Algebraisk tenkning blant norske grunnskolelærerstudenter

En semiotisk analyse av norske grunnskolelærerstudenters arbeid med ulike representasjoner av sammenhenger mellom størrelser

INGELIN S. ESPESETH

KAREN AUSLAND

VEILEDER

PER SIGURD HUNDELAND

JORUNN REINHARDTSEN

Universitetet i Agder, 2023

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår femårige lektorutdanning ved Universitetet i Agder, og det er med takknemlighet vi ser tilbake på reisen. Studieløpet har ikke bare påvirket oss som fremtidige lærere, men også som personer. Gjennom studiet har vi fått nye perspektiv i livet, møtt kunnskapsrike mennesker, og ikke minst hatt gleden av å bli kjent med mange flotte medstudenter. Fem fine år fylt med gode samtaler, gøye opplevelser, og intens jobbing til tider – uten hverandre hadde vi ikke fått det til.

Masteroppgave har vært en viktig del av vår utdannelse, og den har gitt oss kunnskap og erfaring som vil være verdifull når vi tar fatt på vår rolle som lærere. Gjennom oppgaven erfarer vi at matematikkfaget i skolen har behov for et løft, og med ny læreplan ser vi at disse intensjonene er påbegynt. Vi vil takke våre veiledere, Per Sigurd Hundeland og Jorunn Reinhardtsen for deres verdifulle råd og tips gjennom prosessen. Våre samtaler og deres konstruktive tilbakemeldinger, har hjulpet oss fra start, og bidratt til at oppgaven fremstår som den gjør i dag.

Ingelin S. Espeseth og Karen Ausland

Kristiansand, mai 2023

Sammendrag

Algebra har i flere tiår vært en betydelig årsak til nedgang i matematikkprestasjoner i norsk skole, og manglende kompetanse i emnet kan knyttes til frafall i yrkesutdanninger (Grønmo et al., 2010; NOKUT, 2008). Til tross for algebraens viktige betydning i samfunnet viser både lokale og globale undersøkelser at dette er et utfordrende område, både for elever og lærerstudenter (Grønmo & Onstad, 2012; NOKUT, 2023). Forskning viser videre at elevenes forståelse i matematikk i stor grad avhenger av lærernes kunnskap, noe som understreker viktigheten av å undersøke lærerstudenters ferdigheter i algebraisk tenkning. På bakgrunn av dette er formålet med denne kvalitative studien å undersøke algebraisk tenkning blant norske lærerstudenter ved den 5-årige grunnskolelærerutdanningen for 5.-10. trinn. Studien undersøker spesielt studentenes forståelse av sammenhengen mellom størrelser i arbeid med representasjoner, som er sentral del av algebra.

Vi gjennomførte en analyse av 170 eksamensbesvarelser fra Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen (NOKUT) sin deleksamen i algebra, gjennomført av lærerstudenter ved den norske grunnskolelærerutdanningen for 5.-10. trinn. Det ble gjennomført en innholdsanalyse for å identifisere interessante funn omhandlende studentenes algebraiske tenkning. Deretter ble det utført en semiotisk analyse av studentbesvarelsene for å undersøke lærerstudentenes forståelse for sammenhenger mellom størrelser. For å se etter tegn til forståelse hos studentene ble hovedsakelig Duvals (2006) rammeverk benyttet, som utdyper at det å gjenkjenne matematiske objekter gjennom ulike representasjoner er essensielt for å snakke om forståelse.

Resultatene fra studiet indikerte at lærerstudentene mestret direkte representasjonsoverganger som i mindre grad krevde å se sammenhenger. Imidlertid møtte studentene utfordringer knyttet til indirekte representasjonsoverganger, som i større grad krevde en kognitiv tolkningsprosess av relasjoner i representasjonene. I disse transformasjonene mellom representasjonene, kom ikke studentenes forståelse for begrepene funksjoner og variablers frem i stor grad. Resultatene synliggjør betydningen av en systematisk forbedring av grunnskolelærerutdanning i matematikk, med økt fokus på relasjoner. Lærernes fag- og pedagogiske kunnskap er viktige faktorer for elevers prestasjoner og forståelse i algebra, og dette er dermed et avgjørende aspekt for å bedre elevenes algebraforståelse.

Summary

For decades, algebra has been a significant cause of declining mathematics performance in Norwegian schools, and lack of competence has been linked to dropouts in vocational education (Grønmo et al., 2010; NOKUT, 2008). However, despite algebra's important role in society, local and global studies show that this is challenging for both students and pre-service teachers (Grønmo & Onstad, 2012; NOKUT, 2023). Research further shows that students understanding of mathematics depends largely on teachers' knowledge, emphasizing the importance of investigating pre-service teachers’ abilities in algebraic thinking. Hence, this qualitative study aims to investigate algebraic thinking among Norwegian pre-service teachers at the 5-year primary school teacher education for grades 5-10. The study, more precisely, examines pre-service teachers’ understanding of the relationship between quantities in work with representations, a central part of algebra.

We conducted an analysis of 170 exam responses from the Norwegian Agency for Quality Assurance in Education's (NOKUT) exam in algebra, taken by pre-service teachers in the Norwegian primary school teacher education for grades 5-10. First, content analysis was carried out to identify interesting findings concerning pre-service teachers’ algebraic thinking. Then, a semiotic analysis of the pre-service teachers’ answers was performed to examine the student's understanding of the relationship between quantities. Mainly, Duval's (2006) framework was used to look for signs of understanding among the pre-service-teachers, which elaborates that recognizing mathematical objects through different representations is essential for talking about understanding.

The study results indicated that pre-service teachers mastered direct representation transitions, which required less attention to relationships. However, pre-service teachers encountered challenges related to indirect representation transitions, which required a greater cognitive interpretation of relationships in the representations. In these transformations between representations the pre-service teachers’ understanding of the relation between the concepts of functions and variables, did not come through to a great extent. The results highlight the importance of systematically improving primary school teacher education in mathematics, with an increased focus on relationships. Teachers' professional- and pedagogical knowledge are important factors for students’ performance and understanding in algebra, thus a crucial aspect of improving students’ algebraic understanding.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning med kort bakgrunn og forskningsspørsmål.

Matematikk er et sentralt fag i dagens skole, og anses som nødvendig for å kunne forstå og mestre samfunnet vi lever i. Sentralt i skolematematikken står algebraemnet, som stadig tar større plass i læreplanen gjennom kjerneelement og kompetansemål, og slik fremhever algebraens viktige rolle for å utvikle elevers forståelse og evne til å se sammenhenger i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2019). En god forståelse for algebra kan danne et solid fundament for forståelse innen andre disipliner senere i livet, samt gi skolelever flere utdanningsmuligheter (Lacampagne et al., 1995). Til tross for algebraens viktige rolle i både samfunn og skole, viser imidlertid studier utført på elever og lærerstudenter at algebraisk tenkning anses som utfordrende (Bergem et al., 2016; Grønmo & Onstad, 2012).

Algebra har vært en stor årsak til tilbakegang i matematikkprestasjoner på alle nivåer i den norske skolen siden 1990-tallet (Grønmo et al., 2010). *Programme for International Student Assessment* (PISA)-undersøkelsen viser blant annet til svake resultater innen algebra. PISA måler 15-åringers kompetanse i å anvende matematikk knyttet til både matematiske og virkelighetsnære situasjoner (Kjærnsli & Olsen, 2013). Resultatene avdekker at norske elever ligger på omtrent samme nivå som OECD-gjennomsnittet innen matematikk generelt, men områder som *forandring og sammenheng*, som kan knyttes opp mot generalitet i algebra, anses som utfordrende for elevene (Kjærnsli & Olsen, 2013). *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS)- undersøkelsene, en internasjonal undersøkelse som ser på elevers læringsutbytte i sentrale skolefag som matematikk, underbygger resultatene fra PISA-undersøkelsen. Basert på elevers forståelse og resonnement i komplekse matematiske situasjoner, vises en signifikant tilbakegang innen disiplinen algebra (Bergem et al., 2016). De norske elevene scorer betydelig dårligere enn elever fra andre land som Sverige, England og USA. Dette kan indikere at algebra prioriteres ulikt i landene (Bergem et al., 2016). Et annet oppsiktsvekkende aspekt er at resultater fra Nasjonalt organ for kvalitet i utdanninga (NOKUT) (2008) viser at frafall fra yrkesutdanninger i Norge også kan knyttes til manglende kompetanse innen områder som algebra.

Dette ses i sammenheng med studier gjort på lærerstudenter. Resultater fra NOKUTs deleksamen i algebraisk tenkning, som ble gjennomført av norske lærerstudenter på grunnskolelærerutdanningen for 5.-10.trinn (heretter GLU-studenter) høsten 2022, viser at kun 6 av10 studenter bestod. Dette tilsvarer en strykprosent på 37,8 %, som er 17,2 % høyere enn høsten 2021 (NOKUT, 2023). Utviklingen er bekymringsfull da læreres kompetanse er en viktig faktor for at elever skal utvikle nødvendig forståelse i faget (Bergem et al., 2016; Hill et al., 2005). Bekymringen er at dersom matematikkutdanning på høyere nivå i Norge ikke blir riktig prioritert, kan dette skape en uheldig trend der kommende generasjoner av lærere ikke har den nødvendige forståelsen for faget. En videre konsekvens kan være at denne manglende forståelsen går på bekostning av den matematiske forståelsen til elever i skolen (Grønmo & Onstad, 2012). Flere forskere påpeker dermed behovet for forskning på lærerstudenters algebraiske forståelse, for å sikre at kommende generasjoner av lærere har god faglig kompetanse, og kan støtte utviklingen av barns forståelse innenfor fagområdet (Tanisli & Kose, 2013).

På bakgrunn av dette vil vi i vår masteroppgave analysere besvarelser fra NOKUTs deleksamen i algebraisk tenkning, som er obligatorisk å gjennomføre for alle GLU-studenter som en del av utdanningen. Studentbesvarelsene brukt i vår undersøkelse, er gjennomført av studenter som studerer for å bli lærere på 5-10 trinn. Ettersom oppgavens omfang er begrenset, vil vi, med bakgrunn i matematikkfagets læreplan, og nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanningen trinn 5-10, kun undersøke studentenes forståelse for algebra gjennom deres evne til å identifisere sammenhenger mellom størrelser (Kunnskapsdepartementet, 2019; Utdannings- og høgskolerådet, 2018). Duval (2017) påpeker at det å gjenkjenne objekter gjennom ulike representasjoner er essensielt for å snakke om forståelse. De nasjonale retningslinjene viser i likhet til at *«Bruk av ulike representasjoner er nødvendig for å gjøre matematiske begrep og ideer tilgjengelige for elever.»* (Utdannings- og høgskolerådet, 2018, s. 44). På bakgrunn av dette vil vårt forskningsspørsmål være;

> *Hvilke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser kommer til uttrykk i grunnskolelærerstudenters arbeid med ulike representasjoner?*

1.1 Algebra i skolen

I denne delen vil vi presentere konteksten for denne studien, som er algebra i skolen. Algebra utgjør en stor del av dagens skolematematikk og anvendes i store deler av pensumlitteratur. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20) viser til at algebra handler om *«å utforske strukturer, mønster og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk.»* (Kunnskapsdepartementet, 2019). I tillegg til å være et eget hovedområde, er algebra også et viktig verktøy i matematikken generelt (Kieran, 2007). Dette vises blant annet i arbeid med temaer som inkluderer variabler og generaliseringer, slik som vi finner i geometrien.

Selv om det er konsensus angående algebraens viktighet i matematikkfaget, anses dette likevel som et begrep vanskelig å gi en generell definisjon på (Usiskin, 1988). En vesentlig del av utfordringen kan knyttes til at betydningen av begrepet varierer ut fra kontekst. For eksempel vil begrepet ha ulik betydning for grunnskoleelever sammenlignet med universitetsstudenter (Usiskin, 1988). Det at det ikke eksisterer en entydig definisjon på algebrabegrepet, kan knyttes til at det heller ikke er entydig hva algebra i skolen skal innebære. Historisk sett har introduksjonen til skolealgebra tatt flere forskjellige retninger, og det forekommer fortsatt ulike måter å tilnærme seg algebraen på. Blanton et al. (2017, s. 27) foreslår at algebra i skolen bør ses som en sammenheng av kvaliteter som å kunne generalisere, benytte ulike representasjoner, samt legitimere og resonnere med matematiske strukturer og relasjoner. I dagens læreplan ser vi at flere av disse tankene gjenspeiles i både kjerneelement og kompetansemål, som belyser essensielle aspekter for at elevene over tid skal utvikle forståelse og evne til å se sammenhenger i matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019).

I motsetning til tidligere læreplaner legges det nå større vekt på elevenes utvikling av dybdeforståelse innenfor algebra. I Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006 (LK06) var algebra først en del av skolematematikken på 5. trinn. Til sammenligning, i LK20 er det kompetansemål knyttet til algebraisk tenkning allerede på 1. og 2. trinn gjennom arbeid med representasjoner, mønstre og systemer. Ved kompetansemål knyttet til kjerneelementene «*abstraksjon og generalisering*», og «*representasjon og kommunikasjon*», er målet å gradvis utvikle elevenes algebraiske ideer, og evne til å abstrahere matematiske mønstre og sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Den algebraiske tilnærmingen brukt i LK20 kan ses i lys av Kaput (1998), som påpeker viktigheten av at elever tidlig introduseres til algebraisk tenkning, før de blir introdusert for bokstaver og variabler. Formålet med en tidlig introduksjon ved bruk av relasjoner, strukturer, og sammenheng mellom størrelser, er å skape en solid forståelse som kan komme til nytte når elevene senere blir introdusert til ligninger og funksjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kieran (2004) påpeker i likhet at erfaring med systematiske mønstre fra barnetrinnet kan legge grunnlag for forståelse når elever skal jobbe med ideen funksjon, og erfaring med tall og egenskaper kan legge grunnlag for senere arbeid med symbol og algebraiske uttrykk. Hun argumenter for at flere studenter som opererer aritmetisk, har en tendens til å ikke se relasjonelle aspekter, men heller kun fokusere på beregning. Det er verdt å nevne viktigheten av lærerens rolle i denne sammenheng, da algebra ikke alltid nevnes eksplisitt i kompetansemålene. Derfor er det nødvendig at lærere har god kunnskap om hva algebraisk tenkning innebærer på de ulike trinnene i skolen (Kaput, 1998).

2.0 Tidligere forskning

Det overordnete fokuset i denne delen er å redegjøre for tidligere forskning på lærerstudenters algebraiske tenkning. Mer spesifikt, deres forståelse for sammenheng mellom størrelser, som i stor grad krever å forstå funksjon- og variabelbegrepet. Studier viser at lærere scorer lavt i algebraemnet (Grønmo & Onstad, 2012). Flere studier viser også til at læreres undervisningskvalitet og kompetanse har stor betydning for elevers læringsutbytte (Bergem et al., 2016; Hill et al., 2005). Denne forskningen underbygger hvorfor en studie som vår er nødvendig.

I sterk korrelasjon til resultater fra PISA- og TIMSS-undersøkelsene, viser rapporten «*Mange og store* utfordringer» til liknende svake resultater innen algebra blant lærerstudenter (Grønmo & Onstad, 2012). Rapporten baserer seg på *Teacher Education and Development Study in Mathematics 2008* (TEDS-M) undersøkelsen, en komparativ studie av utdanning av matematikklærere i grunnskolen i 17 land, inkludert Norge (Grønmo & Onstad, 2012, s. 9). I Norge ble fire populasjoner identifisert: (1) Norsk allmennlærerutdanning uten spesialisering i matematikk (ALU); (2) Norsk allmennlærerutdanning med mer matematikk enn de obligatoriske kursene (ALU+); (3) Studenter som tok praktisk-pedagogisk utdanning som påbygning til sitt fagstudium (PPU); (4) Studenter på siste år av et masterprogram i matematikk fagdidaktikk (Master) (Grønmo & Onstad, 2012, s. 203). ALU og ALU+ er studenter som potensielt kan undervise til og med 10 trinn, mens PPU og Master er studenter som potensielt også skal undervise i videregående skole. Rapporten avdekket at norske lærerstudenter på sitt siste år i utdanningsløpet, presterte svakere i matematikk og matematikkdidaktikk enn de fleste andre deltakende land, og markant under det internasjonale gjennomsnittet. Kompetanse innen algebra skilte seg ut som et svakt område, hvor hele 60% av studentene hadde utfordringer. Dette til tross for at oppgavene gitt var innenfor kompetanseområder ungdomsskoleelever skal lære. Norske lærerstudenter som potensielt skal undervise i videregående skole (PPU/master) presterte dårligere i algebra enn lærerstudenter fra andre land som kun kan undervise til og med 10 trinn (ALU, ALU+), for eksempel lærerstudenter fra Singapore og Polen. TEDS-M- undersøkelsen indikerer, i likhet med TIMSS og PISA at algebra er et nedprioritert område i norsk skole (Grønmo & Onstad, 2012).

Studien til Tanisli og Kose (2013) viser viktigheten av læreres fagdidaktiske og pedagogiske kompetanse for elevers matematiske utvikling. Studien undersøkte blant annet allmennlærerstudenters kunnskap og mulige misoppfatninger innen algebra, samt lærerstudentenes evne til å avdekke hva elever forstår og opplever utfordrende. Resultatene fra studien indikerte at lærerstudenter manglet tilstrekkelig kompetanse innen algebra. Deres misoppfatninger innen algebraiske begreper som variabel og likhet, forhindret de i tillegg å identifisere elevers tankeprosesser og misoppfatninger. I tillegg belyste resultatene et annet problemområde; flere lærerstudenter brukte ikke riktig matematisk språk og terminologi i sine forklaringer, noe som kan skape enda mer usikkerhet og misforståelse hos elever.

I likhet med Tanisli og Kose (2013) viser Rule og Hallagaen (2007) også i sin studie at lærerstudenter opplever algebra utfordrende. Resultatene deres indikerte at problemene særlig var knyttet til å definere variabelbegrepet og identifisere mønstre i ulike representasjoner. Brown og Bergman (2013) sin studie av lærerstudenters forståelse av variabelbegrepet utdyper dette. Studien omfattet 73 lærerstudenter tilknyttet barne- og ungdomstrinnet, som fikk oppgaver knyttet til variabelbegrepet som tidligere hadde blitt gitt til ungdomsskoleelever. Hovedfunnene viser at de fleste lærerstudentene mestret prosedyreoppgaver knyttet til å finne enkle algebraisk utrykk. Videre indikerte resultatene at studentene hadde utfordringer når det kom til å se en variabel som noe som varierer, i en avhengighetsrelasjon, og ikke bare som et konstant, ukjent tall. For eksempel skjedde dette i oppgaver hvor noen verdier var konstante, mens andre ble endret. Lærerstudentene hadde samme utfordringer som ungdomsskoleelever. Både lærerstudentene og elevene var ikke tilfredse med å presentere svaret algebraisk ved bruk av variabler, men ville heller ha et spesifikt numerisk svar. Brown og Bergman (2013) påpeker derfor viktigheten av å styrke lærerstudenters forståelse for variabler for å kunne forbedre prestasjonene til ungdomsskoleelever innen algebra.

I tillegg til utfordringer med bruk av variabelbegrepet, viser også studier at lærerstudenter har utfordringer knyttet til funksjonsbegrepet. Blant annet har Hansson (2006) forsket på lærerstudenters evne til å knytte sammenhenger mellom funksjonsbegrepet og ulike matematiske konsepter ved bruk av konseptdiagram som forskningsverktøy. Gjennom sin forskning kom han frem til at funksjonsbegrepet var et lite godt integrert begrep blant lærerstudentene, og studentene manglet begrepsforståelse av funksjoner. En stor andel lærerstudenter hadde spesielt utfordringer med å knytte begrepet funksjon opp mot formel ved algebraisk utrykk eller ligning. Dette så ut til å være relatert til lærerstudentenes tendens til å blande terminologi av ulike konsepter i funksjonssammenhenger.

Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie knytter forståelse av funksjonsbegrepet til evnen å oversette mellom representasjoner av en funksjon. Deres resultat viser at selv om det er forventet at studenter på både videregående og høyskolenivå bør kunne oversette fra graf og verbale beskrivelse, til symbolsk formel og tabell, er det flere tegn til det motsatte. Studentene i studien fortapte seg i oversettelsesprosessen fra en representasjon av et matematisk objekt til et annet. Dette ble særlig assosiert med oversettelsesprosesser som krevde at studentene så matematiske relasjoner mellom representasjonene, og hvor de brukte variabler til å utrykke sammenhenger. Deres funn belyser at studenter mestret oversettelse mellom representasjoner som krevde lokale tolkningsprosesser av representasjonen. Med dette menes oversettelser mellom representasjoner, som ikke krever dyp grad av tolkning, eksempelvis oversettelsen fra graf til tabell. Studentene hadde større utfordringer med å gjennomføre oversettelser som krevde en mer helhetlig tolkningsprosess. Funnene viste videre at studentene ikke nødvendigvis så korrelasjon mellom ulike representasjonsformer av funksjonen.

Tidligere forskning viser at lærerstudenters utfordringer med funksjon- og variabelbegrepet kan være et hinder for utvikling av algebraisk tenkning. Flere studier viser til at universitetsutdanning kan være en årsaksfaktor (Castro, 2004; McGowen & Davis, 2001). Castro (2004) påpeker i sin studie at lærerutdanning gjerne knyttes til studenter som skal fortsette sin utdanning innen matematikk, uten å styrke lærerstudenters kompetanse innen skolerelaterte konsepter. Dette støttes av studiet til McGowen og Davis (2001) som også viser til viktigheten av utdanning for å forbedre lærerstudenters evne til å se sammenhenger, relasjoner og beslektede ideer, slik at de lærer det de trenger for å undervise i skolen.

3.0 Teoretisk rammeverk

Det teoretiske rammeverket legger grunnlaget for denne studien og setter rammer for studiens design og analyse av datamaterialet. Kjernen av rammeverket er matematiske representasjoner, og vil hovedsakelig basere seg på arbeidet til Duval (1999, 2006) og Janvier (1987). Vi ser rammeverket i lys av algebraisk tenkning blant GLU-studenter som er metaperspektivet i studien.

3.1 Matematiske representasjoner

For at matematiske tenkning skal kunne oppstå, er det essensielt å kunne oversette mellom ulike representasjoner av et matematisk objekt (Duval, 2008). Duval (1999, s. 4) påpeker at siden matematiske objekter er abstrakte, er disse objektene kun tilgjengelige for oss gjennom ulike representasjoner. Disse objektene kan være alt fra en funksjon, en variabel, eller et tall. Det finnes mange ulike representasjoner for ett og samme matematisk objekt, og det kan være vanskelig å tenke seg objektet uten dens representasjon. Eksempelvis kan objektet *funksjon* være vanskelig å forestille seg uten funksjonens representasjoner, som formel eller graf. Duval (2006) utdyper at ulike typer representasjoner kan gi ulik type innsikt i objektet, avdekke nye egenskaper og sammenhenger, og slik komplementerer ulike representasjoner hverandre. For at forståelsen for et objekt skal oppstå, må man kunne representere objektet på minst to forskjellige måter. Man vil likevel aldri få full tilgang til objektet, men ved å benytte ulike representasjoner vil man få en større innsikt.

Det viktigste er likevel ikke representasjonene i seg selv, men transformasjonen av representasjoner tilhørende det samme matematiske objekt. Med transformasjon menes oversettelsesprosessen mellom ulike representasjoner, der objektets informasjon blir overført fra en representasjon til en annen. Duval (2006) viser til to ulike typer transformasjoner; *«treatments»* og *«conversions»* (Duval, 2006, s. 111), fritt oversatt til bearbeiding og konvertering. Med bearbeiding menes det at man transformerer innenfor samme representasjon, som for eksempel når man løser en likning, eller fullfører en figursekvens ved å tolke mønstre i tidligere figurer (Duval, 2006, s. 111). Ved konvertering oversetter man derimot mellom ulike representasjoner, og endrer dermed det Duval (2006) betegner som et register. Å endre register er nødvendig for å tilpasse objektet som blir betegnet i en representasjon, til representasjonen den oversettes til. For å klare dette må man gjenkjenne konsepter og konstruksjoner i representasjonen man tar utgangspunkt i. For eksempel kan dette være å gå fra en algebraisk notasjon, som en formel, til tilsvarende grafiske representasjon. Ved å bruke ulike konverteringsmetoder påvirkes kompleksiteten i den kognitive forståelse som er nødvendig for å lære matematikk, og de spesifikke tankeprosesser som kreves for matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 114). Dette da man må gjenkjenne det samme objektet gjennom to ulike representasjoner, som ofte ikke har synlige fellestrekk (Duval, 2006). En slik endring i register vil føre til en dypere forståelse for objektet.

Janvier (1987) viser også til viktigheten av å bruke representasjoner for å oppnå forståelse i matematikken. Han trekker frem den psykologiske prosessen som involveres i oversettelse fra en representasjon av et objekt, til en annen, og kaller dette for en translasjonsprosess. I translasjonsprosessen er målet å opprettholde den matematiske betydningen mellom kilderepresentasjonen, representasjonen man tar utgangspunkt i, og målrepresentasjonen, representasjonen man ønsker å oversette til. Man må derfor velge å bruke elementer i kilden som er nødvendig for å nå målet (Janvier, 1987). For å belyse hvilke psykologiske prosesser som kan finne sted i disse translasjonene, begrenser han seg til å snakke om fire forskjellige representasjoner av det matematiske objektet funksjon; *situasjon/verbal forklaring, tabell, graf* og *formel*. I tabell 1 kommer det til syne hvilke psykologiske prosesser som involveres i slike translasjoner mellom representasjoner. I vår studie er vi opptatt av representasjoner for funksjoner og variabler, mer spesifikt representasjoner av sammenheng mellom størrelser.

Tabell 1: Oversettelse av Janvier (1987, s. 15) sin illustrasjon av psykologiske prosesser som foregår i oversettelse mellom forskjellige matematiske representasjoner.

Til / Fra	**Situasjon, verbal forklaring**	**Tabell**	**Graf**	**Formel**
Situasjon, verbal forklaring		Måle	Tegne	Modellere
Tabell	Lese		Plotte	Tilpasse
Graf	Tolke	Lese av		Kurvetilpasning
Formel	Parameter-gjenkjenning	Databehandling	Tegne	

En translasjon mellom slike representasjoner kan gi ulike innganger til matematiske ideer og konsepter, da det kreves ulike prosesser for å gjennomføre oversettelsen. Det trekkes blant annet frem at en translasjon mellom funksjon representert ved situasjon, til funksjon representert ved formel, blir modellering brukt i oversettelsen. Skal man derimot fra situasjon til graf, må man tegne, som krever en annen tolkning av kilderepresentasjonen. Janvier (1987) påpeker at oversettelsesevnen best kan utvikles når studenter oversetter både fra kilden til målet, men også fra målet til kilden, da dette vil gi en dypere forståelse for objektet. Vi vil videre bruke Duvals (2006) begrep konvertering om slike oversettinger fra en representasjon til en annen, selv om Janvier (1987) ikke direkte bruker begrepet.

Duval (2006) påpeker at roten til utfordringene mange elever har i matematikk, ligger i den kognitive kompleksiteten ved konvertering av representasjoner. Dette er særlig fremtredende når det ikke er en direkte sammenheng mellom kilde- og målrepresentasjonen, som krever en kompleks tolkning av representasjonene for å gjennomføre konverteringen. Tolkning referer til handling som en elev gir mening til, eller får mening fra. Her dannes et skille mellom det vi tolker som direkte og indirekte konvertering, ut ifra kognitiv avstand mellom representasjonene, altså hvilken grad av tolkning som trengs i utførelsen. Når et objekt konverteres direkte fra en representasjon til en annen, er kilderepresentasjonen gjennomsiktig til målrepresentasjonen (Duval, 2006). Med dette menes det at disse representasjonene har lite unødvendig informasjon å filtrere gjennom, og dermed oppstår det mindre tolkningsfeil i en slik konvertering (Adu-Gyamfi et al., 2012). Et eksempel på dette er i oversettelse fra graf til tabell, her kreves det ikke mer enn en det Duval (2006) kaller en lokal tolkningsprosess av representasjonen, man må kun lese av noen utvalgte punkt på grafen, og plotte det inn i en tabell.

Ved indirekte konverteringer trengs det derimot en global tolkningsprosess, da det ikke er en synlig forbindelse mellom kilde- og målrepresentasjon. For å gjennomføre en slik konvertering må objektet ses helhetlig gjennom to ulike representasjoner. Eksempelvis kan dette være når objektet skal konverteres fra graf til formel, dette krever en analyse av alle grafens aspekter i konverteringsprosessen (Duval, 2006). Bossé et al. (2011) har utarbeidet en tabell omhandlende tolkningsaktiviteter, basert på Duval (2006) sine begreper *lokal* og *global* tolkning i henhold til Janvier (1987) sine translasjonsprosesser.

Tabell 2: En oversettelse fra Bossé et al. (2011, s. 120) sin illustrasjon av lokale og globale tolkningsaktiviteter basert på Janvier (1987) sin tabell.

Til **Fra**	**Situasjon, verbal forklaring**	**Tabell**	**Graf**	**Formel**
Situasjon, verbal forklaring		Global	Global	Global
Tabell	Global		Lokal	Global
Graf	Global	Lokal		Global
Formel	Global	Lokal	Lokal	

I venstre kolonne angis kilderepresentasjon, og den øverste raden viser målrepresentasjon i en respektiv oversettelse. For eksempel belyses det i tabellen at vil det være mer kognitivt krevende å oversette fra graf til formel, enn fra graf til tabell. Bossé et al. (2011) belyser at studenter har større vanskeligheter med å gjennomføre konverteringer som krever global tolkning, i motsetning til konverteringer som kun behøver en lokal forståelse av representasjonene.

3.2 Begrepsmessig forståelse

Vi vil i denne delen klargjøre hva *forståelse* betyr i vår studie. En betydelig indikator for om en person innehar begrepsmessig forståelse er å kunne representere matematiske objekt på ulike måter, se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer, og vite hvordan representasjonene brukes hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2001).

Duval (2017) viser i likhet til at det å gjenkjenne objekter gjennom ulike representasjoner er essensielt for å snakke om forståelse. Det innebærer å se relasjoner mellom ulike informasjonsdeler, som for eksempel å se fellestrekk i ulike representasjoner, og knytte ny og gammel kunnskap sammen (Hiebert & Lefevre, 1986). Studenter som har begrepsmessig forståelse, lærer seg dermed metoder og kunnskaper som senere kan kobles opp mot mer avansert matematikk, og slik kan studentene utvikle sitt register (Duval, 2006; Kilpatrick et al., 2001). I lys av algebra kan Kilpatricks et al. (2001) term begrepsmessig forståelse knyttes opp mot Kaput (1998, s. 25) sitt begrep; *«Algebra som et nettverk av kunnskap og ferdigheter»*, som står i motsetning til *«Algebra som institusjon»*. Algebra som institusjon viser til en tradisjonell tilnærming til algebra, hvor elever lærer seg prosedyreferdigheter for å løse spesifikke problemer.

Tilnærmingen er begrenset når det kommer til den underliggende, generelle matematisk forståelse, og det å kunne overføre matematikkunnskap til nye situasjoner. Algebra som et nettverk av kunnskap og ferdigheter, knyttes til begrepsmessig forståelse, og representerer en tilnærming som skal gi elevene en dyp og relasjonell forståelse for algebra, slik at de klarer å bruke denne kunnskapen til å generere ny kunnskap. Dette er en tilnærming hvor elever må se hvordan konsepter er i relasjon til hverandre. Dette innebærer å oppnå forståelse innen algebrafeltet i seg selv, i tillegg til å bruke denne forståelsen i andre områder i matematikken (Kaput, 1998). Vi vil videre se på hva forståelse betyr i bruk av variabler og funksjoner, som er viktige termer i forståelsen av sammenhenger mellom størrelser i algebra.

3.2.1 Forståelse av variabelbegrepet

I dagens skolealgebra er variabelbegrepet sentralt, da algebra handler om å forstå bokstaver og deres operasjoner (Usiskin, 1988). Usiskin (1988) påpeker at det er først når elever møter variabelbegrepet at de virkelig studerer algebra. Betydningen av begrepet har endret seg over tid, og har fortsatt ulik betydning i ulike kontekster, noe som kan gjøre det krevende å forstå variabelbegrepet. En variabel kan blant annet beskrive noe som varierer, som er i motsetning til noe konstant (Brekke et al., 2000, s. 9). Variabler kan slik brukes til å beskrive reelle størrelser hvor verdier endres. Samtidig kan variabler også ses i form av bokstaver som representerer generaliserte tall i matematikk, hvor noen tall endres mens andre forblir konstante (Brekke et al., 2000, s. 9). Mange elever kan godta at en bokstav står for et ukjent tall, og utføre beregninger på dette grunnlaget, men kan i større grad ha utfordringer tilknyttet å se bokstaven representere noe som varierer (Janvier, 1987).

Forståelse for variabelbegrepet innebærer å hensiktsmessig representere matematiske ideer, og forstå hvordan variabler representeres i ulike sammenhenger. Usiskin (1988) beskriver fire ulike typer av algebra: 1) algebra som generalisert aritmetikk; (2) algebra som prosedyrer for å løse visse type problemer; (3) algebra som studie av sammenhenger mellom størrelser; og (4) algebra som studiet av strukturer. Variabler gis ulik betydning tilknyttet hver av disse. I denne oppgaven vil vi kun gå inn på; (3) algebra som studiet av sammenhenger mellom størrelser, da dette er et aspekt tett knyttet til vårt forskningsspørsmål. Her viser Usiskin (1988) til variabelbegrepet som noe som varierer, og som har betydning som et argument eller en parameter. Denne betydningen av variabelbegrepet ser vi i sterk tilknytning til funksjonsbegrepet. Dette da variabler representerer størrelser, både konstante og i endring, mens funksjoner ser på hvordan disse størrelsene avhenger av, og påvirker hverandre.

3.2.2 Forståelse av funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet betraktes som et samlende konsept som gir en ramme for studiet av matematikk (Hansson, 2006). En funksjon kan ses på som en unik korrespondanse mellom to ikke-tomme sett, som tildeler hvert element i det første settet, domenet, nøyaktig ett element i det andre settet, kodomenet (Hansson, 2006). Usiskin (1988) forenkler denne definisjon, og beskriver en funksjon som en relasjon mellom to mengder, der hvert element i den ene mengden avhenger av verdier i den andre mengden. Disse elementene defineres som avhengig og uavhengig variabel, og er grunnleggende begreper som funksjoner er knyttet til (Usiskin, 1988). Definisjonen basert på den unike korrespondanse gjør funksjonsbegrepet abstrakt og generelt, og anses å være krevende for studenter (Hansson, 2006). Avhengighetsforholdet Usiskin (1988) refererer til anses lettere å gripe tak i for elever, og det er denne definisjonen vi hovedsakelig vil basere funksjonsbegrepet på i denne oppgaven. Å ha forståelse for funksjoner krever å se et nettverk av relasjoner og sammenhenger mellom størrelser, noe som innebærer og representerer funksjonsobjektet på ulike måter, og resonnere innenfor og mellom disse (Heid, 1996).

En forståelse for funksjonsbegrepet vil gjøre det lettere å løse problemløsningsoppgaver knyttet til virkeligheten, ved å se hvordan størrelser påvirker hverandre. Slike oppgaver kan inkludere å generere formler som representerer problemsituasjoner, generere funksjoner som beskriver mønstre eller sekvenser, eller utrykke regler som styrer numeriske sammenhenger (Nemirovsky, 1996). Det bør likevel presiseres at det stilles ulike krav til forståelse for funksjonsbegrepet, ut ifra kontekst. Størrelsesenheter kan klassifiseres som enkle eller sammensatte, altså kan noen størrelser være mer utfordrende å forstå enn andre (Janvier, 1996). Blant annet vil størrelser i abstrakte betydninger være vanskeligere å forstå enn konkrete størrelser. For eksempel kan måleenheten tid ha en konkret betydning som et mål på varighet i en prosess eller hendelse, men kan også ha en abstrakt betydning som uavhengig variabel, ved strekningen et objekt beveger seg over tid. Slik må man håndtere forskjellige betydninger av størrelser, og noen kontekster knyttet til virkelige situasjoner og sammensatte størrelser kan dermed være utfordrende for elever å forstå (Janvier, 1996). Størrelser som er knyttet til mønstersekvenser anses ifølge Nemirovsky (1996) som mindre abstrakt. Her finnes mulighet til å undersøke flere perspektiver for å se sammenheng mellom størrelser, både ved å utforske formelle måter å utrykke dem på, og ved å illustrere visuelle representasjoner. Dermed kan man oppleve ulike forventninger rundt hvilke resultater som gir mening, og slike størrelser kan oppleves mer reelt og håndgripelig (Nemirovsky, 1996).

3.3 Algebraisk tenkning

Begrepet algebraisk tenkning har med årene blitt mer sentralt i skolematematikken, og ses ofte på som en motsetning til tradisjonell skolealgebra (Kieran, 2004). Det å tenke algebraisk spisser seg inn mot å tenke abstrakt og generelt, ved å utforske og utvikle problemer for å rekonstruere generelle resultater fra spesielle tilfeller (Mason, 1996). Mason (1996) presiserer at generalisering er matematikkens hjerteslag, og at det alltid bør være mål å utforske generaliteter i matematikken, da dette vil gi elever en dypere forståelse av matematiske konsepter. Hvis ikke denne generaliseringen gjennomsyrer skolematematikken, finner matematisk tenkning ikke sted. Kieran (2007) utdyper dette, og viser til at algebraisk tenkning bør inkluderes ved å representere generelle matematiske relasjoner og mønstre. Hun argumenterer for at algebraisk tenkning kan ses som en tilnærming til kvantitative situasjoner, der det å kunne se generelle aspekter i disse fremmes. Situasjonen er ikke nødvendigvis symbolsk, men kan eksempelvis være en sekvens av figurmønster, hvor målet er å trekke frem generelle trekk om hvordan disse figurene oppfører seg, og på denne måten bruke informasjonen for å forutsi videre figurer (Kieran, 2004).

Å representere slike generaliteter i matematematiske sammenhenger, er like viktig som å generalisere i seg selv (Blanton et al., 2017). Dette begrunnes med at å representere et objekt er viktig for at matematisk tenkning skal finne sted, og videre for å oppnå forståelse (Duval, 2008). Utvikling av algebraisk tenkning kan slik bidra til en dypere forståelse av sammenheng mellom størrelser, og dermed også funksjon- og variabelbegrepet. Dette ved å bedre kunne se relasjoner og generaliteter i de ulike representasjonene av ulike objekter.

4.0 Metode

I denne delen av masteroppgaven vil vi presentere og begrunne valg av metode, og belyse hvordan vår vitenskapsteoretiske ramme kan hjelpe oss å besvare forskningsspørsmålet;

> *Hvilke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser kommer til uttrykk i grunnskolelærerstudenters arbeid med ulike representasjoner?*

Målet er å skape et nåtidsbilde av situasjonen blant GLU-studenter, hva de mestrer, og hva som er utfordrende i dette arbeidet. Først vil vi presentere studiens forskningsdesign, forskningstilnærming og forskningsparadigme. Videre presenterer vi kontekst, rammer og utvalg av oppgaver og besvarelser, samt noen sentrale aspekter rundt valg av disse, før vi presiserer hvordan vi har analysert og tolket datamaterialet. Til slutt vil vi reflektere rundt studiens reliabilitet og validitet, samt de etiske aspektene vi har tatt i betraktning.

4.1 Forskningsdesign, forskningstilnærming og forskningsparadigme

Som nevnt, er studiens mål å undersøke data fra et tilfeldig utvalg av GLU 5-10 sine deleksamensbesvarelser, for å avdekke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser, i arbeid med representasjoner.

For å best besvare forskningsspørsmålet vårt har vi valgt å benytte oss av en kvalitativ tilnærming. Dette innebærer at vi legger vekt på ord og språk i datamaterialet (Bryman, 2016). Vi analyserer studentenes besvarelser i dybden, for å belyse deres algebraiske tenkning og begrepsmessige forståelse. Kvalitative metoder har tradisjonelt blitt forbundet med forskning som innebærer direkte kontakt mellom forsker og forskningsobjekt, men analyser av verbale og visuelle uttrykksformer har blitt mer utbredt i kvalitativ forskning (Thagaard, 2018). I tillegg har vi innslag av kvantifisering gjennom ulike opptellinger.

For å utarbeide studiens forskningsspørsmål, utførte vi en kvalitativ innholdsanalyse av datamaterialet, hvor vi undersøkte hvilke algebraiske utfordringer som kom til syne i studentenes besvarelser. Gjennom besvarelsene så vi at oppgaver omhandlende sammenheng mellom størrelser var av interesse, og med bakgrunn i denne observasjonen ble forskningsspørsmålet utarbeidet. Videre, for å besvare forskningsspørsmålet, fant vi det passende å benytte oss av en semiotisk analyse av innholdet i besvarelsene (Bryman, 2016). Bakgrunn for valg av denne analysemetoden var at vi ville se etter tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelser, ved å se på studentenes evne til å transformere representasjoner. Selv om kvalitativ innholdsanalyse ikke er hovedmetoden i analysen av vår data, vil vi likevel presisere at metoden var viktig for å utforme studiens forskningsspørsmål.

Da vi gjennom hele prosessen legger betydning i besvarelser og dermed foretar fortolkninger av besvarelsene, er studien basert på den epistemologiske posisjonen *interpretivisme*, som er et fortolkningsbasert paradigme (Bryman, 2016). Interpretivisme står i motsetning til det positivistiske, som presenterer et naturvitenskapelig ideal der målet er å studere fenomener objektivt (Bryman, 2016). Jacobsen (2016, s. 29) argumenterer for at det er umulig for forskere å unngå egen fortolkning, enten det skjer før undersøkelsen gjennomføres, eller når resultatene tolkes. Når vi skal analysere studentbesvarelser, vil tolkningen allerede begynne når vi leser gjennom besvarelsene og slik legge grunnlag for videre analyse. De spesifikke fortolkningene vi gjør, ses i lys av en større forskningskontekst; hva kan disse besvarelsene si om studentenes forståelse av sammenhenger mellom størrelser. Slik kunnskap vil være tidsavgrenset, dynamisk og kontekstavhengig, da den sosiale virkelighet er i konstant endring (Jacobsen, 2016, s. 28).

4.2 Kontekst og rammer

Datamaterialet som brukes i denne studien er studentbesvarelser fra NOKUTs nasjonale deleksamen i algebraisk tenkning, som er obligatorisk å gjennomføre for alle GLU-studenter som en del av utdanningen. NOKUT er et organ som skal sikre og utvikle kvalitet i norsk høyere utdanning, og er et faglig uavhengig organ under Kunnskapsdepartementet (NOKUT, u.åa.). Deleksamenen har blitt gitt siden 2019, og er obligatorisk å gjennomføre, som en del av utdanningen, for alle GLU-studenter i Norge (NOKUT, u.åb.). Eksamenen skal prøve studentene i det matematikkfaglige emnet algebraisk tenkning, som «*går på tvers av ulike matematiske temaer som det jobbes med på 5.-10. trinn*.» (Universitets- og høgskolerådet, 2018, s. 44). Dette innebærer en prøvelse av studentens evne til å se «*samvariasjon, generelle strukturer, mønstre og relasjoner*» (Universitets- og høgskolerådet, 2018, s. 44). Eksamenen gjennomføres på samme tidspunkt for alle studenter, og sensureres på nasjonalt grunnlag av sensorer oppnevnt av NOKUT. Dette sikrer at studentenes kompetanse testes rettferdig og med samme standard. (NOKUT, u.åb.). I matematikk gjennomføres deleksamen om våren og høsten for de som tar GLU på trinn 1-7 og 5-10. Det er en gjenganger at betraktelig flere gjennomfører deleksamen på våren enn på høsten.

4.3 Utvalg

Vårt utvalg bestående av oppgaver fra NOKUTs deleksamener i algebraisk tenkning, og studentbesvarelser knyttet til disse oppgavene, er hentet fra deleksamen gitt høsten 2019, våren 2022 og høsten 2022. Innenfor disse deleksamenene har vi gjort et utvalg av fire oppgaver totalt, én fra 2019, to fra våren 2022 og én fra høsten 2022. Oppgavene vi har valgt stiller krav til studentenes algebraiske tenkning, mer spesifikt deres forståelse for sammenhenger mellom størrelser. To av oppgavene knyttes til sammenheng mellom størrelser ved å tolke en funksjon representert ved en graf. Studentene må her beskrive funksjonelle sammenhenger, samt konvertere grafen til andre representasjonsformer. De to andre oppgavene ber studentene om å utforske strukturer og mønstre i tall- og figursekvenser, og slik se sammenheng mellom størrelser i de ulike leddene.

Vi har fått tilgang til tre partier av studentbesvarelser fra hver av de utvalgte deleksamenene. I hver gruppe er det et ulikt antall besvarelser, som vil si at vi har ulikt antall besvarelser fra de forskjellige deleksamenene å basere analysen vår på. Dette utvalget presenteres i tabell 3.

Tabell 3: Antall besvarelser benyttet som datamateriale, tilknyttet respektive deleksamenene.

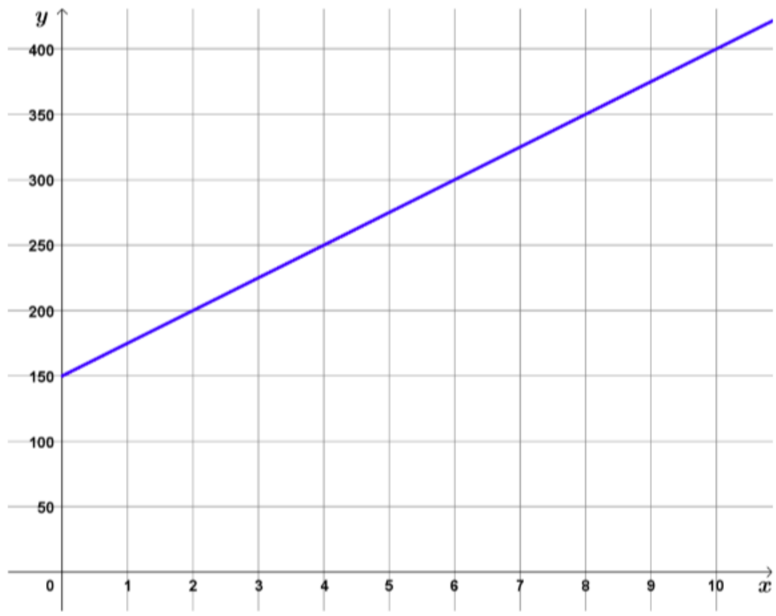
	Antall besvarelser i vårt utvalg	Antall besvarelser totalt	Prosentandel (omtrent)
Høst 2019	57	270	21%
Vår 2022	78	537	15%
Høst 2022	35	185	20%

Som tabellen viser analyser vi henholdsvis 57, 78 og 35 besvarelser til de respektive deleksamener. Fordi færre tar eksamen på høsten enn på våren, ser vi det som gunstig at vi analyserer et forskjellige antall besvarelser knyttet til deleksamenene. Vi kunne med fordel analysert flere besvarelser fra våren 2022 for en mer tilnærmet lik prosentandel. Totalt sett analyserer vi 170 studentbesvarelser, men siden to av oppgavene er fra våren 2022, er det totalt 248 oppgavebesvarelser som danner grunnlag for vår data. Ettersom besvarelsene er tilfeldig valgt ut, har vi ikke informasjon omhandlende studentenes kjønn, etniske bakgrunn, alder eller hvilken utdanningsinstitusjon de er tilknyttet. Det eneste vi vet er at besvarelsene er gjort av studenter, enten første eller andre året på GLU i Norge, og vil slik være relevante som undersøkelsesobjekter i vår studie.

Videre vil vi presentere de ulike oppgavene studentbesvarelsene stammer fra. Fra høsten 2019 er besvarelsene knyttet til oppgave 1. Denne oppgaven krever at studentene ser sammenheng mellom størrelser ved å tolke og konvertere en funksjon representert ved graf til andre målrepresentasjoner Fra deleksamen våren 2022 har vi valgt ut to oppgaver, oppgave 3 som i likhet med oppgave 1 (H19) er knyttet til å tolke og konvertere kilderepresentasjon gitt ved graf. I tillegg bruker vi oppgave 6, som er knyttet til å utforske strukturer og mønstre i figursekvenser. Oppgave 2 fra høsten 2022 er i likhet med oppgave 6 knyttet til utforsking av mønstre, men her med en tallfølge som kilde.

4.3.1 Oppgave 1 (H19)

Høsten 2019 gjennomførte 270 studenter NOKUTs deleksamen i algebraisk tenkning, som skoleeksamen uten hjelpemidler. Vi har analysert et tilfeldig utvalg av 57 besvarelser knyttet til denne eksamenen. Ettersom forskningsspørsmålet vårt omhandler studentenes forståelse for sammenheng mellom størrelser, har vi valgt å se på en oppgave knyttet til representasjonskonverteringer av funksjoner. Den utvalgte oppgaven er presentert under i figur 1.



Figur 1: Grafen illustrert i oppgave 1 fra høst 2019.

a) Lag en tabell som viser minst fire x-verdier med tilhørende y-verdier.

b) Finn en likning som beskriver grafen over

c) Beskriv med ord en konkret situasjon som kan representeres ved hjelp av grafen. Gi en tolkning av hva x-verdiene og y-verdiene representerer.

En elev påstår følgende om grafen over: «Da vi lærte om proporsjonale størrelser så fikk vi også en rett linje da vi tegnet grafen. Da er vel også nå x og y proporsjonale ...?»

d) Er påstanden riktig? Begrunn svaret ditt.

e) Løs likningen 275 = 150 + 25x grafisk.

I denne oppgaven er kilderepresentasjonen gitt ved en graf, og studentene skal konvertere grafen til ulike målrepresentasjoner knyttet til samme matematiske objekt. Først skal studenten gjennomføre en direkte konvertering mellom graf og en tabell med tallpar ved bruk av variablene knyttet til funksjonen. Her må studentene assosiere et punkt på grafen med et ordnet tallpar og plotte de i en tabell. Videre i oppgave 1b) blir studentene bedt om å lage en likning som beskriver grafen. Konverteringen mellom graf og ligning krever i større grad at studentene ser relasjoner mellom representasjonene, da det ikke direkte kan ses en forbindelse. For å gjennomføre konverteringen kreves det at alle grafens generelle aspekter tolkes. Videre skal studentene i oppgave 1c) representere den gitte grafen ved en konkret situasjon, studentene må se funksjonelle sammenhenger mellom graf og kontekst.

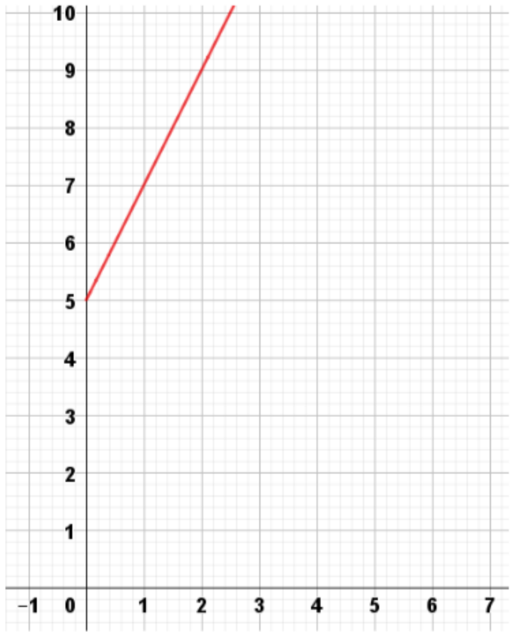
Oppgave 1d) omhandler et begrepsspørsmål om proporsjonalitet, som også er i tett tilknytning med sammenheng mellom størrelser. Likevel har vi valgt å se bort fra denne oppgaven i vår analyse, ettersom den ikke omhandler konvertering av representasjoner. I tillegg har vi valgt å se bort ifra oppgave 1e) som krever å løse en gitt likning grafisk, da vi fant lite interessante funn knyttet til besvarelsene.

4.3.2 Oppgave 3 (V22)

En annen oppgave vi analyserer besvarelser fra er oppgave 3 fra deleksamen våren 2022. I motsetning til eksamenen høsten 2019, ble denne deleksamen gjennomført som hjemmeeksamen grunnet COVID-19. Det var totalt 537 studenter som gjennomførte denne deleksamenen, og vi bruker et tilfeldig utvalg på 78 besvarelser som en del av grunnlaget for vår analyse.

Oppgave 3 lyder som følger:

Tenk deg at elever på 8. trinn arbeider med ulike representasjoner av funksjoner. Ta utgangspunkt I følgende grafiske representasjon av en funksjon:



Figur 2: Grafen illustrert i oppgave 3 fra vår 2022.

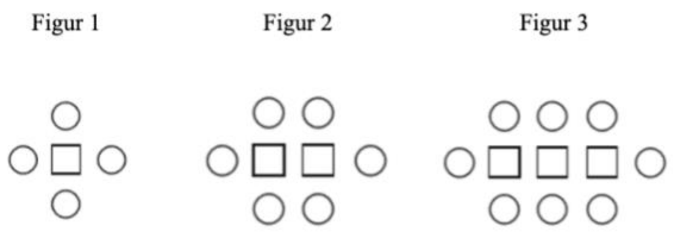
a) *Beskriv en situasjon fra hverdagslivet som kan utrykkes ved den grafiske representasjonen ovenfor. Definer variablene på de to aksene.*
b) *Lag en tabell med tallpar som representerer funksjonen ovenfor*
c) *Lag et funksjonsutrykk (formel) som representerer funksjonen ovenfor. Vis hvordan du kom fram til funksjonsutrykket.*

Oppgave 3 omhandler, i likhet med oppgave 1 (H19), funksjonsrepresentasjoner med graf som kilderepresentasjon. De største forskjellene mellom oppgavene er at oppgave 3 benytter lavere tall, men samtidig stiller høyere krav til begrunnelse av fremgangsmåte. Dette kan antyde at oppgaven muligens er lettere rent matematisk, men ikke nødvendigvis lettere didaktisk. I tillegg presenteres de ulike deloppgavene i forskjellig rekkefølge. Vi ser at deloppgave 3a) i likhet med deloppgave 1c) ber studentene om å konvertere representasjonen gitt ved graf til en virkelighetsnær situasjon. I tillegg må studentene definere oppgavens gitte variabler, og deres betydning i situasjonen. Videre går oppgave 3b), på lignende vis som oppgave 1a), ut på å konvertere grafen direkte til en tabell. Til slutt skal studentene i oppgave 3c), i likhet med oppgave 1b), representere funksjonen gitt, ved en formel. Studentene må her uttrykke grafen eksplisitt, som stiller krav til at studentene ser generelle aspekter i grafen, og presenterer sammenhengen mellom avhengige og uavhengige variabler.

4.3.3 Oppgave 6 (V22)

I tillegg til oppgave 3 fra deleksamen våren 2022, bruker vi også besvarelser fra oppgave 6 som grunnlag for datamateriale. Denne oppgaven omhandler å utforske sammenhenger og mønstre i figursekvenser. Vi analyserer de samme 78 studentbesvarelsene som i oppgave 3.

Oppgave 6 lyder som følger:
Følgende figurtalloppgave ble gitt til elever på mellomtrinnet:
Figurene nedenfor viser hvordan bord og stoler settes sammen etter et mønster. For eksempel er figur 1 satt sammen av ett bord og fire stoler. Vi tenker oss at mønsteret fortsetter utover de tre første figurene



Figur 3: Figurmønster representert ved bord og stoler illustrert i oppgave 6 fra vår 2022.

Hvordan kan vi regne ut antall stoler når antall bord er kjent?
En elev svarer slik: «Man tar antall bord og legger til én. Deretter ganger man med to.»

a) *Svarer eleven riktig? Begrunn svaret ditt ved bruke av figurene 1-3, og tilpass begrunnelsen til elever på mellomtrinnet.*
b) *Ta utgangspunkt i læreplanen i matematikk 1.-10. (MAT01-05) i LK20 til å gi to begrunnelser for at slike figurtalloppgaver passer på mellomtrinnet. Henvis tydelig til læreplanen.*
c) *Hvor mange bord trengs for å ha sitteplass til 33 personer? Finn svaret på to ulike måter. Den ene måten skal være bruk av likning.*
d) *Bruk figurene til å vise, på to ulike måter, hvordan du kommer fram til en eksplisitt formel for antall stoler når antall bord er kjent. Tydeliggjør sammenhengen mellom figurene og formelen.*

Studentene må gjennom flere prosesser for å løse denne oppgaven, som stiller krav til ulike matematiske- og didaktiske ferdigheter. I selve oppgaveteksten er en situasjon ved figurmønster presentert, som beskriver sammenhengen mellom bord og stoler. For de mest oppmerksomme kan de også benytte seg av det skriftlige elevsvaret som en representasjon av den samme sammenheng. Det er likevel ikke gitt i oppgaven at elevens svar er korrekt. Oppgave 6a) ber studentene begrunne på en didaktisk måte hvorfor/hvorfor ikke eleven svarer korrekt. Denne oppgaven stiller krav til at studentene ser relasjoner mellom ulike representasjoner som er et sentralt i arbeid med transformasjoner. Likevel ber ikke denne oppgaven om å transformere mellom representasjoner som er det vi setter søkelys på i vår analyse. Derfor går vi ikke dypere inn på denne oppgaven. Ettersom deloppgave 6b) kun er en ren didaktisk oppgave har vi også valgt å se bort ifra denne i studien.

I oppgave 6c) blir studentene bedt om på to måter å finne hvor mange bord på som trengs for at det skal være plass til 33 stoler. Det presiseres at en av metodene skal være ved bruk av ligning. Studenten må sette seg inn i betydningen av representasjonen gitt ved figurmønster, og konvertere til ligning som målrepresentasjon. Videre må studentene trekke ut hensiktsmessig informasjon gitt i kilderepresentasjonen for å løse ligningen. Oppgaven gir også studentene mulighet til å benytte en valgfri metode for å løse problemstillingen. Dette kan gjøres både ved å bearbeide eller konvertere figurmønsterrepresentasjonen, eller elevsvaret, for de som har sett sammenheng mellom elevbesvarelsen og figurmønsteret gitt i oppgaveteksten. Til slutt blir studentene bedt om i oppgave 6d) å vise på to ulike måter, hvordan de kommer frem til én eksplisitt formel for antall stoler når antall bord er kjent, ved tydelig bruk av de gitte figurene. Her må studentene konvertere situasjonen gitt ved figurmønster, til formel, og slik se relasjoner mellom to ulike representasjoner av funksjonen. Det stilles også krav til å tenke algebraisk for å løse oppgaven, altså å se generelle aspekter i figurmønsteret. Generelt sett krever oppgave 6 at studentene forstår og uttrykker relasjoner ved bruk av algebraisk uttrykk, samt at de klarer å bruke relevante matematiske operasjoner og beregninger for å løse oppgaver.

4.3.4 Oppgave 2 (H22)

NOKUTs deleksamen høsten 2022 ble gjennomført som skoleeksamen etter en periode med hjemmeeksamen grunnet COVID-19. Fra denne deleksamenen benytter vi besvarelser fra oppgave 2, som i likhet med oppgave 6 (V22) omhandler sammenhenger mellom størrelser gjennom mønstersekvenser. Totalt 185 studenter gjennomførte denne eksamenen, og 35 besvarelser er blant vårt utvalg. Oppgave 2 presenteres under.

De første leddene i en tallfølge er 7, 12, 19, 28, 39, ….

a) *Bruk prikker til å tegne tre figurer F_1, F_2og F_3, hvor antall prikker i F_1representerer det første leddet i tallfølgen, antall prikker i F_2representerer det andre leddet i tallfølgen, osv. Figurene du tegner skal få fram et mønster. Beskriv med ord sammenhengen mellom figurnummeret og antall prikker i figuren.*

b) *Finn antall prikker i F_{10}. Vis fremgangsmåte.*

c) *Beskriv med ord en generell utvikling fra et ledd til det neste i tallfølgen (rekursiv utvikling)*

d) *Finn en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen på to ulike måter. Vis fremgangsmåte.*

Som vi kan se er det kun oppgitt en tallfølge i oppgaveteksten. Tallfølgen i seg selv er ikke en funksjon, men kan modelleres å ses som sammenhengen mellom størrelser opp mot figurnummer. I oppgave 2a) skal studentene gjenkjenne funksjonen i forholdet mellom tallfølge og figurtall, for så å konvertere denne til situasjonen ved figurer. Studentene må her klare å se et mønster ved konstante- og endrede aspekter i tallfølgen, og knytte dette opp mot figurene. I oppgave 2b) spør oppgaven om å finne antall prikker i F_{10}, som stiller krav til at studentene må se forholdet mellom størrelser og figurtallnummer i tidligere ledd, og videre bruke dette til å finne ledd nummer 10. For å løse denne oppgaven, kan studentene både bearbeide tallfølgen, eller konvertere til andre representasjoner. Videre i oppgave 2c) skal studentene bearbeide tallfølgen ved å beskrive en rekursiv utvikling fra et ledd til det neste. Til slutt skal de i oppgave 2d), i likhet med 6d), finne én eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen på to ulike måter. Her må studentene konvertere fra tallfølgen til eksplisitt formel, ved å se generelle aspekter i tallfølgen, og utrykke denne sammenhengen algebraisk. Hvis studentene har mestret oppgave 2a) knyttet til visuell representasjon, og klarer å se at figurene og tallfølge i sammenheng, kan dette være til stor hjelp i oppgave 2d).

4.4 Metode for analyse

Vi vil videre redegjøre for hvordan vi gjennomførte analyse av datamaterialet i denne studien. Gjennom å studere studentbesvarelser knyttet til deleksamener gitt av NOKUT, var målet å belyse GLU-studenters forståelse for algebra, mer spesifikt hvilken forståelse de viser for sammenheng mellom størrelser. Med mål om å skape et nåtidsbilde av dagens GLU-studenter sin algebraiske tenkning, fant vi det mest hensiktsmessig å undersøke et representativt utvalg av besvarelser, fremfor å gå i dybden på noen få studenter.

For å analysere algebraisk tenkning blant GLU-studenter, startet vi med å utforske ulike deleksamener gitt av NOKUT, og besvarelser knyttet til disse. Formålet var å finne gode oppgaver, som kunne bidra til å belyse studenters utfordringer i algebra. Her gjennomførte vi en utelukkingsprosess hvor vi valgte å fokusere på oppgaver knyttet til sammenheng mellom størrelser, et sentralt aspekt innen algebraisk tenkning. For å bli kjent med datamaterialet vårt, valgte vi videre en bred tilnærming ved å gjennomføre en kvalitativ innholdsanalyse. En slik analyse handler om å lese og analysere dokumenter, og er hovedsakelig en systematisert kodeoperasjon og datatolkningsprosess (Berg & Lune, 2012; Postholm & Jacobsen, 2021). For å redusere kompleksiteten av datamaterialet brukte vi åpen koding for å tolke og kategorisere mønstre som var fremtredende i besvarelsene, og systematiserte denne informasjonen i åpne tabeller (Bryman, 2016; Strauss & Corbin, 1998). En slik analyse har en induktiv tilnærming, som betyr at vi tar utgangspunkt i datamaterialet, og ikke en teoretisk tilnærming. Så objektivt som mulig lot vi altså datamaterialet styre analysen, og slik utledet vi videre teoretiske perspektiver basert på våre funn. I startfasen analyserte vi rundt 30 besvarelser sammen, knyttet til oppgave 3 og 6 fra våren 2022. Dette for å få en oversikt over datamaterialet og identifisere de mest fremtredende utfordringer. Slik analyse kan beskrives som en «nedenfra-og-opp» prosess, som innebærer å gradvis danne et mer oversiktlig bilde av besvarelsenes ulike mønstre (Postholm & Jacobsen, 2021). Denne prosessen resulterte i syv foreløpige kategorier; (1) slurvefeil/små mangler; (2) oversettelse mellom representasjoner; (3) algebraisere en kontekst; (4) manglende kommunikasjon; (5) ufullstendige besvarelser; (6) funksjoner; og (7) variabel. I tabell 4 vises denne kategoriseringen.

Tabell 4: Kategorisering av datamaterialet ved åpen koding.

Feil som gjøres **Kandidatnr**	Slurvefeil / små mangler	Oversettelse mellom representasjoner	Algebraisere en kontekst	Manglende kommunikasjon	Ufullstendige besvarelser	Funksjoner	Variabel

Vi fortsatte analysen ved å kategorisere resten av datamaterialet fra våren 2022, basert på de foreløpige kategoriene. Et fremtredende mønster var utfordringene knyttet til studentenes transformasjoner mellom representasjoner av sammenhenger mellom størrelser. Dette mønsteret dannet grunnlag for utarbeidelse av studiens forskningsspørsmål; *Hvilke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser kommer til uttrykk i grunnskolelærerstudenters arbeid med ulike representasjoner?*

For best å kunne besvare dette forskningsspørsmålet, benyttet vi oss videre av en deduktiv tilnærming ved det Bryman (2016) beskriver som en semiotisk analyse av dokumenter. Den semiotiske analysen baserer seg på å legge mening i ulike tegn, symboler og språk, og er i denne studien hovedsakelig basert på Duval (2006) sitt rammeverk.

4.4.1 Semiotisk analyse

En semiotisk analyse beskrives av Bryman (2016) som en metode å analysere dokumenter på. Disse dokumentene er i vårt tilfelle studentbesvarelser fra deleksamener gitt av NOKUT. I semiotikken står begrepene denotasjon og konnotasjon sentralt, der denotasjon er den åpenbare betydningen til et tegn, ord eller symbol. Konnotasjonen viser derimot til hvilke betydninger vi som analyserer tilegner datamaterialet. Slike betydninger kan slik variere ut fra hvem som analyserer datamaterialet (Bryman, 2016). Ettersom studiens mål er å besvare hvilke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser som finnes i GLU-studenters arbeid med representasjoner, vil vi i lys av Duvals (2006) rammeverk tilegne denotasjonen til å være det eksplisitte innholdet i studentbesvarelsene. Konnotasjonen vil i denne studien være vår tolkning av innholdet i besvarelsene, ved å tolke hvilke tegn til forståelse som finner sted, og hvilke utfordringer som hindrer forståelse i studentenes arbeid med ulike representasjoner. Vi vil i denne studien belyse både denotasjon og konnotasjon av besvarelsene. I motsetning til denotasjon, kan tolkningene i konnotasjonen være åpne for debatt.

I vår semiotiske analyse vil vi se på hvordan studentene gjennomfører representasjonstransformasjoner, hovedsakelig ved direkte og indirekte konvertering, som krever henholdsvis det Duval (2006) beskriver som lokal og global forståelse av funksjoner og variabler. Dette da konverteringsprosessen påvirker den kognitive forståelse for å lære matematikk i større grad enn bearbeiding. Med direkte konvertering mener vi representasjonstransformasjoner hvor det er lite unødvendig informasjon å filtrere gjennom, og dermed lite rom for tolkningsfeil. Dette kan for eksempel være i konvertering mellom graf og tabell. Ved indirekte konvertering er det i motsetning ingen direkte kobling mellom representasjonene, man må i større grad se det matematiske objektet på en helhetlig måte som krever en global tolkningsprosess. Dette kan for eksempel være i konvertering mellom graf og formel. Gjennom konnotasjon vil vi benytte disse begrepene til å undersøke studentene evne til å representere matematiske begrep knyttet til sammenheng mellom størrelser, for å kunne si noe om studentenes forståelse.

For å systematisere data fra den semiotiske analysen, brukte vi i likhet med innholdsanalysen en kodingsprosess. Vi kategoriserte utfordringsområder innen arbeid med representasjonstransformasjoner, og så på hvordan disse utfordringene hindret studentene i å transformere et matematisk objekt, og slik vise forståelse. I tabell 5 er denne kategoriseringen presentert, og alle besvarelser tilknyttet de ulike oppgavene er analysert ved bruk av denne. Det er likevel verdt å nevne at vi i kapittel 5 vil presentere resultatene knyttet til de ulike oppgavene separat.

Tabell 5: Endelig kategorisering av datamaterialet.

		Utfordringsområder	
Overordnet mål for studien:	Hvordan viser studentene tegn til forståelse	Oppgave 1 (H19) og Oppgave 3 (V22)	Oppgave 6 (V22) og Oppgave 2 (H22)
Undersøke GLU-studenters algebraiske forståelse for sammenheng mellom størrelser	Transformasjon av representasjoner		

Gjennom analysen, ble det også foretatt en kvantifisering av data, ved å telle opp hvor mange studenter som mestret ulike transformasjoner av sammenheng mellom størrelser, og slik viste forståelse for funksjons- og variabelbegrepet.

4.5 Forskningskvalitet

Vår vurdering av forskningens kvalitet er basert på studiens reliabilitet og validitet. Reliabilitet handler om påliteligheten til forskningsprosessen og om forskningsresultatene er etterprøvbare (Postholm & Jacobsen, 2021). Validitet refererer til om forskningsprosessen måler det den er ment å måle og om resultatene kan generaliseres til en større populasjon (Postholm & Jacobsen, 2021).

4.5.1 Reliabilitet

Med studiens reliabilitet menes det hvor pålitelig resultatene fra studiet er, og om forskningen er gjort på en tillitsvekkende måte (Thagaard, 2018). Dette knyttes opp mot hvor godt forskningsprosessen er beskrevet, og at resultatene kan reproduseres av andre som gjennomfører samme forskning (Postholm & Jacobsen, 2021). Ved å presisere studiens rammeverk på en grundig måte, belyse hvor vårt datamateriale er innhentet, samt detaljert beskrivelse av analysemetode, mener vi at vår forskning er etterprøvbar.

En faktor som styrker påliteligheten i studien, er at datamaterialet er basert på et tilfeldig utvalg av besvarelser fra NOKUTs deleksamener, som er obligatorisk å gjennomføre for alle GLU-studenter. Dette betyr at dersom studien skulle etterprøves, vil andre som bruker et tilfeldig utvalg av datamateriale fra disse deleksamenene, også få et innblikk av GLU-studenter på første eller andre år av utdanningen sin forståelse av algebra. Likevel, deres tilfeldige utvalg, kunne mulig gi andre funn en våre, men dette vil være basert på tilfeldigheter. Det er viktig å presisere at for at resultatene skulle kunne etterprøves vil det vært viktig å se på antall besvarelser fra høst versus vår. Dette begrunnes med at resultatene er betydelig svakere på høsten, og det gjennomføres betraktelig flere konteeksamener.

Da vi anvender et fortolkende paradigme, er det viktig å ha et kritisk overblikk på studiens resultater, ettersom vår fortolkning kan påvirke påliteligheten av resultatet (Jacobsen, 2016). Gjennom vår semiotisk analyse og konnotasjon, legger vi betydning i studentenes besvarelser ved å tolke hvilke tegn til forståelse som er til stede. I en slik analyse vil våre subjektive tolkninger være avgjørende for resultat. Vi kan dermed ikke garantere at andre som gjennomfører lik forskning, vil tolke besvarelsene på en tilsvarende måte. Likevel styrkes studiens pålitelighet ved at vi er to som gjennomfører analyse av samme besvarelser, og slik kan resultatene i større grad kvalitetssikres.

4.5.2 Validitet

Studiens validitet handler om hvorvidt det er samsvar mellom virkeligheten og vår fortolkning av den (Jacobsen, 2016). Dette går blant annet ut på om metode som er benyttet, er egnet til å undersøke det den skal undersøke, og å vurdere nøyaktigheten av funn, samt overbevise leserne om denne nøyaktigheten (Dalland, 2021). Utgangspunktet for validitet i kvalitative studier, er basert på om studiet kan være relevant i større sammenhenger (Thagaard, 1998).

Det at vi analyserer et tilfeldig utvalg av besvarelser, uavhengig av institusjonstilknytning, er med å styrke studiens validitet. Resultatene belyser GLU-studenters algebraiske forståelse, og årsakspåvirkninger knyttet til ulike utdanningsinstitusjoner vil ikke påvirke datamaterialet. Vi vurderte lenge om vi i tillegg til å analysere besvarelser, skulle gjennomføre fokusgruppeintervju og observasjon av dagens GLU-studenter. Ved å gjøre dette kunne vi potensielt fått dypere innsikt i deres forståelse for sammenhenger mellom størrelser i arbeid med representasjoner. Vi valgte likevel å utelukke dette, grunnet oppgavens omfang, og at vi samlet inn rikt datamateriale gjennom semiotisk analyse av besvarelser. I tillegg kunne slike intervju vært med å påvirke studiens validitet, ved at de sannsynligvis ville blitt gjennomført på studenter tilknyttet én utdanningsinstitusjon. Dette kunne mulig svekket validiteten vet at resultatene ikke var overførbare til GLU-studenter fra andre institusjoner.

En faktor som er nevneverdig, er at datamaterialet er basert på et tilfeldig utvalg av besvarelser, knyttet til både høst- og vårsemester. Da statistikker fra NOKUT viser betraktelig svakere resultater fra deleksamenene gjennomført på høsten, mener vi at ved å benytte oss av et representativt utvalg fra både høst og vår, er med å styrke studiens validitet (NOKUT, 2023). Ved å benytte besvarelser fra høst og vår, sikrer vi oss i tillegg at datamaterialet representerer alle utdanningsinstitusjoner i Norge, da det er opp til institusjonene å avgjøre hvilket semester deleksamen skal avlegges. Når det gjelder antall besvarelser analysert, er det viktig å påpeke at vi har benyttet et ulikt antall fra de forskjellige deleksamenene (se tabell 3), og en mer jevn prosentandel fra de respektive eksamenene kunne styrket studiens validitet.

4.6 Forskningsetiske refleksjoner

I denne delen reflekterer vi rundt etiske aspekter i studien. Jacobsen (2016) påpeker at slike refleksjoner er særlig viktig i forskning der det er direkte kontakt mellom forsker og forskningsobjektet. Da vi vurderte om vi skulle benytte oss av intervjuer for å innhente mer dybdebasert data, sendte vi søknad til Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, for å sikre at etiske retningslinjer ble fulgt. Søknaden ble godkjent, men på grunn av vurderingen tidligere nevnt (se kapittel 4.5.2), valgte vi å ikke gjennomføre intervjuer. Til tross for at vi som forskere ikke har vært i direkte kontakt med forskningsobjekter, er det fortsatt viktig å reflektere rundt etiske aspekter i studien.

Et etisk aspekt vi mener er viktig å reflektere rundt, er at dersom denne masteroppgaven skal publiseres, vil oppgaven være tilgjengelig for offentligheten. I vårt utvalg av studentbesvarelser er ikke personopplysninger oppgitt, og vi har dermed ikke hatt mulighet til å kontakte og informere de respektive studentene som er omtalt i studien. Dette medfører at studenter kan oppdage sine besvarelser uten å være informert. Likevel viser vi ikke til studentenes kandidatnummer, og besvarelsene kan slik ikke knyttes til enkeltpersoner. I tillegg har studentene i våre besvarelser, gitt samtykke til at besvarelsene kan brukes til forskningsbaserte formål, noe som begrunner at vi overholder etiske retningslinjer i vår forskning.

I studien er det også viktig å overholde etiske retningslinjer ved å behandle datamaterialet med respekt. Dette innebærer å trekke logiske slutninger og være varsom i våre uttrykksformer, slik at GLU-studenter ikke blir fremstilt i et negativt lys. Vi må derfor reflektere over hvilken effekt språket vårt kan ha, da det kan oppleves som krenkende, til tross for at vi ikke legger noe negativ betydning i våre slutninger. Det å presentere funnene våre balansert, og både fremheve hva studentene får til og ikke, kan være til hjelp for å unngå dette.

Videre er det to faktorer vi mener er viktig å både belyse og ta til betraktning, gjeldende eksamenens kontekst. For det første gjennomføres denne deleksamenen på første eller andre år av GLU, og det kan slik anses at studentene oppnår dypere algebraisk forståelse gjennom studieløpet, før de skal ut som lærere i skolen. For det andre, er besvarelsene som danner grunnlag for vårt datamateriale hentet fra en eksamenssituasjon. Dette kan ha påvirket resultatene ved at studentene kan ha opplevd negativt stress, og dermed ikke fått vist sitt fulle potensiale. Vi vil derfor understreke at formålet med denne oppgaven ikke er å vurdere studentene som gode eller dårlige matematikklærere, men å belyse hva som bør settes søkelys på videre i GLU for å utdanne grunnskolelærere med god algebraisk forståelse.

Helt til slutt vil vi trekke frem refleksjoner rundt å legge ved analysematerialet som vedlegg. Det kan være ønskelig å gi leseren muligheten til å se hele datamaterialet, og selv vurdere besvarelsene opp mot resultat og diskusjon. Imidlertid vil det å legge ved 170 studentbesvarelser som vedlegg være massivt, og av etiske årsaker ønsker vi å unngå å legge ved en helhet av materialet som inneholder kandidatnummer, og som kan kobles til enkeltpersoner. Vi har derfor valgt å presentere representative eksempler fra studentbesvarelsene i resultatkapittelet, for å vise leseren hvilke besvarelser vi bruker som grunnlag i vår diskusjon og konklusjon av forskningsspørsmål.

5.0 Resultater

I dette kapittelet presenterer vi funnene fra vår semiotiske analyse. Vi anvender rammeverket beskrevet i kapittel 3 for å analysere besvarelsene, og identifisere tegn til forståelse av sammenhengen mellom størrelser, i studentenes arbeid med representasjoner av funksjoner. På grunn av oppgavens omfang har vi i hovedsak valgt å se på studentenes evne til å konvertere mellom ulike representasjoner, hvilken forståelse for matematiske objekt finnes, og hvilke utfordringer ligger til grunn når studentene ikke klarer å gjennomføre konverteringen. I en slik konvertering må studentene gjenkjenne konsepter og generalitet i en kilderepresentasjon, og bruke dette til å representere objektet gjennom en annen representasjon. Likevel vil vi presisere at flere av besvarelsene bærer preg av at studentene velger å bearbeide representasjoner for å løse ulike problemløsningsoppgaver, heller enn å benytte seg av konvertering. Det vil si at de velger å arbeide innenfor sammen representasjon, og utarbeider representasjonsformen som allerede er gitt i oppgaven. De velger slik å bruke spesielle aspekter av representasjonen for å løse oppgaver, heller enn å bruke generaliteter. Dette krever mindre kognitiv kompleksitet, og fremstår som den foretrukne måten å transformere en representasjon på hos omtrent halvparten av studentene. Studentenes bearbeiding er ikke noe vi vil gå videre inn på i resultatdelen, fordi det i mindre grad enn konvertering, belyser tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelser. Vi vil også påpeke at det kan være andre matematiske aspekter i besvarelsene som kunne vært av interesse, men for å holde oss til studiens formål, ser vi kun på aspektene nevnt.

Videre, i tabell 6, presenteres en kvantifisert oversikt, en opptelling av studentenes besvarelser, som belyser hvor mange som får til de ulike konverteringene i oppgavene. Tabellen er inspirert av Duval (2006) og Janvier (1987). De skraverte rutene i tabellen, representerer konverteringer som ikke er aktuell i de respektive oppgavene (N/A). Fra høsten 2019 har vi analysert 57 besvarelser, fra våren 2022 har vi analysert 78 besvarelser og fra høsten 2022 har vi analysert 35 besvarelser. For eksempel viser tabellen at fra høst 2019 er 57 besvarelser benyttet i analysen, og at alle 57 studenter denne høsten mestrer konverteringen fra graf til tabell.

Tabell 6: Andel studenter som får til konverteringen mellom de ulike representasjonene. N/A belyser at konverteringene ikke er aktuell i gitt oppgave.

	Graf – tabell	Graf – situasjon	Graf – formel	Situasjon – situasjon	Situasjon – ligning	Situasjon – eksplisitt formel
Oppgave 1 (H19)	57/57	38/57	42/57	N/A	N/A	N/A
Oppgave 3 (V22)	73/78	44/78	64/78	N/A	N/A	N/A
Oppgave 6 (V22)	N/A	N/A	N/A	N/A	74/78	23/78
Oppgave 2 (H22)	N/A	N/A	N/A	8/35	N/A	3/35

Fra opptellingen presentert i tabell 6, ser vi at de fleste studentene mestrer direkte konvertering fra graf til tabell, mens færre klarer de indirekte konverteringene. Videre vil vi presentere funn fra analysen, omhandlende hvilke konverteringer studentene får til og hvor utfordringene oppstår. Vi fremstiller et representativt utvalg av studentbesvarelser knyttet til hver oppgave, som belyser hvordan vi tolker studentenes forståelse for objekter gjennom deres konverteringer. Til slutt vil vi oppsummere noen sentrale funn, som vil danne grunnlag for videre diskusjon.

5.1 Oppgave 1 (H19)

I oppgave 1 har vi analysert 57 besvarelser, og studentene skal som tidligere beskrevet i kapittel 4.3.1 arbeide med ulike representasjoner av en funksjon. I oppgaveteksten er kilderepresentasjonen gitt ved graf, og studentene skal gjennom de ulike deloppgavene konvertere denne til ulike målrepresentasjoner, samtidig som den matematiske betydningen av funksjonen bevares. I oppgaven er studentenes største utfordringer knyttet til indirekte konverteringsprosesser. Dette går i hovedsak ut på å se det helhetlige bilde av en funksjon, som en relasjon mellom variable størrelser. I tabell 7 presenteres en oversikt av utfordringene knyttet til den indirekte konvertering.

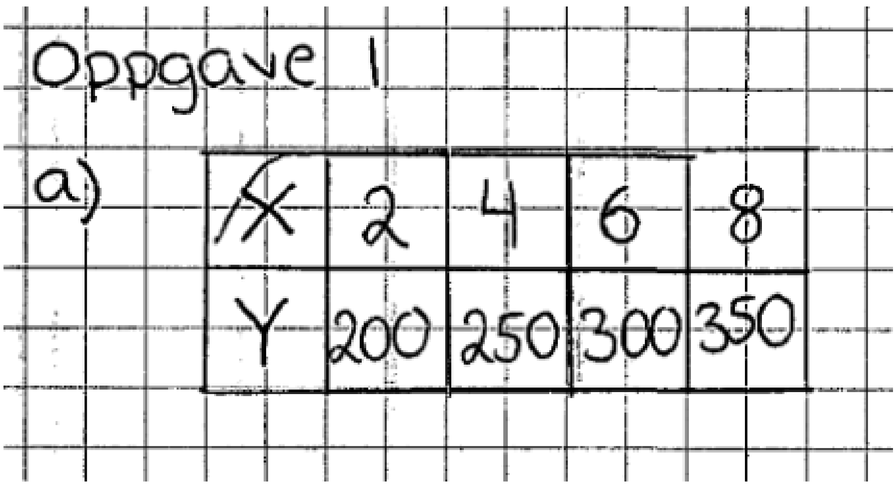
Tabell 7: Oversikt av studentenes utfordringer fra oppgave 1 (H19)

	Indirekte konverteringer	Funksjonsbegrepet	Variable størrelser
Utfordringer hos studentene	19/57	13/19	15/19

I tabellen ser vi at 19 studenter har utfordringer knyttet til å gjennomføre indirekte konverteringer mellom representasjonene. Videre ser vi at ved disse utfordringene, viser studentene lite tegn til forståelse for funksjons- og variabelbegrepet. Enkelte studenter viser lite forståelse for begge begrepene, og er dermed oppført i begge kategoriene. Vi vil videre trekke frem noen besvarelser vi anser som vellykket fra oppgavene, før vi større grad belyser hvilke utfordringer som går igjen i studentenes besvarelser. Dette vil vi gjøre med formål å belyse at det eksisterer en gruppe studenter som mestrer slike konverteringer, og dermed viser tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelser.

5.1.1 Eksempler på gode besvarelser

I figur 4 presenteres en besvarelse knyttet til oppgave 1a), hvor studenten skal konvertere grafen til en tabell.


Oppgave 1

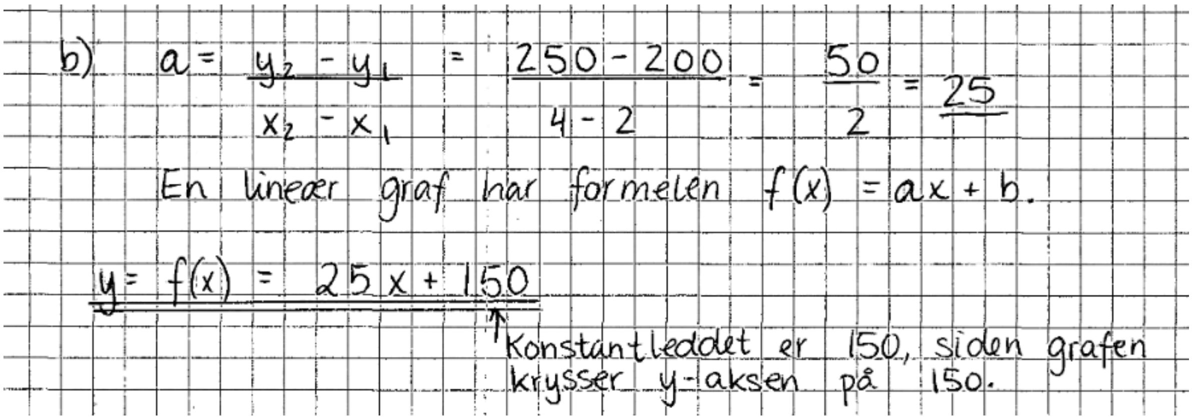
a)

X	2	4	6	8
Y	200	250	300	350

Figur 4: Besvarelse fra oppgave 1a) (H19) der konverteringen fra graf til tabell er vellykket.

Ved en direkte konvertering mellom graf og tabell presenter studentene fire x-verdier og tilhørende y-verdier. I denne prosessen må studenten lese av punkter på grafen, og knytte tallpar sammen. En slik handling tolker vi at krever en lokal forståelse for representasjonen, i en slik tolkningsprosess er det lite unødvendig informasjon å filtrere gjennom. Dette kan forklares med at en slik tabell vil inneholde mye mindre informasjon om funksjonen enn når funksjonen er representert ved graf. For eksempel kommer ikke elementer som stigningstall og nullpunkt frem i tabellen, selv om dette er sentrale elementer i grafen. Dette vil si at studentene ikke har en helhetlig forståelse av funksjonen, til tross for at de mestrer denne konverteringen. I vårt utvalg var alle 57 studentene i stand til å konvertere grafen til en korrekt tabell, slik som vist i tabell 6.

I oppgave 1b) skal studentene konvertere graf til ligning. En god besvarelse vises i figur 5.



b) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{250 - 200}{4 - 2} = \frac{50}{2} = \underline{25}$

En lineær graf har formelen $f(x) = ax + b$.

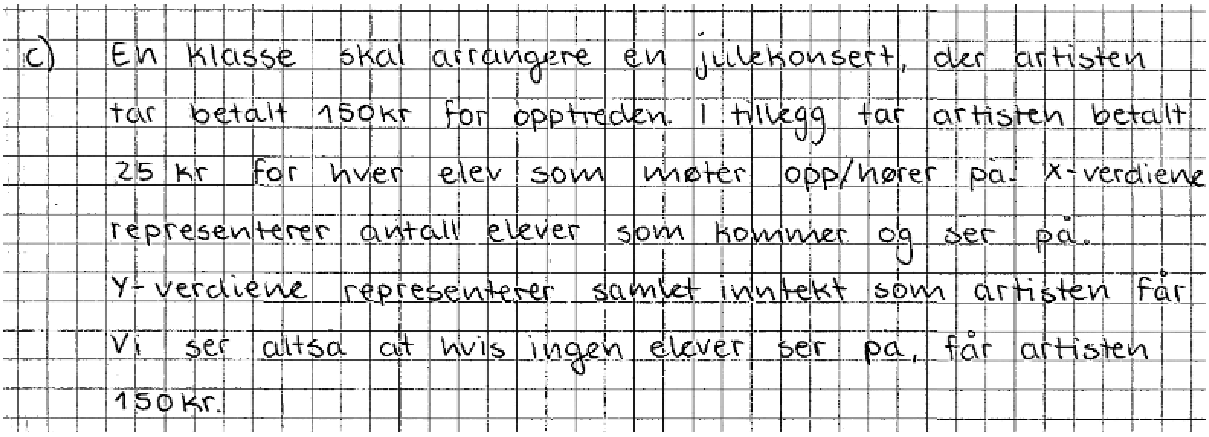
$\underline{\underline{y = f(x) = 25x + 150}}$

Konstantleddet er 150, siden grafen krysser y-aksen på 150.

Figur 5: Besvarelse fra oppgave 1b) (H19) der studenten mestrer konverteringen.

I besvarelsen ser vi at studenten konverterer grafen til formel gitt ved « $y = f(x) = 25x + 150$», ved bruk av topunktsformelen. Studenten presiserer spesielle aspekter ved grafen, som stigningstall og konstantledd, og bruker dette for å belyse generalitet i grafen. En slik indirekte konvertering krever en global registerorientering, som vil si at man forstår hvilke aspekter som er hensiktsmessig å ta i bruk for å gjennomføre konverteringen. Studenten viser ved denne besvarelsen tegn til forståelse for funksjons- og variabelbegrepet. Likevel er det nevneverdig at denne studenten viser noe manglende kommunikasjon av begreper, da det kommer frem i besvarelsen at *«En lineær graf har formelen $f(x) = ax + b$»*. Her brukes begrepet graf hvor begrepet funksjon burde blitt brukt. Som vist i tabell 6 mestrer omtrent 74% av studentene i vårt utvalg denne konverteringen fra graf til ligning i denne oppgaven.

I figur 6 presenterer vi det vi anser som en god besvarelse fra oppgave 1c), hvor studenten skal konvertere funksjonen fra graf til konkret situasjon. I tillegg skal variabelens betydning presiseres.


c) En klasse skal arrangere en julekonsert, der artisten tar betalt 150kr for opptreden. I tillegg tar artisten betalt 25 kr for hver elev som møter opp/hører på. X-verdiene representerer antall elever som kommer og ser på. Y-verdiene representerer samlet inntekt som artisten får Vi ser altsa at hvis ingen elever ser pa, får artisten 150kr.

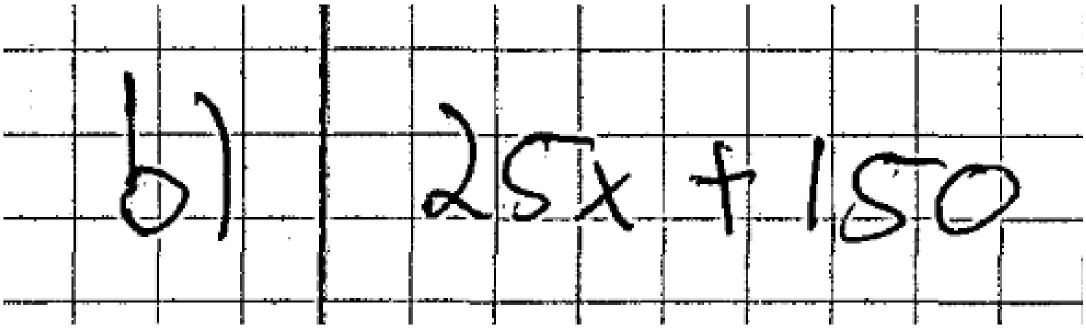
Figur 6: Besvarelse fra oppgave 1c) (H19) som viser en vellykket konvertering fra graf til virkelighetsnær kontekst.

Her ser vi at studenten representerer funksjonen ved en situasjon omhandlende en julekonsert. For å gjennomføre denne konverteringen må studenten trekke ut essensiell informasjon i grafen, og se det i lys av en konkret situasjon. Slik informasjon er blant annet knyttet til grafens stigningstall og konstantledd. I tillegg presiserer studenten sammenhengen mellom variablene i grafen, ved å skrive: «*hvis ingen elever ser på, får artisten 150 kr*.». En slik indirekte konvertering krever en global tolkningsprosess for å se sammenhengen mellom representasjonene, og studenten viser tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelser. I konverteringen graf-situasjon er 67% besvarelsene vellykket, altså den matematiske betydningen av funksjonen overføres i transformasjonen.

Videre vil vi presentere fremtredende utfordringer i studentenes transformasjoner av sammenheng mellom størrelser. I disse besvarelsene ser vi lite tegn til forståelse for funksjon- og variabelbegrepet i studentenes konverteringer. Begrepene er i sterk tilknytning til hverandre, da variabler representerer størrelser og funksjoner representerer hvordan disse størrelsene avhenger av, og påvirker hverandre. Vi presenterer tre utfordringer som er gjennomgående i besvarelsene.

5.1.2 Funksjoner

En av utfordringene er knyttet til definisjonen av funksjonsbegrepet. Flere av besvarelsene indikerer at studentene ikke ser en funksjon som en relasjon mellom størrelser. Dette kommer til syne gjennom studentenes transformasjoner, særlig fremtredende når de skal representere funksjonen ved ligning. Eksempel på en slik utfordring presenteres ved besvarelsen i figur 7.

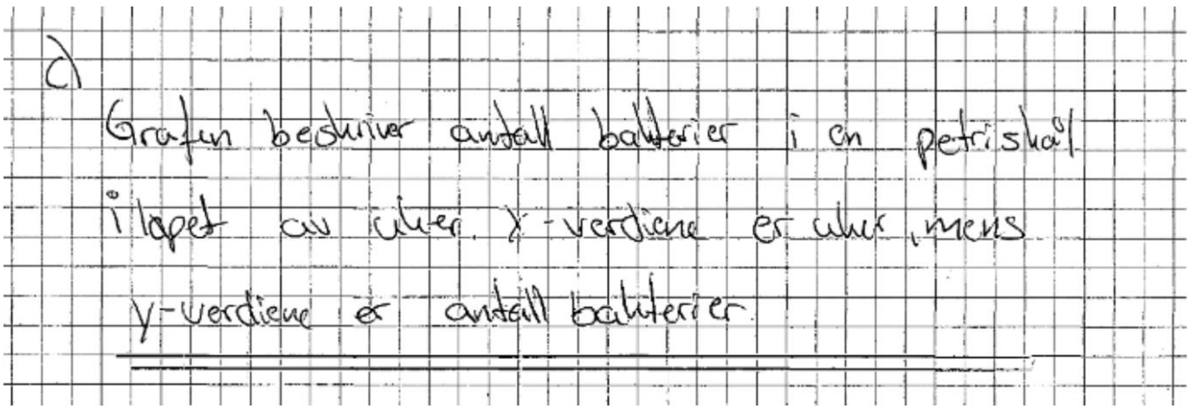


Figur 7: Besvarelse fra oppgave 1b) (H19).

I denne besvarelsen ser vi at studenten har klart å tolke visse aspekter ved grafen, stigningstall og konstantledd som spesifiserer den gitte funksjonen er fremstilt. Likevel er ikke konverteringen fullverdig, da den ikke presiserer relasjon mellom ulike størrelser, slik som det gjøres i grafen. Ved å skrive et fullverdig uttrykk ved $f(x) = 25x + 150$, ville studenten mestret den indirekte konverteringen ved å belyse relasjonsaspekt, og besvarelsen ville slik opprettholdt den matematiske betydningen av funksjonen uttrykt i grafen. I besvarelser fra denne oppgaven, har omtrent 23% av utvalget utfordringer med å representere sammenheng mellom størrelser gitt ved en ligning (se tabell 6). Dette viser dermed lite tegn til forståelse for funksjons- og variabelbegrepet. Slike besvarelser kommer i flere varianter, men fellestrekket er at relasjoner ikke utrykkes.

5.1.3 Variabler

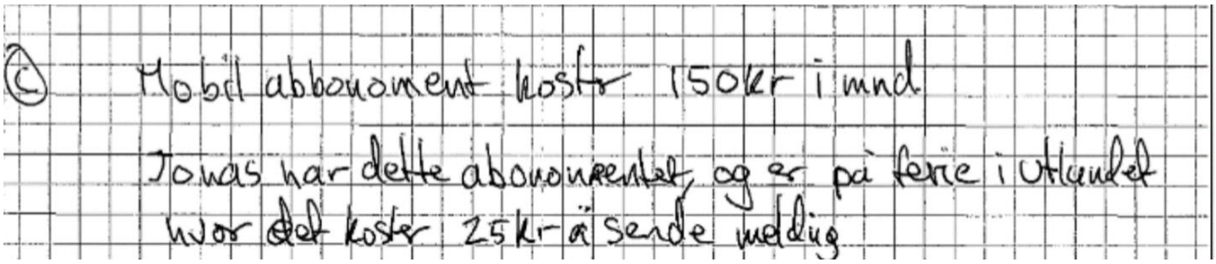
En annen fremtredende utfordring er knyttet til at målrepresentasjonen ikke er entydig til kilderepresentasjon, ved at variabelverdier ikke er presisert. Slik presenteres ikke målrepresentasjonen den entydige funksjonen gitt i kilderepresentasjonen. Et eksempel på dette er gitt i figur 8, hvor studenten skal konvertere funksjonen gitt ved graf til en konkret situasjon. Denne konverteringen krever en global tolkningsprosess av representasjonene.



Figur 8: Besvarelse fra oppgave 1c) (H19) der funksjonen ikke representeres entydig.

I denne besvarelsen benytter ikke studenten den essensielle informasjonen grafen gir, og presiserer blant annet ikke grafens stigningstall og konstantledd. Dette fører til at sammenhengen mellom avhengig og uavhengig variabel ikke kommer frem i konteksten. Ettersom disse verdier ikke presiseres, opprettholdes ikke den matematiske betydningen av funksjonen i konvertering fra graf til situasjon. Situasjonen kunne teoretisk sett representert flere funksjoner, noe som tyder på at studenten har vanskelig for å forstå helheten av variablers betydning i en funksjon. Slike besvarelser, hvor stigningstall og konstantleddets betydning ikke presiseres, går igjen i 10 av de 57 besvarelsene vi analyserte i denne oppgaven. Ved å ikke konvertere disse variabelverdier, viser de lite tegn til forståelse for variabelbegrepet.

En annen utfordring i konverteringsprosessen er at studentene ikke presiserer hva som henholdsvis er avhengig og uavhengig variabel i en situasjon, og dermed ikke relasjonen mellom variablene. Et eksempel på en slik besvarelse er presentert i figur 9.



Figur 9: Besvarelse av oppgave 1c) (H19) der forholdet mellom variablene ikke kommer frem i konverteringen.

Her er essensielle verdier i grafen presisert gjennom situasjon, men konverteringen er likevel ikke tilstrekkelig, da det ikke fremstår hva som er avhengig og uavhengig variabel. Da variablene ikke ses i relasjon til hverandre, blir ikke den matematiske betydningen av kilderepresentasjon opprettholdt i konvertering til målrepresentasjon. Slike utfordringer går igjen i 7 av 57 besvarelser. Som vist i tabell 7, viser 26 % av studentene i denne oppgaven lite tegn til forståelse for variabler i indirekte konverteringsprosesser.

5.2 Oppgave 3 (V22)

I likhet med oppgave 1 (H19) skal studentene også i oppgave 3 jobbe med ulike representasjoner av en funksjon representert ved graf. Studentene skal konvertere fra graf til tabell, formel, og virkelighetsnær situasjon. Tilknyttet denne oppgaven har vi analysert 78 besvarelser. Vi vil presisere at i og med at oppgavene så og si er identiske, gjenspeiler også resultatene dette. Studentenes største utfordringer er også her i arbeid med indirekte konverteringer, hvor det vises lite tegn til forståelse for funksjon- og variabelbegrepet i oversettelsen. En opptelling av disse utfordringer presenteres i tabell 8.

Tabell 8: Oversikt fra oppgave 3 (V22).

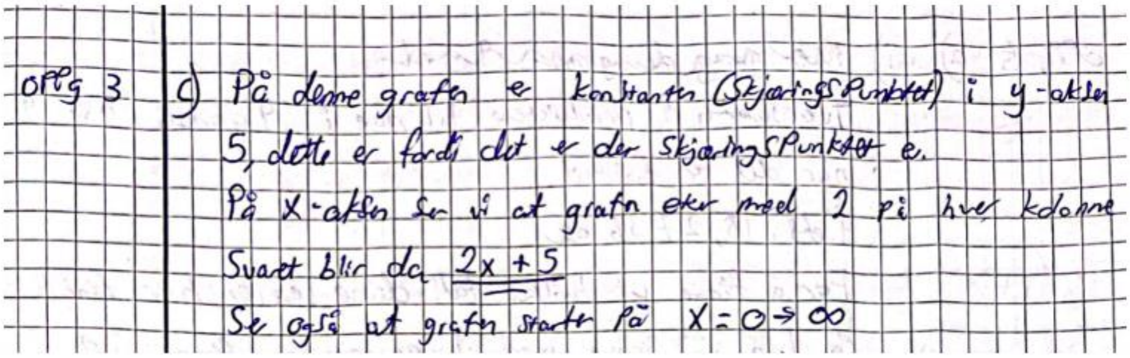
	Indirekte konverteringer	Funksjonsbegrepet	Variable størrelser
Utfordringer hos studentene	34/78	14/34	34/34

I tabellen ser vi at 34 av 78 studenter har utfordringer med å gjennomføre indirekte konvertering av grafen. Tabellen presiserer at alle studentene viser lite tegn til forståelse for variabelbegrepet ved en slik konvertering.

Vi vil i denne delen ikke presentere besvarelser hvor studentene viser tegn til forståelse for funksjoner og variabler. Disse besvarelsene har flere likhetstrekk med disse besvarelsene i oppgave 1, så vi unngår en repetisjon av disse. Som i oppgave 1 får de fleste studentene til direkte konverteringer mellom representasjonene graf og tabell. Når det kommer til indirekte konverteringer, eksisterer det derimot flere utfordringer, til tross for at det forekommer gode besvarelser, slik som presentert ved oppgave 1 i figur 5 og figur 6. Vi vil videre gå inn på studentenes ulike utfordringer knyttet til slike konverteringer.

5.2.1 Funksjoner

I de ulike konverteringene viser flere studenter lite forståelse for funksjoner.
Dette går i likhet med oppgave 1 ut på å se funksjonen som en sammenheng mellom størrelser, og vise forståelse for funksjonen ved å oversette disse sammenhengene. En besvarelse hvor dette er fremtredende er presentert i figur 10. Her skal studenten gjennom oppgave 3c) konvertere fra graf til formel. Dette er en indirekte konvertering som krever en global registerorientering, altså må studenten forstå hvilke aspekter som er hensiktsmessig å ta i bruk for å gjennomføre en slik konvertering.



Oppg 3 c) På denne grafen e konstanten (Skjæringspunktet) i y-aksen
5, dette er fordi det e der skjæringspunktet e.
På x-aksen ser vi at grafen øker med 2 på hver kolonne
Svaret blir da $\underline{\underline{2x + 5}}$
Se også at grafen starter på $x = 0 \rightarrow \infty$

Figur 10: Besvarelse av oppgave 3c) (V22) hvor studenten ikke viser forståelse for funksjonsbegrepet.

I likhet med besvarelsen fra oppgave 1b) i figur 7 tolker vi at studenten ikke ser den helhetlige betydningen av objektet funksjon. Dette kommer til syne ved at studenten skriver «$2x + 5$», uten å presisere relasjon mellom de ulike størrelsene. Da den matematiske betydningen av funksjonen representert ved graf ikke kommer til syne i funksjonsuttrykket, er denne indirekte konverteringen ikke fullverdig. I besvarelser knyttet til oppgave 3 fra våren 2022, er det å representere funksjonen som en sammenheng mellom størrelser en utfordring for 18% av studentene (se tabell 8).

5.2.2 Variabler

Utfordringer med å konvertere funksjoner og variabler henger tett sammen.. Blant annet vises dette ved at studentene ikke belyser hva variablene i funksjonen representerer, og sammenhengen mellom disse variablene. Dette ser vi særlig i funksjonsuttrykk, men også når det kommer til sammenhenger mellom variabler i virkelighetsnære situasjoner. Dette går hovedsakelig på at studentene ikke definerer variablene. I tillegg, knyttet til konvertering fra graf til situasjon, er det også her store deler av besvarelsene som ikke spesifiserer grafens essensielle verdier i situasjonsbeskrivelsen, slik som i figur 8. Dermed blir ikke den matematiske betydningen av funksjon opprettholdt gjennom konverteringsprosessen, og studentene viser lite tegn til forståelse for variabelbegrepet.

Resultatene fra kapittel 5.2 og 5.1 er like. Studentene viser gjennom arbeid med ulike indirekte konverteringer av funksjoner og variabler, lite tegn til forståelse for begrepene. Dette går i hovedsak ut på å se det helhetlige bilde av en funksjon, som en relasjon mellom størrelser, og å knytte avhengig og uavhengig variabel opp mot funksjon.

5.3 Oppgave 6 (V22)

I tillegg til oppgave 3 fra deleksamen våren 2022, har vi som nevnt tidligere benyttet besvarelser fra oppgave 6 samme vår. Studentene skal i denne oppgaven jobbe med en funksjon representert som en relasjon mellom figurnummer og figurmønster. I lys av Janvier (1987) sin tabell, ser vi figurmønsteret som en situasjon. I denne oppgaveteksten er det i tilknytning figurmønster også gitt et elevsvar ved; «*Man tar antall bord og legger til én. Deretter ganger man med to*.». Elevens svar omhandler figurenes sammenheng ved antall stoler som trengs til et visst antall bord, men det er ikke gitt at svaret er riktig. For de som ser sammenhengen mellom figursekvensen og elevsvaret, kan de benytte seg av den verbale beskrivelsen av samme funksjon videre i oppgaven. Som nevnt tidligere vil vi i denne oppgaven kun se på besvarelser fra oppgave 6c) og 6d).

I besvarelser fra denne oppgaven, er studentenes utfordringer knyttet til indirekte konverteringer, særlig når formel er målrepresentasjon. Tabell 9 presenterer en oversikt over utfordringene knyttet til indirekte konvertering

Tabell 9: Opptelling fra oppgave 6 (V22).

	Indirekte konverteringer	Funksjonsbegrepet	Variable størrelser
Utfordringer hos studentene	55/78	25/55	30/55

Tabellen belyser vår tolkning av hvor mange studenter som har utfordringer med en indirekte konvertering, og hvor mange studenter som ikke viser forståelse for funksjoner og variabler gjennom konverteringene. Som vi ser, er forståelse for variable størrelser manglende hos over halvparten av studentene i de indirekte konverteringene.

Vi vil videre trekke frem noen besvarelser som vi anser vellykket. Formålet med dette er å belyse at det finnes en gruppe studenter som mestrer slike konverteringer og dermed viser tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelsene. I disse besvarelsene viser studentene tegn til forståelse gjennom å konvertere mellom ulike representasjoner knyttet til et objekt, samt ved å se generalitet i representasjonene.

5.3.1 Eksempler på gode besvarelser

Et eksempel på en besvarelse hvor studenten lykkes med konverteringen fra situasjon til formel er vist i figur 11. Her skal studenten gjennom oppgave 6c), finne hvor mange bord som trengs for å gi sitteplass til 33 personer. Oppgaven skal løses på to ulike måter, den ene måten skal være ved bruk av ligning. I denne oppgaven ser vi kun på studentens konvertering til formel, da de fleste studentene benytter seg av bearbeiding av figurmønster som den andre metoden.

c)

Finner først den eksplisitte formelen til uttrykket (bruker formelen fra oppgaveteksten som «eleven» gav). n representerer figurtallnummeret, og også antall oppgitte bord. F_n representerer antall stoler for figurtallnummer n.

$$F_n = (n+1) \cdot 2$$

Med bruk av denne likningen finner jeg ut hvor mange bord som trengs til 33 sitteplasser

$$33 = (n+1) \cdot 2$$

$$33 = 2n + 2$$

$$2n = 31$$

$$n = 15.5$$

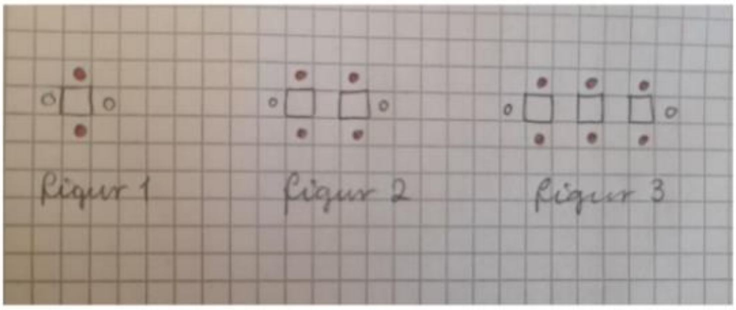
Runder opp i bord, og får at man må ha 16 bord for å få plass til 33 sitteplasser.

Figur 11: Besvarelse fra 6c) (V22) der studenten mestrer konverteringen fra situasjon til formel.

For å løse denne oppgaven må studentene gjennom en global tolkningsprosess ved å identifisere generelle aspekter i figurmønsteret, og velge hensiktsmessige variabler å ta med seg i oversettelsen til ligning. I besvarelsen presiser studenten at elevsvaret blir brukt som kilderepresentasjon, det at studentene er gitt to ulike idéer av funksjonen kan være til fordel. Studenten konverter først til en generell formel, hvor variablenes betydning presiseres ved å si at «*n representerer figurtallnummeret, og også antall oppgitte bord.* F_n *representerer antall stoler for figurtallet n*». Dette antyder at variabler blir sett på som noe som varierer. Studenten viser slik sammenheng mellom størrelser, og tegn til forståelse for funksjons- og variabelbegrepet.

I figur 12 presenteres en annen studentbesvarelse, hvor den indirekte konverteringen er vellykket. Her skal studenten gjennom oppgave 6d), presentere to ulike måter å finne én eksplisitt formel for antall stoler når antall bord er kjent, og samtidig tydeliggjøre sammenhengen mellom figur og formel. Siden denne oppgaven krever en indirekte konvertering, der det ikke umiddelbart er en synlig sammenheng mellom kilderepresentasjonen gitt ved figurmønsteret, og målrepresentasjonen gitt ved formel, må studentene gjennom en global tolkningsprosess. De må modellere figursekvensen for å nå formel som målrepresentasjon.

En eksplisitt formel er funnet ved at man tar stolene som er «over» og «under» bordene (disse er tegnet i rødt). Det er dobbelt så mange av de røde stolene som det er bord. I tillegg er det to hvite stoler i hver figur.

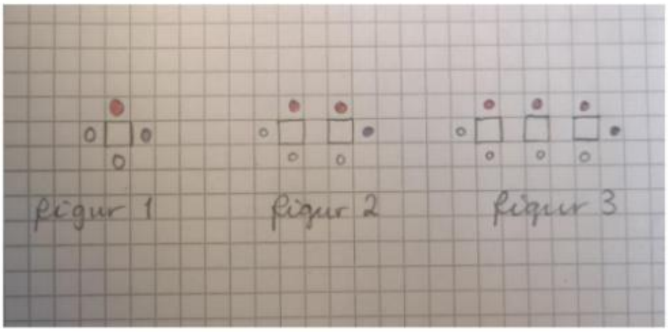


Det gir formelen

$$F_n = 2n + 2$$

Hvor, slik som i deloppgavene over, n representerer figurtallnummeret, og også antall oppgitte bord. F_n representerer antall stoler for figurtallnummer n.

En annen måte å komme frem til en eksplisitt formel på er slik som i 6 a) og b), hvor det er dobbelt så mange stoler som bord lagt til en. Samme bilde som i oppgave a) er lagt ved. Røde representerer fortsatt stoler tilsvarende antall bord, lilla «pluss 1» og de hvite at det er dobbelt så mange stoler tilsammen som fargede stoler



Det gir den eksplisitte formelen

$$F_n = (n + 1) \cdot 2$$

Som igjen kan skrives om til

$$F_n = 2n + 2$$

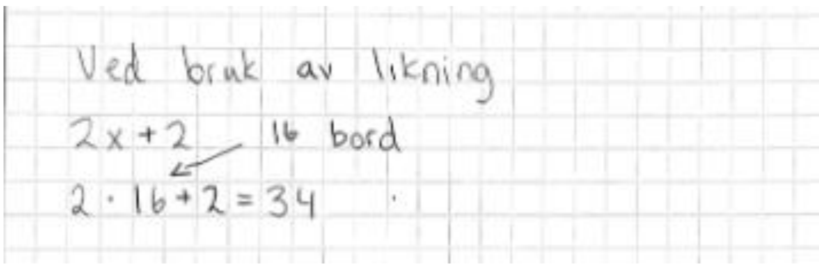
Figur 12: Besvarelse av oppgave 6d) (V22) der studenten mestrer å vise to måter å bruke figuren for å konvertere til en eksplisitt formel.

I denne besvarelsen observerer vi at studenten utfører en konvertering fra figurmønster til de eksplisitte formlene $F_n = 2n + 2$ og $F_n = (n + 1) * 2$, og opprettholder den matematiske betydningen av funksjonen i konverteringsprosessen. Studenten har også en tydelig presisering av sammenhengen mellom figur og formel ved å beskrive at «*n representerer figurtallnummeret, og også antall oppgitte bord. F_n representerer antall stoler for figurtallnummer n*». Ved å konvertere funksjonen gitt ved figursekvensen til to formler, viser studenten tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelsene bord og stoler, og dermed tegn til forståelse for funksjoner og variabler.

I denne oppgaven observerte vi at 70 % hadde utfordringer med å belyse denne sammenhengen mellom avhengig og uavhengig variabel, ved stol og bord. Flere av studentene klarte å bruke figurene på én måte for å finne én eksplisitt formel, men ikke ved bruk av to metoder. Dette tyder på at det er utfordringer knyttet til å konvertere når det kreves global forståelse. I denne oppgaven stilles det krav til å forklare sammenhengen mellom figur og formel, noe store deler av besvarelsene mangler. I analysen vil vi derfor hovedsakelig fokusere på konverteringen fra situasjonen gitt ved figurmønsteret, til den eksplisitte formelen, for å se etter tegn til forståelse. Videre vil to ulike utfordringer som er representativ for studentbesvarelsene presenteres.

5.3.2 Funksjoner

Den ene utfordringen fremtredende i studentbesvarelsene er hovedsakelig knyttet til definisjonen av funksjonsbegrepet, som er en sentral forutsetning for å forstå sammenheng mellom størrelser. I de indirekte konverteringene fra figur til formel, presiserer flere av studentene ikke på det generelle aspektet ved funksjonen, nemlig forholdet mellom variablene. Figur 13 illustrerer en slik besvarelse, hvor studentene må modellere for å oversette situasjonen til en formel. En slik konvertering krever en helhetlig forståelse av funksjonen representert ved figurer.



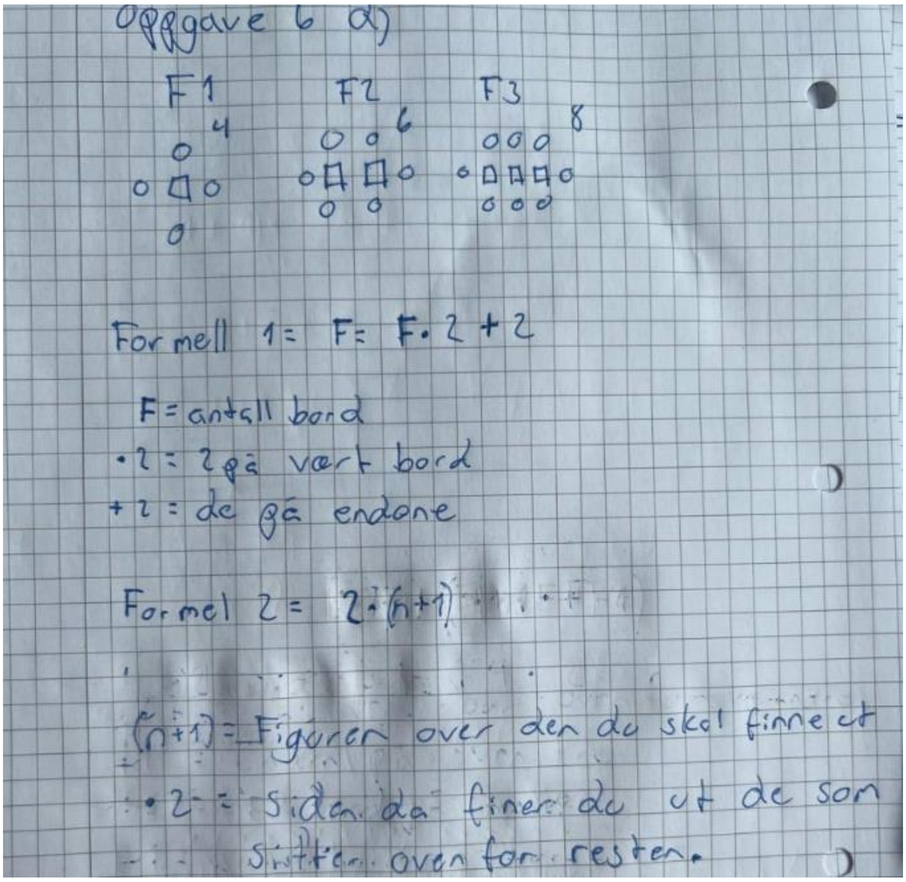
Figur 13: Besvarelse fra oppgave 6c) (V22) der det ikke foreligger en fullstendig konvertering fra situasjon til formel, da studenten ikke spesifiserer sammenhengen mellom størrelsene.

I besvarelsen observerer vi at studenten presenterer funksjonen som «$2x + 2$», uten å presisere hva sammenhengen mellom størrelsene er, og vi vet dermed ikke betydningen av x. Det at den matematiske betydningen ikke er overført fra kilden til målet, gjør at disse besvarelsene ikke viser tilstrekkelig tegn til forståelse av funksjonsbegrepet.

5.3.3 Variabler

Flere av besvarelsene viser tegn til lite forståelse av variabelbegrepet. Dette går i hovedsak på at studentene ikke belyser variablers rolle gjennom ulike representasjoner.

Dette tydeliggjøres når studentene skal gjennomføre en indirekte konvertering fra situasjon gitt ved figur til formel, og variablers verdier ikke oversettes i konverteringsprosessen. I figur 14 presenteres en besvarelse som belyser dette. I denne oppgaven skal figurene brukes til å vise på to ulike måter hvordan å komme frem til én eksplisitt formel for antall stoler når antall bord er kjent.



Figur 14: Besvarelse fra oppgave 6d) (V22).

I denne besvarelsen ser vi, i likhet med besvarelsen i figur 13, at funksjonen ikke representeres som en sammenheng mellom størrelser, da størrelsesforholdet mellom stoler og bord ikke presiseres. Studenten skriver blant annet «$Formell\ 1 = F = F * 2 + 2$», og presiserer at F representerer antall bord. Verbalt oversatt indikerer studenten at «antall bord er likt antall bord multiplisert med 2 pluss 2», noe som ikke gir mening. Studenten viser med dette ikke tegn til forståelse for variabelbegrepet, da variabelen ikke uttrykkes som noe som varierer. Videre observeres det i «*Formel 2*», at n brukes som variabel istedenfor F, noe som fremstår uklart, da det fortsatt omhandler samme bord og stoler som i formel 1. I denne indirekte konverteringen klarer dermed ikke studenten å gjennomføre den globale tolkningsprosessen som kreves for å belyse relasjonen mellom antall bord og stoler ved formel.

5.4 Oppgave 2 (H22)

Oppgave 2, gitt høsten 2022, er i likhet med oppgave 6 knyttet til forståelse for sammenheng mellom størrelser gjennom utforsking av mønstersekvenser. Forskjellen mellom disse to oppgavene er at i oppgave 2 er kilderepresentasjonen gitt ved tallfølge tilknyttet figurnummer, i motsetning til oppgave 6 hvor det er gitt en figursekvens i tilknytning figurnummer. Vi vil igjen presisere at selve tallrekka i seg selv ikke er en funksjon, men kan modelleres og ses som sammenhengen mellom to størrelser opp mot figurnummer. I lys av Janvier (1987) sin tabell, ser vi mønstersekvensen som en situasjonsbeskrivelse. Studenten skal gjennom deloppgavene løse ulike problemer, som inkluderer transformasjon av situasjonen.

I analyse av i oppgave 2b) og 2c) hvor studentene henholdsvis skal finne ledd nummer 10, og beskrive den rekursive utvikling i tallfølgen, ser vi at bearbeiding er den foretrukne transformasjonen. Vi har derfor valgt å ikke videre presentere funn fra disse besvarelsene, da vi i hovedsak ønsker å belyse studentenes forståelse av sammenheng mellom størrelser ved konverteringsprosesser. Vi vil dermed kun presentere resultater fra analyse av besvarelser fra oppgave 2a) og 2d). Tabell 10 presenterer en oversikt av utfordringene i denne oppgaven.

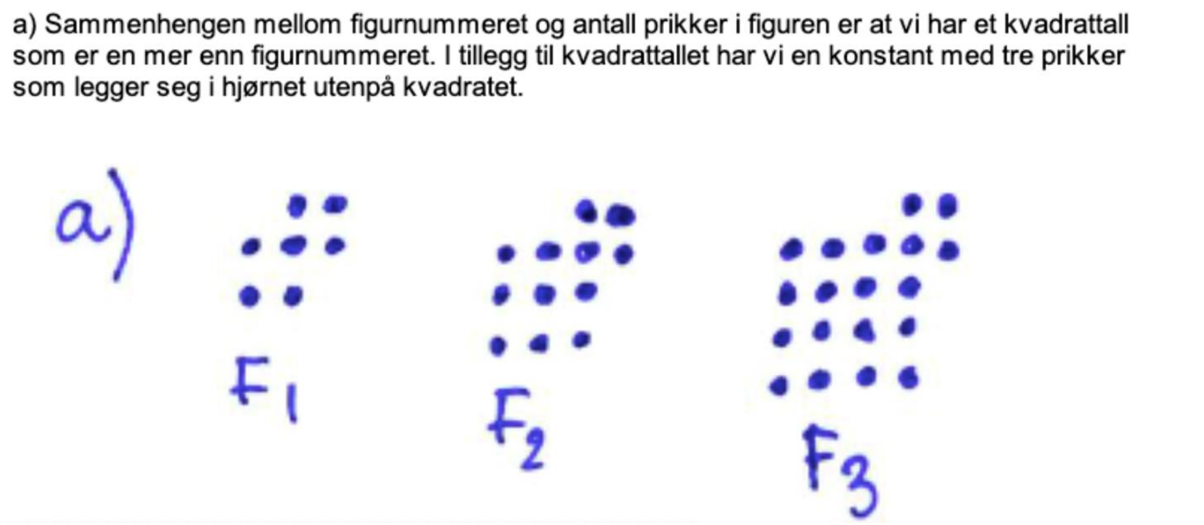
Tabell 10: Opptelling fra oppgave 2 (H22).

	Indirekte konverteringer	Funksjonsbegrepet	Variable størrelser
Utfordringer hos studentene	32/35	30/32	7/32

I tabellen presiseres det at i oppgave 2 er indirekte konverteringer en utfordring for 32/35 av studentene, og forståelse for funksjonsbegrepet blir i lite grad vist.
Vi vil videre trekke frem noen eksempler på besvarelser der studentene mestrer disse indirekte konverteringene av representasjoner. Formålet med dette er å belyse at det er studenter som viser tegn til forståelse for sammenheng mellom størrelser ved å utforske mønstersekvenser i ulike transformasjoner.

5.4.1 Eksempler på gode besvarelser

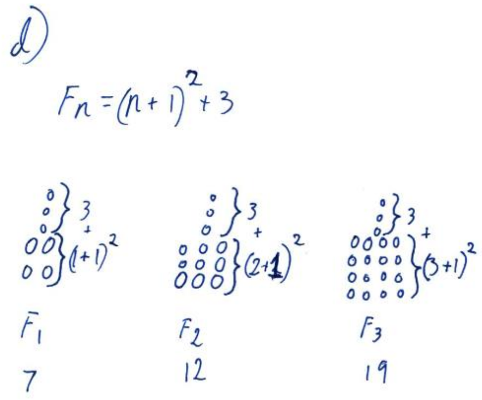
Et eksempel på en besvarelse hvor konverteringen er vellykket, presenteres i figur 15. Her skal studenten gjennom oppgave 2a) tegne tre figurer basert på de tre første leddene i tallfølgen; 7, 12 og 19. Figurene skal få frem et mønster i tallfølgen, og studentene skal beskrive sammenhengen mellom figurnummeret og antall prikker i figuren.



Figur 15: Besvarelse fra 2a) (H22) der den indirekte konverteringen er vellykket.

I denne besvarelsen observerer vi at studenten klarer å representere de tre første leddene i tallfølgen ved tre figurer. Studenten viser en sammenheng mellom figurnummeret og antall prikker i figuren ved å presisere at «*antall prikker i figuren er at vi har et kvadrattall som er en mer enn figurnummeret. I tillegg til kvadrattallet har vi en konstant med tre prikker som legger seg i hjørnet utenpå kvadratet.*». Ved å gjennomføre en slik global tolkning, viser studenten tegn til forståelse for funksjoner og variabler, dette ved å tilknytte hver figur til et figurnummer i tallfølgen. Forklaringen er konsistent og inkluderer både hva som endres gjennom figurene, og hva som forblir konstant. Det er flere studenter som får frem figurer i sine besvarelser, men som ikke klarer å knytte sammenheng mellom figur og figurnummer, noe som er avgjørende for å presentere sammenheng mellom disse størrelsene. Som vist i tabell 6 klarer kun 8 av 35 studenter å lage et representativt mønster som knytter figurmønster og ledd i tallfølgen sammen. Kun 3 av disse 8 studentbesvarelsene ga en tilhørende forklaring slik oppgaven ber om.

En annen besvarelse som delvis belyser en vellykket konverteringsprosess, er presentert i figur 16. Gjennom oppgave 2d) skal studentene finne en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen på to forskjellige måter.



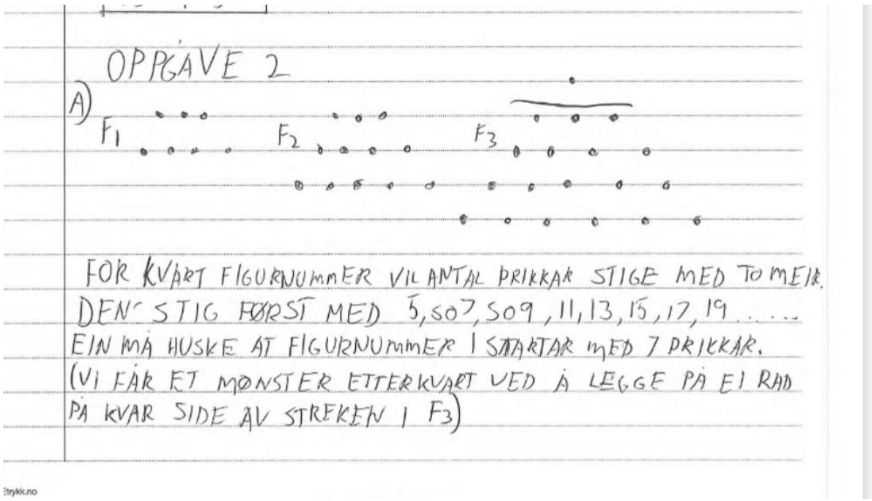
Figur 16: Besvarelse fra oppgave 2d) (H22) der studenten bruker figurer tilknyttet tallfølgen i konverteringsprosessen.

I figur 16 observerer vi at studenten ikke direkte viser sammenheng mellom tallfølge og formel, men benytter figurer fra oppgave 2a) for å konvertere til formel som målrepresentasjon. Studenten belyser hvordan figur og formel henger sammen. Det ville vært hensiktsmessig om studenten i tillegg presiserte at n representerer figurnummer, og at figurene består av et kvadrat med sidelengder $n + 1$ og tre prikker over. Vi tolker at studenten viser noe tegn til forståelse for sammenhengen mellom størrelsene ved å finne en eksplisitt formel for det n-te leddet i tallfølgen på én måte. Som vist i tabell 6 klarer kun 3/35 å finne en eksplisitt formel for tallfølgen på to forskjellige måter.

Basert på dette ønsker vi å presentere to utfordringer som er gjennomgående for at studenter ikke klarer å vise forståelse i disse indirekte konverteringer. Den første går ut på det å presentere en funksjon som en sammenheng mellom størrelser, og den andre på betydningen av variabler i en funksjon. Det mest utfordrende med analysen er at omtrent halvparten av besvarelsene enten er blanke, eller ikke gir mening i konteksten av oppgaven, noe som gjør det vanskelig å identifisere representative utfordringer knyttet til disse besvarelsene.

5.4.2 Funksjonsbegrepet

I analysen er det fremtredende at flere av studentene ikke klarer å gjennomføre en indirekte konvertering, når figursekvens og formel er målrepresentasjon. Dette skyldes hovedsakelig manglende presisering av relasjoner mellom ulike størrelser, både ved sammenhengen mellom avhengig og uavhengig variabel i formel, samt sammenhengen mellom figurnummer og figurmønster i sekvens. Et eksempel på dette er illustrert i figur 17, hvor oppgave 2a) skal besvares. Studenten skal tegne tre figurer basert på tallfølgen, og beskrive sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker. Studentenes besvarelser til denne oppgaven varierer i stor grad, og denne besvarelsen representerer deler av vårt utvalg.

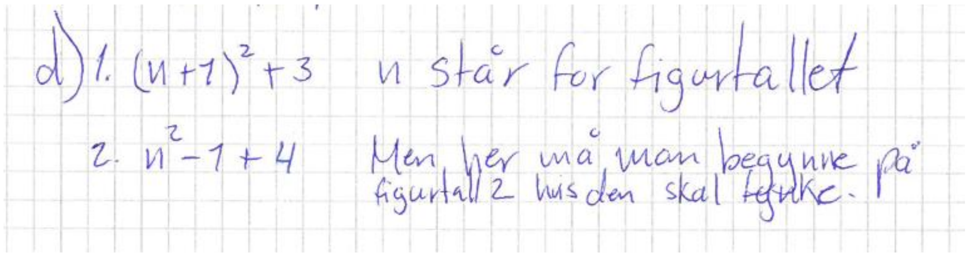


Figur 17: Besvarelse fra 2a) (H22) hvor den indirekte konverteringen ikke er vellykket.

I denne besvarelsen observerer vi at studenten ikke klarer å presentere et systematisk mønster i figursekvens som er representativt for funksjonen gitt ved tallfølge. Selv om studenten presiserer hva som endres for hvert ledd i tallfølgen, mangler det en tilsvarende forklaring rundt hva som er konstant og hva som endres for hver figur. Den manglende evnen til å identifisere dette mønsteret, og oversette den matematiske betydning i konvertering fra tallfølge til figursekvens, kan indikere at studenten ikke ser den helhetlige betydningen av funksjonen. Dette viser lite tegn til forståelse for funksjonen.

5.3.2 Variabelbegrepet

I likhet med oppgave 6, viser studentene lite forståelse for variabelbegrepet i konverteringene i denne oppgaven. Studentene har problemer med å forholde seg til bokstaver som representerer generaliserte tall, hvor noen er i endring mens andre forblir konstante. Et eksempel på dette er illustrert i figur 18, der studentene på to ulike måter skal vise hvordan de kommer frem til en eksplisitt formel for tallfølgen.


d) 1. $(n+1)^2+3$ n står for figurtallet
2. n^2-1+4 Men her må man begynne på figurtall 2 hvis den skal funke.

Figur 18: Besvarelse fra oppgave 2d) (H22).

I likhet med figur 17 viser studentbesvarelsen en manglende evne til å uttrykke funksjonen som en sammenheng mellom størrelser. I formelen blir ikke funksjonen uttrykt som et avhengighetsforhold mellom avhengig og uavhengig variabel, ved å ikke knytte uttrykket til for eksempel $f(n)$. Dette gjelder både det som er ment å være formel 1 og 2. I den andre formelen uttrykt ser vi at ved å erstatte variabelen n med figurnummer, blir ikke den matematiske betydningen av funksjonen bevart. Vi ser for eksempel at $f(1) = 4$ og $f(2) = 7$ noe som ikke gjenspeiler ledd nummer 1 og 2 i tallfølgen. Dette viser tegn til lite forståelse for variabelbegrepet. Siden funksjonsbegrepet og variabelbegrepet er tett knyttet sammen, er ofte forståelsen omhandlende begrepene også det. Det kan dermed tolkes dit at når studentene ikke mestrer konverteringene, viser de ofte lite forståelse for både funksjon- og variabelbegrepet.

5.5 Sentrale funn i analysen

Avslutningsvis ønsker vi å oppsummere studiens sentrale funn som videre skal diskuteres i kapittel 6. Disse funnene vil senere være sentrale for å besvare vårt forskningsspørsmål. De sentrale funnene er relatert til både direkte og indirekte konverteringer, forståelse av funksjoner, og forståelse av variable størrelser og deres rolle i en funksjon. Siden besvarelser fra oppgave 3 (V22) og oppgave 6 (V22) er utført av samme studenter, presenterer vi vår statistikk basert på 170 studentbesvarelser, og ikke de 248 oppgavebesvarelser vi totalt har analysert. Dette da vi hovedsakelig ønsker å belyse tegn til forståelse i arbeid med sammenhenger mellom størrelser, og ikke hvilke oppgaver utfordringene nødvendigvis er knyttet til.

5.5.1 Direkte og indirekte konverteringer

I studentbesvarelsene observerer vi en gjennomgående trend; ulike konverteringsoppgaver krever ulike nivåer av kognitiv kompleksitet. Under en konverteringsprosess må studentene gjenkjenne det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner. I noen tilfeller vil disse representasjonene ha en direkte sammenheng, mens andre er mer indirekte, og det kreves en dypere tolkningsprosess for å gjennomføre konverteringen.

Gjennom arbeid med representasjoner observerer vi at de fleste studentene klarer å gjennomføre direkte konverteringer, det vil si konverteringer av et objekt hvor det er en direkte sammenheng mellom kilde- og målrepresentasjon. Dette viser seg spesielt gjennom oppgaver hvor studentene skal lese av en graf og representere funksjonen gitt ved en tabell. Vi tolker analysen vår slik at 96% av studentene mestrer denne konverteringen. Selv om studentene viser tegn til forståelse ved en slik konvertering, betyr det ikke nødvendigvis at de har en helhetlig forståelse for det matematiske objektet, ettersom direkte konverteringer kun krever en lokal tolkningsprosess og ikke krever dypere kognitiv forståelse av alle aspekter ved grafen.

Når det kommer til oppgaver som en krever en global tolkningsprosess ved indirekte konverteringer, ser vi at det oppstår større utfordringer. Disse utfordringene er knyttet til å se generalitet i kilderepresentasjon, for så å konvertere disse aspektene av funksjonen til målrepresentasjon. Dette blir særlig synlig når målrepresentasjonen er en figursekvens eller en formel. I disse konverteringene kommer studentenes forståelse for funksjons- og variabelbegrepet i lite grad frem. I lys av de 170 besvarelsene i vår analyse, ser vi at indirekte konverteringer er utfordrende for 62%.

5.5.2 Funksjon som en sammenheng mellom størrelser

Et interessant funn er at studentene har utfordringer med å konvertere når målrepresentasjonen skal være en formel. Dette kommer særlig til syne gjennom besvarelser fra oppgave 6d) og 2d), hvor studentene skal konvertere fra situasjon gitt ved mønstersekvens, til en eksplisitt formel. Det som hovedsakelig går igjen er at studentene ikke ser funksjoner som en sammenheng mellom to størrelser, og dermed ikke klarer å presentere generalitet i funksjonene. Selv om mange studenter viser tegn til forståelse av objektet i konverteringsprosessen, klarer de ikke alltid å overføre den matematiske betydningen av objektet ved å presisere størrelsesforholdet mellom avhengig og uavhengig variabel. Dette viser lite tegn til forståelse for funksjonsbegrepet.

5.5.3 Forståelse for variable størrelser er avgjørende for å konvertere funksjoner.

Det fremstår en betydelig korrelasjon mellom studenters forståelse av funksjonsbegrepet og deres evne til å bruke variabler på en adekvat måte. Dette kan skyldes at variabler representerer størrelser, mens funksjoner indikerer hvordan disse størrelsene avhenger av og påvirker hverandre. Studenter som viser forståelse av variable størrelser og kan tydeliggjøre deres betydning i gitte kontekster, har som regel en bedre evne til å konvertere funksjoner fra forskjellige kilde- til målrepresentasjoner.

Studentene har utfordringer knyttet til å se forholdet mellom avhengig og uavhengig variabel i situasjoner representert ved mønstersekvenser, og i grafer. Dette blir tydeliggjort ved at studentene ikke presiserer variablers rolle i funksjonen, ved hvilke aspekter som er konstante og hvilke som endres. Når flere representasjoner av funksjonen er gitt i oppgaveteksten, slik som i oppgave 6 (V22), der figur og tilhørende elevsvar er gitt, ser det ut til at variabelbegrepet blir mer tilgjengelig for studentene. I motsetning ser vi i oppgave 2 (H22) når kun tallfølge er gitt, en betydelig nedgang i studentenes tegn til forståelse av sammenhengen mellom variable størrelser.

Oppsummert tolker vi resultatene slik at studentene viser minst forståelse for funksjons- og variabelbegrepet tilknyttet indirekte konverteringer. Å ikke inneha forståelse for disse begrepene hindrer flere av studentene å se sammenhenger mellom størrelser i deres arbeid med representasjoner.

6.0 Diskusjon

Utgangspunktet for denne studien har vært å avdekke hvilken forståelse GLU-studenter viser i algebra, mer spesifikt forståelse for sammenhenger mellom størrelser ved funksjons- og variabelbegrepet. Siden et sentralt element i algebraisk forståelse er transformasjon av representasjoner, har studien undersøkt hva GLU-studenter mestrer i arbeid med disse representasjonene, og hva som er som utfordrende (Duval, 2006).

I dette kapittelet vil de kvalitative resultatene som ble presentert i kapittel 5 bli diskutert i lys av det teoretiske rammeverket for studien og tidligere forskning. Diskusjonskapittelet er inndelt i underkapitler omhandlende studentenes forståelse for sammenheng mellom størrelser knyttet til direkte og indirekte konverteringer, funksjonsbegrepet, og forståelse for variable størrelser. Avslutningsvis vil resultatene fra studien diskuteres i forhold til algebraens rolle i skolen. Dette vil danne grunnlaget for den overordnede konklusjonen i kapittel 7, der forskningsspørsmålet vil besvares

6.1 Direkte og indirekte konverteringer

Studiens funn viser at mange av studentene mestrer både bearbeiding av en representasjon, hvor de arbeider innen sammen register, og direkte konverteringer av funksjonsobjektet. Med dette mener vi konverteringer der det er en direkte forbindelse mellom kilde- og målrepresentasjon. Dette kommer til syne gjennom besvarelser fra oppgave 1 (H19) og oppgave 3 (V22), hvor studentene skal lese av grafen, og overføre den matematiske betydningen ved å tilpasse objektet som blir betegnet til en tabell med tallpar. Det faktum at de fleste studenter behersker den direkte konverteringen kan ses i lys av at disse representasjonene har lite overflødig informasjon å filtrere gjennom, og kan i stor grad leses rett av (Duval, 2006; Janvier, 1987). Denne konverteringen krever kun en oversettelse av noen elementer av grafen, selv om grafen inneholder mye mer informasjon om funksjonen. Følgelig kreves det kun en lokal forståelse for funksjonen, og ikke en dypere tolkning av objektet. Dette kan ses i sammenheng med Rule og Hallagen (2007) og Bossé et al. (2011) sin forskning, som viser at studentene i en slik lokal tolkningsprosess i stor grad klarer å overføre den matematiske betydningen av objektet.

Imidlertid oppstår det større utfordringer når studentene skal arbeide med indirekte konverteringer. Her mestrer ikke studentene konverteringer i like stor grad, da helheten av det matematiske objektet ikke overføres fra en representasjon til en annen. Dette kommer særlig til syne når målrepresentasjonen skal være en figursekvens eller en formel, hvor studentene må se generalitet i kilderepresentasjonen for å gjennomføre konverteringen. Mason (1996) argumenterer for at det alltid bør være et mål å belyse generalitet i matematikken, da dette kan gi studentene en mer helhetlig forståelse matematiske begreper. Kieran (2004) utdyper på lik linje viktigheten av algebraisk tenkning som inkluderer å se generelle matematiske relasjoner og mønstre. Gjennom analyse av datamaterialet, er det avdekket at studentenes utfordringer hovedsakelig omhandler identifisering av slike mønstre og relasjoner, heller enn selve beregningene. Dette kommer til uttrykk i deres tilbøyelighet til å fokusere på spesifikke aspekter av en representasjon, fremfor de generelle aspektene. Dette fenomenet blir spesielt tydelig i de indirekte konverteringene, som krever en global tolkning av relasjoner for å gjennomføre transformasjonen. Et eksempel på dette er når studentene fokuserer på innholdet i ulike figurmønster, i stedet for å identifisere generelle relasjonssammenhenger i mønstrene, ved hva som endres og hva som er konstant i figurene, og hvordan dette kan kobles til figurnummeret.

Ifølge Rule og Hallagaen (2007) er tolkningsfeil av mønstre også en av de største utfordringene i algebraisk tenkning. De peker på at dette kan skyldes svakheter i oversettelsesprosessen mellom ulike representasjoner. I en eksamenssituasjon kan dette skyldes at studentene ønsker å arbeide med metoder de er vant til å bruke, noe som indikerer at det bør legges mer vekt på generaliteten i mønstre i undervisningen. For å få dette til må undervisningsformen legges opp på en måte slik at de får øvd og praktisert på transformasjoner som krever fortolkning av relasjoner.

Et overraskende resultat i studien er studentenes utfordringer med konverteringsprosessen der formelen er målrepresentasjonen. Dette kan ses i lys av Adu-Gyamfi et al. (2012), som viser at oversettelser som involverer symboler er blant de vanskeligste for studenter. Det ser ut til at studentene ikke har forstått ideen om funksjon, som en sammenheng mellom variable størrelser. For å konstruere en formel er det nødvendig å kunne gjenkjenne de generelle variasjonene som forekommer (Duval, 2006). Ifølge kompetansemålene på 6.trinn skal elevene kunne *«bruke variabler og formler til å uttrykke sammenhenger i praktiske situasjoner.»* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Derfor burde forståelse for slike funksjonssammenhenger være et minstekrav for lærerstudenter som kan undervise opp til og med 10 trinn. På bakgrunn av dette var det, i likhet med Adu-Gyamfi et al. (2012), en forventing om at flere GLU-studenter hadde kontroll på denne konverteringsprosessen, noe som ikke stemte med resultatene i studien.

6.2 Funksjonsbegrepet

De fleste studenter viser lite tegn til forståelse for funksjoner, da de ikke ser begrepet som en avhengighetsrelasjon mellom to mengder, hvor hvert element i den ene mengden avhenger av element i den andre mengden (Hansson, 2006; Usiskin, 1988). Manglende forståelse av dette konseptet hindrer studentene i å understreke generelle relasjoner, slik som å presisere sammenheng mellom størrelser og endringsaspekter i funksjoner.

Det er verdt å merke seg at flertallet av studentene har utfordringer med å lage eksplisitte formler, spesielt når de skal benytte figurmønster og tallfølger som kilderepresentasjon, men også ved graf som kilderepresentasjon. Det faktum at få besvarelser klarer å presentere funksjonen ved hjelp av funksjonsutrykk, gir grunn til å stille spørsmål ved om studentene egentlig forstår hva en funksjon innebærer. Utfordringer knyttet til funksjonsuttrykk kan relateres til Hansson (2006) sine bemerkninger om at funksjonsbegrepet er lite integrert blant lærerstudenter, og at mange av studentene ikke får til konverteringer med algebraiske uttrykk som målrepresentasjon. Disse funnene viser hvor viktig det er med en begrepsavklaring, og ikke minst begrepsforståelse hos studentene. Funnene reiser spørsmål rundt hvordan den enkelte lærer vektlegger den pedagogiske tilnærmingen i sin undervisning om funksjonsbegrepet, og som Hansson (2006) påpeker, kan det være en fordel å undersøke om studenter blander terminologi i funksjonssammenhenger.

6.3 Forståelse for variable størrelser

Resultatene i studien fremhever en klar sammenheng mellom studentenes manglende evne til å uttrykke funksjoner som funksjonsuttrykk og deres utfordringer knyttet til variabelbegrepet. Mer utdypende kan resultatene skyldes at studentene ikke ser funksjonen som en sammenheng mellom ulike variable størrelser.

Tidligere forskning viser at lærerstudenters misoppfatninger innen algebraiske begreper som variabel er et hinder i deres matematiske arbeid (Rule & Hallagaen, 2007; Tanisli & Kose, 2013). Resultatene i denne studien tydeliggjør at studentene generelt har utfordringer med å presisere de konstante og endrede aspektene i representasjoner av funksjoner, noe som samsvarer med studien til Brown og Bergman (2013). Brown og Bergman (2013) påpeker at studentene har vanskeligheter med å se variabler i sammenhenger der noen verdier er konstante mens andre endres. Våre resultater viser i likhet at utfordringer tilknyttet variabelbegrepet ofte fører til at funksjonen ikke utrykkes som en avhengighetsrelasjon mellom størrelser. Resultatene underbygger påstanden om at det er behov for å i større grad sette søkelys på studentenes begrepsforståelse og særlig sammenhengen mellom begrepene variabel og funksjon. Om kommende lærerstudenter ikke ser denne sammenhengen, kan det få konsekvenser for elevers forståelse av sammenheng mellom størrelser (Brown & Bergman, 2013; Tanisli & Kose, 2013).

6.4 Algebra i skolen

I flere studier er det vist at algebra er en vesentlig del av matematikken (Kaput, 1998). Likevel viser denne studiens funn i samsvar med tidligere forskning, at GLU-studenter har forbedringspotensiale på dette området (Grønmo & Onstad, 2012; Rule & Hallagaen, 2007; Tanisli & Kose, 2013).

Med innføringen av den nye læreplanen for grunnskolen i 2020, er algebra ett av temaene som utfordrer den tidligere læreplanen. Allerede fra 1 og 2. trinn skal matematikkfaget ha fokus på algebraisk tenkning ved arbeid med representasjoner, mønstre og systemer, i motsetning til tidligere hvor algebra først ble implementert på 5. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). På denne måten kan elevene tidlig utvikle relasjonsforståelse og ta med seg disse ferdighetene videre i arbeidet med funksjoner, symboler og algebraiske uttrykk**.** Dette støtter Kaputs (1998) syn om at algebraisk tenkning på barnetrinnet, ved bruk av relasjoner og sammenhenger mellom størrelser, vil gi gunstige forkunnskaper for studentene når de senere jobber med blant annet funksjoner**.** Det å vise forståelse i arbeid med representasjoner, av for eksempel mønstersekvenser, er derfor avgjørende for dagens lærere. Rule og Hallagaen (2007) viser, i likhet til våre funn, at å identifisere slike mønstre er noe av det lærerstudenter har størst utfordringer med. Dette støttes også av Kieran (2004), som mener at flere studenter som opererer aritmetisk, har en tendens til å ikke se relasjonelle aspekter, men i større grad fokuserer på beregninger. Det er problematisk at lærerstudenter ikke mestrer å se relasjoner i mønstre, da læreres utfordringer med algebraiske konsepter er til hinder for å oppdage elevers utfordringer med de samme konseptene (Tanisli & Kose, 2013). Å ikke oppdage elevers utfordringer tidlig kan ha store konsekvenser, da det kan føre til økt risiko forkunnskapshull, og at elevene henger etter videre i utdanningsløpet.

Tidligere forskning viser til at en årsaksfaktor til lærerstudenters utfordringer i algebra, er knyttet til innholdet i utdanningen (Castro, 2004; McGowen & Davis, 2001). Et sentralt spørsmål blir dermed hvordan dagens universiteter skal arbeide for å utdanne fagkompetente lærere som kan hjelpe elevene med å oppnå en dypere relasjonsforståelsen av sammenheng mellom størrelser. Et relevant spørsmål er om lærerutdanningene i Norge har tilpasset seg endringene i grunnskolens læreplan, og om undervisningen dermed oppfyller kravene som stilles til fremtidige grunnskolelærere. Med endringene i læreplanen stilles det nå større krav til at lærere skal implementere en klasseromskultur der elevene jobber med transformasjoner for å se relasjoner, og ikke bare har fokus på beregninger i oversettelser. Da lærernes fag- og pedagogiske kunnskap er viktige faktorer for elevers prestasjoner og forståelse i algebra, er dette aspektet avgjørende for å bedre elevenes algebraforståelse.

Både denne studien og tidligere forskning indikerer at dagens GLU-studenter i stor grad ikke ser ut til å kunne bidra til å forbedre de lave algebrakunnskapene som vises i skolen (Bergem et al., 2016; Kjærnsli & Olsen, 2013; NOKUT, 2023). Dette kan indikere at det bør gjøres endringer i lærerutdanningen for å gi GLU-studentene et bedre undervisningsgrunnlag i algebra. Likevel er det viktig å påpeke at GLU-studentene i denne studie ikke har erfart endringene som kom med den nye læreplanen, hverken som elev eller lærer. Det kan dermed ikke fastslås om GLU-studentene gjennom sitt utdanningsløp har blitt presentert for slik relasjonell forståelse. Det er også nevneverdig at resultatene er basert på studenter som gjennomførte denne deleksamenen på første eller andre år av sin lærerutdanning, og det kan dermed antas at de vil oppnå dypere algebraforståelse i løpet av utdanningen. Det er derfor viktig å understreke at formålet med denne oppgaven ikke er å vurdere studentene som gode eller dårlige matematikklærere, men å belyse hva som bør settes søkelys på videre i GLU for å utdanne grunnskolelærere med god algebraisk forståelse.

7.0 Konklusjon

Målet med denne studien var å belyse aspekter som kunne bidra å besvare vårt forskningsspørsmål:

> *Hvilke tegn til forståelse for sammenhenger mellom størrelser kommer til uttrykk i grunnskolelærerstudenters arbeid med ulike representasjoner?*

Resultatene av studien indikerer at de fleste lærerstudenter viser forståelse for sammenhenger mellom størrelser i direkte konverteringer mellom representasjoner, som er mindre komplekse å identifisere sammenhenger i. Dette kan for eksempel være i konvertering fra graf til tabell. Imidlertid møter store deler av studentene utfordringer når de skal gjennomføre en indirekte konvertering mellom representasjoner, som krever en mer dyptgående kognitiv tolkningsprosess av relasjoner og sammenhenger. Dette kan for eksempel være konverteringen fra situasjon til formel. Deres begrepsforståelse av funksjoner og variabler, og dermed forståelse for sammenheng mellom størrelser, kommer ikke til uttrykk i arbeid med disse representasjonsovergangene. Ut fra dette slutter vi at begrepsforståelse av funksjoner og variable størrelser er fremtredende hindringer i lærerstudentenes generelle algebraforståelse.

7.1 Praktiske implikasjoner

De praktiske implikasjonene av denne studiens resultater, NOKUTs statistikker for deleksamen i algebraisk tenkning og tidligere forskning på lærerstudenters matematikkompetanse, peker på behovet for å styrke algebra i grunnskolelærerutdanningen. Studiens resultater indikerer at utdanningen i større grad bør sette søkelys på det algebra faktisk handler om; «å utforske strukturer, mønstre og relasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Det kan også være nødvendig å sette av tid i lærerutdanningen til å arbeide med utfordringer knyttet til oversettelsesprosesser hos elever, og diskutere strategier for å hjelpe dem med å overvinne slike utfordringer. Duval (2017) påpeker at for å forstå et matematisk begrep, må man gjenkjenne begrepet gjennom ulike representasjoner, og en slik tilnærming kan bidra til at studentene får bedre forståelse for de algebraiske begrepene. Med den nye læreplanen som grunnlag og tilstrekkelig utdanning, kan fremtidige lærere få en forbedret algebraisk forståelse som igjen vil styrke kvaliteten på algebraundervisningen i skolen. Dette vil kunne gi elevene en sterkere forankring i matematikkfaget, som de kan bygge videre på i sin utdanning og senere yrkesliv.

Videre peker de praktiske implikasjonene av våre funn på behovet for å implementere algebraisk tenkning i skolen allerede fra de tidligste trinnene. Dette kan gjøres ved hjelp av den nye læreplanen (LK20) som i større grad vektlegger arbeid med representasjoner, mønstre og systemer allerede fra 1. og 2. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Algebra i skoleundervisningen må derfor endre seg i tråd med læreplanen, slik at elevene kan anvende matematikk i et samfunn som er i stadig endring, og klasseromskulturen må også endres slik at elevene oppfordres til å jobbe med transformasjoner som krever å se relasjoner.

7.2 Implikasjoner for videre forskning

Videre kan det være verdifullt å utforske hvordan lærerutdanningen kan utformes for å bedre støtte studentenes læring, ved å adressere eventuelle konfunderende faktorer som kan påvirke GLU-studenters forståelse av algebra. En komparativ studie av ulike utdanningsinstitusjoner kunne vært interessant å gjennomføre. Dette for å sammenligne hvordan ulike lærerutdanningsprogrammer underviser algebra og slik forbereder lærerstudenter på å undervise i skolen i tråd med den nye læreplanen. Ved å undersøke forskjeller i undervisningsmetoder kan man få en bedre forståelse av hva som fungerer godt, og hva som kan forbedres. Dette kan også bidra til å identifisere «best practices» og hjelpe utdanningsinstitusjoner å forbedre sine lærerutdanningsprogrammer. Resultatene av en slik studie kan være av betydning for utdanningspolitikken, utdanningsinstitusjoner, lærere og elever. Det kunne også være interessant å gjøre en studie, der det undersøkes hvorvidt denne reformasjonen ga resultater.

I sammenheng med dette kunne det også vært av interesse å undersøke hvilke algebraiske forkunnskaper lærerstudenter har fra grunnskolen og videregående skole, når de begynner på lærerutdanningen. Dette fordi hele årsakssammenhengen til lærerstudenters svake algebraforståelse, ikke kun kan ses i lys av høyere utdanning uten å vite noe om andre bakenforliggende årsaker. En slik studie kunne bidratt til å belyse hvilke utfordringer knyttet til algebra som vil være ekstra viktig å implementere i videre universitetsutdanningen for å utdanne mest mulig kompetente lærere. Særlig interessant er dette i lys av at Regjeringen har foreslått å senke kravet om å ha karakteren 4 i matematikk, til karakteren 3, for å komme inn på lærerutdanningen (Regjeringen, 2021). Det at studenter kan komme inn på lærerutdanningen med enda dårligere matematisk kunnskap, er bekymringsfullt med tanke på denne studiens funn. Det kan føre til at læreres matematiske forståelse fortsatt forblir mangelfull. Likevel er det kanskje en enda større konsekvens at skolene benytter ufaglærte lærere.

Samlet sett ser vi at det er mye interessant, og ikke minst viktig, forskning som kan bli gjort på lærerstudenter. Hva er norske lærerstudenter gode på, og hva må utarbeides for en enda bedre undervisningspraksis? Bare ved å styrke kvaliteten i kommende læreres forståelse av algebra kan elevenes forståelse bli bedre. Vi har tro på at den nye læreplanen kan bidra til nettopp dette, en bedre forståelse av algebra hos både elever, lærerstudenter, og lærere.

7.3 Et retrospektivt blikk på studiens gjennomførelse

Dette masterprosjektet har vært en læringsrik og tidkrevende prosesseringsprosess, der vi har fått muligheten til å gå i dybden både i algebra som begrep og fagområde, men også gjennom semiotisk analyse fått innblikk i grunnskolelærerstudenters forståelse for algebra. Gjennom hele skriveprosessen har vi endret tankeprosess, og fått ny og bedre innsikt i emnet.

Vi mener at en semiotisk analyse i stor grad bidrar til å besvare forskningsspørsmålet vårt, ved at vi gjennom analysen får mulighet til å identifisere studentenes forståelse av matematiske begreper, samt avdekke utfordringer i besvarelsene. Likevel har analysemetoden sine begrensninger, blant annet ved at man i liten grad får innsikt i studentenes matematiske tankeprosess. Ved for eksempel å gjennomføre oppgavebaserte fokusintervju, ville vi i større grad hatt mulighet til å tolke studenters besvarelser, og gjennom samtale ledet datainnsamling i ønsket retning. Slik kunne vi mulig avdekket årsakssammenhenger rundt hvilke transformasjoner som oppleves lett, og vanskelig for studentene, og mulig avdekke sammenheng mellom konverteringer studentene mestrer og ikke. For eksempel hvis de mestrer konverteringen mellom situasjon ved tallfølge til situasjon ved figurmønster, om dette vil danne grunnlag for å mestre konverteringen fra situasjon ved tallfølge til formel senere. Dette kunne gitt enda mer dybde i studentenes forståelse for begrepene funksjon og variabel, og hvordan disse ses i tråd med sammenheng mellom størrelser. Slik ser vi tidsaspektet som en begrensing i denne studien, det har blant annet resultert i at vi utelukket nettopp denne gjennomføringen av kvalitative intervjuer av dagens GLU-studenter. Likevel, som tidligere nevnt (se kap. 4.5.2) ville utvalget vårt sett noe annerledes ut ved slike intervjuer, og dermed ikke vært like overførbart til å gjelde alle norske GLU-studenter.

På bakgrunn av dette, sier vi oss dermed fornøyd med hvordan oppgaven har utviklet seg, og hvordan sluttproduktet har blitt, et nåtidsbilde av GLU-studenters forståelse av sammenhenger mellom størrelser. Den kunnskapen vi har utviklet gjennom dette prosjektet, vil være noe vi vil ta med oss videre ut i læreryrket, og vil påvirke hvordan vi pedagogisk og didaktisk vil innføre begrepsforståelse i algebra hos elever. Vi mener selv vi har presentert noen interessante funn, og håper forskningen kan være nyttig for andre. Spesielt oppfordrer vi utdanningsinstitusjoner å tilrettelegge utdanningsløpet, for å møte kommende lærerstudenter på en best mulig måte, og med det bidra til å utdanne kompetente lærere innen fagområdet matematikk. Vi er stolte av vår reise gjennom prosessen, og arbeid som har blitt nedlagt.

8.0 Referanseliste

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and Mathematics*, *112*(3), 159-170. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Berg, B. L. & Lune, H. (2012). *Qualitative research methods for the social science* (8. Utg.). New Jersey: Pearson Education

Bergem, O.K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag, resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Universitetsforlaget.

Blanton, M., Brizuela, B., M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., M., Stroud, R., Fonger, N., L. & Stulianou, D. (2017). Implenting a Framework for Early Algebra. I C. Kieran (Red), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 27-49). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(3), 113-133. https://doi.org/10.29333/iejme/264

Brekke, G., Grønnmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra* (Kartlegging av matematikkforståelse). Nasjonalt læremiddelsenter.

Brown, S., & Bergman, J. (2013). Preservice teachers' understanding of variable. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(1), 1-17. https://doi.org/10.1080/24727466.2013.11790327

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Castro, B. D. (2004). Pre-service teachers' mathematical reasoning as an imperative for codified conceptual pedagogy in algebra: A case study in teacher education. *Asia Pacific Education Review*, *5*, 157-166. https://doi.org/10.1007/BF03024953

Dalland, O., (2021). *Metode og oppgaveskriving* (7. utg.). Gyldendal.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 1999) 3-26. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. http://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. I L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Red), *Semiotics in Mathemtics Education.* (s. 39-62). Sense Publisher. https://books.google.no/books?hl=no&lr=&id=Z3sfEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA39&ots=8tS8lyH_JT&sig=CD4f6vqKhC02RYxtHwyygpeOuNU&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-56910-9.pdf

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2012). *Mange og store utfordringer: et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). Matematikk i motvind. *TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*, 1-288. https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/timss/5/matematikk_i_motvind.pdf

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function* [Doktorgradsavhandling] Luleå tekniska universitet. https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A990531&dswid=5757

Heid, K. M. (1996). A Technology -Intensive Functional Approach to the Emergance of Algebraic Thinking. I N. Bednarz, L. Lee & C. Kieran (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 239-255). Kluwer Academic Publishers

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1-27. https://books.google.no/books?hl=no&lr=&id=yUyBAAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Jacobsen, D. I. (2016). *Hvordan gjennomføre undersøkelser - Innføring i samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Cappelen Damm AS

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, *27*, 32.

Janvier, C. (1996) Modelling and the initiation into algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 225-236). Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics and Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25–26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151. https://www.researchgate.net/profile/Carolyn-Kieran-2/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/55895b8408ae2affe714d428/Algebraic-thinking-in-the-early-grades-What-is-it.pdf

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26. https://doi.org/10.48489/quadrante.22814

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. *Mathematics Learning Study Comittee, Center for Education*. Washington, D.C.: National Academy Press. https://static1.squarespace.com/static/5b4fde59b27e395aa0453296/t/5bd2a5d89140b763780f0aab/1540531701125/Kilpatrick%2C+Swafford%2C+Findell+-+2001+-+Adding+It+Up+Helping+Children+Learn+Mathematics+copy.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Kjærnsli, M & Olsen, R.V (2013). Fortsatt en vei å gå, norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012. Universitetsforlaget.

Lacampagne, C., Blair, W. & Kaput J. (1995), *The Algebra Initiative Colloquium: Papers Presented at a Conference on Reform in Algebra*. (December 9–12, 1993, vol. 1–2,) Washington, D.C.: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. 1995. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385437.pdf?fbclid=IwAR2g-2jkRl3V_H4wgJt_7tGwcFyIW3BSrdld6ecod47rL-uy2hB41MIaizc

Mason, J. (1996). Roots To Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Kluwer Academic Publishers

McGowen, M. A., & Davis, G. E. (2001). *Changing Pre-Service Elementary Teachers' Attitudes to Algebra.* [Paperpresentasjon] International Commission on Mathematical Instruction Study Conference, Melbourne, Australia https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED468035.pdf

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 221-223). Kluwer Academic Publishers

NOKUT. (u.åa.). *Om NOKUT*. Hentet 29. Mars 2023 fra https://www.nokut.no/om-nokut

NOKUT. (u.åb.). Nasjonal deleksamen. Hentet 29. Mars 2023 fra https://www.nokut.no/utdanningskvalitet/nasjonal-deleksamen

NOKUT (2008). *Evaluering av ingeniørutdanningen i Norge 2008. Sammendrag av viktige konklusjoner og anbefalinger.* https://www.nokut.no/contentassets/40568ec86aab411ba43c5a880ae339b5/ingeva_nokut_sammendrag.pdf

NOKUT. (2023, 11. Januar). *Seks av ti besto nasjonal deleksamen i matematikk*. *https://www.nokut.no/nyheter/seks-av-ti-besto-nasjonal-deleksamen-i-matematikk/*

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2021). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Regjeringen.no. (2021, 18. November). *Regjeringen vil endre opptakskravene til lærerutdanningen*. https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/regjeringen-vil-endre-opptakskravene-til-larerutdanningen/id2888359/

Rule, A. C. & Hallagan, J. E. (2007). Algebra Rules Object Boxes as an Authentic Assessment Task of Preservice Elementary Teacher Learning in a Mathematics Methods Course. Annual Conference of the Association of Mathematics Teachers of New York State (AMTNYS), (October 26-28, Saratoga Springs, NY) https://eric.ed.gov/?id=ED468035

Tanisli, D. & Kose, N. Y. (2013). Pre-service mathematic teachers' knowledge of students about the algebraic concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(2), 1-18. http://doi.org/10.14221/ajte.2013v38n2.1

Thagaard, T. (1998). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitative metoder*. Fagbokforlaget

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget

Universitets- og høgskolerådet. (2018, 17. oktober). Nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanningen trinn 5-10. https://www.uhr.no/_f/p1/iffeaf9b9-6786-45f5-8f31-e384b45195e4/revidert-171018-nasjonale-retningslinjer-for-grunnskoleutdanning-trinn-5-10_fin.pdf

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. I B. Moses (red), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications (s. 7-13).* National Council of Teachers of Mathematics. https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/nwo/documents/camp/Aug11-2016/conceptionofschoolalgebra_Usiskin.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. November). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/