R2-elevers modelleringskompetanse

En kvalitativ studie av et undervisningseksperiment

MARTIN BENTSEN

VEILEDER
Yuriy Rogovchenko

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Master

Forord

Formålet med denne masteroppgaven er å komme meg gjennom siste delen av lektorutdanninga. Jeg har absolutt ikke lyst og noe særlig motivasjon til dette, men jeg må bare gjennom masteren. Fra å ha sklidd gjennom bacheloren med ei som skal bli matte- og norsklærer, så ble masteren en virkelig prøvelse. Nå kunne jeg ikke lene meg på en annen, nå måtte jeg gjøre alt selv. Det skal virkelig bli herlig å få levert oppgaven! Nå venter «den virkelige verden» med sine utfordringer.

Jeg er nok utradisjonell når det gjelder skriving, jeg vil mye heller forteller hva jeg synes og hva jeg har komme fram til, enn å sitere alle andre. Masterskrivinga skulle blitt bytta ut med et halvt år praksis, det trur jeg hadde blitt mer relevant. Alle andre fag er godkjent og det samme er praksisperiodene, så jeg er jo skikka til å undervise! En lærer evaluerer jo undervisninga alltid, og går det dårlig en time, så endrer jo læreren på opplegget til neste time, hvis han eller hun skal ha om det samme i en annen klasse. Hva har jeg så lært av å skrive masteren? Jo, det er ikke så lett å finne ut hvor man er i en modelleringssyklus.

Så må jeg rette en takk til veilederen min, Yuriy Rogovchenko som har holdt ut med meg. Jeg rette en stor takk til instituttleder Ingvald Erfjord som har lest gjennom og komme med gode konstruktive kommentarer, på alt i fra oppsett til ordvalg, tusen takk for hjelpa! Professor Martin Carlsen som var en av mine forelesere i emnet MA 424 Arbeidsmåter i matematikk på Universitetet i Agder høsten 2022. Tusen takk for at du har vist en mal på masteroppgave, og svart på spørsmål som min veileder ikke kunne svare på. En annen person som skal takkes er professor emeritus dr. Werner Blum for oppklaringer på epost. R2-læreren fortjenester en stor takk for god hjelp med utforming av oppgavene, for å ha sagt seg villig til å bli intervjua, og for å ha gitt meg lov til å bruke noen av hennes undervisningstimer, slik at jeg kunne få gjennomført studien. Jeg retter også en stor takk til elevene som stilte opp.

Jeg vil takke mine gode venner for tips om Aura, lån av filmkamera, forbønn og gjennomlesning underveis. Takk for at dere har holdt ut maset mitt om ting jeg lurte på. Takk til alle som har vært med på felles lufteturer og lunsjpauser, det har vært dagens høydepunkt. Men hva skal vi prate om i lunsjen når masteren er levert?
Jeg vil også takke dere som har som har kikka på oppgaven jeg ga til elevene, både dere som bare leste gjennom, og dere som prøvde dere på oppgavene, altså piloteringa.

Takk til Tinntjønn skole og Lindesnes fyrmuseum som har latt meg jobbe når det passa meg og gitt meg noen gode avbrekk fra skrivinga.

Kristiansand, 9. mai 2023
Martin Bentsen

Sammendrag

Temaet for denne masteroppgaven er matematisk modellering. Modellering er en del av kjerneelementet «Modellering og anvendelser» som kom inn i den nye lærerplanen. Dette er første året R2-elevene blir undervist etter denne læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Jeg valgte derfor å se på modelleringskompetanse til et utvalg R2-elever, med utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner et utvalg R2-elevers tilnærming til modelleringsoppgaver?

For å svare på forskningsspørsmålet har jeg observert ei gruppe på tre R2-elever som gjennomførte et undervisningseksperiment. De skulle finne et uttrykk for den deriverte til vannstanden når det er et hull i bunnen av litermålet. Studien har et sosiokulturelt læringsperspektiv. Analysen baserer seg hovedsakelig på syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226). Funnene er som forventa at elevene følger ikke syvstegsmodellen heilt slavisk, men også at elevene hadde problemer med å uttrykke seg matematisk korrekt.

Abstract
Mathematical modelling is the topic of this master's thesis. Modelling is part of the core element "Modelling and Applications" which was included in the curriculum. This year is the first one when R2 pupils are taught according to the new curriculum developed by The Norwegian Directorate for Education and Training in 2020. I decided to explore in my thesis the modelling competence of a group of R2 pupils posing the following research question:

What characterises the approaches of R2 students to modelling tasks?

To answer this research question, I designed a teaching experiment for R2 pupils and observed the work of a small group of three pupils on a modelling task. Students were asked to find the expression for the rate of change of the water level in a one-litre bottle with a small hole at the bottom.

The study adopts a socio-cultural perspective on learning. The analysis is mainly based on the use of a seven-step model of a modelling cycle suggested by Blum and Leiß (2007, pp. 225-226). As expected, the findings confirm that students do not follow all steps in "correct order" of the seven-step modelling cycle and have difficulties expressing themselves correctly mathematically.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for hvorfor jeg valgte å skrive om modellering (1.1). Deretter sier jeg litt om forskningsspørsmålet (1.2), før jeg til slutt vil jeg fortelle om masteren si oppbygging (1.3).

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Dette skoleåret (2022/2023) har det blitt tatt i bruk en ny læreplan i R2. Hovedområdene fra den forrige læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) ble erstatta med kjerneelementer i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), der modellering og anvendelser er et av disse. Eksamensoppgaver, læreplanen og læreboka påvirker undervisninga i stor grad, og jeg har via kapittel 3 til å se på modellering i læreplaner og lærebøker.

Jeg har blitt inspirert til å undersøke modellering gjennom studiene, spesielt etter å ha tatt emnet «MA 424 Arbeidsmåter i matematikk» ved Universitetet i Agder. Den ene halvparten av emnet handla om modellering. Etter et møte med veilederen min og R2-læreren, der sistnevnte er informant i studien, ble jeg oppmerksom på at undervisninga på Universitetet i Agder for oss som skal bli lærere ikke samsvarte så godt med videregående skole. Mens det i Matematikk R2 ofte har blitt jobba mye med regresjon, holdt vi på UiA på med å skvise tannkrem ut av tuba for å måle hvor lang strek det ble. Vi hadde også en åpen oppgave om å planlegge en tur med to overnattinger til København for et par med et budsjett på 8000 kroner. Da begynte R2-læreren å lure på hva vi holdt på med på UiA, og det begynte jeg og å lure på. «Det er jo bare pluss, minus, gange og dele!». Fra min egen skolegang, kan jeg aldri huske at vi gjorde noe praktisk i mattetimene. Både ny læreplan, og forskjellen blant UiA og VGS gjorde at jeg valgte temaet modellering.

1.2 Forskningsspørsmål

Selv om det kan høres enkelt ut med bare «pluss, minus, gange og dele» i en modelleringsoppgave, så vil elevene likevel jobbe med å analysere fenomener i støtte med matematisk tenkemåte. Dette gjenspeiles i kjerneelement «Modellering og anvendelser»: «Kjerneelementet handler om hvordan modeller brukes for å beskrive natur og samfunn» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2) Med dette som bakgrunn har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner et utvalg R2-elevers tilnærming til modelleringsoppgaver?

For å svare på oppgavens forskningsspørsmål vil jeg undersøke tre underproblemstillinger:
1) Hvordan forstår læreren modellering i lys av den nye læreplanen?
2) Hvordan preger lærerens syn på modellering undervisninga og elevenes arbeid?
3) Hvordan løser elever modelleringsproblemer?

For å undersøke dette, gjennomførte jeg et praktisk undervisningseksperiment i R2-læreren sin klasse. Den praktiske modelleringsoppgaven, som elevene fikk, var at de skulle bore hull i et litermål, og finne et uttrykk for den deriverte til vannstanden i litermålet. Jeg har observert når elvene jobba med oppgaven. I tillegg filma jeg oppgavejobba, og jeg tok inn de arkene som de skreiv på. Dette ble analysert etter Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin modelleringssyklus.

1.3 Oversikt over oppgaven

Min masteroppgave består av ni kapitler, med en kort introduksjon i hvert av dem.
Kapittel 1 handler om bakgrunnen for valg av tema og forskningsspørsmål.
Videre i kapittel 2 blir det en oversikt over mitt teoretiske rammeverk, blant annet begreper, læreplaner, læringsteori, Blum & Leiß (2007, s.225) sin modelleringssyklus og Polya sine fire faser i problemløsning (1957, s. XVI-XVII).
I kapittel 3 blir det fokus på læreplaner og lærebøker.
I kapittel 4 presenterer jeg hvordan jeg har utforma studien, altså oppgavens metodologi.
Kapittel 5 vies til analyse av datamaterialet. Elevens arbeid analyseres etter Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin syvstegsmodell og Greefrath (2011, s. 301-302) sin utvidede nistegsmodell. Intervjuet med R2-læreren blir blant annet analysert opp mot læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) og læreboka til elevene (Borge et al., 2022).
Kapittel 6 tar for seg drøfting av funn. Der sammenligner jeg resultatene med tidligere forskning og svarer på forskningsspørsmålet. Som ei avslutning på diskusjonskapittelet gir jeg en kort konklusjon.
I kapittel 7 vil jeg reflektere over egen læring, og hvordan man kan jobbe med modellering i mattetimene.
Kapittel 8 er referanser til denne studien.
Kapittel 9 består av vedlegg: prosjektbeskrivelse, informasjonsskriv med samtykkeerklæring og tillatelse fra NSD, nå Sikt.

2. Teoretisk rammeverk

I denne delen ønsker jeg å legge fram relevant teori for avhandlinga mi. Jeg ønsker spesielt å fokusere på modellering og modelleringssykluser. Først vil jeg presentere begrepet modellering (2.1). Det er viktig at det er en felles forståelse hva som ligger i sentrale begreper. Deretter vil jeg komme inn på begrepet modelleringssyklus (2.2). Det finnes flere modeller, «oppskrifter» for hvilke steg man helst skal bruke når man jobber med modelleringsoppgaver. De blir ofte kalt for modelleringssykluser, og jeg kommer spesielt til å fokusere syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226) Jeg vil også se på Greefrath (2011, s. 301-302) sin nistegsmodell, som tar utgangpunkt i syvstegsmodellen og legger til to steg om teknologi. Jeg vil også se på to firestegsmodeller. Videre ser jeg på problemløsning som en del av modelleringsprosessen (2.3). Til slutt blir det presentert tidligere forskning (2.4) og relevant læringsteori (2.5).

2.1 Begrepet «modellering»

Modellering er et begrep som kan være vanskelig å forstå, og jeg vil derfor vise noen definisjoner på modelleringsbegrepet før jeg selv legger fram ei begrepsavklaring.

Niss et al. (2007, s.4) beskriver en matematisk modell slik: "A mathematical model consists of the extra-mathematical domain, D, of interest, some mathematical domain M, and a mapping from the extra-mathematical to the mathematical domain". Niss legger vekt på en matematisk modell består av noe fra virkeligheten, D, som oversettes til matematikk, M. Niss & Blum (2020, s.6) forklarer først at en modell er noe som stå for eller skal representere noe annet. Videre forteller de følgende om en matematisk modell: «Simply put, a mathematical model is a special kind of model, namely a representation of aspects of an extra-mathematical domain by means of some mathematical entities and relation between them».

En matematisk modell er altså en representasjon av aspekter fra den ekstra-matematiske verden, altså virkeligheten til det matematiske området ved hjelp av matematiske enheter. Haraldsrud et al. (2020, s. 190) definerer modellering slik: «Modellering er en prosess for å finne en forenkla representasjon av et fenomen i virkeligheten, altså en modell.» Definisjonen viser altså at det handler om å forenkle virkeligheten ved å finne en forenkla representasjon. Videre gir Haraldsrud et al. (2020, s. 190-191) eksempler på ulike atommodeller. Både Bohrs atommodell og Schrödingers atommodell er eksempler på beskrivelser av atomet. Bohrs atommodell forteller om energinivået til elektronene, mens Schrödingers atommodell forteller om sannsynligheten til hvor elektronene er (Bedin, 2023). Hver modell har sine styrker og svakheter, og de forteller aldri heile sannheten (Haraldsrud et al. 2020, s. 191). En (matematisk) modell er derfor en forenkling av virkeligheten.

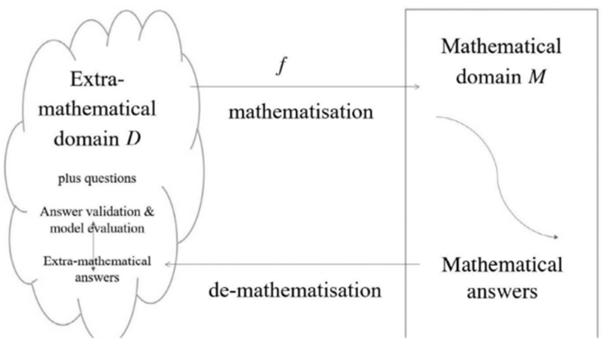
«En matematisk modell er en matematisk struktur som på en tilnærmet måte beskriver et fenomen. Matematisk modellering er selv prosessen ved utvikling av en matematisk modell.» (Erfjord, 1997, s. 5). Det ser altså ut som Erfjord legger stor vekt på å beskrive et fenomen fra virkeligheten. Han legger også betydelig vekt på prosessen med å utvikle en matematisk modell. Dette samsvarer veldig med de første stegene i Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin syvstegsmodell.

Blum & Borromeo Ferri (2009, s.45) forteller at matematisk modellering er prosessen der man oversetter fram og tilbake mellom den reelle verden og den matematiske verden. Berget (2022, s. 51) sier at modelleringskompetanse er evnen til å gå gjennom alle stegene i en modelleringsprosess, der man løser ikke-matematiske problem med matematikk. I dette ligger det at man må gjøre noen grep for at noe som er ikke-matematisk skal kunne bli til noe matematisk.

Med alt dette i mente, er spennet stort når det gjelder hvor omfattende modellering er. Jeg ser primært å se på modellering som det å lage seg en matematisk modell av virkeligheten, enten det er en fysisk modell eller ei forenkla tegning. Å bruke modellen følger naturlig etter å ha lagt modellen, så ser jeg på det som en del av modellering.

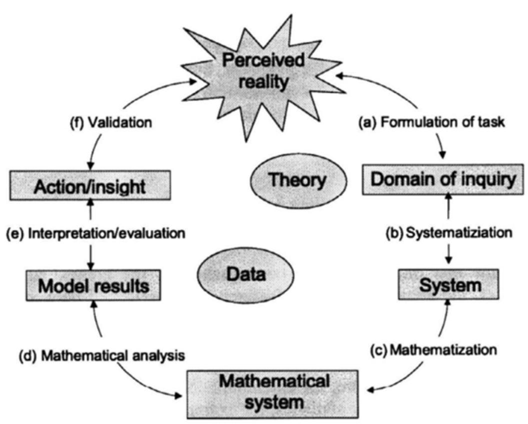
2.2 Modelleringssyklus

Definisjonene sier nesten det samme alle sammen, og flere av dem nevner den virkelige verdenen og den matematiske verdenen og også ordet prosess. Den prosessen handler først om å ha en oppgave fra virkeligheten som man forenkler og for til å bli en matteoppgave. Det finnes flere ord på prosessen. Når man så har matteoppgaven er det vanlig å løse den, for så å se om svaret passer til oppgaven, da går man gjennom et slags kretsløp eller syklus. Slik er «basis»-modelleringssyklusen fra Niss & Blum (2020, s. 13):



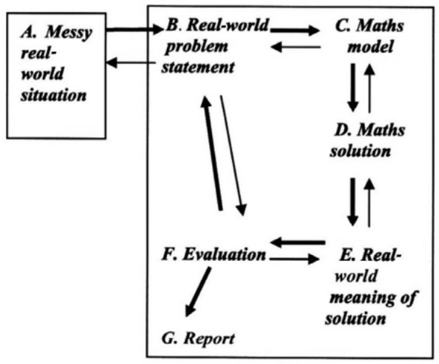
Figur 1: Standarden for modelleringssykluser av Niss & Blum (2020, s.13) med virkeligheten D og det matematiske området M.

Basismodellen får tydelig fram matematisering og at vi så må dematematisere, altså gå tilbake til virkeligheten. Virkeligheten er D og matematisk området har fått bokstaven M. Modelleringssyklusen til Blomhøj og Jensen (2007) er satt opp som en sirkel, og det kan se ut som matematiseringa har fått mindre plass:



Figur 2: Modelleringssyklusen til Blomhøj & Jensen (2007), fra Niss & Blum (2020, s. 15)

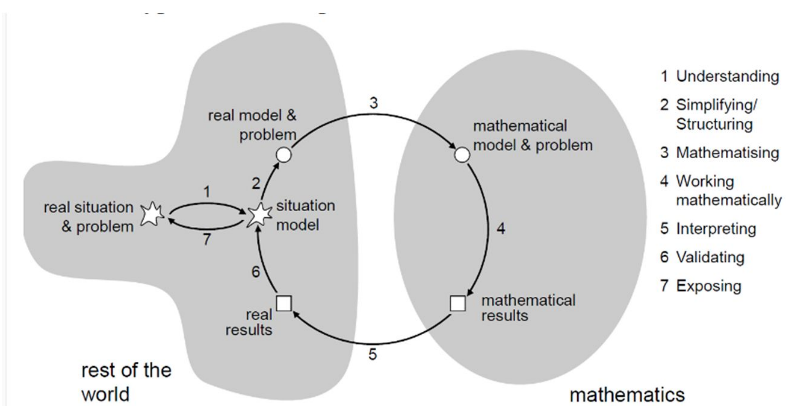
Stegene til Blomhøj & Jensen (2007) er satt i system ved a), b), c), d), e) og f), noe som gjør det lett å se at det er en seksstegsmodell. Antall steg varierer, og i Galbraith & Stillman (2006) sin modell må pilene tolkes som steg:



Figur 3: Galbraith & Stillman (2006) sin modelleringssyklus, fra Niss & Blum (2020, s. 16).

2.2.1 Syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226)

Den mest omtalte prosessen har syv steg, og tar sikte på en oppgave fra virkeligheten som løses i den matematiske verdenen, der man tolker og validerer svaret før man ser om svaret kan stemme med den opprinnelige oppgaven (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226). Jeg har valgt å bruke modelleringssyklusen med syv steg av Blum & Leiß (2007, s. 225-226) som mitt «hoved»-teoretiske rammeverk. Syvstegsmodellen er mye sitert, deriblant av blant annet Gilbert Greefrath (2011, s. 301-304). Jeg tenker derfor at dette kan være et godt analyseverktøy for elevers arbeid med modellering. Modelleringssyklusen til Blum og Leiß viser de forskjellige stegene som kan forventes av elever når de jobber med modelleringsoppgaver:



Figur 4: Modelleringssyklusen til Blum & Leiß (2007, s 225)[1]

Når det gjelder hva som ligger i de forskjellige stegene gis det eksempler på det både i Blum & Leiß (2007, s. 225-226), Blum & Borromeo Ferri (2009, s. 46-49) og Blum (2011, s. 17-

[1] Professor emeritus dr. Werner Blum (personlig kommunikasjon, 21. februar 2023) påpekte i en epost at på grunn av en trykkerifeil mangla syvstegsmodellen navn på de tre siste stegene, men at modellen hadde blitt retta opp i seinere artikler som f.eks. Blum og Borromeo Ferri (2019, s.46) samt Blum (2011, s. 18). Denne figuren fikk jeg tilsendt av Blum, og han ba meg jeg sitere den opprinnelige artikkelen når jeg bruker denne tilsendte figuren.

21). Dette vil jeg bruke til å forklare de ulike stegene på norsk, med utgangspunkt i eksempelet fra Blum & Leiß (2007, s.224-226): «En gondol bruker tre minutter fra bunnstasjonen til toppstasjonen av et fjell. Farten er 30 km/t og høydeforskjellen er 180 meter. Sjefsingeniøren foretrekker å gå og klatre, han løper fra bunnen av gondolen til bunnen på fjellet. Han bruker 12 minutt på å klatre opp. Hvor lang er omtrent distansen mellom dalstasjonen og bunnen av fjellet?» Den ideelle oppgaveløsninga vil se slik ut etter syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, s. 224-226):

Steg 1: Forstå/konstruere
Jeg har valgt å oversette, etter beste evne, alle stegene til norsk, og de vil jeg bruke gjennom resten av oppgaven. Utgangspunktet for det første steget er at vi begynner med en reell situasjon og/eller et problem. For å løse oppgaven må man skjønne hva man skal fram til, altså forstå oppgaven. Da må en se vekk fra unødvendige opplysninger og lage en situasjonsmodell. I Blum & Leiß (2007, s. 225) blir det laga ei tegning med en skog, et fjell, noen personer og en gondolbane. Målet er å finne ut Blum forteller (personlig kommunikasjon, 21. februar 2023) på epost at oppsummert så er dette steget å konstruere en individuell mental modell. Så man trenger absolutt ikke skrive ned noe. Det er heller ikke eksemplifisert i de andre artiklene med fysiske skriblerier når det gjelder det første steget. Dette første steget har hatt noen navnebytter opp gjennom tida. Blum skriver videre i eposten at da den ble gitt ut i 2007 sto det både «Understanding» og «Constructing» som navn på første steget (Blum & Leiß, 2007, s. 225). I både Blum & Borromeo Ferri (2009, s. 46) og Blum (2011, s. 18) står det bare «Constructing». Blum forteller videre på epost at seinere har det blitt brukt bare «Understanding». Begge disse ordene står kognitivt for det samme: Forståelse oppstår når man konstruerer en mental situasjonsmodell.

Steg 2: Forenkle/strukturere
Som Blum & Leiß (2007, s. 225-226) viser, forenkler man modellen enda mer, man fjerner alt av trær og folk på tegninga og setter inn navn og avstander. Så ja, man må forenkle og forenkle, se på jordkloden som ei perfekt kule, og et fjell som noe som går rett opp eller har samme helning over alt. Nå blir situasjonsmodellen til en reell modell.

Steg 3: Matematisere
Her gjør man den reelle delen om til en matematisk modell, som det går an å regne på. Om man har en trekant gjør man den rettvinkla for å bruke Pytagoras' setning. Skal man fylle opp en bensintank og lurer på hvilken bensinstasjon man skal gjøre det på, setter man nå opp noen ligninger med variabler slik at det er noe å regne på.

Steg 4: Jobbe matematisk
Personlig synes jeg det er et litt rart navn, for er ikke heile modelleringsprosessen en del av matematikken? Hvis vi ser på en typisk matteoppgave, så er det ofte her vi er i modelleringssyklusen: Regning. Det det handler om her uansett er regning. Her setter man inn tall i formelen, eller mattestykket og regner i vei. Steg 4 er altså steget mellom den matematiske modellen og det matematiske resultatet

Steg 5: Tolke
Når man har et matematisk resultat, som oftest et tall, så man se hva det tallet forteller deg, ja, 1,49, hva er det? Ja, det var jo antall kilometer jeg skal finne ut, omtrent 1,5 km da som blir det reelle resultatet.
Steg 6: Validere
Det er nå man ser nøyere på det reelle resultatet, er kjempen så høy, er det så langt til det

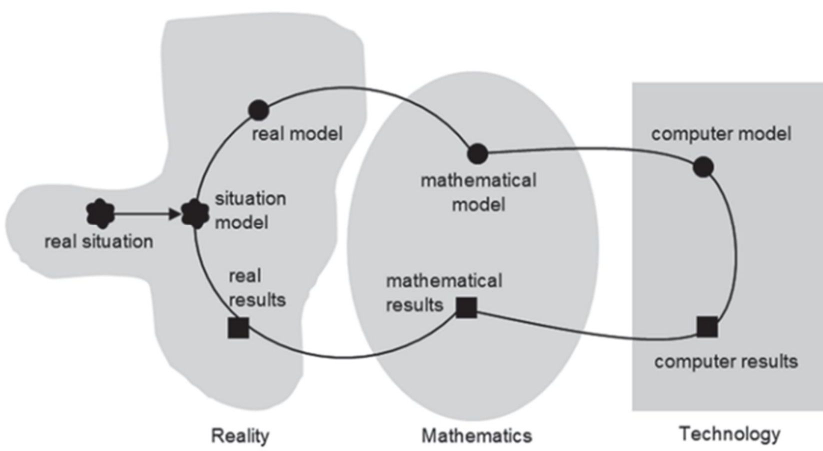
fjellet eller gir det meining at det er så mye billigere å fylle bensin der? Når vi validerer svaret kommer vi fram til situasjonsmodellen, om det svarer på den. Hvis svaret føles galt, så går man gjerne ei eller flere runder til i modelleringssyklusen.

Steg 7: Legge fram
Det syvende steget er å legge fram den endelige løsninga (Blum, 2011, s.18; Blum & Leiß, 2007, s. 226). Blum og Leiß kaller dette steget for «exposing». Direkte oversatt til norsk betyr «exposing» avdekking. Min tolkning av det syvende steget er at det handler om å legge fram det man har funnet ut, og da tenker jeg typisk på et lite foredrag eller en liten presentasjon. Å bare skrive svaret ned på arket, er en veldig «light-versjon av å legge fram. Oppsummert så handler det syvende steget handle om å legge fram det man har funnet ut for resten av klassen, der man forklarer hvordan man jobba og hvorfor det svaret er gyldig.

Jeg mener at begrepet avdekking ikke beskriver innholdet i steget så godt. Andre begreper som kan erstatte avdekking er rapportering eller framlegging. I en epost forteller Werner Blum (personlig kommunikasjon 21. februar 2023) at det syvende steget har en annen natur en de andre stegene. Bakgrunnen for dette er at det er mer kognitivt krevende enn de andre stegene. Mi tolkning av det Blum skreiv, er at de andre stegene handler om å løse oppgaven, så handler det syvende steget om å legge frem resultatene for klassen. Vanligvis svarer jo bare elevene på oppgaven enten i boka eller på PC-en. Å presentere svaret på en matteoppgave og løsningsprosessen sin er ikke så innarbeida i skolen, men det kan passe i visse sammenhenger.

2.2.2 Den utvidede modelleringssyklusen (Greefrath, 2011, s. 301-304)

I forbindelse med at elevene bruker digitale hjelpemidler i oppgaveløsninga er det på sin plass å introdusere Gilbert Greefrath (2011, s. 301-304) sin utvidende modelleringssyklus:



Figur 5: Den utvidede modelleringssyklusen til Gilbert Greefrath (2011, s. 302)

Som man ser av figuren, så er det ikke lenger pil mellom «matematisk modell» og «matematiske resultater», men man går via den teknologiske verdenen. Her er det viktig å få til en «datamaskinmodell og problem», altså at det blir et mattestykke som kan løses digitalt. For eksempel må man bruke punktum og ikke komma når man bruker desimaltall i GeoGebra. Ved å kunne bruke digitale hjelpemidler, vil man kunne løse noen oppgaver som man ikke hadde klart uten. (Greefrath, 2011, s. 301). Dette vil da gjøre at flere elever kan få muligheten til å komme gjennom ei vanskelig utregning som kunne satt kjepper i hjulene for dem.

2.3.3 Blum og Borromeo Ferris firestegsmodell

Blum & Borromeo Ferri (2009, s. 54) påpeker at modelleringssyklusen til Blum & Leiß, (2007, s. 225-226) er et strategisk verktøy for arbeid med modelleringsoppgaver. De påstår at den er noen ganger heilt uunngåelig for forsknings- og undervisningsformål. Blum og Borromeo Ferri gir heller en annen firestegsmodell som de meiner kan passe bedre til elever, når de møter vanskeligheter i arbeidet med syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226). Blum og Borromeo Ferri (2009, s. 54) sin firestegsmodell er altså slik:

1) Forstå oppgaven
2) Etabler en modell
3) Bruk matematikk
4) Forklar resultatet

Det første steget handler om å lese teksten og forestille seg situasjonen, så lager du ei skisse. Det andre steget er å leite etter den data du mangler, og hvis det er nødvendig må du gjøre noen antagelser. Du ser så etter noen matematiske relasjoner.
Det tredje steget er å bruke passende prosedyrer og skrive ned det matematiske resultatet.
Det fjerde steget er å runde av, koble resultatet til oppgaven, og hvis det er nødvendig må man gå tilbake til det første steget igjen. Til slutt skriver man ned sitt endelige svar. (Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 54)

2.3.4 Blums firestegsmodell

Blum (2011, s. 24-25) foreslår selv å gi elevene en enklere plan en syvstegsmodellen når det gjelder å løse modelleringsoppgaver. Den består av fire steg som ligner veldig på Blum & Borromeo Ferri sin firestegsmodell. Blum (2011, s. 24-25) presenterer modellen slik:

1) Forstå oppgaven
2) På leit etter matematikk
3) Bruke matematikk
4) Forklare resultatet

Jeg har også her valgt å navngi stegene på norsk, og jeg synes det er vanskelig å finne et godt navn på steg 2 «Searching mathematics». I steg 1 skal man forstå oppgaven, finne ut hva so mangler og lage ei skisse. Steg 2 er å leite etter dataen du trenger, og hvis det er nødvendig må man gjøre en eller flere antagelser. Man må se etter matematiske relasjoner før man i steg 3 bruker matematikken og gjør de beregningene som trengs. Steg 4 er å runde av svaret, sjekk om det passer til oppgaven, og hvis det gjør det, skriv ned svaret. Det Blum påpeker her med å skrive ned svaret, kan enkelt relateres til at man skriver ned svaret og er ferdig med oppgaven. Forhåpentligvis har eleven sjekka svaret og sett over først. Steg 2 og 3 i syvstegsmodellen (Blum, 2007, s. 225-226) smelter her sammen til steg 2, «på leit etter matematikk». Ellers så smelter de tre siste stegne i syvstegsmodellen sammen til steg 4 (Blum, 2011, s. 24). Denne modellen er nesten heilt lik på firestegsmodellen til Blum & Borromeo Ferri (2009, s. 54).

2.3 Problemløsning som en del av modelleringssyklusen

Selv om utforskning og problemløsning er et annet kjerneelement enn modellering og anvendelser (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2-3), så handler jo modellering om å løse problemer. Kjerneelementene skal være gjennomgående i heile undervisninga. Derfor kan det være at man kan bruke strategier fra problemløsninga i modelleringa og omvendt.

Arbeidet til George Polya har vært sentralt i mer enn 50 år i studier av det å løse problemer, nemlig problemløsning. Det kan se ut som Blum & Borromeo Ferri (2009) samt Blum (2011) har veldig mye til felles med Polyas sine fire steg i problemløsning. Jeg vil her legge vekt på å presentere de mye siterte fire stegene i problemløsning slik Polya (1957, s. XVI-XVII) presenterer dem:

1. Forstå problemet
2. Lag en plan
3. Gjennomfør planen
4. Se tilbake

Det er lett å tenke at å forstå problemet sier seg selv, men Polya forklarer mer detaljert at det handler om å finne ut hva det er som er ukjent og hvilke data vi har. Det handler også om å finne ut hva som er overflødig informasjon, hva som mangler og om noe eventuelt er motstridende. Polya anbefaler også å tegne en figur.

Når det gjelder å lage en plan, så bør man tenke gjennom om man har sett noe lignende før, i tillegg må man prøve å se om det finnes en slags sammenheng mellom det vi vil finne ut av og den informasjonen vi har. Polya (1957, s. 12) forteller videre at å lage en plan er krevende, både fordi du må ha nok informasjon og konsentrasjon.

Polyas tredje steg er å gjennomføre planen. Han anbefaler å sjekke om hvert steg er riktig, og han påstår at det er å lettere å følge planen enn å lage den. Ulempen er at hvis en elev har snappa planen fra noen andre, eller glemmer planen underveis (Polya, 1957, s. 13).

Det siste steget er å se tilbake. Eleven må sjekke resultatet og de beregningene som er gjort. I denne fasen kan eleven også stille seg spørsmålet om resultatet kan utledes på en annerledes måte, og om det resultatet og den metoden som ble brukt kan anvendes på andre problem (Polya, 1957, s. 14-16). Da er vi tilbake til start igjen ved det opprinnelige problemet, og vi kan si at Polyas fire steg i problemløsninga danner en problemløsningssyklus.

Det fire stegene også kalt de fire fasene, sier seg selv. Hva skjer så hvis eleven ikke heilt har planen klar eller har overhørt noe fra noen andre? Da kan det fort skje at eleven «mister tråden», og blir stående fast (Polya, 1957, s. 13). Eleven bør da kikke gjennom de fire stegene igjen fra begynnelsen, for å finne ut hva eleven vet, og hva det er som gjør at det stopper opp.

Selv om utforskning og problemløsning er et annet kjerneelement enn modellering og anvendelser, skal kjerneelementene være gjennomgående i heile undervisninga. Derfor kan det være at man kan bruke strategier fra problemløsninga i modelleringa og omvendt.

2.4 Tidligere forskning på modellering

Mange forskere kan nevnes når det gjelder modellering som Kaiser, Blomhøj, Niss, Blum og Borromeo Ferri. Noen av disse er allerede presentert, og andre blir omtalt seinere. Jeg har derimot valgt å nevne litt annen forskning som har fokus på å designe modellerings-oppgaver, læreplan og undervisningseksperiment, som er mer relevant for min oppgave.

Aasarmoen (2021) så i sin masteroppgave på design og bruk av modelleringsoppgaver. Det kan være lurt å velge virkelighetsnære oppgaver, som elevene kan kjenne seg igjen i dem. Før man lager en oppgave til elevene, bør man ta utgangspunkt i hvilke matematiske ideer eller framgangsmåter man ønsker at eleven skal bruke (Aasarmoen, 2021, s. 59-60)

Berget & Bolstad (2019) sier at modellering er en måte å koble matematikk og dagliglivet på. Det var mye fokus på modellering i høringsutkastet til Fagfornyelsen. Ordet modell eller varianter av det framkommer dobbelt så mange ganger i fellesfagene i LK20 i forhold til LK06.

Berget (2022a) gjennomførte en studie i to 2P-klasser, der lærerne fulgte læreboka nokså slavisk. De gjennomførte også et praktisk undervisningseksperiment, der elevene skulle veie erter og lage en funksjon. De brukte sine hverdagserfaringer, og var kritisk til sitt eget datagrunnlag. Berget observerte, og hun tok også lydopptak der hun så på kommunikasjonen mellom lærer og elev. Hun konkluderte med at læreren ikke slapp elevene nok fri.

Berget (2022b) har også sett på modelleringsoppgaver i læreboka og på eksamen. Hun har funnet ut at det er stort sett steg 4 og en del steg 5 (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226) som kreves for å løse disse oppgavene.

Berget (2023) forteller at modellering er i læreplanene i heile verden. Studien hennes hadde som mål å se på tendenser i tilnærminga til modellering både i fire lærerintervjuer og KOM- og PISA-rapportene. Lærerne stilte faktisk spørsmåltegn med til relevansen av modellering, modelleringsoppgavene skal være med på å gjøre matematikken relevant for hverdagen. Resultatene var at lærerne ikke var trygge på å undervise om modellering. Kjernen i modelleringsprosessen med å ta utgangspunkt i den virkelige verden, og blant annet forenkle, ble ikke sett på som viktig blant lærerne. De var heller ikke så kreativt tenkende, og de kobla gjerne modellering til funksjoner. Lærere så heller ikke på modellering som relevant for elevenes hverdag (Berget, 2023, s. 15-16).

2.5 Læringsteori

Vi finner fire hovedretninger innenfor læringsteori; behaviorismen, de kognitive læringsteoriene, konstruktivistisk læringsteori og den sosiokulturelle læringsteorien (Imsen, 2011, s. 49-52). Selv om jeg vil påstå at jeg bruker deler av alle de ulikehovedretningene når jeg selv underviser, vil denne studien bygge på et sosiokulturelt læringsperspektiv. Denne læringsteorien har vært den rådene siden begynnelsen av 2000-tallet, og den blir gjerne brukt i kombinasjon med en form for konstruktivistisk læringsteori (Imsen, 2011, s. 52). Et annet kjent aspekt ved en kognitiv læringsteori, er å peke på nysgjerrigheten som kilde til læring, samt at nytt stoff på passes inn i det elevene allerede kan fra før. Når det gjelder de kognitive perspektivene så retter man blikket på hukommelse og metakognisjon (Imsen, 2011, s.51).

Min forskningsstudie tar utgangspunkt i et praktisk undervisningseksperiment der elevene jobber sammen i grupper. Under et gruppearbeid skjer det noe i samspillet mellom elevene og oppgaven som påvirker løsningsprosessen. Elevene snakker sammen, prøver ut ting, de regner og de vil vise sammenhenger. Dette samsvarer godt med grunntanken i sosiokulturell læringsteori der mennesket lærer når det arbeider med kunnskap i en sosial sammenheng. Dialog mellom mennesker er et kjennetegn på den sosiokulturelle læringsteorien (Manger et al., 2009, s. 218). Den sosiokulturelle teoritradisjonen skriver seg tilbake til den russiske psykologen Lev Vygotsky, som meinte språket er viktig, siden det forbinder individet med kulturen (Ismen,2011, s. 51-52). Vygotsky meiner at språket er viktig, fordi det er det viktigste redskapet vi har med tanke på samhandling med andre mennesker. I denne studien vil modelleringsopplegget legge til rette for at matematikk medieres, altså formidles, ved at vi bruker ulike hjelpemidler og spesielt språk (Imsen, 2011, s. 51; Manger et al., 2009, s. 224-225).

Vygotsky meinte at den sosiale aktiviteten skapte individuell utvikling (Imsen, 2011, s. 117). Man kommer ofte mye lenger på en vanskelig oppgave hvis man er flere sammen. Dette er med på å underbygge gruppearbeid. Ser vi nærmere på «den proksimale utviklingssone» fra Vygotsky, så handler som om å gi elevene passende oppgaver. Man gir ikke oppgaver med å telle til ti, eller kompleks funksjonsanalyse. Førstnevnte blir alt for lett, eleven klarer det aleine, og det blir heller ingen utvikling hos eleven av det. Blir det for vanskelig klarer heller ikke eleven å løse oppgaven med hjelp av andre heller, og vil derfor også være bortkasta. Vygotsky beskriver den nærmeste utviklingssona som det eleven kan klare med hjelp av andre. (Skott et al., 2018, s. 120-122). Gruppearbeid med medelever som jeg bruker i dette tilfelle er et godt eksempel på dette, og læreren går også rundt i undervisningsrommet for å veilede elevene.

3 Modellering i læreplaner og lærebøker

Siden jeg ser på R2-elevers modelleringskompetanse, så faller det naturlig å ta en kikk på modellering i både den forrige og nye læreplanen og lærebøker. Læreplanen, lærebøker og eksamen påvirker undervisninga i veldig stor grad. Dette gir grunnlag for å se hvordan læreplanverket ser på modellering og hvordan lærebokforfatterne tolker læreplanen.

I kapittel 3.1 ser jeg på den forrige læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) og to lærebøker (Heir et al., 2008, 2016). I kapittel 3.2 ser jeg nærmere på den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) og den nye læreboka (Borge et al., 2022).

3.1 Modellering etter den «gamle læreplanen»

Siden dette er første skoleåret der den nye læreplanen er innført for matematikk R2, kan det være interessant å ta en titt på den «gamle» læreplanen, altså den som ble brukt for siste gang skoleåret 2021/2022. Læreplanen er delt inn i følgende hovedområder: Geometri, algebra, funksjoner og differensialligninger. Kompetansemålene blir lista opp under hvert hovedområde (Utdanningsdirektoratet, 2006). I denne gamle lærerplanen blir det også lista opp følgende grunnleggende ferdigheter:

- Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig
- Å kunne lese
- Å kunne regne
- Å kunne bruke digitale verktøy

Disse er integrert i kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 4).

Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig handler om å kunne blant annet formulere logiske resonnementer, forklare tankegangen sin og også sette ord på oppdagelser, ideer og hypoteser (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 4). Dette er absolutt en synlig del i gruppearbeid, man må kunne skrive og snakke sammen.

Å kunne lese i matematikk innebærer å kunne hente ut relevant informasjon. Selvfølgelig leser man oppgaven, men man må også kunne forstå matematiske symboler, grafer, tabeller og logiske resonnementer (Utdanningsdirektoratet, 2006, s.4).

Å regne er selvfølgelig en viktig del innenfor Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin modelleringssyklus, noe som faller naturlig innenfor steg 4, jobbe matematisk. Utdanningsdirektoratet (2006, s. 4) utyper at det å kunne regne handler også om å gjøre hensiktsmessige overslag og vurdere rimeligheten av et svar, noe som igjen samsvarer med steg 5 og 6 som er henholdsvis tolke og validere (Blum, 2007, s. 225-226).

Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk er absolutt relevant i denne studien, da elevene bruker digitale verktøy under oppgavejobbinga. Dette blir de digitale stegene som vi finner i Greefrath (2011, s.301-304) utvidede modelleringssyklusen.

Under kompetansemålene om funksjoner nevnes blant annet at man skal modellere periodiske fenomener. Siste kompetansemål om funksjoner er også om modellering: «Formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte». Læreplanen har også et eget emne om differensiallikninger der det første kompetansemålet er «modellerer praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke problemet» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 5-6). Så selv om emnene elevene skal innom er geometri, algebra, funksjoner og differensiallikninger, så er modellering absolutt en del av læreplanen.

Jeg har også valgt å ta en titt i den gamle læreboka til R2-klassen som jeg fikk av læreren, nemlig boka *Matematikk R2* (Heir et al., 2008). Boka har følgende seks kapitler: Vektorer, algebra, trigonometri, funksjoner, integraler og til slutt differensiallikninger. 2/3 av kapittelet om funksjoner kan knyttes til modellering, samt et delkapittel fra differensiallikninger om praktisk bruk. Jeg vil bemerke selv om 2/3 av funksjonskapittelet har med modellering å gjøre, er det likevel mest regresjon.

Andre utgave av boka Matematikk R2 ble utgitt i 2016. Den er basert på samme læreplanen, men har valgt å bruke GeoGebra for å løse en del oppgaver i stedet for andre «gammeldagse» kalkulatorer. Hvis vi ser bort fra kapittelet om eksamenstrening, så er dette de syv kapitlene: Integrasjon, trigonometri, funksjoner, tredimensjonale vektorer, romgeometri, differensiallikninger og til slutt følger og rekker. Under funksjonskapittelet er det et eget delkapittel som heter modellering som handler om regresjon. Ellers er det også et delkapittel som heter praktisk bruk av differensiallikninger, og her handler det om endring i temperatur, populasjon, fall i tyngdefeltet og radioaktivitet (Heir et al., 2016).

3.2 Modellering etter den nye læreplanen

Klaveness et al. (2019, s. 5) forteller at i den nye læreplanen LK20 kan kjerneelementene, sammen med de grunnleggende ferdighetene og verdiene og prinsippene i generell del, forstås som hjelp til hvordan vi som lærere skal aktivisere elevene med å se sammenhenger og få dybdeforståelse. Det som før het generell del, heter nå overordna del.[2]

Når det gjelder de grunnleggende ferdighetene (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 12) så gjelder de i alle fag, og det vil jo selvfølgelig være mer regning i mattefaget enn i engelskfaget. Det første punktet om å uttrykke seg skriftlig og muntlig har i den nye læreplanen for R2 blitt splitta opp i to. Ellers er det bare mindre justeringer (Utdannings-direktoratet, 2020, s. 4). Heilt nytt er derimot de tverrfaglige temaene: Folkehelse og livsmestring, demokrati og medborgerskap samt bærekraftig utvikling (Kunnskaps-departementet, 2017, s. 13-15). I den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), så er hovedområdene fra den gamle læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) tatt bort, men vi har til gjengjeld fått følgende kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2-3):

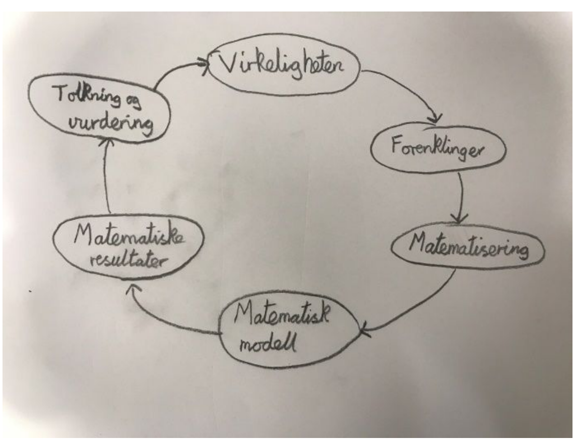
- Utforsking og problemløsning
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

[2] Etter det Klaveness (2019, s. 5) skriver, så står verdiene og prinsippene i generell del. Etter e-post-kommunikasjon med Kristin Eliassen hos Fagbokforlaget (personlig kommunikasjon, 16. mars 2023), så har vi kommet fram at de verdiene og prinsippene som omtales står i det som heter overordnet del (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Å jobbe med kjerneelementet «modellering og anvendelser» kan føre til at elevene får kompetanse til å se sammenhengen mellom matematikken og virkeligheten. Hvert kjerneelement kan sees på som en tråd som tvinnes sammen og utgjør et tau. Dette nye tauet utgjør da elevenes matematiske kompetanse, og dette matematikk-tauet tvinnes så sammen med andre «fag-tau» som utgjør elevenes totale kompetanse. (Klaveness et al., 2019, s. 6). Som man kan se er altså kjerneelementene ei fornying av hovedområdene, de peker ut retninga for hvordan man skal arbeide med matematikk i klasserommet. Elevene skal så klart fortsette å lære om geometri, algebra, funksjoner og differensialligninger,

De gamle kompetansemålene om modellering slik: «Formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte.» og «Modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet.». (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 6). I den nye læreplanen er det slik: «Gi eksempler på ulike situasjoner som kan modelleres ved å bruke ulike matematiske funksjoner, og modellere og analysere slike situasjoner ved å bruke reelle datasett.» og «Anvende derivasjon og integrasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 7). Den nye læreplanen åpner altså for en videre tolkning av kompetansemålene. Læreplanen har i tillegg brukt flere «nye» ord som utforske, anvende og analysere.

I 2022, et par år etter Fagfornyelsen i 2020, kom forlaget Aschehoug ut med en ny utgave[3] av læreboka *Matematikk R2.* Boka er bygd opp litt annerledes, med færre kapitler der modeller har fått et heilt eget kapittel. Dette viser at lærebokforfatterne ser på modellering og derav modellering som en viktig kunnskap. Man kan derfor diskutere om vi skal se på modellering som en separat del i matematikken, eller som en integrert del av matte. Lærebokforfatterne har tydeligvis fått øynene opp for modelleringssyklus, da de presenterer en seksstegsmodell heilt i starten av kapittelet:



Figur 6: Modelleringssyklusen i læreboka (Borge et al., 2022, s. 257)

[3] Den nye utgaven er 4. utgave (Borge et al., 2022, s.2) men etter personlig kommunikasjon på epost med Hilde Erika Lund (27. mars 2023) i Aschehoug viser det seg at det egentlig er 3. utgave, da det har skjedd en trykkfeil. Boka omtales likevel som fjerde utgave, siden det er det som har blitt trykka.

Modelleringssyklusen i læreboka ligner ved første øyekast på Blum & Leis (2007, s. 225-226) sin modell. Her har Borge et al. blanda sammen steg og holdepunkter fra Blum & Leiß (2007, s. 225-226). Det er også naturlig at tolkning og validering settes sammen. Det kan være Borge et al. ser på dette som en enklere modeller for elevene å bruke, hovedpunktene er uansett at vi må forenkle problemer litt, gå over i den matematiske verdenen, for å regne litt på det, for vi sjekker svaret om det passer med oppgaven.

Første delkapittel heter «modeller av reelle datasett», og kan sees på som regresjon. Kapittel 4B er analyse og tolkning av modeller, det er nokså teoretisk, men har også om en del elementer som akselerasjon og fjær fra fysikken, selv om «tolkning» i tittelen hørtes bra ut. Kapittel 4C er om vekstmodeller vi kjenner igjen fra de tidligere utgavene av lærebøkene, før vi får kapittel 4D om frie svingninger som vi også kjenner igjen.

Tidligere eksamensoppgaver, etter den gamle læreplanen, legger blant annet vekt på regresjon der man får oppgitt en del data. Dette er en type modellering. Så varierer det litt, men det er ofte med en modelleringsoppgave med differensialligninger. Eksamen våren 2021 inneholdt en modelleringsoppgave der det handla om bensinforbruket til en bil der tanken var lekk. (Utdanningsdirektoratet, 2021). Våren 2022 var det en oppgave om å begrene medisinmengden i kroppen ved hjelp av differensialligninger (Utdanningsdirektoratet, 2022a). Denne våren, våren 2023, skal det for første gang avholdes eksamen i R2, og Utdanningsdirektoratet har derfor kommet med et eksempelsett[4] som skal passe med den nye læreplanen. Det er som vanlig en regresjonsoppgave, men den klassiske modelleringsoppgaven med differensialligninger er bytta ut. I stedet er det en mer problemløsende oppgave om Hanois tårn. (Utdanningsdirektoratet, 2022b). Dette gjenspeiler muligens at det er andre kjerneelementer som man vil elevene skal ta i bruk under eksamen.

[4] Det står vår 2023 på Utdanningsdirektoratets nettsider. På løsningsforslaget stod det 2022. Etter e-post-utveksling (personlig kommunikasjon, 5. mai 2023) med Øyvind Pedersen i Utdanningsdirektoratet er det bekrefta at eksempelsettet er publisert i 2022, men lagt ut som «vår 2023». Derfor siteres dette som 2022b.

4 Metode

I metodekapittelet vil jeg fortelle hva jeg har gjort for å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt: «Hva kjennetegner et utvalg R2-elevers tilnærming av modelleringsoppgaver?». Kapittel 4.1 forteller kort om paradigme, mens kapittel 4.2-4.4 forteller mer om datainnsamlingsmetodene. Deretter vil jeg se på utvalget av informanter (4.5), selve datainnsamlinga (4.6) og utforminga av oppgavene (4.7). Så kommer jeg inn på Torricellis lov (4.8) som danner grunnlaget for undervisningseksperimentet i denne studien. Så kommer jeg innom oppgavene som ble lagt til elevene (4.9), intervjuguiden som jeg brukte da jeg intervjua R2-læreren (4.10). Jeg kommer også inn på hvordan jeg analyserer datamaterialet (4.11), før det presenteres noen tanker om studiens reliabilitet og validitet (4.12). Heilt til slutt presenteres det en del etiske betraktninger i forbindelse med studien (4.13).

4.1 Paradigme

Når jeg skal tolke og analyse datamaterialet jeg har samla inn, så vil mitt vitenskapssyn påvirke analysen. Thagaard (2018, s. 33) skriver at vi kan ikke beskrive og kategorisere hendelsesforløp uten samtidig å tillegge hendelsene ei meining. Dette samsvarer med Bryman (2016, s. 26) om at interpretivismen er et fortolkende paradigme som er vanlig i kvalitative studier. Jeg tolker utsagnene som elevene sier, det de skriver og utsagnene fra læreren. Jeg vil derfor påstå at mitt virkelighetssyn har røtter i interpretivismen, og det vil da påvirke denne studien.

4.2 Forskningsstrategi

Det finnes hovedsakelig to forskningsstrategier, kvantitativ og kvalitativ. Forskere som bruker en kvantitativ forskningsstrategi foretrekker gjerne å undersøke noe som kan måles (Bryman, 2016, s. 31). De bruker forhåndsbestemte spørsmål i datainnsamlinga, og de vil gjerne, om det er mulig, generalisere resultatene sine. På den andre sida finner vi den kvalitative forskninga som legger mer vekt på å forstå individers virkelighetssyn. Forskninga kjennetegnes også av at den ikke legger så stor vekt på tall (Bell & Waters, 2018, s. 24).

Bryman (2016, s. 32-33) forteller om de ulike forskningsstrategiene, deriblant at et kjennetegn på den kvalitative forskninga er ei induktiv holdning til teori. Den induktive tilnærminga til teori er at du velger teori, basert på det du har funnet ut, mens den deduktive er mer gjeldene i kvantitativ forskning, altså at du har teorien på forhånd og bruker den til å bekrefte eller avkrefte hypotesen. I mitt tilfelle har funne teori både før og etter, men jeg vil likevel plassere meg trygt innenfor kvalitative forskning. (Bryman, 2016, s. 21-23, 31-34) Jeg har valgt å studere et utvalg på 7 elever, og et så lavt antall med informanter er i tråd med et kvalitativt forskningsdesign.

4.3 Forskningsdesign

Jeg har valgt å bruke kasusstudie som design på forskinga mi. Kasusstudier kjennetegnes ved å ha et undersøkelsesopplegg der man samler inn mye info om få enheter eller få «caser». (Thagaard, 2018, s. 51). Postholm & Jacobsen (2018, s.63) sier at samlebetegnelsen «case»-studie er en samlebetegnelse, og det som er felles er man studerer en «case», altså noe som er avgrensa av tid og sted. Jeg valgte å gjennomføre et praktisk undervisningseksperiment i en R2-klasse. Man kan godt si at det var ei utforskende undervisning, der elevene jobba både med hypotese og testing av hypotesen (Steffe & Thompson, 2000, s-273-275).

Jeg valgte å bruke tre grupper med elever, og et intervju med en lærer, som jeg påstår passer til forskningsdesignet kasusstudie. Etter at jeg bestemte meg for tema modellering, bestemte jeg meg for problemstilling og hvordan jeg ellers skulle gjennomføre studien. Selve prosjektbeskrivelsen (Thagaard, 2018, s. 49-50) som jeg utarbeida finnes som vedlegg i kapittel 9.

4.4 Forskningsmetoder

4.4.1 Observasjon med filmopptak

Det finnes flere måter å observere på, du kan f.eks. stå ved siden av og skrive ned alt, eller kan du selv sitte og være en aktiv del av ei gruppe. Jeg valgte å gjøre en mellomting, å gå rundt til de forskjellige gruppene, veilede og notere. Dette samsvarer med Savin-Badan & Majors «Den balanserte deltagerrollen» (Postholm & Jacobsen 2018, s. 116). Elevene var bevisste på at jeg er til stede som forsker, og jeg gikk rundt til alle gruppene. Utfordringa mi var å være veileder og observere når jeg gikk rundt, og ikke gi svaret til elevene, eller få dem til å tenke slik jeg ville løst oppgaven.

I tillegg filma jeg oppgaveløsninga til elevene. Å ha med både lyd og bilde er en fordel, fordi man får med både ansiktsuttrykk, hva de praktisk gjør og selvfølgelig lydopptak. Elevene fikk bruke en penn hver, og alle elevene fikk utdelt forskjellig farge på pennen sin. Det var også greit å filme siden elevene gjorde en praktisk oppgave, for da fikk jeg med hva som skjedde.

4.4.2 Semistrukturert intervju med lydopptak

Intervju er en annen mye brukt datainnsamlingsstrategi. Det strukturerte intervjuet består av et sett spørsmål som stilles informanten, hverken mer eller mindre. Det ustrukturerte intervjuet sammenlignes med en samtale, men med ingen spørsmål som er utforma på forhånd. Man kan diskutere om det er et ustrukturert intervju som skjer når en informant kommer bort og sier noe til deg. Jeg har derimot valgt å benytte meg av et semistrukturert intervju. Forskeren, altså jeg, har noen spørsmål klare, og det er ikke sikkert at forskeren stiller aller spørsmålene, eller kanskje stiller noen andre spørsmål underveis eller formulerer spørsmålet litt annerledes enn det sto. Intervjuguiden fungerer derfor som en huskelapp. Slike intervjuer blir ofte gjennomført i «case»-studier (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 120-121). Jeg valgte å ta lydopptak av det semistrukturerte intervjuet med en diktafon, for å prøve å være fullt til stede under intervjuet. Hovedmålet med intervjuet var å finne ut hva læreren tenkte om modellering i fagfornyelsen og hvordan hun hadde blitt påvirka av det. Et eksempel på spørsmål i intervjuguiden er «Hvordan har du undervist elevene dine om modellering, og hvilke endringer kommer du til å gjøre med tanke på ny læreplan og ny lærebok?». Under intervjuet ble spørsmålet slik: «Sånn! Da lurer jeg litt på modellering og det og egentlig den gamle læreplanen i forhold til den nye læreplanen. Er det noen endringer du har gjort nå eller skal gjøre videre?», et godt eksempel på at intervjuguiden ikke følges til punkt og prikke! Intervjuguiden i sin heilhet finnes i delkapittel 4.10.

4.5 Utvalg av informanter

Jeg tok kontakt med R2-læreren på epost, og jeg fikk lov til å låne klassen hennes. Hun samtykka også til å delta i et semistrukturer intervju med tema modellering i Matematikk R2. Jeg hadde tidligere gjennomført et slags oppgavebasert intervju i den klassen før (Bentsen & Sørvåg, 2021), så jeg spurte denne læreren på nytt. Våren 2021 tok elevene 1T, nå har klassen blitt redusert en del, siden noen også har valgt S-matte, eller slutta etter for eksempel R1.

Gruppene ble satt tilfeldig sammen med en generator på internett på storskjerm, slik at elevene skulle se at det var heilt tilfeldig. Dette bidro også til at det ble ei mer «gjennomsnittlig» gruppe med litt forskjellige folk, i stedet for noen veldig homogene grupper. Elevene ble delt inn i grupper på to og tre stykk, for å sikre oss at færrest mulig elever skulle bli passive. Gruppe B og C bestod av to elever hver, men deres oppgavejobbing har ikke blitt analysert på grunn av studiens omfang. To andre elever i R2-klassen ble ikke med på studien, og de jobba da med oppgaver fra R2-læreren. Gruppe A besto av tre R2-elever, og har blitt valgt ut som hovedgruppe, siden de kom lengst i arbeidet med den praktiske modelleringsoppgaven. Elvene i gruppe A fikk de fiktive navnene Anders, Gry og Sofia, som er brukt i analysen i kapittel 5.

4.6 Datainnsamling

Jeg hadde jevnlig kontakt med R2-læreren fra november og fram til datainnsamlinga i begynnelsen av februar. Vi utveksla oppgaver, og møttes fysisk flere ganger sammen med veilederen min. R2-læreren hadde fortalt elevene om meg og forskningsprosjektet før jeg kom på besøk til dem en onsdag i slutten av januar. Jeg fikk se hvordan elevene jobba i klasserommet, og jeg fikk lov til å dele ut informasjonsskrivet med samtykkeerklæringa og fortelle kort om prosjektet. For å få litt oversikt, velger jeg å kalle dette for «besøksdagen».

Jeg gjennomførte datainnsamling med elevene to ulike dager, på grunn av et annet arrangement på skolen som kolliderte med den planlagte datainnsamlinga. Jeg fikk låne et rom forma som bokstaven L, som gjorde det mulig å spre elevene bedre, for å få bedre lydkvalitet. På fredagen, i uka etter jeg var på besøk, fikk jeg gjennomføre første del av datainnsamlinga, «Oppgave 3: Hull i flaska». Det ble satt av 45 minutter og ikke 90 minutter på grunn av arrangementet, så jeg og R2-læreren valgte da å gjennomføre det praktiske undervisningseksperimentet. Det resulterte i at jeg holdt igjen de andre oppgavene til uka etter. Denne fredagen vil jeg kalle «eksperimentdagen». Oppgavene presenteres i kapittel 4.9.

På tirsdagen i uka etterpå skulle jeg gjennomføre siste del som var planlagt å ta 45 minutter, men oppgavene ble for vanskelige for elevene, så det tok faktisk 90 minutter. Disse to oppgavene «Oppgave 2 Svømmebasseng» og «Oppgave 1 Rådyr» ble ikke analysert på grunn av studiens omfang. Siden man kan finne denne typen oppgaver i ei lærebok, velger jeg å kalle tirsdagen for «teoridagen».

R2-læreren foreslo å snu om på rekkefølgen, fordi hun meinte det ville være best for meg og elevene. Da gjorde elevene først oppgave 3, så oppgave 2, og så oppgave 1.

På torsdagen fikk jeg gjennomføre det semistrukturerte intervjuet med R2-læreren. Her brukte vi et møterom på lærerværelset. Intervjuet tok i underkant av 20 minutter, som var akkurat som planlagt. Jeg vil videre omtale denne dagen som «intervjudagen».

4.7 Utforming av oppgavene

Veilederen min ville ha matematikk på så «høyt nivå» som mulig i denne studien, og han foreslo å se på nedkjøling av en kaffikopp og ellers differensialligninger. Han tipsa meg også om boka «Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra». Der fant jeg en del oppgaver som jeg foreslo å bruke. En av oppgavene jeg kunne tenke meg å bruke handla om kyr på beite, rett og slett hvor mange døgn noen kyr kunne være på et jorde før det ble nedbeita. (Hall & Lingefjärd, 2017, s. 7-9). Jeg foreslo også en oppgave om å designe et oppbevaringsskap, med oversikt over kostnader og krav til skapet (Hall & Lingefjärd, 2017, s- 31-34. Etter å ha diskutert litt oppgaver, fikk jeg til slutt oppgavene av R2-læreren, og jeg var med og reviderte dem. R2-læreren meinte oppgavene passa til klassen sin, og hun meinte også at disse oppgavene skulle gi nok data med tanke på modelleringssyklusen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226). Disse oppgavene godkjente veilederen min rett før datainnsamlinga.

R2-læreren forslo også at vi kunne se på ryktespredning, men jeg skjønte ikke heilt hvordan vi skulle gjennomføre det, så jeg valgte å gå for det praktiske undervisningseksperiment «Oppgave 3 Hull i flaksa» som læreren også foreslo. En masteroppgave er absolutt plassen der man kan prøve noe nytt for å forske på det! Ellers ble vi enige om å bruke en oppgave om et svømmebasseng og en oppgave om rådyrjakt. Vi hadde også en oppgave på lur om samspillet mellom harer og rever. Disse presenteres i kapittel 4.9. Oppgavene ble pilotert blant venner som hadde gjennomført Matematikk R2 tidligere. Under piloteringa la jeg merke til to forskjellige løsninger på «Oppgave 3 Hull i flaksa» når det gjaldt den praktiske gjennomføringa. Når jeg jobba med å sette sammen masteroppgaven nærme innleveringsfristen la jeg merke til at lignende oppgaver som de elevene fikk, finnes i modelleringsboka (Hall & Lingefjärd, 2017, s. 88-93, 108, 274-284, 369-373).
Jeg utforma også noen hjelpespørsmål. Hensikten med dem var at jeg og læreren hadde ha samme utgangspunkt for oppfølgingsspørsmål når vi gikk rundt og veileda elevene. Disse ligger vedlagt i kapittel 9. Videre nå vil jeg presentere de oppgavene som elevene fikk samt bonusoppgaven som jeg hadde på lur. Siden undervisningseksperimentet «Oppgave 3 Hull i flaska» ble mitt analysegrunnlag, så presenterer jeg Torricellis lov først, siden det er grunnlaget for undervisningseksperimentet.

4.8 Torricellis lov

Den praktiske oppgaven som elevene gjorde under datainnsamlinga handler om at de har et litermål som er lekk i bunnen, og de skal finne et uttrykk for den deriverte til vannstanden. I den forbindelse introduserer læreren Torricellis lov for hovedgruppa, og Torricellis lov er egentlig «fasiten» på oppgaven. Torricellis lov blir presentert slik i den nest nyeste læreboka (Heir et al, 2016, s. 441): «Vannstanden avtar med en fart som er proporsjonal med kvadratroten av vannstanden», med følgende formel:

$$y' = -k \cdot \sqrt{y}\,, \quad k > 0$$

I dette tilfellet er k-en et positiv tall, men tidligere i boka (s. 328) blir vannstanden beskrevet som h (t) meter, med hullet som nullnivå. Der t er tida som går etter at vannet begynner å renne ut. Der står det bare at konstanten er k, altså må man selv tenke at konstanten må være et negativ tall, eller ha minus foran konstanten (Heir et al, 2016, s. 328). Torricellis lov fungerte som et bakteppe for den åpne oppgaven som elevene fikk. Elevene visste ikke om Torricellis lov fra før, og de blir heller ikke introdusert for den før læreren nevner det for dem etter eksperimentet er gjort.

4.9 Oppgavene elevene fikk

4.9.1 Oppgave 3: Hull i flaska

Denne oppgaven ble gjennomført på «eksperimentdagen». Dette undervisningseksperimentet utgjør store deler av analysen min. Oppgaven så slik ut:

Her skal dere gjennomføre et praktisk eksperiment. Dere skal se på forholdet mellom vannstanden i ei flaske og tida som går, når det er bort et lite hull i flaska, like over bunnen. Skriv først ned et uttrykk for den deriverte til vannstanden. Dette er en slags hypotese. Test eksperimentet så ut i praksis og prøv å rett opp uttrykket for den deriverte.

HYPOTESE FOR DEN DERIVERTE:

NYTT FORSLAG FOR DEN DERIVERTE:

4.9.2 Oppgave 2: Svømmebasseng

R2-læreren hadde funnet denne oppgaven fra et kompendium (Borge, I. C., 2008, s. 113-114, 158 -159). Denne oppgaven jobba elevene med første halvdel av «teoridagen». Elevens arbeid med denne oppgave ble ikke analysert på grunn av studiens omfang. Slik var oppgaven:

Et svømmebasseng er fylt med 1 000 000 liter badevann som inneholder 0,004% klor (eller rettere sagt et klorderivat). Eieren synes klorprosenten er for høy og begynner derfor å tapp ut 50 000 liter per dag, samtidig som bassenget fylles opp med 50 000 liter per dag med nytt badevann som kun inneholder 0,001%.

Hvor lang tid tar det før konsentrasjonen er under 0,003%?

4.9.3 Oppgave 1: Rådyr

Denne oppgaven jobba elevene med siste halvdel av «teoridagen». Elevens arbeid med denne oppgave ble ikke analysert på grunn av studiens omfang. Oppgaven var slik:

Rådyrpopulasjonen i et område er på et gitt tidspunkt på 800 dyr. Den maksimale vekstraten er 0,22 per år. Området har en bæreevne på 1000 dyr.

a) Hvordan vil rådyrpopulasjonen endre seg de neste 50 årene?

Man ønsker at rådyrpopulasjonen skal stabilisere seg på rundt 600 dyr, og innfører derfor jakt på rådyr i området. Det bestemmes at antall dyr som skytes til enhver tid skal være en gitt prosent av antall rådyr i populasjonen.

b) Hva bør jaktraten være?

4.9.4 Bonusoppgave om harebestanden

Denne oppgaven ble ikke brukt, og da heller ikke analysert:
For en harebestand h og en revebestand r har vi fått følgende ligningssett. Beskriv hvordan disse to bestandene utvikler seg.

$$\frac{dh}{dt} = 3h - 1{,}4hr$$

$$\frac{dr}{dt} = -r + 0{,}8hr$$

4.10 Intervjuguide

Etter at datainnsamlinga med elevene var ferdig, møtte jeg R2-læreren noen dager seinere til et semistrukturert intervju. Antatt tid var 20 minutter, noe som stemte veldig godt. Målet var å finne ut hvordan hun så på modellering i undervisninga. Følgende spørsmål utgjorde min intervjuguide:

- Hvilken rolle synes har modellering nå i lys av den nye læreplanen?
- Hvordan var det før den nye læreplanen kom?
- Hvorfor trur du at modellering har fått et eget kapittel i den nye læreboka til Aschehoug?
- Hvordan har du undervist elevene dine om modellering, og hvilke endringer kommer du i så fall til å gjøre med tanke på ny læreplan og ny lærebok?
- Læreboka viser et bilde av en modelleringssyklus på begynnelsen av kapittelet, og det finnes andre sykluser som har 7 steg eller et annet antall steg. Kommer du til å bruke noen av dem modellene i undervisninga?
- Hva synes du om at modelleringa er den del av den nye læreplanen?

4.11 Analytisk tilnærming

Målet med studien er å se hvordan et utvalg R2-elever beveger seg i modelleringssyklusen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226). Siden elevene bruker digitale hjelpemidler passer det også å analysere etter den utvidede modelleringssyklusen (Greefrath, 2011, s. 304). Disse to modelleringssyklusene ble kapittel 2.2, og disse utgjør analyseverktøyet. Jeg valgte å filme oppgavejobbinga, slik at jeg kunne få et større datagrunnlag. Det var vanskelig for meg å plukke ut det viktigste fra filmen på 40 minutter, så det endte med at jeg transkriberte heile filmen. Annen kommunikasjon og handlinger som elevene gjorde, ble skrevet i parentes, sammen med transkripsjonen. Så analyserte jeg transkripsjonen, fra begynnelse til slutt. Analysen er kronologisk, og den har fått underoverskrifter underveis, for å tydeliggjøre hva det handler om i det tidsrommet. Eksempler på denne oppdelinga er «oppstart» og «Hva står x-en for?».

Jeg samla også inn arkene som elevene fikk utdelt, og jeg fikk tilsendt det de gjorde digitalt. Jeg prøvde også ut skjermopptaksprogrammet Camtasia, og ut fra egen testing så tok det lengre tid å laste det opp på egna plass enn å ta selve opptaket, så det ble derfor utelukka. Jeg kunne ikke ta beslag i PC-en deres over lengre tid, for elevene skulle videre i andre timer. Ulempen her var at filmen var ikke like skarp når det gjaldt det elevene skreiv på arkene eller det som elevene skreiv på PC-en. Det har derfor vært vanskelig å finne ut av hva elevene skreiv i det de sa en bestemt kommentar. Siden elevene brukte nesten 40 minutter på det praktiske undervisningseksperimentet, vil jeg kun kommentere enkelte av de 620 utsagnene som det ble.

Når det gjelder intervjuet med læreren, så ble det transkribert. Deretter ble det analysert tematisk etter spørsmålene i intervjuguiden, men noen tematiske overskrifter underveis. Sammenfatta tok analysen sikte på å finne ut noe om disse tre hovedpunktene:

1) Lærerens forståelse av modellering og dens betydning i matte-faget
2) Lærerens syn på elevenes arbeid i møtet med modelleringsoppgaver
3) Lærerens forståelse av modellering og hennes påvirkning på elevenes arbeid.

4.12 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet blir av Thagaard (2018, s. 19, 181-182, 187-188) kobla opp til spørsmålet om forskningas pålitelighet, altså om en annen forsker vil komme fram til samme resultater ved å bruke samme metode. Det som er det utfordrende her, er at man er i kontakt med mennesker og en annen forsker vil ikke nødvendigvis samhandle med læreren og elvene på nøyaktig samme måte som meg, dette kan gjøre at reliabiliteten blir noe svakere, men likevel vil jeg påstå at reliabiliteten er nokså god, så lenge forskeren gjennomfører det på omtrent samme tid i skoleåret, når elevene har vært gjennom samme pensum. Siden jeg har valgt ei lita gruppe, av et lite utvalg på syv elever, så vil man mest sannsynlig ikke komme fram 100% samme løsningsmetode og resultat, da læreren har metodefrihet, og ingen elever er like, sånn er det i kvalitativ forskning!

Validiteten handler om forskningas gyldighet (Thagaard, 2018, s. 19). Kommer vi fram til et resultat som er gyldig? Jeg hadde et ønske om at læreren skulle svare dirkete på spørsmålene i intervjuet, og at det var veldig tydelig hvordan elevene jobba, slik at det var enkelt å plassere «dem» i Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin modelleringssyklus. Da hadde det blitt mer deskriptiv og mindre tolkning. Selv om jeg har måtte tolke og forklare litt hva læreren skulle fram til og hvilket steg elevene er i nå, så påstår jeg likevel at validiteten er god nok. Resultatet fra datainnsamlinga med elevene kan bekrefte at ulike studier kan bekrefte hverandre. (Thagaard, 2018, s. 181). I dette tilfellet sammenlignes mine resultater med annen forskning, som kan leses i diskusjonskapittelet.

Selv om det er vanskelig å få det 100 % likt hvis man gjør det en gang til i en annen klasse, så skal en være forsiktig med å bruke ordet generalisere, Thagaard (2018, s. 19) bruker heller ordet overførbarhet. Jeg vil påstå at tendensene i denne forskninga vil også kunne opptre i andre lignende forskningsstudier, for eksempel ved at elevene er innom ulike steg i modelleringssyklusen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226). En framtidig forsker kan også synes det er vanskelig å identifisere de ulike stegene i en slik utradisjonell oppgave, og forskeren vil kanskje se at elevene strever med å vite om de skal jobb med kontinuerlige funksjoner og når de jobber med diskontinuerlige funksjoner eller rekker. Siden dette er en mer utradisjonell oppgave, så vil nok en annen forsker også se at elevene lurer på hvor de skal bore og åssen de skal utføre målingene sine.

4.13 Etiske betraktninger

Her kommer man ikke unna å nevne personvern og NSD. Siden jeg samler inn personinformasjon som deres signatur på samtykkeskjemaet, og tar video av oppgavejobbinga, så var det nødvendig å søke NSD, som nå heter Sikt, om tillatelse. Dette gikk heldigvis i orden. Filmene samt lydopptaket av læreren ble lagra i tråd med Universitetet i Agder sine retningslinjer i ei passordbeskyttet OneDrive-sky. Dette vil bli sletta ved prosjektslutt.

Det var to elever i klassen som ikke var med i studien. Disse var selvsagt invitert til å delta i studien. Elevene hadde et eget opplegg fra læreren.

Jeg må innrømme at jeg forsnakka meg en gang til en kamerat, da jeg fortalte om uka mi og at på fredag skal jeg til «stedsnavn». Jeg nevnte ikke skolens fulle navn, men navnet på stedet. Jeg ba han tie still om det, med en gang etter det skjedde, noe han bekrefta han vil holde tett om. I påvente av tilbakemelding, fra veilederen min, på oppgavene som skulle gjennomføres, ble datainnsamlinga utsatt ei ule. Jeg kom derfor i kameramangel, og måtte låne et kamera fra en samme kamerat som jeg forsnakka meg til. Jeg fikk litt hjelp av han med kameraet, noe som resulterte i at han fikk sett framsida av videoen av elevene. Dette burde absolutt ikke ha skjedd, noe jeg er lei meg for.

Jeg har ellers vært nøye med å ikke fortelle noe til noen med hvor jeg har gjennomført datainnsamlinga. Det er kun jeg som har sett filmene, og veilederen har kun fått en fysisk kopi av det skriftlige arbeidet elevene gjorde. Han fikk ikke rede på hvem som hadde skrevet hva. Jeg er likevel ikke garantert at informantene i prosjektet forteller om sin deltagelse til sin omgangskrets, det er utenfor min kontroll.

Det står i informasjonsbrevet med samtykkeskjemaet til elevene at det skulle være en spørreundersøkelse. Den utgikk. Jeg valgte å skrive ut de to sidene i informasjonsbrevet ensidig, slik jeg jeg klippa av samtykkeerklæringa, og lot informantene beholde resten av informasjonsskrivet. Det er også en ting til jeg angrer litt på, og det er at det ikke var en rubrikk til, om filming, i samtykkeerklæringa til R2-læreren. Hun kryssa av på å delta i intervju, men jeg ser i etterkant at jeg burde gitt henne mer informasjon om at hun kom til å bli filma under elevenes oppgavejobbing da hun gikk rundt og veileda elevene. Jeg informerte henne om denne glippen, og hun svarte ved å tilgi meg, og R2-læreren sa at hun var forberedt på at hun kom til å komme på film når hun gikk rundt til elevene som ble filma. Informasjonsbrevene med samtykkeskjema finnes i kapittel 9. Samtykkeskjemaene med signatur er naturligvis på en hemmelig plass, krypteringsnøkkelen er på et annet hemmelig sted, og ingen av dem vises til noen. Disse skal brennes ved studiens slutt.

Da jeg tok kontakt med læreren for å høre om jeg kunne gjennomføre studien, ble jeg også bedt om å presentere masteren min, når den er ferdig, for realfagslærerne på skolen. Jeg svarte at det kunne jeg, og jeg vet at denne læreren har snakka med kollegaer om at hennes klasse var med på et forskningsprosjekt med meg. Dette har jeg hørt fra en kollega av R2-læreren. Jeg er derfor nødt til å trø veldig forsiktig, og jeg fortalte derfor til elevene, at jeg ønsker å fortelle resultatet av studien for realfagslærerne på skolen deres. Jeg fortalte at jeg kom til å bruke fiktive navn på elevene, hvis det er et sitat eller noe spesielt jeg vil trekke fram. Jeg ba elevene ta kontakt med meg, hvis det skulle bli for mye for dem. Uansett under den kommende presentasjonen så vil jeg kun nevne at R2-læreren inviterte meg til å fortelle om en studie jeg gjennomførte på en skole. Jeg vil nevne at jeg ikke har lov til å si navnet på elevene eller skolen på grunn av personvern. Jeg regner med at mange av realfaglærerne der vet at jeg har hatt ei datainnsamling på skolen deres, så jeg må være veldig bevist personvernet til både skolen og informantene i studien, selv om de skulle vite det.

På slutten av masterarbeidet la jeg også merke at i infoskrivet til elevene (9.4) stod det gruppeintervju, det ble observasjon ved filming, i stedet for at jeg intervjua elevene. Det var også nevnt en dobbelttime, men tidsbruken ble 45 minutter mer.

5 Analyse

Analysekapittelet er todelt. Jeg vil først gå gjennom elevene sitt arbeid med oppgaven «Hull i flaska» (5.1). Elevarbeidet analyseres etter syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226) og også nistegsmodellen til Greefrath (2011, s. 302). Etterpå blir det semistrukturerte intervjuet med R2-læreren tematisk analysert (5.2).

5.1 Analyse av elevene sitt arbeid med «Hull i flaska»

Informanten «Anders» satt dessverre litt utenfor området som ble filma, så derfor er det veldig få beskrivelser av han sitt kroppsspråk. Han sa også veldig lite gjennom oppgavejobbinga, noe som lettere kan skje når det blir tre elever på gruppa i stedet for to. Det er også en tendens til at «Sofia» vil styre og være gruppas ansikt utad. «Gry» er gruppas tredje informant. Kameraet filma elevene og det praktiske arbeidet, men det som i sanntid ble skrevet og tegnet på ark eller på PC var vanskelig eller umulig å lese ut fra videoen. Hovedfokuset i analysen av elevarbeidet er å finne ut hvordan disse R2-elevene løser modelleringsoppgaver.

5.1.1 Oppstart

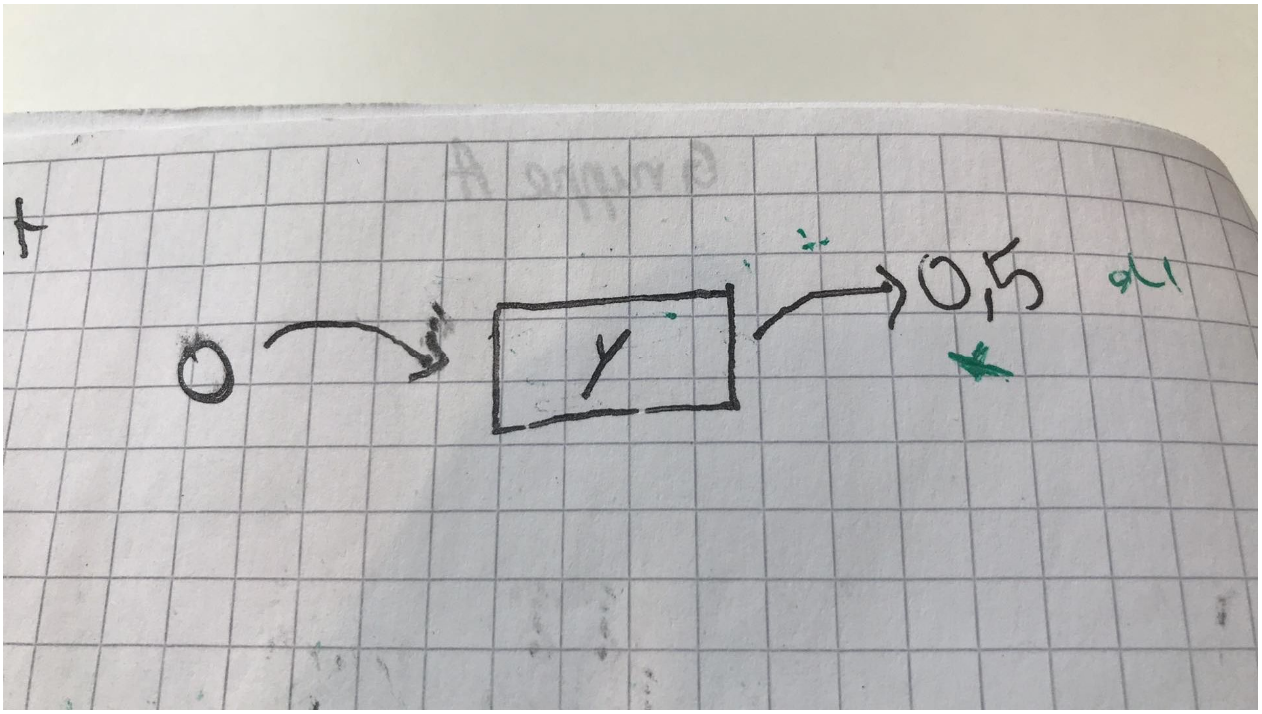
Som vi ser i utdrag x, så begynner Sofia å lese oppgaven før elevene drar inn y for vannstanden og diskuterer med seg selv om endringa av vannstanden:

Utdrag 1: Oppstart med diskusjon om mengden som renner ut.

Utsagn-nummer	Person	Utsagn/Aktivitet
1	Sofia	*Opplesning av oppgaven*
2	Anders, Gry og Sofia	*De sier at de vil ha et ark, river ut et fra ei kladdebok.*
3	Sofia	Da har vi det, vi har jobba med i matten, tenker jeg. Det her med $y =$ og så bruker man den vannstanden.
4	Gry	Her har vi en beholder her (tegner) og dette går ut, og dette kommer inn.
5	Sofia	Men det er ingenting som kommer inn?
6	Gry	Og ut, var det ikke, nei vent. (Prater samtidig som Sofia) Så det kommer ingenting inn
7	Sofia	Ja, og så tenker jeg sånn som vi jobba med tidligere, så har det vært sånn at det som går ut, det varierer av det som er inni. Men her (holder opp litermålet), vil ikke samme mengde gå ut heile tida, det vil jo ikke variere av noe som helst? Eller vil det renne ut mer, jo mye mer det er inni? Det vil jo ikke det?
8	Gry	Men, hvis du har en full flaske
9	Sofia	Ja, så renner det fortere

Sofia starta med å lese oppgaven, før Gry tegner opp en veldig forenkla modell. Hadde det vært en typisk situasjonsmodell hadde jeg forventa ei tegning av et litermål med en stråle ut, og et kar under som tar imot vannet. En reell modell ville nok hatt formen til et litermål, og et hull, mens her er det blitt forenkla enda mer til en firkant med y inni, og ei pil som peker mot firkanten og ei pil som peker vekk fra firkantene. Gry har i høyeste grad forenkla situasjonen, noe som er steg 1, og muligens gått rett på den reelle eller modellen, altså at steg 1 og 2 og kanskje 3 har skjedd samtidig. Blum og Leiß (2007, s. 225-226) sitt eksempel har mer tall i den reelle modellen om en kabelbane, mens her står det tomt med bare en tom firkant, med ei pil inn og ei pil ut. Elevene skal jo bare komme med en hypotese, så det er begrensa hvor mye beregninger og valideringer som de gjør for en hypotese. Sofia henviser til hva de gjorde tidligere, og det kan virke som hun henvise til en oppgave om en vanntank. Der ble det tilsatt en saltoppløsning med konstant fart, og det ble tappa ut like mye væske (Borge et al., 2022, s. 287) Merk at oppgaven her i datainnsamlinga har ingenting med konsentrasjon å gjøre, og at det bare renner vann ut. Det Sofia sier i utsagn 9 er delvis riktig, for hvis du har ei full flaske så renner det fortere ut i begynnelsen når målebegeret er fullt.

Dette er tegninga som Gry tegna, merk at tallene 0 og 0,5 ikke føres på før utsagn 82 og 86:



Figur 7: Gry sin modell av lekk beholder

5.1.2. Hva står x for?

Etter å ha prata litt om prosent, som ikke hjalp dem, så begynte elevene å prate om x og y:

Utdrag 2: Det som kommer ut heile tida

22	Sofia	Ja. Men kan vi ikke bruke et uttrykk der vi har en funksjon som defineres av tid, tid som er opphøyd … (utydelig)? Eller må vi bruke sånn som vi gjorde
23	Gry	Det skal vi finne ut av selv (etterligner lærer eller student?)
24	Anders	(Ler litt)
25	Sofia	Forslag da, da har vi å mye er det som kommer ut heile tida, det tenker jeg. (diller med pennen i lufta)
26	Gry	Det kan være x
27	Sofia	x er det som kommer ut heile tida?
28	Anders	Ja
29	Sofia	Da vil jo y-en være $y - x$ (skriver ned $y - x$) heile tida. Vil han ikke det?

30	Anders	Mm
31	Gry	Ja, men den vil ikke være den samme y-en heile tida. (peker på figuren?)

Elevene sliter med å få et endelig uttrykk ned på arket. Sofia etterlyser en funksjon i utsagn 22, noe som kan sies å være delvis riktig, da elevene har vært vant til å ha et uttrykk som $y' = a * y + b$, der endringa er avhengig av det inni, og en eller annen konstant. For å presisere, så kommer det ikke inn noe, men det renner bare ut. Så i dette tilfellet faller konstantleddet b bort. Sofia kaller det som renner ut for x. Vi kan si at vannstanden er $y - x$, altså gammel vannstand minus det som renner ut. Da vil y-en heile tida få ny verdi, etter det har gått en tidsenhet. Dette kan tyde på at elevene prøver å validere modellen $y = y - x$. Da burde de heller bruke at $y_{ny} = y_{gammel} - x$. Skal vi følge syvstegsmodellen, så blir jo steg 3 matematisering det neste. Selv om de ikke har funnet fram til en formel eller et uttrykk for den deriverte riktig enda, tolker jeg dette som matematisering, de forsøker å bruke det de «vet» og prøver å få en «formel» som de kan regne med. Likevel så virker det som om elevene prøver å validere det de har tenkt, som egentlig er steg 6 og er i den virkelige verden.

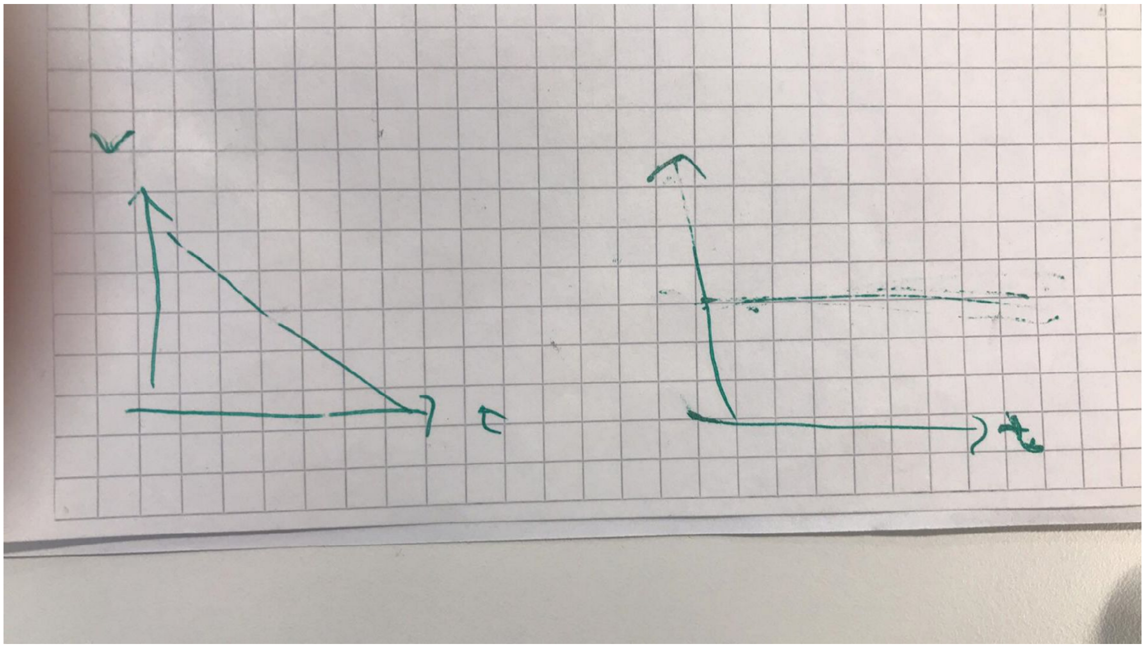
5.1.3 Volum, endring og tid

Gry sier at endringa er $y - x$, og Sofia bygge videre på det Gry sier, og de begynner å lure på åssen de skal få inn tida.

Utdrag 3: Må vi ha tida da?

35	Gry	Endringa er $y - x$
36	Sofia	Endringa av y er lik y minus x (skriver: $y = y - x$) (skriver ned, Δy = foran $y - x$). Og så må vi ha et eller annet av tid inni her da. Sånn at æh.
37	Gry	Æh, ja … (utydelig) finne for den deriverte? Må vi ha tida da?
38	Anders	M, nei, men (utydelig)
39	Sofia	Ja, men se på den deriverte av funksjonen (utydelig). (Hun tegner en synkende lineær graf, og en vannrett graf i hvert sitt koordinatsystem. Vannstanden mot tida, og den deriverte til vannstanden mot tida) Sånn, så pleier man jo, ikke sant, så først så har vi vannstanden da,
40	Gry	Mm
41	Sofia	Og volum og tid.
42	Anders	Mm
43	Sofia	Og det vil jo synke, er dere enige at det er lineært? (Peker på arket med pennen)
44	Gry	(nikker)

Sofia sin påstand i utsagn 36, $y = y - x$, er kun gyldig for $x = 0$, og uttrykkes bedre slik med $y_{ny} = y_{gammel} - x$. Det hun så retter på når retter opp til $\Delta y = y - x$, blir også galt, for etter deres tankegang burde Δy = x. Eleven holder fortsatt på å matematisere, noe som i denne oppgaven visste seg å være vanskeligere enn forventa. Likevel så klarer Sofia å tegne et par gode grafer som viser hva de meiner, nemlig at vannstanden synker lineært når det er et hull i målebegeret, farten ut er den samme heile tida:



Figur 8: Gry sine grafer over vannstanden og den deriverte til vannstanden.

Det ser bra ut, selv om det er tegnet litt kjapt. Grafen til den deriverte til vannstanden har dessverre blitt feil, den skulle vært konstant negativ, for ellers hadde ikke grafen til venstre sunket. Gry har også skrevet v på y-aksen og t for tida på x-aksen. Siden elevene bare skal finne en hypotese, er det ikke noe særlig som skal beregnes, og da kan man lure på om dette er «svaret», altså hypotesen, eller om dette fortsatt er steg 3 matematisering. Merk at oppgaven ikke spesifiserer hvordan hypotesen skal være, da er det mer åpent for elevene hvordan de skal svare. Elevene jobber videre med $y - x$ og sier det er det som går ut, men det er faktisk det som er igjen. Elevene klarer altså ikke å skrive ned det de sier og mener.

5.1.4 Oppklaring i y og x

For å hjelpe elevene i å få klarhet i det de sa og skeiv, ba jeg dem prøve å komme med noen talleksempler.

Utdrag 4: y_1 , y_2 og y_3

82	Gry	Hvis det ikke kommer noen ting inn (skriver på 0, på «inn-pila» i figuren).
83	Sofia	Ja
84	Gry	Så er det ikke noe vi trenger å tenke på.
85	Sofia	Så hvis heile tida, å mye skal vi si går ut heile tida?
86	Gry	0,5
87	Sofia	Ja, 0,5 hva? Desiliter? (Gry og Sofia skriver på både 0,5 og dl over ut-pila på tegninga.)
88	Gry	Liter. Eller jeg vet ikke. Desiliter?
89	Sofia	Jeg trur desiliter. (skriver). Det er ikke så farlig uansett.
90	Observatør	Mm.
91	Sofia	Og så i beholderen, hvor mye skal vi ha fra før av da? Y-start, y_1 da? Den kan vi si er 1 liter, 10 desiliter (skriver 10 dl på arket)

92	Gry	Mm
93	Sofia	Så da blir jo y_2 (skriver), da vil jo der være 9,5.
94	Gry	Mm
95	Observatør	Kan dere ta neste steg også for meg?
96	Sofia	y_3 er lik 9 desiliter (skriver y_3 = 9)
97	Observatør	Så der prøver å fortelle at for hvert sekund eller minutt eller hver tidsenhet så renner det ut ½ desiliter.
98	Sofia	Ja, det var vårt eksempel der.

Her er det nok en gang tydelig at elevene tenker at det renner ut jevnt, altså like mye for hver tidsenhet. Det ser fortsatt ut som vi holder oss til steg 3 matematisering, men likevel og litt validering som er steg 6. Jeg fortsetter med å spørre dem ut om det de skreiv heilt i begynnelsen:

Utdrag 5: Opprydning

110	Observatør	Men, hvis vi er heilt i begynnelsen der (peker på $y - x$ og $y - x - x$), så vil jo den y-en, så vil den være ti desiliter minus x-en det var det som gikk ut, som var en, ½. Da vil endringa i y være 9,5! (peker fortsatt). Ser dere det?
111	Gry	Mm
112	Sofia	Ja
113	Observatør	Mens der vil endringa i y-en plutselig vært 9? For dette her var jo litt
114	Sofia	(Utydelig). Ja, det blir jo feil å si at endringa er det, men det er heller det som er i beholderen som er det.
115	Observatør	Det her dere rett i.
116	Sofia	Ja
117	Observatør	Det som er igjen i beholderen som
118	Gry	(Stryker over Δy)
119	Sofia	Ja
120	Observatør	Ja
121	Sofia	Men y er lik det da (skriver på en y på linja under). Og endringa det blir ja, endringa er jo x-en. Blir det ikke det? (skriver x på ut-pila av figuren fra begynnelsen)

Her får vi klarna opp i det de skriv i sta. Sofia påstår så at endringa blir x-en. Ja, det er jo det som renner ut som utgjør endringa, og den vil alltid være negativ her, så lenge vi sier at vannstanden er et positivt tall. Litt seinere så skriver Gry at: $\Delta y = y' = 0{,}5$ og påstår at det renner like mye ut heile tida. Jeg meiner fortsatt vi er på matematiseringa.

5.1.5 Elevenes datainnsamling

Etter hvert skulle elevene teste hypotesen sin. Etter de borte hull i litermålet, så lurer Gry på hvor mange sekunder de skal måle for. Det virker ut fra samtalen at hun meinte hyppigheten på målingene.

Utdrag 6: Hvert femte eller hvert andre sekund?

194	Sofia	Er det ikke hvert femte? At det
195	Gry	Hvert femte! Jeg trur det er litt mye.
196	Sofia	Var det litt mye? Jeg synes at det var litt vanskelig.

197	Anders	Ja
198	Sofia	Hvis vi filmer da, så har vi lettere å ha litt oversikt, kanskje.
199	Gry	Jeg trur ikke det er så lurt. Jeg trur vi burde prøve å.
200	Sofia	Ja, ja, men finner vi (Holder beholderen og vifter med hånda)
201	Gry	Men skal vi prøve hvert andre? (drar på andre)
202	Sofia	Ja (Heller flaska så det nesten renner ned i beholderen.
203	Anders	Utydelig
204	Gry	Men du må vente. 0 sekund da er det 500 mL. (Sofia heller i samtidig, holder for hullet i beholderen og setter flaksa tilbake på bordet.) Og så 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, (utydelig), (lager en tabell på arket) Vil du skrive ml da? (Utydelig) Du? (Ser på den tomme beholderen og skyver fram mobilen)

Sofia foreslår å måle hvert femte sekund, mens Gry foreslår så å prøve hvert andre sekund. Jo oftere man måler, jo mer nøyaktig vil grafen bli. Likevel så forslår Gry litt seinere at man kan prøve hvert fjerde sekund hvis det ikke går.

Utdrag 7: Vi må gjøre det igjen!

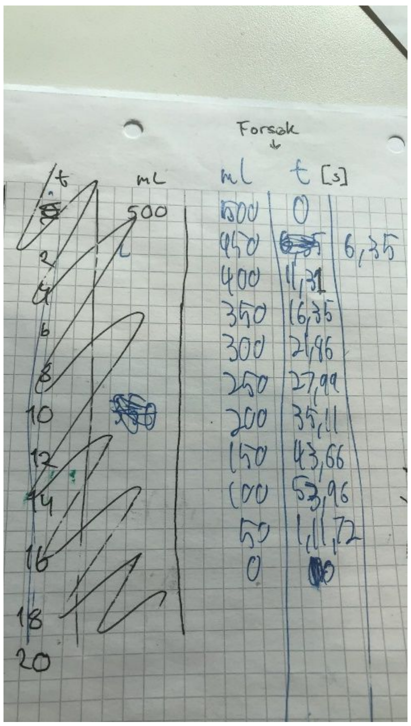
250	Gry	Klar, ferdig, gå. (Utydelig). (Vannet renner ut av hullet heilt i midten av bunnen) En halv på fire, oi det var vanskelig
251	Anders	(Utydelig)
252	Sofia	400
253	Gry	Å tid er det (utydelig).
254	Sofia	350 (Anders noterer ned tallene.)
255	Gry	Ja, du ser? Nå
256	Sofia	3
257	Gry	Nå, æh
258	Anders	(Mumler)
259	Gry	Hvis ikke kan vi bare gjøre dette igjen.
260	Sofia	Vi kan ha, øy! Kan vi ikke gjør det igjen?
261	Anders	Ja, det gikk litt fort.
262	Sofia	Så tar vi heller. Vi tar heller i stedet for å måle annen hvert sekund, så tar vi heller
263	Gry	Hvert femte
264	Sofia	Nei. Så tar vi heller og ser. Ok, og når er tida det, når er tida det, når er tida det? (peker på «målestrekene» på målebegeret hun holder i hånda, fortsatt over den blå boksen.)

Dette gikk litt for fort for elevene å måle av hvert andre sekund, og det er vanskelig å vite nøyaktig hvor mye som er igjen, når det ligger mellom for eksempel 450mL og 500 mL. Det er bare markert med streker for hver 50. mL. Sofia sier til slutt at «når er tida det», og peker på en strek på litermålet. Elevgruppa gjør så et nytt forsøk med å lese av tida i for hver 50. mL. Anders lager så en ny tabell de kan fylle inn i, når de skal gjøre nye målinger.

Elevene fikk ned en mer fornuftig oversikt denne ganga, ved hjelp av stoppeklokka på mobilen. Når det gjelder modelleringssyklusen, så klarer jeg ikke å si hvor de er i syklusen når det gjelder praktisk arbeid. Det elevene holder på med er å lese av målinger for så å bruke det til å lage en modell for så å komme med et nytt forslag til den deriverte. Dette praktiske arbeidet er jeg i tvil hva jeg vil kategorisere det, kanskje matematisering? De holder jo på å lage en matematisk modell, altså tabell.

5.1.6 Elevenes reaksjoner etter den nye målinga

Elevene gjør målinga på nytt, og Sofia kommenterer at det renner mindre på slutten. Hun meiner at det er fordi at alt vannet ikke kommer over. Det hun kanskje mener, er at målebegeret er litt høyere i midten enn rundt kantene. Så skribler Gry over den første tabellen:



Figur 9: Ny tabell ved siden av den gamle

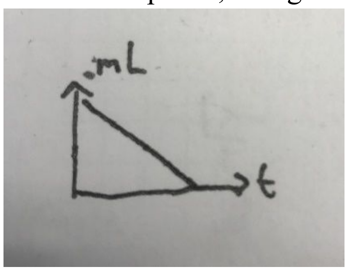
Sofia fører så målingene inn i GeoGebra, der hun bruker regresjonsanalyse. Her er det tydelig bruk av den utvidede modelleringssyklusen (Greefrath, 2011, s. 302), selv om elevene nok ikke tenker over modelleringssyklus i det heile tatt.

Utdrag 8: En lineær graf som flater ut?

339	Sofia	Der flater den seg ut, men her er han jo lineær (peker på grafen på PC-en), men så flater han seg ut på slutten der.
340	Gry	Mm (begynner å tegne en graf på utdelt ark).
341	Sofia	Men det er jo, hvis det hadde vært like mye liksom vannet har, (løfter opp og setter ned målebegerne), over heile tida, så ville det jo vært, hvis det hadde vært på en måte, hva heter det? En sil, nei ikke sil, en sånn, æh, greie som går sånn (lager en rund ting med hendene), trakt! Da ville det vært
342	Anders	Mhm (Gry er ferdig med å tegne grafen i forbindelse med «hypotese for den deriverte» på utdelt ark).

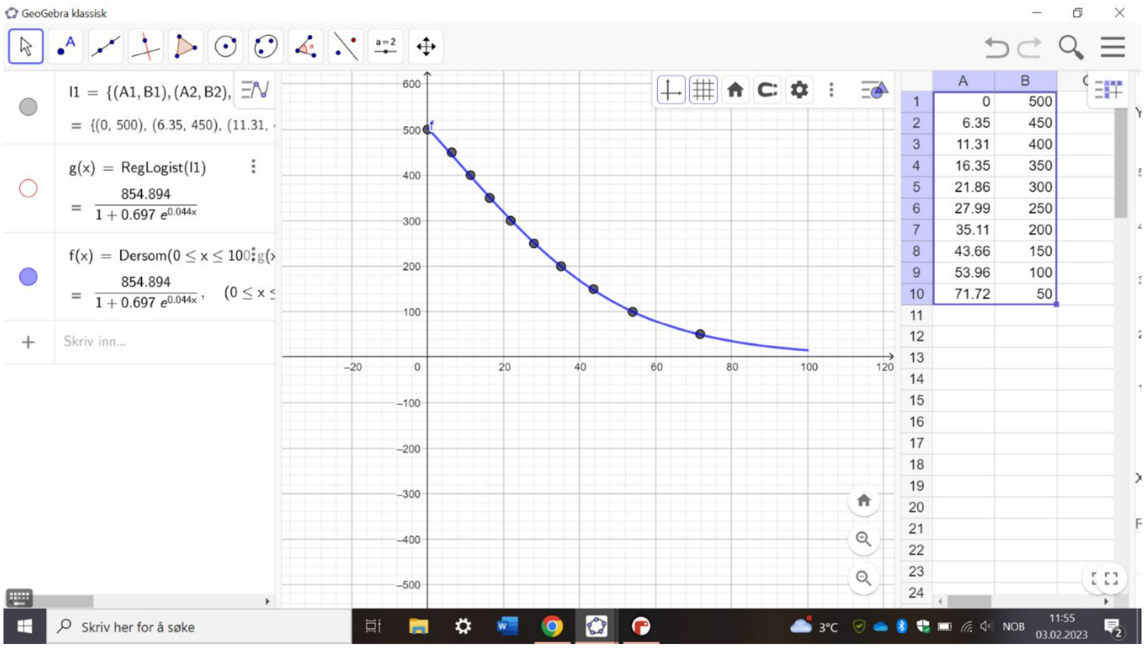
343	Sofia	Liksom, da ville alt vannet gått gjennom. Da ville det rent likt heile tida. Vil det ikke det?
344	Gry	Jo. (Kort pause). Men, skal jeg
345	Sofia	Nå var det litt sånn
346	Gry	Men, nå er det jo sånn, mindre volum du har, (løfter opp et målebeger), jo lenger tid tar det for det å gå vekk.
347	Sofia	Det er fordi det at alt ikke er i midten på en måte.
348	Gry	Mm, men da er det trykk sikkert fra begynnelsen for alt presser nedover. (Holder et målebeger, og legger hånda over toppen.)

Mens Sofia prater, så tegner Gry denne grafen tilhørende «hypotese for den deriverte»:



Figur 10: Hypotese for den deriverte

Gry sin påstand om at jo mindre volum du har, jo lenger tid tar det, for det å gå vekk, høres umiddelbart feil ut. Du trenger ikke å være rakettforsker for å skjønne at det tar lengre tid å få 1 liter gjennom et lite hull, en 1 desiliter gjennom det samme hullet. Det virker som Gry skal fram til farten, altså at det renner mye fortere når det er mye vann, altså at det er mer trykk jo mer vann det er. Farten vil derfor avta etter hvert når det blir mindre trykk, og da kan det se ut som grafen vil flate seg ut. For ordens skyld, ei trakt brukes for å ikke søle, men jo større hullet er, jo fortere vil det renne ut.



Figur 11: Skjermbilde fra Sofia sin PC: Logistisk regresjon.

Sofia førte resultatene inn på PC-en sin, og dette utdraget under viser i hvert fall at elevene reflekter over tabellen og grafen de har fått på PC-en. Dette ser jeg på som tegn på tolkning eller validering. Videre diskuterer elevene gyldigheten til modellen:

Utdrag 9: Elevene diskuterer grafens gyldighet

352	Sofia	Skal jeg ta logistisk? Grafikkfelt (Jobber på PC)
353	Gry	Ja, og den er gyldig i vårt, æh
354	Gry og Sofia	Område
355	Sofia	Ja, for jeg bare lurte på åssen han ble videre, her går den mot, æh
356	Gry	0
357	Sofia	Så den gjelder jo på en måte, så her (utydelig) mot uendelig, gjør han ikke det? Nei
358	Gry	Men, hvis du (utydelig), ja før 500, her, (Peker på grafen på PC-en til Sofia) så er den ikke så gyldig. Akkurat (utydelig)
359	Sofia	Ikke?
360	Gry og Sofia	(Utydelig)
361	Sofia	Der oppe
362	Gry	For han bøyer den seg ut
363	Sofia	Ja (nølende)
364	Gry	Men, fra 500 så er han gyldig. (Sofia zoomer inn på grafen). Ellers så er den (utydelig) gyldighetsområdet, og kurva lenger vekk viser jo også at han

Det er ikke heilt lett å forstå hvor grafen er gyldig, men siden Gry prater om 500 to ganger, så tolker jeg det som at hun sier at grafen er gyldig fra $y = 500$ mL og ned til den flater ut og nærmer seg $y = 0\,mL$. Det er absolutt en måte å fortelle om gyldigheten på, men det mest vanlige er å fortelle å bruke x-verdien. Her foregår det tolkning og/eller validering av modellen. Det er på en måte mulig å tenke at grafen ikke skulle blitt begrensa ved $y = 500$, for at modellen skal gjelde for høyere volum også, hvis man skulle teste for det. Man kan uansett ikke la grafen gå under x-aksen, for uansett hvor mye vann man starta med, så kan man ikke ha en negativ vannstand. Det kommer selvfølgelig an på hvor man sette nullnivået hen, men praktisk nå, når hullet faktisk er i bunnen, er jo å la bunnen av målebegeret være nullnivået. Dette ser ut til å være enten tolkning eller validering, da de ser på gyldigheten til modellen.

5.1.7 Avhengig av det som er inni!

Etter å ha diskutert om de skal derivere den tungvinne funksjonen de har fått, begynner elevene nok en gang å lukte lunta.

Utdrag 10: Prosent?

379	Gry	Det viser jo at den er avhengig av det som er inni.
380	Gry eller Sofia	Mm
381	Sofia	Så det renner fortere ut, jo mer det er (Gry skriver?)
382	Gry eller Sofia	Mm
383	Sofia	Så hvis du ganger med en prosent da, ikke sant?
384	Gry	Mm
385	Sofia	Der, (pause), der det renner ut mest, sånn at der det renner ut 5 % så blir det, så renner du ut mer der.
386	Gry	(Utydelig) minus, æ, nå vet jeg ikke å mye som kommer ut, men det er y noe! For det er jo det som er i beholderen,
387	Sofie	Mhm (svakt)
388	Gry	På en måte, (Sofie ser på PC-en, GeoGebra) minus noe (tar pennen bort til arket igjen).

Det er litt vanskelig å tolke Gry når hun sier at den er avhengig av det som er inni. Det kan virke som hun henviser til grafen over vannstanden, men egentlig skal fram til at farten til det vannet som renner ut er avhengig av det som er inni. Sofia sin påstand er også delvis rett. Jo mer vann det er i målebegeret, jo høyere er farten i starten på vannet som renner ut. Hun er også inne på med prosent, for det de kom fram til mot slutten var at k-en i Torricellis lov for dette tilfellet kunne være rundt $-0{,}5$. Dette tolker jeg som matematisering igjen, de sier et «bare» et tall, men de har fått den kvalitative forståelsen, altså de skjønner at farten på vannet avtar.

Elevene tenker så at de må finne den deriverte, men så kommer læreren bort og hører med dem. Sofia foreslår at når massen er mindre, så vil det trykke mindre.

Utdrag 11: Endringa på åssen det rant ut

416	Lærer	Mm. Så dere fant ut, hva kan du si om endringa på åssen det rant ut, den ble?
417	Sofia	Den ble jo, den er jo prosentvis da, liksom. Æ, kan jeg si det?
418	Gry	Mindre, jo mindre volum ble.
419	Sofia	Ja

Det er som er verdt å legge merke til her, er det Gry sier om at endringa ble mindre, jo mindre volum det er. Det ser ikke ut som Gry har hverken derivert eller dobbeltserivert grafen for vannstanden, men hun er likevel litt inne på det, har vi bare litt vann, renner det sakte ut, men fyller vi opp, får vi ei solid endring som elevene la merke til, men full fart til nesten ingenting. Denne prosessen her er vanskelig å kategorisere, men jeg velger å ta den med for å vise heilheten hvordan elevene jobber seg gjennom oppgaven.

Elevene prater så videre med læreren sin om gyldighet og bæreevne. Og i dette tilfellet vil det gå mot null, siden det er hull i målebegeret. Av en eller annen grunn så begynner elevene igjen å tenke på $y = y - x$ igjen, og at x – en må ganges med tida. Nå har elevene rota seg tilbake til begynnelsen. De ser ikke at i de grafene de har tegna så måles tida langs x-aksen, mens de nå meiner $x - en$ står for det som renner ut per tidsenhet. Det virker som om elevene fortsatt holder på å matematisere igjen, at matematisering og validering går hånd i hånd.

5.1.8 Eulers metode i Python

Læreren spør elevene om Eulers metode som de har brukt tidligere i matte-timene. Hun forteller dem at man alltid er interessert i å prøve å finne uttrykk for åssen volumet endrer seg akkurat nå, altså momentan endring.

Utdrag 12: Hypotese for?

473	Lærer	Om dere skulle lage en hypotese på det da?
474	Sofia	Hypotese for?
475	Lærer	For liksom hva det, åssen y-en endrer seg. Liksom hva, hva ville dere hatt med i, hvilke.
476	Gry	y-en endrer seg med så og så mange prosent hver gang han ja. Hvis det går 5% ut, så vil han jo være 5% mindre også.
477	??	Mm
478	Sofia	Også må man jo bruke gamle verdien da, og så gange med den samme prosenten heile tida? (Diller med pennen)

«Hypotese for» spør Sofia. Enten har Sofia glemt at de skal finne hypotesen for den deriverte, eller så trur hun kanskje at lærer spør om noe helt annet. Det som også er interessant er at Gry kommer med idéen om prosentvis endring, noe som kan gi meining siden endringa blir mindre og mindre, da for eksempel 5% ut av 500ml= 25ml og etter hvert 5% ut av for eksempel 100 ml er 5 ml. Sofia kommer så inn på tanken om den gamle verdien og gange den med prosenten heile tida. Her synes jeg nok en gang vi ser tendenser til matematisering, de prøver å finne en formel. Og når elevene har funnet modellen, så er det på en måte svaret de skal fram til. Så introduserer læreren Torricellis lov, selv om hun ga ham et litt annerledes navn:

Utdrag 13: Introduksjon av Torricellis lov

491	Gry?	Men jo mer trykk han presse ned, jo mer vil jo grafen gå brattere først før han går utover.
492	Sofia?	Mm
493	Lærer	Det er noe som heter Tortellinis lov, og den sier at den endringa er lik kvadratrota av det som er igjen.
494	Gry eller Sofia	Ja
495	Lærer	Dere kunne jo teste det med Euler-programmet deres å se om dere kunne få det til å stemme?

496	Gry eller Sofia	Kvadratrota av det som er igjen?
497	Lærer	Mm, stemmer det med det dere har diskutert?
498	Gry eller Sofia	Æ
499	Lærer	At endringa er lik k gange kvadratrota av y
500	Gry eller Sofia	Ja (svakt)
501	Sofia?	Han blir jo bare mindre og mindre, og det som går ut er også bare mindre og mindre. (utydelig)
502	Gry?	Vi prøver da?
503	Gry	(Utydelig) Skal du gå inn på, eller prøve å laste?

Det som var vanskelig her var og er å finne ut hvem som snakker. Gry og Sofia har nokså lik stemme, og ingen av dem beveger munnen noe særlig på dette tidspunktet når de snakker. Læreren lurte på om det hadde vært noe forskjell hvis de hadde en stor beholder og en mindre beholder på 500 ml og antagelig Gry svarer at det ville rent fortere (Utsagn 491). Nok en gang, ja det vil nok renne fortere i begynnelsen, men ta lenger tid totalt sett, hvis det er mer vann som skal gjennom det lille hullet. Elevene fanger kjapt opp det læreren sier med at endringa, y' er $k \cdot \sqrt{y}$, og så må man huske at konstanten k må være negativ, siden vannstanden blir mindre. Den forsiktige oppgaven fra læreren i utsagn 495 tar elevene seriøst imot: «Dere kunne jo teste det med Euler-programmet deres …». Etter litt nøling så gyver de laus i Python-programmet Mu. Og det virker som elevene skjønner at uttrykket for den deriverte de fikk fra læreren, matematisk modell, skal de få til å bli til grafen de som lagte i GeoGebra. Elevene går nå inn i den teknologiske verdenen (Greefrath, 2011, s. 302):

Utdrag 14: nrot eller sqrt?

517	Sofia	Nrot, er det ikke det man bruker?
518	Gry	(Tar opp PC-en sin i tillegg til den Sofia har oppe). Jeg vet ikke om det er det her. Det er det i CAS
519	Sofia	Det er CAS ja. Kvadratrot (utydelig), (skriver noe i Python, og googler)
520	Gry	Det er rart, men jeg synes det programmet er forvirrende.
521	Sofia	Ja, s, q, r, t. (Gry er også på PC-en sin nå)
522	Anders	Ja, for liksom «Squareroot».

Dette tolkes her som at elevene lurer på hva de skal skrive for å få kvadratrot i Python. Jeg ser derfor på dette som overgangen mellom den matematiske modellen og den teknologiske verden i Greefrath (2011, s. 302) sin syklus. Elevene jobber videre, og får «feil»:

Utdrag 15: Godkjenner ikke «Squareroot»

541	Sofia	(Utydelig), jeg får feil her.
542	Gry	Du får feil. (hun og Anders bøyer seg bort). Men du trenger vel ikke de her?
543	Sofia	Jeg trenger vel ikke de her?
544	Gry	Jo, nei vent, du må jo ha den der «Append».
545	Anders	Jo, du må (vel /være det) (Gry kikker på Sofia sin PC). Det står at den er ikke definert

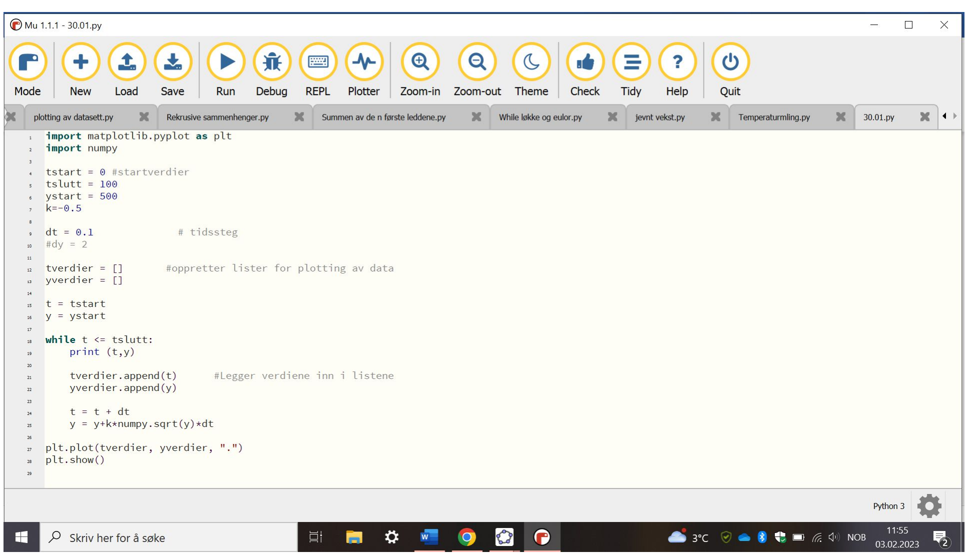
546	Gry eller Sofia	20
547	Anders	I linje 20
548	Gry eller Sofia	(Utydelig)
549	Anders	Åja, så det virker ikke.
550	Gry eller Sofia	Å jo, å skjedde nå?
551	Anders	(Utydelig) (liten pause) for det at han skal hente listene for det det plottinga. Og sånn, godkjenner ikke «Sqareroot».

Det kan diskuteres om dette utdraget er steget mellom «computer model» og «coputer results», eller om elevene er i steget mellom den matematiske modellen og «computer model». Slik jeg tolker det, er at det er datamaskinen (Python) som gjør jobben i den teknologiske verdenen, og siden dette ikke nådde fram, så går elevene tilbake til steget mellom den matematiske modellen og «computer» modellen. De prøver å rette opp i koden, men de får ikke til å importere kvadratrota, så læreren kommer og hjelper dem.

Utdrag 16: Bytte fortegn på konstantleddet

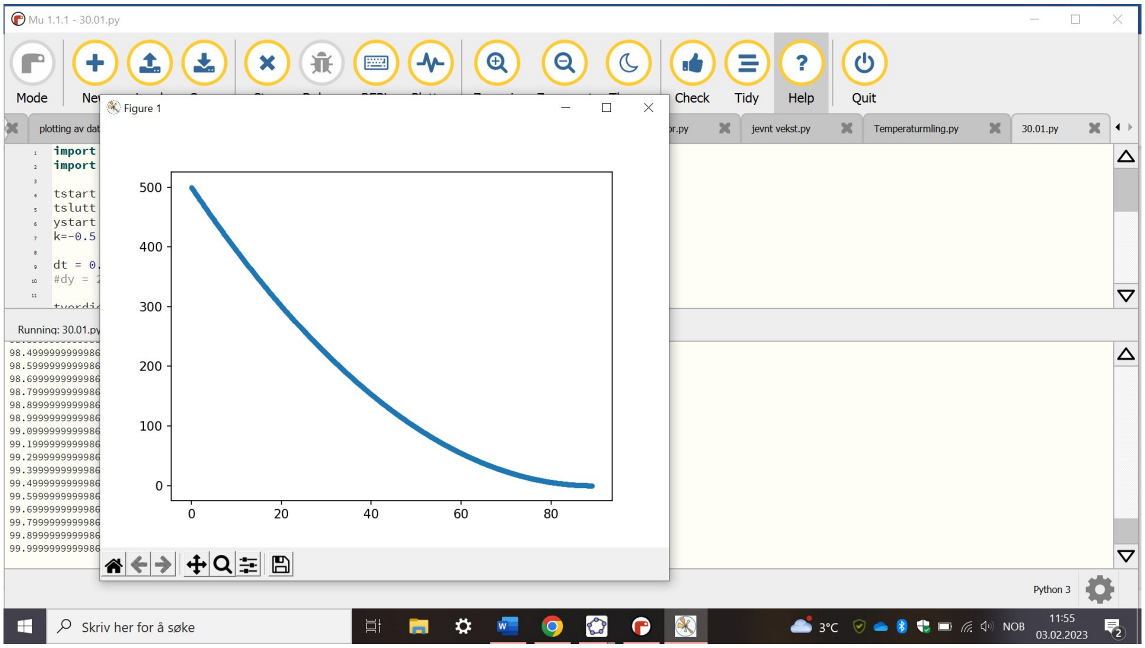
578	Sofia	Nå går den oppover her.
579	Gry	Vi må ha minus.
580	Lærer	Vi må endre k-en da kanskje
581	Sofia	Minus (utydelig)

Elevene fikk ut en graf, og Sofia ser at grafen går oppover, det reagerer Gry på. Vannstanden i målebegeret synker selvfølgelig når det er hull i målebegeret. Dette ser jeg på som et tegn på tolkning. Elevene tolker at grafen forteller dem om vannstanden og så validerer de modellen som kom fram og sier at det kan ikke stemme, siden den går oppover. Jeg har derimot problemer med å se åssen de kom seg fra teologiske verdenen til den matematiske verdenen. Det kan tenkes at svaret i den teknologiske modellen var et matematisk resultat. Slik så det ut i Python:



Figur 12: Skjermbilde av kodene i Python

Her er det tydelig å se at elevene satte k til å være $-0{,}5$, fordi grafen synker:



Figur 13: Skjermbilde av grafen i Python

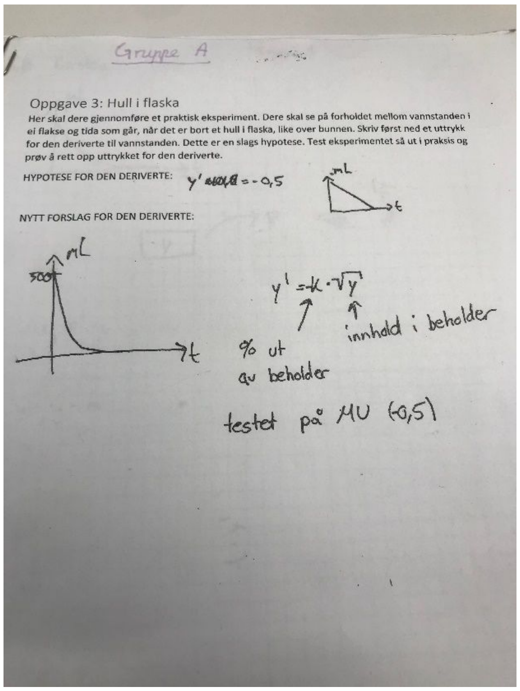
Timen går mot slutten og følgende samtale utvikler seg:

Utdrag 17: Oppsummering

596	Sofia	Og den deriverte da? (Utydelig)
597	Gry	Den deriverte av y er da k gange kvadratrota av y.
598	Sofia	Minus k, blir det ikke det
599	Gry og Anders	Jo
600	Gry	(Tegner på minus-tegnet foran k-en)
601	Sofia?	Ja
602	Gry	Minus k gange kvadratrota, og den det er innholdet (skriver det på arket) i beholder. Og det er prosent som går ut.
603	Sofia	Mm
604	Gry	(Skriver på arket)
605	Sofia	Så når vi har testa det på her, så brukte vi 0,5 da. (Utydelig)
606	Lærer	Du, observatør, timen er i grunnen over nå. (Gry kikker mot læreren)
607	Observatør	Ja, da må vi avslutte.
608	Lærer	Ja
609	Gry	På Mu (Skriver: testet på MU (-0,5))

Det virker som elevene bare valgte seg et tall, og 0,5 har henge igjen gjennom heile oppgaven deres. Det ser ut som grafen fra Python-programmet Mu er litt mindre korrekt enn den fra GeoGebra, se eksempelvis på punket (71.72, 50) på grafen i GeoGebra, og når vi er på ca. x=70 i Python-grafen, ligger vannstanden litt for langt nede. Så det er godt mulig at k-en burde vært litt mindre.

Det at Gry skriver på arket kan også tolkes som at hun legger fram svaret som er det syvende steget til Blum & Leiß (2007, s. 225-226). Opphavet til det syvende steget er å få syvstegsmodellen til å bli symmetrisk, og det syvende steget er ikke like kognitivt krevende som de seks første stegene. Det handler om å legge fram løsninga eller løsningsprosessen sin med et tydelig svar på slutten (W. Blum, personlig kommunikasjon, 23. februar 2023). Selv tolker jeg, at en «light»-versjon av det syvende steget, er å skrive ned svaret på arket. Jeg vil derfor avslutte med å legge fram elvenes hypoteser for den deriverte til vannstanden:



Figur 14: Elevenes «gamle» og «nye» hypotese

5.1.9 Oppsummering

Analysen viser at elevene bruker lang tid på å utvikle sin modell, og de strever lenge med matematiseringa. Elevene fulgte syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226) nokså slavisk i begynnelsen, og det var vanskelig å vite om det var steg 1 eller 2, eller om de smelta litt sammen. Steg 3 matematisering tok lang tid, og sammenfalt en del med steg 6 validering. Etter å ha stått fast lenge i analysen, skjønte jeg at jeg måtte ikke bare se på Blum & Leiß (2007, s. 225-226), men også den utvidede modelleringssyklusen (Greefrath, 2011, s. 302). Problemet med å analysere denne oppgaven, etter disse to modellene, var at elevene skulle ikke komme fram til et klassisk svar, men det var den matematiske modellen som var målet. Elevene hadde også problemer med å uttrykke seg riktig, og de strevde med å gå fra den matematiske verden til den teknologiske verden.

5.2 Lærerens perspektiv på undersøkelsen og modellering

Dette analysekapittelet har som hensikt å analysere datamaterialet fra intervjuet, som jeg hadde med R2-læreren, i lys av relevant teori. Analysekapitelet søker å finne ut hvordan R2-læreren tolka modelleringa sin plass i den gamle og nye læreplanen. Jeg vil også prøve å se på hvordan elevene løser modelleringsoppgaver i forhold til hvordan R2-læreren ønsker å lære det bort. Da blir det naturlig å undersøke læreplanene. Til slutt vil jeg prøve å dra ei kobling mot Polyas fire faser i problemløsning (Polya, 1957, s. XVI-XVII).

5.2.1 Modellering har «alltid» vært en del av læreplanen

Utdrag 18: Modellering i læreplanen

Utsagn-nummer	Person	Utsagn
1	Intervjuer	Sånn! Da lurer jeg litt på modellering og det og egentlig den gamle læreplanen i forhold til den nye læreplanen. Er det noen endringer du har gjort nå eller skal gjøre videre?
2	Lærer	Jeg synes alltid modellering har vært viktig i læreplanen, sånn generelt. Han er tydeliggjort nå i forhold til disse nøkkelelementene, kjerneelementene
3	Intervjuer	Ja
4	Lærer	Jeg kan ikke læreplanen tydeligvis (ler), så jeg synes ikke nødvendigvis at modellering har noe større plass nå enn før. Det kan godt være jeg er aleine om å synes det (ler).
5	Intervjuer	Så du synes ikke det har noe større plass, men at det har blitt tydeligere.
6	Lærer	Ja, jeg synes modellering alltid har vært en del av læreplanen.

R2-læreren synes at modellering alltid har vært viktig i læreplanen, men likevel at det kan ha blitt tydeliggjort mer. Med utgangspunkt i den gamle læreplanen så ser man at man hadde fire hovedområder, geometri, algebra, funksjoner og differensialligninger. Selv om modellering ikke har fått et eget hovedområde eller avsnitt, så er modellering tydelig til stede i to av de 19 kompetansemålene. Disse to kompetansemålene, det første fra hovedområdet funksjoner og det andre fra differensialligninger, taler tydelig om modellering:

- Formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte».
- Modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillinga til en differensialligning, løse den og tolke resultatet»

(Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 5-6).

I den nye læreplanen (Utdanningsdirektoraret, 2020) står ikke kompetansemålene lenger lista opp under hovedområder, som jeg vil kalle temaer. Det kommer derimot inn noe heilt nytt, nemlig kjerneelementene som forteller hvilke kompetanser som eleven skal kunne utvikle for at eleven skal klare seg best mulig i den voksne verden (Klaveness et al, 2019, s. 5-6). «Modellering og anvendelser» er et av de seks kjerneelementene, og blant kompetansemålene så handler to av tolv tydelig om modellering:

- Gi eksempler på ulike situasjoner som kan modelleres ved å bruke ulike matematiske funksjoner, og modellere og analysere slike situasjoner ved å bruke reelle datasett.
- Anvende derivasjon og integrasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett.

Modellering er fortsatt tydelig involvert i to av kompetansemålene, men siden det har blitt færre kompetansemål, har da modellering fått større prosentvis plass blant kompetansemålene. Sånn sett kan man si seg enig med R2-læreren, modellering var i læreplanen før, men det kan sies å ha blitt mer tydeliggjort nå, på grunn av kjerneelementene og reduksjonen i antall kompetansemål.

Rundt seks minutter ut i intervjuet kommer vi inn på modelleringa sin plass i lærebøkene:

Utdrag 19: Modelleringa sin plass i lærebøkene

64	Lærer	Men personlig så synes ikke jeg, æh, vi har fått en egen, den eneste forskjellen på læreplanene, mener nok jeg at det er nevnt som kjerneelement, og før hadde vi ikke kjerneelement.
65	Intervjuer	Mm
66	Lærer	Men jeg mener at jeg synes modellering alltid har vært viktig del av det vi jobber med i matematikkfaget.
67	Intervjuer	Ja
68	Lærer	Jaffal de siste læreplanene.
69	Intervjuer	Ja (pause), og så, men hvorfor trur du modellering har fått et eget kapittel i den nye læreboka nå?
70	Lærer	Det har det alltid hatt.
71	Intervjuer	Det har det? For ifølge veilederen så meinte han at det var et delkapittel der og et delkapittel der som utgjorde modelleringa, meinte han, men.
72	Lærer	Men den forrige boka hadde også et eget, gamle læreplanen.
73	Intervjuer	Ja
74	Lærer	Som var ganske likt bortsett fra at man ikke brukte, altså den nye læreplanen er vel kanskje det at man bruker numeriske metoder i stedet for da
75	Intervjuer	Mhm
76	Lærer	Så programmering er jo kommen inn som en del av modelleringsprosess da.

Disse påstandene blir drøfta opp mot kapittel 3 der lærebøkene står omtalt. Læreren påstår at det fantes et eget kapittel om modellering i den gamle læreboka. Etter nærmere gjennomsyn, inneholdt den gamle læreboka deres ingen kapitler som het «modellering», men likevel inneholdt store deler av kapittel fire om funksjoner og store deler av kapittel seks om differensialligninger en god del modellering (Heir et al., 2008).

Den forrige læreboka (Heir et al., 2016) har et delkapittel om funksjoner som heter modellering, der er fokuset på regresjon. Kapittel 6E «praktisk bruk av differensialligninger» og inneholder mange kjente modelleringsoppgaver om blant annet vanntank, populasjon og medisin.

«Ved modellering er den grunnleggende tankegangen: Vekstfart = økning per tid – reduksjon per tid» (Heir et al., 2016, s. 344). Boka kobler altså modellering opp til differensialligninger.

Fjorårets utgave vier et heilt kapittel til modeller, med fire delkapitler: 4A Modeller av reelle datasett, 4B Analyse og tolkning av modeller, 4C Vekstmodeller, 4D Frie svingninger. (Borge et al., 2022). Modellering har vært til stede i de siste bøkene, men det har blitt mer tydelig i den nye boka.

Ut ifra det siste læreren nevnte om numeriske metoder, så passer det å flytte oss til 10 minutter å kikke på det som læreren sier om modellering og differensialligninger:

Utdrag 20: Modellering og differensialligninger

110	Lærer	Æh, bortsett fra læreplanen er jo annerledes, ikke sant, før så, æh, nå har jo vi knytta inn differensiallikninger, før så modellerte vi (utydelig) på differensiallikninger, men da var et av læreplanmålene at de skulle lære å løse differensiallikninger.
111	Intervjuer	Ja
112	Lærer	Så da var det også, altså du hadde modelleringa, men da hadde du også mere matematiske metoder tilgjengelig da.
113	Intervjuer	Ja
114	Lærer	Så da var løste du, du var litt mer inni den matematiske verden. Så æh, i grunnen det, jeg har ikke gjort så veldig mye annerledes eller tenkt å gjøre så mye mer annerledes i modellering (utydelig).
115	Intervjuer	Nei, for du synes fortsatt at liksom differensiallikninger hører hjemme?
116	Lærer	Ikke å løse de!
117	Intervjuer	Ikke å løse de?
118	Lærer	Nei, men det å løse de numerisk, er heilt greit.
119	Intervjuer	Ja
120	Lærer	Mm, men ikke å løse de med hjelp av å bruke å kunne løse de matematisk, det er ikke emne lenger.
121	Intervjuer	Ja
122	Lærer	Og det var et veldig stort emne før.

R2-læreren påpeker her at det ble jobba i tidligere år med modellering som en del av arbeidet med differensialligninger. Lærebøkene var mer teoritunge, og hadde mye om eksakte løsninger av differensialligninger. Selv om det kommer litt utydelig fram i intervjuet om hun synes differensialligninger hører hjemme i R2, så virker det som at hun meiner at hvis man skal løse dem, så må man bruke numeriske metoder og gjerne digitale hjelpemidler. Et eksempel på dette er elevene som bruker Eulers metode (Borge et al, 2022, s. 284-285) i Python under datainnsamlinga.

Læreren fortalte også noe interessant om regresjon og modellering:

Utdrag 21: Regresjon og modellering

16	Lærer	Æh, så, æh, før så ville jeg nok tenke at modelleringsbiten tilknytta eksamen handla gjerne om en regresjonsoppgave,
17	Intervjuer	Mm
18	Lærer	Mens nå, så vil det nok være mere en, at man æhm, passer på at man også har modelleringsoppgaver eller problemløsningsoppgaver om jeg skal se de to litt i ett også

R2-læreren peker her på at eksamensoppgavene har blitt mer modellerings- eller problemløsningsoppgaver, og rett og slett gått bort fra den typiske regresjonsoppgaven. De siste eksamenssettene har hatt to modelleringsoppgaver hver, en regresjonsoppgave og med «virkelighetsnær» bruk av differensialligninger. I skrivende stund (begynnelsen av mai) har det enda ikke vært eksamen i R2 etter den nye læreplanen, men det er lagt ut et eksempelsett. Det er fortsatt en regresjonsoppgave, men det har kommet inn en problemløsningsoppgave i stedet for den «virkelighetsnære» differensialligning-oppgaven. Eksamen ble fyldigere omtalt i kapittel 3.

Læreren kommer også med klare utsagn om modellering:

Utdrag 22: Læreren ser på modellering som å lage en modell

168	Lærer	Men det er vel det som kanskje hva er en modelleringsoppgave som vi har diskutert før
169	Intervjuer	Ja
170	Lærer	Ikke sant, også sånn som jeg sier at det handler jo om å lage en matematisk modell.
171	Intervjuer	Mm
172	Lærer	Det er jo det som på en måte modelleringa er å lage modellen.
173	Intervjuer	Ja
174	Lærer	Altså sånn, og så er spørsmålet når er det man lager en modell eller bruker en modell da.

Når «Lærer» sikter til «før», så er det at jeg og R2-læreren har diskutert og prata en del om hva modellering er. Hun legger vekt på at modellering handler om å lage en matematisk modell. Dette gjør man til en viss grad ved regresjon, men det R2-læreren sikter til er å gjøre forenklinger, tegne opp hva som skjer og så regne på modellen. Et godt eksempel på dette er oppgaven om svømmebasseng, se kapittel 4.9, som elevene fikk jobbe med i datainnsamlinga. Et eksempel på en klassisk regresjonsoppgave er lage en modell, og så fine temperaturen til et klokkeslett i midten, som du ikke fikk lest av (Heir et al., 2008, s. 184). Etter disse utsagnene vil jeg si at R2-lærerens syn samsvarer til en viss grad med Blum & Leiß (2007, s. 225) sin modelleringssyklus. Hun legger vekt på at modellering handler om å lage en matematisk modell, som man selvfølgelig også gjør ved blant annet regresjon, men læreren sikter altså mer til å måtte tenke, tegne og regne.

5.2.2 Lærerens syn på modellering: fokus på den matematiske og den virkelige verden

Vi kommer også inn på temaet modelleringssykluser i løpet av intervjuet. Læreboka til elevene (Borge et al., 2022, s. 257) viser som nevnt en modell med seks steg, se kapittel 3. Blum og Leiß (2007, s. 225-226) gir en modell med syv steg. Det falt seg derfor naturlig å høre med R2-læreren om hennes bruk av modelleringssykluser:

Utdrag 23: R2-lærerens bruk av modelleringssyklus

123	Intervjuer	M, men da har jeg vel et skikkelig spørsmål igjen, og det er jo det at læreboka, den viser bilder bilde av en modelleringssyklus på framsida liksom i kapittelet.
124	Lærer	Mm
125	Intervjuer	Og det finnes andre sykluser som har for eksempel syv steg, den i fra Blum og Niss (Leiß, ikke Niss som jeg sa), og det finnes jo andre, andre artikler som diskuterer for litt andre antall steg og. Bruker du bevisst noen av disse modellene når du underviser elevene?
126	Lærer	M, nei, jeg bruker nok heller, æhm, den matematiseringa, at jeg ser det på to verdener.
127	Intervjuer	Mm
128	Lærer	M, også, går eller u, kanskje u eller ja, firestegsmodellen kanskje først og fremst da. Æhm.
129	Intervjuer	Hvilke steg er det du tenker på da?
130	Lærer	Nei, mest at de begynner med problemstillinga, forstår problemstillinga,
131	Intervjuer	Mm
132	Lærer	så gjør det mer som kanskje en metode?

133	Intervjuer	Ja
134	Lærer	At, okei, nå er vi i den virkelige verden, vi har en problemstilling, vi må matematisere den.
135	Intervjuer	Ja
136	Lærer	Æh, og så at vi når vi da gjør den om til matematikk, så er vi i den matematiserte verden, eller matematikk-verden.
137	Intervjuer	Mm
138	Lærer	Vi har et problem vi skal løse uten å tenke på den praktiske problemstillinga
139	Intervjuer	Ja
140	Lærer	Løse det og så må vi gå tilbake til den andre verden. Så jeg gjør det veldig enkel modell for de da. Det er mere sånn gå tilbake, og så må du vurdere svarene dine. Stemmer dette?
141	Intervjuer	Ja, så det siste steget blir på en måte liksom ei
142	Lærer	Verifiserings, æh.
143	Intervjuer	Verifisering ja. Jeg føler jo at det minner litt om Polyas fire faser i problemløsning.

Det viser seg her at denne R2-læreren har sin egen vri på modellering, og at hun retter fokuset mot den matematiske verdenen og den virkelige verdenen. Hun nevner «firestegsmodellen», og at det første steget er å forstå problemstillinga. Dette henger godt i hop med både Polyas fire faser i problemløsning (1957, s. XVI-XVII) og det første steget i Blum & Leiß (2007, s. 225) som i sistnevnte handler om å «forstå» eller «konstruere».

Resten av intervjuet hennes må tolkes grundigere, da hun ikke sier steg to er slik og steg tre er sånn. Utfra utsagnet hennes «.. nå er vi i den virkelige verden, vi har ei problemstilling, vi må matematisere den», så tolker jeg at dette er det andre steget til R2-læreren. I Blum og Leiß (2007, s. 225) sin modell av modelleringssyklus, så vil lærerens utsagn tilsvare muligens steg 2 forenkling og i hvert fall steg 3 matematisering. Syvstegsmodellen har også to hovedområder, nemlig virkeligheten og «matematisk verden». Jeg finner det ikke like tydelige med virkeligheten og matteverden hos Polya (1957, s. XVI-XVII), men han har derimot «å lage en plan» som sitt andre steg.

Det som antas som R2-lærerens tredje steg er: «Vi har et problem vi skal løse uten å tenke på den praktiske problemstillinga.» Når vi ikke skal tenke på den praktiske problemstillinga, så tolker jeg det som at vi er inni den matematiske verdenen, altså «gjøre matematikk» i Blum og Leiß (2007, s. 225-226) sin syvstegsmodell. Dette kan også sammenlignes med det tredje steget «gjennomfør planen» hos Polya (1957, s. XVI-XVII).

R2-lærerens fjerde steg antas å være validering: «Løse det og så må vi gå tilbake til den andre verden. Så jeg gjør det veldig enkel modell for de da. Det er mere sånn gå tilbake, og så må du vurdere svarene dine. Stemmer dette?». Både meg som student og R2-læreren var enige om at dette kan bli kalt for verifisering. Dette stemmer med utsagnet mitt «… det minner litt om Polyas fire faser …», og kan absolutt kobles opp mot Polyas siste steg, nemlig «se tilbake». (Polya, 1957, s. XVI-XVII). I syvstegsmodellen til Blum og Leiß (2007, s. 225) kan dette være både steg 5 «tolke» og steg 6 «validere». Med denne argumentasjonen her, vil jeg si at det går an å bruke ulike modeller av en modelleringssyklus, med ulikt antall steg og med ulikt innhold.

5.2.3 En utfordring at elevene hopper for mye mellom virkeligheten og mattematikkverden

Selv om læreren har prata mye om den virkelige verdenen og den matematiske verdenen, så kommer hun selv med en advarsel:

Utdrag 24: Læreren om vandringen mellom virkeligheten og matteverden

196	Lærer	At nå må vi glemme litt, for det er av og til de beveger seg litt for mye mellom verdenene. Og det kan være riktig, men av og til, så må du, nå må du løse det matematiske problemet uten å tenke på
197	Intervjuer	Virkeligheten, for nå har du allerede
198	Lærer	Ja, at du
199	Intervjuer	Forenkla, lagt en modell som du skal
200	Lærer	Mm, så det kan være en utforming (hun meinte nok utfordring) at de hopper litt for mye også, selv om man skal hoppe, men man skal også løse problemet sitt uten å (ler)
201	Intervjuer	Ja
202	Lærer	Tenke for mye. Det så du jo også på, æhm, på den ene gruppa, æh, der den ene eleven hadde satt opp på en måte med salt eller det der bassenget med klorinnhold.

Det kommer fram at elevene blir sittende fast når de går beveger seg mye mellom de virkeligheten og den matematiske verdenen. Hovedsaken i modellering er at virkeligheten er for komplisert å regne på, så da må vi forenkle. R2-læreren forteller derfor at man som lærer bør tydeliggjøre enda mer «at nå har vi forenkla denne oppgaven, og er i matteverden og skal regne på den».

Utdrag 25: La modelleringa gjennomsyre resten av matematikken!

214	Lærer	Dette er et praktisk problem, vi løser matematisk, vi vurderer problemet vårt, æh, så det er ikke alltid jeg trur vi skal være det der modelleringskapittelet. Jeg trur ikke det er så viktig at det er et modelleringskapittel. Jeg trur heller det er viktig at man, æ, æ, jeg synes modellering går i, i alle emnene, i alle matematiske emner, så kan du ha et emne som handler om modellering.

R2-læreren synes at det er ikke galt i å fokusere på modellering for en mindre periode, men hun synes at modellering skal være en del av alle de matematiske emnene. Dette bringer oss videre til neste tema:

5.2.4 Modellering som kjerneelement bør gjennomsyre alle delene av mattefaget

Fra å prate spesifikt om modellering, løfter vi blikket til slutt og ser på kjerneelementene:

Utdrag 26: Vi lager ikke ei bok med et kapittel til hvert kjerneelement

220	Lærer	Ja, ikke sant, men da er det et praktisk problem. Og da er vi jo på en måte, det bør gjennomsyre arbeidet ditt da, akkurat som problemløsning må også gjennomsyre ting, disse kjerneelementene skal på en måte, det skal ikke være nå lager vi ei bok med kjerneelementene som overskriftene. (utydelig)
221	Intervjuer	M

222	Lærer	Mener jeg.

Budskapet fra R2-læreren er at man gjerne ha litt ekstra fokus på de ulike kjerneelementene til tider, men aller helst skal de ulike kjerneelementene gjennomsyre heile faget Matematikk R2.

5.2.5 Oppsummering

Læreren har gjennom intervjuet påpekt at hennes forståelse av modellering er at man lager seg en modell. Dette samsvarer de første stegene i Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin modelleringssyklus. Hun påpeker også at modellering ikke bare skal være et tema som blir undervist separat, men heller at modellering skal være med å gjennomsyre heile undervisninga.

Etter lærerens beskrivelser, så går elevene for mye fram og tilbake mellom virkeligheten og det hindrer dem i å bruke forenklingene de allerede har gjort. Lærerens syn på å arbeide med modelleringsoppgaver kan sammenfattes i fire steg: Forstå problemet, matematiser det, regn på det og til slutt gå tilbake til virkelighet og vurder svaret. Med utgangspunkt i elevenes arbeid på undervisningseksperimentet, ser det ut som at eleven og læreren fortsatt har en vei å gå når det gjelder matematiseringa og «digitaliseringa», rett og slett kunne formulere skriftlig modeller som er brukbare i matteverden eller den digitale verden.

6 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg svare på forskningsspørsmålet:
Hva kjennetegner et utvalg av R2-elevers tilnærming til modelleringsoppgaver?
For å svare på det vil jeg bruke mine tre underproblemstillinger som hjelp:

1) Hvordan forstår læreren modellering i lys av den nye læreplanen? (6.1)
2) Hvordan preger lærerens syn på modellering undervisninga og elevenes arbeid? (6.2)
3) Hvordan løser elever modelleringsproblemer? (6.3)

Så vil jeg jeg drøfte litt om modelleringssyklus (6.4), se på svakheter ved studien (6.5). Selve konklusjonen kommer til slutt (6.6).

6.1 Lærerens syn på modellering i lys av den nye læreplanen

Når det gjelder Fagfornyelsen, så er læreren sitt syn at modellering har alltid vært en del av læreplanen. Modellering var absolutt til stede med et par kompetansemål i den forrige læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) og modellering var å finne i flere delkapitler i tilhørende lærebøker (Heir et al., 2008, 2016). R2-læreren påpeker at modellering har blitt tydeliggjort gjennom de nye kjerneelementene i den gjeldende læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Hun meiner at man må lage seg en modell for at det skal kalt modellering, noe som samsvarer med de første stegene til Blum & Leiß (2007, s. 225-226).

6.2 Hvordan lærerens syn på modellering preger undervisninga

R2-læreren forteller at hun ikke bruker Blum & Leiß (2007, s. 225-226) sin modelleringssyklus. Hun bruker heller ikke læreboka sin syklus (Borge et al., 2022, s.257). I stedet prøver hun å være bevisst på den virkelige verdenen og den matematiske verdenen. Hun bruker derfor sin egen firestegsmodell:

1) Forstå problemet
2) Matematiser det
3) Regn på det
4) Gå tilbake og vurder svaret

Dette ligner på Polyas fire faser i problemløsning (Polya, 1957, s. XVI-XVII) som er gjort rede for i kapittel 2:
1) Forstå problemet
2) Lag en plan
3) Gjennomfør planen
4) Se tilbake.

Blum & Borromeo Ferri (2009, s 54-55) presenterer disse fire stegene:
1) Forstå oppgaven
2) Etabler en modell
3) Bruk matematikk
4) Forklar resultatet

Blum (2011, s. 24-25) presenter også en modell:
1) Forstå oppgaven
2) På leit etter matematikk

3) Bruke matematikk
4) Forklare resultatet

Både firestegsmodellen til Blum & Borromeo Ferri (2009, s 54-55) og Blum (2011, s. 24-25) er veldig like. Disse to firestegsmodellene har også samme argumentasjon med at modelleringssyklusen til Blum & Leiß, (2007, s. 225-226) er et strategisk verktøy for arbeid med modelleringsoppgaver. Blum & Borromeo og Blum påstår at syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226) er noen ganger heilt uunngåelig for forsknings- og undervisningsformål. Blum & Borromeo Ferri og Blum gir hver sin firestegsmodell, som de meiner kan passe bedre til elever, som møter større vanskeligheter i arbeidet med syvstegsmodellen til Blum & Leiß (2007, s. 225-226). Disse firestegsmodellene er i grunnen bare en litt forenkla versjon av syvstegsmodellen, siden flere steg har «smelta sammen» (Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 54-55; Blum, 2011, s. 24-25).

Elevene blir så klart påvirka av læreren. Ved å se hvordan elevene løser modellerings-oppgaven får vi mulighet til å sammenligne det med lærerens modelleringssyklus.

6.3 Elevenes arbeid med modelleringsoppgaver

Etter lærerens beskrivelser i intervjuet, så går elevene for mye fram og tilbake mellom virkeligheten, så det hindrer dem i å bruke forenklingene de allerede har gjort. Som man ser i analysen så tolker jeg det slik at elevene jobba seg stort sett slavisk gjennom den utvidede modelleringssyklusen (Greefrath 2011, s. 301-304). Dette kan også passe med lærerens modell, men likevel virker det som at de holder på å lage en matematisk modell og validere samtidig. De går rett og slett fram og tilbake en god del mellom den matematiske verdenen og virkeligheten, som var det jeg regna med. Så vil jeg si meg litt enig med læreren. Elevene går rett og slett litt for mye fram og tilbake, så det tyder absolutt på at elevene har problemer med matematiseringa.

R2-læreren bruker en syklus med fire steg i arbeid med modelleringsoppgaver. Selv om hun er tydelig i undervisninga med å si: «Nå er vi i den matematiske verden, nå må vi gå tilbake til den virkelige verden», og så videre, så mestrer ikke elevene dette. De står fast i matematiseringa, altså steg 3 hos Blum & Leiß (2007, s. 225-226).

6.4 Om modelleringssyklus

Det er på sin plass at jeg også diskuterer begrepet modelleringssyklus. Da jeg selv piloterte «Hull i flaska» (kap. 4.9.1) så ante jeg ikke hvor jeg var hen i syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226). Det eneste som tenkte på, var om jeg skulle fylle vann først eller lage hullet først. Jeg hadde på forhånd markert med en tusj for hver 100. ml. Jeg lurer enda på hvor jeg var i modelleringssyklusen da, og også når elevene borer og fyller vann i litermålet sitt. Er det et eget praktisk-steg, er dette steg 2 med forenkling og strukturering eller er det dette som matematiseringa? Elevene strevde med matematiseringa når de skulle lage en hypotese på oppgaven «Hull i flaska». Jeg synes også syvstegsmodellen blir for komplisert, for hva skiller steg 1 og 2 og 3? Ofte sklir jo tolkninga og valideringa sammen den også. Det ser ut som Blum & Borromeo Ferri (2009, s 54-55) fastholder syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, s. 225-226) som den beste modelleringssyklusen med tanke på analyse, slik jeg har gjort, og oppgavejobbing. En teori er at hvis man skal undersøke noe grundig, deler man opp stegene i enda mindre deler, og da man går mer på detaljnivå.

Jeg har jobba aktivt med syvstegsmodellen i et halvt år, og jeg synes den noen ganger er for detaljert, mens jeg andre ganger synes den er mangelfull. Noen ganger vet jeg ikke hvilket av stegene det er, er det steg 1, 2 eller 3? Spesielt det med praktisk gjennomføring var vanskelig å koble til et bestemt steg. Det samme gjaldt når elevene prøvde å matematisere, og de prøvde å begrunne valgene sine. Da skulle jeg nesten ønske at det var et «begrunnelse»-steg, for jeg endte opp med å tolke det som validering. Siden jeg synes syvstegsmodellen blir for vanskelig, vil jeg selv foretrekke en av firestegsmodellene, eller en variant av dem, når jeg skal begynne å jobbe som lærer. Vi må forenkle oppgaven for å løse den, og da må vi forholde oss til forenklinga vi har gjort, eller går det ikke å løse oppgaven.

6.5 Svakheter med studien

Jeg har gjennomført en liten kasusstudie, der jeg undersøkte tre R2-elever som gjorde noen modelleringsoppgaver. Tre elever er lite. Jeg analyserte også aleine, noe som betyr at alt blir tolka slik jeg tenker ut ifra teori, og jeg kan derfor ha gått glipp av synspunkt som andre kunne ha hatt om modellering. Likevel vil jeg påstå at studien min har overførbarhet til andre lignende opplegg (Thagaard, 2018, s.181-182).

Jeg synes selv i ettertid at oppgaven var dårlig, siden hypotesen ble målet. Jeg trur det hadde vært bedre om elevene måtte lage en modell og så bruke modellen i beregninger, hvis en vil få til ei bedre forskning på syvstegsmodellen (Blum & Leiß, 2007, 225-226). En mulighet er også å la dem gjøre modelleringsoppgaver uten bruk av digitale hjelpemidler som kalkulator, GeoGebra og Python.

R2- læreren tok en stor rolle i utforminga av oppgave, siden jeg ikke klarte å finne gode nok oppgaver som veilederen min og R2-læreren kunne gå god for.

6.6 Konklusjon

Hva kjennetegner så et utvalg av R2-elevers tilnærming til modelleringsoppgaver? For å svare på det vil jeg oppsummere de tre underspørsmålene. Lærerens syn er at modellering alltid har vært i læreplanen, men at det har blitt tydeliggjort med kjerneelementene i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Hun sier også at man må lage en modell for å kalle det modellering, og det er nettopp det elevene gjør i undervisningseksperimentet.

Etter å ha analysert arbeidet til elevene, ser jeg at de følger de ulike syklusene nokså slavisk i begynnelsen, men elevene har problemer mer med matematiseringa, og begynner derfor å gå mye fram og tilbake mellom matteverden og den virkelige verden. De har også utfordring med å gå over til den digitale verdenen på grunn av de vet ikke riktig notasjon.

7 Til ettertanke og handling

Først kommer jeg med noen tanker retta mot mattelærere og forskere (7.1), så kommer det ei dønn ærlig avslutning der jeg forteller hva jeg har lært fra masterarbeidet (7.2).

7.1 Til mattelærere og forskere

For å skape dybdelæring vil jeg virkelig anbefale å få inn noe praktisk. I et gruppearbeid, når elevene skriver ned på et felles ark, er det også lettere å få et overblikk over hvordan elevene samarbeider, og også hva de strever med. Jeg så i «teoritimen» at flere elever og læreren hadde problemer med prosentregning, og flere elever hadde også problemer med å forstå hva den ene differensialligninga betydde. I et slikt tilfelle kan læreren skrive ned det temaet på en lapp, og repetere det temaet i ei undervisningsøkt seinere. Det kan også være nyttig når man har noen slik «annerledes» oppgaver (kap. 4.9) at man presenterer for klassen etterpå, slik at man legger til rette for læring og oppklaring. Det beste er visst elevene får presentere oppgaven de jobba med. Da er det ekstra gøy hvis det er flere måter å løse oppgaven på! Jeg vil altså oppfordre lærere til å ha praktiske oppgaver, for da blir virkeligheten og den matematiske verdenen kobla sammen, og elevene har lettere for å se hvorfor de skal lære matte, og hvordan de kan få bruk for den i virkeligheten. Denne typen undervisning tar selvfølgelig en del tid, og det kan også kreves litt mer forberedelser av utstyr og etterarbeid med rydding enn ei vanlig «tradisjonell» undervisningsøkt. Hvis vi ofrer litt tid, så kan vi derimot få mer dybdelæring tenker jeg, noe som jeg savna fra min skolegang. Kjære lærer, du er herved utfordra til å ha flere praktiske øvelser i mattetimene! Etter denne studien, så er rådet til R2-læreren her: Jobb med å uttrykke dere korrekt matematisk, sånn at det dere sier muntlig stemmer med det dere skriver! Til forskeren så vil jeg anbefale å undersøke effekten av praktiske oppgaver for dybdelæring. Er det noe vi alle ønsker, så er det at elevene skal få en dybdeforståelse!

7.2 Mitt utbytte av masteren

Det var vanskeligere enn forventa å jobbe med modellering, alt måtte jo defineres! Ikke har jeg vært så god til å finne kilder heller. Hva har jeg så lært av masteren, jo en slik stor oppgave vil jeg aldri skrive igjen, og det hadde nok vært bedre å skrive sammen med noen for å sikre framgang. Jeg som trudde problemet var å skrive så mye, fikk plutselig et problem i å begrense meg, for denne oppgaven ble vel stor. Jeg har i hvert fall erfart at det er mye arbeid, og at jeg heller ville hatt et halvt år i praksis i stedet for denne skrivinga. Hva med å bli vurdert på å skrive ukeplaner, årsplaner, IOP, lage terminprøver og slikt som man får bruk for i det virkelige arbeidslivet? Forske gjør man alltid som lærer, gikk timen skeis, så prøver man å endre på opplegget til neste klasse man skal inn i.

8 Referanseliste

Aasarmoen, T. K: (2021). Design og bruk av modelleringsoppgaver i klasserommet: En forskningsstudie om hvordan en designer modelleringsoppgaver [Masteroppgave, Universitetet i Agder]. AURA: https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2826328

Bedin, T. (2023, 10. mars). Atomer. NDLA. https://ndla.no/article/13770

Bell, J. & Waters, S. (2018). *Doing Your Research Project: A Guide for First-time Researchers* (7. utg.). Open University Press.

Bentsen, M. & Sørvåg, K (2021). *1T-elevers begrepsmessige forståelse av lineære likningssystemer.* Upublisert oppgave til kurset MA-422. Universitetet i Agder.

Berget, I. K. L. & Bolstad, O. H. (2019) Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis, 13*(1), 83-97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Berget, I. K. L. (2022a) Identifying positioning and storylines about mathematical modelling in teacher–student dialogues in episodes from two upper secondary classrooms:
Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA (2022) 00, 1–15 https://doi.org/10.1093/teamat/hrac020

Berget, I. K. L (2022b) Mathematical modellering in textbook tasks and upper examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematical Education, 27*(1), 51-70

Berget, I. K. L. (2023) Mathematical modelling in the discourses of the KOM and PISA frameworks and teacher interviews. *Research in Mathematics Education*, https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2165536

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. Journal of Mathematical Modelling and Application. 1.

Blum, W. & Leiß, D. (2005),

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA12* (s. 222–231). Horwood.

Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. I Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (red.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (s. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Borge, I. C. (Red.). (2008) *Differensiallikninger og modellering: Kompendium 3 i MAT1001 Matematikk 1.* Matematisk institutt, Universitetet i Oslo https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/nedlagte-emner/MAT1001/h08/Kompendium3/Kompendium3.pdf

Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2022). *Matematikk R2* (4. utg.). Aschehoug.

Bryman, A. (2016). *Sosial Research Methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Erfjord, I. (1997). *Matematisk modellering og bruk av matematikk i videregående skole* [Hovedgradsavhandling]. Høgskolen i Agder.
Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling-Overview. I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Red.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling (s. 301-304). Springer.
Hall, J. & Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical Modeling - Applications with GeoGebra*™. John Wiley & Sons, Inc.
Haraldsrud, A. D., Sveinson, H. A. & Løvold, H. H. (2020). *Programmering i skolen*. Universitetsforlaget
Heir, O., Erstad, G., Moe, H. & Skrede, P. A. (2008). *Matematikk R2 – bokmål.* Aschehoug.
Heir, O., Borge, I. C., Engeseth, J., Haug,. H. & Moe, H. (2016). *Matematikk R2 - bokmål*
(2. utg.). Aschehoug.
Imsen, G. (2011), *Hva er pedagogikk.* Universitetsforlaget
Klaveness, E., Karlsen, L. & Kverndokken, K. (2019). Forord. I K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk: Matematikkdidaktikk i teori og praksis* (s. 5-9). Fagbokforlaget.
Kunnskapsdepartementet (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/
Manger, T., Lillejord, S., Nordahl, T & Helland, T. (2009). *Livet i skolen 1 – Grunnbok i pedagoikk og elevkunnskap*. Fagbokforlaget.
Niss, M. & Blum, W. (2020) *The learning and teaching of mathematical modelling.* Routledge.
Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. I W. Blum, P. L., Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 3-32). Springer.
Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utg.). Doubleday Anchor Books.
Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.
Skott, J., Skott, C.K., Jess, K., Hansen, C.H. (2018). *Matematik for lærerstuderende: Delta 2.0: Fagdidaktik, 1.-10. klasse.* Samfundslitteratur.
Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. I R. Lesh & A. E. Kelly (Red.), *Research design in mathematics and science education* (s. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse – en innføring i kvalitativ metode.* (5. utg.). Fagbokforlaget.
Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag – programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/mat3-01#
Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for realfag (Matematikk R) (MAT03-02).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Fagfornyelsen 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Utdanningsdirektoratet (2021) *Eksamen REA3024 Matematikk R2*. https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html?query=matematikk%20r2

Utdanningsdirektoratet (2022a) *Eksamen REA3024 Matematikk R2.* https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html?query=matematikk%20r2

Utdanningsdirektoratet (2022b) *Eksempelsett Våren 2023 REA3058 Matematikk R2*. https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html?query=matematikk%20r2

9 Vedlegg

Først kommer prosjektbeskrivelsen (9.1), så kommer tillatelsen fra NSD, altså Sikt (9.2), så kommer informasjonsbrevet til læreren (9.3) og til slutt informasjonsbrevet til elevene (9.4).

9.1 Prosjektbeskrivelsen som ble sendt til NSD i desember 2022

Prosjektbeskrivelse for masteren i MA-502

Tittel/arbeidstittel:

Matematisk modellering med R2-elever: Løsningsstrategier og elevenes bruk av modelleringssyklus.

Jeg tenker å se på et utvalg R2-elever og deres modelleringskompetanse. Jeg vil blant annet se på hvordan elevene beveger seg og tidsbruken deres på de ulike stegene i Blum & Leiß (2006 og 2007) sine modelleringssykluser.

Temabeskrivelse, mål og forskningsspørsmål:

Jeg har valgt å skrive om modellering som er et av kjerneelementene i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Da jeg gikk på barneskolen, ungdomsskolen og videregående hadde vi aldri om temaet "modellering", som jeg kan huske, men bare ligninger, geometri, algebra osv.. Det vil derfor være interessant å bli bevisst på modellering i matematikk R2. Modellering er det som knytter matematikken og den virkelige verden sammen, og det er derfor viktig at elevene vet hvordan de kan anvende matematikk i reelle situasjoner. Det finnes empiriske resultater på at elever har vanskeligheter med å modellere og skjønne hvordan man kan bruke matematikk i det virkelige livet. Blum og Borromeo Ferri skriver blant annet at modellering er kobla sammen med andre matematiske kompetanser (2009, s. 46). Da blir modelleringa kompleks. Blum & Leiß (2007) har skrevet om modelleringssyklusen, og jeg har derfor valgt forskningsspørsmålene:

Hvordan løser R2-elever modelleringsoppgaver? (For vidt spørsmål, hva kjennetegner R2-elevers løsningsstrategier, heller?)
Hvordan beveger et utvalg R2-elever seg i modelleringssyklusen til Blum & Leiß (2007)?

Hvis elevene bruker digitale verktøy kan det være interessant å se på den utvidede modelleringssyklusen (Blum & Leiß 2006). Dette kan spenne fra enkel bruk av en kalkulator til å gjøre en heil oppgave i GeoGebra.

Teoretisk perspektiv og/eller begrepsrammeverk:

Modellering er en del av kjerneelementet Modellering og anvendelser: "En modell er i matematikk R en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Kjerneelementet handler om hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive natur og samfunn. Modellering i matematikk R er å lage slike modeller."(Utdanningsdirektoratet, 2020, s 2-3). Syvstegsmodellen til Blum & Leiß(2007) handler om modellering med følgende steg: Forstå oppgaven, forenkle og strukturere, matematisere, jobbe matematisk, tolke, validere og presentere. Dette blir ofte sett på som en idealisert modell, siden ofte hopper man fram og tilbake, altså at man ikke følger modellen slavisk. Det finnes også andre sykluser, noen har flere og andre har færre steg. Modelleringskompetansen til eleven vil derfor ha litt forskjellige parametre alt etter hvilken modelleringssyklus og hvilke definisjoner man bruker for modellering.

Elevenes lærebok Matematikk R2 fra Aschehoug legger grunnlaget for hva elevene lærer om modellering. Læreboka har to modellering-relaterte delkapitler (Borge et al. 2022, kap. 4) I den gamle læreboka var det kap. 3G og 6G, så de kan gjerne sammenlignes kort og også se på fagfornyelsne. Ingvald Erfjord (1997, s. 3) skriver at man i matematisk modellering analyserer et problem fra et fag eller område ved at man bruker en matematisk tankebygning. Han henviser videre (kilde på alle de andre?) til flere andre forskere som har kommet fram til en femstegsmodell. Jeg vil nå se hvordan modelleringskompetansen er 25 år etterpå.

Blum & Niss: Modellering og modelleringskompetanse + artikler (fra emnene MA-421 og MA-424 på UiA)

Metode:
* Intervjue læreren om modellering
* La elever jobbe med modelleringsoppgaver og ta notater/filme/ta lydopptak
* Samle elevenes løsninger og lydopptak, som begge skal analyseres.
* Enkel spørreundersøkelse til elevene
* Mulig noen korte intervju med elevene i etterkant

Struktur:
Forside
Forord
Sammendrag (på norsk og engelsk)
Innholdsfortegnelse (1, 1.1,1.2, 1.3 osv, maks en type underoverskrift i innholdsfortegnelsen, men kan være kraftigere inndelt i teksten 1.1.2 og 1.1.3 osv)
HOVEDDEL
*Introduksjon (om modelleringskunnskaper og hvorfor det er viktig) kompetanse?
- Bakgrunn og motivasjon for studien
- Intro om forskningslitteratur og forskningsspørsmål
- Oversikt over oppgaven
*Teoretisk rammeverk - Modellering, modelleringssyklus (Blum & Niss)
-Globalt
-"Lokalt"
(Litteratursammendrag? Kan være et underkapittel eller eget kapittel?)
* Metode
(- Paradigme)
-Forskningsstrategi
-Forskningsdesign
-Forskningsmetode(r)
-Analytisk tilnærming
-Reliabilitet og validitet - kvalitetskriterier
-Etiske betraktninger
* Analyse/Resultater (kan deles i to)
* Diskusjon
*Konklusjon (kan være siste avsnittet i diskusjonen)

*Selvrefleksjon - hva har jeg lært?
*Referanser
*Vedlegg (Informasjonsskriv, NSD, intervjuguide, transkripsjoner)

Foreløpig litteratur:

- Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. Journal of Mathematical Modelling and Application. 1.
- Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.). *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (s. 222-231). Chichester: Horwood.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, 222–231. Chichester, UK: Horwood.
- Erfjord, I. (1997). *Matematisk modellering og bruk av matematikk i videregående skole* [Hovedgradsavhandling]. Høgskolen i Agder.
- Borromeo Ferri, R. (2018) Learning how to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education. Springer.
- Hall, J. & Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical Modeling - Applications with GeoGebra™*. John Wiley & Sons, Inc.
- Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2022). *Matematikk R2* (4. utg.). Aschehoug.
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for realfag (Matematikk R) (MAT03-02).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Fagfornyelsen 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

- Artikler fra MA-421 og MA-424 om modellering.

Overordna del i læreplanen?

Fremdriftsplan: Her skal du redegjøre for den planlagte progresjonen i studiet.

- Høstsemesteret 2022:

- Levere prosjektskisse 9.november Veiledningskontrakt?

- NSD(må ha klart infobrev?)

- Etter 1. desember, begynner på teoretisk rammeverk. Utforme oppgaven og pilotere den?

- Januar: Gjennomføring av datainnsamlinga
- Februar: Transkibering
- Mars: Transkribering og analyse. Levere sammendrag til masterseminaret
- April: Masterseminar
- Mai: Innlevering 10. Mai kl.10

· Juni: Forsvare oppgaven (Justerende muntlig eksamen) 5.-7. Juni 2023

Ikke tidsbestemt: Presentere den på skolen jeg skal gjøre datainnsamlinga.

9.2 Svar fra NSD

09.05.2023, 13:18 Meldeskjema for behandling av personopplysninger

Sikt

Meldeskjema / R2-elevers modelleringskompetanse / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
658634	Automatisk	15.12.2022

Prosjekttittel
R2-elevers modelleringskompetanse

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Avdeling for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Yuriy Rogovchenko

Student
Martin Bentsen

Prosjektperiode
16.01.2023 - 31.12.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Meldeskjema

Grunnlag for automatisk vurdering
Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
  - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
  - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
  - Fagforeningsmedlemskap
  - Genetiske data
  - Biometriske data for å entydig identifisere et individ
  - Helseopplysninger
  - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)
- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)
- Hvor lenge personopplysningene vil bli behandlet

https://meldeskjema.sikt.no/6364fdcb-7377-423e-bd4b-e2b32579486d/vurdering 1/2

Figur 15: Utklipp fra NSD, side 1 av 2

09.05.2023, 13:18 Meldeskjema for behandling av personopplysninger

- Retten til å trekke samtykket tilbake og øvrige rettigheter

Vi anbefaler å bruke vår mal til informasjonsskriv.

Informasjonssikkerhet
Du må behandle personopplysningene i tråd med retningslinjene for informasjonssikkerhet og lagringsguider ved behandlingsansvarlig institusjon. Institusjonen er ansvarlig for at vilkårene for personvernforordningen artikkel 5.1. d) riktighet, 5. 1. f) integritet og konfidensialitet, og 32 sikkerhet er oppfylt.

Figur 16: Utklipp fra NSD side 2 av 2

9.3 Infoskriv til R2-læreren

Oppgavebasert intervju i matematikk R2

Velkommen som deltager i forskningsprosjektet «R2-elevers modelleringskompetanse». Under følger litt informasjon om prosjektet, før det i bunnen av neste side er ei samtykkeerklæring som må fylles ut. Takk for at du ønsker å bidra!

Formål
Formålet med dette oppgavebaserte intervjuet er å utforske R2-elevers modelleringskompetanse. Dette er en del av en masteroppgave på UiA.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta, fordi du er en lærer som underviser elever i R2.

Hva innebærer det for deg å delta?
Dersom du takker ja til å delta, ønsker jeg å gjennomføre et intervju med deg. Navnet ditt vil bli anonymisert, og jeg spør ikke om personlige ting. Hensikten er å forstå litt bedre hvordan det jobbes med modellering i faget Matematikk R2. Intervjuet tar omtrent 20 minutter.

Hvis du syns det er greit, vil jeg ta notater underveis, filme intervjuet og ta inn arket du eventuelt skriver på, for å analysere det. Når jeg tar notater, skriver jeg ikke ned sensitive personopplysninger. Filmen (med lyd og bilde) oppbevares på passordbeskyttet harddisk hos meg (lærerstudenten) som intervjuer deg, og slettes i sin helhet senest 31.12.2023. Skulle du skrive noe personlig på arket vil jeg rive det av og brenne den delen av arket.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli sletta. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg, altså lærerstudenten, som intervjuer deg og veilederen min som vil ha tilgang til navnet ditt, denne informasjonen slettes ved prosjektslutt 31.12.2023. Grunnen til at veilederen også vet navnet ditt, er fordi oss tre har hatt e-post-korrespondanse og møte for å planlegge forskningsprosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes innen 31.12.2023. Da vil alle personopplysninger anonymiseres, filmen (med lyd og bilde) slettes og samtykkeskjemaet brennes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Lærerstudent Martin Bentsen: martin.bentsen@hotmail.com, 47808002
- Professor ved UiA: Yuriy Rogovchenko: yuriy.rogovchenko@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med: · Personverntjenester på e-post (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *R2-elevers modelleringskompetanse*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet avsluttes 31.12.2023.

Prosjektdeltaker(lærer) Dato

9.4 Infoskriv til R2-elevene

Oppgavebasert intervju i matematikk R2

Velkommen som deltager i forskningsprosjektet «R2-elevers modelleringskompetanse». Under følger litt informasjon om prosjektet, før det i bunnen av neste side er ei samtykkeerklæring som må fylles ut. Takk for at du ønsker å bidra!

Formål
Formålet med dette oppgavebaserte intervjuet er å utforske R2-elvers modelleringskompetanse. Dette er en del av en masteroppgave på UiA.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi du er en elev i målgruppa.

Hva innebærer det for deg å delta?
Dersom du takker ja til å delta, ønsker jeg å gjennomføre et oppgavebasert gruppeintervju med deg. Det vil si at du svarer på en liten spørreundersøkelse og at du skal jobbe med noen modelleringsoppgaver i mindre grupper. Alle navn vil bli anonymisert, og jeg spør ikke om personlige ting. Hensikten er å forstå litt bedre hvordan elever jobber med modellering, og hvilken kompetanse dere har. Dette vil heller ikke telle som en del av karakteren i faget. Vi kommer til å jobbe med modellering i to skoletimer (en dobbelttime).

Jeg kommer til å ta litt notater underveis, filme oppgave-jobbinga og ta inn arket dere skreiv på, for å analysere det. Når jeg tar notater, skriver jeg ikke ned sensitive personopplysninger. Skulle det mot formodning stå noe personlig på arket, så vil jeg rive det av og brenne det. Filmen (med lyd og bilde) oppbevares på passordbeskyttet harddisk hos meg (lærerstudenten) som intervjuer deg, og slettes i sin helhet senest 31.12.2023

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli sletta. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg og veilederen min, som vil ha tilgang til navnet ditt, denne informasjonen slettes ved prosjektslutt innen 31.12.2023.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes innen 31.12.2023. Da vil alle personopplysninger anonymiseres, og lydopptak og kontaktinformasjon slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Lærerstudent Martin Bentsen: martin.bentsen@hotmail.com, 47808002
- Professor ved UiA: Yuriy Rogovchenko: yuriy.rogovchenko@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med: · Personverntjenester på e-post (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *R2-elevers modelleringskompetanse*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i oppgavebasert gruppeintervju og spørreundersøkelse

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet avsluttes 31.12.2023.

____
____

Prosjektdeltaker(elev)　　　　　　　　　　Dato