UiA Universitetet i Agder

Lærer, vil du si at dette er en sofistikert matematisk løsning?

Kommunikasjon i matematikkfaget

-en aksjonsstudie

MARIANNE LØVSETH

VEILEDER

Hans Kristian Nilsen

Universitetet i Agder, 2022
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Juni 2023 markerer slutten på tre lærerike og inspirerende år ved Lærerspesialistutdanningen ved Universitetet i Agder. I den anledning er det flere personer som fortjener takk og oppmerksomhet: Først og fremst vil jeg takke min veileder Hans Kristian Nilsen. Det andre studieåret underviste han oss i kommunikasjon og ulike undervisningsmetoder i matematikk. Jeg har lenge vært interessert i temaet kommunikasjon i matematikkfaget. Jeg er derfor glad for at jeg nå har fått anledning til å fordype meg i temaet, under Hans Kristian sin kyndige og imøtekommende veiledning.

Takk også til skolen der jeg er ansatt, som ikke bare har vist velvilje i forhold til at jeg fikk gjennomføre dette studieløpet, men også lot meg gjennomføre feltarbeidet til masteroppgaven på egen arbeidsplass. En spesiell takk til teamet mitt som har vist overbærenhet med at jeg har jobbet noe mindre enn vanlig med fellesoppgaver denne våren.

Jeg vil også takke nærmeste familie og kjæreste for uvurderlig støtte gjennom disse tre årene. Dere er alle, sammen med veileder, hedret ved at navnene deres gjenspeiles i pseudonymene brukt i de gjengitte elevdialogene. Sist, men ikke minst: Takk til mine fantastiske, dyktige og artige medstudenter ved det første kullet med lærerspesialister fra UiA! Det har vært stor stas å bli kjent med dere, og jeg håper vi kan holde kontakten og dele gode ideer og spennende undervisningsopplegg med hverandre.

Skien, mai 2022
Marianne Løvseth

Sammendrag

I dette prosjektet har jeg gjennomført aksjonsforskning i egen klasse der utgangspunktet var å teste ut en (for meg) ny måte å gjennomføre skriftlige matematikkprøver på: Hver elev fikk diskutere oppgavene i gruppe med to andre elever i starten av hver prøve, før de gikk hvert til sitt for å utforme egen besvarelse. Dette i lys av kjerneelementene i ny læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2019a), som blant annet fokuserer på kommunikasjon, resonnering og argumentasjon. Studien var også et forsøk på å møte nye bestemmelser i vurderingsforskriften (Opplæringsloven, 2021), som slår fast at all vurdering skal bidra til læring og lærelyst.

Aksjonsstudien er basert på Goodchild (Goodchild, Fuglestad, & Jaworski, 2013) sin modell for aksjonsstudier, og bestod av fem alternerende faser; tre forskningsfaser og to utviklingsfaser. I forskningsfasene undersøkte jeg elevenes kommunikasjon, og i utviklingsfasene implementerte jeg tiltak der målet var å sørge for hensiktsmessig matematisk kommunikasjon i elevgruppene, både i vurderingssituasjonene og i gruppesamarbeid ved ordinær undervisning. Jeg gjorde samtidig noe jeg ikke har sett andre gjøre før, nemlig snakke direkte med elevene om sosiomatematiske normer og hva slike kan bety for valg av løsninger.

Når det gjelder teoretiske rammeverk knyttet til kommunikasjon, er Mortimer og Scott (Mortimer & Scott, 2003), Drageset (Drageset, 2014), Wæge (Wæge, 2015), Kazemi og Hintz (Kazemi & Hintz, 2019), and Cobb m.fl. (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997) sentrale. For temaet sosiomatematiske normer, er Yackel og Cobbs (Yackel & Cobb, 1996) artikkel sentral. Hovedfunn i studien tyder på at man gjennom aksjonsforskning etter Goodchild (2013) sin modell kan øke kvaliteten på ungdomsskoleelevers kommunikasjon i matematikk, og at dette kan komme til uttrykk som faglige begrunnelser for enighet og uenighet, deltakelse i refleksive diskurser, tegn til økt matematisk autonomi og engasjement i diskusjoner knyttet til sosiomatematiske normer.

Gjennom prosjektet har jeg utvidet egen forståelse for omfanget av endringene i læreplanen og hvor stor betydning kjerneelementene har for både undervisning, utvikling av elevenes matematiske kompetanse og for vurderingsformer. Utgangspunktet for forskningen var å prøve ut en ny måte å gjennomføre skriftlige prøver på, og endte med at jeg gjennom et utvidet perspektiv på hva vurdering i matematikk bør inneholde, har fått insitamenter for å endre egen vurderingspraksis radikalt. Alle erfaringene jeg har gjort meg i forhold til målrettet arbeid med kommunikasjon er likevel ikke blitt mindre aktuelt, snarere tvert imot.

Summary

In this project I have implemented action research in my own mathematics class. The basic idea was trying out a new way of organizing written tests that allowed the pupils to discuss the tasks in a group with two other pupils before completing the answers individually. The Norwegian curriculum (Utdanningsdirektoratet, 2019a) contains six core elements where communication, reasoning and argumentation are important issues. Norway has also updated the assessment in education legislation, and the regulations (Opplæringsloven, 2021) demand all assessment to contribute to learning and a desire to learn.

The action research is based on Goodchilds (Goodchild et al., 2013) model and contained five alternating phases; three research phases and two development phases. In the research phases I examined the pupils communication, and in the development phases measures were implemented. The aim was to make their communication as appropriate as possible for learning, both when working together in test situations and when doing learning activities in the classroom. In this process I also did something considered as quite unusual; I talked directly to my pupils about sociomathematical norms and how such norms can influence us when deciding which mathematical solutions to choose.

When it comes to the theoretical basis considering communication, Mortimer and Scott (Mortimer & Scott, 2003), Drageset (Drageset, 2014) Wæge (Wæge, 2015), Kazemi and Hintz (Kazemi & Hintz, 2019), and Cobb et.al. (Cobb et al., 1997) are important. For the theme sociomathemetical norms, Yackel and Cobbs (Yackel & Cobb, 1996) article is central. The main findings may indicate that action research built on Goodchild (2013) may increase the quality of 8th-10th grades` mathematical communication. This can be seen as increased use of justified reasoning of agreement and disagreement, participation in reflexive discourses, signs of augmented mathematical autonomy and engagement in discussions considering sociomathematical norms.

Through this project I have developed a clearer understanding of the comprehensive changes in the curriculum. The core elements will have a considerable influence on teaching, on the development of mathematical competence, and on assessment methods. My basic idea was trying out a new way of organizing written tests. It ended up giving me expanded perspectives on what assessment of mathematical competence must contain and gave me an incentive to radically change my assessment practice. Despite this, my experiences according to working systematically with communication in the classroom are still both important and relevant.

Innholdsfortegnelse

Forord ... 3
Sammendrag ... 5
Summary ... 7
1.0 Innledning ... 13
1.1 Formell bakgrunn ... 13
1.2 Personlig bakgrunn og valg av tema ... 14
1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål ... 15
1.4 Strukturering av studien ... 16
2.0 Teoretisk forankring ... 17
2.1 Relevante prinsipper i LK20 ... 17
2.2 Overordnet læringssyn ... 18
2.2.1 Den sosialkonstruktivistiske tilnærming og «Det framvoksende perspektiv» ... 18
2.3 Kompetansebegrepet ... 19
2.3.1 Matematisk kompetanse ... 20
2.3.2 Kommunikasjonskompetanse ... 22
2.4 Vurdering ... 23
2.4.1 Vurderingsforskriften stiller formaliserte krav til vurdering for læring ... 23
2.4.2 Summativ og formativ vurdering ... 23
2.4.3 Organisering av vurderingssituasjoner ... 26
2.4.4 Læring, vurdering, kommunikasjon og normer ... 26
2.5 Sosiale normer, sosiomatematiske normer og matematisk autonomi ... 27
2.6. Lærers kommunikative tilnærming ... 28
2.7 Kommunikasjon ... 29
2.7.1 Kommunikasjon og kjennetegn på god matematikkundervisning ... 29
2.7.2 Kommunikasjonsfeller ... 30
2.7.3 Refleksiv diskurs og refleksiv kommunikasjon ... 31
2.7.4 Samtaletrekk og samtalestartere ... 31
2.7.5 Fokuserende handlinger ... 32
3.0 Metode ... 35
3.1 Forskningsdesign: Å forske på egen praksis ... 35
3.1.1 Aksjonsforskning -en generell modell ... 36
3.1.2 Diskusjon av to modeller for aksjonsforskning innenfor matematikkdidaktikken ... 37
3.1.3 Grafisk fremstilling av eget forskningsdesign basert på Goodchilds modell ... 38
3.2 Bakgrunn ... 39
3.3 Utvalg ... 41
3.4 Metoder og datainnsamling ... 41

3.5 Studiens gyldighet og pålitelighet 42
3.6 Etikk 44
3.6.1 Tillatelse fra NSD og informasjon til elever og foresatte 44
3.6.2 Andre etiske avveininger 44
3.7 Analysestrategi 45
3.7.1 Neddykking og refleksjon 45
3.7.2 Analyse og diskusjon 45
4.0 Fasene i utviklingsarbeidet 47
4.1 Fasene i aksjonsforskningen 47
4.1.1 Første forskningsfase (fase 1) 47
4.1.2 Første utviklingsfase (fase 2) 48
4.1.3 Andre forskningsfase (fase 3) 51
4.1.4 Andre utviklingsfase (fase 4) 51
4.1.5 Tredje forskningsfase (fase 5) 57
5.0 Analyse 59
5.1 Kommunikasjon før implementering 60
5.2 Kommunikasjon etter implementering 65
5.3 Tegn til matematisk autonomi og kjennskap til sosiomatematiske normer 67
5.4 Elevenes tanker om vurderingssituasjonene og beskrivelse a resultatutvikling 73
6.0 Diskusjon 77
6.1 Utviklingsarbeidet 77
6.2 Kommunikasjon, matematisk autonomi og sosiomatematiske normer 80
6.2.1 Høy deltakelse gjennom hele prosjektet 80
6.2.2 Uttrykk for enighet og uenighet delvis forbedret etter implementering av tiltak 81
6.2.3 Refleksiv diskurs ble registrert i to grupper før implementering, etter hvert i alle 82
6.2.4 Endret tenkning ble uttrykt gjennom refleksiv diskurs og bidro tidvis til autonomi 83
6.2.5 Tendens til økt matematisk autonomi ved gruppearbeid i ordinær undervisning 84
6.2.6 Elever diskuterte sosiomatematiske normer for effektiv og sofistikert løsning 85
6.2.7 Observasjon, intervensjon og endring 86
6.3 Læring i lys av aktuelle kjerneelementer 86
6.4 Refleksjoner knyttet til vurdering 87
7.0 Konklusjon 89
7.1 Hovedfunn 89
7.2 Didaktiske implikasjoner 90
7.3 Implikasjoner for videre forskning 91
7.4 Egen utvikling 91
8.0 Litteratur 93

Vedlegg 1-Tillatelse fra NSD ... 97
Vedlegg 2-Prøve gjennomført i første forskningsfase ... 99
Vedlegg 3-Prøve gjennomført i andre forskningsfase ... 100
Vedlegg 4-Prøve gjennomført i tredje forskningsfase ... 101
Vedlegg 5-Transkripsjonsnøkkel ... 102
Vedlegg 6-Råtranskripsjoner ... 103

1.0 Innledning

1.1 Formell bakgrunn

Læreplanen fra 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2019a) og endringen i Opplæringslovens forskrift kapittel 3 (Opplæringsloven, 2021) om vurdering i grunnskolen er viktige deler av bakteppet for arbeidet med denne avhandlingen: Læreplanen løfter fram tre tverrfaglige emner som skal gjennomsyre alle skolens fag. Demokrati og medborgerskap er et av disse (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Det å kunne kommunisere, lytte til andre og diskutere på faglig grunnlag er en viktig kompetanse i et demokratisk samfunn og en viktig del av allmenndannelsen. På et generelt grunnlag er det derfor viktig å fokusere på kommunikasjon i alle skolens fag. Læreplanen definerer i avsnittet «Om faget» seks kjerneelementer i matematikkfaget. Et av disse er «Representasjon og kommunikasjon». Kjerneelementene står sterkt i læreplanen. For eksempel sier Utdanningsdirektoratet om vurdering at kompetansemålene fortsatt er grunnlaget for vurdering i fag, men at disse skal forstås i lys av teksten om faget i læreplanen. I kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» ligger det blant annet at kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer (Utdanningsdirektoratet, 2019a, 2021a). Kommunikasjon i matematikkfaget har ifølge LK 20 altså en selvstendig verdi, og myndighetene gir oss faktisk også i oppdrag å vurdere elevenes matematiske kompetanse blant annet i lys av deres ferdigheter i matematisk kommunikasjon. Kommunikasjon (som kjerneelement) vektlegges altså både i et generelt perspektiv knyttet til det tverrfaglige emnet «Demokrati og medborgerskap», og i et spesielt perspektiv som sentral del av matematikkfaget. Endringen i vurderingsforskriften (Opplæringsloven, 2021) som trådte i kraft 01.08.2021 fordrer en vurderingspraksis som i sterk grad vektlegger elevenes læring og lærelyst. I forskriftens beskrivelse av selve formålet med vurderingen, § 3-3.Vurdering i fag, heter det at «Formålet med vurdering i fag er å fremje læring og bidra til lærelyst undervegs, og å gi informasjon om kompetanse undervegs og ved avslutninga av opplæringa i faget» (2021). For å oppfylle kravene både i ny vurderingsforskrift (bidra til at vurderingssituasjonene skal fremme læring og lærelyst) og i LK 20 (fokusere på kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» og å gi det tverrfaglige emnet «Demokrati og medborgerskap» sin rettmessige plass i undervisningen) har det vokst fram et behov for å gjøre endringer i egen vurderingspraksis. Dette kan sammenfattes i disse tre punktene:

- Arrangere vurderingssituasjoner som bidrar til læring og lærelyst.
- Jobbe systematisk med kvaliteten på den matematiske kommunikasjonen.
- Gi elevene mulighet til å bruke kommunikasjonsferdighetene sine i vurderingssituasjoner.

1.2 Personlig bakgrunn og valg av tema

Jeg har jobbet som matematikklærer i 14 år, og har gradvis fått økende interesse for å jobbe med matematisk kommunikasjon. Jeg har latt meg inspirere av blant andre Svein Anders Heggem (Lærer og ansatt ved Matematikksenteret). På Novemberkonferansen i Trondheim (2014) deltok jeg på et kurs der han modellerte arbeidsmåten Individuell-Gruppe-Plenum (IGP), en måte å organisere kommunikasjonen i klasserommet på som både gjør det trygt å delta og som legger til rette for gode matematiske samtaler. Heggem hadde senere en artikkel i Tangenten som var basert på hans bidrag på konferansen. Han beskriver godt min egen tilnærming til det å bruke kommunikasjon i undervisningen (Heggem, 2015): «Jeg bruker mye tid på å la elevene komme med sine ulike måter å tenke og løse problemer på og å la dem utveksle regne- og løsningsstrategier med medelever. Jeg lærer mye av elevenes ulike måter å tenke på, og elevene lærer forhåpentligvis også en del, først og fremst av hverandre» (s. 3). En annen inspirasjon har vært Professor Peter Liljedahl, som på Novemberkonferansen i 2019 deltok med foredraget «Building Thinking Classrooms» (Liljedahl, 2019) . Liljedahls arbeider omhandler didaktiske og organisatoriske grep for å skape klasserom med høy grad av tenkning, kommunikasjon og deltakelse hos elever gjennom arbeid blant annet med problemløsningsoppgaver. Kommunen der jeg arbeider har nylig avsluttet et flerårig prosjekt med satsing på matematikkfaget. Sentralt i satsingen har stått det å jobbe med lærerstyrte diskusjoner basert på Kjersti Wæge sin artikkel om samtaletrekk som er gunstige i matematiske diskusjoner (Wæge, 2015). Via Lærerspesialistutdanningen ved UiA (2019-2021) fikk jeg ytterligere kjennskap til didaktisk teori om matematisk kommunikasjon, og dette vekket interessen min ytterligere for å jobbe videre med dette. Erna Yackel og Paul Cobb var noen av forskerne jeg fant særlig interessante. Deres artikkel om sosiomatematiske normer, argumentasjon og matematisk autonomi ble et sentralt utgangspunkt sentral for mitt arbeid med kommunikasjonen i klassen (Yackel & Cobb, 1996). I matematikk-klasserommet mitt har muntlig kommunikasjon med og mellom elevene vært en viktig del av undervisningen i mange år. Inntil nylig har jeg imidlertid primært betraktet kommunikasjonen som et virkemiddel for å utvikle elevenes matematiske kompetanse, ikke som en selvstendig del av den. Gjennom ny læreplan og erkjennelsen jeg etter hvert utviklet om kommunikasjon som faktisk del av den matematiske kompetansen, vokste det også frem et behov for å knytte kommunikasjon tettere sammen med min vurderingspraksis.

Egen erfaring tilsier at mange elever er stressa og nervøse i vurderingssituasjoner. Dette er ikke nødvendigvis positivt for lærelysten. Når det å fremme læring og lærelyst i vurderingsforskriften sidestilles med å skaffe informasjon om elevenes kompetanse i faget, krever det endringer i egen vurderingspraksis. På bakgrunn av behovet for å skape vurderingssituasjoner som kunne gi grobunn for læring og lærelyst, bestemte jeg meg for å teste ut en modell der elevene i vurderingssituasjoner fikk anledning til å kommunisere i grupper på deler av prøven og hvor de også hadde tilgang på veiledning fra lærer. Basert på erkjennelsen av kommunikasjonens betydning for læring, kommunikasjon som selvstendig del av den matematiske kompetansen og min kunnskap om teori knyttet til hensiktsmessig matematisk kommunikasjon, ønsket jeg å jobbe for å forbedre kvaliteten på kommunikasjonen. Ikke bare i situasjoner der jeg som lærer leder eller deltar i samtalene, men også når elevene snakker med hverandre.

1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål

Høsten 2021 startet jeg et utviklingsarbeid hvor jeg systematisk kurset elevene i prinsipper for hensiktsmessig matematisk kommunikasjon og sosiomatematiske normer. Jeg undersøkte parallelt i hvilken grad de implementerte kommunikasjonsprinsprinsippene når de samarbeidet og hvordan de sosiomatematiske normene kom til syne i kommunikasjonen. Over en periode på åtte uker implementerte og konkretiserte jeg gradvis fire konkrete tips til kommunikasjon og to sosiomatematiske normer. I samme periode gjennomførte elevene tre skriftlige prøver, der de innledningsvis fikk anledning til å diskutere oppgavene med hverandre. Deretter jobbet de med individuelle løsningsforslag. Elevenes kommunikasjon ble blant annet dokumentert gjennom lydopptak. Målet med utviklingsarbeidet var å jobbe systematisk med matematisk kommunikasjon fordi det er en del av det elevene skal lære i faget og fordi hensiktsmessig kommunikasjon kan bidra til læring av det rent matematikkfaglige. Det var dessuten viktig å forsøke å sikre best mulig kvalitet på de matematiske samtalene som foregikk i de nye vurderingssituasjonene. Jeg var spesielt interessert i å få kjennskap til hvilke former for diskurs som gjorde seg gjeldene, hva som karakteriserte diskursen og hvilke sosiomatematiske normer som kunne identifiseres. Arbeidet ble organisert som aksjonsforskning, og omfattet fem ulike faser der jeg vekslet mellom å undersøke og å implementere. For både å kunne undersøke prosessen knyttet til selve implementeringen og å beskrive resultatet av den, stile jeg meg følgende todelte forskningsspørsmål:

-Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?
-Hvordan kan slike endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?

Fokuset for forskningen min var altså både å påvirke og å undersøke elevenes kommunikasjon når de samarbeidet i vurderingssituasjoner. Forskningsprosessen og selve aksjonsforskningsdesignet ble en sentral del av arbeidet med implementeringen og viste seg å få stor betydning for de refleksjonene jeg gjorde meg. Jeg vurderte det derfor som både riktig og relevant å la første del av forskningsspørsmålet gjenspeile dette. Andre del av forskningsspørsmålet gjenspeiler intensjonen om å beskrive hvordan elevenes kommunikasjon, hovedsakelig knyttet til kommunikasjon ved samarbeid i vurderingssituasjoner, utviklet seg gjennom den perioden aksjonsforskningen foregikk. Ved å studere denne avhandlingen kan leseren fordype seg i besvarelsen av aktuelle forskningsspørsmål.

1.4 Strukturering av studien

De videre kapitlene er organisert på følgende måte: Kapittel 2 tar for seg studiens teoretiske forankring, mens de metodiske beskrivelsene presenteres i kapittel 3. Studien er en aksjonsstudie innenfor det transformative paradigmet, og i kapittel 4 redegjøres det i detalj for det gjennomførte utviklingsarbeidet. Ved plassering av kapitlene 3 og 4 ble det også vurdert å plassere beskrivelsene av utviklingsarbeidet før metodekapittelet, med intensjon om at metoden skulle kunne leses med informasjonen om hva utviklingsarbeidet innebar friskt i minne. Grunnet studiens aksjonsforskningsdesign tjener utviklingsarbeidet samtidig som del av empirien. Jeg konkluderte derfor at den mest logiske plasseringen av beskrivelsen av utviklingsarbeidet var i kapittel 4, rett før den øvrige empirien i kapittel 5. I dette kapittelet befinner analyseresultatene seg. Analysen omfatter både refleksjoner omkring utviklingsarbeidet og analyse av øvrige funn. Diskusjon og konklusjon av samlede funn finnes henholdsvis i kapitlene 6 og 7.

2.0 Teoretisk forankring

Læreplanen er styrende for hele skolens virksomhet det var derfor naturlig å innlede teorikapottelet med å utdype relevant innhold fra læreplanen. For å plassere studien min i det matematikkdidaktiske landskapet gjør jeg deretter rede for aktuelle læringsteorier og presenterer eget læringssyn. Kompetansebegrepet er sentralt for læreplanen generelt og i matematikkfaget spesifiseres kompetansebegrepet ytterligere. Derfor drøfter jeg også på generelt grunnlag kompetansebegrepet, før jeg spesifiserer kompetanse med henblikk på matematisk kompetanse og på matematisk kommunikasjonskompetanse. Siden prosjektet er knyttet til vurderingssituasjoner følger så en drøfting av vurderingsbegrepet med temaer som formelle krav, ulike vurderingsformer og forskning knyttet til vurdering. Etter dette presenterer jeg en egen figur som beskriver sammenhengen mellom de allerede berørte temaene i teoridelen og det videre teoritilfanget. På bakgrunn av studiens orientering mot kommunikasjonsprinsipper følger så teori knyttet til normer, lærers kommunikative tilnærming og teori som beskriver både hensiktsmessig og lite hensiktsmessig kommunikasjon.

2.1 Relevante prinsipper i LK20

I læreplanen i matematikk har de mest sentrale elementene (kjerneelementene) et preg som skiller seg fra det som ble vektlagt i tidligere læreplaner. De seks kjerneelementene i matematikk forteller hva som er det viktigste å lære i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019a) :

-Utforsking og problemløsing

-Modellering og anvendelser

-Resonnering og argumentasjon

-Representasjon og kommunikasjon

-Abstraksjon og generalisering

-Matematiske kunnskapsområder

Fem av kjerneelementene fokuserer på matematiske prosesser, mens kun det sjette omhandler matematiske produkter. De fleste kjerneelementene er utledet fra verbs form; man skal altså *gjøre* matematikk. I faget skal det i mindre grad handle om rette eller gale svar og regnetekniske ferdigheter, men om veien til svarene, hvilke strategier man velger, hvilke resonnementer man bruker, hvorfor de leder til målet, og sist, men ikke minst hvordan disse sammenhengene kommuniseres. «Representasjon og kommunikasjon» er et av kjerneelementene som er sentralt for denne avhandlingen. Jeg velger derfor å sitere i sin helhet hva læreplanens generelle del sier om dette:

> Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

Matematisk kommunikasjon har altså, gjennom å bli definert som et kjerneelement i gjeldende læreplan fått en svært sentral plass innenfor den kompetansen myndighetene definerer at elevene skal oppnå innenfor faget. Resonnering og argumentasjon er nært knyttet til representasjon og kommunikasjon. Dette blir tydelig når man sammenfatter det læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019a) beskriver at elevene gjør når de behersker disse to kjerneelementene, slik tabell 1 viser:

Kjerneelementer:	Elevene:
Representasjon og kommunikasjon	-Uttrykker matematiske begreper -Bruker matematisk språk når de diskuterer -Bruker ulike representasjoner
Resonnering og argumentasjon	-Utformer egne resonnementer -Forstår medelevers resonnement -Begrunner egne fremgangsmåter

Tabell 1: Elevenes ferdigheter innenfor de to kjerneelementene som er sentrale for studien.

Både representasjon og kommunikasjon og resonnering og argumentasjon er sentrale kjerneelementer for dette prosjektet: Tiltakene som ble satt inn var ment å skulle bidra til hensiktsmessig kommunikasjon elevene imellom. Hensiktsmessig kommunikasjon omfatter blant annet å begrunne egne resonnementer slik at medelever forstår resonnementene. Slik berører prosjektet begge de nevnte kjerneelementene.

2.2 Overordnet læringssyn

Oppgaven er basert på en sosialkonstruktivistisk tilnærming slik den beskrives av Cobb og Yackel (Cobb & Yackel, 1996). Avsnittet nedenfor beskriver hva denne tilnærmingen innebærer:

2.2.1 Den sosialkonstruktivistiske tilnærming og «Det framvoksende perspektiv»

Ifølge Skott m.fl. (2018) fokuserer Cobb og Yackels` sosialkonstruktivistiske tilnærming på hvordan de teoretiske hovedretningene konstruktivisme og sosiokulturell læringsteori på hver sin måte kaster lys over situasjonen, og slik utfyller hverandre. Cobb og Yackel vektlegger perspektiv-begrepet og trekker paralleller til at man i naturen kan få ulike perspektiver på landskapet ved å klatre opp på to ulike høyder i terrenget. De hevder at de to læringsperspektivene kan brukes til å undersøke ulike deler av elevenes læring. Cobb startet sin karriere som radikal konstruktivist og var opptatt av å observere enkeltelever eller små elevgrupper gjennom læringseksperimenter. Etter hvert erkjente han at i vanlige klasserom er det sosiale mye mer komplekst enn i situasjonene han hadde konsentrert seg om i sin forskning. Han forstod derfor at hans opprinnelige radikalkonstruktivistiske forståelse av læring hadde sine begrensninger (2018). Cobb og Yackel (1996, s. 177), redegjør nærmere for kompleksiteten i et klasserom i konteksten til en aksjonsstudie, og presenterer denne modellen for å kaste lys over denne kompleksiteten (egen oversettelse):

Det sosiale perspektiv	Det psykologiske perspektiv
Sosiale normer i klasserommet	Forestillinger om egen og andres rolle i klasserommet og om den generelle karakteren til skolematematikken.
Sosiomatematiske normer	Forestillinger om og verdier knyttet til matematikk og matematisk aktivitet.
Klasserommets matematiske praksiser	Matematiske begreper og aktiviteter.

Tabell 2: Cobb og Yackels` (1996) modell for analyse av individuelle og kollektive aktiviteter på klasseromsnivå

Modellen i tabell 2 kan brukes for å analysere læringen som finner sted i et klasserom, sett i lys av både et sosialt og et psykologisk perspektiv. Cobb og Yackel kaller denne tilnærmingen for «The emergent approach», som kan oversettes til «Det framvoksende perspektiv (1996). Cobb og Yackels modell er sentral for denne studien. Den baserer seg altså på et konstruktivistisk grunnsyn og tar samtidig høyde for hvordan sosiale normer, sosiomatematiske normer og klasserommets matematiske praksiser påvirker den enkelte elevs læring. I avsnitt 2.5 vil jeg belyse forskning som viser nærmere hvordan denne påvirkningen skjer. Vinklingen er valgt fordi den stemmer godt overens med den måten jeg selv betrakter læring på, og fordi den synliggjør flere av de elementene denne oppgaven dreier seg om.

2.3 Kompetansebegrepet

I dette avsnittet gjøres det rede for det generelle kompetansebegrepet. Deretter belyses matematisk kompetanse (matematisk) kommunikasjonskompetanse. Dette for å aktualisere et prosjektets fokus på kommunikasjon i matematikkfaget. Kompetansebegrepet står sentralt med tanke på vurdering, og dermed også med deler av mitt forskningsspørsmål.

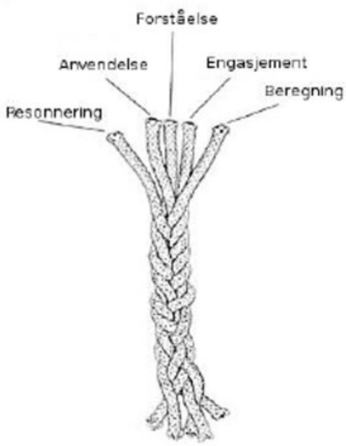
Kompetansebehovsutvalget, som ble oppnevnt i 2017 for å gi en faglig vurdering av Norges kompetansebehov, definerer kompetanse som et samlebegrep på kunnskap, forståelse, ferdigheter, egenskaper, holdninger og verdier (Kunnskapsdepartementet, 2018). Figuren nedenfor illustrerer dette:

Figur 1: Kompetansebehovsutvalgets modell for hva kompetanse innebærer (Kunnskapsdepartementet, 2018)

Fagfornyelsen (LK 20) bygger blant annet på Kompetansebehovsutvalgets rapport, og i læreplanens definisjon av kompetansebegrepet er det lett å kjenne igjen Kompetansebehovsutvalgets definisjon. I LK 20 defineres kompetanse nemlig på følgende måte i overordnet del: «Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Å ha en grunnleggende forståelse for det generelle kompetansebegrepet er nødvendig for å kunne forholde seg til det mer spesifikke begrepet «Matematisk kompetanse», som belyses i neste avsnitt.

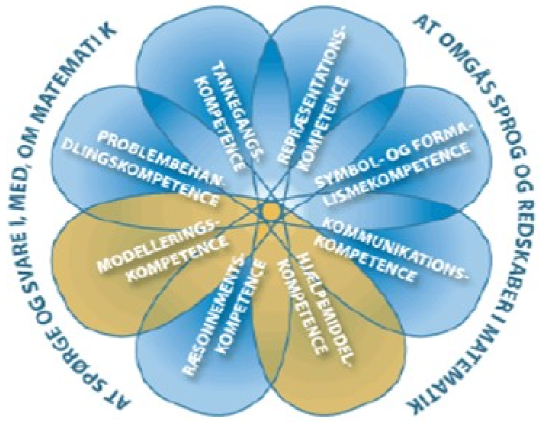
2.3.1 Matematisk kompetanse

Matematikklærere skal vurdere elevenes matematiske kompetanse. Å vite hva matematisk kompetanse innebærer er derfor sentralt i all vurderingsvirksomhet. Det er likeledes viktig å belyse i forhold til forskningsspørsmålene mine, som omhandler situasjoner der vurdering foregår. Det er derfor nødvendig å se nærmere på hvordan matematisk kompetanse defineres. Rapporten fra «Adding it up», et amerikansk prosjekt der man forsket på barns læring av matematikk belyser dette (Kilpatrick, Swafford, & Bradford, 2001). Her presenteres en modell der matematisk kompetanse illustreres som et tau bestående av fem enkelttråder (2001, s. 5), som vist i figur 2. De fem trådene er sammenvevd og gjensidig avhengige av hverandre. Er en av trådene svak eller manglende, blir den helhetlige matematiske kompetansen mangelfull. De fem delkompetansene bør derfor utvikles noenlunde parallelt, for å gjøre den matematiske kompetansen så robust som mulig.



Figur 2: De fem matematiske delkompetansene illustrert av Kilpatrick m.fl. (2001).

Kilpatrick m.fl. (2001) sin modell av matematisk kompetanse består av delkompetansene resonnering, anvendelse, forståelse, engasjement og beregning. Forfatterne definerer altså ikke kommunikasjon som en selvstendig delkompetanse, men slik jeg ser det kan kommunikasjon betraktes som en viktig bestanddel i to av de fem delkompetansene: Resonnering omfatter blant annet refleksjon, forklaring og begrunnelse. Anvendelse knyttes til det å formulere, og representere matematiske problemer. Ulike former for matematisk kommunikasjon er derfor viktige komponenter i begge disse delkompetansene, og dermed av betydning for den matematiske kompetansen som helhet. Det danske Undervisningsministeriet utarbeidet i 2002 temaheftet «Kompetencer og matematiklæring» (Niss & Jensen, 2002). Her deles matematisk kompetanse inn i åtte delkompetanser, slik figuren nedenfor viser.



Figur 3: De åtte matematiske delkompetansene illustrert av Niss og Jensen (2002)

Som figur 3 viser, løftes kommunikasjonskompetanse av Niss og Jensen (2002) frem som en selvstendig delkompetanse (s. 45), i motsetning til hva som var tilfelle hos Kilpatrick m.fl. (2001).

2.3.2 Kommunikasjonskompetanse

I motsetning til hos Kilpatrick m. fl. 2001), trekkes altså kommunikasjonskompetanse frem som en egen delkompetanse i heftet «Kompetencer og matematiklæring» (2002). Kommunikasjons-kompetansen defineres her som (oversatt fra dansk): «Kommunikasjonskompetanse – å kunne kommunisere i, med og om matematikk» (2002, s. 60). Videre presiseres det at kompetansen dels består i å kunne sette seg inn i og tolke andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn og «tekster». Kommunikasjonskompetansen er i tillegg også å kunne uttrykke seg på ulike nivåer av teoretisk eller teknisk presisjon om matematikkholdige forhold. Dette kan skje både skriftlig, muntlig og visuelt og være rettet mot ulike typer mottakere (2002, s.60). Forfatterne presiserer at kommunikasjonskompetanse har nær tilknytning til representasjonskompetanse (å kunne håndtere forskjellige representasjoner av matematiske sammenhenger) fordi all skriftlig, muntlig eller visuell matematisk kommunikasjon benytter representasjonsformer. Kommunikasjons-kompetanse er ifølge Niss og Jensen (2002) nært sammenbundet med symbol- og formalismekompetanse (å kunne håndtere matematisk symbolspråk og formalisme), fordi matematisk kommunikasjon også benytter matematiske symboler og termer. Kommunikasjonskompetanse består ifølge forfatterne i å kunne sette seg inn i og tolke andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn og det å kunne uttrykke seg selv på forskjellige måter om matematikk; skriftlig, muntlig eller visuelt (2002).

Ved å se den amerikanske forskningsrapporten og det danske temaheftet i sammenheng med kjerneelementene i den norske læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019a) kommer det tydelig frem at kommunikasjon både er et viktig redskap for å lære matematikk, men samtidig også et mål i seg selv. Dette støttes av Skott m.fl. (2018), som omtaler dette som en «dobbelthet» når man snakker om kommunikasjon og resonnement innenfor matematikk- undervisning. De skriver (oversatt fra dansk): «På den ene siden er de to prosessene måter å lære et matematisk innhold på, fordi man vil kunne forstå faglige begreper og metoder ved å lytte og forklare og ved å utvikle sine matematiske argumenter. På den andre siden er matematisk kommunikasjon og resonnement i seg selv noe som skal læres (2018, s. 242). At kommunikasjon betraktes som en så viktig del av den matematikkfaglige kompetansen, og altså har betydning som både som mål og middel for matematikkundervisning generelt, aktualiserer forskningsspørsmålene i dette prosjektet.

2.4 Vurdering

Siden forskningen i dette prosjektet er knyttet opp mot elevenes matematiske kommunikasjon ved utprøving av en ny type vurderingssituasjon, er det nyttig også å belyse teori som beskriver vurdering. I dette avsnittet utdyper jeg de aktuelle endringene i vurderingsforskriften og redegjør for de viktigste begrepene knyttet til vurdering i skolen. Jeg viser også mer spesifikt til hva forskning sier om den formative vurderingen og presenterer elementer som skal til for å lykkes med denne.

2.4.1 Vurderingsforskriften stiller formaliserte krav til vurdering for læring

Som nevnt i kapittel 1.1 fikk ble det i 2021 gjort endringer i vurderingsforskriften. Kravene som er av betydning for prosjektet presenteres her. Forskriften skiller mellom undervegsvurdering og sluttvurdering: «All vurdering som skjer før avslutningen av opplæringen, er underveisvurdering. Underveisvurdering i fag skal være en integrert del av opplæringen, og skal brukes til å fremme læring, tilpasse opplæringen og øke kompetansen i fag. Underveisvurderingen kan være både muntlig og skriftlig». (Utdanningsdirektoratet, 2021a). Det er teori om undervegsvurdering som er interessant å se nærmere på for dette prosjektets del, siden det finner sted midt i ungdomsskoleløpet. Forskriften fastslår at det i all undervegsvurdering skal legges til rette for både læring og lærelyst. Den sier følgende om underveisvurdering: «Det betyr ikke at all vurdering må bidra til lærelyst, men det understrekes at vurderingspraksisen har betydning for elever og lærlingers lærelyst og selvfølelse. (Opplæringsloven, 2021). Utdanningsdirektoratet sier videre om vurdering at «Vurdering har stor innvirkning på elevenes og lærlingenes læring. En god vurderingspraksis motiverer og har læring som mål (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Å legge til rette for vurderingssituasjoner som motiverer og som har læring som mål, er altså noe lærere er pålagt å gjøre. Dette sammenfaller godt med denne studien, fordi noe av intensjonen med prosjektet var å forsøke en ny måte å organisere vurderingssituasjoner på.

2.4.2 Summativ og formativ vurdering

To begreper som må sees nærmere på når det gjelder undervegsvurdering, er begrepene summativ og formativ vurdering. Ifølge Engh m.fl. (Engh, Dobson, & Høihilder, 2007) peker summativ vurdering bakover til den læringen som allerede har skjedd, mens formativ vurdering peker framover mot hva som skal gjøres for å nå læringsmålene. Sluttvurdering må ifølge samme kilde sies å være den mest rendyrkede formen for summativ vurdering, mens undervegsvurderingen hovedsakelig innehar elementer fra den formative varianten. Begrepet underveisvurdering betyr opprinnelig det samme som formativ vurdering eller prosessvurdering, og mange lærere vil sidestille begrepene. Forfatterne gir følgende karakteristikk av formativ vurdering: «Den formative vurderinga har til hensikt å hjelpe eleven til innsikt i sin måte å løse oppgaven på, samtidig som den skal hjelpe eleven til å bli bevisst sine læringsstrategier. Til enhver tid er det et poeng å vite hva man bør gjøre videre for at resultatet skal bli bra (2007, s. 28).

Engh m. fl. (2007) er kritisk til praksisen i skolen der individuelle, skriftlige prøver dominerer. De stiller spørsmål ved om individuelle, skriftlige prøver er et effektivt virkemiddel for å realisere målet om en elevvurdering som fremmer læring og utvikling. De sier blant annet: «I England sier man at en gris ikke blir feitere om den veies for ofte. Overfører man dette til prøver, betyr det at elevene ikke lærer mer om de blir utsatt for mange prøver. Også prøver kan anvendes i den hensikt at de skal bidra til læring, altså slik at prøveformen i seg selv fører til læring, men det betyr at læreren må ha en bevissthet om at hensikten med prøver er å bidra til læring, ikke bare til å måle den læringa som har skjedd» (2007, s. 119). Engh m.fl. peker altså allerede i 2007 på det som vurderingsforskriften av 2021 sier, nemlig at prøvene bør organiseres slik at de kan bidra til læring. Det er verdt å merke seg Engh m. fl. (2007) sin kritikk av individuelle skriftlige prøver, men også deres oppfatning om at prøver også kan brukes slik at de gir læringsutbytte. Dette kan for eksempel peke mot en prøveform der elevene samarbeider og også kommuniserer ikke-skriftlig, slik dette prosjektet innebærer.

CERI/OECD (Centre for Educational Research and Innovation, 2008) utga i forbindelse med OECD-konferansen i Paris i 2008, «Learning in the 21st Century: Research, Innovation and Policy» en samlerapport med temaet «Vurdering for læring». Her gjennomgås en lang rekke forskningsresultater som omtaler fordelene ved formativ vurdering. CERI (2008) skriver at vurdering generelt sett er viktig for utdanningsprosessen, men at den vurderingen som fortsatt er mest synlig, er den summative. Videre sier CERI (2008) at formative vurderingsformer bidrar til livslang læring og er med på å øke elevenes måloppnåelse. Formativ vurdering har også vist å kunne bidra til metakognisjon gjennom å bygge elevenes ferdigheter innenfor det å «Lære å lære», fordi elevene involveres aktivt, de får trening i å vurdere seg selv, og i å utvikle sine læringsstrategier. Engh (Engh, 2011) belyser begrepet formativ vurdering gjennom et eksempel fra matematikkfaget: I matematikk er det ikke nødvendigvis viktigst å oppnå riktige svar på regnestykkene, men å vise at det ligger en fornuftig og logisk tankegang bak utregning og valgt framgangsmåte: «Vurderingen må da ta med denne forståelsen som et viktig kriterium, trene elevene opp til å bevisstgjøre seg framgangsmåtene som anvendes og redegjøre for sin tankegang, slik at dette kan formidles til læreren. Dermed kan læreren gripe fatt i det positive og veilede eleven videre mot målet» (2011, s.27). En slik bevisstgjøring av fremgangsmåter og trening på redegjørelse for egen tankegang kan knyttes til dette prosjektets fokus på kommunikasjon og sosiomatematiske normer. Det er liten tvil om at den formative vurderingen er viktig for læringsprosessen, men hva skal til for å lykkes med den? Ifølge Lauvås (Lauvås, 2018) foregår summativ vurdering i etterkant av et læringsløp og «går ut på å sette verdi på en prestasjon, et produkt eller en egenskap» «Karakterene hører til i den summative vurderingen», sier han videre. Den formative vurderingen foregår overalt, er uformell og er i liten grad underlagt reglement og retningslinjer. Lauvås (2018) omtaler den som en nødvendig del av all utdanning og utvikling, og argumenter sterkt for å skape rene formative og summative vurderingssoner, fordi kontrakten mellom vurderer og den som blir vurdert er så forskjellig innenfor de to vurderingsformene:

> I summativ vurdering skal den som blir vurdert, vise seg fra sin beste side og framstille seg selv så positivt som mulig. Det er vurdererens oppgave å finne fram til det mangelfulle og det dårlige, og komme fram til en mest mulig dekkende konklusjon. I den formative vurderingen er det ikke særlig lurt å vise fram godsiden og skjule resten. Det er den som blir vurdert som skal ha nytte av vurderingen, og oppgaven blir gjort vanskelig, kanskje til og med håpløs, om vurderingsobjektet forholder seg til vurderingen som om den skulle være summativ (s. 26).

Lauvås (2018) mener altså at den som blir vurdert skal være klar over om vurderingen er formativ eller summativ, og at skillene mellom disse må være tydelige: Skal den som vurderes våge å vise sårbarhet og svakheter som kan gi grunnlag for vurdering for læring, må det ikke være tvil om hva som er formålet med vurderingen. Ifølge Lauvås (2018) vil tvil om hvorvidt det foregår kun *ren* formativ vurdering redusere mulighetene for å lykkes med vurderingsarbeidet. Vurderingsforskriften (Opplæringsloven, 2021) angir fire prinsipper for god undervegsvurdering. §3-10 sier at elevene skal:

> -delta i vurderingen av eget arbeid og reflektere over egen læring og faglige utvikling»
> -forstå hva de skal lære og hva som blir forventet av dem
> -få vite hva de mestrer og
> -få råd om hvordan de kan arbeide videre for å øke kompetansen sin.

Arbeidet med dette prosjektet kan særlig knyttes til det første punktet. Elevene får i selve vurderingssituasjonen anledning til å diskutere løsninger med andre med noenlunde samme faglige forutsetninger. Samtidig settes det fokus på hensiktsmessige matematiske kommunikasjonsformer og bevissthet omkring sosiomatematiske normer, noe som kan bidra til refleksjon omkring læring og faglig utvikling. Den tidligere nevnte CERI-rapporten (2008) konkretiserer seks nøkkel-elementer som bør være på plass for å sikre en formativ vurderingspraksis av høy kvalitet (s. 6) (egen oversettelse):

> -Etablering av en klasseromskultur som oppmuntrer til samhandling og bruk av vurderingsverktøy.
> -Etablering av læringsmål og sporing av enkeltelevenes progresjon på vei mot disse målene.
> -Bruk av varierte undervisningsmetoder for å møte elevenes ulike behov.
> -Bruk av varierte metoder for å undersøke elevenes forståelse.
> -Tilbakemelding på elevenes prestasjoner og justering av metoder for å møte identifiserte behov.
> -Aktiv involvering av elevene i læringsprosessen.

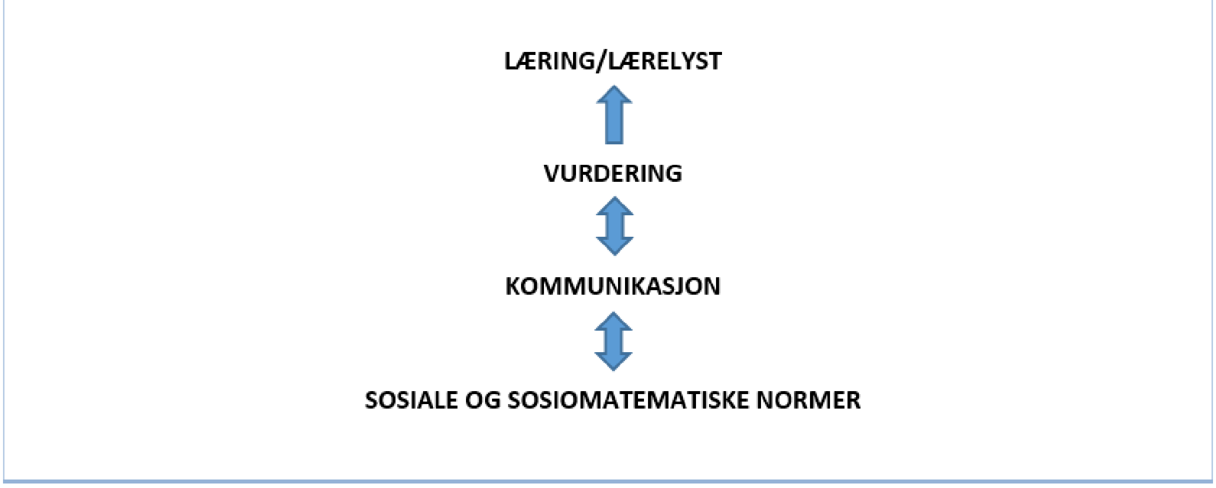
Dette prosjektet kan, slik jeg ser det, knyttes til de tre siste punktene på CERI`s (2008) liste. Å la elevene samarbeide er et tilskudd til vurderingsmetodene som allerede benyttes i klassen, og dermed en variasjon. Når vurderingssituasjonene organiseres på denne måten, får lærer rom til effektivt å veilede elevgruppene i den formative vurderingssituasjonen, noe som gir mulighet for direkte tilbakemeldinger til elevene mens de arbeider med oppgavene. Både gruppediskusjonene og veiledningsmulighetene vil etter mitt syn kunne bidra til at elevene blir mer aktivt involvert i egen læringsprosess.

2.4.3 Organisering av vurderingssituasjoner

Et spørsmål som reiser seg, er hvordan man rent praktisk kan organisere vurderingssituasjoner for å legge til rette for lærelyst og positiv selvfølelse. Da den nye forskriften trådte i kraft, ble jeg via egen arbeidsgiver informert om endringene i forskriften, og kommunens holdning var at en foretrukken måte å bidra til læring og lærelyst i vurderingssituasjonene på, var å tilby elevene veiledning undervegs. Jeg forstod at dette ville kreve en organisering som muliggjorde å veilede hele klassen i løpet av vurderingssituasjonen. En mulig måte å organisere dette på var å la elevene arbeide i grupper. Da jeg fikk kjennskap til ny vurderingsforskrift og forstod hva dette ville innebære av organisatoriske endringer, hadde jeg allerede planlagt utprøving av gruppesamarbeid i forbindelse med skriftlige prøver. Vurderingen som gjøres i dette prosjektet er formativ fordi elevene, som er midt ungdomsskoleløpet, er i en kontinuerlig utviklingsprosess. Formativ vurdering knyttes dessuten særlig til undervegsvurdering, mens summativ vurdering hovedsakelig knyttes sluttvurderingen som skal gjøres når elevene avslutter grunnskolen.

2.4.4 Læring, vurdering, kommunikasjon og normer

Før jeg presenterer resten av teorien har jeg behov for å bygge en bro mellom teorien jeg har presentert til nå, og det videre teoritilfanget. Jeg har så langt tatt for meg temaer som læring/lærelyst, kompetanse og vurdering. Videre skal jeg ta for meg temaene kommunikasjon og normer (sosiale og sosiomatematiske). Min oppfatning av sammenhengen mellom normer, kommunikasjon, vurdering og læring/lærelyst illustreres med denne egenproduserte figuren (figur 4):



Figur 4: Egen illustrasjon som viser sammenhengen mellom normer, kommunikasjon, vurdering og læring

Grunnlaget for god matematisk kommunikasjon ligger i normene som etableres i klasserommet: Sosiale normer som blant annet forventer at elevene deltar i kommunikasjonen og samtidig gir dem trygghet til å gjøre det, og sosiomatematiske normer som setter standarder for ønskede kvaliteter ved matematiske løsninger og innspill. Kommunikasjonen i klasserommet kan også tenkes å kunne befeste og forsterke klasserommets normer, illustrert ved dobbel pil. Den gjensidige sammenhengen mellom kommunikasjon og vurdering ligger i at kommunikasjon ikke bare er et middel som kan bidra til matematikklæring, men også skal være gjenstand for formativ vurdering som selvstendig del av den matematiske kompetansen. Formativ vurdering av kommunikasjonen vil dermed kunne forbedre denne. Kommunikasjon kan altså (som jeg vil utdype senere i teorikapitlet) ha betydning for både læring og lærelyst: God kommunikasjon kan bidra til læring, mens dårlig kommunikasjon kan hemme læring. Målet med figuren er altså å synliggjøre hvordan kjeden av normer, kommunikasjon og formativ vurdering kan bidra til læring og lærelyst, slik kravene i vurderingsforskriften forplikter oss til. Midt i dette bildet kan jeg plassere Cobb og Yackels (1996) «Framvoksende perspektiv» som viser sammenhengen mellom det sosiale perspektivet (sosiale og sosiomatematiske normer samt klasserommets matematiske praksiser) og det psykologiske (den enkelte elevs oppfatninger og opplevelser knyttet til dette). Cobb og Yackels fremvoksende perspektiv knytter altså sammen de sosiale og psykologiske aspektene når det kommer til hvordan læring skjer.

2.5 Sosiale normer, sosiomatematiske normer og matematisk autonomi

Yackel og Cobb (1996) sin artikkel om sosiomatematiske normer, argumentasjon og autonomi i matematikkfaget er sentral for studien. Dette fordi prosjektet innebar åpen dialog med elevene om sosiomatematiske normer, og fordi jeg i min veiledning av elevene i størst mulig grad forsøkte å kommunisere på en måte som var egnet til å bidra til matematisk autonomi. Artikkelen omhandler tolkning av matematisk aktivitet i klasserommet, og ser på hvordan elever utvikler matematisk tro og verdier og hvordan de blir intellektuelt autonome i matematikkfaget. Artikkelen skiller mellom de sosiale normene i et klasserom og de sosiomatematiske normene. Sosiale normer er ikke like tett knyttet til det matematikkfaglige innholdet som de sosiomatematiske. Eksempler på sosiale normer kan være «Jeg skal delta i timen og svare på spørsmålene lærer har» og «jeg skal forklare løsningene mine og hvordan jeg tenker». De tre sosiomatematiske normene som Yackel og Cobb (1996) tar for seg, er den normative forståelsen av hva som er matematisk forskjellig, matematisk sofistikert og matematisk effektivt. Artikkelen er basert på studier av den matematiske diskursen i amerikanske 2. klasser der det ble undervist etter en inquiry (utspørrings)-tradisjon. Lærerne etablerte de tre sosiomatematiske normene gjennom egen respons på elevenes innspill. De var relativt tydelige på hva som ble ansett som forskjellige løsninger, idet responsen «Different?» ofte ble brukt når elever kom opp med løsninger som ble ansett som for lite forskjellige fra det som allerede var sagt. Lærerne var mye mindre tydelig på hva de anså som matematisk effektive og matematisk sofistikerte løsninger, ifølge dette sitatet: «In the classrooms studied, developing a taken-as-shared understanding of what counts an a sophisticated solution or an efficient solution was less explicit than an understanding of what counts as a different solution» (s. 464). Yackel og Cobb (1996) fanget likevel opp at elevene over tid endret sine responser ettersom lærerne tydelig verdsatte enkelte elevresponser over andre, slik at elevresponsene etter hvert endret karakter i retning av økt sofistikerthet og økt effektivitet. Yackel og Cobb (1996) fant også at ved å innføre sosiomatematiske normer vil elevene kunne utvikle seg til å bli matematisk autonome. Slike elever vil på egenhånd kunne vurdere gyldigheten til egne løsninger, hva som teller som en akseptert matematisk forklaring, om det finnes flere løsninger på et matematisk problem, og om det finnes mer effektive eller sofistikerte løsninger enn dem som foreligger. Matematisk autonomi kan altså utvikles gjennom lærers respons på elevenes innspill i den matematiske diskursen.

2.6. Lærers kommunikative tilnærming

Lærere har ulike tilnærminger til det å kommunisere med elevene på. Mortimer og Scott (Mortimer & Scott, 2003) har beskrevet dette, og omtaler to dimensjoner av kommunikasjon (figur 5). Den dialogisk-autoritative dimensjonen spenner fra den dialogiske formen for kommunikasjon der det er rom for flere synspunkter og ideer, og til den autoritative kommunikasjonsformen som hovedsakelig retter oppmerksomhet mot bare ett synspunkt, og hvor det ikke foregår noen form for utforsking av ulike ideer. Den interaktiv-non-interaktive dimensjonen favner om Interaktiv kommunikasjon hvor andre mennesker tillates å delta og non-interaktiv kommunikasjon hvor andre ekskluderes fra deltakelse.

	INTERACTIVE	NON-INTERACTIVE
DIALOGIC	A Interactive/Dialogic	B Non-interactive/Dialogic
AUTHORITATIVE	C Interactive/Authoritative	D Non-interactive/Authoritative

Figur 5: Fire ulike tilnærminger til matematisk kommunikasjon (Mortimer og Scott, 2003, s. 35)

Ved å kombinere disse to dimensjonene fås fire mulige tilnærminger til kommunikasjon (Drageset, 2014): Den første tilnærmingen er både dialogisk og interaktiv, hvor flere synspunkter får oppmerksomhet og elevene tillates å delta aktivt. Et eksempel på non-interaktiv og dialogiske tilnærming, er når lærer presenterer ulike synspunkter og diskuterer disse uten å tillate elevene å delta aktivt i diskusjonen. I den interaktive og autoritative tilnærmingen, tillates elevene å delta, men bare et synspunkt vies oppmerksomhet. I den non-interaktive og autoritative tilnærmingen er bare lærers synspunkt gyldig og ingen andre tillates å delta. Mortimer og Scotts (2003) perspektiver er aktuelle fordi de senere vil bli brukt for å beskrive min egen kommunikative tilnærming i beskrivelsen av «objektet» som undersøkes i dette prosjektet, nærmere bestemt klassen der prosjektet foregår.

2.7 Kommunikasjon

Siden kommunikasjon står sentralt i studien er det naturlig å belyse kommunikasjonsteorien grundig. I dette avsnittet ser jeg derfor først på den generelle betydningen kommunikasjon har for god undervisning i matematikk. Deretter beskrives kommunikasjonsformer som kan hindre forståelse og læring og kommunikasjon som understøtter læring. Jeg presenterer så teori som gir anbefalinger i forhold til hvordan lærere kan styre plenumsdiskusjoner, hvordan de kan benytte seg av elevenes utsagn for å arbeide med matematikk og teori som peker på hvordan dette bør skje. Denne delen av teorien er relevant fordi noen av grepene teorien peker på som gunstige for plenumskommunikasjon kan være aktuelle å forsøke å overføre til kommunikasjon elevene imellom når de samarbeider.

2.7.1 Kommunikasjon og kjennetegn på god matematikkundervisning

I sin rapport «Sentrale kjennetegn på god matematikkundervisning skiller Nosrati og Wæge (Nosrati & Wæge, 2015) mellom instrumentell og relasjonell matematisk forståelse. En elev med instrumentell forståelse vet hva som må gjøres for å komme frem til riktig svar, men ikke hvorfor svaret er riktig. En elev med relasjonell forståelse derimot, har bygget opp en rekke begrepsmessige strukturer og kan se sammenhenger mellom begrepene. En elev med relasjonell forståelse vet både hvordan og hvorfor en oppgave kan løses på en bestemt måte, og en slik forståelse regnes som bedre og mer anvendelig enn den instrumentelle. I artikkelen trekkes det frem to faktorer ved matematikkundervisningen som fremmer den relasjonelle forståelsen, og den ene av dem er «Eksplisitt fokus på sammenhenger mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer», noe som kan innebære å «…la elevene arbeide med oppgaver hvor de må finne sammenhenger, diskutere den matematiske meningen bak prosedyrene, stille spørsmål om likheter og forskjeller mellom løsningsstrategier, diskutere hvordan matematiske problemer bygger på hverandre, arbeide med sammenhenger mellom matematiske ideer…» (s.5) Verbene i dette avsnittet viser med all tydelighet hvilken sterk rolle det å jobbe aktivt med kommunikasjon har innenfor det som oppfattes som god undervisning i matematikk.

2.7.2 Kommunikasjonsfeller

Når man skal beskrive god matematisk kommunikasjon, kan det også være nyttig å beskrive kommunikasjonsformer av den mindre fruktbare sorten. Mehan sin artikkel «What Time Is It, Denise» (Mehan, 1979) gjør nettopp dette. Mehan (1979) beskriver klasserom hvor kommunikasjonen er preget av såkalte «Known Information Questions», det vil si lukkede spørsmål som både lærer og de fleste i klassen allerede vet svaret på. Elevsvarene er som regel korte og entydige og bringer ingen ny eller nyttig informasjon inn i diskursen. Samtalene Mehan (1979) her beskriver, følger som regel et bestemt mønster hvor lærer Initierer ved å stille et spørsmål, elevene Responderer, hvorpå lærer så Evaluerer svaret. Hvis elevens svar er det lærer er ute etter, evaluerer lærer ofte med kommentarer som «Fint», «Bra!» eller «Helt riktig!». Om elevens svar ikke er tilfredsstillende, responderer lærer ofte ved hint og fremlokkinger som har som eneste mål å få eleven(e) til å svare korrekt eller på en spesifikk måte. Denne kommunikasjonsformen kaller Mehan (1979) «IRE-kommunikasjon. Denne formen for kommunikasjon vil man automatisk unngå i elevsamarbeid av den typen som her beskrives. Såkalt Traktkommunikasjon er en annen form for kommunikasjon som regnes som lite hensiktsmessig i den matematiske diskursen. Traktkommunikasjon kan medføre den såkalte «Topaze-effekten». Dette er beskrevet av Brousseau (Brousseau, 1997) og omhandler situasjoner der lærer i sin iver etter å hjelpe eleven til å komme frem til riktig svar på en oppgave stadig snevrer inn og forenkler det opprinnelig spørsmålet. Samtidig tømmes oppgaven og kommunikasjonen gradvis for matematisk innhold, og resultatet er at eleven lærer svært lite eller ingenting av oppgaven. Topaze-effekten stammer opprinnelig fra et skuespill av forfatteren Pagnol, hvor en lærer i sin iver etter å lære elevene om stumme endelser i franske ord, ender opp med å uttale ordene med stort fokus på de stumme endelsene, noe som resulterer i at elevene lærer å skrive ordene riktig, men ikke utvikler sin generelle forståelse omkring begrepet stumme endelser.

2.7.3 Refleksiv diskurs og refleksiv kommunikasjon

Cobb m.fl. (1997) undersøkte hvilken rolle klasseromsdiskurs kan spille for elevenes konseptuelle matematiske utvikling. Når den matematiske aktiviteten blir objektifisert og blir et eksplisitt tema for den matematiske konversasjonen, og når diskusjonen preges av gjentatte (metakognitive) skift som er med på å utvikle elevenes forståelse, har man ifølge Cobb m. fl (1997). en refleksiv diskurs. Ifølge Brendefur og Frykholm (Brendefur & Frykholm, 2000), som baserer seg på forskningen til Cobb m.fl. (1997), er refleksiv kommunikasjon basert på bidrag fra elever som deler side ideer, strategier og løsninger med hverandre og læreren. Intensjonen er å oppnå en dypere matematisk forståelse. Dette gjøres ved å sørge for muligheter til å reflektere over forhold innenfor matematiske temaer ved å fokusere på andre elevers og lærerens ideer, innsikt og strategier. Fokuset er å skape mening gjennom dialogbasert diskurs, ikke å overføre kunnskap. Teoriene er sentrale for studien fordi de beskriver en type diskurs som står sentralt i det klasserommet som ble studert, både i forkant av studien og i økende grad utover i prosjektet.

2.7.4 Samtaletrekk og samtalestartere

Chapin m.fl. (Chapin, O`Connor, & Anderson, 2013) fremhever betydningen av å etablere et trygt klasseromsmiljø med tydelige regler for respektfulle samtaler. For å bidra til slike lanserer de fem produktive «Talk moves», det vil si fem trekk ved gode matematiske klasseroms-samtaler. De fem trekkene omfatter først et trekk der lærer gjentar det en enkeltelev svarer. Deretter bes de andre elevene om å gjenta det som ble sagt med egne ord. Det tredje trekket er å be elevene angi om de er enige eller uenige i det som ble sagt og begrunne dette. Så spør lærer om andre har noe å tilføye. Det siste trekket er å bruke god tid og vente lenge nok til at elevene får tenkt seg godt om. Kazemi og Hintz (Kazemi & Hintz, 2019) har lagt til ytterligere to samtaletrekk til dem Chapin m.fl. (2013) opprinnelig beskrev. Disse er: «Snu og snakk: Snu og snakk med læringspartneren din» og «Endre: Har noen endret måten de tenkte på» og «Vil du endre måten du tenkte på?» (s. 34). Kazemi og Hintz (2019) sier videre at samtaletrekkene kan brukes både i samtaler ledet av lærer og i samtaler elevene imellom: «Det flotte med forfatternes (Chapin m.fl.) fem samtaletrekk er at de kan brukes til å lede både lærersamtaler og elevsamtaler … Mange av lærerne vi jobber med, viser og refererer til en plakat med samtaletrekk som fungerer som en ramme for elevinnspill» (s. 33). Dette viser aktualiteten i å jobbe aktivt med kommunikasjonen elevene imellom slik det er gjort i dette prosjektet. Wæges (2015) artikkel «Samtaletrekk-redskap i matematiske diskusjoner» har lenge stått sentralt i det matematikkdidaktiske arbeidet i kommunen der jeg arbeider. Artikkelens intensjon var å øke mengden samtaler med høy kvalitet, det vil si matematisk produktive samtaler, i klasserommet. Artikkelen fokuserer på «hvordan lærere kan bruke matematiske samtaler til å fremme elevers tenkning og læring i matematikk. Den beskriver redskaper som kan brukes for å implementere diskusjoner i matematikk og for i større grad å involvere elevers tenkning i undervisningen» (s. 22). Artikkelen beskriver sju samtaletrekk lærer kan benytte i diskusjoner i klasserommet. Her gjenkjennes samtaletrekkene de fem som opprinnelig ble beskrevet av Chapin m.fl. (2013) og de to samtaletrekkene (6-7) som stammer fra Kazemi og Hintz (2019). Her beskrives også i detalj hva lærer gjør på hvert steg når de sju samtaletrekkene benyttes. Kjennskapen til disse konkrete rådene står sentralt i prosjektet. I kapittel 4 beskriver jeg hvordan jeg implementerte noen av samtaletrekkene med røtter hos Chapin m.fl. (2013), Wæge (2015) og Kazemi og Hintz (2019) i klassen, med mål om at elevene selv skulle ta dem i bruk når de snakket seg imellom.

2.7.5 Fokuserende handlinger

Drageset (2014) beskriver hvordan lærere bruker elevenes kommentarer for å jobbe med matematikk. Han bygger blant annet på Mehan (1979), og advarer i sin artikkel mot IRE-kommunikasjon. Han berører også begrepet traktkommunikasjon gjennom å vise til Wood (Wood, 1998), som beskriver to alternativ; Funnelling (traktkommunikasjon) og Focusing (fokusering). Fokusering innebærer å skape situasjoner hvor elevene lærer gjennom deltakelse. Ifølge Wood (1998) skaper et høyt nivå av interaksjoner mellom lærer og elever muligheter for elevene til å reflektere omkring egen tenkning og andres begrunnelser. Drageset (2014) hevder at for å utvikle matematisk forståelse bør klasserommet karakteriseres av rike muligheter for elevene til å bidra i kommunikasjonen. Forfatteren bygger her blant annet på Stein m.fl. (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008) sine fem nøkkelpraksiser for å bruke elev-responser mer effektivt i diskusjoner, nemlig det å forutse elevenes respons, å overvåke responsene, å velge ut elever som får presentere sine løsninger, å la disse presentasjonene skje i en spesifikk rekkefølge, og å skape sammenheng mellom de ulike elevløsningene og matematiske nøkkel-ideer. Drageset (2014) hevder at «denne modellen kan flytte oppmerksomheten fra å lære matematisk innhold uavhengig av elevenes egne tanker og til hvordan elevens tenkning omkring matematisk innhold kan brukes for å skape refleksjon og læring» (2014, s. 285). Videre beskrives 13 måter lærere kan tak i elevers innspill på for å bruke disse for å jobbe med matematikk. Handlingene dels inn i tre hovedgrupper: Omdirigerende, progresjonsfremmende og fokuserende handlinger. Artikkelen er relevant for studien fordi den er med på å begrunne hva som bør vektlegges når man skal implementere hensiktsmessig kommunikasjon hos elevene. Selv om Drageset (2014) legger vekt på lærers håndtering av elevinnspill, kan noe av dette overføres til kommunikasjon i elevgrupper. Flere av de fokuserende handlingstypene han skisserer, samsvarer godt med de tidligere beskrevne samtaletrekkene til Chapin m.fl. (2013), Wæge (2015) og Kazemi og Hintz (2019). Handlingene som var aktuelle å implementere i dette prosjektet, var det å begrunne og det å etterspørre andre elevers vurdering. Begrunnelse innebærer at man spør seg «Hvordan kan vi være sikre på at det stemmer? Hvorfor passer metoden og hvorfor gir det riktig svar?». Å etterspørre andre elevers vurdering innebærer å stimulere elevene til å uttrykke enighet/uenighet og begrunne dette.

3.0 Metode

Dette kapittelet omtaler først studiens forskningsdesign, som er aksjonsforskning. Jeg belyser generelle fordeler ved å benytte aksjonsforskning i læreryrket og fordeler jeg spesielt kunne knytte til behovene jeg så i egen undervisning. Jeg presenterer deretter ulike modeller for aksjonsforskning, og diskuterer hvilken av dem jeg vurderer som best egnet for gjennomføringen av dette prosjektet. Når man gjennomfører aksjonsforskning, utgjør selve prosessen en del av empirien. Refleksjonene omkring valg av modell er tatt med fordi jeg betrakter dem som en viktig del av nettopp denne prosessen. Avsnittet fortsetter med en diskusjon av ulike modeller for aksjonsforskning. Deretter følger en oversiktsmessig beskrivelse av fasene i den gjennomførte aksjonsforskningen, basert på valgt modell. Den detaljerte beskrivelse av de konkrete fasene i aksjonsforskningen følger så i avsnitt 4.1. Øvrige temaer som berøres, er bakgrunnsinformasjon om klassen hvor forskningen fant sted og beskrivelse av utvalg av forskningsobjekter. Jeg beskriver deretter metodene som ble benyttet ved datainnsamling og drøfter studiens troverdighet. Forskningsetiske spørsmål blir også gjort rede for, før jeg til slutt beskriver strategi for dataanalyse.

3.1 Forskningsdesign: Å forske på egen praksis

Utgangspunktet for forskningen var at jeg stilte spørsmål ved egen praksis og hadde et ønske om å endre denne. Når dette er tilfelle kan man ifølge Ulvik m.fl. utføre aksjonsforskning (Ulvik, Riese, & Roness, 2016). Aksjonsforskning er ifølge Ulvik m.fl. (2016) nyttig fordi den gir anledning til å reflektere over egen praksis, og gjennom dette mulighet for å endre undervisningen over tid. Endringene man gjør evalueres for å se om de fører til reelle forbedringer som for eksempel om de fører til økt læring, eller at undervisningen i større grad oppfyller formelle krav. Spørsmålene jeg stilte ved egen praksis var blant annet knyttet til ny læreplan og nye forskriftskrav knyttet til vurdering. Disse nyhetene krevde organisatoriske endringer i vurderingsarbeidet og innføring av strategier for hensiktsmessig elevkommunikasjon. For å optimalisere og evaluere disse intervensjonene og samtidig ha et blikk for selve prosessen, var det hensiktsmessig å foreta en aksjonsstudie. Aksjonsforskning er en kvalitativ metode, og ifølge Bryman m.fl. (Clark, Foster, Sloan, & Bryman, 2021) har kvalitativ forskning som mål å skape dypere innsikt i bestemte temaer, og gjør dette gjennom blant annet å interessere seg for steder og sosiale aktører. Forskningen understreker ofte ord, bilder og objekter når det kommer til innsamling og analyse av data. Videre sier forfatterne at kvalitative forskere ofte tilstreber å se gjennom øynene til menneskene som blir studert, skaffe nøyaktige beskrivelser, understreke kontekst og å legge vekt på prosesser som foregår i sosialt liv. Dette passet godt med mitt ønske om å opparbeide kunnskap om og bidra til endringsprosesser i eget klasserom. Ifølge Bryman m.fl. (2021) prioriteres ofte fleksibilitet i kvalitative studier, og forskningen forsøker å begrunne konsepter og teori gjennom analyse av innsamlede data. Den kvalitative forskningens muligheter for fleksibilitet åpnet altså opp for å gjennomføre en aksjonsforskning, hvis vesen er knyttet til endring. Studien har ifølge Postholm og Jacobsen (Postholm & Jacobsen, 2019) en kombinasjon av induktiv og deduktiv tilnærming, hvor jeg som lærerforsker primært gikk ut i feltet med et åpent sinn med ønske om å beskrive det som skjedde når elevene samarbeidet. Jeg hadde altså ikke utarbeidet fastlagte hypoteser eller variabler som jeg ønsket å undersøke. Samtidig sier Postholm og Jacobsen (2019) at en lærer alltid vil ha antakelser om hvordan undervisningen vil forløpe, og at lærerforskeren derfor ofte er både induktiv og deduktiv. I henhold til beskrivelsen av utviklingsarbeidet (kapittel 4), har jeg gjennomført det Patton (Patton, 2015) og Mertens (Mertens, 2020) betegner som deltakende aksjonsforskning. Ifølge Mertens (2020) hører prosjektet hjemme innenfor det transformative paradigmet, i en undergruppe kalt transformativ deltakende aksjonsforskning. Forskerens rolle er å være en endringsagent som skaper sosial transformasjon. Ulvik m.fl. (2016) oppsummerer fordelene ved aksjonsforskning slik:

> Det som gjør aksjonsforskning særlig egnet for lærere, er at den forskende tilnærmingen er direkte koblet til deres hverdag, og at praksis og teori samspiller. Praksis kan gi en klarere forståelse for teori og teoretiske begrep, om empirisk forskning kan fungere som gode linser å betrakte praksis gjennom. Videre blir lærerens perspektiv utvidet i møte med andres, ikke minst elevenes. På den måten unngår læreren å bli værende i det de kan fra før og får gjennom en undersøkende tilnærming til egen praksis skapt et grunnlag for videre handling og utvikling til beste for elevene (2016, s. 33).

Forskningsobjektene i denne studien var egne elever. Dette var naturlig fordi det i første omgang var praksisen knyttet til undervisningen av nettopp disse elevene jeg ønsket å forbedre. Etiske implikasjoner knyttet til forskning på egne elever, behandler i avsnitt 3.6.

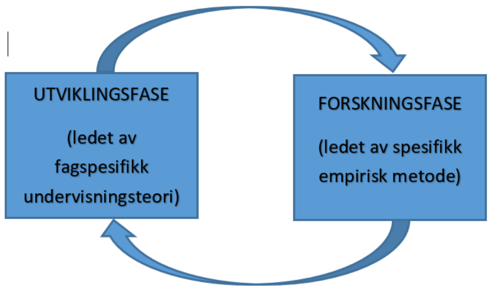
3.1.1 Aksjonsforskning -en generell modell

Aksjonsforskning eller aksjonslæring er ifølge Postholm og Jacobsen (2019) viktig for lærerens utvikling fordi læreren i sitt daglige virke skal ivareta mange hensyn og utøver sitt yrke i en kompleks virkelighet. I denne virkeligheten blir det stadig viktigere for læreren å innhente, bearbeide og anvende informasjon. Kort forklart handler aksjonsforskning som vitenskapelig metode om at man iverksetter og prøver ut tiltak, gjør disse til gjenstand for kontinuerlig analyse og refleksjon, og vurderer dette i lys av teorier fra forskningsfeltet. Vurderingene danner igjen utgangspunkt for ny undring, nye spørsmål, nye undersøkelser og nye tiltak, slik at læring kan foregå i en kontinuerlig prosess. Postholm og Jacobsen visualiserer dette slik gjennom aksjonslæringssirkelen (2019):

Figur 6: Aksjonslæringssirkelen som beskrevet av Postholm og Jacobsen (2019, s. 18)

3.1.2 Diskusjon av to modeller for aksjonsforskning innenfor matematikkdidaktikken

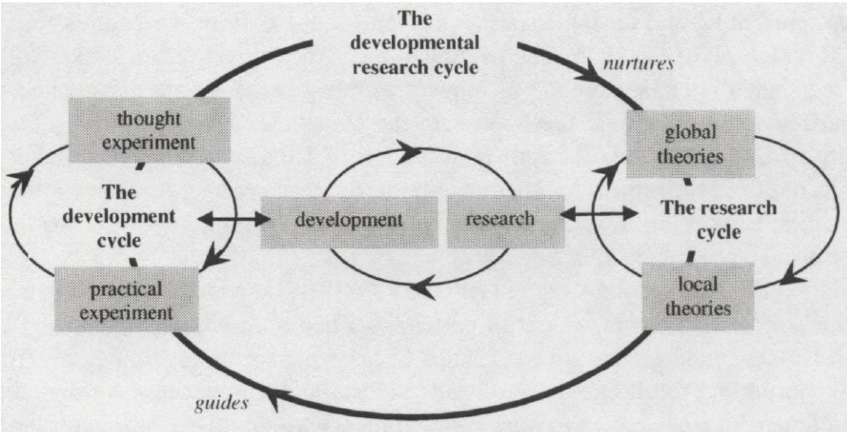
I forkant av prosjektet mitt undersøkte jeg ulike modeller for aksjonslæring knyttet til matematikkdidaktikk, nemlig Cobb og Yackel sin modell (1996) og Goodchilds modell omtalt hos Goodchild, Fuglestad og Jaworski (Goodchild et al., 2013). Jeg presenterer her begge modellene før jeg forklarer hvilken av dem jeg fant best egnet for å arbeide etter i mitt prosjekt. Cobb og Yackel (1996) sin modell for aksjonsstudier består av en forskningsfase og en utviklingsfase som står i et syklisk forhold til hverandre:



Figur 7: Cobb og Yackels modell, den såkalte «Development Research Cycle» (1996, s. 5)

Som beskrevet i teoridelens kapittel 2.2.1, erkjente Cobb etter hvert at de individuelle psykologiske konstruksjonene han betraktet for å beskrive elevers læring ikke kunne studeres isolert, men at det var nødvendig også å se på elevenes matematiske utvikling slik den fremstod i klasserommets sosiale kontekst. Denne typen analyser er sentrale i den høyre delen av modellen ovenfor, og det man finner her, virker ifølge Cobb og Yackel tilbake på figurens venstre del, utviklingsfasen. Denne fasen omfatter undervisningsendringene man gjør (1996).

Goodchild m.fl. omtaler aksjonsforskning (aksjonslæring) som et samarbeidende partnerskap mellom lærere og didaktikere med mål om å forbedre elevenes matematiske erfaringer gjennom utvikling av undervisning (2013). Forskning og utvikling foregår, som diagrammet under viser, som kontinuerlige og samtidige prosesser:



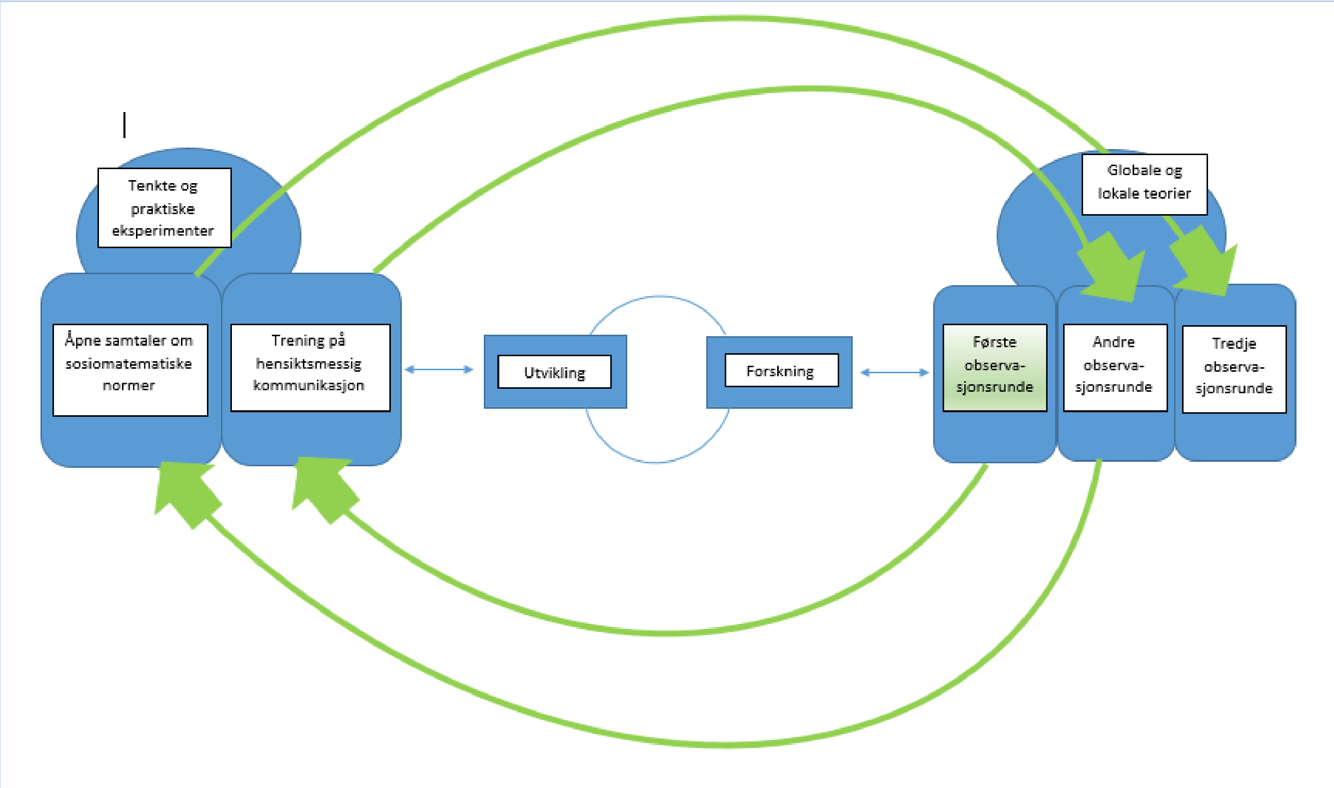
Figur 8: Goodchilds (2013) modell for aksjonsstudier

I den høyre syklusen betraktes effekten av tiltak man setter inn i forhold til både globale og lokale teorier. Det vil si at effekten av undervisningen blir vurdert både i forhold til didaktisk litteratur/teori og i forhold til kjennskapen man har til de aktuelle elevene. Det man finner vil så i sin tur påvirke de videre tiltakene (helt til venstre) man setter inn. Disse tiltakene veksler mellom å være ideer basert på det man observerer i forskningssyklusen og ulike praktiske eksperimenter basert på disse igjen.

Det er en tydelig sammenheng mellom modellene til Cobb og Yackel (1996) og Goodchild (2013). Begge modellene er sykliske og har som mål å forbedre undervisningen basert både på forskningsteori og på utviklingsbehovet man ser i egen praksis. Modellen til Goodchild (2013) er noe mer detaljert enn Cobb og Yackel (1996) sin modell, og får tydeligere fram at man i en aksjonsstudie tar tak i både forskningsteori og i utviklingspotensialet man ser hos egne elever. Goodchild (2013) vektlegger videre at syklusene i modellen innehar refleksjons- og feedbackmekanismer som er egnet for å kontinuerlig kunne justere prosesser og implementering av tiltak. Dette passet godt med den oppfatningen jeg på forhånd hadde av en aksjonsstudie, og ikke minst med den komplekse virkeligheten som Postholm og Jacobsen (2019) beskriver undervisningshverdagen som. Min gjennomføring av denne studien er derfor inspirert av Goodchild (2013) sin modell.

3.1.3 Grafisk fremstilling av eget forskningsdesign basert på Goodchilds modell

I dette avsnittet presenterer jeg i grove trekk hvordan aksjonsforskningen i dette prosjektet ble organisert. Figuren nedenfor laget jeg for å illustrere fasene i eget utviklingsarbeid, og har implementer disse i Goodchild (2013) sin opprinnelige modell.



Figur 9: Egen illustrasjon av utviklingsarbeidet, med utgangspunkt i Goodchilds (2013) modell.

Prosjektets utviklingsarbeid bestod av fem faser, nærmere bestemt tre forskningsfaser (se figurens høyre del) og to utviklingsfaser (se figurens venstre del). Startpunktet for arbeidet (Forskningsfase 1) er illustrert i senter av den høyre delen av aksjonsforskningssirkelen, nærmere bestemt i boksen markert med grønn farge og teksten «Første observasjonsrunde». Gangen i det videre arbeidet følger så grønn pil til venstre i et syklisk forløp: Neste boks er merket «Trening på hensiktsmessig kommunikasjon» (Utviklingsfase 1). Pilen svinger så mot høyre igjen, til boksen merket «Andre observasjonsrunde» (Forskningsfase 2). Pila går deretter til boksen merket «Åpne samtaler om sosiomatematiske normer (Utviklingsfase 2, før den ender i boksen merket «Tredje observasjonsrunde» (Forskningsfase 3). Aksjonsforskningens faser beskrives detaljert i avsnitt 4.1.

3.2 Bakgrunn

Studien er gjennomført på en ungdomsskole i en middels stor norsk by. Klassen er en 9. klasse bestående av 27 elever. De har gått sammen siden 8. klasse, og elevene kom opprinnelig fra tre ulike barneskoler. Om lag 2/3 av klassen kan beskrives som generelt faglig sterke elever som oppleves som aktive og interesserte med en gjennomgående positiv holdning til skole og skolearbeid. Resten av klassen består av elever med generelle faglige utfordringer og/eller lavere interesse for skolefag.

I muntlige fellesaktiviteter sees høy grad av deltakelse fra en stor del av elevene i klassen. Ved individuelt arbeid har jeg både i matematikk og i andre fag observert en noe lavere aktivitet enn ved fellesaktiviteter og gruppearbeid. Læringsmiljøet i klassen er gjennomgående godt. De faglig sterke elevene er samtidig de mest populære, og deres holdninger til skolearbeidet påvirker læringsmiljøet i positiv retning. Klassen scoret litt over nasjonalt snitt i alle de tre emnekategoriene på Nasjonal Prøve i regning høsten 2021. I matematikkfaget har vi siden oppstarten av 8. trinn jevnlig jobbet etter tenkende klasserom-modellen (Liljedahl, 2019) og Individuell-Gruppe-Plenum-modellen (Heggem, 2015). Det har generelt vært fokus på at muntlig aktivitet og diskusjoner er viktige i faget. Samtaletrekk (Wæge, 2015) har til en viss grad vært benyttet, da med mest fokus på trekkene 3 (resonnere), 4 (tilføye) og 6 (snu og snakk). Dersom presentasjon av nytt stoff skjer deduktivt, for eksempel via tradisjonell tavleundervisning, er det alltid lagt inn flere avbrekk der elevene skal diskutere med sidemannen eller får små oppgaver undervegs som de skal besvare muntlig sammen med sin læringspartner. De sosiale normene i klassen tilsier at man deltar aktivt i både i muntlige og skriftlige aktiviteter. I matematikkfaget, som i alle andre fag, er det tillatt å presentere egne meninger selv om disse går på tvers av det medelever og/eller lærer mener. Har man egne løsninger, forventes det at man forklarer og rettferdiggjør dem, men en sosial norm som tilsier at man SKAL gi uttrykk for enighet eller uenighet med andres forslag og ideer har vært lite fremtredende. I klassen er det altså lov å være uenig og uenigheter skal begrunnes, men en norm om at man «plikter» å gi uttrykk for motsetninger er lite etablert. Den kjennskapen jeg her formidler er i overveiende grad basert på hva som har kommet til uttrykk i lærerstyrte samtaler. I dette prosjektet har jeg altså fokusert på å sørge for lignende kvaliteter også ved arbeid i grupper. Min egen kommunikative tilnærming vil jeg beskrive som dialogisk og interaktiv (Mortimer & Scott, 2003), (Drageset, 2014), hvor flere synspunkter får oppmerksomhet og alle elever tillates å delta aktivt. Når det gjelder sosiomatematiske normer, er ikke dette begreper jeg som lærer har kjent til før inntil nylig. Gjennom lærerspesialistutdanningen fikk jeg gjennom kurslitteraturen våren 2021 kjennskap til Yackel og Cobb (1996) sin artikkel om sosiomatematiske normer, der normene sofistikert, effektiv og forskjellig løsning omtales. I min praksis har jeg derfor naturlig nok, i svært liten grad vært bevisst på disse, og kan derfor kun omtale klassens sosiomatematiske normer nokså generelt. Med hensyn til matematiske løsninger, har nok fokuset mitt vært å formidle en holdning der elevene har hatt frihet med hensyn til metodevalg og hvor jeg har verdsatt alle riktige løsninger på samme måte.

3.3 Utvalg

I dette prosjektet testet jeg altså ut en modell der elevene jobbet i faste og ferdighetsmessig mest mulig homogene samarbeids- eller responsgrupper i forkant av skriftlige prøver. Under gjennomføring av selve prøven fikk de anledning til å konferere med gruppa si etter å ha sett igjennom oppgavene, for å diskutere problemene og deretter går hver til sitt for å ferdigstille oppgavene på egenhånd. Elevgruppene ble etablert på bakgrunn av elevenes faglige utgangspunkt, derav begrepet homogene grupper. Basert på karakterene elevene oppnådde på 8. trinn, ble de delt inn i ni grupper på tre elever. Innad på gruppa hadde elevene enten samme karakter fra året før, eller maksimalt en karakter lavere/høyere enn andre på gruppa. Elevene er som tidligere nevnt godt vant med å jobbe i tilfeldige grupper etter tenkende klasseroms-modellen (Liljedahl, 2019), men siden samarbeidet nå var knyttet til vurdering, ønsket jeg en annen inndeling. Homogene grupper ble valgt for å kunne gi gruppene tilpasset veiledning, og for at vurderingen skulle gi et mest mulig reelt bilde av elevenes kompetanse. Min kjennskap til klassen tilsa dessuten at i vurderingssituasjoner foretrekker de fleste å jobbe sammen med elever på omtrent samme nivå: De sterke ønsker ikke å måtte «hjelpe» de svake, og de svake kan være redde for å «ødelegge» for de sterke. Selv om karakterer ikke opplyses om, er dette noe elevene prater om, og de har god oversikt over hvordan de selv ligger an sammenlignet med resten av klassen. Foruten hensynet til faglig utgangspunkt, forsøkte jeg også å ta nødvendige sosiale hensyn, for eksempel til vennskap og hvilke elever som generelt sett samarbeider godt. Gruppene ble etablert i god tid før årets første prøve i faget. De tre elevgruppene det ble tatt opptak av, var jevnt og tilfeldig fordelt med hensyn på kjønn. De tre gruppene hadde samlet sett ferdigheter som spente over det meste av karakterskalaen: Den ene gruppa bestod av elever med høy måloppnåelse i faget (karakter 5-6 fra 8. trinn). Den andre gruppa bestod av elever med middels til høy måloppnåelse i faget (karakter 4-5 fra 8. trinn). Den tredje gruppa bestod av elever med lav til middels måloppnåelse (karakter 2-3 fra 8. trinn).

3.4 Metoder og datainnsamling

Data ble samlet inn gjennom fire ulike metoder med varierende grad av systematikk, og omfattet lydopptak, deltakende observasjon/ustrukturerte intervjuer, skriftlige notater og studier av elevbesvarelser. Den mest systematiske av de fire metodene, var lydopptakene som ble gjort i tre elevgrupper i tre omganger under gruppediskusjoner i forbindelse med prøver. Disse dataene ble samlet inn før, under og etter intervensjonene. Deltakende observasjon ble i prosjektperioden foretatt både ved ordinært faglig arbeid i klasserommet og ved gruppediskusjoner i vurderingssituasjonene. Wellington (Wellington, 2015) graderer observatørrollen utfra graden av deltakelse. Spennvidden går fra rollen som fullstendig observatør som den ene ytterligheten til fullstendig deltaker som den andre. Mellom disse finner vi henholdsvis observatør som deltaker og deltaker som observatør (s. 169). Ved ordinært arbeid observerte jeg samtidig som jeg veiledet elevene slik jeg vanligvis gjør når elevene arbeider: Jeg snakket med elever og elevgrupper som enten rakk opp hånda for å få veiledning eller ville diskutere løsninger med meg. I slike situasjoner vil jeg i henhold til Wellington (2015) kategorisere observatørrollen min som «deltaker som observatør). I andre tilfeller observerte og lyttet jeg mer passivt når elevene snakket sammen, ved å sirkulere mellom gruppene. Her betrakter jeg observatørrollen min som «observatør som deltaker». I noen tilfeller stilte jeg spørsmål for å hjelpe dem med å bringe diskusjonen videre. Den deltakende observasjonen omfattet slik altså hyppige dialoger med elevene, og slike uformelle samtaler benevnes gjerne som ustrukturerte intervjuer (Postholm & Moen, 2018). I vurderingssituasjonene involverte jeg meg kun dersom gruppene tok kontakt med meg, med unntak for en gruppe med elever med spesielle behov som det ikke ble gjort opptak av. Også i disse situasjonene oppfatter jeg observatørrollen min som «observatør som deltaker». Intensjonen med å gjøre opptak var å finne ut hvordan de implementerte kommunikasjonsrådene kom til uttrykk gjennom elevdiskurser. Jeg ønsket derfor å påvirke diskursene minst mulig, samtidig som jeg ivaretok veilederrollen min. Det ble foretatt skriftlige notater gjennom hele prosessen, hovedsakelig knyttet til faglig arbeid i ordinær undervisning. Jeg noterte meg stikkord undervegs, og supplerte med noe mer utfyllende kommentarer etter timen. Graden av systematikk var lavere her, og notater ble stort sett foretatt ad hoc når jeg observerte noe jeg oppfattet som interessant for prosjektet. Studiene av elevbesvarelser foregikk både i undervisningstimene og i forbindelse med vurdering av prøvesvar. Elevarbeider utført i timene ble tilfeldig observert utfra kapasiteten der og da, og falt til en viss grad sammen med den deltakende observasjonen. Studiene gikk ut på å se på elevenes ferdige eller påbegynte løsninger samtidig som det foregikk dialoger med elevene og elevgruppene. Prøvebesvarelsene ble studert mer systematisk ved at jeg sammenlignet løsninger jeg fant interessante og som var egnet til å illustrere kvaliteter ved løsninger som jeg ønsket å fremheve. Gjennom avsnitt 4.1.4 gis leseren et konkret eksempel dette.

3.5 Studiens gyldighet og pålitelighet

Postholm og Jacobsen (Postholm & Jacobsen, 2018) lar begrepene gyldighet og pålitelighet erstatte begrepene validitet og reliabilitet. Dette fordi de sistnevnte begrepene oftere assosieres med kvantitative studier. I dette avsnittet benyttes derfor begrepene gyldighet og pålitelighet. Gyldighet kan ifølge Postholm og Jacobsen (2018) deles inn i indre og ytre gyldighet. Indre gyldighet går på om det man har kommet frem til gjennom studien er gyldig for det man har studert, og består igjen at to deler, nemlig årsaksgyldighet og begrepsmessig gyldighet. Årsaksgyldighet er knyttet til slutninger om årsak og virkning (2018). I denne studien er ikke dette begrepet relevant å vurdere, da studien kun tar sikte på å beskrive kjennetegn ved elevenes kommunikasjon, ikke å forklare årsakssammenhenger. Den andre delen av gyldighetsbegrepet omfatter begrepsmessig gyldighet, som er knyttet til om man gjennom datainnsamlingen har målt det man tror man måler. Datainnsamlingen i denne studien består som nevnt av fire datakilder; lydopptak, deltakende observasjon/ustrukturerte intervjuer, skriftlige notater og studier av elevbesvarelser. Lydopptakene er den datakilden som i størst grad bidrar til gyldighet, da det som sies av elevene i liten grad påvirkes av meg. Det samme gjelder studien av elevarbeidene, som i stor grad taler for seg. Gjennom deltakende observasjon kan man tenkes å kunne påvirke elevene som studeres, og i notater som gjøres vil det også ligge en fortolkning. Disse kildene kan derfor tenkes å i noe mindre grad bidra til gyldighet i studien. Flere kilder kan imidlertid øke gyldigheten. Med informasjon fra mange ulike kilder, vil forskeren ifølge Postholm bli mindre sårbar for skjevheter som kan oppstå når man baserer forskningen på bare en kilde. Dette omtales ofte som datatriangulering (2018). Ytre gyldighet eller overførbarhet vurderes i forhold til om resultatene fra studien kan overføres til andre kontekster enn den som faktisk er studert. Siden studien er kvalitativ vil det studien viser ikke direkte kunne overføres til andre kontekster, men kan likevel bidra gjennom å øke kunnskapen innenfor den tematikken forskningen berører. Ifølge Postholm handler pålitelighet innenfor kvalitative studier om refleksjon rundt hvordan forskeren kan ha påvirket resultatet. Pålitelighet krever både at forskeren selv reflekterer over sin påvirkning og at forskeren gjør forskningsprosessen synlig og tilgjengelig for andres refleksjon (2018). På hvilken måte kan jeg så ha påvirket denne forskningen? Som nevnt kan jeg ha påvirket gjennom min deltakende observasjon og gjennom notater fra observasjoner. Har jeg sett det jeg ønsket å ville se? Igjen er det viktig å vurdere dette gjennom å betrakte forskningsspørsmålene, hvis mål kun var å beskrive. Det er også viktig å ta med i betraktningen at studien er en aksjonsstudie, hvor målet til syvende og sist er å sørge for best mulig undervisning. Å «se det man helst vil se» ganger ikke nødvendigvis dette målet. Å søke utvikling for å oppnå den beste mulige undervisningen vil derfor også innebære å se det som ikke fungerer, beskrive det og gjøre endringer. Akkurat slik aksjonslæringssirkelen er ment å skulle fungere. Slik jeg ser det, betrakter jeg derfor studien som pålitelig. Samlet troverdighet omfatter ifølge Postholm indre og ytre gyldighet samt pålitelighet. Dersom forskeren hensyntar samtlige av disse faktorene og viser sin fremgangsmåte i forskningsprosessen, vil dette øke troverdigheten (2018). Jeg har gjennom dette avsnittet argumentert for hvorfor jeg mener denne studien er troverdig. Trianguleringen av data og intensjonen med aksjonsforskningen er sterke argumenter for en troverdig studie.

3.6 Etikk

Dette avsnittet tar for seg avveininger og tiltak for å sikre en forskningsetisk gjennomføring av denne studien. Ifølge Lackner (Lackner, 2021) innebærer forskningsetikk de vurderinger som gjøres av forskningen i relasjon til samfunnets normer og verdier. Vurderingene handler om hvilke problemstillinger det forskes på, metodene som benyttes og på hvilke måter forskningsresultatene kan tenkes anvendt. Jeg har delt vurderingene mine inn i to deler. Den første omhandler informasjonen som ble gitt alle involverte og til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Andre etiske avveininger er samlet i eget avsnitt til slutt.

3.6.1 Tillatelse fra NSD og informasjon til elever og foresatte

Studien ble meldt inn til NSD som ga tillatelse til at jeg kunne ta lydopptak av tre elevgrupper à tre personer og tillatelse til ved behov å gjennomføre intervjuer med deltakerne i studien. I tillegg fikk jeg tillatelse til å dele elevene inn i grupper basert på faglig utgangspunkt, såfremt de foresatte ga skriftlig samtykke til dette. De foresatte ble informert muntlig på et foreldremøte og gjennom informasjonsskriv med samtykkeskjema. Elevene ble informert muntlig etter at de foresatte hadde fått informasjon. Jeg var særlig nøye med å begrunne hvorfor det var viktig og riktig med ferdighetsmessig mest mulig homogene grupper, og la i min begrunnelse vekt på at når elevene har omtrent samme ferdigheter, vil de få bedre og mer tilpasset veiledning. Foresatte til samtlige elever samtykket til deltakelse i studien. En av forutsetningene for tillatelse til å dele elevene inn etter ferdighetsnivå var at opplysningene ikke skulle bli brukt i masteroppgaven min. Jeg kunne derfor ikke koble elevenes ferdighetsnivå til lydopptakene som ble gjort i gruppene, kun presentere disse resultatene på generelt grunnlag. Tillatelsen fra NSD finnes i vedlegg 1.

3.6.2 Andre etiske avveininger

Hvordan berørte studien ellers elevene? En elev takket nei til å delta. Det ble derfor ikke gjort lydopptak i hans gruppe. Ingen av elevens arbeider ble heller tatt med i datamaterialet, og elevens aktivitet ble heller ikke inkludert i noen av de notatene jeg gjorde i ordinære timer. Man kan også gjøre seg betraktninger omkring dette med lydopptak. Kan det tenkes at lydopptakene påvirket elevene på noen måte? Enkelte elever kan muligens ha følt seg bundet av at det lå en mikrofon på bordet, mens andre igjen kan tenkes å ha betraktet lydopptak som en måte å vise seg frem faglig på. Jeg anser ikke denne påvirkningen som betydelig, hverken i den ene eller andre retningen. Fordelen ved å gjennomføre en aksjonsstudie der egne elever deltar, er at man kjenner elevene godt fra før, og blant annet har bakgrunnskunnskap om hvordan de til vanlig kommuniserer og agerer sosialt. Slik jeg kjenner elevene, har jeg ikke sett nevneverdige endringer i hvordan elevene det ble gjort opptak av oppførte seg eller kommuniserte. Alt i alt synes det som om det i liten grad foreligger negative etiske konsekvenser av studien. Bakgrunnen for og intensjonen med aksjonsforskningen var å forbedre undervisningen, med særlig fokus på å legge til rette for læring i vurderingssituasjoner og samtidig jobbe målrettet med matematisk kommunikasjon. Dersom analysen av dataene viser at noe av dette er oppnådd, kan dette videre understøtte at studien har vært etisk forsvarlig å gjennomføre.

3.7 Analysestrategi

Jeg baserte analysestrategien min på Wellingtons (2015) rammeverk for analyse av kvalitative data. De beskrevne trinnene i analysen følger den såkalte «Constant Comparative Method» (Konstant komparativ analysemetode) (2015, s. 262), hvor man på den ene siden søker mønstre, temaer og regelmessigheter, og på den andre siden søker kontraster, paradokser og uregelmessigheter. Jeg fulgte for en stor del de stegene Wellington (2015) beskriver, men gjorde tilpasninger jeg fant logiske for at analysen i størst mulig grad skulle reflektere fasene i utviklingsarbeidet. Det er derfor mulig å kjenne igjen forskningsdesignet mitt (som beskrevet i figur 9) i de ulike trinnene i analysestrategien. Dette kommer særlig til syne i avsnitt 4.7.2, som beskriver gangen i analysen, og i analysen i kapittel 5.0. I avsnitt 4.7.2 beskrives også strategien for diskusjonen som foretas i kapittel 6. Jeg fant Wellingtons (2015) oppsett hensiktsmessig på grunn av dets systematiske og lettfattelige beskrivelse av rekkefølgen i analysearbeidet, samt at metoden lot seg tilpasse til de faktiske fasene i eget utviklingsarbeid og det faktum at jeg håndterte *fire* ulike datakilder.

3.7.1 Neddykking og refleksjon

Wellington (2015) omtaler de to første stegene som neddykking og refleksjon. Dette innebærer at man dykker grundig ned i datamaterialet, for så å reflektere over de foreløpige inntrykkene. I mitt tilfelle foregikk prosessen i tre steg tilknyttet hver av de tre forskningsfasene i aksjonssirkelen. Neddykking og refleksjon har slik utgjort en prosess delt i flere trinn. Som nevnt i metodekapittelet foretok jeg enkle analyser av lydopptakene i de to første forskningsfasene, mens jeg gikk grundigere til verks i siste forskningsfase. Det samme var tilfelle ved gjennomgangen av de tre andre datakildene: Jeg konsentrerte meg om hovedtrekkene i materialet fra de to første forskningsfasene og brukte dette som grunnlag for tiltakene som ble satt inn i de påfølgende utviklingsfasene. I siste forskningsfase betraktet jeg dataene samlet og gjorde en felles analyse av prosessen.

3.7.2 Analyse og diskusjon

Ifølge Wellington (2015) innebærer analyse å bryte ned i komponenter eller å dele et hele opp i sine deler. Denne prosessen deles ofte opp i fire faser (2015). I mitt tilfelle innebar dette følgende: Først brøt jeg materialet fra alle de fire datakildene (lydopptak, deltakende observasjon, skriftlige notater

og studier av elevbesvarelser) ned til enkeltdeler. Deretter valgte jeg ut de delene av materialet jeg så kunne brukes til å besvare forskningsspørsmålene mine. Til slutt kategoriserte jeg materialet gjennom å se etter mønstre og tilbakevennende temaer. Fordi utviklingsprosjektet mitt var organisert i flere faser, var det naturlig at også kapitlene i analysen gjenspeilet fasene i aksjonsforskningssirkelen slik:
-data fra første forskningsfase (som ble grunnlag for tiltak implementert i første utviklingsfase).
-data fra andre forskningsfase (basert på tiltakene som ble implementert i første utviklingsfase).
-data fra tredje forskningsfase (basert på tiltakene som ble implementert i andre utviklingsfase).
I tillegg kommer to avsnitt hvor det første omhandler elevenes opplevelse av den nye måten å organisere prøver på samt deres resultatutvikling i retrospekt. I det neste gjør jeg rede for egne opplevelser knyttet til den nye vurderingsformen.

Kategoriene og analysestegene begrunnes ved at de på mange måter var med på å binde prosjektet sammen: Med tanke på at studien min gikk parallelt med og var en del av undervisningen i eget klasserom, var det nødvendig å kontinuerlig foreta enkelte analyser undervegs for å planlegge de neste fasene i arbeidet. Disse måtte være grundige nok til at undervisningen gjenspeilet det som til enhver tid var riktig å legge vekt på, og enkle nok til at jeg faktisk rakk å planlegge den løpende undervisningen.. Til slutt i prosjektet var det tid for å gå i dybden på det hele for å kunne reflektere omkring prosjektets ulike faser og til slutt besvare forskningsspørsmålene. Basert på denne analysen foretas det i diskusjonskapittelet (6.0) en syntese hvor jeg hovedsakelig relaterer egne data til teorien fra kapittel 2.0 samt til noe tidligere forsking. Strukturen ble valgt fordi den åpnet for et levende prosjekt som lot seg tilpasse klasserommets «daglige drift», samtidig som hovedtrekkene fra forskningsfasene ble fanget opp og la grunnlag for å avgjøre hvilke tiltak som skulle implementeres videre i aksjonsforskningssyklusene. Når tiltakene var implementert og selve utviklingsarbeidet avsluttet, ble det rom for både å analysere selve aksjonsforskningsprosessen og plassere funnene knyttet til elevkommunikasjonen i forhold til anvendt teori på en grundig måte.

4.0 Fasene i utviklingsarbeidet

Beskrivelsen av utviklingsarbeidet er plassert umiddelbart før analysekapittelet (5.0) fordi det betraktes som del av empirien. Kapittelet beskriver arbeidet som ligger til grunn for å første del av forskningsspørsmålet, nemlig «*Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?*». Andre del av forskningsspørsmålet, «Hvordan kan slike endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?» beskrives i analysekapittelet (5.0). I diskusjonskapittelet (6.0) behandler kapittel 4.0 og 5.0 samlet, og dette leder opp til konklusjon og endelig besvarelse av hele forskningsspørsmålet i kapittel 7.0.

4.1 Fasene i aksjonsforskningen

Utviklingsarbeidet besto som skissert i avsnitt 3.1.3 og illustrert i figur 9 til sammen av fem faser. Begrunnelsene for innholdet i de ulike fasene, samt kronologien i disse tydeliggjøres i omtalen av de enkelte fasene. Disse beskrives detaljert i de videre avsnittene.

4.1.1 Første forskningsfase (fase 1)

På figur 9 representeres denne fasen av boksen merket «Første observasjonsrunde»: Elevene samarbeidet i grupper i forbindelse med høstens første matematikkprøve, og det ble gjort lydopptak av samtalen i tre av gruppene. Oppgavene elevene jobbet med gjennom alle forskningsfasene ble valgt fordi jeg anså dem som egnet til å fremme kommunikasjon. De hadde i overveiende grad såkalt problemløsningskarakter og i forhold til Stein og Smiths (Stein & Smith, 2011), kategorisering av oppgaver stilte majoriteten av oppgavene høye kognitive krav til elevene. Alle klassens grupper hadde i forkant av prøven jobbet sammen i to til tre skoletimer, dette for å bli vant med å samarbeide før de skulle jobbe med en prøve sammen. Den første prøven hadde tema figurtall og mønstre og finnes i vedlegg 2. Opptakene ble transkribert kort tid etter at de ble gjort. Transkripsjonsnøkkel finnes i vedlegg 5 og rå-transkripsjonene i vedlegg 6. Opptakene i denne fasen brukte jeg først og fremst for å danne meg et bilde av hvordan elevene kommuniserte i utgangspunktet. En nærmere beskrivelse av kommunikasjonen som fant sted i første forskningsfase finnes i analysedelens avsnitt 5.1. Jeg vil likevel nevne en observasjon jeg bet meg spesielt merke i, og som inspirerte til å starte arbeidet med konkrete tiltak i første utviklingsfase: På en av elevgruppene ble en elev, som fremmet en helt korrekt løsning blankt avvist av gruppa si. Eleven ble beskylt for «Bare å finne på» det som ble sagt. Resultatet var at gruppa ikke gikk videre med denne elevens resonnement, uten at det på noen måte ble begrunnet matematisk. Denne observasjonen var inspirerte meg særlig til å se mer på hvilke konkrete tiltak jeg kunne sette inn for å unngå denne formen for lite hensiktsmessig kommunikasjon. Denne, de øvrige observasjonene jeg gjorde i første observasjonsrunde og kjennskapen jeg fra før av hadde til klassen (lokale teorier) ble så sammenholdt med min generelle kjennskap til forskning knyttet til matematisk kommunikasjon (globale teorier) og brukt som grunnlag for å planlegge neste fase i studien; Første utviklingsfase.

4.1.2 Første utviklingsfase (fase 2)

Denne fasen startet med at jeg satt meg grundigere inn i hva forskning sier om matematisk kommunikasjon, kommunikativ tilnærming og matematisk autonomi. Hovedtrekkene her er allerede beskrevet i teoridelens avsnitt 2.5-2.7. Vektleggingen av resonnement og begrunnelse av eget syn står sterkt i denne litteraturen. Basert på dette og de foreløpige analysene av elevkommunikasjonen i første forskningsfase, som blant annet viste manglende bruk av begrunnelse i en gruppene, innførte jeg de første intervensjonene (boks merket «Trening på hensiktsmessig kommunikasjon» i figur 9). Intervensjonene omfattet innføring av tre konkrete tips til hensiktsmessig matematisk kommunikasjon og trening på slik kommunikasjon gjennom en periode på 3 uker («Tenkte og praktiske eksperimenter» i figur 9). De tre tipsene ble valgt både på bakgrunn av teori og fordi de bygget videre på kommunikasjon som fra tidligere var implementert i lærerstyrte samtaler i klassen. Samme periode hadde også fokus på begrepet «Intellektuell autonomi», nærmere bestemt en oppfordring til at elevgruppene selv skulle vurdere gyldigheten av egne løsninger uten å be om bekreftelse fra lærer. Dette var viktig å trene på for at gruppene skulle øke sin bevissthet omkring gyldige løsninger gjennom å skape rom for diskurs knyttet til dette i gruppene. Videre følger en beskrivelse av det konkrete arbeidet og intervensjonene som ble gjort. Dette er sortert på nummererte uker for å gjøre beskrivelsen så oversiktlig som mulig.

Uke 1:

Setningene «Jeg er enig fordi» og «Jeg er uenig fordi» ble implementert på følgende måte: Jeg laget to plakater som ble hengt opp i klasserommet, og presenterte også «Mattesnakk-ukas tips» på arbeidsplanen. Figuren nedenfor viser plakatene som ble brukt i uke 1:

Figur 10: Mattesnakk-tipsene for uke 1. Egenproduserte postere som ble hengt opp i klasserommet.

Plakatene ble presentert i ukas første time. Jeg forklarte elevene at disse setningene var viktige å bruke når de samarbeidet, fordi det alltid er viktig å kunne begrunne hvordan man tenker. Jeg ga i tillegg et konkret eksempel der jeg forklarte hva som hadde skjedd i en av gruppene på den første prøva, nemlig at en korrekt løsning ble avvist uten at de andre på gruppa begrunnet hvorfor de var uenige, med det resultatet at ingen på gruppa løste oppgaven. Det matematiske temaet denne uka var trekantgeometri, og klassen hadde tre matematikktimer. Time en bestod av felles diskusjonsoppgaver/gjennomgang og individuelt arbeid. Time to bestod av individuelt arbeid og vurdering i form av utgangsbillett. Time tre bestod av arbeid i samarbeidsgruppene. I forkant av arbeidet her, ble elevene igjen minnet om Mattesnakk-tipsene og hvorfor de var viktige. I veiledningen som ble gitt, hadde jeg ytterligere fokus på ukas konkrete tips.

<u>Uke 2:</u>

Setningene «Har noen av oss endret mening» og «Hvordan kan vi vite at det stemmer» ble implementert på følgende måte: Jeg laget to plakater som ble hengt opp i klasserommet, og presenterte også «Mattesnakk-ukas tips» på arbeidsplanen. Figuren nedenfor viser plakatene som ble brukt i uke 2:

Figur 11: Mattesnakk-tipsene for uke 2. Egenproduserte postere som ble hengt opp i klasserommet.

Plakatene ble presentert i ukas første time, sammen med en repetisjon av forrige ukes kommunikasjonstips. Jeg forklarte elevene at budskapet på den første plakaten var en fortsettelse av det vi jobbet med i forrige uke, og at fokus nå skulle være på at det kan være både lov og lurt å endre mening etter å ha hørt andres begrunnelser. Jeg ba spesifikt gruppene om å stille seg dette spørsmålet undervegs i sine arbeider. Ukas plakat nummer to handlet om matematisk autonomi. Jeg forklarte elevene hva som ligger i begrepet intellektuell autonomi. Her fokuserte jeg kun på den delen av autonomi-begrepet som dreier seg om gyldighet av egne løsninger. Jeg sa blant annet at jeg under veiledning ikke kom til å besvare spørsmål som «Er dette riktig?», men at jeg kom til å be dem begrunne gyldigheten av egen løsning.

Det matematiske temaet denne uka var sirkelgeometri, og klassen hadde tre matematikktimer. Time en bestod av felles diskusjonsoppgaver/gjennomgang og individuelt arbeid. Time to bestod av individuelt arbeid og vurdering i form av utgangsbillett. Time tre bestod av arbeid i samarbeidsgruppene. I forkant av dette arbeidet ble elevene igjen minnet om Mattesnakk-tipsene og hvorfor de var viktige. I veiledningen som ble gitt, hadde jeg også fokus på ukas konkrete tips. Jeg merket at mattesnakktipset «Har noen av oss endret tankemåten sin (etter å ha hørt de andres syn)» var vanskelig og virket litt kunstig å formidle. Desto mer fokus ble derfor viet den matematiske autonomien og at elevene selv skulle forklare hvordan de kunne vite at løsningen deres stemte. Jeg modellerte dette når jeg veiledet gruppene: Når gruppene tilkalte meg for å få bekreftet sine løsninger, spilte jeg ballen tilbake til dem og spurte dem hvordan de selv kunne være sikre på at løsningen stemte.

Uke 3:

Mattesnakk-tipsene fra de to foregående ukene ble videreført. Vi jobbet videre med sirkelgeometri, og første time bestod av felles diskusjonsoppgave, individuelt arbeid og vurdering i form av utgangsbillett. Ved veiledning hadde jeg høyt fokus på å bidra til intellektuell autonomi. Time to bestod av gjennomgang av oppgaver som hadde vist seg krevende på utgangsbillettene i forrige uke samt individuelt arbeid. Time tre bestod av skriftlig prøve i samarbeidsgruppene og lydopptak av kommunikasjonen i gruppene. I forkant av prøva, ble elevene minnet om de fire Mattesnakk-tipsene.

4.1.3 Andre forskningsfase (fase 3)

På figur 9 representeres denne fasen av boksen merket «Andre observasjonsrunde»: Elevene samarbeidet i grupper i forbindelse med høstens andre matematikkprøve, og det ble gjort lydopptak av samtalene i de samme gruppene som sist. Denne prøven hadde tema trekant- og sirkelgeometri og finnes i vedlegg 3. Opptakene ble også denne gangen transkribert kort tid etter at de ble gjort. En nærmere beskrivelse av kommunikasjonen som fant sted i andre forskningsfase finnes i analysedelens kapittel 5.2. Det må likevel nevnes at i denne runden ble ingen avfeid i sin argumentasjon uten at det ble matematisk begrunnet eller forklart, og kommunikasjonen i to av de undersøkte gruppene viste tegn til matematisk autonomi. Den videre planen for aksjonsstudien var å snakke direkte med elevene om sosiomatematiske normer. Den beskrevne utviklingen fra første til andre opptaksrunde åpnet derfor for å utvide fokuset for intervensjonene i neste fase. Et naturlig bakteppe for dette var å ta utgangspunkt i noen av elevbesvarelsene fra den nylig gjennomførte prøven og knytte disse til begrepet sosiomatematiske normer. Neste fase i studien ble planlagt utfra dette, og slik beveget jeg meg, i lys av lokale (elevkommunikasjon og -besvarelser) og globale teorier (litteraturen) over til neste runde i utviklingssirkelen, andre utviklingsfase.

4.1.4 Andre utviklingsfase (fase 4)

Fasen illustreres ved boksen merket «Åpne samtaler om sosiomatematiske normer» i figur 9.
De foreløpige funnene fra opptaksrunde nr. to indikerte altså at elevene til en viss grad hadde tatt i bruk en form for hensiktsmessig matematiske kommunikasjon og også viste tegn til matematisk autonomi. Basert på dette, og andre faktorer bl.a. knyttet til klassens sosiale normer og egen kommunikative tilnærming, vurderte jeg at elevene var modne for at jeg snakket direkte med dem om sosiomatematiske normer. Hovedvekt ble lagt på de to sosiomatematiske normene «Matematisk effektiv» og «Matematisk sofistikert». Den tredje sosiomatematiske normen «Matematisk forskjellig», ble i mindre grad berørt. Videre følger en beskrivelse av det konkrete arbeidet som ble gjort. Arbeidet er sortert på nummererte uker for å gjøre beskrivelsen så oversiktlig som mulig. Ukenummereringen fortsetter fra første utviklingsfase.

Uke 4:

Denne uken hadde klassen kun en matematikktime. Timen ble brukt til gjennomgang av prøven med samtidig eksemplifisering av begrepene «Matematisk sofistikert» og «Matematisk effektiv». Elevenes egne løsninger ble i anonymisert form lagt frem i plenum. Før timen spurte jeg elevene om de var komfortable med at jeg viste frem løsninger med mulig gjenkjennbar håndskrift. To elever sa nei, og deres arbeider ble derfor ikke vist frem. For hver av elevløsningene som ble lagt frem diskuterte vi spørsmål som:

-Er dere enige eller uenige i disse løsningene?

-Hvorfor/hvorfor ikke?

-Hva kunne eleven gjort annerledes her?

-Har dere et annet forslag til løsning?

Vi jobbet denne timen etter Individuell-Gruppe-Plenum-metoden, og engasjementet i klassen var meget godt. Flere elever valgte å gi seg til kjenne og forklare egen tankemåte i forhold til løsningene som ble lagt fram, selv om disse hadde åpenbare mangler.

Jeg trakk til slutt fram tre løsninger på en av oppgavene. Oppgaven (c) må for mine elever, på det nivået de er nå, sies å være av problemløsningskarakter:

6 Et kvadrat har sider som er $3a$ lange.

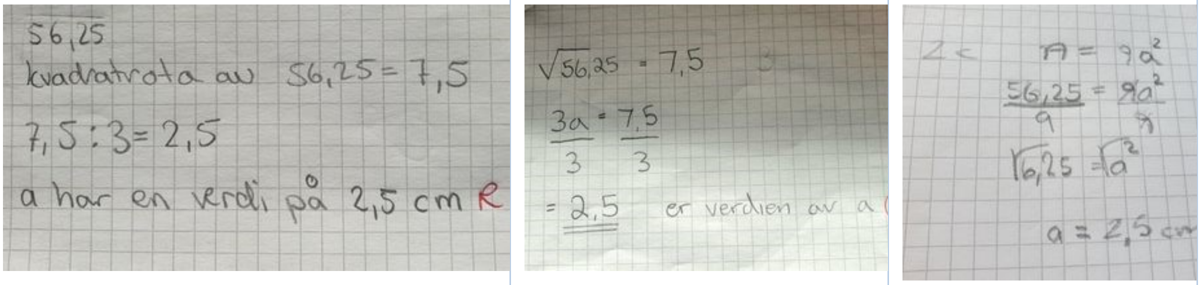
a) Lag en formel for arealet av kvadratet.

b) Regn ut arealet av kvadrat når $a = 4$ cm.

c) Hvilken verdi har a hvis arealet av kvadratet er $56{,}25\ \text{cm}^2$?

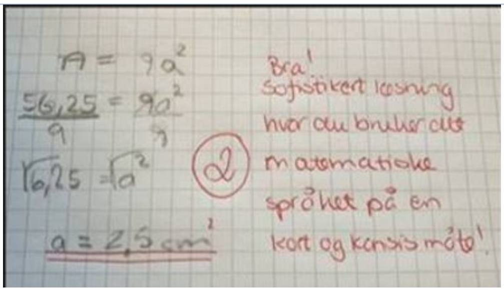
Figur 12: Oppgaven som var grunnlag for plenumsdiskusjon knyttet til elevløsninger fra klassen.

Jeg opplyste elevene om at dette var løsninger som alle hadde gitt full uttelling mht. poeng, men at jeg likevel så visse kvalitetsforskjeller på løsningene. Jeg ba om synspunkter på hva dette kunne være og ga dem i oppdrag å diskutere hvilke forskjeller og likheter de så i det tre løsningene. Figur 13 viser de tre fremviste løsningsforslagene:



Figur 13: De tre elevløsningene som ble lagt frem som grunnlag for plenumsdiskusjon

Mitt neste trekk var å trekke frem den løsningen jeg anså som den matematisk mest sofistikerte og hvilken tilbakemelding denne eleven hadde fått på sin besvarelse. Figuren nedenfor viser besvarelse, tilbakemelding til eleven og de spørsmålet som så ble stilt klassen:



Her ser dere tilbakemeldingen som den siste eleven fikk.

Vet dere hva sofistikert betyr?

Figur 14: Elevløsning og diskusjonsspørsmål som ble lagt frem i plenum ved prøvegjennomgangen i uke 4. Eleven hadde fått kommentaren «Sofistikert løsning» da prøven ble rettet. Dette ble brukt som grunnlag for plenumssamtale om sofistikerte løsninger.

Her brukte jeg bevisst uttrykket «sofistikert matematisk løsning» og knyttet dette direkte til en elevløsning, før jeg snakket med klassen om betydningen av uttrykket. Klassesamtalen viste at ingen elever fra før av var kjent med betydningen av ordet «sofistikert», noe som gjorde det nødvendig å knytte dette til gjenkjennbare eksempler fra dagliglivet (lekre biler med tekniske finesser, den flotteste og mest spesielle kjolen på catwalken, den aller tøffeste fotballfinta og så videre). Jeg ga dem så denne mer formelle definisjon av ordet sofistikert, hentet fra Store Norske Leksikon: «Sofistikert betyr noe som er intellektuelt høyt utviklet, elegant, raffinert, eller noe som er avansert og komplisert» (Gundersen, 2022). En elev foreslo et synonymt begrep som er del av elevenes daglige vokabular, nemlig ordet «klasse». Vi ble enige om at vi godt kunne bruke det ordet, og den videre samtalen dreide seg om hva dette kunne bety innenfor matematikken og hvorfor den siste løsningen (vist over) var mer «sofistikert» eller mer «klasse» enn de andre løsningene.

Uke 5:

Ukas første og eneste time ble innledet med at jeg minnet om de fire kommunikasjonsprinsippene ved å vise til plakatene som omhandlet dette. Tema for timen var repetisjon av problemløsningsstrategier. Eget mål for timen var å formidle den sosiomatematiske normen «Effektiv matematisk løsning» gjennom å modellere ulike løsninger på det samme matematiske problemet og samtidig knytte begrepet opp mot begrepet «Sofistikert matematisk løsning». Elevene fikk deretter presentert to matematiske problemer, nemlig disse:

«Anne, Berit og Christian er til sammen 100 år. Berit er dobbelt så gammel som Anne og Christian er 8 år yngre enn Anne. Hvor gamle er hvem av dem?»	«På en lekeplass er det 9 sykler. Noen er trehjulssykler og noen er tohjulssykler. Til sammen hadde syklene 25 hjul. Hvor mange sykler er det av hver type?»

Figur 15: De to matematiske problemene som ble presentert som grunnlag for i plenumsdiskusjon og modellering av løsninger i uke 5.

Elevene diskuterte oppgavene i grupper, før jeg modellerte ulike løsninger. For den første oppgaven presenterte jeg en løsning der jeg brukte metoden «likning/algebra» (1, figur 16) og en der jeg brukte metoden «systematisk tabell/gjett og sjekk» (2, figur 17). Løsningene så slik ut:

$A+B+C=100 \qquad A=X \qquad B=2X \qquad C=X-8$

$$\begin{aligned} X + 2X + X-8 &= 100 \\ 4X &= 100+8 \\ 4X &= 108 \\ 4X/4 &= 108/4 \\ \underline{X} &\underline{= 27} \end{aligned}$$

<u>Anne er 27 år, Berit er 5år og Christian er 19 år</u>

Figur 16: Løsningsforslag 1 (algebraiskløsning/likning) på oppgave 1 ble modellert for klassen på denne måten.

Anne	Berit	Christian	Til sammen	Stemmer det? (Er Christian 8 år yngre enn Anne?)
33	66	1	100	Nei 33-1=32 år yngre
32	64	4	100	Nei 28 år yngre
30	60	10	100	Nei 20 år yngre
28	56	16	100	Nei 12 år yngre
26	52	20	100	Nei 6 år yngre
27	54	19	100	JA 27-19=8 år yngre
Anne er 27 år, Berit er 5år og Christian er 19 år				

Figur 17: Løsningsforslag 2 (gjett og sjekk) på oppgave 1 ble modellert for klassen på denne måten.

Vi diskuterte så de to løsningene etter IGP-metoden. Jeg ba elevene reflektere omkring hva som varden mest sofistikerte og hvem som var den mest effektive løsningen, og kom også med egne betraktninger knyttet til dette i plenumsdelen. For den andre oppgaven presenterte jeg en løsning der jeg brukte metoden «likning/algebra» (1, figur 18), en der jeg brukte metoden «systematisk tabell/gjett og sjekk» (2, figur 19) og en der jeg brukte metoden «tegning/modell» (3, figur 20). Løsningene så slik ut:

Trehjulssykkel = X   Tohjulssykkel = Y

$$
\begin{aligned}
X + Y &= 9 \\
3X + 2Y &= 25 \\
X &= 9 - Y \\
3(9-Y) + 2Y &= 25 \\
27 - 3Y + 2Y &= 25 \\
Y &= 2 \\
X &= 9 - 2 = 7
\end{aligned}
$$

<u>2 tohjulssykler og 7 trehjulssykler</u>

Figur 18: Løsningsforslag 1 (algebraisk løsning/likning) på oppgave 2 ble modellert for klassen på denne måten.

Trehjulssykler	Tohjulssykler	Antall hjul	Stemmer det? (Er det 25 hjul til sammen?)
4	5	12 + 10 = 22	Nei
5	4	15 + 8 = 23	Nei
6	3	18 + 6 = 24	Nei
7	2	21 + 4 = 25	Ja
2 tohjulssykler og 7 trehjulssykler			

Figur 19: Løsningsforslag 2 (gjett og sjekk) på oppgave 2 ble modellert for klassen på denne måten.

Tegn først 9 sykler (hold det enkelt, en strek= en sykkel)
Sett 2 hjul på alle:

_____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____
oo oo oo oo oo oo oo oo oo

Har da brukt opp 18 hjul
7 sykler til må få påtegnet et hjul til:

_____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____
ooo ooo ooo ooo ooo ooo ooo oo oo

Tell opp og du har svaret:
2 tohjulssykler og 7 trehjulssykler

Figur 20: Løsningsforslag 3 (tegning) på oppgave 2 ble modellert for klassen på denne måten.

Vi diskuterte så løsningene etter IGP-metoden. Jeg ba så elevene vurder disse løsningene i forhold til hvorvidt løsningene hovedsakelig var sofistikerte og/eller om de først og fremst var effektive, og kom også med egne betraktninger knyttet til dette i plenumsdelen.

Uke 6:

Ukas første time ble innledet med at jeg minnet om de fire kommunikasjonsprinsippene og om hva vi hadde snakket om i forrige uke vedrørende ulike løsninger, og presenterte en ny plakat viet de to sosiomatematiske normene «Sofistikert» og «Effektiv» matematisk løsning. Sofistikert matematisk løsning ble, som figuren under viser, omtalt som en løsning med «klasse» mens en effektiv matematisk løsning ble betegnet som en «kjapp løsning».

Mattesnakk – ukas tips 5

Hva går vi for?
KJAPP eller
KLASSE?

(Effektiv eller sofistikert?)

Figur 21: Mattesnakk-tipsene for uke 6. Egenproduserte postere som ble hengt opp i klasserommet. Beskriver de sosiomatematiske normene «Effektiv» og «Sofistikert» løsning.

Resten av timen ble brukt på oppgaveløsning i gruppe. De siste forberedelsene til tentamen/fagdag ble gjort i timen etter. Her arbeidet elevene arbeid alene eller i grupper. Som veileder fortsatte jeg arbeidet med å stimulere til intellektuell autonomi ved gruppeveiledning, minne om kommunikasjonsprinsipper og hadde dialoger med elevene i forhold til effektive og sofistikerte løsninger.

4.1.5 Tredje forskningsfase (fase 5)

På figur 9 representeres denne fasen av boksen merket «Tredje observasjonsrunde»: Elevene samarbeidet i grupper i forbindelse med høstens tredje matematikkprøve (tentamen/fagdag), og det ble gjort lydopptak av samtalene i de samme gruppene som sist. Prøven hadde tre deler. Opptakene ble gjort når elevene løste delen med sterkest grad av problemløsningskarakter. Denne delprøven finnes i vedlegg 4. Opptakene ble transkribert kort tid etter at de ble gjort. En nærmere beskrivelse av kommunikasjonen som fant sted i tredje forskningsfase finnes i analysedelens avsnitt 5.2 og 5.3.

5.0 Analyse

Før analysen beskrives kan det være nyttig å minne om forskningsspørsmålene:

-Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?

-Hvordan kan slike endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?

Første del av forskningsspørsmålet ble gjort rede for i kapittel 3 (Fasene i utviklingsarbeidet). Her i analysen presenterer jeg hovedlinjene i egen forskning når det gjelder andre del av forskningsspørsmålet. En felles diskusjon knyttet til begge forskningsspørsmålene finnes i kapittel 6. Som nevnt i metodekapittelet (4.7), består analysen av fire deler. I avsnitt 5.1 analyseres kommunikasjonen i første forskningsfase. Her gis en kort utredning om elevenes utgangspunkt gjennom en beskrivelse av hvordan jeg oppfattet elevenes kommunikasjon før implementeringen av undervisningsopplegget. I avsnitt 5.2 analyseres kommunikasjonen i andre og tredjeforskningsfase, det vil si hvordan elevene kommuniserte etter implementering av undervisningsopplegget. I avsnitt 5.3 analyseres hvordan de sosiomatematiske normene sofistikert og effektiv matematisk løsning samt elevenes matematiske autonomi kom til syne i elevkommunikasjonen i vurderingssituasjonene samt ved ordinær klasseromsaktivitet. Avsnitt 5.4 tar for seg utviklingsarbeidets betydning for organisering av vurderingssituasjonene. Her beskriver jeg reaksjoner fra elevene omkring ny vurderingsform og ser blant annet på resultatutvikling i prosjektperioden.

Elevgruppene som lydopptakene ble foretatt i, kalles gruppe A, B og C. Elevenes utsagn er kodet ved hjelp av pseudonymer. Kommunikasjonen beskrives utfra seks kategorier i både 5.1 og 5.2.
Alle kategoriene kan direkte knyttes til teorigrunnlaget: «Deltakelse», kan knyttes til klassens allerede etablerte sosiale normer via Mortimer og Scott (2003) sin modell for lærers kommunikative tilnærming samt til arbeidsmåter som fra før av var godt kjent i klassen, som for eksempel metodene Individuell-Gruppe-Plenum (Heggem, 2015) og Tenkende klasserom (Liljedahl, 2019). Uttrykk for enighet og uenighet samt endret tenkning stammer fra kommunikasjonsprinsippene som ble implementert i første utviklingsfase (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019). Kategorien «Kommunikasjonsfeller» som beskrives i nest siste kategori omfatter IRE-kommunikasjon beskrevet av Mehan (1979) og traktkommunikasjon/ Topaze-effekt som kan knyttes til Brousseaus (1997) teorier omkring dette. Kategorien «Refleksiv diskurs» knyttes til Cobb m.fl. (1997) sin teori om refleksiv diskurs og refleksiv kommunikasjon. Kategoriene er som følger:

Kategori	Innhold
Deltakelse	Deltar alle elevene i diskursen eller bare noen?
Uttrykk for uenighet	Hvordan uttrykkes uenighet?
Uttrykk for enighet	Hvordan uttrykkes enighet?
Endret tenkning	Uttrykker elevene endret tenkning etter å ha vurdert andres utsagn?
Kommunikasjonsfeller	Forekommer IRE-kommunikasjon eller traktkommunikasjon
Refleksiv diskurs	Forekommer refleksiv diskurs?

Tabell 3: Kategoriene som fremkom basert på analysene av kommunikasjonen i studiens tre forskningsfaser.

I avsnitt 5.3 analyseres samtalene fra alle tre forskningsfasene med tanke på hvordan bevissthet omkring matematisk autonomi og sosiomatematiske normer kommer til uttrykk i elevenes kommunikasjon. Med tanke på sosiomatematiske normer, var det også naturlig å inkludere empiri som bygger på kommunikasjon registrert i ordinær undervisning i andre utviklingsfase, der dette ble løftet opp som tema. Her er både dialoger elevene imellom og samtaler mellom elevene og meg tatt med, fordi dette var en naturlig del av kommunikasjonen som skjedde i undervisningen.

5.1 Kommunikasjon før implementering

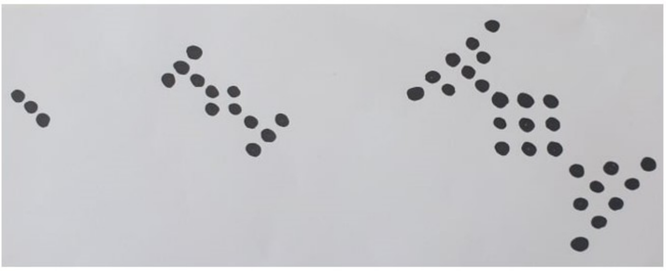
Empirien er hentet fra lydopptak gjort i ved prøvesamarbeid i de tre elevgruppene i første forskningsfase. Analysen av denne kommunikasjonen la grunnlaget for de tiltakene som ble implementert i første utviklingsfase.

<u>Deltakelse:</u>

Kommunikasjonen i gruppene bar preg av høy deltakelse fra alle medlemmene i form av muntlige innspill og meningsutvekslinger, bortsett fra i gruppe A. Her var en av elevene noe mer tilbakeholden enn de andre, men dette kan imidlertid forklares utfra personlige utfordringer knyttet til denne eleven denne dagen. Høy deltakelse i alle gruppene kan knyttes til de allerede etablerte sosiale normene i klassen der det er forventet at man deltar og ytrer egne meninger, til det arbeidet som allerede er lagt ned i klassen i form av arbeid med Tenkende Klasserom (Liljedahl, 2019) og Individuell-Gruppe-Plenum (Heggem, 2015), samt til lærers kommunikative tilnærming (Mortimer& Scott, 2003). Basert på dette anså jeg det ikke nødvendig å sette inn tiltak for å bedre graden av deltakelse i første utviklingsfase.

Uttrykk for uenighet:

Transkripsjonene nedenfor (Utdrag 1 og 2) illustrerer at uenighet ble håndtert på ganske forskjellige måter i de undersøkte elevgruppene. Utdrag 1 viser et typisk eksempel på hvordan uenighet ble uttrykt i gruppe A og B, mens utdrag 2 setter søkelys på en situasjon der uenighet ble uttrykt uten faglig begrunnelse i gruppe C. Mønsteret elevene diskuterte i utdrag 1, var dette:

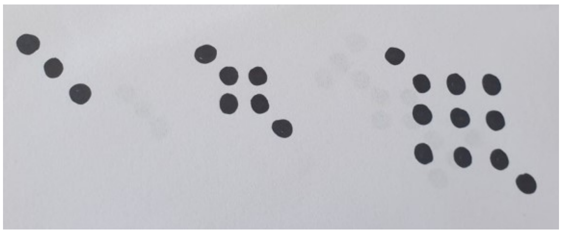


Figur 22: Mønsteret elevene diskuterte da den første dialogen nedenfor fant sted

Utdrag 1:

Fredrik:	*Også den siste her er bare* $3n^2$ *… for du ser liksom … den utvikler seg… lissom… se da…!*
Vegard:	*… det er 3 …*
Stein:	n^2
Vegard:	*Ja*
Fredrik:	*… fordi …* n^2 *er j bare 1+1+1 ... sånn, det er 3*
Vegard:	*… det blir 1GANGER 1*
Stein:	*Ja fordi DET er 9, og DET er 9 og DET er 9?*
Fredrik:	*Ja, og her er det 4, 4 og 4*
Vegard:	n^2 *er jo … eller hva sa du? Å ja,* $3n^2$

I gruppe A og B var elevene stort sett enige med hverandre, og det presenterte utdraget er et typisk eksempel på at de små uenighetene som var, stort sett ble uttrykt ved at man rettet på hverandres utsagn slik at disse ble mer presise. I gruppe C ble uenighet ved et konkret tilfelle håndtert på en helt annen måte: Frida hadde et helt korrekt resonnement, men ble blankt avvist av Sol helt uten matematisk argumentasjon. Utdrag 2 nedenfor illustrerer dette, og figur XX viser mønsteret som ble diskutert da dialogen foregikk:



Figur 23: Mønsteret som ble diskutert i utdrag 2, da Frida ble avvist uten faglig begrunnelse

<u>*Utdrag 2:*</u>

Frida:	*…vi er på den, da «… hvor mange prikker vil det være i figur 10? Vis hvordan du regnet det ut.»*
Mette:	*Ja, vent da, det blir jo … Nei det … kødda! Det er helt feil.*
Sol:	*Jeg vet ikke hvordan man skal … hvordan skal man egentlig skrive ... 10*
Frida:	*Det hadde vært 102 prikker!*
Mette:	*Ja. Hæ? 52 kanskje?*
Sol:	*Nei, hva er det du snakker om nå, Frida?*
Frida:	*Den derre figur 10 … For det hadde jo vært 10 i bredden OG lengden … og 10 rader, liksom …*
	[Stille]
Frida:	*… og se hvor mange prikker det ville være i figur 10… Det er 102!*
Sol:	*Neeeeeei!*
Frida:	*Det kunne vært.*
Sol:	*Nå gjetter du bare, lissom! 102?! Nei. Nå bare gjetter du.*

Forslaget til Frida var fullstendig korrekt, men hun fikk altså ikke sjans til å forklare seg, og ble heller ikke møtt med matematiske motargumenter. Dette førte til at ingen på gruppa gikk videre med denne løsningen, og ingen av eleven på gruppa løste oppgaven. Denne episoden var markant og lett å oppdage i første forskningsfase, og ga sammen med grunnlag i teori (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019) et klart insitament for å forsøke å implementere en kommunikasjonsform der elevene tydelig begrunnet enighet og uenighet.

Uttrykk for enighet

I alle gruppene ble enighet uttrykt omtrent på samme måte. Utdrag 3 fra gruppe B illustrerer hvordan:

Utdrag 3:

Hans:	*Hvis det er … der er det to bokser, holdt jeg på å si og det er på oppgave 3, så da er det …*
Per:	*Figurtall 3, ja …*
Hans:	*Ja.*
Liv:	*Ja.*
Hans:	*Så da er det … eh… 2n i annen, ja.*
Per:	*Ja.*
Hans:	*Ehm …*
Per:	*Ja, de to der.*
Liv:	*Ja.*

I første forskningsfase var det typisk at elevene brukte enten bekreftende ord som ja, «mm» eller at man fullførte hverandres setninger på en måte som viste at man tenkte likt. Elevene ga altså uttrykk for enighet, selv om de ikke uttrykte dette direkte ved for eksempel å si «Ja, jeg er enig». Teori (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019) viser at det kan være fruktbart for den matematiske diskursen å trene på kommunikasjon der enighet uttrykkes på en tydelig måte. Sammen med funnene rundt uttrykk for uenighet ga dette grunnlag for å implementere begrunnelse for både enighet og uenighet i første utviklingsfase.

Endret tenkning:

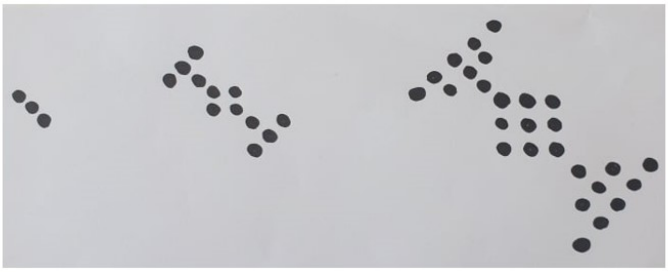
Det å uttrykke at man selv endret sin tenkning etter å ha hørt andres bidrag, kom ikke til syne gjennom samtalene i gruppene. Dette kan forklares med at det var få uenigheter i gruppe A og B. Dialogen i gruppe C var såpass preget av antydninger, underkjennelse av egne bidrag og mangel på struktur, at å uttrykke endret tenkning ikke var en realistisk forventning. Basert på teori (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019) som viser at det å uttrykke at man endrer mening er fruktbart for matematisk diskurs, ble det vurdert som riktig å fokusere på dette i første utviklingsfase.

Kommunikasjonsfeller:

Kommunikasjonsfeller som IRE-kommunikasjon eller raktkommunikasjon ble ikke funnet i noen av gruppene. Spesifikke tiltak for å hindre denne kommunikasjonsformen ble derfor ikke prioritert.

Refleksiv diskurs:

Allerede i første forskningsfase ble refleksiv diskurs registrert i elevgruppene A og B. Utdrag 4 gir et eksempel på en slik diskurs: Elevene diskuterte mønsteret som er vist i figur XX, og transkripsjonen som er gjengitt under bildet gir et eksempel på hvordan samtalen hørtes ut i gruppe B.



Figur 24: Ved diskusjon av dette mønsteret ble refleksiv diskurs registrert i gruppe B i første forskningsfase.

Utdrag 4:

Hans:	*Hvis du gjør det om … hvis du gjør de nederste om til kvadrater da, så blir det bare n*n, det blir 3n*^{2}*, siden du vet … her er det n*n, der er det n*n, og det er det også her, for det er oppgave 2*
	[Hans kaller nivået (n) for «oppgave», det vil si at n=2 i oppgave 2]
Hans:	*Så da er det 2 x 2, hvis vi bytter om på den ene prikken der og setter den opp der, hvis det …*
Liv:	*Ja!*
Hans:	*Så blir det et kvadrat, nytt kvadrat, og det samme er det her, hvis du bytter om den og setter`n opp dit, og den ... og …bare for å visualisere, eh… så blir det tre kvadrater… Sånn at det blir veldig lett å regne ut*
Per:	*Da blir det 3n*^{2}
Liv:	*Ja.*

I forkant av prøven hadde elevene arbeidet med både kvadrattall og trekanttall. I denne oppgaven hadde deler av mønsteret trekantform, selv om antallet prikker fulgte mønsteret for kvadrattall. Hans oppdaget dette og forklarte hvorfor figurene representerte kvadrattall ved å vise hvordan de kunne flytte på prikker for tydeligere å se dette. Samtalen viser hvordan Hans gjennom dialog deler sine refleksjoner omkring en alternativ måte å betrakte deler av figuren på, og at dette tilsynelatende bidrar til å skape mening for Liv og Per.

5.2 Kommunikasjon etter implementering

Empirien er hentet fra lydopptak gjort i ved prøvesamarbeid i de tre elevgruppene i andre og tredje forskningsfase, etter implementering av undervisning med fokus på hensiktsmessig kommunikasjon.

Deltakelse:

Kommunikasjonen i alle gruppene viste igjen høy grad av deltakelse, noe som befester funnene fra før implementeringen når det gjelder teoriene om sosiale normer, deltakelse og kommunikativ tilnærming (Mortimer & Scott 2003, Heggem 2015, Liljedahl 2019). Unntaket var en elev (Sol) som ved opptakene gjort i forskningsfase 3, generelt sett bidro svært lite konstruktivt til samarbeidet i gruppa. Dette anses som knyttet til en «dårlig dag» for eleven, og det viste seg at eleven hverken hadde spist frokost eller hadde med seg lunsj.

Uttrykk for enighet /Uttrykk for uenighet:

Samtaletrekkene som ble implementere i utviklingsfasene 1 og 2 omfattet altså det å utrykke enighet og uenighet og møte enighet/uenighet gjennom faglige begrunnelser. Enighet og uenighet kom nå stort sett til uttrykk på samme måte i alle gruppene: Man brukte sjelden frasene «Jeg er enig» eller «Jeg er uenig» direkte. I begge gruppene ble det gitt uttrykk for enighet og uenighet via andre formuleringer som er velfungerende også i dagligtale. Kommunikasjonen i gruppe A og B skilte seg altså ikke nevneverdig fra hvordan den fremsto i første forskningsfase. Dette kan muligens forklares ved at å lenge man har en kommunikasjon som fungerer og glir inn som en naturlig del av samtalen, er det liten grunn til å konstruere noe annet (finn tidligere forskning). Når det gjelder uttrykk for uenighet, ble det å avfeie forslag uten matematisk begrunnelse (slik det ble observert i gruppe C i fase 1) ikke registrert i noen av gruppene hverken i forskningsfase 2 eller 3.

Endret tenkning:

Det å uttrykke at man selv endret sin tenkning etter å ha hørt andres bidrag, kom heller ikke nå til syne. Dette var som nevnt et tiltak jeg selv syntes det var vanskelig å formidle. Det er derfor ikke overraskende at dette i liten grad kom til uttrykk. Det var likevel eksempler på at elever endret tenkningen sin basert på andres bidrag, selv om de ikke uttalte dette eksplisitt. Dialogen i utdrag 5 nedenfor fant sted da elevene diskuterte oppgaven vist i figur 25:

Figuren består av en halvsirkel og en del av et kvadrat.
Finn et uttrykk for omkretsen av figuren uttrykt med diameteren *d*.

Figur 25: Oppgaven elevene diskuterte da dialogen i utdrag 5 fant sted.

<u>Utdrag 5:</u>

Fredrik: *Det jeg ville gjort, er … å finne liksom … si at en side … en side er a ikke sant?*

Stein: *Ehhh ja.*

Fredrik: *Arealet av liksom … eller omkretsen, da er det jo 4a, ikke sant?*

Stein: *…et kvadrat …*

Fredrik: *Eller 3 … da er det 3a fordi det er de tre sidene … så må du finne omkrets av sirkelen, dele den på 2 … så du må ta den omkretsen der, ikke sant? … da er det 4a … pluss …*

Vegard: *Ja, men er det ikke egentlig bare å ta ... 3a pluss?*

Fredrik: *Pluss formelen for omkrets. Delt på 2.*

[…]

Stein: *… kan du si den en gang til …?*

Fredrik: *Du tar … for du vet at… for å finne omkrets så må du plusse alle sidene. Her har du 3 sider.*

Stein: *Det … ja men det er jo et kvadrat, så det er vel der og…*

Fredrik: *... men du ser, det HAR jo ikke en strek her, så … 3a ikke sant, og så må du finne formel for sirkel som er 2 pi ganger r, ikke sant? Delt på to*

Vegard: *Men vi skal bruke diameter … Diameter!*

Fredrik: *Åja!*

Stein: *Vi må finne r`er først, og det er jo ikke så …*

Fredrik: *Eller bare pi delt på …*

Vegard: *Jojojojo! Vi har 3d.*

Fredrik: *Ja*

Vegard: *I stedet for 3a*

Fredrik: *Ja, for det er jo diameteren. DET er jo diameter. Og så bruker du 1d … pluss… Ja, så regner du ut…*

Vegard: *For da blir det helt riktig.*

Utdraget viser en situasjon hvor Vegard oppdager en ny måte å uttrykke en matematisk sammenheng på, som Fredrik og Stein gir sin tilslutning til. Fredrik foreslår først å uttrykke kvadratets sidekanter som *a*, en ide gruppa holder fast ved en stund. Oppdagelsen til Vegard var knyttet til hvordan de kunne uttrykke kvadratets siden ved hjelp av sirkelens *diameter*. Når Vegard foreslår dette, tyder Fredrik sin respons at han endrer sin måte å tenke på.

Kommunikasjonsfeller:

Heller ikke i forskningsfase 2 og 3 ble traktkommunikasjon eller IRE-kommunikasjon registrert i noen av gruppene.

Refleksiv diskurs:

Utdrag 5 over, der elever endrer mening basert på andres bidrag, kan samtidig tjene som eksempel på at det foregikk en refleksiv diskurs, fordi elevene her delte ideer og løsninger med hverandre og gjennom denne dialogen skapte mening. Her kan det synes som om det skjedde et metakognitivt skift: Gruppa forsøkte først å kalle sidekantene i kvadratet for a, men oppdaget etter hvert at de kunne uttrykke disse ved å bruke d, siden kvadratets sider tilsvarer figurens diameter**.**

5.3 Tegn til matematisk autonomi og kjennskap til sosiomatematiske normer

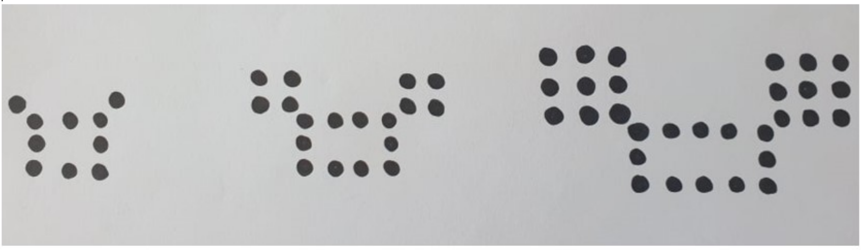
Empirien i denne delen er hentet fra lydopptak gjort i ved prøvesamarbeid i de tre elevgruppene i andre og tredje forskningsfase og observasjoner gjort i klasserommet i andre utviklingsfase. Tiltak for å få gruppene selv til å resonnere omkring hvorvidt løsningene deres kunne stemme ble som nevnt i kapittel 3 fokusert på i både andre og tredje utviklingsfase. Sosiomatematiske normer var tema kun i tredje utviklingsfase. Det analyseres i dette avsnittet med tanke på to forhold:

-om elevene syntes å stole på egne løsninger eller søkte bekreftelse fra lærer når de samarbeidet i vurderingssituasjon.

-hvordan elevenes kjennskap til sosiomatematiske normer kom til syne i deres samarbeid i vurderingssituasjon og når de arbeidet i klasserommet ved ordinære undervisning.

Autonomi før implementering:

Empirien er hentet fra lydopptakene foretatt i første forskningsfase. Ingen av gruppene søkte lærers bekreftelse på sine løsninger, men det var likevel forskjeller på hvordan uttrykk for matematisk autonomi kom til syne. I gruppe A og B kom autonomi til uttrykk gjennom dialoger der elevene viste at de var fornøyde med og stolte på egne løsninger. Utdrag 6 fra gruppe A nedenfor, der de diskuterte antall prikker i figur 10 ved dette mønsteret gir et eksempel på dette:



Figur 26: Mønsteret som ble diskutert da dialogen i utdrag 6 fant sted

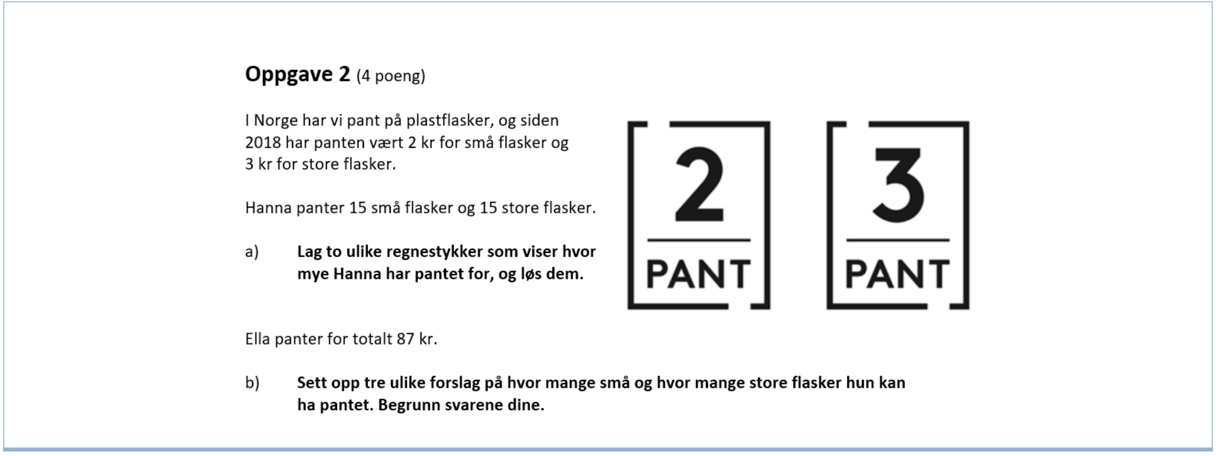
<u>Utdrag 6:</u>

Stein:	*Og hvordan skal man beskrive hvordan den utvikler seg …?*
Fredrik:	*Det er jo bare å ta … jeg vet ikke*
Stein:	*Kvadratet i midten økes med hvor mye figurtallet er … eller hvor mye n er*
Vegard:	*…3 n i annen ... 2 … Det er 2 x2 tre ganger. 2x2 blir 4 … 3 … 12 …*
Fredrik:	*Ja*
Vegard:	*Da er vi innafor på begge de to.*
Fredrik:	*Åssen er det her da …* [teller] *Da er det 3x3blir 9, … så det blir 27, ja … Så det er riktig …*
Stein:	*Ok, hvor mange prikker vil det være i figur 10?*
Fredrik:	*Da er det bare 10 … 6 pluss 2 ganger 10, 20… 6 pluss 20… 26… pluss… det er 226*
Vegard:	*Det ække verst!*
Stein:	*Jeg vet det.*

Vegard sin respons på Stein sitt forslag, der han sier «Da er vi innafor på begge de to» og Vegard og Stein sin respons på Fredrik sitt resonnement helt til slutt der de sier henholdsvis «Det ække verst!» og «Jeg vet det» viser illustrerer at elevene er sikre i sin sak og at de ikke tviler på løsningen sin. Dette betraktes som et uttrykk for matematisk autonomi. I gruppe C kom ikke autonomi til uttrykk i første forskningsfase. Elevene antydet forslag til løsninger, men viste i liten grad evne til å lande på felles løsninger og vurdere riktigheten av dem gjennom dialog i gruppa.

<u>Autonomi etter implementering:</u>

Empirien er hentet fra lydopptak gjort i forskningsfase 2 og 3 og fra observasjoner gjort i klasserommet ved ordinær undervisning i første og andre utviklingsfase. Før implementering kom det å aktivt vurdere egne løsninger altså til uttrykk i både gruppe A og B, og i de to siste opptaksrundene viste også gruppe C tendenser til autonomi. Dette kan blant annet sees i utdrag 7 fra forskningsfase 3. Elevene jobbet med oppgave b fra figuren nedenfor:



Oppgave 2 (4 poeng)

I Norge har vi pant på plastflasker, og siden 2018 har panten vært 2 kr for små flasker og 3 kr for store flasker.

Hanna panter 15 små flasker og 15 store flasker.

a) **Lag to ulike regnestykker som viser hvor mye Hanna har pantet for, og løs dem.**

Ella panter for totalt 87 kr.

b) **Sett opp tre ulike forslag på hvor mange små og hvor mange store flasker hun kan ha pantet. Begrunn svarene dine.**

Figur 27: Da dialogen i utdrag 7 fant sted, diskuterte elevene oppgave b

Utdrag 7:

Frida: *Jeg tror jeg fant ut av noe.*

Mette: *Fikk du til en til?*

Mette: *Jeg fikk … 17 x 3 som er 51 …*

Sol: *Vent da!*

Frida: *Også 2x12 som er 36 … og da blir det 51 +36 som er 87.*

Sol: *56?*

Mette og Frida: *51!*

Frida: *… og 36.*

Mette: Sånn, da har vi alle på plass! Nå følte jeg meg smart for en gangs skyld! Tenk det!

Sol: *Ja …*

Frida: *Nå er jeg stolt over meg sjøl! ... aldri vært flink i matte før!*

Mette sin replikk, der hun oppsummerer gruppas løsning ved å si «Sånn, da har vi alle på plass! Nå følte jeg meg smart for en gangs skyld! Tenk det!» betraktes som et uttrykk for autonomi, likeledes Fridas siste replikk der hun sier «Nå er jeg stolt over meg sjøl! ... aldri vært flink i matte før!». Mette uttrykker at hun er sikker på at løsningen de har funnet er riktig, og både hun og Frida viser det ved også å uttrykke stolthet over egne prestasjoner.

Ved ordinært arbeid i klasserommet observerte jeg en glidende overgang til at elevene i stadig større grad uttrykte autonomi. I starten av første utviklingsfase, hvor fokus nylig hadde blitt satt på det å vurdere egne løsninger, var det vanlig at elever/grupper rakk opp hånden etter å ha løst en oppgave og ville ha min vurdering på om den var riktig løst. Elevene kunne da for eksempel vise frem boka og be om en vurdering av det de hadde produsert skriftlig, ved å spørre: «Er dette riktig?». Etter å ha blitt møtt tilstrekkelig mange ganger med svar som: «Hva tenker du selv?» og «Hvordan du overbevise meg om at dette stemmer?», endret forespørslene seg. De kunne fortsatt rekke opp hånden, men forespørslene bar etter hvert preg av at de i større grad ville presentere løsningene sine og muntlig forklarte hvordan de hadde løst oppgaven i stedet for bare å vise frem boka si. Flere og flere uttrykte etter hvert også gjennom sine forklaringer at de var sikre på løsningene sine.

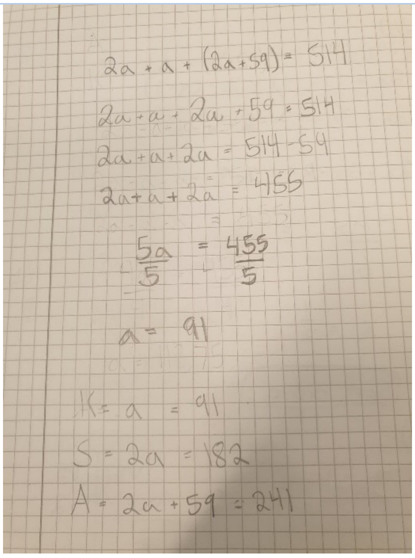
<u>Sosiomatematiske normer før implementering:</u>
Lydopptakene viste at ingen av gruppene vurderte effektivitet eller sofistikerthet av løsninger hverken i første eller andre forskningsfase. Så fort de hadde en løsning, slo de seg til ro med denne og gikk løs på neste oppgave. Dette var forventet, siden elevene på dette tidspunktet ikke var vant med å søke flere løsninger på oppgavene de løste, eller hadde blitt gjort kjent med begrepene effektive og sofistikerte matematiske løsninger.

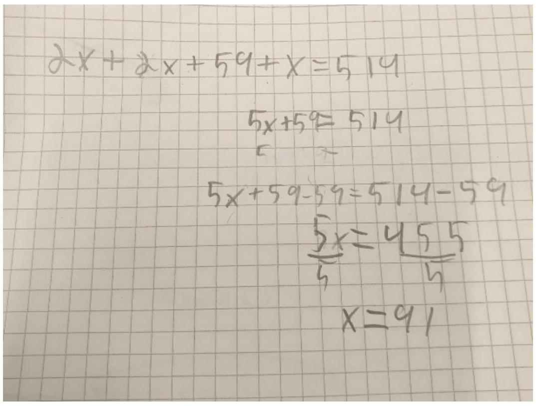
<u>Sosiomatematiske normer etter implementering:</u>
Observasjonene fra andre utviklingsfase viste at flere av elevene «kjøpte» konseptet «sofistikerte matematiske løsninger. Det å søke effektive løsninger komme ikke til syne i samme grad. Til tross for at jeg opprinnelig presenterte begrepet «sofistikerte matematiske løsninger» i en innpakning tilpasset ungdommenes språk, og elevene foreslo å bruke begrepet «klasse» som synonym for dette, la jeg merke til at flere av elevene likte å bruke ordet «sofistikert» og at det var dette begrepet de etter hvert benyttet i sine samarbeidsgrupper og i diskusjoner med meg. Dette begrepet og diskusjoner omkring ulike løsninger fikk særlig fotfeste i grupper i det øvre ferdighetsmessige sjiktet, det vil si hos elever med middels til høy og høy måloppnåelse. Flere tok kontakt med meg og ville vise meg løsninger de tenkte måtte være av det sofistikerte slaget. Følgende situasjon illustrerer dette: I en av de siste timene før tentamen rakk en elev opp hånda for å vise frem en løsning på et problem som han hadde løst og ville høre om jeg mente at løsningen hans var en sofistikert matematisk løsning! (Han brukte ordene «Vil du si at dette er en sofistikert matematisk løsning?», noe som også inspirerte til tittelen på dette prosjektet). Oppgaven elevene jobbet med, var følgende:

«Aksel, Kristian og Selim har til sammen 514 kroner.
Selim har dobbelt så mye som Kristian, mens Aksel har 59 kroner mer enn Selim.
Hvor mange kroner har hver av dem?»

Figur 28: Oppgaven elevene jobbet med da de på eget initiativ begynte å diskutere egne løsninger utfra forestillinger om de sosiomatematiske normene.

Eleven ved siden av ble brått interessert, og ville gjerne forsøke å løse oppgaven han også. Han gjorde dette, og de sammenliknet løsninger. Elevene startet så på helt eget initiativ en diskurs i forhold til hvem av dem som hadde den mest sofistikerte løsningen. Begge mente at egen løsning var mest sofistikert. Jeg minnet dem da på begrepet «effektiv matematisk løsning», og diskursen fortsatte. De ble etter hvert enige om at den første løsningen var mer sofistikert enn den andre, men at den siste løsningen vant når det kom til effektivitet. Elev nr. to hadde nemlig brukt mindre spalteplass enn den første. Figurene xx og xx nedenfor viser de to elevenes løsninger:





Figur 29: De to elevenes løsninger som var grunnlag for deres diskusjon om hvem av dem som hadde den matematisk mest sofistikerte løsningen.

Lydopptakene fra siste forskningsfase viste at elevene i gruppe B og C ikke diskuterte ulike løsningsmetoder for oppgavene de samarbeidet om. Det var derfor ikke mulig å finne spor etter implementeringen av sosiomatematiske normer i disse gruppene. I gruppe A derimot, var det flere eksempler på diskurs som kunne tyde på at elevene til en viss grad hadde implementert forestillinger knyttet til begrepet sosiomatematiske normer. To av elevene i gruppa var spesielt ivrige på dette og ønsket å finne frem til sofistikerte løsninger. I diskursen deres ble også forskjellen på effektiv og sofistikert løsning berørt. Utdrag 8 fra arbeidet med tentamensoppgave nr. 2 illustrerer at elevene diskuterer og ønsker å lete etter flere løsningsmetoder:

Utdrag 8:

Fredrik: *[...] Det jeg ville gjort, er å sette opp (15*3) + (15*2). Det går jo an. Men hvis man gjør 15 til x, så kan du ta … eeeh…*

Vegard: *Jeg ville nok skrivi x først og SÅ putte inn talla etterpå. Så de vet hva slags formel vi bruker.*

Fredrik: *Vi kan ta 15x + 15y, og da vet vi at 2 er y og 3 er … 2 er lik y og 3 er lik x… så da har du jo… så det er en mulighet for et regnestykke.*

Vegard: *Ja. Det ER riktig bygd opp.*

Fredrik: *Det blir helt riktig.*

Vegard: *Eeeh, man kan egentlig velge*

Fredrik: *Den der ser jo best ut, på en måte, mer avansert ut, og da ser de at du liksom …*

Vegard: *At du …*

Fredrik: *Det ser ut som du er smartere, på en måte.*

Vegard: *Mer sofistikert.*

I starten av dialogen har gruppa løst en oppgave ved å finne to regnestykker som er riktige i forhold til det oppgaven etterspør, men Fredrik uttrykker at siden de har god tid, kan de prøve å utvikle løsningen sin. Tilsynelatende virker det som om de forsøker seg på en form for generalisering av svaret sitt. De konkluderer så med at oppbygningen de har kommet fram til er riktig, og i slutten av dialogen ser vi hvordan de knytter dette til sosiomatematiske normer for sofistikerte løsninger, når Fredrik sier: «Det ser ut som du er smartere på en måte» og Vegard svarer: «Mer sofistikert»

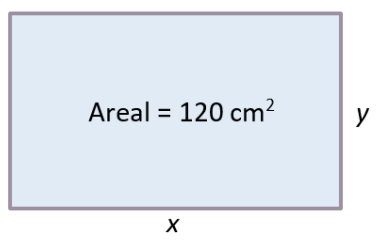
I utdrag 9 nedenfor, mellom de samme elevene som i utdrag 8, fant følgende dialog sted. Elevene hadde på dette tidspunktet løst oppgaven*,* men fortsatte likevel diskusjonen i forhold til om de kunne bruke en annen metode. Dialogen handlet om tentamensoppgave 1, og startet med at elevene ba om veiledning fra lærer (L). Oppgaven de jobbet med, var denne:

Et rektangel har et areal på 120 cm^2 og sider som er *x* cm og *y* cm lange. Se figur.

Hvilken verdi kan *x* og *y* ha når

- ***x* er lengre enn *y***
- ***y* er større enn 4**
- ***x* og *y* er hele tall**

Sett opp tre ulike forslag.
Begrunn forslagene dine.



Figur 30: Oppgaven elevene jobbet med da dialogen i utdrag 9 fant sted

Utdrag 9:

Fredrik:	*Her er alle primtalla 2, 2, 2, 3, 5 … og da kan man jo … ja da kan man ta … 5*24… men hvordan kan vi gjøre det mer sofistikert?*
	[…]
Vegard:	*Vi kan jo skrive opp den tallinja her da, og så bare plukke ut fra den, og så skrive opp til en formel …*
	[…]
Fredrik:	*Hva da?*
Vegard:	*Da har du jo tatt … eeh primtalla og så ganga de her og de her. Og da har vi fått svaret UT av primtalla.*
Fredrik:	*Men da må du jo liksom … legge sammen de eller et eller annet … 2*2*2 det er jo 8. Ganger 8, nei ganger 15.*
Stein:	*Mm*
Fredrik:	*Mmh da får du jo, du får ikke … jo eller det blir jo riktig da, men.*
Vegard:	*Ja. Da har vi fått svaret UT av en metode, liksom, vi har ikke bare tatt det fra hjernen bare, bare tenkt oss ut av det …*
Fredrik:	*Ja. Det er jo en case, den var jo litt smart … Da kan man bare sette opp den tabellen først, og så den og så den… og så bare huker man… legger man sammen de og så de. Si! Ehm … okay.*

Gruppa hadde altså allerede funnet en løsning, men ønsket å finne flere. Etter å ha fått et hint, fortsatte de dialogen sin og vurderte til slutt den metoden de fikk et hint om som en «smartere» løsning enn den de først hadde arbeidet med. Denne episoden tyder på at elevene i gruppe A hadde utviklet forestillinger om sosiomatematiske normer og også evnet å bruke dem for å søke flere og mer sofistikerte løsninger på matematiske problemer. De tidligere beskrevne tegnene til matematisk autonomi, hos elevene, understøttes også gjennom dette. Utdrag 9 tjener, foruten å beskrive hvordan elevene jakter på en sofistikert løsning, også som eksempel på at det foregikk et metakognitivt skift: Elevene oppdaget hvordan de gjennom primtallsfaktorisering kunne finne alle mulighetene på en systematisk måte. De fikk drahjelp i form av et stikkord, men resonnementet stod de for selv.

5.4 Elevenes tanker om vurderingssituasjonene og beskrivelse a resultatutvikling

I dette avsnittet beskriver jeg elevenes reaksjoner på ny organisering av vurderingssituasjoner og presenterer kort elevenes resultatutvikling i prosjektperioden. Det understrekes at sistnevnte ikke er noe forsøk på å antyde årsakssammenhenger. Læringsmuligheter knyttet til satsingsområdene i prosjektet vil behandles i diskusjonen (6.0).

Elevenes tanker om gjennomføring av vurderingssituasjonene:

Flesteparten av de 27 elevene i klassen uttrykte gjennom uformelle samtaler tilfredshet med den nye måten å gjennomføre prøver på. Dette med tre unntak: To av de tre elevene som var på gruppa med det svakeste utgangspunktet resultatmessig var ikke fornøyde med organiseringen. Det samme gjaldt en elev som lå i grenseland mellom to grupper og som endte opp med å bli plassert på en gruppe med elever med et svakere faglig utgangspunkt enn seg selv. Dette samsvarte med oppfatningen jeg hadde i forkant, nemlig at elevene stort sett ikke ønsket å jobbe sammen med svakere elever i en vurderingssituasjon. Det samsvarer også med funnene til Fjeldly (Fjeldly, 2022), der det kommer fram at ungdomsskoleelever foretrekker å samarbeide med elever på samme eller høyere faglige nivå. Det elevene trakk frem som særlig positivt ved den nye organiseringen, var at det føltes trygt å kunne diskutere løsningene med andre og at flere hadde lært noe gjennom samarbeidet de hadde vært en del av. Når det gjaldt heldagsprøven i tredje forskningsfase ble det også nevnte at den nye organiseringsformen var med på å bryte opp og gi variasjon i en lang dag med matematisk arbeid.

Resultatutvikling vår 2021-høst 2022:

For å beskrive elevenes resultatutvikling i perioden prosjektet foregikk, har jeg sammenlignet elevenes karakterer på heldagsprøvene våren 2021 og høsten 2022. Heldagsprøve vår 2021 ble gjennomført før oppstart av prosjektet, mens heldagsprøven høst 2022 markerte slutten på prosjektperioden. Tabellen nedenfor illustrerer resultatutviklingen i perioden. Kolonnene merket «Endring» viser om elevene fikk høyere, lik eller lavere karakter enn på forrige heldagsprøve. Endringene angis med tallkoder som følger: Kode 1.0 tilsvarer en hel karakter opp/ned, for eksempel fra ren 4 til ren 5. Kode 0.5 tilsvarer en halv karakter opp/ned, for eksempel fra 4- til 4+. Kode 0.25 tilsvarer en kvart karakter opp/ned, for eksempel fra 3 til 3+. Understreket verdi angir høyere karakter etter prosjektperioden, verdi skrevet med normal skrift angir uendret karakter og kursivert verdi indikerer lavere karakter. Rute merket - angir elev som ikke deltok på den første prøven.

Elev nr.	Vår 2021	Høst 2022	Endring	Elev nr.	Vår 2021	Høst 2022	Endring
1	5	5	0	15	3-	3	0.25
2	4-	4+	0.5	16	2	3-	0.5
3	4	5	1	17	5	5+	0.25
4	3	4	1	18	5	6	1
5	5-	5+	0.5	19	3	4	1
6	2	3	1	20	4-	4	0.25
7	4	5+	1.25	21	4	5	1
8	2	2-	*0.25*	22	3	5	2
9	2	3	1	23	3+	5	1.75
10	4	4	0	24	5	5+	0.25
11		5+	-	25	5	6	1
12	3	3	0	26	3-	4-	1
13	5	5	0	27	5-	5	0.25
14	2+	3	0.5				

Tabell 4 viser de 27 elevenes resultatutvikling i prosjektperioden, det vil si en sammenlikning av resultater fra heldagsprøven våren 2021 og høsten 2022.

En elev gikk ned i karakter i prosjektperioden. For fire elever var karakteren uforandret, mens den for 21 av elevene økte. Tre av elevene økte med mer enn en hel karakter, hhv 1.25, 1.75 og 2. Ni elever økte med en hel karakter, mens resten av økningene var på mindre enn en hel karakter. Eleven som fikk lavere karakter, gikk ned med 0.25.

6.0 Diskusjon

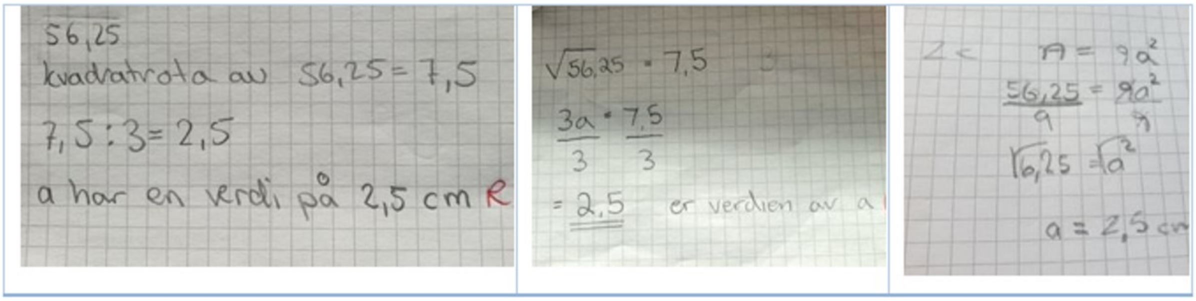
I avsnitt 6.1 diskuterer jeg mine erfaringer med selve utviklingsarbeidet og den delen av prosjektet som hovedsakelig er knyttet til første del av forskningsspørsmålet «*Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?»* Avsnitt 6.2 vies andre del av forskningsspørsmålet; «*Hvordan kan slike endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?».* Her vil jeg gå i dybden på det jeg betrakter som illustrativt for hovedfunnene mine. I analysen var det naturlig med et skarpere skille mellom det som var knyttet til kommunikasjon og det som var knyttet til sosiomatematiske normer og matematisk autonomi, da analysen i større grad gjenspeilet strukturen til intervensjonene. I diskusjonsdelen vil leseren oppdage at disse skillene i større grad er hvisket ut. Dette er imidlertid naturlig på grunn av den sterke sammenhengen mellom begrepene. Til slutt i 6.2 diskuterer jeg også kort sammenhengen mellom utviklingsarbeidet og observerte endringer i elevkommunikasjonen. Avsnitt 6.3 omhandler hvordan prosjektet har bidratt til læring sett i lys av kjerneelementene representasjon og kommunikasjon og resonnering og argumentasjon. Til slutt tar avsnitt 6.4 for seg egne refleksjoner og videre implikasjoner for egen og andres vurderingspraksis.

6.1 Utviklingsarbeidet

Prosjektets utviklingsarbeid der jeg søkte svar på spørsmålet *«Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?»* hadde altså et aksjonsforskningsdesign. Jeg anser på generelt grunnlag det å jobbe med aksjonsforskning i skolen som verdifullt, fordi læreren kontinuerlig må tilstrebe å ta hensyn til elevenes respons på undervisningen. Dette står sentralt i tanken om å tilpasse opplæringen slik at man tar utgangspunkt i elevenes forkunnskaper og hvordan de lærer ved planlegging av undervisning (Utdanningsdirektoratet, 2022). Å drive aksjonsforskning kan være en måte å møte dette kravet på. Utviklingsfasene i prosjektet fulgte Goodchild (2013) sin modell. Modellen ble som beskrevet i kapittel 3, blant annet valgt på grunn av potensialet for å implementere både forskning (globale teorier) og kunnskap om egne elever (lokale teorier) i aksjonsforskningssyklusen. Likeledes åpner syklusene i modellen med sine refleksjons- og feedbackmekanismer for å kunne justere pågående prosesser og implementere nye tiltak undervegs. Jeg vil videre diskutere hvordan dette kom til uttrykk, gjennom to konkrete eksempler hentet fra noen av utviklingsarbeidets fem ulike faser. En erfaring jeg gjorde meg, var at det ikke alltid er skarpe tidsmessige skiller mellom de ulike fasene når man arbeider etter Goodchild (2013) sin modell. Jeg mener dette kan tilskrives de mange syklusene som virker sammen i modellen, og det påvirket i noen grad både det praktiske arbeidet og beskrivelsene av de ulike fasene som ble gitt i kapittel 3. Dette kan være nyttig informasjon å ta med seg i den videre lesningen.

Det første eksempelet handler om hvordan lokale og globale teorier ble brukt for å binde sammen prosjektets to første faser. I første forskningsfase gjorde jeg lydopptak for å få et inntrykk av kommunikasjonen i elevgruppene, før tiltakene for å forbedre kommunikasjonen ble implementert. Dette ga et mer nyansert bilde av hvordan elevene kommuniserte i utgangspunktet. Min kunnskap begrenset seg før analysen av de første lydopptakene til kunnskap om klassens plenumskommunikasjon, og det viste seg svært nyttig å se hvordan elevene kommuniserte i grupper. Her vil jeg trekke frem tilfellet der en elev ble blankt avvist uten begrunnelse (episoden diskuteres mer detaljert knyttet til kommunikasjon i avsnitt 6.2). Dette ville, basert på kjennskapen til de sosiale normene i klassen, aldri forekommet i en plenumsdiskusjon. Etter første forskningsfase hadde jeg dermed bakgrunnskunnskap både om hvordan elevene kommuniserte i helklassesamtaler og i grupper. Dette kunne så sammen med teori (Chapin m.fl. 2013, Cobb m.fl. 1997, Kazemi & Hintz 2019 & Wæge 2015) om hensiktsmessig kommunikasjon brukes som begrunnelse for videre tiltak. Lokale og globale teorier i samspill ga slik et solid grunnlag for å beslutte hva første utviklingsfase skulle bestå i. Modellen til Goodchild (2013) fungerte altså som intendert i tidlige faser av prosjektet.

Det andre eksempelet handler om hvordan fleksibiliteten og feedbackmekanismene i Goodchild (2013) sin modell tillot at oppdagelser gjort undervegs kunne innlemmes i prosjektet i overgangen mellom fase tre og fire. Slik ble det hele en levende prosess som godt gjenspeilet den induktive delen av prosjektet, og som lot meg ta høyde for den komplekse virkeligheten som Postholm og Jacobsen (2019) beskriver undervisningshverdagen som: Elevarbeidene som ble analysert i andre forskningsfase viste seg å være godt egnet som grunnlag for å snakke direkte med elevene om de sosiomatematiske normene for effektiv og sofistikert matematisk løsning, som beskrevet av Yackel og Cobb (1996). Elevarbeidene viste en bredde hva gjaldt både effektivitet og sofistikerthet, og å bruke elevløsninger som eksempler hadde jeg fra tidligere opplevd som svært effektivt og noe som skapte interesse hos elevene. I avsnitt 3.2.4 (uke 4) beskrev jeg hvordan jeg viste frem tre korrekte elevløsninger på en fellesoppgave og brukte de disse som grunnlag for en plenumsdiskurs som handlet om å tolke presenterte løsninger og beskrive forskjeller og likheter mellom dem. Oppgaven gikk ut på å finne verdien til a i et kvadrat med sidelengde 3a når kvadratets areal var 56,25 cm^2. Elevene kom med synspunkter på hvilken av de tre løsningene som var «best», og jeg ga også etter hvert begrunnet uttrykk for hvilke kvaliteter ved de tre løsningene jeg satt pris på, i lys av begrepene sofistikerte og effektive løsninger (selv om figuren ble presentert i avsnitt 3.2.4 gjentas den nedenfor for at leseren skal slippe å bla tilbake):



Figur 31: Elevløsningene som ble lagt frem som grunnlag for plenumsdiskusjon (også vist i avsnitt 3.2.4). Løsningene omtales i teksten nedenfor som løsning 1, 2 og 3 lest fra venstre mot høyre.

Noe av det som kom fram gjennom diskursen, var dette: Første linje i løsning 1 og 2 er like metodisk sett, men ulike når det gjelder bruk av matematiske notasjoner. I løsning 1 skrives ordet «kvadratrot», mens symbolet for kvadratrot brukes i løsning 2. Basert på dette oppleves løsning 2 som mer sofistikert enn løsning 1. I andre linje settes det i løsning 2 opp likning for å finne a, mens ren tallregning brukes i løsning 1. Løsning 2 kan oppleves som ryddigere og lettere å henge med på, trolig fordi notasjonen a er med i oppsettet, og man lettere forstår hva oppgaveløseren ønsker å finne ut. Dette kan sees på som mer sofistikert, men kan også være en løsning som er mer effektiv hva formidling angår. Likningen som settes opp i løsning 2 forblir imidlertid tilsynelatende uløst (man viser for eksempel ikke hvordan man forkorter), før svaret angis i linje 3. I tredje linje sees igjen bruk av vanlige ord både i løsning 1 og 2, trolig fordi det hos en del elever er strekt innprentet at man skal skrive tekstsvar på tekstoppgaver. Ved sammenlikning med løsning 3, sees det at man her har tatt utgangspunkt i formelen for areal av kvadratet (som eleven laget tidligere i oppgaven). Man har så utnyttet denne ved å fylle inn alle kjente verdier og slik satt opp en likning. Denne er forbilledlig løst ved hjelp av forkorting, uttrekk av kvadratrot på begge siden av likhetstegnet og et kort og konsist svar. Løsning 3 oppleves som både sofistikert og effektiv. Gjennom denne felles diskursen ble altså begrepene sofistikert og effektiv løsning innført gjennom konkrete eksempler fra elevenes egne arbeider, på et nivå som var godt egnet til å introdusere begrepene for elevene. Som analysen viste, tok flere av elevene i bruk begrepene, noe diskusjonen i avsnitt 6.2.6 også illustrerer.

I artikkelen til Yackel og Cobb (1996) var lærerne lite konkrete i sin formidling av de sosiomatematiske normene. Disse ble stort sett formidlet gjennom hint og antydninger, og jeg hadde et ønske om å være tydeligere i egen formidling av disse. Goodchild (2013) sin modell ga meg gjennom sin fleksible tilnærming handlingsrom til å gripe tak i elevens løsninger og innlemme disse i prosjektet, for å oppnå nettopp denne graden av tydelighet i formidlingen. Foruten å eksemplifisere modellens egnethet i forhold til fleksibilitet og feedback, er dette nok et eksempel på at modellen la til rette for samspill mellom globale og lokale teorier.

6.2 Kommunikasjon, matematisk autonomi og sosiomatematiske normer

I dette avsnittet diskuteres den delen av empirien som besvarer andre del av forskningsspørsmålet, nemlig *«Hvordan kan slike (kommunikative) endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?».* Her konsentrerer jeg meg om hovedfunnene mine. Jeg vil utdype innholdet i dem og forklare hvordan egne funn stemmer med eller står i kontrast til litteraturen.

6.2.1 Høy deltakelse gjennom hele prosjektet

Resultatene viste gjennomgående høy grad av deltakelse i alle gruppene i alle tre forskningsfasene. Ved et par tilfeller var deltakelsen lav hos enkelte elever, men dette hadde utenforliggende årsaker. Den høye deltakelsen kan tilskrives de sosiale normene og det kommunikative grunnlaget i klassen: De sosiale normene tilsier blant annet aktiv muntlig deltakelse, og det Mortimer og Scott (2003) kaller en dialogisk og interaktiv kommunikativ tilnærming, hvor flere synspunkter får oppmerksomhet i klasserommet og alle elevene tillates å delta aktivt, allerede før prosjektet startet var rådende i klasserommet. Det er derfor ikke overraskende at deltakelsen i diskusjonene var gjennomgående høy. Deltakelsen kan også tilskrives det faktum at elevene fra før av var godt vant med kommunikasjonsfremmende diskusjons- og arbeidsmåter som for eksempel bruk av Samtaletrekk (Wæge, 2015), Individuell-Gruppe-Plenum (Heggem, 2015) og Tenkende klasserom (Liljedahl, 2019).

Valg av elevaktiviteter antas også å ha hatt betydning for deltakelsen. Som forklart i kapittel 4, var det et mål at disse skulle fremme kommunikasjon. Oppgavene hadde i overveiende grad såkalt problemløsningskarakter, det vil si at elevene ikke kunne bruke en på forhånd definert og innlært metode for å løse dem. I forhold til Stein og Smiths kategorisering av oppgaver i forhold til kognitive krav (Stein & Smith, 2011), stilte majoriteten av oppgavene det ble jobbet med arbeidet med i perioden, høye kognitive krav til elevene. Slike oppgaver vil i større grad legge til rette for kommunikasjon og deltakelse enn oppgaver med lavere kognitive krav.

Så hvilken ny informasjon sitter jeg nå igjen med når det kommer til grad av deltakelse? Før gjennomføring av utviklingsarbeidet hadde jeg god oversikt over elevenes deltakelse i muntlige plenumsaktiviteter, og visste at deltakelsen her var høy. Jeg hadde også et visst inntrykk av elevenes deltakelse i gruppediskusjoner, f.eks. i forbindelse med arbeid etter tenkende klasseroms-modellen. Også her satt jeg med et inntrykk av at deltakelsen var god, men hadde ikke systematisk undersøkt dette. Gjennom denne aksjonsstudien fikk jeg derfor bekreftet at elevene deltar aktivt også i gruppediskusjoner. I tenkende klasseroms-modellen arbeider elevene i tilfeldige grupper, mens jeg i dette prosjektet brukte homogene grupper. Prosjektet ga meg derfor også nyttig informasjon om elevenes deltakelse i ikke-tilfeldige, homogene grupper. På bakgrunn av det jeg nå har sett, vil det ikke være behov for vider tiltak for å bedre deltakelsen når det arbeides på den måten som her er undersøkt.

6.2.2 Uttrykk for enighet og uenighet delvis forbedret etter implementering av tiltak

Innenfor denne kategorien hadde jeg to hovedfunn. Uttrykk for enighet og uenighet er knyttet til prinsippene for hensiktsmessig kommunikasjon (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019) som ble implementert i første utviklingsfase. Intensjonen med å forsøke å sikre en tydelig kommunikasjon omkring enighet og uenighet, var å bidra til refleksiv diskurs i gruppene. Det ene hovedfunnet her var at elevene i stor grad allerede hadde innarbeidede måter å uttrykke enighet og uenighet på, som gjenspeilet deres naturlige språk. Elevene brukte i liten grad setningene «Jeg er enig fordi» eller Jeg er uenig fordi» i sine diskusjoner, heller ikke etter implementeringen der det ble satt fokus på å bruke nettopp disse frasene for at elevene tydelig skulle begrunne eget syn. Min vurdering er at det var vanskelig å endre dette, nettopp fordi gruppene allerede hadde etablerte og velfungerende uttrykksmåter. I det store og hele kom altså uttrykk for enighet og uenighet til syne på måter som bidro til refleksiv diskurs. Med ett unntak, som neste avsnitt viser.

Det andre hovedfunnet var at man kan fremme hensiktsmessig kommunikasjon ved å sette fokus på situasjoner der kommunikasjonen ikke er like hensiktsmessig. En gruppe kan gå glipp av riktige resonnementer dersom man ikke gir de man jobber sammen med anledning til å begrunne, noe som kan føre til at en reell diskusjon ikke kommer i gang. Episoden med mønsteroppgaven i første forskningsfase, der Frida blir avvist av gruppa si til tross for at hun tenker helt riktig, illustrerte dette tydelig: Frida ser mønsteret i figuren og klarer å regne ut hvor mange prikker figur nr. 10 vil ha. Hun foreslår for gruppa at dette må være 102 prikker. Mette virker åpen for å få i gang en diskusjon når hun svarer litt spørrende «Ja, Hæ? 52 kanskje», men Sol overkjører dem begge ved å svare: «Nei, hva er det du snakker om nå, Frida?». Frida gir seg ikke så lett, og prøver å forklare hvordan hun tenker og svarer: *«Den derre figur 10 … for det hadde jo vært 10 i bredden OG lengden… og 10 rader, liksom… og […] hvor mange prikker det ville være i figur 10… det er 102!* Her resonnerer hun tydelig og virker sikker. Likevel vinner Sol frem når hun igjen protesterer og til slutt også beskylder Frida for bare å gjette, når hun sier: *«Nå gjetter du bare, lissom! 102?! Nei. Nå bare gjetter du»*. Å anonymt trekke denne episoden frem for klassen og forklare hvilke negative konsekvenser dette hadde både for kommunikasjonen og for gruppas arbeid med de matematiske løsningene, illustrerte dette tydelig. Liknende tilfeller ble ikke registrert senere i prosjektet. Utover dette ble det altså ikke registrert noen reelle endringer i kommunikasjonen knyttet til uttrykk for og begrunnelse av enighet og uenighet. Det var imidlertid svært nyttig å erfare at det i gruppesammenheng kan oppstå situasjoner som dette. I plenumsdiskusjoner er det svært lite sannsynlig at en avvisning som dette ville forekommet i denne klassen, da det ville bryte totalt med de sosiale normene å avvise en medelev på denne måten. Dette mener jeg kan være et nyttig funn også for andre; at det i klasser der plenumsdiskusjonene tilsynelatende er fruktbare, og de sosiale normene tilsier at man ikke avfeier andres synspunkter uten faglig begrunnelse, likevel kan forekomme slike episoder når elevene snakker seg imellom.

6.2.3 Refleksiv diskurs ble registrert i to grupper før implementering, etter hvert i alle

Forekomst av refleksiv diskurs (Cobb m.fl., 1997) ble som beskrevet i analysen registrert i gruppe A og B både før og etter implementering av tiltak. I gruppe C så jeg først tegn til dette i den siste forskningsfasen. At refleksiv diskurs forekom før implementering, kan knyttes til den samme teorien som ble brukt for å forklare høy deltakelse, nemlig klasserommets etablerte sosiale normer, tidligere bruk av noen samtaletrekk (Wæge 2015) i lærerstyrte samtaler og lærers kommunikative tilnærming (Mortimer & Scott, 2003), samt at kommunikasjon lenge hadde stått i fokus i klassen gjennom arbeidsformene til Heggem (2015) og (Liljedahl, 2019). Som eksempel på refleksiv diskurs som forekom før tiltak ble implementert, vil jeg trekke fram diskursen gjengitt i utdrag 4, der gruppe B diskuterer en figurtallsoppgave hvor mønsteret ligner en trekant, selv om antallet prikker følger mønsteret for kvadrattall og gå i dybden på denne. Mønsteret som ble diskutert finnes som nevnt i figur 23. Dialogen illustrerer hvordan Hans oppdager dette og forklarer de andre på gruppa hvorfor figurene representerer kvadrattall. Han gjør dette ved først å forklare de andre at de kan flytte på prikker for tydeligere å se kvadratmønsteret, når han sier: «*Hvis du gjør det om … hvis du gjør de nederste om til kvadrater da, så blir det bare n*n, det blir* $3n^2$*, siden du vet… her er det n*n, der er det n*n, og det er det, også her, for det er oppgave 2* [Hans kaller nivået (n) for oppgave, det vil si at n=2 i oppgave 2 og så videre]. Her får han ikke noe særlig respons fra de andre. Da fortsetter han ved å forklare dette enda tydeligere, når han sier at de kan se dette enda lettere ved fysisk å flytte på prikkene: «*Så da er det 2 x 2, hvis vi bytter om på den ene prikken der og setter den opp der, hvis det…*» Liv later til å forstå dette, og uttrykker det ved å si «Ja», før Hans fortsetter: «*Så blir det et kvadrat, nytt kvadrat, og det samme er det her, hvis du bytter om den og setter`n opp dit, og den... og …bare for å visualisere, eh… så blir det tre kvadrater… Sånn at det blir veldig lett å regne ut*». Per uttrykker at han, gjennom å fokusere på Hans sin ide har forstått, ved å konkludere: «*Da blir det* $3n^2$*.* Deretter gir også Liv sin tilslutning til dette. Jeg mener at dette utdraget viser at Liv og Per, gjennom å fokusere på Hans sin innsikt og strategi, gjennom denne diskursen gjennomgikk metakognitive skift og gjennom dette oppnådde ny forståelse. Derfor kan diskursen ifølge Cobb m.fl. (1997) og Brendefur og Frykholm (2000) karakteriseres som refleksiv. At refleksiv diskurs i siste forskningsfase også forekom i gruppe C, kan muligens tyde på at de implementerte kommunikative tiltakene og/eller klassediskusjonene knyttet til sosiomatematiske normer kan ha virket positivt inn på diskursen. Det kan imidlertid også ha helt andre årsaker, som for eksempel at elevene etter hvert ble tryggere på å jobbe sammen.

6.2.4 Endret tenkning ble uttrykt gjennom refleksiv diskurs og bidro tidvis til autonomi

Uttrykk for endret tenkning er knyttet til prinsippene for hensiktsmessig kommunikasjon (Chapin m.fl. 2013, Drageset 2014, Wæge 2015 og Kazemi & Hintz 2019) som ble implementert i første utviklingsfase. Empirien inneholdt ikke tegn til at elevenes *måte* å uttrykke endret tenkning på hadde utviklet seg gjennom studien. Som nevnt kan dette henge sammen med at jeg selv fant dette tiltaket litt kunstig å formidle, og derfor ikke la ned like stor innsats i å stimulere til endring på dette punktet. Lydopptakene ga likevel eksempler på at elevene uttrykte endret tenking, selv om de ikke uttalte direkte at de endret tenkning etter å ha hørt andres bidrag. Dette kan, som når det gjaldt uttrykk for enighet og uenighet, henge sammen med at det å endre mening falt naturlig for elevene, og at de av den grunn ikke hadde behov for å poengtere dette spesielt. Gjennom analysen så jeg at uttrykk for endret tenkning og det som gjenkjennes som refleksiv diskurs i noen tilfeller forekom i de samme elevdialogene. Slike dialoger kunne også føre til at matematisk autonomi kom til uttrykk hos elevene.

Som eksempel på en slik dialog vil jeg trekke frem dialogen der gruppe A sammen oppdager hvordan de kan uttrykke omkretsen til en figur (se figur 23) ved hjelp av sirkelens diameter. Selv om det var gitt en bestilling om nettopp dette i oppgaveteksten, forsto ikke elevene denne sammenhengen før de oppdaget dette sammen gjennom sin refleksive diskurs: Først foreslår Fredrik at de skal kalle sidene i kvadratet for a år han sier: «*Det jeg ville gjort, er … å finne liksom … si at en side … en side er a, da, ikke sant?»* Han fortsetter etter en stund med «*… da er det 3a fordi det er de tre sidene … så må du finne omkrets av sirkelen, dele den på 2 … så du må ta den omkretsen der, ikke sant? Da er det 4a … pluss …»* Her glemmer Fredrik at den ene av figurens sider er en halvsirkel, noe Vegard later til å se, og han sier: *«Ja, men er det ikke egentlig bare å ta ... 3a pluss?* Vegard uttrykker med dette at han forstår at formelen kun skal inneholde tre av kvadratets sider. Fredrik fanger ikke opp dette, og fortsetter sitt resonnement der han sier at de også må addere formelen for omkrets av en halv sirkel: «*Pluss formelen for omkrets. Delt på 2».* Så blir det stille litt, før Stein kommer på banen og spør: «*… kan du si den en gang til …?* Fredrik sier: *«Du tar … for du vet at … for å finne omkrets så må du plusse alle sidene. Her har du 3 sider.»* Stein viser at han ennå ikke har forstått figuren helt når han sier:

«Det … ja, men det er jo et kvadrat, så det er vel der og …». Her får han igjen hjelp av Fredrik, som forklarer og peker: «*... men du ser, det HAR jo ikke en strek her, så … 3a ikke sant, og så må du finne formel for sirkel som er 2 pi ganger r, ikke sant? Delt på to».* Vegard, som tilsynelatende har sittet en stund og tenkt, utbryter da plutselig: «*Men vi skal bruke diameter … Diameter!* Fredrik og Stein viser at de forstår dette, og Stein foreslår noe de kan gjøre videre: *«Vi må finne r`en først, og det er jo ikke så …».* Vegard har fortsatt ikke sluppet egen tankerekke, og avbryter dem med: *«Jojojojojo! Vi har 3d.* Nok en gang får han støtte av Fredrik, som bekrefter, før Vegard fortsetter: *«I stedet for 3a».* Fredrik viser nå ende tydeligere at han har forstått, når han sier: *«Ja, for det er jo diameteren. DET er jo diameter. Og så bruker du 1d … pluss … Ja, så regner du ut…»* Vegard viser så gjennom sin neste kommentar at ha er trygg på at det de nå har funnet er riktig, når han avslutter med: *«For da blir det helt riktig».* (Stein bekreftet ikke noe mer her, og etter kun å ha analysert samtalen, var jeg ennå ikke sikker på om Stein virkelig hadde forstått resonnementet som Vegard kom med, og som Fredrik tydelig viste forståelse for. Da jeg siden analyserte Stein sin besvarelse, så jeg at også han hadde forstått dette). Gjennom denne dialogen ser vi hvordan gruppa sammen, gjennom å fokusere på hverandres innspill og tankemåter sammen opparbeider en forståelse de i utgangspunktet ikke hadde. Dette gjaldt både i forhold til det å sette sammen formelen riktig, med uttrykk for tre kvadratsider og ikke fire, og det å faktisk forstå at kvadratets sider kunne uttrykkes ved på å bruke sirkelens diameter. Selv om det i oppgaveteksten står at de skal uttrykke formelen ved hjelp av diameter (d), er det først når de oppdager sammen hvordan dette kan gjøres, at de virkelig blir bragt videre i egne resonnementer. Dette tolker jeg som et metakognitivt skift, som er med på å utvikle elevenes forståelse. Da har man ifølge Cobb m. fl (1997) og Brendefur og Frykholm (2000) en refleksiv diskurs. Elevene er også sikre på at det de har funnet ut er riktig, noe som kan tolkes som uttrykk for matematisk autonomi, slik Yackel og Cobb (1996) beskriver.

6.2.5 Tendens til økt matematisk autonomi ved gruppearbeid i ordinær undervisning

Yackel og Cobb (1996) beskrev hvordan innføring av sosiomatematiske normer kunne gjøre elevene mer matematisk autonome. Jeg satt fokus på matematisk autonomi både gjennom å legge til rette for refleksiv diskurs, gjennom å snakke direkte med elevene om sosiomatematiske normer og gjennom dialoger i klasseromssituasjon der jeg var tydelig i min forventning til at elevene selv skulle vurdere gyldigheten til egne løsninger. Empirien tilknyttet analysene av dette er som nevnt hentet fra lydopptakene av elevdialoger og fra observasjoner gjort i ordinær undervisning. Resultatene viste en trend i retning av at elevene i økende grad viste tegn til matematisk autonomi. Dialogen i gruppe A og B viste tegn til autonomi allerede i første forskningsfase. I siste forskningsfase var det også tegn til dette i gruppe C. Observasjonene gjort i klasserommet utenom vurderingssituasjonene viste samme trend: Mange av elevene gikk gradvis over fra å be om min vurdering av besvarelser til heller å presentere løsningene sine for meg på en overbevisende måte. Dette tolkes som at de har hatt en viss utvikling når det gjelder matematisk autonomi. Det samlede antallet forespørsler angående gyldigheten av løsninger ble samtidig færre. Dette kan imidlertid også skyldes at de av en eller annen grunn de ikke ønsket å bli bedt om å forklare egne løsninger. Jeg tenker for øvrig at det å uttrykke matematisk autonomi har to sider: Egen erfaring tilsier at elever ofte søker lærers bekreftelse selv om de egentlig er sikre på egne løsninger. Noen ber rett og slett om bekreftelse av gammel (u)vane. Observasjonene av økt matematisk autonomi kan både henge sammen med elevenes deltakelse i refleksive diskurser i gruppene, vårt felles fokus på sosiomatematiske normer og med mine forventninger til at gruppene stilte seg spørsmålet «Hvordan kan vi være sikre på at det stemmer?»

6.2.6 Elever diskuterte sosiomatematiske normer for effektiv og sofistikert løsning

Flere av elevene hadde i de siste fasene av prosjektet samtaler der de på eget initiativ snakket direkte om de sosiomatematiske normene. Dette forekom både i diskusjonene knyttet til prøver og i ordinært arbeid i klasserommet. Elevkommunikasjonen endret seg fra å ikke ha dette som tema i det hele tatt, til at det å finne frem til mer sofistikerte løsninger ble en viktig del av den refleksive diskursen. I en av gruppene det ble gjort lydopptak av, var diskusjonene omkring hva som var sofistikerte matematiske løsninger altså tydelig og fremtredende, mens elevene i de to andre gruppene ikke diskuterte dette i det hele tatt. Denne diskusjonen fra gruppe A illustrerer dette: Når utdraget fra diskursen starter, har gruppa akkurat bedt om veiledning av lærer. De har ytret et ønske om å finne en bedre måte å løse den ene oppgaven på (se figur 29) og har fått stikkordet «primtallsfaktorisering» av meg. Etter å ha fått hinter, setter Fredrik raskt opp alle primtallsfaktorene i 120 og sier: «*Her er alle primtalla 2, 2, 2, 3, 5 … og da kan man jo … ja da kan man ta … 5*24… men hvordan kan vi gjøre det mer sofistikert?* Vegard kommer så med følgende forslag: «*Vi kan jo skrive opp den tallinja [*han mener tallrekka av primtall*] her da, og så bare plukke ut fra den …* Fredrik er ikke helt med på forslaget og spør: «*Hva da?»* Vegard forklarer så hvordan han tenker: «*Da har du jo tatt … eeh primtalla og så ganga de her og de her. Og da har vi fått svaret UT av primtalla.»* Fredrik resonnerer videre og forsøker å skape mening i det Vegard foreslår: «*Men da må du jo liksom … legge sammen de eller et eller annet … 2*2*2 det er jo 8. Ganger 8, nei ganger 15.* Stein bekrefter at han er med, og Fredrik fortsetter: «*Mmh da får du jo, du får ikke … jo eller det blir jo riktig da, men.* Vegard argumenterer så videre for hvorfor han liker metoden: «*Ja. Da har vi fått svaret UT av en metode, liksom, vi har ikke bare tatt det fra hjernen bare, bare tenkt oss ut av det …»* Fredrik legger så til: *«Ja. Det er jo en case, den var jo litt smart … Da kan man bare sette opp den tabellen først, og så den og så den … og så bare huker man … legger man sammen de og så de. Si! Ehm … okay».* Elevene var opprinnelig ute etter en sofistikert metode, og avslutningen på diskusjonen kan tyde på at de selv syntes dette var en sofistikert løsning, selv om de ikke bekrefter dette direkte. Det viktigste poenget her, er uansett at de gjennom sin refleksive diskurs diskuterer løsninger opp mot hverandre og har utviklet en bevissthet om at løsninger kan fylle ulike kvaliteter. Ved ordinært gruppearbeid i klasserommet var tendensene altså de samme. Noen av elevene diskuterte ivrig hvilke løsninger som var de mest sofistikerte og hva som var meste effektive, mens dette var fraværende hos andre.

6.2.7 Observasjon, intervensjon og endring

Aksjonsforskning etter Goodchilds modell (2013) gjorde det mulig å knytte forskningsfasenes globale og lokale teorier tett sammen og å tilpasse utviklingsfasenes intervensjoner til disse teoriene. Slik ble utviklingsarbeidet kjennetegnet av stor nærhet mellom forskning og utvikling. Dette var tilfelle både fordi intervensjonene ble nøye tilpasset elevenes utgangspunkt og utvikling og fordi intervensjonene ble innført raskt etter at observasjonene ble gjort. Denne tette og levende prosessen antas å ha vært medvirkende til hvordan elevenes kommunikasjon kom til uttrykk i løpet av prosjektet.

6.3 Læring i lys av aktuelle kjerneelementer

I dette avsnittet diskuterer jeg hvordan prosjektet gjennom å arbeide målrettet med å øke kvaliteten på elevenes kommunikasjon har bidratt til læring knyttet til kjerneelementene representasjon og kommunikasjon og resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Som vist i teorikapittelet, er disse sentrale for hva elevene skal lære i matematikkfaget, og en selvstendig del av den matematiske kompetansen elevene skal tilegne seg. I følge læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019a) er kjerneelementene ikke bare et middel som bidrar til at elevene lærer matematikk, men skal også være gjenstand for formativ vurdering som selvstendig del av den matematiske kompetansen. Derfor vil formativ vurdering av kommunikasjonen kunne forbedre denne. Gjennom utviklingsarbeidet som her er gjennomført har jeg gjort nettopp dette: Analysert elevenes kommunikasjon og satt inn formative tiltak i to ulike trinn for å forbedre denne. Ifølge læreplanen er forbedret matematisk kommunikasjon også økt matematisk kompetanse (2019a). I avsnitt 6.2 har jeg vist at noen av elevene har hatt en utvikling når det gjelder kvaliteten på kommunikasjonen seg imellom, og at de i større grad enn tidligere argumenterer for sitt syn, særlig når det gjelde uttrykk for uenighet. I avsnitt 6.3 har jeg vist til funn som kan tyde på at elevene i løpet av prosjektet har blitt mer autonome og at de i flere tilfeller har vurdert løsninger opp mot hverandre og diskutert løsningene i forhold til løsningenes sofistikerthet og effektivitet. Det kan derfor synes som om prosjektet har bidratt til læring med hensyn på de aktuelle kjerneelementene, og dermed også i faget som helhet.

6.4 Refleksjoner knyttet til vurdering

Som avsnitt 5.4 viste, presterte de fleste elevene bedre på heldagsprøven i slutten av prosjektperioden enn på heldagsprøven et halvt år tidligere. Min umiddelbare reaksjon på dette, var å tenke at mange elever kanskje hadde fått ufortjent drahjelp av medelever, og at resultatene kanskje ikke gjenspeilet enkeltelevenes kompetanse. Jeg måtte derfor minne meg selv på noe av intensjonen med vurdering, nemlig at vurderingssituasjonen skal bidra til læring, slik vurderingsforskriften (2021) sier. Resultatene kan meget godt gjenspeile at mange av elevene faktisk har lært noe gjennom å jobbe med prøva, og derfor scorer bedre enn tidligere. Elevene deler, lytter og lærer undervegs, og diskuterer i noen tilfeller refleksivt. De presterer derfor bedre enn før. Det er også verdt å minne om at elevene var delt inn i homogene grupper hva opprinnelig kompetanse angikk, noe som tilsier at det gruppene arbeidet med i stor grad gjenspeilet enkeltelevenes omtrentlige kompetansenivå. Et annen refleksjon er knyttet til at jeg som lærer må minne meg selv på at all vurdering av elevarbeider frem til sluttvurderingen gjøres ved utgang 10. trinn, er en undervegsvurdering. Her er altså læring og lærelyst det sentrale, og bør derfor vektlegges i større grad enn å strebe etter en mest mulig nøyaktig informasjon om elevens kompetanse. Til sist må refleksjonene fra avsnitt 6.4 trekkes inn: Ifølge læreplanen (2019) beskriver kjerneelementene det vesentligste av hva elevene skal lære i matematikkfaget. Kompetanse innenfor kommunikasjon og argumentasjon skal derfor også trenes på og være gjenstand for formativ vurdering. Å observere elevene når de diskuterer matematiske problemer er en høyaktuell måte å formativt vurdere deres kompetanse i lys av kjerneelementene på.

Gjennom dette prosjektet har jeg fått et endret og utvidet syn på vurdering. Prosjektet startet som en ide om å skape situasjoner som tilrettela for læring og lærelyst i vurderingssituasjoner tilknyttet skriftlige prøver. I løpet av prosjektperioden har jeg fått en dypere erkjennelse av betydningen av kjerneelementene enn jeg hadde i utgangspunktet, også enn det som kommer til uttrykk i studiens innledningen. Jeg forstår i enda større grad enn før kjerneelementenes rolle og innser at vurderingspraksisen i fremtiden vil bli mer endret enn det jeg innså ved oppstart av dette prosjektet. Betydningen av skriftlige prøver vil, basert på omfang og viktighet av kjerneelementene være mindre viktig enn antatt ved prosjektets oppstart. Dette betyr imidlertid ikke at oppgavens aktualitet er svekket. Erkjennelsen om kjerneelementenes betydning vil bare øke behovet for å jobbe målrettet og formativt med elevenes kommunikasjon og argumentasjon i mitt videre virke. Fordi kjerneelementene representerer det viktigste elevene skal lære i faget. Det som blir utfordringen videre, er å finne enda flere gode måter å formativt vurdere kjerneelementene på.

Som tidligere beskrevet angir vurderingsforskriften (2021) fire krav til for god undervegsvurdering. Det første er at elevene skal delta i vurderingen av eget arbeid og reflektere over egen læring og faglige utvikling. Egen- og hverandrevurdering er derfor aktuelle vurderingselementer. Mahayukti m.fl. (Mahayukti, Gita, Suarsana, & Haryawan, 2017) undersøkte egenvurdering hos ungdomsskoleelever i Indonesia og fant at dette forbedret elevenes forståelse for matematiske konsepter sammenlignet med en referansegruppe som kun ble vurdert av lærer. Ifølge Brøyns` (Brøyn, 2013) artikkel basert på den første rapporten fra NTNU-prosjektet Forskning på individuell vurdering i skolen (FIVIS), skiller matematikkfaget seg fra andre fag ved at lærerne i liten grad benytter seg av egenvurdering og hverandrevurdering. FIVIS-rapporten viser at matematikk i stor grad blir undervist enten gjennom helklasseundervisning eller som individuelt arbeid. Videre fremkommer det at elevene i mindre grad arbeider i grupper, og sjelden samarbeider to og to, noe som vanskeliggjør å få til hverandrevurdering. Undersøkelsen beskriver derimot én lærer som arbeidet ut fra metoder som skilte seg radikalt fra de andres: Læreren kartla først elevenes kunnskaper og tilpasset så undervisningen etter dette. Etterpå ble det lagt til rette for matematiske samtaler der det foregikk dialoger rundt problemløsning. Ifølge rapporten klarte denne læreren sannsynligvis å skape en langt bedre forståelse for matematikken enn lærerne som først og fremst vurderer gjennom å registrere rette og gale svar. Denne måten å arbeide på har mye til felles med hvordan jeg organiserte undervisningen i utviklingsarbeidet mitt. Jeg mener derfor at jeg gjennom dette prosjektet har tilegnet meg erfaring som kan bidra til en vurderingspraksis som i større grad involverer elevene og samtidig legger til rette for at elevenes kommunikasjon har kvaliteter som kan komme vurderingsarbeidet til gode. Flere konkrete forslag til nye elementer som kan inngå i min og andres vurderingspraksis omtales kort i konklusjonen

Jeg vil til slutt peke tilbake på Lauvås (2018) som hevder at for å lykkes med vurderingsarbeidet, må man skille tydelig mellom formativ og summativ vurdering. Dette vil jeg vektlegge framover. På samme måte som man kan snakke direkte med elevene om kommunikasjon og sosiomatematiske normer, kan man snakke med dem om forskjellen på vurderingsformer. Elevene skal være trygge på at all faglig aktivitet er en forberedelse frem mot standpunkt som først skal settes på slutten av ungdomsskoleløpet. De skal vite at det er lov å gjøre feil og at det er lov å stille spørsmål uten at det går i deres disfavør. Tvert imot. Dette er del av kommunikasjonen, resonneringen og argumentasjonen som ligger i kjerneelementene.

7.0 Konklusjon

Jeg vil i avsnitt 7.1 oppsummere mine hovedfunn og gjennom dette besvare forskningsspørsmålene:

-Hvordan kan man gjennom aksjonsforskning bevisstgjøre ungdomsskoleelever på sosiomatematiske normer og øke kommunikasjonskvaliteten når de diskuterer matematiske problemer?

-Hvordan kan slike endringer komme til uttrykk når elevene samarbeider i en vurderingssituasjon?

I avsnitt 7.2 vil jeg behandle henholdsvis de didaktiske implikasjonene min forskning vil kunne få for eget virke, mens implikasjoner for videre forskning vil bli behandlet i avsnitt 7.3. I avsnitt 7.4 vil jeg kort omtale min egen utvikling gjennom dette prosjektet.

7.1 Hovedfunn

I aksjonsforskningen min jobbet jeg etter Goodchilds (2013) modell. Modellen viste seg, som vist i diskusjonskapittelet, å fungere etter intensjonene med hensyn til å implementere både forskning og kunnskap om egne elever i aksjonsforskningssyklusen. Den viste seg også som en fleksibel modell å jobbe etter ved aksjonsforskning i eget klasserom, med sine refleksjons- og feedbackmekanismer som ga rom for å justere pågående prosesser og implementere nye tiltak undervegs. Flere av de implementerte tiltakene vurderes å ha hatt betydning for kvaliteten på elevenes matematiske kommunikasjon. Kvaliteter ved den matematiske kommunikasjonen kom som vist i diskusjonen, til uttrykk gjennom følgende andre hovedfunn: Elevene viste høy deltakelse i diskusjoner gjennom hele prosjektet, uttrykk for enighet og uenighet ble delvis forbedret etter implementering av tiltak, refleksiv diskurs ble i løpet av prosjektet registrert i alle de undersøkte elevgruppene, endret tenkning ble uttrykt gjennom refleksiv diskurs og bidro tidvis til autonomi, det var tendenser til økt matematisk autonomi også ved gruppearbeid i ordinær undervisning, og det ble registrert flere tilfeller hvor elever på eget initiativ vurderte egne besvarelser utfra sosiomatematiske normer for effektive og sofistikerte løsninger. Disse funnene er alle nært tilknyttet kjerneelementene representasjon og kommunikasjon og resonnering og argumentasjon. Jeg vil derfor konkludere med at jeg gjennom forskningen min har vist at flere av elevene har hatt en faglig utvikling når det gjelder to av læreplanens kjerneelementer. Utviklingen har delvis kommet som resultat av tiltak implementert gjennom aksjonsforskningssyklusen og delvis som et resultat av det kommunikative grunnlaget i klassen. Konklusjonen omfatter mer spesifikt at man gjennom aksjonsforskning etter Goodchild (2013) sin modell kan øke kvaliteten på ungdomsskoleelevers kommunikasjon i matematikk, og at dette kan komme til uttrykk som faglige begrunnelser for enighet og uenighet, deltakelse i refleksive diskurser, tegn til økt matematisk autonomi og engasjement i diskusjoner knyttet til sosiomatematiske normer.

7.2 Didaktiske implikasjoner

Det nærmer seg ett år siden ideene til prosjektet mitt tok form. I løpet av denne tiden har jeg lært mye og kommet til nye erkjennelser. Det mest sentrale er at jeg i større grad enn før forstår omfanget av endringene i læreplanen og hvor stor betydning kjerneelementene har for både undervisning, utvikling av elevenes matematiske kompetanse og for vurdering. Når det gjelder implikasjoner for videreutvikling av egen praksis er det særlig vurdering og vurderingsformer jeg ønsker å jobbe videre med. Jeg innser at skriftlige prøver vil utgjøre en stadig mindre del av vurderingspraksisen fremover, og at jeg derfor må implementere nye måter å vurdere på, som i større grad gjenspeiler kompetansen som ligger eksplisitt i kjerneelementene. Prosjektet mitt startet med at jeg ville teste ut en ny måte å gjennomføre skriftlige prøver på, og ender med at jeg gjennom et utvidet perspektiv på hva vurdering i matematikk bør inneholde, har fått insitamenter for å endre egen vurderingspraksis radikalt. Vurderingsformer jeg vil vurdere å prøve ut, og som vil kunne gi informasjon om elevenes kompetanse innenfor kommunikasjon, resonnering og argumentasjon, er for eksempel:

- Egen- og hverandrevurdering
- Observasjon av elevgrupper ved oppgaveløsing
- Fagsamtaler enkeltvis eller i gruppe der elever presenterer oppgaver/prosjekter
- Lydopptak av elever som løser oppgaver i gruppe
- Elevene kan enkeltvis eller sammen med andre spille inn presentasjoner av løsninger som lyd- eller videofiler.

I tillegg til å prøve ut nye vurderingsformer, vil jeg også ha fokus på åpen dialog med elevene hva slags vurdering som til enhver tid gjøres. Utdanningsdirektoratet jobber nå med å legge rammene for hvordan eksamensoppgavene skal se ut fra og med våren 2023. Ifølge Renate Jensen (R. Jensen, personlig kommunikasjon, 12. mars 2022), medlem av Utdanningsdirektoratets læreplangruppe, ser det nå ut til at eksamen 2023 blir heldigital. Et av forslagene læreplangruppen kom med i sin innstilling, var en teknisk løsning der elever kan spille inn lyd og slik forklare sine løsninger. En slik mulighet diskuteres i skrivende stund, og om dette skulle bli tilfelle, vil det være enda viktigere å sørge for å ruste elevene til å kunne kommunisere matematisk. Dette gir dette prosjektets fokus på kommunikasjon, resonnering og argumentasjon enda større aktualitet og understreker behovet for å videreutvikle egen vurderingspraksis i den retningen som er beskrevet over.

7.3 Implikasjoner for videre forskning

Det er forsket mye på matematisk kommunikasjon og hvordan implementering av sosiomatematiske normer påvirker elevenes faglige utvikling. Jeg har ikke lykkes med å finne eksempler på andre prosjekter der man har snakket så direkte med elevene om hva de sosiomatematiske normene innebærer som jeg har gjort i dette prosjektet. Det var svært interessant å se hvordan det engasjerte elevene å ha et konkret språk å uttrykke seg på ved vurdering av egne fremgangsmåter og løsninger som det de fikk gjennom dette prosjektet. Jeg mener derfor det bør forskes mer på matematisk diskurs hos elever som har utviklet begreper som gjør dem i stand til å vurdere eget arbeid i lys av sosiomatematiske normer, og hvordan slik diskurs påvirker elevenes matematiske kompetanse. Det bør også forskes på hvordan nye vurderingsformer, som de som er skissert i forrige avsnitt fungerer. Fokus her bør være både på hvordan man praktisk skal gjennomføre vurderingsformene, i hvilken grad de gir informasjon om elevens kompetanse, og i hvilken grad vurderingen bidrar formativt til elevens matematiske utvikling. Jeg mener også at lærere generelt bør gis større rom for å drive med utviklingsprosjekter som dette i sitt virke. I noen deler av det offentlige settes det av midler til faglig utvikling og studiepermisjoner for ansatte i en langt større grad enn hva som er tilfelle i læreryrket. Jeg mener samfunnet ville være tjent med å gi interesserte lærere anledning til å gjennomføre prosjekter som dette som ledd i faglig utvikling.

7.4 Egen utvikling

Gjennom dette prosjektet har jeg fått anledning til å arbeide systematisk og målrettet med å utvikle egen praksis på en måte jeg ikke har hatt anledning til i noen av mine foregående 14 år som lærer. Det har vært en svært givende erfaring. Jeg er svært fornøyd med at jeg har hatt mulighet til å sette meg grundig inn i teori knyttet til matematisk kommunikasjon, et tema som har interessert meg i lang tid. Jeg er også svært tilfreds med at jeg har fått sette disse teoriene ut i livet og slik fått utvidet erfaring med hvordan jeg kan arbeide for å få elevene til å kommunisere på hensiktsmessige måter. Jeg har også fått erfaring med det å jobbe med aksjonsforskning knyttet til egen praksis. Denne måten å forske på kan slik jeg ser det, være nyttig også i mindre skala enn det jeg har praktisert i dette prosjektet. Dette er noe jeg ønsker å bringe med meg videre, og jeg har som mål at erfaringene skal bidra til at jeg ikke stagnerer som lærer, men fortsetter å utvikle meg.

8.0 Litteratur

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers`conseptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics, 1970-1990*: Kluwer Academic Publishers.

Brøyn, T. (2013). En stille revolusjon innenfor vurdering – men matematikklærerne henger etter. Hentet fra https://utdanningsforskning.no/artikler/2015/en-stille-revolusjon-innenfor-vurdering--men-matematikklarerne-henger-etter/

Centre for Educational Research and Innovation, CERI. (2008). *Assessment for Learning. Formative Assessment.* Paper presented at the OECD/CERI International Conference "Learning in the 21st Century: Research, Innovation and Policy" Paris. https://www.oecd.org/site/educeri21st/40600533.pdf

Chapin, S. H., O`Connor, C., & Anderson, N. C. (2013). *Talk Moves. A Teacher`s Guide for Using Classroom Discussions in Math* (Vol. 3). Sausalito, California.: Math Solutions.

Clark, T., Foster, L., Sloan, L., & Bryman, A. (2021). *Bryman`s sosial research methods* (Vol. 6). Oxford, UK: Oxford University Press.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/749781

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(3), 175-190. doi:10.1207/s15326985ep3103&4_3

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions -a framework for describing how teachers use students` comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 281-304. doi:10.1007/S10649-013-9515-1

Engh, R. (2011). *Vurdering for læring i skolen. På vei mot en bærekraftig vurderingskultur.* Kristiansand, Norway: Høyskoleforlaget AS.

Engh, R., Dobson, S., & Høihilder, E. K. (2007). *Vurdering for læring*. Kristiansand: Høyskoleforlaget AS.

Fjeldly, I. L. E. (2022). Pågående masteroppgave. Presentert på mastersamlig, UiA mars 2022.

Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematis teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 393-412. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/43589796

Gundersen, D. (2022). Sofistikert. Hentet fra https://snl.no/sofistikert

Heggem, S. A. (2015). Gylne øyeblikk. *Tangenten, 2*, 6. Hentet fra http://www.caspar.no/tangenten/2015/tangenten%202%202015%20nettet.pdf

Kazemi, E., & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale. Hvordan strukturerer og lede gode, matematiske diskusjoner.* Oslo: Cappelen Damm AS.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Bradford, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Hentet fra https://static1.squarespace.com/static/5b4fde59b27e395aa0453296/t/5bd2a5d89140b763780f0aab/1540531701125/Kilpatrick%2C+Swafford%2C+Findell+-+2001+-+Adding+It+Up+Helping+Children+Learn+Mathematics+copy.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Fremtidige kompetansebehov I — Kunnskapsgrunnlaget*. (NOU 2018:2). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2018-2/id2588070/?ch=3

Lackner, E. J. (2021). Forskning. Hentet fra https://snl.no/forskning

Lauvås, P. (2018). *Vurdering i skolen*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Liljedahl, P. (2019, 04.12.21). *Building Thinking Classrooms.* Paper presented at the Novemberkonferansen, Trondheim, Norway.

Mahayukti, G. H., Gita, N., Suarsana, M., & Haryawan, G. N. Y. (2017). The Effectiveness of Self-Assessment toward Understanding the Mathematics Consept of Junior School Students. *International Research Journal of Engineering, IT & Scientific Research, 3*(6), 116-124.

Mehan, H. (1979). "What time is it, Denise?": Asking Known Information Questions in Classroom Discourse. *Theory Into Practice, 18*(4), 285-294.

Mertens, D. M. (2020). *Research and Evaluation in Education and Psychology. Intergreting Diversity With Quantitative, Qualitative and Mixed Methods* (5. ed.). California, USA: SAGE Publications, Inc.

Mortimer, E. F., & Scott, P. H. (2003). *Meaning Making in Secondary Science Classrooms*. Berkshire, England: Open University Press.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Kompetencer og matematiklæring. *Utdannelsesstyrelsens temahefteserie*: Undervisningsministeriet.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjenentegn på god læring og undervisning i matematikk*. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/product/Oppdatert%20september%202019%20Sentrale%20kjennetegn%20p%C3%A5%20god%20l%C3%A6ring%20og%20undervisning%20i%20matematikk.pdf

Opplæringsloven. (2021). *Forskrift til opplæringslova.* . (Kapittel 3, §3 Vurdering i fag). Hentet fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_5#KAPITTEL_5

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative Research & Evaluation Methods* (4 ed.). California, USA: SAGE Publications Inc.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2019). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Trondheim/Kristiansand: Cappelen Damm.

Postholm, M. B., & Moen, T. (2018). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen. En metodebok for lærere, studenter og forskere* (2. utg. ed.). Oslo: Universitetsforlaget.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313-340. Hentet fra http://dx.doi.org//10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2011). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275. Hentet fra www.nctm.org

Ulvik, M., Riese, H., & Roness, D. (Eds.). (2016). *Å forske på egen praksis. Aksjonsforskning og andre tilnærminger til profesjonell utvikling i utdanningsfeltet.* Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Læreplan i matematikk fellesfag 1.-10. trinn*. Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Overordnet del - verdiar og prinsipp for grunnopplæringa*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?kode=nor01-06&lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2021a). Undervegsvurdering. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/om-vurdering/underveisvurdering/

Utdanningsdirektoratet. (2021b). Vurderingspraksis. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/

Utdanningsdirektoratet. (2022). Tilpasset opplæring. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/

Wellington, J. (2015). *Educational Research. Contemporary issues and practical approaches.* (Vol. 2). UK: Bloomsbury.

Wood, T. (Ed.) (1998). *Alternative Patterns of Communcation in Mathematics classes: Funneling og Focusing?* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Matehematics.

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk - redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 2*, 22-27.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathemathical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

Vedlegg 1-Tillatelse fra NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

294492

Prosjekttittel

Matematisk kommunikasjon i vurderingssituasjoner

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Hans Kristian Nilsen, hans.k.nilsen@uia.no, tlf: 38142351

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Marianne Løvseth, mariannel@uia.no, tlf: 97541235

Prosjektperiode

01.10.2021 - 30.06.2022

Vurdering (1)

07.10.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 07.10.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

DEL PROSJEKTET MED PROSJEKTANSVARLIG
Det er obligatorisk for studenter å dele meldeskjemaet med prosjektansvarlig (veileder). Det gjøres ved å trykke på "Del prosjekt" i meldeskjemaet. Om prosjektansvarlig ikke svarer på invitasjonen innen en uke må han/hun inviteres på nytt.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.06.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Henning Levold

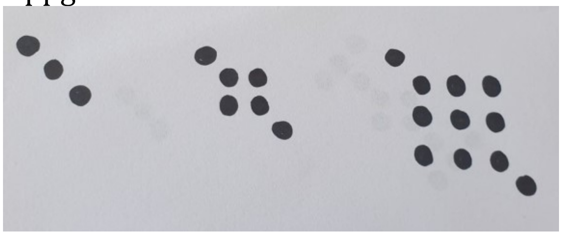
Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2-Prøve gjennomført i første forskningsfase

Prøve i matematikk: Potenser, kvadratrøtter, tallrekker og figurtall
(Kun oppgavene relevante for prosjektet er tatt med)

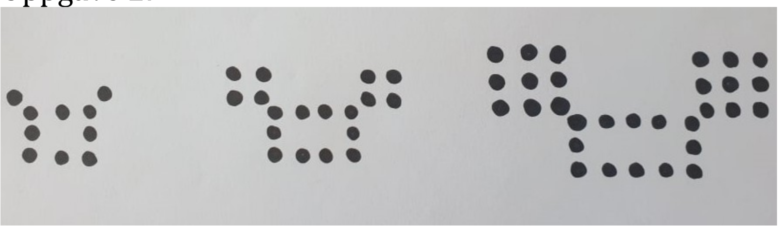
<u>Tema 1-figurtall</u>
Det er 3 oppgaver om figurtall. Alle disse skal du diskutere med gruppa di. Etter diskusjonen går du tilbake til egen pult og gjennomfører prøva på egenhånd.

Oppgave 1:



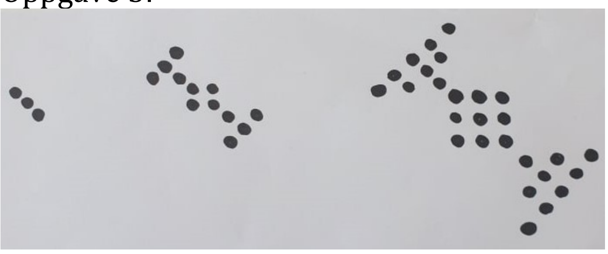
Tegn figur 4 og 5
Beskriv med ord hvordan figuren utvikler seg
Hvor mange prikker vil det være i figur 10? Vis hvordan du regner det ut.
Lag en formel som kan brukes for å regne ut antall prikker i den n`te figuren

Oppgave 2:



Tegn figur 4
Beskriv med ord hvordan figuren utvikler seg
Hvor mange prikker vil det være i figur 10? Vis hvordan du regner det ut.
Lag en formel som kan brukes for å regne ut antall prikker i den n`te figuren

Oppgave 3:



Tegn figur 4
Beskriv med ord hvordan figuren utvikler seg
Hvor mange prikker vil det være i figur 10? Vis hvordan du regner det ut.
Lag en formel som kan brukes for å regne ut antall prikker i den n`te figuren

Vedlegg 3-Prøve gjennomført i andre forskningsfase

Prøve i Plangeometri

(Kun oppgavene relevante for prosjektet er tatt med)

Gruppeoppgave - Skal diskuteres med gruppa, men besvares individuelt på eget ark. Her kan du velge framgangsmåte selv, men du skal *alltid* vise hvordan du har kommet fram til svaret. *Hjelpemidler Del 2: Det er tillatt å bruke alle ikke-kommuniserende hjelpemidler*

1 Figuren består av en halvsirkel og en del av et kvadrat.
Finn et uttrykk for omkretsen av figuren uttrykt med diameteren d.

$3a$

2 Et kvadrat har sider som er $3a$ lange.

a) Lag en formel for arealet av kvadratet.

b) Regn ut arealet av kvadrat når $a = 4$ cm.

c) Hvilken verdi har a hvis arealet av kvadratet er 56,25 cm^2?

Vedlegg 4-Prøve gjennomført i tredje forskningsfase

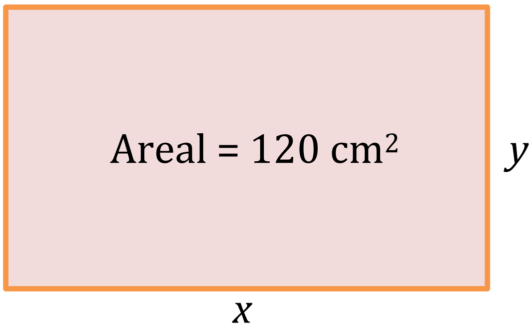
(Kun oppgavene relevante for prosjektet er tatt med)

Oppgave 1

Et rektangel har et areal på 120 cm^2 og sider som er x cm og y cm lange. Se figur.

Hvilken verdi kan x og y ha når:
x er lengre enn y
y er større enn 4
x og y er hele tall

Sett opp tre ulike forslag.
Begrunn forslagene dine.



Oppgave 2

I Norge har vi pant på plastflasker, og siden 2018 har panten vært 2 kr for små flasker og 3 kr for store flasker.

Hanna panter 15 små flasker og 15 store flasker.

a) Lag to ulike regnestykker som viser hvor mye Hanna har pantet for, og løs dem.

Ella panter for totalt 87 kr.

b) Sett opp tre ulike forslag på hvor mange små og hvor mange store flasker hun kan ha pantet. Begrunn svarene dine.

Vedlegg 5-Transkripsjonsnøkkel

…	Pause på under 3 sekunder
[Stille]	Pause på minst 3 sekunder
[Tekst i klammer]	Nonverbal aktivitet, kommentarer på ytringer eller tillagte ord
[…]	Utelatte ytringer
[Uforståelig]	Ett eller flere ord utelatt fordi de ikke var mulig å oppfatte
-	Avbrytelse

Vedlegg 6-Råtranskripsjoner

Opptak 1 Gruppe A
Fredrik, Stein og Vegard

Oppgave 1:
Raskt løst før jeg rakk å sette i gang diktafonen, men kommer så vidt inn på den etter hvert når de oppsummerer.

Oppgave 2:
VEGARD: Som du ser så er det firkanter på sidene pluss den her, og den her plusser på med to for hver gang, så hvis du har…her…så blir jo det 6, for de to her pluss 2n i midten
STEIN: Mmm
VEGARD: ..og så er det n i annen på hver side
STEIN: ja, 2n i annen
VEGARD: så da bare plusser vi sammen formelen her
FREDRIK: så da er det bare 6 pluss 2n pluss 2n i annen.
FREDRIK: Ja, og det er formelen da, liksom?
VEGARD: Ja
STEIN: ja, 6 + 2n…..
FREDRIK: Ja, fordi…det er 6…
STEIN: Fo de 6 blir jo alltid der
VEGARD: Ja, for det er en firkant her…men ville ikke du sagt at den er en tilbake da….?
[Prøver VEGARD å insinuere at vi har en firkant basert på n-1 her, men får ikke napp av de andre?]
FREDRIK: Nei vent, da: n i annen
FREDRIK: n i annen pluss 2
STEIN: Ja, det er jeg enig i!

Oppgave 3:
FREDRIK: Og den her er bare 3n i annen
STEIN: n i annen?
FREDRIK: Ja, fordi..
STEIN: De ytterste ….de endrer seg ikke
FREDRIK: Også den siste her er bare 3n i annen…
FREDRIK: for du ser liksom…den utvikler seg…lissom…se da…
VEGARD: det er 3…
STEIN: ni annen
VEGARD: Ja
FREDRIK: …fordi…n i annen er jo bare 1 + 1 + 1…sånn, det er 3
VEGARD: Retter: det blir 1 GANGER 1 GANGER 1
STEIN: Ja fordi det er 9, og det er 9 og det er 9?
FREDRIK: Ja, og her er det 4, 4 og 4
VEGARD: N i annen er jo…….eller hva sa du?
VEGARD: Åja: 3 n i annen
STEIN: er de da trekanttall?
FREDRIK: For det er 3 n i annen, ikke sant?

STEIN: er det trekanttall? Eller er det da pyramide, eller hva er…?
VEGARD: det funker på den første, men funker det på de to andre
STEIN: ja, fordi… det er 9, 9 og 9
FREDRIK: Det er kvadrattall, er det ikke det da?
FREDRIK: Nei?
STEIN: Jeg hakke peiling…
FREDRIK: det er kvadrattall fordi 1, 4, 9 er kvadrattall…
[Usikker på om Stein skjønte det, men ser av hans skriftlige forklaring at han absolutt har forstått]
STEIN: [Går videre i oppgavesettet]…ja vi skal tegne….ja, vi kan jo bare begynne å på en måte prate om oppgaven, da, vi skal tegne… figur 4 og 5…så vil jo det da være 4 ganger 4 pluss 1 og 5 ganger 5
FREDRIK: Ja
STEIN: Og hvordan skal man beskrive hvordan den utvikler seg…?
FREDRIK: Det er jo bare å ta…jeg vet ikke
STEIN: Kvadratet i midten økes med hvor mye figurtallet er…eller hvor mye n er
VEGARD: …3 n i annen.. 2….Det er 2 x2 tre ganger. 2x2 blir 4……3… 12….
FREDRIK: Ja
VEGARD: Da er vi innafor på begge de to
FREDRIK: åssen er det her da..
[teller]
FREDRIK: Da er det 3x3blir 9, ……så det blir 27, ja….Så det er riktig…[konkluderer]
STEIN: Ok, hvor mange prikker vil det være i figur 10?
FREDRIK: Da er det bare 10….6 pluss 2 ganger 10, 20…6 pluss 20…26…pluss…….det er 226
VEGARD: Det ække verst
STEIN: Jeg vet det
STEIN: Fordi det er….100…..100…20…..og 6
VEGARD: Det er 226
STEIN: Da har vi funnet ut formel, da var det…n i annen pluss 2 [oppgave 1], her var det 6+2n i andre + 2n [oppgave 2]
FREDRIK: Ja
STEIN: ….så bare 3n i andre på den [oppgave 3]
FREDRIK: Da har vi vel formelen på alle
…..
FREDRIK: Vi hakke noe mer å snakke om…[avslutter]

Opptak 2 gruppe A
Fredrik, Stein og Vegard:

FREDRIK: Figuren består av en halvsirkel og en del av et kvadrat, finn et uttrykk for omkretsen av figuren, uttrykt ved diameteren.…eh..da kan vi vel ta å bruke…man kan jo bare ta…omkretsen av sirkelen, ikke sant? Ta den derre hvordan man regner ut omkrets, og så dele på….2…så må du bruke liksom den delen av kvadratet, siden du vet at diameteren er så og så mye…åsså finner du formelen på kvadratet, også tar du den halve delen av sirkelen minus…eller lissom du tar del delen av hele kvadratet minus … minus den halve delen av sirkelen..
VEGARD: …ja….
FREDRIK: Jeg vet ikke hvordan man skal finne en formel på det, men… det er jo lettere å finne ut når man har de foran seg tror jeg….man kan skri
STEIN: (Uhørlig, evt. «oversikten»
STEIN og VEGARD: Leser inni seg, delvis
VEGARD: Jajaja, da skjønner jeg…
STEIN: Hæ, finne et uttrykk…
FREDRIK: Altså formel…
VEGARD: Det er lissom… det er et…du må finne omkretsen av et kvadrat…også må du finne halvparten av omkretsen av en sirkel også fjerne en av linjene…
STEIN…dele kvadratets omkrets
FREDRIK: Ja
VEGARD: Åsså dele kvadratets…omkrets på
STEIN:…2…
(Jeg gir en beskjed om at de har hvert sitt ark)
FREDRIK: …okay…så er det neste. Lag en formel for areal av kvadratet….da er det jo på en måte…..formelen er jo egentlig bare 6a….nei…3a i annen
VEGARD: ja..
FREDRIK: Og det ække noe…
STEIN: mumler
VEGARD: Ja…..
FREDRIK: og så: regn ut arealet av et kvadrat når… a er fire. Da er et jo egentlig bare 4 ganer nei …3 ganger 4…i annen
VEGARD: Det er vel bare 56,25 delt på 9
FREDRIK: nei altså… Finn verdi av a hvis arealet er …mmm…da tar du på en måte
VEGARD: da deler du bare på 9
FREDRIK: Eller du kan jo skrive kvadratrota ganger med 3…..eller du kan finne kvadratrota åsså deler du det på 3 igjen.
VEGARD: Ja
FREDRIK: Ja
VEGARD: uhørlig, teller 1…2..3..?
FREDRIK: Hvis du bare…..3….ja, 3 (Han og VEGARD sammen)
FREDRIK: Regn ut arealet av det fargelagte området når hele sirkelen har et areal på 180….eh…da er det jo bare å finne ut hvor mange deler av sirkelen er liksom 355 grader. Sirkelen er 360….så må du finne ut hvor mange grader den fyller…og så tar du arealet også deler du på liksom….si at
STEIN: Finne prosenten 5 er….eller nei, finne ut hvor mye 5 grader er…så kan du bare

FREDRIK: Ja, det går og an..
FREDRIK: Ja og samme er det jo på de her. Og på den HER så er det på en måte finne..eh….du må ta liksom
VEGARD: Du må lissom finne ut av ….
FREDRIK: Du må finne ut av
VEGARD: Ta….kvadratrota av denne der og da har du kvadrat også bare finner du ut av
FREDRIK: Du kan jo ikke ta kvadratrota av den der, for da får du liksom…formel for areal er jo pi ga…
VEGARD: ja, du må finne diameteren, ikke sant?
FREDRIK: Ja det må du bruke den til. Da tar du liksom 180= pi ganger…og så regner ut det.
VEGARD: Så finner du diameteren, så da har du linjene på kvadratet, diameteren,
FREDRIK: Ja
VEGARD: Og så finner du ut arealet på sirkelen
FREDRIK: Og så må du minuse…
STEIN: Nå du har funnet arealet, må du dele på Pi da?
VEGARD: Det er bare å dele på pi..
FREDRIK: Ja, da får du…da får du radius….for da får du radius i annen
VEGARD: Ja, det er areal, ja…
FREDRIK: For areal er jo A= pi ganger r i annen……hvis du tar det, og så tar du…180= pi ganger r i annen. Så deler du liksom på 3,14 for å finne r i annen, ikke sant? Gir det mening?
VEGARD : mm
FREDRIK: Og så må du finne kvadratet …/VEGARD: jajajaja..…..roten av r
VEGARD: Du deler bare på pi og så tar du kvadratrota av det…
FREDRIK: Ja eller når….for når du finner ut hva r i annen er….eller..da nå du bare ta kvadratroten av det, så får du radius.
STEIN: Vi er på den…..de her nå…de to nederste?
FREDRIK: Ja
FREDRIK: Ehhhhm
VEGARD: Hvor stor andel er det der? 85…
FREDRIK: det er jo bare å ta 360 delt på 85….så får du…
VEGARD: har vi lov te å bruke kalkulator?
FREDRIK: Ikke nå. Ikke i snakke-delen
STEIN: Ja
VEGARD: Ja men når du skal…
FREDRIK: Ja ja, da har vi lov til å bruke kalkulator
FREDRIK: Du kanke dele 360 på….
STEIN: Kan man dele 360 på 355
FREDRIK: Ja, men da får du skikkelig små tall…Så det går vel, men eh..
STEIN: ….du finner bare…
FREDRIK: Det er jo for å finne ut hva 5% er verdt, så bare tar du minus det liksom…
STEIN: Hvor mye er 5 grader…
FREDRIK: 5% av 360…ække det…
VEGARD: Tar hvor mange deler er…
FREDRIK: En grad 15…45…60….75….90….105»…120…135……eh 150…165…180…195… «202»……nei
STEIN: Tjuefire…..

FREDRIK : (fortsetter)…205…220…235…250….ja…så bare fortsetter man den rekka hele veien, lissom, også fonner man ut av det…….husker jeg….for da finner jeg en andel, liksom…
VEGARD: …ja
VEGARD:…eh….ja da er det bare å dele…..dele 360 på 15….så dele det du får da, på tre igjen…
FREDRIK: …men det, jeg TROR…..det vi må jobbe mest med, det er den der: Finne ut hvordan vi lager en formel…
VEGARD: …eh……det kan…
[Uhørlig]
VEGARD: Så langt har vi bare brukt 6 minutter…
FREDRIK: men okay…
STEIN….mumler, leser oppgavene på nytt(?)
FREDRIK: Det jeg ville gjort, er…å finne liksom…..si at en side…en side er a, da, ikke sant?
STEIN: ehhh ja.
FREDRIK: Arealet av liksom….eller omkretsen, da er det jo 4a, ikke sann?
STEIN:….et kvadrat…
FREDRIK: Eller 3…da er det 3a fordi det er de tre sidene….så må du finn omkretsen av sirkelen…dele den på 2….så du må ta den omkretsen der, ikke sant? …da er det 4a…pluss…
VEGARD: Ja men er det ikke egentlig bare å ta….3a pluss
FREDRIK: Pluss formelen for omkrets. Delt på 2.
VEGARD: Ja men….ja
VEGARD: Tre streker åsså to under lissom……så det blir det mest ryddige…
FREDRIK: Ja det er det jeg ville gjort..
STEIN:…kan du si den en gang til…?
FREDRIK: Du tar….for du vet at…for å finne omkrets så må du plusse alle sidene. Her har du 3 sider.
STEIN: Det……ja men det er jo et kvadrat, så det er vel der og….
FREDRIK: ..men du ser, det HAR jo ikke en strek her, så…3a ikke sant, og så må du finne formel for sirkel som er 2 pi ganger r, ikke sant? delt på to
VEGARD: men vi skal bruke diameter…
VEGARD: diameter!
FREDRIK: Åja!
STEIN: Vi må finne r`er først, og det er jo ikke så…
FREDRIK: Eller bare pi delt på…..
VEGARD: jojojojojo! Vi har 3d.
FREDRIK: Ja
VEGARD: I stedet for 3a
FREDRIK: Ja, for det er jo diameteren. Det er jo diameter. Og så bruker du 1d..plus…Ja ..så regner du ut……….
VEGARD: For da blir det helt riktig (innimellom)
FREDRIK: For når du regner omkrets i sirkel, så bruker du bare pi ganger d. Det er omkretsen.
STEIN: Og da er…
VEGARD: For da skriver du ikke 0=…eller O=
FREDRIK: Nei, da skriver du bare liksom formelen for sirkel
STEIN: Pi ganger d Minus 3d
FREDRIK: Nei, det er pluss…d….eller ja vent, det blir 3d…pluss…..

VEGARD: Pi ganger d delt på 2
FREDRIK: …delt på 2 (fullfører hverandres setninger)
Fordi du deler jo den….fordi det er bare tre streker
STEIN: …hvordan..
FREDRIK: Ikke sant, delt på 2 for det er…halve sirklene
STEIN: men hvordan blir det pluss?
FREDRIK: Fordi, fordi du plusser jo den delen der…..
VEGARD: Det her er 1 d, det her er 1 d….
STEIN: ja, ok…
VEGARD: ….da blir det 3….Også pluss en halvsirkel
FREDRIK: Skjønner du?
STEIN:…et kvadrat…..
FREDRIK…og den fant vi ut av…
[Går til 2C]
FREDRIK: …og den fant vi ut av….bare å dele på…kvadratroten av det og så…pi delt på tre…eller….ja
STEIN: det er bare å gange to sider, ikke sant…da finner vi arealet av kvadratet…
FREDRIK: eller ja…fordi sånn…hvis en side er 3a, så er jo….arealet er jo 3a i andre. Åsså finner du ut hvilken verdi det har….og så hvis hele….har et areal på 56,25…så tar du 56,25, og det derre kvadratrottegnet…for å finne ut liksom hvor mye 3a er verdt…og for å finne ut hvor mye a er verdt, så tar du og deler det på 3 igjen…
STEIN: Åja
FREDRIK…eeeeh, så jeg tro det er…
VEGARD: That`s it.
NH: Det er det, men er det noe mer….ehhh.
VEGARD: Hvordan er det man regner ut arealet på en sirkel?
FREDRIK: Det er A
STEIN:….ganger r i annen
FREDRIK=Nei pi ganger r i andre.
STEIN: Pi ganger r i andre
FREDRIK: Ja, pi ganger r i andre
STEIN: ok
VEGARD: Ja stemmer
FREDRIK: Og du kan ikke…..dele…for du må ja pi ganger r i andre, for ellers blir det feil…
STEIN:…er det bare å…ja dele på det tallet der, så…
FREDRIK: Ja…da får du liksom hvor mange prosent den dekke…finner areal…ja…også deler du
STEIN: det er bare…360 delt på 85…
FREDRIK: Ja, også for da vet du liksom, si at 360 delt på 85 er da litt under en femtedel, eller litt under fjerdedel, så da ...deler du 180 på hvor mange prosent det ….
FREDRIK: ….så finner du hvor mye arealet er…
[(Avslutter]

Opptak 3 gruppe A
Fredrik, Stein og Vegard

VEGARD: Den første oppgava er vel gjett og sjekk?
FREDRIK:(leser premissene for oppgave 1 høyt)
FREDRIK: Eeeeh, ja det blir jo gjett og sjekk….Ja det må jo være gjett og sjekk, tror jeg.
(Uhørlig)
HN: Ja, men du må sette opp tre ulike forslag.
VEGARD: Ja, men det er fortsatt..
(blir avbrutt av min beskjed)
FREDRIK: Og så er det den der(oppg2). Det jeg ville gjort på oppgave A, da ville jeg satt parentes 15*2 parentes + parentes 15*3parantes. Det er det jeg ville ha gjort.
(ny beskjed fra meg)
VEGARD: Ok, forklar en gang til…
FREDRIK: Jeg ville satt opp, altså (15*2) og så + (15*3).
VEGARD: Ja, ok.
FREDRIK: Eh, ja..ok Ella panter for 87 kroner. Sette opp tre ulike forslag på hvor mange små og hvor mange store flasker hun kan ha pantet. Det man først kan gjøre da, er å lage sånn..eller ta 2-kroners-flaskene, og så se hvor mange du får da, og så tar du 3-kronersflaskene..eller plusse på en krone på hver sånn at du lissom ser hvor mange…Men det er vel gjett og sjekk det og, kanskje? Delvis.
VEGARD: Ja. Oppgave 3, da:
VEGARD: (leser oppgaveteksten)
FREDRIK: mmmm
VEGARD: Ja!
STEIN: (Det er n i annen pluss en)
FREDRIK: Ja, da er det bare å legge på en, ikke sant…tror jeg. Ja. ok.
FREDRIK: Oppgave 4
VEGARD: Ja, da er det jo…ja, da skal vi egentlig bare bevise hvorfor den…ja hvorfor det blir minus…
FREDRIK: Ja. Det enkle svaret er jo fordi der har du liksom parentes foran, som betyr at alle er minus 3, mens der er…der er det ikke noe parentes, det betyr at bare den første er minus 3
FREDRIK:….og resten er bare vanlig 3…
VEGARD: Så da er det minus uansett
FREDRIK: På den første blir det -3*-3*-3*-3, og på den andre blir det -3*3*3*3.
VEGARD: Er vi ferdig da?
??Er det ikke flere oppgaver?
VEGARD: Ja, det er jo bare 4 oppgaver..
På oppgave en…
VEGARD: Det er vel bare gjett og sjekk, men er det lov å skrive…
FREDRIK: Vi kan bruke den og….ok, men hvis du tar, vent da…. den…y….y er større enn 4…
VEGARD: Ja…
VEGARD: Vi må ha tre av de da….12x10
….
FREDRIK: Men vi kan sjekke hvordan gjett og sjekk ser ut, da…
VEGARD: Ja
FREDRIK: Så..vi har kontroll på det, da…skal vi se åssen satte vi opp gjett og sjekk igjen, da? Hvis man putter…eh…12*10=120. Men x er lenger enn y, ja…og så kan vi ta 8 ganger 10….14 er lik 112….
VEGARD: Du kan ta 6 ganger 20
FREDRIK: 6 ganger….Det går OG an.
?……men da blir ikke 6 større enn y….
???
FREDRIK: men hvis vi setter DET som y, så går det jo…

…..
FREDRIK: Det er sant det, vi må bestemme oss for hvem som skal være y, hvem av sidene. Y er jo den korteste, så det betyr at DEN er y, DEN er y og DEN er y.
VEGARD: Ja
FREDRIK: så det blir jo riktig, vent da….6*20 det er….
VEGARD: Den der er ikke riktig, 112….
FREDRIK: Ja…
VEGARD: 112. Alle tre skulle være….
FREDRIK: Ja, men vi sjekker jo bare, vi bruker sånn gjett og sjekk. Skal vi se, da tok vi 8 x14
VEGARD:….åja, sånn ja…
FREDRIK: det er 112.Eh…ja…så du har…du setter opp da…det er liksom…
VEGARD: Eeh…sååå
FREDRIK: (Leser) begrunn forslagene dine…her kan du begrunne fordi den 6 er halvparten av 12, 12 er dobbelt så stor som..ja…for i prinsippet så kan vi ta tre ganger 40 og…
VEGARD: Ja..
FREDRIK: Men det blir jo ikke riktig, fordi... den er ikke større enn 4.
VEGARD: Men 5 ganger 24 tror jeg…
FREDRIK: sjekk 5*24
VEGARD: Ja

M: Uhørlig
FREDRIK: Ja, det fikk jeg og…så da er det jo egentlig bare.. men sett opp tre ulike forslag til regnestykke…eller til svar? Eller liksom, jo, eller til…
VEGARD: Forslag til svar, ja det er jo forslag til…eh..det er jo det her vi skal skrive, ford det er tre forskjellige forslag til formel.
FREDRIK: Ja
VEGARD : Se her.
FREDRIK: Ja. Så da er den riktig og den riktig og den riktig.
VEGARD: Er det noe mer da?
FREDRIK: Vi har GOD tid, så vi kan jo enkli bare…snakke for å være helt sikker…Det jeg ville gjort, er å sette opp (15*3)+(15*2). Det går jo an. Men hvis man gjør 15 til x, så kan du ta….eeeh…
VEGARD: Jeg ville nok skrivi x først og SÅ putte inn talla etterpå. Så de vet hva slags formel vi bruker
FREDRIK: Vi kan ta 15x+15y, og da vet vi at 2 er y og tre er……2 er lik y og tre er lik x ………….så da har du jo…..så det er en mulighet for et regnestykke
VEGARD: Ja. Det ER riktig bygd opp.
FREDRIK: Det blir helt riktig.
VEGARD: eh man kan egentlig velge..
FREDRIK: den der ser jo best ut, på en måte, mer avansert ut, og da ser de at du liksom
VEGARD: at du..
FREDRIK: det ser ut som du er smartere, på en måte.
VEGARD: Mer sofistikert!
STEIN (uhørlig)
FREDRIK: Vi skal bare lage en, for da kan vi sette det inn bare, for 15 ganger 3 er jo 45…pluss 30 er lik…75, litt sånn fancy…på en litt mer fin og sofistikert måte.
VEGARD: Stemmer, stemmer
VEGARD: Da er det….
FREDRIK: Jeg skal bare spørre Marianne om noe…
FREDRIK: Den her: Sett opp tre forslag…hvis man har gjett og sjekk, som vi har satt opp der….så har vi jo 1,2,3 forskjellige?
MEG: Ja. Fins det noe mer sofistikert metode a, tro?
FREDRIK: Vi kalte det vi bruket for gjett og sjekk….y er større enn fire…
MEG: Jeg kan gi ett hint, som jeg også har gitt til de andre…

FREDRIK: Og det er?
MEG: Hvis jeg bare sier primtallsfaktorisering…
FREDRIK: Hvis vi primtallsfaktoriserer 120…?
MEG: Se om dere kan tygge litt på den. Kan det være en annen løsning enn den dere allerede har? Det er lov til å presentere flere løsninger.
VEGARD: Hvis du…
FREDRIK: Her er alle primtalla 2, 2,2 3, 5…og da kan man jo…ja da kan man ta…5*24…..men hvordan kan vi gjøre det mer sofistikert?
FREDRIK: x er lenger….
VEGARD: Vi kan jo skrive opp den tallinja her da, og så bare plukke ut fra den, og så skrive opp til en formel…
FREDRIK: ja, det var litt vanskelig med sofisti…jeg tror det….skal vi se….x er større enn y. Da vet jeg at x…da blir det jo på en måte sånn, da…x er større enn y, men y er større enn 4 mmm…ja det var noe annet
VEGARD: Det er jo riktig uansett da
STEIN: Men…vi får jo ekstrapoeng for å ha det mer sofistikert…så jeg tror ikke man får ekstrapoeng av å ikke ha det…(uhørlig)
VEGARD: Det er jo riktig…det har jo ikke så mye å si nå, men det var mer siden, på videregåande og sånn, at man får veldig mye ut av mer sofistikert.
FREDRIK: …en mer sofistikert måte…. x er lenger enn y, x er størst. ok…hmmm den var ganske vanskelig… har du ingenting, VEGARD?
VEGARD: Egentlig ikke
FREDRIK: vent da, i prinsippet s kan man jo ta…15 * 5 det er…75…45…..og 45 ganger 3…125. 125 ganger…eh…ganger 6, de er jo.
VEGARD: 15…du kan jo ta…15*8.Prøv det. Fordi da har du jo bare ganga de, og så…
FREDRIK: Hva da?
VEGARD: Da har du jo tatt…ehhh primtalla og så ganga de her og de her. Og da har vi fått svaret UT av primtalla.
FREDRIK: Men da må du jo liksom. Legge sammen de eller et eller annet…2*2*2 det er jo 8. Ganger 8, nei ganger 15.
STEIN: Mm
FREDRIK: Mmh da får du jo, du får ikke…jo eller det blir jo riktig da men..
VEGARD: Ja. Da har vi fått svaret UT av en metode, liksom, vi har ikke bare tatt det fra hjernen bare, bare tenkt oss ut av det…
FREDRIK: Ja. Det er jo en case, den var jo litt smart…Da kan man bare sette opp den tabellen først, og så den og så den…og så bare huker men, legger man sammen de og så de. Si! Ehm… okay.
Er det noe mer man trenger å…
VEGARD: Ja, eh….
STEIN: Mumler et spørsmål
VEGARD: Ja det kan vi godt…
FREDRIK: Jam det kan man gjøre, man kan sette 2 flasker, de herre 2erflaskene.De er jo verdt 2 kroner, da…skal vi se…2,4,6,8,10, 12…men den tar veldig lang tid, så….? Men det blir jo gjett og sjekk, blir det ikke det? Men hva var den andre sofistikerte måten Marianne brukte på den 3-hjulssykkeloppgaven?
VEGARD: Og at…
VEGARD: Jo…eh…
STEIN: Tegne to og så bare legge på en til…
FREDRIK: det var den mer effektive, men den mer vanskelige måten, det var en mer sofistikert måte til, der…mmm
VEGARD: Men den var….ja
FREDRIK: man kan ta…………da kan jeg ta 2y*3x skal være 87…og hvis man da tenker at det er 3….Det er antall flasker, ikke sant? men så satt hun opp på en mer avansert måte….åhhh, det husker jeg ikke!

Ja, men det er kanskje. Vi fikk vite at det var 9 sykler til sammen. Vi fikk jo ikke vite hvor mange flasker det er til sammen.
VEGARD: Ja…men da kan vi ikke bruke den metoden…
VEGARD: Da blir det den derre….at v plusser på
FREDRIK: Det blir jo det...
FREDRIK: jeg lurer på….man kan jo bruke liksom den her da…..la oss si at man sette opp…2*x i og med at tallet 2 ganger 3, ikke sant…pluss..ganger, nei pluss 3x4 ikke sant, er lik 2X3….er 6 pluss 12 er lik….ja det blir også riktig, for du skal ha det. Da får du er lik…18, ikke sant…sånn måte…er jo en gjett og sjakk måte…så gjør du det sånn hele veien, ikke sant…
VEGARD: Er ikke det en Gjett og sjekk måte? Hvis du gjør det…hvis du bare finner på….så bare legger du på forskjellige tall der…For at nå kom vi fram til at…det blir jo 6 +12, men det er jo ikke….det er jo 18…
[Spør meg, jeg bekrefter]
FREDRIK: For vi tenkte jo at vi kunne bruke den derre metoden…når man delt opp….den sykkelmetoden…også prøvde vi å finne en sofistikert måte…men det gikk ikke helt bra, for man hadde lissom ikke flaskene…at det er SÅ mange flasker…
Meg: Ikke sant, du vet ikke alt, nei…enig
FREDRIK: Så det letteste er vel bare å gjøre gjett og sjekk…
Meg: For da har dere vurdert metode, ikke sant ☺
VEGARD: 2x0 pluss
FREDRIK: For da er det ETT forslag, at hun panter 0 2-flasker. Ja, det er jo, ja…
FREDRIK: Skal vi si oss….
VEGARD: Hvor mange…er 29 a?
FREDRIK: Det skal være forslag, ikke sant, det skal være 3 forslag til liksom
VEGARD: Det du kan gjøre da, for å få tre forslag, er at du tar den der hvor du plusser på 1
FREDRIK: Ja
VEGARD: ..åsså ta bare 2…..går det an…
FREDRIK: Tviler jeg på
VEGARD: 87 delt på 2…..Nei, det går ikke
STEIN: 2*42 pluss 3 *1
VEGARD: Ja

Opptak 1 Gruppe B
Hans, Liv og Per

HANS: ..det er jo…
[hvisking, får beskjed om å snakke høyt]
HANS: Det er greit!
HANS: Ehm…så….på oppgave 1 her vertfall, så er det jo relativt selv-løselig, ved at det er jo…
LIV: Man ser mønsteret veldig fort..
HANS: Ja, det er jo, jeg veit ikke hvordan jeg skal forklare det jeg, altså, men det er jo…
Per: Boksen i midten bare vokser
LIV: Her er det 1x1
HANS:…ja, de utvikles, ja det ganger seg med seg selv, da , så det utvikler seg like mye som selve figurtallet, da.
LIV: mm
HANS: …de utvikler seg..
HANS: Hæææm…og så…..det er vel egentlig relativt det samme på neste også…..
Oppgave 2:
HANS: Hvis det er…der er det to bokser, holdt jeg på å si og det er på oppgave 3 , så da er det…
LIV: Figurtall 3, ja… (retter)
HANS: Ja
LIV: Ja
HANS: Så da er det….eh…2 n i annen, ja
LIV: Ja
HANS: ehm…
LIV: Ja, de to der
Per: Ja
HANS Også…pluss…eh…pluss 6, i og med at…de tre på siden her ikke har så veldig mye å si for sammenhengen i og med at de alltid er…..alltid er 3 uansett…
LIV: Mm
HANS: …så da må vi bare sette inn et vanlig tall, også er det pluss 2n, da
LIV: Ja
HANS: du er med, Per?
Per: Ja
HANS: Flunkende flott
HANS: For det at….ehm….trenger vi noen videre samtaler på…de to øverste da, eller er det greit?
LIV: Ja vi skal jo beskrive med ord hvordan…figuren utvikler seg, da…
HANS: Ja, den utvikler seg jo med…like mye som oppgaven gjør, da, ganger med seg selv pluss 2
LIV: Ja
Oppgave 3:
Per: …den nederste formelen…
HANS: Ja den nederste….
HANS: Hvis du gjør det om…hvis du gjør de nederste om til kvadrater da, så blir det bare n x n, det blir 3n i andre, siden du vet… her er det n x n, der er det n x n, og det er det også her, for det er oppgave 2
(HANS kaller nivået for oppgave, det vil si nivå 2 for oppgave 2 og så videre)
HANS: så da er det 2 x 2, hvis vi bytter om på den ene prikken der og setter den opp der, hvis det…
LIV: Ja
HANS: Så blir det et kvadrat, nytt kvadrat, og det samme er det her, hvis du bytter om den og settern opp dit, og den….og ….bare for å visualisere, eh…så blir det tre kvadrater…Sånn at det blir veldig lett å regne ut
Per: Da blir det 3n i annen
LIV: Ja

HANS: Da er jo egentlig alt?
LIV: Ja
HANS : Så da er det jo….må vi jo…JA,
LIV: det var jo….
HANS…vet ikke o det er så veldig mye å si jeg da, men det er jo…hvor mange prikker det vil bli i figur 10…vi får bare…. får bare bytter ut tallet…eller
LIV: n med…JA
HANS: n med 1o da, og så bare…legger du det til…ikke sant!....så ja….
Per: Er vi ferdig?
HANS: Jeg skjønner ikke at vi trenger så veldig mye mere…tid. Beklager, asså, Lærer, lurer på om dette er veldig kjedelig, men…
Per: Vi skal tegne figur nummer 4 og…
Per og LIV: Ja!
Da bytter vi bare ut n med 4….eller 5
LIV: Ja
HANS: Så der er det jo 4x4, på den neste er det 5x5 pluss de to på sidene
LIV: Ja?
HANS: Og det samme her, bare at der er….eh…bare at det er fire imellom der og fire ganger fire der
LIV: ….og så pluss seks, eller tre på hver side
HANS: Det er det alltid, så det er veldig bra innspill, LIV!
LIV: ler
HANS: Dritnice
Per: Ja…ehm…
HANS: og på siste så får vi bare lage en pyramide som tilsvarer..eller da kan vi tenke sånn at…da blir det, 3x3, så kan vi tenke at…4x4 sånn at det er 16 sånne prikker som må utplasseres, sånn at det blir veldig lett å tenke seg til hva svaret er, da…
LIV: Hm
HANS: Eller hvordan den…eh…trekanten skal formere…eller pyramiden skal formeres. Hvis du skjønner hva jeg mener….du er med, Per?
Per: Ja
HANS: Yesssssss..der er BRA
HANS: Ja……men det burde vel være overkommelig det her….
Per: ja, joda, håper det…
HANS: Blir jo veldig ille å høre på det her, mest sannsynlig, Lærer?
HANS: Ja…ække så mye å si, ass! Så det får bare gå!
….
LIV: Ser ut som vi kan…
HANS: Ja, vi må sikkert si fra til Lærer først, da.. Så nå er vi enkli ferdig Lærer, så nå må du komme bort til oss, nå

Opptak 2 gruppe B
Hans, Liv og Per

[Stille de 4.20 første minuttene. leser igjennom]
HANS: Skal vi diskutere litt, eller?
Per: Vi får vel det…
HANS: Ja. Men ok den første her: Ehm… det er jo bare et kvadrat minus en halv sirkel, da… Ja, som går innover.
Per: Ja
HANS: Men…. hvordan skal vi regne ut det? Holdt jeg på å si?
Per: Vi skal bare skrive formelen for det, da…
HANS: Ja, men hvordan skriver vi formelen?
Per: Mumler…. da er det vel… arealet på et kvadrat minus arealet på sirkelen delt på 2… siden det er en halv sirkel…
HANS: Det er vel sikkert mulig det…
Per: Så er det da…
HANS: …på et vis…
Per: For DET er jo formelen for arealet av en sirkel, da… Så da er det DET….formelen for areal av et kvadrat…
HANS: Ja. Formelen for areal, det er jo… pi ganger r i andre… eh så….må vi egentlig bare gjøre det…på den. Det er sirkel, da…men kvadrat er jo bare ene siden ganger den andre, holdt jeg på å si…er jo greit nok det. Eeh… ja. men da får vi bare…da regner vi ut…det er diameter, nei omkrets av kvadratet minus halve sirkelen, da.
Per: …. åja, vi skal finne omkretsen. Ja…trodde det var areal. Da så.
HANS: Ja, men det bør jo gå greit
...
HANS: Ja, vi har god tid, så vi kan gå tilbake litt etterpå, bare gå sånn kjapt gjennom…. Åssen går det, LIV? Ja, skjønner du det? Nei, men
LIV: Jeg har ikke vært her noen ting, så jeg vet ikke hva det ER engang, jeg…
HANS: Først så må vi… det vi gjør for å regne ut kvadratet…eller omkretsen av kvadratet….da tyar vi…den siden ganger den siden….
LIV: Men hvordan vet vi hvor lange de er?
HANS: Ja, vi vet jo ikke det. Bare lage en formel. Eehhhh… da er det x ganger x, da.
LIV: Ja…
HANS: Åsså
Per: Men alle sidene er jo like lange som diametern i sirkelen da, så vi kan bare bruke d..
HANS: Åja, sorry, vi skal l… finne omkretsen , ja selvfølgelig….x +x+x… Og så må vi bare regne ut sirkelen.
LIV: Ja, hvordan gjør jeg det?
HANS: Ehm… du må jo ta diameter, da…diameter ganger 2…eh, sa jeg riktig nå? Eller sa jeg feil nå…?
Per: Pi ganger r ganger 2, som er omkretsen av en hel sirkel…
HANS: Ja, eller pi ganger diameter da…
Per: Ja, det funker vel også.
HANS: Ja, det er det samme. Det er ikke noe problem… Skal vi bare kjappe oss litt sånn over til neste da, eller? Vi kan forklare dypere etterpå, Liv.
……………….
HANS : Men… et kvadrat har sider som er 3a lange. Lag formel for arealet av kvadratet.
LIV: Det er bare 3a ganger 3a
HANS: Ja, eller 3a i andre og…
LIV: Ja
Per: Ja
HANS: Og arealet av kvadratet når a er lik 4 cm… LIV, du kan prøve først…

LIV : Da blir det 2 ganger 2 da…blir det ikke det? Eller hvis… men det er jo tre…4 lissom. Her er det tre firere, og her er det tre firere.
HANS: Åja. Godt innspill. Flott. Eh, så ja, det er vel 12 ganger 12. Har vi alle kalkulator, eller er det… Bare sånn hvis det blir litt høyt etterhvert her…
Per/HANS: Er ikke det 144 a?
LIV: Jo
HANS: ja, også… Hvilken verdi a har hvis arealet av kvadratet er 56… komma 25…cm i annen.
PER: Da må vi jo bare finne ut kvadratroten av 56, 25, da... som da blir 7,5.
HANS: Ja
LIV: Men så er det, hvis den er 3a… så for å finne verdien av a, så må vi også dele på 3, da. Så da blir det 2,5.
HANS: 2,5… så da er det 7,5 der… Ser fint ut det, altså..
HANS: Eeehm... fint det, ser noenlunde greit ut det…
……………..
[avslutter]

Opptak 3 Gruppe B
Hans, Liv og Per
HANS: Er det ikke 8 og 15?
HANS: Kan vi ikke ta 8 og 15, for det atte…
LIV: Hva?
HANS: Vi kan ta 8 og 15, jeg bare skriver det ned for å huske det.
(Beskjed fra meg)
HANS: For der skal man regne ut areal, så da skal man gange lengde ganger bredde
LIV: Ja
HANS: Og så hvis vi ganger x med y, så... ja da er jo det lengde og… da er jo det areal, holdt jeg på å si
LIV: Ja
HANS: Og så står det at… eh… det må være størr… at y må være større enn 4… eh, så da var det første jeg kom på, eller det første jeg kom på var jo 30 og 4, da, men så måtte det være over… eh… 4, så da tok jeg bare 15 og 8. Sånn at eeh, ja sånn at… det ble bare lett. Sånn sett.
LIV: Ja
HANS: Men eh,
Per: Skal vi ha to til?
HANS: Men er det noen andre løsninger som dere har tenkt på, eller er det…
LIV: Men blir det 120…
M: Ja, hvis du tar 15 x 10 så blir det 150, og så…
LIV: Ja…da er det jo det som er svaret, da.
HANS: Det må jo være det.
Per: Og så har vi også 10 x 12.
HANS: Det er helt riktig det asså… det er forskjellige typer der, så det ække no...
……
LIV: Vi må ha tre ulike forslag, da.
HANS: Jaa! Sant! Det var jo litt kjekt. Godt innspill. Ehm… så da har vi 2.
HANS: 6 og 20
Per: Ja
HANS: Ja skal vi ha det?
……
Per: Ja, det kan vi godt.
HANS: Ja, for da ganger vi 20 meg 6, det betyr at x er 20 og y er 6.
HANS: Skal vi ta neste oppgave, da?
LIV: Ja
LIV: Har vi lov til å skrive det ned et sted, sånn at vi husker det, eller?
HANS: Jeg vet ikke. Vi skal jo egentlig ikke ha med….vi skal jo ikke he med de greiene…vi får jo egentlig bare ha med hjelpemidler, bare
……………….
Per: Skal vi bare ta den basice da, som er 2x15 + 3x15? Det er jo den enkleste.
HANS: Ja…så trenger vi ett regnestykke, bare…
LIV: Ja, jeg har ikke lest oppgaven ennå
HANS: Det er vel… det er vel egentlig det… så er det jo 30 + 45, da, blir det ikke det, da?
LIV: Det blir 15x2 og 15x3, da?
HANS: Ja
LIV: Er det et regnestykke da?
HANS: Nå skjønner jeg ikke hva du mente nå.
LIV: Ja men vi skulle lage et regnestykke… skal vi ta svara på det og plusse det sammen?
HANS: Ja, 2x15 + 3x15…
LIV: Ja, det var det jeg mente..
HANS: Ja
Per: Det er A, og så B… men skulle vi ikke lage to regnestykker på, da?

HANS: Nei, vi skulle visst bare lage ett. Hun sa ifra om det i stad.
LIV: Ja
Per: Å ja
LIV: Det var det hun sa om det oppgaven der
HANS: …tre ulike forslag på hvor mange små og hvor mange sto…..kremt, kremt kremt, sorry!...hvor mange store flasker hun kan ha pantet.
LIV: Ja
HANS: Eh, da er det 87 kroner
LIV: All…vi kan jo….alle flaskene har jo minst 2 kroner i pant, da.
HANS: Kan være 29 store flasker og null små.
LIV: Tror du det går?
HANS: Ja, gjør det ikke det, a? Men vi skal jo ha tre ulike da, så… Har du noe, Per?
Per: Nei, ikke for øyeblikket.
HANS: Nei ok.
HANS: LIV?
LIV: Jeg prøver å tenke
HANS: Ja
HANS: Så lenge vi får et oddetall med de…med de treerne vi bruker, egentlig, så kan vi jo bare……..tenke sånn, sånn at…si….11 store da, så blir det 33. Åsså er det 54 igjen…bare….for så….eh da er det jo 12 små..
LIV: A nei… 26...
HANS: Herregud
LIV: Jo 27, nei
HANS: Jeg tenker helt feil
LIV: Jo, 27
Per: Så 11 store og 27 små
HANS: Ja… sorry, fullstendig villedning, ikke hør på meg ☺
……….
HANS: Så må vi ha en til…
Per: Vi kan jo ta 27 store, og da 60….delt på 2, 30 små
LIV: Det går ikke
HANS: Det blir litt voldsomt
LIV: Det er jo 27 store og null små, hvis det er 27 store, da
HANS: Ja
Per: Nei, jeg mener 9 store, da. 9 store, mente jeg.
LIV: 9?
………………
Per: Det blir 9 flasker, da….
HANS: Det blir 27, pluss 30 x 2, som blir 60
Per: Ja. Da blir det…
LIV: 9 store og 30 små?
HANS: Ja
LIV: Ja
HANS : Hmmmm
LIV: Vi må begrunne svara, da
…………………………………..
HANS: Ja, det kan vi komme på… hvis vi husker det, da
LIV: Vi kan jo bare skrive 29 store flasker er lik så og så mange kroner, da
HANS: Ja, må sikkert bare gjøre det,
LIV: Ja
HANS: Så vi kan bare… men hvis vi henger igjen på noe, så er det bare å si ifra sånn at vi kan få gått igjennom alt her.

HANS: Men, det er bare disse 4 her, er det ikke det?
Per: Jo
LIV: Er det her hele del 1?
HANS: Det ser ut som det. Ok!
LIV: Skrive gruppe… Hvilken gruppe er vi? Sånn.
HANS: Ta oppgave 3, da…
HANS: Kan vi ikke bare… få… eller det er ganske greit i hodet akkurat nå… men har dere noe å komme med på oppgave 3 i starten der?
Per: Ikke egentlig
Per: Figur 1 blir jo bare 2 ruter, da…
HANS: Nei ikke sant, det blir bare 2 uansett, men jeg tenker at det letteste er med kvadrater, hvis vi bruker det.
Per: Ja, det er det, ja
LIV: Ja?
HANS: Så kan vi bare tegne. Nå illustrerer jeg på et ark, Lærer… slik vi kan gjøre det. Og da kan vi bare starte sånn: At det der er en ekstra, og det der er n. Eeh, og så på «oppgave» 2 så gjør vi akkurat det sammen, bare at… n ganger n ikke sant, så der blir det 4 i stedet, og så blir det pluss 1 på sida der.
LIV: Og så på 3 så blir det…
HANS: Det blir 3x3 pluss 1, da.
LIV: Ja.
Per: Ja
HANS: Sånn.
HANS: Nei men skal vi hanke inn Lærer igjen, og si at vi er ferdige med oppgavene, slik at hun skal slippe å høre på et kvarter med ingenting…?
LIV: Ja
Per: Ja. Tror det….
……….
LIV: Vent da, kan vi bare sjekke om vi har tenkt …likt….
HANS: Nå skal jeg se igjennom her…
LIV: Sånn at vi bare får det…sånn at jeg er sikker
HANS: Kan du rekke opp hånda nå…?
LIV: Ja
HANS: Her… så er det bare med parentes (ser igjennom LIV sin løsning)
A: Hæ, hva, hvordan?
HANS: Bare en parentes… hvor det blir partall, nei jeg mener positivt tall…
LIV: Jaha…
HANS: For det atte… ja… for atte… i… på den andre her, så er det jo negativt fortegn her, så det er bare med de med parentes hvor det er... i fjerde, at det blir eh… positivt da.
LIV: Ja…
HANS: Du har skrevet det her, men du har ikke vært nøyaktig på at det bare er… de med… parentes…
LIV: Skal jeg skrive her da, bare oppgaver med parentes.
HANS: Du kan skrive «med parentes» i parentes ☺
[uhørlig]
HANS: Men jeg tror den neste oppgaven, jeg tror den blir verre… for da skal vi jo finne på oppgavene sjøl…
[Snakker om de videre oppgavene]
HANS: Er det greit for deg, Per? Ser det greit ut for deg, eller?
Per: Det gjør nok det
HANS: Du har skjønt alt?
LIV: Ja
HANS: Ja, så bra. Ja, da kan vi jo likegodt sjekke over om det er noe som…
LIV: Du må sjekke over, vettu

HANS: Ja, bare sammenlikne, at vi har lissom…
HANS: Er det nødvendig å ha det i parentes?
Per: Det der var oppgave a på oppgave 2?
HANS: Ja, jeg begynte bare på…
Per: Ja, det blir jo det da, eller nei..
HANS: …eller nei, du ganger jo først uansett.
Per: Ja, det er sant
HANS: Da er det ikke no` problem!
HANS: Vi er i grunn ferdig.

Opptak 1 gruppe C
Frida, Mette og Sol:
(Kun de delene av opptakene som var interessante er gjennomført renskrevet og knyttet til hvem som sa hva)
[Ber dem sette i gang og snakke høyt og tydelig, og ber Sol sette seg nærmere]
SOL: Ok…
FRIDA: Skal vi bare starte? Ja
Kunne vi starte?
Ja tror det
Vi må først finne ut noe som alltid er der
Ja
Og det er…
Det er de to armene der
Er det?
Ja
FRIDA: Du ser det…Eller…det er jo bare en prikk på alle figurene, på armene
METTE: Det er jo det. Er du enig, Maja?
SOL: Det er alltid det, for den er der.
FRIDA: Også på den greia i midten her, så legger det på en hver gang, 'her er det en red, her er det to rader,
METTE: ehm…ja
FRIDA: Ja
SOL: Og så må vi finne hvor Mange som legger på, som legges på
Ja
I figur 4 og 5
FRIDA: På 4 så legges det på en rad til
…i bredden og lengden her
Lager vi ikke bare en sånn her, og så legger vi til 1?
Vi lager et ekstra lag da, på firkanten
ja, ja, ehm på en måte
fordi
SOL: Her er det 9, her er det 4 og her er det 1
1, 4 og 9…
……
Eem går de ikke?
Vent da…
…skal bare sjekke om det blir riktig….
Legger på 2 til da
Nei…
Jammen vi kan..lagen en 4er til…nei 5 til…
Bli det….?
FRIDA: Ja det blir riktig
Næmmen nå (Vi skulle ikke tegne!)
JEG: Går det bra med dere?
Ja
Nei
Ja
Nei, det gjør det ikke
JO
hva er det vi skal gjøre etter….ok?
ler
DEN endrer seg aldri

Nei
Den er der hele tida, også
Det er firkanten i midten som endrer seg
Ja
Det legges bare på en prikk mer på bredden og lengden
Ja, det gjør vel det…
Figur…
FRIDA: Skal vi fortsette?
Ja
FRIDA: …vi er på den, da «…hvor mange prikker vil det være i figur 10? Vis hvordan du regnet det ut.»

METTE: Ja, vent da, det blir jo… Nei det… kødda! Det er helt feil.

SOL: Jeg vet ikke hvordan man skal… hvordan skal man egentlig skrive….10

FRIDA: Det hadde vært 102 prikker!

METTE: Ja. Hæ? 52 kanskje?

SOL: Nei, hva er det du snakker om nå, Frida?

FRIDA: Den derre figur 10… For det hadde jo vært 10 i bredden OG lengden… og 10 rader, liksom…

[Stille]

FRIDA: …og se hvor mange prikker det ville være i figur 10… Det er 102!

SOL: Neeeeeei!

FRIDA: Det kunne vært.

SOL: Nå gjetter du bare, lissom! 102?! Nei. Nå bare gjetter du.

(Jeg sier det er 3 min igjen)
FRIDA: Det her går INGEN vei..
…åja, vi burde kanskje jobbe med de andre også…
….det som aldri endrer seg…er….DE TO
De er da der…og der
Ehm…
FRIDA: De andre utvider seg vel…
Ja
For den…to…tre…
De der
Ja
På f3…
På f1 så er det lissom en prikk, og på 2 så er det 2 prikker inni der…
FRIDA: Og der er det 1x1, og der er det 2x2, tror jeg, også blir det 3x3.
Da er vi der
Hva?
Skjønner ikke jeg…
METTE: ehm på den her…
? hvem er det som aldri endrer seg på den der, da?
På den
Peker, på den?
Nederste
FRIDA: mm, er vi på den nederste allerede, ja? Ja men, skal vi ikke lage en formel?
FRIDA: Leser…som kan brukes til å regne ut antall prikker…
SOL: i den n te figuren..

Sol; Den DER!
Øverste, ja…
Mmm
Men det er jo vanskleig å beskrive med ord hvordan figuren utvikler seg, for den utvilker seg jo i lengden OG…beskriv det med ord…
Ja men…
METTE: Men den gjør det på masse forskjellige steder…
Ja, ikke der her…
METTE: Jeg kommer ikke til å klare det der figur 10….
Eller…
SOL: Mere vet jeg ikke…fordi…
Formelene skulle beskrive hvordan….den…på den
Ehm
Hvis det er n….ehm…
(jeg sier det er 1 min igjen av samarbeidtida)
Ja
SOL: det her vakke så gøy som jeg skulle trodd…
2n i andre….
Men hvordan skl jeg få den der, da?
2n i andre først da….?
Ja, men jeg har gjort, det…
Inni hodet mitt…
METTE: Fordi det der, det er 2n. Det. Er 2n. ..Åsså er… det..n…
FRIDA: Jammen, er det ikke
…..åh, nå glemte jeg hvilken som var….

Opptak 2 gruppe C
Frida, Mette og Sol

Notat
Dette opptaket ble dessverre slettet, men jeg fikk hørt igjennom det en gang.
Det mest markante funnet fra sist, nemlig at Frida ble blankt avfeid når hun kom med et korrekt forslag til løsning, ble ikke registret denne gangen. Dette må sies å være en klar forbedring.
Alle kom til orde.

Frida, som ble avfeid sist, virket å ha lest oppgaven veldig dårlig, og ble korrigert flere ganger av Mette og Sol. Tonen var en helt annen enn sist, man snakket med respekt og de to andre prøvde i større grad å forklare henne hva som var den riktige tankemåten utfra hvordan de hadde forstått oppgaven.

Det var tydelig at de forsøkte å få til en konstruktiv diskusjon, selv om oppgavene var vanskelige for dem. Flere gangeer sa de: dette kan vi/bør vi kunne. Det var ingen som kjørte sololøp, men man forsøkte å jobbe sammen. Etter hvert var det stor oppgitthet å spore særlig hos Sol.

Opptak 3, gruppe C
Frida, Mette og Sol

FRIDA: nå skal vi bare prate om oppgavene, da…
Beskjeder fra meg
METTE: Vi må passe på x ganger y er 120…
FRIDA: Jeg vet det.
METTE: Da tenkte jeg at x er 80 og y er 40, fordi 40 pluss 80 er 120.
SOL: Det ække pluss
METTE: Å faen, det er gange! Sorry.
FRIDA: 4, 40 og 30…
FRIDA: Y skal være større enn 4
FRIDA: Der står der at Y er større enn 4…
METTE: Åsså x og y er hele tall…ok
SOL: skal vi prøve «Gjett og sjekk?»
METTE/FRIDA: Maybe…
METTE: x er lenger enn y….ja det ser vi jo…Y er større enn 4
SOL: Skal vi prøve gjett og sjekk?
(Blir ikke hørt?)
METTE:…..ja det går jo enkli ikke da… (inne i sitt eget)
FRIDA: den der kan være…..ven da…
FRIDA: den der kan være 60 og den kan være 20..
FRIDA: vent, den er større enn 4….
SOL: Jeg trur jeg vet det!Aaah!
FRIDA: Åååå, det der er 60.
SOL: og det er 20!
FRIDA: Men det var jo nettopp det jeg sa.
METTE: men det gåkkke an….….større enn 4…
SOL: Ja, det ER jo større enn 4!
METTE: Det kan ikke være 60 ganger 20…
SOL: Hvorfor ikke?!
METTE: 60 ganger 20 er jo…..
METTE: …1200
METTE: Da måtte det blitt 6 ganger 2
FRIDA: Nei, for det blir 12, ikke sant…
SOL: Da blir det 60 ganger 2
FRIDA: Det var det jeg tenkte, men det skulle jo være over 4…n. da …6…
SOL: jeg er sulteeeen…
FRIDA: Men y er større enn 4……så det…
SOL: Det kan ikke være 4, det MÅ være større….
SOL: Men hele tall, er det uten komma?
SOL: Hele tall er uten komma, ikke sant?
METTE: Man kan få 5 x 24…
METTE: ….eh, man kan ta 5 x 24…
FRIDA: Men hele talll…..det står at x og y er hele tall…
SOL: Ja?
SOL: Det er jo et helt tall….
FRIDA. Hva var det du sa?
SOL: 5 ganger…24
FRIDA: …Åja
METTE: …for eksempel….for det blir 120
……

FRIDA: …det må nesten bli riktig….men vi skal jo finne tre forskjellige forslag…
METTE: Vi kan ta 8 ganger 15
FRIDA: hvor der det liksom vi skal skrive det?
METTE: Prøv å start med Y, også tar du……y et tall som er høyere enn 4….
mmmm
METTE: Kan jeg si en til?
SOL: Nei! Hælvetes balle ass…
METTE: Da tar jeg den selv..
METTE: Kan ta 1o ganger ett eller annet…
FRIDA: Har du finni noe?
METTE: Ja…
SOL: Bare si det, da…
METTE: 10 x 12
SOL: Iddiot
METTE: Det er bare å gjette, du sa jo gjett og sjekk…
SOL: ja men…
METTE: Det var jo det jeg gjorde…
____
FRIDA: Da er vi på oppgave 2…
METTE: men…alle skjønner det her, ikke sant?
FRIDA: Ja
SOL: Ja
FRIDA: Da går vi på oppgave 2….
METTE: Lag to ulike….nei…..lag ETT…
FRIDA: Vent da, er det ikke…. Hun panta 7 småflasker….Sjekk det!
SOL: 7 ganger 2?
FRIDA: Nei, er det ikke…7 x 3?
FRIDA: Nei vent da….15 ganger 2…
SOL: 15 ganger 2??
FRIDA: ….fordi hu…panta 15 småflasker og det er2 kroner
METTE: 15 x 2 pluss 15 x 3
FRIDA: 135
SOL: Er det bare det?
METTE: Ja, eller altså…
FRIDA: Det blir 135 da…
METTE: 15 ganger 2…
FRIDA: 15 x 2 pluss 15 ganger 3, det blir joo……
METTE:…..vent da…det blir…det BLIR riktig. Det blir 75
FRIDA/M: nei…
FRIDA: 135
METTE: Får prøve å regne i hodet, da…
SOL: Ja men da……det er derfor v har kalkulator….for å slippe å regne ut….
FRIDA: 135……åssen kom du til…..75
METTE: 2 x 15 det er 30… 3 x 15…
FRIDA: Ikke noen vits i å regne i hodet når vi har svaret vettu…
SOL: Det er derfor vi har kalkulator…
METTE: 30…..40……jeg får det ikke til å stemme i huet mitt….
SOL: Det er fordi du ikke HAR et hue!
FRIDA: Hvorfor står det….Ella panter for totalt 87 kr….?
SOL: Er ikke det to forkjellige oppgaver?
METTE: Vent da…
SOL: Nei det er det ikke!

METTE: Vent da…
FRIDA: Skal det BLI 87 kroner?
METTE: Nei, det er Ella. Nei vent da….I Norge har vi…..
SOL: å ja, å ja….
FRIDA: ok
SOL: Hva er det du skal etter skolen, FRIDA?
FRIDA: Vet ikke…
SOL: skal du gå med de lysa?
FRIDA: Tror det…
SOL: Nynner
METTE: Kan du IKKE synge, please?
METTE: Vent da sa du 70 istad; M? Eller 75 mener jeg?
SOL: Ja det er riktig!
FRIDA: Ja, det er det jeg ikke skjønner hvorfor….?
METTE: Jeg har regne det ut nå, men skjønner ikke hvorfor det står 135 her da…..?
FRIDA: Vent da, så skal jeg bare putte…..15 x 2…..pluss 15 x 3……så står det 135….!
FRIDA: Jeg SKJØNNER det ikke jeg heller….kanskje vi må spørre Lærer…?
METTE: Vent da…
FRIDA: Jeg spør Lærer
METTE: Det må være feil på kalkulator….for en gangs skyld!
FRIDA: …fordi 15 x 2…..det ER jo 30 og så pluss 15 ganger 3…
SOL: Åja..jeg VET hvorfor det blir sånn….for man må regne ut alltid gange først…
METTE: Ja…
SOL: Man må gange det først…og da..
FRIDA: Ja det var det vi gjorde…
SOL: Men gjorde ikke det på kalkulatoren, dere skrev opp det der….dere må regne ut gange først, for å få riktig svar…
SOL: Må alltid regne ut gange først og…
METTE: ja..
SOL: ..i regnestykket...og dere skrevet det opp (på kalk) i rekkefølge..
FRIDA: Vi tok jo 15x2 og så tok vi 15x3, og 15 x 2 er tretti….og
SOL : Ja….
Jeg: Prøv din måte, Sol, og så kan dere sammenligne….
FRIDA: Men vi skjønte ikke helt, for atte….vi skrev det opp her da, det derre….viser….og det blir 70 (riktig)…men når vi skriver det inn her, så blir det 135 på kalkulatoren….
METTE: 70. Det blir 75, ikke 70.
FRIDA: Ja, jeg mener 75, jeg sa feil…viser igjen:
METTE: Jeg stoler mer på meg selv enn kalkulatoren, ass!
FRIDA: (viser enda mer)
METTE : Jeg skjønner ingenting av det her…
Jeg: Tenker dere at dette er riktig?
FRIDA: Ja, jeg føler det.
SOL: Da ville jeg gått for det.
FRIDA: Ja…
Jeg forklarer at kalkulatorer noen ganger kan gjøre feil….og at de burde stole på utregningen på papir

---

Leser neste oppgave..sett opp tre ulike osv…
METTE: Ja, fordi….Ella…
METTE: Vi skal sette opp TRE ulike regnestykker….eller ulike forslag…
FRIDA!
METTE: Hva fant du ut?
FRIDA: …at vi tar 15….ganger 3 og så tar vi 14 x 3 som blir 45 pluss 42 som blir 87.
METTE: Bra

METTE: Jeg har også en, jeg har 2 ganger 15 som er 30….
FRIDA: vent da, du sa….
METTE: 2 x 15 som er lik 30 åsså pluss 3 x 19 som er 57…
FRIDA: Skulle vi ikke få 87?
METTE: Jo. 30 pluss 57.
FRIDA: Åjajaja! Sorry, jeg glemte å plusse dem…
METTE: Henger du med, M?
METTE: Hva var det du skreiv igjen, FRIDA?
FRIDA: 15 x 3 som er 45…og så skrev jeg 14x3 som er 42…og så tok jeg 45 +42 som er 87
SOL: Skal vi få 87 eller….
METTE: 87
SOL: Fytte hælvete, nå gidder jeg ikke mer…
FRIDA: Det går bra.
METTE: Vi skal egentlig ha en til. Men hvis vi skjønner det, så…
FRIDA: Vi kan bare forte oss, da…
METTE: Men hvis vi skjønner det….hvis vi skjønner hvordan vi gjør det så er det ikke no vits i å bruke tid på det….
FRIDA: Joda!
METTE: M, skjønner du det?
SOL: Sett opp tre ulike forslag på hvor mange små og store flasker hun kan hå pantet…..
(Virker ikke å ha fulgt med i det hele tatt….)
METTE: Asså du skal få 87, også skal du bare komme til et regnestykke på hvor mange SÅNNE pluss SÅNNE hun har…Det var akkurat det vi gjorde istad…egentlig…Ler litt….skjønner du?
SOL: …ler litt….ja…halvvegs….jeg gidder ikke å skjønne det, fordi skal ikke bli matteprofessor her/…matteprøver er…
(latter)
SOL: «har vondt i magen»
FRIDA: Formelen for figur….Fn er…..n i andre pluss 1…ahhh
METTE: Ok.
FRIDA: Tegn de tre første figurene i dette mønsteret…
SOL: …hvilken tok du? …det er et regnestykke…..
FRIDA: Hva?
METTE: Hvilket regnestykke tok du? (tilbake til forrige oppgave, fordi hun ikke har funnet noe selv?)
SOL: Hvilket regnestykke tok du…..på den?
FRIDA: Hva mener du?
SOL: DEEEEN! Hva står det der?
FRIDA: Ler…15 ganger 3
FRIDA: …også 14 ganger 3…
SOL: åhhh
FRIDA: Også er det 45 + 42 som er svaret, som er 87
mumling…
SOL: Neineinei, hva ble det nå? synger
METTE: Du kan ikke ta det på kalkulatoren
uhørlig….
FRIDA/SOL: Men det blir jo nest……det blir jo ikke det….det blir IKKE nesten!
SOL: 2 ganger 13, da…26
(synger)
uhørlig mumling
FRIDA: Jeg tror jeg fant ut av noe
METTE: Fikk du til en til?
FRIDA: Jeg fikk… 17 x 3 som er 51…
SOL vent da!

FRIDA: Også 2x12 som er 36…og da blir det 51 +36 som er 87.
SOL: 56?
METTE/FRIDA i kor: 51!
FRIDA: …og 36
FRIDA: Sånn, da har vi alle på plass, gutta! (22:48) Nå følte jeg meg smart for en gangs skyld! RTenk det!
METTE: Ja…
FRIDA: Nå er jeg stolt over meg sjøl! ...aldri vært flink i matte, gutta!
Latter og mumling
Noen: Jeg fikk alltid 100 av 100 på barneskoleeen!
latter
mumler
Ser at de andre jobber alene nå, og METTE spør: skal vi jobbe alene?
METTE/SOL: Nei!
SOL: Det skal vi IKKE
FRIDA: Åja, vi har de (oppgavene) fortsatt, da….
METTE?: Neeeei! Se på den DER! Men den greia der, den er UMULIG å få til!
mumling
SOL?: Men det er HELT umulig!
FRIDA: Vent da: Formelen for figur n i et geometrisk mønster er lik n2 pluss 1. Det skjønte jeg IKKE bæret av…
SOL: ….ikke jeg heller…
FRIDA: Tegn de tre første figurene i dette mønsteret. Du kan selv velge om mønsteret skal bestå av kvadrater, trekanter eller andre former. OK.
(SOL synger)
FRIDA: Men jeg skjønte ikke….tegn……
METTE: Kan dette være riktig? hæ?
FRIDA: Vi får 3 poeng for denne her, gutta!
SOL: Ja, vi fikk 4 for den forrige! (synger)
FRIDA: ÅÅÅ, men hvordan gjør man det?
METTE: Åh, sjekk på potenser og formler…
METTE: Kanskje den her kan hjelpe oss litt….(blar i boka)
FRIDA: n2 + 1….jeg lurte på om det var ne av DET, men det var det ikke…
FRIDA: Åja, DET HER ER SÅNN!
SOL: Raper
FRIDA: AAAAAA! DA skjønte jeg!
METTE: JA. det er sånn.
FRIDA: Det gir litt mer mening, da.
METTE: Det har jeg masse på…herregud, jeg har jo med så masse hjelpemidler, da…!
FRIDA: ….figurer eller mønster?
METTE: Se her, dette her blir formel 2n+6 (leser i gammelt hefte)
FRIDA:….men her skal det være …n+1
METTE: Nei, for det ække 2n det er ni andre
FRIDA: Åja, sant…
METTE: …og hva blir det da?
SOL: Det er n ganger n
METTE: n i andre
FRIDA: n……
METTE: N ganger n pluss 1
SOL: jaaaa
METTE: Men kan DET være riktig da, eller?
Latter

FRIDA: æææh…hva er DET?
METTE: Fordi…fordi hvis n…se her…hvis n…
SOL: ler
FRIDA: Kan du IKKE le….
METTE: Kan jeg få lov til å forklare meg?
(Beskjed fra meg)
METTE: Hvis n i annen…..hvis DET der en 1n….åsså n i annen det er….
FRIDA: Faen…det….jeg SKJØNNER ikke…
ler
FRIDA: Skal vi bare hoppe til neste oppgave?
METTE: Nei!
SOL: Er du gæren!
FRIDA: Fordi vi skjønner ikke…
(diskusjon om de skal gå videre/hva de skal bruke tid på)
METTE: Åh, så irriterende!
FRIDA: OK (Leser) Se utregningene ovenfor….Forklar hvorfor de fire utregningene ovenfor er riktige. Begrunn svaret matematisk og/eller med tekst.
METTE: ehm
FRIDA: eeeeeh…Hæ? Vent da, joooooo!
METTE: nei….
SOL: Åååååå……(oppgitt)
FRIDA: Jeg fant ut!
FRIDA: Så, det er 3 x3x3x3 forsi det er 3…fi….ok du tar 3 ganger alle treerne fire ganger..
METTE: Men der er MINUS 3
FRIDA: ja, åh….hmmmm
FRIDA: Ja (ler)…så…jammen JO! Det BLIR riktig. For….vent…vent…..Er litt rart at jeg kan det, for jeg har aldri prøvd på det her….Det Må ha skjedd et mirakel over natta ass, bare sier det, gutta!
(snakker om TIK-TOK)
FRIDA: Det MÅ være det, for det blir jo ikke…
METTE: For meg så blir det minus 12….
FRIDA: æææh, da har jeg gjort feil….
ler
FRIDA/: faen, a!
(SOL tuller med noe?)
METTE: Det blir 3…..men er det pluss eller ga…(au, det gjorde vondt)
METTE: Er det pluss eller gange når det er sånn?
FRIDA: Det er gange!
FRIDA: Se, se her: Du tar 3 gange…nei nei nei nei …3x3x3x3….tok jeg fire ganger nå?
METTE: Ja
FRIDA: Jo, det gjorde jeg! 81!
METTE: så først står det minus 3…
FRIDA: Ja, det var det jeg ikke helt skjønte, da….men fordi….det kan hende det blir sånn borte siden det blir sånn paranteser da, eller no….
FRIDA: Eller så…..hvos du ser på den ANDRE så er det ikke paranteser, og da BLIR det minus…
FRIDA: men forklar…
METTE: SANT deeeeet!
FRIDA: Åja, du skal….vent da!....forklar hvordor de fire utregningene…..
METTE: Men der er, der ER riktige…
FRIDA: Ja….
METTE: Så hvis….de skal være riktig….men HVORFOR?
FRIDA: ja….
SOL: Fordi de ER jo det……..

FRIDA: Jeg kjøpte meg ny penn i går, gutta!
ler og fjaser
FRIDA: ok……eehhhh. ok.
SOL: ler og fjaser, mumling og snorkelyder, hører FRIDA og N jobber i bakgrunnen.
FRIDA/METTE: ja….81….
Veiledning:
Jeg: Hva betyr det når det står n i andre?
METTE: Er det n + n da, eller er der n x n?
(METTE vil gjerne si noe, de andre snakker i munnen…FRIDA forsøker å finne frem noe relevant…)
SOL: Fortell, Mette. Du har ordet ☺
METTE: Når det er n i andre, er det n + n, eller n x n?
FRIDA: er det ikke n x n? ler….jeg vet ikke, jeg bare tror det….
It is……
FRIDA: vi kan gjette og sjekke, da…?
ler
FRIDA; n ganger……n i andre ganger n i andre….
fjas
METTE: …men kan dette her være riktig da….?
(Fjas…)
METTE: Men kan dette være riktig?
FRIDA: Hold kjeft, gutta….
METTE: Det må være riktig. Fordi…
(SOL fjaser)
METTE: For da blir det n…hvis denne greia her er n….
FRIDA: Sol, hva er det du driver med?
METTE: Åååååå, jeg kommer til å klikke…Nå skal jeg bare sjekke, så kan dere høre på hva jeg sier…
(mumling/fjas)
METTE: Hvis den der ….den der, ikke sant…DE 2 (peker), hvis det er n. Da blir det n ganger n. og da blir det…
FRIDA: Ja, men hva er den derre…
METTE: Også pluss en det er PLUSS en…så n ganger n
FRIDA: …vent da!
(METTE: Hvorfor tok du ikke bare en strek over hele der?)
SOL: Men….var vi ikke på den der nå?
METTE: Nei. Ikke nå lenger.
SOL: ok. hva..
SOL: Nei, kødda, da var det…
FRIDA: Men det høres jo riktig ut! …men det er bedre at vi…prøver å skrive noe da, enn at vi ikke skriver noe i det hele tatt…
METTE: men det kan også hende at det blir sånn, fordi…siden…det der er n…(påkaller FRIDA, gitt opp SOL?)…siden de to er n….også er det der også n.
FRIDA: Da blir det 2 ganger 2…
METTE: også er det…men også er det pluss 1…men pluss 1, betyr det at det er pluss 1 sånn? Betyr det at det er pluss 1 n?
FRIDA: ler….det er så mye greier……
….
Ja, det må det være, 1!
FRIDA: Da var jeg smart på første break?
METTE: Nå er det IKKE lenge igjen, tror jeg… Skal vi prøve på den andre, da? Den siste…
FRIDA: neineineinei….nå må vi snart begynne å pakke bort…ja, de (andre) flytter seg…

UiA Universitetet i Agder

Master