Universitetet i Agder

Master

Lektorstudenters matematiske argumenter: utfordringer og muligheter

En deskriptiv kasusstudie av hva som kjennetegner en klasse med lektorstudenters matematiske argumenter

DEYHIM MARJAN DALIRI OG JULIE KOGSTAD

VEILEDERE

Jorunn Reinhardtsen
Olav Kristian Gunnarson Dovland

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en fem år lang utdannelse. Arbeidet har vært spennende, krevende og ikke minst frustrerende til tider. I perioder ble hvert steg fremover etterfulgt av to steg bakover. Som erfarne studenter har vi allikevel beholdt roen, og ikke minst troen, gjennom hele prosessen. Våre dyktige veiledere er også mye av grunnen til vår ikke-stressende tilnærming til masteroppgaveskrivingen. Vi har blitt tatt godt hånd om, fått gode tilbakemeldinger, og ikke minst hatt engasjerende samtaler om matematikk, skole og utdanning. Vi håper veilederne kan tilgi oss for at vi i perioder har vært litt vel avslappet, og for at vi har påført dem unødvendig stress. Litt av stresset har kommet godt med, for med en ekstra dytt på slutten, og med en målrettet innsats har vi kommet oss i mål.

Når vi nå ser tilbake på de siste månedene dukker det nesten utelukkende opp gode minner. Parallelt med å legge mye energi inn i arbeidet med å produsere en masteroppgave, har et vennskap fått utvikle seg og blomstre som aldri før. Dagene har vært preget av gode samtaler, humor og tøys, og mye tid sammen, noe vi er svært takknemlige for. Vi er sikre på at mye av grunnen til at masterskrivingen har vært såpass lystbetont, bunner i vårt gode samarbeid, gjensidige respekt og vennskapelige kjærlighet for hverandre.

Med de siste månedenes opplevelser i ryggsekken takker vi for oss, og tar med alle de positive erfaringene videre, og vi er sikre på at vi kommer til å se tilbake på årene som lektorstudenter med et smil om munnen.

Sammendrag

I denne studien undersøker vi en gruppe lektorstudenters skriftlige argumenter, som innebefatter både validering og avvisning av matematiske påstander innen tallteori. Formålet er å finne ut av hva som kjennetegner lektorstudentenes skriftlige argumenter ved å trekke frem utfordringer i deres konstruksjoner, samt å se hvilke muligheter som eksisterer for at studentenes svar kan regnes som bevis.

Deltakerne i studien er 23 studenter ved et universitet i Norge. Studentene tar et emne som blant annet omfavner kjerneelementet *resonnering og argumentasjon*. For å kunne si noe om deres skriftlige argumenter utformet vi et oppgavesett med spørsmål som fokuserer på ulike aspekter ved argumentasjon. Studien er en deskriptiv kasusstudie, der vi ser på hele klassen samlet som en case.

For å analysere studentbesvarelsene fra testen benytter vi oss av et rammeverk basert på Stylianides' (2007b; 2009) kategorisering av argumenter og definisjon av bevis, i kombinasjon med Alcock og Inglis' (2008) kategorisering av ulike former for bevis.

Studien vår viser at lektorstudentene i hovedsak produserer formelle algebraiske argumenter, og lykkes med å produsere bevis i de tilfellene påstandene de skal argumentere for er gitt algebraisk. Vi har også funn som indikerer at studentene som tenderer mot å benytte seg av empiriske argumenter i stor grad lykkes med å produsere motbevis. Studien vår fremhever dessuten at studenter som benytter seg av ulike representasjoner i argumentasjonsprosessen klarer å kommunisere sine mentale bilder av de matematiske objektene.

Abstract

In this study, we investigate a group of pre-service teachers' written arguments, which include both validating and rejecting mathematical claims in number theory. The purpose is to identify what characterizes the students' written arguments by highlighting challenges in their constructions, as well as to see what possibilities exist for considering the students' responses as proofs.

The participants in the study are 23 students at a university in Norway. The students are taking a course that includes the core element *reasoning and argumentation*. To be able to say something about their written arguments, we created a task sheet that focus on different aspects of argumentation. The study is a descriptive case study, where we look at the entire class as a single case.

To analyze the student responses from the test, we use a framework based on Stylianides' (2007b; 2009) categorization of arguments and definition of proof, in combination with Alcock and Inglis' (2008) categorization of different forms of proofs.

Our study shows that pre-service teachers mainly produce formal algebraic arguments and succeed in producing proofs in the cases where the claims they are arguing for are given algebraically. We also have findings that indicate that students who tend to use empirical arguments to a large extent succeed in producing counterexamples. Furthermore, our study highlights that students who use different representations in the argumentation process are able to communicate their mental images of the mathematical objects.

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

Tabelloversikt

1 Innledning

I vår skolegang, spesifikt på ungdomsskolen og den videregående skolen hadde vi overlappende erfaringer med argumentasjon og bevis. Vi opplevde det å lære om bevis utfordrende og ble i første runde introdusert for det gjennom det matematiske domenet geometri. De gangene det ble tatt med i andre deler av faget opplevde vi at bevis måtte pugges, slik at vi kunne gjenskape bevisene på prøver. Lin et al. (2012) påpeker at lærerstyrt tavleundervisning, altså tradisjonell undervisning, kan føre til en idé om at bevis er noe «gitt» og at bevisføring er memorering, noe som vi begge erkjenner var vår opplevelse av bevis i matematikken i skolen.

Argumentasjon og bevis i matematikk har fått økt oppmerksomhet de siste årene, noe Stylianides (2007a) mener bunner i at argumentasjon og bevis er grunnleggende for å gjøre og kunne matematikk og kommunisere matematisk kunnskap. Ross (1998) beskriver bevis som essensen i matematikk, og han hevder videre at matematiske resultater kun blir gyldige etter at de har blitt nøye bevist. Dette støtter opp under oppfordringen om å engasjere elever i «autentisk matematikk», der de får muligheter til å avkrefte og bevise påstander (Lakatos, 1976; Lampert, 1992). Ved et slikt engasjement av elevene vil argumentasjon og bevis kunne bringe elevenes erfaringer med skolematematikk nærmere matematikernes praksis (Ball, 1993; Lampert, 1992).

Schoenfeld (1994) poengterer at bevis har to viktige komponenter, produkt og prosess. Sistnevnte omhandler at produksjon av bevis eller motbevis er utforsking. Ved å utforske finner matematikere ut av hva som gjør at det matematiske objektet faktisk fungerer. Denne utforskingen gjør man for seg selv, for det er slik man kommer til en forståelse av ulike deler av matematikken. Et slikt syn har vært en av grunnpilarene i emnet studien vår utføres i. Foreleserne har hatt fokus på å la studentene utforske matematiske sannheter og verifisere deres korrekthet for seg selv.

Det finnes mye forskning på at elever og studenter i likhet med våre erfaringer opplever argumentasjon og bevis som utfordrende (Farrell, 1987; Senk, 1985), men forskning påpeker også at lærere synes det er utfordrende å undervise om argumentasjon og bevis (Knuth, 2002; Wu, 1996). Vi mener at det å forske på kommende lektorer som er tidlig i sitt studieløp er en fordel av to grunner. For det første er det kort tid siden mange av dem ble uteksaminert fra videregående skole, som vil si at de har nylige personlige erfaringer med bevis i skolen. For det andre skal disse inn i læreryrket innen faget matematikk og dermed undervise elever i denne delen av matematikken. Vår forskning er et forsøk på å gi et innblikk i hvordan lektorstudentene arbeider med argumentasjon og bevis, og ikke minst gi noen ideer og inspirere til hvilke aspekter som kan være hensiktsmessige å ta hensyn til i utdannelsen av lektorstudenter innen matematikk.

Før vi presenterer vårt forskningsspørsmål vil vi kaste lys over nyere forskning som er gjort på lærerstudenter og lærere innen argumentasjon. Ko og Rose (2021) forsket på lærerstudenters evaluering av studentgenererte argumenter, samt lærerstudentenes egne matematiske argumenter. Dette ble gjort i tre ulike domener av matematikk; tallteori, geometri og algebra. Gjennom studien fant de at flertallet av lærerstudentene hadde en tanke om at de ugyldige produksjoner deres ikke kunne kvalifiseres som bevis, og videre at de som var selvsikre på sitt arbeid hadde større sannsynlighet for å bedømme studentargumenter på en korrekt måte. Kempen og Biehler (2019) studerte lærerstudenter i et kurs der de fire bevistypene generisk bevis med tall, generisk bevis med figurtall, generisk bevis med figurtall og bruk av geometriske variabler, og formelle bevis ble benyttet for å engasjere studenter i utforsking, resonnering og bevisføring. Fokuset i studien var på studentenes bevisvalidering og bevisaksept. Et av funnene i studien var at studentene i starten ikke aksepterte generiske bevis som en generell korrekt verifisering, men at deres aksept økte i løpet av kurset. Kim (2022) benyttet seg av en online spørreundersøkelse for å samle inn data fra lærere om hvorvidt de tenkte ulike gitte argumenter ville virke overbevisende på deres studenter. Lærerne virket å bedømme algebraiske argumenter som både minst og mest overbevisende. Det viste seg at det var en signifikant forskjell på overbevisningsgrad gjeldende dem selv, deres studenter og validiteten som matematisk bevis.

Tatt i betraktning den sentrale rollen som bevis har i matematikken og resultatene fra de nyere studiene ovenfor, ser vi det som høyst relevant å forske på lektorstudenters argumenter innen matematikk. Vi ser muligheten ved at gode tilrettelagte kursemner innen argumentasjon og bevis på universitetsnivå kan være med på å utdanne bedre rustede lærere som i større grad er selvsikre på sitt arbeid med argumenter, som har riktig syn på ulike typer bevis og et klarere bilde av overbevisning tilhørende ulike typer bevis.

Lærere kan ansees som et individ med medlemskap i både klasseromsamfunnet og matematikksamfunnet og er på denne måten i stand til å fungere som en bro mellom disse to (Rasmussen et al. 2009; Yackel & Cobb 1996). Hva læreren innehar av kunnskap om og syn på argumenter er med andre ord viktig for hvordan læreren vil undervise temaet og gjøre det tilgjengelig for sine elever. Dette, sammen med våre erfaringer med argumentasjon og bevis, utgjør vår motivasjon for valg av temaet.

Vårt forskningsspørsmål er; *Hva kjennetegner en klasse med første- og andreårs lektorstudenters skriftlige argumenter innen det matematiske kunnskapsområdet tallteori?* Vi fokuserer på studentenes individuelle konstruksjoner med et ønske om å kunne gi innblikk i hva som kjennetegner deres skriftlige argumenter og bevis, hvilke utfordringer som finnes i deres konstruksjoner og hvilke muligheter som eksisterer for fremgang.

Med *skriftlige argumenter* mener vi argumenter som er skrevet for hånd på papir. Dette vil altså innebefatte både symbolske og visuelle argumenter, samt argumenter som er skrevet på tekstformat. For å finne svar på spørsmålet benytter vi oss av en deskriptiv kasusstudie, der målet er å få innsikt i hva som kjennetegner studentenes beviskonstruksjoner, og også komme med forslag til hvordan studentene kan ta et steg i videre i bevisprosessen.

1.1 Tidligere forskning

Før vi går inn på vårt teoretiske rammeverk vil vi presentere tidligere forskning på konstruksjon av bevis. Barkai et al. (2002) studerte 27 barneskolelærere og deres rettferdiggjøring av tallteoretiske påstander. Lærerne argumentere for 6 påstander med en tidsramme på 90 minutter. Funnene i studien var at omtrent halvparten av lærerne benyttet seg av algebraiske verktøy for å bevise eller avvise minst en av påstandene og at et betydelig antall benytter seg av utilstrekkelige metoder for å validere eller avvise påstandene. Halvparten av lærerne lyktes i å produsere formelle algebraiske bevis, mens et mindre antall produserte ikke-formelle bevis som egnet seg for undervisning på barneskolen. Et annet funn var at 20% av lærerne var klar over nødvendigheten for et mer generelt bevis for noen av påstandene, men at de ikke hadde nødvendig kunnskap.

Cusi og Malara (2007) har forsket på 6., 7., og 8. trinns lærerstudenter i Italia og studerte hva deres evner i formell koding og tolkning av algebraiske utrykk har å si for deres bevisproduksjoner, spesielt med tanke på overgangen mellom argumentasjon og bevis. Funnene fra studien tilsier at studentene som mislykkes i bevisproduksjonen har vanskeligheter med å foreta en translasjon fra verbalt til algebraisk språk, noe som forfatterne påpeker er nært forbundet med en klar mangel på kunnskap om elementære numeriske egenskaper. Disse studentene vil enten unngå å benytte seg av et algebraisk språk, eller så vil de benytte seg av det i et forsøk på å produsere et bevis. De som benytter seg av det klarer dog ikke å tolke eller håndtere de formelle utrykkene de formulerer. Studentene som er godt trent i manipulering av algebraiske uttrykk, blir sittende fast dersom de ikke klarer å tolke dem.

Ko og Knuth (2009) har gjennomført en studie der hensikten var å identifisere studenters evner og matematiske forståelse omhandlende produksjon av bevis og motbevis innenfor det matematiske kunnskapsområdet omhandlende kontinuerlige funksjoner. Deltakerne i studien var 36 studenter som tok et emne i avansert kalkulus ved et universitet i Taiwan høsten 2007. Studentene fikk tildelt fem påstander omhandlende kontinuerlige funksjoner, der de på hver påstand skulle bestemme om påstanden var korrekt eller gal. For sanne påstander skulle de gi et bevis, og for usanne påstander skulle de gi et motbevis. Studentene hadde 30 minutter til rådighet til å besvare spørsmålene. Funnene tilsa at flertallet av studentene hadde vanskeligheter med å produsere bevis. I tillegg tilsa funnene at det å produsere moteksempler var litt lettere for studentene enn å produsere bevis.

2 Teoretisk rammeverk

Noe av det som skiller matematikk fra andre fagdisipliner, er eksistensen av bevis. Et bevis avgjør gyldigheten til et utsagn, ved å blant annet å ha en forklarende, verifiserende og kommuniserende effekt (Hana, 2013). Til tross for at det er stor enighet om at bevis har en sentral rolle i matematikken, er det ikke entydig hvordan man skal tolke begrepene *bevis* og *argument*, som er nært beslektede. Før vi gjør rede for disse begrepene, vil vi presentere de tre ulike resonnementsformene deduksjon, abduksjon og induksjon, da disse begrepene kommer til å bli brukt videre i kapitlet. Fra Hana (2013) fremkommer det at *deduksjon* betegner prosessen der man tar utgangspunkt i gitte premisser, for så å trekke slutninger fra disse. Ved *abduksjon* skjer resonneringen i motsatt retning som ved deduksjon. Man tar altså utgangspunkt i en konklusjon, og prøver ut ifra denne å finne premissene som fører frem til denne konklusjonen. Den siste typen er *induksjon,* som vil si å resonnere fra gitte premisser til en konklusjon, på lik linje som ved deduksjon. Forskjellen er at ved induksjon kommer konklusjonen ikke fra logiske slutninger, men fra en gjetning basert på premissene. Vi vil videre se at deduksjon er tett knyttet sammen med begrepet *bevis*, mens abduksjon og induksjon betegner andre former for argumenter.

I et forsøk på å definere *argumenter* og *bevis* finnes det fordeler ved å anse dem som kontinuitet, snarere enn et brudd. Eksempelvis er abduksjon en vanlig struktur på et matematisk argument. Om en student ikke er i stand til å gjøre transformasjonen fra et abduktivt argument til et deduktivt argument, vil argumentet forbli et argument. Men, dersom studenten lykkes i transformasjonen, kan sluttresultatet av argumentasjonen bli et bevis. Denne kontinuiteten mellom argumentene og det endelige beviset blir ofte referert til som *cognitive unity* (Mariotti, 2006). Med dette perspektivet blir fokuset endret fra å omhandle distinksjonene mellom de to begrepene, til å omhandle analogiene mellom disse, for å muliggjøre og støtte en utvikling fra et argument til et bevis.

En årsak til at vi velger å betrakte argumenter og bevis som en kontinuitet, er at det er dette perspektivet som er benyttet i emnet vi har utført studien i. Rammeverket som er benyttet i emnet vi utfører studien i, inntar et kognitivt læringsperspektiv. Vi har derfor valgt å benytte oss av samme læringsteori, da dette er grunnlaget deltakerne i denne studien har blitt undervist i henhold til. Et kognitivt læringssyn ser på de indre kognitive prosesser, det vil si menneskets tankevirksomhet, som utgangspunkt for å forstå læring. Kunnskap kan ikke overføres mellom individer, men må konstrueres individuelt. Hovedideen går ut på at vi forstår alt nytt vi står overfor, ut ifra det vi allerede kan. Dette kan skje ved at ny kunnskap passer inn med den eksisterende kunnskapen, eller ved at den nye kunnskapen stiller krav til en omstrukturering av den eksisterende kunnskapen (Skott et. al, 2018).

Ved å ta disse aspektene ved argumentasjon og bevis i betraktning, velger vi å støtte oss på definisjoner som emnet har benyttet seg av, sammen med Stylianides' (2007b) definisjon og karakterisering av bevis. Vi vil rette oppmerksomhet mot at Stylianides (2007b) har inntatt et fokus på klasseromsmiljøet i et forsøk på å definere begrepet bevis, men vi ser det allikevel passende å benytte oss av denne definisjonen da forfatterens definisjon også kan benyttes på individnivå og gir en god beskrivelse av begrepet bevis og dets komponenter. For å tydeliggjøre dette, bytter vi ut "klasseromsmiljøet" med "matematikken". På denne måten må kunnskap studentene utviser i argumentene sine være tilgjengelig for studenten selv og akseptert i matematikken.

"Et bevis er et matematisk argument som består av en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand" (Stylianides, 2007b, s. 291, egen oversettelse). Det vil altså si at et bevis krever en deduktiv struktur, noe som er i samsvar med det som har blitt undervist i emnet. Stylianides (2007b) stiller tre krav til at et argument skal kunne regnes som et bevis. Det første kravet er at det består av tilgjengelige påstander som er akseptert av matematikken, hvor påstandenes korrekthet ikke trenger noen ytterligere begrunnelser. Eksempler på dette er aksiomer, definisjoner og teoremer. Det andre kravet er at det bruker argumentasjonsmåter som er gyldige eller kjent for matematikken. Stylianides (2007b) nevner blant annet argumentasjonstyper som de logiske slutningsreglene modus tollens og modus ponens, bruk av definisjoner til å utlede generelle påstander og konstruksjon av motbevis. Disse argumentasjonsmåtene er også presentert i kapittel 9 i *AHA Matematikk og matematikkdidaktikk* (Nygaard et al., 1999) som var pensum i emnet. Tredje og siste krav er at det blir benyttet representasjonsformer som er passende og kjent i matematikken. I denne studien tar vi hensyn til representasjonsformer som er fremtredende i skriftlig arbeid. Dette er symbolske, visuelle og narrative representasjonsformer. Ut ifra denne definisjonen, vil argumenter som oppfyller disse tre kravene kunne kategoriseres som bevis.

Stylianides og Stylianides (2009) klassifiserer argumenter som ikke er bevis i følgende kategorier; *gyldig argument som ikke er bevis, ugyldig eller uferdig generelt argument, empirisk argument* og *ikke-genuint argument.* De argumentene som ikke er bevis, men som er mest nærliggende til bevis, er gyldig argument som ikke er et bevis. Stylianides og Stylianides (2009) forklarer at alle bevis er gyldige argumenter, men at et gyldig argument ikke nødvendigvis er et bevis. Et ugyldig argument brukes om argumenter som inneholder logiske brister. Et uferdig argument er et argument som mangler ett eller flere steg i den deduktive rekken med påstander. Et empirisk argument er et ugyldig argument som ikke gir avgjørende evidens for en påstands sannhet. Dette skjer ved at påstandens gyldighet blir bekreftet for kun en delmengde av mengden som påstanden skal gjelde for. Et ikke-genuint argument er et argument der responsen viser minimalt engasjement, er irrelevant, eller der responsen muligens var relevant, men at dette ikke er vist tydelig.

Når studenter blir bedt om å produsere et bevis for en påstand, er målet å produsere et logisk, gyldig argument, som konkluderer med det som skal bevises. Måten dette gjennomføres på kan være svært ulik (Weber & Alcock, 2004). For å skille mellom to ulike måter å konstruere argumenter på, benytter Weber og Alcock (2004) begrepene *syntaktisk* og *semantisk*. Med denne måten å kategorisere argumenter på, betrakter vi om, og hvordan studentene tar i bruk ulike representasjoner i argumentasjonsprosessen.

Syntaktisk brukes om manipulering av symboler, logiske slutninger og standard bevismetoder som metode for å bevise en påstand. I konstruksjonen av et syntaktisk bevis vil den som skal bevise ikke ta i bruk ikke-formelle representasjoner av matematiske konsepter, som for eksempel diagrammer, figurer og eksempler (Weber & Alcock 2004; Alcock & Inglis, 2008).

Semantisk brukes om introduksjonen av nye representasjonssystemer i et argument, det vil si å ta steget utenfor bevisets representasjonssystem. Weber og Alcock (2004) poengterer at for at et bevis skal regnes som semantisk, må representasjonsbyttet som blir foretatt ha en intern mening for den som produserer beviset. Nøyaktig hva denne interne meningen består i kan være vanskelig å identifisere i rent skriftlige argumenter. Denne utfordringen ved definisjonen av begrepet *semantisk* kan løses ved å betrakte all resonnering der det blir foretatt et representasjonsbytte som semantisk, da et representasjonsbytte er gjort med en hensikt (Sandefur et al., 2013). Konsekvensen av våre definisjoner av begrepene *syntaktisk* og *semantisk* er at et rent algebraisk bevis kan klassifiseres som syntaktisk, mens et bevis der det er tatt i bruk eksempler, tabeller eller visuelle representasjoner regnes som semantiske.

Alcock og Inglis (2008) benytter begrepene semantisk og syntaktisk til å kategorisere tre ulike måter å føre bevis på med hensyn til resonnering underveis i argumentet og det endelige produktet, altså beviset. Den første typen er den syntaktiske/syntaktiske, som vil si at både resonneringen og produktet er syntaktisk. Dette er bevis der man holder seg innenfor det bevisets representasjonssystem gjennom hele beviset, og består av deduktiv manipulering av symboler eller definisjoner. Dette kan, om de matematiske idéene som er tatt i bruk, og den symbolske manipulasjon er utført korrekt, føre til bevis. En utfordring med syntaktisk/syntaktiske bevis, er at de ofte ikke gir noen informasjon om den symbolske manipulasjonen innebefatter dyp mening for den som konstruerer beviset, eller om beviset oppstår som et resultat av kun formelle handlinger uten matematisk mening. En annen utfordring er at denne typen bevis stiller høye krav til bevisføreren med tanke på det å kunne sitere definisjoner riktig, minnes viktige fakta og teoremer, samt utlede gyldige slutninger fra konseptets definisjoner og assosierte fakta. Altså er den tekniske håndteringen, det vil si bevisførerens ferdigheter med tanke på kommunikasjon av en matematisk idé på en logisk og akseptert måte, identifiserbar (Sandefur et al., 2013). Den begrepsmessige innsikten derimot, det vil si den interne forståelse av den matematiske påstanden som skal bevises (Sandefur et al., 2013), kan det være vanskelig å si noe om.

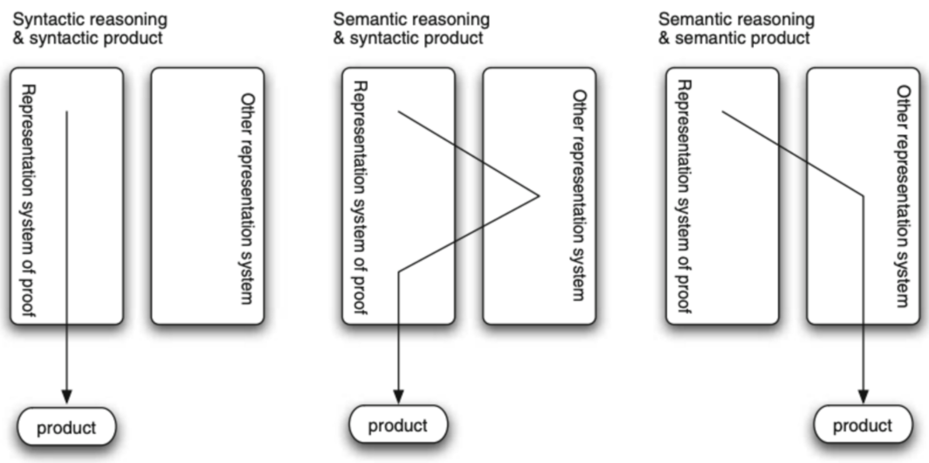
Den andre typen av bevis er semantisk/syntaktiske, som vil si at resonneringen er semantisk, og produktet er syntaktisk. Dette er altså bevis der deler av beviskonstruksjonen foregår i et annet representasjonssystem enn det endelige, altså bevisets representasjonssystem. Dette trenger ikke å bety at de andre representasjonsformene er synlige i sluttproduktet, ofte kan de bli brukt kun som et verktøy underveis i resonneringen. En semantisk resonnering krever at det underveis i resonneringen skiftes representasjonssystem, og at de matematiske objektene i det nye representasjonssystemet har de egenskapene det er meningen at de skal inneha. Dersom bevisføreren velger hensiktsmessige representasjoner, kan et slikt representasjonsbytte indikere engasjement med mening, og på den måten gi muligheter for at bevisføreren får en begrepsmessig innsikt (Sandefur et al., 2013).

Et slikt representasjonsbytte kan for eksempel bestå i å ta i bruk eksempler. Eksempler som argument for at en matematisk sammenheng er sann, klassifiseres som ugyldige argumenter, da eksempler ikke er representative for alle mulige tilfeller av en påstand. Bruk av eksempler trenger ikke nødvendigvis konstituerer en oppfatning om at eksempler er tilstrekkelige for å bevise gyldigheten til en påstand (Sandefur et al., 2013). Sandefur et al. (2013) peker på at målet med å bruke eksempler ikke først og fremst er for å samle empirisk data, til tross for at det kan være nyttig og nødvendig, men heller for å se det generelle gjennom det spesielle, gjennom å benytte et generisk eksempel. Studier av Watson og Chick (2011) og Alcock og Inglis (2008) poengterer nytten av å bruke eksempler, og antyder at det å generere eksempler kan være fordelaktig hvis den som løser problemet selv konstruerer og bruker eksempler som ett av flere verktøy til å bevise en påstand. Mason (1980) nevner også nyttigheten av å se til eksempler for å prøve å forstå et spørsmål. Når en påstand er formulert, bør den sjekkes opp mot noen eksempler, for å prøve å finne ut hvordan et argument kan se ut. Man bør prøve noen stygge eksempler, i søken etter eksempler som kan motbevise en påstand (Mason, 1980). Bruk av eksempler som argument for at en matematisk sammenheng er usann, klassifiseres som gyldige argumenter så fremt eksemplene er gyldige moteksempler. Det fremkommer fra Stylianides og Al-Murani (2010) at noen studenter har en tanke om at moteksempler ikke kan avvise påstander. For dem eksisterer moteksemplene ofte som unntak til påstanden som skal motbevises.

For å lykkes med et semantisk/syntaktisk bevis kreves det at den oppnådde begrepsmessige innsikten oversettes tilbake til bevisets representasjonssystem, for at det endelige produktet skal være syntaktisk. Dette stiller krav til bevisførerens tekniske håndtering, for at den matematiske sammenhengen som skal bevises blir presentert på en deduktiv og korrekt måte. Altså er både en begrepsmessig innsikt og en teknisk håndtering nødvendig for å lykkes med å konstruere et bevis på semantisk/syntaktisk form.

Den siste formen for bevis er de som er semantisk/semantiske, som vil si at både resonneringen og produktet er semantisk. Prosessen med å validere en påstand er ofte en aksjon mellom forsøk på å produsere argumenter som bekrefter påstanden og oppdagelser av moteksempler som avkrefter den (Stylianides & Al-Murani, 2010). Motbevis er den eneste formen for bevis som havner innenfor den semantisk/semantiske kategorien. De skiller seg fra semantisk/syntaktiske bevis ved at det ved konstruksjon av motbevis ikke er nødvendig å skifte representasjonssystem tilbake til bevisrepresentasjonssystemet. Et empirisk argument vil med andre ord kategoriseres som et bevis. Motbevis står altså i kontrast til de to andre typene bevis vi har presentert, som regnes som syntaktiske produkter.

Andre typer semantiske produkter er generiske eksempler, og eksempler gitt i en pedagogisk kontekst for å forstå et bevis. Dette er altså ikke fullverdige bevis, men har allikevel en viktig rolle når det kommer til forståelse av matematiske konsepter.



Figur 1. De tre ulike formene for bevis (Alcock & Inglis, 2008, s. 118).

3 Metode

I dette kapittelet kommer vi til å gjøre rede for våre metodiske valg knyttet til denne oppgaven og hvilke innvirkninger valgene vil ha på forskningen. Vi vil så godt det lar seg gjøre, prøve å rettferdiggjøre valgene som er tatt underveis, men allikevel innta et kritisk perspektiv og også diskutere negative innvirkninger valgene kan ha hatt.

Videre vil det redegjøres for det overordnede i forskningen. Forskningsdesign, datainnsamling og bearbeiding av data vil bli presentert før vi går inn på forskningens etikk, og studiens troverdighet.

3.1 En kvalitativ studie

Oppgaven vår omhandler lektorstudenters skriftlige konstruksjoner av bevis. Forskningsspørsmålet er; *Hva kjennetegner første- og andreårs lektorstudenters skriftlige argumenter innen det matematiske kunnskapsområdet tallteori?* For å finne svar på spørsmålet har vi gjennomført en deskriptiv kasusstudie, der målet er å få innsikt i hva som kjennetegner studentenes beviskonstruksjoner, og også komme med forslag til hvordan studentene kan ta et steg i videre i bevisprosessen.

Hvordan man kan tilegne seg kunnskap inngår i begrepet *epistemologi,* og dette finnes det ulike syn på. Hvilket syn man har på dette, vil påvirke hvilket paradigme forskningen gjennomføres i. Vi skiller hovedsakelig mellom to overordnede paradigmer, nemlig positivisme og interpretivisme. Førstnevnte anser kunnskap som noe som utelukkende bygger på det som kan observeres gjennom sansene. Bryman (2012) påpeker at den observerbare verden skiller seg fra den sosiale, og at det derfor kreves et annet paradigme når det forskes på mennesker og deres oppførsel. Interpretivismen står i kontrast til positivismen, ved at den tar høyde for at kunnskap også kan identifiseres blant det som ikke uttrykkes eksplisitt. På den måten muliggjør et interpretivistisk forskningsparadigme å gå i dybden på dataen, som er grunnen til at det er dette forskningsparadigmet vår forskning befinner seg under.

Da vi kommer til å studere både studentenes argumenter, og hva som ligger til grunne for dem, kommer vi til å benytte oss av et kvalitativt forskningsdesign. Bjørndal (2017) påpeker at et kvalitativt forskningsdesign kan legge til rette for en dypere forståelse av det som studeres, med et utvalg bestående av et fåtall med mennesker. Med et kvalitativt design har man også større muligheter til å dykke dypere i det særegne som skiller seg ut, og ikke kun fokusere på det gjennomsnittlige og representative.

I vår kasusstudie ser vi på en hel klasse som en case. Deltakerne i studien er studenter som tar et emne, som blant annet tar for seg kjerneelementet *resonnering og argumentasjon,* som en samlet gruppe og case. Vi har tatt et bevisst valg om å se på klassen som en case, og ikke hver enkeltstudent for seg selv, da vi ønsker å se hva som kjennetegner argumentasjonen til klassen som en helhet, hva som går igjen, og hva som skiller seg ut. Altså ser vi både på det representative og særegne, som Bjørndal (2017) som nevnt påpeker som typisk for kvalitativt forskningsdesign.

En fordel med at studien er en kvalitativ studie, er at den åpner opp for en helhetsforståelse av sammenhenger. Kvalitative design er mer ustrukturerte enn kvantitative (Bjørndal, 2017), noe som har gitt oss muligheter for å endre opplegget etter hvert som vi har oppnådd bredere innsikt. Dette opplevde vi som svært fordelaktig, da informasjonen vi fikk gjennom dataene våre gjorde det mulig å fokusere forskningsspørsmålet inn mot den informasjonen vi hadde tilgjengelig.

3.2 Bakgrunn for studien

I dette delkapittelet kommer vi til å presentere konteksten for studien. Vi vil altså si noe om hvem deltakerne i studien er og hvorfor nettopp disse er interessante å studere. I tillegg kommer vi til å beskrive relevant informasjon om emnet studien ble gjennomført i.

3.2.1 Deltakere

Deltakerne i denne studien er studenter som tar et bestemt emne i matematikk ved et universitet i Norge. Etter at Fagfornyelsen trådte i kraft i 2020, introduserte universitetet to nye emner i studieplanen tilhørende det første året med matematikk på lektorstudiet, som går på henholdsvis høsten og våren. Begge disse emnene tar for seg kjerneelementene i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Høsten 2022 og våren 2023 er første gang disse emnene ble undervist.

Vi vil påpeke at studien vår er en del av et doktorgradsprosjekt som tar for seg argumentasjon hos lektorstudenter, med studentene i nevnt emne som deltakere av forskningen. Dermed har vi ikke selv valgt deltakere, men har i stedet de samme deltakerne som nevnte doktorgradsprosjekt.

Lektorstudiet ved dette universitetet er bygget opp slik at man de to første årene på studiet tar årsstudium i to ulike undervisningsfag, før man i tredje klasse fordyper seg i masterfaget sitt. Det vil si at lektorstudentene i emnet er på sitt første år med matematikk, enten på første eller andre år på lektorstudiet. Antallet studenter som tar emnet er totalt 23. Majoriteten av disse studentene er lektorstudenter, men det er også studenter som tar emnet som en del av et årsstudium i matematikk eller som enkeltemne. Dette gjelder henholdsvis et fåtall av studentene i emnet. Vi velger å inkludere alle studentenes besvarelser. Vi mener at besvarelsene, uansett hvilke studenter de tilhører, vil være med på å danne et øyeblikksbilde av kjennetegn ved lektorstudenters argumentasjon. Det eneste som skiller studentgruppene er hva de kommer til å studere videre i løpet sitt.

3.2.2 Om emnene

Emnene har en struktur der to doble økter i uka er satt av til seminartimer, som består av forelesning og klasseromsdiskusjon. I tillegg er det satt av én dobbel økt i uka til gruppearbeid, der studentene i grupper jobber med å løse oppgaver knyttet til ukas tema.

Emnet som går på høstsemesteret er forbeholdt kjerneelementene *utforsking og problemløsning*, *representasjon og kommunikasjon*, og *abstraksjon og generalisering*. Emnet er sentrert rundt problemløsningsarbeid, noe som har omfattet arbeid med alle tre kjerneelementene. Pensumboka som ble benyttet var *Å lære algebraisk tenkning* (Mason et al., 2014). Denne boka presenterer tidlig det som er generelt for mønster og sammenhenger. Skyer blir introdusert som et alternativ til variabler. Den viktigste ideen er at om vi har et system med variabler og konstante størrelser, så finnes det en mulighet for at vi kan utrykke en generell sammenheng. Dette gjøres da ved hjelp av skyer i starten av boken.

Kjerneelementene som er forbeholdt emnet på våren er *resonnering og argumentasjon*, og *modellering og anvendelser*. Da vi gjennomførte datainnsamlingen, hadde undervisningen i kjerneelementet resonnering og argumentasjon foregått i noen få uker. I første uke fikk studentene i arbeid å jobbe med et oppgavesett tilhørende tallteori, mengdelære og undersøkelser av påstanders gyldighet innen tallteori. I uka etter var temaene matematikkens oppbygning, begrepsinnhold og begrepsutrykk og hvilke krav vi stiller til definisjoner. I denne uka ble modulo-begrepet innført, samt logikk og klassifisering av symboler. Tredje og siste uke før vår datainnsamling var temaet tall og ordning, det gyldige argument og ulike former å føre bevis på.

3.3 Metode for datainnsamling

Data ble samlet inn gjennom to runder. Først skulle studentene løse et skriftlig oppgavesett individuelt, noe som ble gjort i uke fire av emnet. Å delta på denne datainnsamlingen var et krav for at studentene skulle få tilgang til å gå opp til eksamen. Alle studentene i emnet deltok dermed på den skriftlige datainnsamlingen. To uker gjennomførte vi semistrukturerte gruppeintervjuer, der studentene skulle diskutere styrker og svakheter til fiktive studentsvar på de skriftlige oppgavene de hadde arbeidet med tidligere. Vi ba dem også om å rangere de fiktive studentsvarene etter hvor gode gruppa syntes de var.

Grunnen til at vi benyttet oss av en individuell skriftlig test var for det første at denne testen allerede var en del av emnets oppbygning og en planlagt datainnsamling fra doktorgradsstipendiatens side. Vi innrettet oss etter denne planen da vi så fordelene ved en slik datainnsamling, sammenliknet med andre typer datainnsamling. Med utgangspunkt i deltakerne og emnets løp, tror vi at en slik datainnsamling for det første gjorde at flere studenter samtykket til deltakelse. Dette grunnet at testen var satt til emnets timeplanfestede timer og dessuten var en av de obligatoriske kravene for å kunne gå opp til eksamen. Hadde vi valgt individuelle intervjuer kunne dette ha medført færre deltakere da de måtte ha tatt ut tid fra sin uke til å stille opp på disse, og det ville med stor sannsynlighet heller ikke gitt et helhetlig bilde av klassens konstruksjon av argumenter. Hadde vi valgt en slik metode for datainnsamling ville da også fokuset mest sannsynlig skiftet til et mer dybdeblikk på studentene som enkeltcaser. Da vi har arbeidet som assistenter i emnet og at det er første gjennomføring av emnene dette skoleåret, så vi også muligheten til å kunne bidra med forskning som kunne benyttes inn mot gjennomføring av emnet neste skoleår. Ved bruk av gruppeintervjuer som datainnsamling tror vi at dette på samme måte ikke ville vervet så mange samtykkende deltakere som testen gjorde. Dessuten kunne dette ha medført at sterke eller svake studenter kunne ha opptrådt som de mest vokale og dermed igjen svekke det helhetlige bilde av hele klassens måter å argumentere på.

I tillegg til en individuell matematisk test, benyttet vi oss av semistrukturerte gruppeintervjuer. Disse ble gjennomført uka etter datainnsamlingen med den individuelle skriftlige testen. Intervjuene hadde som formål å samle inn data omhandlende studentenes oppfatninger om rollen til matematiske argumenter og bevis, samt studentenes vektlegging og preferanser når det kommer til hva som gjør et argument sterkt, og hva som gjør et argument svakt. Tanken med denne innsamlingen var at dette ville gi oss muligheter til å supplere med hvilke tanker studentene har om argumentasjon og nødvendigheten av argumentasjon i matematikken. I tillegg så vi muligheter for å identifisere eventuelle overlappinger mellom utfordringene i deres skriftlige argumenter og deres forståelse og evalueringer av skriftlige argumenter. Da vi valgte å ikke bruke dataen fra gruppeintervjuene til å besvare forskningsspørsmålet vårt, kommer vi ikke til å gå dypere inn på hvordan vi designet og gjennomførte disse intervjuene.

Begrunnelsen for at vi ikke tok med data fra gruppeintervjuene bunner i at studentenes kommentarer og diskusjoner rundt de fiktive studentsvarene ikke ga sterkt grunnlag for å kunne si noe om synspunkter angående egenskaper ved sterke og svake argumenter og bevisets rolle i matematikken. Eksempler som oppsummerer intervjuene godt er at studentene kunne komme med påstander som "den var lite generell", eller "her mangler det litt" uten å begrunne hvorfor de mente dette, og hva som eventuelt manglet. Siden en veldig smal del av intervjuene kunne være brukbare ville disse heller ikke gi et helhetlig bilde av klassen.

I de neste delkapitlene redegjøres det for hvordan oppgavesettet ble utformet, samt gjennomføringen av datainnsamlingen. Vi vil avslutningsvis kommentere pilotering av oppgavesettet.

3.3.1 Utforming av oppgavesettet

For å få muligheten til å få innsikt i studentenes konstruksjon av argumenter og bevis, ønsket vi at alle studentene skulle få mulighet til å arbeide med dette individuelt. Når studentene er ferdig utdannet, står de som oftest alene som lærer i et klasserom. Derfor er det interessant for oss å få innsikt i de enkelte studentenes måter å argumentere matematisk på.

For å samle inn den kvalitative dataen, designet vi et oppgavesett, og arbeidet med utformingen startet på slutten av høstsemesteret 2022. Oppgavesettets struktur er i stor grad inspirert og basert på Healy og Hoyles (2000), som studerte 14- og 15-åringers oppfatninger om bevis i algebra. Forfatterne utviklet et oppgavesett bestående av tre ulike type oppgaver som hadde som formål å få frem elevenes syn på bevis fra ulike vinkler. Den ene oppgavetypen krevde at studentene skulle gi skriftlige beskrivelser om bevis og hva som var deres hensikt. Den andre typen med oppgaver gikk ut på at elevene fikk presentert matematiske påstander og argumenter som støttet dem, og de skulle velge ut det argumentet som liknet mest på det de selv ville ha svart på oppgaven, og det argumentet de trodde ville få best karakter fra læreren deres. Den tredje og siste oppgavetypen var utformet slik at elevene fikk presentert to påstander, der den første var antatt bevist. Elevene skulle så svare på om den andre påstanden allerede var bevist i kraft av at den første påstanden var bevist, eller om de måtte konstruere et nytt bevis.

I vårt oppgavesett inkluderte vi de to sistnevnte typene av oppgaver. Vi inkluderte også en oppgave som var en variasjon av type nummer to, ved at studentene fikk presentert en oppgave og et tilhørende elevsvar, der de skulle svare på om henholdsvis en medstudent og professoren ville akseptert dette svaret. I tillegg til de tre nevnte oppgavetypene, inkluderte Healy og Hoyles (2000) også mer åpne oppgaver i oppgavesettet. Dette var oppgaver der elevene selv skulle konstruere bevis. I oppgavesettet vi utarbeidet var de fleste av oppgavene av denne typen. På oppgavene der studentene selv skulle konstruere bevis er noen av oppgavene direkte knyttet til pensum studentene har hatt i forkant av datainnsamlingen. I tillegg til dette var oppgavene utarbeidet slik at innholdet og begrepene var noe studentene har vært eksponert for både i deres tidligere skolegang og også det siste halvåret. På denne måten stilte oppgavene krav til matematisk kunnskap som er innenfor studentenes rekkevidde. Vi etterspør argumenter i oppgavene, men det er underforstått at målet er at sluttproduktet skal ende opp som gyldige argumenter som har en deduktiv struktur, altså det vi har definert som bevis.

Prosessen med å designe oppgavesettet har vært omfattende og intens. Det første utkastet til oppgavesettet ble utarbeidet av oss, forfatterne av denne oppgaven, sammen med doktorgradsstipendiaten, med innspill fra våre veiledere om hvilke typer oppgaver som ville være hensiktsmessige å ha med. Deretter reviderte vi oppgavesettet sammen med veilederne våre. En ny revidering ble så gjort sammen med både veilederne, doktorgradsstipendiaten og en professor ved universitetet med argumentasjon og bevis i matematikk som sitt spesialområde. Vi gikk gjennom alle oppgavene nøye, og endret formuleringer for å i størst mulig grad unngå tvetydighet, og legge til rette for rike svar med god mulighet for å benytte seg av ulike løsningsmetoder. Vi tilpasset også rekkefølgen på oppgavene, slik at oppgavene vi regnet med ville gi den rikeste dataen kom tidligst i oppgavesettet. I tillegg passet vi på at oppgaver tilhørende de tre ulike oppgavetypene vi har nevnt var godt blandet i oppgavesettet. Antall oppgaver ble valgt på bakgrunn av tiden studentene hadde til rådighet til å jobbe med oppgavesettet, og vi regnet med at de færreste ville bli ferdige med alle oppgavene. Ved å blande oppgavetypene la vi til rette for at dersom studentene gjorde oppgavene i kronologisk rekkefølge og kun rakk å gjøre et fåtall oppgaver, ville de allikevel rekke å komme innom minst én oppgave av alle oppgavetypene.

Oppgavesettet var utformet slik at første side inneholdt instrukser for testen. Hver oppgave var plassert på en side for seg selv, slik at studentene kunne skrive svarene sine rett på oppgavesettet. De hadde også kladdeark som de kunne benytte seg av. Om studentene så det nødvendig kunne de sette en strek over det de ikke ville ha med i løsningen, da vi ønsket at alt som ble skrevet ned skulle være lesbart.

3.3.2 Gjennomføring av datainnsamling

Økta med å svare på oppgavesettet ble gjennomført i slutten av januar 2023. Det var obligatorisk for alle studentene i emnet å besvare oppgavesettet, i tillegg til at det var krav om at de måtte arbeide med oppgavene i minst 90 av 105 minutter. Det var ikke stilt krav til hvor mange oppgaver som skulle besvares, kun at de skulle svare så godt de kunne. Vi begge, samt faglærer, var til stede under testen for å svare på spørsmål og uklarheter.

Under gjennomføringen var det noen spørsmål som gikk igjen, som vi noterte oss underveis. Dette gjorde vi av den grunn at disse studentspørsmålene kunne være nyttig i gjennomgang av dataen i etterkant som en plausibel forklaring på eventuelle studentargumenter. Noterte spørsmål var rettet mot oppgavene vi valgte å ikke bruke i vår studie. Derfor anser vi det heller ikke nødvendig å gå dypere inn på disse spørsmålene, da de ikke har noen innvirkning i form av forklaringskraft på dataene våre.

3.3.3 Pilotering

Emnene ble undervist for første gang i skoleåret 22/23. Ved å pilotere oppgaven på andre studenter, eksempelvis studenter på det samme studiet men på andre årstrinn, ville muligens resultatene blitt noe annerledes, da de ikke har hatt de samme emnene på sitt første år med matematikk. Det kunne dog vært nyttig å pilotere oppgavesettet på en annen studentgruppe, med den hensikt å oppdage feil i oppgaveteksten, samt om det var utydelige instruksjoner som resulterte i at studentene mistolket oppgaven, og svarte på noe annet enn det vi ønsket.

Vi vil allikevel påpeke at oppgavesettet ble utformet i flere runder av oss, doktorgradsstipendiaten og tre professorer ved universitetet, noe som til en viss grad kan rettferdiggjøre mangelen på pilotering. Siden vi ikke gjennomførte noen pilotering, var det spesielt viktig å ha flere oppgaver av ulike typer, i tilfelle det i ettertid viste seg at noen av oppgavene ikke ga tilstrekkelig med data til å kunne bidra med å svare på forskningsspørsmålet vårt. Som nevnt i delkapittel 3.3.1 var designet av oppgavene en svært nøye og pertentlig prosess.

3.4 Bearbeiding av data

I dette delkapittelet kommer vi først til å beskrive hvordan vi reduserte datamaterialet vårt, og bestemte oss for hva som skulle være med i den endelige analysen. Vi kommer deretter til å presentere oppgavene som utgjør grunnlaget for denne studien, samt komme med noen kommentarer til hver av oppgavene. Til slutt vil vi beskrive hvilken metode vi benyttet oss av for å analysere datamaterialet vårt.

3.4.1 Reduksjon av data

Da oppgavesettet ble utformet, ønsket vi å fange opp ulike aspekter ved argumentasjon og bevis. Derfor var det stor variasjon i oppgavenes karakter, og hva de spurte etter. Etter at fokuset ble snevret inn til å omhandle konstruksjon av skriftlige argumenter og bevis, ønsket vi å ha med de oppgavene som spurte etter studentproduserte argumenter, som sier noe om sammenhengen mellom utvalgte algebraiske størrelser. På bakgrunn av dette eliminerte vi oppgavene som gikk ut på at studentene skulle validere andres argumenter, da disse typen av oppgaver har et fokus på studentenes oppfatning av bevis.

For å gi et helhetlig bilde av klassens matematiske argumenter, var det viktig for oss å ta med oppgaver som de fleste studentene hadde svart på. Av den grunnen valgte vi å ikke ta med de siste oppgavene på oppgavesettet, da de fleste hadde arbeidet seg kronologisk gjennom oppgavesettet, og ikke hadde svart på de siste oppgavene. Oppgave 5 (se vedlegg 2) besluttet vi å ikke ta med, selv om spørsmålet i oppgaven var stilt på en måte som la til rette for deduktiv argumentasjon. Dette valget tok vi da det var mange studenter som ikke hadde besvart oppgaven. I tillegg var oppgaven noe svakt formulert, som gjorde at mange av argumentene studentene produserte ikke var svar på oppgaven slik den var tenkt da vi lagde den. Alt dette tatt i betraktning ender vi da opp med oppgave 1, 2 og 6, som presenteres nærmere i neste delkapittel.

3.4.2 Oppgavene

Oppgave 1

Tim påstår at 2(x+1) = 2x+1 og Charlie påstår at 2(x+1) = 2x+2.

a) Hvilken student har rett?

b) Gi to matematiske argumenter (for eksempel symbolsk, diagrammatisk, osv.) for å forklare hvorfor studenten du valgte i forrige oppgave har rett.

c) Gi et matematisk argument som forklarer hvorfor den andre studentens svar er galt.

Figur 2. Oppgave 1 fra oppgavesettet.

Denne oppgaven er inspirert av oppgave 7.1.3 fra Mason et al. (2014, s.167). Boka oppgaven er hentet fra var pensum for studentene i emnet som gikk høsten 2022, og oppgave 7.1.3 har også vært en del av oppgavene studentene har jobbet med tidligere. Oppgaven spør originalt etter hvilke verdier for x de to påstandene holder for, mens vi har endret spørsmålet til å spørre etter argumenter. I denne oppgaven skal elevene argumentere for hvordan den distributive lov fungerer, uten at det er påpekt eksplisitt at det er denne loven de skal bevise. Vi valgte å inkludere oppgaven i oppgavesettet da studentene er godt kjent med matematikken som blir presentert, i tillegg til at de har jobbet med påstandene i oppgaven tidligere. Dette minker sannsynligheten for at elevene produserer argumenter som er basert på feil konklusjon. Alle studentene har svart at Charlie har rett på oppgave a). Siden vi ikke etterspør noe argument på oppgave a), i tillegg til at alle studentene har svart riktig på denne oppgaven, inkluderer vi den ikke i vår dataanalyse. En annen grunn til at vi inkluderer oppgave 1 i analysen er at den distributive lov en matematisk lov som mange er vant med å bruke som en sannhet, uten at de nødvendigvis har vist at loven må stemme. Fokuset i denne oppgaven er dermed utelukkende på det matematiske argumentet for påstanden, og ikke for om påstanden stemmer eller ikke.

Av den innsamlede dataen kom det frem at studentene fokuserte kun på matematiske argumenter som validerte påstandenes korrekthet. Selv om vår tanke var å få tak i studentenes argumenter for den distributive lovens gyldighet, har studentene gitt argumenter for om påstanden stemmer eller ikke. Dette ser vi i ettertid at vi burde ha nevnt eksplisitt, eller i større grad gjort denne hensikten med oppgaven tilgjengelig. Ved å argumentere for påstandenes gyldighet gjør heller ikke studentene noe feil, da det er dette oppgaven etterspør. Med dette som bakgrunn har vi i analysen valgt å ha fokus på det oppgaven faktisk etterspør og slik studentene har tolket den.

Oppgave 2

Følgende er en sekvens av aritmetiske påstander:

$(3+2)\cdot(3-2) = 3^2-4$

$(4+2)\cdot(4-2) = 4^2-4$

$(5+2)\cdot(5-2) = 5^2-4$

(6...

a) Gi et generelt matematisk uttrykk for denne sekvensen.

b) Forklar hvordan du kom frem til uttrykket i spørsmål a ved å gi to ulike argumenter (for eksempel symbolsk, diagrammatisk, osv).

Figur 3. Oppgave 2 fra oppgavesettet.

Denne oppgaven er også inspirert av studentenes tidligere pensumbok. Oppgaven tar utgangspunkt i den samme sekvensen med aritmetiske påstander som vi finner i oppgave 1.1.3a (Mason et al., 2014, s.18). Denne oppgaven har ikke vært pensum for studentene tidligere. Vi har modifisert oppgaven ved at vi spør etter et generelt matematisk uttrykk, og en forklaring på hvordan studenten kom frem til dette uttrykket, i motsetningen til slik oppgaven originalt er formulert i boka, der det spørres etter hva neste steg blir, og om studenten klarer å identifisere mønsteret til sekvensen. Vi har vi valgt å ta med denne oppgaven da den skiller seg ut fra de to andre oppgavene. Her må studentene ta i bruk abduktiv argumentasjon, om de skal lykkes med å ende opp med et deduktivt bevis. Dermed blir det et ekstra steg i prosessen med å komme frem til et fullverdig bevis, ved at studentene må oversette sammenhengen de finner i det aritmetiske mønsteret, til deduktiv form.

Vi ser, etter å ha studert og analysert studentsvarene, at deloppgave b) kunne vært formulert på en bedre måte. Vi spør her etter hvordan studentene kom frem til et uttrykk. Mange har svart at de byttet ut tallet som varierte med en variabel, og med dette gir de et svar på spørsmålet. Ved å omformulere spørsmålet til eksempelvis "gi et argument for hvorfor uttrykket du kom frem til i a) stemmer", kunne vi fått mer dyptpløyende argumenter, i stedet for en "hva gjorde du"-forklaring.

Oppgave 6

For tall større enn 1, er de følgende påstandene riktige?

A: Produktet av et oddetall og et partall er alltid et partall.
B: Alle partall kan skrives som produktet av et oddetall og et partall.

Gi et argument for hvorfor hver påstand er riktig eller gal.

Figur 4. Oppgave 6 fra oppgavesettet.

Denne oppgaven er inspirert av oppgave 9.29 i *AHA Matematikk og matematikkdidaktikk* (Nygaard et al., 1999, s. 508), som har vært en del av studentenes pensum i emnet denne våren. Denne oppgaven har vært pensum for studentene. Oppgave 9.29 i boka tar for seg summen av oddetall og partall. Healy og Hoyles (2002, se vedlegg 3) har også vært en inspirasjonskilde til denne oppgaven. På oppgave 9 (Healy & Hoyles, 2002, vedlegg 3, s.11) er det to påstander omhandlende sammenhengen mellom summen og produktet av oddetall og partall. Påstandene er på formen "hvis X, så Y" og "hvis Y så X". I oppgaven vi har laget har vi valgt å benytte den samme strukturen på påstandene, men selve påstandene er ulike Healy og Hoyles' (2002, vedlegg 3). Påstandene kan ved første øyekast se liknende ut, men er i realiteten ulike når det kommer til deres karakter. Påstand A er sann, og et fullverdig bevis stiller krav til at studentene viser at påstanden er sann for produktet av alle partall og oddetall, altså et bevis på deduktiv form. Påstand B er usann, og siden påstanden lyder "alle partall

[...]", holder det her med ett moteksempel for å ha et bevis. Denne oppgaven kan dermed avsløre hvor gode studentene er til å velge hensiktsmessige argumentasjonsformer.

3.5 Metode for dataanalyse

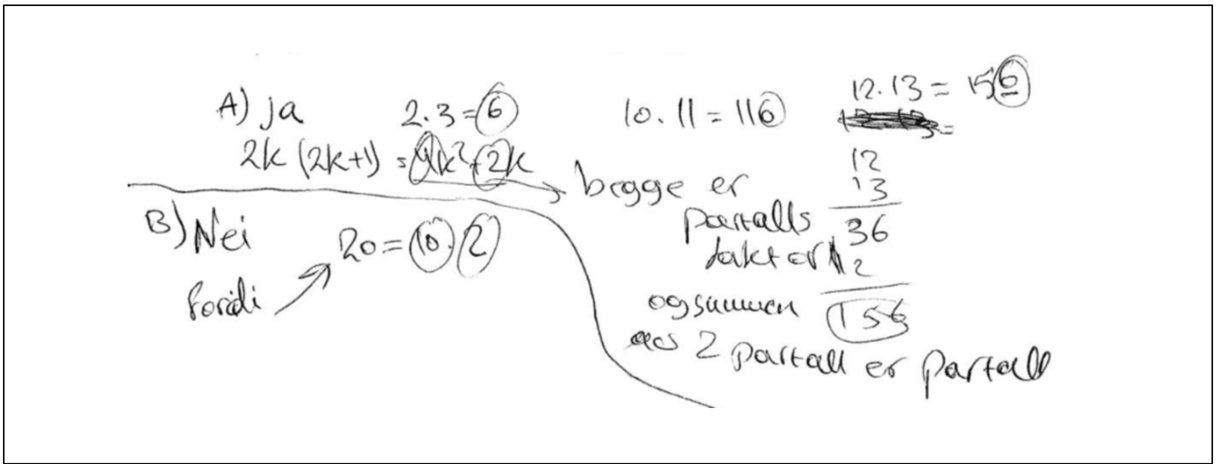
For å være best mulig rustet til å svare på studiens forskningsspørsmål, utarbeidet vi et analyseskjema (tabell 1) inspirert av Weber og Alcock (2004) og Alcock og Inglis (2008), som vi har kombinert med en kategorisering av ulike type argumenter, gjort av Stylianides og Stylianides (2009). Weber og Alcock (2004) og Alcock og Inglis (2008) har fokus på de tre måtene en kan føre bevis. Dette analyseskjemaet vil ta for seg om studentene har resonnert syntaktisk eller semantisk og om produktet av deres resonnering er syntaktisk eller semantisk. Med Stylianides og Stylianides' (2009) kategoriseringer vil vi kunne si noe om i hvilken grad det endelige produktet kan klassifiseres som et bevis.

For hver av de tre oppgavene som danner datagrunnlaget for studien vår, har vi kategorisert hver student sin besvarelse etter hvilken form for resonnering de benytter seg av, og hvilken form det endelige produktet er på (syntaktisk/syntaktisk, semantisk/syntaktisk, semantisk/semantisk). I tillegg har vi sortert studentbesvarelsene etter Stylianides og Stylianides' (2009) kategorisering av argumenter. I emnet denne studien er gjennomført i, har begrepene *gyldig argument* og *bevis* blitt brukt om det samme. Derfor vil vi i vår analyse ikke skille mellom disse kategoriene. Vi har derfor slått dem sammen til én felles kategori, som vi har kalt *bevis (B*). De andre kategoriene har vi kalt *empirisk argument (EA)* og *ugyldig eller uferdig argument (UA).* Da vi analyserte dataen falt ingen av studentsvarene inn under det Stylianides og Stylianides (2009) betegner som *ikke-genuint argument,* og vi har derfor fjernet denne kategorien. Vi har i tillegg lagt til en kategori for *ikke svart (IS)*, for å gi et helhetlig bilde av hvor stor andel av studentene som besvarte de ulike oppgavene.

Resonnering/ Produkt	**Type Argument**			**IS**
	EA	**UA**	**B**	
Syntaktisk/ Syntaktisk	-	Ren manipulasjon av definisjoner. Ugyldig.	Ren manipulasjon av definisjoner. Gyldig.	
Semantisk/ Syntaktisk	-	Bytte av representasjon, forsøk på overgang til syntaktisk resonnering. Ugyldig.	Bytte av representasjon, overgang til syntaktisk resonnering. Gyldig.	
Semantisk/ Semantisk	Kun bruk av eksempler. Ugyldig.	Kun brukt representasjoner som ikke er gyldige for bevis. Ugyldig.	Motbevis. Gyldig.	

Tabell 1. Analyseskjema.

Vi har gjennom arbeidet med denne oppgaven vært innom ulike metoder for dataanalyse, men en gjentakende utfordring var at metodene vi valgte kun belyste få aspekter ved studentenes argumentasjon. Med analysen vi har landet på får vi belyst mange ulike aspekter ved studentenes argumenter, blant annet deres bruk av symboler, bruk av definisjoner, hvordan de benytter seg av ulike representasjoner, og bruk av eksempler. Ved å benytte begreper som *begrepsmessig innsikt* og *teknisk håndtering* har vi også mulighet til å si noe konkret om hvorfor studentene eventuelt ikke klarer å konstruere argumenter som kan kategoriseres som bevis etter den definisjonen vi bruker. Vi mener derfor at vårt rammeverk, og hvordan vi benytter dette rammeverket for å analysere dataen vår, er godt tilpasset vår oppgave.



Figur 5. Studentbesvarelse på oppgave 6.

Over har vi presentert et studentsvar til oppgave 6 (figur 5). På påstand 6A har studenten tatt i bruk eksempler, som gjør at resonneringen kategoriseres som semantisk. Videre forsøker studenten å gi et generelt argument som passer til eksemplene som er valgt. Produktet av argumentet er dermed syntaktisk, og argumentet i sin helhet kategoriseres som semantisk/syntaktisk. Argumentet til studenten viser til etterfølgende partall og oddetall, som er en delmengde av klassen med objekter som påstanden gjelder for. Derfor kategoriseres argumentet som et ugyldig argument.

På 6B har studenten forsøkt å gi et motbevis, ved å vise at partallet 20 kan skrives som produktet av to partall, nemlig 10 og 2. Her er det også brukt et eksempel, så resonneringen er semantisk. Siden argumentet kun består av et eksempel, er produktet også semantisk, og argumentet kategoriseres dermed som semantisk/semantisk. Studenten overser at 20 kan skrives som et produkt av faktorene 5 og 4. Eksemplet studenten har gitt motbeviser ikke påstanden om at alle partall kan skrives som et produkt av et partall og et oddetall. Argumentet kategoriseres dermed som ugyldig.

Resonnering/ Produkt	**Type argument**			**IS**
	EA	**UA**	**B**	
Syntaktisk/ Syntaktisk				

Semantisk/ Syntaktisk		6A		
Semantisk/ Semantisk		6B		

Tabell 2. Analyseskjema benyttet på studentbesvarelsen i figur 5.

3.6 Forskningsetikk

Ved forskning på studenter og mennesker generelt er det viktig å ta hensyn til de etiske perspektivene ved utførelse av datainnsamling, databehandling og datalagring. I dette delkapitlet vil vi gjøre rede for nettopp dette og diskutere oppgavens troverdighet.

Da planlagte datainnsamlinger var en skriftlig test og gruppeintervjuer, måtte det søkes om godkjenning fra Sikt, tidligere NSD (https://sikt.no/). Som tidligere nevnt er vi en del av et større prosjekt og i prosessen med å søke til Sikt ble dette i all hovedsak gjort av doktorgradsstipendiaten, men vi var med for å kunne komme med kommentarer dersom det var noe som ikke var forenelig med vår studie, eller legge til ytterligere punkter dersom vi anså det som nødvendig.

Den skriftlige datainnsamlingen var en integrert del av emnet studien ble gjennomført i. Alle studentene fikk utdelt samtykkeskjema, med forklaring på hvordan det var tiltenkt å samle inn data og hva vi skulle bruke dataen til. Her kunne de krysse av for hvilke deler av datainnsamlingen de ville delta på, samt reservere seg mot langtidslagring av data. Studentene fikk først muntlige instrukser om prosjektet, før de fikk utdelt samtykkeskjema. De fikk god tid til å lese gjennom skjemaet og krysse av og signere for det de var villige til å delta på. Under den muntlige instruksen hadde vi fokus på å poengtere at samtykke/ikke samtykke til deling av deres data med oss på ingen måte ville ha innvirkning på deres endelige karakter og ei heller deres videre gang i emnet.

Etter testen med oppgavesettet ble alle studentbesvarelsene scannet. Studentenes navn de hadde skrevet på oppgavesettet ble strøket over. Vi ga studentene hvert sitt pseudonym som begynte på hver sin respektive bokstav i alfabetet, slik at vi hele veien har hatt god oversikt over hvilke studentsvar som tilhører samme student, uten å trenge å henvise til studentens virkelige navn. Når det kommer til oppbevaring av data har dette også blitt gjort av doktorgradsstipendiaten i henhold til universitetets og Sikts retningslinjer.

Vi opplyste studentene om at samtykket deres kunne trekkes tilbake når enn de ønsket det, ved å ta kontakt med prosjektleder, som er doktorgradsstipendiaten. Kontaktinformasjonen til prosjektleder var oppgitt i samtykkeskjemaet, og hun er også en deltaker i emnet slik at studentene til enhver tid kunne få tak i henne gjennom læringsplattformen.

En viktig del som vi vil belyse er våre roller som forskere og studentmentorer i emnet. Vi var studentmentorer i emnet som gikk høsten 2022, og som de fleste av deltakerne i denne studien tok som emne. Våren 2023 skulle vi fortsette i denne jobben, samtidig som vi skulle tre inn i en forskerposisjon ved å innhente data fra klassen. Våre mentorstillinger har ført til at vi har god kjennskap til studentene, og da vårsemesteret begynte hadde vi allerede en relasjon til de aller fleste studentene i emnet. Dette har ført til at vi i stor grad har hatt fokus på å opptre profesjonelt ovenfor studentene. Vi har opptrådt med respekt både overfor studentene personlig, og også overfor deres innsamlede datamateriale. Våre relasjoner til studentene har på den ene siden hatt en positiv innvirkning, med tanke på at studentene har tillitt til oss. På en annen side kan dette ha vært problematisk, dersom det i noen tilfeller kan ha påvirket deres valg om deltakelse. Vi vil dog nevne at samtykkeskjemaet ble gjennomgått muntlig med studentene, i tillegg til at de har fått det skriftlig, samt at vi har poengtert betydningen av deltakelse og at den ikke vil ha innvirkning på deres studieløp.

3.6.1 Troverdighet

Vi vil i dette delkapitlet komme inn på ulike aspekter ved studien som begrunner dens troverdighet. Hovedidéen går ut på at studiens troverdighet bygges gjennom vår transparenthet, det vil si at vi beskriver prosessen og gjennomføringen nøyaktig, i tillegg til at vi er åpne om utfordringer ved vår data.

Ved gjennomføringen av datainnsamlingen, fikk studentene utdelt et skriftlig oppgavesett. Dette oppgavesettet ble som nevnt utformet i flere rundet med inspirasjon fra Healy og Hoyles (2000). Gjennom samarbeid og veiledning fikk vi hjelp til å vurdere om oppgavene faktisk fikk frem argumentene til studentene, og vi vurderte for det meste formuleringene på spørsmålene slik at disse faktisk skulle fungere til sin hensikt.

Selv etter mange revideringer av oppgavesettet så vi på studentenes svar at det fremdeles lå noen inkonsistenser i oppgavene vi utformet. Dette kunne som nevnt i delkapittel 3.3.3 vært unngått dersom vi hadde pilotert oppgavesettet på en studentgruppe. I diskusjonskapittelet kommer vi til å være bevisst på at ufullstendige argumenter kan komme av svak formulering av oppgaven.

At testen var på skriftlig form og utformet slik at studentene kunne skrive rett inn i oppgavesettet gjorde at dette i stor grad eliminerte muligheten for menneskelige feil i forhold til intervjuer. Settet hadde en forside med klare skriftlige instruksjoner, som også ble gjennomgått muntlig for hele klassen før testen startet, noe som gjør at forholdene for alle studentene var like under testen.

Den skriftlige dataen har blitt analysert i flere omganger. De første analysene ble gjort i tre omganger, da vi hver for oss analyserte oppgavene, i tillegg til at doktorgradsstipendiaten gjorde det samme. Deretter sammenliknet vi resultatene våre, og diskuterte eventuelle ulikheter, frem til vi kom til en enighet. Gjennom dette arbeidet opparbeidet vi en felles konsensus om hvilke krav vi stilte til argumentene for at de skulle havne i en gitt kategori. I tilfeller der vi var spesielt usikre på kategoriseringen, har vi brukt veileder som en fjerde analytiker. Den endelige dataanalysen ble gjennomført separat av oss, før vi sammenliknet resultatene våre, og igjen diskuterte eventuelle forskjeller frem til vi kom frem til en enighet. Dette svekker muligheten for at resultatene har blitt påvirket av feil under analyseringen.

Vi har som nevnt valgt individuell skriftlig test som metode for datainnsamling. Dette mener vi har vært det beste valget for å faktisk kunne se hvordan studentene konstruerer argumentene sine og også for å kunne si noe om hvilke utfordringer som ligger til grunn for at studentene ofte ikke kommer frem til bevis. Begrunnelsen for dette baserer vi på at vi i studien inntar et kognitivt syn på læring. Dette er i tråd med at emnets forelesere har tatt et bevisst valg om å innta et kognitivt læringssyn i utformingen av emnet. I tillegg er de fleste av deltakerne kommende lektorer som i fremtiden skal undervise elever alene i en undervisningssituasjon. Derfor mener vi at en individuell datainnsamling er hensiktsmessig i vårt tilfelle. Fordelen med å bruke en test som datainnsamling er at det åpner opp for å kunne identifisere hvilke steg studentene kunne ha tatt for å gjøre sine skriftlige argumenter sterkere og, dersom mulig, gyldige.

Vi har i tillegg til testen gjennomført gruppeintervjuer hvor studentene skulle rangere argumenter. For hver oppgave skulle de konkludere med sterkeste og svakeste argumentet og skrive ned hva de baserte valget på. Vi opplevde at studentene under gruppeintervjuene ofte innrettet seg etter den studenten med de sterkeste meningene. Disse studentene fikk dermed mer taletid enn de andre, og dermed gav ikke dette et helhetlig bilde av klassen, men heller de mest vokale studentene. Utsagnene var også lite utdypet, som gjorde at disse ikke ga oss relevant informasjon. Derfor tok vi valget om å kun holde oss til de skriftlige dataene og se bort fra gruppeintervjuene.

Vi har lagt ned et stort arbeid i å bruke teori som er forenelig med hvordan kurset ble undervist, da dette har en innvirkning på hvordan studentene argumenterer. Derfor har teoriene som er brukt for å analysere studentenes argumenter også et kognitivt læringssyn og vil derfor gi best mulig forklaringskraft med tanke på forskningsspørsmålet vårt. På denne måten kan vi så godt det lar seg gjøre undersøke hvilke faktiske utfordringer og muligheter som eksisterer i studentenes konstruksjon av skriftlige argumenter.

4 Resultater

I dette kapittelet vil vi ta for oss analyse av vår data, og resultatene. Først presenterer vi en overordnet tabell over resultatene, der vi også tar hensyn til de ulike oppgavene. Videre i delkapitlene kommer vi til å gå nærmere inn på resultatene våre for de tre ulike formene for bevisføring, altså henholdsvis syntaktisk resonnering og syntaktisk produkt (syntaktisk/syntaktisk), semantisk resonnering og syntaktisk produkt (semantisk/syntaktisk), og semantisk resonnering og semantisk produkt (semantisk/semantisk). Studentsvarene som er presentert er som regel de studentsvarene som fanger opp majoriteten av det som går igjen i besvarelsene.

Vi anser det hensiktsmessig å gi leseren en oversikt over resultatene våre før vi presenterer dem. Derfor har vi satt opp to tabeller. Den ene tabellen (tabell 3) gir innblikk i hvor mange av studentene som har besvart de gitte oppgavene. Den andre tabellen (tabell 4) er mer kompleks, og med denne tabellen kategoriserer vi studentenes besvarelser.

Tabell 3 viser hvor mange besvarelser/ikke besvarelser det er totalt i henhold til oppgavene. På oppgave 1b og 2 etterspør vi to argumenter. Besvarelser/ikke besvarelser for det andre argumentet er derfor illustrert ved hjelp av parenteser i de radene det gjelder. Altså er innholdet i parentesene antallet studenter som enten har gitt et andre argument eller antallet studenter som ikke har gitt et andre argument. Dette har vi gjort for å kunne si noe om studentenes valg av deres første og andre argument.

Tabell 4 gir et overordnet bilde av studentbesvarelsene som fremkommer i kolonnen som er navngitt *besvart* i tabell 3. Vi har kategorisert studentsvarene på hver oppgave etter om det er benyttet syntaktisk eller semantisk resonnering, og om produktet er syntaktisk eller semantisk. De tre typene argumenter vi har delt inn etter er empirisk argument (EA), ugyldig eller uferdig argument (UA) og bevis (B).

Oppgave	Besvart	Ikke besvart	Totalt
1b	22(17)	1(6)	23(23)
1c	22	1	23
2	23(8)	(15)	23(23)
6A	21	2	23
6B	20	3	23
Totalt	108(25)	7(21)	115 (46)

Tabell 3. Oversikt over studentbesvarelser.

Fra tabell 3 ser vi at de fleste studentene har svart på alle oppgavene. På oppgavene der vi etterspør to argumenter (1b og 2), har nesten alle studentene gitt et første argument. De fleste har gitt to argumenter på oppgave 1b, mens på oppgave 2 har de fleste gitt kun ett argument.

Resonnering/ Produkt	Oppgave	Type argument			Totalt
		EA	UA	B	
Syntaktisk/ Syntaktisk	1b		10 (4)	7 (2)	73 (9)
	1c		7	9	
	2		12 (3)	4	
	6A		16	1	
	6B		7		
Semantisk/ Syntaktisk	1b		(1)	2 (2)	6 (3)
	1c				
	2		1	1	
	6A		1	1	
	6B				
Semantisk/ Semantisk	1b	1 (3)	2 (5)		29 (13)
	1c		2	4	
	2	2 (1)	3 (4)		
	6A	2			
	6B	2	1	10	
Totalt		7 (4)	62 (17)	39 (4)	108 (25) / 161

Tabell 4. Oversikt over analysen av studentbesvarelsene.

Av de 133 studentbesvarelsene har vi kategorisert omtrent 62% av studentsvarene som syntaktisk resonnering og syntaktisk produkt, altså som syntaktisk/syntaktiske. Videre er et fåtall, nemlig 7% av studentsvarene, på semantisk/syntaktisk form. De resterende, omtrent 31% er på semantisk/semantisk form. Vi ser dermed at det er en tydelig overvekt av besvarelser på syntaktisk/syntaktisk form.

4.1 Syntaktisk resonnering/ Syntaktisk produkt

Oppgave	**Type argument**		
	EA	**UA**	**B**
1b		10 (4)	7 (2)
1c		7	9
2		12 (3)	4
6A		16	1
6B		7	

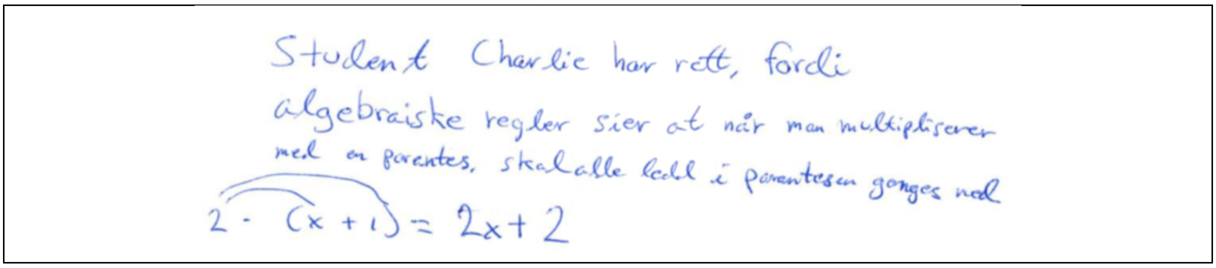
Tabell 5. Utsnitt av tabell 4, syntaktisk resonnering/syntaktisk produkt.

Tabellen over er et utsnitt av tabell 4. Vi ser her kun på studentbesvarelsene som har en syntaktisk resonnering og et syntaktisk produkt. 82 av totalt 133 studentbesvarelser var på denne formen. Hvordan enkeltstudentene fordeler seg på disse 82 besvarelsene kan sees i vedlegg 4.

Studentsvarene som er klassifisert som syntaktisk/syntaktisk består av to kategorier. Den første kategorien er de besvarelsene som benytter seg av ren symbolsk manipulasjon gjennom hele argumentet. Den andre kategorien er tekstsvar som tar utgangspunkt i definisjoner, og som bruker disse til å begrunne en matematisk sammenheng, uten å ta i bruk ikke-formelle representasjoner som diagrammer, tabeller og eksempler.

4.1.1 Ugyldige eller uferdige argumenter

59 av de 82 besvarelsene innen kategorien syntaktisk/syntaktisk har vi kategorisert som ugyldige eller uferdige argumenter. Mange av studentsvarene som havner i denne kategorien har til felles at de enten argumenterer med å henvise til en matematisk regel, eller at premissene for argumentet er feil, som fører til at resultatet også blir feil.


Student Charlie har rett, fordi
algebraiske regler sier at når man multipliserer
med en parentes, skal alle ledd i parentesen ganges med
$2 \cdot (x+1) = 2x + 2$

Figur 6. Studentbesvarelse på oppgave 1b.

I figur 6 ser vi et typisk studentsvar på oppgave 1b. Begrunnelsen for at Charlie har rett hviler utelukkende på matematiske regler. I tillegg har denne studenten vist hvordan multiplikasjon inn i en parentes fungerer. Noen studenter har produsert argumenter på denne formen, mens andre har argumenter som inneholder deler av argumentet over. På oppgave 1c er det også flere studenter som argumenterer med å utelukkende henvise til matematiske regler, uten å utføre noen regning.

Hvis $2(x+1) = 2x+1$, vil $(2(x+1))^2 = (2x+1)^2$

Da får vi at $4x^2+4 = 4x^2+1$, som ikke stemmer

Figur 7. Studentbesvarelse på oppgave 1c.

Figur 7 viser et eksempel på et studentsvar som forsøker å oppnå en motsigelse ved å anta det motsatte enn det som faktisk stemmer. Algebraiske feil gjør at studenten ender opp med en ugyldig konklusjon. I dette tilfellet blir resultatet av å kvadrere parentesen gal, noe som gjør at konklusjonen hviler på feil grunnlag. Andre studenter som ender opp med et ugyldig argument på denne oppgaven har blant annet en konklusjon som ikke svarer på det oppgaven spør om, eller en ikke-deduktiv form på argumentet.

partal kan skrivast på forma $2k$

oddetal kan skrivast på forma $2k+1$

A: $\overset{p}{2k}\cdot(2\overset{o}{k}+1) = 4k^2+2k = 2(2k^2+k) \Rightarrow$ A er sann

Figur 8. Studentbesvarelse på oppgave 6A.

Det som går igjen i de fleste ugyldige argumentene på oppgave 6A er at studentene har vist at påstanden stemmer for etterfølgende tall, i tillegg til det ikke er definert i besvarelsen hvilke verdier variablene som benyttes kan ha (figur 8). Dette gjelder for 15 av 21 studentsvar. Formen på argumentet er på deduktiv form, men vi klassifiserer argumentet som ugyldig, da premissene som tas i bruk ikke er samsvarende med oppgaveteksten.

$2M = 2k(2k+1)$? Finn ut om det kan stemme

$2k(2k+1) = 4k^2+2k = 2(2k^2+k)$

sett $M = 2k^2+k$

Ja! Alle partall kan skrives som prod. av et oddetall og et partall

+ at 1 er et oddetall og forandrer ikke partallet når det mult. med 1

Figur 9. Studentbesvarelse på oppgave 6B.

I figur 9 ser vi et studentsvar der studenten har satt opp en likning, der venstre side symboliserer et partall, og høyre side symboliserer produktet av et partall og det etterfølgende oddetallet. Studenten vil finne ut om uttrykkene kan være like, og gjør dette ved å manipulere høyre side. Studenten får da at dette stemmer dersom M oppfyller visse krav, og konkluderer videre med at påstanden stemmer. Flere studenter har benyttet seg av liknende fremgangsmetode. Ved å argumentere på denne måten viser studentene at et heltall *kan* skrives som produktet av et partall og et oddetall, dividert med 2. Men, i oppgaven ber vi studentene ta stilling til om dette gjelder for *alle* heltall. Derfor har ikke denne studenten, og andre studenter som har produsert liknende svar, svart på det oppgaven spurte om. I tillegg går det også igjen i studentsvarene tilhørende denne oppgaven at studentene benytter samme variabel for oddetall og partall, som er en annen grunn til at argumentet ikke regnes som gyldig.

4.1.2 Bevis

23 av de 82 besvarelsene innen kategorien syntaktisk/syntaktisk er kategorisert som bevis. Felles for de fleste studentene som har benyttet seg av syntaktisk/syntaktisk bevisføring på oppgave 1b, og som har lykkes med å produsere bevis, er at de tar utgangspunkt i det opprinnelige uttrykket, for så å utføre algebraisk manipulasjon, og deretter ende opp med uttrykket de skulle vise var riktig. En annen fremgangsmåte som er benyttet, er å betrakte påstanden som skal bevises som en likning, for deretter å utføre regneoperasjoner på begge sider av likhetstegnet.

$2(x+1) = 2\cdot x + 2\cdot 1 = 2x+2$
$2\cdot(x+1) = x+1+x+1 = \underline{\underline{2x+2}}$
$\div 2 \,/\, 2(x+1) = 2x+2 \Rightarrow x+1 = \frac{2x+2}{2}$ kan skrives som $(x+1)2$ $\Rightarrow x+1 = \frac{2(x+1)}{2}$ $x+1 = x+1 \Rightarrow x\cancel{+1}\cancel{-1} = x$ $\underline{\underline{x=x}}$ begge sider er like

Figur 10. Studentbesvarelser på oppgave 1b.

I figur 10 har vi presentert de tre ulike måtene studentene har lykkes med et bevis på syntaktisk/syntaktisk form. På studentsvaret øverst i tabellen benyttes den distributive lov. Dette gjøres ved at 2 ganges med begge leddene i parentesen, slik at parentesen kan fjernes. På studentsvaret under betraktes multiplikasjon som repetert addisjon. Det siste studentsvaret setter opp påstanden som en likning. Deretter har studenten delt på to på begge sider av likningen, og endt opp med å få det samme uttrykket på venstre og høyre side av likhetstegnet. Disse studentsvarene kategoriserte vi som syntaktisk/syntaktiske da alle tre forblir på samme representasjonsform. Det som skiller dem fra hverandre er at de benytter seg av ulike regneoperasjoner for å validere påstandens gyldighet.

$$2(x+1) \underset{\neq}{=} 2x+1$$

$$2(x+1) = 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2(x+1) \neq 2x+1$$

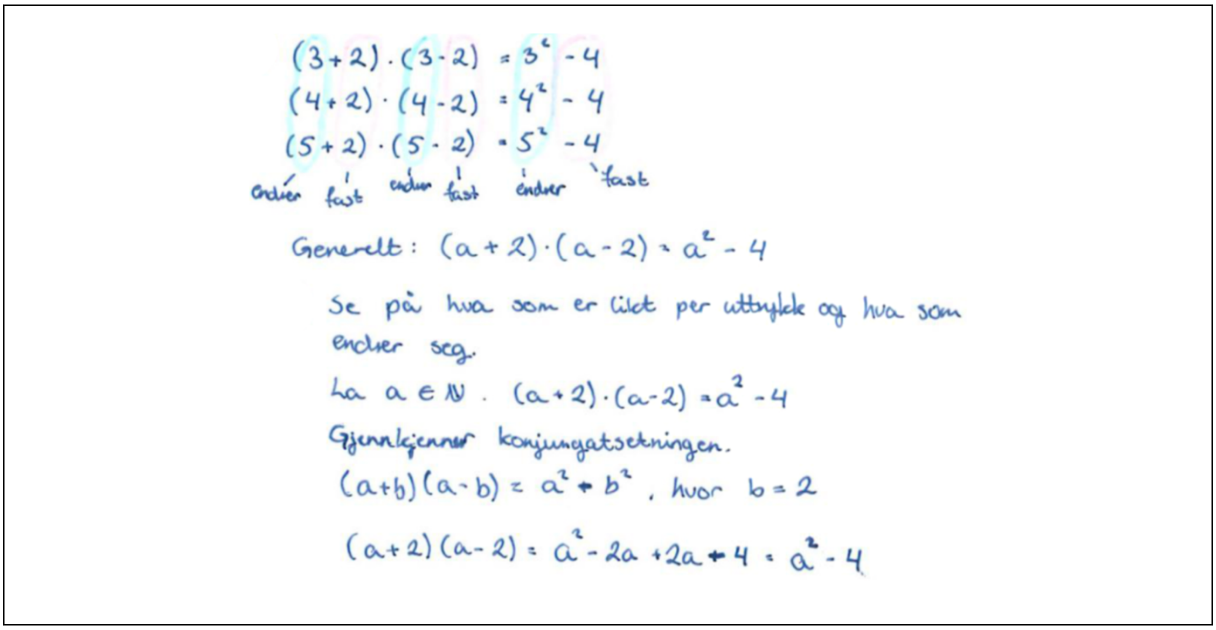
Figur 11. Studentbesvarelse på oppgave 1c.

De fleste studentene som har lykkes med å konstruere et bevis på oppgave 1c, har benyttet seg av bevis ved motsigelse. Det vil si at de har antatt at det motsatte av det de skal vise stemmer, for så å ende opp med en selvmotsigelse. Noen studenter har faktorisert ut 2, og satt tallet utenfor en parentes, som vist i figur 11. Andre har regnet ut venstre side av likhetstegnet, og vist at det ikke blir lik høyre side. Felles for disse er at de ender opp med at høyre og venstre side av likningen ikke blir like, og konklusjonen blir at antakelsen om likhet mellom uttrykkene er gal.

A: Alle partall har 2 som en faktor, derfor vil produktet av et partall og et oddetall også har 2 som faktor, noe som gjør det til et partall

Figur 12. Studentbesvarelse på oppgave 6A.

Figur 12 viser et studentsvar der studenten har benyttet seg av definisjonen av partall, sammen med sammenhengen mellom primtallsfaktorer i en multiplikasjon og primtallsfaktorer i produktet av multiplikasjonen. Oppbygningen av argumentet er deduktiv, og argumentet oppfyller kravene for hva som skal til for å regnes som bevis.



$(3+2)\cdot(3-2) = 3^2 - 4$

$(4+2)\cdot(4-2) = 4^2 - 4$

$(5+2)\cdot(5-2) = 5^2 - 4$

endrer fast endrer fast endrer fast

Generelt: $(a+2)\cdot(a-2) = a^2 - 4$

Se på hva som er likt per uttrykk og hva som endrer seg.

La $a \in \mathbb{N}$. $(a+2)\cdot(a-2) = a^2 - 4$

Gjenkjenner konjugatsetningen.

$(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$, hvor $b = 2$

$(a+2)(a-2) = a^2 - 2a + 2a + 4 = a^2 - 4$

Figur 13. Studentbesvarelse på oppgave 2.

På figur 13 har starter studenten med å liste opp de tre aritmetiske påstandene som er gitt i oppgaven. Studenten kommenterer hva som er fast og hva som endrer seg. Studenten presenterer videre et generelt uttrykk for den aritmetiske rekka med påstander. Studenten kommenterer at uttrykket er på samme form som konjugatsetningen, og regner så ut venstre side av likningen, og viser ved algebraiske regneregler at venstre og høyre side blir like. Oppsettet av den aritmetiske sekvensen på starten av argumentet er gitt i oppgaveteksten. Det vil si at dette ikke er en representasjon studenten selv har kommet på, og vi kategoriserer derfor argumentet som syntaktisk/syntaktisk. Argumentet oppfyller Stylianides' (2007b) krav til bevis, og vi kategoriserer argumentet deretter.

4.2 Semantisk resonnering/ Syntaktisk produkt

Oppgave	Type argument		
	EA	UA	B
1b		(1)	2 (2)
1c			
2		1	1
6A		1	1
6B			

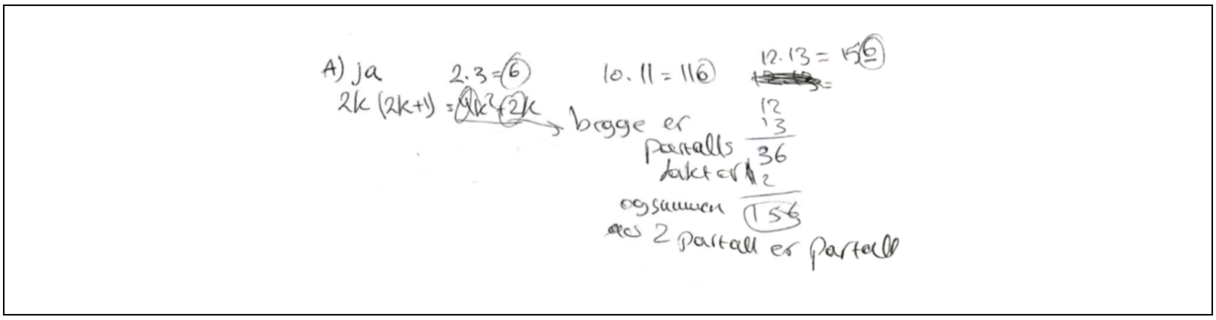
Tabell 6. Utsnitt av tabell 4, semantisk resonnering/syntaktisk produkt.

Tabell 6 er et utsnitt av tabell 4. Vi ser at kun 9 av de 133 studentsvarene benytter seg av en semantisk/syntaktisk bevisføring. Hvordan enkeltstudentene fordeler seg på disse 9 besvarelsene kan sees i vedlegg 4. Da det kun er 9 studentsvar som faller innenfor denne kategorien, er de fleste svarene særegne. Derfor har vi valgt å presentere både representative svar, og svar som skiller seg ut.

Felles for studentsvarene i denne kategorien er at i resonneringsprosessen har de tatt i bruk andre representasjoner enn den endelige representasjonsformen til argumentet. Studentene har foretatt en translasjon mellom representasjonsformer, som er nødvendig for å ende opp med et bevis i den semantisk/syntaktiske kategorien, og de har da endt opp med et syntaktisk produkt.

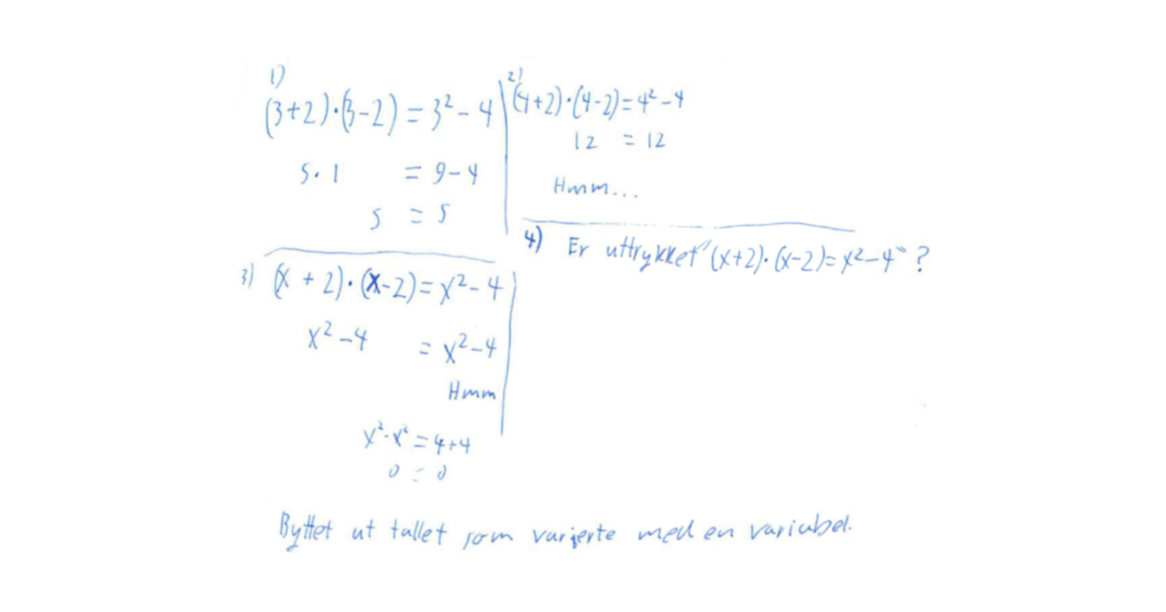
4.2.1 Ugyldige eller uferdige argumenter

3 av 9 studentsvar som er kategorisert under semantisk/syntaktisk tilhører argumenter av typen ugyldig eller uferdig.



Figur 14. Studentbesvarelse på oppgave 6A.

Figur 14 viser et studentsvar der studenten begynner med å ta for seg noen eksempler, og bytter dermed representasjonsform. Dette gjør at vi klassifiserer resonneringen som semantisk. Studenten multipliserer et partall med dets etterfølgende oddetall ved tre tilfeller, og får at alle tre produktene blir partall. Deretter forsøker studenten å uttrykke denne sammenhengen generelt. Dette klassifiseres som et ugyldig argument, da studenten ikke har beskrevet situasjonen der man kan multiplisere et hvilket som helst partall med et hvilket som helst oddetall. Studenten har valgt å uttrykke partallet og oddetallet med samme variabel, som resulterer i at studenten i realiteten betrakter et partall og dets etterfølgende oddetall. Dette er altså kun et utvalg at tilfellene som påstanden skal vises for. Studenten har heller ikke definert eksplisitt hvilke verdier *k* kan ha. Derfor kategoriserer vi dette argumentet som ugyldig.

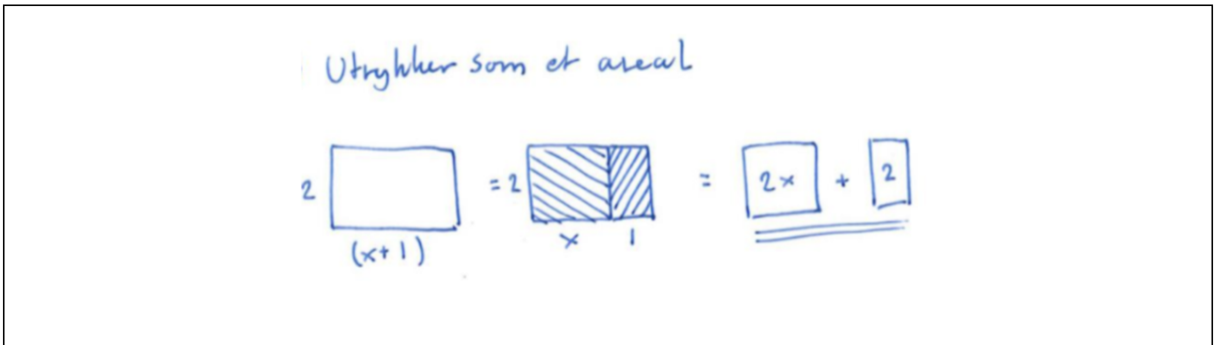


Figur 15. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Studentløsningen i figur 15 viser en klar stegvis prosess av hva som gjøres for å komme frem til utrykket vi etterspør på oppgave 2. I steg 1) og 2) testes to eksempler med verdiene 3 og 4, og det bekreftes at den symbolske sammenhengen mellom venstre og høyre side av likhetstegnet er gyldig i disse to empiriske tilfellene, ved å regne ut venstre og høyre side hver for seg. I neste steg setter studenten inn variabelen x. Dette begrunner studenten med "byttet ut tallet som varierte med en variabel". På steg 3) regner studenten ut venstre og høyre side av likhetstegnet hver for seg, og får at begge sider er like. I steg 4) har student kommet frem til et utrykk, og spør om det kan være dette utrykket som er svaret på oppgaven. Vi kategoriserer løsningen som semantisk/syntaktisk fordi studenten benytter seg av empirisk data og vender til symboler etter dette. Argumentet er plassert under ugyldig eller uferdig argument da den har en abduktiv struktur. I tillegg fremmer studenten den generelle sammenhengen som et spørsmål, som ytterligere bekrefter at argumentet er uferdig.

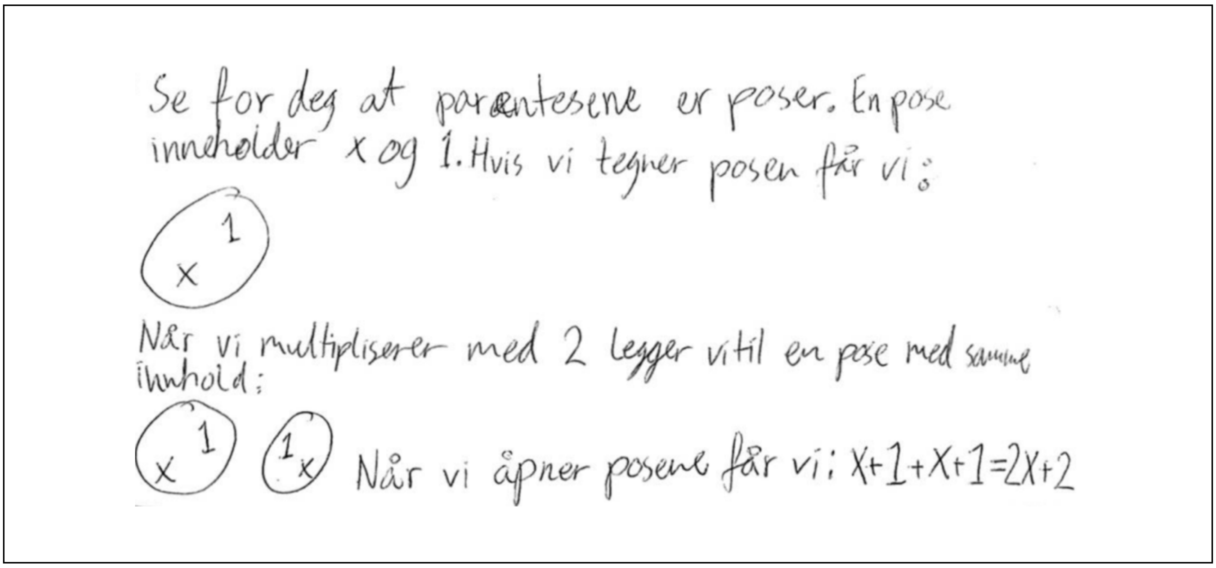
4.2.1 Bevis

6 av 9 studentsvar kategoriseres som semantisk/syntaktisk tilhørende argumentasjonstypen bevis.



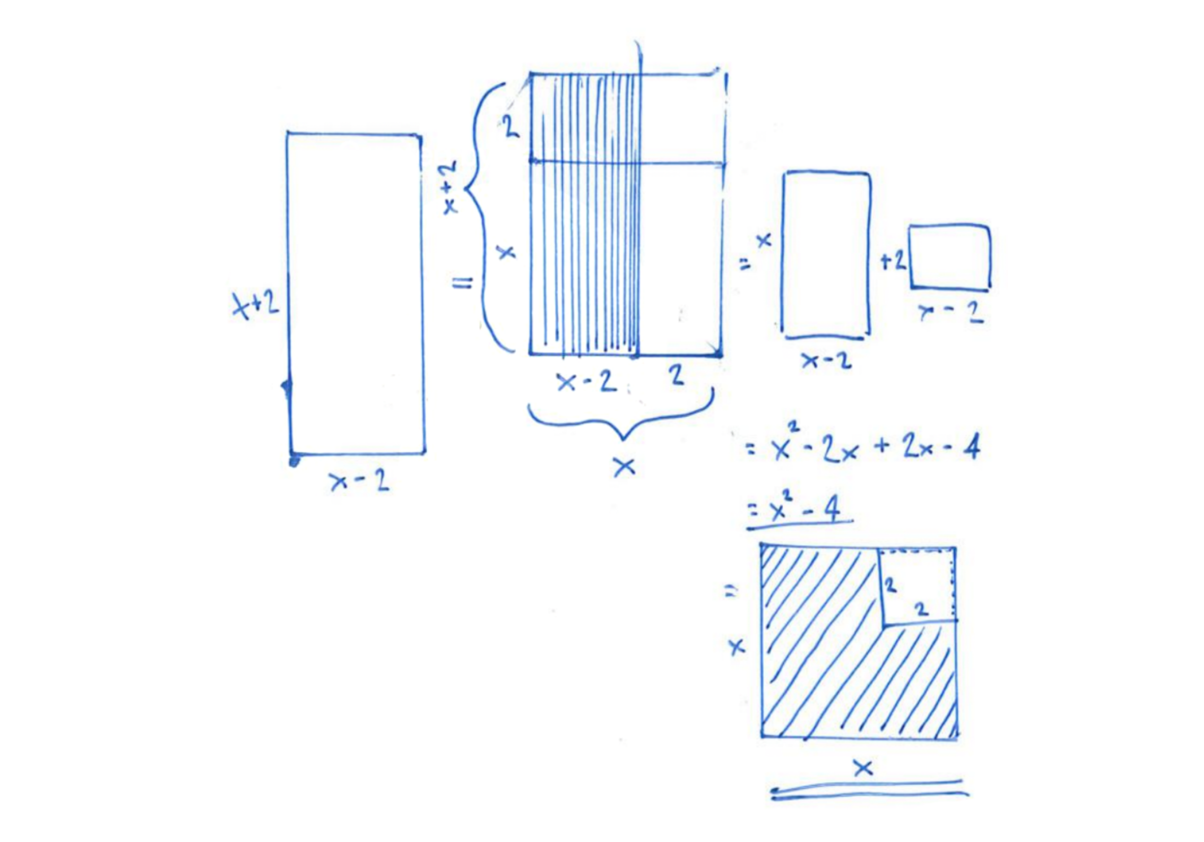
Figur 16. Studentbesvarelse på oppgave 1b.

Studentsvaret på figur 16 viser at studenten har benyttet seg av en visuell representasjon av utrykket ved hjelp av arealer. Vi ser at studenten tar for seg venstre side av uttrykket og i neste steg deler opp arealet i to mindre arealer. Arealet i steg 1 skrives deretter som en sum av disse arealene. Vi har valgt å kategorisere denne studenten under semantisk/syntaktisk bevisproduksjon da studenten bruker en representasjonsform som er intuitiv når det kommer til multiplikasjon av to faktorer. Videre har studenten benyttet seg av symboler i prosessen, noe som er en indikasjon på bevegelse fra det semantiske over til det syntaktiske. Vi anser løsningen som et fullverdig bevis da den oppfyller Stylianides´ (2007b) krav for at et argument er et bevis.



Figur 17. Studentbesvarelse på oppgave 1b.

Figur 17 viser et studentsvar der studenten representerer parentesene visuelt, ved å betrakte dem som poser som inneholder x og 1. Multiplikasjon med 2 betraktes som repetert addisjon, og vi har derfor to poser med det samme innholdet. Studenten gjør deretter en translasjon over til algebraisk form, og regner seg frem til hva uttrykket blir. Da studenten tar i bruk en visuell representasjon, og deretter går tilbake til algebraisk form, gjør det at argumentet regnes som semantisk/syntaktisk. Argumentet følger en deduktiv struktur, som gjør at det regnes som et bevis.



Figur 18. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Figur 18 viser et studentsvar der studenten har benyttet seg av areal. Studenten starter med å sette opp et areal for multiplikasjonen av de to parentesene *(x+2)* og *(x-2),* og benytter seg av geometrisk manipulasjon for å komme frem til utrykket x^2*-4* på høyre side representert ved arealer. Svaret kategoriserer vi som semantisk/syntaktisk da studenten benytter seg av en visuell representasjon, men har med det syntaktiske underveis i prosessen. Grunnet argumentets deduktive struktur, bruk av de matematiske reglene og måten argumentet kommuniserer sammenhengen på, har vi kategorisert denne løsningen som et bevis.

4.3 Semantisk resonnering/ Semantisk produkt

Oppgave	**Type argument**		
	EA	**UA**	**B**
1b	1 (3)	2 (5)	
1c		2	4
2	2(1)	3 (4)	
6A	2		
6B	2	1	10

Tabell 7. Utsnitt av tabell 4, semantisk resonnering/semantisk produkt.

Tabell 7 er et utsnitt av tabell 4. Vi ser fra tabellen at 42 av de 133 besvarelsene benytter seg av en semantisk/semantisk bevisføring. Hvordan enkeltstudentene fordeler seg på de 42 besvarelsene kan sees i vedlegg 4.

Mange av studentene som benytter seg av denne argumentasjonstypen har argumentert empirisk. Men, da påstanden på oppgave 1c og 6B kan bevises ved å bruke et moteksempel, klassifiseres disse studentsvarene som bevis i stedet for empiriske argumenter. Vi ser fra tabellen at kun ett studentsvar har blitt klassifisert som empirisk argument på oppgave 1c, hvor et motbevis er et gyldig argument. Denne studenten har forsøkt å produsere et motbevis, men bruker likhetstegnene feil, som gjør at studenten ikke ender opp med et bevis. Da motbevis er den eneste bevistypen som har en semantisk/semantisk struktur, ser vi fra tabellen at denne formen for argumenter ikke har blitt kategorisert som bevis på noen av de andre oppgavene enn 1c og 6B.

4.3.1 Empiriske argumenter

11 av 42 studentsvar benytter seg av empiriske argumenter innen kategorien semantisk/semantisk.

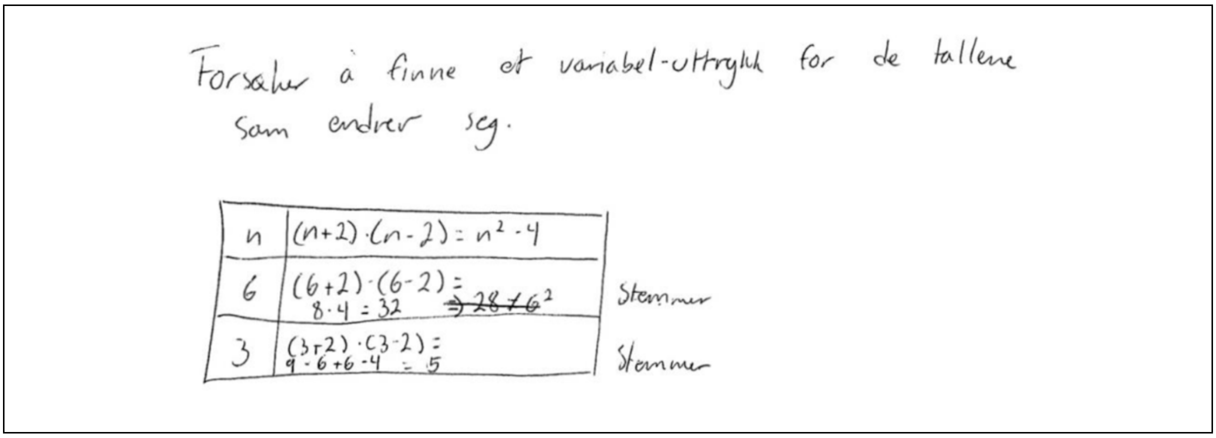
Hvis $2(x+1) = 2x + 2$, $x \in \mathbb{N}$.

Eks la $x = 2$, da vil:

$$\underbrace{2(2+1)}_{6} = \underbrace{2 \cdot 2 + 2}_{6} \Rightarrow 6 = 6$$

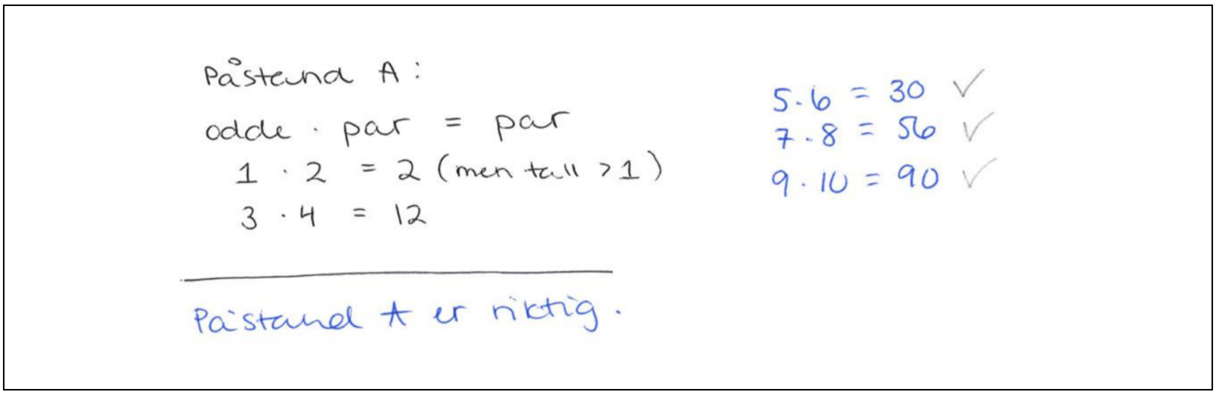
Figur 19. Studentbesvarelse på oppgave 1b.

Figur 19 viser et studentsvar der studenten har vist at venstre og høyre side av likningen må være lik, ved å sette inn et tall for x. Studenten regner ut begge sider av likhetstegnet hver for seg, og ender opp med at begge sidene får den samme verdien. I oppgaven har vi ikke spesifisert hvilke verdier x kan ha, som vil si at påstanden skal gjelde for alle x. Svaret i figur 19 regnes altså ikke som et bevis, da studenten har vist at påstanden om likhet mellom uttrykkene stemmer ved kun ett spesialtilfelle.



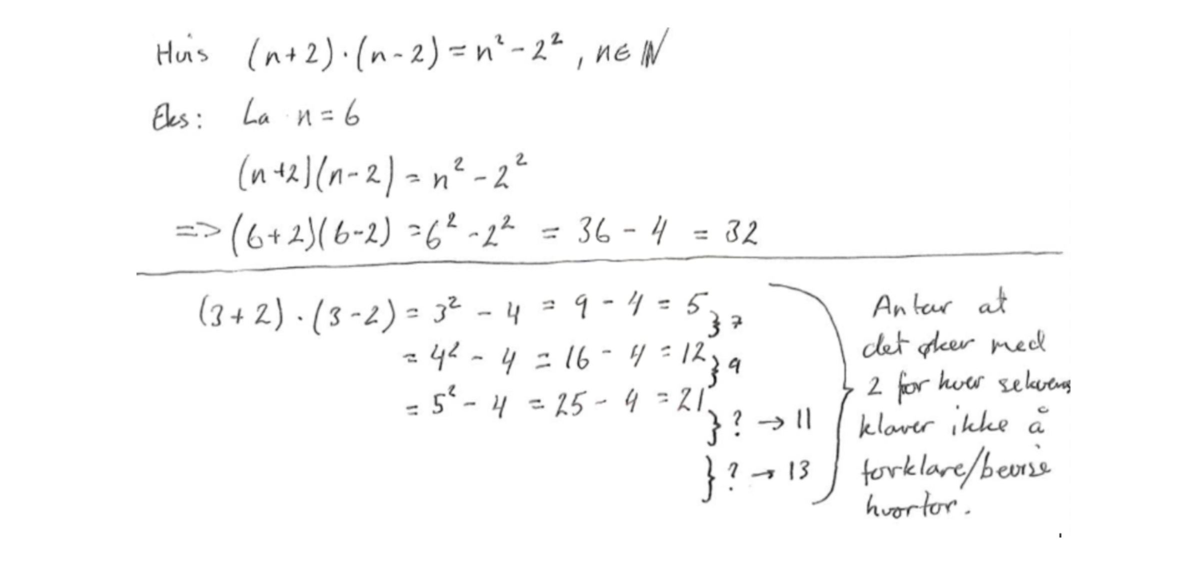
Figur 20. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Studenten som har produsert svaret i figur 20 har benyttet seg av to spesialtilfeller for å argumentere for at det generelle uttrykket stemmer. Når studenten har valgt *n* til å ha verdien 6, så regner studenten kun ut venstre side av uttrykket. På raden under er *n* satt til å være 3, og studenten regner igjen ut kun venstre side. Studenten har i dette tilfelle ikke holdt seg til regnerekkefølgen, men multipliserer før parentesene regnes sammen. Fordi studenten ikke regner ut høyre side av uttrykkene, er det her ikke vist at påstanden stemmer for tilfellene der *n* er henholdsvis 6 og 3. Studenten benytter heller ikke disse eksemplene til å produsere et generelt argument, og studentsvaret er derfor et semantisk produkt, men ikke et bevis.



Figur 21. Studentbesvarelse på oppgave 6A.

Figur 21 viser en studentbesvarelse der studenten har forsøkt å vise at produktet av et oddetall og et partall blir et partall ved å betrakte noen spesialtilfeller. Studenten betrakter fem tilfeller, hvorav det første ikke er gyldig, da oppgaven spesifiserte at påstanden skulle gjelde for tall større enn 1. Studenten har kun sett på tilfeller med etterfølgende heltall. Eksemplene innehar dermed ikke de egenskapene som tallene i den opprinnelige påstanden skulle ha, nemlig at dette gjelder for alle partall og oddetall, og ikke kun etterfølgende tall. Studenten gjør ikke et forsøk på å presentere en generell sammenheng, som gjør at produktet av argumentet er semantisk, og at argumentet ikke kategoriseres som et bevis.



Hvis $(n+2)\cdot(n-2)=n^2-2^2$, $n\in\mathbb{N}$

Eks: La $n=6$

$(n+2)(n-2)=n^2-2^2$

$\Rightarrow (6+2)(6-2)=6^2-2^2=36-4=32$

$(3+2)\cdot(3-2)=3^2-4=9-4=5$ } 7

$=4^2-4=16-4=12$ } 9

$=5^2-4=25-4=21$ } ? → 11

} ? → 13

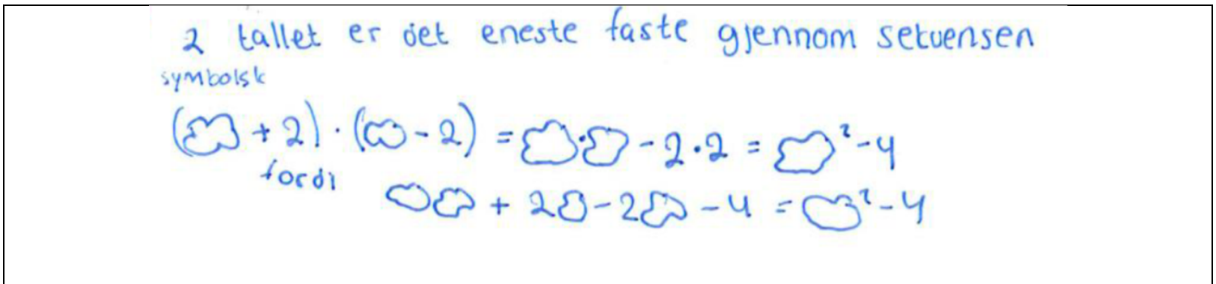
Antar at det øker med 2 for hver sekvens klarer ikke å forklare/bevise hvorfor.

Figur 22. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Studentsvaret i figur 22 viser en student som har benyttet seg av et empirisk argument for å forsøke å forklare hvorfor en generell sammenheng må stemme. Først regner studenten ut et eksempel, der 6 settes inn for *n,* og høyre side av likningen regnes ut til å bli 32. Videre har studenten regnet ut verdien til de ulike aritmetiske påstandene, og funnet ut at differansen øker med 2 mer for hver sekvens, uten å forklare eller bevise hvorfor. Studentsvaret forblir dermed på empirisk form, og vi kategoriserer derfor ikke dette svaret som et bevis.

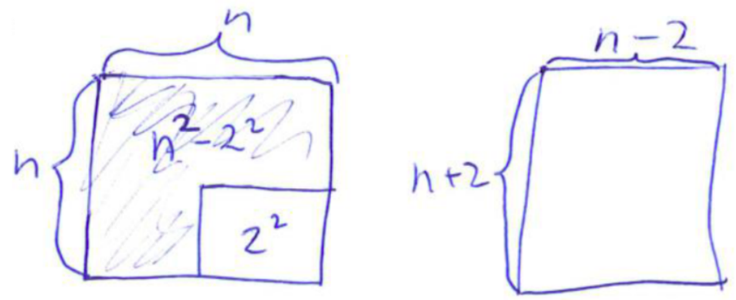
4.3.2 Ugyldige eller uferdige argumenter

17 av 42 studentsvar havner i kategorien semantisk/semantisk med ugyldige eller uferdige argumenter.



Figur 23. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Figur 23 viser at en student har benyttet seg av skyer for å argumentere for hvorfor det generelle uttrykket stemmer. Argumentet følger ikke deduktiv form, da siste linje i argumentet ikke følger som et resultat av en utregning, men dukker opp uten kontekst. I tillegg er skyer i matematikken ikke en allmenn akseptert notasjon for variabler. Studenten benytter ikke sky-analogien til å produsere et deduktivt, matematisk korrekt argument, som er grunnen til at dette argumentet har et semantisk produkt, og ikke kategoriseres som et bevis.



Figur 24. Studentbesvarelse på oppgave 2.

Studenten som har gitt svaret i figur 24 gir et argument for påstanden i oppgave 2 ved å representere venstre og høyre side som arealer. Studenten har ikke gitt noen form for forklaring eller vist til en prosess som forklarer sammenhengen mellom disse arealene. Dette er altså en visuell representasjon av uttrykket studenten tidligere har kommet frem til. Dette er derfor ikke et argument for hvorfor uttrykket er gyldig, men bare en annen representasjonsform for det samme uttrykket. Dette, og at argumentet mangler deduktiv struktur, er grunnen til at vi kategoriserer argumentet som et ugyldig eller uferdig argument. Siden studenten representerer utrykket ved hjelp av arealer og at symbolene som er benyttet er hentet direkte fra uttrykket ser vi det også passende at denne løsningen blir plassert under semantisk/semantisk.

Figur 25. Studentbesvarelse på oppgave 1b.

Figur 25 viser et studentsvar som utrykker sammenhengen gitt i oppgave 1b gjennom en visuell representasjon. Det gis verken argumenter eller forklaringer på hvorfor denne representasjonen viser til gyldighet av uttrykket i oppgaven. Derfor kategoriserer vi argumentet som ugyldig eller uferdig. Studenten har heller ikke tatt et steg videre til algebraisk notasjon, som gjør at vi plasserer denne løsningen under semantisk/semantisk.

4.3.3 Bevis

14 av 42 studentsvar kategoriseres som semantisk/semantisk tilhørende bevis.

Hvis Tim har rett vil $2(x+1) = 2x+1$, $x \in \mathbb{N}$

Setter $x = 2$:

$$2(2+1) = 2 \cdot 2 + 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2 = 4 + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{6 = 5}$$

$$6 \neq 5$$

Figur 26. Studentbesvarelse på oppgave 1c.

Figur 26 viser en student som har benyttet seg av moteksempel. Studenten har satt inn verdien 2 for *x*, og regnet ut venstre og høyre side av likningen hver for seg. Fra utregningen ender studenten opp med at 6 må være lik 5, noe som ikke stemmer. I oppgaven ber vi studentene vise at den generelle sammenhengen i oppgaven er gal, altså at den ikke er sann for alle verdier av *x.* Studenten løser dette ved å finne én *x*-verdi påstanden ikke stemmer for, og påstandens gyldighet er dermed motbevist. At studenten benytter seg av et eksempel i resonneringen, samt at produktet er semantisk, gjør at argumentet kategoriseres som semantisk/semantisk. Da motbevis er på denne formen, vil dette studentsvaret klassifiseres som et bevis.

Alle tall kan skrives som $1 \cdot$ seg selv

1 er et oddetall

$2k \cdot 1 = 2k$ → B er sant

Dersom det ikke teller (for tall større enn 1?)

$4 = 2 \cdot 2$ Kan ikke skrives som produktet av et oddetall og et partall uten å telle med 1.

Figur 27. Studentbesvarelse på oppgave 6B.

Figur 27 viser et studentsvar der studenten har betraktet et tilfelle som påstanden som skulle tas stilling til ikke gjelder for. Studenten skriver av 4 kun kan skrives som produktet av 2 og 2, dersom vi ekskluderer bruken av tallet 1. Siden påstanden ikke er sann for dette tilfellet, kan ikke alle partall skrives som produktet av et oddetall og et partall. Ett moteksempel er nok for å falsifisere påstanden, og studenten har lykkes med å produsere et bevis på semantisk/semantisk form.

5 Diskusjon

Dette kapitlet deler vi inn i to delkapitler. I det første delkapitlet kommer vi til å ta for oss studentene som har lykkes med å konstruere bevis, og hva som kjennetegner deres måter å argumentere på. I det andre delkapitlet vil vi ta for oss studentene som ikke lykkes med å konstruere bevis, og hva som er årsakene til at disse studentene ikke lykkes. Deretter vil vi kommentere hvordan disse studentene kan ta et steg videre i bevisprosessen, dersom dette er identifiserbart.

5.1 Studentene som lykkes i å konstruere bevis

Når vi ser på klassen som helhet, ser vi at 43 av 133 studentsvar ender opp i bevis, som tilsvarer like over 30%. Studentene har fått til å konstruere strengt algebraisk deduktive bevis, visuelt deduktive bevis, bevis ved motsigelse og motbevis.

Vi ser fra tabell 4 at mange studenter lykkes i å produsere motbevis. Eksempler på slike studentsvar kan ses i figur 26 og 27. Noen av studentene som lykkes med motbevis, lener seg også mot empirien når de skal produsere argumenter for generelle, gyldige påstander. Tidligere forskning peker på at det er vanlig at studenter ikke ser på moteksempler som motbevis, men heller et unntak til påstanden (Stylianides & Al-Murani, 2010). Dette ser vi igjen i våre resultater, ved at noen studenter benytter seg av flere moteksempler, før de konkluderer med at påstanden er gal. Dette reiser spørsmål ved om studentene som tenderer mot å benytte seg av empiriske argumenter selv er klar over moteksempelets rolle i bevisføring. Andre studenter velger å benytte seg av strengt algebraiske bevis der et motbevis kunne vært nok. Dette kan også være en indikasjon på at ett moteksempel ikke anses som nok (Stylianides & Al-Murani, 2010), og at det derfor forsøkes å føre et bevis som viser hvorfor påstanden ikke stemmer på et generelt grunnlag (figur 11). En annen grunn til valg av bevismetode kan bunne i hvordan vi har formulert oppgaven. Et moteksempel ville vært tilstrekkelig som bevis på oppgave 1c og 6B. Vi ser fra resultatene at en betydelig større del av studentene benytter moteksempel på 6B enn 1c. Oppgave 1 er formulert algebraisk, mens oppgave 6 er formulert med ord. Dette kan være med på å forklare hvorfor mange studenter benytter seg av et algebraisk motbevis på 1c, og et moteksempel på 6B. Vår data gir ikke nok informasjon til å kunne si noe konkret om dette, så videre forskning vil være nødvendig for å studere dette videre.

Noen av studentene som lykkes med å produsere motbevis lener ikke mot empiriske argumenter på oppgaver der det skal bevises at en påstand er sann. Vi mener disse studentene viser en større forståelse for konseptet motbevis, da de tar et bevisst valg om å bruke nettopp denne bevisformen på oppgavene der det er mulig å benytte seg av motbevis. De er altså i stand til å velge hensiktsmessige bevisformer, i stedet for å holde seg til en fast type bevisform, som kan vise seg å være mer eller mindre hensiktsmessige på ulike oppgaver. Vi vil trekke frem at flere studenter har klart å produsere bevis i 6B enn 6A. Dette passer godt med funnet til Ko og Knuth (2009), som tilsa at studenter hadde enklere for å produsere moteksempler enn å produsere bevis.

Fra resultatene våre ser vi at mange studenter lykkes med å produsere strengt algebraiske bevis på syntaktisk/syntaktisk form, på oppgave 1b. Dette gjør studentene ved å manipulere den algebraiske påstanden som skal bevises (figur 10). I disse tilfellene stilles det altså kun krav til studentenes tekniske håndtering, og ikke til deres begrepsmessige innsikt. På oppgave 6A må studentene som benytter seg av en strengt algebraisk argumentasjon selv stille opp den algebraiske påstanden, som innebærer å bruke definisjoner korrekt, noe vi observerte var utfordrende for samtlige studenter som forsøkte dette (figur 8). Ved å heller benytte seg av en narrativ, deduktiv argumentasjon på oppgave 6A (figur 12) slipper studentene unna kravet om å ha korrekte algebraiske definisjoner på oddetall og partall. Argumentet i figur 12 benytter seg kun av partallets egenskap, nemlig at det har 2 som faktor, og dette brukes videre i argumentet, som ender i et bevis. Dersom definisjoner ikke benyttes til å konstruere et deduktivt argument, men kun henvises til, vil Stylianides' (2007b) krav til bevis ikke være oppfylt (figur 6).

Blant studentene som lykkes i å produsere bevis ved å ta i bruk visuelle representasjoner, ser vi at studentene tar i bruk hensiktsmessige representasjonsformer. Ved å ta i bruk disse representasjonene, gir det innsikt i studentenes begrepsmessige innsikt og forståelse av påstanden som skal bevises. Eksempelvis ser vi fra figur 16 og 17 at disse studentene har en forståelse av multiplikasjon av to tall som henholdsvis et areal og repetert addisjon, og studentene bruker dette til å gi en mening til påstanden utenom den den rent algebraiske. Disse to svarene er begge to bevis på semantisk/syntaktisk form, og den visuelle representasjonen gir et innblikk i studentenes mentale bilder av påstanden. Studentene som tar i bruk visuelle representasjoner kommuniserer altså sin begrepsmessige innsikt til leseren på et dypere plan enn studentene som tar i bruk rent algebraiske argumenter.

5.2 Studentene som ikke lykkes i å konstruere bevis

Av de 133 studentbesvarelsene ser vi at nesten 70% ikke lykkes med å konstruere bevis, enten ved at de gir empiriske argumenter eller at argumentene er ugyldige/uferdige. Omtrent 10% av de som ikke lykkes produserer empiriske argumenter, mens de resterende 90% har gitt ugyldige eller uferdige argumenter.

Når studentene forsøker å konstruere strengt algebraiske bevis, men ikke lykkes med det, viser dette at studentene ikke har den tekniske håndteringen som kreves (figur 7). Siden studentene kun benytter seg av en algebraisk representasjonsform, får studentene heller ikke vist at de innehar begrepsmessig innsikt, og at de forstår hva påstanden sier, og hvordan de kan vise dette. Studentene lykkes ikke med å kommunisere sine mentale bilder av påstanden til leseren, som kan gjøre at det er vanskelig å identifisere hvilke elementer ved argumentasjonen som er årsaken til at studentene ikke lykkes med å komme frem til et bevis. Ved å benytte seg av semantisk resonnering, altså ta i bruk andre representasjonsformer enn de rent algebraiske, kan studentene i større grad kommunisere sin begrepsmessige innsikt, og på den måten formidle hvilke tanker og idéer de har rundt påstanden som bevises (figur 25). På den måten vil det gjøre det lettere å hjelpe studentene videre på veien mot målet, ved at det i større grad blir mulig å identifisere hvor skoen trykker.

Vi ser fra resultatene at flere studenter argumenterer med å henvise til definisjoner eller regler (figur 6). Om dette kommer av at studentene ikke innehar den tekniske håndteringen som trengs for å produsere et bevis, eller at studentene ikke har en forståelse av hvordan et matematisk argument skiller seg fra et argument slik vi bruker ordet i hverdagen, er uvisst. Grunnet studiens omfang har vi ikke tilstrekkelig med data for å kunne si noe om dette, og videre forskning vil være nødvendig for å belyse temaet. På oppgave 6A (figur 8) henviser majoriteten av studentene til de algebraiske definisjonene av partall og oddetall. Isolert sett er disse definisjonene korrekte, men idet de benyttes sammen oppstår det et problem. Ved bruk av samme variabel for både oddetall og partall ser studentene kun på etterfølgende oddetall og partall. Cusi og Malara (2007) har funn på at studenter som benytter seg av algebraisk språk for å produsere bevis kan ha problemer med å tolke og håndtere de formelle utrykkene de formulerer. Vi ser det samme skjer hos studentene som ikke klarer å tolke at deres argumenter kun har tatt høyde for etterfølgende partall og oddetall.

Vi ser det går igjen hos flere studenter at de tar i bruk ikke-matematiske symboler i argumentene sine. Dette kommer til syne som bokser eller poser som symbol for en parentes, og skyer, stjerner og bananer som symbol for en variabel (figur 23). I emnet som gikk høsten 2022 ble skyer introdusert for å beskrive noe som varierer. Studentene jobbet også mye med å bevise allerede kjente matematiske relasjoner, uten å bruke den gitte relasjonen som skulle argumenteres for, i selve beviset. Dette kan forklare bruken av de ikke-matematiske symbolene i studentenes argumenter. Det er også en mulighet for at studentene som benytter seg av ikke-matematiske symboler i argumentene sine foretrekker beviser som forklarer, heller en overbeviser.

I studentsvarene som er kategorisert som ugyldige eller uferdige argumenter og inneholder visuelle representasjoner, kan de visuelle representasjonene bidra til å gi et innblikk i studentenes begrepsmessige innsikt. Eksempelvis viser figur 24 et argument tilhørende oppgave 2, der studenten ikke er i stand til å ta deduktive steg for å vise hvorfor den andre figuren har samme areal som den første, men vi ser allikevel at studenten har en idé om at det generelle uttrykket kan anses som et areal. Vi merker oss at de fleste studentene som har benyttet seg av en visuell representasjon på oppgave 2 først har presentert et algebraisk argument med deduktive steg, og at det visuelle argumentet kommer som det andre argumentet vi ba dem om å gi. Det kan tyde på at disse studentene føler seg mer komfortable med å produsere algebraiske argumenter, sammenliknet med argumenter som tar i bruk visuelle representasjoner. Én student har lykkes med et bevis ved å bruke en visuell representasjon på denne oppgaven (figur 18), som kan tyde på at dette er den foretrukne bevisformen for denne studenten. Denne antakelsen styrkes også ved at den nevnte studenten produserte et visuelt bevis som sitt første argument på oppgaven.

Som nevnt i delkapittel 3.4.2 bærer mange av studentsvarene på oppgave 2 preg av å være forklaringer, snarere enn argumenter (figur 15). Med en formulering som lyder «forklar hvordan du kom frem til uttrykket [...]» er ikke mangelen på matematiske argumenter overraskende. At mange studenter har gitt forklaringer på hvordan de kom frem til det generelle uttrykket ved at de byttet ut tallene som endret seg med en variabel, betyr ikke nødvendigvis at de ikke er i stand til å konstruere bevis. Svak formulering av oppgaven hindrer oss altså i få rik data på hvordan studentene argumenterer for påstander som er på abduktiv form, da denne oppgaven er den eneste som er på denne formen. At vi har lite informasjon om argumentene studentene er i stand til å konstruere, gjør også at vi ikke kan si noe konkret om hvilke steg de kan ta for å ende opp med bevis.

I de ugyldige eller uferdige argumentene der eksempler er benyttet i prosessen, kan eksemplene være med på å gi studentene den begrepsmessige innsikten de trenger for å få en idé om hvordan et ferdig bevis for påstanden kan se ut. Tidligere forskning peker på at studenter ofte er klar over at empiriske argumenter ikke alene er gyldig som et generelt bevis (Sandefur et al., 2013). I noen av studentsvarene der studentene benytter seg av eksempler, gjør de ikke noe forsøk på å gi et generelt deduktivt argument for hvorfor påstanden stemmer (figur 19, 20 og 21). De kommuniserer heller ikke at argumentet deres ikke er tilstrekkelig som bevis, og vi kan dermed ikke vite om studentene ser på eksemplene som bevis for påstanden, eller om de er klar over at eksemplene ikke er tilstrekkelige.

Det vi ser gå igjen ved bruk av eksempler, er at studentene ofte benytter eksempler som er dårlige representanter for klassen av elementer som en gitt påstand skal gjelde for. Vi ser for eksempel at flere av studentene som har benyttet seg av eksempler på oppgave 6A, har valgt etterfølgende tall (figur 14 og 21). Studentsvaret i figur 14 går deretter videre ved å produsere et algebraisk deduktivt argument. Den algebraiske sammenhengen mellom oddetallet og partallet stemmer med eksemplene studenten har valgt, men ikke med det påstanden spør om. Når studentene har formulert en sammenheng, med en tanke om at påstanden stemmer, er det nyttig å produsere noen stygge eksempler, på leting etter et moteksempel (Mason, 1980). Å velge eksempler som følger et visst mønster *kan* være nyttig i tilfeller der argumentet som skal produseres er abduktivt. Vi ser et eksempel på dette i figur 22, der studenten har benyttet eksempler systematisk for å lete etter en algebraisk sammenheng mellom sekvensen av aritmetiske påstander.

Bevis ved motsigelse ser vi fra resultatene at er utfordrende for mange av studentene. Noen studenter manipulerer begge sider av likningen selv etter at det har kommet tydelig frem at venstre og høyre side av likhetstegnet ikke har samme verdi. Andre studenter har feil konklusjon, og ender dermed ikke opp med et motbevis. Vi ser et eksempel på dette i figur 9, der studenten konkluderer med at påstanden er sann. Dette er et funn i tråd med Barkai et al. (2002), som også hadde funn som tilsa at deltakerne i studien benyttet seg av utilstrekkelige bevismetoder. Konsekvensen av dette er at studentene ender opp med feil konklusjon som de ikke klarer å tolke, og de oppdager dermed ikke feilen i argumentet sitt. Dette samsvarer med Cusi og Malara (2007) sine funn. Dersom påstanden hadde vært sann, hadde studenten måtte brukt oppdagelsene sine til å konstruere et argument på deduktiv form, altså endre strukturen på argumentet. Om studenten hadde gått over til en deduktiv argumentasjonsform, er det mulighet for at studenten hadde oppdaget at påstanden er gal, og kunne dermed konstruert et bevis ved å eksempelvis bruke et moteksempel.

For studentene som produserer bevis ved å benytte seg av en syntaktisk/syntaktisk resonneringsform, ser vi sammenhenger med elever som kun gir et svar på en matematikkoppgave, uten å vise utregning. Å be studenter om å konstruere bevis kan gi en innsikt i deres begrepsmessige innsikt i et tema, på lik linje med at oppgaver i matematikkundervisningen gir elever en mulighet til å kommunisere sine matematiske idéer.

Når studentene ikke presenterer noen av idéene sine ved å arbeide semantisk, kan vi ikke tolke hvilken begrepsmessig innsikt de har. På samme måte kan en elev avgi riktig svar fordi eleven har en begrepsmessig innsikt som kreves for å svare på oppgaven, men det kan også være gjetting kombinert med ren og skjær flaks. Vi anser derfor valg av representasjoner i et argument som en måte å kommunisere begrepsmessig innsikt på, og dermed som viktig for å kunne hjelpe studenter videre på vei i beviskonstruksjonen.

Vi merker oss fra resultatene at ingen av studentene har benyttet seg av generisk eksempel som bevisform. En mulig grunn til dette kan være at studentene ikke anser generiske eksempler som bevis, som er i tråd med funnene til Kempen og Biehler (2019). Det er allikevel interessant å bemerke seg at generiske eksempler ikke er tatt i bruk i noen av de 133 besvarelsene vi fikk inn i vår datainnsamling.

6 Konklusjon

Vi innledet masteroppgaven med å presentere vårt forskningsspørsmål; *Hva kjennetegner en klasse med første- og andreårs lektorstudenters skriftlige argumenter innen det matematiske kunnskapsområde tallteori?*

Hovedvekten av studentene i klassen produserte argumenter hvor de manipulerte symboler og henviste til definisjoner. Dette ser vi tydelig på oppgave 1b, 1c, 2 og 6A (se vedlegg 4). I de oppgavene der det algebraiske uttrykket er gitt, som oppgave 1, lykkes studentene i stor grad med å komme frem til et bevis. Der det algebraiske utrykket må konstrueres av studentene selv, som oppgave 6, ser vi tydelig at studentene har utfordringer med å forstå og tolke de formelle utrykkene de formulerer. Der studentene forsøker å produsere bevis ved motsigelse går det igjen at studentene fortsetter den algebraiske manipulasjonen selv etter at det har blitt tydelig at uttrykkene på hver side av likhetstegnet er ulike.

Vi vil trekke frem to aspekter ved eksempelbruk i studentenes skriftlige argumenter. Det ene aspektet er bruk av eksempler for å motbevise. Mange studenter lykkes med å produsere moteksempler, hvor vi har studenter som lener mot empirien uavhengig av oppgaven og andre studenter som velger å benytte eksempler kun der de regnes som moteksempler. Det andre aspektet er tilfellene der studentene som benytter seg av eksempler for å validere påstander. Studentene som gjør dette er i fåtall, men vi velger allikevel å nevne dem da det er gjennomgående at disse studentene benytter seg av eksempler som argumentasjonsform.

En liten andel av studentene i klassen benytter seg av andre representasjoner enn det endelige produktets representasjonsform i et forsøk på å konstruere bevis. Disse studentene har valgt ulike fremgangsmåter som er særegne for dem. Dette er en indikasjon på at de benytter sine mentale bilder av de matematiske objektene i sin beviskonstruksjon.

Studentene har enklest for å lykkes med produksjon av bevis i de oppgavene hvor de unngår translasjon av representasjonsform og i produksjon av motbevis for påstanden som ikke er gitt på algebraisk form.

7 Avslutning

Vi vil avslutningsvis diskutere hvilke implikasjoner våre funn har for undervisning av argumentasjon og bevis, og påpeke hvilke aspekter ved våre funn som til fordel kan bli forsket videre på.

Fra studien kommer det tydelig frem at arbeid med argumentasjon og bevis på lektorstudiet er både viktig og nødvendig. I tillegg til at dette arbeidet er sentralt for å bringe individer nærmere matematikkens praksis, er matematikklæreren den med tilgang til det matematiske miljøet. På denne måten er læreren den som kan validere og avvise elevenes matematiske argumenter. For at argumentasjon og bevis skal virke etter sin hensikt i skolen, er det nødvendig med lærere som har et klart bilde på hva som kvalifiseres som gyldige argumenter, og hvilke aspekter ved et argument som gjør eventuelt gjør det ugyldig.

Vår studie gir et øyeblikksbilde av en gruppe lektorstudenters skriftlige argumenter. Vi ser at de i stor grad benytter seg av algebraiske argumenter, som kan skyldes oppgavetypene vi utformet til oppgavesettet. Det er også en mulighet for at valget om å benytte seg av algebraiske argumenter kommer av studentenes synspunkter på gyldige argumenter og hvordan argumenter bør være utformet for å bli klassifisert som bevis. En annen forklaring kan ligge i hva studentene vektlegger av forklaring og overbevisning i sine skriftlige argumenter. Dette kan vi ikke si noe sikkert om uten å overtolke dataene våre. Vi vil derfor oppfordre til en studie med fokus på lektorstudenters skriftlige konstruksjoner av argumenter, samt deres syn på bevis og bevisets rolle i matematikken. Vi har tro på at det å se disse tre i sammenheng og det å lete etter overlappinger mellom deres syn på bevis og måten de fører bevis på kan gi noen viktige funn med hensyn til hvordan en bør undervise om argumentasjon og bevis.

Et annet aspekt ved studien er eksemplenes rolle i argumenter og bevis. Fra analysen ser vi at mange av studentene som lykkes med motbevis er studenter som ofte benytter seg av empiriske bevis som argument for generelle sammenhenger. En studie av studenters syn på og oppfatning av empiriske argumenter og moteksempler kan gi informasjon om studentenes syn på eksemplenes rolle, noe vi fra vår data ikke kan si noe konkret om.

Funnet angående overvekten av algebraiske argumenter gir også en indikasjon på at det bør legges ned et arbeid i å utdanne lektorer med gode evner innenfor den algebraiske delen av matematikken. Dette mener vi har mye å si, ikke bare for deres egne konstruksjoner av bevis, men også i arbeid med å validere sine fremtidige elevers argumenter.

Vi ser også fra resultatene at for de gale påstandene hadde studentene lettere for å gi moteksempler som bevis for påstanden som var gitt som tekst, sammenliknet med påstanden som var gitt på algebraisk form. Vi undrer oss over om måten oppgavene var formulert på har innvirkning på hvilken bevistype studentene valgte å benytte seg av, eller om det er andre bakenforliggende årsaker for deres valg av bevistype. Vi ser derfor på dette som et mulig tema for videre forskning på studenters argumentasjon.

Vi har gjennom studien sett hvordan representasjoner har gitt oss et innblikk i lektorstudentenes mentale bilder av matematiske objekter. Ved å oppfordre lektorstudentene til å ta i bruk ulike typer representasjoner, kan vi enklere se hva studentene faktisk har av mentale bilder og assistere dem fra dette utgangspunktet inn i et gyldig argument der det er mulig. Med dette sier vi også at det i matematikken er flere veier til målet, noe arbeid med argumentasjon kan fremme et syn på. Vi ser det som fordelaktig at undervisning i argumentasjon og bevis tar utgangspunkt i studentenes allerede eksisterende kunnskap og bygger videre på denne, i stedet for å undervise med et fokus på kun produktet, nemlig de ulike bevistypene.

Vi oppfordrer altså til å engasjere lektorstudentene i å jobbe utforskende med argumentasjon og bevis. Det å undervise om bevistyper og logiske operatorer bør være en del av undervisningen, men absolutt ikke den eneste. Fokuset bør ligge på å legge til rette for utforskende arbeid ved å validere ulike matematiske sannheter. På denne måten kan lektorstudentene argumentere for egen overbevisning, og de bør i denne sammenhengen også bli oppmuntret til å reflektere rundt argumentenes forklaringskraft. Dette har vi tro på vil utvikle studentenes egne forutsetning matematisk, i tillegg til at refleksjoner vil forberede dem på deres fremtidige yrke.

Studien vår er utført på en klasse lektorstudenter ved et universitet i Norge. Studentene hadde i perioden før datainnsamlingen en innføring i argumentasjon og bevis gjennom seminar og gruppetimer, noe som gjør at deres bakgrunn er særegen for dem. Det vil si at våre funn ikke kan generaliseres til å gjelde for alle lektorstudenter i Norge, da temaet blir behandlet forskjellige ved de ulike universitetene og høgskolene i Norge. Vi oppfordrer derfor til studier av større skala som har fokus på lektorstudenters bevisproduksjoner.

8 Litteraturliste

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 111-129.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematics horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 93*(4), 373-397.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or Refuting Arithmetic Claims: The Case of Elementary School Teachers.

Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3.utg). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. utg.). Oxford university press.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 591-600).

Farrell, M. A. (1987). Geometry for secondary school teachers. In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12*, 1987 Yearbook (pp. 236-250). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Caspar.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education, 31(4)*, 396-428.

Kempen, L., & Biehler, R. (2019). Pre-service teachers' benefits from an inquiry-based transition-to-proof course with a focus on generic proofs. *International journal of research in undergraduate mathematics education*, *5*, 27-55.

Kim, H. (2022). Secondary Teachers' Views about Proof and Judgements on Mathematical Arguments. *Research in Mathematical Education*, *25*(1), 65-89.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 379-405.

Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Ko, Y. Y., & Rose, M. K. (2021). Are self-constructed and student-generated arguments acceptable proofs? Pre-service secondary mathematics teachers' evaluations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *64*, 100912.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. NY: Cambridge University Press

Lampert, M. (1992). Practices and problems in teaching authentic mathematics. *Effective and responsible teaching: The new synthesis,* 295-314.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 305-325.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill.

Mason, J. (1980). When is a symbol symbolic?. *For the learning of mathematics*, *1*(2), 8-12.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning* (2. utg.) Caspar.

Nygaard, O., Pettersen, P. &. Hundeland, P. S. (1999). *AHA Matematikk og matematikkdidaktikk* (2. utg.) Høyskoleforlaget.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture* (pp. 171–218). Charlotte: Information Age Publishing

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly, 105(3),* 252-255.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 323-340.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? The Mathematics Teacher, 78, 448-456.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. C. (2018). *Matematik for lærerstuderende: delta 2.0: fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2. utg.) Samfundslitteratur.

Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 289–321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 1-20.

Stylianides, A. J., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 21-36.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 237-253.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, *43*, 283-294.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, *56*, 209-234.

Wu, H.-H. (1996). The mathematician and the mathematics education reform. Notices of the American Mathematical Society, 43, 1531-1537.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458–477.

9 Vedlegg

Vedlegg 1

Are you interested in taking part in the research project

Pre-service mathematics teachers' arguments as they emerge in three different contexts: course, peer interaction and practicum ?

This is an inquiry about participation in a research project. The main purpose of the research project is to identify the challenges and opportunities that preservice teachers meet as they work with argumentation in a problem-solving context. This also includes their challenges and opportunities when they try to support their pupils' mathematical argumentation in the classroom, when they go into teaching practice. In this letter we will give you information about the purpose of the project and what your participation will involve.

Purpose of the project
In this project, we will look at the challenges and opportunities for learning that arises while you work with number theory tasks in the problem-solving context of the course [redacted] We will look at the arguments produced in the lectures, while you work in groups and when you go into practicum to take the role of a teacher. Data collection in the course [redacted] will be restricted to the work with number theory. The data collection will include the required course assignment and the recording of one peer-discussion of an imaginary student argument. You will not be required to produce material outside of your course's requirements.
The data that will be collected for this research project will be used in master's and a doctoral theses.

Who is responsible for the research project?
[redacted] is the institution responsible for the project.

Why are you being asked to participate?
The research project is about preservice teachers' argumentation, specifically in Norway where the curriculum has recently been updated to include argumentation and reasoning as core elements to be taught at school. As a result, the students of this course are central, as they are participating in a teacher development course in this context in order to be able to teach in school in the future. Your contribution will be helpful, as you will inform research with the challenges that appear when teachers try to use argumentation in school.

What does participation involve for you?
- Material:
  - You will provide the written answers to the tasks from lectures on number theory.
  - You will provide the designed tasks or worksheets that you will prepare for the teaching practice during practicum.
- Interview[1]:
  - You may participate in an interview after the group session that follows your practicum teaching. This interview will be about the arguments that your pupils provided as answers to the task you designed and used in practicum.
- Audio recording:

[1] *The interviews will be held outside of the course hours at a time most convenient to the participant. Each interview will have a maximum duration of 30 minutes.*

- You will be audio recorded during groupwork on number theory tasks
- You will be audio recorded during the intervew.

The parts *Written answers* and *Material* are also parts of course work. The interview[1] is the only part of the data collection process, where you will use personal time and are not included in course work. Names and information that can be used to identify you will be changed in the master's and doctoral thesis, as well as in the publications that will use data from this data collection.

Participation is voluntary
Participation in the project is voluntary. If you chose to participate, you can withdraw your consent at any time without giving a reason. All information about you will then be made anonymous. There will be no negative consequences for you if you chose not to participate or later decide to withdraw. It will not affect your grade on this course, your relationship with the university or with your professors.

Your personal privacy – how we will store and use your personal data
We will only use your personal data for the purpose(s) specified in this information letter. We will process your personal data confidentially and in accordance with data protection legislation (the General Data Protection Regulation and Personal Data Act). The people who will have access to the data are the supervisors of the doctoral and master's theses and the authors of the doctoral and master's thesis. I will replace your name and contact details with a code. The list of names, contact details and respective codes will be stored separately from the rest of the collected data. In publications, the data that will be mentioned are the name of the university, of the school and the country where the data collection took place.

What will happen to your personal data at the end of the research project?
The project is scheduled to end 31.07.25. The collected data will be stored for further publications after the master's and doctoral thesis are finished.

Your rights
So long as you can be identified in the collected data, you have the right to:
- access the personal data that is being processed about you
- request that your personal data is deleted
- request that incorrect personal data about you is corrected/rectified
- receive a copy of your personal data (data portability), and
- send a complaint to the Data Protection Officer or The Norwegian Data Protection Authority regarding the processing of your personal data

What gives us the right to process your personal data?
We will process your personal data based on your consent.

Based on an agreement with the [redacted], Data Protection Services has assessed that the processing of personal data in this project is in accordance with data protection legislation.

Where can I find out more?
If you have questions about the project, or want to exercise your rights, contact:
- [redacted]

- Data Protection Services, by email: (personverntjenester@sikt.no) or by telephone: +47 53 21 15 00.

Yours sincerely,

Project Leader (Researcher/supervisor) | Student (if applicable)

[redacted]

Consent form

Consent can be given in writing (including electronically) or orally. NB! You must be able to document/demonstrate that you have given information and gained consent from project participants i.e. from the people whose personal data you will be processing (data subjects). As a rule, we recommend written information and written consent.

- *For written consent on paper you can use this template*
- *For written consent which is collected electronically, you must chose a procedure that will allow you to demonstrate that you have gained explicit consent (read more on our website)*
- *If the context dictates that you should give oral information and gain oral consent (e.g. for research in oral cultures or with people who are illiterate) we recommend that you make a sound recording of the information and consent.*

If a parent/guardian will give consent on behalf of their child or someone without the capacity to consent, you must adjust this information accordingly. Remember that the name of the participant must be included.

Adjust the checkboxes in accordance with participation in your project. It is possible to use bullet points instead of checkboxes. However, if you intend to process special categories of personal data (sensitive personal data) and/or one of the last four points in the list below is applicable to your project, we recommend that you use checkboxes. This because of the requirement of explicit consent.

I have received and understood information about the project *Pre-service mathematics teachers' arguments as they emerge in three different contexts: course, peer interaction and practicum* and have been given the opportunity to ask questions. I give consent:

- ☐ to provide the written answers to the tasks
- ☐ be audio recorded during groupwork (only during work on number theory tasks)
- ☐ to provide the tasks/ worksheet I designed for the teaching practice during practicum
- ☐ to participate in an interview after the teaching practice
- ☐ to be audio recorded during the interview
- ☐ for my personal data to be stored after the end of the project for follow-up studies and publications

I give consent for my personal data to be processed until the end date of the project, approx. *31.07.28*

(Signed by participant, date)

Vedlegg 2

Arbeidskrav 1: Resonnering og argumentasjon

Emnekode: [redacted]
Emnenavn: [redacted]
Dato: Onsdag 25. januar 12:15–14:00.

Retningslinjer:

Skriv svaret ditt på oppgavene direkte på siden med den aktuelle oppgaven. Skriv ned hele tankeprosessen din, som ledet deg til svaret du kom frem til.

Du får så mange blanke ark du vil, som du kan bruke til utregninger eller andre notater du ikke ønsker å inkludere i svaret.

Skriv tydelig hvilke notater som hører til hvilken oppgave. Disse notatene vil bli levert sammen med svarene dine, men de kan være så rotete du ønsker.

Bruk penn og strek ut feil slik at de fortsatt er synlige. Ikke bruk korrekturlakk.

OPPGAVE 1. Velge sider.

Tim påstår at $2(x+1) = 2x+1$ og Charlie påstår at $2(x+1) = 2x+2$.

a) Hvilken student har rett?

b) Gi to matematiske argumenter (for eksempel symbolsk, diagrammatisk, osv.) for å forklare hvorfor studenten du valgte i forrige oppgave har rett.

c) Gi et matematisk argument som forklarer hvorfor den andre studentens svar er galt.

OPPGAVE 2. Produkter og differanser.

Følgende er en sekvens av aritmetiske påstander:

$(3+2)\cdot(3-2)=3^2-4$

$(4+2)\cdot(4-2)=4^2-4$

$(5+2)\cdot(5-2)=5^2-4$

(6...

a) Gi et generelt matematisk uttrykk for denne sekvensen.

b) Forklar hvordan du kom frem til uttrykket i spørsmål *a* ved å gi to ulike argumenter (for eksempel symbolsk, diagrammatisk, osv).

I den følgende oppgaven er $|$ en forkortelse for "deler", og $\nmid$ er en forkortelse for "deler ikke".

OPPGAVE 3. Delelighet.

En lærer ga studentene sine følgende oppgave:
Tall som kan skrives på formen som tallene nedenfor, kan deles på 3.
$24 = 3^3 - 3$
$60 = 4^3 - 4$
$120 = 5^3 - 5$
Gi et argument for hvorfor dette stemmer.

Nedenfor er noen av studentenes svar:

Elsa
Hvis jeg faktoriserer ut n, så ender jeg opp med $n(n^2 - 1)$. Da er $(n^2 - 1)$ alltid delelig med 3, for eksempel:
$2^2 - 1 = 3$
$3^2 - 1 = 8$
$4^2 - 1 = 15$
$5^2 - 1 = 24$
$6^2 - 1 = 35$
Den eneste gangen vi ikke får noe som er delelig med 3 er når $n = 3$.
Siden n er en faktor, er ikke dette et problem fordi det opprinnelige uttrykket er $n(n^2 - 1)$, så 3 er en faktor.

Bjørn
Hvis vi ser på tallet 1081 har vi følgende uttrykk:
$(1081^3 - 1081) = 1081 \cdot (1081^2 - 1) = 1081 \cdot (1081 - 1) \cdot (1081 + 1) = 1081 \cdot 1080 \cdot 1082$

$1 + 0 + 8 + 1 = 10, \quad 3 \nmid 10$
$1 + 0 + 8 + 0 = 9, \quad 3|9$
$1 + 0 + 8 + 2 = 11, \quad 3 \nmid 11$

Så $3|(1081^3 - 1081)$. Tallene som dukker opp på plassene til 10, 9 og 11 vil være etterfølgende tall uansett hva slags tall vi velger i starten. Så ett av dem må være delelig med 3.

Kristoff
$(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$
Siden $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$, så er $3|(n^3 - n)$.

Diana
$(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$

Da har vi de tre faktorene: $n, n+1, n-1$, og $n - 1 \equiv n + 2(mod\ \ 3)$
Siden disse er tre etterfølgende tall, så må hvert av dem havne i én av kategoriene:
$3k,\ \ 3k+1,\ \ 3k+2$
Siden ett av tallene kan skrives som 3k, så er deres produkt delelig med 3.

a) Hvilket svar likner mest det du ville ha skrevet? Hvorfor?

b) Hvilket svar er du mest uenig i? Hvorfor?

c) Hvilket svar ville professoren din ha vurdert som best? Hvorfor?

OPPGAVE 4. Talldifferanser.

En lærer ga følgende oppgave til elevene sine:
Del tallet 50 i to mindre tall, med en differanse på 8 mellom dem.

Sarahs svar:
Hvis jeg velger to tall nærme 10, *som* 4 *og* 12, *så blir summen mye lavere enn* 50. *Hvis jeg velger to tall nærme* 40, *som* 32 *og* 40, *så blir summen større enn* 50. *Så de to tallene burde være et sted i midten. Tallene vi leter etter er* 21 *og* 29, *siden* $29 - 21 = 8$ *og* $21 + 29 = 50$.

a) Er dette nok til å overbevise en medelev?

b) Ville professoren din akseptert dette svaret?

c) Hvordan ville du besvart oppgaven?

OPPGAVE 5. Papirbretting.

Brett et papirark på midten uten å rotere det. Brett det deretter på midten igjen. Og igjen.
Hvor mange bretter er det på papiret når du har brettet arket én gang? To ganger? Tre ganger?

a) Generaliser og gi et uttrykk som forutsier hvor mange bretter det vil bli om du bretter arket n ganger.

b) Gi et argument for hvorfor svaret ditt er riktig.

OPPGAVE 6. Oddetall og partall.

For tall større enn 1, er de følgende påstandene riktige?

A: Produktet av et oddetall og et partall er alltid et partall.
B: Alle partall kan skrives som produktet av et oddetall og et partall.

Gi et argument for hvorfor hver påstand er riktig eller gal.

OPPGAVE 7. Faktorisering.

a) Kan tallet $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ deles på 105? Gi et argument som forklarer hvorfor eller hvorfor ikke.

b) Er tallet 105 delelig på 15? Gi et argument som forklarer hvorfor eller hvorfor ikke.

OPPGAVE 8. Alfabetet.

Vi skriver alfabetet flere ganger etter hverandre, som vist under:

a b c ... y z æ ø å a b c ... y z æ ø å a b c ... y z æ ø å ...

a) Hvilket tall havner på plass nummer 100? Gi et argument som forklarer hvorfor.

b) Hvis vi fortsetter å skrive alfabetet til vi har skrevet ned 200 bokstaver, på hvilken plass vil vi finne den siste E-en? Gi et argument som forklarer hvorfor.

OPPGAVE 9. Modulo.

En lærer ga følgende oppgave:
Finn x i det følgende uttrykket: $17 \equiv x (mod\, 4)$.

Harry:
17 og x har samme rest når det deles på 4.
Så $17 \equiv 13 \equiv 9 \equiv 5 \equiv 1 (mod\, 4)$.

James:
Hvis vi deler x på 4 vil vi ha den samme resten som 17.
Så $17 \equiv 1 (mod\, 4)$ som betyr at $x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

a) Hvilket svar likner mest på hva du ville skrevet?

b) For hvert av svarene, er du enig eller uenig? Forklar hvorfor.

OPPGAVE 10. Simon sier.

I den følgende oppgaven er $|$ en forkortelse for "deler", og $\nmid$ er en forkortelse for "deler ikke".

Følgende er bevist: *Hvis $a|b$ og $b|c$, så er $a|c$.*
Simon sier at vi fortsatt må bevise at *hvis $a^2|b$ og $b|c$, så er $a^2|c$.*

Mener du at den første påstanden allerede har bevist dette, eller mener du at Simon må konstruere et nytt bevis? Forklar hvorfor.

OPPGAVE 11. Multiplikasjonstriks.

Produktet av to tosifrede tall hvor produktet av tierne og produktet av enerne er det samme, gir samme produkt dersom sifrene i tallene reverseres.
For eksempel,

$$26 \cdot 31 = 62 \cdot 13, \text{ gitt at } 6 \cdot 1 = 2 \cdot 3$$
$$21 \cdot 48 = 12 \cdot 84, \text{ gitt at } 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$$
$$68 \cdot 43 = 86 \cdot 34, \text{ gitt at } 6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$$

Gi et argument for å forklare hvorfor dette stemmer.

Vedlegg 3

INSTITUTE OF EDUCATION
UNIVERSITY OF LONDON

Year 10 Proof Survey

Name .... Maths Class ....
first name surname

School .... Boy or Girl ....

Date of Birth .... Today's Date ....
day month year day month year

You have 55 minutes to answer these questions.

In two of the questions you will be asked to choose from a range of answers.

In all the other questions, you will be asked to produce your own answers. We are interested in your thinking as well as your answers, so please show all your rough working for these questions.

Put your rough working on the same page as your answer; use the answer box or any spare space on the page.

In most questions you will be asked for explanations. Make these as clear as you can, but don't make them longer than necessary.

Use a pen. You may cross things out, but do not rub out any of your work and do not use correction fluid.

Do not use a calculator.

The questions are not ordered by difficulty. If you get stuck on a question, don't worry - leave it till later.

On the last page there is a questionnaire. Only fill this in if you have done all you can on the other questions and there is time left over.

G

Sch

Cla

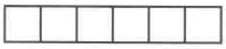
Stu

Longitudinal Proof Project

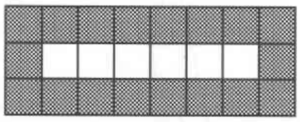
Funded by the Economic and Social Research Council

1 Lisa has some white square tiles and some grey square tiles.
They are all the same size.

She makes a row of white tiles.



She surrounds the white tiles by a single layer of grey tiles.



a) How many grey tiles does she need to surround a row of 60 white tiles? . . . .

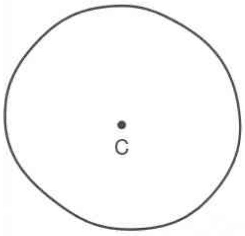
Show how you obtained your answer.

b) Write an expression for the number of grey tiles needed to surround a row of n white tiles. . . . .

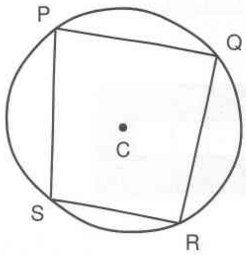
Please leave blank

A1

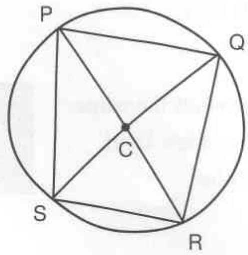
2 Vincent sketches a circle. He calls the centre C.



He then draws a quadrilateral PQRS, whose corners lie on the circle.



He then draws the diagonals of the quadrilateral.



Please leave blank

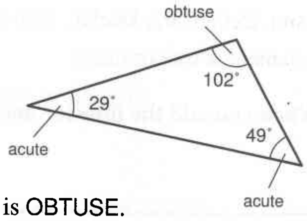
G2

Vincent says
"Whatever quadrilateral I draw with corners on a circle,
the diagonals will always cross at the centre of the circle".

Is Vincent right? . . . .

Explain your answer.

3 Kath and Rose are thinking about the angles of this triangle.



They notice that two angles are ACUTE.

They notice that one angle is OBTUSE.

Kath says: If two angles of a triangle are ACUTE, the third angle is OBTUSE.

Rose says: If one angle of a triangle is OBTUSE, the other two angles are ACUTE.

a) Are Kath's and Rose's statements saying the same thing? ....

b) A triangle has an OBTUSE angle of 113.62°.

Suppose Rose is right.

Which one of these must also be right? Tick (✓) one box.

- ☐ You can be sure that the other two angles are both ACUTE.
- ☐ You can be sure that the other two angles are not both ACUTE.
- ☐ You can't be sure whether the other two angles are both ACUTE until you know the size of both angles.

c) Is Kath's statement true? ....

Explain your answer.

d) Is Rose's statement true? ....

Explain your answer.

Please leave blank

LG1

4 Asim, Beth, Cara, Declan, Erin and Frank were trying to prove whether the following statement is true or false:

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

Please leave blank

G3

Asim's answer

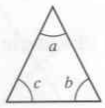
I tore the angles up and put them together.

It came to a straight line which is 180°.
I tried for an equilateral and an isosceles as well and the same thing happened.

So Asim says it's true

Beth's answer

I drew an isosceles triangle, with c equal to 65°.

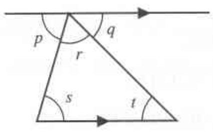


Statements	*Reasons*
$a = 180° - 2c$	Base angles in isosceles triangle equal
$a = 50°$	$180° - 130°$
$b = 65°$	$180° - (a + c)$
$c = b$	Base angles in isosceles triangle equal
$\therefore\ a + b + c = 180°$.	

So Beth says it's true

Cara's answer

I drew a line parallel to the base of the triangle.



Statements	*Reasons*
$p = s$	Alternate angles between two parallel lines are equal
$q = t$	Alternate angles between two parallel lines are equal
$p + q + r = 180°$...	Angles on a straight line
$\therefore\ s + t + r = 180°$.	

So Cara says it's true

Declan's answer

I measured the angles of all sorts of triangles accurately and made a table.

They all added up to 180°.

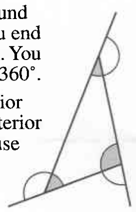
a	*b*	*c*	*total*
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

So Declan says it's true

Erin's answer

If you walk all the way around the edge of the triangle, you end up facing the way you began. You must have turned a total of 360°.

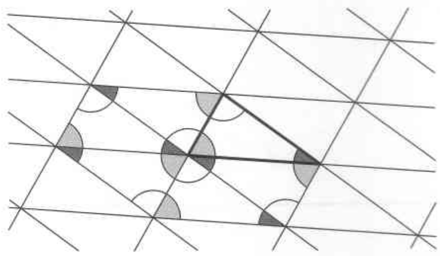
You can see that each exterior angle when added to the interior angle must give 180° because they make a straight line.
This makes a total of 540°.
$540° - 360° = 180°$.



So Erin says it's true

Frank's answer

I drew a tessellation of triangles and marked all the equal angles.



I know that the angles round a point add up to 360°.

So Frank says it's true

a) Whose answer do you like best? ....

b) Whose answer is closest to what you would do? ....

c) Whose answer would get the best mark from your teacher? ....

4 *Continued*

Please leave blank

d) For each of the following, circle whether you agree, don't know, or disagree.

The statement is:

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

	agree	don't know	disagree
Asim's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Beth's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Cara's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Declan's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Erin's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Frank's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3

e) Suppose it has now been proved that:

When you add the interior angles of any triangle, your answer is always 180°.

HG2

Zak asks what needs to be done to prove whether:

When you add the interior angles of any right-angled triangle, your answer is always 180°.

Tick (✓) either A or B.

(A) Zak doesn't need to do anything, the first statement has already proved this. ❑

(B) Zak needs to construct a new proof. ❑

5 Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you as good a mark as possible.

If you add the interior angles of any quadrilateral, your answer is always 360°.

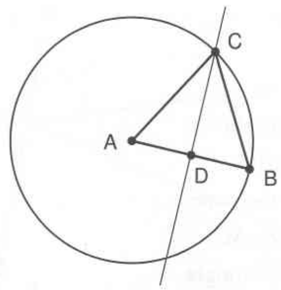
Please leave blank

HG4

Please leave blank

HG7

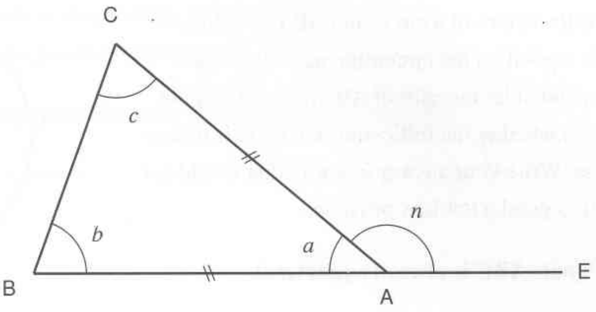
6 A is the centre of a circle and AB is a radius. C is a point on the circumference where the perpendicular bisector of AB crosses the circle. Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you as good a mark as possible.



Triangle ABC is always equilateral.

7

This diagram shows a triangle ABC.
Side AB is the same length as side AC.
Line BAE is straight.



Please leave blank

G4

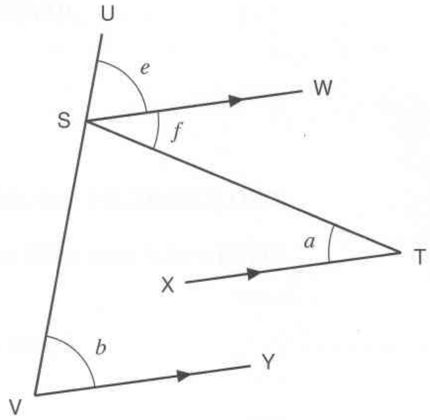
a) Find the value of c when $n = 140°$. . . . .

Write down each step of your calculation.

b) Show that $c = \frac{1}{2}n$, whatever the value of n.

Write down all your steps.

c) In this diagram, lines SW, XT and VY are parallel.
Line USV is straight.

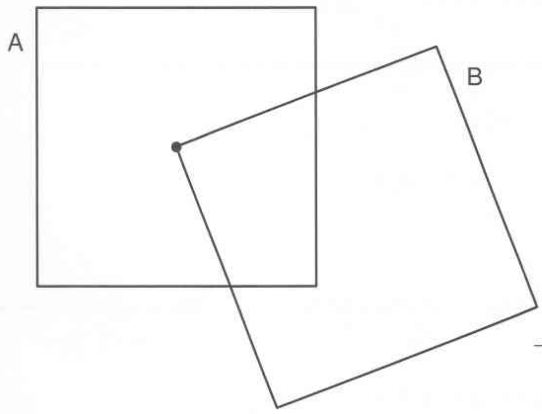


Show that $a = U\hat{S}T - b$.

Write down all your steps.

Please leave blank

8 Squares A and B are identical. One corner of B is at the centre of A.



What fraction of A is overlapped by B ?

. . . .

Explain your answer.

G2b

Please leave blank

Please go to the next question

9 Joe and Fred are thinking about the pair of numbers 5 and 9.

They notice that the SUM $(5 + 9)$ is EVEN.

They notice that the PRODUCT (5×9) is ODD.

Joe says: If the SUM of two whole numbers is EVEN, their PRODUCT is ODD.

Fred says: If the PRODUCT of two whole numbers is ODD, their SUM is EVEN.

Please leave blank

LA1

a) Are Joe's and Fred's statements saying the same thing? . . . .

b) The PRODUCT of two whole numbers is 1247.

Suppose Fred is right.

Which one of these must also be right? Tick (✓) one box.

- ☐ You can be sure that the SUM of the two numbers is EVEN.
- ☐ You can be sure that the SUM of the two numbers is ODD.
- ☐ You can't be sure whether the SUM is ODD or EVEN until you know what the two numbers are.

c) Is Joe's statement true? . . . .

Explain your answer.

d) Is Fred's statement true? . . . .

Explain your answer.

10 Aysha, Brian, Coby, Deon, Eric and Fiona were trying to prove whether the following statement is true or false:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

Please leave blank

A3

Aysha's answer

a is any whole number.

b is any whole number.

$2a$ and $2b$ are any two even numbers.

$2a + 2b = 2(a + b)$.

So Aysha says it's true

Brian's answer

$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$	$4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$	$4 + 6 = 10$

So Brian says it's true

Coby's answer

Even numbers are numbers that can be divided by 2. When you add numbers with a common factor, 2 in this case, the answer will have the same common factor.

So Coby says it's true

Deon's answer

Even numbers end in 0, 2, 4, 6 or 8. When you add any two of these the answer will still end in 0, 2, 4, 6 or 8.

So Deon says it's true

Eric's answer

Let x = any whole number, y = any whole number.

$x + y = z$

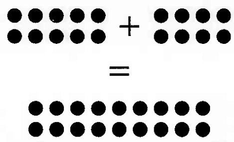
$z - x = y$

$z - y = x$

$z + z - (x + y) = x + y = 2z$

So Eric says it's true

Fiona's answer



So Fiona says it's true

a) Whose answer do you like best? ....

b) Whose answer is closest to what you would do? ....

c) Whose answer would get the best mark from your teacher? ....

10 *Continued*

Please leave blank

d) For each of the following, circle whether you agree, don't know, or disagree.

The statement is:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

	agree	don't know	disagree
Aysha's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Brian's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Coby's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Deon's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Eric's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3
Fiona's answer ...			
shows you that the statement is **always true**	1	2	3

e) Suppose it has now been proved that:

When you add any 2 even numbers, your answer is always even.

HA2

Zoe asks what needs to be done to prove whether:

When you add 2 even numbers that are square, your answer is always even.

Tick (✓) either A or B.

(A) Zoe doesn't need to do anything, the first statement has already proved this. ☐

(B) Zoe needs to construct a new proof. ☐

11 Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you as good a mark as possible.

When you add any 2 odd numbers, your answer is always even.

Please leave blank

HA4

12 Prove whether the following statement is true or false. Write your answer in a way that would get you as good a mark as possible.

If p and q are any two odd numbers, $(p + q) \times (p - q)$ is always a multiple of 4.

Please leave blank

HA7

WAIT! *Please go back to any questions you left out, then check all your answers.*
After that, if there is any time left over, please answer this questionnaire:

Please leave blank

Z1 a) What did you feel about taking part in this survey?

b) Which question did you like best, and why?

c) Which question did you like least, and why?

d) Please add any other comments, if you wish to, about the survey.

Vedlegg 4

Kategorisering av resonnering/produkt etter kategoriene syntaktisk resonnering/syntaktisk produkt (Y/Y), semantisk resonnering/syntaktisk produkt (E/Y) og semantisk resonnering/semantisk produkt (E/E).

	1b_1	1b_2	1c	2_1	2_2	6A	6B
A	Y/Y	-	-	E/E	-	E/E	E/E
B	Y/Y	Y/Y	Y/Y	E/Y	-	Y/Y	Y/Y
C	Y/Y	E/Y	E/E	E/E	-	Y/Y	Y/Y
D	E/Y	E/E	E/E	Y/Y	-	Y/Y	E/E
E	E/E	E/E	E/E	Y/Y	-	E/Y	E/E
F	Y/Y	E/E	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	-
G	E/Y	Y/Y	Y/Y	E/Y	E/E	Y/Y	Y/Y
H	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y
I	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	E/E
J	Y/Y	Y/Y	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	E/E
K	Y/Y	E/E	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	E/E
L	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y
M	Y/Y	E/Y	Y/Y	Y/Y	E/E	Y/Y	Y/Y
N	Y/Y	E/E	E/E	Y/Y	E/E	E/E	E/E
O	Y/Y	E/E	Y/Y	Y/Y	E/E	Y/Y	E/E
P	Y/Y	-	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	E/E
Q	-	-	Y/Y	Y/Y	-	Y/Y	E/E
R	E/E	Y/Y	E/E	E/E	Y/Y	-	-
S	Y/Y	Y/Y	Y/Y	Y/Y	E/E	Y/Y	E/E
T	Y/Y	E/Y	Y/Y	Y/Y	-	E/Y	E/E
U	E/E	E/E	E/E	E/E	-	Y/Y	Y/Y
V	Y/Y	E/E	Y/Y	E/E	Y/Y	Y/Y	E/E
W	Y/Y	Y/Y	Y/Y	Y/Y	Y/Y	-	-

Kategorisering av argumentene etter type. Empiriske argumenter (EA), ugyldig eller uferdig argument (UA) og bevis (B).

	1b_1	1b_2	1c	2_1	2_2	6A	6B
A	UA	-	-	EA	-	EA	B
B	B	UA	B	UA	-	UA	UA
C	UA	B	B	UA	-	UA	UA
D	B	UA	B	UA	-	UA	B
E	UA	EA	B	UA	-	B	UA
F	B	UA	UA	UA	-	UA	-
G	B	B	B	B	UA	UA	UA
H	UA	-	UA	B	-	UA	UA
I	B	-	UA	UA	-	UA	B
J	UA	UA	UA	B	-	B	B
K	B	EA	B	B	-	UA	B
L	UA	-	UA	UA	-	UA	UA
M	B	B	B	UA	UA	UA	UA
N	UA	UA	UA	UA	EA	EA	B
O	B	UA	B	UA	UA	UA	B
P	UA	-	B	UA	-	UA	B
Q	-	-	B	UA	-	UA	B
R	EA	UA	B	UA	UA	-	-
S	UA	UA	B	B	UA	UA	B
T	B	UA	UA	UA	-	UA	EA
U	UA	UA	UA	UA	-	UA	UA
V	UA	EA	UA	EA	UA	UA	EA
W	UA	B	B	UA	UA	-	-