Strategier og konkretiseringsmateriell i sammenlikning av brøk

En kvalitativ casestudie om hvilke strategier og konkretiseringsmateriell elever på 6.trinn bruker når de sammenlikner brøk.

ANNA ELISABETH HOLSÆTHER

VEILEDER
Kristina Markussen Raen
Ninni Marie Hogstad

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Master

Forord

Fem år har gått siden jeg gikk inn dørene på Universitet i Agder for første gang, og nå står jeg faktisk ved veis ende. Denne masteroppgaven markerer slutten på min tid som lærerstudent. Årene som student har beriket livet mitt med gode venner, masse latter og minner for livet.

Å skrive en masteroppgave har vært en opplevelse. Det har bydd på dype daler, og høye topper. Det er mange personer jeg ønsker å takke i forbindelse med mitt ferdige produkt. Først vil rette en takk til mine medstudenter som har gjort denne perioden mer lystig. Det har vært gode samtaler som har bidratt både faglig og sosialt. Takk til familie og øvrige venner som har heiet meg fremover og gitt meg selvtillit nok til å ferdigstille masteroppgaven. Ikke minst vil jeg sende en stor takk til elevene som valgte å stille opp til intervju, uten dere hadde det ikke blitt en masteroppgave. Jeg er også nødt til å rette en ekstra stor takk til min samboer, Stein-Tore. Takk for at du har vært tålmodig med meg når det har stått på som verst. Uten din støtte og dine oppmuntrende ord ville jeg ikke fått dette til. Til slutt vil jeg rette en takk til mine veiledere, Ninni og Kristina, for all hjelp underveis i oppgaven. Takk for konstruktive tilbakemeldinger, hyppige veiledninger og gode diskusjoner om brøk, strategier og konkreter

I løpet av denne reisen jeg har vært igjennom har jeg lært utrolig mye. Mitt mål med min masteroppgave var å skrive om noe jeg ville få bruk for som lærer. Oppgaven har gitt meg innsikt i mye didaktisk teori om brøk, og jeg gleder meg til å undervise om brøk i fremtiden.

Anna Elisabeth Holsæther

Kristiansand, mai 2023

Sammendrag

Brøkbegrepet er det mest komplekse begrepet elevene møter på i barneskolen (Behr et al., 1983, s. 91) Derfor har jeg i denne studien undersøkt hvordan elever sammenlikner brøk. Jeg vil dermed undersøke hvilke strategier og konkreter elevene velger å bruke i sammenlikningen. På bakgrunn av dette har jeg utformet følgende forskningsspørsmål:

Hvilke strategier og konkretiseringsmateriell bruker elever på sjette trinn når de sammenlikner brøk?

For å besvare forskningsspørsmålet har fem sjette trinns elever svart på seks forskjellige sammenlikningsoppgaver i brøk. Den først oppgaven inneholdt to brøker med lik nevner. Den andre oppgaven inneholdt to brøker med lik teller. Tre av oppgavene inneholdt brøker med forskjellig teller og nevner. Til slutt var det en oppgave med likeverdige brøker.

Ved hjelp av oppgavebasert intervju fikk jeg som forsker muligheten til å ha en interaksjon med elevene mens de holdt på. Dette har bidratt til en dypere innsikt i hva elevene anser som viktig når de sammenlikner brøkene. Elevbesvarelsene viste til en rekke ulike strategier for å sammenlikne brøk av ulik størrelse deriblant; restdel, restbrøk, referansepunkt, sammenlikne teller, sammenlikne nevner, visuell sammenlikning og forhold.

Elevene hadde tilgang på fem forskjellige konkreter da de sammenliknet: melkekorker, brøksirkler, brøkstaver, klosser og litermål. De hadde i tillegg tilgang på en blyant, en linjal og papir under intervjuet. Dette var for å gi støtte til sammenlikningen, og for å se hvilke konkreter elevene foretrukket å bruke.

Abstract

The concept of fractions is the most complex concept that students encounter in primary school (Behr et al., 1983, p. 91). Therefore, in this study, I have investigated how students compare fractions. Specifically, I will examine which strategies and concrete materials students choose to use in their comparisons. Based on this, I have formulated the following research question:

What strategies and concrete materials do sixth-grade students use when comparing fractions?

To answer this research question, five sixth-grade students answered six different comparison tasks involving fractions. The first task contained two fractions with the same denominator. The second task contained two fractions with the same numerator. Three of the tasks contained fractions with different numerators and denominators. Finally, there was a task with equivalent fractions.

Using task-based interviews, I had the opportunity to interact with the students while they were working. This has contributed to a deeper insight into what students consider important when comparing fractions. The student responses indicated a range of different strategies for comparing fractions of different sizes, including: residual strategy, gap-thinking, reference point, comparing numerator, comparing denominator, visual comparison, and ratio.

The students had access to five different concrete materials when comparing fractions: milk caps, fraction circles, fraction bars, blocks, and measuring cups. In addition, they had access to a pencil, ruler, and paper during the interview. This was to provide support for comparison and to see which concrete materials the students preferred to use.

Innhold

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Lamon (2012) skriver at mange elever gruer seg til å ha matematikk. En av årsaken til dette kan komme av spranget mellom fjerde og femte trinn, hvor matematikken går fra heltall til brøk. Matematikken blir mer abstrakt, og det viser seg at elevene jevnt over presterer dårligere i brøk (Van de Walle et al., 2020, s. 377). I tillegg kan kompleksiteten til brøkbegrepet, som består av fem aspekter; *brøk som del av en helhet, brøk som divisjon, brøk som måling, brøk som operator og brøk som forhold*, føre til vanskeligheter hos elevene (Behr et al., 1983, s. 100; Solem et al., 2017, s. 226-232).

I løpet av min utdanning har jeg fått oppleve å undervise elever i femte trinn om brøk. Dette førte til at jeg fikk øynene opp for kompleksiteten av brøkbegrepet, og hvilke konkreter elevene kunne bruke for å tilnærme seg begrepet. Jeg opplevde også at elevene var engasjerte og motiverte da de bygget brøksirkler eller brettet papir. Da elevene arbeidet med konkretene fikk jeg inntrykk av at det gikk opp et lys for dem. Som lærer følte jeg på en mestringsfølelse fordi elevene hadde det gøy mens de holdt på med brøk.

I læreplanen for matematikk er det dedikert et eget kjerneelement til representasjoner som tar opp hvordan konkreter inngår i matematikk. Der står det at «representasjoner i matematikk er måter å utrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på». Disse representasjonene kan ta ulike former, de kan være konkrete, kontekstuell, visuelle, verbale og symbolske (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Til sammen inneholder læreplanen ti kompetansemål for 5.trinn. Seks av disse tar opp brøkbegrepet.

- utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning
- beskrive brøk som del av en hel, som del av en mengde og som tall på tallinjen og vurdere og navngi størrelsene
- representere brøker på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonene
- formulere og løse problemer fra egen hverdag som har med brøk å gjøre
- diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 8-9).

På bakgrunn av dette mener jeg at som fremtidig lærer vil dra nytte av å ta et dypdykk i brøkbegrepet. For at jeg skal forstå hvordan elevene oppfatter brøk vil jeg i denne studien se nærmere på elevenes tilnærming til brøkbegrepet.

1.2 Forskningsspørsmål

Med denne masteroppgaven ønsker jeg å undersøke hvordan elever på 6.trinn løser forskjellige sammenlikningsoppgaver i brøk. På bakgrunn av dette har jeg utformet følgende forskningsspørsmål:

Hvilke strategier og konkretiseringsmateriell bruker elever i sjette trinn når de sammenlikner brøk?

Ved å svare på dette forskningsspørsmålet ønsker jeg å få innsikt i hva elevene anser som viktig når de skal vurdere hvilken brøk som er størst av to brøker. Jeg vil også få en innsikt i hvilke konkreter elevene finner støtte i når de sammenlikner.

1.3 Avgrensninger

Brøk, strategier og konkreter er tre store og komplekse temaer innen matematikken, noe som har ført til at jeg har gjort noen avgrensninger. Disse avgrensningene er gjort med hensyn til oppgavens omgang. I henhold til temaet brøk har jeg kun tatt for meg relevant teori som vil være med på å svare på oppgaven. Her inngår teori om de ulike aspektene ved brøk, og hvilke matematiske begrep som er knyttet til brøk. I forhold til strategier har jeg valgt å avgrense meg til hvilke strategier teori og forskningslitteratur tidligere har identifisert. Når det gjelder konkreter er det kun sett på hvordan de benytter seg disse mens de sammenlikner.

2.0 Teori

I dette kapittelet skal jeg presentere relevant teori og tidligere forskning som vil hjelpe meg med å svare på forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil begynne kapittelet med hvilket syn på læring oppgaven har. Dette vil jeg gjøre ved plassere oppgaven innenfor en læringsteori og se hva Kilpatrick et al. (2001) legger i matematisk kompetanse. Videre tar jeg for meg brøkbegrepet ved å se på de ulike aspektene ved brøk. Deretter vil jeg se på hvordan Ostad (2008) definerer hva en strategi er, og se hvilke strategier tidligere forskning har identifisert mens elever sammenlikner brøk. Til slutt vil jeg se på teori om konkretiseringsmateriell og hva representasjoner er.

2.1 Syn på læring

Som lærer må en være bevisst på hvordan elevene lærer, og hvordan en kan legge til rette for at læring skal skje. Læring kan skje overalt, og er ikke begrenset til undervisningen. Synet på læring er et mye omdiskutert felt. Dette vil ikke bli diskutert i denne oppgaven, men jeg vil likevel gi en presentasjon av dem. Videre vil jeg i dette delkapittelet kort presentere hvilket syn på læring oppgaven baserer seg på og hva matematisk kompetanse innebærer. Det finnes flere forfattere som gjengir og tolker de ulike læringsteoriene. Jeg vil her bruke Lyngsnes og Rismark (2014) sin tolkning som utgangspunkt for å plassere oppgaven innen en læringsteori.

2.1.1 Kognitiv læringsteori

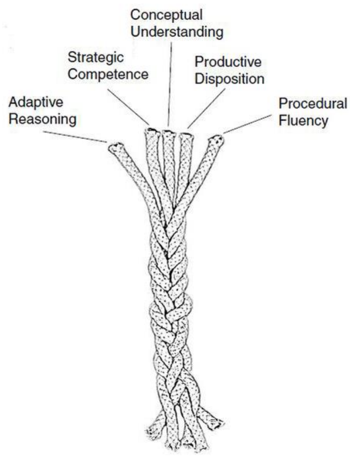
Sentrale teorier om læring viser til ulike syn på hvordan læring forekommer skriver Lyngsnes og Rismark (2014, s. 77) Disse læringsteoriene er med på å utfylle hverandre og fanger opp ulike sider av det å lære. Opp igjennom årene har det kommet nye teorier som bidrar med nye perspektiver og syn på læring. Frem til 1960-tallet var skolen preget av en behaviorisme og observerbar atferd. Som et motstykke til dette vokste kognitiv læringsteori frem hvor læring ble sett på som en individuell, kognitiv prosess. Denne læringsteorien er fortsatt aktuell i skolen, men fokuset er mer rettet rundt den sosiokulturelle læringsteorien. Den beskriver hvordan elevene kan lære sammen med andre i den kulturen hvor læring skjer (Lyngsnes & Rismark, 2014, s. 77)

Denne masteroppgaven har et kognitivt syn på læring og plasserer seg innen den kognitive læringsteorien. Jean Piaget var en viktig bidragsyter i denne læringsteorien og hevdet at alt nytt vi blir utsatt for forstår vi i lys av det vi allerede kan. Det mennesket allerede vet er knyttet til et kognitivt skjema. Disse skjemaene inneholder kognitive strukturer som er de erfaringene og kunnskapen et hvert menneske innehar. For at læring skal skje må to prosesser finne sted. *Assimilasjon* viser til en prosess hvor ny kunnskap blir tolket i lys av kognitive skjemaer. *Akkomodasjon* skjer når en må endre skjemaene slik at de stemmer overens med det nye en erfarer (Lyngsnes & Rismark, 2014, s. 61-65).

2.1.2 Matematisk kompetanse

Kilpatrick et al. (2001) foreslår hvordan elevene kan oppnå matematisk kompetanse på generelt nivå, men også innen brøk. Han skriver også hva læreren kan ta hensyn til i undervisningen. For det første mener han det er verdt å merke seg hvilke erfaringer elevene har med brøkbegrepet fra før av. Dette kan gjelde rettferdighetssansen om at noe skal deles på likt, eller at noe skal måles opp i matlaging. Det andre Kilpatrick et al. (2001) trekker frem er hvordan lærerledet undervisning kan føre til en skeiv utvikling av komponentene i matematisk kompetanse. For å motvirke dette bør det bli viet nok tid slik at elevene kan koble sammen all kunnskapen om brøkbegrepet (Kilpatrick et al., 2001, s. 231-232)

Matematisk kompetanse blir representert som fem sammenflettede tråder. Hver tråd bærer med seg momenter som til sammen utgjør matematisk kompetanse. Nedenfor vil det være en redegjørelse for innholdet i hver tråd, og hvordan disse er sammenflettet. Oversettelsene er hentet fra Nosrati og Wæge (2018).



Figur 1. Sammenflettede tråder av matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

Det første momentet ved matematisk kompetanse omhandler det Kilpatrick et al. (2001) kaller for begrepsmessig forståelse (conceptual understanding). Det vil si at eleven har tilgang på et matematisk objekt gjennom et nettverk av de ulike representasjonene som objektet har med seg. Innen brøkbegrepet handler dette om å ha en forståelse om at brøk kan representeres symbolsk, $\frac{3}{4}$, men også som en størrelse på en tallinje. Elevene viser også en begrepsmessig forståelse dersom den klarer å bedømme hvilke representasjoner som er hensiktsmessige å bruke til ulike formål (Kilpatrick et al., 2001, s. 116-119).

Prosedyrekunnskap (procedural fluency) innebærer evnen til å være effektiv, nøyaktig og fleksibel i matematiske prosedyrer. Det kan for eksempel være å velge en passende strategi for å løse en oppgave. (Kilpatrick et al., 2001, s. 121; Van de Walle et al., 2020, s. 45).

Strategisk tankegang (strategic comepetance) innebærer evnen til å formulere, representere og å løse matematiske problemer. Elevene bør vite om flere strategier slik at de kan avgjøre hvilke strategier som er egnet for problemløsning. Å kunne representere et matematisk objekt kjennetegnes ved at elevene har dannet mentale bilder basert på det essensielle ved objektet. (Kilpatrick et al., 2001, s. 124- 129).

Resonnering (adaptive reasoning) i matematisk kompetanse handler om hvorvidt eleven klarer å forklare det den tenker. Med det innebærer også evnen til å velge en strategi og deretter resonnere rundt gyldigheten til strategien. Resonnering handler også om å kunne argumentere ved å forme et resonnement som baserer seg på noe kjent, og som da danner grunnlaget for videre undersøkelse (Kilpatrick et al., 2001, s. 129-131).

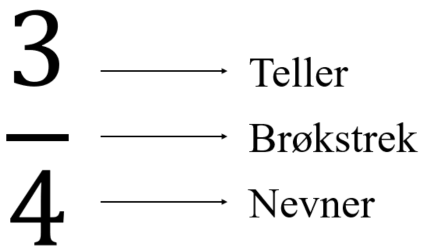
Kjennetegnet på metakognisjon (productive disposition) er å kunne ta et perspektiv hvor en reflekterer over seg selv, sine egne fremgangsmåter og prosesser. Elevene kan ta et steg tilbake og reflektere over hva som er hensikten med det de lærer, samt hva og hvordan de har lært. I matematikk kan metakognisjon bli synlig når elevene er bevisste på hva de ikke kan, men forsøker å finne strategier som kan hjelpe dem med å få nok forståelse for å løse problemet. Selvregulering handler om at eleven kan regulere sine egne læringsprosesser og strategier. (Kilpatrick et al., 2001, s. 131- 133).

2.2 Brøk som begrep og matematiske begreper knyttet til brøk

I følge Van de Walle et al. (2020, s. 378) begynner barn å oppleve brøk gjennom erfaringer av å dele likt. Han mener også at mange elever i femte klasse allerede har møtt brøkbegrepet gjennom uttrykk som halvliter eller en kvart. Til tross for dette, sier Birkeland et al. (2018, s. 204), at det ikke sikkert at elevene har klart for seg hva som ligger i brøkbegrepet. Birkeland et al. (2018) sin definisjon på brøk er som følger «en brøk er en tallstørrelse satt sammen av to hele tall, skrevet over hverandre med en strek mellom, brøkstreken» (Birkeland et al., 2018, s. 204). Lamon (2012, s. 29) skriver at brøk blir brukt på to forskjellige måter. Den ene måten er hvordan vi skriver brøken. Brøk referer til en måte å skrive et tall på, det er to heltall skrevet med en strek imellom seg, $\frac{a}{b}$. Den andre måten omhandler at brøk er en størrelse. Både Lamon (2012) og Birkeland et al. (2018) viser til oppstillingen av brøk. Dermed ønsker jeg i neste delkapittel å beskrive noen matematisk begrep knyttet til brøk.

2.2.1 Teller, nevner og brøkstrek

Oppstillingen av brøk er det Van de Walle et al. (2020, s. 379) kaller for en konvensjon. Med dette mener han at måten vi skriver brøk, altså som et tall over et annet tall med en strek imellom, er slik det alltid har vært. For elevene kan denne fremstillingen by på utfordringer da det er en kompleks fremstilling av én tallstørrelse.



Figur 2. Oppstilling av en brøk

Telleren forteller hvor mange deler vi har av en helhet, og den kan vise til hvor mange av delene som har blitt telt. Nevneren forteller hvilken størrelse det er på delene som har blitt telt (Van de Walle et al., 2020, s. 379). Brøkstreken kan tolkes som et divisjonstegn som kan gjøre brøken om til et desimaltall (Birkeland et al., 2018, s. 205). Desimaltall er spesial tilfeller av brøker. Hver brøk kan skrives som et desimaltall, og et hvert desimaltall kan skrives som en brøk. (Birkeland et al., 2018, s. 229-230)

2.2.2 Ekte og uekte brøker, likeverdige brøker

En *uekte brøk* er en brøk som er mer enn 1, hvor telleren er større enn nevneren (Birkeland et al., 2018, s. 260). Van de Walle et al. (2020, s. 380) skriver derimot at denne terminologien kan gjøre elevene usikre da de kan tolke dette som en falsk brøk. Han foreslår å heller omtale en slik brøk for «brøk som er mer enn 1». Når telleren er mindre enn nevneren har vi en *ekte brøk*. Dette er en størrelse som er mellom 0 og 1 (Birkeland et al., 2018, s. 260)

Likeverdige brøker er brøker som viser til det samme rasjonale tallet. Et rasjonalt tall er tall som kan uttrykkes ved hjelp av en brøk. En brøk kan gi nye likeverdige brøker dersom vi multipliserer eller dividerer telleren og nevneren med samme tall (Birkeland et al., 2018, s. 207; Solem et al., 2017, s. 239). Van de Walle et al. (2020, s. 400) viser til en definisjon av likeverdige brøker som støtter begrepsforståelsen og skriver at to brøker er likeverdige dersom de representerer samme mengden.

2.3 Ulike aspekter ved brøk

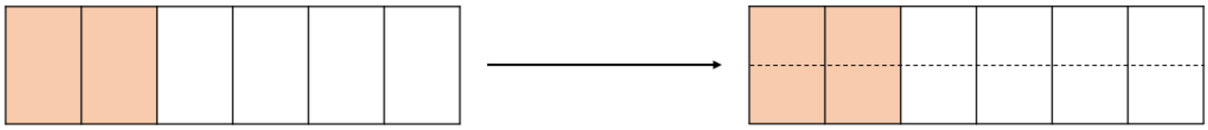
Brøk er et sammensatt begrep som består av flere aspekter, og det er vanlig å snakke om fem av dem. *Brøk som del av en helhet, brøk som divisjon, brøk som måling, brøk som operator* og *brøk som forhold.* Elever som møter de ulike aspektene i skolen, vil utvikle til en dypere forståelse av brøk da de kan se likheter og ulikheter i aspektene. Utenfor skolen møter elevene på de ulike aspektene og skolen kan utnytte de erfaringene elevene allerede har og avspeile dette i brøkundervisningen. Læreren må gjøre seg bevisst på hva de ulike aspektene handler om, og se på hvilke fordeler og utfordringer aspektene fører med seg. Den må også ha kunnskaper om hvordan blant annet konkretiseringsmateriell kan belyse de ulike sidene ved brøk. På en slik måte kan læreren bane vei for elevenes brøkforståelse mener Solem et al. (2017, s. 221- 224).

2.3.1 Brøk som del av en helhet

Dette er ofte barns første møte med brøk, og som regel er det dette aspektet brøkundervisningen omhandler i starten (Kunnskapsdepartementet, 2019; Solem et al., 2017, s. 224). Aspektet forteller om forholdet mellom antall deler, *telleren,* og totalt antall deler som utgjør helheten, *nevneren* (Solem et al., 2017, s. 225). Et eksempel kan være en pizza som skal deles inn i åtte like stykker. Hvert stykke er en åttendel av pizzaen. Dersom du forsyner deg med tre stykker, beskriver brøken forholdet mellom antall stykker og hele pizzaen, altså $\frac{3}{8}$.

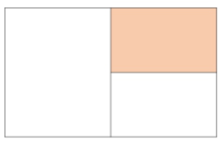
Brøk som del av en helhet gir mange muligheter for konkretisering. Ofte blir aspektet visualisert ved hjelp av arealmodeller. En arealmodell er en figur som utgjør helheten, og arealet av delene bestemmer størrelsen på brøkdelene. For å visualisere situasjonen i eksemplet over kan tre åttendeler av en sirkel være fargelagt. I prinsippet trenger ikke delene i arealmodellen og se like ut, de må bare ha samme areal (Solem et al., 2017, s. 222).

En fordel med å benytte seg av konkreter er at det bidrar til å styrke elevenes brøkforståelse ved at de kan lage mentale bilder skriver Cramer et al. (2008, s. 491). Dette kan være nyttig når brøken blir mer abstrakt. Konkreter kan også være en støtte for elevene når de senere skal arbeid med likeverdige brøker (Solem et al., 2017, s. 226). Da kan konkreter visualisere hva som skjer i likeverdige brøker , og eleven kan se at $\frac{2}{6}$ er det samme som $\frac{4}{12}$.



Figur 3. Viser hvordan konkreter kan visualisere likeverdige brøker

En utfordring med konkreter kan være at elevene ikke viser hensyn til størrelsen av delene. Dette kan føre til at elevene teller for å avgjøre om modellen korresponderer med brøken. I dette tilfellet vil da elevene telle antall fargelagte deler for å finne telleren, og telle antall deler totalt for å finne nevneren.



Figur 4. Arealmodell som blir tolket som en mengdemodell

En elev som mener at $\frac{1}{3}$ av arealmodellen overfor er oransje har foretatt en slik telling. Dette er ikke i samsvar med betingelsene for å kunne korrekt visualisere en brøk med arealmodellen (Solem et al., 2017, s. 222-226). I følge Solem et al. (2017, s. 226) kan det virke som at eleven har tolket modellen som en *mengdemodell*. Dette er en modell hvor mengden delt inn i et sett av objekter og antallet av helheten utgjør brøkdelene (Van de Walle et al., 2020, s. 384).

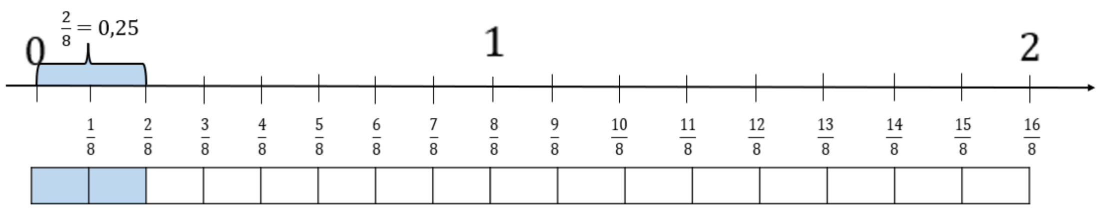
Elevene blir først introdusert for aspektet brøk som del av helhet. En slik introduksjon er preget av arealmodeller og mengdemodeller hvor brøken er representert med fargelagte deler. Videre i oppgaven vil arealmodeller referere til brøksirkler, og mengdemodeller referer til melkekorker. I en arealmodell er det de fargelagte delene som viser til telleren på brøken, og antall deler modellene er delt inn i viser til nevneren. Fordelen med en arealmodell, eller brøksirkler, er at det kan hjelpe elevene i å se den relative størrelsen av en del til en hel. (Cramer et al., 2008, s. 490; Van de Walle et al., 2020, s. 381). Cramer et al. (2008, s. 491) skriver også at brøksirkler kan hjelpe elever med å forstå det inverse forholdet mellom nevneren og størrelsen på delen. Det vil si en forståelse av at delene er mindre dersom nevneren inneholder et stort tall.

Ofte bygger elever brøksirkler ved hjelp av brøkbrikker. I denne byggingen av brøksirkler kan elevene visualisere det inverse forholdet ved å se at jo flere deler sirkelen er delt inn i, jo mindre er hver del (Cramer et al., 2008, s. 491). Likevel velger Ball (1993, s. 163-164) å være kritisk til modeller som allerede er delt inn etter brøkstørrelser. Hun sier at læreren må legge opp til at elevene danner egne modeller, slik at de får laget sine egne representasjoner av brøk. I tillegg mener Sowder (1991, s. 189) at elevene blir modellfattige dersom de kun har sirkel som deres eneste modell på brøk. Petit et al. (2010, s. 1-3) viser til en lærer som kun arbeidet med brøk gjennom sirkelmodeller. Utdraget er hentet fra en klasse som kun sammenliknet brøker ved hjelp av brøksirkler fordi de ikke hadde blitt introdusert for noe annet. Elevene benyttet brøksirklene uoppfordret som en rutine. På denne måten ble ikke de matematiske ideene som brøksirklene bærer med seg undersøkt av elevene. Det kan sies at elevene benyttet brøksirklene som en kalkulator.

2.3.2 Brøk som divisjon

Dette aspektet knytter brøk til divisjon, hvor brøken både er divisjonsstykket og svaret på det. (Hana, 2014, s. 165; Solem et al., 2017, s. 227). Å dele noe på likt er elevene erfarne med fra før av. Som lærer kan en utnytte seg av disse erfaringene og bruke hverdagslige kontekster i arbeid med dette aspektet. Dette kan bidra til en økt forståelse for elevene fordi de kan knytte ny kunnskap sammen med tidligere erfaringer.

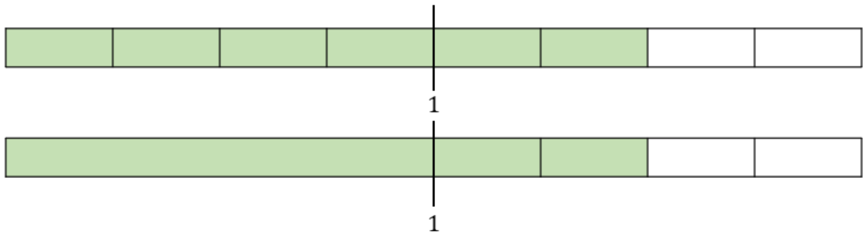
En kvotient viser til svaret på divisjonsstykket. I en situasjon hvor 8 personer skal dele 2 meter med tråd vil hver person få: $2:8 = \frac{2}{8}$ m = 0,25 m. Her ble den totale mengden med tråd delt på antall personer. Brøken opptrer her da både som en kvotient som kan skrives med rasjonale tall $\frac{2}{8}$, eller som desimaltall 0,25 , og som divisjonsstykket hvor 2 blir delt på 8. Denne situasjonen kan illustreres ved hjelp av en tallinje eller en arealmodell.



Figur 5. Viser hvordan aspektet brøk som divisjon kan vises med en tallinje og arealmodell

2.3.3 Brøk som måling

Aspektet brøk som måling handler om å opprette måleenheter som skal brukes for å uttrykk et mål, altså uttrykke en størrelse. (Solem et al., 2017, s. 229-230). Måleenheten *liter* er ofte brukt, både i og utenfor skolen. En liter melk utgjør hele, og til sammen inneholder den fire kartonger med skolemelk, altså $\frac{1}{4}$ liter. Brøk som måling kan komme til uttrykk ved at elevene må avgjøre hvor mange skolemelk en vanlig melkekartong på 1,5 liter inneholder. Til sammen trengs det seks skolemelk for å fylle en vanlig melkekartong: $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$. Her kan elevene se at $\frac{6}{4}$ er et volum som tilsvarer 6 skolemelk som rommer stambrøken $\frac{1}{4}$. Dette kan være med på å konkretisere at brøk er multipler av stambrøk. Det vil si at enhver brøk inneholder en stambrøk som er multiplisert med et heltallsantall: $\frac{1}{4} * 6 = \frac{6}{4}$. Siden brøk er større enn 1 har vi her en uekte brøk, men som også kan skrives som blanda tall med en hel og en ekte brøk (Solem et al., 2017, s. 230). Denne modellen konkretiserer hvordan en uekte brøk, og et blanda tall kan bli representert.

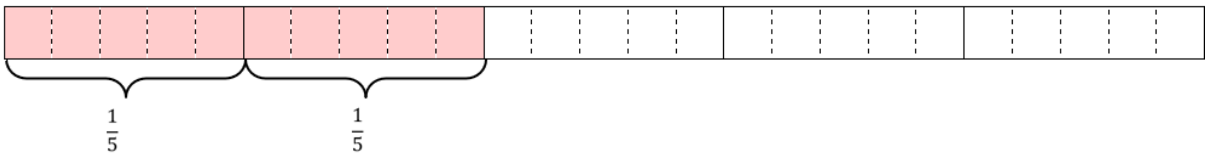


Figur 6 Viser hvordan brøk som måling kan vises med tallinje

En tallinje er ofte anvendt i dette aspektet fordi den konkretiserer antall like deler og avstanden mellom 0 og 1. Dessuten er elevene vant med verktøy som omhandler måling, som linjal, termometer, vekt og litermål. Disse modellene kan hjelpe elevene i å se på brøk som en mengde, noe som er med på å utvikle forståelsen til brøk (Van de Walle et al., 2020, s. 383). Dersom elevene blir introdusert for lengdemodeller når de holder på med hele tall, vil overgangen til å bruke tallinje med brøk bli enklere. En annen fordel med å bruke lengdemodeller er at lineære representasjoner kun foregår i en dimensjon, dette kan hjelpe elevene å sammenlikne brøker av ulik størrelse (Svingen, 2018, s. 5-6).

2.3.4 Brøk som operator

Operator betyr et tall som inngår i et regnestykke. I dette tilfellet handler det om brøk som blir multiplisert med et annet tall. Når brøk opptrer som en operator er målet å finne brøkdelen av *noe*. Dette noe er det tallet brøken skal multipliseres med. (Solem et al., 2017, s. 232). For å finne ut av hvor mange $\frac{2}{5}$ av 25 elever utgjør, kan en arealmodell brukes for å visualisere. $\frac{2}{5}$ av 25 elever. $\frac{1}{5}$ av 25 elever utgjør 5 elever. Dermed er $\frac{2}{5}$ av 25 elever 10 elever.



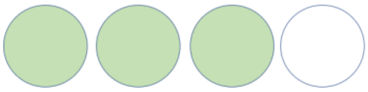
Figur 7. Viser hvordan brøk som operator kan vises ved tallinje

2.3.5 Brøk som forhold

I likeverdige brøker kan elevene møte på ekvivalente forhold. Brøkene $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{6}$ er like fordi forholdet i den ene brøken, 2:3, er ekvivalent med forholdet i den andre brøken, 4:6. At forholdene er ekvivalente betyr at en kan multiplisere teller og nevner i $\frac{2}{3}$ med 3, og få $\frac{4}{6}$. Utover dette er det uvanlig å representere forhold mellom to deler som en brøk, rett og slett fordi det kan bli forvirrende i og med at brøk angir størrelse. Dermed er det mer vanlig å symbolsk representere forhold på denne måten, 2:3 (Solem et al., 2017, s. 288).

2.4 Heltallstenking

Selv om de ulike aspektene av brøk blir undervist om i skolen, viser forskning at elevene kan ende opp med en forståelse av brøk som to hele tall som er skrevet over hverandre. De mangler evnen til å se på brøk som et tall eller som en mengde. For at elevene skal utvikle begreper innen brøk og brøkoperasjoner, mener Siebert og Gaskin (2006) at elevene må få møter med brøk som skiller seg fra helltallstenking. En vanlig representasjon av brøk $\frac{3}{4}$ kan bli vist ved hjelp av fire sirkler, hvor tre av dem er fargelagt.



Figur 8. Representasjon av $\frac{3}{4}$

Dette er en representasjon som støtter en heltallstenking, og brøken $\frac{3}{4}$ er ikke oppfattet som verken et tall eller en mengde. Årsaken til denne heltallstenkning kan også komme av hvordan elevene snakker om brøk. En vanlig måte å snakke om brøk på er å bruke «av», som «3 av 4». Denne frasen viser til at eleven har et bilde i hode når den ser for seg brøken. Det kan være at elevene ser for seg fire gjenstander, også tar den vekk tre av disse fire (Siebert & Gaskin, 2006, s. 397).

Mack (1993) problematiserer at brøk kun blir presentert som del av en helhet, og mener at elever kan danne misoppfatninger når de skal begynne å arbeide med uekte brøker. Hun viser til en elev som forklarte at « $\frac{5}{4}$ *gir ikke mening fordi du kan ikke ha fem av fire*». Dersom undervisningen kun bærer preg av brøk som del av en helhet kan dette føre til en manglende forståelse av brøkbegrepet. Elevene må erfare brøk som en størrelse som kan opptre i ulike settinger (Mack, 1993, s. 91).

Siebert og Gaskin (2006) presenterer i artikkelen *iterasjon* og *oppdeling* som metoder for å hjelpe elevene i å gi mening til brøk som et tall, og som en mengde. Metodene kan sies å være bilder på hvordan elevene kan operere når de sammenlikner, produserer og opererer med brøk. De viser også hvordan elevene kan rettferdiggjøre deres resonnering og argumentasjon når de holder på med brøk, samt gi de en robust utvikling av brøkbegrepet. (Siebert & Gaskin, 2006, s. 394)

Iterasjon betyr å gjenta eller å ta kopier av stambrøken til en brøk for å danne en større mengde, eller en hel. Denne metoden er også med på å gi mening til telleren og nevneren i brøken. Telleren er den som teller, og nevneren er den som forteller hva som blir telt.

2.5 Strategier

Når elevene løser oppgaver i matematikk, benytter de seg av *strategier* i løsningsprosessen (Ostad, 2008, s. 15). Disse strategiene kan kategoriseres basert på hvor elevene henter matematikkunnskaper fra. Ostad (2008) skiller mellom *retrieval*- og *backupstrategier*. «Uttrykkene har vokst frem fra teorier hvor forskerne tenker seg elevenes matematikkunnskaper som et lager av kunnskapsenheter» (Ostad, 2008, s. 16). Retrievalstrategier kjennetegner strategier hvor elevene henter frem kunnskaper fra dette lageret av kunnskapsenheter. Ved slike strategier kan elevene svare at de *bare vet* løsningen på et addisjonsstykke. Backupstrategier omfatter alle strategiene som ikke er retrievalstrategier. Dette er strategier hvor elevene benytter ulike metoder for å komme frem til en løsning. En metode kan være å modellere problemet, eller benytte seg av konkreter (Ostad, 2008, s. 15-18).

2.5.1 Sammenlikning av brøk

En strategi som ofte læres for å sammenlikne brøk er å finne en fellesnevner for to brøker. Dette gjøres ved å multiplisere et tall med både telleren og nevneren i den ene brøken eller begge, slik at nevneren blir lik i begge brøkene som sammenliknes. Lamon (2012, s. 136) skriver at dette er en sammenlikning som bygger på en heltallstenking. Van de Walle et al. (2020, s. 408) stiller seg kritisk til at elevene lærer seg strategier hvor brøkenes relative størrelser blir neglisjert. Han mener elevene mister muligheten til å lære om brøkbegrepet, fordi en slik strategi for sammenlikning av brøk fører til overfladisk kunnskap ved at elevene sorterer basert på en heltallstenking.

2.5.2 Strategier for sammenlikning av brøk

Elevene trenger et uformelt møte med brøkbegrepet for å bygge opp brøkssansen. Et uformelt møte kan hjelpe elevene til å utvikle en intuisjon som hjelper dem med å gjøre passende koblinger, avgjøre størrelse, rekkefølge og ekvivalens, samt å bestemme om svaret de har kommet frem til er rimelig. En slik tankegang er like viktig å utvikle hos elevene som hos lærere. En lærer skal klare å skille mellom strategier som er passende, og de som bygger på feil resonnement (Lamon, 2012, s. 136).

Å sammenlikne brøker med lik nevner bygger på samme tankerekken som heltallstenkning. Elevene kan bli spurt om hvilken av disse brøkene som er størst $\frac{2}{6}$ eller $\frac{5}{6}$. Dette er på lik linje som å spørre: *«hvis alle delene var av samme størrelse, vil du ha 2 av dem eller 5 av dem?»* (Lamon, 2012, s. 136). Her kan elevene foreta en *sammenlikning av tellerne* og tenke at 5 er mer enn 2. I dette tilfellet ville eleven fått flere deler ved å velge brøken med størst teller, altså $\frac{5}{6}$. Elevene foretar da en *sammenlikning av tellerne i brøkene*. De kan se på tellerne, og bruke heltallstenkningen for å bestemme hvilken brøk som er størst. Denne strategien er kun gyldig når elevene skal sammenlikne brøker med lik nevner. (Behr et al., 1984, s. 329; Post et al., 1987, s. 33; Van de Walle et al., 2020, s. 409)

Dersom tellerne er lik i to brøker, vil størrelsen på delene bestemme hvilken som er størst (Lamon, 2012, s. 136). For eksempel kan elevene bli spurt om hvilken brøk som er størst av $\frac{4}{7}$ og $\frac{4}{9}$. Da kan de tenke seg to kaker som er delt inn i 7 deler og 9 deler. Hver del i kaken som er delt i 7 vil være større enn delene til en identisk kake som er delt i 9. Dersom en vil ha mest kake velger en å ta fire stykker fra en kake som er delt i 7 deler. Elevene kan indikere at det er like mange deler til stede, men at det er brøken med størst nevner som har minst størrelse på delene. De foretar da en *sammenlikning av nevnerne* i brøkene (Behr et al., 1984, s. 327; Post et al., 1987, s. 33; Van de Walle et al., 2020, s. 409).

Vanskelighetsgraden øker derimot når elever får i oppgave å sammenlikne brøker som har forskjellige tellere og nevnere. Her skjer sammenlikningen mellom forskjellige antall deler i forskjellige størrelser. La oss si at oppgaven er å sammenlikne brøkene $\frac{3}{5}$ og $\frac{8}{9}$. Her kan elevene sammenlikne brøkene mot ett eller flere *referansepunkt*. For eksempel kan elevene si at $\frac{3}{5}$ er litt mer enn en halv, mens $\frac{8}{9}$ er nesten en hel. Referansepunktet er gjerne en kjent størrelse for eleven, enten en hel eller en halv. (Behr et al., 1984, s. 331; Lamon, 2012, s. 137; Post et al., 1987, s. 33; Van de Walle et al., 2020, s. 409).

Sammenlikning av brøker med ulike tellere og nevnere kan også skje med strategiene *restdel* og *restbrøk.* Restdel-strategien går ut på at elevene sammenlikner hvor *mange deler* som mangler for å bli en hel, noe som er knyttet til en heltallstenking av brøk. De kan si at $\frac{7}{8}$ og $\frac{3}{4}$ er like store fordi begge mangler én for å bli en hel. Det er mindre sjans for at sammenlikningen blir riktig med denne strategien. Med restbrøk-strategien sammenlikner eleven hvor *mye* som mangler for å få en hel. Eleven vil da begrunne at $\frac{7}{8}$ er større enn $\frac{3}{4}$ fordi det er forskjellig størrelse på det som mangler for å bli en hel. $\frac{1}{8}$ utgjør en mindre del enn $\frac{1}{4}$, dermed er $\frac{7}{8}$ størst. (Pearn & Stephens, 2004, s. 434; Post et al., 1987, s. 33). Post et al. (1987) identifiserte disse strategiene etter at elevene hadde arbeidet med ulike konkreter for brøk, noe de antok kom av at elevene hadde dannet seg mentale bilder av brøkene.

2.6 Konkretiseringsmateriell

Konkretiseringsmateriell bærer ikke med seg de matematiske ideene. Elever trenger noen ganger konkreter for å skape mening, men de må også reflektere over deres håndtering av konkreter for at det skal gi mening. Konkreter er fysiske objekter som elevene kan ta tak i med hendene. Konkretiseringsmateriell kan også være med på å synliggjøre et matematisk objekt, og det kan hjelpe elevene i å se matematiske sammenhenger (Van de Walle et al., 2020, s. 45).

Ulike konkreter kan være nyttige i for å løse ulike problemer, hvor de kan bli brukt for å modellere problemene. Disse konkretene kan også være nyttige for å modellere brøk som del av en helhet, og de kan være en støtte i utviklingen av brøkkonsepter. Papirbretting er et konkretiseringsmateriell som kan støtte elevene i forståelsen av del av en helhet, eller likeverdige brøker, men kan virke misledende dersom det skal undervises om addisjon av brøk. Et konkretiseringsmateriell som er meningsfylt for en elev i en situasjon, er nødvendigvis ikke like meningsfylt for en annen elev i samme situasjon (Behr et al., 1983, s. 11-12). Som lærere må målet være å introdusere de ulike konkretene, slik at elevene kan finne ut av hvilke konkreter de vil benytte seg av for å løse problemer. Ved å benytte seg av konkreter kan en få tilgang til matematiske objekter.

2.7 Representasjoner

Den eneste måten vi kan få tilgang på de matematiske objektene er gjennom representasjoner, og elevene blir eksponert for flere ulike representasjoner helt fra barnehagen. Konkreter er kun en av måtene en kan representere et matematiske objekt. En dypere forståelse av brøkbegrepet kan, som nevnt, forekomme dersom elevene får erfaringer med de ulike aspektene av brøk (Solem et al., 2017, s. 224). Cramer et al. (2008, s. 490) skriver at representasjoner spiller en avgjørende rolle for elevens brøkforståelse. NCTM sitert i Cramer et al. (2008) mener at representasjoner er essensielle elementer for elevenes forståelse av matematiske objekter, da de kan bli brukt for å kommunisere matematiske tilnærminger, argumenter og forståelser, både til en selv og andre.

En mengdemodell eller en arealmodell kan brukes for å vise til aspektet brøk som del av en helhet, fordi dette er mengder som kan deles inn i like deler. På en annen side kan tallinjer viser til andre aspekter som brøk som måling. For eksempel er det lite hensiktsmessig å måle hvor mye en elev har gått av en strekning ved hjelp av brøksirkler. Slike vurderinger viser til en dypere forståelse i matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 116-119).

2.7.1 Betydning av representasjoner i matematikk

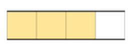
Matematiske objekter er ikke observerbare. I motsetning til andre vitenskapelige fenomener som kjemi og fysikk, er det ikke mulig å få tilgang på dem gjennom instrumenter som mikroskop eller kikkert (Duval, 2006, s. 107). Den eneste måten vi kan få tilgang på objektene er gjennom representasjoner. Dette kan være med på å skape det Duval (2006) kaller for det kognitive paradokset, som oppstår når elevene kommuniserer og lærer matematikk. Dette paradokset handler om at elevene møter de matematiske objektene gjennom representasjonene, men det matematiske objektet er ikke representasjonen (Duval, 2006, s. 107). Dette viser viktigheten av å arbeide med flere ulike representasjoner, fordi andre representasjoner kan være med på å belyse nye egenskaper som tidligere var skjult. (Hana, 2014, s. 141-142).

Teoretikeren Jerome Bruner og hans teori om representasjoner har hatt en innvirkning på hvordan matematiske objekter kan bli representert. Lesh (1981, s. 245-246) har laget en modell som er inspirert av teorien til Bruner. Modellen avdekker fem ulike måter å representere et matematisk objekt på; visuelt, symbolsk, verbalt, med konkreter eller i en kontekst. Oppgavene som ble gitt til elevene i denne studien viste en symbolsk representasjon av brøkene.

Figur 9. Lesh (1981, s. 245-246) sin modell som viser fem ulike måter å representere et matematisk objekt

Oversettelser mellom disse systemene kan gjøre matematikk mer meningsfullt for elevene mener Lesh (1981). Duval (2006) kaller disse oversettelsene for *bearbeiding* og *konvertering*. Bearbeiding er noe som skjer innenfor samme representasjon. For eksempel innenfor symbolsk representasjon kan det være at en skriver ned ut et addisjonsstykke og regner ut. Konvertering viser til en prosess hvor en skifter fra en representasjon til en annen. For eksempel kan elevene omdanne en tekstoppgave til noe visuelt ved å tegne og videre representere problemet symbolsk i selve regneoperasjonen (Duval, 2006, s. 111; Svingen, 2018, s. 4).

Tabell 1. Viser hvordan $\frac{3}{4}$ kan bli representert ifølge Lesh (1981, s. 245-246)

Symbolsk	Verbalt	Visuelle fremstillinger	Kontekst	Konkreter
$\frac{3}{4}$	Tre firedeler		Fire elever deler tre boller likt	

3.0 Metode

I denne studien har jeg undersøkt hvordan elever på 6.trinn sammenlikner brøker. Dette var brøker som hadde like tellere, like nevner, ulike tellere og nevnere. I tillegg sammenliknet de likeverdige brøker. Jeg har sett på hvilke strategier og konkretiseringsmateriell de har bruker under sammenlikningen av disse brøkene. I dette kapittelet vil jeg presentere metoden jeg har benyttet meg av for å svare på forskningsspørsmålet mitt.

3.1 Forskningsdesign

Denne studien har en kvalitativ tilnærming fordi forskningen min går i dybde på datasettet. Spørsmålsformen «hvilke» i forskningsspørsmålet viser til et ønske om å undersøke fenomener. I følge Postholm og Jacobsen (2011, s. 41-42) er dette et kjennetegn på en kvalitativ forskning fordi kunnskap ikke er noe objektivt som kan måles, men noe som bringer med seg flere nyanser som må tas til etterretning. I kvantitativ forskning derimot formidles dataene som tall og kan uttale seg om noe generelt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 89). Istedenfor å se på det kvalitative og kvantitative som motpoler, mener Postholm og Jacobsen (2011) at de heller bør bli sett på som komplementære. På bakgrunn av dette vil resultatene bli presentert med tall, både for å gi en oversikt over hva analysen avdekket.

Forskningsdesignet på min studie er casestudie. Thagaard (2013, s. 56) beskriver casestudie som et design som skal gi rikholdig informasjon om få enheter. Det er fordeler og ulemper med et slikt forskningsdesign. Det vil være vanskelig å kunne generalisere ut ifra resultatene fra studien, fordi utvalget er for lite til å si noe om helheten. På en annen side gir det en virkelighetsnær og detaljert innsikt i det som blir forsket på. Fra et undervisningsperspektiv kan en casestudie gi mer innsikt i hvordan elevene tilnærmer seg ulike matematiske objekter (Wellington, 2000, s. 97).

3.2 Utvalg

Jeg vil her legge frem hvilke hensyn og valg som er tatt i henhold til utvalget av deltakere, oppgavene og konkreter. Hensynene er tatt i lys av å få en virkelighetsnær og dyp innsikt i elevenes syn på brøkbegrepet.

3.2.1 Deltakere

I slutten av oktober i 2022 fikk jeg tilbud om å gjennomføre studien min på en tidligere praksisskole. Siden jeg skulle forske på brøkbegrepet ble forespørselen om å delta i studien sendt ut til elever som var kjent med dette fra før av. På denne praksisskolen hadde jeg kjennskap til elevene i 6.trinn, så jeg bestemte meg for å forske på disse elevene. Totalt ble det levert ut samtykkeskjema til 43 elever (se vedlegg 2). Av disse ga 8 elever samtykke om å delta. Med hensyn til oppgavens omfang og bearbeidingsprosessen valgte jeg å forske på 5 elever. Utvalget ble gjort ved en tilfeldig trekning av meg, med et ønske om en virkelighetsnær representasjon av en gruppe elever på 6.trinn. Jeg valgte dermed å se bort ifra elevenes nivå i matematikk. Likevel påpekte matematikklæreren at det kan ha vært en sammenheng mellom nivå og de som leverte samtykkeskjema. Dette kan også komme til syne ved at kun 8 av 43 elever ønsket å delta i studien.

Jeg hadde ikke mulighet til å reise til skolen for å forklare til elevene hva studien gikk ut på. Det var dermed læreren som forklarte studien for elevene, og leverte ut samtykkeskjemaene. Å ikke ha møtt elevene på forhånd kan også ha påvirket antallet som leverte tilbake samtykkeskjema.

Elevene er blitt gitt pseudonymer i alfabetisk rekkefølge for å vise til den rekkefølgen de ble intervjuet. De fem elevene vil heretter bli kalt for Pia, Are, Bea, Carin og Eli. Årsaken til navnet Pia er for å vise at hun deltok i piloteringen av intervjuet.

3.2.2 Oppgaver

Elevene fikk utdelt seks forskjellige sammenlikningsoppgaver etter tur. Hver oppgave inneholdt to brøker av ulik størrelse. Deres oppgave var å fortelle hvilken de mente var størst, og hvorfor. Oppgavene er inspirert av Matematikksenteret (u.å)g Goldin (1997). Matematikksenteret (u.å) viser til hvilke misoppfatninger som er knyttet til brøk. Inspirasjon til oppgavene er hentet herifra for at oppgavene ikke skal være for enkle for elevene, men gi de en utfordring. Rekkefølgen av oppgavene er lagt på slik at vanskelighetsgraden øker for hver oppgave. Dette er for at elevene skal få selvtillit og økt motivasjon for å fortsette videre. (Goldin, 1997, s. 44). Mer begrunnelse for valg av oppgaver er gitt i tabellen nedenfor.

Tabell 2 Viser oppgavene med begrunnelse

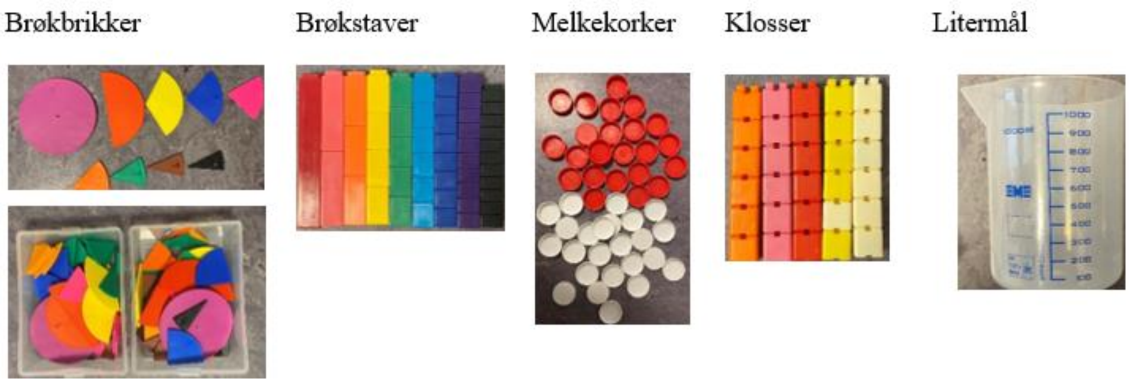
Oppgave 1	
Hvem er størst? $\frac{2}{6}$ eller $\frac{4}{6}$	Oppgave 1 viser to brøker med lik nevner. Som Lamon (2012, s. 136) nevner bygger en slik sammenlikning på en helltallstenking, noe elevene er godt kjent med fra før av. Brøkene er også plassert i stigende rekkefølge for å øke sannsynligheten for at elevene mestrer sammenlikning. Nevneren er valgt med hensyn til deleligheten av tallet.
Oppgave 2	
Hvem er størst? $\frac{4}{8}$ eller $\frac{4}{5}$	Oppgave 2 viser to brøker hvor tellerne er like. Dermed øker vanskelighetsgraden, fordi elevene må ha kunnskap om forholdet mellom teller og nevner. De kan ikke lenger bruke helltallstenkningen som en gyldig begrunnelse for hvilken som er størst. For at brøkene skulle bære med seg noe kjent for elevene er en halv representert med $\frac{4}{8}$. Brøken $\frac{4}{5}$ er valgt fordi den nesten er en hel.
Oppgave 3	
Hvem er størst? $\frac{2}{3}$ eller $\frac{3}{6}$	Oppgave 3 viser to brøker med ulik nevner og teller. Selv om vanskelighetsgraden øker, valgte jeg å benytte meg av størrelser som er kjent for elevene. Brøken $\frac{2}{3}$ mangler $\frac{1}{3}$ for å bli en hel. Brøken $\frac{3}{6}$ er bare en halv. Denne oppgaven er nokså lik oppgave 2, men her er verken tellerne eller nevneren i brøkene like.

<table>
<tr><th colspan="2">Oppgave 4</th></tr>
<tr><td>Hvem er størst?
$\frac{3}{4}$ eller $\frac{5}{6}$</td><td>Oppgave 4 inneholder to brøker som hver mangler en stambrøk for å bli en hel. Nevnerne i brøkene er her også valgt med hensyn til deleligheten av tallene. Brøken $\frac{3}{4}$ mangler $\frac{1}{4}$ for å bli en hel, og $\frac{5}{6}$ mangler $\frac{1}{6}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Oppgave 5</th></tr>
<tr><td>Hvem er størst?
$\frac{6}{8}$ eller $\frac{11}{12}$</td><td>Oppgave 5 inneholder to brøker hvor den ene mangler to stambrøk for å bli hel, og den andre mangler en stambrøk.

Selv om differansen mellom teller og nevner i brøken $\frac{6}{8}$ er to, er fortsatt $\frac{11}{12}$ størst selv om differansen her er en.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Oppgave 6</th></tr>
<tr><td>Hvem er størst?
$\frac{2}{3}$ eller $\frac{4}{6}$</td><td>Oppgave 6 inneholder to likeverdige brøker. Valget om å bruke likeverdige brøker ble gjort med en baktanke om å kontrollere om elevene gjorde en vurdering av strategivalget deres.</td></tr>
</table>

3.2.3 Konkretiseringsmateriell

For å gi støtte til elevene under sammenlikningen hadde de tilgang på konkreter for å sammenlikne brøkene. Valget av konkreter ble gjort på bakgrunn av hva elevene var kjent med fra før av. Melkekorker, brøkbrikker, og litermål er noe jeg vet at elevene hadde møtt i undervisningen. Brøkstaver og klosser ble inkludert i konkretene fordi dette kan være noe elevene også har erfaring med. I tillegg hadde de tilgang på pen, papir og linjal.



Figur 10 Konkretene elevene hadde tilgang på under intervjuet

3.3 Metode for datainnsamling

For å samle inn data har jeg intervjuet elever mens de sammenliknet brøk. Intervjuet foregikk på et grupperom, med kun meg og elevene til stede. Jeg stilte spørsmål til det elevene både gjorde og sa, under og etter oppgaveløsningene. Elevene ble dermed intervjuet imens de sammenliknet brøkene. Denne intervju formen er det vi kan kalle for et *oppgavebasert intervju*. Maher og Sigley (2020, s. 821) beskriver denne typen intervju for et klinisk intervju, hvor intervjuer har en interaksjon med elevene mens den holder på med matematikkoppgaver. Fordelen med et slikt intervju er at elevene får mulighet til å utdype det de sa, noe som kan gi meg et innblikk i hvordan de tenkte.

3.3.1 Forberedelser til datainnsamling

I forkant av intervjuet hadde jeg laget noen spørsmål som jeg tenkte å stille elevene underveis i oppgaveløsningen (se vedlegg 3). Dette var generelle spørsmål som «Hva tenker du når du sier at den er størst?» og «Kan du løse oppgaven på en annen måte?». Andre spørsmål kom mer spontant avhengig av hva eleven sa. Formålet med spørsmålene var å få et innblikk inn i elevenes tankegang.

Oppgavene var skrevet ut og laminert på forhånd slik at alle oppgavene fremsto likt for alle elevene. For at elevene skulle ha lik forutsetning for å bruke konkreter var disse tilgjengelig under hele intervjuet, og lå foran elevene på bordet. Videokamera var plassert slik at eleven var i fokus. Diktafonen var plassert nær eleven for å fange opp lyden bedre.

3.3.2 Pilotintervju

Før jeg gikk i gang med datainnsamlingen valgte jeg å ha et pilotintervju en uke før de resterende intervjuene. Det ble utført for å teste kvaliteten på oppgavene, men også for å se hvordan jeg tok på meg rollen som forsker. Dette gjaldt både hvordan jeg kunne få elevene til å føle seg trygge, men også hvordan jeg kunne stille spørsmål slik at elevene fikk fortalt meg hva de tenkte mens de holdt på med sammenlikningen. Det tekniske, som tid og oppsett, ble også testet. Et pilotintervju er ifølge Cohen et al. (2011, s. 118) et av elementene som inngår i et forskningsprosjekt.

Piloteringen ble gjennomført på den første eleven som ble trukket ut til å være med i studien. Det ble avdekket at intervjuet var noe forhastet. Dermed ble det gjort små endringer etter piloten. Introduksjonen til intervjuet skulle gjøres mer tydelig, og det skulle vies mer tid til denne delen. En introduksjon kan bidra til en mer komfortabel atmosfære i intervjuet, og det kan få elevene til å føle seg trygge. Dette er i samsvar med det Cohen et al. (2011, s. 433) legger vekt på når man intervjuer barn. Sjansen for at elevene snakker om hva de tenker og gjør øker dersom de føler seg trygge.

Til tross for endringene som måtte gjøres, ble pilotintervjuet likevel en del av datamaterialet mitt. Denne beslutningen ble gjort på bakgrunn av at endringene var minimale, og det var ingen tydelige forskjeller mellom pilotintervjuet og de øvrige intervjuene. Innholdet i piloteringen kunne også brukes til å besvare forskningsspørsmålet.

3.3.3 Gjennomføring av intervjuene

Alle intervjuene foregikk på et av skolens grupperom, og varte i omtrent 20 minuttet hver. Hvert intervju besto av to deler. Den første delen var en introduksjon hvor elevene fikk muligheten til å friske opp i brøkkunnskapene sine. De skulle også ha en mulighet til å bli komfortable i rollen som deltaker i intervjuet.

Elevene ble i den første delen spurt om hva de tenkte på når jeg sa «en halv», og deretter «en tredjedel». Videre presenterte jeg et ark med tre brøker på; $\frac{3}{4}\frac{3}{6}\frac{4}{10}$. De fikk i oppgave å fortelle meg hvilke brøker de så på arket, og om de kunne vise en av brøkene ved hjelp av konkretene som lå foran dem. Etter dette skulle de forklare til meg hva en brøk er, og de fikk i oppgave å vise $\frac{3}{4}$ ved hjelp av brøksirkler. De fikk også i oppgave å plassere en brøk på en tallinje, og vise med en brøk hvor mange av en mengde melkekorker som var røde. Til slutt i introduksjonen skulle de fortelle hvordan de syntes det var å snakke høyt om det de tenkte.

I den andre delen av intervjuet skulle elevene løse sammenlikningsoppgavene som er presentert i delkapittelet 3.2.2. Elevene ble presentert for en og en oppgave, og fikk god betenkningstid på hver oppgave. Jeg telte bevisst til ti inni meg for at elevene ikke skulle føle seg presset til å svare. De hadde fortsatt tilgang på konkreter. Noen elever ble spurt om å benytte seg av disse for å vise hva de tenkte, eller for å vise andre måter å sammenlikne på. Hvordan dette kan ha påvirket studien min vil jeg diskutere videre i kapittel 3.5 som tar for seg studiens kvalitet. Etter hvert som elevene sammenliknet stilte jeg spørsmål som hjalp meg med å forstå hva de mente. Dette kunne være oppklaringsspørsmål slik at jeg kunne sette meg inn i deres tanker, eller en repetisjon av det de sa for å være sikker på at jeg forsto de rett.

Intervjuet ble avsluttet med samtale om hvordan de syntes det var å bli intervjuet, og om de følte at jeg hadde forstått det som ble sagt. Alle elevene ga uttrykk for at de syntes det var gøy, men også litt utfordrende fordi de ikke hadde hatt om brøk på lenge.

3.3.4 Video- og lydopptak

Ved å benytte meg av video- og lydopptak kunne jeg være mer til stede under intervjuet. Jeg kunne være en aktiv lytter ved å stille spørsmål og være anerkjennende til det elevene svarte. Bevisstheten om samtaletrekk og arbeidet om å få ut mest mulig av eleven ved hjelp av spørsmål ble også enklere med video- og lydopptak. En av årsakene til at jeg valgte å benytte meg av både video- og lydopptak var for å fange opp både de verbale og nonverbale uttrykkene. Jeg kunne i ettertid se hva de gjorde, hvor de pekte, hva de sa og hvilke konkreter de eventuelt benyttet seg av. Dette var også til hjelp når jeg transkriberte og analyserte datamaterialet mitt (Bryman, 2012, s. 482-484; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 227).

Det å bruke videokamera i en kvalitativ studie kan medføre forvirring og uro hos elever (Bryman, 2012, s. 482). For å unngå dette fortalte jeg hver elev at det kom til å være en diktafon og et videokamera på grupperommet. Da vi kom til grupperommet informerte jeg eleven når apparatene var på, også startet jeg intervjuet.

3.4 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Kjennskap til datamateriale er essensielt for å kunne klare å trekke ut kjernen av alt materiale som er blitt samlet inn. Ved å transkribere de oppgavebaserte intervjuene har jeg gjort meg kjent med både det elevene sa og gjorde. Analyse av datamaterialet har bidratt ved å gi materialet mening, og det har gitt meg muligheten til å se et mønster i elevbesvarelsene.

3.4.1 Analyseprosessen

Første steg i analyseprosessen var å transkribere intervjuene. Dette ble gjort for å skaffe en oversikt over materiale, og for å knytte kjennskap til det som hadde foregått i intervjuene. Transkripsjon av intervjuene ble gjort i henhold til en transkripsjonsnøkkel.

Tabell 3 Transkripsjonsnøkkel

Symbol	Betydning
.	Setning slutt
…	Pause opptil 3 sekunder
tekst	Handling
(Pause n s)	Pause n sekunder
↓	Fallende tonehøyde
↑	Stigende tonehøyde
Bokstav-	Drar på bokstaven. For eksempel e-
!-	Bråstopp eller avbrudd i ytring
<tekst>	Tale som leveres saktere enn vanlig for taleren
>tekst<	Tale som leveres raskere enn vanlig for taleren
°tekst°	Hvisking, redusert lydnivå, eller stille tale
<u>understreking</u>	Taleren legger vekt på eller stresser tale
?	Spørrende

Siden jeg har oppgavebasert intervju som metode er transkripsjon nødvendig for å vise hva elevene gjorde mens de snakket. I kapittel 4 blir noen sekvenser fra transkripsjonen presentert. Tabellen over vil være til hjelp for å forstå hva sekvensene viser.

Analysen min kan kategoriseres som en tematisk analyse med en abduktiv tilnærming. Med en tematisk analyse har jeg gjennomført tre steg for å gi mening til det jeg har samlet inn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 161-162). Etter å ha transkribert intervjuene foretok jeg meg av en helhetlig lesetilnærming hvor jeg leste datamaterialet i sin helhet. På denne måten kunne jeg se hva datasettet kunne fortelle meg. I forkant hadde jeg funnet teori som skulle hjelpe meg med å gi mening til hvilke konkreter elevene brukt. Etter å ha knyttet kjennskap til datasettet endret jeg forskningsspørsmålet mitt for å kunne se hvilke strategier elevene benyttet seg av i tillegg til konkreter. Dette førte til at jeg måtte lese teori tilknyttet strategier. En slik tilnærming er det vi kan kalle for en abduktiv tilnærming hvor funn leder til nye forundringer som igjen leder til nye spørsmål som må undersøkes (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103). Andre steg i den tematiske analysen er å trekke ut materiale som kan gi svar på forskningen. Her valgte jeg ut sekvenser fra oppgaveløsningene hvor elevene sammenliknet. Deretter rettet jeg oppmerksomheten mot disse sekvensene for å kunne kode hvilke strategier elevene benyttet seg av.

3.4.2 Analyseverktøyet

Før datainnsamlingen var jeg klar over hvilke konkreter elevene var kjent med fra før av. Jeg hadde dermed en plan om å se etter hvilke av disse de valgte å bruke i sammenlikningen. Etter å ha blitt kjent med datasettet mitt oppdaget jeg likheter i hvordan elevene resonnerer seg frem til hvilken brøk som er størst. På bakgrunn av dette valgte jeg også å undersøke hvilke observerbare strategier elevene brukte under sammenlikningen.

I teori fra Van de Walle et al. (2020) og Lamon (2012), og forskningslitteratur av Behr et al. (1984), Clarke og Roche (2009) og Post et al. (1987), er det identifisert en rekke sammenlikningsstrategier. Disse strategiene dannet grunnlaget for mitt analyseverktøy. En analyse av elevbesvarelsene vil identifisere hvilke observerbare strategier elevene benyttet seg av under sammenlikningen. Nedenfor er det er beskrivelse av hver strategi som er med i analyseverktøyet. Det er så henvist til hva teorien og tidligere forskning har navngitt strategien. Strategiene har jeg selv oversatt til norsk.

Tabell 4 Gir en oversikt over navn på strategi (min oversettelse), en beskrivelse av strategien, og hva strategien heter i teori og forskningslitteratur

Strategi med min oversettelse	**Beskrivelse**	**Navnet på strategien i teori og tidligere forskning**
Sammenlikne teller	Eleven referer til telleren i brøkene for å sammenlikne. Strategien kan minne om andre strategier, men i denne strategien	*Same-size denominators* i (Van de Walle et al., 2020, s. 409)

	referer elevene til at de kan se på tallet i telleren dersom tallet i neveren er lik. De viser at de er klar over forholdet mellom teller og nevner, og hvilke egenskaper de har. $\frac{4}{6}$ er større enn $\frac{2}{6}$ fordi du får flere deler i $\frac{4}{6}$ og størrelsen på delene er lik fordi telleren er lik i begge brøkene.	*Same-size parts* i (Lamon, 2012, s. 138) *Numerator and denominator* i (Behr et al., 1984, s. 328) *Comparing the nuber of pieces* (Post et al., 1987, s. 33)
Sammenlikne teller	Eleven referer til nevneren i brøkene for å avgjøre hvilken brøk som er størst. $\frac{4}{5}$ er større enn $\frac{4}{8}$ fordi størrelsen på delene er større i den brøken.	*Same numerators* (Van de Walle et al., 2020, s. 409) *Same number of parts* (Lamon, 2012, s. 138) *Numerator and denominator* og *Denominator* (Behr et al., 1984, s. 327-328) *Comparing the size of pieces* (Post et al., 1987, s. 33)
Sammenlikne mot et referansepunkt	Eleven sammenlikner brøkene opp mot et eller flere referansepunkt. Det kan være opp mot et tredjetall, som en hel eller en halv. $\frac{4}{5}$ er større enn $\frac{4}{8}$ fordi $\frac{4}{5}$ er nærmere å bli en hel, mens $\frac{4}{8}$ bare er en halv.	*More than/less than benchmark* (Van de Walle et al., 2020, s. 409) *Compare to a benchmark* (Lamon, 2012, s. 138) *Reference point* (Behr et al., 1984, s. 328-331) *The transitive strategy* (Post et al., 1987, s. 34)
Restbrøk	Elevene sammenlikner brøkene mot en hel, men til forskjell fra referansepunkt blir	*Closeness to a benchmark* (Van de Walle et al., 2020, s. 409)

	størrelsen på de resterende brøkdelene sammenliknet. $\frac{5}{6}$ er større enn $\frac{3}{4}$ fordi den mangler $\frac{1}{5}$ for å bli en hel. $\frac{3}{4}$ mangler $\frac{1}{4}$ for å bli en hel, og denne brøkdelen er større enn $\frac{1}{5}$.	*The residual strategy* (Post et al., 1987, s. 33)
Restdel	Elevene sammenlikner brøkene mot en hel, men til forskjell fra referansepunkt og restbrøk referer denne strategien til hvor mange deler/biter som mangler for å bli en hel. Dette kan skyldes en heltallstenking hvor telleren og nevneren ikke blir sett i forhold til hverandre. $\frac{3}{4}$ og $\frac{5}{6}$ er like, fordi begge mangler 1 for å bli en hel.	*Closeness to a benchmark* (Van de Walle et al., 2020, s. 409) *Gap thinking* (Pearn & Stephens, 2004, s. 434)
Visuell sammenlikning	Elevene sammenlikner ved å se hvilken av brøkene som er størst. Denne strategien opptrer sammen med konkreter som brøksirkler, hvor elevene begrunner at de *ser* at den ene er større enn den andre,	
Forhold (gjelder kun når elevene sammenlikner likeverdige brøker)	Elevene begrunner at to brøker er like ved å se at de har likt forhold. $\frac{3}{4}$ er like stor som $\frac{6}{8}$ fordi telleren og nevneren i den ene brøken er halvparten eller dobbel så stor som telleren og nevneren i den andre brøken.	

Jeg valgte å lage koder som viste til de ulike strategiene. Disse kodene ville hjelpe meg med å identifisere hvilke strategier elevene benytter seg av, og hvilke konkreter som er blir tatt i bruk. Jeg har unnlat å ta med koder for brøkstaver, klosser og litermål da disse ikke ble benyttet i studien. I analysen var det utfordrende å skille mellom strategiene restdel og restbrøk. Dermed er tilfellene hvor elevene har referert til en fysisk brøkbrikke blitt kodet som restbrøk, fordi den forteller noe som størrelsen. Har eleven kun referert til antall deler eller biter som mangler, uten å henvende seg til brøkbrikken, er det kodet som restdel.

Tabell 5 En oversikt over kodene som ble brukt for å kode strategier og konkreter i analysen

Strategier (uten representasjoner)	**Koder**
Strategi som sammenlikner <u>tellerne</u> i brøkene	T
Strategi som sammenlikner <u>nevneren</u> i brøkene	N
Strategi som sammenlikner med et <u>referansepunkt</u>	R
Strategi som sammenlikner hvor stor <u>restbrøken</u> er for å få en hel	RB
Strategi som sammenlikner hvor mange <u>restdeler</u> som mangler å få en hel	RD
Visuell sammenlikning	V
Ser på forholdet mellom brøkene	F
Konkreter	
Brøksirkler 1. Sammen med **strategi**	BS 1. BS – **T,N, R, RB, RD, V, F**
Melkekorker 1. Sammen med **strategi**	MK 1. MK - **T, N, R, RB, RD, V, F**

3.5 Studiens kvalitet

Som forsker er jeg nødt til å ta stilling til kravene om validitet og reliabilitet. Validitet handler blant annet om hvorvidt det er finnes noen begrensninger til forskningen. Reliabilitet tar for seg hvordan jeg som forsker kan ha påvirket resultatene som foreligger (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222). En vurdering av forskningens validitet kan gi svar på om det er en sammenheng mellom det som forskes på og det som forskningen gir svar på (Bryman, 2012, s. 47; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223; Thagaard, 2013, s. 204).

3.5.1 Validitet

Validitet kan deles inn i to kategorier. Ytre validitet handler om i hvilken grad resultatene fra forskningen kan overføres til en annen kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223). Min forskning baserer seg på fem elevers arbeid med brøkbegrepet. Disse fem elevene ble plukket ut basert på hvem som ville være med på studien. For å styrke den ytre validiteten og gjøre den virkelighetsnær ble gjort en tilfeldig trekning av hvilke elever som skulle være med. Som nevnt tidligere kan det har vært en sammenheng mellom nivå og dem som ønsket å være med. Dermed har jeg ingen mulighet til å si at resultatene som foreligger i denne studien gjelder for alle sjetteklassinger i Norge. Jeg kan dermed i liten grad generalisere de funnen som forekom. Likevel kan andre forskere benytte seg av min forskningsmetode til å forske videre på flere elever i sjette trinn.

Den indre validiteten handler om det en har kommet frem til er gyldig for den virkeligheten vi har studert. Her har jeg tatt hensyn til hvilke oppgaver jeg valgte å gi til elevene. En styrke i den indre validiteten er at elevene fikk brøker som de var kjent med fra før av. Under intervjuet hadde elevene tilgang på ulike konkreter som de kunne benytte seg av hvis de ville. Den indre validiteten kan her være svekket da disse konkretene kan ha lagt føringer om at de må bruke dem. I tillegg kan introduksjonen og spørsmålene jeg stilte være ledende slik at elevene benyttet seg av konkreter uten at de hadde behov for det under sammenlikningen av brøkene.

3.5.2 Reliabilitet

Jeg hadde kjennskap til elevene gjennom en tidligere praksisperiode. Da jeg hadde disse elevene i praksis, underviste jeg dem i brøk. Dette kan påvirke reliabiliteten da relasjonen mellom deltakerne og meg kan ha innvirkning på resultater, og fortone seg annerledes mellom en annen forsker og elevene. Reliabilitet handler om i hvilken grad resultatene kan reproduseres av andre forskere, og hvor pålitelig forskningen er (Bryman, 2012, s. 392). Siden dette er en kvalitativ studie vil en replikasjon av studien fortone seg annerledes, blant annet på grunn av relasjonen mellom forsker og deltaker. Likevel er studien knyttet mot brøkbegrepet, noe alle elever i sjette trinn er kjent med, så en studie på en annen sjette klasse kan gi nokså likt resultat.

3.6 Etiske betraktninger

Siden jeg skulle samle inn personopplysninger, både fra foreldre og elever, var jeg nødt til å melde prosjektet mitt inn til Sikt. Meldeskjema ble godkjent i starten av januar, og jeg kunne da starte prosessen med å sende ut samtykkeskjema, og etter hvert begynne innsamling av data (se vedlegg 1).

Både nasjonalt og internasjonalt er det lagt frem tre krav om forholdet mellom forsker og forskningsdeltaker. Disse danner utgangspunktet for forskningsetikken som må tas hensyn til under forskningen. Det første kravet handler om informert samtykke. I min master ble det gjort tydelig overfor elever og foresatte at deltakelsen er frivillig. De hjemme ble informert om dette i samtykkeskjema (se vedlegg 2), som elevene fikk med hjem. Deltakerne ble igjen informert før og etter intervjuet at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet (Bryman, 2012, s. 140; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247-249). Samtykkeskjema forteller hva prosjektet går ut på, og hvordan dataene skal bli behandlet, både underveis og ved oppgavens slutt. Deltakeren er dermed klar over hva deres informasjon skal brukes til. Det ble også presisert at de hjemme kunne få tilgang på både oppgavene og intervjuguiden før intervjuene. I tillegg opplyste jeg dem om deres rett til å få et innsyn i datamaterialet som omhandlet dem, dersom de ønsket dette.

Det er også tatt hensyn til hvorvidt deltakernes privatliv er ivaretatt. Dette handler om at deltakerne er informert om hva slags informasjon jeg skal hente ut av dem, og hvor privat den er. Siden jeg samler inn data som omhandler barn er jeg nødt til å passe på at deres privatliv blir ivaretatt. Dette har jeg gjort ved å bruke pseudonymer på elevene som deltar. Med disse pseudonymene er det ikke mulig å spore frem hvem elevene er, fordi det vil ikke være en sammenheng mellom deres ekte navn og deres gitte navn i masteroppgaven. Det er heller ikke navngitt hvilken skole elevene går på. Det er kun informasjon som er nyttig for å besvare på min masteroppgave som er tatt med i oppgaven.

I samtykkeskjema er det også presisert at opplysningene om eleven blir behandlet konfidensielt. Det betyr at jeg som forsker sørger for at informasjonen ikke blir spredt videre. (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251). Ved å låse inn oppgavearkene og samtykkeskjemaene i et skap, og ved å lagre video- og lydopptak på en passordbeskyttet sky på datamaskinen ivaretar jeg dette hensynet.

4.0 Analyse og resultater

I dette kapittelet vil jeg legge frem resultater fra analysen min som er med på å besvare forskningsspørsmålet mitt. Kapittelet delt inn etter oppgavene som elevene løste. Under hver oppgave vil resultatene fra hver elevbesvarelse komme frem. Det vil bli lagt frem hvilke strategier elevene benyttet, og begrunnelser for hvorfor den gitte strategien er identifisert. Jeg har også inkludert utdrag fra transkripsjonen for å vise hva eleven gjorde mens den sammenliknet. Utdragene må leses i lys av transkripsjonsnøkkelen som kan lese i kap 3.4.1. I tillegg blir det gjort rede for hvilke konkreter de brukte. Avslutningen av kapittelet gir en oppsummering over forekomstene av strategier og konkreter.

4.1 Oppgave 1 - lik nevner

Første oppgave viste to brøker med lik nevner, $\frac{2}{6}$ og $\frac{4}{6}$. Analysen identifiserte strategiene *sammenlikne teller, referansepunkt, restdel* og *andre strategier.* Det ble tatt i bruk både melkekorker og brøkbrikker i sammenlikningene til elevene. Sekvensene viser hvordan elevene begrunnet hvilken brøk som er størst. Det vil være tilfeller hvor elevene ble spurt om å bruke konkreter for å forklare hva de tenkte.

PIA

Pia sa at $\frac{4}{6}$ er størst. Da hun ble spurt om hvorfor begrunnet hun dette med at $\frac{4}{6}$ gir flere deler.

> Pia: Fordi du får fire ****peker på 4**** av seks ****peker på 6**** deler … eller…nei… eller så er det den ****peker på*** $\frac{2}{6}$**fordi da får du to større deler
>
> I: Ok
>
> Pia: Da får du halve nei ven- nei °jeg vet ikke°… eh du får større deler ****peker på 2****… nei… den ****peker på 4**** kanskje
>
> I: Ok
>
> Pia: Da får du flere deler

Hun sa først at med $\frac{2}{6}$ får du to større deler, men endrer så svaret til $\frac{4}{6}$ fordi den gir flere deler. Her benyttet hun seg av *en sammenlikning av tellerne*, fordi hun refererte til at telleren forteller hvor mange deler brøken gir. Siden telleren i $\frac{4}{6}$ har et høyere tall enn $\frac{2}{6}$ får hun flere deler i $\frac{4}{6}$, og da er denne brøken størst. Pia ble så spurt om hva hun tenkte på når hun konkluderte med at den brøken gir flere deler.

> Pia: Da tenker jeg … kanskje liksom som en runding og da tenker jeg at du får liksom sånn litt mer enn hele og med den ****peker på*** $\frac{2}{6}$* så får du litt mindre enn hele

Som utdraget viser refererte Pia til en sirkel og en hel. På grunn av hennes tidligere forklaring kan det virke som at Pia har forvekslet en halv med en hel, og at hun mente å si at brøk $\frac{4}{6}$ er litt mer enn en halv, mens $\frac{2}{6}$ er litt mindre enn en halv. *Referansepunkt* er identifisert som strategi fordi hun sammenliknet brøkene mot en halv. Forvekslingen mellom en halv og en hel gjorde at intervjuer spurte om hun kunne vise med melkekorkene som lå på bordet.

> Pia: (p15s) sånn da har du °to deler av seks° 
> I: Ja
> Pia: også (p6s) sånn 
>
> I: Ja så bra hva tenkte du nå?
>
> Pia: Når jeg hadde den ****peker på telleren i*** $\frac{2}{6}$* toeren da trenger jeg to til for fire så da bytta jeg bare to hvite med to røde

Pia brukte melkekorker i sammenlikningen. Hun bygget først $\frac{2}{6}$ hvor det kan tolkes som at nevneren representerer hele mengden, og de røde representerer telleren i $\frac{2}{6}$. For å vise $\frac{4}{6}$ byttet hun ut to hvite med to røde melkekorker, men beholdt modellen. Med hensyn til at Pia ble spurt om å vise hva hun mente med mer enn en hel, kan det tolkes som at hun har benyttet seg av strategien *referansepunkt med konkreter.* Modellen kan vise til at $\frac{2}{6}$ er mindre enn en halv, og at $\frac{4}{6}$ er mer enn en halv.

ARE

Da Are ble presentert for oppgave 1 var han raskt ute med å gi både svar og begrunnelse til hvorfor $\frac{4}{6}$ er den største brøken.

Are: E… er det… den ****peker på**** $\frac{4}{6}$* fordi den ****peker på 4****er nesten den ****peker på 6****
allerede for hvis du legger på to til av den ****peker på 4**** så er det jo den ****peker på 6****
og den ****peker på 2**** må du legge på fire av så blir det den ****peker på 6****så jeg tror det
er den ****peker på**** $\frac{2}{6}$*

Ut ifra denne sekvensen kan det tolkes dithen at Are så på nevneren som hele. Han sa at $\frac{4}{6}$ er størst fordi den mangler to for å bli hele, mens $\frac{2}{6}$ mangler fire for å bli en hel. Denne forklaringen kan vise til *restdel-strategien* fordi han vektla hvor mange som manglet for å at brøkene skulle bli en hel. Intervjuer spurte om Are kunne vise andre måter for å komme frem til dette svaret, og om han kunne benytte seg av noen av konkretene på bordet. Are bygget mengdemodeller av melkekorkene.

Are: Hvis du har to røde og seks klosser til sammen … da er to av de som er røde 

I: Og det er hvilken brøk?

Are: Det er den ****peker på**** $\frac{2}{6}$*

I: Ok

Are: Også har du for eksempel fi-re som er røde… sånn …  da er det jo fire av seks brikker som er røde så er det flere røde enn hvite

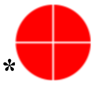
Med melkekorkene viste Are at det er flere røde enn hvite melkekorkene i modellen til $\frac{4}{6}$. Siden Are presiserte at dette gjelder for den største brøken, kan det implisitt virke som at dette ikke er tilfellet i modellen av $\frac{2}{6}$. Begrunnelsen om at det er flere røde enn hvite kan vise til at Are sammenliknet modellen mot en halv , altså *referansepunkt med konkreter.*

BEA

I likhet med Are ga Bea både en begrunnelse og svar da hun ble presentert for brøkene $\frac{2}{6}$ og $\frac{4}{6}$. Hun sa at $\frac{4}{6}$ er størst fordi tallet i den telleren er størst, men at begge tallene i bunnen er like. Videre begrunnet hun at dersom tallene i bunn er lik, kan jeg se på tallet i toppen for å avgjøre hvilken som er størst. Denne forklaringen viser til at Bea *sammenliknet tellerne*. Intervjuer spurte henne om hvilke konkreter hun ville brukt for å vise denne tankegangen. Bea valgte å bruke brøksirkler for å bygge arealmodeller.

Bea: … Kanskje disse? 

I: Ok

Bea: (p12s) **_*bygger en hel sirkel med fire $\frac{1}{4}$ brikker*_**  °nei°… det er jo ikke en fire det er jo fire av seks men jeg vet ikke om det er oppi der (p7s) **_*finner fire $\frac{1}{6}$ brikker*_** °en av seks den går det an å bruke° (p10s) **_*bygger $\frac{4}{6}$ sirkel *_** 

[…]

Bea: […] (p5s) der ***bygger $\frac{2}{6}$ sirkel*** 

I: Ok

Bea: fordi den  er jo større enn den  o- fordi der  er det fire og der  er det to

Bea begrunnet hvilken brøk som er størst basert på størrelsen av arealmodellene, noe som kan tyde på en *visuell sammenlikning*. Siden hun har bygget sirklene med riktig antall $\frac{1}{6}$ brikker kan det tyde på at Bea er bevisst på at telleren indikerer antall deler. Hun inkluderte også en forklaring av hvor mange deler brøksirklene inneholdt, og det kan tyde på en *sammenlikning av tellerne med konkreter.*

CARIN

Carin sa først at brøkene er like store, men trakk den konklusjonen fort tilbake. Dette kan tyde på at hun foretok en *sammenlikning av nevnerne* fordi hun forklarte at brøkene er like fordi de har samme nevner.

I: Hvilken av disse brøkene er størst?

Carin: Er ikke de like store?

I: Hvorfor det?

Carin: Nei… det er de ikke … det er … >den **_*peker på $\frac{4}{6}$*_** som er størst<

I: Ok hvorfor det?

Carin: °ja eh° fordi … der ****peker på telleren i*** $\frac{2}{6}$* står det to og der ****peker på*** $\frac{4}{6}$ *står det fire da er fire mest og det nederste tallet det er det samme

Forklaringen til Carin er lik Bea sin. Hun sa at $\frac{4}{6}$ er størst fordi tallet fire er større enn to, og siden tallet i bunnen er likt kan hun se på de øverste tallene. Dette tolkes som en *sammenlikning av tellerne*. Det ble ikke benyttet noen konkreter i denne oppgaven, og det ble heller ikke etterspurt av intervjuer.

DICTE

Dicte pekte ut $\frac{4}{6}$ som den største brøken. Hun begrunnet dette med at i brøken $\frac{4}{6}$ er det tatt vekk to, mens i brøken $\frac{2}{6}$ er det tatt vekk fire. Intervjuer spurte om hun kunne vise det hun tenkte ved hjelp av enten melkekorker, brøkbrikker eller tegning. Dicte valgte å vise med melkekorker.

Dicte: ****trekker til seg melkekorker og bygger****  … Hvis man tar vekk eh … fire stykk da blir det to av seks  …og hvis man tar vekk to så blir det fire av seks 

Hele mengden besto av seks melkekorker, og kan vise til nevneren i brøken. Dicte tok så vekk fire fra mengden for å vise $\frac{2}{6}$, og to fra mengden for å vise $\frac{4}{6}$. Hun sa at mengdemodellen som har flest melkekorker igjen etter at restdelene var tatt vekk er størst, altså $\frac{4}{6}$. Dermed benyttet hun seg av en *restdel-strategi med konkreter*, hvor det er en sammenlikning av antall deler som mangler for å få en hel.

4.2 Oppgave 2 – lik teller

I oppgave 2 ble elevene presentert for to brøker med lik teller, $\frac{4}{8}$ og $\frac{4}{5}$. Analyse av elevbesvarelsene identifiserte strategier som *referansepunkt, restdel* og *sammenlikning av teller.* I denne oppgaven ble konkretene brøksirkler og melkekorker tatt i bruk.

PIA

Pia var raskt ute med å peke ut $\frac{4}{5}$ som den største brøken. Intervjuer spurte hvorfor hun mente at den var størst, og fikk til svar at med $\frac{4}{5}$ får du nesten hele, mens med $\frac{4}{8}$ får du bare halve. Her benyttet eleven *referansepunkt strategien*, hvor hun sammenliknet brøkene mot en hel og en halv. Eleven ble så spurt om dette var noe den så for seg i hodet med engang.

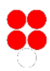
> Pia: Ja for jeg tror vi har lært noe om det at liksom det betyr ikke bare størst der ****peker på nevner i*** $\frac{4}{8}$ *liksom det kan bety [mumler] hvor ****peker på nevneren i*** $\frac{4}{5}$ mye det tallet som er under på en måte fordi her ****peker på*** $\frac{4}{5}$* får du nesten hele mens her ****peker på*** $\frac{4}{8}$ * får du nesten halve

Hun fortalte at de har lært på skolen at det ikke kun er tallet i nevneren som angir størrelsen på brøken, men at det er et forhold mellom telleren og nevneren. Avslutningsvis forklarte hun igjen hvordan $\frac{4}{5}$ er større enn $\frac{4}{8}$ med samme strategi.

ARE

Are startet oppgaven med å undre seg over om brøkene var like fordi brøkene hadde lik teller. Dette kan antyde at han *sammenliknet tellerne i brøkene*. Han avsluttet begrunnelsen med «jeg vet ikke», og virket ikke overbevist over egen begrunnelse.

Etter en kort tenkepause sa Are at $\frac{4}{5}$ er den største brøken fordi tallet i telleren er bare en unna å bli tallet i nevneren. Denne forklaringen ble identifisert som *restdel-strategi*, fordi det ble tatt hensyn til hvor mange deler som manglet til en hel. Videre fortalte han at han syntes dette var vanskelig. I et forsøk på å rydde opp i tankene til Are ble det snakk om hva tallene i brøkene betyr, og hvilke tall som er like og ulike. Han ble deretter spurt om hva han ser for seg i hodet. Are begynte å bygge mengdemodeller med melkekorker, slik han gjorde i oppgave 1.

> Are: fire av liksom fem da har du nesten alle ****bygger med melkekorker**** … hvis du har for eksempel fire av fem sånne da mangler du bare en hvis alle skulle vært røde så mangler du bare en. 

I: Ok

Are: Der **peker på* $\frac{4}{8}$* er det jo åtte sånne … da er det på en måte… da trenger du fire til før alle skal være røde 

I: Ja

Are: Så da har du fire av åtte…eller fire åttendeler.

Restdel-strategien med konkreter kom frem ved at han fortalte hvor mange melkekorker som manglet for å få en hel. Are har likevel ikke fortalt hvilken som er størst enda, så intervjuer spurte han om dette.

Are: Det er det jeg er litt usikker på … jeg sier kanskje den **peker på* $\frac{4}{5}$

Intervjuer spurte om svaret til Are var gjetting eller om han var helt sikker på at $\frac{4}{5}$ er størst. Da svarte han at han følte at den var størst, men at den ikke visste helt sikkert. Dermed ble eleven oppfordret til å benytte seg av noen andre konkreter. Are plukket opp to hele brøksirkler fra brøkboksen og sier at dersom det hadde stått åtte og fem i tellerne til brøkene, hadde de vært hele. Det blir konkludert med at begge sirklene er hele, men på hver sin måte. Are begynte deretter å bygge sirkler oppå sirklene han hadde funnet.

Are: ehm hvis du har fire av fem **finner frem fire* $\frac{1}{10}$ *brikker** … da har du … vent litt **legger brikkene oppå sirkelen** (p8s) da har du fi-re sånne 

I: Ja

Are: Da er det **ser bort på* $\frac{4}{8}$* °og der har du fire av åtte° **leter i brøkboks** (p5s) ah jeg vet ikke det var veldig vanskelig

Are fant fire brikker, men tok ikke hensyn til størrelsen av brøkbrikkene. Han sa at det fortsatt er vanskelig å si hvilken brøk som er størst. Intervjuer sa derfor noen oppmuntrende ord også fortsatte han med å bygge sirkler.

Are: Fordi det er…°hvis vi gjør sånn også° **legger to* $\frac{1}{10}$ *brikker oppå sirkelen** hvis hele den er fem og hvis jeg har … går det an å bare gjøre det sånn at jeg bare mangler en for å…-

I: Ja at du bare mangler en?

Are: Ja… eh sånne  <u>ja en av fem</u>(p5s) ****bygger** $\frac{4}{5}$ **sirkel oppå en hel***** 

I: Også bygger du den oppå sirkelen?

Are: Sånn↑ fordi da mangler jeg en sånn 

Are bygget brøksirklene oppå hver sin hele sirkel. Det kan antas at dette ble gjort for å alltid se brøken i lys av en hel. Han viste at han trengte en $\frac{1}{5}$ brikke for at sirkelen skulle bli hel.

Are: … Der har vi en av åtte også fire sånne (p7s) ***bygger*** $\frac{4}{8}$ ***sirkel***  da er jo den ***peker på***  størst… den ***peker på***  er halv også den **peker på*  * er nesten hel så da er den ***peker på***  størst

Are konkluderte med at $\frac{4}{5}$ er størst fordi den er nærmest en hel, mens $\frac{4}{8}$ er minst fordi den er bare en halv. Dette viste dermed til *referansepunkt strategien med konkreter.*

BEA

Bea ble i forrige oppgave spurt om å vise sammenlikningen ved hjelp av brøkbrikker. I denne oppgaven begynte hun å bygge med brøkbrikker med engang brøkene ble presentert. Intervjuer spurte hva hun gjorde og fikk til svar at hun skulle bygge brøksirkler for å se hvilken som var størst, altså en plan om *en visuell sammenlikning.* Da sirklene var ferdig bygd ble Bea spurt om hva hun så etter.

Bea: Om hvilken som er størst og der ser ut som fire av fem er størst fordi der ****peker på gapet til sirkelen***  * mangler jeg bare en for å få en hel sirkel men der ****peker på gapet til sirkelen***  * mangler jeg fire for å få en hel sirkel

Det ble konkludert med at det ser ut som at $\frac{4}{5}$ er størst fordi den mangler bare en for å få en hel sirkel. Siden Bea både viste til størrelsen på gapet og antall brikker som manglet kan denne strategien vise til både *en restdel* og *en restbrøk strategi med konkreter.* I tillegg gjorde hun en *visuell sammenlikning* helt i starten av forklaringen.

CARIN

Carin tok seg en liten tenkepause før hun pekte på $\frac{4}{5}$ som den største brøken, og ble bedt om å forklare hvorfor.

> Carin: Fordi … e-…det nederste tallet der *peker på nevnerne i $\frac{4}{8}$ og $\frac{4}{5}$ * er ikke likt men der *peker på $\frac{4}{8}$ * så er det en halv … e… >av åtte< og der *peker på $\frac{4}{5}$* så er det nesten en hel

I likhet med Pia sammenliknet Carin brøkene opp mot en hel og en halv, og benyttet seg av *referansepunkt-strategien.*

DICTE

Dicte pekte ut $\frac{4}{8}$ som den største brøken, og benyttet seg av melkekorker for å begrunne svaret sitt.

> Dicte: …kanskje den *peker på $\frac{4}{8}$* siden der tar man vekk fire  og når den *peker på $\frac{4}{5}$ og lager en mengdemodell med fem MK*  så tar man vekk fire  da blir det en eller fire av fem …jeg tror fire av fem

Dicte pekte ut $\frac{4}{5}$ som størst fordi modellen av denne brøken manglet en melkekork for å få en hel. Intervjuer stilte et oppklaringsspørsmål for å være sikker på at Dicte mente at $\frac{4}{5}$ var størst. Da begynte hun å forklare med melkekorker igjen.

> Dicte: Ja… Siden når man tar vekk fire stykk så blir det fire igjen og det er halvparten av åtte 
>
> I: Mmm
>
> Dicte: Også når man tar vekk … fire fra fem så blir det fire av fem så begge blir fire
>
> 
>
> I: Begge blir fire?
>
> Dicte: Så de er cirka like store

Etter denne forklaringen ble det konkludert med at brøkene er like fordi begge tar vekk fire fra nevneren. Denne strategien er blitt identifisert i kategorien for *andre* strategier.

4.3 Oppgave 3 – ulik teller og nevner

Oppgave 3 inneholdt brøkene $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{6}$. Analyse av disse elevbesvarelsene identifiserte *referansepunkt, restbrøk- og restdelstrategien*, samt *visuell sammenlikning.* Strategiene er benyttet sammen med konkretene melkekorker og brøksirkler.

PIA

Pia begynte begrunnelsen med *referansepunkt* mot en halv, men møtte på en utfordring da det ikke var en halv i tre.

> Pia: mmm (p7s) °vanskelig å vite° fordi der *peker på $\frac{3}{6}$* så får du halve og den* peker på $\frac{2}{3}$* så er det … det er ikke på en måte… eh …m… føler ikke helt [mumler] det er ikke en halv i *peker på nevneren i $\frac{2}{3}$* tre føler jeg

Det kan tolkes at Pia var bevisst på at $\frac{3}{6}$ er en halv, fordi totalt antall deler delt på to blir tre deler. Dermed kan problemet ha oppstått da hun skulle dele tre på to, og ikke fått to deler. Hun begynte deretter å bygge brøksirkler.

> Pia: ehm-… det er vanskelig å vite … kanskje fordi *leter i brøkboks* hvis du hadde fått (p5s) *finner to $\frac{1}{3}$ brikker og bygger sirkel *  her … to sånne … °to store° og da får du *finner tre $\frac{1}{6}$ brikker og bygger $\frac{3}{6}$ sirkel* (p20s)  … *legger sirklene ved siden av hverandre*   her *peker på $\frac{3}{6}$ sirkel* får du litt mindre på en måte fordi at det er bare tre deler liksom der *peker på $\frac{2}{3}$* er det én mindre enn tallet *peker på nevneren i $\frac{2}{3}$* på en måte

Hun konkluderte at $\frac{2}{3}$ er størst fordi telleren er én mindre enn nevneren, og at $\frac{3}{6}$ bare har tre deler. Dette tolkes om en *restdel-strategi med konkreter* fordi hun refererte til antall deler som manglet for å bli en hel.

ARE

Da Are ble presentert for brøkene begynte han å bygge brøksirkler med engang. Etter at han har bygd brøksirklene for $\frac{3}{6}$ og $\frac{2}{3}$ konkluderte han med at $\frac{2}{3}$ er størst. Intervjuer spurte hvorfor han mente dette.

> Are: Fordi den ***peker på*** $\frac{2}{3}$ ***sirkelen*** dekker nesten hele du trenger bare en til sånn *****peker på*** $\frac{1}{3}$ ***brikke****  en før hele er ferdig og der *****peker på*** $\frac{3}{6}$ ***sirkel****  trenger man tre til på så den *****peker på*** $\frac{2}{3}$ ***sirkelen****  er størst.

Forklaringen om at $\frac{2}{3}$ sirkelen dekker nesten hele identifiseres som *referansepunkt med konkreter*. Videre kan sammenlikningen vise til en *restbrøk-strategi med konkreter* fordi det ble spesifisert hvilken brøkbrikke som manglet, dermed er størrelsen av brøkbrikken anerkjent. Det kan også bli tolket at Are benyttet *restdel-strategien med konkreter* for å sammenlikne fordi han sa at $\frac{3}{6}$ mangler tre for å bli hel.

BEA

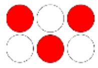
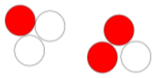
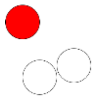
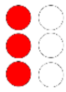
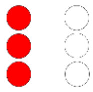
Da Bea ble presentert for oppgave 3, begynte hun å bygge med brøkbrikker med engang. Hun bygget først sirkelen for $\frac{2}{3}$, og fortalte at den manglet bare en for å bli en hel.. Videre bygget hun sirkelen for $\frac{3}{6}$ og fortalte at den manglet tre for å bli hel. Hun pekte ut $\frac{2}{3}$ som den største brøken fordi den manglet bare en, og den hadde mindre åpning enn $\frac{3}{6}$ sirkelen. Dette er dermed tolket som en *restdel-strategi med konkreter*, kombinert med en *visuell sammenlikning.*

CARIN

Carin sa at $\frac{2}{3}$ er størst fordi den er nesten en hel, mens $\frac{3}{6}$ er en halv. Denne begrunnelsen er tolket som *referansepunkt*. Hun forklarte at hun trengte kun å se på tallene for å vite dette.

DICTE

For å løse oppgave 3 benyttet Dicte seg av melkekorker.

> Dicte: ... ***lager mengdemodell med seks melkekorker***  hvis man tar vekk tre så blir det tre igjen på tre av seks 
>
> I: mm
>
> Dicte: og hvis man tar vekk to så blir det en igjen 
>
> I: Ok
>
> Dicte: ***samler sammen melkekorkene*** [mumler]  også … ehm … hvis man … ja…så da tror jeg siden det er tre av seks så er det tre der og tre der  og når man tar vekk to stykk så er det en der og to der 
>
> I: ja
>
> Dicte: jeg tror den ***peker på** $\frac{3}{6}$** er størst

Det ble konkludert at $\frac{3}{6}$ var den største brøken, fordi der tok hun vekk flest fra den respektive mengden melkekorker. Forklaringen hennes er identifisert som *andre strategier.*

4.4 Oppgave 4 – ulik teller og nevner

Oppgave 4 inneholdt brøkene $\frac{3}{4}$ og $\frac{5}{6}$. Her manglet begge brøkene hver sin stambrøk for å utgjøre en hel. Analysen avdekket strategiene *restbrøk, restdel* og *visuell sammenlikning.* I denne oppgaven benyttet elevene seg av brøksirkler, melkekorker og tegning under sammenlikningen.

PIA

Pia sa at hun først tenkte at $\frac{5}{6}$ er størst fordi telleren er nesten som nevneren. Men hun ble usikker da telleren i $\frac{3}{4}$ også nesten er nevneren, men konkluderte midlertidig at de var like.

Det kan tolkes som at hun benyttet en *restdel strategi*, og sa dermed at brøkene er like fordi de begge manglet en for å bli en hel. Etter dette resonnementet sa hun at brøkene hadde vært det samme hvis de hadde hatt samme tall, men at $\frac{5}{6}$ hadde flere tall. Intervjuer sa at Pia kunne bruke brøksirkler igjen dersom hun ønsket det. Det valgte hun å gjøre, og bygget to sirkler som viste brøkene.

Pia:   ja det er egentlig like mye…

I: ja

Pia: eller …denne ****peker på*** $\frac{5}{6}$ ***sirkel****  er størst fordi det er mindre plass igjen

I: ok

PIa: så jeg tror den ***peker på*** $\frac{5}{6}$ er størst

[…]

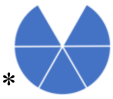
I: Mindre plass igjen til hva?

Pia: Eh det er bare ehm **viser til gapet i*** $\frac{5}{6}$ ***sirkel**** det er bare liksom en kloss på en måte du trenger på en måte en sånn mindre brikke enn her **viser til gapet i*** $\frac{3}{4}$ ***sirkel**** trenger du mye større

Da Pia hadde bygget sirklene konkluderte hun med at $\frac{5}{6}$ er størst fordi den trengte en mindre brikke for å bli hel, mens $\frac{3}{4}$ mangler en mye større brikke. Det kan tolkes dithen at Pia benyttet seg av *restbrøk-strategien med konkreter*, fordi hun viser til størrelsen på delene som mangler. Samtidig henvendte hun seg til gapet på sirkelen, noe som kan tolkes til en *visuell sammenlikning.*

ARE

Are valgte å bygge med brøksirkler med engang han fikk oppgaven. Sekvensene under viser hvordan han angivelig går fra å bruke *restbrøk-strategien*, til å bruke *restdel-strategien,* begge *med konkreter.*

> Are: ***bygger begge sirkelen****   er det ikke den  som er størst fordi den mangler minst den er nærmest til å være en hel

Her kan det antas at han benyttet seg av *restbrøkstrategi med konkreter* fordi han sa at brøken som manglet minst for å bli en hel er størst. Dette resonnementet går han midlertidig vekk fra da han sier at brøkene er like fordi de begge mangler en brikke.

> Are: så der legger du på <u>nei</u> fordi de er like↑ fordi hvis jeg legger på en til sånn en ***peker på** $\frac{1}{4}$**brikken****  så blir den en hel og hvis du legger på en til sånn en ***peker på** $\frac{1}{6}$ **brikken****  så blir den en hel

Ifølge Are er brøkene like fordi de begge manglet en bit for å bli en hel sirkel. Denne konklusjonen kan tyde på bruk av *restdel-strategi med konkreter.*

BEA

I likhet med Are begynte Bea også å bygge brøksirkler med engang hun fikk oppgaven. Etter at Bea hadde bygget ferdig ble hun spurt hva hun ser etter. Det kan antas at hun benyttet seg av *visuell sammenlikning* og *restbrøk-strategi med konkreter* fordi hun så på størrelsen til det som manglet i hver brøk.

> Bea: Hvilken som er størst men de så litt like men selv om de så litt like ut så tror jeg en av fire et litt større fordi det så ut som det var bittelitt større åpning der ***peker på gapet til** $\frac{3}{4}$ **sirkelen****  enn det var der ***peker på gapet til** $\frac{5}{6}$ **sirkelen**** 

> I: Er det noen måte vi kan bevise det på? Slik at vi kan være helt sikre på hvilken som er størst?

Bea: ***finner frem en $\frac{1}{6}$ brikke til og lager en hel sirkel**** Her får den plass da blir det

her er en runding  men hvis jeg skulle satt den her ****legger en $\frac{1}{6}$ brikke i $\frac{3}{4}$ sirkel****

så blir det ikke nok 

[…]

Bea: For da er det liksom litt i igjen så da tror jeg det er tre av fire som er størst

Ifølge Bea så var $\frac{3}{4}$ størst fordi da hun tok $\frac{1}{6}$ brikke over i $\frac{3}{4}$ sirkelen, ble det litt igjen til en hel. Hun konkluderer med at brøken med størst åpning i sirkelen, er den største brøken, og benyttet seg fortsatt av en *restbrøk strategi med konkreter.*

CARIN

I oppgave 4 pekte Carin ut $\frac{3}{4}$ som den største brøken. Hun begynte å tegne brøkene som kaker da intervjuer spurte hvorfor hun mente dette. Hun viste $\frac{3}{4}$ som en kake, og prøvde å gjøre det samme med $\frac{5}{6}$. Problemet oppsto da hun skulle dele inn den sistnevnte sirkelen inn i fire deler. Hun forkastet denne sirkelen og tegnet heller et rektangel for å representere $\frac{5}{6}$. Dette rektanglet tok hun straks vekk igjen, da hun kommenterte selv at tegningen må være like.

Carin: Fordi hvis du har en kake så er … ehm …tre firedeler … assa … la oss si det der er en kake da … så har du sånn ***tegner en sirkel og deler den inn i fire like deler**** … også er <u>det</u> ****fargelegger tre av delene**** tre firedeler 

I: Ja

Carin: Da er det mer enn ***tegner enda en sirkel og deler den i fire deler**** … eh (p7s) nei det blir feil … jeg vet ikke hvordan man tegner en … jo … ***tegner et rektangel**** jaja samma det… nei det må jo være en runding bare glem det

[…]

Carin: *tegner en sirkel og deler den inn i seks like deler* sånn det er seks … også er

fargelegger fem av delene (p4s) tulla den *peker på $\frac{5}{6}$ sirkelen* er størst

Intervjuer spurte så hvordan Carin kunne se at $\frac{5}{6}$ var størst.

Carin: Jeg tenkte kanskje at >jeg vet ikke men det er lenge siden vi har lært om det< men jeg tenkte at det *peker på $\frac{3}{4}$* var størst siden det var liksom … flest av færre deler

I: °flest av færre deler ja°

Carin: Men det er vel kanskje flest av flest deler som er mest

Hun sa hun først tenkte at $\frac{3}{4}$ var størst fordi den hadde flest av færre deler. Ved å tegne sirkel kunne hun se at det viste seg at brøken med flest av flest deler var størst sa hun. Det kan tolkes om at Carin viste til telleren i brøkene når hun sier færre og flest deler. $\frac{3}{4}$ har færre deler, men at størrelsen på brøkene er større enn i $\frac{5}{6}$. Det kan antas at flest av færre deler referer til at det var flere større deler, og at flest av flest deler betyr at det er flere av de mindre delene. Dermed kan det antas at Carin benyttet seg av *andre strategier* fordi hun valgte å tegne brøkene og tok størrelsen av delene i betraktning da hun sammenliknet.

DICTE

I oppgave 4 valgte Dicte å bygge med melkekorker igjen. Hun laget en mengde på fire, og en mengde på seks. Deretter tok hun vekk tre fra mengden med fire, og fem fra mengden med seks. Dermed var $\frac{5}{6}$ størst fordi der tok hun vekk flest melkekorker. Strategien er identifisert som *andre strategier.* Den brøken som tok vekk flest fra mengden er de største brøkene.

4.5 Oppgave 5 – ulik teller og nevner

Oppgave 5 inneholdt brøkene $\frac{6}{8}$ og $\frac{11}{12}$. Differensen mellom brøkene er henholdsvis 2 og 1. Brøken med minst differanse er den største brøken. Det ble identifisert *restbrøk-* og *restdelstrategi,* og *visuell sammenlikning.* Under sammenlikningen benyttet eleven seg av brøkbrikker, brøksirkler og melkekorker.

PIA

I oppgave 5 fant Pia ut hvilke brikker som manglet for å få en hel. Brøken $\frac{11}{12}$ mangler en $\frac{1}{12}$ brikke, mens $\frac{6}{8}$ manglet to $\frac{1}{8}$ brikker. Pia sammenliknet størrelsen på de gjenværende brikkene. Hun konkluderte med at $\frac{11}{12}$ er størst fordi brøkbrikken som manglet til en hel var mindre enn brøkbrikkene som manglet for å bli en hel i $\frac{6}{8}$ brøken. Dette kan tolkes som en *restbrøk-strategi med konkreter* fordi hun tok størrelsen av bitene som manglet i betrakting.

ARE

Are valgte også å sammenlikne hva som manglet for å bli en hel. Til forskjell fra Pia valgte Are å sammenlikne hvor mange deler som manglet.

> Are: […] den her … jeg tror den ***peker på*** $\boldsymbol{\frac{11}{12}}$ ***sirkelen***  er størst fordi den her ***peker på*** $\boldsymbol{\frac{6}{8}}$  mangler du to for å få en hel og den  mangler du bare en for å få en hel så jeg tror den  er størst

Den brøken som manglet færrest brikker ble konkludert som størst, og det er ikke tatt hensyn til størrelsen på brikkene. Dermed kan det antas at Are har benyttet seg av *restdel-strategi med konkreter.*

BEA

Bea valgte å løse oppgave 5 uten brøkbrikker. Hun så på brøkene og anslo hvor mye som manglet for å få en hel. Bea konkluderte med at $\frac{11}{12}$ er størst fordi den manglet bare én for å bli hel mens $\frac{6}{8}$ manglet to for å bli en hel. Basert på denne konklusjonen ble det antatt at Bea benyttet seg av *restdel-strategi,* fordi hun kun tok hensyn til antall deler som mangler.

CARIN

Carin svarte at $\frac{11}{12}$ var størst. Begrunnelsen for dette krevde et tilbakeblikk på forrige oppgave.

> Carin: [...] sånn som du så der ****peker på*** $\frac{3}{4}$ ***sirkelen****  i stad så er det mindre og det ****peker på*** $\frac{5}{6}$ ***sirkelen****  var mest så jeg tenkte at det ****peker på*** $\frac{11}{12}$ * der er jo størst og den ****peker på telleren i*** $\frac{11}{12}$ * elleve er nærmest tolv ****peker på nevneren i*** $\frac{11}{12}$* så da må det være litt samme som den... ****peker på*** $\frac{5}{6}$ ***sirkelen****  at det er mest mens der ****peker på*** $\frac{6}{8}$* så er det jo ikke ... der er det bare litt over halvparten

Carin sammenliknet $\frac{5}{6}$ sirkelen med $\frac{11}{12}$, det kan være at hun foretok *en visuell sammenlikning*. Istedenfor å sammenlikne ved å lage nye sirkler, benyttet hun seg av sirkler fra en tidligere oppgave. Hun endte opp med å begrunne at $\frac{11}{12}$ var størst fordi den er nærmest en hel, mens $\frac{6}{8}$ bare var litt over halvparten. Det kan tyde på at hun benyttet *referansepunkt* som strategi.

DICTE

Dicte bygget med melkekorker i oppgave 5. For å vise $\frac{11}{12}$ laget hun først en mengde med 12 melkekorker, og tok vekk 11 slik at hun hadde en igjen. Det samme gjorde hun for å vise $\frac{6}{8}$ med melkekorker. Hun tok vekk seks melkekorker fra en mengde med åtte.

Dicte konkluderte med at $\frac{6}{8}$ er større enn $\frac{11}{12}$ fordi der var det to igjen etter at hun hadde tatt vekk seks melkekorker fra en mengde på åtte. Mens i $\frac{11}{12}$ var det kun en igjen etter at elleve var tatt vekk fra tolv melkekorker. *Restdel-strategien med konkreter* ble identifisert fordi de melkekorkene som blir igjen etter elimineringen av tellerne kan tolkes som antallet som manglet for å få en hel.

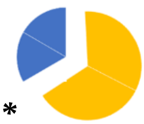
4.6 Oppgave 6 - likeverdige brøker

Oppgave 6 inneholdt brøkene $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{6}$, altså to likeverdige brøker. Det ble identifisert bruk av *visuell sammelikning, restdel-strategi* og en begynnelse av en strategi om *forhold.* Elevene benyttet seg av brøkbrikker og melkekorker i denne oppgaven.

PIA

Pia pekte først ut $\frac{2}{3}$ som den største brøken. Hun begrunnet dette med at det var mindre igjen, og viste dette med brøksirkler. Med brøksirklene bygget hun først sirkelen for $\frac{2}{3}$, og deretter sirkelen for $\frac{4}{6}$. Brøksirklene la hun så ved siden av hverandre, og undret om det kanskje brøkene var like. Hun valgte å flytte to $\frac{1}{6}$ over i gapet til $\frac{4}{6}$ sirkelen, og så at den passet oppi.

> Pia: kanskje det er det samme?
>
> I: Ok
>
> Pia: °vent litt° (p6s) ***legger to $\frac{1}{6}$ i gapet på $\frac{2}{3}$ sirkelen****



Det ble så konkludert med at brøkene er like. Det kan tolkes som at Pia benyttet seg av en *visuell sammenlikning* hvor hun ser på arealet til $\frac{2}{3}$ sirkelen sammen med arealet til $\frac{2}{6}$.

ARE

Akkurat som Pia valgte Are også å bygge brøksirkler. Imens han bygget forklarte han at $\frac{2}{6}$ mangler to for å bli en hel, og $\frac{2}{3}$ bare manglet en. Dette kan vise til en *restdel-strategi*, fordi han refererte til delene som manglet for å bli en hel.

Da han hadde bygget ferdig begge sirklene gjorde han det samme som Pia. Han flyttet en $\frac{1}{3}$ brikke over i $\frac{4}{6}$ sirkelen, og to $\frac{1}{6}$ over i $\frac{2}{3}$ sirkelen slik at begge sirklene ble hele. På bakgrunn av dette konkluderte også han at brøkene var like. Det kan antas at også Are fortok en *visuell sammenlikning* av brøksirklene.

BEA

Bea valgte å ikke benytte seg av brøksirkler i sin forklaring. Hun sa at $\frac{2}{3}$ er størst fordi den manglet én, akkurat som $\frac{11}{12}$ i forrige oppgave. Og siden $\frac{4}{6}$ manglet to for å komme seg til seks, var denne brøken minst.

> Bea: (p7s) nå tror jeg to av tre er størst fordi den ***peker på** $\frac{2}{3}$ ** mangler bare en som den i stad og den ***peker på** $\frac{4}{6}$** mangler to … for å komme seg til seks

Denne forklaringen kan bety at Bea benyttet seg av *restdel-strategien*, fordi hun refererte til antall deler som manglet til en hel.

CARIN

Carin var rask med å si at brøkene var like og ga en forklaring på hvorfor.

> Carin: Fordi man kan dele fire ***peker på teller i** $\frac{4}{6}$* på to ***peker på telleren i** $\frac{2}{6}$ * og seks ***peker på nevneren i** $\frac{4}{6}$ *på tre ***peker på nevneren i** $\frac{2}{3}$**

Hun så at brøkene var like fordi den største telleren kan deles på den minste telleren, og den største nevneren kan deles på den minste nevneren. Dette resonnementet kan tolkes som at Carin er på vei mot en forklaring på at brøkene har samme forhold. På bakgrunn av dette kan vi kalle strategien for *forhold,* selv om hun kun er i startfasen av dette beviset.

DICTE

Som i de tidligere oppgavene, valgte Dicte å benytte seg av melkekorker på denne oppgaven også. Hun laget to grupper med melkekorker, en med seks og en med tre. Hun tok så vekk fire fra mengden på seks, og to fra mengden på tre. Det var $\frac{4}{6}$ som ble pekt på som den største brøken, fordi der ble det to igjen etter at fire var tatt vekk fra hele mengden på seks. Dette kan tolkes som at Dicte også her benyttet seg av *en restdel-strategi med konkreter,* fordi hun konkluderte basert på hvor mange som manglet til en hel.

4.7 Oppsummering

For å oppsummere presenterer jeg resultatene i en tabell som viser hvilke strategier som ble identifisert, og om strategiene ble brukt med eller uten konkreter. Resultatene som er kommet frem i analysen vil legge grunnlag for diskusjonen i neste kapittel.

Tabell 6 Forekomstene av strategiene, både med og uten konkreter

	Med konkreter	Uten konkreter	Totalt
Sammenlikne teller	3	4	7
Sammenlikne nevner	-	1	1
Restdel	11	7	18
Restbrøk	7	-	7
Referansepunkt	5	5	10
Visuell sammenlikning av areal	8	-	8
Forhold	-	1	1
Andre strategier	2 (1 med tegning)	-	3

Analysen avdekket flest tilfeller av restdel strategien sammen med konkreter. Totalt ble det identifisert 18 tilfeller av restdel-strategien, hvor 11 av dem er sammen med konkreter. Tabellen viser også en stor forekomst av referansepunkt. Strategien forekom like ofte med konkreter som uten. Det ble kun avdekket ett tilfelle av strategiene sammenlikne med nevner og forhold. Strategier som ikke passet til analyseverktøyet, er kategorisert som *andre strategier*.

5.0 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg drøfte resultatene opp mot tidligere presentert teori. Jeg vil først drøfte hvilke strategier elevene brukte for å sammenlikne uten konkreter. Deretter vil jeg drøfte hvordan konkretene ble brukt sammen med strategiene. Til slutt vil jeg foreta en drøfting om de metodiske valgene som er blitt gjort i oppgaven.

5.1 Strategier uten konkreter

Strategier uten konkreter forekom flest ganger på starten av intervjuet. Det ble identifisert flest tilfeller av strategiene restdel, sammenlikne teller og referansepunkt. Strategiene forhold og sammenlikne nevnere forkom også uten konkreter.

5.1.1 Restdel-strategi

Resultatene fra analysen viste at elevene benyttet seg av mest av restdel-strategien. En slik strategi bygger på en helltallstenking fordi eleven anser at en del i en brøk tilsvarer samme størrelse som en del i en annen brøk (Pearn & Stephens, 2004, s. 434). Denne strategien vil ikke gi rett svar i alle tilfeller. Det kan vi se i besvarelsene til Bea i oppgave 5 og 6. I oppgave 5 sa hun at $\frac{11}{12}$ er større enn $\frac{6}{8}$ fordi den manglet mindre for å bli en hel. Sammenlikningen skjer mellom delene som mangler til en hel, altså mellom to og en. Bea konkluderte med at den brøken som manglet færrest deler er den største brøken. Oppgave 6 inneholdt to likeverdige brøker, og viser et eksempel på hvordan sammenlikningsstrategien kan gi feil svar. Bea konkluderte at $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{6}$ er like fordi begge manglet én for å bli en hel.

En heltallstenking i brøk kan komme av at elevene er kjent med brøk som del av en helhet, men at delene ikke anses som relative størrelser. I følge Siebert og Gaskin (2006) kan denne heltallstenkingen også komme av hvordan elevene snakker om brøken. Å snakke om brøker som deler av en helhet, kan skape forvirring hos elevene. Istedenfor å navngi brøkene basert på hvor mange deler av helheten det viser til, som for eksempel *tre av fire*, bør ordlyden heller si noe om størrelsene på delene, slik som *tre firedeler*. Dersom elevene blir lært opp til å snakke om brøk på denne måten kan en unngå at elevene ser på brøk som to hele tall over hverandre.

Det kan diskuteres om restdel-strategien kan kategoriseres som en retrievalstrategi. Kjennetegnet på en slik strategi er at eleven henter frem tidligere kunnskaper om et matematisk objekt for å løse oppgaven, og at eleven svarer raskt (Ostad, 2008, s. 16) På en annen side er det ikke slik at strategien i seg selv definerer hva slags kategori den tilhører, dette er det eleven selv som danner grunnlaget for. Grunnen til at restdel kan være en retrievalstrategi kommer av at elevene benytter sin kunnskap om brøk og heltall for å sammenlikne. Dersom elevenes forståelse av brøk er preget av heltallstenking kan altså restdel-strategien oppstå.

5.1.2 Sammenlikne teller

Analysen avdekket at elevene også benyttet seg av en sammenlikning av tellerne uten konkreter. Denne strategien forekom oftest når elevene sammenliknet brøkene i oppgave 1 med to brøker med lik nevner. Årsaken til dette kan være at en slik sammenlikning også bygger på en heltallstenking (Lamon, 2012, s. 136). Noe som betyr at elevene sorterer brøkene basert på tallet i telleren. Både Pia, Bea og Carin forklarte at dersom brøkene hadde likt tall i nevneren, kunne de se på tallet i telleren, og på den måten avgjøre hvilken som var størst. Pia forklarte at med $\frac{4}{6}$ får du flere deler. Dermed er hun bevisst på at telleren angir hvor mange deler av helheten det er snakk om.

5.1.3 Referansepunkt

Både Carin og Pia refererte til en hel og en halv for å bedømme hvilken brøk som var størst. Disse forklaringene er identifisert som referansepunkt strategier uten konkreter. Ved en slik sammenlikning viser elevene til brøk som en størrelse, og at en brøk er et tall mellom 0 og 1(Birkeland et al., 2018, s. 260).

Både Pia og Carin benyttet seg av referansepunkt i oppgave 2 også. Her sammenliknet de $\frac{4}{5}$ mot en hel, men poengterte at $\frac{4}{8}$ er en halv. Pia påpekte også at selv om tallet i telleren er høyt betyr ikke det at brøken er størst. Pia er her bevisst på det inverse forholdet mellom telleren og nevneren (Cramer et al., 2008, s. 491). Brøkene inneholdt like mange deler, dermed er det nevneren som avgjør størrelsen på disse delene. Carin er også bevisst på dette forholdet da hun pekte ut at brøkene ikke hadde like nevnere.

Carin fortalte at hun videre kun trengte å se på brøkene for å se hvilken som var størst. Det kan være to grunner til dette. Enten har hun dannet gode mentale bilder av brøken og på den måten klarer hun å sammenlikne dem (Cramer et al., 2008, s. 491). På en annen side kan det være at brøkene er kjent for Carin, og at hun *bare vet* at $\frac{2}{3}$ nesten er en hel, og at $\frac{3}{6}$ er en halv. Dette kan tyde på at Carin benyttet seg av retrievalstrategier da hun sammenliknet fordi hun gir uttrykk for at hun bare vet hvilke størrelser hun sammenlikner.

5.2 Strategier med konkreter

For å drøfte hvilke konkreter elevene benyttet seg av vil jeg trekke frem sentrale funn fra analysen. Forekomsten var størst av strategiene restdel, restbrøk og visuell sammenlikning av areal, sammen med konkreter. Som nevnt tildigere er brøkene er representert symbolsk på oppgavearket. Elevene som benyttet seg av konkreter hadde evnen til å konvertere fra symbolene til konkreter, noe som ifølge Lesh (1981, s. 245-246) og Duval (2006, s. 111) er med på å gi en dypere forståelse av objektet.

5.2.1 Restdel med konkreter

Strategien restbrøk med konkreter ble identifisert flest ganger i løpet av analysen. Elever som benyttet seg av konkreter valgte å bruke brøksirkler og melkekorker. En årsak til dette kan være at disse konkretene var mest kjent for elevene fra før av, og at dette fungerte som en støtte i sammenlikningen (Van de Walle et al., 2020, s. 45).

Aspektet brøk som del av en helhet kan representeres ved hjelp av mange forskjellige konkreter (Solem et al., 2017, s. 222). Likevel er det noen konkreter som er mer egnet enn andre. I strategien restdel vektla elevene at brøken som manglet minst deler for å bli en hel var størst. Ved å bruke mengdemodeller er det ikke vist hensyn til størrelsene av brøkdelene. Dicte sammenliknet $\frac{6}{8}$ og $\frac{11}{12}$ ved å bygge to mengdemodeller med like mange melkekorker som tallet i nevneren. Hun konkluderte med at modellen som hadde flest melkekorker igjen, etter hun hadde tatt vekk like mange melkekorker som det var i telleren, var den største brøken. Dermed sammenliknet hun 2 og 1, noe som kan vise til en heltallstenking (Siebert & Gaskin, 2006). En slik mengdemodell er likevel godt egnet til sammenlikning når brøkene inneholder brøkdeler av lik størrelse (Solem et al., 2017). Vi kan dermed se at elevene som benyttet seg av mengdemodeller i oppgave 1 utførte en sammenlikning som ga riktig svar. Dicte sin sammenlikning kan vise at hun oppfatter brøk som to tall over hver andre, hvor det nederste tallet er hele mengden og det øverste tallet er det som blir tatt vekk fra hele mengden. Likevel viser dette en bevissthet av egenskapene til telleren og nevneren, men at det ikke er tatt hensyn til deres inverse forhold (Cramer et al., 2008, s. 491).

Brøksirkler var det konkretiseringsmateriale elevene benyttet seg av mest under sammenlikningen. Det kan være flere årsaker til dette. Brøkene var ikke plassert i en kontekst hvor brøken opptrådde i forskjellige aspekter. Dermed er brøken kun sett på som del av en helhet. Dette aspektet er eleven kjent med fra før av, fordi dette aspektet har de møtt i tidligere i undervisningen.

Det skorter derimot når elevene skal begrunne hvilken av brøkene som er størst etter at de har valgt å representere brøkene med brøksirkler. I begrunnelsen til hvilken som var størst begrunnet noen elever med hensyn til antall deler som manglet. Dette kan komme av at elevene anstå hver brøkbrikke som en bit, og begrunnet ut ifra det. Det kan være at brøkbrikkene førte til at eleven unnlot å begrunne med størrelse siden brikken allerede var delt inn i brøkdeler (Ball, 1993, s. 163-164). Dette er en av de negative utfallene fra denne studien, fordi det kan være elevene hadde vektlagt størrelsen av delene som manglet uten konkretene. Med brøkbrikkene ble størrelsen på brøkdelene visualisert, noe som kan ha ført til at elevene ikke anså det som nødvendig å anerkjenne størrelsene.

5.2.2 Restbrøk med konkreter

Da elevene benyttet seg av restbrøk-strategien med konkreter refererte til hvilke brøkbrikker de manglet for å bli en hel. Dette viste at elevene var bevisste på størrelsen på brøken. Likevel kan brøksirklene gi et falskt innblikk i elevenes forståelse av teller og nevner. Brøkbrikkene har påskrevne stambrøker noe som gjør byggingen av brøksirkler til en leteaksjon etter like mange brøkbrikker som tallet i telleren. Å bygge brøksirkler kan på mange måter sammenliknes med å bygge puslespill, eller leke med puttekasse. Elevene trenger ikke å ta hensyn til det inverse forholdet mellom teller og nevner, fordi brøkbrikkene allerede er delt inn i gitte størrelser. Dette er i samsvar med det Petit et al. (2010, s. 1-3) og Cramer et al. (2008, s. 491) skriver om bruk av brøksirkler i undervisningen. Likevel kan brøkbrikker og bygging av brøksirkler hjelpe elevene inn i en forståelse av dette forholdet. Brøksirkler gjør også brøkbegrepet mer tilgjengelig noe som kan være motiverende for elevene. Samtidig er det viktig at elevene blir kjent med andre representasjoner som fanger andre aspekter ved brøkbegrepet, slik at ikke brøksirkler blir brukt som en kalkulator i brøksammenlikning.

Elevene som benyttet seg av restbrøk-strategien var tydelige på hvilke brikker de manglet. Siden brøkbrikkene viser til hvor mye som manglet er disse besvarelsene analysert som restbrøk-strategi.

Noen elever valgte å gå fra en strategi og til en annen. For eksempel valgte Are å heller sammenlikne brøkene ved hjelp av brøksirkler istedenfor melkekorker. Dette kan vise til at Are anså at brøksirklene synliggjorde brøk som del av en helhet bedre.

5.2.3 Visuell sammenlikning av areal

Som jeg allerede har vært innom tidligere i drøfting, bidrar brøkbrikker til en visualisering av brøkstørrelsen. Da elevene bygge brøksirkler begrunnet elevene hvilken som var størst basert på det de så. De henvendte seg til gapene som sirklene dannet, og fortok en visuell sammenlikning av brøkene. En slik visualisering er en av fordelene ved å bruke konkreter når en arbeider med brøk (Solem et al., 2017, s. 222). Disse kan hjelpe elevene med å danne mentale bilder, men om de faktisk bedrer forståelsen av brøkbegrepet kan vurderes.

5.3 Metodisk drøfting

I denne delen av kapittelet vil jeg foreta en metodisk drøfting. I den forbindelse vil jeg drøfte om studien måler det den var tenkt til å måle og om resultatene er overførbare. Dette blir da en drøfting av den indre og den ytre gyldighet. Til slutt vil det bli diskutert hvorvidt jeg som forsker kan ha påvirket de resultatene som foreligger i denne studien, som omhandler studiens pålitelighet.

5.3.1 Indre gyldighet

Gjennom oppgavebasert intervju har jeg fått innsikt i hvilke strategier og konkreter elevene benytter seg av når de sammenlikner. Et slikt intervju har bidratt med innsikt i dette ved at elevene gjennomførte strategien foran meg, og de utdypet det de gjorde mens de sammenliknet. Skriftlige besvarelser ville ikke gitt meg denne innsikten. På en annen side kan et slikt intervju gi et falskt innblikk i hvordan elevene sammenlikner fordi de blir satt i en posisjon hvor de må beskrive det de tenker. Det kan være at de følte seg presset til å gi en forklaring. Likevel virket det som at elevene var komfortable i rollen som deltaker.

Elevene hadde tilgang på noen kjente konkreter foran seg. Dette kan ha lagt opp til en forventning om at elevene måtte bruke disse da de sammenliknet. Dermed kan dette være en årsak til at elevene valgte å sammenlikne ved bruk av konkreter. Konkreter er som nevnt til god hjelp fordi det visualiserer brøkene og kan brukes som en støtte i sammenlikningen. Hadde elevene fått i oppgave å sammenlikne uten konkreter kunne det vært mer tydelig hvilke strategier som forekom. Konkretene var med på å skape også en slags gråsone for hvilke strategier som ble anvendt.

5.3.2 Ytre gyldighet

Resultatene som foreligger i denne studien, kan til en viss grad overføres til andre kontekster. Siden jeg har en kvalitativ studie er det lagt mye vekt på kontekst, detaljer og samspillet mellom forsker og deltaker. Dermed vil overførbarheten vurderes etter hvor gjenkjennbar resultatene som foreligger er. For at leseren skal kunne kjenne seg igjen i resultatene er det forsøkt å være transparent, slik at det ikke er lagt noe mellom linjene i denne studien.

5.3.3 Pålitelighet

Pålitelighet knyttes til hvordan jeg som forsker kan ha påvirket resultatene i denne studien. En faktor som spiller inn her er relasjonen mellom meg og elevene. Måten det kan ha påvirket resultatet er ved at elevene kan se på meg som en lærer fordi jeg tidligere har undervist på dette trinnet. Dette kan ha ført til at elevene følte på et press om å svare riktig, og at intervjuet var en vurderingssituasjon. For å motvirke denne oppfatningen var jeg tydelig på at hensikten med studien var å se hvordan de sammenliknet.

I intervjuet kan elevene blitt stilt spørsmål som kan føre de inn i en tankerekke. Dette er spørsmål hvor elevene ble bedt om å vise hva de tenkte ved hjelp av konkreter. De kan dermed ha blitt ledet inn til å sammenlikne ved hjelp av konkreter. Jeg som intervjuer var bevisst på at alle svar skulle få en positiv reaksjon, men at det ikke ble anerkjent om sammenlikningen var rett eller galt. Min respons kan dermed ha ført til usikkerhet hos elevene, ettersom de ikke fikk en bekreftelse på om de gjorde noe rett eller galt.

6.0 Avslutning

Som en avslutning av denne studien vil jeg nå presentere en konklusjon til forskningsspørsmålet mitt og hvilke implikasjoner studien kan ha på undervisningen. Det vil bli lagt frem sentrale funn som har vært med på å svare på oppgaven min. I slutten av kapittelet vil jeg gi en vurdering av masteroppgaven.

I denne studien har mitt mål vært å se på hvilke strategier og konkreter elevene bruker når de sammenlikner brøk. Dermed ble følgende forskningsspørsmål utformet:

Hvilke strategier og konkretiseringsmateriell bruker elevene i sjette trinn når de sammenlikner brøk?

For å svare på dette forskningsspørsmålet har elevers besvarelser fra sammenlikningen blitt studert.

Til sammen løste elevene seks sammenlikningsoppgaver med tilgang på konkreter. Det ble identifisert syv forskjellige strategier som elevene benyttet. Gjennom datainnsamling ble det klart at elevene benyttet seg av flere forskjellige strategier da de sammenliknet brøk. Fra teorien og tidligere forskning er det identifisert hvilke strategier som elevene benytter seg av når de sammenliknet. For å konkludere hvilke funn som forekommer i denne studien vil jeg gi en detaljert beskrivelse av de fire mest fremtredende strategiene. Videre vil jeg legge frem hvilke konkreter elevene brukte når de sammenliknet med disse strategien.

I studien min ble det avdekket at strategien som forekom flest ganger var restdel-strategien. Denne strategien kom til uttrykk flest ganger med konkreter, men også uten. En årsak til dette kan komme av at elevene ikke identifiserte størrelsene på delene som manglet, fordi de delene de bruke var allerede delt opp i størrelser. Dermed kan konkretene har skapt en hindring i å få et autentisk blikk på strategivalgene til elevene.

I tillegg brukte elevene restbrøk-strategien da de sammenliknet. Denne strategien kom også til utrykk både med og uten konkreter. Elevene som brukte strategien med konkreter, refererte tydelig til hvilke brøkdeler som manglet for å få en hel.

Referansepunkt strategien forekom også mange ganger, hvor elevene sammenliknet brøkene mot et tredjetall. Gjerne en halv eller en hel. I denne strategien begrunnet elevene basert på hvilken brøk som var nærmest til å bli en hel, men vektla ikke mengden som manglet til hel. Noen elever sorterte brøkene ved å foreta en sammenlikning av tellerne. Med denne strategien valgte elevene å se på telleren som en indikator på hvor mye en får. I oppgaven hvor telleren var lik, ga denne strategien rett svar.

Elevene benyttet seg av brøksirkler og melkekorker for å sammenlikne brøkene. Det kan komme av at brøksirkler bidrar til en visualisering av størrelsene på delene, og at det er motiverende og gøy for elevene å bygge brøksirkler. Melkekorker er derimot mest hensiktsmessig når elevene sammenlikner brøk med lik teller.

Studiens funn viser at elevene foretar seg av sammenlikningsstrategier hvor brøkene blir sammenliknet opp mot en hel. Disse strategiene innebærer referansepunkt, restdel og restbrøk strategien. Strategiene kan vise til at elevene er kjent med brøk som del av en helhet, fordi de vet at brøk er en størrelse mellom 0 og 1 (Solem et al., 2017).

Med tanke på matematikkundervisningen kan denne studien vise til hvilken oppfatning elevene har av brøk. Den kan gi en innsikt i hva elevene anser som viktig når de skal bedømme størrelsen av to brøker. Studien viser også hvordan elevene bruker konkreter som støtte i arbeid med brøk. Videre kunne det vært interessant å se hvordan elevene oversetter mellom de ulike representasjonsformene som forekom i denne studien. Dette kan så ses i lys av hvilken matematisk kompetanse elevene sitter på. Det kan også være interessant å se på hvordan elevene snakker når de holder på med brøk, og på den måten avgjøre om dette påvirke hvordan elevene tilnærmer seg brøkbegrepet.

For meg har denne studien vært en øyeåpner. Min oppfatning av konkreter var at de kan alene støtte elevenes arbeid med brøk. Det har vist seg at konkreter kun er en type representasjon av brøk. Som fremtidig lærer vil jeg være bevisst på å ikke bare benytte konkreter som viser brøk som del av en helhet, men kombinere undervisningen med andre representasjonsformer som kan styrke forståelsen til elevene. Dermed tar jeg med meg videre kunnskaper om hvordan ulike representasjoner må ta del i undervisningen. På denne måten kan jeg som lærer sørge for å legge til rette for en forståelse for brøkbegrepet og dens ulike aspekter.

7.0 Referanseliste

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. *Rational numbers: An integration of research*, 157-195.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics concepts and*

processes (s. 99 - 125). Academic Press.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education 15*(5), 323-341. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/748423

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1* (6. utg.). Universitetsforlaget.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th. utg.). Oxford University Press.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students’ fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7th. utg.). Routledge.

Cramer, K., Wyberg, T. & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics teaching in the middle school*, *13*(8), 490-496.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 40-177.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar forlag.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Acedemy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding* (3. utg.). Routledge.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 235-264.

Lyngsnes, K. M. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid* (3. utg. utg.). Gyldendal akademisk.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. *Rational numbers: An integration of research*, 85-105.

Maher, C. A. & Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 821-824.

Matematikksenteret. (u.å). *Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent*. NTNU. Hentet 09.05.23 fra https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/vanlige-misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k-og

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/MN%20KW%20dybdel%C3%A6ring%2015.04.18_0.pdf

Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker*. Læreboka forlag.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 studnets really think about fractions. I *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Townsville* (s. 430-437).

Petit, M. M., Marsden, E. L. & Laird, R. E. (2010). *A Focus on Fractions : Bringing Research to the Classroom*. Routledge.

Post, T., Lappan, G. & Cramer, K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *The arithmetic teacher*, *35*(2), 33-35. http://www.jstor.org/stable/41193238

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Høyskoleforlag.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm akademisk.

Siebert, D. & Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifting fractions. *Teaching children mathematics*, *12*(8), 394-400.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E. & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn : 2*. Gyldendal akademisk.

Sowder, J. T. (1991). Mental computation and number comparison: their roles in the development of number sense and computational estimation. I J. Hiebert & M. Behr (Red.), *Number concepts and operations in the middle grades* (s. 182-197). National council of teachers of mathematics.

Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg. utg.). Fagbokforlaget.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* Person Education Limited.

Wellington, J. J. (2000). *Educational research : contemporary issues and practical approaches*. Continuum.

8.0 Vedlegg

Vedlegg 1: Godkjenning fra Sikt
Vedlegg 2: Samtykkeskjema
Vedlegg 3: Intervjuguide

Sikt

Meldeskjema / Masteroppgave 2023, GLU 1-7 / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
824212	Standard	04.01.2023

Prosjekttittel
Masteroppgave 2023, GLU 1-7

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
Ninni Marie Hogstad

Student
Anna Elisabeth Holsæther

Prosjektperiode
01.11.2022 - 31.12.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Meldeskjema

Kommentar
Vår vurdering er at den planlagte behandlingen i dette prosjektet er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg og vurderingen her.

OM VURDERINGEN
Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (for eksempel ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale eller liknende).

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2

Forespørsel om deltagelse i masteroppgave

«Sammenlikning av brøk»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever tilnærmer seg sammenlikning av brøk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan elever tilnærmer seg når de sammenlikner brøker av ulike størrelser. Ut ifra dette håper jeg å få et innblikk i hvordan elevene resonnerer og begrunner når de arbeider med oppgaver om brøk. Det kan også være med på å gi innsikt i hvordan en som lærer kan bidra til å øke forståelse av hvordan elevene tenker om brøk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet. Masteroppgaven skrives og gjennomføres som en del av grunnskolelærerutdanning for trinn 1-7 ved Universitetet i Agder. Det er ingen ekstern oppdragsgiver.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Å sammenlikne brøker var et tema i matematikk i 5.trinn. På bakgrunn av dette vil hele 6.trinn få forespørsel om å delta i undersøkelsen.

Hva innebærer det for deg å delta?
Deltagelsen i prosjektet innebærer at fem tilfeldige elever stiller til intervju hvor de skal svare på oppgaver knyttet til sammenlikning av brøk. Noen av oppgavene vil likne på de oppgavene elevene arbeidet med på 5.trinn. Intervjuet vil vare i ca. 30 minutter. Eleven skal svare på oppgaver samt beskrive hvordan de resonnerer og begrunner når de løser oppgaver med brøk. Dette er for å få økt innsikt i hvordan eleven tenker. I forbindelse med intervjuet vil video- og lydopptak bli benyttet. Ved ønske kan foresatte få tilgang til intervjuguiden på forhånd.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun meg som student og mine veiledere som har tilgang til dataene som blir samlet inn, og de vil bli lageret på en data hvor en må ha brukernavn og passord for å få tilgang. Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Ved analyse av besvarelser vil elevens navn ikke komme frem. Video- og lydopptak vil bli transkribert og utdrag fra transkripsjon og bilde av besvarelser kan bli benyttet i oppgaven. Elevene som deltar i undersøkelsen vil ikke kunne gjenkjennes i den

endelige publikasjonen, og det vil benyttes fiktive navn på skole og elever. Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2023. Video- og lydopptak, transkripsjon, elevenes besvarelser og evt. andre notater vil da bli slettet og makulert.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes juni 2023. Lydopptak, transkripsjon, elevers besvarelser og evt. Andre notater vil da bli slettet og makulert.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder ved student Anna Elisabeth Holsæther har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved student Anna Elisabeth Holsæther på (annaeh18@student.uia.no) telefon 92 66 22 38 eller veiledere Ninni Marie Hogstad (ninni.m.hogstad@uia.no) telefon 37 23 32 96 og Kristina Markussen Raen (kristina.raen@uia.no) telefon 38 14 17 68.
- Vårt personvernombud: Ina Danielsen (personvernombud@uia.no) telefon 45 35 44 01

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen
Student Anna Elisabeth Holsæther

Prosjektansvarlig

Ninni M. Hogstad
Kristina Markussen Raen

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg………………………………………………………………………………

Underskrift av foresatt

Godkjenner

at…………………………………………………………………………...

Elevens navn

Kan delta i intervju om han/hun ønsker.

Jeg setter stor pris på tilbakemelding så fort som mulig! (Lever tilbake til lærer)

Med vennlig hilsen

Anna Elisabeth Holsæther

Vedlegg 3

Intervjuguide

Spørsmål for å skape en god atmosfære, og forberede eleven på intervjuet
- Hva tenker du på når jeg sier "en halv"?
- Hvis jeg sier "en-tredjedel", hva tenker du på da?
- Hvordan syns du det er å snakke om hva du tenker?

Introduksjon
- Hvilke brøker ser du her? Kan du vise meg ved hjelp av noen av de tingen her?
- Hva er en brøk?
- Kan du vise meg 3/4 ved hjelp av brøksirkler? Er det flere måter å vise 3/4 på?
- Hvis jeg tegner en tallinje her. Kan du vise meg hvor 2/6 er på den?
- Her har vi en haug med klosser. Kan du fortelle meg også vise med brøk hvor mange av klossene som er røde?

Spørsmålene om hvordan de kommer frem til hvilken brøk som er størst.
Når elevene har kommet frem til et svar.
- Hva tenker du når du sier at den er størst?
- Hvordan kom du frem til dette svaret?

Dersom elevene har tegnet eller skrevet ned noe:
- Beskriv hva gjorde her?
- Hvorfor valgte du å bruke tegning/sirkler/tall/symboler for å løse oppgaven?

Oppfølgingsspørsmål
- Kan du løse oppgaven på en annen måte?
- Er det noen forskjell på dem måtene? Eller er de helt like?
- Kan du vise meg hva du tenkte da du løste det på denne måten?

Avsluttende
- Har du noen gang brukt tegning, symboler eller figurer for å løse matematikk oppgaver?
- Hvordan syns du det var å snakke om det du tenkte? Følte du at du fikk sagt det du mente, og vist hva du tenkte?