1P-elevers arbeid med problemløsning

En studie av to grupper på fire 1P-elevers karakteristikker i arbeid med problemløsning.

KRISTIAN BEDIN OG KRISTIAN SANDE

VEILEDER
Martin Carlsen

Universitetet i Agder, 2022
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Det er med stor fryd og begeistring at vi nå lukker dette kapittelet av livene våre. Vi opplever at fem år på UiA med både oppturer og nedturer har gått fort og at det surrealistisk at vi nå kan kalle oss lærere. Vi har begge lært masse over disse årene, og ser nå frem til å praktisere dette i en ny hverdag.

Vi ønsker å rette en takk til læreren som lot oss låne 1P-klassen sin for å samle inn datamaterialet, og spesielt elevene som deltok på forskningsprosjektet. Vår familie og våre venner fortjener en takk for støtte gjennom tykt og tynt. Vi vil også takke Claire Vaugelade Berg, som var vår veileder fra starten av, og hjalp oss i gang med prosjektet, før Martin Carlsen tok over. Til slutt vil vi takke Martin som inspirerte oss til valg av tema gjennom hans forelesninger i Arbeidsmåter i matematikk, og for å ha tatt over som vår veileder og hjulpet oss i mål med masteravhandlingen.

Kristiansand, mai 2022
Kristian Bedin og Kristian Sande

Sammendrag

Temaet for denne masteravhandlingen har vært matematisk problemløsning med 1P-elever i videregående skole. Vi har observert og tatt lydopptak av to grupper på fire 1P-elever over to datainnsamlinger, og analysert deres bruk av problemløsningsstrategier, i tillegg til deres handlingsmønstre og problemløsningsprosess. Dette med i bakgrunn i følgende forskningsspørsmål:

Hva karakteriserer 1P-elevers arbeid med problemer i en gruppekontekst?

For å besvare forskningsspørsmålet, har vi tatt utgangspunkt i Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier, Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre og Schoenfelds (1981) problemløsningsprosess som analyseverktøy. Læringsperspektivet for studien er sosiokulturelt, der elevene har løst problemer i grupper og har blant annet brukt språk, tegninger og figurer som medierende verktøy for å uttrykke sine tanker. Funnene i denne studien viser at elevene tar i bruk flere ulike problemløsningsstrategier, og at elevene av og til bruker strategiene i kombinasjon med hverandre. Vi har også sett at handlingsmønsteret elevene følger kan ha en sammenheng med hvor grundig de har analysert problemet.

Abstract

Temaet for denne masteravhandlingen har vært matematisk problemløsning med 1P-elever i videregående skole. Vi har observert og tatt lydopptak av to grupper på fire 1P-elever over to datainnsamlinger, og analysert deres bruk av problemløsningsstrategier, i tillegg til deres handlingsmønstre og problemløsningsprosess. Dette med i bakgrunn i følgende forskningsspørsmål:

Hva karakteriserer 1P-elevers arbeid med problemer i en gruppekontekst?

For å besvare forskningsspørsmålet, har vi tatt utgangspunkt i Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier, Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre og Schoenfelds (1981) problemløsningsprosess som analyseverktøy. Læringsperspektivet for studien er sosiokulturelt, der elevene har løst problemer i grupper og har blant annet brukt språk, tegninger og figurer som medierende verktøy for å uttrykke sine tanker. Funnene i denne studien viser at elevene tar i bruk flere ulike problemløsningsstrategier, og at elevene av og til bruker strategiene i kombinasjon med hverandre. Vi har også sett at handlingsmønsteret elevene følger kan ha en sammenheng med hvor grundig de har analysert problemet.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning
I dette kapittelet vil vi først gjøre rede for hvorfor vi valgte problemløsning som tema for studien (1.1). Deretter sier vi noe om hensikten med studien og presenterer forskningsspørsmålet (1.2), før vi til slutt sier noe om oppgavens oppbygging (1.3)

1.1 Bakgrunn for studien
Høsten 2021 hadde vi emnet Arbeidsmåter i matematikk ved Universitetet i Agder. Dette var første gangen vi ble skikkelig introdusert for problemløsning, som var ett av hovedtemaene i dette emnet. Vi opplevde det engasjerende å jobbe med problemløsningsoppgaver, og fikk øynene opp for at dette også kan være gjeldende for våre fremtidige elever. Da vi begge var interesserte i temaet, og vi allerede var enige om å skrive masteroppgave sammen, bestemte vi oss for å forske på dette. I fagfornyelsen som ble satt i verk fra 2020, er *utforskning og problemløsning* ett av kjerneelementene i fellesfaget matematikk. Hensikten med dette kjerneelementet er å blant annet få "elevene til å legge mer vekt på strategier og fremgangsmåter enn løsningene" (Utdanningsdirektoratet, 2019). Fra tidligere praksisperioder i 1P-klasser, har vi sett at 1P-elever sliter med motivasjon i matematikk. Utdanning.no som er den nasjonale nettportalen for utdanning, beskriver 1P-matematikken på følgende måte:

"P-matte er praktisk matematikk. Du lærer å løse matematikkoppgaver som tar utgangspunkt i praktiske situasjoner fra dagliglivet, samfunn og arbeidsliv. Matematikk 1P passer for deg som

- ikke ønsker å fordype deg i matematikk
- ikke ønsker å ta realfag senere" (Utdanning.no, 2020).

Siden 1P-elever kan ha vanskelig for å finne motivasjon i matematikkfaget, samtidig som problemløsning kan oppleves engasjerende, syntes vi det ville være interessant å forske på en slik elevgruppe og deres arbeid med problemløsning. Med fagfornyelsen fra 2020 skal problemløsning ha en større plass i 1P-undervisningen. Ifølge utdanningsdirektoratet sine nettsider under fagrelevans og sentrale verdier for matematikk P, skal faget bidra til at elevene utvikler matematiske problemløsningsstrategier, samt bidra til at elevene utvikler evnen til å samarbeide med andre gjennom utforskning og problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2019). Derfor anser vi det å forske på problemløsning som relevant for oss fremtidige matematikklærere.

1.2 Hensikten med studien
Motivasjonen for studien var altså å forske på 1P-elevers problemløsning. Vi fikk inntrykk av at elevene hadde lite erfaring med problemløsning, og var vant til tavleundervisning etterfulgt av arbeid med oppgaver hvor de anvender bestemte matematiske prosedyrer. Derfor syntes vi det ville være interessant å se etter hvilke handlingsmønstre som kan identifiseres når 1P-elever jobber med problemløsningsoppgaver i grupper, samtidig som vi var nysgjerrige på hvilke problemløsningsstrategier elevene ville ta i bruk. Med dette utgangspunktet har vi formulert følgende forskningsspørsmål:

Hva karakteriserer 1P-elevers arbeid med problemer i en gruppekontekst?

For å svare på dette, har vi observert to grupper på fire 1P-elever med lydopptak, samt samlet inn deres skriftlige besvarelser, og tatt utgangspunkt i Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier, Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre og Schoenfelds (1981) sekstrinnsmodell for problemløsningsprosessen. Siden samtalene mellom gruppene var en sentral del av studien, der elevene blant annet brukte språk, tegninger og symboler som medierende redskap, ble det sosiokulturelle læringsperspektivet grunnlaget for lærings- og problemløsningsprosessene til elevene (Säljö, 2001, s. 82-84).Vi var lenge interesserte i å studere elevenes *beliefs* knyttet til problemløsning, som dreier seg om hvilke tanker et individ har rundt seg selv og matematikk, og som er med på å påvirke hvordan individet agerer i møte med for eksempel problemløsning (Schoenfeld, 1985). Dette beveget vi oss vekk ifra på grunn av omfanget på studien, i tillegg til at vi erfarte at dette var vanskelig å forske på.

1.3 Oppgavens oppbygging

Oppgaven består av seks kapitler, der hvert kapittel starter med en innledende tekst der vi gjør rede for innholdet. Det teoretiske rammeverket blir redegjort i kapittel 2, der vi blant annet presenterer det sosiokulturelle læringsperspektivet (Säljö, 2001), Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier og Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre. I kapittel 3 presenterer vi metodologien for studien og beskriver hvordan vi har gått frem for å samle inn data til studien. I kapittel 4 analyserer vi det innsamlede datamaterialet i lys av Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier og Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre, og Schoenfelds (1981) sekstrinnsmodell for problemløsningsprosessen. Funnene blir deretter drøftet i kapittel 5, der vi sammenligner resultatene våre med tidligere forskning og svarer på forskningsspørsmålet, før vi gir en kort konklusjon. Til slutt vil vi komme med noen didaktiske og forskningsmessige implikasjoner i kapittel 6.

2 Teori

I dette kapittelet vil vi presentere det teoretiske rammeverket for studien. Først vil vi koble studien opp mot det sosiokulturelle læringsperspektivet (2.1), før vi vil definere et matematisk problem (2.2) og presentere ulike modeller av problemløsningsprosessen (2.3). Deretter vil vi presentere to opplistinger av problemløsningsstrategier (2.4), og gjøre rede for diverse handlingsmønstre elever kan følge når de jobber med problemløsning (2.5). Til slutt presenteres tidligere relevant forskning (2.6).

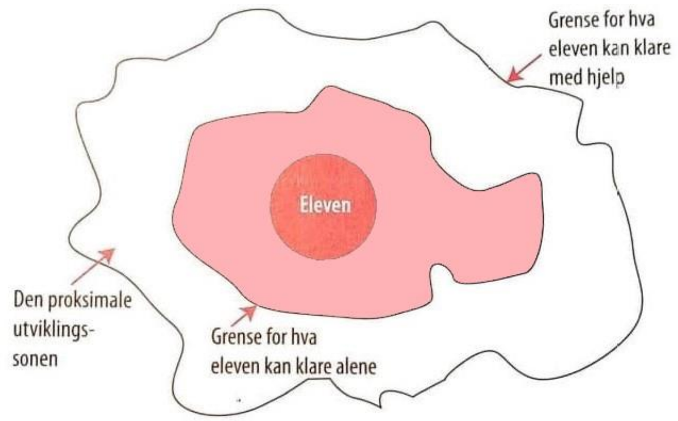
2.1 Sosiokulturelt læringsperspektiv

Denne studien kan relateres til et sosiokulturelt perspektiv på læring. I løpet av de siste tiårene har den sosiale og kulturelle rollen knyttet til læring av matematikk, fått større oppmerksomhet. Dette omtales som *the social turn* og er inspirert av Vygotsky og den sosiokulturelle læringsteorien (Skott, Skott, Jess & Hansen, 2019).

Det sosiokulturelle læringsperspektivet har sitt opphav rundt idéene til Lev S. Vygotsky, som legger stor vekt på den sosiale konteksten der læring og utvikling skjer (Säljö, 2001; Wittek, 2004). Vygotsky belyser at det er ved bruk av språket man kan uttrykke våre tanker, samtidig som vi tenker ved hjelp av språket. Når man prater setter man ord på oppfatninger av verden vi har rundt oss, mens begrepene og ordene man lærer blir redskapet man bruker for vår tenkning (Wittek, 2004, s. 55). Mennesket er mest kreativt når det tenker sammen med andre, og det er derfor nyttig å involvere seg i andres tenkning (Wittek, 2004, s. 86). I arbeid med problemer lønner det seg å være kreativ, ettersom man ikke kjenner til fremgangsmåten. Derfor kan det være fordelaktig å løse problemer i mindre grupper. Dysthe påpeker at det sosiokulturelle perspektiv bygger på tanken rundt at "kunnskap blir konstruert gjennom samhandling og i ein kontekst, og ikkje primært gjennom individuelle prosessar" (Dysthe, 2001, s. 42). Derfor er samarbeid og det å delta i sosiale praksiser, ifølge det sosiokulturelle perspektivet, grunnleggende for at læring skal skje (Dysthe, 2001).

En grunnleggende tanke i det sosiokulturelle perspektivet er at fysiske og intellektuelle redskaper *medierer*, eller formidler, virkeligheten for mennesket i ulike sammenhenger. Mennesket håndterer verden ved hjelp av fysiske og intellektuelle redskaper som er med på å forme vår sosiale praksis. Mediering kan skje ved bruk av teknikker eller artefakter, men først og fremst gjennom språket vårt (Säljö, 2001, s. 82-84). Dersom man skal forstå hvordan læring utarter seg i sosiale praksiser, der mennesker bruker ulike medierende redskaper, kan man ikke studere mennesket og de medierende redskapene hver for seg. Man må derimot studere hvordan mennesket handler i samspill med det medierende redskapet i den sosiale settingen (Säljö, 2001, s.82-84)

Utviklingen går fra det sosiale til det individuelle, ifølge Vygotsky. Det vil si at mennesket er i stand til å utføre en handling sammen med andre, før det evner å gjøre det alene. Det finnes altså en "sone" mellom hva eleven makter å gjøre alene og hva eleven klarer med hjelp. Denne sonen kaller Vygotsky *den proksimale utviklingssonen,* som vi kan se på figur 1 nedenfor (Imsen, 2014).



Figur 1: *Den proksimale utviklingssone* (Imsen, 2014, s. 192)

Man bør derfor tilpasse undervisning og oppgaver i skolen slik at man treffer denne sonen hos elevene. Elever vil ha lite utbytte av å jobbe med oppgaver de allerede mestrer, samtidig vil oppgaver som ligger over den proksimale utviklingssonen hos elevene være til lite nytte. En bør derfor legge til rette for at elevene blir utfordret på oppgaver de kan klare ved hjelp av andre støttespillere (Wittek, 2004, s.107).

2.2 Problemløsning

Det finnes mange forskjellige definisjoner av et problem innen matematikken. Björkqvist (2003) omtaler et problem innenfor problemløsning, som en oppgave der den deltakende personen ikke umiddelbart klarer å se hvilke løsningsmetoder som kan brukes for å løse problemet. Schoenfeld (1985) omtaler et problem som et relativt begrep innenfor matematikken. Det som er et problem for én person, trenger ikke nødvendigvis være det for én annen, da ulike personer besitter ulik kunnskap og tenker på forskjellige måter. Dermed kan alle oppgaver være et problem for én eller annen person ut i fra denne definisjonen.

Schoenfeld (1985, s.15) lister opp fire punkter som han mener er nødvendige og tilstrekkelige for å analysere hvorfor en person opplever suksess eller fiasko i møte med problemløsningsoppgaver. Det første punktet omtaler han som *resources* der han peker på individets forståelse, faktakunnskaper og algoritmiske prosedyrer som åpenbart er viktige faktorer for utfallet av problemløsning. Den neste faktoren som spiller inn er *heuristics,* som dreier seg om hvilke strategier og teknikker individet bruker for å løse et problem. *Control* handler om individets "decision making", planlegging og regulering av egen atferd utover i problemløsningsprosessen. Det siste punktet, *belief systems,* sier noe om et individs tanker rundt seg selv, matematikk og problemløsning generelt. I dette forskningsprosjektet har vi blant annet valgt å vektlegge *heuristics* og *control*, der vi skal se etter hvilke problemløsningsstrategier 1P-elever tar i bruk, i tillegg til at vi skal analysere elevenes problemløsningsprosess.

2.3 Problemløsningsprosessen

Det finnes flere fremstillinger av de ulike fasene man går gjennom i møte med problemløsning. Polya (1957) har laget en firetrinnsmodell med fasene *forstå problemet, legge en plan, utføre planen* og *se tilbake.* Å *forstå problemet* dreier seg om å finne ut hva som etterspørres. Det er hensiktsmessig å lese problemet flere ganger og prøve og se problemet fra forskjellige synsvinkler. Det ukjente bør identifiseres, samtidig som det er nyttig å skille ut hvilken informasjon som er viktig for å løse problemet (Polya, 1957, s. 6).

Det neste steget i problemløsningsprosessen er å *legge en plan*. En skal da gjøre seg opp tanker om hvordan problemet kan løses. Denne fasen kan være tidkrevende og utfordrende. Det er ikke uvanlig at det etter mye tenking og testing, plutselig kan gå opp et lys for den enkelte om hvilken strategi man kan benytte seg av. Av og til kommer idéene våre fra tidligere erfaring av lignende problemer. Det kan derfor være lurt å stille seg spørsmålet om problemet har likhetstrekk med noe man har vært borti tidligere. En annen måte å starte planleggingen på, kan være å dele problemet opp i mindre problemer, om det lar seg gjøre (Polya, 1957, s.8-10). Selv om man har *lagt en god plan*, kan det likevel være utfordrende å *utføre planen*. Når man utfører planen, er det viktig å være nøye og sjekke hvert enkelt steg av fremgangsmåten. Om et av stegene ikke er matematisk gyldig, eller at det har oppstått en regnefeil, vil dette forplantes og man kan ende opp med galt svar på problemet (Polya, 1957, s.12-14).

Det er vanlig blant elever å si seg fornøyd etter at de har funnet et svar på problemet. Om man *ikke ser tilbake*, mister man et viktig aspekt ved problemløsningsprosessen. Ved å evaluere fremgangsmåten og resultatet, kan man konsolidere kunnskapen og utvikle problemløsningsferdighetene. Mange elever synes det kan være interessant å se tilbake på problemet dersom de føler at de har gjort et ærlig forsøk på å løse det. Nysgjerrigheten trigges, og elevene blir interessert i å finne ut om de har kommet frem til riktig svar på problemet (Polya, 1957, s.14-16).

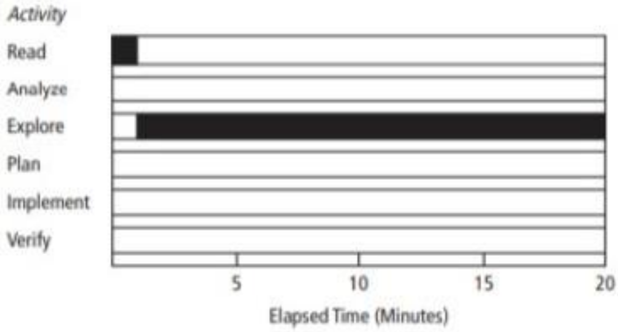
Schoenfeld (1981, s. 24) utvidet modellen til Polya, og delte problemløsningsprosessen inn i det han kaller *episodes*, der han la til en *analyse*- og *utforskningsfase*. En sammenligning av disse modellene kan vi se på Figur 2.

Polya 1957	Schoenfeld 1981
Forstå problemet	Lese
	Analysere
Legge en plan	Utforske
	Planlegge
Utføre planen	Implementere
Se tilbake	Verifisere

Figur 2: Sammenligning av Polyas og Schoenfelds ulike steg i problemløsningsprosessen.

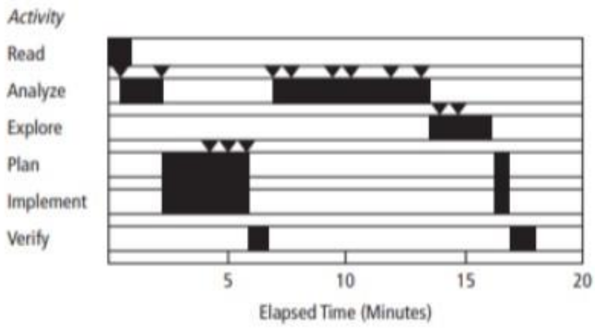
Den første fasen til Polya delte Schoenfeld opp i to; en *lesefase* og en *analysefase*. Han skilte mellom å først *lese* hva som faktisk står i oppgaven, det man henter ut av informasjon og data som er tilgjengelig i oppgaveteksten, for deretter å *analysere* problemet for å finne ut hva det faktisk spørres etter, og om det er mulighet for å omformulere eller forenkle problemet. I tillegg er Polyas andre steg, *å legge en plan*, blitt delt opp i en *utforskningsfase* og en *planleggingsfase*. Schoenfeld beskrev *utforskningsfasen* som noe mer ustrukturert enn *analysefasen*. I *utforskningsfasen* kan man finne relevant informasjon, tenke gjennom om man kjenner til lignende problemer og lete etter strategier som kan brukes for å løse problemet. Etter å ha *analysert* og *utforsket* problemet er neste steg å *planlegge* hvordan problemet skal løses, før man deretter går i gang med å *implementere* planen. Til slutt skal løsningen på problemet *verifiseres*, hvor man sjekker om svaret virker fornuftig, og ser etter muligheter for å teste eller bevise dette.

Schoenfeld tok utgangspunkt i denne sekstrinnsmodellen da han forsket på ulike individers tilnærming til problemløsning. Det som kjennetegner college- og high school-elevers problemløsning ifølge Schoenfeld (2016), er at de leser oppgaven og deretter velger en tilnærming som de naivt og instinktivt følger. På tidslinjen nedenfor kan vi se at elever uten trening i problemløsning gjerne bruker ett minutt til å *lese* oppgaven, før den resterende tiden brukes på å *utforske* problemet.



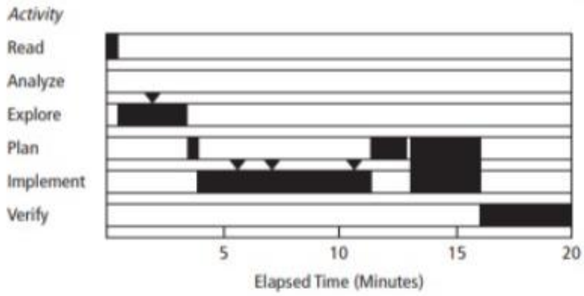
Figur 3: Tidslinje over hva Schoenfeld (2016) omtaler som en typisk elevs problemløsningsprosess.

Selv om den valgte metoden ikke leder frem til en løsning, har elevene likevel en tendens til å fortsette i samme spor uten å vurdere om de burde velge en annen strategi. Denne tilnærmingen til problemløsning skiller seg tydelig fra en matematikers måte å løse problemer på, som vi kan se om vi sammenligner figur 3 med figur 4. Matematikere bruker gjerne tid på å analysere problemet, før de går i gang med å *planlegge* og *implementere* planen. Deretter *verifiseres* fremgangsmåten og resultatet, og prosessen starter på nytt om idéen ikke leder frem. Vi kan se at matematikeren til sammen bruker omtrent halvparten av tiden til å *lese* og *analysere* problemet. Vi kan også se at matematikeren kommer med kommentarer til egen problemløsning, som er markert med trekanter på figur 4.



Figur 4: Tidslinje over hva Schoenfeld (2016) omtaler som en typisk matematikers problemløsningsprosess.

Schoenfeld (2016) peker også på at elever kan trenes i problemløsning, og viser til at elevenes tilnærming ble tydelig forandret etter et gjennomført kurs i problemløsning. Elevenes tilnærming ble mer lik en matematikers, som medførte at de i større grad lyktes med problemløsning. På figur 5 kan man se at elever etter trening i problemløsning, bruker mer tid på *planlegging*, *implementering* og *verifisering*, samtidig som vi også kan se at de har begynt å kommentere egen problemløsning.



Figur 5: Tidslinje over en typisk elevs problemløsningsprosess, etter trening i problemløsning.

Vi anser Polyas (1957) modell som lite eksplisitt når det gjelder å analysere elevenes problemløsningsprosess. Den inkluderer ikke en *utforskende* fase, som vi kunne se igjen da elevene jobbet med problemene. Ettersom Schoenfelds (1981) modell er mer komplett, har vi valgt å bruke denne i analysen av elevenes problemløsningskarakteristikker.

2.4 Problemløsningsstrategier

Siden problemløsning handler om å løse oppgaver der fremgangsmåten er ukjent, er det opp til elevene å finne ut hvilke strategier de vil bruke for å løse et gitt problem. Det finnes ulike opplistinger av ulike strategier som kan brukes i problemløsning. Torkildsen (2017) lister opp seks ulike strategier som kan brukes for å løse matematiske problemer:

- Lage en visualisering
- Prøve og feile
- Lage en systematisk tabell
- Se etter mønster
- Arbeide baklengs
- Forenkle problemet

Han peker også på at det ofte vil være nyttig å benytte seg av flere strategier for å løse et problem. En annen opplistning av strategier finner vi i Posamentier og Krulik (1998):

- Jobbe baklengs
- Se etter mønster
- Se problemet fra en annen synsvinkel
- Gjøre forenklinger
- Se på ekstremtilfeller
- Lage Figur
- Intelligent gjetning og testing
- Teste alle muligheter
- Organisere data
- Logiske resonnementer

Vi valgte å bruke Posamentier og Krulik (1998) sine problemløsningsstrategier som rammeverk for hva vi skulle se etter når elevene arbeidet med problemene. En årsak til dette var at vi fant tilsvarende versjoner av Torkildsens (2017) strategier i Posamentier og Kruliks (1998) opplistning. *Logiske resonnementer* og *se problemet fra en annen synsvinkel*, var strategier elevene tok i bruk ved flere anledninger, som ikke inngår i Torkildsen (2017). Vi mente derfor at Torkildsens (2017) strategi-liste er noe ufullstendig, samtidig som den ikke tilfører noe ekstra til Posamentier og Krulik (1998). I tillegg inneholder Posamentier og Krulik (1998) en rekke problemer, samt forslag til hvordan man kan ta i bruk de ulike strategiene for å løse dem. Dette var til stor hjelp da vi skulle velge ut problemer til datainnsamlingen. Under vil hver av strategiene bli presentert og eksemplifisert.

2.4.1 Jobbe baklengs

I de fleste tilfeller vil det å jobbe fremover være det enkleste valget, men det kan eksempelvis være nyttig å *jobbe baklengs* dersom man skal generalisere løsningen av et problem (Posamentier & Krulik, 1998, s. 15). Strategien kan også brukes for å løse selve problemet. Vi kan se for oss at vi skal steke en pizza i 15 minutter, men kun har to tidtakere på henholdsvis elleve og syv minutter tilgjengelig. Da kan man ta utgangspunkt i de 15 minuttene og jobbe seg bakover. Dersom man starter tidtakeren på elleve minutter da pizzaen settes inn i ovnen, mangler man fire minutter når denne ringer. For å kunne måle opp fire minutter kan man starte de to tidtakerne samtidig siden 11 - 7 = 4. Hvis man da starter tidtakerne før man starter stekingen av pizzaen, og setter den inn i ovnen når tidtakeren på syv minutter ringer, vil det gjenstå fire minutter av tidtakeren på elleve minutt. Når de fire minuttene er gått kan man restarte tidtakeren på elleve minutt og pizzaen er klar når denne ringer.

2.4.2 Se etter mønster

Å *se etter mønster* kan være en nyttig, og i noen tilfeller, en nødvendig strategi for å løse et problem. Om man klarer å avdekke et mønster gir dette oss en indikasjon på hva som skjer, og kan hjelpe oss på veien videre i problemløsningsprosessen. Det er en strategi som også kan brukes i dagliglivet, som når man skal finne frem til en adresse ved å se på husnummer, eller memorere ulike tall som telefonnumre eller bilskilt. Enkelte matematiske problemer kan forenkles i større eller mindre grad om man klarer å finne et bestemt mønster. Det kan derfor være en nyttig strategi i møte med problemløsning (Posamentier & Krulik, 1998, s. 37-39). Problem 6 (se kap. 3.8.6), som handler om å finne sammenhenger mellom summene av fire etterfølgende tall, er en typisk oppgave der det vil være hensiktsmessig å lete etter mønster.

2.4.3 Se problemet fra en annen synsvinkel

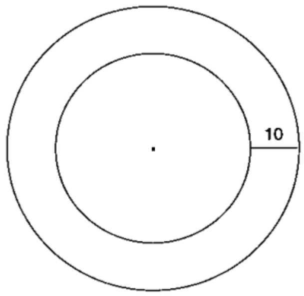
I enkelte tilfeller kan det være hensiktsmessig å *se problemet fra en annen synsvinkel*. På problem 5 (se kap. 3.8.5) skal man finne ut hvor mange kamper som blir spilt i en utslagsturnering i tennis med 25 deltakere. I stedet for å sette opp et system og telle antall kamper, kan vi se på hvor mange tapere det er. Ettersom vi kun skal stå igjen med en vinner, må 24 spillere ha tapt en kamp, og siden det er snakk om et system med utslagskamper vil det derfor være 24 kamper som spilles i turneringen (Posamentier & Krulik, 1998, s.69).

2.4.4 Gjøre forenklinger

Å løse et enklere analogt problem er den fjerde strategien Posamentier og Krulik (1998) presenterer. Denne strategien har tydelige likhetstrekk med det Torkildsen (2017) kaller forenkle problemet. Å gjøre forenklinger kan i enkelte tilfeller gi innsikt i hva en trenger for å løse selve problemet (Posamentier & Krulik 1998, s.97). Å manipulere problemet på en slik måte kan hjelpe oss med å forstå “hva som skjer”, og mulig hjelpe oss med å avdekke ulike mønstre som oppstår. Vi kan se for oss en førsteklassing som skal lære seg å lese. Hvis eleven hadde begynt med å lese bøker ville ikke eleven kommet noen vei. Men dersom eleven først hadde lært seg alfabetet, lydene til bokstavene og enkelte ord, ville det vært mer hensiktsmessig å gi eleven en lettlest bok for videre praktisering. Dette kan sammenlignes med problemløsning, der det å dele problemet opp i mindre, enklere problemer kan hjelpe oss å komme videre i problemløsningsprosessen. På problem 7 (se kap. 3.8.7) om gallamiddagen, løste begge gruppene problemet ved hjelp av forenklinger, da de så på hvor mange fat en mindre gruppe mennesker skulle dele mellom seg.

2.4.5 Se på ekstremtilfeller

Å se på ekstremtilfeller kan være en av de mest verdifulle strategiene innen problemløsning. Ved å teste ekstreme tilfeller kan man få verdifull innsikt til problemet. Strategien kan brukes ved å holde noen variabler konstant, mens andre variabler settes til det ekstreme (Posamentier & Krulik, 1998, s. 117-118). Dette er noe som også gjøres i dagliglivet, dersom man for eksempel skal teste et lydanlegg. Man ønsker å høre lydkvalitet på det maksimale volumet, og hvordan det høres ut på et veldig lavt lydnivå. Hvis man skal finne forskjellen på omkretsen mellom to sirkler, hvor avstanden mellom dem er 10 cm (som vist på Figur 6), vil det være hensiktsmessig å se på et ekstremtilfelle. Hvis man setter radiusen til den innerste sirkelen til å være tilnærmet lik 0, vil også omkretsen til denne sirkelen være tilnærmet lik 0. Dermed vil forskjellen mellom omkretsene på sirklene være lik omkretsen til den ytterste sirkelen som blir 20π.



Figur 6: To sirkler med ti centimeter forskjell på diameteren.

2.4.6 Lage figur

Posamentier og Krulik (1998, s. 139) mener at det i de fleste tilfeller er nødvendig å *lage figur* for å løse geometriske problemer. Det er derimot ikke bare de geometriske oppgavene det kan være hensiktsmessig å lage figurer. Både i dagliglivet og i møte med andre typer problemløsningsoppgaver vil en visuell representasjon hjelpe oss til å få en bedre oversikt over hva det måtte gjelde, om det skulle være en geometrisk figur eller et oversiktsbilde over leiligheten du vurderer å kjøpe. Å lage figur er en strategi som kan være til hjelp for å løse de fleste matematiske problemer. Elevgruppene lagde figurer på Problem 5 og Problem 7 (se kap. 3.8.5 og 3.8.7), da elevene skulle beregne hvor mange kamper som ble spilt i en tennisturnering, og hvor mange gjester som var til stede på en gallamiddag.

2.4.7 Intelligent gjetning og testing

Intelligent gjetning og testing kan forbindes med prøving og feiling, men dette blir en overforenkling ifølge Posamentier og Krulik (1998, s. 165), som påpeker at det er forskjell på en gjetning og en intelligent gjetning. Det skal ikke være en ubegrunnet, tilfeldig påstand som testes, men det skal ligge en tanke og en mening bak denne gjetningen. Måten man bruker denne strategien er derfor å først gjøre en gjetning, for å deretter teste om dette fungerer. Om gjetningen viser seg å gi resultater, vil dette gi oss mer informasjon rundt problemet som kan hjelpe oss videre i prosessen. Dette kan relateres til det Mason og Davis (1991, s. 19) omtaler som *conjectures*. Mye av hensikten med å komme med en slik bevisst gjetning er å få uttrykt, enten skriftlig eller muntlig, hva en tenker rundt problemet. Da elevene skulle finne ut hvor langt katten måtte løpe for å ta igjen musa på Problem 8 (se kap. 3.8.8), endte begge gruppene opp med å teste flere ulike tall, for å finne ut hvordan katten og musa lå i forhold til hverandre.

2.4.8 Teste alle muligheter

Å *teste alle muligheter* er en annen strategi som kan hjelpe oss med å løse enkelte problemer. Om en for eksempel skal reise fra A til B vil det være fornuftig å se på alle mulige reiseruter, for å få innsikt i hvilken vei som er mest tidsbesparende, eventuelt billigst om det er det man er mest opptatt av. Det er ikke nødvendigvis den mest matematiske måten å løse problemer på, men kan være hensiktsmessig i fraværet av andre løsningsmetoder. Det er likevel viktig å være organisert om man velger denne strategien, da det er fare for å ende opp med galt svar om en skulle glemme å se på en av mulighetene (Posamentier & Krulik 1998, s. 187).

2.4.9 Organisere data

Å *organisere data* kan fungere som et visuelt hjelpemiddel for å skaffe en oversikt over tilgjengelig informasjon. Dette gjøres ofte i hverdagen, dersom man for eksempel vil gjøre en handletur så effektiv som mulig, eller skaffe oversikt over pensumet til en prøve (Posamentier & Krulik, 1998, s. 203). Den vanligste metoden er å representere data visuelt i form av en tabell eller graf. Det kan også gjøres ved å simpelthen reorganisere data for å få en annen innfallsvinkel på problemet, ved å bruke andre representasjoner (Posamentier & Krulik, 1998 s. 203). Det ble blant annet gjort et forsøk på å organisere data da elevgruppene skulle finne ut hvor mange elever som ikke ble utsatt for uhell på Hovdenturen (Se kap. 3.8.3). Dette ble gjort ved å finne ut hvor mange elever på turen som bare ble utsatt for én av hendelsene, for så å jobbe seg videre derfra.

2.4.10 Logisk resonnement

Den siste problemløsningsstrategien Posamentier og Krulik trekker frem er *logisk resonnement*. Å resonnere logisk er noe vi alle gjør i dagliglivet gjennom blant annet samtaler og planlegging av ulike gjøremål eller aktiviteter. Når det kommer til matematikken er dette ifølge Posamentier og Krulik (1998, s. 225) noe som krever trening for å mestre. Logiske resonnementer kan hjelpe oss til å komme med *intelligente gjetninger*, *forenklinger* av problemer eller *se problemet fra andre synsvinkler*. Derfor etterfølges ofte et logisk resonnement av annen problemløsningsstrategi, noe vi også kunne se igjen da vi analyserte problemløsningsseansene til elevene.

2.6 Handlingsmønster

Callejo og Vila (2009) peker på fem ulike handlingsmønstre de ser igjen i elevers tilnærming til problemløsningsoppgaver:

- Effektivt
- Effektivt, men med fokus på konkrete aspekter av problemet
- Ineffektivt
- Naivt og impulsivt
- Raske, ubegrunnede svar

Det første handlingsmønsteret, *effektivt*, gjenkjennes ved at elevene søker det generelle og organiserer informasjonen i oppgaven. Dette kan gjøres ved å lage figurer eller organisere den tilgjengelige informasjonen i tabeller. Det neste handlingsmønsteret, *effektivt, men med fokus på konkrete aspekter av problemet*, skiller seg fra det første handlingsmønsteret ved at elevene vier større oppmerksomhet til deler av problemet. Når man handler på denne måten, henger man seg ofte opp i detaljer, som kan være en hindring når man gjennomfører en helhetlig analyse av problemet (Callejo & Vila, 2009). På ett av problemene, som dreide seg om en utslagsturnering i tennis (se kap. 3.8.5), ble flere av elevene opphengt i at 25 var et oddetall. Systemet gikk derfor ikke opp, mente elevene, og dette tok oppmerksomhet bort fra selve problemet.

Man kan også handle *ineffektivt* i møte med et problem. Med dette mener Callejo og Vila (2009) at elevene henger seg opp i uviktige detaljer rundt problemet. Man bruker tid på å gjøre unødvendige utregninger eller følger strategier som ikke er særlig tidseffektive. Dette handlingsmønster kommer ofte til syne når man ikke klarer å finne en god strategi. Da gruppe Sande skulle finne sammenhenger mellom summen av fire etterfølgende tall (se kap. 4.4), jobbet de usystematisk og testet tilfeldige kombinasjoner for å løse problemet. Dette var lite tidseffektivt, og de klarte heller ikke avdekke noe mønster.

Elevene kan også ha en *naiv og impulsiv* tilnærming til problemer. Da følger elevene den første tanken som inntreffer, uten å vurdere om dette vil lede frem til en løsning på problemet. Et eksempel på et naivt og impulsivt handlingsmønster finner man hos gruppe Sande, da de skulle finne ut hvor mange elever som ikke ble utsatt for noen av hendelsene på Hovdenturen (se kap. 3.8.3). Før de hadde forstått informasjonen i oppgaven, gikk de i gang med et forsøk som ga dem -3 til svar. Det er derfor sannsynlig at de handlet på instinkt, og fulgte dette naivt og ukritisk. Det siste handlingsmønsteret som Callejo og Vila (2009) har listet opp, er å hurtig komme frem til *raske og ubegrunnede svar.* Lampert (1990) påpeker at for mange elever handler matematikk om å finne det riktige svaret på kortest mulig tid. Dette kan derfor medføre at raske og ubegrunnede svar forekommer hos elever.

2.7 Tidligere forskning

Saygılı (2017) forsket på 18 high school-elever i Tyrkia, da han blant annet så etter hvilke problemløsningsstrategier elevene på fire ulike trinn brukte i møte med problemløsning. Han brukte riktignok en annen opplisting av strategier enn Posamentier og Krulik (1998), men fant ut at de mest brukte strategiene hos elevene var strategier som tilsvarer *logisk resonnement, se etter mønster, lage figur* og *organisere data.*

Saygılıs (2017) forskning viste også til at elevene som opplevde størst suksess med problemløsning også var dem som tok i bruk flest strategier, mens elevene som opplevde lite suksess gjerne brukte én eller ingen strategier for å løse problemene. Dette er i tråd med Erbas og Okur (2010), som forsket på fem high school-elever, og som pekte på at det ofte kreves flere strategier for å løse et problem. De konkluderte med at de mest suksessrike problemløserne klarte å ta i bruk forskjellige strategier, og var i stand til å bytte strategi om den første ikke ledet frem. Erbas og Okur (2010) brukte Posamentier og Kruliks (1998) strategier og fant ut at *logisk resonnement, se etter mønster* og *organisere data* var blant de mest brukte strategiene, sammen med *teste alle muligheter*. Strategiene *se på ekstremtilfeller, se problemet fra annen synsvinkel og gjøre forenklinger* ble derimot ikke brukt.

Intaros, Imprasitha og Srisawadi (2014) gjennomførte en studie om seks elevers[1] bruk av problemløsningsstrategier ved samarbeid. Alle av Posamentier og Kruliks (1998) strategier ble tatt i bruk, der de mest brukte strategiene var *lage figur, teste alle muligheter* og *logisk resonnement*. De minst brukte strategiene var *se på ekstremtilfeller, jobbe baklengs* og *gjøre forenklinger*.

[1] I deres forskningsartikkel kommer ikke alder på elevene frem, men basert på artikkelens innhold, har vi grunn til å tro at de var videregående-alder.

3 Metode
I dette kapittelet vil vi gjøre rede for metodologien i studien, og de ulike datainnsamlingsmetodene vi har benyttet oss av (3.1 - 3.3). Vi vil også presentere utvalget av gruppene vi forsket på (3.4), gjennomføringen av datainnsamlingene (3.5), hvordan vi har transkribert lydopptakene (3.6) og hvilke matematiske problemer vi vektla for å identifisere elevenes karakteristikker ved problemløsning (3.7 og 3.8). Deretter vil vi legge frem analyseprosessen (3.9) før vi til slutt vil gjøre rede for etikken (3.10), reliabiliteten (3.11) og validiteten (3.12) til studien.

3.1 Forskningsstrategi
En kvalitativ forskningsstrategi vektlegger grundig analyse av mindre data. Dette skiller seg fra en kvantitativ forskningsstrategi hvor man har en overfladisk analyse av mye data. Der forsker er distansert fra de involverte individene i en kvantitativ tilnærming, vil forsker i en kvalitativ tilnærming forsøke å sette seg inn i hvordan individene tenker. Da man i kvantitativ forsking vanligvis tester teorier eller hypoteser, utvikler man teorier og forståelse om et emne gjennom kvalitativ forskning. Formålet med en kvalitativ tilnærming er ikke å generalisere, men å hente ut grundig informasjon på et mindre område, som for eksempel en elevgruppe. En kritikk til kvalitativ forskning er at funnene ofte avhenger av forskers syn på hva som er relevant og viktig, noe som kan gå ut over reliabiliteten til studien (Bryman, 2001). Vi valgte en kvalitativ forskningsstrategi, ettersom vi ønsket å gjøre en grundig analyse av få elevers problemløsningskarakteristikker.

3.2 Forskningsdesign
Vi valgte å gjennomføre en flercasestudie som er et kvalitativt forskningsdesign. En casestudie innebærer en detaljert analyse av et enkelt tilfelle. En casestudie er opptatt av kompleksiteten og den spesielle karakteren til aktuelle saken. Saken kan være et samfunn, en skole, en familie, en organisasjon, en person eller en hendelse (Bryman, 2001). I vårt prosjekt så vi på to grupper på fire 1P-elever som to caser, i arbeidet med å analysere karakteristikkene til 1P-elevers problemløsning. Grunnen til at vi valgte å gjøre en flercasestudie var for å kunne undersøke elevers problemløsningsstrategier og handlingsmønstre på et kvalitativt nivå. Ettersom vi skulle studere elevers karakteristikker ved problemløsning, var det mer interessant å gå i dybden på få elever, i stedet for å studere flere elever overfladisk.

3.3 Forskningsmetode
Observasjon er en forskningsmetode for datainnsamling man bruker for å innhente systematisk informasjon om et fenomen eller en atferd (NDLA, 2019). Som observatør får man konteksten til datainnsamlingen, der man får er et mer troverdig inntrykk av elevene og deres atferd, og dynamikken elevene imellom. Samtidig avhenger konklusjonene og antagelsene som blir gjort, av hvem som observerer, og i hvilken grad observatøren involverer seg (Cohen, 2007). I utgangspunktet skulle vi gå inn i observatørrollen *deltaker-som-observatør*, som vil si at forsker er tett på situasjonen som blir observert, og deltar i liten grad. I en slik rolle skal ikke observatøren svare på spørsmål knyttet til det faglige (Postholm & Jacobsen, 2018). Da vi var alene med hver vår gruppe, stilte de noen spørsmål, som vi i noen tilfeller besvarte. Det var derfor utfordrende å holde oss i denne observatørrollen.

I tillegg tok vi lydopptak av problemløsningsseansene. Til dette valgte vi å bruke diktafon. Om vi kun hadde samlet inn elevbesvarelser kunne det for eksempel blitt vanskelig å identifisere hvilke strategier elevene brukte. Da ville vi ikke fått innblikk i hvordan elevene tenkte eller resonnerte, og vi kunne risikert å ende opp med besvarelser uten begrunnede fremgangsmåter eller strategier. Strategien *logiske resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998) var en gjenganger i datainnsamlingen, og var eksempel på en strategi vi opplevde at vi var avhengig av lydopptaket for å observere. Når elever samarbeider med problemer i grupper blir det lagt til rette for å uttrykke sine tanker og idéer, som bidro til at vi kunne avdekke diverse karakteristikker ved elevenes problemløsning. Vi var også til stede med hver vår gruppe elever som vi observerte, samtidig som vi tok notater underveis.

Det å ta lydopptak har noen begrensninger sammenlignet med det å bruke video. Med video har man muligheten til å analysere kroppsspråket til elevene, og merke seg de øyeblikkene de skriver eller kladder. Vi gjorde derimot en antagelse om at videoopptak ikke ville tilføre noe ekstra for å identifisere strategier eller handlingsmønstre. I tillegg kan enkelte elever føle på ubehag når de blir filmet, og vi konkluderte derfor med at lydopptak var tilstrekkelig.

I tillegg til observasjon gjennom tilstedeværelse og lydopptak, samlet vi inn papirene elevene skrev på. Dette inkluderte besvarelsene på problemene, og kladden de gjorde. Dette var for å styrke helhetsbildet av problemløsningsseansen. Denne datainnsamlingsmetoden avhenger av individene som deltar. Der noen elever skriver alt de tenker, skriver andre bare svaret på problemet uten utregninger. Samtidig som det kunne blitt vanskelig å identifisere ulike karakteristikker med bare elevbesvarelser, ville det også vært utfordrende om vi bare brukte lydopptak. Det var flere tilfeller der elevene uttalte ufullstendige setninger som ikke ga oss hele bildet av hva de gjorde. Da bidro elevbesvarelsene til å fullstendiggjøre bildet. I tillegg var det nyttig at vi fikk sett figurene i tilfellene der strategiene å *lage figur* og *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998) ble brukt.

3.4 Utvalg av grupper

Vi hadde én 1P-klasse til disposisjon for å gjennomføre datainnsamlingen. Denne klassen delte vi inn i grupper på fire, der to av gruppene ble observert på separate grupperom, en under oppfølging av Sande, og en av Bedin. Gruppene fikk vi hjelp av klassens lærer til å sette sammen, så inndelingen av grupper var ikke helt tilfeldig. Grunnen til dette var at vi ønsket grupper som fungerte godt sammen. De to gruppene vi fokuserte på i datainnsamlingen var en ren guttegruppe og en ren jentegruppe, og vi fikk inntrykk av at disse elevene hadde jobbet en del sammen tidligere og at de kjente hverandre godt. Elevene var flinke til å høre på hverandres forslag og idéer, noe vi anser som viktig for at en gruppe skal fungere.

3.5 Datainnsamling

Vi gjennomførte to datainnsamlinger med de samme elevgruppene, hvor vi hadde forberedt fire problemløsningsoppgaver for hver datainnsamling. De to gruppene som ble observert på separate grupperom, ble fulgt opp av Sande eller Bedin. Vi tok lydopptak av problemløsningsseansene og samlet inn kladder og besvarelser fra gruppene. De resterende elevene fra klassen gjennomførte de samme problemene i klasserommet under oppsyn av læreren deres. Fra disse elevene samlet vi inn kladder og besvarelser, i tilfelle dette kunne berike datamaterialet. Beslutningen om at elevene i klasserommet også skulle jobbe med de samme problemene var basert ønske fra deres lærer. Dette var fordi hele klassen skulle ha et mest mulig likt opplegg i de to timene vi var på besøk. Elevene hadde i forkant av den første datainnsamlingen fått utlevert et informasjonsskriv av klassens lærer og skrevet under på dette. Informasjonsskrivet opplyste elevene om masterprosjektet, og ba om tillatelse til å samle inn elevbesvarelser og lydopptak (se vedlegg 1).

3.5.1 Datainnsamling 1
Ved første datainnsamling presenterte vi masterprosjektet vårt, før vi fordelte elevene i de ulike gruppene. I den første problemløsningsseansen jobbet gruppene med problem 1, 2, 3 og 4 (Se kap. 3.8), som alle var hentet fra ulike kilder. På enkelte av problemene spurte elevene oss om fremgangsmåten eller svaret var riktig. I utgangspunktet tenkte vi å være passive observatører, der vi ikke skulle være til hjelp. Men da elevene henvendte seg til oss for bekreftelse var det utfordrende å forbli passive. En annen utfordring med denne datainnsamlingen var at vi på forhånd ikke kjente til nivået hos elevene, og at noen problemer derfor ble for enkle for elevene. Dette førte til at et par av problemene, etter definisjonen til Björkqvist (2003), ikke kan kalles matematiske problemer, siden elevene umiddelbart klarte å finne en løsningsmetode.

3.5.2 Datainnsamling 2
Ved andre datainnsamling var én av elevene borte fra Gruppe Sande på grunn av covid-19. Dette var den mest aktive eleven fra Gruppe Sande, noe som førte til at samtalen på gruppa ikke fløt like godt som på datainnsamling 1. Før andre datainnsamling hadde vi bedre kjennskap til nivået hos elevene, noe som gjorde det lettere å velge ut tilpassede problemer. I denne problemløsningsseansen jobbet gruppene med problem 5, 6, 7 og 8 (Se kap. 3.8). Tre av disse problemene hentet vi fra Posamentier og Krulik (1998), mens den siste hentet vi fra NRICH[2], som er et nettsted hvor man finner problemløsningsoppgaver. Vi la også vekt på finne problemer som resulterte i bruk av ulike strategier. På NRICH finner man i tillegg til de ulike problemene, løsningsforslag fra elever til den relevante aldersgruppa (NRICH, u.å).

3.6 Transkripsjon
Under datainnsamlingene tok vi som nevnt lydopptak av to grupper på fire elever hver, samtidig som vi satt og observerte hver vår gruppe. Etter anbefaling fra veileder valgte vi å transkribere de sekvensene av lydopptaket som vi syntes var mest interessant for vårt forskningsspørsmål. Transkripsjonene hjalp oss å underbygge påstander og gir leser et innblikk i hvordan samtalen utartet seg. I transkripsjonen vil vi gi de ulike deltakerne fiktive navn, slik at de ikke skal kunne kobles til utsagnene.

3.7 De matematiske problemene
I løpet av to datainnsamlinger jobbet elevene med til sammen åtte forskjellige problemløsningsoppgaver, der vi la vekt på ulike faktorer da vi valgte ut problemene. For det første ville vi at de skulle være tilgjengelig for alle, slik at alle elevene skulle komme i gang med problemløsningsprosessen, uavhengig av nivå. Det finnes altså ingen bestemte matematiske formler eller kunnskaper som er strengt nødvendige for å starte problemløsningsprosessen. Samtidig så vi etter problemer som var mulige å løse ved hjelp av forskjellige strategier.

For å forsikre oss om at vanskelighetsgraden på problemene var tilpasset elevgruppa, tok vi en prat med klassens lærer i forkant av den første datainnsamlingen for en vurdering av dem. Vi brukte også mye tid på å diskutere problemene på forhånd. Dette gjorde vi for å prøve å tenke oss frem til hvilke strategier det er sannsynlig at elevene kom til å bruke. Om vi bare klarte å tenke oss frem til én mulig måte for elevene å løse problemet på, ble den skrotet. Problemene hentet vi fra forskjellige steder, men majoriteten av dem fant vi i Posamentier og Krulik

[2] NRICH er et innovativt samarbeid mellom det matematiske fakultet og fakultetet for utdanning ved Universitet i Cambridge.

(1998). Ellers plukket vi ut problemer fra tidligere eksamener i 1P, Mason og Davis (1991) og NRICH.

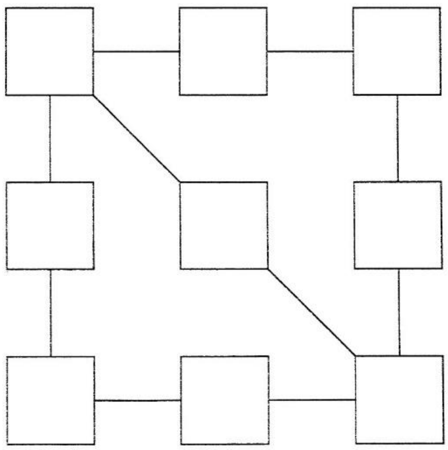
3.8 De gitte matematiske problemene

Til sammen jobbet elevene med åtte problemløsningsoppgaver. Enkelte besvarelser var mer interessante enn andre, og på grunn av et begrenset omfang på studien har vi valgt å analysere seks av problemene. Her kommer det en presentasjon, samt begrunnelse for problemene vi valgte og hvorfor de fikk en større eller mindre plass i analysen.

3.8.1 Problem 1: Sett inn tallene

a. *Sett inn tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 og 10 i de ni rutene over slik at summen av tallene i hver linje er lik 13.*

b. *Finnes det flere løsninger?*



Dette problemet ble hentet fra Mason og Davis (1991). Vi valgte å starte med dette problemet fordi vi var usikre på det matematiske nivået til elevene, og tenkte dette var et problem alle elever har mulighet til å få til. Gruppene hadde en noe ulik tilnærming til dette problemet, og vil bli analysert i kapittel 4.

3.8.2 Problem 2: Taxiproblemet

Agder Taxi har en startpris på 80 kr og 20 kr per kilometer.
En pirattaxi har en startpris på 30 kr og 30 kr per kilometer.

a) *Hvor langt kommer du deg med 220 kr med Agder taxi?*
b) *Dersom svaret er Agder taxi, hva er spørsmålet?*
c) *Dersom svaret er 270 kr, hva er spørsmålet?*
d) *Hvor langt må du reise for at det skal lønne seg å reise med Agder Taxi?*

Dette problemet lagde vi selv, der vi fikk inspirasjonen fra en tidligere eksamensoppgave for 1P. Vi ble tipset om å lage omvendte spørsmål, som på deloppgave b) og c), der vi ønsket å se hvor innviklede spørsmål elevene lagde. Da elevene skulle lage spørsmål selv, så vi en tendens til at de valgte minste motstands vei og lagde avlesningsspørsmål, som for eksempel; "hvilken taxi har høyest startpris?". Både deloppgave a) og d) hadde elevene få problemer med, og det var i hovedsak de samme strategiene som gikk igjen. Vi valgte derfor å utelate dette problemet fra analysen.

3.8.3 Problem 3: Hovdenturen

40 idrettselever er på tur til Hovden:

- *14 elever trynte på ski i trekket*
- *13 fikk covid*
- *16 gikk seg vill i langrennsløypa*
- *3 av elevene fikk både covid og trynte i trekket*
- *5 av dem trynte i trekket og gikk seg vill i langrennsløypa*
- *8 fikk både covid og gikk seg vill*
- *2 elever, trynte, gikk seg vill og fikk covid*

Hvor mange elever var det som verken trynte i trekket, fikk covid eller gikk seg vill?

Vi tok utgangspunkt i et problem fra Posamentier og Krulik (1998), som vi fant under kapittelet *lage figur*, da vi lagde dette problemet. Tallene som ble oppgitt i det opprinnelige problemet lot vi stå uforandret, men gjorde problemet litt mer dagsaktuelt. Denne typen problem trodde vi de færreste hadde vært borti tidligere, samtidig som det finnes mange måter å angripe det på. Her fikk vi varierte og interessante resultater som gjør at problemet fikk en del plass i analysen.

3.8.4 Problem 4: Lesekameratene

Per og Ivar begynte å lese samme boken samme dag.
Per leser 19 sider hver dag mens Ivar leser 4 sider hver dag.
Hvilken side er Ivar på når Per er på side 133?

Dette problemet er hentet fra Schoenfeld (2016). Her undervurderte vi ferdighetene til elevene, som ikke trengte mer enn et par minutt på å løse problemet. Siden dette problemet ble for lett for elevene, kan ikke oppgaven ut ifra Björkqvist (2003) sin definisjon, regnes som et problem for disse elevene. I tillegg var strategibruken lik hos begge gruppene så vi valgte å ikke vektlegge dette problemet. Elevene brukte kalkulator for å finne ut hvor mange dager Per trengte på å lese 133 sider. Dette gjorde de ved å dele 133 på 19. De endte opp med 7 dager, som de videre multipliserte med 4. Gruppene kom derfor frem til at Ivar var på side 28 da Per var på side 133.

3.8.5 Problem 5: Tennisturneringen

25 deltakere er med på en utslagsturnering i tennis.
Hvor mange kamper spilles det i turneringen?

Dette problemet fant vi under kapittelet *se problemet fra en annen synsvinkel* i Posamentier og Krulik (1998). Vi antok at de fleste ville løse problemet med å lage et turneringstre, men var nysgjerrige på om noen elever ville ta i bruk andre strategier. Man kan for eksempel se på antall tapere (se kap. 2.4.3). Siden det var noen interessante tilnærminger til dette problemet, fikk det plass i analysen.

3.8.6 Problem 6: Summen fire etterfølgende tall

5, 6, 7, 8 er fire etterfølgende tall. Summen av de er 26.

a) *Velg ut flere sett med fire etterfølgende tall og finn summen av dem. Har disse summene noe til felles?*
b) *Kan dere finne fire etterfølgende tall hvor summen av dem blir 80?*
c) *Kan dere finne andre eksempel på partall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall? Har disse tallene noe til felles?*
d) *Kan dere bevise at summen av fire etterfølgende tall aldri er delelig med fire?*

Dette problemet er hentet fra NRICH. Til å begynne med fikk elevene kun utdelt deloppgave a) og b). Grunnen til dette er at c) og d) avslører svaret på de første deloppgavene. Deretter ble oppgave c) delt ut, og til slutt d). Vi mener at dette er et problem med lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST). LIST-oppgaver er lagt opp slik at alle elever skal ha mulighet til å løse dem og oppleve mestring. Slike oppgaver fremmer en positiv klasseromskultur, hvor hele klassen jobber med samme oppgave, men på hvert sitt nivå (Utdanningsdirektoratet, 2021). Dette problemet skiller seg også tydelig fra alle de andre, da dette problemet i stor grad dreier seg om utforskning og å avdekke mønster. Vi ønsket å se hvilke strategier som ble benyttet i møte med en slik oppgavetype, som vi antok var ukjent for elevene. Vi valgte å ta med en bevisoppgave til slutt for å se elevenes tilnærming til en slik problem. Resultatene varierte og var interessante. Vi valgte derfor å vektlegge dette problemet i større grad.

3.8.7 Problem 7: Gallaproblemet

På en galla delte to og to gjester et fat med kylling.
Tre og tre gjester delte et fat med ris
Fire og fire gjester delte et fat grønnsaker.
Totalt ble det delt ut 65 fat. Hvor mange gjester deltok på gallaen?

Dette problemet hentet vi fra Posamentier og Krulik (1998) under kapittelet *intelligent gjetting og testing*, hvor det blant annet var forslag til løsning ved hjelp av denne strategien. I tillegg ble det presentert et løsningsforslag ved bruk av brøk og likning. Vi valgte dette problemet fordi vi så flere mulige strategier man kunne ta i bruk, i tillegg til de to nevnte strategiene. Resultatene våre bekreftet nettopp dette, så dette problemet vil vektlegges i større grad.

3.8.8 Problem 8: Katt og mus

En katt jager en mus. Musa starter med et forsprang på 160 meter.
For hver 7. meter musa løper, løper katten 9 meter.
Hvor langt må katten løpe før den tar igjen musa?

Også dette problemet hentet vi fra Posamentier og Krulik (1998) under kapittelet *se fra en annen synsvinkel*. I dette problemet tenker man annerledes enn man ofte gjør i et løp. Vanligvis bruker man tid for å måle avstand mellom to individer, men i dette problemet tenker man avstand i form av meter. Denne forskjellen tror vi gjorde problemet mer utfordrende. Vi opplevde at vi fikk interessante resultater, så vi fokuserte derfor på dette problemet i analysen.

3.9 Analyse av data

Da vi hadde gjennomført datainnsamlingen var vi lenge åpen for bruk av elevbesvarelsene til resten av klassen, for å identifisere deres problemløsningsstrategier. Vi har derimot sett at det ikke var nevneverdig bruk av andre problemløsningsstrategier enn de vi identifiserte hos gruppe Sande og gruppe Bedin. I tillegg var besvarelsene fra gruppene i klasserommet såpass like, at vi har grunn til å tro at de har hjulpet hverandre, eller fått hjelp av læreren. Ettersom disse resultatene heller ikke fortalte oss noe om elevenes handlingsmønstre eller problemløsningsprosess, valgte vi å se bort fra besvarelsene fra resten av klassen og fokuserte kun på gruppe Sande og gruppe Bedin.

Lydopptakene av gruppe Sande og Gruppe Bedin, samt besvarelser og kladd, ble analysert i lys av Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier, Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre og Schoenfelds sekstrinnsmodell (1981) for å finne karakteristikkene til elevenes problemløsing.

3.10 Etiske betraktninger

Studien er godkjent av norsk senter for forskningsdata (se vedlegg 2). Postholm og Jacobsen (2018, s. 247-249) peker på fire hovedkomponenter som bør tas i betraktning i forbindelse med et forskningsprosjekt; *kompetanse, frivillighet, full informasjon og forståelse.* Med *kompetanse* menes det at man som deltaker er kompetent nok til å vurdere hvilke fordeler og ulemper som medfører valget av å delta i et forskningsprosjekt. Valget om å delta skal også skje *frivillig*. Det vil si at den som undersøkes ikke skal bli utsatt for press fra andre parter. Deltakeren skal også få "*full informasjon* om undersøkelsens hensikt, hvilke ulemper og fordeler det kan medføre for dem, hvordan data skal benyttes osv." (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 248). Dette kan ofte bli en utfordring, da deltakeren blir oversvømt av informasjon, som kan føre til at de ikke får med seg noe. Postholm og Jacobsen mener derfor at man kanskje heller bør prøve å gi *tilstrekkelig informasjon.* I tillegg til å få informasjon, må også den som undersøkes ha *forstått* informasjonen. Dette kan man aldri forsikre seg helt om, og man kan aldri med sikkerhet vite at dette faktisk er tilfellet.

Ettersom alle deltakerne i prosjektet er over 16 år, vurderes alle deltakerne som kompetente nok til å vurdere hva et samtykke vil innebære. Det trengs derfor ikke samtykke fra foreldre. Vi informerte at deltakelse i prosjektet var frivillig og at de til ethvert tidspunkt hadde mulighet til å trekke seg. Da ville all data, både lydopptak og elevbesvarelser som eleven bidro til, ha blitt slettet og utelatt fra prosjektet. Vi kan ikke utelukke at enkelte elever følte det var forventet at de skulle skrive under, og at det ville skapt unødvendig mye oppstyr om de hadde nektet. De kan derfor ha kjent på et visst press på å delta i undersøkelsen. I informasjonsskrivet ble den nødvendige informasjonen om prosjektet presentert. Vi forsøkte å gjøre denne så kortfattet og forståelig som mulig. Til slutt la vi til en svarslipp der elevene skulle skrive under på at de både hadde mottatt og forstått informasjonen. Dette for å forsikre oss om at elevene ikke bare hadde lest, men også hadde forståelse for hva det vil si å delta i prosjektet.

3.11 Reliabilitet

Reliabilitet (eller pålitelighet) omhandler spørsmålet om resultatene til en studie kan reproduseres på andre tidspunkt av andre forskere (Bryman, 2001; Postholm & Jacobsen, 2018). Påliteligheten i kvalitativ forskning påvirkes av ulike faktorer. Blant annet om observasjonene gjort i datainnsamlingen ville vært de samme om de ble gjort på et annet tidspunkt eller sted, eller om data forskeren sitter igjen med avhenger av hva han eller hun mener er relevant eller viktig. En annen faktor er at dersom forskeren bruker et annet teoretisk rammeverk, kan dette resultere i at de samme observasjonene tolkes ulikt (Cohen, 2007). Som nevnt tidligere responderte vi på flere henvendelser fra elevene. Enten på direkte spørsmål om et svar var riktig, eller gjennom søken etter blikket vårt for bekreftelse. Dette er situasjoner som går ut over reliabiliteten til studien vår. En annen forsker kunne ha håndtert disse henvendelsene på en annen måte enn oss, og da fått andre resultater. Dersom vi for eksempel hadde brukt Torkildsens (2017) strategier, som ikke inneholder *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998), kunne vi ikke pekt på at dette var den mest brukte strategien blant denne elevgruppen. Dette viser at resultatene kan avhenge av hvilket teoretisk rammeverk man bruker.

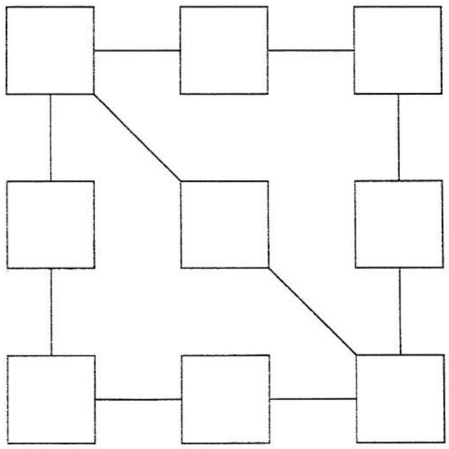
3.12 Validitet

Vi har tatt utgangspunkt i Postholm og Jacobsen (2018) sin forståelse av gyldighet eller validitet. De skiller mellom indre og ytre gyldighet. Indre gyldighet går ut på om det vi har kommet frem til, er gyldig for dem eller det vi har studert. Ytre gyldighet eller overførbarhet relaterer seg til i hvor stor grad vi kan anvende resultater fra en undersøkelse til andre kontekster enn det som faktisk er studert. Ytre og indre gyldighet, samt pålitelighet, er faktorer som inngår som kriterier i en studies samlede troverdighet (Postholm & Jacobsen, 2018).

Vi opplever at vi har nokså stor grad av indre gyldighet i vår studie. Vi hadde som hensikt å observere ulike karakteristikker knyttet til to grupper 1P-elevers problemløsning, og vi samlet inn data som svarte på dette. Det som derimot kan svekke den indre gyldigheten er at vi var til stede og observerte elevene. Dette kan ha påvirket resultatene, selv om det ikke virket som elevene lot seg affisere av dette. Den ytre gyldigheten er derimot lavere, noen den vanligvis er i en kvalitativ studie. Vi har studert én bestemt aldersgruppe og to bestemte grupper, derfor behøver ikke vår studie å si noe om andre elevers strategibruk og handlingsmønstre.

4 Analyse
I dette kapittelet vil vi presentere elevenes besvarelser på seks av problemene (4.1 - 4.6) der vi trekker frem hvilke problemløsningsstrategier gruppene benyttet for å løse problemene, samtidig som vi vil analysere problemløsningsprosessen og handlingsmønsteret til gruppene. Hver gang vi analyserer problemløsningsprosessen og der en strategi eller et handlingsmønster blir identifisert, vil dette bli *kursivert* i teksten. Ved enkelte tilfeller vil vi kommentere hvordan elevene bruker tegninger som medierende redskaper. Til slutt presenteres en oversikt over hvilke strategier som ble benyttet på de ulike matematiske problemene (4.7).

4.1 Gruppenes arbeid med problem 1
a) *Sett inn tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 og 10 i de ni rutene over slik at summen av tallene i hver linje er lik 13.*
b) *Finnes det flere løsninger?*



Begge gruppene var tidlig ute med å komme med det samme *logiske resonnementet* om at 10 måtte være på samme linje som 1 og 2. Hvis ikke vil en ende opp med et høyere tall enn 13, som det ble påpekt av Oda (4):

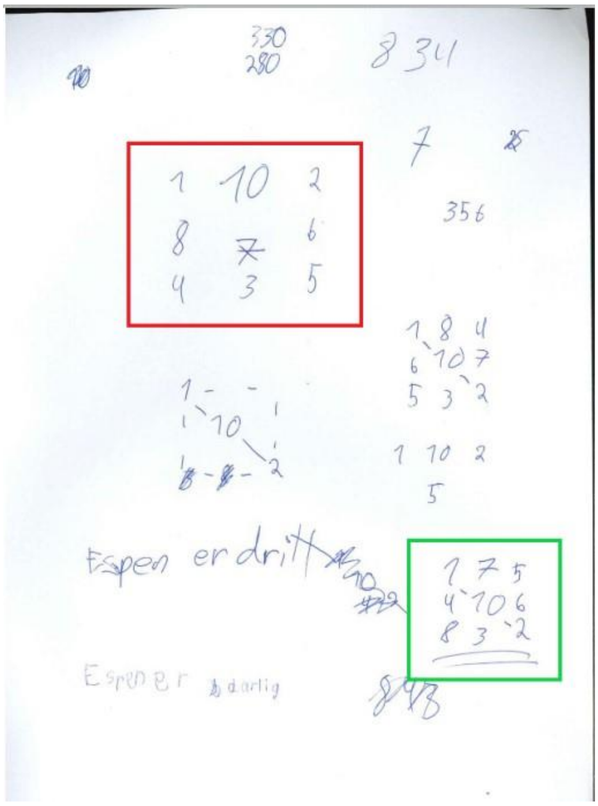
Utdrag 1: 1, 2 og 10 må være på samme linje

1	Julie:	Kan man ta liksom 1, 2, 10 her? Nei, det går kanskje ikke. jo
2	Oda:	Eee jo, fordi, eller
3	Julie:	Fordi at
4	Oda:	Noe annet bli jo mer enn 13

Gruppene plasserte så 1 og 2 i ulike hjørner, med 10 mellom seg. Deretter gikk de i gang med en kombinasjon av å *teste alle muligheter* og *intelligent gjetting og testing* (Posamentier & Krulik, 1998), for å plassere de resterende tallene. For å effektivisere prosessen spurte gruppe Bedin om de kunne få hvert sitt ark, slik at sjansen økte for å komme raskere frem til en løsning. Tanken bak var sannsynligvis at de da vil få testet flere muligheter på kortere tid. Dette var *planleggingen* (Schoenfeld, 1981) de gjorde uten at de organiserte hvem som *teste hvilke muligheter*[3]. Dette førte til at *implementeringen* (Schoenfeld, 1981) av planen ikke ble så tidsbesparende som den potensielt kunne blitt.

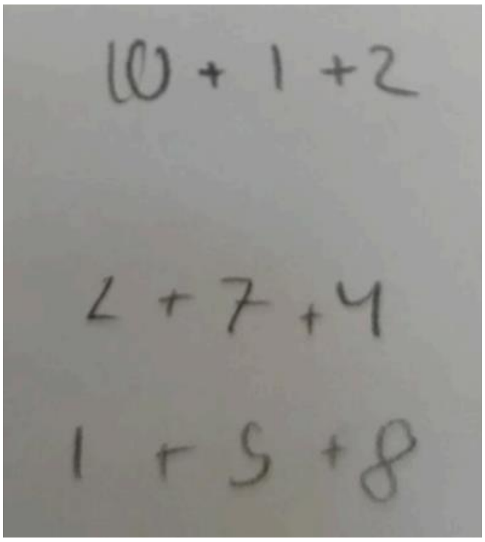
[3] Tok oss friheten til å bytte ut ordet «alle» når vi snakket om strategien *teste alle muligheter* (Posamentier & Krulik, 1998).

Figur 7 viser noe av kladden Lukas gjorde. Her ser man hvordan Lukas brukte penn og papir som et medierende redskap for å organisere tankene (Säljö, 2001). Kladden viser flere forsøk på å finne riktig løsning ved å skrive de ulike tallene i strukturen til oppgavefiguren, ved å *teste alle muligheter*. Som vi kan se var han nære på å finne løsningen ved forsøket markert øverst med en rød ramme. Her blir summen 13 på alle linjene med unntak av den nederste horisontale linjen. Om vi derimot studerer forsøket markert nederst med en grønn ramme, kan vi se at summen blir 13 på alle linjene og dermed en riktig løsning på problemet.



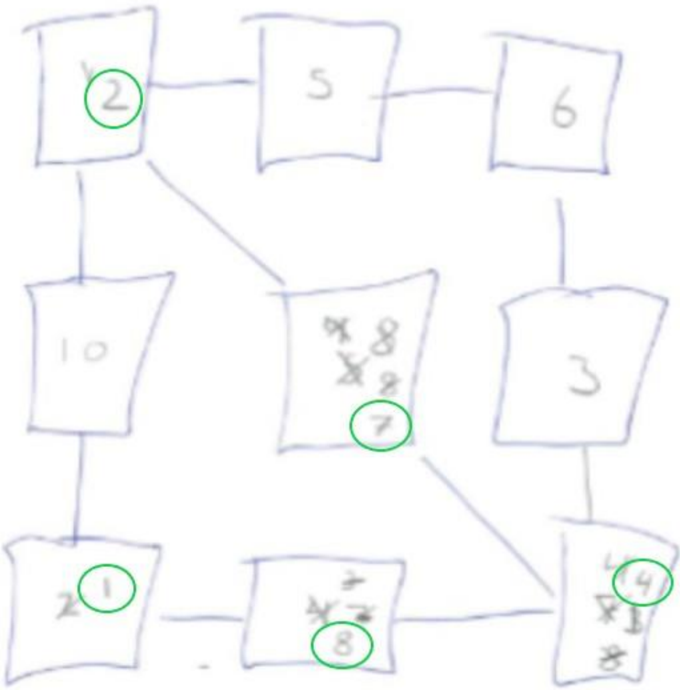
Figur 7: Lukas sin kladd som inkluderer løsningen på problemet.

Gruppe Sande derimot, samarbeidet med problemet og fikk derfor ikke *testet flere muligheter* samtidig, slik som gruppe Bedin gjorde. Lise foreslo en måte å *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998) på, ved å skrive ned alle kombinasjoner som gir 13. Dette ble påbegynt, men ikke fullført, som vi kan se på figur 8 nedenfor. Vi kan se at de to øverste kombinasjonene gir 13, mens den nederste, 1 + 5 + 8, gir 14, og ikke 13. En slik organisering kunne vært et godt hjelpemiddel for å få et overblikk over hvilke tall som kan kombineres, og kunne derfor ha hjulpet dem med å løse problemet. I stedet fortsatte gruppa å *teste ulike muligheter*.



Figur 8: Gruppe Sandes forsøk på å organisere data.

Figuren til gruppe Sande ble etter hvert veldig rotete, som vi kan se på figur 9. Gruppa ble tilbudt et nytt ark, men takket nei, til tross for at de selv slet med å lese av hvilke tall de hadde plassert hvor. Dette gjorde veien videre vanskeligere enn nødvendig, men de klarte likevel å finne en løsning på problemet til slutt. Denne løsningen er markert med grønne sirkler på figur 9.



Figur 9: Gruppe Sandes løsning på problemet.

Oppgave a) ble mer tidkrevende enn det vi hadde forventet, og det ble derfor lite tid for gruppene til å utforske oppgave b). Men begge gruppene ble enige om at de trodde det fantes flere mulige løsninger på problemet, uten at de fikk tid til å teste ut denne hypotesen.
Vi synes det var vanskelig å identifisere handlingsmønstrene hos gruppene på dette problemet, siden den har såpass klare rammer for hvordan den kan løses. Begge gruppene startet riktignok effektivt med å plassere 1, 2, og 10 på samme linje, men å avdekke

handlingsmønstre videre i prosessen var utfordrende. Å komme med *raske ubegrunnede svar* eller *naive og impulsive* (Callejo & Vila, 2009) svar forekommer ikke når en jobber med et slikt problem. Problemet kunne alltids ha blitt løst på en mer effektiv måte, men vi vil ikke si at gruppene handlet *ineffektiv* (Callejo & Vila, 2009). De hang seg ikke opp *konkrete aspekter ved problemet,* men vi vil ikke si de fulgte et *effektivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster heller siden det finnes mer systematiske måter å løse problemet på, som for eksempel å fullføre *organiseringen av data* som gruppe Sande startet på (figur 8).

4.2 Gruppenes arbeid med problem 3

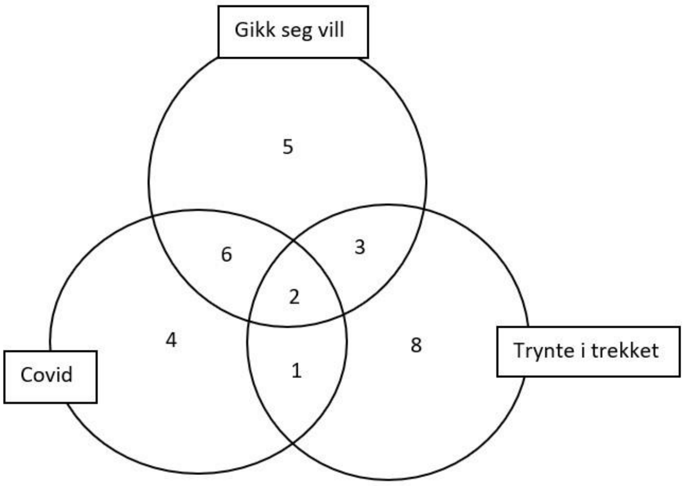
40 idrettselever er på tur til Hovden:

- *14 elever trynte på ski i trekket*
- *13 fikk covid*
- *16 gikk seg vill i langrennsløypa*
- *3 av elevene fikk både covid og trynte i trekket*
- *5 av dem trynte i trekket og gikk seg vill i langrennsløypa*
- *8 fikk både covid og gikk seg vill*
- *2 elever, trynte, gikk seg vill og fikk covid*

Hvor mange elever var det som verken trynte i trekket, fikk covid eller gikk seg vill?

Svar: 11

Figur 10 viser hvordan Posamentier og Krulik (1998) foreslår at man kan løse problemet ved hjelp av et Venndiagram. Dersom man summerer tallene på figuren kommer man frem til at 29 personer ble utsatt for en eller flere hendelser på turen. Trekker man 29 fra de 40 elevene som var på tur, ender man opp med at 11 elever verken trynte i trekket, fikk covid eller gikk seg vill.



Figur 10: Venndiagram som viser oversikt over elever utsatt for de tre ulike hendelsene.

Det var tydelig at gruppe Sande gikk i gang med en løsningsmetode før de hadde *analysert* (Schoenfeld, 1981) problemet grundig nok. De tok utgangspunkt i alle de 40 elevene på turen, og trakk fra de 14 elevene som trynte i trekket, de 13 som fikk covid og de 16 som gikk seg vill. De endte da opp med -3 som svar på oppgaven. Elevene fulgte her et *naivt og impulsivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster. De fulgte den første tanken som slo dem inn, uten å vurdere om denne fremgangsmåten ville ledet frem. Heldigvis så de tilbake og *verifiserte*

(Schoenfeld, 1981) svaret, og fant ut at svaret måtte være galt. Mye tyder på at gruppa valgte å *implementere* (Schoenfeld, 1981) noe de ikke brukte mye tid på å *planlegge* (Schoenfeld, 1981). Etter at første forsøk mislyktes oppstår følgende samtale:

Utdrag 2: Gruppe Bedins samtale om elevene som fikk covid

5	Marie:	Men sånn som når det står sånn at 8 fikk både covid og gikk seg vill
6	Julie:	De har ikke trynt
7	Marie:	Men nei
8	Julie:	De fikk covid og gikk seg vill
9	Marie:	Ja, men da tenker jeg at de 8 går innenfor disse 13, hvis du skjønner
10	Oda:	Åja!
11	Marie:	Sånn at de 8 er innen de 13, en del av de liksom

Her virker det som om det kun var Marie som først forsto at de 8 som fikk covid og gikk seg vill også inngår i de 13 som fikk covid (9). Etter at dette ble oppklart forsøkte de en annen metode. De tok først utgangspunkt i de 13 elevene som fikk covid. Deretter trakk de fra de 3 elevene som både trynte i trekket og fikk covid, de 8 som fikk covid og gikk seg vill og de 2 elevene som fikk covid, gikk seg vill og trynte i trekket. Ved denne metoden kommer de frem til at alle som fikk covid også ble utsatt for noe annet. Gruppen velger derfor å sette en strek ved de 13 som fikk covid, som vi kan se på figur 11. Ved samme metode kommer de frem til at det var fire elever som kun ble utsatt for uhell i trekket, og at det var 1 elev som bare gikk seg vill i langrennsløypa og ikke ble utsatt for andre ulykker. Disse tallene har elevene markert med blå tall til høyre for informasjonen på figur 11. Gruppa gjorde regnestykkene i hodet og kladdet ikke mens de jobbet med dette problemet.


Idrettsklasse på tur

40 idrettselever er på tur til Hovden:
- 14 elever trynte på ski i trekket 4
- 13 fikk covid -
- 16 gikk seg vill i langrennsløypa 1
- 3 av elevene fikk både covid og trynte i trekket 3
- 5 av dem trynte i trekket og gikk seg vill i langrennsløypa 5
- 8 fikk både covid og gikk seg vill 8
- 2 elever, trynte, gikk seg vill og fikk covid 2

Figur 11: En del av fremgangsmåten til gruppe Sande.

Dette var i hovedsak Julies verk og følgende forklaring ble gitt til resten av gruppa:

Utdrag 3: Samtale om hvor mange som ble utsatt for kun én hendelse

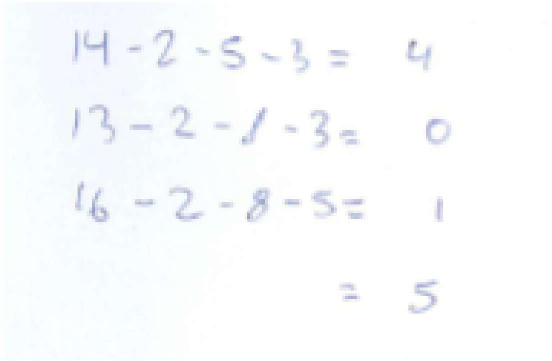
12	Julie:	Jeg tenkte at ehh. Det var bare 4 elever, eller som det sto, 14 elever som trynte i skitrekket. Men det var bare 4 som bare gjorde. Skjønte dere det?
13	Oda:	Ja
14	Julie:	Så skrev jeg 4 der og så var det 13 som fikk covid, men alle andre gjorde jo noe mer også, så da krysset jeg og ut det. Jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det
15	Marie:	Jeg skjønner hva du mener

16	Julie:	Ehh, det er egentlig det jeg gjorde på alle andre også, at 16 gikk seg vill, men det var bare en som bare gikk seg vill. Ehmm. Og da skrev jeg 1 og så 3 av elevene fikk både covid og trynte i trekket. Så var det 3 stk. som gjorde det, men de andre gjorde liksom. Det var 3 stk som gjorde det. Så skrev jeg 3. Og 5 av de gikk seg vill og trynte i trykket og gikk seg vill og det var 5 og. Så ja
17	Lise:	Så du liksom sammenligner informasjonen på en måte. Sånn at du så hvor mange som bare trynte på ski
18	Julie:	Det var det jeg gjorde, jeg vet ikke om det er riktig
19	Oda:	Men det hørtes jo veldig bra ut

Vi tolker dette som en måte å *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998) på, der Julie omstrukturer data og finner ut hvor mange som ble utsatt for bare én av uheldighetene på Hovdenturen. Tanken var god, men utførelsen ble ikke riktig. Elevene koblet ikke at de to 2 elevene som ble utsatt for alle hendelsene, også inngikk i de 3 som fikk covid og trynte i trekket og de 5 som trynte i trekket og gikk seg vill. De endte derfor opp med uriktige tall på figur 11. Videre summerte elevene de blå tallene i figuren ovenfor og endte opp med at 23 personer ble utsatt for én eller flere hendelser på turen. Problemet ses her fra *en annen synsvinkel* (Posamentier & Krulik, 1998), der de først fant ut hvor mange som ble utsatt for noe, og ikke hvor mange elever som ikke ble utsatt for noen av hendelsene slik som oppgaveteksten spør om. For å finne ut hvor mange elever som kom helskinnet fra turen, tok de 40-23 og endte opp med at 17 personer ikke ble utsatt for noen av hendelsene. Denne fremgangsmåten ville ledet frem, men de endte opp med galt svar siden de ikke klarte å *organisere data* på riktig måte.

Det første gruppe Bedin gjorde var å summere de tre øverste faktorene i oppgaveteksten og deretter trekke fra summen av de fire nederste faktorene. Regnestykket ble da 43 -18 = 25. Dette tolket de som om det var 25 elever som ble utsatt for en eller flere av hendelsene, og at det derfor var 40 - 25 = 15 elever som ikke ble utsatt for noe. Elevene så altså problemet fra *en annen synsvinkel* (Posamentier & Krulik, 1998), da de først så etter hvor mange som ble utsatt for noe og deretter subtraherte dette antallet fra det totale antallet elever på turen. Vi tolker dette som et *naivt og impulsivt* (Callejo & Vila 2009) handlingsmønster, der elevene instinktivt følger den første idéen som faller dem inn, uten kritisk vurdering av fremgangsmåten. Derfor hintet Bedin om at de burde se tilbake på det de hadde gjort. Deretter *verifiserte* (Schoenfeld, 1981) de løsningen og så at de måtte prøve noe annet.

Da kom Lukas med et annet forslag (figur 12) som vi anser som et forsøk på *organisering av data* (Posamentier & Krulik, 1998). Han begynte med de 14 som trynte i trekket, og substraherte med dem som trynte i trekket, men som i tillegg ble utsatt for flere hendelser. Han gjorde tilsvarende utregninger på henholdsvis de covidsyke og de som gikk seg vill. Lukas konkluderte med at det var 5 elever som ikke ble utsatt for noen hendelser, mens det han egentlig fant ut var hvor mange elever som kun ble utsatt for kun én hendelse. I tillegg gjorde han samme feilen som gruppe Sande, og inkluderte de to som ble utsatt for alle tre hendelsene, i regnestykket, noe han ikke burde ha gjort.



Figur 12: Lukas sitt forsøk på organisering av data.

Dette var så langt gruppe Bedin kom på problem 3.

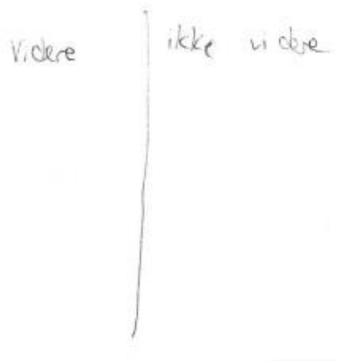
4.3 Gruppenes arbeid med problem 5

25 deltakere er med på en utslagsturnering i tennis.
Hvor mange kamper spilles det i turneringen?

Svar: 24

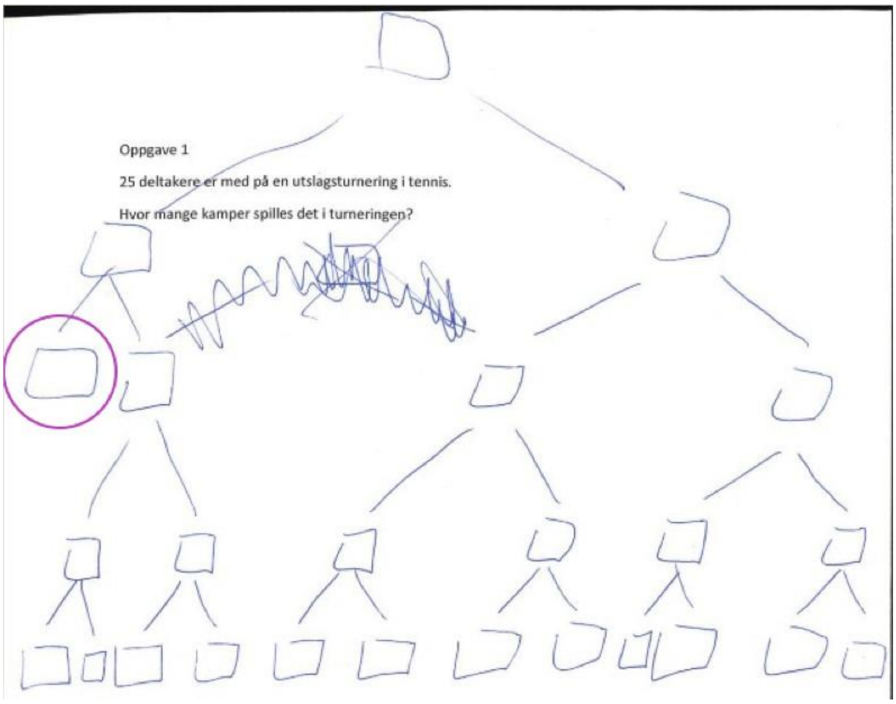
Gruppe Sande brukte mye tid i starten på å dvele rundt at 25 er et oddetall, og at systemet derfor ikke vil gå opp. Faktum er at for at et slikt system med utslagskamper, der alle skal spille like mange kamper, skal gå opp, må antall deltakere kunne skrives som en potens med 2 som grunntall. Utfordringen blir derfor å manipulere systemet slik at systemet går opp.

Lise gikk i gang med å lage noe som kan se ut som en tabell (figur 13) over spillere som gikk videre og ikke. Dette tolker vi som et forsøk på å *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998), men det tok ikke lang tid før elevene gikk i gang med en annen strategi. Det kom ikke frem av datamaterialet hvordan Lise tenkte å løse problemet ved hjelp av denne tabellen, eller hvorfor idéen ble forkastet.



Figur 13: Gruppe Sandes begynnelse på *organisering av data*.

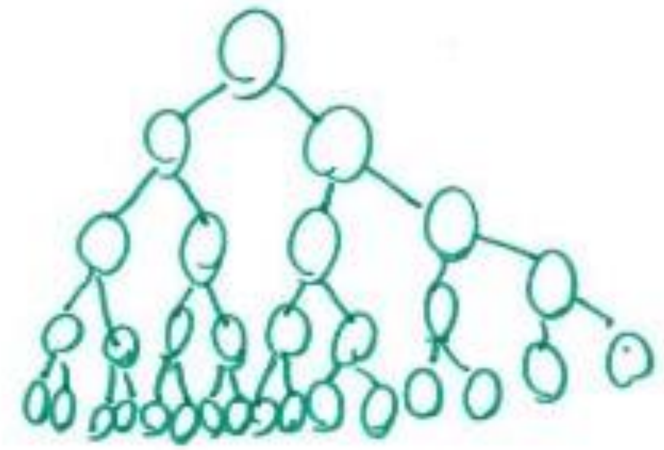
Den neste strategien som ble forsøkt var å *lage figur* (Posamentier & Krulik, 1998), der kampene ble representert som ruter (figur 14). Her brukte gruppe Sande tegning som et medierende redskap for å formidle tenkemåten sin (Säljö, 2001). Elevene tegnet de 12 kampene nederst på arket først, og jobbet seg oppover der en spiller går videre fra hver "rute". Elevene har derfor utelatt én av spillerne fra den første runden, siden det var 25 spillere med i turneringen. De endte opp med tre semifinalister, og valgte derfor å sette inn den siste spilleren ved den lilla, markerte sirkelen på figur 14, hvor han/hun gikk direkte videre til semifinalen, uten å spille kvartfinale. Med fire spillere i semifinalen, ble veien videre til finalen triviell. Måten de fant plass til den siste spilleren i semifinalen, kan tolkes som et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998), som var nødvendig for å få systemet til å gå opp. De innså at ikke alle spillerne kan spille like mange kamper, og fant derfor en måte å manipulere systemet på. Vi anser dette som en måte å *se problemet fra en annen synsvinkel* (Posamentier & Krulik, 1998), der de gikk fra 25 spillere i oppgaveteksten til 12 kamper på *figuren de lagde*.



Figur 14: Gruppe Sandes tegning av et turneringstre.

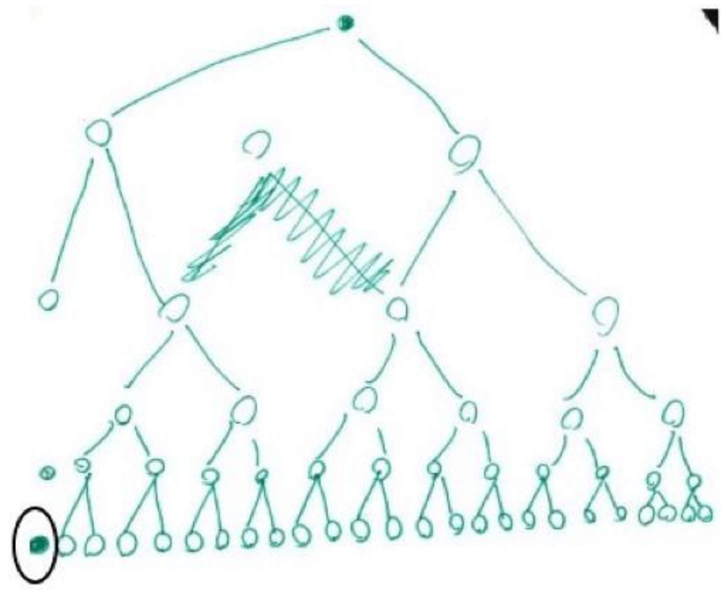
Da de var ferdige med figuren endte de først opp med at det ble spilt 24 kamper, som også er riktig svar. Gruppe Sande trengte litt tid til å *analysere* (Schoenfeld, 1981) problemet, da de ikke umiddelbart skjønte hvordan problemet kunne løses, siden 25 er et oddetall. Da de skjønte at spillerne ikke nødvendigvis trengte å spille like mange kamper, bevegde gruppa seg over i *utforskningsfasen* (Schoenfeld, 1981). De jobbet seg videre fra startpunktet med de 12 kampene og lette etter muligheter for å lede dem frem til en løsning på problemet. Elevene brukte ikke tid på *planlegging* (Schoenfeld, 1981) da de jobbet med dette problemet, men kom likevel frem til en løsning ved hjelp av *utforskning*. Man kan si at gruppa fulgte et *effektivt handlingsmønster, men at de hang seg opp i konkrete aspekter ved problemet* (Callejo & Vila, 2009)**,** ved at de brukte mye energi på å fundere over hvordan systemet kunne gå opp siden 25 er et oddetall.

Gruppe Bedin var raske med å *lese* og *analysere* (Schoenfeld, 1981) problemet. Dette førte til at det ikke var alle som fikk med seg at det var en utslagsturnering, og det ble diskutert om alle skulle spille mot alle. Da de hadde *analysert* problemet nærmere, gikk gruppa i gang med å *lage figur* (Posamentier & Krulik, 1998) der sirklene representerer kamper på figuren (figur 15). Her brukte også gruppe Bedin tegning som et medierende redskap for å organisere tankene sine (Säljö, 2001). Johannes gikk i gang med å tegne et turneringstre, der han begynte med finalen og *jobbet baklengs* (Posamentier & Krulik, 1998). I likhet med gruppe Sande tegnet han kamper istedenfor spillere. Han endte da opp med at turneringen må ha 32 deltakere, for at dette systemet skulle gå opp.



Figur 15: Gruppe Bedins første forsøk på tegning av et turneringstre.

Da skjønte de at noen deltakere måtte gå direkte videre fra første runde uten å spille kamp. Johannes gikk derfor i gang med å *lage en ny figur* (figur 16). Han begynte med 24 spillere i første runde og "´én i rest". På tennisspråket kan man si at denne spilleren, markert med en sort sirkel, var "seedet" i turneringen, noe som er vanlig for de høyest rangerte spillerne i sporten. Den "seedede" spilleren kan vi se nederst til venstre på figur 16 markert med en sirkel. Derfra møttes spillerne til utslagskamper, hvor vinneren gikk videre fra hver kamp. I likhet med gruppe Sande, sendte også gruppe Bedin den "seedede" spilleren direkte til semifinalen. De har da brukt det samme *logiske resonnementet* (Posamentier & Krulik, 1998) som gruppe Sande. Da Johannes var kommet i mål med tegningen, telte gruppa at det var spilt 24 kamper. Også denne gruppa fant løsningen på problemet gjennom *utforskningsfasen* (Schoenfeld, 1981). De hadde ingen konkret *plan* (Schoenfeld, 1981) for figuren de tegnet, men kom frem til en løsning ved å ta et steg om gangen.



Figur 16: Gruppe Bedins andre tegning av et turneringstre.

Johannes sitt forsøk, som vi kan se på figur 15, opplever vi bar preg av å være *naivt og* *impulsivt* (Callejo & Vila, 2009). Dette kan skyldes at gruppa ikke hadde analysert problemet godt nok før Johannes satte i gang med tegningen. Da de deretter gikk i gang med figur 16 fulgte de et mer effektivt handlingsmønster, der de brukte figur for å få oversikt over situasjonen.

4.4 Gruppenes arbeid med problem 6

5, 6, 7, 8 er fire etterfølgende tall. Summen av de er 26.

a) *Velg ut flere sett med fire etterfølgende tall og finn summen av dem. Har disse summene noe til felles?*
b) *Kan dere finne fire etterfølgende tall hvor summen av dem blir 80?*
c) *Kan dere finne andre eksempel på partall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall? Har disse tallene noe til felles?*
d) *Kan dere bevise at summen av fire etterfølgende tall aldri er delelig med fire?*

Forslag til svar:

a) 22, 26, 30, 34. Alle disse summene er partall og ingen av dem er delelig med 4.
b) Nei
c) 80, 84, 88, 92. Alle disse tallene kan divideres med 4.

Som vi kan se i utdrag 4, gikk gruppe Sande i gang med problemet uten å legge en klar *plan* (Schoenfeld, 1981) over hvordan de skulle finne ut om summene hadde noe til felles:

Utdrag 4: Samtale om summene fire etterfølgende tall

20	Oda:	Så man kan ta liksom 1, 2, 3, 4?
21	Lise:	Mhm, ja, kan vi ikke bare gjøre da? Ta 1, 2, 3, 4
22	Oda:	Ja, det blir 10, men har de noe til felles? Tosifra?
23	Marie:	De er jo det
24	Oda:	Men det kunne jo vært 100, 101 og
25	Marie:	Ja, det er sant
26	Oda:	Vi kan jo prøve en random ny en da
27	Lise:	Begge er jo partall
28	Oda:	Men vi kan jo prøve en ny en da. For eksempel 9,10,11 og 12. Det blir 42
29	Lise:	Det blir jo partall. Det kan jo være det er riktig
30	Marie:	Hvis vi prøver noen store tall da, som 21, 22, 23, 24
31	Oda:	Årrh, jeg klarer ikke slike ting i hodet
32	Lise:	Blir ikke det 90? Hvis 1, 2, 3, 4 blir 10, så er det 2, 4, 6, 8, det er 90

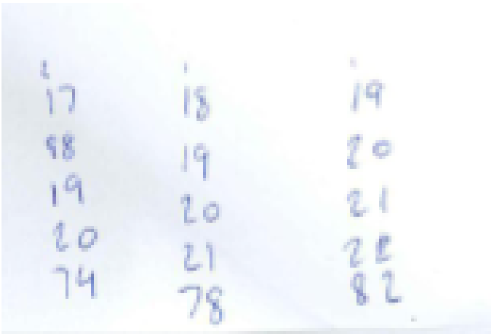
Gruppa regnet seg frem til tre ulike summer av fire etterfølgende tall; 10, 42 og 90. De hadde altså ikke noe system å jobbe seg ut fra, og det virket å være helt tilfeldig hvilke kombinasjoner som ble testet ut. Elevgruppa oppdaget likevel at de ulike kombinasjonene ga partallssummer, og konkluderte derfor med at summen av fire etterfølgende tall alltid må være et partall.

På deloppgave b) ble det først gjort et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998), der det ble poengtert av Oda (33) at det minste tallet av fire etterfølgende tall må være under 20, for at summen skulle bli 80:

Utdrag 5: Samtale om 80 kan skrives som summen av fire etterfølgende tall

33	Oda:	For det må starte under 20, må det ikke det? Kan vi ikke ta 18, 19, 20, 21
34	Lise:	Hva ble det?
35	Oda:	Hva med 19, 20, 21 og 22?
36	Marie:	82
37	Lise:	Hæ?
38	Oda:	What, må det være hele tall?

Gruppa gikk i gang med å *teste alle mulighetene* (Posamentier & Krulik, 1998) som ut fra resonnementet til Oda (33) kunne bli 80. De startet med å finne summen av 17, 18, 19, 20, selv om dette ikke blir nevnt i utdrag 5, og jobbet seg videre oppover da de så at denne summen ble lavere enn 80 (figur 17). Elevene var overbevist om at det var mulig å summere fire etterfølgende tall og få 80. De skjønte derfor lite da de endte opp med resultatene på figur 17 (37 og 38). Gruppe Sande brukte altså en måte å *organiserte data* (Posamentier & Krulik, 1998) på, der de har listet opp alle mulige kombinasjoner som har en sum i nærheten av 80.



Figur 17: Gruppe Sandes organisering av fire etterfølgende tall som resulterer i en sum nær 80.

Etter hvert hintet Sande til at de måtte lese oppgaveteksten på nytt. Da innså de at svaret på spørsmålet kunne være nei, og at det ikke var mulig å finne en sum av fire etterfølgende heltall som gir 80. Her er det sannsynlig at de i starten ikke *leste* og *analyserte* (Schoenfeld, 1981) spørsmålet skikkelig, ettersom de tenkte at de faktisk skulle finne fire etterfølgende tall som ga summen 80.

På oppgave c) skulle elevene komme med flere eksempler på partall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall. Elevene tok da høyde for at disse etterfølgende tallene måtte være positive:

Utdrag 6: Gruppe Sandes samtale om deloppgave c)

39	Oda:	2 kan vel ikke det?
40	Marie:	Alt under 10 kan vel ikke det? 2, 4, 6, 8
41	Oda:	Har de noe til felles? De er under 10. Er énsifra
42	Oda:	Kan 12?
43	Marie:	Jeg tenkte og på det. Jeg vet ikke om 12 kan
44	Oda:	Jeg tror ikke det
45	Oda:	Ingen slutter på 0. Jeg vet ikke
46	Lise:	Jeg tror ikke jeg finner noe annet enn at de er partall

Gruppe Sande endte opp med å svare at 2, 4, 6 og 8 og 12 ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall. Elevene *så etter mønster* (Posamentier & Krulik, 1998), men klarte ikke finne det, ettersom de har tatt i betraktning at tallene som summeres må være positive. 2 kan for eksempel skrives som summen av -1, 0, 1 og 2, mens 6 kan skrives som summen av 0, 1, 2 og 3. Dette medførte at elevene ikke klarte å se at summene stiger med fire, og at alle partall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall er med i firegangen.

På deloppgave d), da de skulle bevise at summen av fire etterfølgende aldri er delelig på fire, tok de i bruk summen 10 og delte den på 4 og kom frem til at dette ikke ble et heltall:

Utdrag 7: Forsøk på bevis

47	Oda:	Fire etterfølgende, og prøve å dele på fire for å vise at det ikke funker
48	Lise:	10 delt på 4. Skal jeg regne det ut?
49	Oda:	Det blir 2,5. Blir det ikke det? Og det er ikke helt tall

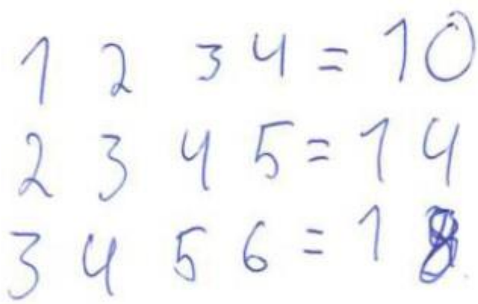
Elevene mente at dette var et tilstrekkelig bevis, selv om de egentlig kun hadde bevist at en enkelt sum av fire etterfølgende tall ikke er delelig på fire. Mye av årsaken til at elevene ikke klarte å finne flere fellestrekk, tror vi er mangel på *utforskning* og *planlegging* (Schoenfeld, 1981). De hadde ingen klar plan for hvordan de skulle finne fellestrekkene, og testingen av ulike tallkombinasjoner var tilfeldig og lite systematisk. Gruppa jobbet derfor *ineffektivt* (Callejo & Vila, 2009) da de ikke klarte å finne en god strategi. De brukte mye tid på å *se etter mønster* og fellestrekk mellom tilfeldige summer som vi kan se i utdrag 5, der 10, 42 og 90 var tallene som ble undersøkt.

En mer systematisk tilnærming kunne vi se hos gruppe Bedin. Da gruppe Bedin hadde *analysert* (Schoenfeld, 1981) problemet gikk de over i *uforskningsfasen* (Schoenfeld, 1981), og det tok ikke lang tid før følgende samtale utartet seg:

Utdrag 8: Gruppe Bedins samtale om summene av fire etterfølgende tall

50	Lukas:	Vi kan ta 1, 2, 3, 4 og så 2, 3, 4, 5, 6 helt til vi kommer til 5, 6, 7
51	Johannes:	Alle øker jo bare med én hele tiden så det blir jo bare pluss fire pluss fire pluss fire
52	Markus:	Så hvis du hadde gått videre nå så hadde det blitt
53	Johannes:	Så hadde det blitt 22, og så hadde det blitt 26, og så hadde det blitt
54	Markus:	Har disse noe til felles? Ja, de øker med fire. Og det er bare partall

Johannes begynte med å systematisk liste opp ulike summer av fire etterfølgende tall (figur 18), som er en måte å *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998). Deretter undersøkte gruppa om de kunne finne et *mønster* (Posamentier & Krulik, 1998), noe Johannes gjorde (51), da han ved hjelp av et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998) kommer frem til at summene alltid vil øke med fire. Vi kan også se at Markus i tillegg påpeker at summene alltid vil bli partall.



Figur 18: Gruppe Bedins organisering av summer av fire etterfølgende tall.

Etter hvert kom det et forslag til et annet fellestrekk ved summene, at de alltid vil være tosifrede, men dette ble møtt med et motargument:

Utdrag 9: Markus sitt motargument

55	Johannes:	Det er to sifre
56	Markus:	Men du kan vel i teorien begynne med –1, 0, og så blir det vel også tresifret etter hvert.

Markus påpeker altså at summene kan overstige 99, i tillegg til at man også kan bruke negative tall (56), noe gruppe Sande ikke tok i betraktning.

På spørsmål b), om tallet 80 kan skrives som summen av fire etterfølgende tall, utartet følgende samtale seg:

Utdrag 10: Gruppe Bedins samtale om deloppgave b)

57	Markus:	Enten bare gjette. Eller så kan vi regne oss ut
58	Lukas:	Gjette først, og se om det er riktig
59	Markus:	Finne summen til 80 med fire tall da
60	Johannes:	Vi tar å
61	Markus:	Ja, det må jo være noe logisk med at fordi ikke sant
62	Johannes:	Tar å dele 80 på fire så er vi jo sånn cirka der

Her ser man tydelig at gruppa først *planla* (Schoenfeld, 1981) hva de skulle gjøre, der de vurderte ulike strategier. Det ble foreslått to ulike fremgangsmåter de kunne bruke; gjetting eller regning (57). De endte opp med å løse oppgaven ved regning, ved å dele 80 på 4, og prøvde så kombinasjonene som inkluderte 20. De fulgte derfor Johannes sitt *logiske resonnement* (62), og brukte kalkulator til å regne ut de ulike summene. Siden ingen av de etterfølgende tallene summerte seg opp til 80, konkluderte de med at 80 ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall.

I deloppgave c) tar de 80 som utgangspunkt, og ser at hverken 20, 40, 60, 80 eller 100 kan skrives som summen av fire etterfølgende tall;

Utdrag 11: Gruppe Bedins samtale om deloppgave c)

63	Markus:	60. 20, 40, 60, 80, 100
64	Lukas:	Det er jo bare alle som ikke er i fire-gangen
65	Johannes:	86 går jo ikke opp
66	Markus:	82, 86. Jeg tror det bare er hvert tyvende tall egentlig
67	Lukas:	Alle partall som ikke er i fire-gangen

68	Markus:	Ja, det er jo egentlig det. Vi skriver bare hvert tyvende tall, altså 20, 40 Skal vi bare sjekke
69	Johannes:	Er du sikker på det? Nei

Her ser vi at Lukas var tidlig ute og påpekte at partall som er med i fire-gangen ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall (64). Til tross for at dette er det motsatte av hva som faktisk er tilfelle, er det interessant at han foreslo dette. At Lukas foreslo at tallene ikke er i fire-gangen, istedenfor å foreslå at de er i firegangen, kan skyldes at deloppgaven ikke er *analysert* godt nok. Siden Johannes og Markus ramset opp et par tall (65 og 66), som ikke er eksempler deloppgaven etterspurte, kan dette være årsaken til Lukas sitt forslag. Markus holdt likevel fast på sin opprinnelige idé, om at det er hvert tyvende tall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall (68), og de endte derfor opp med å svare dette på denne deloppgaven. Selv om hvert tyvende tall ikke inkluderer alle tall som ikke kan skrives som fire etterfølgende tall, svarer han fortsatt riktig på deloppgaven, ettersom den etterspør "andre eksempel på partall som ikke kan skrives som summen av fire etterfølgende tall".

På deloppgave d) ble det først foreslått av Markus å lage flere eksempler med summer av fire etterfølgende tall, og vise at de ikke kan deles på fire. Johannes begynte etter hvert å skrive for seg selv på et kladdeark (figur 19). Der skrev han ned en likning som illustrerte alle mulige summer av fire etterfølgende tall, og sjekket om han kunne dele dette på fire. Slik han skrev likningen ser det ut som han kun deler "x + 4" på fire, men tanken var sannsynligvis å dele alle fire leddene på fire.

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4):4=$$

Figur 19: Johannes sin likning som representerer summen av fire etterfølgende tall.

Etter at de andre på gruppa hadde fått sett på likningen, kom de frem til (figur 20) ved å addere de fire leddene og dele på fire:

$$\frac{4x+10}{4\quad 4}=$$
$$x+2,5$$

Figur 20: Likning som viser at summen av fire etterfølgende tall ikke blir et helt tall når likningen deles på fire.

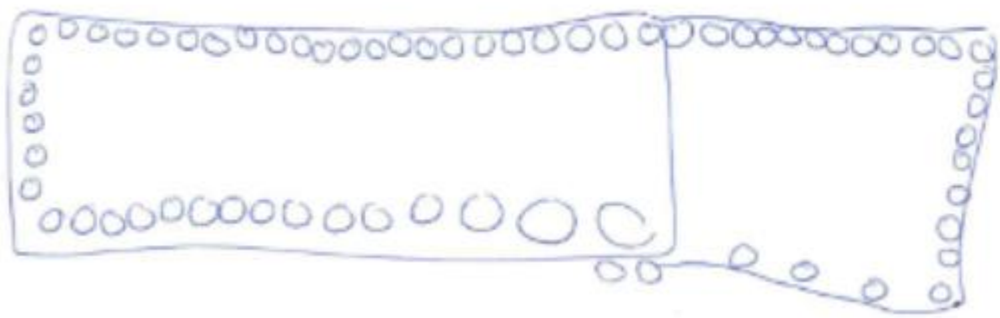
Siden x er et heltall, så kan ikke "x + 2,5" være et heltall, og gruppa fikk dermed bevist at ingen summer av fire etterfølgende kan deles på fire. Det Johannes gjorde på deloppgave d), er noe Mason og Davis (1991) kaller for *generalisering*. Å *generalisere* er å vise at en antagelse stemmer eller ikke for alle tilfeller. I utgangspunktet forventet vi ikke at noen av elevene skulle mestre det å *generalisere*, derfor er det utelatt fra det teoretiske rammeverket til studien. På problem 6 gikk gruppe Bedin systematisk til verks og hadde gode planer for hvordan de skulle finne fellestrekk. Vi opplevde derfor at de fulgte et *effektivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster gjennom problemet.

4.5 Gruppenes arbeid med problem 7

På en galla delte to og to gjester et fat med kylling.
Tre og tre gjester delte et fat med ris
Fire og fire gjester delte et fat grønnsaker.
Totalt ble det delt ut 65 fat. Hvor mange gjester deltok på gallaen?

Svar: 60

Det tok litt tid før alle på gruppe Sande forsto oppgaven. Til å begynne med spurte Oda om det ikke kunne være flere svar på denne oppgaven. Først etter fire og et halvt minutt skjønte elevene at alle deltakerne på gallaen skulle ha både ris og grønnsaker, i tillegg til kylling. Her brukte elevene god tid på å *analysere* (Schoenfeld, 1981) problemet, før de gikk videre med problemløsningen. Etter noe betenkningstid ble de enige om å *lage figur* (Posamentier & Krulik, 1998) av et langbord der de tegner opp 65 fat (figur 21). På dette stadiet hadde ikke gruppa en klar *plan* (Schoenfeld, 1981), men de lagde figur og forsøkte å komme seg videre gjennom *utforskning* (Schoenfeld, 1981).



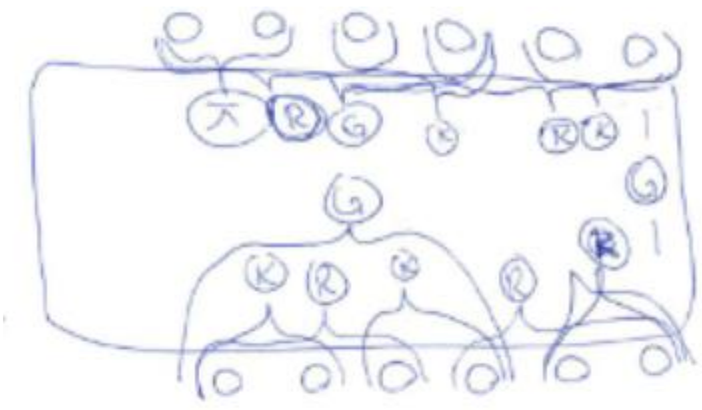
Figur 21: Gruppe Sandes første forsøk på tegning av fat.

Elevene slet med å komme noen vei videre, før Oda fikk følgende idé (70):

Utdrag 12: Odas forslag for å finne antall personer på gallaen

70	Oda:	Vi kan ta en gruppe på for eksempel 12 og finne ut og hvor mange fat det er innen den gruppa. For eksempel det er tre fat med grønnsaker og fire fat med ris og seks med kylling, hvor mange blir det til sammen?
71	Marie:	Jeg vet ikke
72	Lise:	Jeg vet ikke hva du tenkte med det egentlig
73	Oda:	Er det noe vi kan gange med 13 for å få 65?

Dette blir møtt med stillhet og det er tydelig at de to andre på gruppa ikke skjønte hvordan Oda tenkte. Oda har sannsynligvis brukt et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998) for å kunne *gjøre en forenkling* (Posamentier & Krulik, 1998) (70). Hun så etter et tall som er delelig på 2, 3 og 4 og tok derfor utgangspunkt i en liten gruppe på tolv personer og fant ut hvor mange fat som ble servert til dette bordet. Oda var nesten i mål med problemet, men det virket som den responderende stillheten gjorde henne usikker på sin egen strategi, og hun fullførte dermed ikke resonnementet sitt. Hun fant ut at 12 personer skulle dele 13 fat, og etterspurte hvilket tall som kunne multipliseres med 13 for å få 65 (73). De ville da ha funnet ut hvor mange bord med 12 personer det var på gallaen, og hadde endt opp med at det fantes fem slike bord, som ville resultert i 60 gjester. De gikk bort fra denne fremgangsmåten, og valgte i stedet å fortsette med en annen *figur* (Se figur 22) av et bord med 12 personer. Dette er et annet eksempel der tegning ble brukt som et medierende redskap (Säljö, 2001). De begynte deretter å dele ut fat. Et fat med kylling ble markert med en “K”, og tilsvarende ble gjort med ris og grønnsaker som ble markert med en “R” og en “G”.



Figur 22: Gruppe Sandes tegning som viser fordeling av fat på tolv personer.

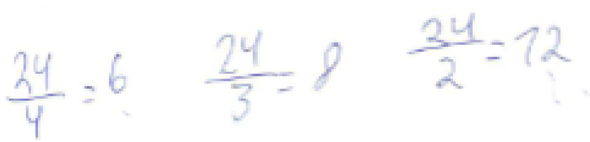
Av figuren kan vi se at 12 personer trenger seks fat med kylling, fire fat med ris og tre fat med grønnsaker. De kommer derfor frem til det samme som Oda nevnte tidligere (70), at 12 personer skulle 13 fat mellom seg.

Utdrag 13: Gruppe Sandes løsning på problem 7

74	Oda:	Hva er 13 gange 5? Er ikke 13 gange 5 lik 65?
75	Lise:	Det blir 65!
76	Oda:	Men da tar vi bare 12 gange 5, siden det er 12 personer, og da er det hvor mange personer det er på gallaen
77	Lise:	Ja. eeh ja. Da blir det 60. Ja, det blir det, jo. Blir det ikke?
78	Oda:	Mmm
79	Lise:	Jo, det blir jo det, siden 11 gange 5 er 55
80	Oda:	Ja

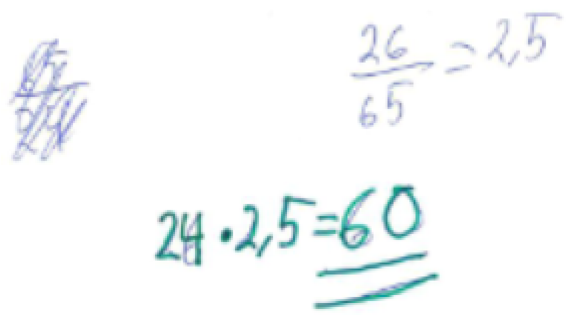
Oda tenkte seg frem til at det måtte være fem slike bord med 13 fat (74), siden $5 \cdot 13 = 65$. De valgte derfor å multiplisere de 12 gjestene med 5 (76) som ga dem totalt 60 gjester på gallaen (77), som også var riktig svar. Dersom man ser på Schoenfelds sekstrinnsmodell kunne gruppa effektivisert tidsbruken ved å bruke lenger tid på *utforskning* og *planlegging*, før de gikk i gang med selve *implementeringen* (Schoenfeld, 1981) av planen. Gruppa fant ut at de ville lage figur, men valgte å lage en figur med 65 fat som kanskje ikke ville ledet dem noen vei videre. Siden de brukte mye tid på å diskutere om problemet har flere løsninger, samtidig som de lagde en figur uten noen særlig plan, mener vi at handlingsmønsteret bærer preg av å være både *ineffektivt,* samt *naivt og impulsivt* (Callejo & Vila, 2009). Om de hadde brukt mer tid på *utforskning*, kunne de funnet andre strategier slik at de kunne ha sluppet å gå omveien om figur 21.

Gruppe Bedin trengte i likhet med gruppe Sande tid på å *analysere* (Schoenfeld, 1981) problemet. Det ble blant annet spurt om alle deltakerne på gallaen skulle forsyne seg av alt. Da de omsider fikk klarhet i hva problemet dreide seg om, begynte Markus å jobbe seg ut fra tallet 24 (Se figur 23), samtidig som Johannes begynte å *lage figur* (Posamentier & Krulik, 1998). Vi klarte ikke å fange opp hvordan han kom frem til tallet 24 ved observasjon og lydopptak, men ut fra besvarelsen og utregninga på papir vil vi anta at Markus ved hjelp av et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998) har lett etter et tall som var delelig på 4, 3 og 2, for så å finne ut hvor mange fat en slik gruppe skal ha. Denne løsningsmetoden ligner på besvarelsen til gruppe Sande, hvor det også ble gjort en *forenkling* (Posamentier & Krulik, 1998) ved å se på en mindre gruppe mennesker. Markus har sannsynligvis multiplisert sammen 2, 3 og 4 og kommet frem til 24 og fordelte derfra antall fat av de ulike typene disse 24 personene skulle ha. Ettersom fire personer skal dele et fat med grønnsaker, tar Markus 24 delt på 4 og ender opp med at det trengs seks fat med grønnsaker. Det samme gjøres med ris og kylling og Markus konkluderte derfor med at de 24 personene skulle dele på tolv fat kylling, åtte fat ris og seks fat grønnsaker:



Figur 23: Markus sin utregning som viser fordeling av fat på 24 personer.

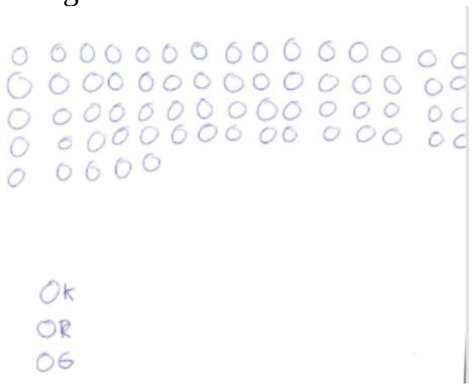
Videre summerte han fatene og endte opp med 26 fat totalt, før han forsøkte å finne et forholdstall som han ville bruke for å finne ut hvor mange gjester som var til stede på gallaen. Han brukte kalkulator og delte 26 fat på 65 fat og fikk 2,5 som forholdstall. Da han skulle forklare resten av gruppa hva han gjorde, skrev han ned 26 : 65 = 2,5 (Se figur 24). Vi ser at det egentlig skulle være 65 : 26 = 2,5, noe som sannsynligvis var det Markus mente. I hvert fall så multipliserte han 24 personer med 2,5, og endte opp med at 60 personer var til stede på gallaen.



Figur 24: Markus sin siste utregning.

Johannes, som tegnet *figur* (figur 25), begynte å tegne opp 65 sirkler som representerte fat. Under ser man også tre fat med enten K, R eller G bak seg som vi antar var et forsøk på å organisere fatene. Dette var så langt Johannes kom med tegningen sin før Markus kom frem til en løsning med sin fremgangsmåte. Vi vil si at Johannes fulgte et *ineffektivt* (Callejo &

Vila, 2009) handlingsmønster med tegningen sin. Dette fordi det ikke virket som han hadde en klar plan, men begynte med å tegne 65 fat for så å se etter en vei videre derfra.



Figur 25: Johannes sin tegning av fat.

Som vi kunne se innledningsvis brukte elevene tid i starten på å diskutere om alle elevene skulle forsyne seg av alt, før Markus gikk i gang med en *effektiv* (Callejo & Vila, 2009) løsningsmetode som ledet frem til riktig svar. Vi vil derfor hevde at handlingsmønsteret til elevene var *effektivt, men at de hang seg opp i konkrete aspekter* (Callejo & Vila, 2009).

4.6 Gruppenes arbeid med problem 8

En katt jager en mus. Musa starter med et forsprang på 160 meter.
For hver 7. meter musa løper, løper katten 9 meter.
Hvor langt må katten løpe før den tar igjen musa?

Svar: 720 meter

Gruppe Sande begynte med å *analysere* (Schoenfeld, 1981) problemet, men slet likevel å finne ut hvordan de skulle komme i gang, som man kan se i utdrag 10.

Utdrag 14: Gruppe Sandes analyse av problem 8

81	Marie:	Han løper jo to meter lengre da for hver
82	Oda:	Men jeg skjønner ikke helt hvordan man skal begynne
83	Lise:	Vi vet jo at han ligger 160 meter foran, også løper katten innpå musa med to meter
84	Oda:	For hver syvende meter
85	Lise:	Hvor lang tid tar det før katten har løpt liksom
86	Oda:	Det tar lang ganske tid, for det er jo sånn, når musa er på 167 er jo katten bare på 9
87	Lise:	Det er sant

Vi kan se at gruppa har forstått problemet og skjønner hvordan katten forflytter seg i forhold til musa. Likevel klarer de ikke finne en strategi som hjelper dem videre på problemet. Etter en lang periode med stillhet blir følgende foreslått:

Utdrag 15: Gruppe Sandes første forslag

88	Oda:	Det går jo an å bare prøve random ting liksom
89	Lise:	Ja, gjør det
90	Oda:	Men det må være noe høyt noe
91	Marie:	Jo

92	Lise:	Jeg regner med det blir over 200 meter. Hvis vi prøver 500 delt på 9
93	Marie:	55,5
94	Oda:	Så tar vi 7 gange 55 hvor mye er det?
95	Marie:	385
96	Oda:	385 + 160. Da er den fortsatt foran, for det blir 545. Skal vi prøve noe høyere?

Gruppa valgte å følge Oda sitt forslag (88) ved å teste forskjellige tall, og videre se hvor langt bak eller foran katten var i forhold til musa. De valgte å ta utgangspunkt i at katten har løpt 500 meter og fant ut at musa da har løpt 545 (96), når katten befant seg på dette punktet. Gruppa valgte å ikke kladde da det de jobbet med dette problemet, men det kan virke som om de så på situasjonen som to likninger, der katten beveger seg med 9x og musa 160 +7x. Da Marie sa 55,5 (93) kan vi tenke oss at dette var antall intervaller de har løpt, som da ville representert x i likningene. De gikk videre ved å forsøke med et høyere tall:

Utdrag 16: Testing av flere ulike tall

97	Lise:	Skal vi ta 600 da?
98	Oda:	Så deler vi på 9
99	Lise:	66 gange 7 + 160. Det er 622
100	Oda:	Hvilken av de var det som var 622?
101	Lise:	Musa har løpt 622
102	Oda:	Så da nærmer det seg da. Vi prøver 700 da
103	Lise:	700 delt på 9. 77 gange 7 + 160. Det blir 704

Deretter ble det forsøkt med 800, men da viste det seg at katten hadde løpt forbi. Etter dette forsøket måtte vi dessverre avbryte gruppa, siden skoletimen var over. Strategien gruppe Sande valgte å benytte, kategoriserer vi som *intelligent gjetting og testing* (Posamentier & Krulik, 1998). De valgte et tall de syntes virket som et fornuftig svar på oppgaven, og testet hvordan katten lå i forhold til musa på dette punktet. Videre brukte de *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998) for å velge neste tall som skulle testes, slik at katten nærmet seg musa. Denne strategien ville ledet frem, så lenge gruppa hadde hatt tid til å teste og justere mange nok ganger. Dette er likevel en strategi som vi anser som tidkrevende, og det finnes åpenbart strategier som ville ledet raskere frem mot riktig svar.

Gruppe Sande kunne dratt nytte av å bruke mer tid på å *utforske* (Schoenfeld, 1981) problemet, og lett etter andre strategier som kunne vært mindre tidkrevende. Om de for eksempel hadde lagd likninger for hvordan katten og musa forflyttet seg i forhold til hverandre, hadde de trolig rukket å komme i mål med problemet. Handlingsmønsteret bærer preg av å være *ineffektivt* (Callejo & Vila, 2009), siden de velger å *implementere* (Schoenfeld, 1981) en plan som ikke er særlig gjennomtenkt og tidseffektiv, og som ville tatt langt tid å gjennomføre.

Gruppe Bedin valgte å løse problemet gjennom det vi har identifisert som en måte å *teste alle muligheter* (Posamentier & Krulik, 1998). To av elevene brukte hver sin kalkulator, der Matteus summerte ni gjentatte ganger, mens Markus summerte 160 med syv gjentatte ganger. Da dette resulterte i at begge etter hvert, og ved en tilfeldighet, endte opp med 279 på hver sin kalkulator, mente de dette var det riktige svaret i oppgaven. Dette kjennetegner et *naivt og impulsivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster, og de overså at man må summere 160 med syv like mange ganger som man summerer ni med seg selv. Dette kan ha en sammenheng med at problemet ikke ble *analysert* (Schoenfeld, 1981) godt nok, før de gikk i gang med *planleggingen* (Schoenfeld, 1981). Videre henvendte de seg til Bedin som hintet om at de måtte se litt gjennom hva de faktisk hadde gjort. Dette ble etter hvert fulgt opp av følgende samtale:

Utdrag 17: Markus sitt resonnement

104	Markus:	Nei, for det blir ikke riktig
105	Matteus:	279 meter, for det er der de møtes.
106	Markus:	For per 7 meter løper katten 9. Musa løp 7 meter 17 ganger og katten løp 9 meter 30 ganger eller noe.
107	Matteus:	31
108	Markus:	Ja, 31. Nei, de har løpt 279, men han bruker da 31 ganger liksom, fordi vi må ta 9 og 9 og 9. Han bruker 17, så du må tenke at når han har løpt 17 ganger så skal du bare ha løpt. Man skal løpe like mange ganger på en måte. Man må opp ganske mye høyere, så vi må ha samme tall som vi ganger med. Så du kan ta 9 gange 80 og så kan jeg ta 7 gange 80 også plusse på 160, og se hvor nærme vi er

Begge regnestykkene i sitat 108 endte opp med å gi summen 720, som også var det riktige svaret. Dette resulterte i noen sekunder med latter, før samtalen fortsatte:

Utdrag 18: Gruppe Bedins reaksjon på løsningen

109	Matteus:	Tok du bare et random nummer eller?
110	Markus:	Hvor langt må katten løpe, 720 meter
111	Johannes:	Fordi vi tok gange 80 fordi de begge løp 80
112	Markus:	Jeg bare gjettet på et tall, også ble det riktig. Jeg er bare så god

Her kan man altså se at Markus gikk tilbake (fra 104) og *verifiserte* (Schoenfeld, 1981) den første fremgangsmåten, og identifiserte det faktum at musa og katten måtte løpe like mange intervaller (108). Som vi kan se fra utdraget hadde musa i den første utregningen løpt 17 intervaller (106), mens katten hadde løpt 31 intervaller (107). Da de videre fokuserte på antall intervaller løpt, var dette en måte å se oppgaven *fra en annen synsvinkel* (Posamentier & Krulik, 1998). I tillegg brukte Markus et *logisk resonnement* (Posamentier & Krulik, 1998), da han påpekte at tallet på intervaller de må multiplisere med, var mye høyere enn 31 (108), som de kom frem til ved den tidligere utregningen (107). Videre kom Markus med en tilfeldig, og *intelligent, gjetning* (Posamentier & Krulik, 1998) på 80 intervaller (108), som viste seg å gi det riktige svaret. Det er sannsynlig å tro at de hadde kommet frem til riktig løsning, selv om de hadde vært mindre heldig med gjetningen av antall intervaller. Selv om gruppa på kort tid kom frem til riktig svar på problemet, vil vi likevel si at handlingsmønsteret var *ineffektivt* (Callejo & Vila, 2009), siden tanken hos gruppa virker å være at de skal gjette seg frem til riktig antall intervaller. Vanligvis ville ikke dette vært særlig tidseffektivt, og de kunne for eksempel ha løst problemet ved en likning som ville vært en mer matematisk måte å gjøre det på.

4.7 Oversikt over bruk av problemløsningsstrategier

Figur 26 viser en oversikt over hvilke av Posamentier og Kruliks (1998) problemløsningsstrategier vi identifiserte i de enkelte problemene, hos henholdsvis gruppe Sande og gruppe Bedin. I øverste rad ser man alle ti strategiene til Posamentier og Krulik (1998), og antall ganger hver av disse er identifisert i parentes. I tillegg kan man se hvilke strategier gruppene tok i bruk for å løse de ulike problemene. Tabellen sier ingenting om hvor mye tid de investerte i en enkelt strategi, eller om de lyktes med bruken av den. I tabellen er problemløsningsstrategiene kodet i form av forkortelser og figur, forklart i øverste rad. Som vi kan se av figur 26 var *logisk resonnement* og *organisere data* de mest brukte strategiene. J*obbe baklengs* ble derimot bare brukt ved ett tilfelle, mens *se på ekstremtilfeller* ikke ble brukt i det hele tatt. Vi kan også at gruppene i stor grad brukte de samme strategiene for å løse de samme problemene.

Strategier (Forkortelse, antall)	Jobbe baklengs (JB, 1); Se etter mønster (SEM, 2); Se problemet fra en annen synsvinkel (SAS, 4); Gjøre forenklinger (GF, 2); Se på ekstremtilfeller (SE, 0); Lage figur (LF, 4); Intelligent gjetning og testing (IGOT, 4); Teste alle muligheter (TAM, 4); Organisere data (OD, 5); Logisk resonnement (LR, 10)					
Problem	1	3	5	6	7	8
Gruppe Sande	IGOT, TAM, LR	SAS, OD	SAS, LF, OD, LR	SEM, TAM, OD, LR	GF, LF, LR	IGOT, LR
Gruppe Bedin	IGOT, TAM, LR	SAS, OD,	JB, LF, LR	SEM, OD, LR	GF, LF, LR	SAS, IGOT, TAM, LR

Figur 26: Oversikt over bruk av Posamentier og Krulik (1998) sine problemløsningsstrategier.

5 Diskusjon

I dette kapittelet vil vi svare på forskningsspørsmålet:

Hva karakteriserer 1P-elevers arbeid med problemer i en gruppekontekst?

Dette vil vi besvare ved å diskutere elevgruppenes bruk av problemløsningsstrategier (5.1), og sammenligne funnene våre med tidligere forskning. I dette delkapittelet vil vi drøfte hvorfor ulike strategier blir mye eller lite brukt, i tillegg til at vi vil diskutere hvorfor elevene alltid tok i bruk flere strategier for å løse problemene. Deretter vil vi diskutere de ulike handlingsmønstrene (5.2) vi identifiserte, og drøfte om problemløsningsprossesen kan ha en sammenheng med handlingsmønstrene elevene fulgte. Til slutt vil vi komme med en kort konklusjon (5.3) basert på funnene våre.

5.1 Problemløsningsstrategier

Resultatene våre viser at både gruppe Sande og gruppe Bedin tok i bruk de aller fleste av Posamentier og Krulik (1998) sine strategier for å løse problemene. *Logisk resonnement* var den strategien vi identifiserte flest ganger i problemløsningsseansene, og vi så antydninger til at denne strategien ble brukt på fem av de seks problemene hos begge gruppene. Dette er i tråd med Erbas og Okur (2010) (se kap. 2.7) sin forskningsundersøkelse på high school-elevers problemløsningsstrategier, hvor *logisk resonnement* også var den mest brukte strategien. Samtidig viser resultatene til både Intaros et al. (2014) og Saygılı (2017) at *logisk resonnement* er blant de mest brukte strategiene når elever jobber med problemløsning.
En gjenganger hos gruppene vi observerte var at *logiske resonnementer* stort sett ble brukt i kombinasjon med andre strategier, og de gangene denne strategien ble brukt, var det som regel for å komme et steg videre på veien mot løsningen på problemet. Dette kan være med å forklare hvorfor denne strategien blir mye brukt.

Strategien vi identifiserte nest flest ganger var *organisere data*. Det kan være verdt å nevne at forsøkene på å *organisere data* ikke alltid ledet frem til en løsning, som vi kan se på figur 13 (se kap. 4.3). I andre tilfeller, som da gruppe Bedin brukte denne strategien for å finne fellestrekkene til summen av fire etterfølgende tall (figur 18), var en slik systematisk fremstilling til stor hjelp (se kap. 4.4). At denne strategien blir mye brukt, stemmer overens med andre forskningsundersøkelser som også peker på at *organisere data* er blant de mest brukte problemløsningsstrategiene blant elever (Erbas & Okur, 2010; Saygılı, 2017). En av årsakene til at denne strategien blir hyppig brukt blant elever, kan være, som Posamentier og Krulik (1998) påpeker, at dette er en strategi som brukes i flere sammenhenger i dagliglivet. Elevene har derfor sannsynligvis erfaring med å *organisere data* på forskjellige måter, og elevene finner det kanskje hensiktsmessig å anvende denne strategien i problemløsning. Samtidig vil en *organisering av data* fungere som et medierende redskap (Säljö, 2001), som vil være med på å hjelpe elevene med å organisere tankene.

Av Posamentier og Kruliks (1998) ti strategier var det kun én av dem som ikke ble benyttet; *se på ekstremtilfeller*. Annen forskning viser også til at denne strategien blir lite brukt av elever (Erbas & Okur, 2010; Intaros et al. 2014). I ettertid har vi innsett at det i arbeidet med våre gitte problemer vil være lite hensiktsmessig å *se på ekstremtilfeller*, og det er derfor ikke overraskende at denne strategien ikke ble brukt av elevene. *Jobbe baklengs* var en strategi vi kun identifiserte én gang, da gruppe Bedin jobbet med tennisproblemet (se kap. 4.3). Dette var imidlertid et mislykket forsøk, og som førte til at elevene gikk tilbake og *verifiserte* forsøket, og *analyserte* (Schoenfeld, 1981) problemet om igjen. For at strategien *jobbe* *baklengs* skal kunne tas i bruk, må problemet i de aller fleste tilfeller være lagt til rette for dette. Om vi hadde gitt en oppgave der elevene skulle finne en reiserute for å rekke et fly som går 17.00, kunne denne strategien vært den mest nærliggende. Hvis en derimot skal *jobbe baklengs* for å fylle inn rutene på Problem 1 (se kap. 3.8.1), eller finne ut hvor mange elever som ikke ble utsatt for hendelser på Hovdenturen (se kap. 3.8.3), vil ikke denne strategien være til stor hjelp. At *jobbe baklengs* blir lite brukt hos elever kommer også frem i Intaros et al. (2014), der denne strategien ble identifisert ved nest færrest tilfeller.

Det kan være ulike grunner til at *se på ekstremtilfeller* og *jobbe baklengs* ble aldri eller lite benyttet i problemløsningsseansene. Dersom man skulle trekke en tilfeldig strategi og et tilfeldig problem, er det ikke gitt at strategien man trekker kan brukes for å løse problemet. Problemets egenart og formulering vil alltid være med å legge føringer for hvilke strategier man velger å ta i bruk. Ingen av våre åtte problemer var i særlig grad lagt til rette for at disse strategiene, og det er derfor ikke overraskende at det var disse strategiene som ble minst brukt.

Noe vi kan se av figur 26 (se kap. 4.7) er at gruppe Sande og gruppe Bedin ofte brukte de samme problemløsningsstrategiene for å løse de samme problemene. På problem 1, 3 og 7 var strategibruken identisk hos de to gruppene, der de brukte nøyaktig de samme strategiene for å løse de samme problemene. I tillegg brukte gruppene strategien *lage figur* ved to tilfeller, og begge gruppene gjorde dette på problem 5 og 7. Dette styrker påstanden vår ovenfor, om at matematiske problemer ofte legger føringer for hvilke strategier som er hensiktsmessig å bruke.

I noen tilfeller kreves det flere strategier for å løse et problem (Erbas og Okur, 2010; Torkildsen, 2017). Dette er i tråd med at gruppe Sande og gruppe Bedin brukte to eller flere problemløsningsstrategier for å løse hvert enkelt problem. Saygılı (2017) har gjort en liknende forskningsundersøkelse som oss, bare at han så på 18 elever som jobbet individuelt, og ikke i grupper. Her kommer det frem at elevene som opplevde størst suksess med problemløsning, med få unntak, brukte flere problemløsningsstrategier, samtidig som elevene som opplevde minst suksess med problemløsning gjerne brukte én eller ingen strategi for å løse problemene. Vi vil argumentere for at gruppe Sande og gruppe Bedin opplevde suksess på problemløsningsoppgavene, og om man tar funnene til Saygılı (2017) i betraktning, stemmer dette godt overens med at gruppene også tok i bruk flere strategier for å løse problemene.

En annen årsak til at de tok i bruk flere strategier, kan være at de jobbet sammen i grupper på fire, og at det derfor er summen av fire personers idéer som blir diskutert, og ikke bare et enkeltindivids tanker. Dette underbygges av det sosiokulturelle perspektivet på læring. Vi så i kapittel 2.1, at Wittek (2004) hevder mennesket er mer kreativt når det tenker sammen med andre, noe som kan resultere i at flere strategier blir testet ut. Samtidig har vi sett tilfeller der elever gikk i gang med en strategi på egenhånd, uten å diskutere den med resten av gruppa. Et eksempel på dette kan vi se i figur 13 (se kap. 4.3), der Lise forsøker å *organisere data* på egenhånd. Det at elevene jobber i grupper vil derfor være med å fremprovosere ulike tilnærminger til problemet, som vil resultere i bruk av flere strategier. Bruk av flere strategier var også i enkelte tilfeller et resultat av at elevene *verifiserte* (Schoenfeld, 1981) sine egne løsninger. Som vi kan se på problem 8 (se kap. 4.6), gikk elevene i gang med en metode for å *teste alle muligheter* som ikke ga riktig løsning. Markus *verifiserte* svaret de kom frem til ved denne strategien, og innså at dette måtte være feil. Deretter brukte gruppa en kombinasjon av *logisk resonnement, se problemet fra en annen synsvinkel* og *intelligent gjetning og testing* for å komme frem til riktig løsning.

5.2 Handlingsmønstre

Vi synes til tider det var vanskelig å identifisere de ulike handlingsmønstrene til Callejo og Vila (2009), da vi observerte elevgruppenes problemløsning. På enkelte av problemene kom ulike handlingsmønstre tydelig frem, mens på andre problemer var det krevende å avdekke hvilke handlingsmønstre elevene fulgte. Vi identifisere et slags mønster som var gjentakende hos elevene, ved at de startet med et *naivt og impulsivt* forsøk, før de gikk tilbake og *analyserte* (Schoenfeld, 1981) problemet grundigere, og til slutt gikk i gang med mer gjennomtenkte forsøk. Dette kan henge sammen med det Lampert (1990) trekker frem, at elevene ofte forsøker å finne det riktige svaret på kortest mulig tid. Om man har en slik tilnærming til matematikk, er det ikke overraskende at elevene går i gang med løsningsmetoder uten å bruke særlig mye tid på å *analysere* problemet. De har kanskje et håp om at de har forstått problemet, og at den første tanken som faller inn også vil lede til riktig løsning. Derfor er det interessant at i alle tilfellene vi kunne identifisere et *naivt og impulsivt* handlingsmønster, endte elevene enten opp med et galt svar eller at den impulsive løsningsmetoden ble forkastet. Mye kan derfor tyde på at et slikt handlingsmønster sjeldent leder frem til riktig svar. Det at elevene ikke bruker mye tid på *analyse* (Schoenfeld, 1981) kommer også frem i figur 3 (se kap. 2.3), der vi kan se Schoenfelds (2016) tidslinje over en typisk elevs problemløsningsprosess.

Vi har grunn til å tro at problemløsningsprosessen kan ha en direkte påvirkning på hvilke handlingsmønstre elevene følger. Som nevnt kan mangel på *analyse* føre til *naive og impulsive* forsøk på å løse problemene, samtidig som vi også har sett tilfeller der en grundig *analyse* og *utforskning* (Schoenfeld, 1981) resulterte i et mer effektivt handlingsmønster. Dette kunne vi se da gruppe Bedin jobbet med problem 6 (se kap. 4.4), der de gikk systematisk til verks for å finne fellestrekk ved summen av fire etterfølgende tall. Dette medførte at elevene oppdaget et mønster som var medvirkende til at elevene fulgte et *effektivt* handlingsmønster. I tilfellene der vi observerte et *ineffektivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster, tror vi dette kan ha en sammenheng med manglende *utforskning*, der de ikke brukte mye tid på å lete etter strategier. De brukte derimot den første strategien som falt dem inn, som ikke alltid var særlig tidseffektivt.

I løpet av problemløsningsseansene kunne vi ikke observere noen tilfeller av *raske, ubegrunnede svar*. Selv om enkelte forslag var raske og lite velbegrunnede, lå det likevel alltid en tanke bak svarene til elevene, som førte til at vi mener at dette handlingsmønsteret ikke forekom. Årsaken til dette kan være at elevene deltok i forskningsprosjektet vårt, ble observert, i tillegg til at vi tok lydopptak. Dette kan ha vært medvirkende til at elevene kjente på et visst press til å prestere og tenkte kanskje nøyere gjennom forslagene sine, før de ytret dem til resten av gruppa.

Vi møtte på noen utfordringer da vi analyserte handlingsmønstrene til elevene. Da elevene jobbet med problem 1 (se kap. 4.1), syntes vi ingen av Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre var identifiserbare hos elevgruppene. Etter diskusjon oss imellom har vi blitt enige om at vi ville plassert gruppene et sted mellom *effektivt, men henger seg opp i konkrete aspekter* og *effektivt* på dette problemet. Derfor mener vi at Callejo og Vilas (2009) modell kanskje burde blitt utvidet med ett eller flere handlingsmønstre, slik at vi i flere tilfeller kunne koblet elevenes atferd i møte med problemløsning, opp mot et handlingsmønster. En annen utfordring vi møtte på var hvordan vi skulle analysere handlingsmønstrene til gruppa som helhet. Vi observerte tilfeller der elever på gruppa handlet på egenhånd, som på problem 7, da Markus kom frem til sin *effektive* løsning, samtidig som Johannes lagde en figur som var noe mer *ineffektivt* (se kap. 4.5). Når man ser gruppa under ett ville vi derimot kategorisert gruppa under handlingsmønsteret *effektivt, men henger seg opp i konkrete aspekter ved problemet*, siden de bruker tid i starten på å diskutere om alle skal forsyne seg av alt. Vi har derfor innsett at en analyse av handlingsmønstre kanskje ikke fungerer like godt når man observerer en gruppe, og at det ville vært enklere og studert enkeltindivider i stedet.

5.3 Konklusjon

For å konkludere har vi sett at 1P-elevene tok i bruk flere ulike strategier for å løse hvert av de åtte problemene, der de av og til ble brukt i kombinasjon med hverandre. De mest brukte strategiene var *logisk resonnement* og *organisere data* (Posamentier & Krulik, 1998). *Se på ekstremtilfeller* ble aldri brukt, mens strategien *jobbe baklengs* (Posamentier & Krulik, 1998) forekom kun ved ett tilfelle. Problemløsningsprosessen til elevene bar preg av lite *analyse* (Schoenfeld, 1981) før de forsøkte å løse problemene, noe som ofte førte til at de måtte gå tilbake og *analysere* på nytt. I disse tilfellene fulgte elevene ofte et *naivt og impulsivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster. Når elevene gjorde en grundigere *analyse* kunne vi se eksempler på mer *effektive* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønstre. I tillegg kunne vi se at manglende *utforskning* (Schoenfeld, 1981) kan ha ført til et *ineffektivt* (Callejo & Vila, 2009) handlingsmønster. Vi erfarte altså at elevene fulgte forskjellige handlingsmønstre, som ofte hadde en sammenheng med hvor godt de hadde *analysert* og *utforsket* hvert enkelt problem.

6 Implikasjoner
I det følgende vil først drøfte noen didaktiske implikasjoner (6.1), før vi avslutter med å peke på noen forskningsmessige implikasjoner (6.2)

6.1 Didaktiske implikasjoner
Etter at vi har gjennomført dette forskningsprosjektet, har vi grunn til å tro at det for enhver matematikklærer vil være nyttig å lære seg problemløsningsstrategiene til Posamentier og Krulik (1998). Elever lærer på forskjellige måter og har ulike preferanser på hvordan de løser problemer. Vi tror derfor det er viktig at de blir introdusert for ulike strategier, og hvordan de kan benyttes. Noe vi har erfart ved flere tilfeller i praksis, er at noen elever behøver å få ting forklart fra et annet perspektiv. Dersom læreren besitter disse strategiene kan dette være til hjelp for å presentere matematiske fenomener på flere måter, og berike undervisningen.

Funnene våre tilsier at 1P-elever ofte bruker lite tid på *analysefasen* i problemløsningsprosessen. Dette kan føre til at elevene går i gang med løsningsmetoder før de har forstått problemet, noe som igjen kan medføre *raske og ubegrunnede* eller *naive og impulsive* (Callejo & Vila, 2009) svar på problemet. Som lærer kan det være fordelaktig å være oppmerksom på dette, og tenke gjennom hvordan man kan oppmuntre elevene til en grundigere analyse av problemer, i tillegg til hvordan undervisningen kan legge til rette for en slik praksis.

6.1 Forskningsmessige implikasjoner
I forskningsprosjektet vårt har vi tatt i bruk analyseverktøyet som er utviklet av Posamentier og Krulik (1998). Vi har sett at problemløsningsstrategiene til Posamentier og Krulik (1998) også er blitt brukt i andre forskningsprosjekter (Erbas & Okur, 2010; Intaros et al. 2014), noe som førte til at vi hadde stor tillit til dette som analyseverktøy. Vi opplevde strategiene som dekkende for analysen, og det var en enkel jobb å koble løsningsmetodene opp mot en eller flere av strategiene.

Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre i forbindelse med problemløsning, virker å være relativt lite forsket på. I noen tilfeller var det vanskelig å identifisere hvilket handlingsmønster gruppene fulgte. Vi vurderte det slik at elevene befant seg et sted mellom to av Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre i enkelte tilfeller, og at analyseprosessen kanskje ville vært enklere om analyseverktøyet inneholdt flere ulike handlingsmønstre. En annen utfordring var at der Callejo og Vila (2009) forsket på enkeltelever, forsket vi på elever i gruppekontekster. Da vi så tendenser til at elevene på gruppene fulgte ulike handlingsmønstre, medførte dette at det var vanskelig å konkludere med at gruppa fulgte ett bestemt handlingsmønster. Vi mener derimot at Callejo og Vilas (2009) handlingsmønstre kan være verdt å studere i videre forskning, men at analyseverktøyet bør brukes på enkeltindivider.

Til videre forskning kunne det vært interessant å se på andre elevers strategibruk og handlingsmønstre i møte med de samme problemene. Man kunne for eksempel sett på ungdomsskoleelever eller elever i en R1-klasse for å se hva som karakteriserer deres problemløsning.

7 Referanseliste

Andersen, G. (2020, 2. juni). Observasjon - NDLA. Hentet fra https://ndla.no/nb/subject:1:54b1727c-2d91-4512-901c-8434e13339b4/topic:2:432baee9-5671-47ce-870e-48b8fc3b7a42/topic:2:b3a471ce-3027-42aa-887c-a2325c4a60f5/resource:1:57107

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (red.), Matematikk for skolen (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.

Bogdan, R. & Biklen, S. K. (2003). *Qualitative research in education: An introduction to theory and methods*. Allyn and Bacon.

Bryman, A. (2001). *Social research methods*. Oxford University Press.

Callejo, M. L. & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: Two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 111-126. doi:10.1007/s10649-009-9195-z

Cohen, L. & Manion, L. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*. Abstrakt forlag.

Elever med stort læringspotensial. (2021, 8.mars). Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/elever-med-stort-laringspotensial/

Erbas, A. K. & Okur, S. (2010). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality & Quantity*, *46*(1), 89-102. doi:10.1007/s11135-010-9329-5

Imsen, G. (2014). *Elevens verden innføring i pedagogisk psykologi*. Universitetsforl.

Intaros, P., Inprasitha, M. & Srisawadi, N. (2014). Students' Problem Solving Strategies in Problem Solving-mathematics Classroom. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *116*, 4119-4123. doi:10.1016/j.sbspro.2014.01.901

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63. doi:10.3102/00028312027001029

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Deakin Univ.

Matematikk P (MAT08-01) Fagrelevans og sentrale verdiar. (2020, 1.august). Hentet fra http://www.udir.no/lk20/mat08-01/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Matematikk P (MAT08-01) Kjerneelementer. (2020, 1.august). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat08-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning. (u.å.). Retrieved from http://nrich.maths.org/

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspects to mathematical method*. Doubleday and Company.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions*. Corwin.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Schoenfeld, A. H. (1981, april). *Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving*.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1-38. doi:10.1177/002205741619600202

Schoenfeld, A. H., & Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Skott, J., Skott, C.K., Jess, K., Hansen, C.H. (2019). *Matematik for lærerstuderende: Delta 2.0: Fagdidaktik, 1.-10. klasse*.

Torkildsen, S. H. (2017) Matematisk problemløsning. Matematikksenteret.

Valg av matematikk på videregående. (2020, 16.november.). Hentet fra https://utdanning.no/tema/utdanning_hjelp_og_veiledning/valg_av_matematikk_pa_videregaende

Wittek, L. (2012). *Læring i og mellom mennesker: En innføring i sosiokulturelle perspektiver*. Cappelen Damm akademisk.

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Vil du delta i prosjektet:

“1P-elevers strategier i arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk”?

Vi vil informere deg som er elev i matematikk 1P om forskning vi ønsker å gjennomføre. Vi er to masterstudenter ved Universitetet i Agder som skal gjennomføre et forskningsprosjekt over et halvt år. Arbeidet vårt tar derfor sikte på å studere elevers problemløsningsstrategier i matematikk. Målet med prosjektet er å få et innblikk i elevers tenkemåter og strategier, for å kartlegge hvordan vi kan bruke problemløsning i matematikkundervisningen.

For å få dette til ønsker vi å observere, samle inn elevbesvarelser og ta lydopptak av flere elevgrupper som samarbeider for å løse ulike problemløsningsoppgaver. Dette vil foregå i skoletiden, slik at du kommer til å miste noen undervisningstimer om du sier ja til å være med på prosjektet. Å samarbeide med medstudenter om problemløsningsoppgaver innebærer å jobbe i grupper på fire, der dere skal diskutere og løse oppgaver med ukjent fremgangsmåte sammen. Etterpå vil også besvarelsen deres bli samlet inn av oss. En slik økt vil vare i 45 minutter. Samtalen vil bli tatt opp og en av oss vil være til stede for å observere og ta notater. I tillegg til arbeidet med problemløsningsoppgaver ønsker vi også at dere svarer på et kort spørreskjema før dere setter i gang med oppgavene. Alt av observasjoner, spørreskjema og lydopptak vil bli behandlet konfidensielt, anonymisert fortløpende, og vil kun oppbevares tilgjengelig for oss to, samt veileder. Data som blir samlet inn vil i etterkant bli analysert.

All deltagelse i forskningsprosjektet er basert på frivillighet, og du har mulighet til å trekke deg fra prosjektet til enhver tid. Du kan trekke deg uten begrunnelsesplikt. Du vil framstå anonym i forskningsprosjektet, men du kan også reservere deg fra å bli sitert.

Datainnsamlingen vil foregå fra slutten av januar, til midten av februar. Vi ønsker å samle inn datamateriale over maks fem samlinger. Lydopptakene vil oppbevares av oss og vil bli slettet innen 2022.

Vi som forskere er underlagt taushetsplikt og vil behandle data deretter. Opplysningene vil bli presentert i en mastergradsoppgave, og der vil det ikke komme fram hvem som har sagt hva eller hvilken klasse og skole vi har gjort forskningen vår.

Som deltaker i dette prosjektet har du rett til:

- å få innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket. Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Har du noen spørsmål angående studien vår eller om du ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, kan du kontakte oss eller veileder.

Mastergradsstudent Kristian Bedin
Institutt for matematiske fag
Tlf: 47 64 08 96
email: krisbe17@uia.no

Mastergradsstudent Kristian Sande
Institutt for matematiske fag
Tlf: 91 55 68 38
email: krissa17@uia.no

Veileder:
Førsteamanuensis Claire Vaugelade Berg
Institutt for matematiske fag
Tlf: 38 14 17 28
email: claire.v.berg@uia.no

Svarslipp:

Jeg har mottatt og forstått informasjonen om prosjektet "1P-elevers samarbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til å delta i prosjektet og at Kristian Sande og Kristian Bedin observerer, tar lydopptak, samler inn og oppbevarer data som er samlet inn.

……………………………………
Signatur deltaker/ dato

Vedlegg 2: Meldeskjema

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

170214

Prosjekttittel

1P-elevers strategier i arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Avdeling for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Claire Vaugedale Berg, claire.v.berg@uia.no, tlf: 38141728

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Kristian Sande, kristiansande14@gmail.com, tlf: 91556838

Prosjektperiode

01.10.2021 - 31.12.2022

Vurdering (2)

14.01.2022 - Vurdert

Personverntjenester har vurdert endringen registrert 14.01.22.

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 14.01.22. Behandlingen kan fortsette.

ENDRING

Det er lagt til en ny datakilde: papirbasert spørreundersøkelse.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson: Line Raknes Hjellvik
Lykke til videre med prosjektet!

15.12.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 15.12.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

· lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
· formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
· dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
· lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!