forskjellig

Alle: xx

Sondre: Tenker dere det er realistisk, det dere har kommet fram til?

Knut: Nei, men hvis det hadde vært fem førsteklassinger og en videregående, da tipper jeg den eleven på videregående hadde satt seg og sett på tv også måtte førsteklassingene jobbe.

Sondre: Men, hvis dette skulle skjedd i virkeligheten?

Anne: Også er det noen som ikke tenker xx sånn, og da kan man ikke xx sikkert svar.

Sondre: Hvis dette skulle skjedd i virkeligheten, tror dere dere hadde fått samme tall som dere regnet ut på nå?

Alle: xx

Anne: Njaa, hvis antakelsene er riktige …

Kai: Hvis de hadde vært prikk like effektive. Prikk like effektive, det er jo litt vanskelig.

1. Kai: Antakelser, det er at, at det tappes 12 liter vann på ett minutt hele tiden. [Elevene skriver ned antakelsene sine]

(...)

2. Knut: Vannet går ned, men tiden går opp. [Bruker hendene til å vise.]

3. Kai: Ja. [Elevene skriver ned]

(...)

4. Sondre: Hva hadde skjedd hvis tiden hadde gått nedover?

5. Anne: Da hadde vannet gått oppover

6. Kai: Hvis vi hadde spolt tilbake i tid, da hadde vannet gått opp og tiden gått ned.

(...)

1. Britt: Et virus har spredt seg i mønsteret …

(Tull)

2. Britt: En, to, fire, åtte, seksten. Vi antar at hver person smitter to nye personer.

3. Alle: …

[Elevene skriver]

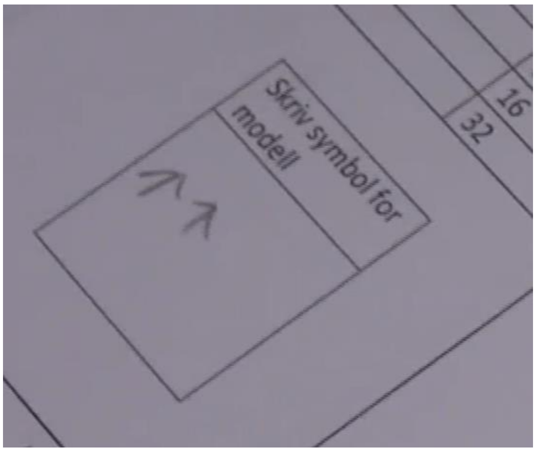
(Tull)

4. Anne: Bare skriv to oppover piler xx symbol

5. Britt: To oppover piler?

6. Anne: Ja, fordi du ser jo på tabellen, da går det tallet oppover, og da går også det tallet oppover.

7. Knut: Ja, hver dag, så går det mer. (Skriver to oppover piler)



Figur 7: Knut sine piler på oppgave 5.

8. Anne: Det dobles.

9. Knut: Ok, forklar hvordan antall. Hvis …

10. Anne: Mønsteret dobles.

11. Knut: Jo lenger tid det tar jo mer folk blir smittet av viruset akkurat sånn som korona.

13. Kai: Det blir doblet hele tiden. En blir doblet. Så blir to. to blir doblet det blir fire. Åtte blir doblet det blir seksten. [Kai peker på kolonnen som viser antall smittede per dag]

14. Britt: xx

15. Knut: Trettito gange to. det er seksifire, sekstifire gange to det er hundre og tjueåtte, hundre og tjueåtte gange …

16. Anne: Ja, det er greit.

(Tull)

17. Kai: Skriv symbol for modellen. Dag går opp, smittede går opp.

18. Sondre: Går det an å se det på en måte også, på den?

19. Anne: Dag går ned, smittetallet går ned.

20. Sondre: Kan du si det engang til Anne?

21. Kai: Folk blir vaksinert, folk blir friske igjen.

22. Knut: Dere må skrive pandemien stopper aldri.

23. Anne: Når dag går ned, går smittetallet ned.

24. Sondre: Hvordan ville du brukt piler til å vise det da?

25. Anne: Ned, ned.

26. Knut: Vi må skrive at den aldri stopper, fordi hvis den stopper, så er vår teori feil.

27. Sondre: Kan du si det en gang til Knut?

28. Knut: Fordi hvis det stopper, hvis viruset plutselig stopper, så er jo vår feil, fordi da går jo tallet nedover igjen. Eller så bare dør de … Ja, ingen dør (skriver ned på arket).

29. Knut: Fordi hvis, det stopper, hvis viruset plutselig stopper, så er jo vår feil, fordi da går jo tallet nedover igjen. Eller så bare dør de … Ja, ingen dør (Skriver ned på arket).

30. Kai: Alle blir vaksinert og da dør viruset!

31. Knut: Ingen dør av det, ingen dør.

32. Anne: Ja, det er det vi holder på med nå.

33. Knut: Ja, vi skriver at ingen dør, fordi hvis noen dør …

34. Kai: Pandemien stopper ikke.

35. Knut: For hvis noen dør av det da betyr jo ikke det

36. Britt: Da blir det mindre.

37. Knut: Da blir det kanskje bare en som blir smittet av det. Nei, nei da blir det null smitte akkurat av den personen.

38. Britt: Hæ? Fordi da er den vekke?

39. Knut: Se nå. Hvis det er trettito folk i dette her klasserommet. nei det er sekstifire folk i dette klasserommet og trettito av dem har korona.

40. Britt: Ja …

41. Knut: Da smitter jo en person to.

42. Britt: En person smitter to?

43. Knut: Ja. En person smitter to, står det her.

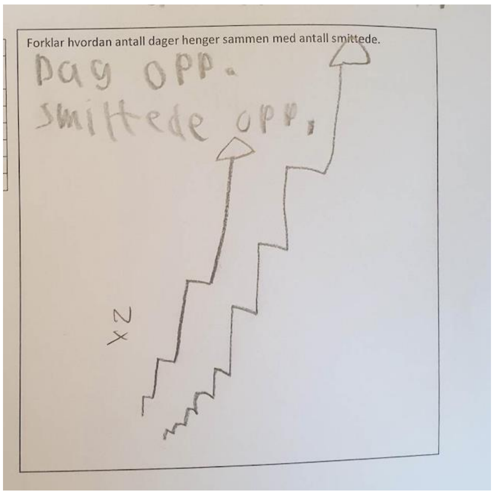
44. Britt: Åja, der står det ja.

45. Kai: Vi antar at hver person smitter to nye personer.

46. Knut: Og hvis en, han der som smitter to. hvis den som egentlig skulle smitte to, dør. Da blir det jo to vekke. Eller tre egentlig.
47. Britt: Da blir det to som ikke blir smittet?
48. Knut: Ja! Og derfor blir det ikke riktig, så derfor må ingen dø.
(Tull)
49. Sondre: Så, du sier at på et tidspunkt så vil det endre seg, at det ikke vil øke.
50. Knut: Ja!
51. Anne: Til slutt så er det ikke flere som kan få det, fordi da stopper jo alt.
52. Knut: Evige mennesker, evige mennesker.
(Ler)
53. Britt: Vi trenger ikke evige mennesker.
54. Anne: Ja, men, ja men. Hvis alle blir smittet, så fortsetter det jo …
(Tull)
55. Sondre: Men på antakelser, nå ser jeg på hva du har tatt Knut. Da har dere tatt ingen dør, evige mennesker, pandemien stopper ikke og …
56. Knut: Smitter to nye personer hele tiden.
57. Sondre: Ja.
58. Anne: For det kan være at xx For plutselig er det ingen mer smitte, og da gir det ikke mening.

(...)

1. Knut: Haha, hva søren, det ser ut som business (peker på pilen til Kai).



Figur 8: Kai sin pil.

2. Britt: Det ser ut som en trapp.

(ler)

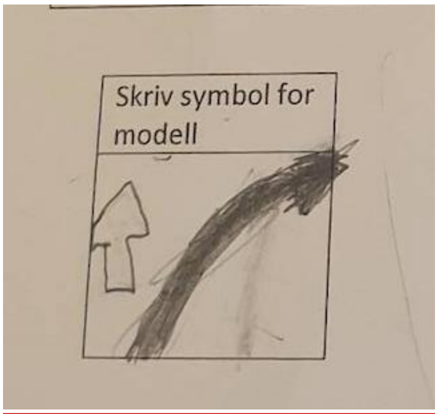
3. Kai: Men det gir jo mening.

4. Britt: Ja, det gir mening ja.

5. Anne: Ja, det gjør det jo.

(...)

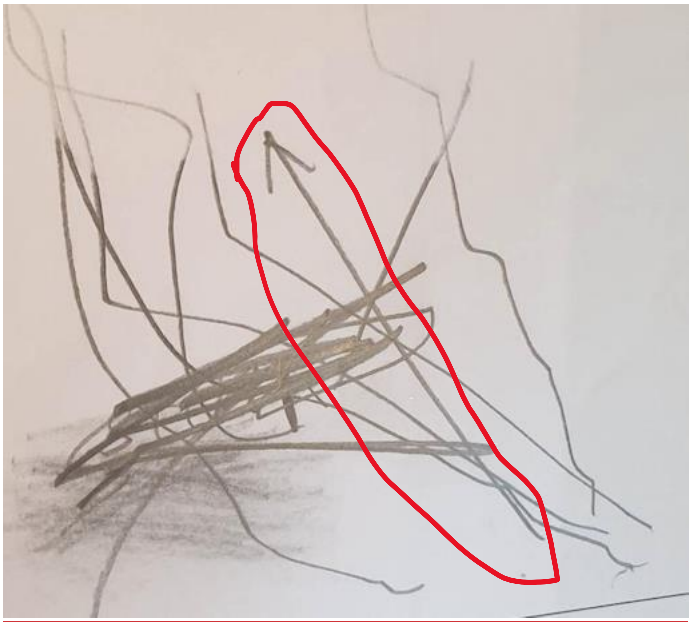
6. Sondre: For min del så ser det ut som om det øker veldig fort i starten, men ikke så mye på slutten [peker på pilene til Knut og Britt som har tegnet samme pil].



Figur 9: Britt sine piler på oppgave 5.

7. Anne: Ja!

8. Knut: Det skulle vært motsatt (tegner en skrå pil oppover)

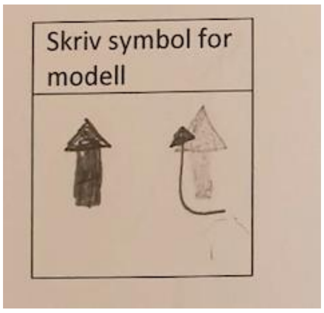


Figur 10: Knut sin skråpil.

9. Casper: Hva mente du med at den skulle gå skrå?

10. Knut: For i starten er det jo veldig lite, for den starter på 1, et veldig lite tall, så 2 som også er lite. Også etter hvert på 32 også boom så er den på over 100. Men den kommer ikke til å bli helt 100 fordi den vil gå 64, 128 osv.

11. Sondre: Hva har du gjort Anne? Kan du vise den til de andre og se hva de tenker? (Anne, viser frem en pil som buer oppover)



Figur 11: Anne sin pil.

13. Kai: Ja, jeg synes den gir mening. Det er lite også blir det bare masse masse mer. (De andre på gruppen nikker)

9.22 Vedlegg 22: SIKT meldeskjema

Sikt

Meldeskjema / ALGEBRA-prosjektet / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	**Vurderingstype**	**Dato**
849691	Standard	09.01.2023

Prosjekttittel
ALGEBRA-prosjektet

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
David A. Reid

Prosjektperiode
01.01.2023 - 31.12.2030

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2030.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2030.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og

konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

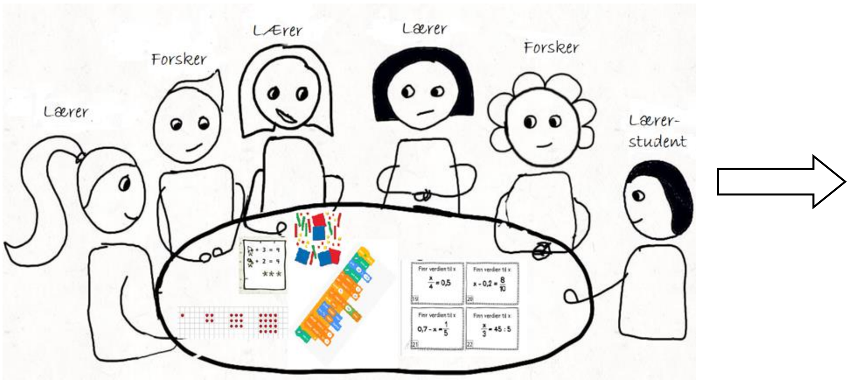
Lykke til med prosjektet!

9.23 Vedlegg 23: Informasjonsskriv til elever / Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"ALGEBRA"?

Hei! Har du lyst å være med i et forskningsprosjekt? Vi ønsker å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.



Formål

I dette prosjektet vil vi samarbeide med lærere om utvikling av læringsaktiviteter som legger til rette for at du kan bli god i matematikk, og da med spesielt fokus på algebra. Disse læringsaktivitetene vil inkludere matematiske problemer å bryne seg på, redskaper for å kunne løse problemene, sånn som konkretiseringsmateriell, og anbefalinger for lærerhandlinger, sånn som strategier for å stille spørsmål, hvordan gruppere elever hensiktsmessig, ledelse av gruppediskusjoner og helklassediskusjoner osv.

Vi har lyst å se hvordan du og dine medelever deltar i disse aktivitetene, hvilke ideer og tanker dere gjør dere og hvilke muligheter dere får til å lære algebra. Vi håper du vil være med!

Vi vil for eksempel undersøke spørsmål som:

- *Hvilke elementer i designet av aktivitetene støtter elevens utvikling av algebraisk tenking?*

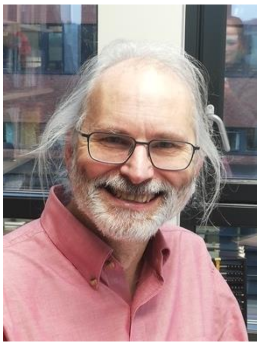
-*Hvilke muligheter og utfordringer for læring av likninger opplever elevene når de jobber med konkretiseringsmateriell, diagrammer og symboler?*

Hvis du har lyst å være med, kan det også være at vi ber deg om å forklare oss litt mer om hvordan du tenker når du løser matematikkproblemer. Om du kan tenke deg det så kan du krysse av litt lengre nede for at du også er villig til å gi et intervju.

Dette prosjektet er et forskningsprosjekt fra Universitet i Agder.

Hvem leder forskningsprosjektet?

Forskeren heter David Reid.



Det er også fire forskere til fra UiA med i prosjektet. De heter Martin Carlsen, Linda Gurvin Opheim, Elin Røkeberg Lid og Jorunn Reinhardtsen.

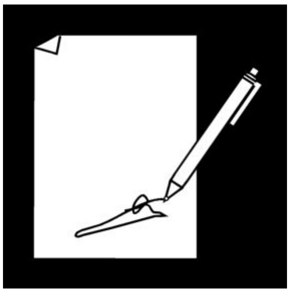



Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi spør deg om å være med, fordi du er en elev på mellomtrinnet og din lærer i matematikk samarbeider med oss om å lage gode læringsaktiviteter.

Vi vet enda ikke hvem du er eller hva du heter, men din matematikklærer gir deg dette brevet fra oss.

Hvis du har lyst å være med i forskningsprosjektet, må du skrive under på siste ark i dette brevet, og da gir du tillatelse for at vi får inkludere det du gjør og bidrar med i undervisningen når vi samler inn data i ditt klasserom.



Hvis du ikke har lyst å være med, så utelater vi dine bidrag i klasserommet.

Hva betyr det for deg å delta?

Hvis du har lyst å delta i forskningsprosjektet, så følger du matematikkundervisningen på skolen som vanlig. Vi ønsker å filme undervisningen for å kunne gå i detaljer å se hva som hjelper deg å løse utfordrende problemer i matematikk og hvordan undervisningen kan støtte din videre utvikling. Det kan hende at vi ønsker å ha et intervju med deg. Et intervju er en samtale der vi stiller deg forskjellige spørsmål. Spørsmålene vil handle om hvordan du tenker når du løser problemer og hvilke hjelpemidler du liker å bruke.

Både Linda og Jorunn vil være med under intervjuet, og vi vil gjøre lydopptak av intervjuet.

Intervjuet vil ta ca. 30 minutter.

Hvis du synes det er greit, vil vi også samle inn skrevne løsninger som du har jobbet med i klasserommet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Det betyr at du kan velge selv om du har lyst å være med eller ikke. Ingen andre kan velge dette for deg. Det er bare du sammen med dine foreldre som kan samtykke. Samtykke betyr at du sier at du synes noe er greit.

Hvis du vil delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Det betyr at det er lov å ombestemme seg, og det er helt i orden. All informasjon om deg vil da bli slettet.

Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller om du først sier «ja» og så «nei». Ingen vil bli sur eller lei seg.

Dersom du ikke ønsker å delta så vil du likevel få likt tilbud om undervisning som dine medelever og du vil få delta i de samme læringsaktivitetene. Vi vil sørge for at du ikke blir med på videoopptakene som gjøres i ditt klasserom. Dersom helklassesamtaler blir aktuelle å filme vil du få tilbud om tilsvarende samtale på et grupperom.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker innsamlet data

Vi vil bare bruke data til å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.

Vi vil ikke dele innsamlet data med andre. Det er bare forskerne i prosjektet som har tilgang til data.

Vi lagrer all data på en sikker datamaskin.

Vi sletter video- og lydopptak fra klasserom og intervjuet når prosjektet er over.

Vi passer på at ingen kan kjenne deg igjen når vi skriver forskningsartikler. Vi vil for eksempel finne opp et annet navn når vi skriver om deg.

Vi følger loven om personvern.

Hva skjer med dine personidentifiserende data når vi avslutter forskningsprosjektet?

Vi er ferdig med forskningsprosjektet 31.12.2030. Innsamling av data kan foregå frem til 31.12.2024, men vi ønsker å beholde innsamlet data frem til prosjektslutt for videre forskning.

Da vil vi passe på at all personidentifiserende data (video- og lydopptak) er slettet.

Dine rettigheter

Du kan klage til Datatilsynet dersom du synes at vi har behandlet dine personidentifiserende data på en uforsiktig måte eller på en måte som ikke er riktig.

Hva gir oss rett til å samle inn personidentifiserende data?
Vi behandler data som inkluderer deg bare hvis du sier at det er greit og du skriver under på samtykkeskjemaet.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål om studien, kan du ta kontakt med:

- *Universitet i Agder* ved
  Jorunn Reinhardtsen, jorunn.reinhardtsen@uia.no, 40 49 23 33
  David Reid. david.reid@uia.no
- Vårt personvernombud:
  Trond Hauso, Personvernombud@uia.no, 936 01 625

Universitet i Agder har bedt Personverntjenester se om prosjektet følger loven om personvern. Personverntjenester har gjort dette, og mener at vi følger loven.

Hvis du lurer på hvorfor Personverntjenester mener dette, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen David, Martin, Linda, Elin og Jorunn

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *ALGEBRA*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at barnet mitt:

- ☐ kan delta i intervju hvor det gjøres video- og lydopptak
- ☐ kan observeres og tas video- og lydopptak av i klasserommet
- ☐ jeg samtykker til at mitt barns skriftlige arbeider kan samles inn/kopieres

Jeg samtykker til at mitt barn, ____,
får delta i prosjektet og innsamlet data kan behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

9.24 Vedlegg 24: Informasjonsskriv til lærer / Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet *ALGEBRA?*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å lage undervisningsopplegg for 5. til 7.trinn i forbindelse med de nye kjerneelementene i læreplanen LK20.

Formål

Vi er en gruppe forskere ved Universitetet i Agder som ønsker å gjennomføre et forskningsprosjekt vi har kalt ALGEBRA (**A**lgebra **L**earning: **G**eneralizing, **E**xpressing, **B**alancing, **R**easoning and **A**rgumentation). Vi ønsker å samarbeide med deg og andre lærere i å designe undervisningsopplegg som gir mulighet for å undervise i tråd med de nye kjerneelementene i læreplanen i matematikk. Disse kjerneelementene er nært knyttet til algebra og algebraisk tenkning. Ved å forene din inngående kunnskap om akkurat ditt klasserom og dine elever med kunnskap om læringsprosesser og algebra så kan vi sammen utvikle opplegg som gir elevene gode muligheter for læring. Vi har flere mål med dette arbeidet.
- Vi ønsker at undervisningsoppleggene skal være til hjelp i lærernes daglige arbeid. Ved å sette av tid til å arbeide med kjerneelementene får lærerne mulighet til å tenke gjennom, diskutere og prøve ut tanker de har om hvordan man kan undervise i tråd med kjerneelementene. Vi ønsker at vi som forskere kan være til støtte for lærerne i denne prosessen.

- Vi ønsker å undersøke hvordan man best kan arbeide med utvikling av undervisningsopplegg i tråd med kjerneelementene og se om det er noen prinsipper som kan tas med i videre arbeid med dette.

- Vi ønsker å undersøke hvordan et slikt samarbeidsprosjekt mellom forskere og lærere fungerer og om det gir mulighet for faglig utvikling for både lærere og forskere.

- Vi ønsker å undersøke om undervisningsoppleggene fører til utvikling av algebraisk tenkning hos elevene

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Universitetet i Agder har invitert skoler til å delta i dette prosjektet og din skole har meldt seg som interessert. Det betyr at din skole vil tilrettelegge for at dette prosjektet kan gjennomføres. I tillegg er det satt av prosjektmidler som skal gå til å frikjøpe dere som er lærere på mellomtrinnet og som underviser matematikk slik at dere kan bruke tid på prosjektet. Vi mener at det er viktig å bygge et faglig fellesskap av lærere på skolen og derfor håper vi at flest mulig vil bli med på prosjektet. Vi trenger samtykke til innhenting av informasjon i løpet av prosjektet. For å kunne realisere målene vi har nevnt over vil vi samle inn video- og lydopptak fra workshoper der vi lager undervisningsoppleggene, vi vil filme i klasserommene under utprøving av undervisningsoppleggene og vi vil også gjerne høre hva dere lærere vektlegger i utvikling av oppleggene og tanker dere gjør dere under og etter undervisningen gjennom intervjuer. Vi vil også bruke video fra klasserommene når vi arbeider videre med undervisningsoppleggene for å forbedre dem. Videoene fra klasserommene og lydopptakene vil dessuten bli brukt for å undersøke hvordan lærerne og forskerne deltar i prosjektet for å finne ut om det er noe vi kan lære om selve designprosessen.

Konkret vil du ved å skrive under på dette dokumentet samtykke til at det blir tatt video- og lydopptak av workshoper, undervisning og intervjuer.

Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelse i prosjektet vil innebære at du deltar i workshoper der vi sammen lager undervisningsopplegg og i uttesting av oppleggene i klasserommet. Det vil innebære at du deltar i diskusjoner med dine erfaringer fra uttestingen og med dine tidligere erfaringer fra undervisning.

Det vil også bli foretatt noen semistrukturerte intervjuer i løpet av perioden der vi vil spørre om hvordan du opplever prosessen rundt det å utvikle undervisningsopplegg, hvordan du synes det har fungert i klassen og om det er ting du ville endret på. Vi vil også kunne spørre deg om hvordan du opplever din egen utvikling gjennom samarbeidet med forskerne fra UiA. Intervjuene kan være både individuelle intervjuer og gruppeintervjuer.

Det er frivillig å delta
Det er selvfølgelig helt frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker personidentifiserende data
Forskere og studenter er underlagt taushetsplikt, og data vil behandles deretter. Vi vil bare bruke innhentet data til formålene som er beskrevet i dette skrivet. Vi behandler innhentet data konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Datamaterialet innhentes, behandles og lagres på maskinvare og mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon. Det vil kun være tilgjengelig for deltakerne i prosjektet.

Anonymiserte data vil til slutt bli presentert i studentoppgavene til master- og doktorgradsstudentene som deltar, og i forskningsartikler skrevet av forskerne i prosjektet. Der vil det altså ikke komme frem verken hvem som har gjort eller sagt hva eller hvilken klasse og skole forskningen har foregått ved. Du vil være anonymisert med nummerkode/pseudonym, så du vil ikke kunne gjenkjennes i teksten. Ved publikasjon vil du som deltaker altså heller ikke kunne gjenkjennes.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Datainnsamlingen vil foregå fra januar 2023 til juni 2025, med mulighet for en forlengelse frem til juni 2026. Etter prosjektslutt vil datamaterialet med dine personopplysninger slettes, og kun anonymisert datamateriale vil bli beholdt frem til 31.12.2030. Grunnen til at anonymisert data beholdes er at dette vil bli benyttet til utarbeidelse av forskningsartikler.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvor kan jeg finne ut mer?

Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til lederne ved prosjektet
- Førsteamanuensis Jorunn Reinhardtsen , Universitetet i Agder, Fak. for realfag. Inst. for matematiske fag. Tlf:. +47 38 14 22 54 Email: jorunn.reinhardtsen@uia.no
- Professor David Alexander Reid, Universitetet i Agder, Fak. for realfag. Inst. for matematiske fag. Tlf:. +47 38 14 12 67 Email: david.reid@uia.no
- Førsteamanuensis Linda Gurvin Opheim Universitetet i Agder, Fak. for realfag. Inst. for matematiske fag. Tlf:. +47 38 14 18 50 Email: linda.g.opheim@uia.no
- Universitetet i Agder sitt personvernombud: Trond Hauso. Tlf: +47 936 01 625 Email: trond.hauso@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Algebraprosjektet ved Jorunn Reinhardtsen, David Alexander Reid, Martin Carlsen, Elin Røkeberg Lid og Linda Gurvin Opheim

---

Samtykkeerklæring

Jeg samtykker til at forskerne i prosjektet kan:

- ☐ observere og ta lydopptak av workshoper, og at anonymiserte data herfra kan brukes til forskningsprosjektet.
- ☐ observere og ta videopptak av undervisning, og at anonymiserte data herfra kan brukes til forskningsprosjektet.
- ☐ ta lydopptak fra intervjuer jeg deltar i og at anonymiserte data herfra kan brukes til forskningsprosjektet.

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)