«Helen vil spare 42 kroner hvis bilen kunne fly»

En kvalitativ casestudie om matematikk 1T-elevers arbeid med optimaliserende modellering med fokus på pre-matematisering og validering.

BEATE LIEN
MARTIN NORDSKOG

VEILEDERE

Cornelia Brodahl
Shaista Kanwal

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Master

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår studietid på lektorutdanningen ved Universitetet i Agder. Det har vært fem lærerike år, og til tross for krevende stunder, ser vi tilbake på studietiden som en fin og minnerik epoke i livene våre. Vi har lært og erfart mye som vi nå skal ta med oss inn i arbeidslivet. Vi har utviklet oss både faglig, men også på et personlig plan. Vi har fått blitt kjent med oss selv på nye måter, og også blitt kjent med mange nye mennesker som har gjort studietiden minnerik. Vi har opplevd både mestring og stress, og lært å håndtere nye utfordringer, og dermed blitt bedre rustet for arbeidslivet som nå venter. Disse fem årene har gått fort, og det er med blandede følelser vi sitter med den aller siste oppgaven vi skal levere før vi skal ut å møte nye utfordringer.

På veien hit er det flere som har hjulpet oss og som fortjener en takk. Vi vil først og fremst takke veilederne våre, Cornelia Brodahl og Shaista Kanwal, for all hjelp, gode råd og oppmuntring. Takk for god veiledning og ikke minst for tålmodigheten dere har vist ovenfor oss. Vi hadde ikke kommet i mål uten dere. Videre vil vi takke lærerne som lot oss gjennomføre pilotering og datainnsamling i deres klasser. Ikke minst må vi rette en stor takk til elevene som valgte å delta, både i piloteringen og i datainnsamlingen.

Vi vil også takke alle de dyktige foreleserne vi har hatt gjennom studiet. Dere har alltid vært hjelpsomme, støttende og åpne for spørsmål og diskusjoner. Ingen nevnt, ingen glemt.

Arbeidsplassene våre fortjener en stor takk for forståelse og fleksibilitet, og for å ha gitt oss muligheten til å kombinere jobb og studier. Her må vi også takke gode kolleger for støtte og oppmuntring underveis, og for å ha vært gode sparringspartnere.

Ikke minst må vi takke venner og familie for støtte, oppmuntring og heiarop gjennom hele prosessen. Dere har holdt ut med vår frustrasjon underveis, og har alltid vært der når vi har trengt dere. Helt til slutt vil vi, Beate og Martin, få muligheten til å takke hverandre for et nesten knirkefritt samarbeid som nå resulterer i denne masteroppgaven.

Kristiansand, mai 2023

Sammendrag

I 2020 fikk modellering og anvendelser en egen plass som et kjerneelement i læreplanen (LK20). Modellering i undervisningen vil kunne bidra til at elevene lærer hvordan man kan bruke matematikk som et hjelpemiddel i den virkelige verden, og dermed anser matematikk som nyttig både som fag og i livet utenfor skolen.

Vi har gjennomført en kvalitativ casestudie, hvor vi har undersøkt hvordan matematikk 1T-elever arbeider med matematisk modellering. Vi har fokusert på hvilke momenter i pre-matematisering som påvirker elevenes utvikling av en matematisk modell. Med pre-matematisering menes arbeidet elevene gjør før de utvikler en matematisk modell. Vi har også fokusert på elevenes validering, altså har vi undersøkt hvordan elevene vurderer resultatene de får på oppgavene. Selve oppgavene elevene arbeidet med involverte optimaliserende modellering, som vil si at elevene måtte vurdere hvilket av to gitte alternativer som var det beste.

Vi har samlet inn og analysert data fra fem grupper elever i en klasse, med tre elever per gruppe. Ved hjelp av observasjon, intervju og elevenes notater fant vi ut at elevene nøler med å bruke antakelser i utviklingen av en matematisk modell, til tross for at de allerede har kommet opp med disse antakelsene. Det viste seg også at spørsmålsstillingen bryter med elevenes forventninger til en matematikkoppgave, og at det «beste» alternativet intuitivt blir tolket som «det mest lønnsomme». Når elevene skulle validere resultatet de fikk basert på den matematiske modellen, vurderte de andre faktorer enn kun lønnsomhet. De brukte kunnskap fra deres virkelige liv til å inkludere andre faktorer som kunne spille inn når de skulle gi et svar på oppgavene. Dette medførte en endring av elevenes definisjon av det «beste» alternativet fra å kun omhandle lønnsomhet til å også inkludere andre relevante faktorer.

Summary

In 2020, modelling and applications, were introduced as a core element in the curriculum (LK20). Modelling in teaching can contribute the students to learning how to use mathematics as an aid in the real world, and thus consider mathematics useful both as a subject and in life outside school.

We have conducted a qualitative case study, where we have studied how mathematics 1T students work with mathematical modelling. We have focused on which factors in pre-mathematisation that affects students' development of a mathematical model. By pre-mathematisation is meant the work students do before developing mathematical models. We have also focused on the students' validation i.e., we have examined how the students assess the results they get on the assignments. The tasks the students worked on involves optimizing modelling, in which the students had to assess which of two given alternatives was the best.

We have collected and analysed data from five groups of students in a class, with three students per group. By using observation, interview, and students' notes, we found that students hesitate to use assumptions in the development of a mathematical model, even though they have already come up with these assumptions. It also turned out that the question posed violates the students' expectations of a mathematics task, and that the "best" alternative is intuitively interpreted as "the most profitable". When the students had to validate the result they got based on their mathematical model, they considered other factors than just profitability. They used knowledge from their real life to include other factors that could come into play when giving an answer to the tasks. With this, they changed their definition of the "best" alternative, from only regarding profitability to also include other relevant factors.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Som lærervikarer i matematikk har vi begge fått høre «hvorfor lærer vi dette?» eller «dette kommer jeg aldri til å få bruk for». I tillegg er det mange som er ferdig med videregående skole som uttrykker at de aldri får bruk for matematikken de lærte på skolen. I løpet av vår studietid har vi fått arbeidet med blant annet modellering, og vi har selv fått erfare hvordan modelleringsoppgaver er en kobling mellom matematikk og den virkelige verden. Dette er en av grunnene til at vi har valgt å fokusere på nettopp modellering i vår studie.

I dette kapittelet starter vi i 1.1 med å presentere hva som er bakgrunnen og fokuset i studien vår. I 1.2 presenterer vi formålet med studien, samt forskningsspørsmålene som ligger til grunn. I 1.3 presenterer vi oppgavens disposisjon.

1.1 Studiens bakgrunn og fokus

I Utdanningsdirektoratet (2020) sin presentasjon av kjerneelementet *Modellering og anvendelser* i læreplanen for matematikk T (MAT09-01) presiseres det at «Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive fenomener fra dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk T handler om å lage slike modeller.» I tillegg til å lage modeller, skal elevene også kunne vurdere gyldigheten til modellene de lager og kritisk vurdere modellens begrensninger og muligheter for å utvide til å gjelde i ulike situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020). Blum (2015) påpeker at ved å bruke eksempler fra den virkelige verden, så øker elevenes interesse for matematikk. I tillegg til at elevene får erfare hvordan den virkelige verden kan brukes til å forstå matematikk, så vil elevene også få erfare hvordan matematikk kan brukes til å forstå den virkelige verden. Ved å vektlegge modellering i større grad i skolen, tror og håper vi at flere elever vil få erfare sammenhengen mellom matematikk og den virkelige verden, og dermed også ser på matematikk som et nyttig fag.

Det at elevene skal kunne vurdere gyldigheten til modellene de lager er en del av det som kalles validering. Ifølge Blum og Ferri (2009) er validering et av de mest utfordrende stegene i elevenes arbeid med modellering. De peker også på utfordringer i arbeidet elevene gjør før de utvikler en matematisk modell, altså i det Jankvist og Niss (2020) kaller for pre-matematisering. Dette er funn som motiverer oss til å undersøke nettopp pre-matematisering og validering, da det kan gi oss innblikk i hva som kan være utfordrende for våre fremtidige elever i arbeid med disse stegene. Ved å ha et slikt innblikk vil vi kunne være mer oppmerksomme på hvordan vi underviser modellering, samt hvordan vi kan hjelpe elevene videre dersom de står fast i løsningsprosessen.

Optimaliserende modellering innebærer at man vurderer ulike alternativer, og finner det “beste” blant alternativene som er gitt i oppgaven (English, 2021). Etter å ha arbeidet med modellering selv har vi fått erfare at oppgaver som involverer optimaliserende modellering ofte krever at man gjør pre-matematisk arbeid, samt at man validerer resultatene man får. Vi har valgt å bruke oppgaver som involverer optimaliserende modellering i vår studie, da vi ønsker å undersøke elevenes arbeid med nettopp pre-matematisering og validering.

Selv om mange land har modellering som en del av læreplanene sine, er det fremdeles lite inkludert i undervisningen (Blum & Ferri, 2009). Julie (2002) påpeker at lærere har problemer med å implementere modellering i klasserommet på hensiktsmessig måte, og at dette kan skyldes lærernes manglende erfaring med modelleringsoppgaver gjennom egen utdannelse. Med modellering som sentral del av norsk læreplan, har vi behov for å øke egen kompetanse om hvordan elevene jobber med modelleringsoppgaver, og hvordan vi som lærere kan hjelpe elevene til å nå målene i læreplanen. Vi ser på denne studien som en mulighet til å øke egen fagdidaktisk kompetanse i matematisk modellering og til å bidra til informasjon på dette forskningsfeltet.

Vår forskningsinteresse ligger først og fremst hos elever på videregående skole, da vi selv underviser på disse trinnene. I vår litteraturstudie og søk etter tidligere forskning på modellering, fant vi at det var lite forsket på modellering i matematikk 1T. Derfor er vår studie rettet mot matematikk 1T-elever.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å øke egen kompetanse om modellering, og bidra til økt kunnskap om elevenes arbeid med modelleringsoppgaver, slik at vi enklere skal kunne hjelpe elevene våre med utfordringer som ofte forekommer. Ved å være bevisst på hvordan elevene arbeider med de utfordrende aspektene ved modellering, vil vi kunne legge opp undervisningen med mål om å unngå at disse utfordringene oppstår. Siden pre-matematisering og validering virker å være særlig utfordrende for elevene har vi valgt følgende forskningsspørsmål:

1. *Hvilke momenter i pre-matematisering påvirker matematikk 1T-elevers utvikling av en matematisk modell i arbeid med optimaliserende modellering?*
2. *Hvordan validerer elevene resultatene sine på oppgavene?*

1.3 Disposisjon

Denne studien presenteres gjennom seks kapitler. I kapittel 2 presenterer vi teori og tidligere forskning som er relevant for studien. I kapittel 3 beskriver vi studiens design og prosesser knyttet til innsamling og analyse av datamaterialet. Kapittelet avsluttes ved at vi drøfter studiens reliabilitet, validitet og etiske aspekter ved datainnsamling og analyse. I kapittel 4 presenterer vi resultatene fra analysen av datamaterialet. I kapittel 5 drøfter vi disse resultatene i lys av teori og tidligere forskning. I kapittel 6 trekker vi en konklusjon basert på drøftingen. Her ser vi også på implikasjoner av resultatene med tanke på matematikkundervisning, samt vurderer vår egen oppgave og ser på studien betydning for oss selv.

2 Teoretisk perspektiv og tidligere forskning

I dette kapittelet presenterer vi det teoretiske perspektivet som ligger til grunn i vår studie, samt tidligere forskning som er relevant for studien. Vi innleder med å vise til definisjoner og begrepsavklaringer i delkapittel 2.1. I 2.2 presenterer vi teori om modellering i undervisning. Modelleringsprosesser og teori knyttet til modelleringsoppgaver presenteres henholdsvis i delkapittel 2.3 og 2.4. Siden vi i vår studie fokuserer på elevers validering, presenterer vi teori om validering i delkapittel 2.5. Til slutt gjennomgår vi tidligere forskning som er relevant for vår studie i delkapittel 2.6.

2.1 Definisjoner og begrepsavklaring

I dette delkapittelet avklarer vi relevante begreper som danner grunnlag for vår forskning. I 2.1.1 avklarer og definerer vi begrepene *matematiske modeller*, *modellering* og *anvendelser*. I 2.1.2 redegjør vi for begrepet *modelleringskompetanse*.

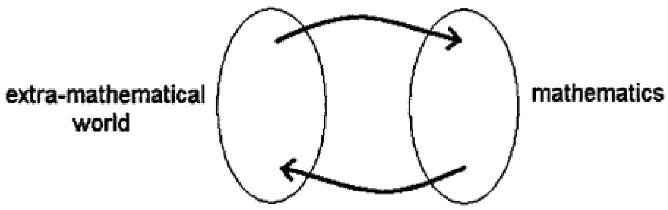
2.1.1 Matematisk modellering og anvendelser

Doerr og English (2003) beskriver matematiske modeller som systemer av elementer, operasjoner, forhold og regler som kan brukes til å beskrive, forklare, eller forutsi oppførselen til et annet kjent system. Modellering handler blant annet om å kunne utvikle slike modeller og bruke dem til å forklare og forutsi reelle situasjoner. Hele modelleringsprosessen kan beskrives som prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikk, i begge retninger (Blum & Ferri, 2009). Det handler om at et virkelig problem kan matematiseres og løses matematisk, og at det matematiske resultatet kan tolkes og vurderes for at det skal gi mening i den virkelige verdenen.

Begrepet modellering er knyttet til anvendelser av matematikk. *Modellering* beskriver aktiviteter der man utvikler og bruker modeller, og vurderer modellenes gyldighet. Begrepet *anvendelse* viser til en kobling mellom matematikk og noe annet (Pollak, 1969), og handler om å *bruke* matematikken i ulike situasjoner. Niss et al. (2007) beskriver at anvendelser av matematikk finner sted hver gang matematikk brukes for å håndtere en del av den virkelige verdenen. For å kunne anvende matematikk, trenges en modell enten eksplisitt eller implisitt (Niss et al., 2007).

2.1.2 Modelleringskompetanse

Det finnes en rekke definisjoner for modelleringskompetanse (Blum, 2015; Blum & Ferri, 2009; Niss et al., 2007; Røsseland, 2005). Felles for de alle, er at de beskriver modelleringskompetanse som evnen til å kunne oversette mellom den matematiske og den ekstra-matematiske verden, slik Niss et al. (2007) har illustrert i figur 2.1. *Ekstra-matematisk* er et begrep som henviser til alt som er utenfor matematikkens verden, og kalles også «den virkelige verdenen» (Niss et al., 2007).



Figur 2.1: «Matematikk og resten av verden» (Niss et al., 2007, s. 4).

Niss et al. (2007) beskriver modelleringskompetanse som evnen til å identifisere relevante spørsmål, variabler, relasjoner eller antakelser i en gitt situasjon fra den virkelige verden. Videre gjelder det å kunne oversette disse til matematikk, for så å tolke og validere løsningen i forhold til situasjonen som er gitt i oppgaven. Modelleringskompetanse innebærer også evnen til å sammenligne gitte modeller med antakelsene gjør, samt å kunne undersøke egenskapene til de gitte modellene.

2.2 Modellering i undervisning

I dette delkapittelet presenterer vi teori knyttet til hvordan modellering kan brukes i undervisning. I 2.2.1 presenterer vi to måter å bruke modellering i matematikkundervisningen. I 2.2.2 forklarer vi hvorfor modellering fungerer godt som gruppeaktivitet.

2.2.1 Modellering som fartøy og modellering som innhold

Julie (2002) beskriver to ulike måter å bruke modellering i matematikkundervisningen på, *modellering som fartøy* (modelling as a vehicle) og *modellering som innhold* (modelling as content). Med *modellering som fartøy* menes det at man bruker modellering som et verktøy til å lære og undervise andre matematiske konsepter. Med *modellering som innhold* menes det at man fokuserer undervisningen på modellering som en kompetanse i seg selv, og hovedfokuset er å lære kompetansene som trengs for å modellere reelle situasjoner matematisk.

2.2.2 Modellering som gruppeaktivitet

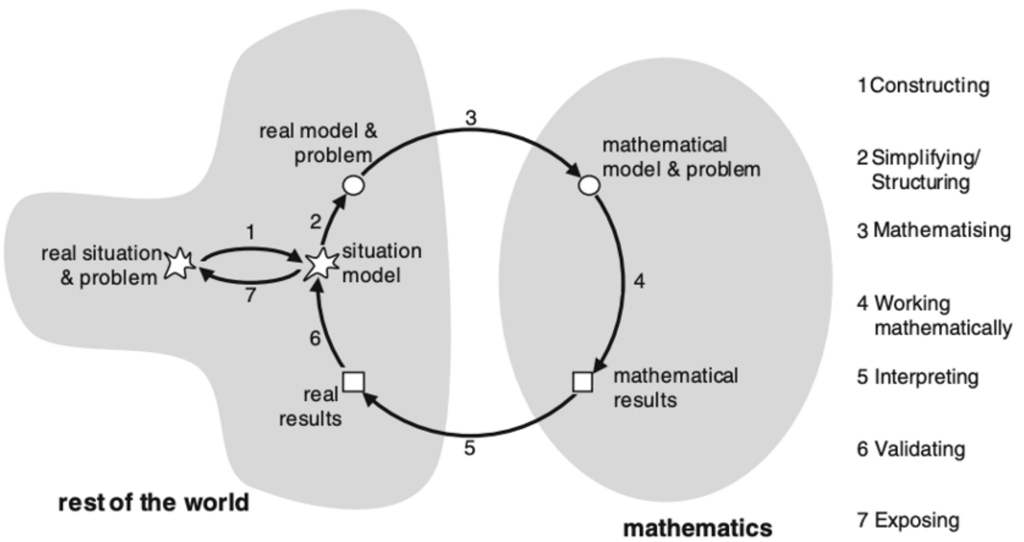
Zawojewski et al. (2003) har undersøkt modellering som gruppeaktivitet, og peker på at modellering fungerer godt som sosiale aktiviteter der elever jobber sammen og utfordres til å forklare og rettferdiggjøre sine ideer. I arbeid med modellering som en gruppeaktivitet, peker Zawojewski et al. på at ferdighetene til gruppen som helhet er bredere og mer nøyaktige, enn ferdighetene til individene. Læreren bør gi den matematiske autoriteten til gruppen, og unngå å hjelpe gruppene så mye som mulig. Det kan variere hvor store gruppene bør være, men Zawojewski et al. påpeker at grupper med tre personer ofte fungerer godt. Med flere deltakere i en gruppe kan det ofte dannes subgrupper som jobber med forskjellige ting, mens i et par defineres det ofte en såkalt sterk og en svak elev.

2.3 Modelleringsprosesser

Det finnes mange modeller som beskriver ideal-typiske løsningsprosesser for modelleringsoppgaver (Blum & Ferri, 2009; Blum & Leiß, 2006, 2007; Maaß, 2010; Voskoglou, 2007). I dette delkapittelet presenterer vi tre slike modeller, hvor fokuset varierer fra modell til modell. Først, i 2.3.1, presenterer vi Blum og Leiß (2007) sin syv-stegsmodell. I 2.3.2 tar vi for oss en seks-stegsmodell presentert av Blum og Leiß (2006). Til slutt, i 2.3.3, presenterer vi en fire-stegsmodell som er utviklet av Blum og Ferri (2009). Selv om det er flere likheter mellom modellene, så er det også en del aspekter som skiller dem, noe vi diskuterer underveis.

2.3.1 Blum og Leiß' syv-stegsmodell

Blum og Leiß (2007) beskriver en modelleringssyklus som inkluderer overgangen mellom den ekstra-matematiske verden og den matematiske verden. Blum (2015) omtaler denne modellen som en syv-stegsmodell (figur 2.2).



Figur 2.2 Blum & Leiß' syv-stegsmodell (Blum, 2015, s. 76).

Modellen til Blum og Leiß (2007) finner vi gjengitt og diskutert i Ferri (2006). Ferri tar utgangspunkt i syv-stegsmodellen, men inkluderer også et krav om ekstra-matematisk kunnskap i steg 2 og 3. Hun utelukker steg 7, *eksponere*, og i stedet for *situasjonsmodell* kaller hun fasen for *mental representasjon av situasjonen*.

Ferri (2006) skiller mellom begrepene *fase* (phase) og *steg* (transition). *Fasene* refererer til de seks nøkkelstadiene (uttrykt gjennom substantiver i figur 2.2) som kan nås i den iterative modelleringssyklusen. *Stegene* (uttrykt gjennom verb i figur 2.2) refererer til overgangen mellom de ulike fasene. Vi benytter oss av disse begrepene for å beskrive nøkkelstadier og overganger i alle modellene for modelleringsprosesser som vi presenterer videre.

I den følgende gjennomgangen tar vi utgangspunkt i Blum og Leiß (2007) og Ferri (2006) sine forklaringer på de syv stegene, og benytter oss av Gjøvik (2019) sin oversettelse av stegenes navn til norsk.

1. Konstruere:
   Det første steget handler om å lese oppgaveteksten og å forstå problemet, slik at en såkalt situasjonsmodell kan konstrueres (Blum & Leiß, 2007). I stedet for situasjonsmodell, kaller Ferri (2006) fasen for en «mental representasjon av situasjonen (MRS)». MRS kan være forskjellig fra individ til individ, da den enkelte assosierer til egne erfaringer eller fokuserer på fakta gitt i oppgaven.

2. Forenkle/strukturere:
   Det andre steget innebærer å forenkle og strukturere situasjonen slik at den blir mer konkret ved å utvikle en reell modell av situasjonen (Blum & Leiß, 2007). Dette kan innebære å gjøre antakelser, finne informasjon og filtrere bort irrelevant informasjon. For Ferri (2006) handler dette steget om overgangen fra MRS til en reell modell, og hun forklarer denne overgangen som en idealisering av problemet. Kravet om ekstra-matematisk kunnskap er avhengig av hva slags oppgave som er gitt.

3. Matematisere:
   Det tredje steget innebærer overgangen fra den ekstra-matematiske verden til den matematiske verden. Her utvikler man en matematisk modell basert på den reelle modellen (Blum & Leiß, 2007). Ferri (2006) peker på ekstra-matematisk kunnskap som svært viktig i dette steget, da det er kunnskap som kreves for å utvikle en matematisk modell.

4. Jobbe med matematikk:
   I det fjerde steget i syv-stegsmodellen bruker den enkelte sin matematiske kompetanse for å komme frem til et matematisk resultat basert på modellen fra forrige steg (Ferri, 2006). Hvilke matematiske krav som stilles vil være avhengig av oppgaven som gis.

5. Tolke:
   I det femte steget gjelder det å overføre det matematiske resultatet til den ekstra-matematiske verden, og tolke resultatet som et virkelig resultat (Blum & Leiß, 2007). Ferri (2006) påpeker at dette steget sjeldent blir gjennomført bevisst av oppgaveløseren.

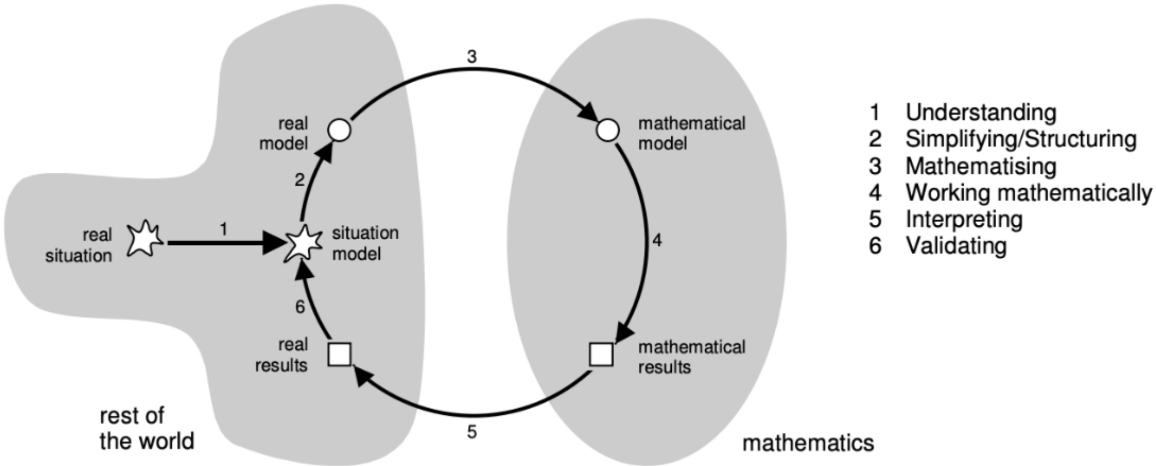
6. Validere:
   Det sjette steget innebærer å se på hvor rimelig resultatet er. Gir resultatet mening i forhold til det opprinnelige problemet? Oppgaveløseren tenker her på hvordan de virkelige resultatene korresponderer med deres MRS (Ferri, 2006).

7. Eksponere/vise:
   Hele modelleringsprosessen ender med en fremstilling av et endelig svar på det opprinnelige problemet (Blum & Leiß, 2007).

Læreren trenger verktøy som støtter adekvate elevstrategier. Blum og Ferri (2009) foreslår at syv-stegsmodellen kan brukes som et strategisk verktøy i arbeidet med å løse modelleringsoppgaver. Den vil i mange tilfeller være nyttig å bruke, men for elever anser de en fire-stegsmodell som mer passende (se 2.3.3).

2.3.2 Blum og Leiß' seks-stegsmodell

Blum og Leiß (2006) presenterer en modelleringssyklus bestående av seks steg (figur 2.3). Denne skiller seg fra syv-stegsmodellen ved at den ikke inneholder steg 7, *eksponere*/*vise*. I tillegg kalles det første steget *Forstå* (Understanding), i motsetning til syv-stegsmodellen hvor dette kalles *Konstruere* (Constructing). *Forstå* og *konstruere* beskriver de samme aktivitetene, og disse begrepene kan derfor brukes om hverandre.

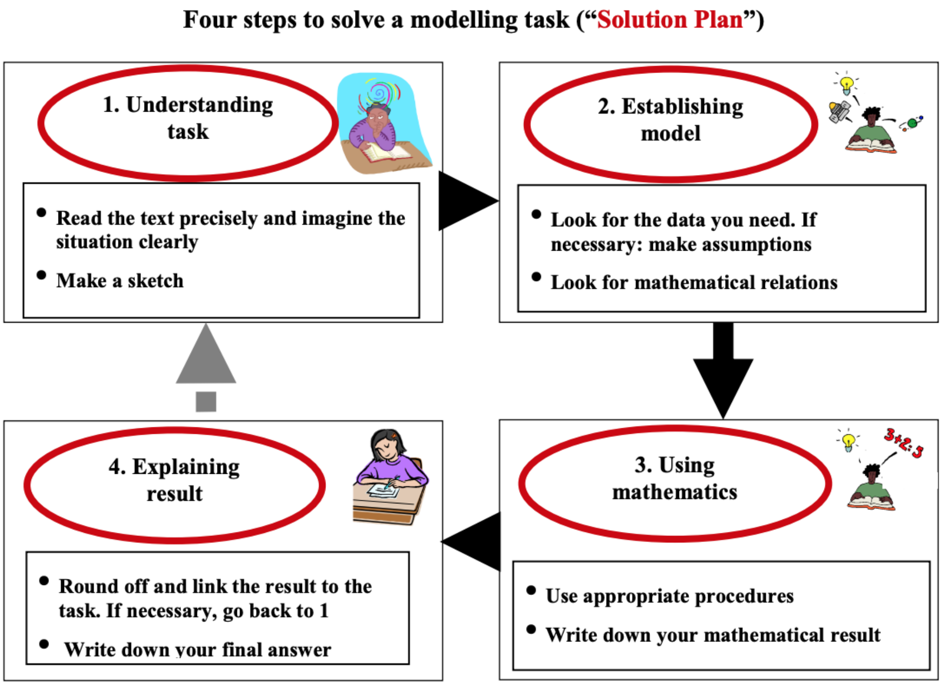


Figur 2.3: Blum og Leiß' seks-stegsmodell (2006, s. 1626).

Det er seks-stegsmodellen som danner grunnlaget for vårt analyseverktøy (se 3.6). Vi ønsker å ha fokus på pre-matematisering og validering, og dermed vil ikke elevenes eksponering være relevant da dette steget ikke påvirker pre-matematisering og validering.

2.3.3 Blum og Ferris fire-stegsmodell

Blum og Ferri (2009) har utviklet en fire-stegsmodell som kan brukes som et verktøy for elever i deres arbeid med matematisk modellering (figur 2.4). Her er steg 2 og 3 fra syv-stegsmodellen forent i ett steg, *etablere modell*, mens steg 5, 6 og 7 er forent i det som her kalles *forklare resultater*.



Figur 2.4: Blum og Ferri (2009, s. 54) sin «løsningsplan» for modelleringsoppgaver.

Målet med denne fire-stegsmodellen er at den skal kunne læres av elevene, slik at de kan bruke den selvstendig som et hjelpemiddel dersom det oppstår noen utfordringer i løsningsprosessen. Blum og Ferri (2009) anbefaler en nøye introduksjon av modellen.

Det at modelleringsprosesser ofte fremstilles i en syklus viser at det kan være nødvendig å bevege seg gjennom stegene flere ganger. For eksempel kan validering resultere i at man ser seg nødt til å gjøre endringer i antakelser og dermed må bevege seg gjennom syklusen på nytt (Blum & Ferri, 2009). Ferri (2007) påpeker at elever ikke nødvendigvis følger modelleringssyklusen steg for steg, men at de har sine egne modelleringsruter. De starter i en fase de foretrekker, for så å bevege seg gjennom ulike faser én eller flere ganger, med fokus på én fase om gangen.

2.4 Modelleringsoppgaver

I dette delkapittelet starter vi med å beskrive hva som skiller modelleringsoppgaver fra tekstoppgaver i 2.4.1, før vi i 2.4.2 sammenligner med problemløsningsoppgaver. Deretter ser vi på en kategorisering av ulike typer modellering, og hvordan en oppgave kan ha trekk fra flere kategorier i 2.4.3.

2.4.1 Modelleringsoppgaver versus tekstoppgaver

Noen vil kanskje påstå at modelleringsoppgaver er det samme som tekstoppgaver. Pollak (2011) beskriver at matematisk modellering ikke bare er et nyere navn for tekstoppgaver eller problemløsningsoppgaver i tradisjonell forstand. Hensikten med en tekstoppgave er ifølge Pollak å øve på matematikken innenfor det temaet det for øyeblikket jobbes med i undervisningen. Svaret på oppgaven anses som riktig dersom eleven klarer å finne den aktuelle algoritmen og utfører den på riktig måte. Matematisk modellering er mer enn dette. I modelleringsoppgaver må man vurdere resultatene man får i forhold til den opprinnelige situasjonen for å sjekke at de er rimelige. Det er selvfølgelig viktig at den matematiske utregningen man gjør i modelleringsoppgaver er riktig, men det er ikke nok for at den totale matematiske prosessen skal være vellykket.

2.4.2 Modelleringsoppgaver versus problemløsingsoppgaver

Modelleringsoppgaver har mange fellestrekk med generelle problemløsingsoppgaver i matematikken. Både Albarracín og Gorgorió (2014) og Blum og Ferri (2009) har undersøkt modelleringsoppgaver i lys av Pólya sin generelle problemløsingssyklus. Pólyas syklus består av fire steg – (a) *forstå problemet*, (b) *utforme en plan*, (c) *utføre planen* og (d) *se tilbake*. Blum og Ferri beskriver hvordan en lignende syklus kan brukes av elever når de jobber med modelleringsoppgaver. De påpeker at fire-stegsmodellen (se 2.3.3) er tilpasset for å kunne brukes som en plan for å løse modelleringsoppgaver, og at stegene i fire-stegsmodellen ligner Pólyas fire steg.

Albarracín og Gorgorió (2014) har undersøkt om, og i hvilken grad, elever utformer en strategi for å løse modelleringsoppgaver. Dette tilsvarer (b) *utforme en plan* i Pólyas syklus. Av elevene som utformet en strategi var det flere som kom frem til en løsning, mens ingen elever uten strategi kom frem til et svar. Albarracín og Gorgorió mener at enda flere av elevene med strategier kunne ha kommet frem til en løsning dersom de hadde fått tid og mulighet til å implimentere planen sin.

Også Czocher (2018) påpeker at modellering har klare likheter med problemløsing, og sammenligner med Pólyas syklus. Hun kommenterer at *validering* ser ut til å fylle en rolle som er analog med steget (d) *se tilbake* i Pólyas syklus, hvor problemløseren må se tilbake og vurdere sin egen løsning.

2.4.3 Ulike typer modellering
Det finnes mange forskjellige oppgaver som kan kategoriseres som modelleringsoppgaver, og variasjonen blant typer modelleringsoppgaver er stor (Maaß, 2010). English (2021, s. 5) presenterer fire kategorier som beskriver de vanligste typene modellering:

- Beskrivende modellering (*descriptive modelling*): Bruker virkelig data til å beskrive eller analysere en reell situasjon, og bruker modellering til å beskrive mulige utfall, med eventuelle antakelser tatt i betraktning.
- Forutsigende modellering (*predictive modelling*): Bruker modellering til å analysere tendenser i et datasett for å forutsi videre data eller utfall.
- Optimaliserende modellering (*optimizing modelling*): Bruker modellering til å velge det «beste» alternativet av to eller flere alternativer, eller den beste planen for å oppnå et mål.
- Vurderende og rangerende modellering (*rating and ranking modelling*): Bruker modellering til å vurdere og rangere forskjellige alternativer basert på gitte eller selvdefinerte kriterier og data. Man velger selv hvilke kriterier man vil vektlegge når man skal vurdere de ulike alternativene opp mot hverandre.

En modelleringsoppgave kan ha trekk fra flere kategorier (English, 2021). For eksempel kan oppgaveløseren ha behov for å analysere en situasjon (beskrivende modellering) for å senere kunne bruke modellen til å forutsi et utfall (forutsigende modellering).

2.5 Validering i matematisk modellering
Validering er et sentralt steg i arbeid med modelleringsoppgaver, da det å vurdere resultatenes rimelighet er noe av det som skiller modelleringsoppgaver fra andre tekstoppgaver (Pollak, 2011). Det finnes flere måter å validere på. I 2.5.1 presenterer vi en typologi, utviklet av Czocher (2018) som ser på validering som en sammenligning mellom ulike faser i seks-stegsmodellen. I 2.5.2 tar vi for oss Ferri (2006) sin beskrivelse av to typer validering.

2.5.1 Validering som sammenligning mellom ulike faser
Czocher (2018) påpeker at validering er et av de mest utfordrende stegene for elever som jobber med modellering. Ifølge Czocher er validering å undersøke hvorvidt en modell er tilstrekkelig. Hun beskriver at man kan se på validering på to måter i løpet av modelleringsprosessen:

1) Validering som en sjekk på slutten for å understreke riktige svar og løsninger.
2) Validering som en pågående aktivitet hvor elevenes beslutninger vektlegges.

Czocher (2018) beskriver hvordan man kan se på validering som en sammenligning mellom et valideringsobjekt og en valideringsstandard. Hun påpeker at alle fasene i seks-stegsmodellen kan være valideringsobjekt eller valideringsstandard. For eksempel kan elevene sammenligne sine likninger (objekt: matematisk modell) med deres liste over variabler (standard: reell modell) for å sørge for at alle variablene ble inkludert. Basert på egne observasjoner, utviklet Czocher en typologi som består av fem slike par med objekter og standarder (figur 2.5).

Type	Object of validation	Standard of validation	Description
V_1	Mathematical results	Mathematical expression	Checking results of a calculation or mathematical analysis mathematically
V_2	Mathematical expression	Situation model	Comparing the mathematical expression, its constituent components or relationships, to the interpretation of the problem setting
V_3	Mathematical expression	Real model	Comparing the mathematical expression, its constituent components or relationships, to the idealized version of the problem setting
V_4	Real results	Situation model	Comparing the real results to empirical or based-on-empirical expectations (predicted by theory)
V_5	Real results	Real model	Comparing real results against physical principles accounted-for in the real model

Figur 2.5: Czocher (2018, s. 144) sin valideringstypologi med par av valideringsobjekter og valideringsstandarder.

I vår studie fokuserer vi på valideringstypene hvor reelle resultater er valideringsobjekt. V_4 sammenligner reelle resultater med situasjonsmodell. V_5 sammenligner reelle resultater med reell modell. Disse to valideringstypene er mest relevante for vår studie, da vi ønsker å undersøke hvordan elevene validerer resultatene de får på oppgavene. Dette samsvarer med punkt 1) Validering som en sjekk på slutten for å understreke riktige svar og løsninger. I Czocher (2018) sin studie var V_4 den valideringstypen som forekom mest av de to typene validering som hadde reelt resultat som valideringsobjekt.

2.5.2 Intuitiv og kunnskapsbasert validering

Ferri (2006) beskriver at validering handler om at den enkelte tenker over hvordan det reelle resultatet stemmer overens med sin mentale representasjon av situasjonen, det vi gjerne kaller situasjonsmodellen. Basert på data fra en studie identifiserte Ferri to måter å validere på, intuitiv og kunnskapsbasert validering.

Intuitiv validering er en noe ubevisst måte å validere på, der den enkelte finner ut at resultatene kan være feil, uten å egentlig kunne begrunne dette. Personen som løser oppgaven kan “få en følelse av” at resultatene er feil, fordi de ikke passer inn i egne assosiasjoner. Kunnskapsbasert validering er en bevisst måte å validere på, der den enkelte enten er enig eller uenig med de resultatene de får basert på deres ekstra-matematiske kunnskap (Ferri, 2006).

2.6 Tidligere forskning

I dette delkapittelet presenterer vi tidligere forskning på modellering, med fokus på pre-matematisering og validering. I 2.6.1 presenterer vi funnene til Blum og Ferri (2009), hvor de diskuterer utfordringer i modelleringsprosesser. I 2.6.2 ser vi på forskning knyttet til elevers utfordringer med matematisering, og hvordan disse kan stamme fra pre-matematisering. Til slutt, i 2.6.3, tar vi for oss tidligere forskning som omhandler elevers arbeid med oppgaver som involverer optimaliserende modellering.

2.6.1 Utfordrende steg i modelleringsprosessen

Resultater fra PISA (*Programme for International Student Assessment*) viser at elever i hele verden har utfordringer med modelleringsoppgaver (Blum & Ferri, 2009). En viktig årsak til at modellering kan være vanskelig for elever er ifølge Blum og Ferri de kognitive kravene som stilles i modelleringsoppgaver. Modellering er knyttet til andre matematiske kompetanser, som det å lese, resonnere, kommunisere og anvende ulike problemløsningsstrategier. Blum og Ferri påpeker at matematisk modellering må læres av elevene, og at det må være en balanse mellom lærerens veiledning og elevenes uavhengighet i arbeidet med modellering.

Blum og Ferri (2009) har undersøkt hvordan lærere og elever håndterer matematisk modellering. De refererer blant annet til sine egne prosjekter, DISUM og COM[2]. Begge disse prosjektene tar for seg hvordan elever i aldersgruppen 14-16 år og deres lærere håndterer kognitivt krevende modelleringsoppgaver.

Blum og Ferri (2009, s. 48) trekker frem tre eksempler på elevenes utfordringer i arbeid med modelleringsoppgaver. Disse eksemplene er fra steg 1, 2 og 6 i syv-stegsmodellen til Blum og Leiß (2007), altså Konstruere, Forenkle/strukturere og Validere.

- Steg 1: Det som kan være utfordrende i første steg er at elevene ofte ignorerer konteksten, og kun trekker ut tallene fra oppgaveteksten og gjør utregninger. Dette er ifølge Blum og Ferri en metode som ofte er vellykket i dagens klasserom i arbeid med tekstoppgaver.
- Steg 2: En utfordring når det kommer til å forenkle og strukturere er at elevene ikke er i stand til å gjøre antakelser.
- Steg 6: Validering ser ut til å være særlig problematisk. I de fleste tilfeller sjekker ikke elevene rimeligheten i løsningene sine i det hele tatt, men overlater dette ansvaret til læreren.

Blum og Ferri (2009) mener at mange av utfordringene kan forklares ved at elevene i de fleste tilfeller ikke bevisst bruker problemløsningsstrategier. De henviser til flere studier som viser at strategier er nyttige også i modellering. Dette understreker viktigheten av at modellering må læres av elevene.

2.6.2 Utfordringer ved matematisering og pre-matematisering

Schaap et al. (2011) har undersøkt, i en nederlandsk kontekst, hvilke komponenter et rammeverk bør inneholde for å identifisere muligheter og blokkeringer hos elever som forsøker å formulere en matematisk modell. I Nederland er nemlig modellering et obligatorisk tema for alle elever som tar kurs i det som tilsvarer matematikk R1 og R2 i Norge. Til tross for at elevene har modellering som obligatorisk tema, har mange av de vanskeligheter med å bygge matematiske modeller (Schaap et al., 2011). Vos (2007) peker på at matematiske modeller ofte allerede er gitt på skriftlige prøver, og dermed mister elevene muligheten til å selv matematisere situasjonen. En konsekvens av dette er at elevene ikke lærer å utvikle sine egne modeller (Schaap et al., 2011).

Jankvist og Niss (2020) har studert elevers utfordringer i møte med matematisk modellering på videregående skoler i Danmark, med fokus på de ekstra-matematiske aspektene i de tidlige fasene i modelleringssyklusen. De beskriver at flere av utfordringene elevene møter på, deriblant utfordringer med å utvikle en matematisk modell, stammer fra faser før matematisering under det de kaller *pre-matematisering*.

Jankvist og Niss (2020) presenterer flere funn som er relevante for vår studie. For det første viste det seg at mange elever synes å ha problemer med å akseptere modelleringsoppgaver. Noen av elevene som deltok i studien mente at oppgavene ikke var matematikkrelevante og avviste derfor oppgavene. Andre forsøkte å svare på oppgavene, men på en utilfredsstillende måte ved at de kun tok i bruk betraktninger fra det virkelige liv eller ved at de ikke klarte å se hvordan de skulle komme i gang på grunn av informasjonen som var gitt i oppgaven. Modelleringsoppgaver så ut til å bryte den typiske didaktiske kontrakten som var etablert i dansk videregående matematikkundervisning. Begrepet *didaktisk kontrakt* beskriver arbeidsdeling og forventninger mellom lærer og elever. Hva kan læreren forvente at elevene gjør, og hva kan elevene forvente at læreren gjør? Jankvist og Niss peker særlig på hvilke oppgaver elevene kan forvente at læreren gir dem, og hva slags tilbakemeldinger de kan forvente fra læreren. Den didaktiske kontrakten etableres som oftest ubevisst, ofte basert på erfaringer og vaner som er utviklet over flere år. Hvis elever kun har blitt presentert tradisjonelle matematikkoppgaver som kun har ett korrekt svar, hvor det forventes at man bruker nylig lært kunnskap og metode, så vil introduksjon av modelleringsoppgaver kunne føre til brudd på den didaktiske kontrakten. Modelleringsoppgaver krever ofte at elevene tar egne antakelser og beslutninger, og oppgavene har nødvendigvis ikke ett korrekt svar.

Et annet funn av Jankvist og Niss (2020) viser at utfordringer med pre-matematisering er en stor grunn til at matematisering er en stor snublestein i arbeidet med modelleringsoppgaver. Det at elevene har vansker med å pre-matematisere situasjoner bidrar til at de ikke er i stand til å matematisere situasjonene på en fornuftig måte. Jankvist og Niss (2020) peker på flere årsaker til at mislykket matematisering skyldes feilaktig pre-matematisering, deriblant at elevene ikke klarer å gjøre relevante antakelser og forenklinger av situasjonen som er gitt i oppgaven.

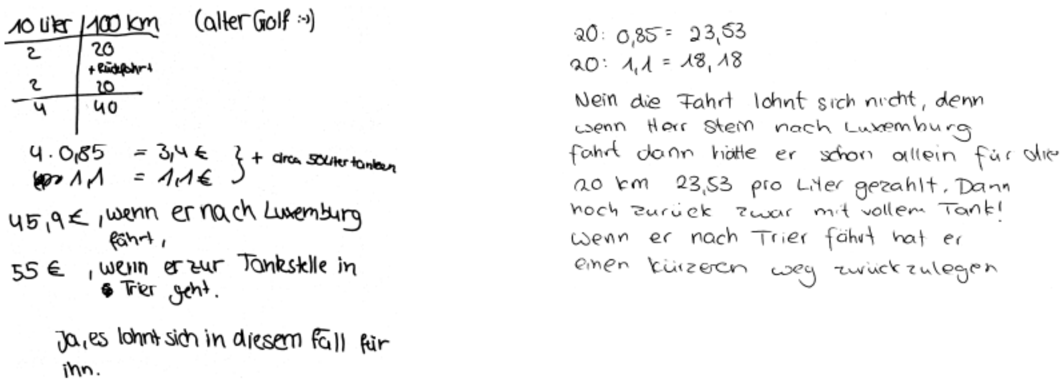
2.6.3 Elevers arbeid med optimaliserende modellering

Blum og Leiß (2006) har undersøkt hvordan elever i aldersgruppen 10-16 år og lærerne deres håndterer modelleringsoppgaver. En av oppgavene som ble brukt i studien er «Filling up» (figur 2.6). Denne oppgaven kan ut ifra English (2021) sin kategorisering av modelleringstyper, kategoriseres som en oppgave som involverer optimaliserende modellering (se 2.4.3).

Filling up
Mister Stone lives in Trier which is close to the border of Luxemburg.
To fill up his VW Golf he drives to Luxemburg where immediately behind the border, 20 km away from Trier, there is a petrol station.
There you have to pay 0.85 Euro for one litre of petrol whereas in Trier you have to pay 1.1 Euro.
Is it worthwhile for Mister Stone to drive to Luxemburg?

Figur 2.6: Oppgaven «Filling up», som beskrevet i Blum og Leiß (2006, s. 1625).

Blum og Leiß (2006) beskriver to typiske løsninger av oppgaven «Filling up». Figur 2.7 viser eksempler på hver av løsningstypene. Den ene er det de kaller for en standardmodell, der elevene kun sammenligner de to mulighetene med tanke på kostnad, uten å inkludere andre faktorer. Den andre typiske løsningen er det de kaller for en tradisjonell løsning. Her trekker elevene ut tall fra oppgaveteksten og bruker disse til å gjøre utregninger, uten særlig refleksjon om hvordan tallene skal brukes. Denne typen løsning er kjent for mange lærere i klasserommet, og er en typisk løsning på tekstoppgaver. Dette samsvarer også med det Blum og Ferri (2009) påpeker om at elever sliter med steg 1 i modelleringssyklusen, nettopp fordi mange begynner å regne med de tallene de får oppgitt uten å ta stilling til konteksten (se 2.6.1).



Figur 2.7: Elevers svar (på tysk) fra studien til Blum og Leiß (2006, s. 1627). Svaret til venstre viser en standardmodell, og svaret til høyre er en typisk tradisjonell løsning.

Blum (2011) benytter oppgaven «Filling up» til å illustrere syv-stegsmodellen til Blum og Leiß (2007). Han beskriver hva som kan inngå i de ulike stegene i arbeid med oppgaven. Elevene må i steg 1 forstå oppgaven, og kunne konstruere en situasjonsmodell basert på den virkelige situasjonen. En slik situasjonsmodell vil blant annet inkludere de to bensinstasjonene og avstanden mellom dem. I steg 2 må elevene strukturere situasjonen ved å inkludere andre variabler som størrelse på bensintank og hvor mye drivstoff bilen forbruker. For å forenkle situasjonsmodellen, må også elevene definere hva som menes med «verdt det». I standardmodellen vil «verdt det» bety «minst mulig kostnad». I steg 3 må elevene transformere den reelle modellen til en matematisk modell. Dette inkluderer å sette opp matematiske uttrykk med nødvendige variabler. Steg 4 handler om å gjøre utregninger som fører til matematiske resultater. I det femte steget tolkes disse resultatene som virkelige resultater, og fører til en anbefaling til Mister Stone. Blum beskriver at steg 6, validere, kan medføre at elevene ser seg nødt til å bevege seg gjennom syklusen en gang til, for å inkludere flere faktorer som tid og forurensing. Basert på hvilke faktorer som vektlegges, vil det være mulig å gi ulike svar til Mister Stone. Til slutt, i det syvende steget, fremstiller man den endelige løsningen.

3 Metode
I metodekapittelet beskriver vi prosessen knyttet til innsamling og analyse av datamaterialet. Kapittelet starter med en beskrivelse av forskningstilnærming og design i delkapittel 3.1. I delkapittel 3.2 begrunner vi valg av metoder for innsamling av data. Delkapittel 3.3 inneholder utvalgsprosessen av deltakere i studien. I delkapittel 3.4 forklarer vi hvordan vi gjennomførte pilotering, mens vi i delkapittel 3.5 presenterer og begrunner valg av oppgaver. Delkapittel 3.6 redegjør for hvordan vi har bearbeidet datamaterialet for å komme frem til resultatene. I delkapitlene 3.7 og 3.8 drøftes henholdsvis reliabilitet og validitet, og etiske betraktninger til forskningen vår.

3.1 Forskningstilnærming og design
For å kunne gå grundig inn i elevenes arbeid med modellering, valgte vi en kvalitativ forskningstilnærming. Ifølge Postholm og Jacobsen (2018) er formålet med kvalitativ forskning å beskrive og forstå mennesker i en annen situasjon enn forskeren selv. De påpeker at forskerens erfaringer vil påvirke både hva som studeres, samt hvordan innsamlet data forstås. En kvalitativ forskningstilnærming ga oss muligheten til å oppfatte og forsøke å forstå elevenes valg i arbeidet med oppgavene, noe som var vesentlig for studiens forskningsspørsmål. Ved å bruke deltakerobservasjon forpliktet vi oss til et interpretivistisk forskningsparadigme (Bryman, 2016). Interpretivisme innebærer at vi som forskere ikke er nøytrale, da våre egne antakelser og handlinger vil forme forskningsprosessen. Ulike grupper oppfatter verden forskjellig, og det er derfor viktig at vi som forskere tar hensyn til at vi og elevene kan ha ulike oppfatninger av en situasjon (Oates, 2006).

Studiens forskningsdesign er casestudie, og det innebærer å studere en «case», avgrenset i tid og rom. Oppmerksomheten i casestudier kan for eksempel rettes mot ett individ, flere individ, en gruppe eller en organisasjon (Postholm & Jacobsen, 2018). Man fokuserer på et tydelig avgrenset problemområde som man undersøker i dybden (Befring, 2015). Med tanke på at vi i vår studie undersøkte en gruppe med relativt få deltakere, ville en kvalitativ casestudie være et passende forskningsdesign som ga oss muligheten til å gå i dybden på elevenes arbeid med modelleringsoppgaver. Christoffersen og Johannessen (2012) hevder at man kan ha én eller flere analyseenheter innenfor både enkelt casedesign og flercasedesign. I vår studie avgrenset vi til et enkelt casedesign, med en matematikk 1T-klasse som case, og med flere analyseenheter. Det vil si at selv om vi samlet inn data fra én klasse, så er data samlet inn fra flere grupper i denne klassen, altså fra flere enheter.

3.2 Datainnsamlingsmetoder
Elevnotater sammen med transkripsjon av lydopptak fra observasjon og intervju utgjorde datamaterialet i denne studien. Vi gjennomførte observasjon og intervju i to grupper som vi har valgt å kalle intervjugrupper. I tillegg fikk vi samle inn notater fra tre grupper som vi har valgt å kalle notatgrupper. I dette delkapittelet forklarer vi hvordan og begrunner hvorfor vi har gjennomført observasjon (3.2.1) og intervju (3.2.2) som metode for datainnsamling. Videre begrunner vi hvorfor vi valgte å samle inn elevenes notater (3.2.3), og til slutt hvorfor vi valgte å ta lydopptak av intervjuene (3.2.4).

3.2.1 Observasjon
Observasjon er mer enn å bare se. Det inkluderer å se og ta notater om mennesker, hendelser, oppførsel, rutiner og så videre(Cohen et al., 2011). Vi valgte semi-strukturert observasjon, hvor forskeren ofte har en agenda med problemstillinger, men innsamling av data for å belyse disse problemstillingene er langt mindre forhåndsbestemt. Ved semi-strukturerte observasjoner vil man gå gjennom observasjonsdata før man foreslår en forklaring på fenomenene som observeres (Cohen et al., 2011). Denne typen observasjon var relevant for vår datainnsamling, siden vi på forhånd hadde en problemstilling vi ønsket å undersøke, men ingen klar forventning om forklaring på de fenomenene vi ville observere.

Vår rolle som observatører gikk ut på å lytte, samt å notere eventuelle oppfølgingsspørsmål underveis. Elevene jobbet selvstendig i grupper og ble ikke avbrutt av oss som observatører. På denne måten hadde ikke vi noe innvirkning på elevenes løsningsprosess, noe som bidrar til å øke studiens reliabilitet (se 3.7).

3.2.2 Intervju
Etter at elevene i intervjugruppene hadde arbeidet med en oppgave gjennomførte vi et semi-strukturert intervju. Semi-strukturerte intervjuer innebærer at vi som forskere har en intervjuguide med spørsmål som omhandler spesifikke temaer som vi skal innom i løpet av et intervju, men at vi har stort spillerom i hvordan vi responderer underveis i intervjuet (Bryman, 2016). På forhånd av datainnsamlingen lagde vi en slik intervjuguide (vedlegg 1) for å blant annet sørge for at vi stilte de samme spørsmålene til hver vår gruppe. I intervjuguiden hadde vi på forhånd skrevet ned spørsmål som kunne bidra til å samle inn ytterligere data knyttet til våre forskningsspørsmål. Semi-strukturerte intervjuer ga oss muligheten til å endre rekkefølgen på spørsmålene i intervjuguiden, samt muligheten til å stille relevante spørsmål som vi ikke hadde tenkt på i forkant av intervjuet (Postholm & Moen, 2018).

3.2.3 Elevnotater
Etter intervjuene med intervjugruppene samlet vi inn notatene, noe samtlige samtykket til i forkant. Dette inkluderte kladdeark og innføringsark. Ved å ta vare på intervjugruppenes notater ville det være enklere for oss å analysere data, da det kan være vanskelig å forstå hva elevene diskuterer kun basert på lydopptak. Det ville gi oss et tydeligere og mer helhetlig bilde dersom vi kunne se på elevenes notater, samtidig som vi hørte på diskusjonene deres.

I tillegg fikk vi også samle inn notater fra de gruppene som jobbet med tilsvarende oppgaver i klasserommet, og som hadde samtykket til at vi kunne samle inn disse. Med tanke på at vi ikke var til stede for å observere eller stille spørsmål til løsningsprosessen, så har vårt fokus i analysen vært på data som er samlet inn i intervjugruppene. Vi analyserte også notater fra notatgruppene, og brukte disse som supplementer for å se hvordan disse samsvarte med data fra intervjugruppene.

3.2.4 Lydopptak
Ved å gjøre lydopptak kunne vi som observatører fokusere på det å lytte og stille gode oppfølgingsspørsmål, i stedet for å bruke tiden på å notere hva elevene sa til enhver tid. I tillegg ville vi ikke gå glipp av noen utsagn, sett bort ifra tilfeller hvor tekniske problemer kunne oppstå. Vi sørget for å ha to lydopptakere per gruppe, i tilfelle det skulle oppstå tekniske problemer.

Etter opptakene gjennomgikk vi lydfilene og transkriberte disse. Det å transkribere ga oss en skriftlig oversikt over elevenes utsagn, og bidro til at det ville være enklere å analysere data senere. I transkripsjonen valgte vi å gi elevene fiktive navn for å sørge for elevenes anonymitet. Navnene i transkripsjonen beskriver hvilken gruppe eleven var i, samt en bokstav for å skille mellom de tre elevene i hver intervjugruppe. For eksempel vil elev 1-A, 1-B og 1-C referere til de tre elevene i intervjugruppe 1.

En fordel med lydopptak fremfor videoopptak kan være at elevene i større grad vil kunne fokusere på oppgaven. Ved videoopptak kan fokuset bli flyttet over på hvordan man ser ut, hvordan man sitter og lignende. På denne måten vil lydopptak kunne sørge for en mer naturlig situasjon for elevene. På den andre siden vil videoopptak kunne fange opp ansiktsuttrykk og kroppsspråk, noe som kan være relevant i datainnsamling for flere forskere. Med tanke på at vi ønsket å studere løsningsprosesser fremfor holdninger, så ville ikke dette spille noe stor rolle i vår studie.

3.3 Utvalgsprosess og deltakere
Vår forskningsinteresse ligger først og fremst hos videregående elevers møte med matematisk modellering. I vår litteraturstudie og søk etter tidligere forskning på modellering, fant vi at det var lite forsket på modellering i matematikk 1T, og ønsket derfor å basere vår studie på nettopp denne gruppen. Derfor tok vi kontakt med en tidligere medstudent som underviste i matematikk 1T, og vi fikk tillatelse til å samle inn data i hennes klasse. Vi besøkte klassen for å informere om hva det ville innebære å delta i datainnsamling, og både læreren og elevene var positive til deltakelse. Elevene fikk utdelt et informasjonsskriv (vedlegg 2), hvor de fikk mulighet til å samtykke til at vi fikk samle inn notater og besvarelser, og/eller om de var villige til å stille i gruppearbeid og intervju med lydopptak.

Av 15 elever, var det syv som samtykket til gruppearbeid og intervju med lydopptak. Seks av de syv elevene ble tilfeldig valgt ut og satt sammen i grupper på tre personer. Vi mente at tre personer per gruppe var hensiktsmessig, noe også Zawojewski et al. (2003) påpekte i sin studie (se 2.2.2). Vi valgte å ta ut én intervjugruppe hver på hvert sitt grupperom, da det ville være fordelaktig å observere én gruppe om gangen, ettersom vi som observatører lettere kunne fokusere på hvordan disse jobbet sammen og samtalte om oppgavene (Postholm & Moen, 2018).

Resten av klassen, ni elever, ble igjen i klasserommet sammen med læreren, og jobbet med de samme oppgavene i grupper på tre personer. Vi samlet inn notatene til disse tre gruppene, da samtlige hadde samtykket til dette. Grunnen til at vi valgte å samle inn notater fra notatgruppene var for å få et større datagrunnlag.

3.4 Pilotering

I forkant av datainnsamlingen til masterstudien gjennomførte vi en pilotering, der vi i liten skala prøvde ut modelleringsoppgavene planlagt benyttet i studien. Hensikten var å finne ut om oppgavene vi hadde valgt bidro til at vi fikk svar på forskningsspørsmålene våre, og om spørsmålene vi hadde i intervjuguiden var relevante. Vi gjennomførte pilotundersøkelsen i en matematikk 1T-klasse på en annen skole med to grupper av tre elever som deltok på frivillig basis. Pilotundersøkelsen gjennomførte vi etter samme plan som for datainnsamlingen for studien (3.2), men uten lydopptak.

Piloteringen førte til at vi byttet ut én av de to oppgavene. Oppgaven vi beholdt viste seg å være passende med tanke på hva vi ønsket å undersøke. Oppgaven vi valgte bort viste seg å hverken kreve at elevene gjorde antakelser eller satte opp noen matematisk modell, da elevene kunne begrunne svarene sine kun basert på ekstra-matematisk kunnskap. Med tanke på at vi ønsket å undersøke elevenes arbeid med pre-matematisering så bestemte vi oss for å bytte ut denne oppgaven med en oppgave vi, av erfaringer fra et tidligere emne, visste krever at man gjør forenklinger og setter opp en matematisk modell.

3.5 Valg av modelleringsoppgaver

Elevene jobbet med to modelleringsoppgaver hver under datainnsamlingen. Begge oppgavene involverte det English (2021) kategoriserer som optimaliserende modellering (se 2.4.3). I 3.5.1 gjør vi rede for hvilke prinsipper, i tillegg til English sin kategorisering, som har ligget til grunn når vi har valgt oppgaver. Videre presenterer vi de to oppgavene henholdsvis i 3.5.2 og 3.5.3, og beskrive hvordan vi har utviklet dem. I 3.5.4 klassifiserer vi oppgavene i henhold til Maaß (2010) sitt klassifiseringsskjema, og begrunner valg av oppgavene basert på klassifiseringene.

3.5.1 Prinsipper for design av modelleringsoppgaver

I utviklingen av oppgaver, tok vi utgangspunkt i prinsippene til Galbraith (2007, s. 55) for design av modelleringsoppgaver:

- Prinsipp 1: Oppgavene har en reell kobling til den virkelige verdenen.
- Prinsipp 2: Det er mulig å identifisere og spesifisere matematiske spørsmål fra den generelle spørsmålstillingen.
- Prinsipp 3: Det er mulig å formulere en løsningsprosess som inneholder matematikk som er kjent for elevgruppen, å gjøre nødvendige antakelser, og å finne data om nødvendig.
- Prinsipp 4: Det er mulig å løse problemet matematisk og tolke resultatene.
- Prinsipp 5: Det er mulig å validere resultatene med hensyn på matematisk nøyaktighet og korrekthet, og hvordan svaret passer i kontekst til det originale spørsmålet.
- Didaktisk prinsipp: Spørsmålet kan deles opp i flere spørsmål, uten at den reelle situasjonen mister sin integritet.

Hensikten med vår studie er å undersøke elevenes evne til å forstå og strukturere et gitt problem, utvikle matematiske modeller og validere matematiske resultater. Vi valgte å ikke fokusere på elevenes matematikkferdigheter, og dermed valgte vi oppgaver der matematikken i seg selv ikke var krevende. Vi valgte også å la elevene bruke hjelpemidler som kalkulator, graftegner og lignende dersom de ønsket dette. For at oppgavene skulle kunne løses innen rimelig tid tillot vi også elevene å bruke internett til å finne informasjon som de selv følte var nødvendig for å kunne løse oppgavene. Dermed stilte ikke oppgavene store krav til ekstra-matematisk kunnskap, da de kunne søke opp den informasjon de mente de trengte.

3.5.2 Oppgave 1: Sommerjobb

Oppgave 1 kalte vi *Sommerjobb*, og den er formulert slik:

> «Sommerferien nærmer seg, og din venn Jørgen vil ha en sommerjobb. Han fant en jobb som betaler 20 kroner i timen over minstelønna og en annen jobb som tilbyr halvparten av minstelønna pluss provisjon på 20 kroner per solgte vare. Jørgen spør etter din hjelp. Hvilken jobb ville du anbefalt han å ta?»

Oppgaven hentet vi fra et sett med oppgaver vi jobbet med som studenter i emnet *Arbeidsmåter i matematikk* (MA-424) ved UiA høsten 2022. Vi var derfor kjent med oppgaven og dens potensiale for å ta i bruk hele modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2006). Oppgaven fulgte også prinsippene til Galbraith (2007) for design av modelleringsoppgaver. Her kunne elevene selv gjøre antakelser for hva minstelønna kunne være basert på egen kunnskap, eller de kunne finne informasjon om minstelønn fra andre kilder. De måtte vurdere både hva slags salgsjobb det kunne dreie seg om, og anta hvor mange varer det ville være realistisk for Jørgen å selge. Elevene kunne ha fokus på lønnsomhet, forutsigbarhet og/eller andre faktorer.

3.5.3 Oppgave 2: Fylle tanken

Oppgave 2 kalte vi *Fylle tanken*, og den er formulert slik:

> «Helen bor på Lund, like ved en bensinstasjon. Hun kjører en Toyota Yaris, og skal fylle opp bensintanken. Venninna til Helen sender bilde av bensinprisene i Grimstad, hvor det viser seg at bensinen er 3 kroner billigere. Er det verdt å ta turen til Grimstad for å fylle opp bensintanken?»

Fylle tanken var inspirert av oppgaven «Filling up» fra Blum og Leiß (2006) (se 2.6.3). I vår oppgave valgte vi bevisst å ikke inkludere bensinprisen, men valgte å kun oppgi prisforskjellen. I tillegg oppga vi kun de to stedene, Lund og Grimstad, uten å nevne avstanden mellom dem. Dermed måtte elevene selv finne ut hvilken informasjon de trengte for å løse oppgaven og gjøre egne antakelser basert på det. I tillegg ville det at vi ikke oppga den eksakte prisen gi flere muligheter for generalisering i løsningen. Svaret om hva som er billigst vil avhenge av bensinprisene på de to stedene. Her kunne man gi et mer generelt svar, i den forstand at man kunne si «Lund/Grimstad lønner seg dersom prisen er over/under x kroner per liter».

I tillegg til spørsmålet om lønnsomhet, ga også oppgaven mulighet for å inkludere andre faktorer. For eksempel kunne elevene velge å ta hensyn til tidsbruk og/eller utslipp fra bilkjøringen. Dette er faktorer som kunne påvirke hvordan elevene tolket «verdt det», og som kunne medføre at de ga forskjellige anbefalinger etter hvilke faktorer de valgte å vektlegge.

3.5.4 Klassifisering og begrunnelse av oppgaver

Maaß (2010) utviklet et klassifiseringsskjema for modelleringsoppgaver. De seks første punktene (tabell 3.1) har Maaß beskrevet som spesifikke for modelleringsoppgaver, mens de resterende tre punktene er beskrevet som mer generelle egenskaper for oppgavedesign og utvelgelsesprosesser. Disse seks klassifiseringskategoriene veiledet oss i utvalg og videreutvikling av oppgaver, som kunne bidra til at oppgavene stilte krav som var nødvendige for at vi skulle kunne samle inn relevant data og senere svare på våre forskningsspørsmål.

Table 1 Classification scheme for modelling tasks

	Name of the classification[a]	Categories of the classification						
Classifications for modelling tasks	I Focus of modelling activity[a]	Whole process (no/yes)	Understanding the situation (no/yes)	Setting up the real model (no/yes)	Mathematizing (no/yes)	Working within mathematics (no/yes)	Interpreting (no/yes)	Validating (no/yes)
	II Data[a]	Superfluous (no/yes)	Missing (no/yes)	Superfluous and missing (no/yes)	Inconsistent (no/yes)	Matching (no/yes)		
	III Nature of relationship to reality[a]	Authentic (no/yes)	Close to reality (no/yes)	Embedded (no/yes)	Intentionally artificial (no/yes)	Fantasy (no/yes)		
	IV Situation[a]	Personal situation (no/yes)	Occupational situation (no/yes)	Public situation	Scientific situation (no/yes)			
	V Type of model used[a]	Descriptive (no/yes)	Normative (no/yes)					
	VI Type of representation[a]	Text (no/yes)	Picture (no/yes)	Text and picture (no/yes)	Material (no/yes)	Situation (no/yes)		

[a]Choose one category in each classification

Tabell 3.1: Utdrag av Maaß (2010, s. 296) sitt klassifiseringsskjema for modelleringsoppgaver.

Vi har klassifisert våre oppgaver i henhold til de seks spesifikke modelleringsklassifikasjonene, og vil her begrunne på hvert punkt hvorfor vi valgte som vi gjorde i utviklingen av oppgavene:

I) Modelleringsaktivitet: Begge oppgavene våre krevde at *hele modelleringssyklusen* benyttes. Ettersom vi valgte å ha fokus på pre-matematisering og validering, var det viktig at oppgavene la til rette for at hele syklusen skulle benyttes. Dette er steg som befinner seg i ulike deler av modelleringssyklusen, og som må ses på i sammenheng med hele modelleringsprosessen.

II) Data: Begge oppgavene våre hadde *manglende data*. Dette krevde at elevene brukte ekstra-matematisk kunnskap til å enten anta manglende data, eller finne den relevante informasjonen fra andre kilder. Dette valgte vi ettersom vi ønsket å undersøke elevenes arbeid i pre-matematisering, noe som innebærer nettopp det å gjøre antakelser og finne relevant informasjon.

III) Forhold til virkeligheten: Begge oppgavene var *virkelighetsnære*, i den forstand at problemet i seg selv var virkelighetsnært, men dataen som ble gitt i de to oppgavene (henholdsvis provisjon per vare og bensinpris) var konstruert. Ettersom dataen som oppgis ikke var ekte, må oppgavene klassifiseres som *virkelighetsnære*, og ikke *autentiske*. Et av hovedargumentene for å drive med modellering i skolen, er at det skal hjelpe elevene med å se sammenhenger mellom matematikk og den virkelige verdenen (Blum & Ferri, 2009; Maaß, 2010). Derfor var det viktig at oppgavene oppleves som virkelighetsnære og relevante for elevenes hverdagsliv. Oppgave 1 var virkelighetsnær for elevene ettersom de var i en alder der man gjerne har søkt, eller skal søke, etter sommerjobber, og en slik problemstilling kunne være aktuell for elevene. Oppgave 2 var virkelighetsnær for elevene ettersom flere i den alderen kjører moped, og snart skulle begynne prosessen med å ta førerkortet på bil. Dermed er drivstoff og drivstoffpris relevant. I tillegg hadde drivstoffpriser vært et aktuelt tema i mediebildet den siste tiden, da prisen hadde økt betraktelig det siste året før datainnsamling, noe som gjør at oppgaven også er svært tidsrelevant.

IV) Situasjon: Hvorvidt elevene ser på en kontekst som interessant eller relevant for deres daglige liv avhenger ikke bare av oppgaven som blir gitt, men også av den enkelte elev og læringssituasjonen (Maaß, 2010). Situasjonene elevene møtte på i oppgavene, var situasjoner som kunne vært hentet fra deres dagligliv. Situasjonen i våre oppgaver var derfor å anse som *personlig* for elevene, noe Maaß (2010) betegner den type oppgaver som er nærmest elevene. Dette valgte vi for at oppgavene skulle oppleves som relevante og aktuelle for elevene, samt at det økte sannsynligheten for at elevene forstod problemene og ville klare å lage situasjonsmodeller, tolke et svar i en virkelig kontekst og vurdere gyldigheten til svaret.

V) Type modell: Man kan skille mellom deskriptive og normative modeller (Maaß, 2010). Deskriptive modeller har som mål å representere virkeligheten så nøyaktig som mulig, som for eksempel å regne ut overflatearealet til en menneskekropp. Normative modeller derimot, definerer en del av virkeligheten. Et eksempel på dette kan være modellen som bestemmer hvordan skatt beregnes ut ifra inntekt. Modellene elevene jobbet med i vår studie var *deskriptive*, ettersom de prøvde å beskrive virkeligheten.

VI) Representasjon: Begge oppgavene var representert ved *tekst*, noe som er en vanlig representasjonsform kjent for mange elever (Maaß, 2010).

3.6 Analysemetode for innsamlet data

I dette delkapittelet beskriver vi prosessen knyttet til analyse av datamaterialet. Vi redegjør for hvordan vi har bearbeidet datamaterialet og hvilket datamateriale vi har vektlagt for å komme frem til resultatene. I 3.6.1 presenterer vi et analyseverktøy vi utviklet for å systematisere kjennetegn på de ulike stegene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2006). Dette verktøyet ble brukt til å analysere transkripsjonen av lydopptak fra de to intervjugruppene, da det fokuserer i stor grad på elevenes muntlige utsagn og diskusjoner. I 3.6.2 presenterer vi et mindre analyseverktøy vi utviklet for å systematisere kjennetegn på tilsvarende steg i skriftlig data.

Hovedfokuset i analysen har vært på intervjugruppene ettersom vi har et større datagrunnlag fra disse, og dermed større mulighet til å trekke konklusjoner på forskningsspørsmålene våre. Selv om studiens fokus er på hvordan elevene jobbet med pre-matematisering og validering, tok vi utgangspunkt i hele modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2006). Dersom de enkelte stegene i syklusen skulle gi mening, måtte de ses i kontekst av hele syklusen og hvordan de forskjellige stegene påvirket hverandre.

3.6.1 Analyseverktøy for observasjon og intervju

Som analyseverktøy i analysen av transkripsjon utviklet vi en oversikt over kjennetegn på ulike steg i modelleringssyklusen som kan komme til uttrykk i elevenes diskusjoner og utsagn (tabell 3.2). Vi tok utgangspunkt i seks-stegsmodellen til Blum og Leiß (2006), og lagde en oversikt over kjennetegn basert på teori (se 2.3.1), samt vår tolkning av de ulike stegene i modellen.

Steg	**Kjennetegn**

Forstå	- Elevene sier
	    - «Det jeg tror de mener ...»
	    - «Det jeg tror de spør etter ...»
	    - «Så da skal vi/så vi skal ...»
	- Elevene repeterer fra oppgaveteksten.
	- Elevene diskuterer oppgaveteksten.

Forenkle/strukturere	- Elevene sier
	    - «La oss si at ...»
	    - «Vi antar at ...»

	- «Skal vi bare si ...» - «Vi bare bestemmer at ...» - Elevene finner manglende informasjon. - Elevene sorterer informasjon. - Elevene gjør antakelser. - Elevene forenkler verdier. - Elevene diskuterer hva som menes med «best», f.eks. hva som ligger i ordene «verdt det».
Matematisere	- Elevene bruker matematiske begreper. - Elevene setter opp matematisk modell.
Jobbe med matematikk	- Elevene gjør utregninger. - Elevene bruker matematiske løsningsmetoder. - Elevene kommer frem til et matematisk resultat.
Tolke	- Elevene sier - «Det vil si at ...» - «Så dette betyr at ...» - Elevene diskuterer hva det matematiske resultatet betyr i den gitte situasjonen. - Elevene bruker begrep fra matematikk og den virkelige verden i samme setning.
Validere	- Elevene sier - «Dette gir mening» - «Dette gir ikke mening» - «Gir dette mening?» - «Har vi gjort det riktig?» - «Jeg hadde valgt ... fordi ...» - Elevene vurderer løsningen. - Elevene vurderer hvordan andre faktorer påvirker modellen og/eller svaret.

Tabell 3.2: Kjennetegn på ulike steg i seks-stegsmodellen til Blum og Leiß (2006), brukt i analyse av transkripsjon fra lydopptak.

Vi valgte å fargekode de ulike stegene i transkripsjonen. Hver farge representerer ett av de seks stegene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2006), slik det er presentert i tabell 3.2. All transkripsjon som viste at elevene var i et steg, ble markert med fargen tilhørende dette steget. For eksempel ble elevsitatet under markert blått da eleven repeterte fra oppgaveteksten, noe som indikerte at eleven var i det første steget, Forstå:

1-A: OK så den ene jobben betaler 20 kroner i timen over minstelønn. Og den andre betaler halvparten av minstelønna pluss provisjon på 20 kroner per solgte vare. Burde ikke vi få vite liksom hvor vanskelig det er å selge en vare?

Vi fokuserte på ett steg om gangen for å få en oversikt over hvordan elevene arbeider i de ulike delene av modelleringssyklusen. Fokuset var på stegene i pre-matematisering, samt validering, men vi inkluderte samtlige steg for å få en bedre forståelse for valgene elevene tar og påvirkningen av disse.

3.6.2 Analyseverktøy for skriftlige data

Som et analyseverktøy i analysen av elevenes notater utviklet vi en ny oversikt over kjennetegn på de ulike stegene, ettersom ikke alle kjennetegnene fra tabell 3.2 kommer frem gjennom skriftlig arbeid. I besvarelsene kunne det være utfordrende å identifisere noen av stegene, særlig *Forstå* og *Tolke*, da dette var steg i modelleringssyklusen som ofte kom til uttrykk gjennom muntlig aktivitet. Også *Validere* kunne være utfordrende å identifisere, men vi ønsket å inkludere også dette steget i analyseverktøyet for skriftlige besvarelser, da det var interessant å se om elevene selv inkluderte validering i fremstillingen sin. I analyse av skriftlige besvarelser og notater kunne vi ikke si noe om rekkefølgen på stegene elevene har vært gjennom, men kun se etter tegn på om de hadde vært innom stegene i løpet av modelleringsprosessen.

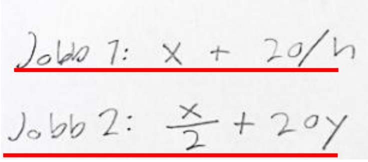
Steg	**Kjennetegn**
Forstå	- Elevene lager tegninger. - Elevene skriver ned gitt informasjon på arket.
Forenkle/strukturere	- Elevene noterer antakelser/informasjon fra andre kilder. - Elevene sorterer og bruker informasjon gitt i oppgaven. - Elevene forenkler verdier.
Matematisere	- Elevene setter opp matematisk modell.
Jobbe med matematikk	- Elevene gjør utregninger. - Elevene bruker matematiske løsningsmetoder. - Elevene kommer frem til et matematisk resultat.

Tolke	- Elevene skriver:
	    - «Det vil si at ...»
	    - «Så dette betyr at ...»

Validere	- Elevene skriver: - «Vi hadde valgt ... fordi ...» - Elevene kommenterer løsningen. - Elevene kommenterer hvordan andre faktorer påvirker modellen og/eller svaret.

Tabell 3.3: Kjennetegn på ulike steg i seks-stegsmodellen til Blum og Leiß (2006), brukt i analyse av elevenes skriftlige arbeid.

Tabell 3.3 ble brukt til å analysere hvordan de ulike stegene eksplisitt uttrykkes i det skriftlige arbeidet til elevene. Vi understreket deler av det skriftlige arbeidet i samsvar med hvilket steg det gikk under, med tilhørende farge. Figur 3.1 viser et eksempel på dette, hvor vi understreket de to uttrykkene med rødt, da dette viste elevenes matematiske modell, og dermed tilhørte steget Matematisere.



Figur 3.1: Eksempel fra analyse av skriftlig arbeid.

3.7 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet sier noe om i hvilken grad studiens resultater kan gjenskapes under lignende forhold på andre tidspunkt og av andre forskere (Postholm & Jacobsen, 2018). Dette innebærer at målingene er korrekt utført, og at resultatene ikke blir påvirket av tilfeldigheter (Thurén et al., 2009).

Vi kan ikke si med sikkerhet at resultatene våre kan gjenskapes ved lignende studier senere. Som Postholm og Jacobsen (2018) påpeker så er alle mennesker hele tiden i utvikling, både forskere og forskningsdeltakere. Dette er en av grunnene til at kvalitative studier er svært vanskelige å replikere (Postholm & Jacobsen, 2018). Som forskere i en kvalitativ studie er det viktig å reflektere over vår egen påvirkning ved å være oppmerksomme på egen subjektivitet. Elevene i vår studie fikk arbeide uavbrutt med oppgavene, og ble dermed ikke ledet til en viss fremgangsmåte, noe som bidrar til å øke studiens reliabilitet. For å sørge for at vi fikk registrert alle påstandene til elevene valgte vi å ta lydopptak. Vi brukte to enheter for lydopptak på hver gruppe for å sørge for at tilfeldigheter som dårlig mikrofon eller lignende ikke påvirket transkripsjonen og dermed heller ikke analysen.

Om resultatene våre skal ha verdi, er det viktig at analyseverktøyet er godt utformet slik at det gir samme resultater hver gang, om datagrunnlaget er det samme. Vi har i arbeidet med analysen hele tiden analysert data individuelt, før vi har sammenlignet resultatene fra analysen i etterkant. Vi har tatt for oss én gruppe og én oppgave om gangen, analysert dette datamaterialet individuelt, for så å sammenligne analyseresultatene. Det gjelder både koding av skriftlige data, og koding av transkripsjonen fra lydopptak. I hvilken grad to eller flere personer er enige om koding refererer til det Bryman (2016) kaller «inter-rater reliability». I vårt arbeid med koding var vi i stor grad enige, noe som øker studiens inter-rater reliabilitet. Det kan peke på at analyseverktøyet vi utviklet er godt utformet.

Når det kommer til studiens validitet, kan man skille mellom *indre* og *ytre* validitet. Indre validitet handler blant annet om i hvor stor grad vi i vår studie har målt det vi ønsket å måle (Postholm & Jacobsen, 2018). Siden dette er en kvalitativ studie, kan det være vanskelig å vurdere om den faktisk måler det vi ønsker å måle. En utfordring med skriftlig kvalitativ data er at de aldri gir et fullstendig bilde, da elevene selv velger hva de vil vektlegge og hvor omfattende svar de gir. Med tanke på at vårt fokus er på pre-matematisering og validering, er det viktig at oppgavene vi har valgt legger til rette for dette. Siden disse stegene er utfordrende å undersøke som individuelle steg, men heller må sees i sammenheng med hele modelleringssyklusen, har vi forsøkt å velge oppgaver som krever at hele syklusen blir tatt i bruk. Før datainnsamlingen for masterstudien gjennomførte vi pilotering, nettopp for å teste om oppgavene krevde at elevene jobbet med hele modelleringssyklusen. Gjennom pilotering av oppgaven *Fylle tanken*, så vi at den ga mulighet for nettopp dette. Vi fjernet som nevnt den andre oppgaven vi hadde med på pilotering, ettersom den ikke krevde at hele syklusen ble benyttet, og dermed hindret oss i å måle det vi ønsket å måle. Da valgte vi å bytte ut denne oppgaven med det som nå er blitt oppgave 1, *Sommerjobb*. Vi hadde allerede erfart, fra vårt eget og medstudenters arbeid med denne oppgaven, at den ga mulighet for å bruke hele syklusen, og dermed også ga oss en mulighet til å måle det vi ønsket å måle. På denne måten har piloteringen bidratt til å øke studiens validitet. I tillegg til pilotering, så har også analyseverktøyet vårt bidratt til å øke studiens validitet, da det i stor grad er basert på teori, noe som sikrer at vi undersøker pre-matematisering og validering.

Ytre validitet brukes ofte for å beskrive i hvor stor grad funn fra en kontekst kan overføres, eller generaliseres, til andre kontekster (Postholm & Jacobsen, 2018). Funn i vår casestudie kan ikke overføres til alle matematikk 1T-klasser, fordi det ikke er kjent i hvilken grad denne klassen er representative for en større gruppe elever. Dermed fører begrenset antall elever til at validiteten svekkes.

3.8 Etiske betraktninger

I forkant av datainnsamling var det viktig å formidle til elevene at de ville bli fullstendig anonymisert i studien vår, og at det var frivillig å delta. Det ville heller ikke påvirke elevenes forhold til læreren, hennes inntrykk av dem eller vurdering i faget, uavhengig om og hva elevene samtykket til å delta på. Etter vi hadde fortalt om oss selv, våre roller, og vår intensjon med dataen vi skulle samle inn, delte vi ut informasjonsskrivene (vedlegg 2) slik at elevene kunne se skriftlig hva det innebar for dem å delta. Her kunne de også krysse av for hvilke data de samtykket til at vi kunne samle inn.

Ved at hele klassen jobbet med de samme oppgavene var det ingen elever som gikk glipp av ordinær undervisning. I tillegg mente klassens lærer at elevene ville få matematisk utbytte av å jobbe med oppgavene våre. Så, til tross for at elevene og læreren mistet tid til ordinær undervisning, så ville ikke denne tiden være forgjeves for elevenes læringsutbytte.

Vi ga elevene i intervjugruppene fiktive navn når vi skrev om eller siterte dem. Dette var for å sørge for at elevene var fullstendig anonymisert, og det skulle være umulig for enhver som leser oppgaven vår å kunne identifisere elevene, samt hvilken skole elevene går på. Dette er et normalisert krav til innsamling av forskningsdata (Befring, 2015). I tillegg var all innsamlet data, både lydopptak og skriftlig arbeid, lagret på universitetets passordbeskyttede servere.

Prosjektet ble godkjent av Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør (vedlegg 3), og håndtering av informasjonsskriv, samtykke, data og personopplysninger var i tråd med deres retningslinjer. Etter meldingsutveksling med saksbehandler fra Sikt, fikk vi bekreftet at med de personopplysningene vi skulle hente inn, var det tilstrekkelig at elevene selv signerte og bekreftet samtykke, siden de var 16 år eller eldre.

4 Resultater fra analyse
I dette kapittelet presenterer vi resultatene fra analysen av datamaterialet. Her har vi brukt analyseverktøyet vårt til å identifisere når elevene er i de ulike stegene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2006). Vi ser på hvordan elevene jobber i stegene Forstå, Forenkle/strukturere, Matematisere, Jobbe med matematikk, Tolke og Validere, ved å bruke kjennetegnene fra analyseverktøyet. Det vil være mest fokus på Forstå, Forenkle/strukturere og Validere, da disse stegene er mest relevante for våre forskningsspørsmål. Vi presenterer hvordan elevene arbeidet i hvert steg, og inkluderer sitater fra transkripsjonen der dette er relevant.

I delkapittel 4.1 presenteres resultatene fra analysen av elevenes arbeid med oppgave 1. Vi presenterer først intervjugruppe 1, deretter intervjugruppe 2, for så å oppsummere resultatene i et avkrysningsskjema. Resultatene er basert på analyse av transkripsjon av lydopptak fra oppgavejobbing og intervju, samt skriftlige notater. Videre presenterer vi kort resultater fra analyse av notatgruppenes arbeid, for å kunne sammenligne dette med intervjugruppene. I delkapittel 4.2 presenteres resultatene fra analysen av elevenes arbeid med oppgave 2 på samme måte som oppgave 1. Kapittelet avsluttes med en kort oppsummering i delkapittel 4.3.

4.1 Elevenes arbeid med oppgave 1: Sommerjobb
Oppgave 1, *Sommerjobb*, gikk ut på å komme med en anbefaling til Jørgen som skulle velge sommerjobb:

> «Sommerferien nærmer seg, og din venn Jørgen vil ha en sommerjobb. Han fant en jobb som betaler 20 kroner i timen over minstelønna og en annen jobb som tilbyr halvparten av minstelønna pluss provisjon på 20 kroner per solgte vare. Jørgen spør etter din hjelp. Hvilken jobb ville du anbefalt han å ta?»

I 4.1.1 og 4.1.2 presenterer vi resultatene fra analysen i henholdsvis intervjugruppe 1 og intervjugruppe 2 sitt arbeid med oppgave 1, før vi i 4.1.3 oppsummerer disse i et avkrysningsskjema. I 4.1.4 ser vi kort på resultatene fra notatgruppenes arbeid, og hvordan dette samsvarer med intervjugruppene.

4.1.1 Intervjugruppe 1 sitt arbeid med oppgave 1
Vi går gjennom hvert steg i analyseverktøyet, og presenterer hvordan intervjugruppe 1 arbeidet med de ulike stegene i sitt arbeid med oppgave 1.

Forstå
Intervjugruppe 1 startet med å diskutere oppgaven, og repeterte fra oppgaveteksten for å få en forståelse for hva oppgaven spurte om.

> 1-A: OK så den ene jobben betaler 20 kroner i timen over minstelønn. Og den andre betaler halvparten av minstelønna pluss provisjon på 20 kroner per solgte vare. Burde ikke vi få vite liksom hvor vanskelig det er å selge en vare?

Gruppen kom ikke helt i gang med oppgaven på grunn av mangel på informasjon. Intervjuer ga da beskjed om at de kunne bruke internett dersom det var noe informasjon de trengte.

Forenkle/strukturere
Gruppen diskuterte hva som menes med det «beste» alternativet i dette tilfellet.

> 1-A: Ok, men det selve oppgaven spør om er hvilken jobb vil dere anbefalt han til å ta, hvilken som er mest lønnsom egentlig.

Gruppen hadde et utelukkende fokus på lønnsomhet da de konstruerte en reell modell. Dette er et relevant funn da det å definere «best» vil påvirke utviklingen av en matematisk modell.

Etter at gruppen fikk vite at man kunne bruke internett til å finne manglende informasjon, begynte arbeidet med finne denne informasjonen.

1-B: Vi sier minstelønn sommerjobb, 16 sikkert.
1-A: Jeg vil anta det.
1-B 139, det er jo altfor mye.

Her antok gruppen at Jørgen er 16 år og fant ut at minstelønna for 16-åringer er 139 kroner i timen. De diskuterte minstelønna de fant på internett versus lønn de selv har på sine arbeidsplasser. De kom likevel frem til at de ville bruke minstelønna de fant på internett.

Det at elevene antok at Jørgen er 16 år kan skyldes at elevene selv var 16 år på tidspunktet oppgaven ble gitt, og at det dermed falt naturlig for dem å anta at Jørgen er på samme alder. Dette kan skyldes oppgavens utforming, da den kan kategoriseres som virkelighetsnær og personlig for elevene.

1-A: Fordi, nå har vi ikke så mye sånn skrevet ned utregning her nå, men bare fra logikk, så vil jeg anta at det ikke er så vanskelig å selge en vare at fem varer i timen er for mye liksom, så da vil det være mer lønnsomt. Men vi har jo ikke så mye utregning, så (…)

Uten å regne noe særlig på oppgaven kom den ene eleven med et svar, hvor hen antok at varen ikke var vanskelig å selge. Denne antakelsen beholdt elevene når de videre forsøkte å utvikle en matematisk modell.

Det kan tyde på at elevene tenkte at 20 kroner i provisjon per solgt vare gjaldt uansett hvilken vare det dreiet seg om. Dermed tok de ikke stilling til om 20 kroner var mye/lite i forhold til hva varen kostet. Dette kan tyde på manglende ekstra-matematisk kunnskap når det kommer til forståelse av begrepet «provisjon».

Matematisere

Til tross for at elevene hadde funnet en verdi for minstelønn, og antatt at varen var relativt enkel å selge, så valgte de å ikke bruke disse antakelsene i forsøk på å utarbeide en matematisk modell.

1-A: [...] Fordi per solgte vare (...), vi vet ikke hvor mange varer han selger. Så hvis 20x, hver x er antall varer han selger. 20 er jo bare, selvfølgelig, det han får for hvert antall vare solgt.
[...]
1-A: Men det er liksom tingen. Hva gjør vi da med minstelønna som vi egentlig ikke vet? Skal vi liksom sette en annen variabel for det?
1-C: Ja det er akkurat det.
1-A: Skal vi liksom ha y da?
1-C: Ja, jeg tok i hvert fall 2y + 20, og på den andre y + 20x.

Elevene forsøkte å sette opp to uttrykk med to ukjente for å representere de to ulike jobbene. De virket å være fornøyde med å ha funnet disse uttrykkene, men skjønte raskt at de ikke kom noen vei videre.

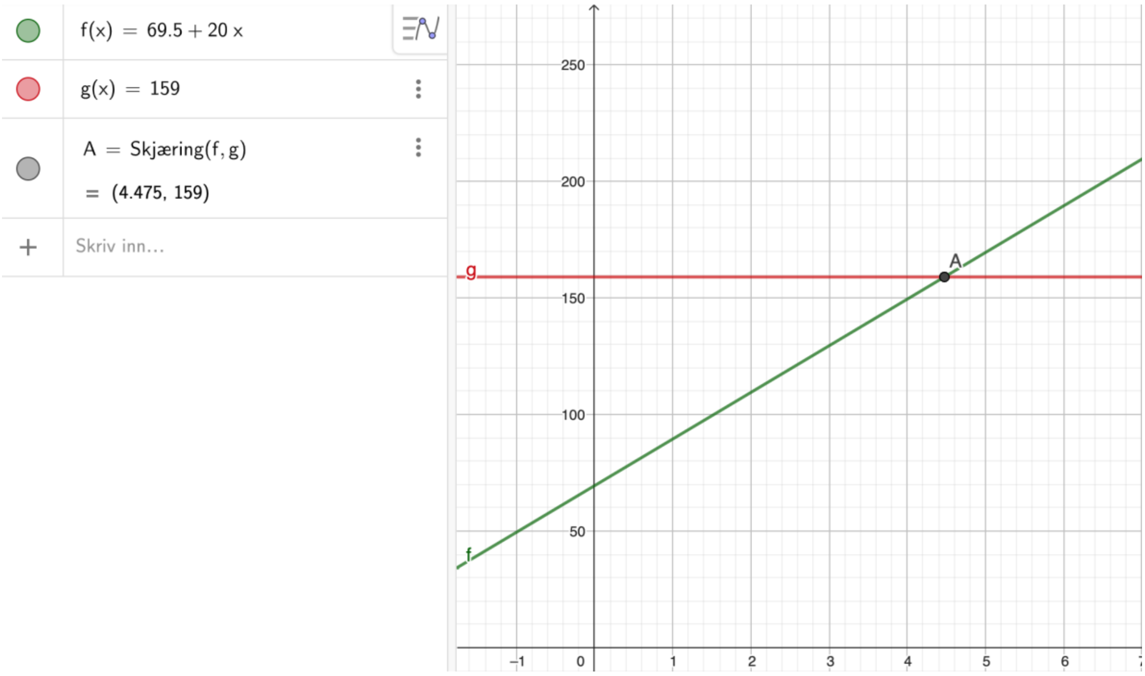
Det kan tyde på at elevene hadde en forventning om at den matematiske modellen ikke kunne inneholde en antatt verdi for minstelønn. De nølte med å bruke antakelser, noe som kan tyde på at denne typen oppgaver bryter med elevenes forventning om hva en matematikkoppgave skal være.

1-A: Ok, men hva får vi ut av det her egentlig? Jeg er fortsatt lost.
1-C: Ja det kommer an på hva minstelønna er, og så kommer det an på hvor vanskelig det er å selge varen [...]
1-B: Vi har vel aldri hatt to ukjente i sånt funksjonsuttrykk?
1-C: Nei det er akkurat det vi ikke har. Hadde vi visst hvilket tall det var der.

1-A: Skal vi bare erstatte det da med 139?
1-B: Ja.
1-C: Om vi gjør det så finner vi ut av svaret.

Elevene diskuterte hvordan de skulle bruke uttrykkene videre uten å vite minstelønna, til tross for at de tidligere hadde antatt at minstelønna var 139 kroner i timen. Etter hvert kom elevene frem til at de skulle bruke antakelsen om minstelønn, og satte inn denne verdien for én av variablene. Da kunne de starte med å bruke uttrykkene for å finne ut av når de to jobbene var like lønnsomme.

Jobbe med matematikk
Elevene valgte å sette funksjonsuttrykkene inn i graftegner, for så å finne skjæringspunktet mellom grafene (figur 4.1). Grafene hadde et skjæringspunkt for x = 4,475. Slik fikk de et matematisk resultat.



Figur 4.1: Elevenes arbeid med den matematiske modellen i GeoGebra. Bildet er gjenskapt etter å ha tatt bilde av elevenes PC-skjerm, og er en nøyaktig kopi.

Tolke
Elevene tolket det matematiske resultatet og fant ut at å selge 4,475 varer ikke er mulig, og rundet derfor opp til fem. De konkluderte med at dersom Jørgen solgte fem eller flere varer, så ville det vært mest lønnsomt å velge jobben med provisjonslønn.

Validere
Elevene påpekte at resultatet kun gjaldt basert på antakelsen om minstelønn, samt antakelsen om at varen var relativt lett å selge. De diskuterte hvilken betydning det hadde å vite hvilken vare det dreiet seg om.

1-A: Så må vi bare anta at fem varer er relativt greit å kunne selge.
[...]
1-A: [...] Det er sommerjobb da, så det er ikke sikkert det er sånn de mest attraktive tingene han selger.

Her nevnte den ene eleven at Jørgen ikke nødvendigvis skulle selge de mest attraktive varene, men de stod likevel på antakelsen om at varen var enkel å selge. I intervjuet etterpå ble det derfor stilt oppfølgingsspørsmål fra intervjuer om hvilken type jobb det kunne dreie seg om, for at det skulle ha lønnet seg å ta jobb nummer to.

1-C: Jeg tenker at sånn butikk ville vært mye enklere.
1-A: Ja, dagligvarebutikk liksom.

Elevene mente det var enkelt å selge fem varer i timen i gjennomsnitt dersom Jørgen jobbet i dagligvarebutikk. Det de ikke tok stilling til er at ansatte sjeldent, om ikke aldri, får provisjon per solgte vare i dagligvarebutikk. Dette kan tyde på mangel på ekstra-matematisk kunnskap som kreves for å løse denne oppgaven.

Da elevene ble spurt om fordeler og ulemper med de to jobbene, og om resultatet de hadde kommet frem til alltid ville gjelde, fortsatte valideringen.

1-A: Litt sånn teknisk sett hvis han er veldig god i jobben sin, så vil han jo tjene mer, fordi han vil klare å selge mer, mens i den første jobben så er det liksom statisk, da tjener man det samme uansett hvordan han presterer i jobben.
1-C: Kommer også an på hvor mye han gidder å jobbe. Om han ikke orker noe, så kan han ta første jobb, så chiller han bare.

Gruppen diskuterte stressfaktorer i jobben, og at jobben med fast timelønn ville vært mindre stressende siden Jørgen ville tjent det samme uansett hvordan han presterte. På den andre siden ville han tjent mer i jobben med provisjonslønn dersom han presterte bra.

Selv om gruppen her inkluderte forutsigbarhet i diskusjonen, valgte de likevel å utelukke denne faktoren videre, da de allerede hadde antatt at varen var enkel å selge. Dette kan skyldes elevenes utelukkende fokus på lønnsomhet.

Når de så ble bedt om å begrunne hvorfor de mente at deres svar var riktig, så reflekterte de over andre faktorer. Elevene sa at dersom dette var en reell situasjon, så ville de også vurdert faktorer som arbeidsmiljø, samt stilt Jørgen flere spørsmål.

Intervjuer: Hva ville du spurt han om?
1-A: For det første hvilken vare det er han må selge, det er jo kanskje det viktigste fordi liksom si at han må selge en 70 tommers tv hver gang, så anbefaler jeg jo selvfølgelig ikke den jobben med provisjon på 20 kroner. Men si han må selge bare en dagligvare på kiwi eller noe, så ville jeg heller valgt den. Også i tillegg ville jeg spurt han om liksom, ja, miljøet på jobben, og hvilke folk han jobber med.

Gruppen diskuterte flere faktorer som vil kunne spille en rolle i valget av en jobb, deriblant hvilke varer det kunne dreie seg om. De valgte likevel å utelukke disse faktorene og kun fokusere på lønnsomhet når de avgjorde et svar, noe som mest sannsynlig skyldes mangel på informasjon om disse faktorene i oppgaven. Det vil si at elevene sammenlignet det reelle resultatet med den reelle modellen, men valgte likevel å ikke endre den reelle modellen ved at de beholdt et utelukkende fokus på lønnsomhet. Også her gir elevene et inntrykk av at de kan ha misforstått hva provisjon er, da de tenker at 20 kroner provisjon kan gjelde både ved salg av TV og en hvilken som helst dagligvare.

4.1.2 Intervjugruppe 2 sitt arbeid med oppgave 1

Vi går gjennom hvert steg i analyseverktøyet, og presentere hvordan intervjugruppe 2 arbeidet med de ulike stegene i sitt arbeid med oppgave 1.

Forstå

Gruppe 2 startet med å gjenta deler av oppgaveteksten, og diskuterte hvordan de skulle komme i gang med oppgaven på grunn av mangel på informasjon.

Forenkle/strukturere
Gruppen definerte det «beste» alternativet som det mest lønnsomme alternativet. Gruppen uttrykte at de ønsket å finne ut når de to jobbene ville vært like lønnsomme.

Basert på ekstra-matematiske kunnskap kom elevene frem til at minstelønna er 112 kroner i timen for 16-åringer, men de rundet ned til 110, da det muligens ville gjøre senere utregninger enklere. Her ser vi at gruppen antok at Jørgen er 16 år, som igjen kan skyldes at elevene relaterer til Jørgen.

> 2-A: [...] Vi måtte jo bare tippe litt, vi visste ikke hva han skulle selge. Så hvis det hadde vært is ville han solgt mye mer, men siden det var så høy provisjon per vare, antok vi at det var vanskeligere å selge. Og derfor er det ikke så safe, for det kan hende han ikke selger noe.

I intervjuet ble elevene spurt om begrunnelse for antakelsene de hadde gjort. Her beskrev de at det måtte dreie seg om en vare som var vanskelig å selge, og begrunnet dette med at provisjonen var relativt høy, noe som medførte at varen måtte være relativt dyr.

Elevene brukte også her sin ekstra-matematiske kunnskap til å beskrive hvorfor varen det dreiet seg om var vanskelig å selge. Dette viser at de hadde en forståelse av hva provisjon er, og kunnskap om hvor mye provisjon som kunne være relevant i forhold til pris på varen.

Matematisere
Etter at elevene hadde antatt minstelønn satte de opp en matematisk modell (figur 4.2).

$$55 + 20x = 130$$

Figur 4.2: Intervjugruppe 2 sin matematiske modell inkluderte antakelse om minstelønn på 110 kroner.

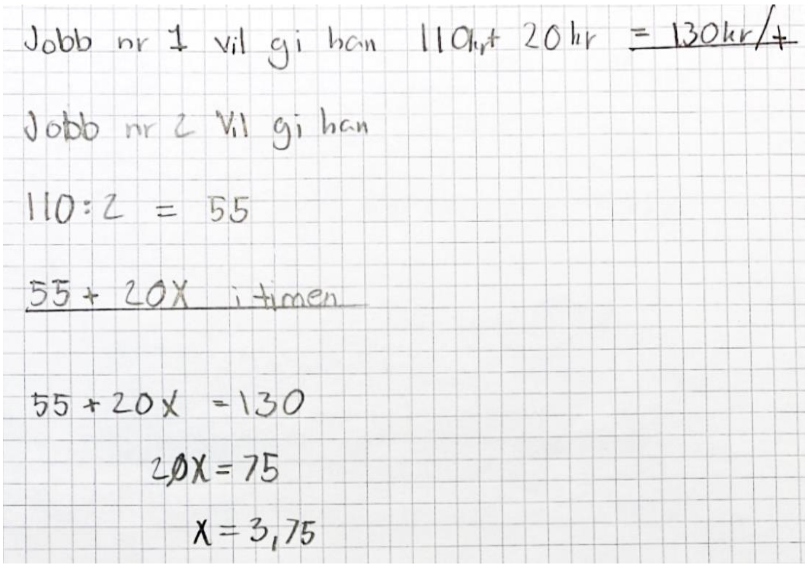
I intervjuet begynte elevene å tvile på den matematiske modellen, og ba om å få prøve å løse oppgaven på nytt.

> 2-A: Hvis vi sier at jobb 1 er 2x + 20, og jobb 2 er x + 20y.

Gruppen utviklet en matematisk modell som var uavhengig av en verdi for minstelønna. De lyktes ikke med å komme videre med denne modellen, og gikk tilbake til å bruke modellen som inkluderte antakelsen om minstelønn (figur 4.2).

Dette kan tolkes som at elevene ikke så på den matematiske modellen som gyldig fordi den tok utgangspunkt i antakelser de selv hadde gjort. En forklaring kan være at elevene forventet at det skulle være ett korrekt svar på oppgaven, og dersom de brukte antakelser de selv hadde kommet opp med, ville de ikke komme frem til dette svaret.

Jobbe med matematikk
Elevene regnet først ut hvor mye Jørgen ville tjene i hver av jobbene, for så å sette opp en likning for å finne ut av når han vil tjene like mye i de to jobbene (figur 4.3). Det matematiske resultatet ble x = 3,75.



Figur 4.3: Intervjugruppe 2 sin matematiske modell og utregning på oppgave 1.

Tolke
Elevene tolket det matematiske resultatet og fant ut at Jørgen måtte selge 3,75 varer for at jobben med provisjonslønn skulle være mest lønnsom. De påpekte at man måtte runde opp til fire for at resultatet skulle gi mening.

Validere
Gruppen bestemte seg for hvilken jobb de ville anbefale Jørgen, og validerte løsningen de kom frem til.

2-C: Jeg ville tatt den første.
2-B: Ja, fordi den er tryggere.
2-A: Jeg aner ikke, fordi vi aner ikke hvor lett det er å selge. Hvis det liksom er å selge is, så er det lett.
2-C: Ja, men da er 20 mye.

Basert på sine antakelser, kom gruppen frem til at det måtte dreise seg om en relativt dyr vare som ville være vanskelig å selge. Med denne antakelsen til grunn mente de at det ville være vanskelig å selge mye av en vare, og at det derfor ville være tryggere for Jørgen å velge jobben som hadde samme lønn uavhengig av hvor mange varer han solgte. Dette er argumenter gruppen la til grunn når de konkluderte med å anbefale jobben med fast timelønn.

Her brukte elevene sin ekstra-matematiske kunnskap til å vurdere hvilken vare det kunne dreie seg om, da 20 kroner per solgte vare var relativt høy provisjon. De sammenlignet det reelle resultatet med antakelsene de gjorde under utviklingen av en reell modell. Videre valgte de å endre den reelle modellen til å inkludere flere faktorer enn kun lønnsomhet. Nå tok de også hensyn til trygghet i form av forutsigbarhet, og baserte sin argumentasjon på dette. Det kan tyde på at elevene nå aksepterte at det nødvendigvis ikke var ett korrekt svar på oppgaven, men at de faktisk måtte vurdere løsningen sin basert på flere faktorer.

4.1.3 Oppsummering av intervjugruppenes arbeid med oppgave 1

Vi har valgt å oppsummere resultatene ved å lage et avkrysningsskjema (tabell 4.1) som viser en oversikt over intervjugruppenes arbeid i de ulike stegene i seks-stegsmodellen til Blum og Leiß (2006). Her har vi forsøkt å inkludere hovedtrekkene i hvert steg, for å enklere kunne drøfte over resultatene fra analysen.

Steg	Aktivitet	Gruppe 1	Gruppe 2
Forstå	Repeterer fra oppgaveteksten	X	X
Forenkle/ Strukturere	Definerer det «beste» alternativet som «det mest lønnsomme»	X	X
	Antar minstelønn	X	X
	Antar Jørgens alder	X	X
	Antar vanskelighet med å selge varen	X	X
Matematisere	Forsøker å sette opp generelt uttrykk (uten bruk av antakelser)	X	X
	Bruker antakelse om minstelønn i modellen de bruker videre	X	X
	Bruker funksjonsuttrykk som representasjonsform	X	
	Bruker likning som representasjonsform		X
Jobbe med matematikk	Grafisk løsningsmetode	X	
	Løser likning		X
	Får et matematisk resultat	X	X
Tolke	Runder opp det matematiske resultatet	X	X
Validere	Sammenligner reelt resultat med situasjonsmodell		
	Sammenligner reelt resultat med reell modell	X	X
	Validerer med utgangspunkt i ekstra-matematisk kunnskap	X	X
	Inkluderer lønnsomhet	X	X
	Inkluderer arbeidsmiljø	X	
	Inkluderer stressfaktor	X	
	Inkluderer forutsigbarhet	X	X

Tabell 4.1: Oppsummering av intervjugruppenes arbeid med oppgave 1.
Merk: «X» betegner at elevene har gjort aktiviteten som står beskrevet i andre kolonne fra venstre.

Som vi ser i tabell 4.1 var det mange likheter hos de to intervjugruppene, men de skilte seg fra hverandre når det kom til matematisk modell og løsningsmetode, samt faktorer de inkluderte i valideringen. Fra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant at selv om gruppe 1 inkluderte flere faktorer i valideringen sin enn gruppe 2, så var det denne gruppe 1 som valgte å beholde den opprinnelige reelle modellen med utelukkende fokus på lønnsomhet når de ga et svar på oppgaven. Det er viktig å påpeke at selv om de har utført samme aktivitet, så kan de ha gjort det på ulik måte. For eksempel har begge gruppene antatt minstelønn, men minstelønna de har antatt er ulik.

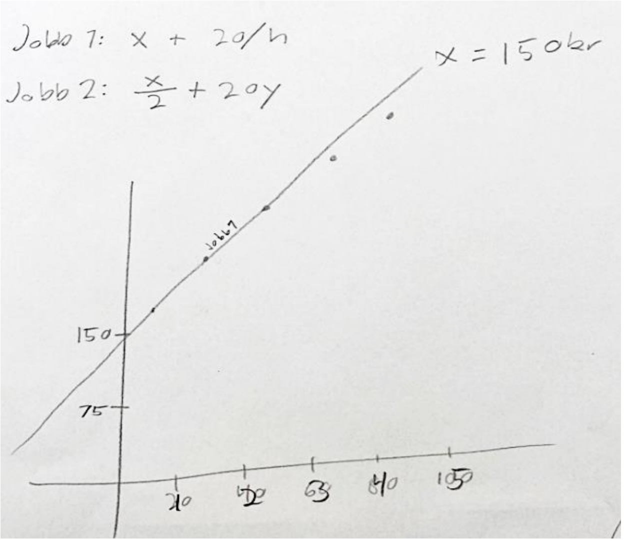
4.1.4 Notatgruppenes arbeid med oppgave 1

Felles for notatgruppene er at alle satte opp to uttrykk som representerte lønn i de to jobbene, og de brukte variabelen x til å representere minstelønna. I likhet med intervjugruppene kan dette tyde på at også notatgruppene forsøkte å løse oppgaven uten bruk av antakelser, i forsøk på å finne et generelt svar. Gruppene noterte en minstelønn som de brukte i uttrykkene i videre arbeid.

Når det kommer til validering, var det kun én av de tre notatgruppene som dokumenterte validering på innføringsarket. Denne gruppen baserte sitt svar blant annet på arbeidsinnsats (vår transkripsjon fra gruppens innføringsark):

> I den andre jobben blir han nødt til å selge 5 varer i timen for å tjene mer enn den første lønna. Så hvis Jørgen er villig til å jobbe hardt for å kunne selge minst 5 varer per time så burde han ta den jobben. Hvis han føler at han ikke greier å selge minst 5 varer i timen burde han ta den første jobben.

En annen gruppe tegnet kun en graf som representerte hvor mye Jørgen ville tjene i jobb 1 (figur 4.4).



Figur 4.4: En av notatgruppenes forsøk på en grafisk løsning.

I det skriftlige arbeidet viste altså denne gruppen at de ikke har kommet frem til et svar på selve oppgaven, da de ikke kom med noen anbefaling til Jørgen. Basert på det skriftlige arbeidet, og at gruppen valgte å ikke tegne graf som representerte jobb 2, så kan det tyde på at den matematiske modellen ikke lot seg jobbe med.

4.2 Elevenes arbeid med oppgave 2: Fylle tanken

Oppgave 2, *Fylle tanken*, var oppgaven hvor elevene skulle finne ut om det var verdt for Helen å kjøre til Grimstad for å fylle bensin, kontra å fylle på Lund hvor hun bor:

> «Helen bor på Lund, like ved en bensinstasjon. Hun kjører en Toyota Yaris, og skal fylle opp bensintanken. Venninna til Helen sender bilde av bensinprisene i Grimstad, hvor det viser seg at bensinen er 3 kroner billigere. Er det verdt å ta turen til Grimstad for å fylle opp bensintanken?»

I 4.2.1 og 4.2.2 presenterer vi resultatene fra analysen i henholdsvis intervjugruppe 1 og intervjugruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2, før vi i 4.2.3 oppsummerer disse i et avkrysningsskjema. I 4.2.4 ser vi kort på resultatene fra analysen av notatgruppenes arbeid, og hvordan dette samsvarer med intervjugruppene.

4.2.1 Intervjugruppe 1 sitt arbeid med oppgave 2

Vi går gjennom hvert steg i analyseverktøyet, og presenterer hvordan intervjugruppe 1 arbeidet med de ulike stegene i sitt arbeid med oppgave 2.

Forstå

Intervjugruppe 1 diskuterte og prøvde å forstå oppgaveteksten, før de beveget seg videre fra dette steget. De kom likevel tilbake til dette steget etter at gruppen hadde gjort utregninger og begynt å validere de matematiske resultatene. Da repeterte de fra oppgaveteksten, med en mistanke om at de hadde misforstått oppgaveteksten.

Forenkle/strukturere

Elevene startet med å se på oppgaven utelukkende fra et økonomisk perspektiv, ved at de valgte å kun fokusere på lønnsomhet. Gruppen startet så med å finne og sortere relevant informasjon.

1-A: [...] 6,4 liter per 100 kilometer, er ikke det hvor mye den bruker på 100 kilometer? Vi skal liksom finne ut hvor mye som er i tanken. Jeg vet ikke, si ifra hvis dere ser noe sted der det står liksom (...) Ok, drivstofftank 42 liter.

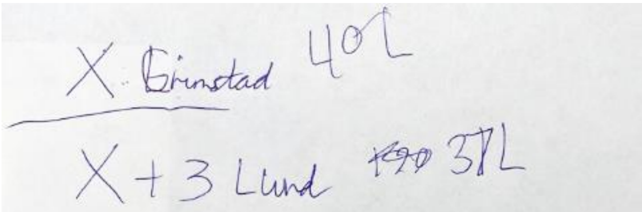
[...]

1-A: Det stod her at hun brukte 6,4 liter per 100 kilometer, og hun skal kjøre 94.
1-C: Så det er så verdt det, å gå til Grimstad?
1-A: 94 kilometer til sammen, så det er tilnærma lik seks liter.

Elevene fant ut av størrelsen på bensintanken, samt bensinforbruket til bilen. De fant også ut avstanden mellom Lund og Grimstad, og hvor mye bensin Helen ville bruke på å kjøre frem og tilbake. De forenklet ved å runde av til seks liter. I tillegg til nevnte antakelser, valgte gruppen å anta at Helen hadde fem liter igjen på tanken da hun stod ovenfor dilemmaet, samt at bensinprisen var henholdsvis 20 og 23 kroner per liter i Grimstad og på Lund. Elevene påpekte også at Helen måtte fylle mer i Grimstad, ettersom hun hadde brukt bensin på å komme seg dit.

Elevene kom raskere i gang med å finne informasjon på denne oppgaven enn i arbeidet med oppgave 1. Dette kan trolig bero på at de nå visste at de kunne søke opp den informasjonen de følte var nødvendig for å kunne løse oppgaven. De fikk også erfare at de ikke klarte å arbeide med en matematisk modell uten å ta stilling til noen antakelser, noe som også kan medvirke her.

Matematisere
Gruppen utviklet matematiske uttrykk som beskrev bensinprisen på de to stedene i forhold til hverandre (figur 4.5).

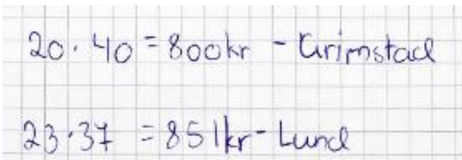


Figur 4.5: Intervjugruppe 1 sine matematiske uttrykk som viser forholdet mellom bensinprisene i Grimstad og på Lund.

Til tross for at elevene hadde antatt en bensinpris, valgte de å ikke bruke antakelsen når de skulle utvikle en matematisk modell. Dette kjenner vi igjen fra begge intervjugruppenes arbeid med oppgave 1, da begge gruppene unnlot å bruke antakelsene de hadde gjort. Fra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant at gruppen beholdt antakelsen om hvor mange liter Helen måtte fylle på de to stedene. Likevel tyder det på at de ønsket å finne et så generelt svar som mulig på oppgaven, og derfor valgte å bruke en variabel for bensinprisen.

Gruppen valgte etter hvert å inkludere antakelsen om bensinpris, og de brukte prisene 20 og 23 kroner per liter når de utviklet en matematisk modell de kunne bruke videre (figur 4.6).

Jobbe med matematikk
Da gruppen jobbet matematisk, brukte de antatt bensinpris på 20 og 23 kroner per liter. De kom frem til et matematisk resultat som viste hvor mye det kostet å fylle i Grimstad og på Lund (figur 4.6).



Figur 4.6: Intervjugruppe 1 brukte antakelsene om at bensinprisene var 20 og 23 kroner per liter, og regnet ut kostnadene ved å fylle i Grimstad og på Lund.

Tolke
Gruppen tolket det matematiske resultatet og fant ut at det ville koste Helen 51 kroner mer å fylle på Lund.

Validere
Gruppen validerte resultatet ved at de tok stilling til flere faktorer enn lønnsomhet.

1-C: Men hadde den personen spurt meg, så hadde jeg sagt at hun kunne vært på Lund, for selv om den personen sparer 51 kroner, så er det ikke verdt det. Hun må ta, var det 1,5 time?
1-A: Ja noe sånn.
1-B: Jeg tenker frem og tilbake da. Da tar det over en time, og jeg hadde ikke orka det for 51 kroner.
1-A: Den skjønner jeg godt. Det er stress.
1-C: Og i tillegg, når den personen kommer tilbake til Lund, så kommer hun til å ha 39 liter når hun er tilbake, mens om hun fyller på Lund har hun 42.

Gruppen var enige om at det ikke var nok økonomisk gevinst ved å fylle i Grimstad til å veie opp for ulempene med økt kjøretid. De konkluderte med det at det ikke ville være verdt det for Helen å kjøre til Grimstad for å fylle bensin. En elev kommenterte at Helen dessuten ville ha mindre bensin når hun kom hjem igjen dersom hun fylte i Grimstad kontra hvis hun fylte på Lund, siden hun ville forbruke tre liter bensin på kjøreturen hjem. Elevene uttalte at de ikke visste hvordan de skulle inkludere dette i den matematiske modellen, men nevnte at dette var en faktor som gjorde at Lund var å foretrekke.

Under intervjuet i etterkant vurderte de også andre faktorer som bompenger og risiko for ulykke, og påpekte at dette var argumenter som støttet svaret de hadde gitt. De testet med andre verdier for bensinprisene i de to byene, og fant ut at svaret endret seg litt hver gang. Likevel konkluderte de med at det forskjellen uansett ikke ble stor nok til at det var verdt å dra til Grimstad.

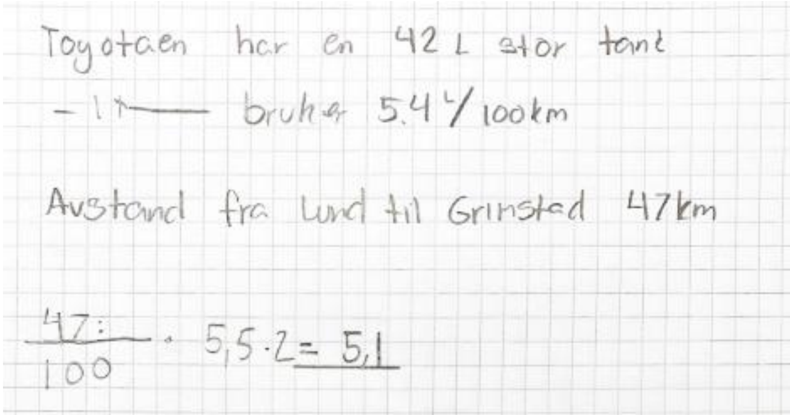
Her ser vi at elevene endret sin reelle modell fra å kun omhandle lønnsomhet til å også inkludere faktorer som tid, bompengeavgift og risiko for ulykke. Dette endret elevene sitt svar på oppgaven, da «verdt det» nå handlet om mer enn kun lønnsomhet.

4.2.2 Intervjugruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2
Vi går gjennom hvert steg i analyseverktøyet, og presenterer hvordan intervjugruppe 2 arbeidet med de ulike stegene i sitt arbeid med oppgave 2.

Forstå
Gruppen påpekte tidlig at de ikke hadde den informasjonen de trengte for å komme i gang med oppgaven. Denne gruppen hadde ikke brukt informasjon fra internett på den første oppgaven, og tenkte heller ikke på at dette var et alternativ. De snakket om at de kunne begynne å anta hvor mye tanken rommer og hvor mye bilen forbruker, men konkluderte med at de ikke hadde nok kunnskap om dette til at de kunne gjøre gode antakelser. Intervjuer gjorde de da oppmerksomme på at de kunne bruke internett til å finne informasjonen de manglet.

Forenkle/strukturere
Uten å diskutere det, viste gruppen i videre arbeid at de hadde et utelukkende fokus på lønnsomhet. På et senere tidspunkt i løsningsprosessen påpekte de at spørsmålstillingen var tvetydig og vanskelig å svare på, da de var usikre på hva som mentes med «verdt det».

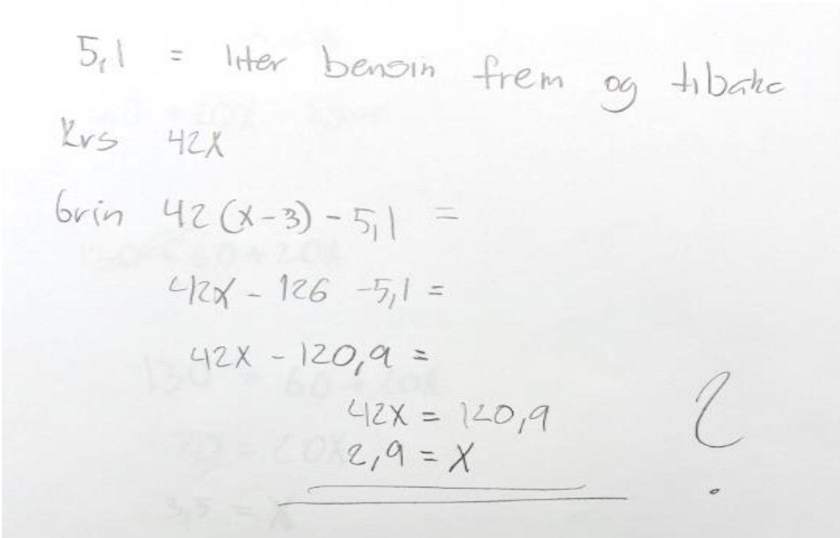
Etter at gruppen ble gjort oppmerksomme på at de kunne finne informasjonen de manglet på internett, kom de i gang med å samle denne informasjonen. Elevene fant verdier for bilens forbruk, størrelse på bensintanken, samt avstanden mellom Lund og Grimstad. Videre antok de at Helen skulle fylle full tank. Deretter regnet de ut hvor mye bensin bilen brukte tur-retur Lund-Grimstad (figur 4.7). På et senere tidspunkt antok de at bensinprisen var 20 og 23 kroner per liter på de to stedene.



Figur 4.7: Intervjugruppe 2 sitt arbeid med å gjøre antakelser og strukturere informasjon.

Matematisere

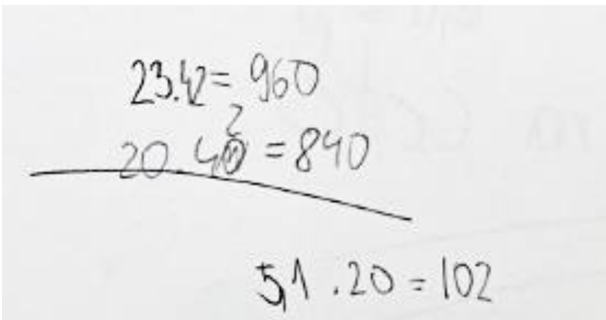
Gruppen forsøkte å sette opp en matematisk modell uten å bruke antakelser om bensinprisene, men kom ikke frem til et tilfredsstillende svar (figur 4.8).



Figur 4.8: Intervjugruppe 2 sitt forsøk på å regne med et generelt uttrykk, der bensinprisen på Lund er uttrykt som x.

Det kan tyde på at elevene forsøkte å finne et så generelt uttrykk som mulig ved at de unnlot å bruke antakelsen om bensinpris. Dette til tross for at de brukte antakelsene om hvor mye bensintanken rommet, samt hvor mye bensin Helen ville bruke på å kjøre tur-retur Lund-Grimstad.

Videre jobbet elevene individuelt i forsøk på å lage en modell de kunne bruke. Den ene eleven forsøkte å løse oppgaven uten å bruke antakelse om bensinpris, mens de to andre satte opp en matematisk modell som inkluderte antatt bensinpris på 20 og 23 kroner per liter på de to stedene, samt hvor mye det kostet å reise frem og tilbake (figur 4.9).



Figur 4.9: Intervjugruppe 2 sin endelige matematiske modell, samt arbeidet med modellen.

Jobbe med matematikk
Eleven som jobbet med et generelt uttrykk, kom frem til et matematisk resultat som ikke ga mening i forhold til den opprinnelige situasjonen. Eleven forsøkte å bruke antakelsene om avstand og størrelse på tanken, men ikke en antakelse om bensinpris. Dette førte til et reelt resultat som tilsa at bensinprisen i seg selv ble 3 kroner per liter.

Det kan tyde på at eleven kun trakk ut tall som var gitt i oppgaven, for så å forsøke å regne på dette uten å ta stilling til tallets kontekst.

De to andre elevene brukte antakelsen om at bensinprisene var 20 og 23 kroner per liter, og kom frem til at Helen sparte 120 kroner, mens det kostet 102 kroner å kjøre frem og tilbake til Grimstad (figur 4.9). Det er disse matematiske resultatene gruppen valgte å bruke videre.

Tolke
Elevene tolket det matematiske resultatet i den virkelige verden, og kom frem til at Helen ville spare 18 kroner på å fylle bensin i Grimstad.

Validere
Elevene godtok at å fylle bensin i Grimstad ville være mest lønnsomt, og reflekterte over andre faktorer som kunne spille inn.

2-A: Det er ikke verdt det. Eller det er jo verdt det, hun sparer penger. Men hun bruker mye tid.
2-C: 70 min. Jeg hadde ikke gjort det.
[...]
2-A: Hvis spørsmålet hadde vært om det er billigere å ta turen til Grimstad.
2-C: Da er svaret ja.
2-A: Men spørsmålet er om det er verdt det. Da føler jeg det ikke er et matte-spørsmål lengre.
2-C: Det er ikke verdt det.
2-A: Jeg føler ikke det er verdt det nei.

Gruppen konkluderte med at det var mest lønnsomt å kjøre til Grimstad for å fylle bensin, men at det likevel ikke var verdt det på grunn av tiden det tok å kjøre. En av elevene mente at ved å stille spørsmålet om det var verdt det så var det ikke lenger snakk om matematikk.

Gruppen sammenlignet det reelle resultatet med den reelle modellen de hadde utviklet basert på antakelser. Dette ser vi blant annet ved at de dro inn antakelsen om kjøretid i valideringen sin. Gruppen valgte å endre sin reelle modell, ved at de endret sin definisjon av «verdt det» fra å kun omhandle lønnsomhet, til å også inkludere tidsmessige faktorer. De stilte også spørsmål ved ordene «verdt det», og det tyder på at dette brøt med spørsmålsstillingen elevene forventet på en matematikkoppgave.

4.2.3 Oppsummering av intervjugruppenes arbeid med oppgave 2

Vi har valgt å oppsummere resultatene ved å lage et avkrysningsskjema (tabell 4.2) som viser en oversikt over de to intervjugruppenes arbeid i de ulike stegene i seks-stegsmodellen til Blum og Leiß (2006). Her har vi forsøkt å inkludere hovedtrekkene i hvert steg, for å enklere kunne drøfte over resultatene fra analysen.

Steg	Aktivitet	Gruppe 1	Gruppe 2
Forstå	Repeterer fra oppgaveteksten	X	
Forenkle/ strukturere	Definerer det «beste» alternativet som «det mest lønnsomme»	X	X
	Antar bensinpris	X	X

	Antar hvor mye som er igjen på tanken	X	X
	Antar avstand	X	X
	Antar forbruk	X	X
	Antar størrelse på tank	X	X
Matematisere	Forsøker å sette opp generelt funksjonsuttrykk, uten bruk av antakelser	X	X
	Bruker antakelse om bensinpris i modellen de bruker videre	X	X
	Inkluderer reisekostnader		X
	Matematisk modell for å finne kostnad av fylle de to stedene	X	X
Jobbe med matematikk	Får et matematisk resultat	X	X
	Regner ut kostnad for å fylle på de to stedene	X	X
	Regner ut kostnad for å kjøreturen		X
Tolke	Sammenligner kostnad for å fylle de to stedene	X	X
Validere	Sammenligner reelt resultat med situasjonsmodell		
	Sammenligner reelt resultat med reell modell	X	X
	Validerer med utgangspunkt i ekstra-matematisk kunnskap	X	
	Inkluderer lønnsomhet	X	X
	Inkluderer utslipp		
	Inkluderer tid	X	X
	Inkluderer bompenger	X	
	Inkluderer risiko	X	

Tabell 4.2: Oppsummering av intervjugruppenes arbeid med oppgave 2.
Merk: «X» betegner at elevene har gjort aktiviteten som står beskrevet i andre kolonne fra venstre.

Som vi ser i tabell 4.2 var det også i arbeidet med oppgave 2 mange likheter hos de to intervjugruppene. Her skilte de seg mest fra hverandre når det kom til hvilke faktorer de inkluderte i den matematiske modellen og i valideringssteget. I likhet med skjemaet tilhørende oppgave 1 (tabell 4.1), så er det også her viktig å påpeke at de kan ha utført samme aktivitet på ulik måte.

4.2.4 Notatgruppenes arbeid med oppgave 2

Et fellestrekk for notatgruppene, er at samtlige valgte å anta en bensinpris. Det er ulikt hvor mye hver av notatgruppene dokumenterte på innføringsarket, men data tyder på at alle valgte å fokusere på lønnsomhet. I likhet med intervjugruppene ser vi at samtlige notatgrupper satte opp uttrykk og regnet ut hvor mye det ville koste Helen å fylle på de to stedene. Det som skilte notatgruppene fra intervjugruppene, var de ikke forsøkte å lage generelle uttrykk hvor de ikke inkluderte bensinprisene, men heller antok bensinpris og brukte denne i en matematisk modell.

Som i oppgave 1, har også én av tre grupper validert resultatet sitt på oppgave 2. Selv om samtlige notatgrupper fokuserte på lønnsomhet i utregningene, valgte denne gruppen likevel å inkludere tidsbruk som en faktor i svaret sitt. De skrev at selv om det lønnet seg å fylle i Grimstad, tok det likevel for lang tid til at de ville anbefale dette. De kommenterte også at siden de hadde funnet avstanden i luftlinje, var den matematiske modellen og resultatet kun gyldig dersom «bilen kunne fly», noe de kommenterte at den jo ikke kunne (vår transkripsjon fra gruppens innføringsark):

> Helen vil spare 42 kroner hvis bilen kunne fly, men siden den ikke gjør det, vil det så vidt lønne seg. Det vil uansett ta over 1 time å fullføre, så det er ikke å anbefale.

Elevene sammenlignet det reelle resultatet med den reelle modellen som inkluderte avstanden mellom Lund og Grimstad i luftlinje. Gruppen brukte ekstra-matematisk kunnskap til å begrunne at svaret basert på denne avstanden var noe urimelig da bilen ikke kan fly, og inkluderte også tidsfaktoren som et argument for å fylle tanken på Lund.

4.3 Oppsummering

I dette kapittelet har vi presentert resultatene fra analysen av elevenes arbeid med oppgavene. Vi så at samtlige grupper hadde et utelukkende fokus på lønnsomhet i utviklingen av en matematisk modell, selv om noen likevel valgte å inkludere andre faktorer i valideringen. Å ta hensyn til andre faktorer enn kun lønnsomhet førte til at elevene i flere tilfeller endret den reelle modellen de først utviklet. Særlig i intervjugruppene så vi at elevene nølte med å bruke antakelser. Elevene forsøkte å sette opp generelle uttrykk, noe som førte til at de ikke kom videre i arbeidet med den matematiske modellen. Dette er funn vi drøfter videre i kapittel 5.

5 Drøfting
I dette kapittelet drøfter vi våre resultater opp mot forskningsspørsmålene våre med støtte i teori og tidligere forskning. I delkapittel 5.1 drøfter vi analyseresultater opp mot forskningsspørsmål 1, før vi i delkapittel 5.2 drøfter analyseresultater opp mot forskningsspørsmål 2. Før vi starter å drøfte ønsker vi å repetere forskningsspørsmålene slik at de er friskt i minne for leseren:

1. *Hvilke momenter i pre-matematisering påvirker matematikk 1T-elevers utvikling av en matematisk modell i arbeid med optimaliserende modellering?*
2. *Hvordan validerer elevene resultatene sine på oppgavene?*

5.1 Momenter i pre-matematisering som påvirker matematisering
I dette delkapittelet drøfter vi analyseresultatene i lys av forskningsspørsmål 1, som dreier seg om hvilke momenter som påvirker elevenes utvikling av en matematisk modell.

I en modelleringsoppgave, i likhet med mange andre typer matematikkoppgaver, er det første steget å forstå oppgaven. Resultater fra analysen indikerer at manglende informasjon i oppgaveteksten hindrer elevene i å komme i gang med oppgavene, noe elevene i vår studie uttrykte eksplisitt både underveis i løsningsprosessen og i intervjuene. Det kan virke som elevene er vant til å få oppgitt all informasjon de behøver i oppgaveteksten, og dermed heller ikke trenger å gjøre antakelser selv. Disse resultatene samsvarer med funnene til Jankvist og Niss (2020), som beskriver at elevene ikke vet hvordan de skal komme i gang på grunnlag av informasjonen som er gitt i oppgaven. Det kan også tyde på at elevene i intervjugruppe 1 kan ha misforstått hva som menes med provisjon, noe som påvirket elevenes utvikling av en reell modell, og dermed deres videre arbeid med oppgaven. Forståelse av begrepet «provisjon» kan være ekstra-matematisk kunnskap som kreves for å løse oppgaven, og som intervjugruppe 1 manglet. På denne måten spiller elevenes forståelse av begreper og sammenhenger i det virkelige livet en rolle i det første steget i modelleringssyklusen, å forstå oppgaven. Er oppgaven feiloppfattet, vil det påvirke arbeidet med oppgaven, og dermed også utviklingen av en matematisk modell.

En sentral del i arbeidet med oppgaver som involverer optimaliserende modellering er å definere hva som menes med det «beste» alternativet. Analyseresultatene våre tyder på at elever har et utelukkende fokus på lønnsomhet når de utvikler en reell modell, noe som videre påvirker utviklingen av en matematisk modell. Begge intervjugruppene i vår studie uttrykte tydelig at de hadde fokus på lønnsomhet, noe det kan tyde på at også notatgruppene hadde. Oppgavene ble gitt i en matematikktime, og elevene visste at vi var matematikkstudenter. Det kan tenkes at det ga elevene en forventning om at oppgavene skulle løses matematisk med klassiske metoder. Et økonomisk perspektiv var nok den enkleste måten å inkludere matematikk på, ut ifra informasjonen som ble gitt i oppgaveteksten. Blum og Leiß (2006) kaller en slik løsning hvor elevene definerer «verdt det» som «minst mulig kostnad» for standardmodell. Først når elevene i vår studie validerte resultatene sine, inkluderte de andre faktorer som kunne påvirke svaret de ga. Elevene i begge intervjugruppene ga uttrykk for at oppgavene var formulert på en annen måte enn de var vant til, og de uttalte at ved å inkludere andre faktorer så dreiet det seg ikke lenger om matematikk. Det indikerer at spørsmålsstillingen i modelleringsoppgaver bryter med elevers forventninger. At elevene ikke anser oppgavene som matematikkrelevante, samsvarer med funnene til Jankvist og Niss (2020).

Oppgavenes forhold til virkeligheten synes også å påvirke utviklingen av en matematisk modell. For eksempel ser vi i at elevene i arbeid med oppgave 1 relaterte til Jørgen og antok at hans alder var 16 år. Det påvirket den matematiske modellen da minstelønna var basert på denne alderen.

På oppgave 2 ser vi at den ene eleven i intervjugruppe 2 trakk ut av oppgaveteksten at forskjellen i bensinpris er 3 kroner, og begynte å regne uten å ta stilling til tallets kontekst. Elevens utregninger endte opp i en konklusjon om at bensinprisen i seg selv var 3 kroner, noe som er urealistisk, og et resultat som gruppen bestemte seg for å forkaste. Blum og Ferri (2009) påpeker at mange elever sliter med det første steget i modelleringssyklusen nettopp fordi de trekker ut tall fra oppgaven, begynner å regne og ignorerer konteksten til tallene. Blum og Leiß (2006) kaller en slik løsning for en «tradisjonell løsning». Sett bort ifra dette ene tilfellet, så var ikke en tradisjonell løsning en gjennomgående løsningsmetode for elevene i vår case. Grunnen til liten forekomst av tradisjonelle løsninger kan være at oppgavene i vår studie ikke inneholdt særlig mange tall, og at det dermed var få tall elevene kunne trekke ut for å starte direkte på utregninger. Elevene måtte selv finne relevante verdier, noe som førte til at elevene fikk kontroll på hva tallene representerte, og dermed også fikk en bedre forståelse av tallenes kontekst.

Analyseresultatene indikerer at elever mestrer å finne relevant informasjon og gjøre nødvendige antakelser for å kunne løse oppgave, til tross for at de sliter med å komme i gang med oppgaven grunnet manglende informasjon i oppgaveteksten. Disse resultatene motsier funnene til Jankvist og Niss (2020), samt Blum og Ferri (2009), som viser at elevene ofte ikke klarer å gjøre relevante antakelser og forenklinger, noe som er nødvendig for å komme seg videre i løsningsprosessen. Fra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant at selv om elevene gjør antakelser, så nøler de med å bruke dem. Det kan virke som at elevene opplever at de gjør noe ulovlig når de bruker antakelser. De forsøker å utvikle matematiske modeller uten å bruke antakelsene, noe som kan tyde på at de ikke ser på en matematisk modell som gyldig dersom den inneholder antakelser som de selv hadde kommet opp med. Det kan virke som det ligger en forventning om at de skal bruke generelle uttrykk med ukjente variabler på grunnlag av den manglende informasjonen i oppgaven. En annen forklaring kan være at elevene forventer at matematikkoppgaver skal ha et fasitsvar. Dersom elevene antar vilkårlige verdier så ville de kunne oppleve at det fasitsvaret er umulig å komme frem til. I stedet er et «korrekt» svar i arbeid med modellering avhengig av situasjonsmodellen og den reelle modellen elevene selv utvikler basert på hvordan de forstår problemet og gjør forenklinger og antakelser. Elevene i vår studie kom ikke videre med en matematisk modell uten bruk av antakelser, men etter hvert innså de at de måtte ta i bruk antakelsene for å komme frem til en løsning. Etter at elevene fikk erfare at antakelser var nødvendige i oppgave 1, syntes de å enklere akseptere bruk av antakelser i oppgave 2. Likevel forsøkte de også her å utvikle en så generell matematisk modell som mulig, ved at de unnlot å bruke alle antakelsene de hadde gjort.

Det kan være flere årsaker til elevenes utfordringer med pre-matematisering. For det første tyder resultatene våre på at forventninger spiller en viktig rolle i elevenes arbeid med modelleringsoppgaver. Analyseresultater tyder på at elevene har en forventning om hva en matematikkoppgave skal være, og at modelleringsoppgaver bryter med deres forventninger. Mangel på informasjon i oppgaveteksten er en av de klassifiseringene ved oppgavene som ser ut til å hindre elevene i å komme i gang med oppgaven. Det at selve spørsmålsformuleringen stiller krav til at elevene inkluderer flere faktorer, samt at oppgavene nødvendigvis ikke har ett korrekt svar, ser ut til å skille seg fra oppgaver elevene er vant til. Disse resultatene tyder på at denne typen oppgaver bryter dermed med elevenes forståelse av hva en matematikkoppgave er, og bryter således med den didaktiske kontrakten som er etablert i klasserommet. Disse resultatene samsvarer med funnene til Jankvist og Niss (2020) som beskriver at elever opplever åpne modelleringsoppgaver som et brudd på den didaktiske kontrakten.

En annen grunn til elevenes utfordringer kan være at elevene mangler strategier for å løse modelleringsoppgaver, noe også Blum og Ferri (2009) og Albarracín og Gorgorió (2014) gir som en mulig forklaring på elevers utfordringer i arbeid med modelleringsoppgaver. Som Vos (2007) beskriver, er matematiske modeller ofte er gitt i oppgaveteksten, og dermed mister elevene muligheten til å matematisere situasjonen selv. Slike oppgaver hindrer dermed også elevene i å utvikle situasjonsmodell og reell modell.

5.2 Elevenes validering av resultatene sine

I dette delkapittelet drøfter vi analyseresultatene mot forskningsspørsmål 2, som handler om hvordan elevene validerer resultatene sine.

Analyseresultatene indikerer at elever i stor grad validerer ved å sammenligne det reelle resultatet med den reelle modellen, altså ved at de ser tilbake og sammenligner resultatet med slik de strukturerte og forenklet situasjonen som var gitt i oppgaven. Begge intervjugruppene startet med et utelukkende fokus på lønnsomhet, men likevel diskuterte de senere i løsningsprosessen andre faktorer som kan spille inn. Vi ser for eksempel på oppgave 2, «Fylle tanken», at begge intervjugruppene startet med å se på «verdt det» som et spørsmål om lønnsomhet, og at de fant ut at det var mest lønnsomt å kjøre til Grimstad. Likevel konkluderte gruppene med at det ikke var verdt det på grunn av tiden det tok å kjøre dit. Her ser vi at elevene endret den reelle modellen fra å kun være spørsmål om lønnsomhet, til å også innebære en faktor om tid. De inkluderte flere faktorer som en del av valideringen, da de opplevde at det matematiske resultatet ikke ga nok informasjon til å vurdere situasjonen som ble gitt i oppgaven.

I tillegg til å sammenligne resultatet med deres forståelse av det "beste" alternativet, indikerer analyseresultater at elever vurderer rimeligheten til resultatene sine basert på antakelsene de hadde gjort. Når elevene begrunner svarene sine, begrunner de med bakgrunn i antakelsene de har gjort. Grunnen til dette kan være, som vi så i 5.1, at elevene nøler med å bruke antakelsene. Dermed presiserer de at de tar utgangspunkt i antakelsene når de avgir et svar.

Blant de to typene validering hvor reelt resultat er valideringsobjekt (V_4 og V_5), så er det tydelig at tilfeller med reell modell som valideringsstandard (V_5) er den typen som forekommer mest i vår studie. At V_5 forekommer mest motsier resultatene til Czocher (2018), som viser at tilfeller med situasjonsmodell som valideringsstandard (V_4) er mest hyppig blant elevene. Denne motsetningen kan skyldes at oppgavene i vår studie er preget av manglende data, og dermed krever at elevene utvikler en reell modell basert på antakelser og informasjon de selv finner. Derfor bruker de hovedsakelig den reelle modellen i valideringen sin.

Blum og Leiß (2006) skriver om hvordan elevene kan vurdere andre faktorer i valideringssteget. I oppgave 1, Sommerjobb, ser vi at elevene i vår studie hovedsakelig tok hensyn til lønn i løsningsprosessen og i valideringene sine. Likevel nevnte de andre relevante faktorer, som at det kunne være mer forutsigbart, og dermed tryggere, å velge jobben med fast timelønn. Dette er faktorer som medførte at intervjugruppe 2 valgte å endre sin reelle modell til å ikke kun være basert på lønnsomhet. Intervjugruppe 1 vurderte også forutsigbarhet, men mente likevel at det ikke bør være vanskelig å selge mange varer, og beholdt svaret om at det ville være verdt det å velge jobben med provisjonslønn. Intervjugruppe 1 vurderte også andre faktorer, som arbeidsmiljø, men valgte å utelukke disse trolig på grunn av manglende informasjon om slike faktorer i oppgaveteksten. På oppgave 2 ser vi at begge gruppene inkluderte faktoren om tid, og endret sin reelle modell basert på tiden det tok å kjøre tur-retur Lund-Grimstad. Selv om det matematiske resultatet tilsa at det lønnet seg å kjøre til Grimstad, konkluderte begge gruppene med at det likevel ikke vil være verdt det da Helen måtte bruker mye tid i forhold til hvor mye penger hun sparte. I tillegg til tidsbruken nevnte den ene gruppen andre faktorer som bompenger og risiko for ulykke, noe som også argumenterte for å fylle tanken på Lund. Vi så i 5.1 at ved å ta inn faktorer som tid og trygghet i løsningene sine, så mente elevene at det ikke lenger dreiet seg om matematikk, noe som tyder på at elevene slet med å akseptere denne type oppgave.

Elevene baserer hovedsakelig valideringen sin på deres ekstra-matematiske kunnskap. For eksempel ser vi at elevene i intervjugruppe 2 diskuterte hvorfor jobben med provisjonslønn vil være en jobb hvor man selger en relativt dyr vare, og begrunnet med at 20 kroner i provisjon var for mye dersom det for eksempel dreiet seg om å selge is. Her brukte elevene sin ekstra-matematiske kunnskap til å vurdere om det var verdt å velge jobben med provisjonslønn over jobben med fast timelønn ut ifra hvilken vare det dreiet seg om å selge. At elever benytter ekstra-matematisk kunnskap i valideringene sine vil si at det hovedsakelig er det Ferri (2006) kategoriserer som kunnskapsbasert validering som kommer til uttrykk i elevenes arbeid med oppgavene.

6 Konklusjon, implikasjoner og refleksjon

Avslutningskapittelet inneholder en konklusjon med besvarelse av forskningsspørsmålene våre i delkapittel 6.1. I 6.2 betraktes den gjennomførte studien med et kritisk blikk, ved å drøfte begrensninger i arbeidet vårt. I 6.3 ser vi tilbake på studien og reflekterer over studiens betydning for vår og andres matematikkundervisning. I 6.4 ser vi på eget utbytte av studien, samt presenterer hvilke ideer til videre forskning vårt arbeid gir.

6.1 Konklusjon

I dette delkapittelet ønsker vi å trekke konklusjoner på våre forskningsspørsmål. Vi tar for oss hvert av forskningsspørsmålene, og starter med det første.

1. *Hvilke momenter i pre-matematisering påvirker matematikk 1T-elevers utvikling av en matematisk modell i arbeid med optimaliserende modellering?*

Et moment som i stor grad påvirker elevenes utvikling av en matematisk modell er at de nøler med å bruke antakelser. Elevene viser ikke utfordringer knyttet til det å finne relevant informasjon eller komme opp med antakelser, men de velger å ikke bruke disse i utviklingen av en matematisk modell. Dette fører til at den matematiske modellen ikke lar seg jobbe med, og elevene står fast i løsningsprosessen. Mulige årsaker kan være at elevene forventer at de ikke kan basere en matematisk modell på antakelser og/eller at de forventer å komme frem til ett korrekt svar.

Et annet moment, som er mer spesifikt knyttet opp mot optimaliserende modellering, er hvordan elevene definerer hva som menes med det "beste" alternativet. Her har elevene et utelukkende fokus på lønnsomhet og tar kun stilling til dette under utvikling og arbeid med en matematisk modell. Det er først når elevene skal validere resultatet at de inkluderer andre faktorer som kan spille en rolle, men de lar ikke disse faktorene endre den matematiske modellen som er basert på kun lønnsomhet.

Elevene synes å ha kontroll på tallenes kontekst, og starter ikke direkte på utvikling av en matematisk modell uten å ta stilling til hva tallene representerer. Dette medfører at den matematiske modellen elevene utvikler er meningsfull i forhold til den reelle modellen. Dette kan skyldes mangel på informasjon i oppgaven, som forutsetter at elevene selv må finne verdier og sette de i kontekst.

2. *Hvordan validerer elevene resultatene sine på oppgavene?*

Elevene bedriver i stor grad det Ferri (2006) kaller for kunnskapsbasert validering, da de baserer mye av valideringen på ekstra-matematisk kunnskap. De bruker kunnskap fra det virkelige liv til å blant annet inkludere andre faktorer enn kun lønnsomhet i valideringene sine.

Elevenes validering foregår i størst grad ved at elevene sammenligner det reelle resultatet de får med den reelle modellen de har utviklet. Selv om elevene har et utelukkende fokus på lønnsomhet når de skal definere hva som menes med det "beste" alternativet, så endrer elevene i de fleste tilfellene på denne definisjonen når de validerer resultatet. Da velger de å også inkludere flere faktorer enn kun lønnsomhet. På denne måten fører validering til en endring av reell modell. Elevene lar likevel ikke denne endringen påvirke resten av løsningsprosessen, og beholder den matematiske modellen til tross for endret reell modell. Elevene går også tilbake til den reelle modellen for å undersøke om svaret de har fått gir mening i forhold til antakelsene og informasjonen de baserte den matematiske modellen på.

6.2 Studiens begrensninger

Studien er gjort på 15 matematikk 1T-elever fordelt på fem grupper, hvor fokuset har vært på to av gruppene. Dette er relativt få deltakere, og vi kan dermed ikke si at resultatene fra studien kan overføres til å gjelde for andre matematikk 1T-elever. Studien kunne med fordel hatt flere elever fra ulike matematikk 1T-klasser. På denne måten ville studiens deltakere vært representative for en større del av matematikk 1T-elever, noe som ville styrket studiens ytre validitet (se 3.7). Innsamling og analyse av data krever derimot mye tid, og på grunn av oppgavens tidsomfang, var det mest hensiktsmessig for oss å kun samle inn data fra én klasse.

I tillegg til at antall elever er begrenset, så har vi kun gjennomført studien med elever fra matematikk 1T. Ved å undersøke hvordan elever fra andre trinn og programfag løser oppgaver som involverer optimaliserende modellering, så ville vi i større grad kunne sagt noe om hvordan elever generelt arbeider med denne typen oppgave.

Studien er også begrenset til én type modellering, optimaliserende modellering. Det kunne vært interessant å undersøke hvordan elevene arbeidet med pre-matematisering og validering i oppgaver som involverer andre typer modellering. Det kunne vi gjort ved å utvikle flere oppgaver som involverer beskrivende, forutsigende og/eller vurderende modellering (English, 2021) (se 2.4.3). På denne måten kunne vi studert elevenes arbeid med modelleringsoppgaver mer generelt.

6.3 Tilbakeblikk og implikasjoner av resultatene med tanke på matematikkundervisning

Fra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant å se hvordan modelleringsoppgaver kan bryte med elevenes forståelse av matematikk som fag, og hvordan elevene sliter med oppgaver de har forutsetninger for å løse, grunnet egne forventinger til hva som er en akseptert løsning. Elevene har tydelige forventninger til hva en matematikkoppgave skal være, og våre resultater tyder på at modelleringsoppgaver bryter med disse forventningene. Det kan ofte være hensiktsmessig å bruke *modellering som fartøy*, altså for å lære om andre matematiske temaer. Likevel kan det være fordelaktig at undervisningen også inneholder modelleringsaktiviteter der formålet er å lære hva modellering går ut på, det vil si undervise *modellering som innhold.* På denne måten kan elevene tilegne seg modelleringsstrategier på samme måte som problemløsningsstrategier, og man kan utvide den didaktiske kontrakten som angår elevenes forventninger om hva en matematikkoppgave skal være. Her kan Blum og Ferri (2009) sin fire-stegsmodell være hensiktsmessig å bruke, da den er utviklet for at elever skal kunne lære å bruke den i arbeid med modelleringsoppgaver.

Det er viktig å påpeke at den didaktiske kontrakten i en klasse sjeldent er noe som er eksplisitt uttrykt mellom lærer og elever, men heller en underbevisst avtale. Det kan være fordelaktig for lærere å være klar over de forventingene elevene har til fag, lærere og oppgaver, og bevisst jobbe for å utvide den didaktiske kontrakten. Ved at læreren er klar over hvilke momenter som påvirker elevenes utvikling av en matematisk modell, så vil man kunne legge opp til undervisning som belyser disse momentene. Vi tar med oss videre at læreren med fordel kan trygge elevene i en tidlig fase av modelleringsprosessen, ved å opplyse at kvalifiserte antakelser kan benyttes for å veie opp for manglende informasjon i oppgaveteksten, og at ulike antakelser kan føre til ulike svar. På denne måten kan man utvide den didaktiske kontrakten som ofte synes å være en grunn til de utfordringene som oppstår i elevenes arbeid med pre-matematisering.

Det kan virke hensiktsmessig å bruke virkelighetsnære oppgaver med manglende informasjon i oppgaveteksten når elevene skal jobbe med modellering som innhold. Dette kan, som vi har sett, bidra til at elevene relaterer til oppgavene og at de mestrer å sette verdier i kontekst. Vi har også sett på hvordan optimaliserende modellering stiller krav til at elevene utvikler en reell modell og validerer de resultatene de får. Dermed kan det også virke hensiktsmessig å bruke oppgaver som involverer optimaliserende modellering når elevene skal jobbe med modellering som innhold.

Samtidig som det er interessant å registrere hvordan elevene nøler med å bruke antakelser for å løse oppgavene, er det mye positivt med hvordan de arbeider med oppgavene. Det er oppmuntrende at elevene bruker matematiske løsningsmetoder på en hensiktsmessig måte, og klarer å gjøre relevante antakelser, selv om de ikke alltid bruker dem. Det at elevene inkluderer flere faktorer i valideringen sin ser vi også på som et positivt funn, da dette viser at elevene ikke kun fokuserer på variabler og verdier når de skal avgi et svar på oppgavene.

6.4 Eget utbytte av studien og forslag videre forskning

Det har vært interessant og lærerikt for oss å gjennomføre denne studien. Vi har selv fått en bedre forståelse av modellering som et matematisk tema, samt fått bedre innsyn i hvordan elever håndterer oppgaver som involverer optimaliserende modellering og utfordringer knyttet til dette. Vi har også lært mer om hva det innebærer å forske, og det har vært en interessant prosess som har resultert i et ønske om å jobbe mer innenfor forskningsfeltet.

Alt i alt er vi svært fornøyde med gjennomføringen av denne studien. Vi tror og håper at vår studie vil kunne bidra til at lærere enklere kan hjelpe elevene med de utfordringene som ofte oppstår i arbeidet med modelleringsoppgaver, særlig når det gjelder pre-matematisering og validering. Det er også viktig å være kritiske til eget arbeid, og vi ser at studiens begrensninger (6.2) påvirker studiens ytre validitet. Mer forskning er nødvendig for å i større grad kunne generalisere våre resultater og konklusjoner. Et bidrag her kan være en lignende studie, men med flere deltakere fra ulike programfag. Ved å også inkludere flere typer modellering i en slik studie vil man i større grad kunne konkludere for modelleringsoppgaver generelt.

Referanser

Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational studies in mathematics*, *86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm Akademisk.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (s. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? I S. J. Cho (Red.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (s. 73-96). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W. & Leiß, D. (2006). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. I M. Bosch (Red.), *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1623-1633). FUNDEMI IQS–Universitat Sant Feliu de Guíxois. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME4_WG13.pdf

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 222-231). Horwood Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). Routledge.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational studies in mathematics*, *99*(3), 137-159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education*, *34*(2), 110-136. https://doi.org/10.2307/30034902

English, L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. I J. M. Suh, M. H. Wickstrom & L. D. English (Red.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (s. 3-23). Springer.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Ferri, R. B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 260-270). Horwood Publishing.

Galbraith, P. (2007). Dreaming a 'possible dream': More windmills to conquer. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 44-62). Horwood Publishing.

Gjøvik, Ø. (2019, 26.-27. november). *Matematisk modellering og IKT* [Foredrag]. Novemberkonferansen, Trondheim. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Novemberkonferansen/Modellering%20og%20IKT%20-%20Novemberkonferansen.pdf

Jankvist, U. T. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *51*(4), 467-496. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530

Julie, C. (2002, Juli). *Making relevance relevant in mathematics teacher education*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), New York.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 3-32). Springer.

Oates, B. J. (2006). *Researching information systems and computing*. Sage Publications.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational studies in mathematics*, *2*(2-3), 393-404. https://doi.org/10.1007/BF00303471

Pollak, H. O. (2011). What is mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *2*(1), 64-65. https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.694

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2018). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen: metodebok for lærere, studenter og forskere* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Røsseland, M. (2005). Hva er matematisk kompetanse? - Del 2. *Tangenten*, *16*(2), 48-53. https://docplayer.me/13786852-Hva-er-matematisk-kompetanse-del-2.html

Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (s. 137-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_15

Thurén, T., Gjerpe, K. & Gjestland, D. (2009). *Vitenskapsteori for nybegynnere* (2. utg.). Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i Matematikk T (MAT09-01)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Vos, P. (2007). Assessment of applied mathematics and modelling: Using a laboratory-like environment. I W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 441-448). Springer.

Voskoglou, M. (2007). A stochastic model for the modelling process. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 149-157). Horwood Publishing.

Zawojewski, J. S., Lesh, R. & English, L. D. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. I R. A. Lesh & H. M. Doerr (Red.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (s. 337-358). https://www.researchgate.net/profile/Lyn-English/publication/27464083_A_Models_and_Modeling_Perspective_on_the_Role_of_Small_Group_Learning_Activities/links/61b540671d88475981e29967/A-Models-and-Modeling-Perspective-on-the-Role-of-Small-Group-Learning-Activities.pdf

Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide

Intervjuguide

Samme intervju gjennomføres etter oppgave 1 og oppgave 2.

---

1. Komme i gang

- Uformell prat

Takk for at dere stiller til intervju. Vi skal nå stille noen spørsmål knyttet til oppgaven dere har løst. Vi kommer til å lytte til deres svar, og stiller kun oppfølgingsspørsmål dersom det er noe som er uklart. Spør underveis hvis det er noe som er uklart i spørsmålsformuleringen.

---

2. Informasjon (ca. 2 min)

- Bakgrunn og formål for intervjuet
- Hva intervjuet skal brukes til
- Taushetsplikt, anonymitet, informert samtykke

---

3. Nøkkelspørsmål (ca. 15 min i hvert intervju)

(Dere vil nå bli bedt om å kommentere deres svar ut ifra det vi har observert.)

- "Hva var det vanskeligste med oppgaven?"
- "Hva var det letteste med oppgaven?"
- "Hvilke antakelser har dere gjort, og hva er begrunnelsen for disse?"
- "Gir resultatene mening i forhold til oppgavebeskrivelsen? Hvorfor?"
- "Er resultatet dere har fått realistisk?"
- "Dere sier at ..., hva er begrunnelsen for dette?"
- "Gjelder resultatene alltid? Finnes det tilfeller hvor [det motsatte] lønner seg?"
- "Hva skal til for at det er like lønnsomt?"
- Eventuelt andre spørsmål for å avklare dersom noe er uklart.

---

4. Oppsummering (ca. 5 min)

- Har vi forstått dere riktig?
- Er det noe dere vil legge til?
- Kan vi ta kontakt senere?
- Takk for at dere stilte opp.

Vedlegg 2: Informasjonsskriv

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Matematisk modellering på videregående skole»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever på VGS arbeider med modelleringsoppgaver, og hva som kan være utfordrende i løsningsprosessen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan elever på VGS arbeider med modellering. Prosjektet er en del av en masteroppgave, som skal leveres i forbindelse med lektorutdanningen ved Universitetet i Agder.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Ansvarlig for prosjektet er Universitetet i Agder, Institutt for matematiske fag, ved veiledere Cornelia Brodahl (cornelia.brodahl@uia.no) og Shaista Kanwal (shaista.kanwal@uia.no).

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du blir spurt ettersom vi har en avtale med deres skole om at vi kan bruke deres skole til datainnsamling ved å intervjue elever som ønsker å delta.

Hva innebærer det for deg å delta?
Alle i klassen skal jobbe med de to samme oppgavene i grupper på tre personer. Vi samler inn notater fra de som har samtykket til dette. For deg/gruppa som samtykker til intervju, vil dette innebære at gruppa sitter på et eget rom og løser oppgavene etterfulgt av spørsmål til løsningsprosessen. Spørsmål som kan bli stilt er av typen «hva synes dere var vanskeligst?» eller «dere sier …, kan dere begrunne dette?». Dere skal jobbe med to oppgaver, hvor det vil bli et intervju på omtrent 15 minutt etter hver av oppgavene.

Det vil bli tatt lydopptak av intervjuene, og fra selve oppgaveløsningen til de gruppene som er med på dette. Dette er for å sikre at alle nødvendige detaljer fra intervjuene og samtalene under oppgaveløsingen vil bli tatt med. Vi kommer også til å samle inn løsninger, samt notater dere skriver når dere løser oppgavene.

For å være med, kreves det et skriftlig samtykke fra deg som sier at du er villig til å delta i prosjektet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Dine personopplysninger (navn) vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Deltagelse er fullstendig frivillig, og vil ikke ha noe påvirkning på ditt forhold til læreren, studenter, matematikk-karakter eller til faget for øvrig.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålet vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Lydopptak vil lagres på UiA sin server som er låst ved passord, og det er kun vi, Martin og Beate, samt veiledere som har tilgang til datamaterialet.

Når resultater fra intervjuene blir presentert i form av masteroppgaven, vil skole, elever og besvarelser være fullstendig anonymisert. Det vil ikke være mulig for noen som leser oppgaven, å kunne identifisere hvilke elever som har stilt opp i intervju.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Lydopptak vil slettes etter at masteroppgaven er ferdigstilt og levert, noe som etter planen er juni 2023.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra UiA har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Beate Lien, mail: beate-lien@hotmail.com
- Martin Nordskog, mail: mnords99@gmail.com

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Beate Lien (Student)	Martin Nordskog (Student)	Shaista Kanwal (Veileder)	Cornelia Brodahl (Veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk modellering på videregående skole* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at studentene kan samle inn og bruke alle mine notater fra oppgaveløsingen i sin forskning og masteroppgave
- ☐ å delta i intervju og oppgaveløsing hvor det blir gjort lydopptak
- ☐ at mine personopplysninger (navn) lagres frem til juni 2023

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Godkjennelse fra Sikt

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer
557615

Prosjekttittel
Matematisk modellering på videregående skole

Vurderingstype
Automatisk

Dato
08.12.2022

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
Shaista Kanwal

Student
Martin Nordskog

Prosjektperiode
01.01.2023 - 10.05.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 10.05.2023.

Grunnlag for automatisk vurdering
Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
    - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
    - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
    - Fagforeningsmedlemskap
    - Genetiske data
    - Biometriske data for å entydig identifisere et individ

    - Helseopplysninger
    - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)
- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)
- Hvor lenge personopplysningene vil bli behandlet
- Retten til å trekke samtykket tilbake og øvrige rettigheter

Informasjonssikkerhet

Du må behandle personopplysningene i tråd med retningslinjene for informasjonssikkerhet og lagringsguider ved behandlingsansvarlig institusjon. Institusjonen er ansvarlig for at vilkårene for personvernforordningen artikkel 5.1. d) riktighet, 5. 1. f) integritet og konfidensialitet, og 32 sikkerhet er oppfylt.