Universitetet i Agder

Master

# 10. trinn-elevers arbeid med representasjoner av funksjoner

En studie av elevers oversettelser mellom representasjoner, og deres valg av representasjoner.

TONJE LARSSEN OG HENRIK STOKKELAND

VEILEDERE
Hans Kristian Nilsen
Simon Goodchild

**Universitetet i Agder, 2023**
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

# Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen av vår tid som lektorstudenter ved Universitetet i Agder. Vi opplever at de siste fem årene har gått fort, og vært veldig lærerike. Vi går ut herfra med mange nye erfaringer og gode vennskap. Gjennom hele løpet har vi vært svært heldige med gode klassemiljøer og dyktige forelesere.

Først vil vi takke våre gode veiledere Hans Kristian Nilsen og Simon Goodchild for god støtte gjennom hele prosjektet. Vi takker for konstruktive tilbakemeldinger, og nyttige og spennende samtaler om stort og smått.

Vi vil også rette en takk til rektoren som tillot at vi kunne samle inn data og lærerne som inviterte oss inn i sine klasserom. Elevene som deltok i studien fortjener en ekstra stor takk for tålmodigheten og engasjementet. Vi vil også rette en stor takk til Ingunn som har vært behjelpelig med å lese korrektur. Sist, men ikke minst, vil vi takke venner og familie for gode og oppmuntrende ord i stressende tider.

Kristiansand, mai 2023
Tonje Larssen og Henrik Stokkeland

## Sammendrag

Representasjoner har stor plass i matematikkfaget, særlig representasjoner knyttet til funksjoner. Ofte kan ulike matematiske begreper være svært abstrakte, og representasjoner er da nødvendig for å få tak i deler av matematikken. Temaet for denne masteroppgaven er bruk av og oversettelser mellom ulike representasjoner av funksjoner blant elever på 10. trinn. Vi har observert og samlet inn skriftlige besvarelser fra to klasser, hvor elevene til sammen ble delt inn i ni grupper. Ved to av disse gruppene har observasjonen foregått ved hjelp av videoopptak. Bakgrunnen for denne studien er følgende forskningsspørsmål:

1. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers oversettelser mellom ulike representasjoner av funksjoner i arbeid med oppgaver løst i grupper?
2. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers valg av representasjoner i gruppearbeid med funksjoner?

For å besvare disse spørsmålene har vi tatt utgangspunkt i representasjonsregistre (Duval, 2006, 2017), manipulative modeller (Lesh, 1979), overganger mellom representasjoner (Duval 2006, 2017) og hjelpemiddelrepresentasjoner (Janvier, 1987). Som analyseverktøy har vi tatt i bruk Hitts (1998) nivåer av forståelse av funksjoner. Læringsperspektivet for studien er sosialkonstruktivisme, da dette tillater oss å ta ståsted som observatører for sosiale interaksjoner og handlinger og samtidig si noe om elevers internalisering av matematiske begreper. Våre funn viser at elevene ofte velger løsninger som er hensiktsmessige for dem til hvert tidspunkt og endrer disse der de finner det nødvendig. Det kommer også frem at i arbeid med å sammenkoble ulike representasjoner er det de verbale representasjoner som skaper mest utfordringer.

# Summary

Representations have a lot of space in mathematics education, especially representations bound to functions. Mathematical terms can often be very abstract, and representations are necessary to grasp different parts of the mathematics. The theme for this dissertation is the use of and translations between different representations of functions among pupils in 10th grade. We have observed and collected data from two classes, where the pupils were put in nine groups in total. The data collection in two of these groups was done by video recordings. The background for this study is the following research questions:

1. What characterizes 10th graders translation between different representations of functions in solving of tasks in groups?
2. What characterizes 10th graders choice of representations in groupwork with functions?

To answer these questions, we have used registers of representations (Duval, 2006, 2017), manipulative models (Lesh, 1979), translations between representations (Duval, 2006, 2017) and auxiliary representations (Janvier, 1987). As an analytical tool we have used Hitt's (1998) levels of understanding of functions. The teaching perspective for this study is social constructivism, as this allows us to take a stand as observers for social interactions and actions and at the same time say something about pupils internalizing of mathematical terms. Our findings show that pupils often choose representations that is appropriate at the given time and make changes if they find it necessary. It also shows that while making connections between different representations, it is the verbal representations that is most troublesome.

# INNHOLDSFORTEGNELSE

# 1 INNLEDNING

I dette kapittelet gjør vi rede for hvorfor vi valgte å undersøke representasjoner av funksjoner. Deretter presenterer vi studiens hensikt, samt forskningsspørsmålene. Til slutt beskriver vi oppgavens oppbygning.

## 1.1 Bakgrunn

Våren 2021 hadde vi emnet «Forskning på læring og undervisning av matematikk» ved Universitetet i Agder, hvor vi begge skrev oppgaver relatert til representasjoner. Dette vekket en interesse for representasjoner hos begge. Dette vekket interesse hos begge, og vi bestemte derfor å forske på representasjoner. Deretter begrenset vi oppgaven ved å velge tema. Vårt inntrykk er at mange elever synes funksjoner er veldig abstrakt, og vi hadde en tanke om at representasjoner kunne være et viktig middel for å forstå begrep som for mange er vanskelig. Samtidig ser vi at representasjoner har fått en mer sentral posisjon i læreplanen. Med bakgrunn i dette, anser vi det å forske på representasjoner av funksjoner som veldig relevant for vår fremtid som lærere i matematikk.

Læreplanen legger stor vekt på representasjoner i matematikkfaget, blant annet gjennom kjerneelementet «representasjoner og kommunikasjon». Dette gjelder særlig representasjoner knyttet til funksjoner, representasjoner og kommunikasjon. I matematikk er representasjoner uttrykksmåter for begreper, sammenhenger og problemer. Disse kan være kontekstuelle, konkrete, verbale, symbolske og visuelle. Kommunikasjon handler i denne sammenhengen om å bruke et matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Det er et krav at elevene skal få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger og de må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. I tillegg må de kunne oversette mellom representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020).

I tillegg til det nevnte kjerneelementet er det naturlig å se på hva elevene burde kunne. Kompetansemålene som er relevante for denne oppgaven er funnet under kompetansemål etter 8. trinn, og vi anser det som rimelig å kunne forvente at elevene på 10. trinn har de nødvendige kunnskapene for å løse oppgavene de blir gitt i denne studien.

Kompetansemål etter 8. trinn:

- *«utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2020)*
- *«representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene» (Utdanningsdirektoratet, 2020)*

I matematikkfaget er det en grunnleggende ferdighet å kunne uttrykke seg muntlig, som innebærer at man skaper mening gjennom matematisk språk. Det vil si at man kommuniserer ideer og drøfter de matematiske problemene man støter på. Det går også ut på å samtale om strategier og løsninger med andre. Muntlige ferdigheter i matematikk utvikles fra å bruke et hverdagslig språk til å gradvis bli mer presist matematisk (Utdanningsdirektoratet, 2020).

## 1.2 Forskningsspørsmål

Denne studien undersøker 10. trinn-elevers bruk av og oversettelse mellom ulike representasjonsformer av funksjoner. På bakgrunn av dette har vi valgt å undersøke følgende forskningsspørsmål:

1. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers oversettelser mellom ulike representasjoner av funksjoner i arbeid med oppgaver løst i grupper?
2. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers valg av representasjoner i gruppearbeid med funksjoner?

Målet med det første forskningsspørsmålet er å finne kjennetegn på 10. trinn-elevers oversettelser mellom ulike representasjoner av funksjoner. Vi ønsker med dette å peke på hvilke oversettelser elevene behersker og hvilke de finner mer utfordrende. Dette gjelder i arbeid med representasjoner som de selv skaper, men også i arbeid med representasjoner som de får utdelt ferdig utfylt. Med det andre forskningsspørsmålet ønsker vi å finne kjennetegn på elevers valg av representasjoner i arbeid med funksjoner. Dette innebærer at vi ønsker å finne kjennetegn på elevenes bruk og forståelse av nevnte representasjoner, samt se etter hvilke representasjoner elevene selv finner hensiktsmessige å bruke i gitte situasjoner og på hvilke måter elevene benytter seg av disse. Vi ønsker altså å systematisk og oversiktlig kartlegge elevenes representasjonsformer.

For å besvare forskningsspørsmålene har vi observert to klasser på 10. trinn, hvor de i grupper jobbet med representasjoner av funksjoner av første og andre grad på varierte måter. På grunn av studiens omfang valgte vi å se vekk fra funksjoner av høyere grad samt eksponentialfunksjoner. Til sammen ble klassene delt inn i ni elevgrupper, fire i klasse 1 og fem i klasse 2, som vi har samlet inn skriftlig arbeid fra, samt tatt videoopptak av en gruppe fra hver klasse. Vi har tatt utgangspunkt i Hitts (1998) nivåer av forståelse for å klassifisere elevresonnementene.

## 1.3 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er delt inn i seks kapitler, som alle begynner med en innledende tekst hvor vi gjør rede for kapitlets innhold. I kapittel 2 beskriver vi vårt teoretiske rammeverk, hvor vi presenterer blant annet sosialkonstruktivisme (Thompson, 2020; Bauersfeld, 1995), konseptuell og prosedyremessig kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986), representasjoner (Lesh, 1979; Janvier, 1987; Bossé et al., 2011; Duval, 2006, 2017; Enge & Valenta, 2013) og funksjoner (Wheeler, 1981; Petterson & Brandell, 2018). I tredje kapittel presenterer vi hvordan vi har gått frem for å samle inn datamateriale, samt ulike valg vi har tatt underveis i utviklingen av studien. I kapittel 4 presenterer vi våre funn i lys av en modifisert versjon av

Hitts (1998) nivåer av forståelse, før vi i kapittel 5 drøfter funnene våre og sammenligner resultatene med tidligere forskning. I kapittel 6 vil vi oppsummere funnene gjennom en konklusjon og svare på forskningsspørsmålene, samt gjøre rede for didaktiske og forskningsmessige implikasjoner. Her vil vi også komme med avsluttende refleksjoner fra studien.

# 2 TEORI

I teorien vil vi først presentere vårt perspektiv på læring, og hvordan sosial konstruktivisme påvirker vår tilnærming til forskningsprosjektet. Deretter etablerer vi de to formene for kunnskap (konseptuell og prosedyremessig) vi kategoriserer elevers kunnskap i, før vi går gjennom de forskjellige representasjoner og representasjonsregistre, samt transformasjoner mellom disse. Til slutt presenterer vi tidligere forskning som har vært viktig i utviklingen av elevaktiviteter og analyseverktøyet.

## 2.1 Sosialkonstruktivisme

Vi ønsker å studere hvordan elever arbeider med representasjoner av funksjoner, og de «sosiale og kulturelle matematiske og pedagogiske handlingene og individets internalisering av dem» (Thompson, 2020, s. 130, vår oversettelse). Et sosialkonstruktivistisk perspektiv tillater oss å ta ståsted som observatører for de sosiale interaksjonene og elevenes handlinger, men likevel si noe om elevers internalisering av de matematiske begrepene.

Sosialkonstruktivisme er basert på individets tilegning av kunnskap, og hvordan denne prosessen er formet av historie og kultur. I et konstruktivistisk perspektiv er det viktig at vi er bevisst på hvordan vi definerer kunnskap. Kunnskap kan bli sett på som en handling eller en prosess, som «noe som funker» (Bauersfeld, 1995, s.143). Kunnskap kan også sees på som en utvikling av forståelse med mål om å konstruere noe som fungerer kognitiv, som passer sammen og som kan håndtere nye caser. I dette prosjektet har vi sett på kunnskap som elevers utvikling av forståelse, hvor tegn på denne forståelsen vil være evnen til å utføre «handlinger og prosesser som funker» (Bauersfeld, 1995, s. 143) og deltakelse i sosiale interaksjoner rundt diverse representasjoner og konsepter.

Thompson (2020) skriver at Paul Ernest (1991, 1994, 1998) introduserte begrepet sosial konstruktivisme til det matematikkdidaktiske feltet. Han delte sosialkonstruktivisme inn i to retninger, hvor den ene stammer fra radikal konstruktivisme mens den andre bygger på Vygotskijs ideer, og introduserer matematisk objektivitet som et sosialt konsept (Thompson, 2020, s. 130). Thompson påpeker viktigheten av at selv om man velger å fokusere på sosialkonstruktivisme, som avgjørende tar hensyn til det sosiale aspektet i klasserommet, må vi være bevisst om eksistensen av radikal konstruktivisme, og ha den som en aktiv bakgrunn. Cobb et al. beskriver «… matematikk som en utviklende sosial deltakelse som består av, og ikke eksisterer uavhengig av, den konstruktive aktiviteten hos individet (Cobb et al., 1992, s. 28 som sitert i Thompson, 2020, s. 131).

Matematisering kan sees på som en interaktiv prosess mellom lærere og elever eller mellom elever i elevgruppen. Gitt dette synet vil utviklingen av matematisering være en sosial prosess som foregår i klasserommet (Bauerfeld, 1995, s.150). Det er ifølge Bauerfeld hovedsakelig i denne sosiale situasjonen elever danner sin kunnskap om matematikk (Bauerfeld, 1995, s. 151). For å få innsikt i elevenes forståelse inntar vi derfor et sosialkonstruktivistisk perspektiv, vel vitende om at «elever har sin egen matematiske virkelighet som lærere og forskere bare kan forstå via modeller» (Thompson, 2020, s. 128).

Det var mye uenighet og diskusjon før konstruktivisme ble et akseptert syn på kunnskap i matematikkundervisning. Et av argumentene mot konstruktivisme var en motstand til hvordan konstruktivisme ikke anser sannhet som et mellomledd mellom kunnskap og virkelighet. Dette er ikke et problem for vår studie, da vi ønsker å se på elevers interaksjon med representasjoner av funksjoner, og ikke direkte på deres forhold til funksjoner som et «objektivt begrep».

## 2.2 Konseptuell og prosedyremessig kunnskap

Det er ofte nødvendig å skille mellom forskjellige typer kunnskap for å mer nøyaktig analysere elevers forståelse. Hiebert og Lefevre skriver «Konseptuell og prosedyremessig kunnskap om matematikk representerer et skille som har mottatt en stor mengde diskusjon og debatt gjennom årene» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1, vår oversettelse). Det er mulig at diskusjonen kommer fra spørsmålet om hvordan elever lærer matematikk og hva undervisningen bør fokusere på. Dette kan igjen føre til spekulasjoner om hvilken type kunnskap som er viktigst, og hva som kan være en relevant balanse mellom disse. «Ofte har diskusjonen av ferdigheter og kunnskap tatt formen av en debatt om hvilken av disse som bør vektlegges under undervisning» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1, vår oversettelse).

Det forskes fortsatt på forholdet mellom konseptuell og prosedyremessig kunnskap i matematikkundervisning.  Dagens skille mellom konseptuell og prosedyremessig kunnskap er relativt likt som før, men det finnes noen forskjeller mellom dagens debatt og slik debatten var tidligere. En av disse er at fremfor å diskutere om begrepsmessig eller prosedyremessig kunnskap bør prioriteres i undervisning er det nå et langt større fokus på å «beskrive prosessen hvor elever tilegner seg kunnskap og forholdet mellom forskjellige typer kunnskap» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 2, vår oversettelse). Dette er med den implisitte antakelsen at det første steget for å forbedre undervisning er å forstå situasjonen så komplett som mulig. En annen forskjell er diskusjonen knyttet til selve forholdet mellom begrepsmessig og prosedyremessig kunnskap. Historisk sett har de to kunnskapstypene blitt betraktet som separate, og som konkurrenter i kampen om lærerens oppmerksomhet, hvor utfallet i bestefall var at disse eksisterte side om side (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1-3). Nå er det derimot en økende interesse for samspillet mellom begreper og prosedyrer, og hvordan disse er relatert til hverandre. Med andre ord, selv om man i didaktisk fagterminologi fortsatt skiller begrepsmessig og prosedyremessig kunnskap, så har man i våre dager en langt større vekt på sammenheng og sameksistens, og hvordan disse avhenger av hverandre med tanke på elevens læring (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1-3).

Hiebert og Lefevre (1986) definerer konseptuell kunnskap slik: «konseptuell kunnskap er karakterisert mest klart som kunnskap som er rik på forhold. Det kan sees på som et sammenkoblet nett av kunnskap hvor de sammenknyttende forholdene er like fremtredende som selve kunnskapen er» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3, vår oversettelse). Gitt denne definisjonen er det ikke mulig å ha små isolerte deler med begrepsmessig kunnskap, da det bare vil være begrepsmessig kunnskap dersom det har et forhold til annen informasjon. Utviklingen av begrepsmessig kunnskap kan oppnås ved å konstruere forhold mellom allerede eksisterende kunnskap, eller ved å tilegne seg ny informasjon som kobles til allerede eksisterende informasjon.

Prosedyremessig kunnskap kan sees på som å være sammensatt av to separate deler. «En er en familiaritet med det formelle språket, eller et symbolsk representasjonssystem, i matematikk.» (Hiebert & Lefevre, 1986 s. 6, vår oversettelse). Dette inkluderer å være kjent med syntaks, for eksempel vil elever som har dette aspektet av prosedyremessig kunnskap vite at uttrykket $y = x + 5$ er mulig og korrekt syntaks, mens $y += 2x$ aldri vil være korrekt, uavhengig av hva $x$ eller $y$ er (Hiebert & Lefevre, 1986 s. 5-6). Den andre delen er regler og algoritmer som tas i bruk for å løse matematiske oppgaver. Dette er forutbestemte handlinger som skal følges steg for steg for å løse en gitt oppgave. Det er viktig å ikke undervurdere viktigheten av at oppgaver gitt på skolen oftest er symbolske manipulasjonsprosedyrer, og elever er derfor kjent med regler og algoritmer for å løse symbolske manipulasjonsoppgaver. En annen type prosedyre er handlinger i problemløsning og prosedyrer hvor vi manipulerer mentale bilder, fysiske objekter, diagrammer eller andre representasjoner som ikke er de standardiserte symbolene i våre matematiske systemer (Hiebert & Lefevre, 1986).

Hiebert og Lefevre foreslår at det viktigste skillet mellom prosedyremessig og konseptuell kunnskap er at i prosedyrene er det som regel et lineært forhold, hvor prosedyremessig kunnskap kan beskrives som sekvensiell. Dette gir en tydelig rekkefølge for prosedyrene, med fastsatte regler for hvilken handling som skal utføres først. I motsetning er det stor variasjon i forhold innen konseptuell kunnskap, de forskjellige delene med informasjon er tett sammenkoblet, med mange forskjellige relasjoner (Hiebert & Lefevre, 1986 s. 7-8).

I det sosialkonstruktivistiske perspektivet kan vi hverken se prosedyremessig eller konseptuell kunnskap direkte. Dette må gjøres gjennom modeller. Vi har med dette målet valgt en modell som analyserer elevers valg og bruk av representasjoner av funksjoner og deres artikulering rundt arbeidet.

### 2.3 Representasjoner

Siden studien har hovedfokus på representasjoner, finner vi det nødvendig å definere dette begrepet. Vi vil i dette delkapitlet beskrive ulike representasjoner og representasjonsregistre, samt transformasjoner mellom disse. En grunnleggende og enkel forklaring av representasjoner er at en representasjon er noe som står for noe annet. Denne definisjonen kan til tider være for vag. Det kan da være nødvendig å ta i bruk en mer omfattende definisjon. Duval (2006) skriver «Representasjoner kan være individers overbevisning, oppfatning eller misoppfatning, som vi får tilgang til gjennom individets verbale og skjematiske produksjoner» (Duval, 2006, s. 104). Representasjoner kan også være tegn og deres komplekse assossiasjoner, som produseres i henhold til regler og som tillater beskrivelsen av et system, en prosess eller et sett med fenomener. Representasjoner, inkludert enhver form for språk, opptrer ofte som vanlige verktøy for å produsere ny kunnskap og ikke bare for å kommunisere en bestemt mental representasjon (Duval 2006). Vi har for denne studiens skyld begrenset ordet *representasjoner*, og bruker det bare for eksterne og observerbare modeller for elevenes interne begreper (Lesh et al., 1987, s. 33).

### 2.3.1 Representasjonsregistre

Duval (2006) skiller mellom fire forskjellige kategorier av registre, som han kaller representasjonsregistre. Han påpeker at ikke alle semiotiske systemer er registre, bare de som tillater en konvertering av representasjoner. Konverteringene beskrives i delkapittel 2.3.3.

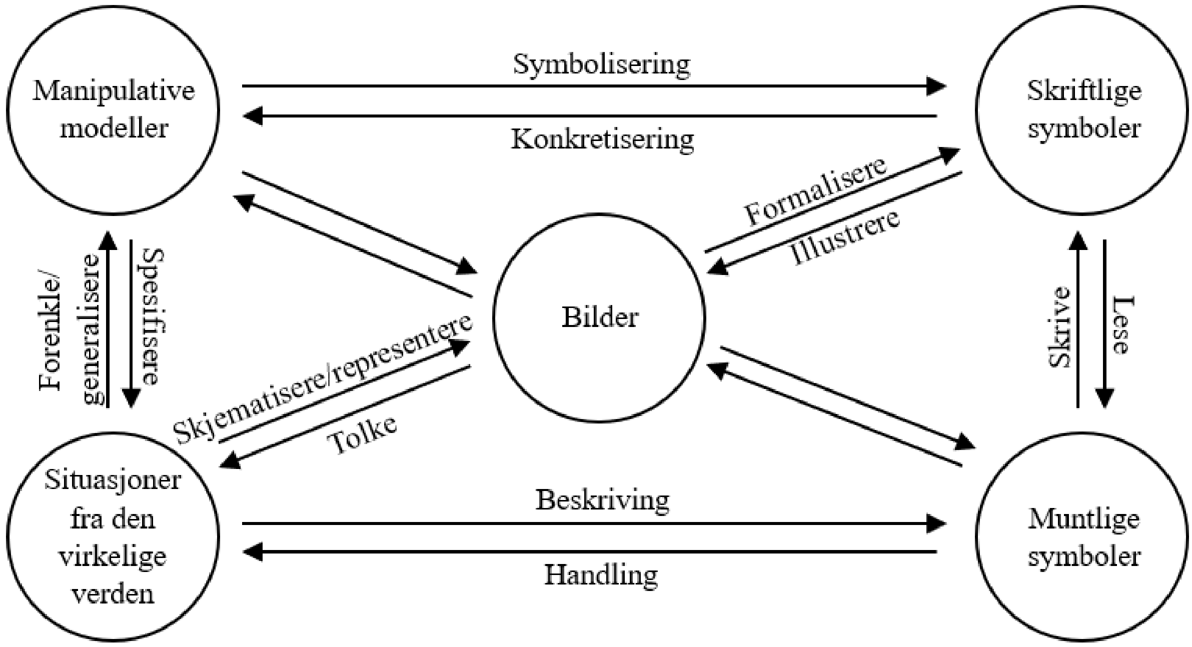
Representasjoner som tar i bruk naturlig språk innebærer både muntlige beskrivelser og skriftlige bevis, teoremer osv. Disse representasjonene er multifunksjonelle og diskursive. De symbolske registrene, som inkluderer både tall og formelle symbolske uttrykk, er monofunksjonelle og diskursive. De billedlige representasjonene (som er enten ikonisk eller ikke-ikonisk) er ikke-diskursive og multifunksjonelle. Det siste registeret er registeret av grafiske representasjoner, bestående av kartesiske diagrammer og grafiske representasjoner. Disse er monofunksjonelle og ikke diskursive.

Prosessene for monofunksjonelle representasjoner er for det meste algoritmer, mens prosesser innen multifunksjonelle registrene kan generelt sett ikke uttrykkes som algoritmer. Diskursive registre benytter seg av ord eller symboler for å representere et objekt, mens ikke-diskursive registre består av grafer, bilder eller andre visuelle representasjoner.

Duval (2017) skriver om at «elevers produksjoner i matematikk er semiotiske produksjoner. De er utført i minst to registre, hvor ett av disse vil være naturlig språk i dets muntlige og/eller skriftlige produksjon» (Duval, 2017, s.110). Dette vil kunne føre til at en større andel av elevenes representasjoner er fra registeret naturlig språk, og ettersom elevene har arbeidet i grupper vil en stor andel av det naturlige språket være muntlig. Dette vil for studien bety at elever til tider vil arbeide i flere registre samtidig, med en verbal beskrivelse av de andre representasjonene.

### 2.3.2 Manipulativer

Lesh (1979) sine kategorier for representasjoner skiller seg på flere måter fra Duvals registre, blant annet ved å inkludere en «virkelig verden situasjon» og «manipulative modeller». Dette er naturlig da Lesh har et sterkt fokus på problemløsning og modellering, og vil derfor ha et økt fokus på hvordan representasjoner forholder seg til en virkelig situasjon.



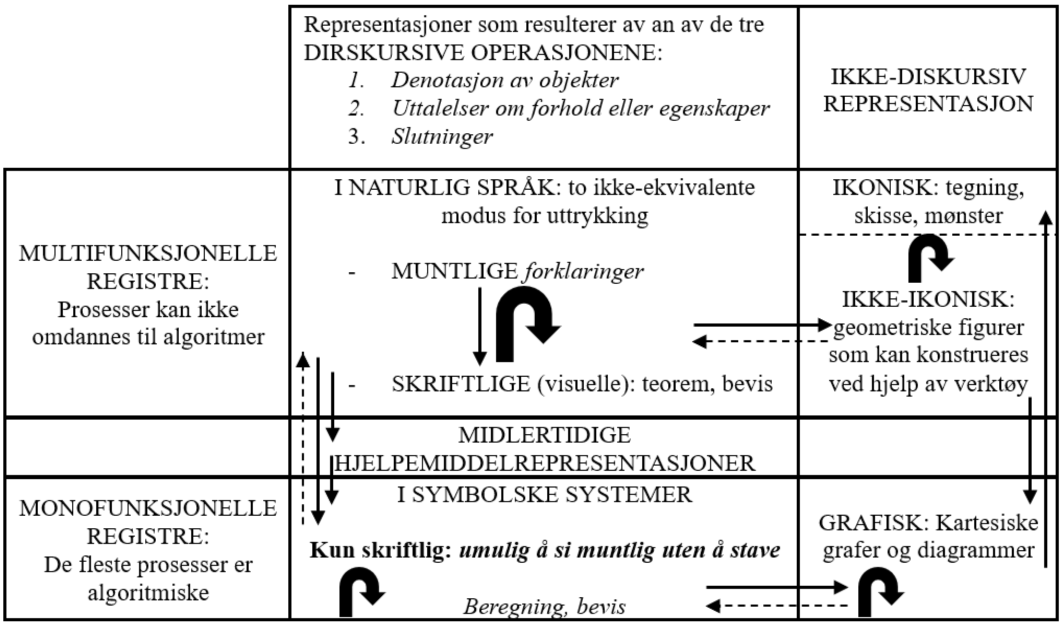

Figur 2.1: Kategorier for representasjoner (Tilpasset fra Lesh, 1979, s. 167)

Et viktig aspekt av manipulative modeller er å kunne redusere mengden «støy» i sammenligning med en situasjon i den virkelige verden. Støy er egenskaper som ikke er relevante for konseptet representasjonen skal representere. Et mål ved å inkludere en manipulativ modell er blant annet at «en tegning eller fysisk objekt kan tilføre informasjon som en 'low-imagery' elev muligens ikke vil prosessere fra en verbal uttalelse av et problem» (Barnett et al., 1979, s. 78).

Lesh (1979) tar et mer kognitivt perspektiv enn hva vi gjør, og har muligheten til i denne studien. Han påpeker at utviklingen hos elever er veldig variert, og graden elever er i stand til å mentalt fremstille bilder uten en konkret situasjon foran seg vil variere mye. Selv om vi ikke studerer den kognitive utviklingen hos elever kan vi med støtte i andres forskning ta tiltak som å inkludere manipulative representasjoner i vår studie. Dette kan bidra til at en større andel av elevene deltar aktivt, noe som vil føre til at vi får mer data. I tillegg vil dette forhindre en mulig feilkilde, ved at dataen vår vil representere hele elevgruppen fremfor deler av den.

### 2.3.3 Overganger mellom representasjoner

Pilene på figur 2.2 symboliserer overganger mellom forskjellige representasjonsregistre. De hele pilene kan sees på som enklere overganger, som generelt sett er mindre krevende. Overgangene med stiplede piler vil ofte være utfordrende og mer krevende for elever. Som Duval skriver: «suksess i å konvertere representasjoner involverer aldri evnen til å gjenkjenne og utføre den inverse konverteringen» (Duval, 2017, s. 84).




Figur 2.2: Illustrasjon av representasjonsregistre (Tilpasset fra Duval, 2006, s. 110)

Transformasjon av representasjoner kan deles inn i to hovedkategorier; behandling (treatment) og konvertering (conversion). Behandling vil være arbeid som hele tiden foregår innenfor samme register og er representert i figur 2.2 med buede piler, mens konvertering vil innebære å endre register uten å endre innholdet i objektet (Duval, 2006). Dette er representert med rette piler i figur 2.2.

Duval (2006, 2017) påpeker at overganger mellom verbale representasjoner og de andre representasjonsregistrene kan være veldig utfordrende for elever. Han påpeker at det er et stort kognitivt gap mellom naturlig språk og symbolske representasjoner. Konverteringer fra naturlig språk til symbolske representasjoner vil ofte kreve en hjelpemiddelrepresentasjon, noe vi kommer tilbake til i neste delkapittel. Det naturlige språket er utrolig viktig da elevers matematiske produksjoner alltid finner sted i minst to registre, hvor ett av disse vil være det naturlige språket (Duval, 2017, s.110).

Bossé et al. (2011) tok i bruk Janvier (1987) sin tabell (Tabell 2.1) for konverteringer mellom representasjonsformer for å forklare vanskelighetsgraden til konverteringer mellom disse. Han påpeker at representasjoner krever forskjellige teknikker for å kunne tolkes, noe som kan føre til variert vanskelighetsgrad. Noen overganger er i seg selv mer komplekse og krever større konseptuell forståelse enn andre, mens andre krever flere trinn i konverteringsprosessen. En endelig vurdering av hvilke konverteringer som er mest utfordrende for elever er ikke trivielt, og de forskjellige utfordringene assosiert med hver konvertering må sees i sammenheng med hverandre.

| Til<br>Fra | Situasjoner og verbale beskrivelser | Tabell | Graf | Formel (Symbolsk) |
|---|---|---|---|---|
| Situasjoner og verbale beskrivelser | | Måle | Skissere | Modellere |
| Tabell | Lese | | Plotte | Tilpasse |
| Graf | Tolkning | Avlesning | | Kurvetilpassing |
| Formel (Symbolsk) | Parametergjenkjenning | Beregning | Skissere | |

Tabell 2.1: Konverteringshandlinger (Tilpasset fra Janvier, 1987, s. 29)

For at elevene skal være i stand til å konvertere mellom representasjoner er de nødt til å tolke fakta innen både kilde- og målrepresentasjonen. Det er ikke alltid mulig å etablere en 1-1 relasjon mellom informasjonen i de to representasjonene, og eleven må da tolke fakta fra hvert representasjonssystem for å oppklare utydeligheter (Bossé et al., 2011). Disse tolkningene kan kategoriseres inn i lokale og globale tolkninger. En lokal tolkning vil for eksempel være å gå fra tabell til graf, siden alt eleven trenger å vite er at hvert ordnede par med tall kan assosieres med et punkt i planet. Et eksempel på en global tolkning vil være når en elev skal konvertere fra tabell til en symbolsk formel. Da vil det ikke bare være nødvendig at eleven er bevisst på hvordan koordinatene for hvert ordnede par endres i relasjon til hverandre, men de må også være bevisst på den generelle endringen blant de ordnede parene i settet. Elever har generelt sett mer problemer med globale tolkninger, og mange forskere postulerer en sammenheng mellom årsaken bak elevers feil og typen tolkning som er nødvendig for konverteringen (Bossé et. al., 2011, s. 119-120).

| Til<br>Fra | Situasjoner og verbale beskrivelser | Tabell | Graf | Formel (Symbolsk) |
|---|---|---|---|---|
| Situasjoner og verbale beskrivelser | | Global | Global | Global |
| Tabell | Global | | Lokal | Global |
| Graf | Global | Lokal | | Global |
| Formel (Symbolsk) | Global | Lokal | Lokal | |

Tabell 2.2: Tolkningsaktivitet assosiert med konverteringer (Tilpasset fra Bossé et al., 2011, s. 120)

### 2.3.4 Hjelpemiddelrepresentasjoner

Noen konverteringer virker å være mer krevende enn andre. I mange av disse konverteringene tar elever i bruk en ekstra representasjon i tillegg til kilde og målrepresentasjonen (Janvier, 1987). Janvier (1987) kaller dette for en *indirekte prosess*. Han bruker *indirekte representasjoner* om den midlertidige representasjonen for å gå fra kilderepresentasjonen til målrepresentasjonen. Bossé et al. (2011) og Duval (2006) henviser til representasjonen som tas i bruk i de indirekte overgangsprosessene som hjelpemiddelrepresentasjoner (*auxiliary representations*). Dette kan sees på som to transformasjoner, da elevene bruker en midlertidig representasjon i overgangen. Det er rimelig å anta at transformasjoner som krever hjelpemiddelsrepresentasjoner, og da mer enn en transformasjon, kan innebære en økt grad av kompleksitet og gi flere muligheter for feil. Det er også bemerkelsesverdig at de overgangene som krever hjelpemiddelrepresentasjoner (verbal → graf, symbolsk → graf og verbal → symbolsk) er de samme overgangene som mange forskere og lærere løfter frem som mest problematiske for elever. Dette kan føre til at lærere er motvillige til å bruke disse overgangene i klasseromssituasjoner, noe som vil redusere elevers familiaritet med transformasjonen, og som igjen kan forsterke utfordringen ytterligere (Bossé et al., 2011a, 2011b; Hiebert & Lefevre, 1986).

I tabell 2.1 har Janvier (1987) tegnet inn buede piler for å representere *indirekte prosesser*. Dette er for å tydeliggjøre noen av transformasjonene hvor elever oftest vil ta i bruk en indirekte representasjon. Vi kan se at for å utføre konvertering tabell → formel vil elever ofte ta i bruk en grafisk representasjon som en indirekte representasjon, og den totale prosessen blir tabell → graf → formel. Det samme kan sies om prosessen formel → graf som ofte vil bli utført som formel → tabell → graf.

### 2.3.5 Representasjoner og læring av matematikk

Bruk av ulike representasjoner kan gi elevene mulighet til ulike løsningsmetoder, og et viktig aspekt for læring av matematikk er å undersøke likheter og ulikheter samt fordeler og ulemper og hvordan representasjonene hører sammen (Enge & Valenta, 2013, s. 9). Overganger mellom representasjoner er et kritisk moment i læring av matematikk. Mange elever kan synes det er vanskelig å se sammenheng mellom det matematiske objektet og representasjonen av det, noe som kan føre til at de ser på representasjonene som ulike objekter. Valget av passende representasjoner kan være krevende, og det er viktig å være oppmerksom på elevenes bruk av dem. Dersom man ikke diskuterer bruken og tolkninger av representasjoner kan det lede til at matematiske aspekter glemmes (Enge & Valenta, 2013, s. 12).

En viktig mulighet til å lære matematikk ligger i samspillet mellom ulike representasjoner og i utnyttelsen av deres potensiale. Ifølge flere studier har det stor betydning for utvikling av begrepsforståelse og kompetanse i problemløsning at man klarer å bruke ulike representasjoner, samt å kunne veksle mellom dem. Det er på samme tid viktig å være bevisst på at om man kun bruker én representasjon for et objekt kan dette føre til at elevene tror representasjonen er objektet. Dersom man ikke er bevisst på dette kan for eksempel elever tro at en funksjon bare er den symbolske eller grafiske representasjonen av funksjonen (Enge & Valenta, 2013, s. 10).

## 2.4 Funksjoner

Denne studien har fokus på elevers bruk av representasjoner av funksjoner, ikke på selve funksjonsbegrepet. Derfor har vi i vektlagt å gå i dybden på representasjoner og deres overganger fremfor å utdype om funksjonsbegrepet. Vi har gjennom Wheelers (1981) definisjon av funksjoner avklart noen viktige egenskaper ved funksjoner som er nødvendige for å analysere elevers feiloppfatninger. Ved Petterson og Brandells (2018) drøfting av funksjoners rolle i skolen kommer det frem at disse egenskapene ikke ofte er tydelig uttrykt for elevene i undervisning. Vi vil senere se på Fernando Hitts (1998) fem nivåer i utviklingen av funksjonsbegrepet for å kunne si noe om forståelse av funksjoner uten å måtte direkte observere elevers forståelse, noe som ville vært umulig i et sosialkonstruktivistisk perspektiv. Wheeler definerer en funksjon slik:

> «… en starter med to sett, $D$ og $C$, respektivt kalt *domene* og *kodomene* (eller mål) av funksjonen, og en projeksjon $f$ som assosieres med *hvert* element $x \in D$ et *entydig* bilde $f(x) \in C$. Legg merke til de 2 essensielle egenskapene krevd av denne definisjonen:
>
> (1) $f(x)$ er definert for *hver* $x \in D$,
> (2) $f(x)$ er *entydig*, slik at
>
> $$x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$
>
> Disse utsagnene sier respektivt at
>
> (1) hvert element i $D$ er koblet til *minst* ett element i $C$
> (2) hvert element i $D$ er koblet til *maks* ett element i $C$,
>
> så sammen krever de at
>
> Hvert element i $D$ er koblet til *eksakt* ett element i $C$.» (Wheeler, 1981, s. 41, vår oversettelse).

Petterson og Brandell (2018) beskriver funksjoner som et terskelbegrep. Et terskelbegrep er et begrep i matematikken som er mer avgjørende for en elevs utvikling i matematikk enn andre begrep, og det er avgjørende at elever behersker disse begrepene for å kunne benytte seg av matematikken som behandles. Slike begrep er for de fleste elever vanskelig å lære, men har man først tilegnet seg denne kunnskapen, åpner det opp for å lære mer matematikk (Petterson & Brandell, 2018, s. 4).

Funksjonsbegrepet introduseres tidlig i grunnskolen, gjennom aktiviteter hvor elever beskriver mønster og tallfølger, samt arbeider med proporsjonalitet. Blant annet blir funksjoner illustrert med funksjonsmaskiner, hvor det blir tydelig at for ethvert innmatet objekt kommer det ut et annet objekt og begge objekter er som oftest tall. En funksjons egenskap hvor hvert innmatet objekt gir nøyaktig ett objekt som resultat blir ofte ikke like tydelig, og lærere pleier ofte ikke å spesifisere definisjonsmengden eller målmengden. Et allment funksjonsbegrep brukes ikke før på universitets- og høgskolenivå i Norge (Petterson & Brandell, 2018, s. 6). I formell matematikk innføres derimot begreper ved hjelp av formelle definisjoner som er tilpasset elevenes kunnskaper og sammenhengen begrepet introduseres i. Elever bygger delvis opp kunnskapen sin gjennom disse definisjonene, men de skaper tolkningene av et begrep gjennom det de møter i undervisningen av eksempler, beskrivelser og representasjoner. Tolkningene utvikles videre når de anvender begrepet i problemløsning og gjennom arbeid med oppgaver (Petterson & Brandell, 2018, s. 5). I grunnskolen er de fire vanligste måtene en funksjon er representert på verditabeller, algebraiske uttrykk, grafer og verbal/skriftlig beskrivelse av en situasjon. Dette er de samme representasjonene som vi har tatt i bruk i dette prosjektet, men vi har også inkludert manipulative modeller.

## 2.5 Tidligere forskning

I det følgende delkapitlet er det korte beskrivelser av litteratur som har vært en inspirasjon for oss under utviklingen av elevaktivitetene i masterprosjektet og analyseverktøyet. Vi har lagt vekt på de funnene som er mest relevante for vår egen studie. Delkapitlet starter med Kathleen Cramers (2001) forskning på utforskning av mønster. Deretter følger en presentasjon av en av Malcolm Swans (2008) oppgaver for å fremme utvikling av matematiske konsepter. Til slutt presenteres Fernando Hitts (1998) nivåer for utvikling av funksjonsbegrepet. Hitts forskning har hatt stor innvirkning på denne studien, da analyseverktøyet vårt er en tilpasset versjon av Hitts fem nivåer.

### 2.5.1 Utforsking av mønster

Kathleen Cramer (2001) skriver at fra barn begynner i barnehagen og gjennom deres første år som skoleelever bør de ha flere erfaringer med å utforske mønster, og at det etter hvert bør lede til å utforske funksjoner. Erfaringene elever på mellomtrinn og ungdomsskole gjør seg i forhold til funksjoner bør baseres på oppgaver som involverer manipulerende materialer og som krever at elevene selv samler inn data. Oppgavene bør lede til at elevene ser sammenhenger mellom den konkrete modellen og mønsteret eller funksjonell sammenheng observert i dataen. Elever bør jobbe med mange oppgaver som bygger på hverandre og som lar dem trekke ut signifikante matematiske ideer fra oppgaven (Cramer, 2001). Dette har vi gjort i første og andre time ved å gi elevene en manipulativ modell eller en tegning som alle oppgaver for hele timen vil relatere til. Cramer sier at lærerens rolle i denne type oppgaver er først å identifisere hva som er gode problemer og organisere dem i en sekvens som bygger på tidligere oppgaver. Lærere må lede elevene i diskusjoner, stille spørsmål for å avklare matematikken og trekke linjer mellom ulike oppgaver. Hun mener også at oppgavene bør være givende å løse, men elevene må bevege seg utover det morsomme aspektet i oppgaven, og se matematikken i det (Cramer, 2001).

Cramer presenterer tre oppgaver som samlet fremmer en forståelse av egenskapene til lineære, kvadratiske og eksponentialfunksjoner. Disse oppgavene ber elevene om å undersøke mønstre i tabeller, finne funksjonsregler, se på grafer og finne likheter og ulikheter innen og imellom de tre typene av funksjoner. Oppgavene ble tilpasset av lærere for å brukes i mellomtrinnet og ungdomsskolen, basert på materialer brukt i to lærerforbedringsprosjekter for å hjelpe lærere i grunnskolen med å få en dypere forståelse av funksjoner.

### 2.5.2 Tolkning av flere representasjoner

Malcolm Swan (2008) presenterer fem typer oppgaver som han mener egner seg for å utvikle forståelsen av matematiske konsepter, hvorav en av disse er tolkning av flere representasjoner. Denne oppgaven som går ut på at elever jobber sammen med å sette sammen kort som viser ulike representasjoner av den samme matematiske ideen. Her er det nødvendig at elevene trekker tråder mellom representasjonene samt danner mentale bilder av konseptene (Swan, 2008, s. 3). I beskrivelsen av oppgaven skriver han at elevene sorterer kort som viser alternative representasjoner av algebraiske uttrykk. Representasjonene er klippet ut i store kort slik at de lett kan sees av grupper på 2-4 elever, og består av algebraiske uttrykk, skriftlige forklaringer, tabeller og beskrivelse i form av areal. Elevene får først utdelt kortene med algebraiske uttrykk og skriftlige forklaringer, noe som tvinger elevene til å studere rekkefølgen av operasjoner. Når de ikke finner noen som matcher, bruker de blanke kort og skriver på selv. Etter dette får de kortene med tabeller, hvor det ikke er noen blanke kort, men åpne rom i tabellene som elevene bes fylle ut. Flere av tabellene passer sammen med to algebraiske uttrykk. Til sist får elevene kortene som inneholder beskrivelse i form av areal. Swan har i denne prosessen gjort flere betraktninger for å øke muligheten for å generalisere basert på resultatene, for å skape diskusjon blant elevgruppen, og for å minimere *overfladisk sammenkobling* av representasjoner. Overfladisk sammenkobling er når elever sammenkobler representasjoner på basis av like tall. Vi har tatt inspirasjon fra flere av disse betraktninger, og presenterer senere, i 3.3.1, hvilke lignende betraktninger vi har gjort for å forbedre kvaliteten på dataen vi samlet inn (Swan, 2008, s. 4-7).

### 2.5.3 Forståelse av funksjoner

Fra et sosialkonstruktivistisk perspektiv har vi som sagt ikke tilgang til elevenes matematiske realitet, og heller ikke elevenes forståelse for funksjoner. Ved å ta i bruk Fernando Hitts (1998) fem nivåer i utviklingen av funksjonsbegrepet som en modell kan vi forsøke å få innsikt i elevenes matematiske realitet (Thompson, 2020). Gjennom Hitts modell kan vi beskrive elevers forståelse av funksjoner uten å måtte se direkte på deres forhold til funksjonsbegrepet, noe vi ikke har tilgang til uansett. Vi ønsker å se på elevers forståelse gjennom deres bruk av representasjoner og artikulering rundt disse konverteringene. For å gjøre dette trenger vi et analyseverktøy som kan hjelpe oss å kategorisere elevers bruk av representasjoner, og hvordan de uttaler seg om disse representasjonene og deres overganger. I forberedelsen av studien oppdaget vi Fernando Hitt (1998) sin forskning på elevers forståelse for funksjoner, og innså raskt at hans fem nivåer i utviklingen av funksjonsbegrepet kunne være svært relevant for studien, for å kunne identifisere og kartlegge elevenes forståelse av funksjonsbegrepet. Nivåene handler om elevers bruk av representasjoner av funksjoner, deres transformasjoner og elevenes artikulering om representasjoner og tilhørende transformasjoner. Vi har erfart at artikulering er et kraftig verktøy for forståelse. Dette er innlysende når elever står fast frem til man ber dem forklare oppgaven med egne ord, for så å selv se sammenhenger som de før ikke hadde forstått. Den samme effekten kan ofte representasjoner ha. Vi har flere ganger erfart at elever sliter med å forstå en rekke konsepter før de tar i bruk relevante representasjoner. På bakgrunn av dette vil det for oss være relevant å ta i bruk Hitts (1998) nivåer.

Hitt (1998) uttrykker at det krever et høyt nivå av forståelse for å kunne artikulere overgangen mellom forskjellige representasjoner. Basert på analyse av en mengde forskning av blant annet Dubinsky (1992) Duval (1988), Eisenberg (1992) og Janvier (1987) har Fernando Hitt kartlagt fem nivåer i utviklingen av funksjonsbegrepet. Han foreslår også at de samme nivåene er gyldige for andre begreper enn funksjoner. Disse nivåene er:

1. Upresise ideer om konsept. Inkoherent blanding av forskjellige representasjoner av et konsept.
2. Identifisere forskjellige representasjoner av konseptet. Indentifisere et system av representasjoner.
3. Oversetting med bevaring av mening fra et representasjonssystem til et annet.
4. Sammenhengende artikulering mellom to systemer av representasjoner.
5. Sammenhengende artikulering av forskjellige systemer og representasjon i løsningen av et problem.

Hitt samlet inn 14 spørreskjema med hensikt å kunne tydelig skille mellom de fem nivåene. Spørreskjemaene inkluderte forskjellige representasjoner brukt i undervisning som var del av oppbygningen av elevers funksjonsbegrep. Han samlet data fra både lærere og elever.

Tatt i betraktning at vi ønsker å studere elevers bruk av representasjoner, med det implisitte mål å kunne mer helhetlig beskrive elevers forståelse av funksjonsbegrepet, har vi et veldig likt mål som Hitt hadde i 1998. Det kan argumenteres for at elevers overganger mellom representasjoner, og deres sammenkobling av disse, er tegn på konseptuell kunnskap, da sammenkoblingen av flere deler med informasjon (representasjoner og deres egenskaper) er et sentralt tegn på konseptuell forståelse (Hiebert & Lefevre, 1986). Basert på denne sammenhengen vil det være avgjørende å få en detaljert beskrivelse av elevers bruk av representasjoner, og overganger blant disse, for å kunne bedre forstå elevenes forståelse av funksjonsbegrepet.

Fernando Hitt (1998) så på elevers vansker i artikuleringen av forskjellige representasjoner i arbeid med funksjoner. Han valgte en kvantitativ tilnærming, mens vi har valgt å se på lignende problemstilling med en kvalitativ tilnærming. Det vil være veldig interessant å sammenligne våre resultater med Hitt sine, og se om en kvalitativ tilnærming kan gi mer dybde enn en hva kvantitativ studie er i stand til.

# 3 METODE

I dette kapitlet beskriver vi hvordan prosjektet er designet, hvordan vi bestemte utvalget og hvorfor vi valgte de metodene vi har valgt. Vi vil også presentere oppgavene vi har utviklet til dette formålet, beskrive hvordan gjennomføringen var planlagt og hvordan datainnsamlingen ble utført. Vi presenterer deretter refleksjoner knyttet til etikk, validitet og reliabilitet. Til slutt redegjør vi for hvordan vi har valgt å analysere datamaterialet vi samlet inn.

## 3.1 Metodevalg

Målet med studien vår er å kunne si mer om hvilke deler av arbeidet med funksjoner som er ekstra utfordrende for elever. Vi ønsker å så nøyaktig som mulig finne karakteristikker knyttet til elevenes oversettelser mellom og bruk av ulike representasjonsformer i arbeid med funksjoner. For å kunne identifisere disse detaljene trengte vi en nyansert og detaljert beskrivelse av elevenes arbeid. Basert på dette behovet for «tykke beskrivelser» og detaljer valgte vi å utføre et enkelt casedesign med flere analyseenheter (Jacobsen, 2022, s. 104-107; Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 111).

Vi vurderte i en periode å ha en før- og ettertest av elevenes forståelse av funksjonsbegrepet, og da teste deres bruk av representasjoner i denne situasjonen. Dette ville gitt mer kvantifiserbar data, og ville kunne forenkle prosessen med å generalisere funnene. Vi valgte likevel å ikke gjennomføre disse testene da vi anså det som viktigere for studien å få et nyansert og grundig bilde av situasjonen mens elevene arbeider med oppgavene.

Ved å gjennomføre en enkelcasestudie med flere analyseenheter er det større mulighet for å generalisere til andre caser. Et enkelt casedesign med flere analyseenheter innebærer at forskeren får informasjon fra flere enheter innenfor et avgrenset system (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 111). Enhetene er de to ulike gruppene innenfor den samme skolen, som da blir systemet.

## 3.2 Utvalg

For å finne elever som kunne delta i studien, tok vi kontakt med en matematikklærer på 10. trinn i Agder. Læreren var veldig behjelpelig, og satt oss også i kontakt med en annen lærer på samme trinn, som også virket interessert i studien. Utvalget for studien er derfor de to klassene som disse lærerne underviser i matematikk. Vi hadde et sterkt ønske om at noen av elevene frivillig kunne filmes mens de løste oppgavene. I den ene klassen var det tre elever som var villige til å filmes, mens i den andre var det fem. Noen av de resterende elevene var positive til at vi samlet inn deres skriftlige arbeid og skrev under på dette, mens andre var litt mer skeptiske. Elevgruppene ble satt sammen basert på hva de hadde gitt skriftlig samtykke til å delta i, og dermed ble alle gruppene satt sammen utenfor vår kontroll.

### 3.3 Datainnsamling

I tråd med våre forskningsspørsmål, ønsket vi å få innblikk i hvordan elevene på 10. trinn løste oppgaver som omhandlet funksjoner. Vi bestemte oss for å gjennomføre ikke-deltakende observasjon i de to klassene som ville delta i studien. Fordelene med ikke-deltakende observasjon anså vi å være at vi kunne registrere mer nøyaktig hva elevene gjorde samt å ikke påvirke elevenes besvarelser ved å være aktiv deltaker i klasseromssituasjonen. I forkant av observasjonen utviklet vi noen oppgaver som elevene skulle jobbe med, og som på ulike måter var ment å omhandle elevenes arbeid med ulike representasjoner, i henhold til forskningsspørsmålene våre. Vi vil i underkapitlene gå mer i dybden på disse oppgavene, samt observasjonene vi foretok.

#### 3.3.1 Oppgaver

I planleggingsfasen av masterprosjektet ble vi enig med læreren vi hadde kontakt med i begynnelsen om at vi skulle være inne i klassen i en uke, og vi fikk da vite at elevene hadde matematikkundervisning tre timer i uka. For å få et større innblikk i elevenes forståelse av funksjoner ønsket vi å utvikle oppgaver som de kunne bruke god tid på og som gav rom for faglige diskusjoner. Vi bestemte derfor å gi elevene en oppgave i hver av de tre skoletimene. Målet med oppgavene var å se på hvilke måter elevene representerte ulike funksjoner, samt å se om de kunne se og uttrykke en sammenheng mellom de ulike måtene å representere funksjoner på. Oppgavene vi utviklet til første og andre time har vi funnet inspirasjon til i Kathleen Cramer sin «*Using models to build an understanding of functions*». Disse oppgavene gjorde vi noen små endringer på for at de skulle passe bedre inn i vår studie. For det første måtte oppgavene oversettes fra engelsk til norsk slik at språket ikke skulle være et hinder for elevene. I tillegg er det gjort andre endringer som vi vil gå dypere inn på i hver oppgave nedenfor. Den siste oppgaven er utviklet med inspirasjon fra Malcolm Swan.

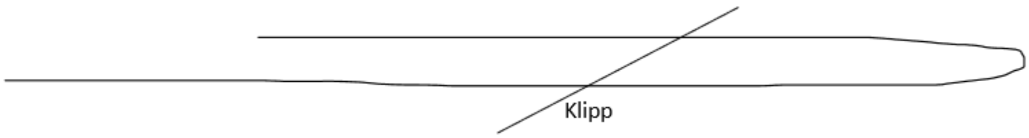
De to første oppgavene ble designet slik at elevene kunne skrive besvarelsene på arket, og hver gruppe fikk utdelt kun ett oppgaveark for hver økt, slik at de ble nødt til å samarbeide om å løse oppgaven. Disse oppgavene ble gitt til elevene spesielt for å få innsikt i elevenes valg av representasjoner. I den tredje oppgaven fikk elevene utdelt til sammen 24 kort som beskrevet nedenfor. I tillegg til dette ble det utdelt et A3-ark til hver gruppe i hver økt, og elevene kunne benytte seg av dette slik som de ville. Alle tre oppgavene er designet for å undersøke elevenes oversettelser mellom ulike representasjoner.

*Klipping av tråd*

Den første oppgaven elevene fikk omhandler en lineær funksjon. Elevene ble først bedt om å brette en tråd på midten, for så å klippe over den en gang. Deretter skulle de fortsette med en ny tråd og klippe flere ganger. Videre skulle de vise sammenhengen mellom antall klipp og antall tråder ved bruk av valgfri representasjoner. Den opprinnelige oppgaven inneholdt en tabell som elevene kunne fylle ut hvor mange biter tråd de satt igjen med etter 1-5 klipp. Vi valgte å fjerne denne tabellen for å ikke gi elevene noen hint til hvordan de kunne representere sammenhengen. I tillegg ville vi ikke legge føringer for hvordan de skulle representere, vi hadde et ønske om at elevene kunne velge fritt mellom representasjonene de kjente. Dette gjorde at vi måtte legge til en oppgave, altså oppgave 1, hvor elevene blir bedt om å representere sammenhengen, samt å forklare hvorfor de valgte representasjonen de valgte. I tillegg har vi lagt til oppgave 6 hvor elevene blir spurt om de kan finne andre måter å representere sammenhengen på, da vi tenkte at det kanskje var lettere å se andre måter å representere det på etter å ha jobbet seg gjennom de andre oppgavene.

**Klipping av tråd**

Brett en tråd på midten. Mens tråden er brettet, klipp over den en gang. Hvor mange biter tråd har du nå? Fortsett med en annen tråd, klipp 2, 3, 4 og 5 ganger.




1. Kan du representere sammenhengen mellom antall kutt og antall deler av tråder? Forklar hvorfor du valgte denne representasjonen.
2. Beskriv mønsteret du observerer i oppgave 1.
3. Uten å kutte tråden, bruk mønsteret til å finne antall biter tråd hvis du kutter 6, 7 og 8 ganger. Beskriv hvordan du brukte mønsteret til å gjøre dette.
4. Det er mulig å forutsi antall biter tråd når du vet antall klipp. Beskriv hvordan man kan finne ut hvor mange tråder 20 klipp gir.
5. Hvis du sitter igjen med 21 biter tråd, hvor mange ganger har du da klippet? Beskriv hvordan du løste dette problemet.
6. Kan du representere sammenhengen mellom klipp og antall biter på en annen måte?

Figur 3.1: Oppgave gitt til elevene i første time.

Ved å la elevene selv velge representasjon i oppgave 1 får de sjansen til å velge en mer eller mindre hensiktsmessig representasjon til oppgaven. I denne oppgaven er det naturlig å lage en tabell, men vi forventer at elevene for det meste vil forholde seg til en verbal forklaring ved å beskrive sammenhengen som dobbelt så mange tråder som klipp pluss en. Dette er en beskrivelse som ligger på nivå 3, men ved at elevene forklarer valg av representasjon og hvorfor representasjonen er som den er, kan de nå nivå 4 og 5.

I oppgave 2 skal elevene beskrive det mønsteret de ser i den valgte representasjonen. Her forventer vi at mange av elevene sier at det er alle oddetallene, og kanskje ikke tenker så mye over økningen mellom hvert ledd. Dette vil være en løsning som ligger på nivå 2. Hvis elevene påpeker egenskaper ved representasjonen, for eksempel at det øker med to for hvert kutt, vil dette være nivå 2. En løsning på nivå 4 vil innebære at de forklarer de konkrete egenskapene til representasjonen sin, for eksempel ved en praktisk forklaring av hvorfor det øker med to tråder for hvert klipp, og konsekvensen dette har for deres representasjon.

Oppgave 3 forventer vi at alle klarer uavhengig av hvordan de har løst oppgave 1 og 2, men her får vi tydeligere forståelse for hvordan de tenker at mønsteret henger sammen. Her har vi forventninger om at noen av elevgruppene kommer til å telle seg frem ved å si at de neste oddetallene er 13, 15 og 17, noe vi vil si viser en lav forståelse og ligger på nivå 2. Dersom elevene tar i bruk sammenhengen de har jobbet med, og bruker denne sammenhengen til å komme frem til en løsning fremfor bruken av de neste oddetallene, vil de ha muligheten til å vise en forståelse på nivå 3, 4 og 5. Det samme gjelder for oppgave 4 og 5, da disse er veldig like. I oppgave 5 må elevene kunne bruke mønsteret baklengs, som er en liten forskjell fra oppgave 3 og 4, men slik vi ser det bør det ikke ha innvirkning på nivået elevenes løsning vil være på.

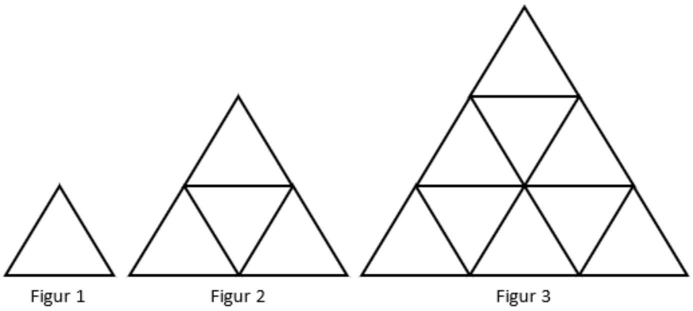
Ved å be elevene vurdere andre representasjoner i oppgave 6 vil de måtte oversette forskjellige aspekter i en representasjon til en annen. Det vil da være mulighet for å oppnå nivå 3, men om de argumenterer for egenskaper ved representasjonene vil de også kunne vise kompetanse på nivå 4 og 5.

*Likesidete trekanter*

Oppgaven som elevene skulle løse den andre timen handler om en kvadratisk funksjon. I denne oppgaven skulle elevene se på noen figurer som ble dannet av likesidete trekanter, og deretter på selvvalgt måte utvide fra de tre første figurene til figur fire og fem, for så å forklare det mønsteret de så. I likhet med den første oppgaven inneholdt også denne opprinnelig en tabell som elevene skulle ha fylt ut, men vi valgte å ta vekk denne også i dette tilfellet. I den opprinnelige oppgaven ble det referert til en liten trekant som en enhet for areal, men vi valgte å endre dette også for å unngå å skape forvirring hos elevene. I tillegg til dette var det en oppgave i det opprinnelige problemet som ba elevene om å oversette regelen til en algebraisk ligning for den *n*te trekanten i rekka. Vi valgte å ta vekk denne oppgaven fordi vi hadde et ønske om at elevene selv skulle finne måter å representere sammenhengen på uten tips fra oss eller ledende spørsmål. Slik som i den første oppgaven har vi her også lagt til et spørsmål om elevene kan representere sammenhengen på andre måter, samt et spørsmål om hvilken representasjon de synes passer best.

**Likesidete trekanter**

Ved å bruke likesidete trekanter, form de tre første trekantene som vist nedenfor.




1) Reflekter over sammenhengen mellom figurtall og antall små trekanter. Utvid for figurtall 4 og 5 og forklar mønsteret du ser.
2) Vis hvordan du hadde funnet figur nummer 20, forklar hva du gjør.
3) I en av trekantstrukturene er det 441 små trekanter, hvilket figurtall har denne figuren?
4) Kunne du løst disse oppgavene med andre representasjoner? Hvilken representasjon syns du passer best?

Figur 3.2: Oppgave gitt til elevene i andre time.

Elevene blir i denne oppgaven først bedt om å forme de tre første trekantene som vist ved å bruke likesidete trekanter, og deretter reflektere over sammenhengen mellom figurtall og antallet små trekanter. I denne oppgaven vil det være naturlig å lage en tabell, men vi forventer at mange av elevene kommer til å forholde seg til verbal forklaring her også, ved at de beskriver økningen mellom hvert ledd som to mer enn forrige økning. Dersom elevene beskriver sammenhengen som figurtall i andre, vil dette være en beskrivelse på nivå 3. Ved at elevene forklarer valg av representasjon og hvorfor representasjonen er som den er kan de nå nivå 4 og 5, men dette tror vi er lite sannsynlig da det er veldig krevende.

I den andre oppgaven blir elevene bedt om å finne figur nummer 20, noe vi forventer at alle elevgruppene klarer. Her forventer vi at noen av elevgruppene kommer til å se at svaret vil være $20^2 = 400$, noe som vil være en løsning på nivå 3. Vi forventer også at noen av elevgruppene ikke ser denne sammenhengen, og vil telle seg frem ved bruk av differansen mellom hvert ledd, og dermed bruke mye tid på dette. Dette vil i så fall være en løsning på nivå 1, da de ikke er i stand til å representere sammenhengen.

Oppgave 3 krever at elevene bruker sammenhengen de har funnet baklengs, dvs. at de må finne kvadratroten av 441, eller at de bruker prøv og feil metoden. Her forventer vi at de fleste som har sett sammenhengen i de foregående oppgavene, vil benytte seg av kvadratrot for å finne svar på denne oppgaven. Dette vil være en løsning på nivå 3. Det forventes også at noen av elevgruppene bruker prøv og feil metoden, noe som her ikke vil være veldig avansert da de fra oppgave 2 allerede vet at figur 20 har 400 trekanter, og det da er lett å tenke seg til at figuren som har 441 trekanter er i nærheten av figur 20.

Ved at elevene bes om å vurdere andre representasjoner i oppgave 4 vil de måtte oversette ulike aspekter i en representasjon til en annen, noe som gir mulighet til å oppnå nivå 3. Dersom de argumenterer for egenskaper ved representasjonene vil de også kunne vise kompetanse på nivå 4 og 5.

*Sammenkobling av representasjoner*

I den tredje og siste timen valgte vi å gjennomføre en oppgave som går ut på at elevene får ulike kort hvor flere lineære og kvadratiske funksjoner er representert på fire ulike måter. De representasjonene vi valgte var funksjonsuttrykk (symbolsk), tabell, tekst (verbal beskrivelse) og graf. Vi valgte å ha med til sammen åtte grupper av funksjoner, hvorav en av gruppene ikke er korrekte. Det vil si at vi har et funksjonsuttrykk, en tekst, en tabell og en graf som ikke passer med noen andre kort. Vi valgte dette for å prøve å sikre oss at dersom elevene får til oppgaven, så setter de ikke de fire siste kortene sammen til en gruppe. Det vil også være med å vise om de faktisk har forstått hvordan de kan verifisere at de kortene de har satt sammen faktisk hører sammen. For å forhindre overfladisk sammenkobling basert på parvis like tall har vi inkludert noen oppgaver hvor tallene ikke ser ut til å stemme overens. Vi har for eksempel har vi en oppgave hvor bildet av grafen viser lave verdier på x-, og y-aksen, mens tabellen har veldig høye verdier. I denne gruppen er det også noe forskjell i den verbale representasjonen og funksjonsuttrykket, da funksjonsuttrykket er $y = 0.2x$, mens den verbale representasjonen er «Antall rev er til enhver tid 1/5 av antall lemmen». Dette har vi gjort bevisst, fordi vi prøvde å se for oss hvordan elevene ville prøve å løse oppgave 3, og tenkte at de ville raskt sette sammen gruppene dersom de fant like tall. Vi har også inkludert noen grupper hvor det er like tall på kortene for å se hvordan elevene reflekterer når de prøver å sette disse gruppene sammen.

I denne oppgaven blir elevene bedt om å diskutere med hverandre for å komme frem til grupperinger av representasjoner som hører sammen. De bes om å forklare og begrunne hvorfor de mener at kortene de setter sammen, hører sammen. Dette er en litt annerledes oppgave enn de to andre, da de her får gitt representasjoner som de skal sammenligne. Ut fra kortene vi har lagd tenker vi oss at mange av elevgruppene kommer til å se etter like tall, og ikke vie oppmerksomhet til andre aspekter ved representasjonene. Her vil vi si at elevene da ligger på nivå 2. Dersom elevene kan begrunne hvorfor to representasjoner hører sammen ved å ta i bruk egenskapene til representasjonene, og ikke bare se etter like tall, vil dette være en forklaring på nivå 4.

For å lettere henvise til de ulike oppgavekortene, har vi merket disse med bokstaver som angir type representasjon. Bokstavene vi har brukt er F som brukes om funksjonsuttrykk, V som brukes om verbal beskrivelse, T som brukes om tabell og til sist G som brukes om grafisk fremstilling. Tallene refererer til hvilken funksjon det er som fremstilles. Her er ett eksempel på en gruppe med representasjoner:

| F4 | V4 | T4 |
| --- | --- | --- |
| $y = -80x + 1300$ | Bjarne kjører hjem mot Bodø, han kjører i 80km/t. Han starter 1300 km hjemmefra og tenker på hvor langt det er hjem. | see table below |

T4:

| x | 3 | 6 | 9 | 12 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| y | 1060 | 820 | 580 | 340 |

G4


Figur 3.3: Eksempel på gruppe av representasjoner gitt til elevene i tredje time.

### 3.3.2 Observasjon

Observasjon er en metode som gjør det mulig å samle inn kvalitative data som baserer seg på hva mennesker gjør i ulike situasjoner. Undersøkerens rolle er å notere ned hva som skjer, eller å benytte seg av et skjema man kan krysse av dersom det er bestemt på forhånd spesifikke handlinger man skal se etter. I noen tilfeller kan det også være nyttig å ta videoopptak (Jacobsen, 2022). I vår oppgave har vi valgt å benytte oss av både observasjon hvor vi har tatt notater, men også videoopptak av en gruppe i hver av de to klassene. I forkant av observasjonene bestemte vi hvordan gruppene skulle nummereres. Alle gruppene består av et siffer og en bokstav, hvor sifferet indikerer om gruppen tilhører klasse 1 eller klasse 2. Vi bruker bokstavene A-I for å skille mellom alle de ni gruppene, og har altså gruppene 1A, 1B, 1C, 1D, 2E, 2F, 2G, 2H og 2I. De to gruppene vi har tatt videoopptak av er gruppe 1A og 2E. I tillegg til dette bestemte vi oss for å nummerere elevene på hver gruppe, og vi beholdt denne nummereringen likt for alle timene vi var inne i klassene. På denne måten fikk vi oversikt over den enkelte elev i hver gruppe, samt at vi allerede i feltnotatene våre anonymiserte datamaterialet vårt. I etterkant har vi navngitt elevene slik at det skal være lettere å følge hver enkelt elev i teksten. Her har vi tatt utgangspunkt i hvilken gruppe de tilhører, for eksempel vil alle elevene i gruppe 1A ha navn med forbokstav A. Ifølge Jacobsen (2022) har videoopptak en fordel ved at det dreier seg om å studere situasjoner og hendelser i større grad enn enkeltindivider. Videoopptak gir en korrekt gjengivelse av hva som skjer i en situasjon. Vi er interessert i elevenes samtaler rundt representasjonene, og derfor valgte vi å bruke videoopptak, slik at vi kunne se situasjonen mer nøyaktig. Jacobsen (2022) skriver at observasjon egner seg godt dersom man er interessert i å registrere hva mennesker gjør, ikke hva de sier at de gjør og/eller man er interessert i å registrere atferd i en kontekst. I vårt tilfelle er det interessant å se hva elevene faktisk gjør og sier når de løser oppgavene de får og vi valgte derfor å observere de i klasserommet. Vi transkriberte alt av datamateriell fortløpende av flere grunner, blant annet for å anonymisere det så tidlig som mulig grunnet personvern og for å få en oversikt og lettere kunne bearbeide det.

Det finnes ulike typer observasjon som det er vanlig å skille mellom. Ett av disse skillene er åpen og skjult observasjon. I skjult observasjon vet ikke de som blir observert at noen observerer dem, og dermed har de ingen grunner til å opptre unormalt. Mange tror at reliabiliteten blir bedre når observasjonen er skjult på grunn av dette, men det stiller oss overfor et etisk problem. I forskning er det normalt sett et etisk krav om at datainnsamling burde skje kun dersom de som blir observert har gitt samtykke til det. En annen måte å skille observasjon på er deltakende og ikke-deltakende observasjon. I en deltakende observasjon vil observatøren delta på lik linke med de som blir observert. Ikke-deltakende observasjon innebærer en større avstand mellom observatøren og de som observeres. Et problem ved deltakende observasjon er at forskeren selv vil kunne påvirke resultatet sterkt, så påliteligheten synker. (Jacobsen, 2022). På bakgrunn av dette valgte vi å ha en åpen og ikke-deltakende observasjon, hvor vårt mål var å være kun i bakgrunnen i klasserommet, og samhandle så lite som mulig med elevene. Vi reflekterte rundt vår rolle i forkant av observasjonen, og kom fram til at vi kunne stille elevene spørsmål for å avklare hva de mente med ulike utsagn de kom med, og vi kunne be dem om å forklare og begrunne de svarene de gav på oppgavene de løste. Dette kunne gi oss et større innblikk i hvordan de tenkte for å løse oppgavene, og samtidig unngå at vi misforsto noe av det som ble sagt.

### 3.4 Gjennomføringen

Vi valgte å gjennomføre studien på en mest mulig autentisk måte slik at ikke elevene skulle bli satt i en situasjon de ikke er kjent med fra tidligere, og som kunne vært unaturlig for dem. Vi ville med dette sørge for at elevene var så komfortable som mulig i løpet av datainnsamlingen. På grunn av dette aspektet valgte vi å la elevene som skulle filmes sitte i klasserommet sammen med resten av klassen, med de omstendighetene de var vant med. I første time i den første klassen sluttet kameraet å filme etter en liten stund, noe vi oppdaget litt sent. Vi fortsatte videoopptak av gruppen med et annet kamera, og i de etterfølgende timene benyttet vi oss av to kamera for å unngå flere slike hendelser. I tillegg førte valget om autentisitet til at vi avtalte med begge lærerne at det var de som skulle starte timene og introdusere oppgavene.

Undervisningsopplegget er i hovedsak hva Biggs og Collis ville kalt for åpent hvor læreren tar en mer passiv rolle og veileder under elevenes utforskning (Biggs & Collis 1982, s.8). Samtidig må noen introdusere oppgaven og starte timen, og vi måtte da avgjøre om dette skulle være klassens matematikklærer eller oss. Det er fordeler og ulemper ved begge alternativer. Vi kjenner opplegget best og vet hva vi ønsker å få ut av timen, noe som setter oss i stand til å legge oppgaven frem på en måte som legger til rette for dette. På den andre siden er det viktig at opplegget ikke virker for fremmed og ukjent, da elever fort kan bli skeptiske til undervisning som er annerledes enn hva de er vant til. Vi vurderte det sistnevnte til å være viktigere enn å styre formuleringene selv, og valgte derfor at faglærer skulle introdusere oppgavene.

Vi var klar over at begrepet «representasjoner» kunne være fremmed for mange elever, og ønsket derfor å lage en introduksjon som lærer skulle gå gjennom i begynnelsen. Dette var en kort forklaring på hva en representasjon er uten å nevne noen av de aktuelle representasjonene som ville bli brukt i arbeidet med oppgavene. Det var viktig for oss å at det ikke ble nevnt noen representasjoner, så vi ikke påvirket elevenes valg av representasjoner.

## 3.5 Forskningens kvalitet

I dette delkapitlet vil vi beskrive validitet og reliabilitet generelt, og deretter hvordan vi har tatt vare på validiteten og reliabiliteten gjennom studien vår. Vi vil til sist beskrive de etiske betraktningene vi har tatt i løpet av hele studien.

### 3.5.1 Validitet og reliabilitet

Ifølge Jacobsen (2022) dreier en undersøkelse seg om å samle inn empiri for å si noe om virkeligheten. Denne empirien bør tilfredsstille to krav, nemlig at den må være gyldig (valid) og pålitelig (reliabel). Postholm og Jacobsen (2018) skriver at en forsker må reflektere over to forhold. Det første er begrensninger knyttet til forskningen, som er knyttet til forskningens validitet. Det andre forholdet er hvordan forskeren gjennom gjennomføringen av forskningen kan ha påvirket undersøkelsens resultater, som er knyttet til forskningens reliabilitet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222). I de følgende avsnittene vil vi si noe om hva validitet og reliabilitet vil si generelt, men også hvordan vi har tatt vare på validiteten og reliabiliteten gjennom studien.

Det at empirien skal være valid handler om at den skal være gyldig og relevant. Jacobsen skriver «Med *gyldighet og relevans* mener vi at den empirien vi samler inn, faktisk gir svar på det eller de spørsmålene vi har stilt.» (Jacobsen, 2022, s. 17). Han nevner at man ofte snakker om to typer gyldighet og relevans, nemlig intern og ekstern gyldighet. Intern gyldighet handler om hvorvidt konklusjonen man trekker holder i forhold til empirien som er samlet inn. (Postholm & Jacobsen, 2018; Jacobsen, 2022). Ekstern gyldighet og relevans handler om hvorvidt resultatene man har fått fra et avgrenset område kan overføres og være gyldige også på andre områder. Det vil si at den eksterne gyldigheten forteller noe om funnene kan generaliseres eller ikke (Postholm & Jacobsen, 2018; Jacobsen, 2022).

Vi mener at den interne gyldigheten er nokså stor i vår studie. Vår hensikt var å observere forståelse av funksjoner blant elever på 10. trinn, og vi samlet inn data som svarte på dette i de to gjeldende klassene. Den indre gyldigheten kan svekkes av at vi var til stede og observerte elevene, da dette er en situasjon litt utenom det vanlige. Vi forsøkte å gjøre observasjonen så autentisk som mulig ved å ikke ta ut noen grupper samt at planen var at lærerne skulle lede timene, slik at den ukjente situasjonen ble mest mulig lik normal undervisning. Som nevnt tidligere ble ikke alt som planlagt i klasse 2, da det var vi som ledet klassen i undervisningen. Det så imidlertid ikke ut til at elevene ble særlig påvirket av dette. Den eksterne gyldigheten er derimot noe lavere, som den vanligvis er i kvalitative studier. Vi har studert to klasser på samme trinn, og derfor trenger ikke vår studie å si noe om forståelse av funksjoner og deres representasjoner hos andre elever.

Reliabilitet handler om pålitelighet og troverdighet. «Med *pålitelighet* mener vi at undersøkelsen må være til å stole på.» (Jacobsen, 2022, s. 17). Reliabilitet handler altså om at studien ikke må inneholde åpenbare målefeil og spørsmålet er om undersøkelsen ville gitt like resultater dersom den hadde blitt utført to ganger (Postholm & Jacobsen, 2018; Jacobsen, 2022).

Vi var inne i to klasser hvor deres matematikklærere hadde ulik undervisningsstil. Klasse 1 hadde ikke begynt med funksjoner i undervisningen enda dette året, mens klasse 2 hadde jobbet en del med lineære, kvadratiske og eksponentialfunksjoner. På tross av ulikheter blant matematikklærerne, har vi fått nokså like resultater fra disse klassene. Dette kan antyde at funnene kan ha relevans for ulike elevgrupper på tvers- og på tross av ulik undervisningskultur.

### 3.5.2 Etiske betraktninger

I oppstartsfasen av studien tok vi kontakt med ledelsen ved en ungdomsskole, vi fortalte litt hva vi ønsket å forske på og informerte om vår studie. Derfra ble vi satt i kontakt med en lærer ved skolen som vi samarbeidet med. I forbindelse med vår oppgave sendte vi inn en søknad om tillatelse til å gjennomføre studien til Sikt – kunnskapssektorens tjenesteleverandør. Etter at søknaden ble godkjent ble både elever og foresatte informert av læreren, samt at vi kom til skolen for å informere elevene personlig om studien, noe som gav de anledning til å stille oss spørsmål. Siden vi hadde et ønske om å både samle inn elevenes skriftlige arbeid og et ønske om at minst en gruppe i hver klasse kunne delta på film, var det disse to svaralternativene vi inkluderte på samtykkeskjemaet. I utgangspunktet er det ikke nødvendig å be om skriftlig tillatelse til å samle inn elevenes skrevne notater så lenge de er anonyme, men vi valgte å gjøre dette for å bevare det forskningsetiske aspektet. Elevene fikk utdelt et informasjonsskriv og et samtykkeskjema og ettersom elevene var under 16 år, måtte de ta det med hjem for å få underskrift av foresatte. Dette gjorde vi for å sørge for at elever og foresatte var klare over hvilke rettigheter de hadde gjennom å delta i studien. Vi informerte om studien vår og gjorde det klart at elevene ville være anonyme. I tillegg uttrykte vi at denne studien ikke ville komme til å ha noen konsekvenser, hverken for de som ønsket å være med og de som ikke ønsket det.

Under datainnsamlingen ble elevene delt inn i grupper etter hva de hadde gitt skriftlig samtykke til. I begge klassene var det en gruppe som besto av elever som ville være med på kamera, samt noen grupper av elever som godtok skriftlig innlevering og observasjon og noen grupper som ikke hadde gitt skriftlig tillatelse til å delta i studien. Vi fikk inntrykk av at grunnen til at elevene ikke hadde levert samtykkeskjema var fordi det krevde for mye å ta det med hjem. Vi kontaktet Sikt for å spørre om vi likevel hadde lov til å samle inn elevenes skriftlige arbeid, og fikk til svar at ut fra rene personvernhensyn kunne vi samle inn det skriftlige arbeidet, så lenge det ikke innebar en behandling av personopplysninger, mens ut fra forskningsetiske hensyn bør elevene samtykke og foreldrene bli informert, selv om det ikke innebærer en behandling av personopplysninger. De fortalte oss også at elevenes samtykke ikke trengte å være skriftlig. Fordi vi hadde litt for få grupper av elever som hadde levert samtykkeskjema, spurte vi hver enkelt elevgruppe om de kunne tenke seg å bli observert og levere inn det skriftlige arbeidet, og alle elevene godtok dette muntlig. Vi valgte derfor å gjennomføre studien basert på skriftlig samtykke fra foreldre hvor dette var høyst nødvendig, men for å samle inn skriftlige besvarelser fra de elevene hvor underskrift fra foreldrene manglet holdt det at elevene ga muntlig tillatelse.

Under observasjonen hadde vi et ønske om å være helt nøytrale for å ikke påvirke studien eller elevenes tankegang på noe som helst måte. Det hendte at vi av og til stilte elevene spørsmål for å prøve å forstå hva de mente med enkelte utsagn, og for å få de til å reflektere mer over hvorfor de svarte det de svarte på oppgavene. Før observasjonen ble vi enige om hvordan vi skulle nummerere gruppene, slik at vi på den måten unngikk å bruke navn eller andre personlige opplysninger for å skille gruppene i våre notater. I tillegg delte vi inn hvem som skulle observere hvilke grupper for å gjøre observasjonen mer oversiktlig, samt at vi på den måten ikke skulle stresse elevene ved at begge to var på samme plass samtidig.

Elevene fikk i oppgave 1 og oppgave 2 utdelt et ark som de skulle skrive på. Vi fikk elevene til å skrive navnene sine helt øverst på arket for at hele gruppen skulle føle eierskap til oppgaven. Det var viktig for oss å bevare elevenes personvern, så før vi gikk ut av klasserommet deres klippet vi vekk navnene, og skrev på gruppenummeret istedenfor. Det var en gruppe i hver klasse som ble filmet alle tre timene og for å bevare deres personvern har vi lagret videoene på en sikker server ved Universitetet i Agder, og anonymisert transkripsjonene ved å gi elevene fiktive navn. På denne måten har vi bevart elevenes personvern gjennom hele studien.

### 3.6 Analysestrategi

Vi transkriberte alt av videomaterialet fra begge klassene så raskt som mulig, og deretter lagde vi kopier av disse dokumentene slik at vi kunne bruke disse til analyseringen. Grunnen til at vi valgte å jobbe i kopiene er at vi da kunne gjøre markeringer og legge inn kommentarer uten å bekymre oss for det originale datamaterialet. I tillegg til dette hadde vi dokumenter som inneholdt våre notater fra observasjonene, hvor vi også inkluderte noen elevutsagn. I forkant av analyseringen diskuterte vi Hitts fem nivåer av forståelse av funksjoner og hvordan de ulike nivåene ville kunne komme til syne i hver oppgave. Vi markerte nivåene i ulike farger, og brukte disse til å fargekode transkripsjonene, observasjonsnotatene og elevbesvarelsene. For å analysere datamaterialet satt vi hver for oss og uten å diskutere, og markerte elevutsagn/besvarelser vi syntes var interessante i fargene som tilhørte nivåene vi mente utsagnene lå på. Dersom vi var usikre på om et utsagn eller en besvarelse var på for eksempel nivå 3 eller 4, markerte vi dette i begge farger og la ved en kommentar. Deretter gikk vi gjennom alt av datamateriell sammen og diskuterte dersom vi var uenige eller usikre på noe. Dette er et utdrag av transkripsjon fra gruppe 2E hvor vi var usikre på om vi skulle plassere det på nivå 3 eller 4:

> Henrik: Men hvorfor tror du den passer og hvorfor tror du den ikke passer?
> Eva: Fordi det er x i andre, hvis x er en, nei, hvis x er tre så er y liksom ni, men det er kanskje ikke logisk.
> Elise: Men hvis du hadde tatt det (x-verdiene i T7) inni der (F7), så hadde det vært tre ganger tre, nei tre ganger to, for det står to der.
> Eva: Nei, når det er to skal du ta tre ganger tre. Skal du ikke det?

Vi diskuterte dette utdraget sammen i lys av Hitts nivåer, og landet på at vi skulle klassifisere dette som forståelse på nivå 3, noe vi kommer tilbake til i kapittel 4.3.4. Ved å diskutere oss gjennom alle notater, hjalp dette oss med å snevre inn mer og mer hva vi egentlig la i de ulike nivåene, noe som igjen hjalp til å snevre inn analyseverktøyet, som beskrevet under.

### 3.6.1 Analyseverktøy

For å analysere og videre bryte ned datamaterialet har vi kategorisert elevenes bruk av representasjoner og artikulering om funksjoner og representasjonene inn i fem forskjellige kategorier. Vi har tatt inspirasjon fra Fernando Hitt sine «*levels of understanding of the concept of function*», som listet opp i 2.5.3. Som nevnt tidligere, valgte vi disse nivåene for å kunne identifisere og kartlegge elevenes nivåer av forståelse av funksjonsbegrepet. Vi bruker da deres artikulering rundt representasjoner som en indikator for deres forståelse av funksjonsbegrepet. For å gjøre det mulig for oss å bruke disse nivåene har vi valgt å fortolke og tilpasse de slik, med tilhørende eksempler:

1. Eleven(e) er ikke i stand til å se eller representere sammenhengene som eksisterer.
    - Eleven(e) feiltolker aspekter ved en konkret representasjon.
    - Eleven(e) setter feilaktig sammen ulike representasjoner.
2. Eleven(e) kan finne og sammenligne ulike egenskaper ved forskjellige representasjoner av funksjoner.
    - Eleven(e) tar i bruk differansen mellom påfølgende ledd for å bestemme senere ledd.
    - Eleven(e) setter sammen ulike representasjoner kun basert på like tall.

3. Eleven(e) evner å gå fra en representasjon av en funksjon til en annen. Eleven viser forståelse for alle aspekter av funksjonen, og dens representasjoner.
    - Eleven(e) kan representere på ulike måter, for eksempel ved omforming fra en konkret situasjon til symbolsk representasjon eller tabell, og behandler den med innholdet bevart.
    - Eleven(e) kan matche ulike representasjoner ved å forstå sammenhengen mellom representasjonene, og ikke ved å kun se på like tall.
4. Eleven(e) kan forklare hvorfor representasjonen er som den er.
    - Eleven(e) kan representere på ulike måter, samt forklare hvorfor en representasjon er som den er.
    - Eleven(e) kan matche ulike representasjoner og forklare hvorfor disse hører sammen med begrunnelser i funksjonens egenskaper.

Målet ved vårt analyseverktøy er å kunne si noe om elevenes forståelse av funksjonsbegrepet gjennom deres bruk av forskjellige representasjoner og evne til artikulering om konsept, representasjon eller sammenheng mellom representasjoner. Vi har valgt å slå sammen Hitts nivå 4 og 5 da vi i vår studie opplever disse å være vanskelige å skille. Alle punktene omhandler elevers bruk av representasjoner, mens nivå 4 også omhandler elevers evne til artikulering av sammenhengen mellom forskjellige representasjoner og systemer av representasjoner. Vi har sett etter disse fire nivåene av forståelse, og gjennom det prøvd å identifisere hvilke aspekter av representering og artikulering elevene har problemer med.

Flere faktorer enn elevers forståelse vil spille inn på deres representasjonsbruk og på forståelsen de viser for funksjonsbegrepet. Blant annet vil til enhver tid vanskeligheten til den aktuelle transformasjonen spille inn på elevers mestring av overgangen. Det er som Bossé et al. (2011) påpeker ikke trivielt å avgjøre vanskelighetsgraden til en transformasjon. Viktige faktorer som kan spille inn er om den aktuelle transformasjonen krever en lokal eller global tolkning, om det er en konvertering eller en behandling, om konverteringsprosessen krever flere trinn ved å ta i bruk en hjelpemiddelrepresentasjon, og om det er en konvertering som eleven ofte har gjennomført tidligere.

Siden analyseverktøyet vårt baserer seg på fire nivåer av forståelse finner vi det relevant å strukturere analyseringen og diskusjonen etter disse. Ved å gå gjennom nivåene systematisk kan vi avdekke på hvilke tidspunkt i oppgaveløsningene elevene demonstrerer kunnskap på et gitt nivå. Vi kan med dette få en oversikt over hvilke representasjonsformer elevene har oversatt mellom og valgt innenfor de ulike nivåene.

# 4 ANALYSE

I dette kapitlet presenterer vi vår analyse av transkripsjonene og observasjonene. Analysen er basert på de fire nivåene av forståelse vi presenterte i slutten av forrige kapittel. Kapitlet er delt inn i seks delkapitler, hvor vi i de fire første delkapitlene tar for oss de fire nivåene og presenterer våre funn innenfor hvert av disse. I femte og sjette delkapittel presenteres oversikter over henholdsvis elevenes bruk av representasjoner og tolkning av representasjonskort.

## 4.1 Nivå 1

Under nivå 1 har vi valgt å plassere de besvarelsene og utsagnene vi har tolket til å ikke vise forståelse for noen sammenheng. Herunder kommer elevutsagn hvor elevene har feiltolket grunnleggende aspekter ved en konkret representasjon, og elevers feilaktige sammenkobling av ulike representasjoner. Grunnen til at vi har valgt å plassere feiltolkninger i denne kategorien, er at dersom elevene har gjort feiltolkninger, så tyder dette på at de ikke har forstått det oppgaven krever av dem, og dermed havner de på det laveste nivået av forståelse.

### 4.1.1 Eksponent eller stigningstall? (må endres)

Under arbeid med *sammenkobling av representasjoner* kommer det frem at Angelica fokuserte på likheter i form av hvilke tall som er brukt i representasjonskortene og at hun ikke tenkte over hva representasjonene egentlig sier.

> Angelica: … Også må det ikke være, den der, Dagny strikker to sokker i timen (V8), det må jo være den (F7).
> Andrea: Ja. Det må jo det.
> Angelica: Det er ikke noen andre som er to.

Her synes det at Angelica tenkte V8 passet godt sammen med F7, altså $y = x^2$ siden dette var det eneste symbolske uttrykket de kunne se inneholdt tallet to. Dette viser en forståelse på nivå 1, da hun ikke så at to-tallet har to veldig forskjellige roller, som eksponent i F7 og som stigningstall i V8, og satte disse feilaktig sammen.

### 4.1.2 Feiltolkning av variabler

Da Andrea og Angelica på gruppe 1A jobbet med *sammenkobling av representasjoner* støtte de på litt problemer da de skulle sette de symbolske representasjonene sammen med de andre representasjonene. I forkant av denne diskusjonen hadde elevene satt sammen G6, T6 og V6 og prøvde å finne den symbolske representasjonen som hørte til.

> Andrea: Og denne er riktig, det vet vi. (G6 og T6). Men den her er hundre og seksti (F6). Prøv å tolk den. Null komma fem i andre.
> Angelica: Men vi vet ikke hva x er.

Andrea: Null komma fem, det kan jo være x er null komma fem. Da blir det jo riktig. Det blir null komma fem pluss tretten. Det er, nei det er feil. Hvis det hadde vært tolv der så hadde det vært riktig, tolv komma fem, for det er trettifem. Nei det er det ikke. Det er tjuefem.

Her kan det se ut som at elevene ikke har forstått funksjonsuttrykk generelt, da det kommer frem av Angelica at de «vet ikke hva x er», og det kan derfor se ut til at hun ikke visste at x er en variabel. I tillegg ser vi av Andreas respons at hun heller ikke har forstått hvordan man *behandler* de symbolske uttrykkene. Vi har valgt å plassere disse utsagnene under nivå 1 siden det ser ut til at elevene feiltolker aspekter ved den konkrete representasjonen.

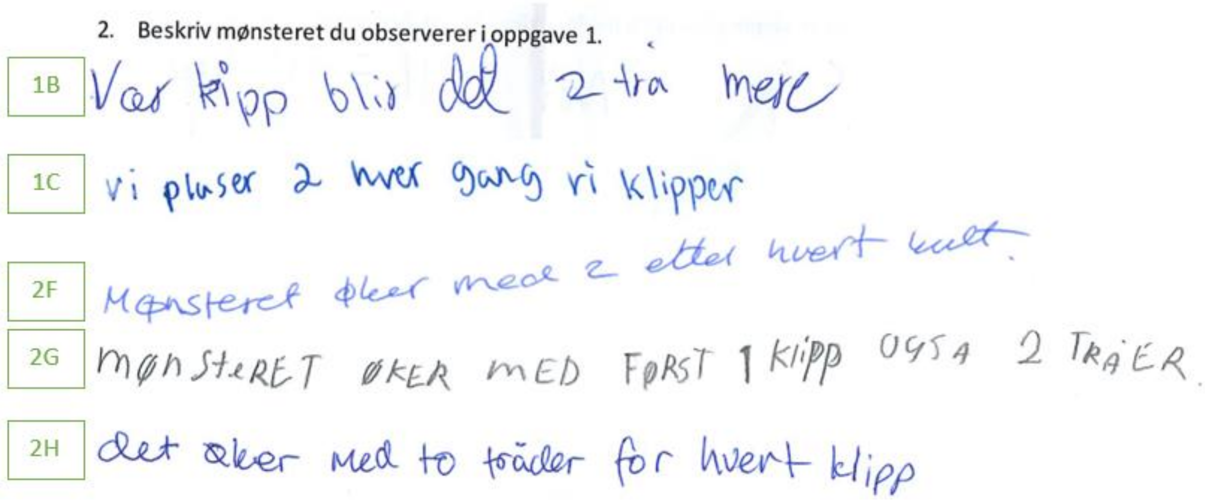
## 4.2 Nivå 2

De besvarelsene og utsagnene vi har klassifisert som forståelse på nivå 2 bærer preg av at elevene kan finne og sammenligne ulike egenskaper ved forskjellige representasjoner av funksjoner. Utsagn og besvarelser der elevene har hovedfokus på differanse mellom to påfølgende ledd havner i denne kategorien sammen med de tilfellene hvor elevene kobler to representasjoner kun basert på like tall.

### 4.2.1 Verbale beskrivelser i form av differanse mellom ledd

Georg: Hvis du klipper en gang ekstra får du to mer tråder.

Georg beskrev mønsteret i *klipping av tråd* i form av differanse mellom to påfølgende ledd, og viste med dette forståelse på nivå 2. Flere elever fant denne konkrete egenskapen ved systemet, at for hvert kutt øker antall tråder med to. I disse situasjonene viste elevene kun forståelse av den konkrete sammenhengen, og gjorde ingen overgang til andre representasjoner. Derfor kan vi ikke si at de viste forståelse på et høyere nivå her. Denne beskrivelsen av mønsteret ble gjentatt mange ganger i ulike grupper i begge klasser, da gruppe 1B, 1C, 2F, 2G og 2H alle påpekte denne sammenhengen, se figur 4.1.


2. Beskriv mønsteret du observerer i oppgave 1.

1B Var kipp blir det 2 fra mere

1C vi pluser 2 hver gang vi klipper

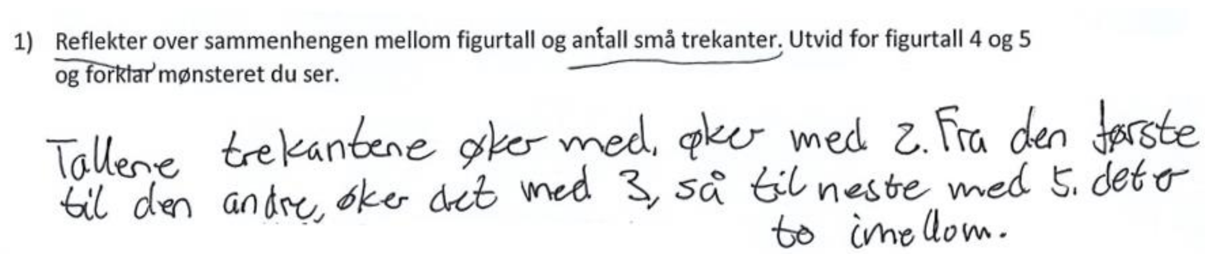
2F Mønsteret øker med 2 etter hvert kutt.

2G MØNSTERET ØKER MED FØRST 1 KLIPP OGSÅ 2 TRÅER.

2H det øker med to tråder for hvert klipp

Figur 4.1: Besvarelser fra gruppe 1B, 1C, 2F, 2G og 2H på oppgave 2 i *klipping av tråd*.

Slik som i *klipping av tråd*¸ var det flere elevgrupper som begynte arbeidet med *likesidete trekanter* ved å se på differansen mellom to påfølgende figurer. Blant disse er gruppe 2F som besvarte oppgave 1 på denne måten:


1) Reflekter over sammenhengen mellom figurtall og antall små trekanter. Utvid for figurtall 4 og 5 og forklar mønsteret du ser.

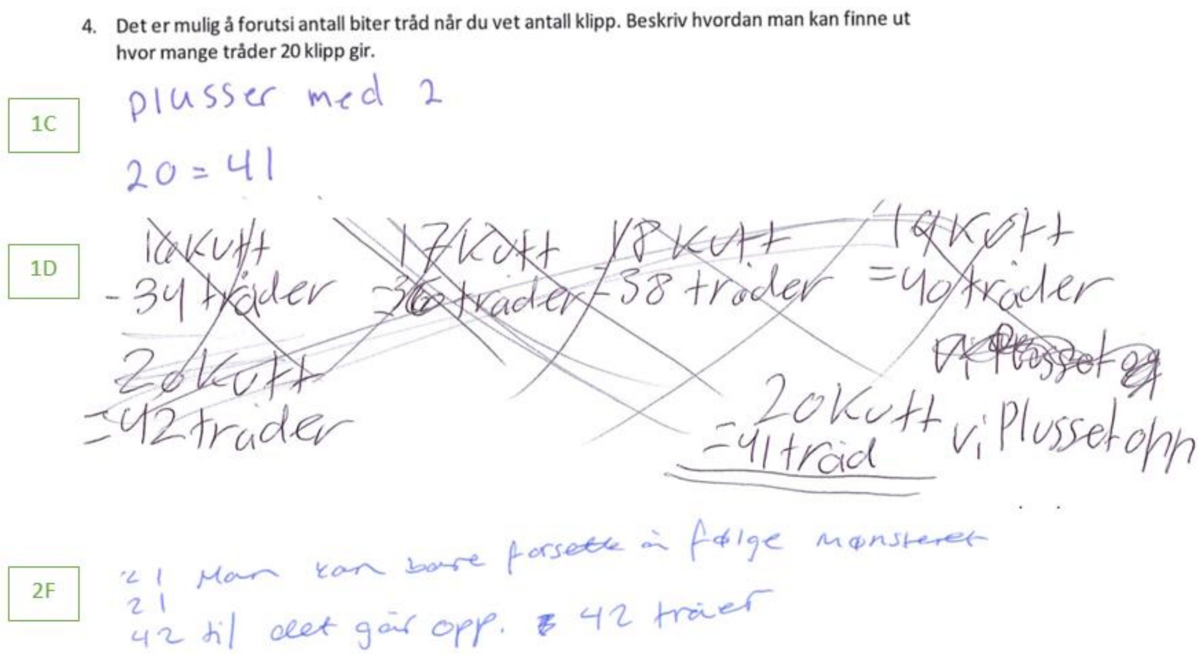
Tallene trekantene øker med, øker med 2. Fra den første til den andre, øker det med 3, så til neste med 5. det er to imellom.

Figur 4.2: Besvarelse fra Gruppe 2F på oppgave 1 i *likesidete trekanter*.

Gjennom denne besvarelsen viste elevene forståelse på nivå 2, da elevene tok i bruk differansen mellom to påfølgende ledd. Det var flere som påpekte at for hver gang figurtallet øker så øker differansen mellom figurene med to. Her beskrev de den konkrete egenskapen ved funksjonen, men de gjorde ingen konverteringer til andre representasjoner. Vi kan derfor si at de ikke viste forståelse på et høyere nivå her. Gruppe 1D hadde også hovedfokus på differanse i antall små trekanter mellom to påfølgende figurer.

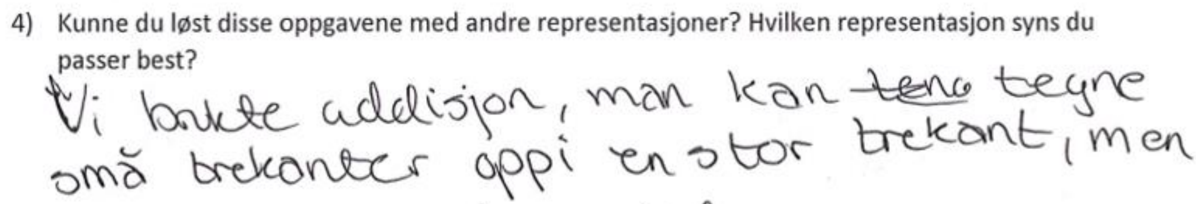
### 4.2.2 Rekursiv løsning ved bruk av differanse

I løsning av oppgave 4 i *klipping av tråd*, var det mange som benyttet seg av differansen mellom to påfølgende ledd for å besvare hvordan man kan finne ut hvor mange tråder 20 klipp gir. Gruppe 1C skrev at de «plusser med 2», noe vi tolker som at de adderte to for hvert klipp, og på denne måten regnet seg frem til antall tråder 20 klipp gir. Gruppe 1D og 2F brukte også samme fremgangsmåte (se figur 4.3). I gruppe 1D ser vi at elevene begynte med 16 kutt som ifølge deres besvarelse ga 34 tråder, og deretter addert med to for hvert ekstra klipp. De viste ikke hvordan de kom frem til dette, men i den forrige oppgaven stoppet de ved «8 kutt er 17 tråder». Det kan tenkes at de har multiplisert både 8 og 17 med 2, men dette kan vi ikke vite sikkert. Etter å ha addert med 2, kom de frem til at 20 kutt gir 42 tråder, men de forstod at dette ikke stemte og rettet opp i det. Vi er usikre på hva som gjorde at elevene innså feilen de hadde gjort. Gruppe 2F skrev at 20 klipp gir 42 tråder, noe de kom frem til ved å «fortsette å følge mønsteret». Her ser det ut til at elevene regnet seg frem til et svar ved å legge til to tråder for hvert klipp for å finne ut at etter ti klipp har man 21 tråder. Det kan så virke som at de har lagt sammen $21 + 21$, noe som gir feil svar. Disse gruppene viste en forståelse på nivå 2, da de kunne finne ulike egenskaper ved representasjoner, men de klarte ikke å se systemet i sin helhet.



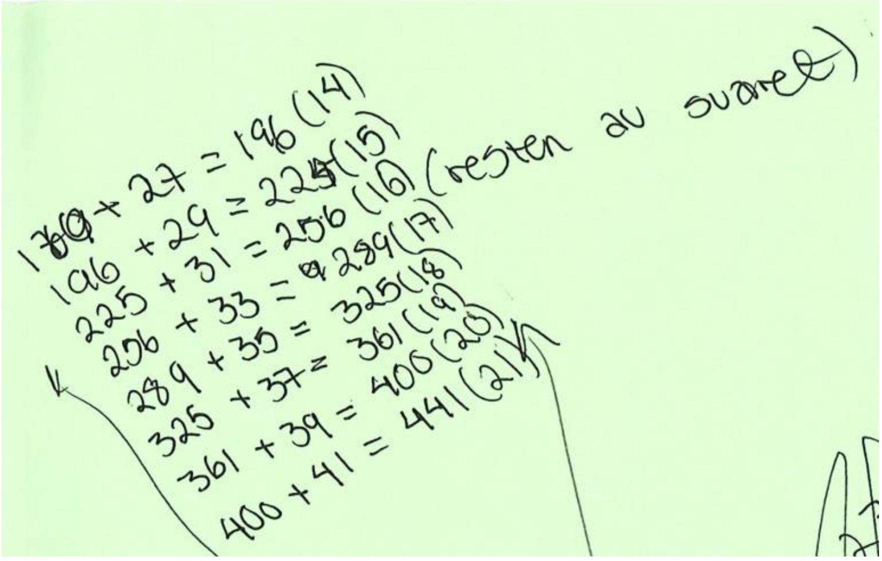

Figur 4.3: Besvarelser fra gruppe 1C, 1D og 2F på oppgave 4 i *klipping av tråd*.

På oppgave 4 i *likesidete trekanter* kom gruppe 2F med følgende svar:



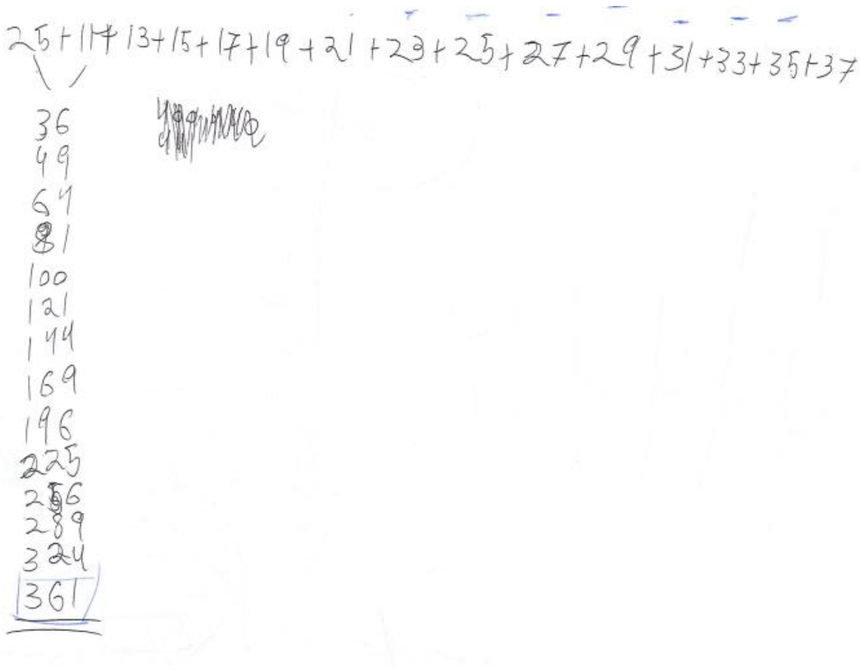

Figur 4.4: Besvarelse fra gruppe 2F på oppgave 4 i *likesidete trekanter.*

Som vi nevnte i 4.2.1, så vi at gruppen hadde hovedfokus på differansen mellom to påfølgende ledd, og de holdt seg til denne beskrivelsen av mønsteret gjennom hele timen. Siden det er mange ledd for å komme frem til riktig svar på oppgave 2 og 3, var det lett for elevene å gjøre små regnefeil. På slutten av timen hjalp vi gruppen med å finne ut hvor de hadde gjort feil, som var ved figur 13. I figur 4.5 ser vi at elevene regnet seg helt frem til figur 21.




Figur 4.5: Utregning hos gruppe 2F for å komme frem til et svar på oppgave 2 og 3 i *klipping av tråd.*

Gruppe 1D hadde også fokus på differansene, og det bød på problemer hos dem også. På oppgave 2 og 3 skrev gruppen henholdsvis 361 og 22. Figur 4.6 viser deres utregning for å finne frem til et svar på oppgave 2. Her ser vi tydelig at elevene har regnet seg frem til figur 19 og ikke 20, så det ser ut til at elevene har glemt det tjuende leddet helt.




Figur 4.6: Utregning hos gruppe 1D for å finne antall små trekanter i figur 20 i *likesidete trekanter.*

Begge gruppene tok i bruk mønsteret de så i form av differanse for å løse oppgave 2 og 3. Dette klassifiserer vi som forståelse på nivå 2, da elvene kunne finne ulike egenskaper ved en representasjon, men representerte eller generaliserte ikke funksjonen på andre måter.

### 4.2.3 Representasjonskort med like tall

Andrea: Tre, hva kan det være for noe?
Angelica: Gudleif går med en jevn fart på tre km/t.
Andrea: Ja, det er den.

I denne interaksjonen mellom Andrea og Angelica kan det se ut til at elevene lette etter like tall på representasjonskortene, og satte dem sammen basert på likhetene. I dette tilfellet koblet de sammen F2 og V2. Dette kan tyde på en forståelse på nivå 2, da de kunne finne og sammenligne ulike egenskaper ved representasjonene, men viste ikke forståelse for alle aspekter ved dem.

I likhet med Andrea og Angelica på gruppe 1A, var det flere elever som brukte samme strategi for å finne frem til gruppene hvor de kunne finne likheter i form av hvilke tall som ble brukt. Eksempler på dette er Camilla på gruppe 1C, Eva på gruppe 2E etter at Espen ga henne G6 og V6 som han koblet sammen og Georg på gruppe 2G.

Camilla: Ett tusen tre hundre her og her, og åtti her og her!
Eva: Ja, det gir jo litt mening, for det er både trettifem og hundre og seksti.
Georg: Åtti, ett tusen tre hundre ... Det er samme tall som i denne, minus åtti x pluss ett tusen tre hundre.

### 4.2.4 Positivt eller negativt stigningstall?

Christine: Pakken går mot bakken, det må være minus da!
…
Camilla: Areal er side ganger side, det kan ikke gå nedover!

Her ser det ut til at både Christine og Camilla på gruppe 1C forsto minst ett aspekt ved de verbale representasjonene, nemlig om de tilhører en funksjon med positiv eller negativ stigning. Siden de her viste at de kunne identifisere visse aspekter ved representasjonen, har vi klassifisert dette som forståelse på nivå 2.

## 4.3 Nivå 3

I det tredje nivået av forståelse har vi plassert de besvarelsene og utsagnene hvor vi har tolket situasjonen som at elevene klarer å gå fra en representasjon av en funksjon til en annen. Her viser elevene forståelse for alle aspekter ved en funksjon, samt funksjonens representasjoner. Her har vi plassert besvarelser som viser at elevene kan representere en funksjon på ulike måter og koble representasjoner av samme funksjon ved å forstå hvordan de hører sammen.

### 4.3.1 Fra en verbal beskrivelse til et symbolsk uttrykk

I arbeid med oppgave 1 i *klipping av tråd* sa Angelica på gruppe 1A følgende:

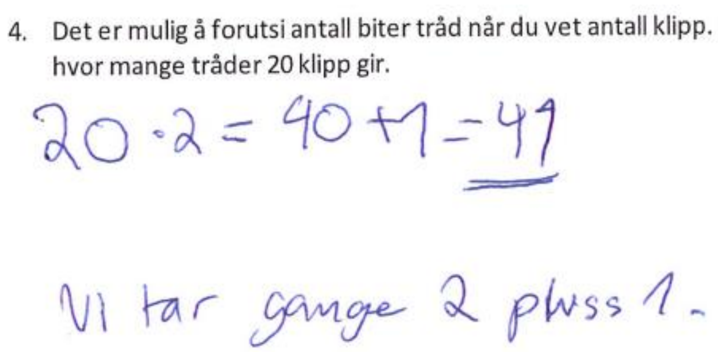
Angelica: Du får dobbelt så mange biter som kutt. Pluss en.

I den skriftlige besvarelsen skrev gruppen «Du får dobbelt så mange biter som kutt + 1 fordi kanten var brettet». Det kan tenkes at påstanden «fordi den er jo bretta» og «fordi i kanten ...» var forsøk på å forklare «dobbelt så mange» og «+1» delen av mønsteret respektivt, men dette kan vi ikke si sikkert da elevene gav opp å forklare hvorfor mønsteret ble slik det ble og gikk videre til å tydeligere beskrive mønsteret. De klarte derfor å oversette fra den manipulative modellen til en verbal beskrivelse, noe vi har klassifisert som forståelse på nivå 3. Argumentasjonen var ikke tilstrekkelig forklarende til å klassifiseres som nivå 4.

Som vi så i 4.2.2 var det mange grupper som tok i bruk differansen mellom to påfølgende ledd for å besvare hvordan de kunne finne ut hvor mange tråder 20 klipp gir. Noen grupper forstod at de kunne multiplisere antall klipp to og addere med en. Dermed kom de frem til svaret raskere enn de andre. De har med dette konvertert fra en verbal beskrivelse til en konkret symbolsk representasjon, noe vi kategoriserer som nivå 3. For eksempel sa Angelica på gruppe 1A følgende:

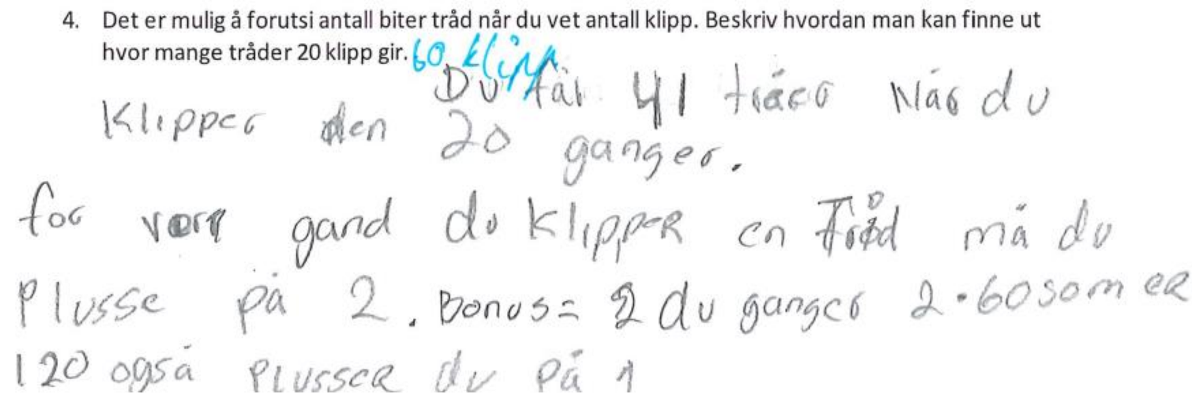
Angelica: Men du burde skrive tjue gange to egentlig. Pluss en.

Her ser vi at elevene behandler den verbale representasjonen for å lettere forklare mønsteret de har sett (Duval, 2006). Dette kunne vært utvidet ved å bruke en symbolsk forklaring for å produsere et direkte uttrykk av antall klipp når du får gitt antall tråder, men gruppen klarte ikke det med kun den verbale representasjonen. I denne prosessen klarte elevene å bevare meningen når de konverterte mellom den konkrete situasjonen og en verbal representasjon, og har med denne konverteringen demonstrert en forståelse på nivå 3. En lignende utregning kan sees hos gruppe 2H hvor elevene tok i bruk en symbolsk utregning, som vist i figur 4.7.




Figur 4.7: Besvarelse hos gruppe 2H på oppgave 4 i *klipping av tråd.*

Gruppe 2G forklarte at «for hver gang du klipper en tråd må du plusse på 2», men de la også ved en «bonus» som viser hvordan de fant antall tråder ved 60 klipp, se figur 4.8. I dette tilfellet ser vi at elevene så en større sammenheng gjennom deres verbale forklaring av den symbolske beregningen $2 * 60 + 1$. Her viste de forståelse på nivå 3, ved at de så systemet i sin helhet.

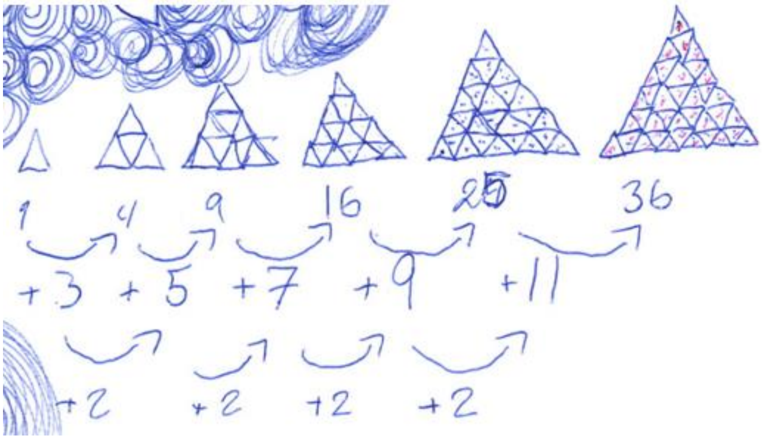



Figur 4.8: Besvarelse hos gruppe 2G på oppgave 4 i *klipping av tråd.*

### 4.3.2 Fra differanse til symbolsk uttrykk

Flere av gruppene så på differansen mellom de påfølgende leddene i *likesidete trekanter* til å begynne med slik som i 4.2.3, deriblant gruppe 1A, 1B, 1C, og 2E. Forskjellen her er at de fire sistnevnte gruppene gikk ett steg videre og representerte funksjonen med et symbolsk uttrykk.

Gruppe 1A begynte med å tegne opp de seks første figurene, for så å se på økningen av antall små trekanter som vist i figur 4.9.

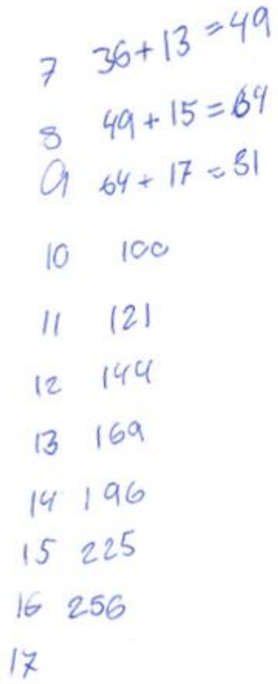



Figur 4.9: Tegning av de seks første figurene i *likesidete trekanter* fra gruppe 1A.

Vi har ingen skriftlig besvarelse på oppgave 1, men vi observerte at de gikk fra å fokusere på differansene til å tenke seg til et symbolsk uttrykk etter en interaksjon med læreren under en diskusjon om oppgave 2. Som vist i figur 4.10 begynte elevene å telle seg frem mot figur 20 for å besvare oppgaven, men stoppet opp på figur 9. Med litt hjelp så elevene sammenhengen mellom alle tallene de satt med foran seg, og kunne gå fra en representasjon til en annen, noe som førte til at de her lå på en forståelse på nivå 3.

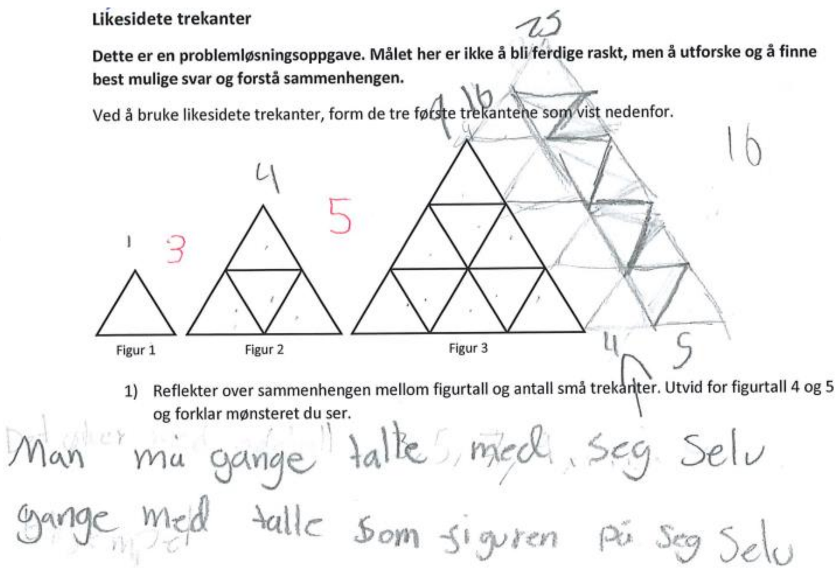
> Alice: Dette blir sykt mye regning da.
> Lærer: Det finnes jo andre metoder.
> Angelica: Si det da
> Alice: Kan du ikke bare si svaret?

Lærer: Nei, men jeg kan si … finnes det en annen måte å få de tallene enn det regnestykket dere gjorde?
Angelica: Gangetabellen! Syv ganger syv, åtte ganger åtte, en ganger en, to ganger to, tre ganger tre, fire ganger fire.




Figur 4.10: Gruppe 1As tabell over de 16 første figurene i *likesidete trekanter.*

Gruppe 1B er en av mange grupper som fant ut at man «må gange tallet med seg selv» som de skrev i oppgave 1 på *likesidete trekanter* (figur 4.11).




Figur 4.11: Gruppe 1Bs besvarelse på oppgave 1 i *likesidete trekanter*.

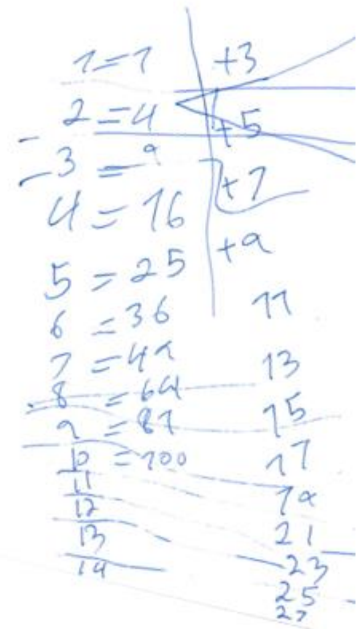
Gruppen valgte å utvide til figur 4 og 5 direkte på oppgavearket, og her viste de økningen av antall trekanter mellom figurene i rød penn, og skrev i tillegg ned hvor mange trekanter hver figur inneholder. Under observasjonen noterte vi oss at gruppens svar i utgangspunktet var «Det øker med oddetall …», men dette endret de etter å ha diskutert oppgave 2, hvor de skulle finne antall små trekanter figur 20 består av. Med dette viste de en forståelse på nivå 3, da de kunne finne og representere sammenhengen ved hjelp av en verbal beskrivelse av det symbolske uttrykket.

Gruppe 1C var som nevnt en av gruppene som gikk fra å studere differansen til å se sammenhengen med de kvadratiske tallene, noe som kommer til syne i Camillas utsagn:

> Camilla: Vi kan lage en tabell? Der vi legger til differansen … Forskjellen øker med to hele tiden! Først plusser vi med tre, så med to så det blir fem, så to, da får vi syv ekstra, så med to da ni!

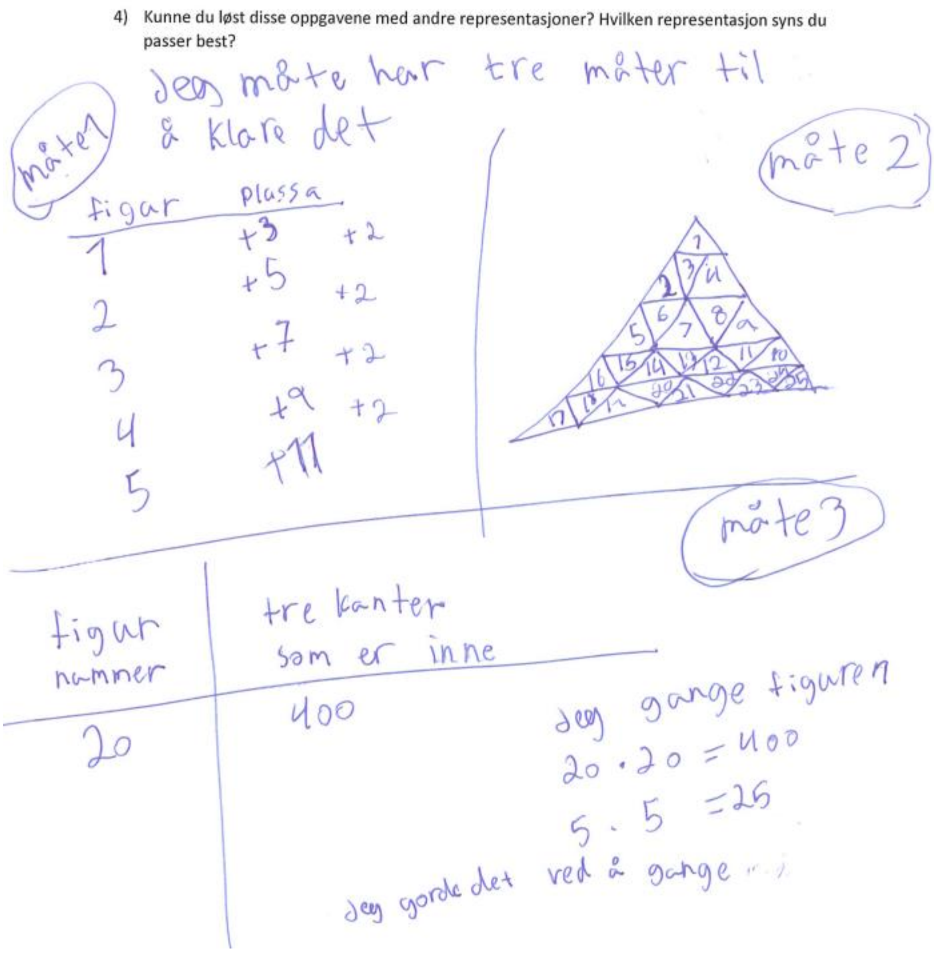
Camilla forestlo å lage en tabell (figur 4.12) over differansen. Hun fant ut at «forskjellen øker med to hele tiden». Ved å lage tabellen viste hun at hun kunne representere sammenhengen på flere måter, og viste med dette en forståelse på nivå 3. Det virker som hun ved å bruke tabellen lettere kunne se egenskapene til funksjonen, noe som førte til følgende utsagn:

> Camilla: Se her da! En er lik en, to er lik fire, tre er lik ni, fire er lik seksten, fem er lik tjuefem. Seks er lik? Trettiseks! Syv er lik? ... førtini!




Figur 4.12: Gruppe 1Cs tabell som viser de ti første figurene i *likesidete trekanter*, samt differansen mellom leddene.

Med bakgrunn i elevenes løsning på oppgave 2 tolker vi dette som at hun så at antall små trekanter i en gitt figur, er figurtallet kvadrert. Gjennom dette har Camilla igjen demonstrert forståelse på nivå 3. Gruppe 1C er en av få grupper som har svart på oppgave 4 i *likesidete trekanter*, som vist i figur 4.13. Her viste de at de kunne representere funksjonen ved hjelp av tabell (måte 1), tegning (måte 2) og funksjonsuttrykk (måte 3), noe som støtter opp under påstanden om at gruppen viste forståelse på nivå 3.




Figur 4.13: Besvarelse fra gruppe 1C på oppgave 4 i likesidete trekanter

Gruppe 2E begynte også med å diskutere økningen i antall små trekanter i hver figur fra den foregående.

> Eva: En øker til fire. Øker fra fire til ni.
> Elise: Fordi det er en trekant der, og så plusser man på tre, så på fem, så på syv og så på ni.
> Eva: Men vi kan jo tegne den neste bare for å se.

Elevene bestemte seg for å tegne figur 4 og talte så opp antall små trekanter denne består av, som de fant ut var 16.

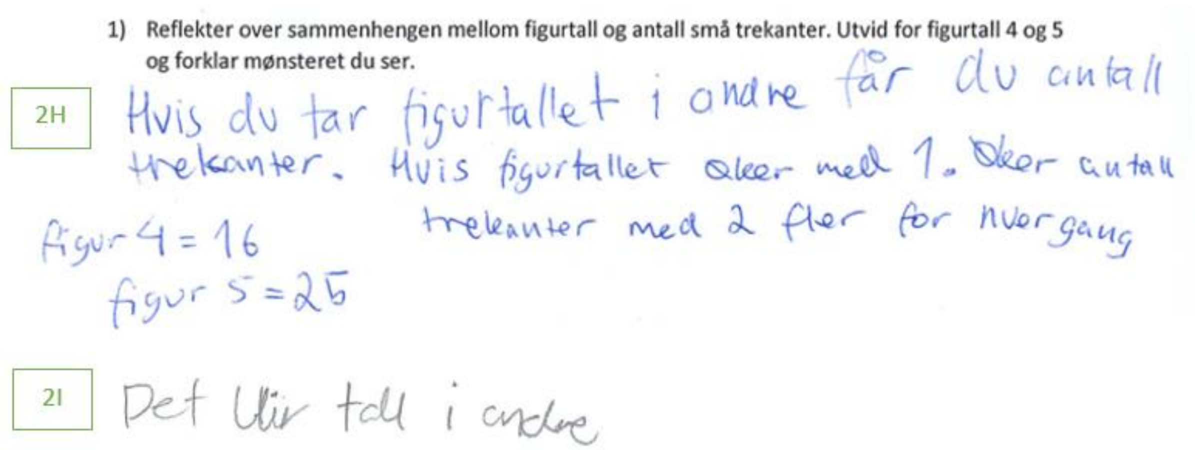
> Eva: Jammen, her er figurtallet tre; tre, seks, ni, og her er figurtallet to, og det er to, fire. Så det er seg selv ganga med seg selv.

Elise: Så da er jo figur fire, fire ganger fire, som er seksten.

Her ser vi at elevene Eva og Elise diskuterte sammenhengen mellom figurtall og antall små trekanter. De så at man må gange figurtallet med seg selv for å finne antall trekanter i figur 2 og 3, og brukte dette til å forsvare at figuren de tegnet endte opp med å ha 16 trekanter. Her viste elevene en forståelse på nivå 3 – de kunne representere sammenhengen ved å ta i bruk en verbal beskrivelse.

### 4.3.3 Symbolsk uttrykk

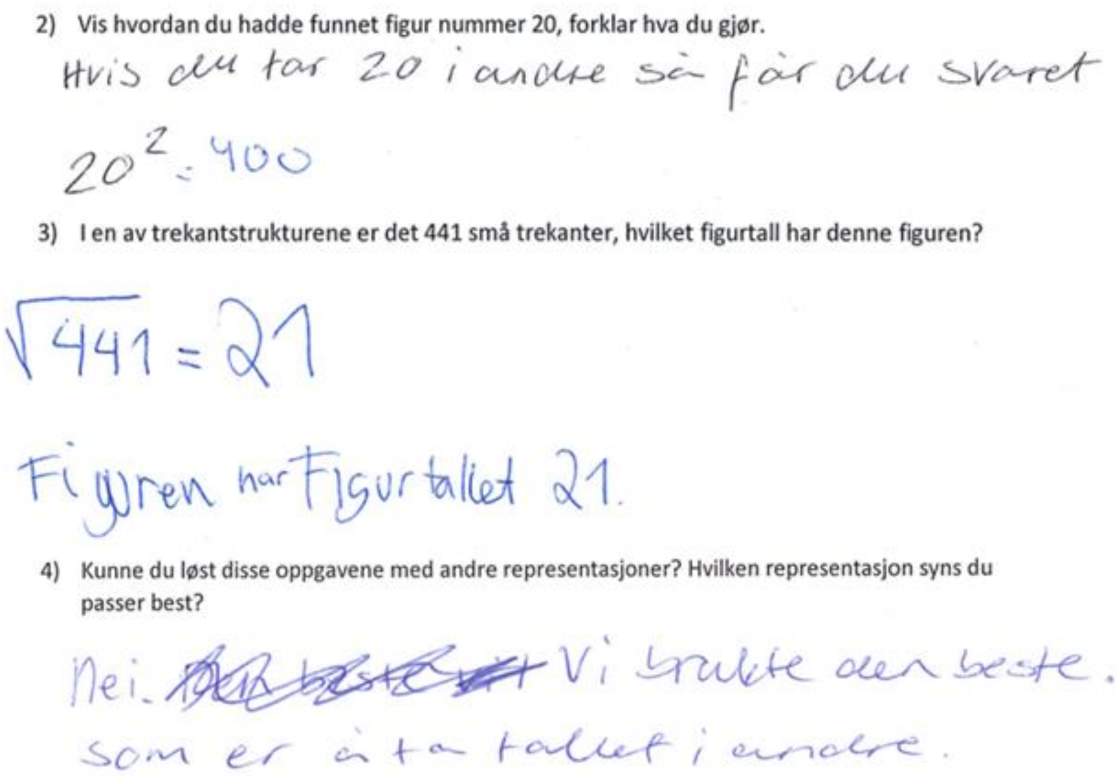
I besvarelsene fra gruppene 2H og 2I er vi usikre på hvordan de kom frem til en løsning på oppgave 1 i *likesidete trekanter*, da gruppe 2I kun skrev «Det blir tall i andre» (se figur 4.14). Gruppe 2H skrev først «Hvis du tar figurtallet i andre får du antall trekanter.» og deretter beskrev de økningen av antall små trekanter for hver ny figur, som vist i figur 4.14.




Figur 4.14: Besvarelser fra gruppe 2H og 2I på oppgave 1 i *likesidete trekanter*.

Vi har valgt å plassere disse besvarelsene på nivå 3, da elevene viste at de kunne gå fra en representasjon til en annen ved at de ga en verbal beskrivelse av det symbolske uttrykket.

På oppgave 4 i *likesidete trekanter* svarte gruppe 2H at de brukte den beste representasjonen, som vist i figur 4.15. Ved å finne et symbolsk uttrykk som ikke er rekursivt, kunne de løse oppgave 2 og 3 raskt. De brukte representasjonen direkte i oppgave 2 og behandlet uttrykket ved å ta kvadratroten av 441 (se figur 4.15).



2) Vis hvordan du hadde funnet figur nummer 20, forklar hva du gjør.

Hvis du tar 20 i andre så får du svaret

$20^2 = 400$

3) I en av trekantstrukturene er det 441 små trekanter, hvilket figurtall har denne figuren?

$\sqrt{441} = 21$

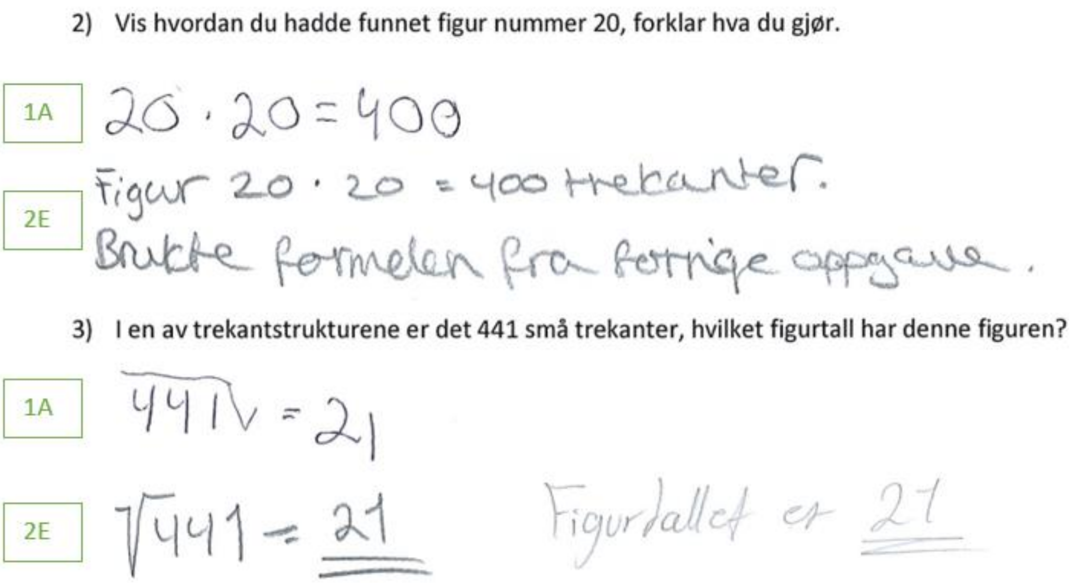
Figuren har Figurtallet 21.

4) Kunne du løst disse oppgavene med andre representasjoner? Hvilken representasjon syns du passer best?

Nei. ~~Det beste~~ Vi brukte den beste. som er å ta tallet i andre.

Figur 4.15: Gruppe 2Hs besvarelser på oppgave 2, 3 og 4 i *likesidete trekanter.*

1A og 2E benyttet seg av den samme symbolske representasjonen som gruppe 2H for å løse oppgave 2, og behandlet også uttrykket for å finne kvadratrot av 441 (figur 4.16). Gruppe 1A, 2E og 2H har altså først utført en transformasjon fra en *manipulativ modell* til en symbolsk representasjon, og deretter behandlet innen den symbolske representasjonen. Gjennom disse handlingene viste gruppene forståelse på nivå 3.



2) Vis hvordan du hadde funnet figur nummer 20, forklar hva du gjør.

1A $20 \cdot 20 = 400$

2E Figur $20 \cdot 20 = 400$ trekanter.
Brukte formelen fra forrige oppgave.

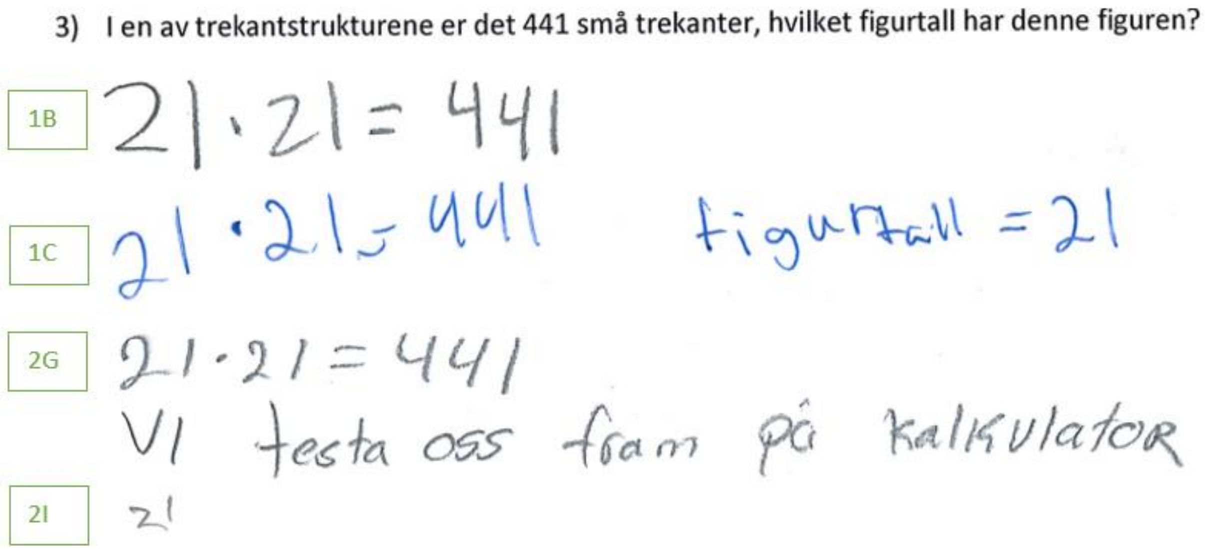
3) I en av trekantstrukturene er det 441 små trekanter, hvilket figurtall har denne figuren?

1A $441\sqrt{\ } = 21$

2E $\sqrt{441} = \underline{\underline{21}}$ Figurtallet er $\underline{21}$

Figur 4.16: Besvarelser fra gruppe 1A og 2E på oppgave 2 og 3 i *likesidete trekanter*.

Gruppe 1B, 1C, 2G og 2I fokuserte også på den symbolske representasjonen de fant da de løste oppgave 1. For å besvare oppgave 2 regnet gruppen ut 20*20. I motsetning til gruppe 1A, 2E og 2H behandlet ikke disse gruppene uttrykket for å kunne gå den andre veien, se figur 4.17. Det de derimot gjorde var å se at svaret på oppgave 2, altså 400, var relativt nærme 441 som var antall små trekanter i figuren de skulle finne figurnummer til. Dermed gjettet de seg frem til at figurtallet var 21 og testet dette med kalkulator. Selv om de ikke har behandlet uttrykket vil vi si at elevene fortsatt viste en forståelse på nivå 3, da de viste at de kan bruke det symbolske uttrykket de har funnet samt bevare innholdet.



Figur 4.17: Besvarelser fra gruppe 1B, 1C, 2G og 2I på oppgave 3 i *likesidete trekanter*.

### 4.3.4 Oversetting mellom symbolsk uttrykk og tabell

> Elise: Minus null komma fem ganger to, er det minus en eller en?
> Emma: Skal dere ha pc-en til å regne?
> Eva: Ja, vi kan ha det.
> Elise: Men denne, er det minus en eller?
> Eva: Det kommer an på hva x-en er. Må vi ikke ta den sammen med en sånn her? (Tabell).
> Elise: Så vi må regne ut stykket. Jeg vet liksom ikke hva.
> Eva: Vi må jo sette x verdien og se om y verdien blir det. Må vi ikke det?

I denne interaksjonen på gruppe 2E viste Eva en forståelse på nivå 3 ved at hun forklartee hvordan man kan sjekke hvilke funksjonsuttrykk som passer sammen med hvilken tabell. Eva viste her at hun forstod de to representasjonene, samt hvordan man kan sjekke om de representerer den samme funksjonen eller ikke. Litt senere i økta kom Henrik bort og spurte gruppen om forklaring på hvorfor eller hvorfor ikke T7 og F7 passer sammen.

> Henrik: Men hvorfor tror du den passer og hvorfor tror du den ikke passer?
> Eva: Fordi det er x i andre, hvis x er en, nei, hvis x er tre så er y liksom ni, men det er kanskje ikke logisk.

Elise: Men hvis du hadde tatt det (x-verdiene i T7) inni der (F7), så hadde det vært tre ganger tre, nei tre ganger to, for det står to der.
Eva: Nei, når det er to skal du ta tre ganger tre. Skal du ikke det?

Denne forklaringen viste at også Elise forstod hvordan man kan sjekke om et funksjonsuttrykk passer sammen med en tabell, og viste her en forståelse på nivå 3. Begge elevene er kort vei fra forståelse på nivå 4 ved å forklare hvorfor to representasjoner hører sammen, men forklarte det ikke i funksjonens egenskaper, bare med å punktvis sammenligne de to representasjonene.

### 4.3.5 Oversettelse mellom verbal representasjon og funksjonsuttrykk

Angelica: Men er det noen der hvor man ganger med fire og så plusser på hundre? Den.
Andrea: Ja, det er det. *Setter T1 sammen med F1 og V1*
Angelica: Okei, så man trenger egentlig bare regnestykket. Vi har skjønt det litt i hvert fall.

Her viste Angelica en forståelse på nivå 3, da hun så på F1 og V1, og ut fra dette lette hun etter en tabell hvor man «ganger med fire og så plusser på hundre». Hun viste at hun kan matche disse representasjonene ved å forstå sammenhengen mellom dem, og ikke bare basert på at hun ser like tall. Her har vi tolket det som at hun har sett på tabellen og sett logikken bak. En lignende situasjon finner vi hos gruppe 2E, i elevenes søken etter en symbolsk representasjon tilhørende T8.

### 4.3.6 Fra tabell til funksjonsuttrykk

Elise: Har vi en ting der det står minus fem x? For nå har vi bare minus null komma fem x *holder opp T8*. Denne her skal være minus fem x, men denne her er nærmest.

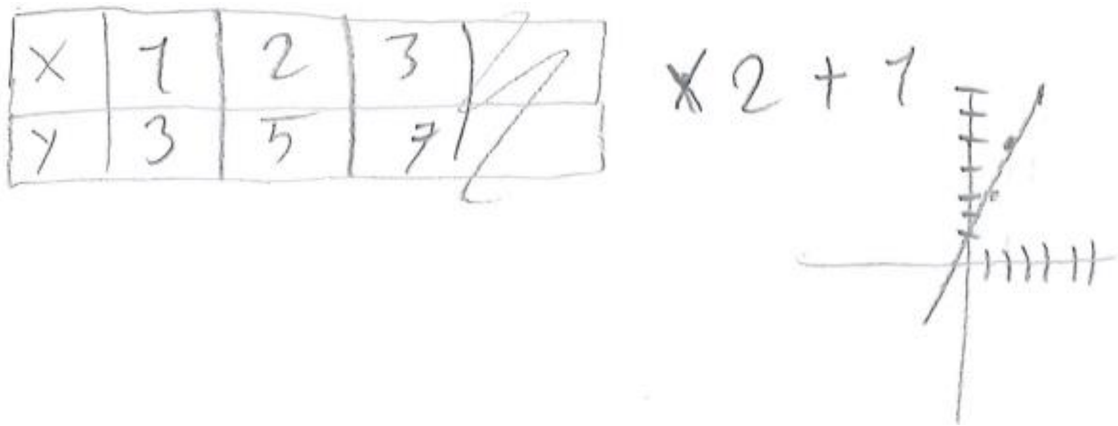
Her ser vi at Elise holdt opp T8, tabell som passer sammen med funksjonsuttrykket $y = -5x$, men dette funksjonsuttrykket har de ikke, siden T8 ikke er ment til å ha noen match blant kortene de har fått utdelt. Elise klarte å se hvilket funksjonsuttrykk som hører sammen med denne grafen, noe vi klassifiserer som nivå 3. Dette viste at hun klarer å gå fra en representasjon til en annen, og viste en forståelse for alle aspekter av funksjonen. Hun forklarte likevel ikke hvorfor hun mente de forskjellige representasjonene hørte sammen, og vi kan derfor ikke si at hun viser forståelse på nivå 4 i denne oppgaven.

### 4.3.7 Funksjonsuttrykk → Tabell → Grafisk fremstilling

I arbeid med oppgavene i første og andre time var det kun gruppe 2E som representerte funksjonene ved hjelp av en grafisk fremstilling. I den første timen diskuterte elevene oppgave 1, hvor de skulle representere funksjonen.

Espen: Skal vi fortsette?
Evelyn: Ja, jeg skal skrive at Elise ville lagd en graf (som svar på oppgave 1 i *klipping av tråd).*
Espen: Kan lage en … nei, jeg kan ikke, jeg klarer ikke graf. Jeg skjønner ikke sånt.

Her kommer det frem at Elise ville ha lagd en graf, og Espen sa at han «skjønner ikke sånt». Likevel kan vi se på oppgave 6 i *klipping av tråd* at elevene representerte funksjonen ved en grafisk fremstilling, hvor de brukte en tabell som en hjelpemiddelrepresentasjon (figur 4.18).

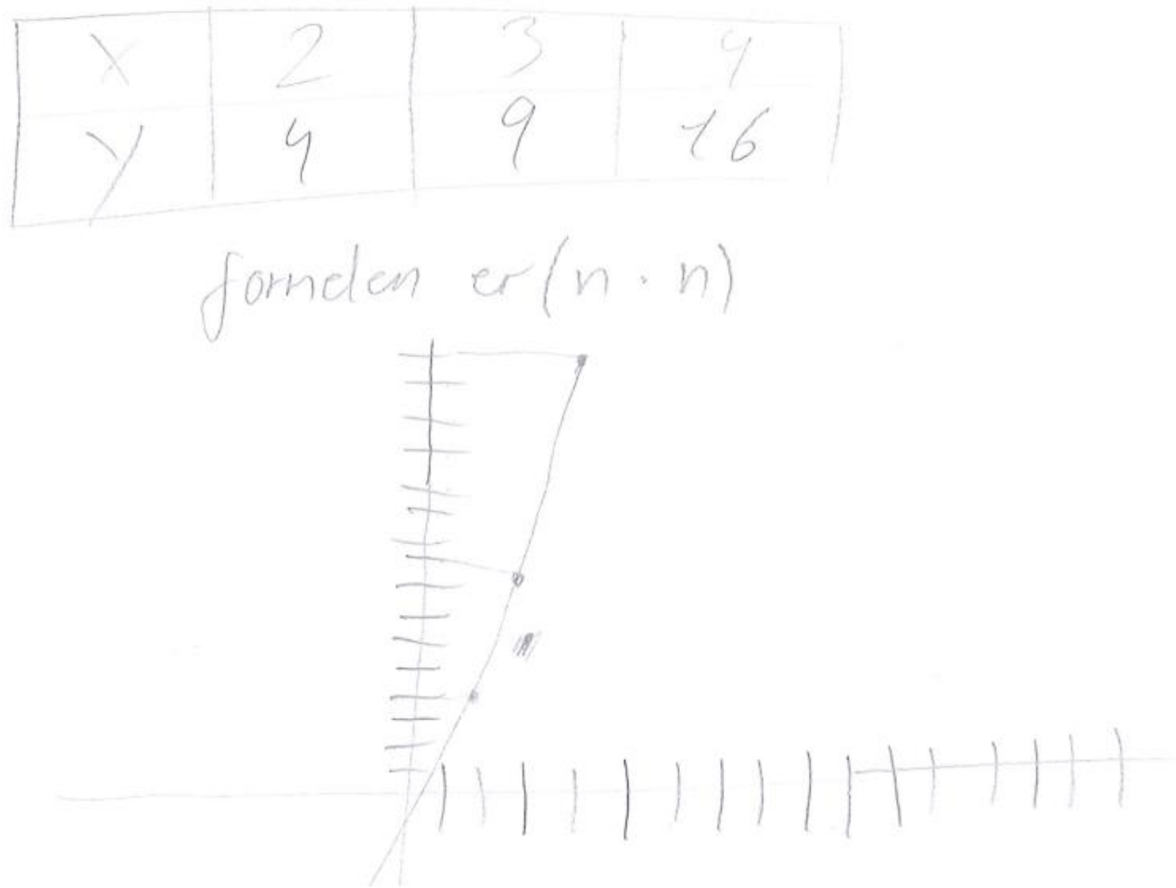



Figur 4.18: Tabell → Grafisk fremstilling, representasjoner lagd av gruppe 2E i første time

I andre time kan vi også se at Elise ville ha løst oppgaven ved hjelp av en grafisk fremstilling.

Eva: Formel er vel det beste? (Som svar på oppgave 4 i *likesidete trekanter).*
Elise: Ja, men hvis man kan så kan man vel løse den her med en graf, hvis man får det til. Men da trenger man en formel.
…
Eva: Vi trenger jo en formel.
Elise: Og tallene … Jeg prøvde med på en formel, der vi har n ganger k pluss to.
…
Elise: Men hvis vi skal ha en graf da, blir det sånn en ganger en, to ganger to? Ville vi skrevet sånn? Hvis vi hadde skrevet sånn en, ville vi tatt en ganger en? *Lager en tabell på bunnen av arket* En, fire og ni. Er det liksom bare å lage grafen da?
…
Evelyn: n ganger n liksom? Er det formelen?

Ut fra denne diskusjonen er det tydelig at elevene vet at de trenger et funksjonsuttrykk for å kunne lage en grafisk fremstilling av funksjonen. Til å begynne med prøvde Elise med en rekursiv formel, hvor hun tok utgangspunkt i differansen mellom leddene. Etter en stund med diskusjon kom hun frem til det korrekte funksjonsuttrykket, og brukte dette til å lage en tabell. Denne tabellen brukte de så til å lage en grafisk fremstilling av funksjonen, som vist i figur 4.19




Figur 4.19: Tabell → Grafisk fremstilling, representasjonsformer av gruppe 2E i andre time

Vi har valgt å plassere begge disse besvarelsene under nivå 3, fordi elevene viste her at de klarte å gå fra en representasjon av en funksjon til en annen. Elevgruppen viste at de kan representere funksjonene på ulike måter ved å omforme fra et symbolsk uttrykk til en grafisk fremstilling ved å bruke tabell som hjelpemiddelrepresentasjon.

## 4.4 Nivå 4

Under det siste nivået har vi valgt å plassere utsagnene og besvarelsene vi har tolket til at elevene kan forklare hvorfor en representasjon av en funksjon er som den er. Dette nivået er i stor grad knyttet til elevenes evne til å uttrykke seg muntlig ved å kunne forklare hvorfor en representasjon er som den er eller å forklare hvorfor ulike representasjoner hører sammen eller ikke.

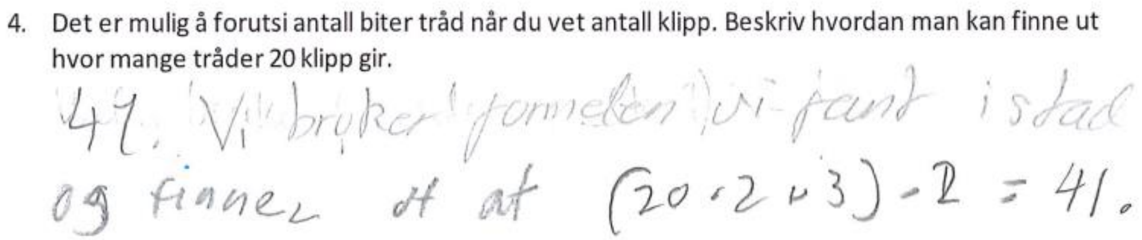
### 4.4.1 Artikulering av funksjonsuttrykk

På gruppe 2E kom Espen med en lang forklaring som viser hvordan han kom frem til et symbolsk uttrykk i *klipping av tråd*.

> Espen: Første gang man klipper opp tråden, da får man tre biter. Ehh, og, når man tar en ny en og klipper opp den, så får man disse to bitene som vi ikke gjør noe med...

Også blir dette til tre nye. *Peker på den «midterste» tråden*. Og, eh, det er den formelen der. At n er hvor mange ganger vi har klippet. Så hvis vi har klippet to ganger, så får vi to ganger med to tråder som blir igjen på slutten, pluss tre tråder som den siste deler seg opp i. Eh, men, så klarte ikke jeg helt å tenke på en bra løsning for å, fordi at det blir feil. Så da bare gjorde jeg sånn. Fordi at den viser alltid to mer tråder enn det egentlig er. Så da tar du bare vekk de.

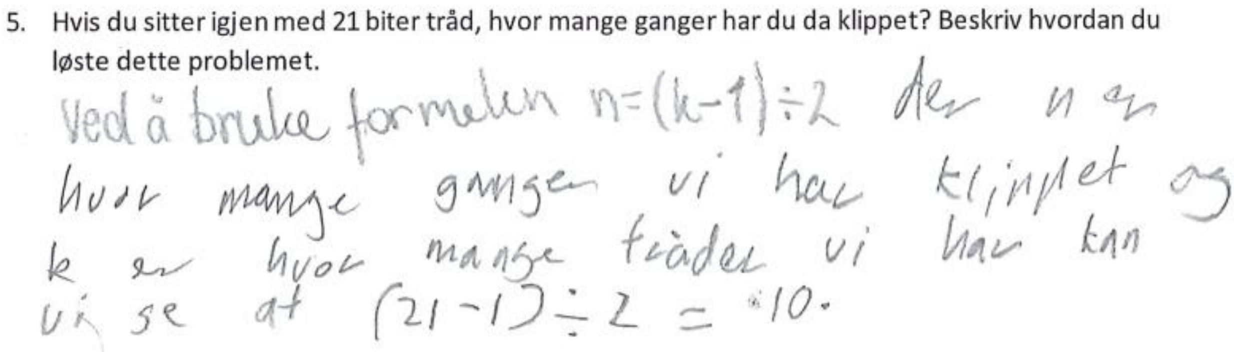
I dette resonnementet gjorde Espen både overganger fra en konkret situasjon til en symbolsk representasjon, og til en verbal forklaring av hva som skjer ved å kutte tråder. Dette er tydelig forståelse på nivå 3. Han argumenterte i tillegg for hvorfor hvert ledd av formelen er slik den er, og gjennom dette viste han forståelse på nivå 4. Det symbolske uttrykket Espen kom frem til var $2n + 3 - 2$, som han senere så han kunne forenkle til $2n + 1$. Her hadde han enda ikke funnet ut hvorfor han alltid fikk to for mye, men valgte å trekke fra to på slutten av hver utregning da han så at dette vil føre til korrekt svar. Som svar på oppgave 4 i *klipping av tråd* tok elevene i bruk den første formelen, og erstattet n med 20 for å finne antall tråder.


4. Det er mulig å forutsi antall biter tråd når du vet antall klipp. Beskriv hvordan man kan finne ut hvor mange tråder 20 klipp gir.

4). Vi bruker formelen vi fant i stad og finner ut at $(20 \cdot 2 + 3) - 2 = 41$.

Figur 4.20: Besvarelse fra gruppe 2E på oppgave 4 i *klipping av tråd*

Gruppen beskrev deretter hvordan de løste oppgave 5 i *klipping av tråd* på følgende måte:


5. Hvis du sitter igjen med 21 biter tråd, hvor mange ganger har du da klippet? Beskriv hvordan du løste dette problemet.

Ved å bruke formelen $n = (k-1) \div 2$ der n er hvor mange ganger vi har klippet og k er hvor mange tråder vi har kan vi se at $(21-1) \div 2 = 10$.

Figur 4.21: Besvarelse fra gruppe 2E på oppgave 5 i *klipping av tråd.*

I tillegg til den skriftlige beskrivelsen i figur 4.21, forklarte Espen for gruppen hvordan funksjonsuttrykket brukes og hva det innebærer. I denne handlingen viste han et høyt nivå av forståelse ved at han knyttet aspekter i formelen til aspekter i manipulative modellen. Han forklarte tydelig sammenhengen mellom de to representasjonene, og viste med dette forståelse på nivå 4.

Espen: Her ser vi på oppgaven, når Evelyn er ferdig. Hvis du sitter igjen med tjueen biter tråd, hvor mange ganger har du klippa? Og da ser vi på formelen. N er hvor mange ganger vi har klippet, og det er jo det vi skal finne ut av. N er lik k, det er hvor mange tråder vi har, minus en delt på to. Så da ser vi her at her har vi tjueen tråder. Det betyr at vi kan bytte ut k med tjueen. Da tar vi n er lik tjueen minus en delt på to. Så regner vi det ut. Er lik tjue delt på to, ti. N er lik ti. Og hvis vi tester det med formelen vi har her eller her, dette er vel enklere enn den jeg lagde. N er lik ti, ti gange to pluss en er lik tjueen. Det er basically svaret på denne oppgaven.

### 4.4.2 Sammenkobling av verbal representasjon og funksjonsuttrykk

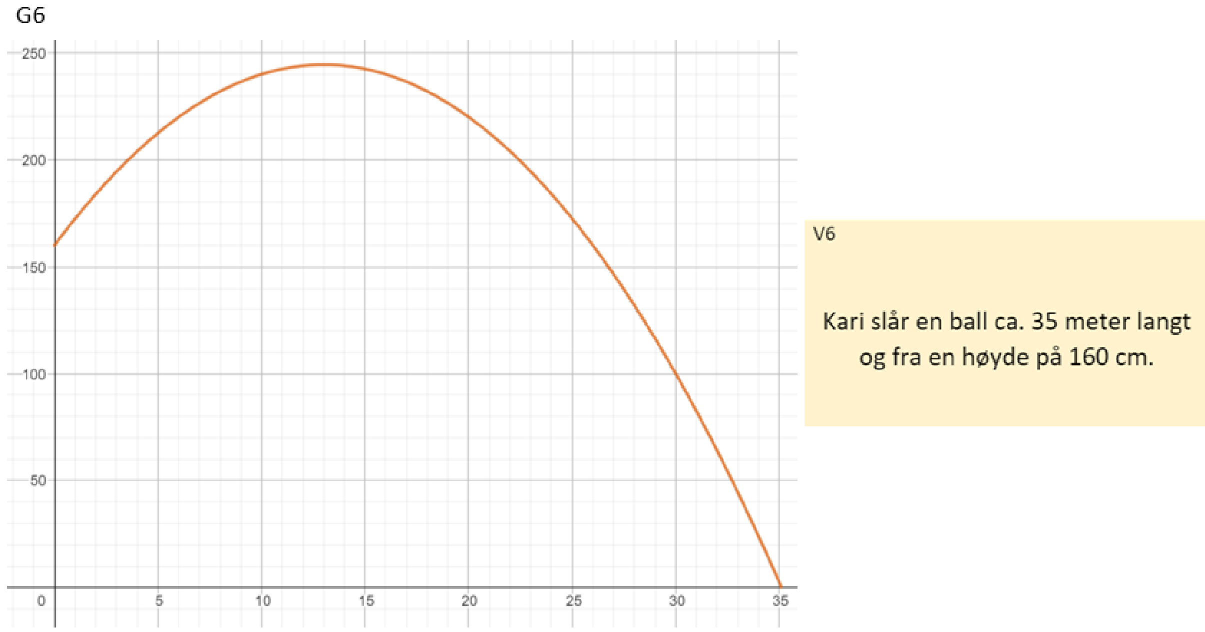
> Angelica: Men den kan og være den. Arealet av et kvadrat. Fordi areal det er jo side gange side. Det er jo x i andre. Et kvadrat har jo like sider.
> Andrea: To sokker i timen, det kan jo ikke være noen andre.

I denne interaksjonen viste Angelica tegn til forståelse på nivå 4 for funksjonenes representasjoner, ved å forklare hvorfor V7 passer sammen med F7, og så logikken bak denne sammenhengen. Hun viste dermed hint av forståelse på nivå 4. Derimot så Andrea fortsatt ut til å være låst til ideen om at siden det er like tall på V8 og F7, altså at det ikke er noen andre funksjonsuttrykk som inneholder tallet to. Dette er en feiltolkning som demonstrerer forståelse på nivå 1.

### 4.4.3 Sammenkobling av verbal representasjon og grafisk fremstilling

I gruppe 1D forklarte Daniel hvorfor V6 og G6 hører sammen på følgende måte:

> Daniel: Dette er ballkast! *Peker langs G6* Vi starter på hundre og seksti, så går vi opp og så ned mot bakken igjen og BOFF.




Figur 4.22: G6 og V6

Dette har vi klassifisert som forståelse på nivå 4, da Daniel viste at han så logikken bak den verbale representasjonen og den grafiske representasjonen som hører til. På grunn av dette kunne han forklare hvorfor representasjonene hører sammen. En lignende forklaring ble gitt av samme gruppe for sammenhengen mellom V5 og F5.

## 4.5 Oversikt over elevenes bruk av representasjoner

Tabell 4.1 og 4.2 viser henholdsvis en oversikt over hvilke representasjoner elevgruppene tok i bruk de to første timene. Tabellene sier noe om elevene har tatt i bruk representasjonene verbal beskrivelse, symbolsk uttrykk, tabell, graf og tegning, men ingenting om hvor mange ganger de enkelte representasjonene er brukt. Tabellene sier heller ingenting om elevene lyktes med å representere funksjonene ved hjelp av disse representasjonene eller ikke. Det vil si at en gruppe som stilte opp en tabell over differansen mellom leddene vil kvalifisere for «å ha brukt tabell». Gruppe 2I leverte ingen skriftlig besvarelse den første timen.

| | Verbal beskrivelse | Funksjons-uttrykk | Tabell | Graf | Tegning |
|---|---|---|---|---|---|
| **1A** | X | X | X | | |
| **1B** | X | | X | | |
| **1C** | X | | X | | |
| **1D** | X | | X | | X |
| **2E** | X | X | X | X | |
| **2F** | X | | X | | X |
| **2G** | X | X | X | | X |
| **2H** | X | X | X | | X |
| **2I** | - | - | - | - | - |
| **Sum** | **8** | **4** | **8** | **1** | **4** |

Tabell 4.1: Oversikt over elevgruppenes bruk av representasjoner i *klipping av tråd.*

| | Verbal beskrivelse | Funksjons-uttrykk | Tabell | Graf | Tegning |
|---|---|---|---|---|---|
| **1A** | X | X | X | | X |
| **1B** | X | X | | | X |
| **1C** | X | X | X | | X |
| **1D** | | | X | | X |
| **2E** | X | X | X | X | X |
| **2F** | X | | X | | X |
| **2G** | X | X | X | | |
| **2H** | X | X | | | |
| **2I** | | X | | | X |
| **Sum** | **7** | **7** | **6** | **1** | **7** |

Tabell 4.2: Oversikt over elevgruppenes bruk av representasjoner i *likesidete trekanter.*

### 4.6 Oversikt over elevenes tolkning av flere representasjoner.

Tabell 4.3 viser en oversikt over hvor mange ganger elevene koblet sammen en representasjon av en funksjon med minst en annen. Det vil si at dersom en gruppe koblet G5 med T5, har vi regnet dette som riktig satt sammen representasjon på begge disse. Representasjonene på funksjon 8 stemmer ikke overens med noen representasjoner, så denne kolonnen er markert i rødt. Vi tenkte det ville være interessant å se på hvor mange ganger disse representasjonene er satt sammen med hverandre for å prøve å identifisere bruk av elimineringsmetoden. Siden representasjonene på funksjon 8 ikke passer sammen med hverandre eller noen andre, har vi valgt å utelukke disse sammensetningene i summeringen.

| Funksjon | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Sum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Graf | 8 | 8 | 6 | 9 | 9 | 8 | 6 | 5 | 54 |
| Funksjonsuttrykk | 9 | 7 | 5 | 8 | 6 | 8 | 8 | 6 | 51 |
| Verbal | 8 | 8 | 5 | 8 | 5 | 7 | 5 | | 46 |
| Tabell | 9 | 9 | 6 | 8 | 8 | 8 | 7 | 5 | 55 |
| **Sum** | 34 | 32 | 22 | 33 | 28 | 31 | 26 | 16 | 206 |

Tabell 4.3: Oversikt over hvor mange ganger en representasjon av en funksjon har blitt koblet korrekt sammen med minst en annen.

Som det vises i tabell 4.3, ser det ut til at representasjonsformen elevene hadde mest utfordringer med å koble sammen med andre representasjoner var de verbale representasjonene. Vi vil derfor se nærmere på dette i tabell 4.4. Tabellen viser en oversikt over antall ganger de verbale representasjonskortene har blitt korrekt satt sammen med de grafiske representasjonene, funksjonsuttrykk og tabeller. Funksjon 8 er ikke inkludert i denne tabellen, da V8 aldri vil være koblet korrekt sammen med noen andre representasjonskort. Her vil det også, slik som i 4.3, være mulig for en verbal representasjon å bli satt sammen med en annen ni ganger.

| Verbal | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Sum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Graf | 6 | 7 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 | 40 |
| Funksjonsuttrykk | 7 | 7 | 3 | 8 | 3 | 7 | 5 | 40 |
| Tabell | 8 | 8 | 3 | 7 | 4 | 7 | 3 | 40 |

Tabell 4.4: Oversikt over antall ganger en verbal representasjon av en funksjon har blitt koblet korrekt sammen med graf, funksjonsuttrykk og tabell.

# 5 DISKUSJON

Vi har sett at elevenes forståelse av representasjoner var svært variert. Noen av elevutsagnene og konverteringene viste at de forstod sammenhenger mellom forskjellige representasjoner og/eller forstod funksjonen som skal representeres. Andre utsagn viste ikke en slik forståelse, enten ved feiltolkninger eller ved at de delvis viste forståelse gjennom vilkårlig sammenkobling av representasjonskortene. I dette kapittelet vil vi diskutere våre funn. Som nevnt tidligere finner vi det hensiktsmessig å strukturere kapitlet etter de fire nivåene som analyseverktøyet består av.

## 5.1 Nivå 1

Nivå 1 består av besvarelser hvor elever ikke klarte å vise forståelse for funksjoner gjennom deres bruk av representasjoner. Dette inkluderer blant annet feiloppfatninger av representasjoner eller aspekter av disse, og feilaktig overfladisk sammenkobling.

### 5.1.1 Feiltolkninger

Ved flere anledninger i timene avslørte elevenes utsagn og representasjonsbruk en rekke feiltolkninger knyttet til funksjonsbegrepet og dets representasjoner. Disse har vi kategorisert som forståelse nivå 1. Dette ser vi i det tidligere beskrevet eksemplet når Angelica sier «Men vi vet ikke hva *x* er» som en årsak til at de ikke kunne sammenkoble F6 med G6 og T6. Dette viser at eleven manglet en grunnleggende forståelse for hvordan funksjonsuttrykk fungerer, da et sentralt aspekt av funksjoner er at x kan være ethvert element i et gitt sett (Wheeler, 1981).

### 5.1.2 Feilaktig overfladisk sammenkobling

Som tidligere beskrevet er overfladisk sammenkobling en mye brukt metode i *sammenkobling av representasjoner* (Swan, 2008). Vi forsøkte å redusere bruken av overfladisk sammenkobling. Dette er en løsningsmetode som bare viser en forståelse på nivå 2, men når denne strategien kombineres med feiltolkninger vil det kategoriseres som forståelse på nivå 1. Et eksempel på dette er da Angelica og Andrea sammenkoblet V8 og F7 fordi tallet 2 er i både «to sokker i timen» og «$y = x^2$». Denne feiltolkningen avdekker at disse elevene ikke forstod forskjellen på multiplikasjon med 2 og kvadrering, noe som førte til en feiltolkning, og da en feilaktig sammenkobling av representasjonene.

## 5.2 Nivå 2

Tidlig i hver time observerte vi at elevene ofte representerte enkelte aspekter av en funksjon, ofte stigningstallet, fremfor å produsere representasjoner som representerte hele objektet. Dette viste en delvis forståelse for konseptet, men de bevarte ikke alle aspekter av representasjonen i konverteringen. Dette vil derfor være eksempler på forståelse på nivå 2. I time tre så vi mye bruk av overfladisk sammenkobling, en strategi som også viser forståelse kun på nivå 2.

### 5.2.1 Differanse mellom påfølgende ledd og rekursiv modell

I både første og andre time startet de fleste elevene med å se på differansen mellom to påfølgende ledd, noe de stort sett beskrev med en verbal representasjon (*naturlig språk*). Noen av elevgruppene lagde også en tabell for å representere denne differansen. Vi har sett at mange av gruppene som først hadde fokus på differanse senere endret sin modell over sammenhengen til å ikke være rekursiv, slik at de lettere kunne løse de andre oppgavene tilhørende samme time. Det kan se ut til at elevene ofte benyttet seg av den første løsningen de så, og dersom det var nødvendig gikk tilbake og gjorde endringer.

Gruppe 1C, 1D og 2F brukte en rekursiv modell gjennom hele første time, hvor de adderte med to for hvert ledd. I dette tilfellet skulle de finne ut noe om figur 20 og 21, så her var det mulig å regne på denne måten, men det ble vanskeligere desto lengre ut i rekka de kom. Likevel førte dette til problemer hos disse gruppene, da det er mange ledd og operasjoner å holde styr på. I oppgaven om *likesidete trekanter* var det bare gruppe 1D og 2F som hadde fokus på differanse når de skulle finne antall små trekanter i figur 20. Gruppe 1D svarte at antall trekanter var 361 fordi de hadde regnet seg frem til figur 19 istedenfor 20. Gruppe 2F hadde også noen problemer med utregningene av hvert ledd. Dette trekker frem en tydelig svakhet ved å ta i bruk en rekursiv modell fremfor å finne en generell løsning, ettersom det er fort gjort å miste oversikten over sitt eget arbeid.

### 5.2.2 Identifisere aspekter ved en representasjon

Vi har ved flere anledninger sett at elever demonstrerte delvis forståelse for en situasjon ved å identifisere aspekter av representasjoner. Dette kan vi for eksempel se når gruppe 1C snakket om at noe som «går mot bakken, det må være minus» eller at et areal må være positivt. Her har elevene vist at de klarte å tolke informasjon i den verbale representasjonen og forstod hvordan den samme informasjonen kan representeres i et funksjonsuttrykk (Bossé et al., 2011).

## 5.3 Nivå 3

Dette nivået omfavner en stor del av elevutsagn og de mer utfordrende konverteringene som ble utført i timene. Her vil vi presentere elevers sammenkoblinger mellom ulike representasjoner basert på deres egenskaper, samt konverteringer hvor elvene har tatt i bruk hjelpemiddelrepresentasjoner.

### 5.3.1 Konverteringer og deres inverse operasjoner

Flere av gruppene benyttet seg av tabeller for å finne et funksjonsuttrykk i første og andre time. I følge Duval (2006) er konverteringen fra tabell til et funksjonsuttrykk en relativt utfordrende konvertering, mens den inverse konverteringen fra funksjonsuttrykket tilbake til tabellen er betydelig enklere. På tross av dette kan vi se at flere av gruppene tok i bruk tabellen for å finne frem til funksjonsuttrykket, mens den inverse konverteringen, som teoretisk sett skal være enklere, har vi ikke sett noen av gruppene utføre.

### 5.3.2 Hjelpemiddelrepresentasjoner

I arbeid med tråden som en manipulativ modell (Lesh, 1979), og de utdelte tegningene av trekantene som ikonisk billedlig representasjon (Duval, 2006, 2017), kan disse anses som kilderepresentasjoner. I oppgaven var det ikke en tydelig definert målrepresentasjon (Janvier, 1987), men det virker som flere av gruppene anså funksjonsuttrykket som et endelig resultat, og målet for oppgaven. I denne situasjonen vil enhver representasjon brukt i overgangen fra kilde til målrepresentasjon kunne anses som en hjelpemiddelrepresentasjon. De vanligste hjelpemiddelrepresentasjonene ble da verbale beskrivelser av situasjonen, tegning og tabeller.

Gruppe 2E var den eneste gruppen som utførte konverteringer til grafer. I både time en og time to utførte de konverteringer fra funksjonsuttrykk til graf. Vi kan se i figur 2.2 (kapittel 2.3.3) at Duval (2006) kategoriserer overgangen fra symbolsk til grafisk/tabell som en relativt overkommelig konvertering. Vi observerte at elevene var veldig usikre på hvordan de skulle konvertere direkte fra funksjonsuttrykket til grafen, men straks de tok i bruk tabellen som en hjelpemiddelrepresentasjon fullførte de både konverteringene funksjonsuttrykk → tabell og behandlingen tabell → graf uten store utfordringer.

## 5.4 Nivå 4

Dette var det nivået vi observerte minst av i timene, da vi bare har dokumentert noen få elever som viser dette nivået. Nivå 4 handler om artikulering rundt representasjoner, og å kunne forsvare hvorfor representasjoner er slik de er. Det er tydelig at denne typen forståelse vil lettere kunne observeres ved direkte observasjon, mens i det innsamlede skriftlige datamaterialet var nivå 4 utfordrende å dokumentere. Det kan tenkes at flere elever kan ha hatt tilstrekkelig forståelse for nivå 4, men ikke viste dette mens vi observerte.

### 5.4.1 Konvertering mellom virkelig situasjon og symbolsk formel

Vi har lagt frem flere eksempler på elever som viste høy forståelse for funksjonsbegrepet og dets representasjoner gjennom argumentasjon om hvorfor en representasjon er slik den er. Et eksempel på dette var da Espen forklarte hvert aspekt av funksjonsuttrykket for antall tråder ved n kutt. Han har her utført en konvertering mellom en virkelig situasjon og en symbolsk formel, altså en global konvertering (Bossé et al., 2011).

### 5.4.2 Sammenkobling mellom verbal beskrivelse og graf

I den tredje timen var det flere elever som demonstrerte forståelse på nivå 4 gjennom deres artikulering om hvilke funksjonsuttrykk og verbale representasjoner som hørte sammen. Felles for disse ytringene er at de ble sagt i elevers forklaring av hvorfor to representasjoner representerer samme objekt, og de ble sagt til medelever for å overtale dem til at disse kortene hørte sammen. Eksempler på dette er da Angelica begrunnet at V7 passer med F7 med argumenter om egenskapene til et kvadrat, og formelen for dets areal. Hun har da tolket informasjon fra hver av de forskjellige representasjonene (verbal beskrivelse og graf) for å oppklare utydeligheter (Bossé et al., 2011).

### 5.4.3 Konvertering mellom verbal beskrivelse og graf

Duval (2006, 2017) peker på at overgangen fra naturlig språk til de andre registrene kan være utfordrende. Overgangen mellom verbal (*naturlig språk*) og grafisk representasjon er ansett som krevende, og er en konvertering hvor det er vanlig å ta i bruk en hjelpemiddelrepresentasjon. Det er forventet at denne overgangen er utfordrende, da dette er en konvertering som krever en global tolkning (Bossé et al., 2011) uavhengig av hvilken av graf og verbal som er kilde eller målrepresentasjon (Janvier, 1987). Likevel observerte vi noe veldig interessant som vi mener er viktig å ta med i vurderingen av vanskelighetsgraden for konverteringer mellom verbal og grafisk representasjon. For noen av elevene virket det som overgangen mellom verbal og grafisk representasjon var lettere når den grafiske representasjonen minnet om den fysiske bevegelsen til et objekt. Vi kan se et eksempel på dette når Daniel i gruppe 1D forklarte sammenhengen mellom V6 og G6 (Figur 4.22), og sammenhengen mellom V5 og G5. Han pekte på grafen og antydet at grafen representerte posisjonen til ballen eller lasten. I denne prosessen viser han forståelse på nivå 4, da han argumenterte for hvorfor grafen er slik den er. Den samme gruppen hadde mer problemer med overgangen mellom V7 og G7, som omhandler arealet av kvadrater. Dette kan skyldes at Daniel kan ha sett en ball bli slått, eller kastet, og bevege seg langs en kurve som minner om G6, mens en grafisk representasjon av arealet av kvadrater med sidelengde $x$ vil ikke minne om noe utenfor matematikklasserommet. Det kan tenkes at grafiske representasjoner som representerer fysiske posisjoner har en nesten ikonisk kvalitet.

## 5.5 Andre observasjoner

Vi har i denne studien observert flere interessante hendelser som ikke relaterer til et bestemt nivå av forståelse, men som vi likevel ønsker å sette lys på. Dette inkluderer rekkefølgen elever valgte å ta i bruk representasjoner, et nærmere blikk på elevers bruk av den verbale representasjonen, elevers utfordringer med den grafiske representasjonen og til slutt hvordan vanskeligheten av stigningstallets betydning for en funksjon varierer basert på hvilken representasjon som blir brukt.

### 5.5.1 Rekkefølgen av representasjoner

I arbeid med trådene i første time var elevenes første valg av representasjon i hovedsak delt i to; de som først tok i bruk tabell, og de som startet med en verbal representasjon. En stor del av klassen utførte først en konvertering ved å gå fra den manipulative modellen til en tabell. Flere av disse gruppene identifiserte under produksjon av tabellen at det økte med 2 biter for hvert klipp, og at det startet med 1 bit. De har da gjort enda en konvertering fra tabell til en verbal beskrivelse. De gruppene som først benyttet seg av en verbal beskrivelse av situasjonen, oftest i form av en observasjon om at det økte med to biter for hvert klipp, tok som oftest i bruk en tabell for å systematisere funnene sine. På denne måten har tilnærmet alle gruppene endt opp med en tabell som de har beskrevet med en verbal beskrivelse. Det var flere grupper som ikke kom lenger, men de som gjorde det gjennomførte enda en konvertering fra den verbale beskrivelsen til funksjonsutrykket eller fra tabellen til funksjonsuttrykket. Det er vanskelig å avgjøre hvilken av verbal eller tabell som er kilderepresentasjonen (Janvier, 1987) da gruppene på det tidspunktet benyttet seg av begge representasjonene samtidig. Dette trenger ikke å sees på som en svakhet med analyseverktøy eller metode, men heller et eksempel på at elevers produksjoner vil til enhver tid være i minst to registre, hvor ett av disse vil være en verbal representasjon (naturlig språk) (Duval, 2017, s. 110).
Representasjonsbruken i første time kan i hovedtrekk oppsummeres på følgende måte, der pilene representerer konverteringer:

Manipulativ modell → Tabell → Verbal beskrivelse → Funksjonsuttrykk

Manipulativ modell → Verbal beskrivelse → Tabell → Funksjonsuttrykk

Figur 5.1 Konverteringer utført i første time

I andre time startet elevene med en tegning, som de brukte videre for å tegne figur 4 og 5. De fleste elevene utførte deretter en konvertering til en tabell, for så å forklare tabellen verbalt, i likhet med time en. Det var en del elever som først identifiserte differansen og uttrykte dette verbalt før de førte det inn i tabellen, men resultatet ble det samme. Den verbale representasjonen virket ikke til å ha stor betydning for elevenes evne til å finne frem til funksjonsuttrykket, da alle konverteringer til funksjonsuttrykket hadde tabell som kilderepresentasjon. Representasjonsbruken i andre time kan oppsummeres på følgende måte:

Tegning → Tabell ⇄ Verbal beskrivelse

Tegning → Tabell → Funksjonsuttrykk

eller

Tegning → Verbal beskrivelse → Tabell → Funksjonsuttrykk

Figur 5.2 Konvertering i time 2

### 5.5.2 Verbale representasjoner

Det kommer frem av tabell 4.3 at den verbale representasjonen er den vanskeligste for elevene å koble sammen med andre. Dette stemmer overens med hva Duval (2006, 2017) skriver at overganger fra naturlig språk er spesielt utfordrende. I tabell 4.4 ser vi at antall ganger den verbale representasjonen har blitt satt sammen med graf, funksjonsuttrykk og tabell er 40, noe som kan tyde på at det var like store problemer med alle disse oversettelsene. Tabell 2.2 viser at konverteringer mellom verbale representasjoner og de andre representasjonene er globale, uavhengig av retning på konverteringen (Bossé et al., 2011). Det gir derfor mening at det er denne representasjonsformen elevene slitet mest med å oversette til andre representasjoner. Vi observerte at mange av gruppene startet med den verbale representasjonen, for så å lete etter hvilke andre representasjonskort som kunne passe til disse. Fra tabell 4.4 går det frem at de verbale representasjonene elevene har hatt størst problemer med er V3, V5 og V7. Funksjon 3 er en lineær funksjon, hvor vi forsøkte å unngå for mange likheter i representasjonskortene. Blant annet sier V3 «Antall rev er til enhver tid 1/5 av antall lemen» mens vi i funksjonsuttrykket har skrevet stigningstallet som 0,2. Det var den grafiske representasjonen G3 som flest ganger ble koblet til V3. Det kan tenkes at årsaken til dette er at det her kommer tydelig frem visuelt at det er en femdel, men det er likevel bare en gruppe mer som har klart denne oversettelsen sammenlignet med å oversette til funksjonsuttrykk og tabell. I funksjon 5 var det flest grupper som ikke klarte å sette sammen V5 med F5, altså funksjonsuttrykket. Dette er et funksjonsuttrykk av andre grad, og det kan tenkes at noen elever gav litt opp da de så denne, siden den ser mer komplisert ut enn de andre funksjonsuttrykkene.

### 5.5.3 Utfordringer med grafisk representasjon

Vi kan se i tabell 4.1 og 4.2 at bare gruppe 2E benyttet seg av den grafiske representasjonen for å uttrykke sammenhengen. Vi observerte at de fleste gruppene brukte veldig lite eller ingen tid på å representere funksjonen med en grafisk representasjon. Dette kan skyldes en tanke om at det er vanskelig å konstruere grafer. Dette kan vi se et eksempel på når Espen, som generelt sett har vist et høyt nivå med forståelse, sa: «Kan lage en … nei, jeg kan ikke, jeg klarer ikke graf. Jeg skjønner ikke sånt.» Dette kan også skyldes at de fleste grupper startet timene med å finne en verbal beskrivelse av situasjonen, og som Duval (2006) påpeker er overgangen fra verbal til grafisk representasjon spesielt utfordrende.

### 5.5.4 Stigningstallets forhold til resten av representasjonen

I undervisningen viste flere elever at de hadde de nødvendige verktøyene for å tolke stigningstallet i en verbal representasjon, og at de kunne tolke stigningstallets rolle i tabeller, men de klarte ikke å se hva stigningstallet ville bety i en symbolsk representasjon. Dette er forventet, da en utvidelse av en tabell ved hjelp av stigningstallet vil kreve addisjon og multiplikasjon. Å finne det generelle symbolske uttrykket med bare kunnskap om stigningstallet vil derimot kreve at eleven er kjent med integrasjon, noe som ikke kan forventes av 10. trinn elever. Det er altså stor variasjon mellom hva som kreves for å tolke det samme aspektet av funksjonen i de forskjellige representasjonene (Bossé et al., 2011).

# 6 AVSLUTNING

I denne studien har vi undersøkt karakteristikker knyttet til elevenes oversettelser mellom representasjoner og deres valg av ulike representasjonsformer i arbeid med funksjoner. For å undersøke dette har vi i denne studien forsøkt å svare på følgende forskningsspørsmål:

1. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers oversettelser mellom ulike representasjoner av funksjoner i arbeid med oppgaver løst i grupper?
2. Hva karakteriserer 10. trinn-elevers valg av representasjoner i gruppearbeid med funksjoner?

I dette kapittelet vil vi oppsummere funnene og svare på forskningsspørsmålene, samt gjøre rede for didaktiske og forskningsmessige implikasjoner.

## 6.1 Konklusjon

Vi har sett at elevene i arbeid med oppgavene i første og andre time startet med å konvertere fra manipulative modeller og tegninger til verbale beskrivelser og tabeller. Mange av elevene hadde først fokus på ett aspekt ved funksjonen, nemlig stigningstallet. Dette førte til et rekursivt funksjonsuttrykk. Gjennom bruk av dette funksjonsuttrykket og tabeller var majoriteten av gruppene i stand til å finne et mer direkte funksjonsuttrykk. I arbeid med sammenkoblings-oppgaven virket det mest utfordrende for elevene utføre konverteringer fra naturlig språk (Duval, 2006, 2017). Det var likevel den verbale representasjonen de fleste gruppene startet med, men de gikk senere bort fra denne strategien da de ikke klarte å oversette mellom de verbale representasjonene og de andre representasjonskortene. Dette stemmer med hva Duval (2006, 2017) skriver om at konverteringer fra naturlig språk er spesielt utfordrende. Bossé et al., (2011) forklarer dette med at oversettelse mellom verbale representasjoner og de andre representasjonene er globale. Innenfor de verbale representasjonene var det minst problemer med sammenkobling mellom de verbale representasjonene som elevene kunne kjenne igjen fra daglig liv. For eksempel var beskrivelsen av lønn i V1 og slag av ball i V6 blant oppgavene flest elever koblet riktig til sine tilhørende representasjonskort. På tross av tiltak for å minimere *overfladisk sammenkobling* (Swan, 2008) ble dette benyttet for å oversette mellom noen av representasjonskortene. Ved flere anledninger var elever i stand til å identifisere aspekter ved representasjonene, uten å forstå helheten. Dette kan vi se når gruppe 1C sier «det går mot bakken, det må være minus», for så å lete etter et funksjonsuttrykk som hadde negativt fortegn (Bossé et al., 2011).

Når det gjelder elevenes valg av representasjoner har vi sett at de tok i bruk den manipulative modellen de fikk utdelt i første time og utvidelsen av figurene de fikk beskjed om å lage i andre time til å forstå sammenhengene i disse to oppgavene (Lesh, 1979). Elevene benyttet seg hovedsakelig av verbale beskrivelser og tabeller. De gruppene som først brukte verbale beskrivelser brukte disse til å lage en tabell, mens de som først lagde tabeller brukte verbale beskrivelser for å forklare disse (Duval, 2017). De verbale beskrivelsene og tabellene var ofte i form av rekursive modeller. Vi så at elevene ofte var fornøyde med disse modellene til å begynne med, men videre i oppgaven ble de bedt om å finne antall tråder/trekanter ved høyere figurtall, noe som fikk de fleste til å endre representasjonene sine. For å gå fra en rekursiv modell til et mer generelt funksjonsuttrykk måtte elevene konvertere fra *naturlig språk* og *kartesiske diagrammer* til en *symbolsk* representasjon (Duval, 2006, 2017). I elevers arbeid med den rekursive formelen viste de oftest bare forståelse på nivå 2, men etter denne konverteringen kom ofte forståelse på nivå 3 og 4 til uttrykk.

Gruppene som hadde verbale beskrivelser som utgangspunkt brukte tabellene som *hjelpemiddelrepresentasjoner* (Duval, 2006, 2017; Bossé et al., 2011), også kalt *indirekte representasjoner* (Janvier, 1987), for å komme frem til et funksjonsuttrykk. De som hadde tabeller som utgangspunkt benyttet seg derimot av verbale beskrivelser som hjelpemiddelrepresentasjoner. Det er her tydelig at de matematiske produksjonene er utført i minst to representasjoner, hvor den ene vil være naturlig språk (Duval, 2017). Det ser ut til at de fleste elevene anså funksjonsuttrykket som målrepresentasjonen for disse oppgavene. Som vi har påpekt tidligere var det bare en gruppe som representerte funksjonene ved en grafisk representasjon. Dette kan skyldes at elevene så ut til å anse den grafiske representasjonen som utfordrende å produsere, noe flere elver nevnte i løpet av timene. Det er også mulig at de ikke trodde en grafisk representasjon ville ført til en enklere løsning. Det var mulig å løse oppgavene ved å bare bruke en rekursiv formel basert på økningen mellom hvert ledd. Likevel så vi at fåtallet av gruppene benyttet seg av en rekursiv løsning hele veien. De fleste gruppene forsøkte å representere sammenhengene på en mest mulig hensiktsmessig måte. Det førte til at de fleste forble innen den symbolske representasjonen etter de hadde funnet denne.

## 6.2 Didaktiske implikasjoner

Det har blitt trukket frem at elevene i arbeid med funksjoner med få ledd ofte valgte en rekursiv løsning i form av verbale beskrivelser og tabeller. I arbeid med høyere figurtall ble disse løsningene lite hensiktsmessige, og elevene produserte mer generelle funksjonsuttrykk. For å lede elever til å bruke den representasjonsformen man ønsker, er det altså viktig å tenke nøye gjennom hvordan man designer oppgavene. Ved å utvikle oppgaver hvor elevene må gå gjennom mange ledd ved å bruke en rekursiv løsning, kan elevene bli ledet til å tenke på løsninger som kan gjøre arbeidet lettere for dem. I tillegg viser dette viktigheten av å designe oppgaver som åpner opp for at alle elever kan klare noe, men som så utfordrer elevenes forståelse. I andre time var det sju grupper som brukte funksjonsuttrykket for å uttrykke sammenhengen mellom figurtall og antall trekanter, mens i første time var det bare fire grupper som brukte samme representasjon. Oppgavene i andre time var designet slik at det var mer utfordrende å benytte seg av en rekursiv formel enn i første time. I den tredje timen viser dataen at elevene hadde mest utfordringer med de verbale representasjonene. Blant disse var det funksjonene som beskrev en fysisk situasjon eller situasjoner elevene er kjent med fra hvor elevene presterte best. Det kan være nyttig for lærere å være bevisst på forskjellen mellom grafer som representerer fysiske situasjoner, og da posisjonen til et objekt i bevegelse, og de som ikke har denne kvaliteten.

Ved å bruke oppgaver som legger til rette for at elevene selv kan se nytten av å bruke forskjellige representasjoner, inkludert hjelpemiddelrepresentasjoner, kan det tenkes at elevene enklere forstår viktigheten av representasjonsbruk i matematikk. Det kan også tenkes at oppgaver hvor elevene selv velger å ta i bruk flere representasjoner vil ha en positiv effekt på elevers motivasjon og engasjement for å lære seg å bruke forskjellige representasjoner.

## 6.3 Forskningsmessige implikasjoner

Det er vanskelig å generalisere våre funn, i og med at dette er en kvalitativ studie i liten skala. Vi har sett at elevene i denne studien ofte benyttet seg av en verbal representasjon i starten av oppgaver, og deretter gikk over til å lage tabeller, før de så kom frem til et funksjonsuttrykk. Det kunne vært spennende å se på rekkefølgen i elevenes valg av representasjoner i større skala ved å benytte kvantitative metoder. Vi så også at de færreste elevene lagde grafiske representasjoner, og det kunne vært interessant å undersøke årsaken til dette. I studien fant vi at elevene har mindre vansker med grafer som har en delvis ikonisk kvalitet. Dette kan ha betydning for elevers utvikling av forståelse for funksjonsbegrepet og slik vi ser det kan dette være et aktuelt tema for videre forskning.

I denne studien har elevene arbeidet med oppgaver knyttet til representasjoner av funksjoner i grupper. Det kunne være interessant å ta et sosiokulturelt perspektiv og fokusere mer på den sosiale sammenhengen, og hvordan det påvirker elevers artikulering om funksjoner og representasjoner. Et annet aktuelt tema kunne vært å se hvordan enkeltelevers forståelse av funksjoner kan komme til syne i individuelt arbeid med funksjoner. Dette er en endring som vil medføre at elevene mister muligheten til å benytte sitt naturlig språk i samhandling med andre.

Ettersom denne studien er begrenset i forhold til tidsbruk, har vi måttet begrense hva vi skulle fokusere på. Dersom vi hadde hatt mer tid ville det vært interessant å se på det kognitive aspektet knyttet til studien. Studien understreker også viktigheten av å vie tid på å undersøke hvordan man kan legge opp undervisning og designe oppgaver som bidrar til at elevene blir tryggere på bruk av representasjoner.

## 6.4 Egne refleksjoner

Som en avslutning på denne studien vil vi komme med noen egne refleksjoner på hva vi ville gjort annerledes, svakheter ved studien, og hva vi har lært. Det har vært interessant for oss å bli kjent med de ulike representasjonsregistrene samt konvertering og behandling. Vi har med denne studien lært mer om viktigheten av representasjoner, særlig knyttet til funksjoner. Vi ønsker å ta oppgavene med oss videre i undervisning som ferdig utdannete lærere, men da uten modifiseringene på de to første oppgavene for å kunne bruke disse som en introduksjon til å lære om funksjoner ved å studere mønster. Selv opplever vi at denne studien belyser interessante sider ved elevenes oversettelser mellom og valg av representasjoner.

Dersom vi kunne gjennomført studien på nytt ville vi ha benyttet oss av to kamera gjennom hele studien. Vi brukte bare ett i begynnelsen av første time i klasse 1, og opptaket ble kuttet etter kort tid grunnet lite lagringsplass. Dette er en svakhet ved at vi ikke kan si helt sikkert hva som skjedde i gruppe 1A på et gitt tidsrom mens de løste første oppgave. En annen svakhet ved denne studien er at uansett hvor objektive vi forsøker å være, er det våre tolkninger av elevenes utsagn vi diskuterer. Vi kan ikke med sikkerhet si at det var dette elevene mente, men at det er slik vi har tolket deres utsagn og besvarelser. I tillegg var vi inne i klasserommene når elevene løste oppgavene, så selv om vi forsøkte å gjøre situasjonen så autentisk som mulig, kan det ha vært med å påvirke deres prestasjon da vi gikk rundt og observerte dem. I tillegg svarte vi på noen spørsmål elevene hadde og samtalte noe med de for å prøve å forstå hva de mente.

I løpet av studien har vi lært mye ved å sette oss inn i ulike teorier og tidligere forskning. Dette har vært et utrolig interessant tema å studere, og vi mener denne studien har gitt oss noen gode verktøy vi kan ta med oss ut i skolen.

# 7 LITTERATURLISTE


Kunnskapsdepartementet (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Barnett, J., Sowder, L. & Vos, K. (1979). A Review of Selected Literature in Applied Problem-Solving Research. I R. Lesh (Red.), *Applied Mathematical Problem Solving* (s. 73-110). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. https://eric.ed.gov/?id=ED180816

Bauersfeld, H. (1995). The Structuring of the Structures: Development and Function of Mathematizing as a Social Practice. I L. P. Steffe & J. Gale (Red.), *Constructivism in education* (s. 137-158). Lawrence Erlbaum Associates.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome).* Academic Press, Inc.

Bossé, M. J., Adu-Gyuamfi, K. & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the Difficulty of Mat thematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6*(*3), 113-133

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Cramer, K. (2001). Using Models to Build an Understanding of Functions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(5), 310–318. http://www.jstor.org/stable/41180958

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Enge, O. & Valenta, A. (2013). *Varierte representasjoner*. Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning (1). 8-12

Hiebert, J. & P. Lefevre. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (s. 1-27). Routledge.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (1), 123-134. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Jacobsen, D. I. (2022). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?: Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Cappelen Damm Akademisk.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. I C. Janvier (Red.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 27-32). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kunnskapsdepartementet (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Lesh, R. (1979). Mathematical Learning Disabilities: Considerations for Identification, Diagnosig, Remediation. I R. Lesh, D. Mierkiewicz & M. Kantowski (Red.), *Applied Mathematical Problem Solving* (s. 111-180). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. https://eric.ed.gov/?id=ED180816

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. I C. Janvier (Red.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Petterson, K. & Brandell, G. (2018). *Å utvikle elevers begrepsforståelse*. Realfagsløyper. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-12/Brandell_A%CC%8A%20utvikle%20elevers%20begrepsforsta%CC%8Aelse%20Oversatt_revidert.pdf

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode: for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm Akademisk.

Swan, M. (2008). A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Journal of the International Society for Design and Development in Education*, 1(1).

Thompson, P. W. (2020). Constructivism in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 127-135). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_31

Wheeler, R. F. (1981), *Rethinking Mathematical Concepts.* Ellis Horwood.

## Vedlegg 1: Samtykkeskjema

# Vil du delta i forskningsprosjektet

«Representasjoner og begrepsmessig forståelse i arbeid med funksjoner»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke kjennetegn på ikke-forståelse viser elevene før, under og etter arbeid med varierte representasjoner. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

**Formål**
Dette er en masterstudie med hensikt å undersøke vårt forskningsspørsmål: hvilke kjennetegn på ikke-forståelse viser elevene før, under og etter arbeid med varierte representasjoner. Ved å besvare dette spørsmålene ønsker vi å forbedre kunnskapsgrunnlaget om matematikkundervisning.

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**
Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**
Vi ønsker å samle data fra undervisningen som skjer i to klasser på 10. Trinn. Derfor vil alle elever i disse to klassene bli spurt om å delta.

**Hva innebærer det for deg å delta?**
Hvis du velger å delta i prosjektet vil du bli spurt om å levere inn diverse skriftlig arbeid fra undervisningen. Dersom du ønsker å delta i oppgavebasert intervju, hvor du løser matematikkoppgaver med andre elever i ei gruppe, vil det bli tatt videoopptak av dette intervjuet. Dette vil ta omtrent 45 minutter. Undervisningen og oppgavene du skal jobbe med omhandler funksjoner.

Dersom foreldre/foresatte ønsker dette, kan de se oppgaver og intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt.

**Det er frivillig å delta**
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Om du deltar eller ikke i prosjektet vil på ingen måte påvirke vurderingen eller karaktersettingen i matematikk. Du vil ikke gå glipp av undervisning ved å delta i prosjektet eller ikke.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Dataene vil kun være tilgjengelig for Tonje Larssen, Henrik Stokkeland, Hans Kristian Nilsen og Simon Goodchild.

Etter vi har vært på skolen og samlet datainnsamling vil video bli kryptert og lagret på en trygg og lukket server på UIA. Video blir så transkriberes til skriftlig form med fiktive navn. Alt innsamlet skriftlig arbeid vil bli anonymisert.

All data vil anonymiseres før publikasjon, og deltakeren vil ikke kunne gjenkjennes.

**Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?**
Prosjektet vil etter planen avsluttes 15.juni. Da vil videofilene og ikke-anonymisert data slettes mens de anonymiserte dataene vil kun være tilgjengelig for Tonje Larssen, Henrik Stokkeland, Hans Kristian Nilsen og Simon Goodchild. Alt datamateriell vil bli slettet 31.12.2023

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag Universitetet i Agder har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Dine rettigheter**
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved
    - *Student*: Henrik Land Stokkeland, henris18@uia.no og Tonje Larssen, tonjel18@uia.no
    - *Veileder:* Hans Kristian Nilsen, hans.k.nilsen@uia.no,
- Vårt personvernombud: Trond Hauso, Personvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Hans Kristian Nilsen & Simon Goodchild
(Forskere/veiledere)

Tonje Larssen & Henrik Stokkeland
(Studenter)

--------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Representasjoner og begrepsmessig forståelse i arbeid med funksjoner, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at det blir samlet inn skriftlig arbeid i undervisningen
- ☐ å delta i oppgavebasert intervju i grupper med videoopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

--------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

# Vedlegg 2: Meldeskjema

Sikt

Meldeskjema / Representasjoner og begrepsmessig forståelse i arbeid med funksj... / Vurdering

## Vurdering av behandling av personopplysninger

| Referansenummer | Vurderingstype | Dato |
| --- | --- | --- |
| 850755 | Automatisk | 19.12.2022 |

**Prosjekttittel**
Representasjoner og begrepsmessig forståelse i arbeid med funksjoner

**Behandlingsansvarlig institusjon**
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

**Prosjektansvarlig**
Hans Kristian Nilsen

**Student**
Henrik Land Stokkeland

**Prosjektperiode**
01.01.2023 - 31.12.2023

**Kategorier personopplysninger**
Alminnelige

**Lovlig grunnlag**
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Meldeskjema

---

**Grunnlag for automatisk vurdering**
Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
  - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
  - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
  - Fagforeningsmedlemskap
  - Genetiske data
  - Biometriske data for å entydig identifisere et individ
  - Helseopplysninger
  - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

**Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde**

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)

- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)
- Hvor lenge personopplysningene vil bli behandlet
- Retten til å trekke samtykket tilbake og øvrige rettigheter

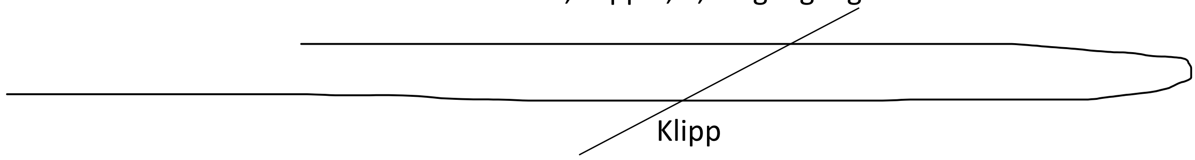
Vi anbefaler å bruke vår mal til informasjonsskriv.

**Informasjonssikkerhet**
Du må behandle personopplysningene i tråd med retningslinjene for informasjonssikkerhet og lagringsguider ved behandlingsansvarlig institusjon. Institusjonen er ansvarlig for at vilkårene for personvernforordningen artikkel 5.1. d) riktighet, 5. 1. f) integritet og konfidensialitet, og 32 sikkerhet er oppfylt.

## Vedlegg 3: Oppgave time 1

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Skriv navnet over den stiplede linja. Dette blir klippet bort etter datasamling.**
**Klipping av tråd**
Brett en tråd på midten. Mens tråden er brettet, klipp over den en gang. Hvor mange biter tråd har du nå? Fortsett med en annen tråd, klipp 2, 3, 4 og 5 ganger.




1. Kan du representere sammenhengen mellom antall kutt og antall deler av tråder? Forklar hvorfor du valgte denne representasjonen.

2. Beskriv mønsteret du observerer i oppgave 1.

3. Uten å kutte tråden, bruk mønsteret til å finne antall biter tråd hvis du kutter 6, 7 og 8 ganger. Beskriv hvordan du brukte mønsteret til å gjøre dette.

4. Det er mulig å forutsi antall biter tråd når du vet antall klipp. Beskriv hvordan man kan finne ut hvor mange tråder 20 klipp gir.

5. Hvis du sitter igjen med 21 biter tråd, hvor mange ganger har du da klippet? Beskriv hvordan du løste dette problemet.

6. Kan du representere sammenhengen mellom klipp og antall biter på en annen måte?

7. Hva skjer om du bretter tråden 3 ganger? Hva med 4, eller 5 ganger?

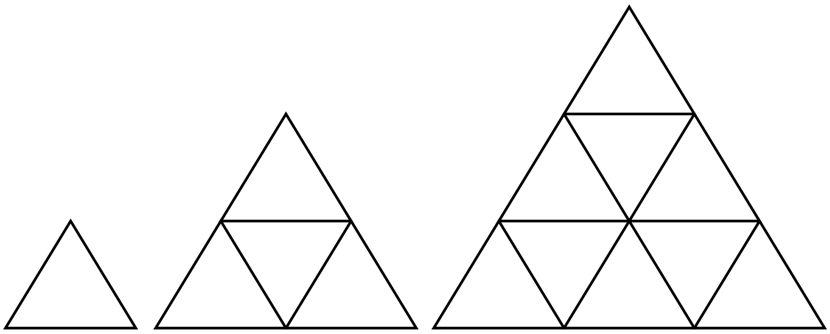
# Vedlegg 4: Oppgave time 2

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Likesidete trekanter**
**Dette er en problemløsningsoppgave. Målet her er ikke å bli ferdige raskt, men å utforske og å finne best mulige svar og forstå sammenhengen.**

Skriv navn over den stiplede linjen, det vil bli klippet bort etter datasamling.

Ved å bruke likesidete trekanter, form de tre første trekantene som vist nedenfor.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

1) Reflekter over sammenhengen mellom figurtall og antall små trekanter. Utvid for figurtall 4 og 5 og forklar mønsteret du ser.

2) Vis hvordan du hadde funnet figur nummer 20, forklar hva du gjør.

3) I en av trekantstrukturene er det 441 små trekanter, hvilket figurtall har denne figuren?

4) Kunne du løst disse oppgavene med andre representasjoner? Hvilken representasjon syns du passer best?

# Vedlegg 5: Representasjonskort til time 3

F1

$y = 4x + 100$

V1

Tom selger VG på lørdager. Han har en fast lønn på 100kr hver gang. I tillegg får han 4 kroner per avis han selger.

T1

| x | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| y | 108 | 116 | 124 | 132 |

F2

$y = 3x$

V2

Gudleif går med en jevn fart på 3km/t.

T2

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 6 | 9 | 12 |

F3

$y = 0.2x$

V3

Antall rev er til enhver tid 1/5 av antall lemmen

T3

| x | 1000 | 2000 | 5000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| y | 200 | 400 | 1000 | 2000 |

F4

$y = -80x + 1300$

V4

Bjarne kjører hjem mot Bodø, han kjører i 80km/t. Han starter 1300 km hjemmefra og tenker på hvor langt det er hjem.

T4

| x | 3 | 6 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1060 | 820 | 580 | 340 |

F5

$y = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x^2 + 2000$

V5

Linda er ute og flyr, og slipper litt av lasten sin for å lette på flyets vekt. Lasten faller til bakken, med en akselerasjon på 10 meter per sekund.

T5

| x | 0 | 6 | 12 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2000 | 1830 | 1250 | 0 |

F6

$y = -0.5x^2 + 13x + 160$

V6

Kari slår en ball ca. 35 meter langt og fra en høyde på 160 cm.

T6

| x | 0 | 5 | 15 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| y | 160 | 212,5 | 242,5 | 172,5 |

F7

$y = x^2$

V7

Arealet av et kvadrat som uttrykk av lengden av sidene

T7

| x | 1 | 3 | 5 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 9 | 25 | 144 |

F8

$y = -x$

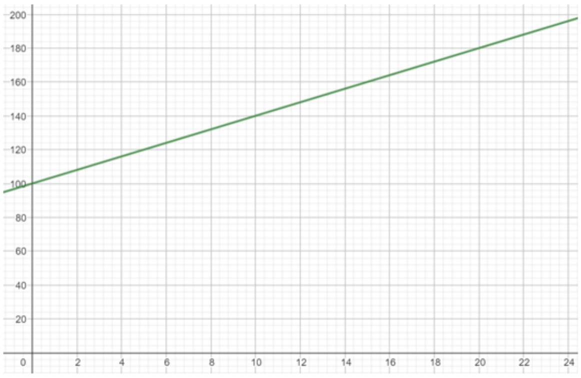
V8

Dagny strikker to sokker i timen

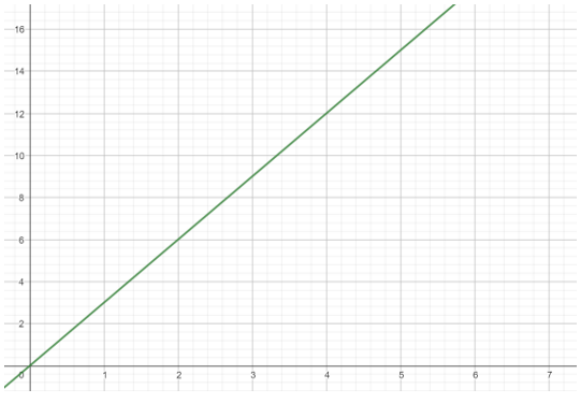
T8

| x | 1 | 4 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| y | -5 | -20 | -35 | -50 |

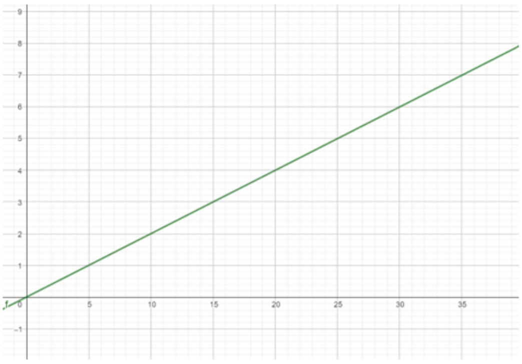
G1


200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

G2


16
14
12
10
8
6
4
2
0
1 2 3 4 5 6 7

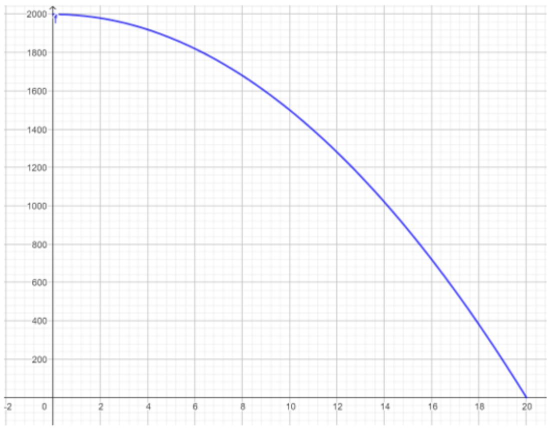
G3


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
5 10 15 20 25 30 35

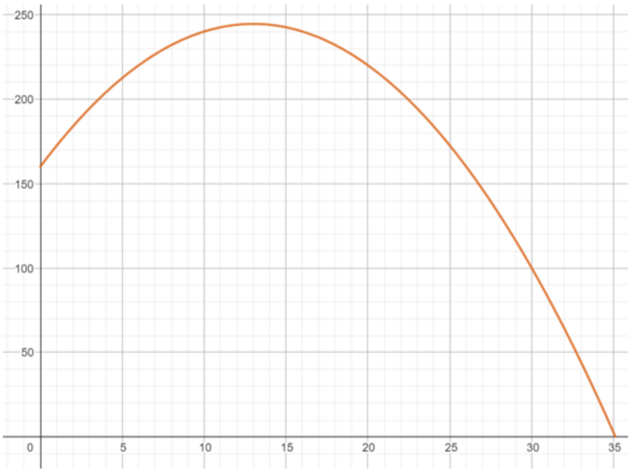
G4


1400
1200
1000
800
600
400
200
0
2 4 6 8 10 12 14 16

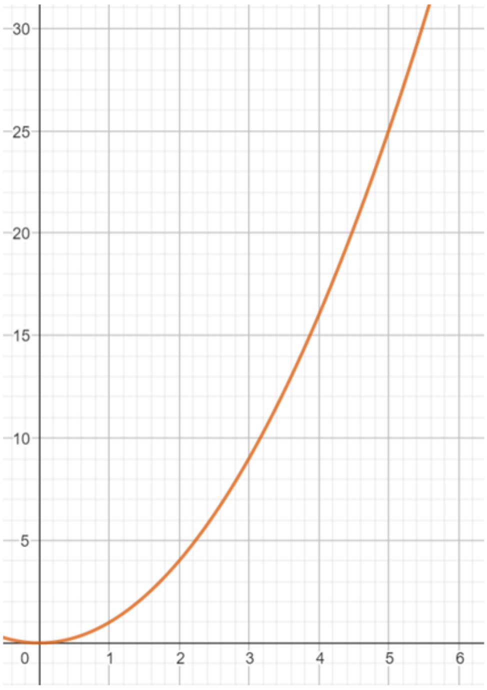
G5


2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
-2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

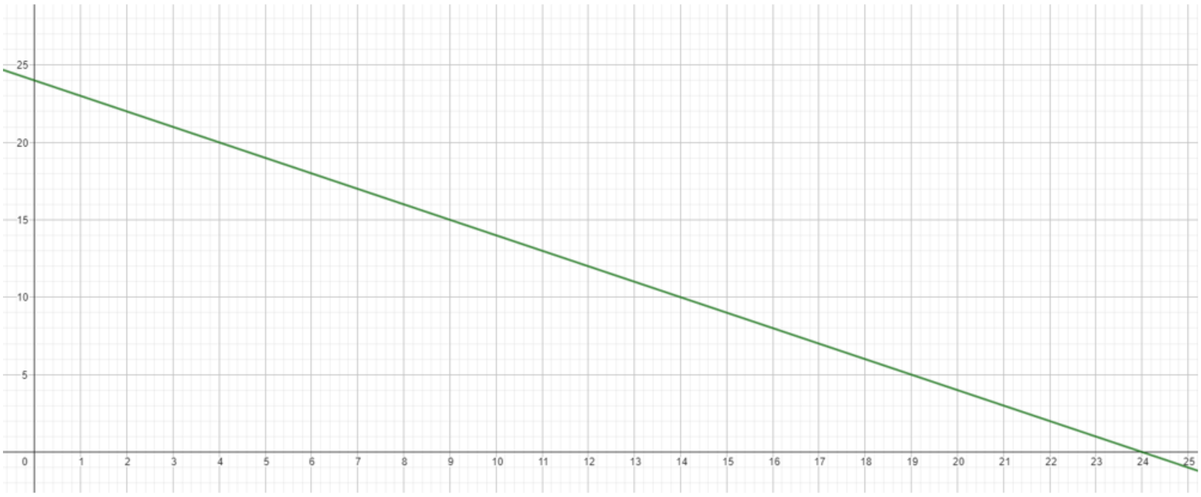
G6


250
200
150
100
50
0
5
10
15
20
25
30
35

G7


30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6

G8


25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25