Universitetet i Agder

Master

Modelleringsaktiviteter og dybdelæring i likninger på 8. trinn

BIRGITTE GALTELAND
MARIA SANDVAND

VEILEDERE
David Alexander Reid
Jorunn Reinhardtsen

Universitetet i Agder, 2022
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Fem innholdsrike år er med innlevering av denne oppgaven over. Det har vært oppturer og nedturer, men vi ser allerede nå tilbake på studietiden som en fin periode. På samme tid ser vi frem til å begynne i jobb som lærere fra høsten av.

Vi vil rette en stor takk til skolen vi fikk komme til for å gjennomføre forskningen vår. Spesielt takk til lærerne som stilte sine to klasser til disposisjon, og ikke minst elevene som deltok og dermed gjorde denne oppgaven mulig. Vi må også rette en takk til våre to veiledere, David Alexander Reid og Jorunn Reinhardtsen. Takk for god oppfølging og at dere har vært tilgjengelig for oss gjennom hele prosessen. Dere har uten tvil forbedret denne oppgaven til det den er i dag. Så må vi selvsagt gi hverandre en stor takk for samarbeidet, tålmodigheten og det gode humøret. Halvåret hadde vært tyngre hvis vi ikke hadde hatt hverandre.

Birgitte Galteland & Maria Sandvand

Kristiansand, mai 2022

Sammendrag

Denne masteroppgaven innen matematikkdidaktikk har algebra som hovedtema, med modellering som tilnærming. Hensikten er å undersøke hvordan modellering kan være med å legge til rette for dybdelæring i likninger, derav våre to forskningsspørsmål:

1. Hvilke tegn på dybdelæring i lineære likninger kan observeres i elevers arbeid med modellering av praktiske situasjoner i algebraundervisning?
2. Hvordan kan modellering integreres i algebraundervisning for å legge til rette for elevers dybdelæring i lineære likninger på 8.trinn?

Da studien har til hensikt å forske på undervisning er læringssyn av betydning, og vi har valgt å plassere oss innunder det sosiokulturelle læringssynet. Videre bygger studien på et teoretisk rammeverk basert på definisjoner av algebra, samt likninger og hvordan dette kommer til uttrykk i skolen. I tillegg defineres matematisk modellering, hvor vi baserer oss på syklusene til Blum (2015) og Lamon (1998). Begrepet dybdelæring redegjøres for, og vi presenterer en egenutviklet tabell over kjennetegn på dybdelæring i lineære likninger.

Vi har gjennomført et undervisningsekseperiment i to 8. klasser, der vi introduserte begrepet modellering og arbeid med semi-modelleringsoppgaver. Med semi-modelleringsoppgaver mener vi oppgaver som tar utgangspunkt i et modelleringsproblem, men som er tatt med inn i klasserommet og tilpasset klasseromsaktivitet. Datainnsamling i studien ble gjort ved lyd- og videoopptak, samt elevarbeid.

Av resultat ser vi noen tegn til dybdelæring i lineære likninger etter vårt eksperiment, men vi savner at de bruker sin samlete kompetanse innenfor algebra til å løse mer komplekse oppgaver enn de er vant til. For å få til dette mener vi læreren må være svært bevisst sin rolle, at holdningene til både lærer og elev må arbeides med, samt at oppgavene og tidsbruk planlegges godt.

Abstract

This master's thesis in mathematics didactics has algebra as its main theme, with modeling as its approach. The purpose is to investigate how approaching algebra through modelling can help to facilitate deep learning in equations, hence our two research questions:

1. What signs of deep learning in linear equations can be observed in students' work with modeling of practical situations in algebra teaching?
2. How can modeling be integrated into algebra teaching to facilitate students' deep learning in linear equations in 8th grade?

As the study aims to research teaching, views on learning are important, and we have chosen to place ourselves within the socio-cultural view of learning. Furthermore, the study is based on a theoretical framework based on definitions of algebra, as well as equations and how algebra and equations are expressed in school. In addition, mathematical modeling is defined, where we base ourselves on the cycles of Blum (2015) and Lamon (1998). The concept of deep learning is explained, and we present a self-developed table of characteristics of deep learning in linear equations.

We have conducted a teaching experiment in two 8th grades, where we introduced the concept of modeling and work with semi-modeling tasks. By semi-modeling tasks we mean tasks that are based on a modeling problem, but which are included in, and adapted to, classroom activity. Data collection was done by audio and video recordings, as well as student work.

As a result, we see some signs of deep learning in linear equations after our experiment, but we miss that they use their combined competence in algebra to solve more complex tasks than they are used to. To achieve this, we believe the teacher must be very aware of his role, that the attitudes of both teacher and student must be further developed, and that the tasks and time use are well planned.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Å lære algebra er vanskelig for elever (Blanton et al., 2015; Reeuwijk, 1995; Stacey & MacGregor, 1999). Også norske elever viser at de sliter innenfor dette fagfeltet (Bergem, 2016), og de presterer dårligere sammenlignet med elever fra andre nordiske land (Kaarstein et al., 2020). Ved å ha valgt algebra som matematisk tema i denne oppgaven, håper vi å kunne bli bedre matematikklærere for fremtidens elever og være med å gjøre norske elever bedre innenfor dette viktige fagfeltet. Vi har selv stor glede av matematikk og håper vår fordypning i faget vil kunne bidra til å gjøre oss mer kapable til å undervise dette viktige, men krevende faget.

I årene vi har tilbrakt på lærerutdanningen har det pågått et endringsarbeid i læreplanverket, som munnet ut i innføringen av nye lærerplaner høsten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2022). Dette har gjort at vi som lærerstudenter har vært svært bevisst den nye planen, men likevel ikke hatt et eierforhold til den. Derfor ønsket vi i vårt masterarbeid å bli tryggere på noen av de nye aspektene ved denne. Valget falt da på dybdelæring, som nå skal prege alle fag i skolen (NOU 2015: 8), og modellering som er blant de nye kjerneelementene i matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Etter å ha landet oppgavens hovedtema måtte vi, grunnet oppgavens omfang, avgrense disse noe. Innenfor algebra falt valget på lineære likninger, da vi var tildelt to klasser på 8.trinn som hadde kjennskap til dette. I valget om modellering som tilnærming til algebra lå det et ønske om å bruke modelleringsoppgaver i algebraundervisning. Disse ville da bryte med tanken om at matematikk dessverre av mange oppfattes som et fag hvor en må regne mange oppgaver og huske mye (Boaler, 2016). Bakgrunnen for dette er at modelleringsoppgavene ofte innebærer en mer realistisk tilnærming til matematikken, og hvor prosessen (Blum, 2015) er viktigere enn å komme frem til et riktig svar. Videre ønsket vi å se på hvordan en slik tilnærming kunne legge til rette for dybdelæring i lineære likninger, selv om vi visste at dette ville utfordre både vårt eget og elevenes syn på faget (Maugesten & Nordbakke, 2019).

Til sammen utgjør dette bakteppet for at vi i denne studien ønsker å se nærmere på kjennetegn på dybdelæring i likninger, slik vårt primære forskningsspørsmål uttrykker:

1. Hvilke tegn på dybdelæring i lineære likninger kan observeres i elevers arbeid med modellering av praktiske situasjoner i algebraundervisning?

Det første forskningsspørsmålet førte til at vi også fant det interessant å se nærmere på hvordan vi som matematikklærere kan bruke modelleringsoppgaver inn i algebraundervisningen, derav forskningsspørsmål 2:

2. Hvordan kan modellering integreres i algebraundervisning for å legge til rette for elevers dybdelæring i lineære likninger på 8.trinn?

For å svare på forskningsspørsmålene har vi valgt å gjennomføre et undervisningseksperiment, der vi aktivt brukte egenutviklete semi-modelleringsoppgaver i undervisningen. Med semi-modelleringsoppgaver mener vi oppgaver som tar utgangspunkt i et modelleringsproblem, men som er tatt med inn i klasserommet og tilpasset klasseromsaktivitet, da vårt primære fokus i studien er på utvikling av elevers dybdelæring i likninger. Studien er en casestudie, der vi ser på klassene som én case. Siden vi fokuserer på klassene som en helhet vil et bredt perspektiv prege oppgaven.

Oppgaven vil i det følgende først presentere et teoretisk bakteppe for oppgavens hovedtema, etterfulgt av tidligere forskning på feltet. Deretter kommer metodekapittelet der vi redegjør for gjennomføringen av undervisningseksperimentet, innsamling av data, analysemetode, studiens troverdighet og etiske overveielser i forbindelse med masterarbeidet. I resultat- og analysekapittelet legger vi frem funnene av studien og reflekterer rundt bakgrunnen for disse, før vi drøfter resultatene opp mot tidligere forskning i diskusjonsdelen. Oppgaven avsluttes med en konklusjon, der vi oppsummerer hovedfunnene og peker på hvordan studien er nyttig for oss selv og et bidrag til forskningsfeltet.

2 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet presenterer vi teorien som ligger til grunn for studien vår. Først redegjør vi for studiens læringssyn. Deretter presenterer vi vår definisjon av algebra og litt om algebra og likninger i skolen. Vi vil så forklare modelleringsbegrepet, for deretter å diskutere begrepet dybdelæring og hva som kjennetegner dette i lineære likninger.

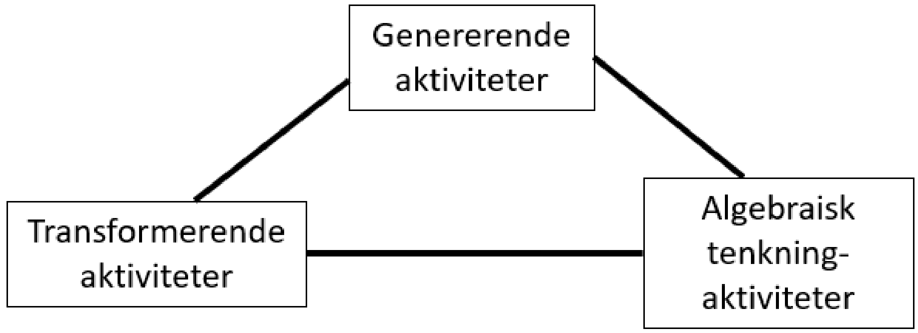
2.1 Sosiokulturelt perspektiv på læring

Studien har et sosiokulturelt syn på læring. Dette gir seg uttrykk i hvordan vi har lagt opp til læring i undervisningssituasjoner, hvordan vi ser for oss at læring skjer i arbeid med oppgaver og hvordan «(…) begreper utvikler seg når barna aktivt jobber med å finne løsninger på problemer» (Bråten, 1996, s. 102). Med dette perspektivet ses læring som utvikling i samhandling med andre. Språk er derfor helt sentralt og ses som et viktig hjelpemiddel i læringssituasjoner (Moen, 2015). Læring skjer både i samhandling med lærer-elev og elev-elev. Tanken er at alle kan komme lengre i samhandling med en mer kompetent annen, i skolen gjerne en lærer eller en dyktigere medelev, enn man ville klart på egenhånd. Ved å legge til rette for samhandling og samarbeid mellom elever, samt bruke dialogen mellom lærer og elev aktivt, vil man ifølge dette læringssynet legge til rette for god læring (Bråten, 1996).

2.2 Algebra

Algebra defineres av Stacey og MacGregor (1999), som et informativt, matematisk språk og kraftfullt problemløsningsverktøy. Forskning viser at å lære algebra er vanskelig for elever (Stacey & MacGregor, 1999; se Reeuwijk, 1995 eller Blanton et al., 2015 for henvisninger til en lengre liste med studier). Dette har også blitt bekreftet at gjelder norske elever ved resultatene fra TIMSS-studier de siste 20 årene (Bergem, 2016). Fra 70-tallet av var overgangen mellom aritmetikken og algebra spesielt i fokus innenfor forskning på algebrafeltet, deretter ble interessen stor for teknologiske hjelpemidler, og siden 90-tallet har særlig begrepet algebraisk tenkning blitt viet stor oppmerksomhet (Kieran, 2006; Reeuwijk, 1995).

Algebraisk tenkning og algebra i skolen er knyttet tett opp mot hverandre (Reeuwijk, 1995). Vår definisjon av algebra bygger på hvordan Kieran (2004) beskriver algebra ut ifra de typiske aktivitetene som elevene gjør på skolen: genererende aktiviteter (generational activities), transformerende aktiviteter (transformational activities) og algebraisk tenkning-aktiviteter (global meta-level activities). Vi har valgt å kalle den tredje aktiviteten til Kieran for algebraisk tenkning, da vi ser definisjonen av Kierans tredje aktivitet og algebraisk tenkning som sammenfallende. I tillegg ser vi betydningen av å ha algebraisk tenkning som en del av vår definisjon av algebra.



Figur 1 Definisjon av algebra ved tre typer aktiviteter: genererende, transformerende og algebraisk tenkning

Genererende aktiviteter innebærer dannelsen av uttrykk og likninger, for eksempel ved bruk av en ukjent som representasjon i en problemsituasjon. For å få til aktiviteter innen denne typen aktivitet trenger elevene kjennskap til algebraens symboler og språk, slik som likhetstegnet, variabler og ukjente. Transformerende aktiviteter, også kalt for regelbaserte aktiviteter, omhandler blant annet løsning av likninger. Med andre ord må elever innenfor denne type aktivitet kunne manipulere symboler ved å benytte regler for å opprettholde balanse ved likhetstegnet. Den siste aktiviteten i modellen er algebraisk tenkning. Her brukes algebra mer som et verktøy, men dette er ikke eksklusivt for algebra (Kieran, 2004). Aktiviteter innenfor denne typen aktivitet er «problemløsning, modellering, legge merke til strukturer, studere endring, generalisere, analysere sammenhenger, rettferdiggjøre, bevise og forutsi» (Kieran, 2004, s. 142, egen oversettelse). Disse eksemplene på aktiviteter innenfor algebraisk tenkning-aktiviteten kan gjøres uten bruk av algebra, og faktisk støtter aktivitetene mer generelle matematiske prosesser og aktiviteter (Kieran, 2004).

Vi ser disse tre aktivitetene til Kieran som gjensidig avhengig av hverandre og dermed at de til sammen utgjør vår definisjon av algebra. Med aktivitetenes gjensidige avhengighet mener vi at elever kan få til aktivitetene hver for seg, samtidig som de bygger på hverandre slik at de til sammen utgjør algebra. Eksempler på dette kan være en elev som får til å løse en oppstilt likning, men som ikke klarer å hente ut informasjon til å sette opp en likning selv. En annen elev kan derimot gjenkjenne den ukjente i en problemsituasjon, sette opp en likning med den ukjente og løse denne. Den første eleven mestrer da kun den transformative (regelbaserte) aktiviteten innenfor algebra, mens den andre eleven får til både den genererende, transformerende og den algebraiske tenkning-aktiviteten ved for eksempel å kunne legge merke til strukturer. Til sammen viser da eleven at den mestrer algebra fullt utfra vår definisjon, fordi disse tre aktivitetene er gjensidig avhengige av hverandre.

2.2.1 Algebra i skolen og likninger

Det kreves tid og rom for å oppnå dybde i elevers algebraiske tenkning (Blanton et al. 2015). Oppgavene som benyttes for å oppnå dybde i matematikk, bør utfordre elevenes utholdenhet og være kognitivt krevende (Ball & Bass, 2015; Maugesten & Nordbakke, 2019). Tanken som har fått regjere i mange år, og prege skolens forhold til algebra, har vært at elevene først lærer aritmetikk, for så å bygge på med algebra (Blanton et al., 2015). Reeuwijk (1995) mener at algebraundervisning hopper for fort til det formelle, hvor elevene lærer seg regler og prosedyrer, uten den dypere forståelsen som ligger til grunn for disse handlingene. Det viser seg at nettopp dette er noe av det vanskeligste for nybegynnere i algebra, nemlig å forstå koblingen mellom et matematisk problem og det formelle uttrykket for dette (MacGregor & Stacey, 1993).

I skolen forstås algebra gjerne som mønster, generalisering, likningsløsing, og grafiske fremstillinger av funksjoner (Webb & Abels, 2011). Vi har i vår oppgave valgt å fordype oss i likninger og se nærmere på dybdelæring i lineære likninger. Likninger kan for mange fort assosieres med en oppgave som skal løses. Webb og Abels (2011) mener imidlertid at likninger er mer enn dette. De ser likninger som representasjoner av relasjoner, altså at en likning uttrykker noe vel så viktig som en oppgave som krever et svar, nemlig et system av sammenhenger som kan studeres og tas høyde for. På denne måten blir likningen mer enn bare en oppgave som må besvares, da den er et uttrykk for en situasjon og beskriver relasjoner utfra denne.

I møte med likninger viser det seg særlig vanskelig for elever å gå fra ord til likning (MacGregor & Stacey, 1993; Stacey & MacGregor, 1999). Med andre ord er tekstoppgaver, som krever oppstilling av likninger, en utfordring for mange elever. Grunnen til dette har opptatt mange forskere (Kieran, 2007), og det viser seg i stor grad å handle om at innholdet i oppgavene må reorganiseres før det kan uttrykkes matematisk. Dette krever øvelse og lærere bør modellere for elevene hvordan dette kan gjøres (MacGregor & Stacey, 1993). I tillegg fant Stacey og MacGregor (1999) ut at elevenes forståelse for hva en likning er, samt nytten av den og hva en ukjent er, har mye å si for utfordringene med å løse matematiske problemer algebraisk. Dersom det er ønskelig at elevene bruker matematiske strategier i løsningsarbeidet (for eksempel sette opp og løse en likning), må problemet som presenteres kreve dette og ikke la seg løse tilstrekkelig ved for eksempel gjett-og-sjekk-strategien (Reeuwijk, 1995; Stacey & MacGregor, 1999).

Aritmetikken kjenner gjerne elevene godt før de lærer algebra. Derfor vil de ønske å jobbe med, og regne på, kjente tall fremfor ukjente. Poenget med å benytte algebra til å løse et problem, er gjerne vanskelig for elever å se. Dermed er det løsningsutregning som er deres prioritet (Stacey & MacGregor, 1999). Grunnet at den kjente aritmetikken er prosedyrebasert, er det vanskelig for elevene å bruke denne til å representere relasjoner fra et matematisk problem. Dette skyldes at de tenker på handlingene sine som løsningsstrategier og ikke representasjonsverktøy (Kieran, 2006). Et representasjonsverktøy er et verktøy for å manipulere og løse problemer (Kieran, 2007). Med andre ord vil det si at hvordan elevene ser på handlingene sine er ulikt i aritmetikk og algebra. Dermed oppstår det en overgang for elevene i møte med algebra, der de behøver å endre tankegangen sin. De må da gå fra å se handlingene sine som løsningsstrategier, til i større grad å se disse som et verktøy for å fremstille representasjoner av relasjoner eller sammenhenger i forbindelse med løsning av likninger.

2.3 Matematisk modellering

Matematisk modellering (heretter modellering) har de siste ti årene blitt mer og mer gjeldende i læreplanen i flere land, inkludert Norge (Berget & Bolstad, 2019; Borromeo Ferri, 2018; Erfjord, 2005;

Kunnskapsdepartementet, 2019). Ved fagfornyelsen som trådte i kraft i august 2019, kom det frem seks kjerneelementer i matematikk, der modellering og anvendelse var et av dem (Kunnskapsdepartementet, 2019). Fokus på, og kunnskap om, modellering er derfor svært aktuelt.

Vi støtter oss på Blums (2015) definisjon av en matematisk modell. Han definerer en matematisk modell som et bevisst forenklet og formalisert bilde av en del av virkeligheten. Et eksempel på dette, i lys av vår studie, kan være en likning som matematisk modell hentet utfra en problemsituasjon i virkeligheten. De matematiske modellene kan, ifølge Blum (2015), være alt fra deskriptive til normative. En deskriptiv modell er beskrivende og forklarende, mens en normativ modell er forutsigbar og del av den virkelige verden. Det finnes altså ulike typer matematiske modeller og det vil i vår oppgave være hovedvekt av de deskriptive modellene.

Det er sterk enighet om at modellering kan beskrives som en aktivitet som involverer en overgang, frem og tilbake, mellom den virkelige verden og den matematiske verden (Blum, 2015; Borromeo Ferri, 2018; Kunnskapsdepartementet, 2019). Overgangene som kreves for matematisk modellering gjør det til et krevende tema for elever. Dette kommer av at de må jobbe med spørsmål som er tatt fra den virkelige verden og bruke passende matematikk for å komme frem til svaret (Borromeo Ferri, 2018).

Modellering kan, som nevnt ovenfor, være krevende for elever. Likevel peker Blum (2015) på fire grunner for hvorfor det er et viktig tema. To av disse, formativ og psykologisk, er relevant for vår oppgave og blir derfor redegjort for i det følgende. Det formative temaet er viktig for å utvikle ulike kompetanser innenfor matematikk. Noe av det som er vesentlig innenfor dette temaet er argumentasjonskompetanse, da elevene må argumentere for løsningene de har kommet frem til. Språket blir dermed av betydning, slik også det sosiokulturelle læringssynet vårt underbygger. En slik kompetanse vil da også kunne være med å gi elevene dybde i læringen sin, noe vi kommer tilbake til i kapittel 2.4 av oppgaven. Det psykologiske temaet innebærer eksempler fra hverdagssituasjoner som kan bidra til at elevene blir interessert i matematikk. Modellering kan da hjelpe elevene med motivasjonen for faget og/eller struktureringen av matematisk innhold på en slik måte at de kan forstå dette bedre og beholde kunnskapen lengre (Blum, 2015). Hensikten med oppgaven vår er at elevene skal oppnå dybdelæring i algebra ved arbeid med modelleringsoppgaver, og det er derfor et ønske fra vår side at det psykologiske aspektet ved modellering vil være til hjelp for å oppnå elevengasjement i algebra.

I modellering trekkes det ofte frem ulike steg som til sammen utgjør en syklisk prosess. Den mest anerkjente syklusen har sitt opphav i Blums forskning, og inneholder syv steg (Blum & Leiß, 2007; Blum, 2015). Da fokuset i denne oppgaven er på læring i algebra (psykologisk formål ved å ta i bruk modellering i undervisning), velger vi å bruke Lamons (1998) forenklete versjon av prosessen. Valget vårt falt på denne versjonen, da den ble utviklet for å hjelpe elevene i gang med modellering som tilnærming til algebraiske problemer. Lamons modelleringssyklus inneholder stegene: (1) identifisere størrelser, (2) gjøre antakelser, (3) beskrive relasjoner, (4) representere relasjoner og (5) systematisere situasjonen (egen oversettelse). For elever i arbeid med modelleringsoppgaver vil dette si at de må kunne hente ut relevante størrelser, gjøre fornuftige avgrensninger og formuleringer, sette ord på forholdet mellom de aktuelle størrelsene, uttrykke relasjonene gjennom symboler, og systematisere de nye erfaringene med forkunnskap (Lamon, 1998). Når vi legger opp til arbeid med semi-modelleringsoppgaver i algebraundervisning er det særlig viktig at steget hvor elevene gjør antakelser og formuleringer er noe elevene klarer. Dersom elevene ikke får til dette steget, vil læringen i algebra sannsynligvis stoppe opp, da stegene hittil i syklusen kun forutsetter den genererende aktiviteten til Kieran (2004). Altså er det viktig for elevenes læring innenfor algebra at de kommer lenger i modelleringssyklusen enn det andre steget.

2.4 Dybdelæring

Dybdelæring er et begrep som kom inn i læreplanverket i forbindelse med fagfornyelsen 2020 (Meld. St. 28 (2015-2016)). Begrepet har sitt utgangspunkt i forskning på hvordan elever lærer (Marton & Säljö, 1976). Utdanningsdirektoratet definerer selv dybdelæring som «å lære noe så godt at du forstår sammenhenger og kan bruke det du har lært i nye situasjoner. Dybdelæring er altså mer enn faglig fordypning» (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 1).

I matematikk er Kilpatricks begrep *Mathematical proficiency* ofte knyttet til dybdelæring, selv om det gjerne oversettes til matematisk kompetanse (Maugesten & Nordbakke, 2019). Kilpatrick (2001) gir oss en modell for matematisk kompetanse beskrevet som et tau bestående av fem sammenflettede tråder. De fem trådene er forståelse (conseptual understanding), beregning (procedural fluency), anvendelse (strategisk tankegang) (strategic competense), resonnering (adaptiv reasoning) og engasjement (productive disposition) (oversettelse ved Ludvigsen-utvalget i NOU 2015: 8). Trådene utvikles i fellesskap, og matematisk kompetanse oppnås ved at elevene behersker dem alle og dermed at de er sammenflettet til ett tau.

Tankegangen om dybdelæring som et sammenflettet tau har Nosrati og Wæge (2018) adoptert og utviklet i sin definisjon av dybdelæring i matematikk. Deres definisjon omfatter de fem komponentene begrepsmessig forståelse, prosedyrekunnskap, anvendelse, resonnering og metakognisjon og selvregulering. De bygger sin definisjon av dybdelæring på et bredt teorigrunnlag, som «er hentet fra og satt sammen av forskjellige forskningsbaserte og praksisnære modeller for læring i matematikk» (s. 4).

På bakgrunn av dybdelæringsmodellene presentert ovenfor har vi utviklet vår egen tabell over relevante dybdelæringskomponenter for vår studie. Bakgrunnen for dette er vårt fokus på lineære likninger, og at vi ønsker å se på kjennetegn på dybdelæring i nettopp dette spesifikke temaet innenfor algebra. Våre dybdelæringskomponenter er: (1) begrepsmessig forståelse, (2) prosedyrekunnskap, (3) modellering, og (4) metakognisjon, selvregulering og holdninger.

Bakgrunnen for valget av komponentene (1) begrepsmessigforståelse og (2) prosedyrekunnskap ligger i Nosrati og Wæges argumentasjon for hvordan disse begrepene utfyller hverandre. Videre kommer komponent (3) modellering, som rommer både Kilpatricks (2001) og Nosrati og Wæges (2018) komponenter anvendelse og resonnering. Navnevalget og sammenslåingen skyldes studiens fokus på bruk av modellering i arbeid med likninger. I tillegg kan modellering ses som en paraply av komponentene anvendelse og resonnering, fordi disse er viktige kjennetegn ved modellering. Videre er vi i studien også opptatt av å finne ut hvordan elever arbeider med likninger i en undervisning som anvender modellering som metode. Dermed vil modellering som komponent i dybdelæring gi oss anledning til å koble elevenes modelleringsprosesser til deres bruk av likninger. Den fjerde og siste komponenten innebærer også en viktig del av dybdelæringsbegrepet og bygger på Kilpatricks engasjement-komponent og Nosrati og Wæges metakognisjon og selvregulering. Metakognisjon, holdninger og selvregulering dreier seg i stor grad om uttrykk rundt tenkning om læring, refleksjoner rundt prosess med problemsituasjoner og holdninger til slikt.

Da studien blant annet har til hensikt å identifisere kjennetegn på dybdelæring i lineære likninger, har dette blitt utviklet innenfor hver dybdelæringskomponent. Utgangspunktet for disse var Kilpatrick og Nosrati og Wæges beskrivelser av sine komponenter. Dette ble så overført til lineære likninger og ønsket utfall hos elevene etter endt undervisning. Kjennetegnene ble så systematisert og organisert i en tabell. Denne er gjengitt i sin fullstendighet nedenfor.

Dybdelæringskomponenter	**Kjennetegn på dybdelæring i lineære likninger**
Begrepsmessig forståelse	Når eleven viser forståelse for hva en likning er og forstår at den kan brukes i modellering av reelle situasjoner. • Kjennetegnes ved at eleven kan benytte ulike og hensiktsmessige representasjoner i den gitte situasjonen og kan oversette mellom de ulike representasjonene • Kan identifisere og navngi den ukjente • Forståelsen av likhetstegnet som et tegn for at uttrykkene på høyre og venstre side er ekvivalente • Forstår relasjonene mellom de ulike størrelsene i en gitt matematisk situasjon og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk • Forstår relasjonene mellom leddene i likninger på formen $ax + b = c$ og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk
Prosedyrekunnskap	Når eleven kan løse likninger på formen $ax + b = c$ med hensyn på x, ved å bruke inverse operasjoner. Når eleven behersker de fire regneartene i løsning av likninger på formen $ax + b = c$.

Modellering	Når eleven engasjerer seg i ulike aspekter i modellering og evner å formulere en problemsituasjon, hvor bruk av likninger er relevant for å modellere og løse problemet matematisk. • Identifisere størrelser • Gjøre antakelser knyttet til størrelsene og sammenhengene mellom dem • Beskrive sammenhengene matematisk • Uttrykke sammenhengene symbolsk • Formulere et matematisk problem som kan løses ved bruk av matematikk (likninger, formel) fra en gitt situasjon • Identifisere og navngi ubestemte størrelser • Evaluere løsningsprosess og svar Når eleven kan forklare hvordan de tenker. • Setter ord på egne tankerekker skriftlig, muntlig eller i kombinasjon. Når eleven ser sammenhenger i faget • Bruker likninger i arbeidet med modelleringsoppgaver
Metakognisjon, selvregulering og holdninger	Når eleven tar kontroll over egen læringsprosess • Eleven setter egne mål og delmål i likninger • Eleven følger egen fremgang i likninger • Eleven evaluerer og eventuelt endrer valgt strategi i arbeid med likninger Når eleven viser gode holdninger ovenfor algebra og gir uttrykk for å se verdien av emnet.

Tabell 1 Kjennetegn på dybdelæring i likninger

Vi vil videre i denne studien se nærmere på hvordan modellering og algebra kan kombineres i undervisning for å legge til rette for dybdelæring i lineære likninger. Som metafor for dybdelæring velger vi også videre i oppgaven, å basere oss på Kilpatricks (2001) tanke om et tau. Vi ser dybdelæringskomponentene, med kjennetegnene gjengitt i tabellen ovenfor, som tråder i tauet. Prosessen med å danne et helhetlig tau blir da sammenfallende med å utvikle dybdelæring i lineære likninger. Vår tilnærming til dette er ved modellering og bruk av semi-modelleringsoppgaver i algebraundervisning. Det sosiokulturelle læringssynet vårt er lagt som ramme for oppbygningen av undervisningen. Før vi presenterer hvordan vi har gjennomført dette, vil vi redegjøre for relevante tidligere studier innenfor forskningsfeltet.

3 Tidligere forskning

I dette kapittelet vil vi redegjøre for tidligere forskning som er relevant for vår studie. Først vil vi presentere en tidligere studie som omhandler dybdelæring i matematikk. Deretter legger vi frem tidligere studier innenfor modellering i matematikkdidaktikk, før vi til slutt presenterer et par studier som bruker modellering som tilnærming til algebra.

3.1 Dybdelæring i matematikk

Maugesten og Nordbakke (2019) har undersøkt hvordan å kunne identifisere dybdelæring i en undersøkende matematikkoppgave på ungdomstrinnet. De brukte læreplanens kjerneelementer i matematikk og Sawyers komponenter for dybdelæring (2006) til å lage sitt eget rammeverk for kjennetegn på dybdelæring i undersøkende matematikk. De fant da blant annet ut at oppgavetype, arbeidsmåte og elevrefleksjoner er avgjørende faktorer for dybdelæring i matematikk. Videre konkluderer de også med følgende:

> Elevene trekker selv fram læreren som en veileder og motivator som hjelper dem til å "holde ut" i prosessen (…). En lærerrolle der undring og spørsmål er viktigere enn å lære elevene bestemte framgangsmåter, er avgjørende for å oppnå dybdelæring hos elevene. (Maugesten & Nordbakke, 2019, s. 73)

Utsagnet støttes av hvordan studien vår ser på læring gjennom sine sosiokulturelle briller, da denne også vektlegger læreren som en veileder med språk som verktøy for å legge til rette for læring og utvikling (Moen, 2015).

3.2 Modellering i matematikkdidaktikk

Artaud (2007) undersøker hva som skal til for at modellering skal eksistere i matematikkundervisning. Hun konkluderer med at både sosiale, politiske og didaktiske forhold er med å prege modelleringens eksistens i klasserommene. Det er av betydning å integrere modelleringsoppgaver i den vanlige matematikkundervisningen, og gi disse tid og rom, for at elevene skal kunne se mer av matematikken i den virkelige verden. Videre går Blum og Borromeo Ferri (2009) litt mer i dybden når de ser på hvordan både lærere og elever håndterer krevende modelleringsoppgaver i undervisningen. De finner blant annet at modellering kan læres som følge av at undervisningen kjennetegnes av noen gitte kvalitetskriterier. Blant disse kriteriene er balansen mellom at elevene prøver selv og lærerens veiledning av særlig betydning. Totalt sett kan matematisk modellering bidra positivt i læringsarbeid ifølge Bahamonde et al. (2017). Dette fremkommer i deres studie av et didaktisk forslag til hvordan å undervise lineær algebra basert på to ulike teorier.

Integrering av modellering i matematikkundervisning gir både fordeler og ulemper, noe Kaiser og Maass (2007) forsket på forekomsten av på mellomtrinnet og ungdomsskolen. I studien kommenterer de blant annet noen forskjeller på valg av modeller utfra matematisk nivå. Turner (2007) ser videre nærmere på hva som kan hentes ut av resultater fra PISA med særlig fokus på modellering. Det fremkommer av studien at en strategi for å benytte modellering i undervisning er ved å bryte ned prosessen i mindre deler. Elevene vil finne det enklere å tolke slike oppgaver enn å lage egne modeller. Studien tyder på at dette kan øves på ved å arbeide med eksempler. Swan et al. (2007) ser så nærmere på hvordan modellering kan hjelpe elevene til å utvikle ny matematisk kunnskap og fremme læring innenfor matematikk. Dette mener de skjer ved å arbeide med matematisk språk, samt å produsere svar og stille nye spørsmål, noe som til sammen er med å utvikle elevenes evne til å bruke matematikk som verktøy.

Hvilken kunnskap læreren trenger for å bruke modellering i sin matematikkundervisning undersøker Doerr (2007). Hun konkluderer med at en slik tilnærming vil gi betydelige utfordringer for lærere og kreve store endringer i hvordan vi tenker matematikkundervisning. Blant annet trekkes det frem fire kjennetegn ved læreres kunnskap for å lykkes med å bruke denne tilnærmingen i klasserommet. Antonius et al. (2007) trekker også frem i sin studie at læreren trenger kunnskap for å legge best mulig til rette for modellering i klasserommet. De ser også på ulike klasseromsaktiviteter og undervisningsmetoder for å utnytte potensialet ved bruk av modellering i matematikk. Bonotto (2007) ser på holdningsendringer i forbindelse med bruk av modellering i matematikkundervisning. Blant konklusjonene hennes finner vi tre nødvendige holdningsendringer for at elevene skal kunne få nytte av arbeidet med modelleringsoppgaver.

3.3 Modellering som tilnærming til algebra

Vi vil nå se på to studier, der modellering blir brukt for å oppnå innsikt og læring i algebra og algebraiske idéer. Lamon (1998) har gjennomført et undervisningseksperiment med ønske om å skape større mening i algebra ved å bruke modellering. Oppgavene hun benytter i studien er semi-modelleringsoppgaver, da de blir brukt i klasserommet uten videre praktisk tilnærming enn oppgavene i seg selv. Hun kommer frem til at det er viktig for elevene med begrepsmessigforståelse og prosedyrekunnskap, slik at de ser nytten av og vet når de kan bruke algebra som verktøy.

Izsák (2003) har til hensikt å undersøke hvordan elever lærer seg å modellere. Han ser på om elevene klarer å lage, bruke og evaluere representasjoner i arbeid med modelleringsoppgaver. Oppgavene han benytter er i større grad praktiske, da elevene arbeider med en vinsj, og faller dermed mer inn under kategorien for autentiske modelleringsoppgaver enn Lamons. Å kunne lage, bruke og evaluere representasjoner i arbeid med slike oppgaver mener Izsák utgjør et rammeverk for hvordan elever utvikler kunnskap for modellering i algebra.

4 Metode

I denne delen av oppgaven vil vi redegjøre for hvordan vi har forsøkt å finne svar på forskningsspørsmålet. Dette vil vi gjøre ved først å beskrive og argumentere for valgene vi har gjort i forbindelse med undervisningseksperimentet vårt. Deriblant vil det redegjøres for studiens kontekst, deltakere og oppgavene som ble brukt. Deretter presenteres datainnsamlings- og analysemetodene våre. Før vi til slutt vil drøfte gyldigheten til forskningen vår og hvilke etiske aspekt vi har måttet ta hensyn til.

Forskningsdesignet vi har valgt er en casestudie. En casestudie er avgrenset i tid og sted og befinner seg innenfor en tydelig definert kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). I vår studie forsker vi på og samler inn data fra to klasser, men når vi analyserer skiller vi ikke mellom klassene. Vi plasserer studien vår derfor innenfor rammene til en enkelcasestudie. I en enkelcasestudie er målet å gå mer i dybden og få en grundigere forståelse for hva en forsker på enn i andre typer casestudier (Postholm & Jacobsen, 2018). Ulempen med en enkeltcasestudie er at du får det Postholm og Jacobsen (2018) kaller for «lokal kunnskap», altså at forskningen som er gjort kun sier noe om akkurat den klassen som forskes på. På den andre siden vil det være relevant for forskerne å stille seg spørsmål slik som «Er den kunnskapen jeg får frem i min klasse, også av interesse for andre?» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Spørsmål som dette kan bidra til å gjøre forskningen mer aktuell for andre.

4.1 Undervisningseksperimentet

Et undervisningseksperiment er en metodologi som ser undervisning og læring som integrerte prosesser. Denne ble valgt da den muliggjør å forske på undervisning, samtidig som den ser læring som en viktig del av denne (Steffe & Thompson, 2000). Dette gjorde at vi etter gjennomføringen kunne besvare våre forskningsspørsmål. Det var også usannsynlig å finne en lærer som drev med modelleringsoppgaver i arbeid med likninger, så derfor var det av verdi å benytte en metodologi som muliggjorde at forskeren også var læreren i egendesignet undervisningsopplegg. Et undervisningseksperiment innebærer et undervisningsopplegg fordelt over flere matematikktimer, der læreren/forskeren, et utvalg elever og helst et vitne/observatør er til stede. Det blir også benyttet en datainnsamlingsmetode for å registrere det som skjer i timene (Steffe & Thompson, 2000). Vi vil i det følgende beskrive hvordan dette så ut i vår studie.

4.1.1 Studiens kontekst og deltakere

Studien ble gjennomført i matematikktimer i to klasser på 8. trinn på en skole i Sør-Norge. Vi gjennomførte eksperimentet i to klasser både for å ha litt mer bredde i elevmassen, men også for å ha muligheten til å forbedre undervisningsopplegget underveis i datainnsamlingsperioden fra den ene klassen til den andre.

Vi hadde kun én uke til rådighet i hver klasse. Dette var en føring fra skolens side og ikke noe vi kunne påvirke. I den ene klassen ble det gjennomført 4 timer, mens det i den andre ble gjennomført 5 grunnet timeplanen deres. Ideelt sett skulle vi gjerne ha gjennomført opplegget over flere uker, da dette ville kunnet gi resultater basert på et mer realistisk undervisningsgrunnlag enn kun én uke. Da ville vi også i større grad kunnet ha brukt mer tid i undervisningssituasjonen på å vise hvordan å sette opp og bruke likninger i modelleringsoppgaver. Likevel ga gjennomføringen oss innsikt i hvordan modellering kan integreres i algebraundervisning.

Deltakerne i studien var to klasser med henholdsvis 25 og 26 elever. Tidsrommet vi gjennomførte undervisningseksperimentet i skolen var preget av høyt fravær blant elevene. Dette gjorde at vi hadde alt fra 8 – 22 elever til stede i timene våre med hele klasser. En av utfordringene med dette var at elevene fikk med seg svært ulik mengde av timene våre. Vi møtte ikke klassene våre før vi gjennomførte undervisningseksperimentet, men da vi alltid hadde klassenes matematikklærere til stede i timene våre, var dette ikke noe vi merket store ulemper ved.

4.1.2 Undervisningsopplegget

Undervisningsopplegget i vårt undervisningseksperiment omhandlet semi-modelleringsoppgaver med fokus på lineære likninger. Oppgavene vi brukte ble utviklet av oss i forkant. På bakgrunn av erfaringer fra flere forskere (Stacey & MacGregor, 1999; Swafford & Langrall, 2000) om at det er en fordel for elevene å arbeide med problemstillinger innen samme kontekst over tid, valgte vi å lage hovedtyngden av våre oppgaver innenfor konteksten av en klassetur. De fleste oppgavene var relativt åpne, da dette er en hjelp for elevene til selv å utvikle egne løsninger (Kaiser & Maass, 2007).

Da vi visste at oppgavetypen vi brakte med oss var ukjent for elevene, var vi bevisste å bruke tid på å modellere og gjennomgå minst én oppgave hver time i felleskap med elevene. Fokuset i disse gjennomgangene var på å reorganisere innholdet i oppgaven slik at elevene i større grad skulle kunne se koblingen mellom ord og likning. Dette støttes av MacGregor og Stacey (1993), da de trekker frem viktigheten av at læreren modellerer og øver sammen med elevene, siden det er tidkrevende og krever øvelse for å kunne se koblingen mellom ord og likning.

En naturlig kontekst som ramme for et problem, vil også gjøre at elevene i større grad bruker løsningsstrategier de ikke nødvendigvis har lært på skolen (Reeuwijk, 1995). Altså bruker de heller sine egne erfaringer, sin egen logiske sans og slik sett egne, selvlærte strategier i løsningsarbeidet. Vi vil videre i oppgaven argumentere for valg av oppgaver og hensikten med disse, samt beskrive hvordan disse hørte sammen med målene for de enkelte timene i eksperimentet. Tabellen nedenfor viser en oversikt over oppgavene og deres hensikt sammen med hvilken time de ble brukt i.

	Oppgave	**Hensikt**	**Spør om likning?**
TIME 1	Introduksjons-oppgave	Resonnere Gjøre antakelser Se på størrelsesforhold Sette opp likning	Nei
ARBEIDS-HEFTET	Bil	Gjøre antakelser Akseptere at det ikke finnes ett svar	Nei

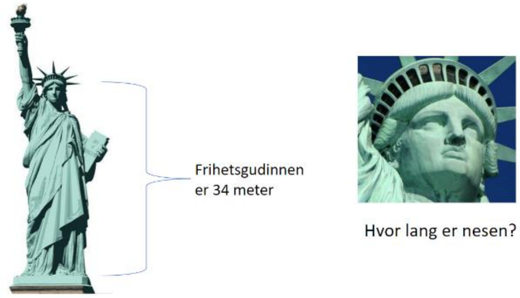
TIME 2 & 3	Kjøpepizza	Se sammenheng på hva de har gjort og deretter sette opp en likning	Ja, i deloppgave E
	Grendehus	Begrunne resonnement og likning som er brukt	Ja, i deloppgave E
	Lage pizza	Begrense aktuelle faktorer Bruke likning som verktøy	Nei
	Koronavirus	Forstå begrepet modell	Nei
TIME 4	Kø	Vise sin kompetanse innenfor både modellerings-, begrepsforståelses- og prosedyrekunnskapskomponentene	Nei
	Måke	Se sammenhenger mellom størrelser og beskrive dem matematisk	Nei
	Lage-selv	Bruke alt de har lært til å vise sin forståelse av likninger som verktøy	Nei

Tabell 2 Oversikt over oppgavene og deres hensikt

Bakgrunnen for valget av oppgavene som ble brukt i studien var sammensatt. Valget grunnet blant annet i et ønske om å oppnå dybdelæring og det var derfor av betydning at oppgavene utfordret elevenes utholdenhet og var kognitivt krevende (Ball & Bass, 2015; Maugesten & Nordbakke, 2019). Samtidig var det viktig for oss at alle elevene skulle få til noe, og siden likninger var et relativt nytt tema for elevene, ønsket vi også at oppgavene skulle bidra til å hjelpe dem til å se likninger som representasjoner av relasjoner (Webb & Abels, 2011). Oppgavene Lamon (1998) bruker er svært fokusert på å studere nettopp disse sammenhengene, derfor tilpasset vi to av disse (kø- og måkeoppgaven) til vår kontekst og benyttet disse i time 4. Vi antok at disse oppgavene ville være såpass krevende for elevene, at vi var nødt til å begynne introduksjonen av oppgavetypen gradvis og bygge opp mot et gruppearbeid med disse på slutten av eksperimentet, derav bruken i time 4. De resterende oppgavene hentet inspirasjon fra diverse andre tidligere studier og oppgavehefter, gitt oss av veilederne. I det følgende redegjøres det for mål for hver time i undervisningseksperimentet, samt bruken av og hensikten med de tilhørende oppgavene.

Tabellene presentert videre inneholder en oversikt over hver time med kompetansemål, mål for timen, hvilke oppgaver som ble gjennomgått, hensikten med oppgavene og arbeidsformer. Etter hver oversikt følger et avsnitt med utdypninger til hver time og oppgavene som ble brukt.

Time 1	
Kompetansemål	Lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner Lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12)
Mål for timen	Elevene skal kunne gjøre antakelser i møte med et problem

Oppgave **Introduksjonsoppgaven**	
Hensikt med oppgaven	Resonnere, gjøre antakelser, se på størrelsesforhold, sette opp likning
Arbeidsformer	I par, grupper og plenum

Tabell 3 Oversikt over time 1

Første time hadde fokus på oppstart av modellering, med mål om å gjøre antakelser i møte med et problem. Klassenes lærere hadde informert oss om at temaet var helt ukjent for elevene. Dette, sammen med vårt sosiokulturelle læringssyn (se 2.1), dannet grunnlaget for at vi la opp til elevarbeid både i par, grupper og plenum. Vi valgte på samme grunnlag å jobbe felles som klasse med en introduksjonsoppgave denne timen (se over). Introduksjonsoppgaven hadde et fasitsvar, men utfordringen lå på hvordan vi kunne resonnere mot en løsning som ga mening utfra våre matematikkunnskaper. Vi ønsket å få elevene til å komme frem med antakelser og bruke størrelsesforhold til å løse oppgaven ved hjelp av likninger.

Time 2	
Kompetansemål	Lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner Lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12)
Mål for timen	Elevene skal kunne gjøre antakelser i møte med et problem og øve på å akseptere at det ikke finnes ett riktig svar
Oppgave **Biloppgaven**	1. Klassen skal på skoletur til Hovden. Skolen har ikke nok penger til å leie inn buss så de trenger hjelp av foreldre til å kjøre. Hvor mange biler trenger dere for å komme dere frem til Hovden? 
Hensikt med oppgaven	Gjøre antakelser, akseptere at det ikke finnes ett svar
Arbeidsformer	Arbeid med oppgaver fra heftet individuelt, i par, grupper og plenum

Tabell 4 Oversikt over time 2

I andre time var planen at elevene skulle få utdelt et arbeidshefte med oppgaver. Dette heftet inneholdt majoriteten av oppgavene vi lagde med illustrasjonsbilder og god plass for elevene til å skrive ned sine resonnement. Begrunnelsen for illustrasjonsbildene var en oppstartsamtale med klassenes lærere, som var svært opptatt av tilrettelegging for klassenes språklige og matematiske mangfold. Ønsket om arbeidsheftene som del av datamaterialet vårt var bakgrunnen for rikelig skriveplass i heftene. Tanken var at elevene skulle begynne arbeidet med oppgavene i heftet denne timen, i tillegg til at begrepet modellering skulle presenteres ved hjelp av illustrasjoner på et lysark, og oppgave 1 (biloppgaven) skulle bli gjennomgått i plenum. Denne oppgaven hadde ikke et fasitsvar. Ønsket vårt med denne oppgaven var at elevene selv skulle gjøre antakelsene og regne ut fra dette, samt akseptere at det ikke finnes ett korrekt svar.

Time 3	
Kompetanse-mål	Lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner Lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12)
Mål for timen	Elevene skal kunne begrense faktorer, se sammenhenger i arbeidet de har gjort og bruke dette til å sette opp likninger
Oppgave **Kjøpepizza** **Lage pizza**	2. Til middag skal dere bestille pizza. Offpiste Hovden pizzeria selger store pizzaer delt inn i 36 biter. Det er bestilt 2 pizzaer. Alle har blitt enige om at hver person skal få like mange pizzastykker A. Bare 4 elever var tilbake når pizzaen kom. Hvor mange pizzastykker får hver elev da? Vis hvordan du kom frem til svaret. B. Det var også 5 lærere der da pizzaen kom, hvor mange pizzastkker blir det på hver? Vis hvordan du kom frem til svaret. C. Tenk deg at hele klassen var tilbake da pizzaen kom, hvor mange pizzastykker blir det på hver person da? Vis hvordan du kom frem til svaret. D. Dersom alle fikk 1 ½ pizzastykke hver, hvor mange personer er dere til sammen då? Vis hvordan du kom frem til svaret. E. Prøv å kom frem til en likning som gjør at du kan finne antall pizzastykker for hver  4. Det var så godt med pizza til middag, at dere bestemmer dere for å ha det igjen. Istedenfor å bestille pizza, så vil dere lage den selv. Pizzaen skal være klar til klokken 18. Lag en modell som viser hvor lang tid i forveien dere bør begynne å lage mat. 
Hensikt med oppgaven	Kjøpepizza: Se sammenheng på hva de har gjort og deretter sette opp en likning Lage pizza: Begrense aktuelle faktorer, bruke likning som verktøy

Arbeidsformer	Arbeid med oppgavene i arbeidsheftet i par/grupper. Felles gjennomgang.

Tabell 5 Oversikt over time 3

Tredje time skulle elevene fortsette arbeidet med heftet i modelleringsoppgaver i lineære likninger, i tillegg til at en av oppgavene skulle gjennomgås i plenum. Oppgave 2 i heftet (kjøpepizza-oppgaven) hadde til hensikten å gi elevene trening i å se sammenhenger og øvelse på å sette opp en likning og se denne som et verktøy. Den tredje oppgaven (grendehusoppgaven, se vedlegg 3) hadde til hensikt å få elevene til å forklare egne resonnement og begrunne likningen som ble satt opp. Oppgave 4 (lage pizza-oppgaven) ønsket vi skulle bidra til trening i å begrense faktorene som kunne bli dratt med inn, og i større grad bruke likning som et verktøy. Her kunne det også være relevant å bruke flere ukjente. Oppgave 5 (koronavirus-oppgaven, se vedlegg 3) hadde til hensikt å få elevene til å forstå begrepet modell, som for eksempel en tegning, likning eller tabell.

<table>
<tr><th colspan="2">Time 4</th></tr>
<tr><td>Kompetanse-mål</td><td>Lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner
Lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12)</td></tr>
<tr><td>Mål for timen</td><td>Elevene skal kunne avgrense aktuelle variabler, forklare forholdene mellom disse, modellere aktuelle situasjoner og bruke sin matematikkunnskap til å regne på dette</td></tr>
<tr><td>Oppgave

Kø

Måke

Lage selv</td><td>1. To av dere får bli med læreren å handle inn mat for turen. Etter å ha fylt handlevognen med alt dere trenger kommer dere frem til kassa. Der er det kø. Lag en modell for hvordan man kan bestemme seg for hvilken kø dere vil stille dere i.
 
2. Dagen dere skal stå på slalåm våkner dere til masse nysnø. Før dere kan dra til trekket må oppkjørselen måkes. Hvis en elev bruker tre timer på å måke ferdig, hvor lang tid tar det da hvis dere er to? Og hva hvis enda flere hjelper til?

3. Prøv å finne (og løse) egne modelleringsproblemer.</td></tr>
<tr><td>Hensikt med oppgaven</td><td>Kø: Vise sin kompetanse innenfor både modellerings-, begrepsforståelses- og prosedyrekunnskapskomponentene
Måke: Se sammenhenger mellom størrelser og beskrive dem matematisk
Lage selv: Bruke alt de har lært til å vise sin forståelse av likninger som verktøy</td></tr>
</table>

Arbeidsformer	Arbeid med oppgavene i grupper på 3-4 elever, 1 penn/blyant per gruppe for å tvinge de til å prate sammen om oppgavene og sette ord på egne tanker

Tabell 6 Oversikt over time 4

Ved siden av arbeidsheftet utviklet vi også et eget oppgaveark til bruk i den fjerde timen. Oppgave 1 på dette arket (heretter henvist til som køoppgaven) hadde til hensikt å la elevene få vise sin kompetanse innenfor både modellerings-, begrepsforståelses- og prosedyrekunnskapskomponentene. I oppgave 2 (måkeoppgaven) ønsket vi å la elevene vise at de ser sammenhenger mellom størrelser og kan beskrive dette matematisk. Disse oppgavene er hentet fra Lamon (1998), men tilpasset vår kontekst. Med oppgave 3 (lage selv-oppgaven) ønsket vi å utfordre elevene til å se at de kan bruke likninger til å løse hverdagslige problemer, altså at likninger er et verktøy.

4.1.3 Gjennomføringen av undervisningseksperimentet

Tabellen under viser en oversikt over timene i undervisningseksperimentet. Her presiseres det hvorvidt de ble gjennomført etter planen og om vi hadde hel eller halv klasse tilgjengelig.

Time	Klasse 1	Klasse 2
1	Plan fulgt – hel klasse	Plan fulgt + intro modelleringsbegrepet – hel klasse
2	Plan fulgt – hel klasse	Plan fulgt – ½ klasse
3	Plan fulgt – ½ klasse x2	Plan fulgt – hel klasse x2
4	Plan fulgt – hel klasse	Plan fulgt – hel klasse

Tabell 7 Oversikt over hvorvidt planen for timene ble fulgt i de ulike klassene.

I klasse 1 ble planen for første time fulgt til punkt og prikke, mens vi i klasse 2 valgte å introdusere modelleringsbegrepet alt på slutten av denne timen. Dette skyldtes timeplanen til denne klassen, hvor neste matematikktime var med halv klasse, og vi ønsket at hele klassen skulle bli kjent med begrepet så tidlig som mulig. Time 1 og 2 var sammenhengende i klasse 1. Dette gjorde at time 2 skled videre med et nytt problem i plenum (biloppgaven). Deretter jobbet elevene i par med arbeidsheftet, og modelleringsbegrepet ble introdusert som en avslutning på timene. I klasse 2 ble planen for time 2 fulgt, men da bare for ½ klasse.

Den tredje timen ble gjennomført to ganger med ½ klasse på to ulike ukedager i klasse 1. Eneste forskjell på disse timene var at timen lengst etter time 2 inneholdt en ny gjennomgang av modelleringsbegrepet, da det nå hadde gått flere dager siden sist time. I klasse 2 ble planen for tredje time gjennomført to ganger i full klasse, da deres timeplan muliggjorde dette. Den første gangen fikk hovedfokus på kjøpepizza-oppgaven og den andre på lagepizza-oppgaven. Fjerde time jobbet elevene gruppevis med utdelte modelleringsoppgaver. Dette ble gjennomført etter planen i begge klasser.

4.2 Innsamling av data

Under gjennomføringen samlet vi inn datamateriale i form av egne observasjons- og refleksjonsnotater, video- og lydopptak og elevarbeid i form av arbeidsheftene og A3-arkene som elevene skrev på i time 4. Det er dette materialet våre videre funn vil være hentet fra.

Rollefordelingen i studiens matematikktimer ga oss rollene som deltaker-som-observatør og observatør-som-deltaker. Vi hadde faste roller i hver klasse, selv om vi begge var i de ulike rollene. Som deltaker-som-observatør var hovedoppgaven å være lærer og ta observasjonsnotater hvis det lot seg gjøre. I rollen som observatør-som-deltaker var hensikten å ta observasjonsnotater, men kunne også delta i diskusjoner med elever (Postholm & Jacobsen, 2018). Observasjons- og refleksjonsnotatene i vårt datamateriale er fra disse rollene. De som ellers var til stede i timene var klassens matematikklærer, elevene og eventuelle andre voksne.

I time 4 hadde vi med oss diktafoner til å ta opp lyd mens elevene jobbet med utdelte semi-modelleringsoppgaver i grupper. Vi valgte å utvikle et eget ark (se vedlegg 4) med oppgavene til denne timen. Begrunnelsen for dette var en kombinasjon av et ønske om at elevene ikke hadde sett eller jobbet med disse modelleringsoppgavene før gjeldende time, ulikt arbeidstempo i tidligere timer, og gruppesammensetning i forbindelse med samtykkeskjema (se 4.5 og vedlegg 1).

For ikke å gå glipp av viktige sammenhenger hadde vi et kamera som fulgte med på hver gruppe det ble gjort lydopptak av (filmgrupper). Kameraet ble vinklet ned mot pulten, med fokus på arbeidet som ble gjort. I forkant av timen, der elevene skulle samarbeide i grupper, valgte vi å presisere at elevene bare skulle bruke én blyant til å skrive på et utdelt A3-ark. Denne vurderingen ble gjort i et forsøk på å tvinge elevene til å kommunisere med hverandre, slik at vi kunne få med resonnementene deres rundt de ulike oppgavene. I alt består video- og lydmaterialet vårt av 4 filmer og lydopptak, fra 2 grupper i hver klasse.

4.3 Analysemetode

Vi vil i dette avsnittet redegjøre for hvordan vi analyserte de ulike delene av vårt datamateriale. Etter gjennomføringen av undervisningseksperimentet gjennomførte vi først en analyse av lyd- og videoopptakene. Lydfilene ble da transkribert og anonymisert. Deretter utførte vi en teoridreven kvalitativ innholdsanalyse på det skriftlige datamaterialet.

I analysen av lyd- og videoopptakene møtte vi på utfordringer knyttet til transkriberingen. Det var til tider lavt stemmevolum på elevene og bakgrunnsstøy, som førte til at vi ikke alltid klarte å høre hva elevene sa. Vi benyttet kameralyden som supplement til de rene lydopptakene, for å prøve å oppfatte mer av hva elevene sa. Dersom vi fremdeles ikke hørte det som ble sagt, skrev vi «umulig å høre» inn i transkripsjonene. Videoopptakene ble også brukt til å få frem helheten av lydopptaket. Siden elevene bare skulle bruke én blyant, brukte de ofte hendene til å peke på hva de mente eller snakket om. Ved bruk av kameraet kunne vi da presisere i transkripsjonene om de pekte og eventuelt på hva. Dette gjorde at vi alt i transkripsjonsarbeidet var i gang med analysen, da vi valgte ut hva vi tok med av ikke-verbal kommunikasjon (Reinhardtsen et. al., 2015).

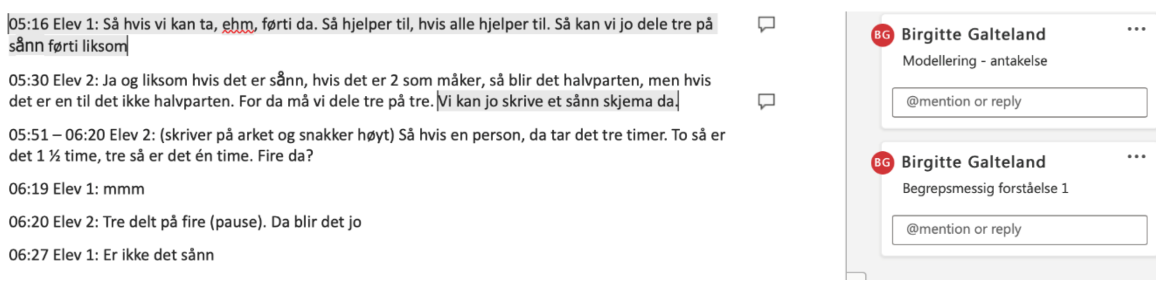
En teoridreven innholdsanalyse innebærer at vi analyserte vårt kvalitative datamateriale utfra eksisterende teori (Fauskanger & Mosvold, 2015). Dette innebar at vi utfra vårt teoretiske rammeverk for modellering og dybdelæring utarbeidet en tabell over kjennetegn på dybdelæring i likninger, heretter dybdelæringstabellen. Denne ble presentert i 2.4, men er i tillegg gjengitt under.

Dybdelæringskomponenter	**Kjennetegn på dybdelæring i lineære likninger**
Begrepsmessig forståelse	Når eleven viser forståelse for hva en likning er og forstår at den kan brukes i modellering av reelle situasjoner. • Kjennetegnes ved at eleven kan benytte ulike og hensiktsmessige representasjoner i den gitte situasjonen og kan oversette mellom de ulike representasjonene • Kan identifisere og navngi den ukjente • Forståelsen av likhetstegnet som et tegn for at uttrykkene på høyre og venstre side er ekvivalente • Forstår relasjonene mellom de ulike størrelsene i en gitt matematisk situasjon og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk • Forstår relasjonene mellom leddene i likninger på formen ax + b = c og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk
Prosedyrekunnskap	Når eleven kan løse likninger på formen ax + b = c med hensyn på x, ved å bruke inverse operasjoner. Når eleven behersker de fire regneartene i løsning av likninger på formen ax + b = c.
Modellering	Når eleven engasjerer seg i ulike aspekter i modellering og evner å formulere en problemsituasjon, hvor bruk av likninger er relevant for å modellere og løse problemet matematisk. • Identifisere størrelser • Gjøre antakelser knyttet til størrelsene og sammenhengene mellom dem • Beskrive sammenhengene matematisk • Uttrykke sammenhengene symbolsk • Formulere et matematisk problem som kan løses ved bruk av matematikk (likninger, formel) fra en gitt situasjon • Identifisere og navngi ubestemte størrelser • Evaluere løsningsprosess og svar Når eleven kan forklare hvordan de tenker. • Setter ord på egne tankerekker skriftlig, muntlig eller i kombinasjon. Når eleven ser sammenhenger i faget • Bruker likninger i arbeidet med modelleringsoppgaver

Metakognisjon, selvregulering og holdninger	Når eleven tar kontroll over egen læringsprosess • Eleven setter egne mål og delmål i likninger • Eleven følger egen fremgang i likninger • Eleven evaluerer og eventuelt endrer valgt strategi i arbeid med likninger Når eleven viser gode holdninger ovenfor algebra og gir uttrykk for å se verdien av emnet.

Tabell 8 Kjennetegn på dybdelæring i likninger

Analyseprosessen ved dybdelæringstabellen foregikk ved at vi systematisk gikk gjennom transkripsjonene og dialogene i observasjonsnotatene. I gjennomgangene la vi inn kommentarer på utsagn etter kjennetegnene på dybdelæringskomponentene i tabellen (se figur 2 nedenfor). Analysearbeidet gjorde vi hver for oss etter felles avtalte bestemmelser, da vi mente dette ville være en styrke for oppgaven vår ved at vi fikk to ulike perspektiv på dataen. Slik kunne vi i etterkant sammenligne og diskutere kodingen vår, noe som potensielt kunne hindre at vi overså interessante sekvenser i datamaterialet.


05:16 Elev 1: Så hvis vi kan ta, ehm, førti da. Så hjelper til, hvis alle hjelper til. Så kan vi jo dele tre på sånn førti liksom

05:30 Elev 2: Ja og liksom hvis det er sånn, hvis det er 2 som måker, så blir det halvparten, men hvis det er en til det ikke halvparten. For da må vi dele tre på tre. Vi kan jo skrive et sånn skjema da.

05:51 – 06:20 Elev 2: (skriver på arket og snakker høyt) Så hvis en person, da tar det tre timer. To så er det 1 ½ time, tre så er det én time. Fire da?

06:19 Elev 1: mmm

06:20 Elev 2: Tre delt på fire (pause). Da blir det jo

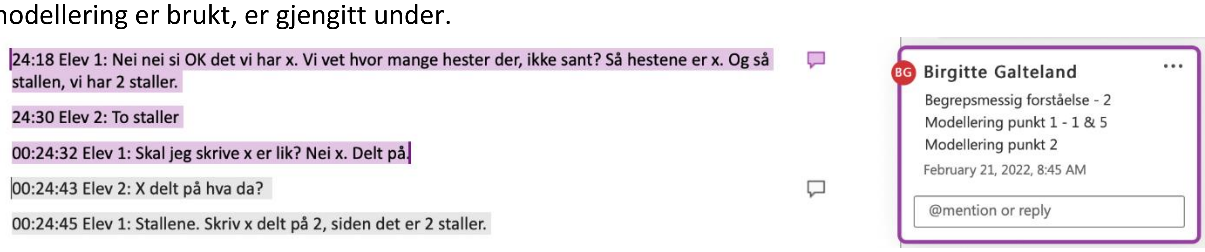
06:27 Elev 1: Er ikke det sånn

BG Birgitte Galteland
Modellering - antakelse
@mention or reply

BG Birgitte Galteland
Begrepsmessig forståelse 1
@mention or reply

Figur 2 Koding av transkripsjoner med kommentarer

Kodene fra gjennomgangen sammenfalt noe. Et eksempel fra en transkripsjon, der både koden til kjennetegnet om identifisering og navngivning av den ukjente fra begrepsmessig forståelse og modellering er brukt, er gjengitt under.


24:18 Elev 1: Nei nei si OK det vi har x. Vi vet hvor mange hester der, ikke sant? Så hestene er x. Og så stallen, vi har 2 staller.

24:30 Elev 2: To staller

00:24:32 Elev 1: Skal jeg skrive x er lik? Nei x. Delt på.

00:24:43 Elev 2: X delt på hva da?

00:24:45 Elev 1: Stallene. Skriv x delt på 2, siden det er 2 staller.

BG Birgitte Galteland
Begrepsmessig forståelse - 2
Modellering punkt 1 - 1 & 5
Modellering punkt 2
February 21, 2022, 8:45 AM
@mention or reply

Figur 3 Utklipp fra analysearbeidet, der kodene sammenfaller noe

At kodene sammenfaller noe, kan ses som en svakhet da skillene mellom kodene blir noe utydelige. På den andre siden viser dette at kodene har mye til felles, noe vi var klar over, siden de alle handler om kjennetegn på dybdelæring i likninger.

Alle A3-arkene fra time 4, altså både fra filmgruppene og resten av klassene, ble analysert etter kjennetegnene i dybdelæringstabellen på samme måte som transkripsjonene. Også i denne delen av analysearbeidet gjennomførte vi analyseringen hver for oss, for deretter å sammenligne og diskutere. Filmgruppenes A3-ark utfyller transkripsjonene, da de kan ses i lys av resonnementene som kommer frem av video- og lydopptakene. Vi ser imidlertid at å analysere også de resterende gruppenes A3-ark på samme måte er en svakhet ved analysen vår. Dette skyldes at vi ikke har mer informasjon enn det som er nedskrevet på arkene. Det er derfor et tydelig skille i resultat og analysedelen på hva som er hentet fra filmgruppene og hva som er hentet fra de resterende gruppenes A3-ark.

Videre ønsket vi å systematisere hvor ofte de ulike dybdelæringskomponentene inntraff i oppgavene som elevene jobbet med i fjerde time. Informasjon om dette hentet vi fra analysearbeidet med transkripsjonene, altså de fire elevgruppene som ble filmet, og A3-arkene til både disse og de resterende gruppene. Systematiseringen foregikk ved at vi registrerte antall kommentarer per kjennetegn i en utvidet dybdelæringstabell, som inneholdt en oversikt over de ulike oppgavene fra time 4, slik tabell 8 nedenfor er et eksempel på. At vi slo sammen informasjon fra transkripsjonene og alle A3-arkene da vi systematiserte kjennetegnene i tabellen, er en svakhet ved analysen vår, da dette er ulik type data som burde vært behandlet hver for seg.

Komponent	Kjennetegn	Køoppgaven	Måkeoppgaven	Lage selv-oppgaven
Prosedyre kunnskap	Når eleven kan løse likninger på formen ax + b = c med hensyn på x, ved å bruke inverse operasjoner			
	Når eleven behersker de fire regneartene i løsning av likninger på formen ax + b = c			

Tabell 8 Prosedyrekomponenten i dybdelæring med time 4-oppgaver

Siden studien vår er kvalitativ valgte vi i presentasjonen av resultatene å beskrive tendenser for hvor ofte komponentene ble observert i analysearbeidet ved å bruke pronomenene alle, mange, noen, få, én og ingen, fremfor tallstørrelser. Pronomenene er basert på tallintervall fra registreringen av kommentarer over kjennetegn. Disse tar ikke utgangspunkt i enkeltelever eller grupper, men baserer seg på hele datamaterialet, som er redegjort for ovenfor.

Arbeidsheftene, som elevene jobbet i de tre første timene, analyserte vi også med utgangspunkt i dybdelæringstabellen. Vi ble fort oppmerksomme på at disse heftene i større grad hadde fungert som et verktøy i timene, enn de gjorde som et datamateriale vi kunne analysere og bruke som dokumentasjon på forskningsspørsmålene våre. Dette skyldtes særlig at skillet mellom gjennomgangen av oppgavene i timen og elevenes selvstendige arbeid ikke fremkommer av heftene. Blant annet kommer dette av at elevene ble bedt om å notere fra plenumsgjennomganger av oppgavene i heftene, men ikke fikk beskjed om å skrive tydelig «fra tavlegjennomgang» i arbeidsheftet. Dermed ble det vanskelig å se etter kjennetegn på dybdelæring hos elevene i dette datamaterialet, da det ikke nødvendigvis var elevene selv som hadde gjort arbeidet. På samme tid er arbeidsheftene med på å danne et helhetlig bilde av hva elevene gjorde i time 1-3.

4.4 Studiens troverdighet

Det er viktig å reflektere over forskningskvaliteten til studier, også vår. Troverdighet er et begrep, i forskningssammenheng, som omfatter et språk for drøfting av forskningskvalitet, nærmere bestemt studiens troverdighet og gyldighet (Bryman, 2016).

Vår studie er kvalitativ, da denne typen forskningsstrategi egner seg for å svare på våre forskningsspørsmål. Dette gjør at resultatene fra vår studie i utgangspunktet ikke er umiddelbart overførbare til andre elevgrupper. Derimot vil kredibiliteten forhåpentligvis være forholdsvis høy og resultatene våre gjenkjennbare for andre og slik sett nyttige (Bryman, 2016). Dette kommer av at vi forteller åpent om hvilke valg vi har gjort, samt deres styrker og svakheter. På denne måten vil andre kunne følge våre resonnement og vurdere de interne årsak-virkning forholdene i studien.

Studiens pålitelighet (Bryman, 2016), utfra våre beskrivelser av den i oppgaven, ønsker vi å strekke oss langt for å ivareta. Vi ser likevel grunn til å sette spørsmålstegn ved om det vil være mulig å gjennomføre den samme undersøkelsen på et senere tidspunkt og forvente de samme resultatene. Dette skyldes tidspunktet for gjennomførelsen vår med tanke på pandemisituasjonen verden hadde opplevd i tiden før gjennomføringen, samt smittesituasjonen og de gjeldene smitteverntiltakene i Norge på denne tiden.

Vi har vært svært bevisste våre roller som forskere i gjennomførelsen av prosjektet vårt i skolen. Likevel ønsker vi å legge åpent frem at vi ser en total objektivitet lite tjenlig og umulig i denne typen studie. Studien ser på elevperspektivet i undervisning og vi oppnår ikke svar på forskningsspørsmålene våre ved å være totalt objektive. Også innad i datamaterialet kan vi ikke garantere for at observasjonsnotatene er objektive.

I arbeidet med analysen av datamaterialet har vi forsøkt å være transparente angående perspektiv, undervisning og forskningsprosessen. Resultatene reflekterer derfor dette utgangspunktet. Datamaterialet ble kodet av hver av oss etter felles bestemmelser, og deretter diskutert og sammenlignet. Vi har også diskutert materiale vi har vært usikre på med veilederne våre. Likevel vil ikke nødvendigvis andre gjøre dette arbeidet helt likt oss, selv om vi har vært tydelige på hva som ligger innenfor de ulike komponentene. Vi er likevel trygge på at studien vår har en stor nok grad av kvalitet til at resultatene kan være gjenkjennbare for andre i lignende situasjoner.

4.5 Etiske overveielser

Siden vi har skal forsket på mennesker, har vi måttet ta høyde for noen etiske prinsipper. Vi søkte derfor først Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) om godkjenning av prosjektet. Da denne var på plass, kunne vi starte gjennomføringen av undervisningseksperimentet. Postholm og Jacobsen (2018) nevner tre prinsipper som et utgangspunkt for forskningsetikken i Norge: informert samtykke, krav til privatliv og krav til riktig presentasjon av data. Disse tre prinsippene er knyttet til forholdet mellom forsker og de det forskes på (Postholm & Jacobsen, 2018).

Informert samtykke handler om at den det forskes på skal delta frivillig og være fullt informert om hva deltakelsen innebærer. Deltakerne i vår undersøkelse var under 16 år, og vi har derfor samlet foreldrenes samtykke til barnas deltakelse i forskningen (Postholm & Jacobsen, 2018). Før vi startet datainnsamlingen laget vi et informasjonsskriv med samtykkeerklæring (se vedlegg 1) til foreldrene og deltakerne av prosjektet. Dette delte klassenes lærere ut i forkant av prosjektet. Vi brukte NSDs mal for å forsikre oss om at vi fikk med all nødvendig informasjon. I informasjonsskrivet beskrev vi formålet med prosjektet, hva det innebar for deltakerne å delta, at det var frivillig å delta, samt hvordan vi oppbevarte og brukte opplysningene vi hentet inn. Foreldrene og elevene fikk også opplysning om at de hadde lov til å trekke samtykke sitt når som helst, uten å oppgi noen spesifikk grunn for dette. I skrivet sto også kontaktinformasjon, hvis de skulle ønske å kontakte oss.

Krav til privatliv er også et prinsipp vi har tatt høyde for. Elevene som ikke leverte samtykkeerklæring deltok i den samme undervisningen, men ble nøye plassert slik at de ikke var en del av video- eller lydopptakene som ble gjort. Filmkameraene ble også plassert med en slik vinkel at pulten, og arbeidet som ble gjort der, var det eneste som syntes. Ansiktene til elevene som valgte å delta er derfor heller ikke med på videoen. Denne avgjørelsen var et bevisst valg for å prøve å gjøre elevene mer avslappet og trygge i situasjonen.

Etter endt datainnsamling ble video- og lydfilene lastet opp og lagret på den nettbaserte lagringstjenesten OneDrive. Filene på kameraet ble slettet, og minnekortet til diktafonene ble klippet i to. Alt arbeid som ble samlet inn fra elevene var anonymisert, det vil si at datamaterialet ikke kunne knyttes til enkeltpersoner. Navnene deres, eller andre personopplysninger, ble byttet ut med fiktive navn. Elevarbeidene ble oppbevart av masterstudentene selv frem til prosjektslutt. Observasjonsnotatene ble skrevet anonymisert og lagret på OneDrive. Alle filene tilknyttet prosjektet blir slettet så fort vi er ferdig med oppgaven.

5 Resultat og analyse

Oppgaven vår handler om modellering og dybdelæring i undervisning av likninger. Vi har hatt til hensikt å undersøke følgende spørsmål:

1. Hvilke tegn på dybdelæring i lineære likninger kan observeres i elevers arbeid med modellering av praktiske situasjoner i algebraundervisning?
2. Hvordan kan modellering integreres i algebraundervisning for å legge til rette for elevers dybdelæring i lineære likninger på 8.trinn?

Vi vil i denne delen av oppgaven legge frem resultatene av våre undersøkelser og sette disse i sammenheng med teori presentert tidligere i oppgaven. Dette vil vi gjøre ved først å se på time 1-3 i undervisningseksperimentet, derav arbeidsheftene og observasjonsnotatene. Deretter presenterer vi resultater knyttet til forskningsspørsmål 1, altså hvilke kjennetegn på dybdelæring vi ser i elevarbeidene i vårt datamateriale. Vi vil så presentere interessante funn som vi mener er av betydning for hvorfor modellering kan integreres i algebraundervisning, jf. forskningsspørsmål 2. Til slutt vil vi se helhetlig på hvordan resultatene som er presentert henger sammen.

5.1 Resultater fra time 1-3

Vi vil i denne delen legge frem resultater fra de første timene av undervisningseksperimentet. Dette vil vi gjøre ved først å redegjøre for arbeidsheftene og interessant informasjon funnet i tilknytning til disse. Deretter tar vi for oss observasjonsnotatene og presenterer et par interesseområder som belyses ved disse.

Arbeidsheftene

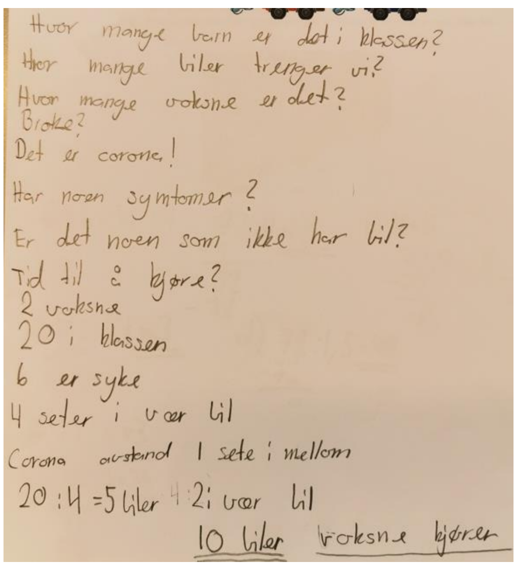
Arbeidsheftene ble, som nevnt tidligere, brukt som et verktøy for å trene elevene i å arbeide med modelleringsoppgaver. Vi vil i denne delen trekke frem noen eksempler og knytte disse til dybdelæringskomponentene, men en fullstendig analyse av dybdelæring i heftene blir ikke presentert, da det ikke er hensiktsmessig for studien (jf. 4.3, siste avsnitt). Nedenfor presenteres en tabell over oppgavene, og hensikten med dem, opp mot elevenes deltakelse.

	Oppgave	Hensikt	Elevenes deltakelse
T I M E 1	Introduksjons- oppgave	Resonnere Gjøre antakelser Se på størrelsesforhold Sette opp likning	Resonnerte i par og plenum Gjorde antakelser Så på størrelsesforhold Satte opp likninger i felleskap
A R B E	Bil	Gjøre antakelser Akseptere at det ikke finnes ett svar	Identifiserte størrelser Gjorde flere antakelser Satt ord på egne tanker Var fasitorienterte

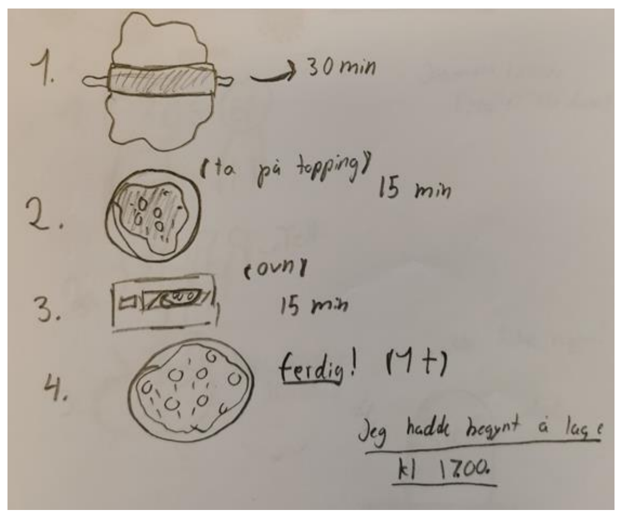
IDSHEFTET	Kjøpepizza	Se sammenheng på hva de har gjort og deretter sette opp en likning	Elevene har gjort oppgaven, men så ikke sammenhengen og satt ikke opp en likning
	Grendehus	Begrunne resonnement og likning som er brukt	Få elever har gjort oppgaven og satt opp likning
	Lage pizza	Begrense aktuelle faktorer Bruke likning som verktøy	Identifiserte størrelser Gjorde flere antakelser Satt ord på egne tanker Satt ikke opp likninger
	Koronavirus	Forstå begrepet modell	Få elever har gjort oppgaven, disse har laget tegninger

Tabell 9 Hensikten med oppgavene opp mot elevenes deltakelse

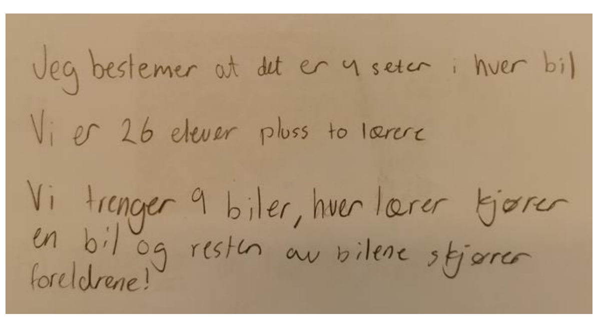
Av tabellen fremkommer det blant annet at elevene i stor grad klarte å gjøre antakelser og identifisere størrelser i arbeid med flere av oppgavene. Figur 4, 5 og 6 viser eksempler på dette fra biloppgaven og lage pizza-oppgaven i elevenes arbeidshefter.



Figur 4 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet



Figur 5 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet



Figur 6 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet

Antakelser og identifisering av størrelser er de to første stegene i modelleringssyklusen (Lamon, 1998). Derfor brukte vi tid på dette i undervisningen, spesielt de første timene, slik at elevene skulle bli trygge på dette. For å kunne bruke likninger i arbeidet med modelleringsoppgavene var det en forutsetning at elevene klarte å komme lenger i syklusen enn disse to første stegene, da det først her åpnet opp for bruk av likninger. At elevene alt i arbeid med oppgavene i de tre første timene viser tegn til dette er for oss positivt.

Observasjonsnotatene

Elevene viser gjennom undervisningseksperimentets første timer at de kjenner til begrepet algebra og ukjent. Dette kommer blant annet frem i dialogen under, som er hentet fra observasjonsnotatet, der lærer er i dialog med klassen om introduksjonsoppgaven. Utdraget er hentet fra når det blir snakket om hvor stor nesen til frihetsgudinnen er i forhold til høyden til hele figuren:

> Hanne: Skal vi ikke bruke algebra nå? Noe som er ukjent?
> Lærer: Hva er ukjent?
> Hanne: Nesen

Siden sitatet er hentet fra observasjonsnotatet kan vi ikke med sikkerhet si noe mer om hva som ligger bak elevens utsagn. Likevel kan det antas at eleven enten er fortrolig med algebra og når det kan brukes, eller så kan utsagnet som kom til uttrykk skyldes at eleven vet at algebra er tema i matematikktimene denne perioden. På samme tid kommer det frem at eleven også vet hva som er ukjent og klarer dermed å identifisere den ukjente i et problem. Dette er viktig i arbeid med likninger og et av kjennetegnene på dybdelæring innenfor tema, samt et viktig steg i modelleringsprosessen.

Observasjonsnotatene viser videre at elevene har noe kunnskap innenfor dybdelæringskomponenten prosedyrekunnskap. Denne kommer frem ved gjennomgang av likninger på tavla, slik eksemplet i det følgende viser:

> Lærer: Hvilket tall er det vi mangler her? Som vi ikke vet?
> Oda: x.
> Lærer: Vi mangler x, et tall på antall personer, et tall vi ikke vet, som er ukjent. (skriver 72 : x = 1,5 på tavla) Er det noen som vet hvordan vi løser en likning som dette?
> Per: Få x alene på en side og tall på andre.
> Truls: Bytte fortegn.
> Lærer: Kan jeg gjøre en ting på den ene siden og ikke den andre?
> Hedda: Nei, vi må alltid gjøre likt på begge sider av likhetstegnet.

Dialogen læreren har med elevene viser at noen av elevene har prosedyrekunnskap, da de vet hvordan de skal løse en likning og hva som er viktig å tenke på. Svaret til Hedda kan også vise en begrepsmessig forståelse av likhetstegnet som et tegn for at uttrykkene på høyre og venstre side er ekvivalente. På samme tid kan dette like gjerne komme av at hun har lært seg reglene for løsning av likninger. At elevene får vist noe prosedyrekunnskap i dialog med læreren kan forklares med den sosiokulturelle læringsteorien, der læreren fungerer som veileder og kompetent annen (Bråten, 1996). I en slik situasjon vil elevene i større grad enn i egenarbeid kunne oppleve støtte og trygghet i læringsprosessen.

Alt i alt ser vi at arbeidsheftene fungerte som et verktøy i prosessen mot modelleringsoppgavene i time 4, ved at elevene alt her viser tegn til dybdelæring i likninger ved å klare å gjøre antakelser og identifisere størrelser. Vi ser imidlertid at andre kjennetegn er vanskelig å oppdage i dette datamaterialet og kanskje kunne vi sett andre kjennetegn dersom vi hadde fokusert enda mer på likninger? Eventuelt kunne vi også valgt andre oppgaver i denne delen av undervisningseksperimentet, som bedre la til rette for bruk av likninger i løsningsarbeidet.

5.2 Kjennetegn på dybdelæring i likninger i elevarbeid

Vi vil i denne delen peke på kjennetegn på dybdelæring i likninger hos elevene som deltok i vår studie. I tabellen over kjennetegn på dybdelæring i matematikk (se tabell 7, s. 29) har vi tatt frem komponentene: (1) begrepsmessig forståelse, (2) prosedyrekunnskap, (3) modellering og (4) metakognisjon, selvregulering og holdninger. I arbeidet med analysering av datamaterialet er det disse fire komponentene vi har analysert etter, og som nå presenteres hver for seg. Datamaterialet som er analysert og brukt i tabellene er transkripsjonene fra time 4 og A3-arkene som elevene, i grupper, skrev ned svarene sine på. Det er altså i stor grad filmgruppene som er i sentrum for resultatene i denne delen, med noen få innslag av A3-arkene til de andre gruppene. Pronomenene alle, mange, noen, få, én og ingen (tomme ruter) er brukt i tabellene som indikasjon på hvor hyppig kjennetegnene er lagt merke til.

5.2.1 Begrepsmessig forståelse

Tabell 10 nedenfor viser kjennetegn på dybdelæring i komponenten begrepsmessig forståelse og forekomsten av disse i vårt datamateriale fra time 4. Etter tabellen viser vi eksempler til punktene som skiller seg ut positivt (grønn) og negativt (rød), før vi på slutten oppsummerer hva tabellen viser oss og sier om elevenes begrepsmessige forståelse.

Kjennetegn	**Underpunkter**	**Oppgave**		
		Kø	**Måke**	**Lage selv**
Når eleven viser forståelse for hva en likning er og forstår at den kan brukes i modellering	(1) Kjennetegnes ved at eleven kan benytte ulike og hensiktsmessige representasjoner i den gitte situasjonen og kan oversette mellom de ulike representasjonene	Noen	Få	Få
	(2) Kan identifisere og navngi den ukjente	Noen	Få	
	(3) Forståelsen av likhetstegnet som et tegn for at uttrykkene på høyre og venstre side er ekvivalente			Én

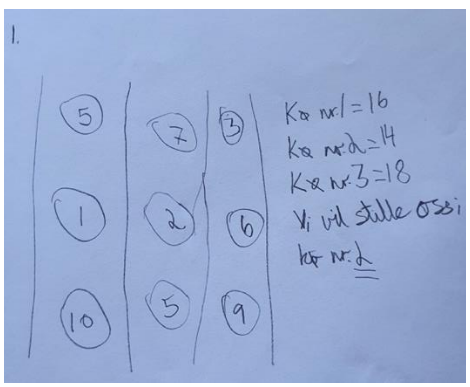
av reelle situasjoner	(4) Forstår relasjonene mellom de ulike størrelsene i en gitt matematisk situasjon og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk	Få	Få	Én
	(5) Forstår relasjonene mellom leddene i likninger på formen ax + b = c og kan uttrykke dette verbalt eller symbolsk	Få	Én	

Tabell 10 Dybdelæringskomponenten begrepsmessig forståelse og hvor ofte det fremkommer i datamaterialet

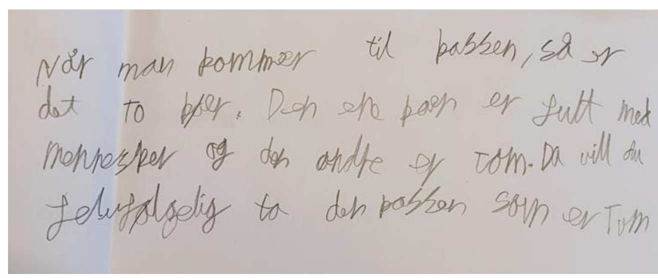
Det er to punkter som skiller seg ut positivt. Dette gjelder underpunkt 1 og 2. I det følgende vises eksempler til elevbesvarelser fra filmgruppene knyttet til punktene.

Eksempler på underpunkt 1, hvor elevene viser at de klarer å bruke hensiktsmessige representasjoner og oversette mellom dem, gjengis under. Alle eksemplene er hentet fra arbeid med køoppgaven.

Fra to av filmgruppenes A3-ark ser vi eksempler på hvordan de bruker ulike representasjoner, her tegninger og tekst, for å argumentere for hvilken kø de vil stille seg i. I figur 7 ser vi antall mennesker og varer i køen, mens figur 8 uttrykker det samme ved ord.



Figur 7 Elevbesvarelse fra filmgruppe 4



Figur 8 Elevbesvarelse fra filmgruppe 3

Fra en av transkripsjonene ser vi hvordan filmgruppe 4 forklarer ved hjelp av ord og ukjent (x) hvordan de kan regne seg frem til hvilken kø de vil stille seg i.

29:59 Pål: Så x * 5 + 20 * 3 = 120. Så x er jo hvor mange varer det er. Og det tar 5 sekund per vare å scanne, også tar det 20 sekund for hver person å betale. Dette må vi finne ut for hvor mange varer det er.

Eksempel på underpunkt 2, om å identifisere og navngi den ukjente:

I transkripsjonene ser vi flere eksempler der elevene klarer å identifisere den ukjente størrelsen, uten å navngi den. Eksempelet under viser dette ved en dialog mellom to elever fra filmgruppe 2 som jobber med køoppgaven.

01:35 Tom: Det er jo bare å se hvilken det er mest folk i.

01:36 Adam: Nei, men det er og hvor mye folkene har med seg.

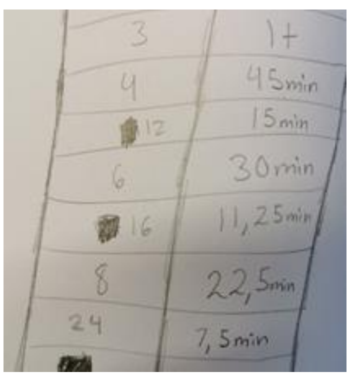
Underpunkt 3, forståelsen for likhetstegnet og ekvivalens, skiller seg ut negativt og er det punktet færrest av elevene klarer å vise kjennetegn på. Nedenfor er det første eksemplet hentet fra filmgruppe 3 og det andre eksemplet hentet fra filmgruppe 2, der elevene viser forståelse for hva de skal gjøre, men er usikre på hvordan de skal gjøre det eller fremstille svaret de er ute etter.

1. 21:37 Petra: Vi skal løse egne problemer.
   21:40 Oskar: Så skal vi liksom lage våre egne likninger?

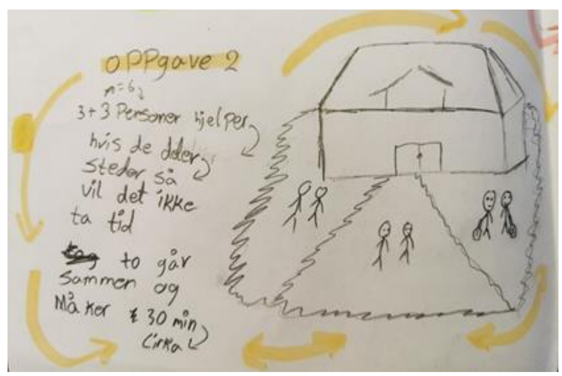
2. 04:14 Tom: Men hvordan? Altså vi vet jo svaret, men liksom hvordan regner man det ut?
   04:16 Thea: Vi må lage en modell, men hvordan – tegner man? (...) Bare tegn mennesker.

Eksempler hentet fra andre gruppers arbeid i time 4 (altså ikke filmgruppene)
Eksempler på underpunkt 1, hvor elevene viser at de klarer å bruke hensiktsmessige representasjoner og oversette mellom dem. Begge eksemplene er hentet fra måkeoppgaven, der elevene skulle finne ut hvor lang tid det tok for x antall elever å måke en oppkjørsel:

Fra to av gruppenes A3-ark der de velger to ulike representasjoner for å svare på oppgaven.



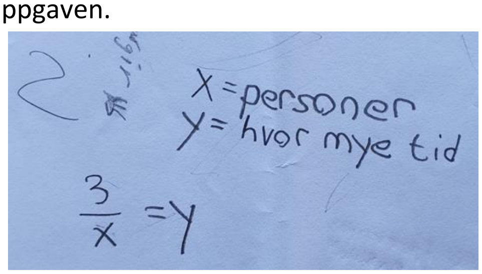
Figur 9 Elevbesvarelse fra A3-ark



Figur 10 Elevbesvarelse fra A3-ark

Eksempel på underpunkt 2, om å identifisere og navngi den ukjente:

Fra A3-arket til en av gruppene, hvor de viser at de klarer å identifisere og navngi den ukjente i arbeid med måkeoppgaven.



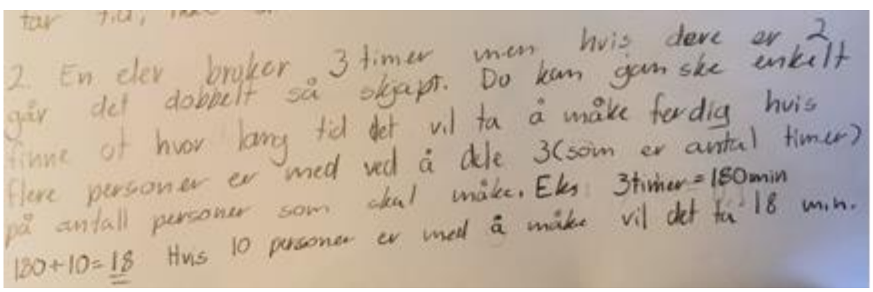
Figur 11 Elevbesvarelse fra A3-ark

Under er en hendelse hentet fra observasjonsnotatene, der lærer veileder elever rundt måkeoppgaven. Eksemplet viser oss at elevene kan mer enn de får ned på papiret:

> Lærer: Vi skal prøve å lage en likning som forteller oss hvor lang tid det tar med x antall personer. Se på tidligere oppgave, der står det 3 : 2 = 1,5. Hjelper den oss noe?
> Jan: x / 3 = 1.
> Ingrid: Det er feil vei, snu på x en, sånn 3 / x = 1.
> Synnøve: Men da er jo x = 3, siden svaret er 1.
> Jan: Kan vi skrive 3 delt på x x, eller 3 / x = x?
> Lærer: Her er du inne på noe!
> Jan: Eller vent! 3 / x = y.

Ved litt hjelp av læreren klarer elevene flere av underpunktene i tabell 10, blant annet å identifisere og navngi den ukjente, samt vise forståelse for relasjonene mellom de ulike størrelsene.

Eksemplet under viser et resonnement som gir oss grunnlag for å tro at elevene på denne gruppen forstår logikken bak likninger og innehar en begrepsmessig forståelse, kanskje spesielt ved underpunkt 4 (verbalt uttrykke forståelser for relasjoner). Likevel ser vi ingen likning i resonnementet, men spør oss hva som kunne skjedd om oppgaven spurte etter en likning, eller dersom en kompetent annen (Bråten, 1996), det være seg en lærer, annen voksen eller medelev, hadde utfordret og veiledet i øyeblikket.



Figur 12 Elevbesvarelse fra A3-ark

Avsluttende kommentar til begrepsmessig forståelse

Eksemplene som er hentet frem fra underpunkter til begrepsmessig forståelse viser at elevene får til noe, men at det er annet elevene ikke får til. Vi ser at underpunkt 1 om representasjoner og underpunkt 2 om identifisering og navngivning av den ukjente skiller seg ut positivt. Dette kan komme av at oppgavene legger til rette for mestring av disse underpunktene. Underpunkt 3 skiller seg ut negativt og handler om forståelsen for ekvivalens og likhetstegnet. Dette kan skyldes at det er vanskelig for elevene å gå fra ord til likning (MacGregor & Stacey, 1993; Stacey & MacGregor, 1999), og dermed at dette ikke kommer til uttrykk i vårt datamateriale, samt at ikke alle oppgavene var egnet for at dette kjennetegnet kunne komme til uttrykk. Tross dette ser vi dialogen ovenfor som en mulig indikasjon på at elevene kanskje har en større begrepsmessig forståelse når de får støtte og veiledning av en lærer.

5.2.2 Prosedyrekunnskap

Under prosedyrekunnskap har vi to kjennetegn, og som det kommer frem av tabell 11, var denne komponenten fraværende i datamaterialet fra time 4.

Kjennetegn	**Oppgave**		
	Kø	**Måke**	**Lage selv**
(6) Når eleven kan løse likninger på formen ax + b = c med hensyn på x, ved å bruke inverse operasjoner			
(7) Når eleven behersker de fire regneartene i løsning av likninger på formen ax + b = c			

Tabell 11 Dybdelæringskomponenten prosedyrekunnskap og hvor ofte det fremkommer i datamaterialet

I eksempelet under jobber elevene med lage selv-oppgaven, der de skal lage en modelleringsoppgave selv. En elev har forklart én mulig problemstilling, men eleven som skriver vet ikke hvordan han skal skrive det opp i en likning:

> 27:49 Oskar: men jeg vet ikke hvordan jeg skal sette det opp.
> 27:50 Lærer: Ja, men prøv da, prøv å sette det opp.

Eksemplet illustrerer at det å sette opp likninger i arbeid med oppgavene var vanskelig for elevene, med andre ord viser den genererende aktiviteten (Kieran, 2004) seg her vanskelig. Dermed kom ikke kjennetegnene innenfor posedyrekunnskap til uttrykk, da disse handler om selve løsningen av oppstilte likninger, altså den transformerende aktiviteten (Kieran, 2004). Filmgruppe-elevene kom ikke til transformerende aktiviteter i sitt løsningsarbeid med oppgavene vi ga dem. Dermed blir oppgavene en sannsynlig forklaring på hvorfor kjennetegn på prosedyrekomponenten er fraværende i vårt datamateriale. Selv om oppgavene la til rette for bruk av likninger, var ikke dette noe alle i seg selv krevde. Det kan tenkes at 8. klassingene som deltok i studien i større grad hadde vist kjennetegn på prosedyrekunnskapskomponenten, dersom oppgavene var annerledes og krevde likninger i løsningsarbeidet.

5.2.3 Modellering

Under komponenten modellering er det tre kjennetegn i dybdelæring. Tabell 12 viser disse med underpunkter, samt forekomsten av kjennetegnene fra datamaterialet fra time 4.

Kjennetegn	Underpunkter	Oppgave		
		Kø	**Måke**	**Lage selv**
Når eleven engasjerer seg i ulike aspekter i modellering og evner å formulere en problemsituasjon, hvor bruk av likninger er relevant for å modellere og løse problemet matematisk.	(8) Identifisere størrelser	Mange	Én	Noen
	(9) Gjøre antakelser knyttet til størrelsene og sammenhengene mellom dem	Mange	Noen	Noen
	(10) Beskrive sammenhengene matematisk	Noen	Én	Få
	(11) Uttrykke sammenhengene symbolsk	Få	Én	Én
	(12) Formulere et matematisk problem som kan løses ved bruk av matematikk (likninger, formel) fra en gitt situasjon	Få	Én	Noen
	(13) Identifisere og navngi ubestemte størrelser	Noen		Én
	(14) Evaluere løsningsprosess og svar		Én	Én
Når eleven kan forklare hvordan de tenker.	(15) Setter ord på egne tankerekker skriftlig, muntlig eller i kombinasjon.	Mange	Noen	Få
Når eleven ser sammenhenger i faget	(16) Bruker likninger i arbeidet med modelleringsoppgaver	Få	Få	

Tabell 12 Dybdelæringskomponenten modellering og hvor ofte denne fremkommer i datamaterialet

Forekomsten av underpunktene i tabell 12 er jevnt over høyere enn i tabellene til de foregående og den kommende komponenten. Dette viser at modellering, som komponent i dybdelæring og del av algebraisk tenkning-aktiviteten (Kieran, 2004), er det flest av våre elever viser kjennetegn på. Innenfor modellering er det et stort spenn mellom de ulike underpunktene og vi ser at tre punkter skiller seg ut positivt, ved å være merket grønne. Dette gjelder underpunkt 8, 9 og 15. I det følgende vises eksempler til elevbesvarelser innenfor de ulike underpunktene fra filmgruppene.

Eksempler på underpunkt 8 om å identifisere størrelser:

> Eksempel 1 er hentet fra transkripsjonen av filmgruppe 4, der vi ser hvordan en elev identifiserer få varer som en nødvendighet for å løse køoppgaven. Eksempel 2 er hentet fra transkripsjonen av filmgruppe 1, der en elev identifiserer hvor lang tid det vil ta en elev å vaske en hytte i arbeid med lage selv-oppgaven:

1. 26:31 Pål: Vi må finne ut hvilken kø som har minst varer.

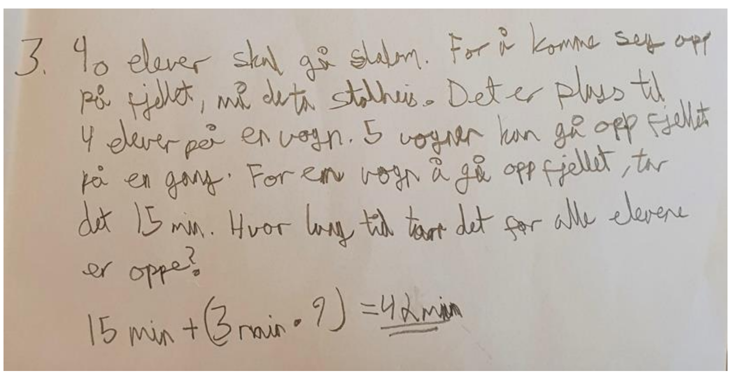
2. 24:06 Kornelia: som alle klassene har sovet i. En elev bruker 8 timer, nei han bruker mer enn det kanskje 15?

Eksempler på underpunkt 9 om antakelser:

Fra transkripsjonen av filmgruppe 2 ser vi hvordan elevene sammen gjør antakelser knyttet til hvilke faktorer som spiller inn på valg av kø i arbeid med køoppgaven:

01:21 Tom: Der er det kø. Lag en modell som viser hvilken kø dere vil stille dere i. Ja, vi skal bare skrive hvordan vi hadde regnet ut hvilken kø som kjappest å stille seg i.
01:34 Adam: Mmm
01:35 Tom: Det er jo bare å se hvilken det er mest folk i.
01:36 Adam: Nei, men det er og hvor hvor mye folkene har med seg.

Fra filmgruppe 4 sitt A3-ark ser vi et skriftlig resonnement som uttrykker antakelser i forbindelse med lage selv-oppgaven:


3. 40 elever skal gå slalom. For å komme seg opp på fjellet, må de ta stolheis. Det er plass til 4 elever på en vogn. 5 vogner kan gå opp fjellet på en gang. For en vogn å gå opp fjellet, tar det 15 min. Hvor lang tid tar det for alle elevene er oppe?

15 min + (3 min · 9) = 42 min

Figur 13 Elevbesvarelse fra filmgruppe 4

Eksempler fra måkeoppgaven på underpunkt 15, som er å sette ord på egne tankerekker:

Fra transkripsjonen av filmgruppe 2 ser vi Adam sette ord på, ovenfor medelevene, hvor han får tallet 180 fra når regnestykket skrives ned:

21:44 Adam: (Skriver 180 delt på 5)
(…)
21:55 Thea: Hva 180 / 5 hva da? Folk?
21:59 Tom: Hæ, men hva snakker du om? 180?
22:01 Adam: Det er hvor mange minutter 3 timer er.

Videre ser vi av tabell 12 at underpunkt 14, om evaluering av løsningsprosess og svar, skiller seg ut negativt (derav fargen rød), og er det punktet færrest elever viser kjennetegn på. Transkripsjonene forteller oss at elevene er raske til å gå videre til neste oppgave, så fort de har funnet et svar på oppgaven de jobber med. Et eksempel på dette, hentet fra filmgruppe 1, er gjengitt i det følgende fra arbeid med måkeoppgaven:

> 18:32 Kornelia: Fordi hvis du tar det, hvor mange ganger passer 3 oppi 21? 7 ganger! Minus 21 = 0. Da blir det 7 min. Ok, hva skal jeg skrive til sånn hovedsvar da?
>
> 18:39 Frida: Eh, så hvis alle 21 personer i klassen, eh, måker så tar det 7 minutt. Vi er pro!
>
> 19:01 Hans: Så vi er ferdig. Hvilken er vi på nå? Hvilken er vi på?

Elevene viser i liten grad kjennetegn på å evaluere løsningsprosess og svar, slik eksemplet over viser. Dette kommer også frem i Izsáks (2003) studie, der han finner ut at elevene i mindre grad viser tegn til å evaluere representasjonene de ellers mestrer å lage og bruke. Bakgrunnen for dette kan være at elevene er fasitorienterte og ser en matematikkoppgave som noe som skal løses. De går derfor ikke tilbake til oppgaveteksten og evaluerer prosess og svar. Dette stemmer overens med forskningen til Stacey og MacGregor (1999) som hevder at elevene har løsningsutregning som sin prioritet. Vi ser heller ikke at elevene viser interesse for å systematisere sine nye erfaringer med forkunnskap, noe Lamon (1998) setter som et femte og siste steg i modelleringsprosessen.

Likevel ser vi at modelleringskomponenten er bedre representert i datamaterialet enn de andre komponentene. Dette tror vi skyldes vårt fokus på modellering i timene våre. Fra vår side var dette et bevisst valg, da vi visste temaet var et helt nytt for elevene. Vi så oss nødt til å trygge elevene på oppgavetypen, for at de skulle kunne mestre oppgavene og få utbytte av opplegget innenfor algebra. Oppgavene som ble benyttet var alle semi-modelleringsoppgaver, og kan derfor i seg selv ha lagt til rette for å vise kompetanse innenfor denne komponenten.

I gjennomføringen av vårt undervisningsopplegg var vi, på bakgrunn av den ukjente oppgavetypen vi brakte med oss, bevisste å bruke tid på å modellere og gjennomgå minst én oppgave hver time i felleskap med elevene. Fokuset i disse gjennomgangene var på å reorganisere innholdet i oppgaven slik at elevene i større grad skulle kunne se koblingen mellom ord og likning. Dette støttes av MacGregor og Stacey (1993), da de trekker frem viktigheten av at læreren modellerer og øver sammen med elevene, da det er tidkrevende og krever øvelse for å kunne se koblingen mellom ord og likning.

5.2.4 Metakognisjon, selvregulering og holdninger

Denne dybdelæringskomponenten i likninger er fraværende i datamaterialet fra time 4, som det fremkommer av tabell 13. Vi ser imidlertid eksempler på at elevene stiller hverandre spørsmål angående matematikk, prosess og sluttprodukt, der noen av disse utsagnene handler om og hvordan å sette opp likninger. Likevel ser vi ikke kjennetegn på dybdelæring i likninger ved tabellens underpunkter.

Kjennetegn	Underpunkter	Oppgave		
		Kø	Måke	Lage selv
Når eleven tar kontroll over egen læringsprosess	(17) Eleven setter egne mål og delmål i likninger			
	(18) Eleven følger egen fremgang i likninger			
	(19) Eleven evaluerer og eventuelt endrer valgt strategi i arbeid med likninger			
(20) Når eleven viser gode holdninger ovenfor algebra og gir uttrykk for å se verdien av emnet.				

Tabell 13 Dybdelæringskomponenten metakognisjon, selvregulering og holdninger og hvor ofte det fremkommer i datamaterialet

Metakognisjon, selvregulering og holdninger i likninger er sannsynligvis fraværende grunnet at det jevnt over i elevenes arbeid er lite likninger. Dette ser vi nært knyttet til mangel på bruk av likninger også i de andre dybdelæringskomponentene. Fokuset vårt på modellering kan også ha gjort at denne komponenten havnet mer i skyggen av de andre komponentene. Dermed fikk den ikke oppmerksomheten den fortjente, tross at denne er svært viktig som komponent i dybdelæring (Kilpatrick, 2001; Nosrati & Wæge, 2018) og noe vi ønsket at elevene skulle oppnå kjennetegn på.

Likevel ser vi mer generelle tegn på komponenten hentet fra transkripsjonene i datamaterialet vårt. I det følgende gjengis eksempler på dette fra filmgruppe 4 (eksempel 1) og filmgruppe 1 (eksempel 2 og 3):

1. 16:25 Pål: Okey, hvis vi tar den. Vi vet at en person tar 3 timer. Og hvis vi tar, sånn, 4 folk da, så 4, da blir det jo 3 / 4 = x.
   17:03 Pål: Skal vi regne det ut da, eller?
   17:09 Mona: Jeg vet ikke. Vi kan jo bare gjøre det.
   17:12 Pål: Okey, så, da må vi jo egentlig bare ta 3 / 4
   17:18 Mona: Ja
   17:26 Mona: Var ikke det egentlig bare det samme som den da? (peker på tidligere utregning)
   17:28 Pål: Ja

2. 06:41 Frida: Likning, hvordan skal vi lage en likning?

3. 09:43 Kornelia: OK, vi er ferdig, vi er ferdig.
   09:48 Frida: Det er kjedelig. Det her var faktisk veldig kjedelig.
   09:50 Kornelia: Hysj. Dette er IKKE kjedelig. Jeg håper de hører noe som helst her.

Ut fra disse eksemplene ser vi at elevene uttrykker spørsmål og holdninger knyttet til komponenten. Dette kan vise at elevene er i startfasen av en prosess mot å bli mer selvregulert, men at det er for tidlig å se kjennetegn på komponenten innenfor likninger. Vi tror at når elevene klarer å evaluere svarene og løsningsprosessene sine, vil de komme enda et stykke på vei innenfor denne komponenten og slik sett i dybdelæring generelt.

5.3 Modellering i algebraundervisning

Vi vil i dette delkapittelet se nærmere på hvordan modellering kan integreres i algebraundervisning basert på våre resultater og teori. Studien har tatt utgangspunkt i et undervisningseksperiment som i stor grad har vært bygget opp på bruk av semi-modelleringsoppgaver. Vi vil derfor først se litt på hvordan elevenes deltakelse i arbeid med oppgavene var opp mot hensikten med dem. Deretter følger resultater på hvordan elevene reagerte på opplegget og oppgavene, samt kommentarer knyttet til elevenes progresjon fra første til siste time. Videre vil vi se nærmere på hvor opptatt elevene var av å finne ut om de hadde kommet frem til rett svar, før vi til slutt vil kommentere forekomsten av likninger i datamaterialet vårt.

Når vi setter hensiktene med oppgavene våre opp mot elevenes deltakelse i arbeidet med disse, ser vi at vi lyktes med noe av det vi ønsket per oppgave (se tabell 14 nedenfor). Tabellen er presentert tidligere i oppgaven under delkapittel 5.1, men gjentas her tillagt oppgavene fra time 4.

	Oppgave	**Hensikt**	**Elevenes deltakelse**
TIME 1	Introduksjons-oppgave	Resonnere Gjøre antakelser Se på størrelsesforhold Sette opp likning	Resonnerte i par og plenum Gjorde antakelser Så på størrelsesforhold Satte opp likninger i felleskap
ARBEIDSHEFTET	Bil	Gjøre antakelser Akseptere at det ikke finnes ett svar	Identifiserte størrelser Gjorde flere antakelser Satt ord på egne tanker Var fasitorienterte
	Kjøpepizza	Se sammenheng på hva de har gjort og deretter sette opp en likning	Elevene har gjort oppgaven, men så ikke sammenhengen og satt ikke opp en likning
	Grendehus	Begrunne resonnement og likning som er brukt	Få elever har gjort oppgaven og satt opp likning
	Lage pizza	Begrense aktuelle faktorer Bruke likning som verktøy	Identifiserte størrelser Gjorde flere antakelser Satt ord på egne tanker Satt ikke opp likninger

	Koronavirus	Forstå begrepet modell	Få elever har gjort oppgaven, disse har laget tegninger
TIME 4	Kø	Vise sin kompetanse innenfor både modellerings-, begrepsforståelses- og prosedyrekunnskapskomponentene	Viste forståelse for modelleringskomponenten, ved antakelser, identifisering av størrelser, beskrivelser av sammenhenger og ved å sette ord på egne tankerekker
	Måke	Se sammenhenger mellom størrelser og beskrive dem matematisk	Lyktes med utregninger, lagde representasjoner med tabell, tegning og tekst
	Lage-selv	Bruke alt de har lært til å vise sin forståelse av likninger som verktøy	Lagde egne problemer, men ikke likninger

Tabell 14 Hensikten med oppgavene opp mot elevenes deltakelse

Det vi ut ifra tabellen savner i elevenes arbeid er de genererende og transformerende aktivitetene til Kieran (2004), altså oppstilling og bruk av likninger. Likevel kommer det frem at elevene forstår at bruk av likninger kan være hensiktsmessig i møte med modelleringsoppgavene vi ga dem. Dette kommer til uttrykk ved utsagn, hentet fra observasjonsnotater og transkripsjoner, som «Er det her vi skal bruke likninger?» eller «Skal vi sette opp en likning?». Videre kan det diskuteres om dette skyldes at de faktisk ser nytten og hensikten med dette, eller om det bare er en kobling som kommer til uttrykk grunnet periodens tema i matematikktimene.

5.3.1 Elevenes reaksjoner og progresjon

De to første timene av undervisningseksperimentet uttrykte elevene i begge klassene usikkerhet og forvirring rundt oppgavene de fikk beskjed om å tenke over eller løse. Eksemplene under er hentet fra observasjonsnotatene fra disse timene:

1. «Noen er i gang med oppgaven, andre er ikke. Usikre på hva de skal gjøre/har ikke linjal, kommer ikke videre. Mye prat, noen prater om tema andre ikke».

2. Elev i samtale med lærer: «Er det vanskelig? Ja. Annerledes måte å tenke på? Ja».

Elevene hadde også vanskelig for å konsentrere seg om oppgavene stort lenger enn et par minutter før de ga opp eller gjorde andre ting. Dette ble registrert av læreren i timene, som da valgte å bryte av og kreve oppmerksomheten hyppig, for å refokusere på arbeidet. Time 4 i undervisningseksperimentet ble en ren arbeidstime for elevene, hvor det også ble gjort opptak av to grupper i hver klasse. Lærerne gikk rundt og veiledet, men elevene jobbet stort sett selvstendig med utdelt oppgaveark i gruppene sine. Dette gjorde de frem til timen var over, som vil si drøyt 30 minutter. Vi ser altså en tendens til lengre tålmodighet og konsentrasjon blant elevene i møte med modelleringsoppgavene på slutten av perioden enn på starten. Dette kan skyldes at elevene er blitt mer vant til oppgavetypen. Vi var bevisst å bruke tid på å modellere og gjennomgå minst én oppgave hver time i felleskap med elevene under de første timene av undervisningseksperimentet. Det er viktig at læreren modellerer og øver sammen med elevene i arbeid med modelleringsoppgaver (MacGregor & Stacey, 1993), da det er tidkrevende og krever øvelse for elevene å arbeide med slike oppgaver. Totalt sett kan dette ha gjort at elevene i time 4 i større grad visste hva oppgavene krevde av dem og hvordan å gripe de an. Dette kan være en mulig forklaring på at vi ser progresjonen vi har gjort rede for.

5.3.2 Fasitorienterte elever

I observasjonsnotatene ser vi flere steder at elevene er svært opphengt i fasitsvaret på oppgavene vi ga dem. Dette kommer først og fremst til uttrykk i notatene fra de første timene, noe som også gjelder eksemplene under:

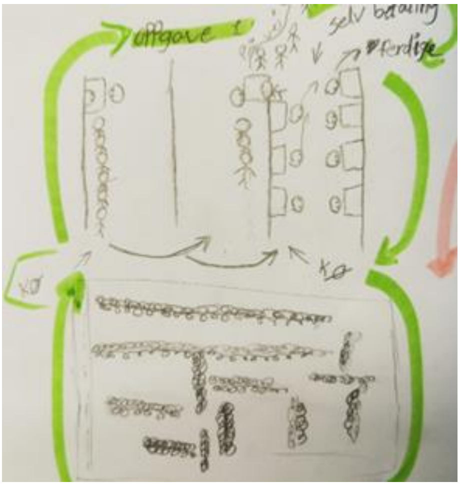
1. «Lærer: Okey, (prøver å avslutte) – Susanne: kan jeg bare spørre: Er det 38, for 38 pluss 38 er 68 og 5 lærere er 72 – er det riktig? (…). Annen elev spør også om det de har gjort er riktig».

2. Embla: «Hva er fasiten? Har du fasiten? Hvis jeg gjør sånn, vil det bli riktig da? Men har DU (henvendt til lærer) svaret?».

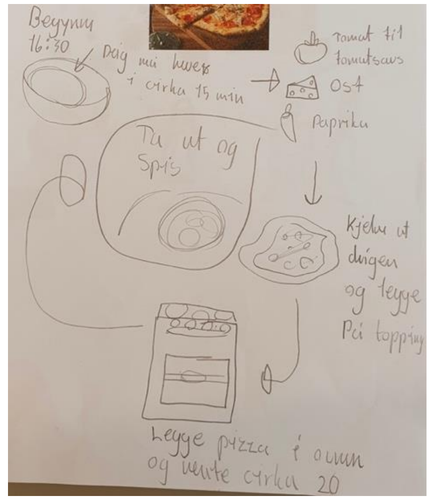
Det er helt naturlig for elever å fokusere på å regne ut en løsning i møte med oppgaver (Stacey & MacGregor, 1999). Slik Kieran (2006) pekte på at elevene ser handlingene sine i møte med oppgavene som løsningsstrategier og ikke representasjonsverktøy, ser vi også at dette kan gjelde elevene i vår studie. Dette kan forklare hvorfor elevene var fasitorienterte og slike konkrete eksempler som over, kommer til syne i datamaterialet vårt. I siste halvdel av undervisningseksperimentet vårt ser vi færre utsagn rundt fasitsvar. Dette kan indikere at normene har endret seg, slik Bonotto (2007) sier er nødvendig for å etablere gode modelleringsrutiner i klasserommet.

5.3.3 Likninger

Elevarbeidene i vårt datamateriale, hentet fra arbeidsheftene og A3-arkene, viser at de genererende aktivitetene, å sette opp likninger, var vanskelig for elevene i møte med oppgavene vi ga dem. Dette fremkommer ved at det er svært få likninger i besvarelsene deres. Elevene velger heller andre representasjoner, slik som tegninger, tabeller, eller forklarende tekst, slik figur 14 og 15 illustrerer.



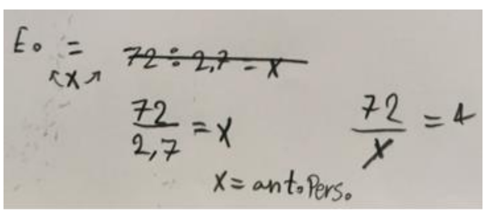
Figur 14 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet



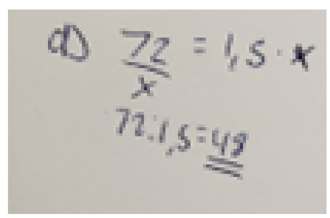
Figur 15 Elevbesvarelse fra A3-ark

Dette funnet kan ses i sammenheng med tidligere studier som slår fast at det i møte med likninger er særlig vanskelig for elever å gå fra ord til likning (MacGregor & Stacey, 1993; Stacey & MacGregor, 1999). Det er sannsynlig at vi kunne valgt andre oppgaver, som bedre la til rette for aktiv bruk av likninger. Da ville vi potensielt kunnet se flere likninger i elevenes arbeid med oppgavene.

Selv om vi ser lite likninger og at dette er vanskelig for elevene å stille opp, så finnes det enkelte tilfeller der det settes opp likninger i løsningsarbeidet (se eksempel 16 og 17).



Figur 16 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet



Figur 17 Elevbesvarelse fra arbeidsheftet

Likevel blir ikke likningene benyttet til å løse problemene elevene står ovenfor, da likningene som er stilt opp kommer som svar på oppgaver som spesifikt spør om elevene kan sette opp en likning (se kjøpepizza- og grendehusoppgaven i vedlegg 3). Når elevene først gjør genererende aktiviteter, brukes ikke disse inn i algebraisk tenkning-aktiviteter og dermed blir ikke likningene som er stilt opp brukt som et verktøy. Reeuwijk (1995) og Stacey og MacGregor (1999) sier at det er viktig å bruke oppgaver i arbeid med likninger, der likninger er nødvendig for løsning av oppgaven. På dette punktet kunne vi gjort et grundigere forarbeid for å øke læringsutbyttet til elevene innenfor likningsfeltet ved å i større grad velge slike oppgaver. Kun to av elevene i studien har gjort deloppgavene som spesifikt spurte etter likninger. Dette forsterker funnet om at det var vanskelig for elevene å sette opp likninger i arbeidet med oppgavene våre.

5.4 Sammenfletting av dybdelæringskomponentene

I denne delen vil vi belyse det vi ser som det store bildet i oppgaven vår. I de tre foregående delene, 5.1 - 5.3, har vi sett at elevene viser kjennetegn innenfor hver av dybdelæringskomponentene. På samme tid strever elevene med å flette disse sammen til en helhet. Dette gjelder altså både i undervisningssituasjoner og i gruppearbeid. Vi vil i det følgende se nærmere på dette, blant annet med utgangspunkt i en dialog mellom to av elevene og læreren.

I arbeid med køoppgaven fra time 4 fremkommer det en dialog, der vi ser tegn til læreren som kompetent annen (Bråten, 1996). Elevene har løst oppgaven og gått videre, men ble utfordret på å gå tilbake og lage en likning. Dette førte til følgende dialog hentet fra transkripsjonene av filmgruppe 4:

> 23:59 Mona: Jeg skjønte ikke hva vi skulle gjøre likninger på
> 24:00 Pål: Ikke jeg heller. Det er ikke sånn ... «umulig å høre»
> 24:04 Mona: Okey, vi spør da!
> 24:19 Mona: Okey, ho var litt opptatt nå. Men.
> 24:20 – 25:50 (1 ½ minutt uten lyd, kommer ikke videre med oppgaven)

Deretter kom lærer og startet en dialog med elevene om å lage en likning ut ifra oppgaven. Det kom raskt frem at når de skulle lage en likning måtte det være et ukjent tall. Videre ble det diskutert rundt hvilke faste og varierende størrelser oppgaven berørte:

> 27:19 Lærer: Hvor mange varer det er ja, mhm. Men hva er det med antall varer som tar tid?
> 27:23 Pål: Å scanne?
> 27:24 Lærer: De må scannes ja. Hvor lang tid tror dere det tar å scanne én vare?
> 27:30 Pål: Sånn 3 sekund, 5 sekunder.
> (…)
> 27:38 Lærer: Så det vil ta for eksempel 5 sekunder da, per vare. Hvor varene er ukjent. Også er det noe annet som vil ta tid. I køen. Hva skjer når de har scannet alle varene?
> 27:51 Pål: Man betaler?
> 27:52 Lærer: Man betaler ja. Vil det variere hvor lang tid det tar eller vil det ta cirka like lang tid alltid?
> 27:59 Pål: Det kommer jo an på hvordan man betaler, men det kan tenkes at det tar like lang tid.

I denne dialogen ser vi at dybdelæringen, som tidligere er sammenlignet med et tau, begynner å flettes (Kilpatrick, 2001), med veiledning fra lærer. Mens de tidligere delene av kapittel 5 viser at dette er svært vanskelig for elevene, ser vi her at elevene viser tegn til sammenfletting ved tett oppfølging og tid i arbeid med semi-modelleringsoppgaver. Dette vil vi trekke frem som et argument for å undervise i algebra over tid ved å integrere modelleringsoppgaver. For nybegynnere i algebra er det vanskeligste å forstå koblingen mellom et matematisk problem og det formelle uttrykket for dette (MacGregor & Stacey, 1993). Det står klart for oss at én uke var for intensivt, og at det i større grad vil være hensiktsmessig for lærere å benytte modelleringsoppgaver i undervisningen sin på mer jevnlig basis over tid.

6 Diskusjon

Hittil i denne oppgaven har vi undersøkt hvordan modellering kan integreres i algebraundervisning for å legge til rette for dybdelæring i lineære likninger og sett på kjennetegn som fremkommer etter endt undervisningseksperiment. Det kommer frem at elevene viser tegn på dybdelæring innenfor de ulike dybdelæringskomponentene hver for seg, men strever med å flette dem sammen til et tau, som betyr at de ikke godt nok «forstår sammenhenger og kan bruke det [de] har lært i nye situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 1). Vi vil derfor i det følgende diskutere dette i lys av teori og tidligere forskning.

6.1 Undervisningen

Modellering var et nytt begrep, både i læreplanen og for elevene i studien. Vi valgte derfor å bruke tid på begrepet de første timene, slik at dette ble brutt ned i mindre og mer håndterlige deler for elevene. En slik tilnærming til modellering ser Turner (2007) som strategisk og hensiktsmessig for å nå en større andel av elevene. Likevel ser vi at vår introduksjon av begrepet ble intensiv over en svært kort periode. Rammen på én uke var en føring som ble tillagt oss, og derfor ikke noe vi kunne endre. Erfaringen ble at modellering er tidkrevende, noe også Artaud (2007) poengterer. På bakgrunn av erfaringen vi har fått, ville vi lagt opp til mer tid i skolen hvis vi skulle ha gjennomført prosjektet på nytt.

På den andre siden ser vi at elevene har blitt kjent med begrepet modellering og den nye oppgavetypen på denne korte tiden. Dette kommer til utrykk både gjennom løsninger av oppgaver, progresjon fra første til siste time og ved kjennetegn på dybdelæring. Grunnen til av vi lyktes med dette, kan ha vært at vi brukte tid i undervisningen på eksempler, noe tidligere forskning viser (Turner, 2007) kan være med på å lære elevene modellering. Vi valgte også å bryte begrepet ned i første halvdel av uken, slik at elevene både kunne fokusere på steg i syklusen hver for seg, men også bryne seg på større og mer komplekse oppgaver. En slik bruk av modellering i undervisning er anbefalt av Turner (2007).

For at modelleringsoppgavene skulle være til nytte, krevdes det endringsprosesser i klasserommet, siden modellering var et helt nytt tema for elevene. I timene våre gjaldt dette for eksempel fokuset på fasit, usikkerheten rundt hvordan å begynne arbeidet, at størrelsene elevene trengte ikke sto i oppgavene, og elevenes behov for tett oppfølging av lærer. Dette er endringer som går på holdninger og etablering av nye normer i klasserommet, noe som er blant Bonottos (2007) tre nødvendige endringer for at elevene skal kunne dra nytte av modelleringsoppgaver.

6.1.1 Læreren

En stor del av undervisningseksperimentet vårt var læreren, da opplegget krevde introduksjon av noe helt nytt, samt tydelig ledelse i arbeidsprosessene. Vi vil derfor drøfte hvilken rolle læreren spiller i algebraundervisning med modellering som tilnærming. Det står klart at det kreves at læreren bør ha med seg et eget tankesett på hvordan å være lærer i et klasserom, der modellering blir brukt i undervisning (Antonius et al., 2007; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Doerr, 2007).

Da vi la opp vårt undervisningseksperiment var vi opptatt av balansen mellom elevaktivitet, plenumsamtaler og veiledning. Blum og Borromeo Ferri (2009) mener dette er avgjørende for å oppnå kvalitetsundervisning. Vi ser effekten av dette ved noen kjennetegn på dybdelæring i algebra alt etter én uke. Det er særlig modelleringskomponenten som skiller seg positivt ut ved at flest elever viser kjennetegn innenfor denne. Likevel stiller vi spørsmål ved om bedre forberedelser på kravene til lærerrollen i slik undervisning, kunne ført til at vi så flere kjennetegn på dybdelæring også innenfor de andre komponentene.

I møte med elever i klasserommet er det lett å favorisere egen løsningsstrategi (Blum & Borromeo Ferri, 2009). I forarbeidet med vårt undervisningseksperiment forberedte vi oss ved å tenke på mulige algebraiske løsninger av oppgavene, samt vår hensikt med hver oppgave. Dette kan ha gjort at vi i veiledning med elevenes usikkerhet fremsto ledende mot våre egne løsninger og mål. Dermed kan vi ha gått i en kjent felle, tross at intensjonene ved de grundige forberedelsene var gode og hadde de beste hensikter for elevenes læring. Dersom vi i større grad hadde unngått å favorisere egen løsning, kunne elevene sannsynligvis fått enda større utbytte av modelleringsoppgavene, som dermed ville fått utnyttet mer av sitt potensiale. Det vi kunne gjort annerledes ville da være å konsekvent ta tak i elevenes tanker og idéer i veiledningen, og slik fokusere på undring og spørsmål som er avgjørende for å legge til rette for dybdelæring (Maugesten & Nordbakke, 2019). Da ville spørsmål som «"Hva sikter dere mot?" [og] "Hva mangler fortsatt?"» (Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 52, egen oversettelse) kunne bidra til utvikling for hver enkelt elev utfra sin personlige prosess.

På den andre siden ser vi at vi har vært bevisst mange av kravene (Antonius et.al. 2007; Doerr, 2007) for lærerrollen i undervisning med modellering. I forkant av undervisningseksperimentet forberedte vi oss på mulige elevbesvarelser på de ulike oppgavene, da vi visste at det ville være hensiktsmessig å lytte etter forventede uklarheter slik også Doerr (2007) presiserer. Dette gjorde vi for å kunne gi elevene best mulig veiledning, noe elever selv har trukket frem som viktig i en slik prosess (Maugesten & Nordbakke, 2019). Likevel kan man aldri være forberedt på alt, og ett av kravene til Antonius et al. (2007) er at lærere må leve med denne usikkerheten.

6.1.2 Oppgavene

Oppgavene vi benyttet i vår studie var en stor del av undervisningen vi gjennomførte. Disse var nøye utvalgt og gjennomtenkt for å bidra til målet om dybdelæring for elevene i lineære likninger. Teori lå til grunn for valget om å bruke åpne oppgaver (Kaiser & Maass, 2007) innenfor én kontekst (Stacey & MacGregor, 1999; Swafford & Langrall, 2000). Etter gjennomført undervisningsekseperiment ser vi færre transformerende aktiviteter, det vil si bruk av likninger, enn vi hadde sett for oss i elevenes løsningsarbeid. En mulig forklaring på dette kan være valget av oppgaver. Kanskje kunne vi valgt mer lukkete oppgaver, som i større grad pekte på algebra og bruk av likninger i løsningsarbeidet, slik Reeuwijk (1995) og Stacey og MacGregor (1999) påpeker er viktig. På den andre siden påpeker Kieran (2004), i beskrivelsen av algebraisk tenkning- aktivitet, at aktiviteter av denne typen ikke nødvendigvis må løses ved bruk av algebra. Dermed kan oppgavene vi valgte argumenteres for ikke å være dårlige i utvikling av dybdelæring i algebra, selv om de kan løses uten bruk av likninger.

Enkelte elever gjør genererende aktiviteter, altså stiller opp likninger, som en del av løsningene sine. Likevel ser vi tydelig flertall av andre representasjoner som valgt fremstilling av løsninger. Tidligere forskning (Kaiser & Maass, 2007) viser at elever med større faglig trygghet velger mer utfordrende modeller, for eksempel likninger, i sitt løsningsarbeid, mens mindre faglig trygge elever foretrekker enklere modeller, slik som tegninger og tabeller. Kanskje er mindre faglig trygge elever en av grunnene til at vi har mye tegninger og tabeller i datamaterialet og færre likninger? En alternativ forklaring kan være at det ble for liten tid, der elevene spesielt kunne vært tjent med en bedre integrering av likninger i modelleringsoppgavene, for å bli mer faglig trygge.

Lage-selv-oppgaven vi benyttet, og som var å finne både i arbeidsheftet og på oppgavearket til time 4, hadde til hensikt at elevene skulle bruke det de hadde lært til å vise sin forståelse av likninger som verktøy. Dette er svært krevende for elevene å bli utfordret på og Turner (2007) mener nettopp dette er det vanskeligste elevene kan møte. På samme tid fremhever Ball og Bass (2015) at for å oppnå dybde i elevenes algebraiske tenkning, så må oppgavene være kognitivt krevende og utfordre elevenes utholdenhet. Å holde ut i en slik prosess vil også kunne oppleves krevende for elever, og da blir læreren som motivator og veileder svært viktig (Maugesten & Nordbakke, 2019). Tross at modellering er krevende for elever, begrunner Blum (2015) hvorfor integrering av modellering er viktig i matematikkfaget (se 2.3 for redegjørelse av Blums grunner).

6.2 Fordeler med modellering

Læreplanen i matematikk legger opp til å bruke modellering som tilnærming i undervisning av alle matematiske tema (Utdanningsdirektoratet, 2021). Dette kan gjøres på ulikt vis, og vi har i denne oppgaven beskrevet én mulighet og våre erfaringer med denne. Vi vil i denne delen se litt større på fordelene ved bruk av modellering i undervisning og diskutere hvorvidt modellering som tilnærming til algebra er mulig eller hensiktsmessig for å oppnå dybdelæring.

Gjennom vår studie har vi sett at modellering som tilnærming til algebra lar seg gjøre og gir tegn til dybdelæring, selv etter svært kort tid. På den ene siden ser vi at en slik tilnærming er krevende for elevene, da den utfordrer dem både på tankegang, arbeidsprosess og holdninger i matematikk. Likevel kan dette være både en fordel og en ulempe ved en slik tilnærming til algebra. Ser man på disse erfaringene med positive briller, støtter de Lamons (1998) resultater ved at en slik tilnærming vil hjelpe elevene til å se og bruke algebra som et verktøy. Dette er noe som står i kontrast til elever som ikke brukte modellering som tilnærming til algebra, da disse evner å manipulere symboler, men mangler forståelsen bak prosedyrene (Lamon, 1998).

Modellering er som nevnt utfordrende for læreren og tidkrevende. Likevel vil elevene ved å jobbe med modelleringsoppgaver få erfaringer og kunnskap både innenfor modellering, og i tillegg innenfor det matematiske temaet de jobber med (Swan et al., 2007), som i vårt tilfelle var algebra. Slik kan modellering bli et positivt steg for å lykkes i læringsarbeidet (Bahamonde et al., 2017). På den andre siden ser vi det som viktig å finne balansegangen mellom for store utfordringer og utfordringer som befinner seg i den nærmeste utviklingssonen (Bråten, 1996).

I vårt undervisningseksperiment valgte vi å bruke åpne modelleringsoppgaver. En av fordelene vi så ved dette var at alle elevene, uavhengig av nivå, hadde noe å bidra med i løsningsprosessene. Ifølge Doerr (2007) er det akkurat dette modelleringsoppgavene legger til rette for og slik er med på å utvikle elevenes evne til å tolke situasjoner i fremtidige oppgaver. Å bruke modellering som metode er også med å hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom matematikkfaget og fenomener i den virkelige verden. Slik understrekes viktigheten av modellering for alle elever (Artaud, 2007).

Studien vår viser at modellering som tilnærming til algebra er mulig, da vi har klart å gjennomføre undervisningseksperimentet vårt, samt at vår innsamlete data viser elevenes arbeid. Spørsmålet vi så sitter igjen med, er hvorvidt det også er hensiktsmessig med en slik tilnærming og ikke bare mulig. Utfra vår forskning, og resultatene av denne, ser vi kjennetegn på dybdelæring i likninger hos studiens elever. Dette ser vi som et argument for at modellering er en hensiktsmessig tilnærming til algebra. På den andre siden ser vi, siden ikke alle kjennetegn på dybdelæring i tabellen er oppnådd, at potensialet for bruk av modellering i algebraundervisning er større enn vi klarte å få frem i vår studie. Andre forskere (Izsák, 2003; Lamon, 1998) understeker også at modellering som tilnærming til algebra er hensiktsmessig, selv om det fremdeles trengs mer forskning på feltet.

7 Avslutning

Denne studien har hatt til hensikt å svare på forskningsspørsmålene:

1. Hvilke tegn på dybdelæring i lineære likninger kan observeres i elevers arbeid med modellering av praktiske situasjoner i algebraundervisning?
2. Hvordan kan modellering integreres i algebraundervisning for å legge til rette for elevers dybdelæring i lineære likninger på 8.trinn?

I det følgende vil vi sammenfatte det viktigste som har kommet frem i arbeidet med studien, både med tanke på fremtidig algebraundervisning og for videre forskning på feltet.

Noe av det som viser seg vanskelig med algebra for elevene i vår studie, er også det som er svært viktig for dybdelæring på vårt felt: å veksle mellom praktiske situasjoner og det matematiske (Blum, 2015; Lamon 1998), altså å bruke algebraisk kompetanse som verktøy og danne positive holdninger til emnet. Det fremkommer av resultatene våre at det å stille opp likninger utfra våre modelleringsoppgaver var vanskelig for elevene. Vår erfaring tilsier derfor at valg av oppgaver og tidsbruk er faktorer som er viktig å være bevisst ved bruk av modelleringsoppgaver i algebraundervisning. Vi tror at dersom man som lærer gjør gode forberedelser og tar hensyn til dette, vil det gjøre algebraundervisningen mer variert og likningsfokuset mer tydelig.

Etter endt undervisningseksperiment sitter vi igjen med erfaringen av at vi gjerne skulle hatt lengre tid til gjennomføringen. Da ville vi hatt mulighet til å følge elevene tettere opp i utviklingen av dybdelæring på området, slik Blanton et al. (2015) understreker viktigheten av. Av resultatene våre ser vi at kjennetegn på dybdelæring i de ulike komponentene er å finne, tross den korte tiden, men at sammenflettingen av disse til et solid tau foreløpig uteblir. Lengre tid ville dermed gjort at vi i større grad kunne veksle mellom å fokusere på dybdelæring ved modelleringsoppgavene og å styrke de ulike komponentene hver for seg. Som Reeuwijk (1995) presiserer trenger elevene forståelse for reglene og prosedyrene de benytter, noe også Lamon (1998) kommer frem til er viktig for elevene for å kunne se nytten av og bruke algebra som et verktøy.

Vi tror det vil være hensiktsmessig å integrere modellering i undervisning på jevnlig basis fremfor intensivt i en kort periode slik vi gjorde. Ved å integrere modellering jevnlig, vil tiden strekke til for å fokusere på de ulike dybdelæringskomponentene hver for seg. Dersom dette også gjøres tidlig i elevenes algebraundervisning, vil det kunne være med å styrke det psykologiske argumentet for modellering (Blum, 2015). En slik styrking av elevenes motivasjon og interesse for faget, sammen med bruk av modelleringsoppgaver, vil kunne hjelpe elevene til å flette komponentene sammen til dybdelæringstauet. Da vil elevene, forhåpentligvis, til slutt se nytten av og kunne ta i bruk algebra som verktøy (Lamon, 1998).

Alt i alt, basert på våre erfaringer under arbeidet med denne studien, tror vi at fremtidens algebraundervisning vil kunne bidra til dybdelæring ved bruk av modelleringsoppgaver på jevnlig basis. Dette vil også kunne bidra til å utruste elevene med en bedre kompetanse innen matematikk og flere nyttige verktøy i møte med praktiske problemer og teoretiske utfordringer. På samme tid er dette basert på erfaringen vår i arbeidet med denne studien, som jo er av begrenset omfang. Det trengs derfor mer forskning på dette feltet, samtidig som vi opplever å ha gjort oss flere nyttige erfaringer som vi tar med oss inn i læreryrket fra høsten av.

8 Litteraturliste

Antonius, S., Haynes, C., Jensen, T. H., Niss, M. & Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the theacher. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 295-308). Springer.

Artaud, M. (2007). Some conditions for modelling to exist in mathematics classrooms. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 371-378). Springer.

Bahamonde, A. D. C., Aymemí, J. M. F. & Gómez, J. V. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 338-352. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

Ball, D. L. & Bass, H. (2015). Helping students learn to persevere with challenging mathematics. In X. H. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Proceeding of ICMI STUDY 23: Primary mathematics study on whole number* (s. 290-298). International Comission on Mathematical Instruction. ISSN: 978-99965-1-066-3. https://www.um.edu.mo/fed/ICMI23/proceedings.html

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-43). Universitetsforlaget.

Berget, I. K. L., & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk Tidsskrift for Utdanning Og Praksis*, *13*(1), 83-97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blum, W & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 222-231). Horwood Publishing

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application 1*(1), 45-58.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In S. J. Cho, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* Cham.

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets. Unleashing Students´ Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching.* USA: Jossey-Bass.

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 185-192). Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education.* Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9_1

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Bråten, I. (Red.). (1996). *Vygotsky i pedagogikken*. Cappelen Akademisk Forlag.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 69-78). Springer.

Erfjord, I. (2005). Matematisk modellering. I C. Kirfel (Red.), *Tangenten: Inspirasjonsbok for matematikklærere* (s. 115-121). Caspar Forlag.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse – med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempler. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(2), 79-96. https://www.researchgate.net/publication/328139215_En_metodisk_studie_av_innholdsanalyse_-_med_analyser_av_matematikklaereres_undervisningskunnskap_som_eksempel

Izsák, A. (2003). "We Want a Statement That Is Always True": Criteria for Good Algebraic Representations and the Development of Modelling Knowlegde. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191-227. https://www.jstor.org/stable/30034778

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport. Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo*.

Kaiser, G & Maass, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom – problems and opportunities. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 99-108). Springer.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinkning in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator 2004*, *Vol.8*, 139 - 151. https://www.researchgate.net/profile/Carolyn-Kieran-2/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/55895b8408ae2affe714d428/Algebraic-thinking-in-the-early-grades-What-is-it.pdf

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. I A. Gutiérrez & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (s. 11-49). Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 1, s. 707-762). National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding Mathematical Literacy: The Contribution of Research. *Educational studies in mathematics, 47*(1), 101-116. https://doi.org/10.1023/A:1017973827514

Kunnskapsdepartementet. 2019. *Læreplanen i matematikk (MAT-01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Lamon, S. J. (1998). Algebra: Meaning through Modelling. I A. Olivier & K. Newstead (Red.), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, s. 167-174). Stellenbosch: International Group for the Psychology of Mathematics Education

MacGregor, M. & Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 217-232. https://doi.org/10.2307/749345

Marton, F. & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning: I - Outcome and process. *British journal of educational psychology., 46*(1), 4-11.

Maugesten, M. & Nordbakke, M. (2019). Å identifisere dybdelæring i en undersøkende matematikkoppgave på ungdomstrinnet. I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk – matematikkdidaktikk i teori og praksis* (s. 57-76). Fagbokforlaget.

Meld. St. 28 /2015-2016/. *Fag-Fordypning-Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Moen, T. (2015). Sosiokulturell teori: Vygotsky i teori og praksis. I R. Karlsdottir & I. D. Hybertsen (Red.), *Læring, utvikling, læringsmiljø - en innføring i pedagogisk psykologi* (s. 251-268). Fagbokforlaget.

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/MN%20KW%20dybdel%c3%a6ring%2015.04.18_0.pdf

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/?ch=4

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018) *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Reeuwijk, M. v. (1995). The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations. http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/3781.pdf

Reinhardtsen, J., Carlsen, M. & Säljö, R. (2015) Capturing learning in classroom interaction in mathematics: Methodological considerations*. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1475-1481. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287780

Sawyer, R. K. (2006). Introduction: The New Science of Learning. I R. K. Sawyer (Red.), *The Cambridge handbook of The Learning Sciences* (s. 1-16). Cambridge University Press.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. I R. Lesh & A. E. Kelly (Red.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 267-307). LEA.

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 89-112. https://doi.org/10.2307/749821

Swan, M., Turner, R., Yoon, C. & Muller E. (2007) The roles of modelling in learning mathematics. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 275-284). Springer.

Turner, R. (2007). Modelling and applications in PISA. I W. Blum, P. L. Galbraith, H. -W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 433-440). Springer.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Dybdelæring.* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Hvordan ta i bruk nye læreplaner?* *https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvordan-ta-i-bruk-lareplanen/*

Utdanningsdirektoratet. (2022, 15.mars). *Innføring og overgangsordninger for nye læreplaner.* *https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/innforing-og-overgangsordninger-for-nye-lareplaner/*

Webb, D. & Abels, M. (2011). Restrictions in algebra. I P. Drijvers (Red.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (s. 101-118). Sense Publishers.

9 Vedlegg

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Modelleringsaktiviteter og dybdelæring i likninger på 8.trinn"

Dette er et spørsmål til deg om du vil delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å utvikle læringsaktiviteter i algebra. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for barnet ditt.

Formål

Formålet med prosjektet er å forske på undervisningsopplegg i matematikk, med fokus på modellering og lineære likninger i algebra. Forskningsspørsmålet vårt er: Hvordan kan modellering integreres i algebraundervisning for å legge til rette for elevers dybdelæring i lineære likninger på 8.trinn? Studien er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi ønsker å se på modelleringsaktiviteter og dybdelæring på 8.trinn og derfor får du spørsmål om å bli med. Det er to klasser på dette trinnet som blir spurt om å bli med.

Hva innebærer det for deg å delta?

Å delta i prosjektet innebærer å delta i flere skoletimer hvor elevene arbeider med modelleringsaktiviteter i algebra, der en av disse timene vil bli tatt opp med lyd og film. Fokuset vil være på det de jobber med, og ikke på elevene. Arbeidet som blir gjort i disse timene vil bli samlet inn og brukt som dokumentasjon i prosjektet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dersom du ikke ønsker å delta, vil du fremdeles gjennomføre de samme aktivitetene, men være plassert utenfor rekkevidde av video- og lydopptak.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Vi lagrer personidentifiserende data (det vil si lyd- og video-opptak) på Universitetet i Agder sin database, og alt vil bli slettet når prosjektet er ferdig. Det er kun undertegnende masterstudenter og veiledere som vil ha tilgang til datamaterialet. Deltakerne vil ikke kunne bli gjenkjent i publikasjonen av prosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2023. Alle personopplysninger og opptak som er gjort vil slettes ved prosjektslutt.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitet i Agder* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Universitetet i Agder ved Jorunn Reinhardtsen (veileder), kan kontaktes på telefon: 38142254 eller mail: jorunn.reinhardtsen@uia.no og David Alexander Reid (veileder), kan kontaktes på telefon: 38141267 eller mail: david.reid@uia.no
Maria Sandvand (masterstudent), kan kontaktes på telefon: 96507483 eller mail: marisa17@uia.no og Birgitte Galteland (masterstudent), kan kontaktes på telefon: 45852484 eller mail: birgbh17@uia.no
Vårt personvernombud: Johanne Warberg Lavold, kan kontaktes på telefon: 41212048 eller mail: johanne.lavold@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Jorunn Reinhardtsen (Veileder)	*David A. Reid* (Veileder)	*Maria Sandvand* (Student)	*Birgitte Galteland* (Student)

Samtykkeerklæring

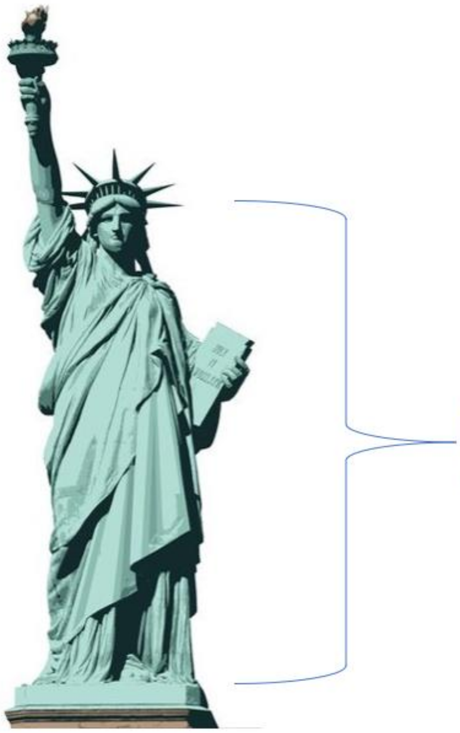
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet "Modelleringsaktiviteter og dybdelæring i likninger", og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

at mitt barn deltar i undervisning der det blir gjort lyd- og videoopptak
at mitt barns arbeid brukes som dokumentasjon i forbindelse med utvikling av undervisningsopplegg i algebra

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. midten av juni 2023.

(Signert av foresatt til prosjektdeltaker, navn på prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2 – Introduksjonsoppgaven



Frihetsgudinnen
er 34 meter

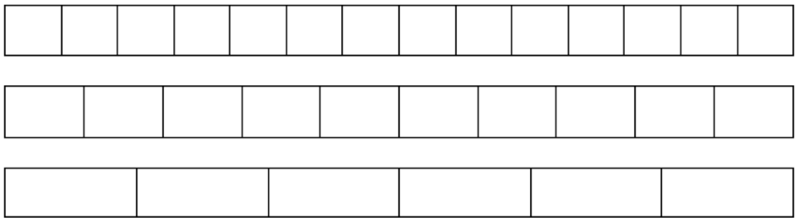
Hvor lang er nesen?

Vedlegg 3 – Oppgavene fra arbeidsheftet

1. Klassen skal på skoletur til Hovden. Skolen har ikke nok penger til å leie inn buss så de trenger hjelp av foreldre til å kjøre. Hvor mange biler trenger dere for å komme dere frem til Hovden?

2. Til middag skal dere bestille pizza. Offpiste Hovden pizzeria selger store pizzaer delt inn i 36 biter. Det er bestilt 2 pizzaer. Alle har blitt enige om at hver person skal få like mange pizzastykker
   A. Bare 4 elever var tilbake når pizzaen kom. Hvor mange pizzastykker får hver elev da? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   B. Det var også 5 lærere der da pizzaen kom, hvor mange pizzastkker blir det på hver? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   C. Tenk deg at hele klassen var tilbake da pizzaen kom, hvor mange pizzastykker blir det på hver person da? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   D. Dersom alle fikk 1 ½ pizzastykke hver, hvor mange personer er dere til sammen då? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   E. Prøv å kom frem til en likning som gjør at du kan finne antall pizzastykker for hver

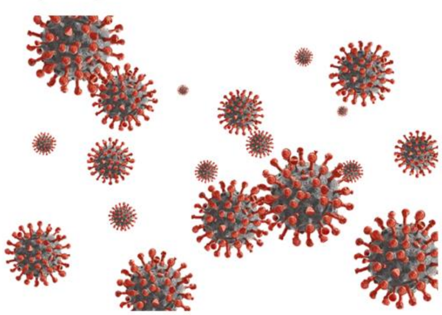
3. En ekspert i historie kommer til Grendehuset på Hovden for å fortelle dere om Hovdens historie og seteradene ser ut som under: Det er 6 seter på første rad. Hver rad etter det har 4 seter mer. Under her ser du et bilde av de tre første radene i kinosalen.



   A. Hvor mange seter er det i rad 7? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   B. Hvor mange seter er det i rad 12? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   C. Hvor mange seter er det i rad 104? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   D. I hvilken rad er det 378 seter? Vis hvordan du kom frem til svaret.
   E. Forklar og vis hvordan du vil finne ut av hvor mange seter det er i hvilken som helst rad. Prøv å skriv en likning som viser hvordan du kommer frem til svaret.

4. Det var så godt med pizza til middag, at dere bestemmer dere for å ha det igjen. Istedenfor å bestille pizza, så vil dere lage den selv. Pizzaen skal være klar til klokken 18. Lag en modell som viser hvor lang tid i forveien dere bør begynne å lage mat.

5. En dag våkner du opp med symptomer på korona, og bekymrer deg for om du har smittet noen i klassen. Lag tre forskjellige modeller som kan vise hvordan viruset kan spre seg.



6. Prøv å finne (og løse) egne modelleringsproblemer.

Vedlegg 4 – Oppgavene fra time 4

KLASSETUR HOVDEN

1. To av dere får bli med læreren å handle inn mat for turen. Etter å ha fylt handlevognen med alt dere trenger kommer dere frem til kassa. Der er det kø. Lag en modell for hvordan man kan bestemme seg for hvilken kø dere vil stille dere i.

2. Dagen dere skal stå på slalåm våkner dere til masse nysnø. Før dere kan dra til trekket må oppkjørselen måkes. Hvis en elev bruker tre timer på å måke ferdig, hvor lang tid tar det da hvis dere er to? Og hva hvis enda flere hjelper til?

3. Prøv å finne (og løse) egne modelleringsproblemer.