Bevisnivåer i skolematematikken

En kvalitativ casestudie av lærerens identifikasjon av bevisnivåer i 10. trinns elevers skriftlige argumentasjon.

OLAV OMLID

VEILEDER
Unni Wathne

Universitetet i Agder, 2020
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Master

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en femårig reise som lektorstudent ved Universitetet i Agder. Det å skrive en master har vært en av de største utfordringene jeg har gjennomført, og kommer til å være en opplevelse jeg aldri glemmer. Det har krevd mye dedikasjon fra min side, hvor det fra dag en opplevdes som et kaos av teori og data jeg ikke kom til å få kontroll over. Etter både oppturer og nedturer underveis fikk jeg orden i kaoset og kom i mål med masteren. Nå når jeg er i enden av prosjektet er det noen jeg vil takke som har hjulpet meg på veien.

Først vil jeg takke veilederen min Unni Wathne og i tillegg Cornelia Brodahl som alltid har vært støttende og hatt tro på prosjektet. De har under hele masteroppgaven gitt meg konstruktive tilbakemeldinger som jeg kan jobbe med, samt vært oppmuntrende og utfordret meg i arbeidet jeg har lagt ned.

Takk til alle de flotte med-lektorene jeg har blitt kjent med i løpet av disse fem årene. Med spesiell takk til dere som har arrangert og vært med på SUAW-møter på Zoom i utfordrende tider. Dere har gjort disse fem årene til noe helt minnerikt som jeg aldri glemmer. Takk til dere som har hjulpet meg gjennom matematikk og fysikk studier i fem år, det kunne aldri blitt det samme uten. Takk til dere som har korrekturlest oppgaven, det har gjort studien leselig. Familie og venner har vært viktige, og kanskje spesielt i disse koronatider. Takk til bror, foreldre og besteforeldre som ringer og bryr seg om hvordan jeg har det. Dere gjør det lettere å holde motet ved like og humøret oppe.

Olav Omlid

Kristiansand, mai 2020

Sammendrag
I grunnskolen vil læreren kunne møte ulike måter elever argumenterer på. Det gjør det viktig å kunne vurdere om argumentasjonen er gyldig. Studien undersøker hvilke begrunnelser lærerstudenter bruker når de identifiserer bevisnivåer i elevers skriftlige argumentasjoner. Den undersøker hvordan lærerstudenters begrunnelser av elevargumentasjoner er tilstrekkelig eller ikke for å nå et bevisnivå. Dette er gjort med utgangspunkt i forskningsspørsmålet:

> *Hvordan begrunner lærerstudenter sin identifisering av elevers bevisføring som et generisk eksempel?*

Lærerstudenters rapporter fra en undervisningsøkt hvor de har identifisert 10. trinns elevargumentasjoner, har blitt undersøkt for å besvare forskningsspørsmålet. Argumentasjonen tar utgangspunkt i en imaginær dialog og identifiseres av lærerstudentene ut ifra Balacheffs (1988b) bevisnivåer, naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet. Identifikasjonene er analysert og diskutert med vekt på hvilke begrunnelser lærere bruker i sin identifisering av elevargumentasjoner. For å få et håndterlig datamateriale ble forskningsspørsmålet innsnevret til kun å omhandle argumentasjoner på vei mot eller på det generiske eksempelet.

For å få en helhetlig fremstilling av bevisføring, er Balacheffs taksonomi beskrevet i studiens teoretiske rammeverk. Den inneholder fire, i økende grad, avanserte bevisnivåer av tenking. Denne delen består også av komponenter som påvirker bevisføring. På denne måten kan resultatene fra analysen diskuteres med relevant teori.

Balacheffs taksonomi viste seg å ikke være fullstendig når det gjaldt lærerstudenters begrunnelser av elevargumentasjoner. Derfor ble det utviklet et analyseverktøy, for å enklere skille mellom begrunnelsene lærerstudentene brukte. Det ga grunnlag for ni kategorier istedenfor Balacheffs (1988b) fire nivåer. Analyseverktøyet består av Balacheffs fire nivåer, fire kategorier som har trekk av de fire nivåene og en kategori som ikke inneholder noen trekk fra Balacheffs nivåer.

Ved å bruke analyseverktøyet ble det mulig å oppdage forskjeller i lærerstudentenes begrunnelser når de identifiserte elevargumentasjoner. Lærerstudentenes identifiseringer kan deles inn i fire begrunnelser: påstand, omforming, forklaring og kvadrattall. Begrunnelsene tar utgangspunkt i elevers argumentasjoner, og blir brukt i ulik grad for å identifisere en generisk argumentasjon. Dette viser at det er ulik kunnskap blant lærerstudentene om hvilke argument som kreves for et generisk eksempel. Dette gir grunnlag for å stille spørsmål om kunnskapen lærerstudenter har om bevisføring og hvor stort fokus bevisføring har i utdanningsløpet.

Abstract

In elementary school, the teacher will be able to meet different ways in which students argue. This makes it important to be able to assess whether the reasoning is valid. The study examines the justifications teacher students use when identifying proof levels in students' written arguments. It examines how the justification of teacher students for student argumentations is sufficient or not to reach a level of proof. This is done on the basis of the research question:

> *How do teacher students justify their identification of student argumentation as a generic example?*

Teacher students' reports from a teaching session in which they have identified 10th grade student argumentation have been examined to answer the research question. The argumentation is based on an imaginary dialogue and is identified by teacher students from Balacheff's (1988b) levels of proof, naive empiricism, the crucial experiment, the generic example and the thought experiment. The identifications are analyzed and discussed with emphasis on the justification teachers use in their identification of student argumentations. In order to obtain a manageable data material, the research question was narrowed to address only argumentations on the way to or on the generic example.

In order to obtain a comprehensive presentation of proof, Balacheff's taxonomy is described in the study's theoretical framework. It contains four, increasingly, advanced levels of proof of thinking. This section also consists of components that influence proof. In this way, the results of the analysis can be discussed with relevant theory.

Balacheff's taxonomy turned out to be incomplete in the case of teacher students' reasoning for student argumentations. Therefore, an analysis tool was developed to make it easier to distinguish between the reasons the teacher students used. It provided the basis for nine categories instead of Balacheff's (1988b) four levels. The analysis tool consists of Balacheff's four levels, four categories that have traces of the four levels, and a category that contains no traces of Balacheff's levels.

Using the analysis tool, it became possible to detect differences in teacher students reasoning when identifying student argumentations. Teacher student identifications can be divided into four grounds: assertion, transformation, explanation and square number. The justification is based on student argumentations and is used to varying degrees to identify a generic argument. This shows that there is different knowledge among teacher students about what arguments are required for a generic example. This provides the basis for asking questions about the knowledge that teacher students have about proof and how much focus proof has in the course of teacher education.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Bevis er et mektig redskap mennesker har tilgang til og derfor er det viktig at man klarer å skille mellom hva som er gyldige bevis og ikke. "In default of any other proof, the thumb would convince me of the existence of a God"[1] – Sir Isaac Newton. Foruten bevis vil enhver klare å overbevise hvem som helst, om hva som helst. Derfor må en være klar over hva et bevis er. "If you are different, or you have minimum possibilities, you can still succeed. I am living proof of that"[2] – Zlatan Ibrahimovic. Ofte møtes en kunnskap av bevis som baserer seg på at et enkeltutsagns gyldighet ansees som tilstrekkelig argument for å begrunne gyldigheten til en generell regel. Skal det være så enkelt å bli overbevist? I denne studien vil det bli presentert ulike kategorier av bevis. Det blir også vektlagt hvilke identifiseringer lærere gjør angående sine elevers bevisføring, og hvordan dette påvirker matematikkundervisningen.

1.1 Bakgrunn for studien

Matematikk har alltid vært et av de fagene jeg har fått størst mestringsfølelse i. Flere av mine matematikklærere viste en glede ved å holde på med matematikk og deres glede smittet over på meg. Derfor har tanken om å undervise i faget alltid vært en mulighet jeg har vurdert. Som snart ferdig utdannet matematikklærer gleder jeg meg til utfordringen med å bringe glede og mestringsfølelse til andre unge sjeler også.

Gjennom mine fem år som student har jeg vært igjennom en del emner i matematikken, og det er spesielt ett fag som interesserte meg. Høstsemesteret 2019 tok jeg faget «Arbeidsmåter i matematikk», og selv om bevis og bevisføring er fremtredende i de fleste matematikkfag fikk jeg en ekstra glede av det i dette faget. Bevisføring er et interessant tema fordi det utfordrer en til å forklare hvorfor noe er som det er, fremfor å bare si sånn er det (Hovik & Solem, 2013).

Personlig liker jeg å kunne argumentere og overbevise med gyldige argument i diskusjoner, fremfor synsing og subjektive meninger. Faget kombinerte dermed mine personlige interesser for matematikk og bevis, noe jeg ønsker å utnytte som lærer. Før jeg begynner i lærerrollen åpnet det seg en mulighet hvor jeg kunne skrive en masteroppgave om tema jeg har latt meg interessere av. Bakgrunnen for studien er dermed ønske om å fremme bevisføring blant unge, slik at de kan bli mer bevisste på hva som er gode argument og bevis. Dermed kan de unngå å bli overbevist av hva som helst, og være godtroende til alt som blir lagt foran dem.

Det er også en annen grunn til valg av tema. Fra å med høsten 2020 introduseres en ny læreplan i den norske skolen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Den inneholder kjerneelement som skal gjennomsyre alle temaer i matematikken. Et av kjerneelementene heter «Resonnering og argumentasjon». Det handler, blant annet, om at elevene skal kunne grunngi fremgangsmåtene sine og føre fram et gyldig bevis (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor blir denne studien både interessant for min del, men også relevant til min utdanning som fremtidig lærer.

Jeg begynte å innse hvor stort temaet var, da jeg fikk tilbud om å bruke en del av et allerede innsamlet og anonymisert datamateriale med to årskulls rapporter fra studentprosjekter. Disse hadde fokus på elevers skriftlige matematiske argumentasjon. Jeg valgte å sikte meg inn på elever på

[1] Rapportert som noe Sir Isaac Newton sa i Charles Dickens's All the Year Round (1864), Vol. 10, s. 346; og senere i "The Book of the Hand" (1867) av A R. Craig, S. Low og Marston, s. 51.

[2] Sitatet er hentet fra et intervju med Zlatan Ibrahimovic av Donald McRae (2014, April) i den engelske avisen The Guardian, https://www.theguardian.com/football/2014/oct/06/zlatan-ibrahimovic-trash-talking-sweden-record-golascorer

10. trinns argumentasjon om bevisføring, og hvordan deres lærere identifiserer elevenes besvarelser. Datamaterialet omhandler imaginære dialoger. Det er en skriftlig dialog mellom to imaginære karakterer som elevene uttrykker sine argument igjennom. Argumentene skal, i denne studien, omhandle elevenes overbevisning.

For at elever skal bli overbevist av gyldigheten til en påstand trengs det argument eller bevis. Balacheff (1988b) klassifiserte elevers arbeid i fire forskjellige typer bevis og hevdet at disse nivåene representerte fire, i økende grad, avanserte nivåer av tenking. De fire nivåene klassifiserer i hvilken grad elevene blir overbevist av et argument. Det betyr ikke at alle nivåene er matematisk strenge bevis, men eleven argumenterer slikt at hen blir overbevist av de fremlagte argumentene. Nivåene vil bli utdypet i det teoretiske rammeverket, i tillegg kalles klassifiseringen for *Balacheffs taksonomi.*

Det er også ulike komponenter som påvirker hva eleven blir overbevist av. Stylianides (2008) fremhever tre komponenter som danner et bevis, den matematiske, psykologiske og pedagogiske komponenten. Disse vil påvirke hvordan en elev utvikler sin forståelse av begrepet bevis. Forståelse av betydningen til et bevis og forståelse av egenskaper ved og krav til et bevis, vil dermed være forskjellig fra person til person (Stylianides, 2007a). Betydningen av *konseptet bevis* med definisjoner av *bevis* og *bevise* varierer også i forskjellige forskningsmiljøer innen matematikkdidaktikk, der blant annet setting, kontekst og behov i læringssammenheng har en påvirkning (Reid, 2005).

Som fremtidig lærer ønsker jeg at elever skal bli flinkere til å bedømme gyldigheten til et argument, fremfor å godta alt som blir lagt foran dem. I den forstand trengs det lærere som er flinke til å undervise i bevisføring. Lærere må ikke bare være flinke, men de må ha en forståelse av hva et gyldig bevis inneholder. Derfor ønsker jeg å forske på hvordan lærere identifiserer elevers bevisføring.

1.2 Forskningsspørsmål

Denne studien undersøker hvordan lærerstudenter identifiserer elevers skriftlige argumentasjoner for en påstands gyldighet. Ønsket mitt om å observere hvordan elever på 10. trinn argumenterer og hvordan lærerstudenter identifiserer deres argumentasjon har dermed bidratt til følgende forskningsspørsmål:

> *Hvordan begrunner lærerstudenter sin identifisering av elevers bevisføring som et generisk eksempel?*

Dette blir besvart ved å gjennomføre en kvalitativ casestudie på en samling av rapporter omhandlende elevers skriftlige argumentasjon skrevet av lærerstudenter. I tillegg er begrepene *lærerstudent, identifisering, begrunner, bevisføring* og *generisk eksempel* essensielle for studien. *Lærerstudenter* er lærere som tar etter- og videreutdanning, forkortet til EVU-studenter, ved Universitetet i Agder høsten 2018 eller høsten 2019. Lærerstudentene skal kategorisere elevenes skriftlige argumentasjoner etter Balacheffs taksonomi, dette er *identifiseringen* lærerstudentene gjør. Identifiseringen blir *begrunnet* med argument læreren vektlegger i elevenes besvarelse. Elevene fører en skriftlig argumentasjon der de fremlegger argument som leder fram til en påstands gyldighet, eller elevenes *bevisføring.* Hovedfokuset i studien dreier seg om Balacheffs tredje bevisnivå, *det generiske eksempel*, som blir utdypet i kapittel 2.1.3.

1.3 Oppbygning av studien

Studien består av seks kapitler. I kapittel 2 tar jeg for meg det teoretiske perspektivet jeg vil ha nytte av i studien. Her presenterer jeg tidligere forskning som har tatt for seg begrepet bevis, og begrepets forskjellige betydninger. Sentralt i det teoretiske rammeverket er Balacheff (1988b) og hans taksonomi, der det generiske eksempelet blir utdypet i større grad enn de andre nivåene. Kapittel 3 utgjør en stor del av studien og beskriver de metodiske tilnærmingene som er gjort, samt en utvidelse av Balacheffs nivåer i analyseverktøyet og hvordan datamaterialet ble innhentet. I kapittel 4 presenterer jeg analysen av datamaterialet og i kapittel 5 drøfter jeg forskningsspørsmålet med utgangspunkt i resultatene fra analysen, i tillegg til hvilke didaktiske implikasjoner studien kan ha for lærere og matematikkundervisning. I kapittel 6 presenteres de viktigste funnene i en konklusjon i henhold til forskningsspørsmålet.

2.0 Teoretisk perspektiv

I dette kapittelet vil studiens teoretiske rammeverk bli presentert. Først vil jeg se på Balacheff sin forskning av bevisføring blant elever fra 1988, og spesielt begrepene naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet som danner hovedgrunnlaget for studiens analysedel. Dernest vil jeg bruke Stylianides sin forskning fra 2008 som hovedgrunnlag for å beskrive ulike komponenter som kan påvirke en elev når hen fører et bevis.

2.1 Elevers bevisnivåer

Resonnering er limet som holder matematikken sammen. Det dreier seg om å tenke logisk og bruke gyldig argumentasjon for å forklare og bevise en metode, en påstand eller en løsning. Videre handler det om å utforme hypoteser, teste dem og eventuelt bevise eller forkaste dem. Da må en kjenne de matematiske spillereglene og vite hva som kan betraktes som kjent, i forhold til hva som må begrunnes og bevises. Elevene skal også kunne følge med på andres resonnement og avgjøre om det er holdbart eller ikke. Bevis er dermed det som bygger huset i matematikken, der aksiomer og allmenne sannheter danner grunnmuren. I dette delkapittelet vil Balacheffs taksonomi presenteres.

Balacheff (1988b) deler formell bevisføring inn i to typer, pragmatisk bevisføring og konseptuell bevisføring. Pragmatisk bevisføring tar for seg det konkrete, hvor eleven bruker handlinger og konkretisering. Eleven bruker tegninger, figurer eller andre representasjoner som fremstilles av fysiske former. Det betyr ikke at løsningen ikke inneholder forklarende språk, derimot vil pragmatiske bevis være preget av at eleven ikke klarer å formulere seg på mer avanserte måter.

Konseptuell bevisføring beveger seg bort fra handlingen og konkrete representasjoner og fokuserer på det generelle. Det handler om å formulere argument knyttet til egenskapene det stilles spørsmål til, og hvilke relasjoner det er mellom dem. For å formulere argument som løsriver seg fra det konkrete setter Balacheff krav til et avansert språk. Hverdagsspråket blir bestemt av rekkefølge og varighet, personer involvert i handlingen og konteksten det blir satt i. Derimot vil språket i konseptuelle bevis distansere seg fra handlingen og kreve mer generelt språk enn det hverdagsspråket tillater. Eleven må derfor klare å distansere seg fra handlingen i oppgaven. Argumentene i løsningen må være uavhengige av spesielle tilfeller og frigjøres fra deres tid og varighet. Konseptuelle bevis krever at språket må bli et verktøy for deduktive utledninger og ikke bare en form for kommunikasjon.

Balacheff (1988b) klassifiserte elevers arbeid i fire forskjellige typer bevis og hevdet at disse kategoriene representerte fire, i økende grad, avanserte nivåer av tenking. Under pragmatisk bevisføring er de tre nivåene naiv empirisme, det avgjørende eksperimentet og det generiske eksempelet, mens det siste nivået, tankeeksperimentet, er et konseptuelt bevis. Det er viktig å påpeke at de tre første nivåene ikke holder som strengt matematiske bevis, men eleven som skaper beviset blir overbevist av sin egen bevisføring, og derfor blir det kategorisert som et bevis.

De fire nivåene i Balacheffs taksonomi vil bli presentert i de neste delkapitlene. For å eksemplifisere hvordan bevisføringen til hvert nivå kan opptre vil det bli brukt eksempler fra elevbesvarelser fra Knuth og Elliott (1998) sin forskning. De ga elevene sine oppgaven «*Gitt en sirkel med senter F og et punkt H inne i sirkelen, finn en korde som går gjennom punktet H der de to resulterende lengdene skal danne det største produktet. Presenter et argument som rettferdiggjør din løsning».* I tillegg vil det henvises til resultater fra Balacheffs forskning, hvor han ga sine elever oppgaven om «*lag en regel for antall diagonaler i en mangekant, når du vet antall hjørner i mangekanten*».

2.1.1 Naiv empirisme

Elever som blir overbevist av naiv empirisme tar for seg noen tilfeldig valgte eksempler, og ut ifra dem verifiserer sin påstand som en sannhet (Balacheff, 1988b; Enge & Valenta, 2014; Lee, 2016). Det å basere en påstand på tilfeldige eksempler er ofte starten på et generelt bevis (Piaget, 1978). Derimot fant Bell (1979) at flere baserer sin verifikasjon på enkle tilfeller, og Balacheff (1988b) påpeker da at naiv empirisme kan være en bevisform som kan forventes å være motstandsdyktig mot generalisering.

Balacheff (1988b) fant at elever på dette stadiet ble påvirket av den sosiale settingen. Det opptrådte et par tilfeller hvor parene som skulle argumentere sammen ble uenige om en påstand. Da utnyttet den ene i paret manglende argumentasjon fra den andre og presset frem sin løsningsstrategi.

I forskningen til Knuth og Elliott (1998) kom det fram at elever som beviste tilsvarende naiv empirisme testet produktet av lengdene til kordene på et par tilfeldige eksempler, og ble overbevist at de var like lange. I tillegg var det andre elever som flyttet punktet, for å overbevise seg selv at det ikke var et spesielt punkt. Noen valgte også å prøve forskjellige størrelser på sirkelen. Felles for alle teknikkene er at de valgte lengdene til korden, punktet i sirkelen eller størrelsen på sirkelen helt tilfeldig. Det indikerer at naiv empirisme er overbevisning av enkle eksempler.

2.1.2 Det avgjørende eksperimentet

Det avgjørende eksperimentet vil, i følge Balacheff (1988b), kjennetegnes at eleven står i et veiskille. Eleven må gjennomføre et eksperiment for å teste om en påstand er sann. Eksperimentet vil bli den avgjørende faktoren for hvilket utfall som kommer seirende ut. Utfallet vil være om påstanden er sann eller ikke. Eleven vil nøye velge et eksempel som klart tester påstanden, slik at eleven blir overbevist når eksperimentet er gjennomført. Dette tester grensene til alle tilfellene for en påstand med et bestemt eksempel (Balacheff, 1988b; Lee, 2016).

Denne formen for resonnement ble brukt av elever til både å bekrefte et resultat, og i argumentasjoner mot andre. I slike argumentasjoner kunne det bli brukt som et våpen poengterte Balacheff (1988b). Et kjennetegn for slike resonnement er argumentasjoner av formen «gjelder det her, vil det alltid gjelde», eller «det gjelder her, men ikke der. Derfor vil det gjelde i noen tilfeller».

Et definerende trekk ved avgjørende eksperiment er elevers intensjonalitet ved valg av et eksempel (Knuth & Elliott, 1998, s. 716). Det må tas bevisste valg som skaper overbevisning. Denne overbevisningen faller under samme kategori som Balacheff (1988b) beskrev som «gjelder det i dette ekstrem tilfelle, vil det alltid gjelde». Dette skiller det avgjørende eksperimentet fra naiv empirisme. Eksempler i naiv empirisme blir valgt med en tilfeldighet, mens eksempelet i det avgjørende eksperiment blir valgt bevisst av eleven (Balacheff, 1988b; Knuth & Elliott, 1998). I Knuth og Elliott (1998) sin forskning vil et slikt eksperiment inneholde sammenligningen av produktet av den lengste korden med produktet av den korteste korden.

2.1.3 Det generiske eksempelet

Det generiske eksempelet handler om å presentere et eksempel og trekke ut det generelle av eksempelet (Stylianides, 2008). Eksempelet blir presentert som en karakteristisk representant for sin klasse (Balacheff, 1988b). Utfordringen for eleven vil være å finne et eksempel hvor hen kan representere helheten på en god måte. Fokuset for eleven vil være på et spesielt eksempel, der argumentasjonen blir en representasjon for helheten.

Argumentasjon tilsvarende det generiske eksempelet kan inneholde forhåndskunnskaper eleven har som ikke er representert i oppgaven. Denne kunnskapen brukes på en relevant måte som får fram det generelle i et spesielt eksempel. En måte å tolke det generiske eksempelet på er «noen trær er bjørk, alle bjørker er trær». Et spesielt tilfelle vil være en bjørk som representerer alle bjørker. Hvis det gjelder spesielt at en bjørk er et tre, vil det gjelde generelt at alle bjørker er trær. Dette er prinsippet bak det generiske eksempelet. I tillegg fant Balacheff (1988b) at det generiske eksempelet ble brukt for å overbevise den andre i paret som tvilte på den valgte løsningen.

Knuth og Elliott (1998) skriver at innfallsvinkelen til argumentasjoner for det generiske eksempelet er interessant. Idéen er å kunne observere et tilfelle som noe som gjelder for alle, og ut ifra det argumentere at det gjelder. For å kunne argumentere på et slikt nivå måtte elevene i Knuth og Elliott (1998) sin forskning først finne forholdet mellom sirkelstørrelsen og kordelengden, før de kunne uttrykke et generisk eksempel. Nemlig at produktet av lengdene til kordene er den samme uansett sirkel. Det generiske eksempelet er fortsatt avhengig av induktive argument og vil derfor ikke bli et deduktivt akseptert matematisk bevis, noe de to foregående nivåene heller ikke er (Knuth & Elliott, 1998). Derimot kan det generiske eksempelet i noen tilfeller tilfredsstille kravene for et matematisk bevis (Stylianides, 2008; Enge & Valenta, 2014). Reid og Vargas (2018) skriver blant annet at et generiske eksempel er et bevis når en slår sammen de psykologiske og sosiale faktorene i beviset, utdypes i kapittel 2.2.2 og 2.2.3. I tillegg skal et generisk bevis ha en argumentasjon som forklarer hvorfor noe skjer, og at det alltid vil skje. Argumentasjonen må derfor sjekkes for *utydeligheter,* Reid og Vargas (2018) bruker *fussiness*. Det generiske eksempelet må sjekkes for utydeligheter, at ingen viktige steg er blitt hoppet over i argumentasjonen. Det er derimot ingen krav for det generiske eksempelet å være et matematisk strengt bevis poengterer Reid og Vargas (2018).

Varghese (2011) presiserer at det kan forekomme situasjoner der det er utfordrende å skille mellom naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og det generiske eksempel. Han henviser til et eksempel fra Stylianides (2007b).

> *If I take a number, say 200, and subtract it from itself I get 0. Then if I add 10 to 0, I get 10. Because the same will hold for any number I choose to begin with, and because there is an infinite set of numbers I can choose from, there is an infinite number of answers I can choose from, there is an infinite number of answers for the problem "write number sentences that equal 10. (s. 312)*

Hadde elevene kun skrevet 200-200+10=10, og sagt at dette gjaldt alle tall ville beviset vært naiv empirisme. Det kan også argumenteres for at det er et avgjørende eksperiment. 200 kan bli tenkt på som et stort tall, og blir bevisst valgt av elevene. Dette gjør det til et bevis tilsvarende det avgjørende eksperiment. Derimot siden svaret inneholder en forklaring på hvorfor det vil gjelde uansett hvilket tall en bruker, blir dette et bevis tilsvarende det generiske eksempel. Dette illustrerer utfordringen med å skille de tre nivåene. Hvis ikke eksemplene som blir brukt i argumentasjonen er tydelig forklart, kan en forsker bare komme til begrensete konklusjoner (Varghese, 2011; Reid & Vargas, 2018).

2.1.4 Tankeeksperimentet

Tankeeksperimentet er et matematisk resonnement som ikke er basert på eksempler eller representasjoner. Tankeeksperimentet er det eneste av nivåene i Balacheffs taksonomi kategorisert som et konseptuelt bevis. Verifikasjonen til et konseptuelt bevis er basert på egenskaper til objektene som forekommer i påstanden. Egenskapene til objektene som forekommer er formulert på en generell måte. De er løsrevet fra pragmatiske og praktiske argument, og beveger seg over til intellektuelle og konseptuelle bevisformer (Balacheff, 1988a, 1988b).

Kjennetegn ved slike resonnement er at eleven distanserer seg fra handlingen i oppgaven og bruker logiske slutninger som tar utgangspunkt i relasjoner og egenskaper som karakteriserer handlingen i oppgaven skriver Balacheff (1988b). Argumentasjonen vil stå sentralt. Det er viktig for eleven å kunne bruke argument på et nivå som tar for seg de abstrakte egenskapene i oppgaven. For at argumentasjonen skal klare dette må argumentene eliminere det spesielle i oppgaven. Balacheff (1988a, 1988b) lister opp tre krav som må oppfylles for at argumentasjonen skal være universell. Først må argumentasjonen inneholde universelle argument, der argumentene alltid vil holde stand, selv om noe endres i en gitt oppgave. Argumentasjonen skal også være uavhengig av personer involvert i argumentasjonen, da den skal gjelde i enhver sammenheng. Til slutt må argumentasjonen være uavhengig av tiden og varigheten den er satt i, for å gjelde til enhver tid.

I følge Knuth og Elliott (1998) vil argumentasjoner til tankeeksperimentet fortsatt ha mulighet til å starte med induktive prosesser for å fremstille en påstand. Når påstanden er formulert kreves det deduktive prosesser for å fullføre beviset. Elevene i Knuth og Elliott (1998) sin forskning som beviste til tankeeksperimentet, tok i bruk tidligere kunnskaper om geometri, og hvordan vinkler og formlike trekanter forholder seg til hverandre i en sirkel. Dermed kunne elevene uttrykke algebraisk at produktet av kordelengdene alltid er den samme (Knuth & Elliott, 1998). På denne måten vil argumentasjonen bli brukt uavhengig av oppgaven og fremstiller et bevis som viser sammenhengen mellom lengdene. Et slikt bevis vil være matematisk strengt, samt være psykologisk og sosialt akseptert i settingen, de psykologiske og sosiale rammene utdypes i kapittel 2.2.

2.2 Komponenter i bevisføring

«Når man skal bevise noe så skal man forklare noe til noen andre. Det er nesten som når vi skal begrunne noe i filosofi. Vi forteller hvorfor noe er det. Det er ikke nok å si at det er sånn, vi må si hvorfor» (Hovik & Solem, 2013, s. 120). Spørsmålet blir da hva forskere i matematikkdidaktikk mener med bevis og bevise, og betydningen bevis kan ha for elever, har blitt studert mye i løpet av de siste tiårene. Det er ingen entydig definisjon av matematisk argument og bevis og forholdet mellom dem i matematikkdidaktisk litteratur. Reid (2005) har påvist dette gjennom en litteraturgjennomgang.

Med støtte i Stylianides vil jeg nå ta for meg hvilke prosesser elever går igjennom når de beviser, og hvilke komponenter som påvirker deres bevisføring. Jeg bruker de tre komponentene i Stylianides analytiske rammeverk fra 2008. Det vil favne ulike begrepsapparater fra ulike forskningsmiljøer og kan hjelpe lærere med å planlegge en læringssti for sine elever. I tillegg ligner to komponenter på to av Reid og Vargas (2018) sine kriterier for et generisk argument, psykologisk faktor og sosial faktor. Den matematiske komponenten er en beskrivelse av de fire aktivitetene Stylianides (2008) skjelner under «reasoning-and-proving», engelsk for begrunnelse og bevis. De fire aktivitetene er *finne et mønster, lage en påstand, lage et bevis* og *motbevis.*

I studiens kontekst er jeg interessert i å analysere EVU-studenters identifikasjon av nivåer i elevers argumentasjon, nærmere bestemt for gyldigheten av en matematisk påstand. I studien inngår det ingen påstander som krever at elevene tilveiebringer avkreftende bevis (motbevis). Sentralt i min studie er derfor den matematiske komponentens tre første aktiviteter, tre måter eleven kan overbevise seg selv om at en påstand er gyldig. Disse skal jeg nå belyse nærmere.

2.2.1 Matematisk komponent

Den matematiske komponenten et bevis støtter seg til, rommer de fire aktivitetene i begrunnelse og bevis. Den første aktiviteten er *finne et mønster*. Elever skal kunne generalisere ut ifra matematiske strukturer, istedenfor en hypotese begrunnet av tilfeldige eksempler. Dette kommer fram i et av kjerneelementene i den nye læreplanen som blir innført i skolen fra høsten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Stylianides (2008) deler aktiviteten *finne et mønster* inn i to underkategorier *bestemte mønster* og *plausible mønster. Bestemte mønster* er mønster som har en tydelig struktur og er entydig for enhver som velger å utforske dem. Med andre ord, enhver som finner et generelt mønster vil ende opp med lik konklusjon.

Plausible mønster blir det motsatte, nemlig flertydig. Det er ikke mulig for en matematiker å trekke slutninger med absolutt sikkerhet basert på et mønster og si at hans løsning er mer korrekt enn en annen løsning. Hvis det er åpent for en flertydig tolkning av data vil alle valide løsninger være like plausible fra et matematisk perspektiv og alle valide løsninger vil være korrekte.

Forskjellen på de to underkategoriene er at et *bestemt mønster* krever en strukturell generalisering av data som støtter opp om at et generelt uttrykk er sant. For *plausible mønster* er ikke en strukturell generalisering en nødvendighet for at uttrykket skal være sant.

For den neste aktiviteten, *lage en påstand,* trengs det først å definere termen påstand. En påstand blir definert som «en begrunnet hypotese om en generell matematisk relasjon basert på ikke-tilstrekkelig-data» (Stylianides, 2008, s. 11). Hypotese tilsikter en usikkerhet i påstanden og antyder at det er nødvendig med flere aktiviteter før det kan fremlegges en aksept eller avvisning av påstanden.

Skille mellom *finne et mønster* og *lage en påstand* innehar to viktige element. Først, i *lage en påstand* vil hypotesen bli utarbeidet under påstandsbyggingen, og hypotesen vil bevisst utvide de tilfellene den er basert på. Dette er ikke tilfelle for mønstergjenkjenning, hvor sannheten kun gjelder for de tilfellene den er testet på. For det andre vil ikke hypotesen i *lage en påstand* være sann, den henviser til videre undersøkelse for å underbygge om hypotesen er sann eller ei. Sammenhengene eleven oppdager i mønstergjenkjenning derimot, vil kategoriseres som en absolutt sannhet.

Den tredje kategorien Stylianides (2008) definerer under begrunnelse og bevis er *lage et bevis.* Et bevis vil i denne forstand være definert som «et verifisert argument basert på aksepterte sannheter for eller mot en matematisk antakelse» (Stylianides, 2008, s.11). Argument er slik å forstå at det er en etterfølgende sekvens av påstander. Verifisert er hva som er universelt akseptert, enten i matematikken eller den sosiale settingen beviset fremlegges i. Aksepterte sannheter er teoremer, aksiomer, definisjoner og representasjonsverktøy som en sosial setting tar for en gitt sannhet (Stylianides, 2008; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina 2013).

Stylianides (2008) skiller mellom to typer bevisformer. Den ene er generisk eksempel, jf. kapittel 2.1.3. Der det generiske eksempelet er et bevis som bruker et spesielt tilfelle som en representasjon for helheten (Stylianides, 2008; Balacheff, 1988a, 1988b). Det ligner Harel og Sowders (1998) transformative bevis. Den andre formen for bevis i denne studien er tankeeksperiment (Balacheff, 1988a; 1988b), jf. kapittel 2.1.4. Det er et deduktivt bevis, og ligner på Stylianides (2008) demonstrasjon og Harel og Sowders (1998) aksiomatiske bevis.

Alle bevisformer vil enten være deduktive eller induktive. Deduktive bevis er logisk strenge utledninger basert på tidligere etablerte sannheter, eller tautologiske argumentasjoner (Reid, 2005; Reid & Vargas, 2018). Matematisk induktive bevis derimot tillater en elev å, blant annet, argumentere basert på hva en autoritet sier (Reid, 2005). Tankeeksperimentet er i større grad et deduktive bevis, mens det generiske eksempelet ikke har et krav om å være matematisk strengt (Reid & Vargas, 2018).

2.2.2 Psykologisk komponent

Den psykologiske komponenten fokuserer på eleven, eller den som lærer ifølge Stylianides (2008). Den tar for seg elevens tolkninger av de matematiske egenskapene til det matematiske objektet eleven bruker i begrunnelse og bevis. Elevens tolkninger vil påvirke besvarelsen og derfor vil begrepene bevis og påstand bli tolket subjektivt (Harel & Sowder, 1998, 2007). Siden bevis er påvirket av subjektive meninger er det nødvendig med en psykologisk komponent (Stylianides, 2008; Reid & Vargas, 2018).

Siden bevis og påstand tolkes subjektivt blir det viktig for eleven å overbevise seg selv om et bevis. Hvis eleven får en oppgave som handler om å bevise en påstand vil det viktigste, psykologisk sett, være å argumentere for å overbevise seg selv at det er et bevis. Reid og Vargas (2018) påpeker at en elev kan bruke et generisk eksempel som bevis for noe generelt, men en leser kan oppfatte eksempelet som bare et spesielt tilfelle. Balacheff (1988b) poengterer at leseren da oppfatter argumentasjonen som et avgjørende eksperiment, mens eleven bruker det som et generisk eksempel. Den ene tolkningen gir logisk deduksjon til et generisk eksempel, og det blir oppfattet som et bevis. Den andre tolkningen er en generalisering av et spesielt tilfelle som er valgt til å være spesielt, og dermed ikke oppfattet som generelt. Elevens forståelse av beviset er dermed uavhengig av hvordan en lærer, eller annen observatør bedømmer argumentasjonen (Stylianides, 2008).

Det er dermed en forskjell i hvordan eleven oppfatter et bevis og komponentene i beviset (Stylianides, 2008; Reid & Vargas, 2018). Validiteten til hvordan eleven oppfatter beviset er kun avhengig av eleven selv, den psykologiske komponenten. Derimot er validiteten til beviset bestemt av regler utarbeidet i den matematiske settingen hvor eleven befinner seg, typisk et klasserom og generelt den matematiske komponenten (Stylianides, 2008; Balacheff, 1988b).

2.2.3 Pedagogisk komponent

Den pedagogiske komponenten er den siste av tre komponenter i Stylianides (2008) sitt rammeverk for å hjelpe læreren med å planlegge en læringssti for sine elever. Det er et innblikk i begrunnelse og bevis fra et pedagogisk standpunkt. Den tar for seg både den matematiske og den psykologiske komponenten, og Stylianides (2008) formulerer to relaterte hovedproblem som den pedagogiske komponenten baseres på. Det første problemet gjelder de matematiske egenskapene til et matematisk objekt, og hvilken forståelse eleven har av egenskapene. Potensielle avvik eleven har i sin forståelse i forhold til klassens generelle forståelse vil hjelpe læreren å fokusere læringen i den retningen avvikene oppstår.

Det andre problemet bygger videre på det første. Hvis det er funnet avvik i forståelsen er det nødvendig for læreren å gradvis utvikle undervisningen slik at elevens forståelse beveger seg mot den universelle forståelsen (Stylianides, 2008). Der den universelle forståelsen er den sosiale settingens generelle forståelse.

Undervisningen blir utført med en motivasjon læreren mener eleven lærer best av. En slik motivasjon, eller behov, kan være verifisering, utforskning, systematisering, kommunisering eller sosial aksept (Reid, 2005). Læreren vil skape situasjoner der elevene blir usikre eller undrende, før læreren resonnerer seg fram til en løsning med deduktive eller induktive argument og elevene blir overbevist.

Motivasjonen vil variere basert på hvilket konsept læreren har av bevis (Reid, 2005). Konseptet av bevis kan enten være tradisjonelt og baseres på deduktive prosesser, eller kvasi-empirisk som ikke etablerer en absolutt sannhet. Derimot brukes kvasi-empiriske bevis for å klargjøre eller oppdage feil lettere (Reid, 2005).

Gjennomgår eleven prosessen med de to problemene vil elevens forståelse bli lik den universelle forståelsen. De matematiske egenskapene til objektet har blitt transparent for eleven gjennom valide argument. Hvis denne forståelsen var til stede før en slik undervisning, eller at eleven har dannet seg denne forståelsen gjennom invalide argument, har eleven en ikke-transparent forståelsen av egenskapene til det matematiske objektet. Et bestemt mønster vil for eksempel være transparent for eleven hvis hen gjenkjenner argument som er valide til å bestemme hvorfor mønsteret er entydig. Hvis eleven argumenterer med sannheter som ikke er etablert i klasserommet, vil det bli oppfattet som ikke-transparent fra eleven (Stylianides, 2008).

De tre komponentene vil virke om hverandre. Den pedagogiske komponenten utvikler elevens forståelse til en universell forståelse. Da utvikles den matematiske komponenten eleven har, til å bruke mer generelle argument. De matematiske bevisene blir mer presise og valide, og utvikler den psykologiske komponenten til eleven. Hen blir mer kritisk til egen overbevisning og potensielle avvik fra den generelle forståelsen i den sosiale settingen er luket bort (Stylianides, 2008).

Den generelle forståelsen av et bevis i et klasserom blir bestemt ut ifra et sett med sannheter, hvor læreren spiller en viktig rolle for aksept og utvikling av sannhetene som blir innført (Stylianides, 2007a). Bevisføringen til eleven er dermed utviklet til å bruke sannheter etablert i settingen, der eleven bruker argument som er gyldige og forståelige og argumentene blir kommunisert med representasjoner som er valide (Stylianides, 2007b; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina, 2013).

De tre komponentene danner Stylianides rammeverk for å hjelpe lærere å undervise i bevisføring. Stylianides (2016) har også formulert fire faktorer som er spesielt viktige for å kunne løfte bevisets betydning i grunnskolen, slik at elever får en transparent undervisningsform innenfor tema. I denne studien er den første og fjerde faktoren relevante med tanke på resultatene av analysen. Den første faktoren fremhever lærerens kunnskap, og påpeker at mange grunnskolelærere har en svak kunnskap av bevis. Den fjerde faktoren fremhever instruksjonsstøtten lærerne har. Instruksjonsstøtten er den tilgjengelige eller utilgjengelige støtten de har for å engasjere elevene i bevisføring enten fra lærebøker, lærerutdanningen, relevant forskning eller lignende.

3.0 Metode
I dette kapittelet er det beskrevet hvordan jeg har gått fram med datamaterialet for å svare på forskningsspørsmålet. Kapittelet er bygget opp slik at det først presenterer forskningsdesignet (kapittel 3.1), før jeg presenterer hvilke deltagere som deltok (kapittel 3.2). Det blir et eget delkapittel der jeg presenterer settingen lærerstudentene ble satt i, hvilken oppgave de ga til sine elever og hvordan de svarte i sine rapporter (kapittel 3.3). Deretter forklares utvalget som er gjort (kapittel 3.4), før analyseverktøyet presenteres (kapittel 3.5). Til slutt diskuteres kvaliteten i studien, der det blir gjort rede for validitet og reliabilitet til studien, samt etiske betraktninger (kapittel 3.6).

3.1 Forskningsmetode
Bryman (2016) beskriver kvalitativ forskning som forståelsen av den sosiale settingen gjennom undersøkelser av tolkninger gjort av deltagerne i settingen. Mitt forskningsspørsmål er av en slik art at jeg finner en kvalitativ tilnærming til å være den beste framgangsmåten for å gi dybdekunnskap om emnet jeg ønsker å beskrive. Jeg ønsker å beskrive identifiseringer lærerstudentene gjør rundt elevenes argumentasjon, som går innunder Bryman (2016) sin beskrivelse av kvalitativ forskning.

Forskningsmetoden som jeg har valgt er en case studie. En casestudie kan være en enkel gruppe, en skole, en familie, en organisasjon, en person eller en hendelse ifølge Bryman (2016). En casestudie vektlegger intensive utforskninger rundt en setting. Wellington (2015) deler casestudier i tre forskjellige typer, der den ene blir kalt *kollektiv casestudie*. Det er en studie som tar for seg flere caser, men håndterlig mange. Disse kan ha like eller ulike karakteristikker, men de er valgt slik at det kan bli dannet en generell forståelse av casene. Utvalget i denne studien var basert på to caser. Den ene var samlingen av rapporter fra 2018 og den andre var samlingen av rapporter fra 2019. Utvalget blir utdypet i kapittel 3.4.

3.2 Deltagere
Deltagerne i studien var lærere som underviste 5.-10. trinn og tok et nasjonalt kurs for å forbedre sin matematiske utdanning. Kurset var i regi av utdanningsdirektoratet og heter «MA-922 Algebra, tallteori og geometri I». Kurset ble tilbudt flere steder i Norge, der Universitetet i Agder tilbudte digital undervisning. Kurset fokuserte på lærere med generell lærerbakgrunn som allerede jobbet som lærere og underviste i matematikk. Det ga deltagerne mulighet til å utvikle deres kompetanse i matematikk og matematikk undervisning til å møte kravene om 30 og 60 studiepoeng for å undervise i matematikk på, henholdsvis, barneskole og ungdomsskole fra og med 2025.

3.3 Setting
Deltagerne i studien var EVU-studenter som deltok på emne MA-922 ved Universitetet i Agder høsten 2018 eller 2019. Temaet matematisk argumentasjon (resonnering, begrunnelse og bevis) utgjorde en modul i emne og tilsvarte en ukes arbeid. En påfølgende modul introduserte en prosjektoppgave, tilsvarende to ukers arbeid, knyttet til temaet.

I prosjektmodulen ble EVU-studentene introdusert for Balacheffs taksonomi av matematisk resonnement i skolematematikk ved hjelp av en video som ga karakteristiske trekk for hvert nivå. I tillegg illustreres hvordan elevene kunne argumentere for at summen av to oddetall er et partall på hvert nivå. De ble også introdusert for idéen om imaginære dialoger som en metode for å få EVU-studentene i gang og utvikle deres ferdigheter til å argumentere i klasserommet. De ble introdusert for seks eksempler på dialoger, kalt "startdialoger", blant dem «Bygge trapper» som skulle brukes i oppgaven. EVU-studentene fikk et obligatorisk todelt oppdrag, og skulle levere en prosjektrapport etter en gitt mal.

3.3.1 Matematisk argumentasjon i klasserommet

Først ble EVU-studentene kjent med hvordan Balacheff (1988b) observerte hvordan skolematematikken arbeider med argumentasjon og bevis. Han skilte mellom fire nivåer av resonnering jf. kapittel 2.1. Nivåene forteller noe om hvordan elevene argumenterer for en påstand. EVU-studentene ble kjent med Balacheffs nivåer gjennom en video fra Universitetet i Agder, samt henvist til boken «Tall og tanke 2» av Solem, Alseth, Eriksen og Smestad (2017) med utdypende beskrivelser av de tre første nivåene.

3.3.2 Imaginære dialoger

Oppgaven elevene arbeidet med tok utgangspunkt i en imaginær dialog. Det blir beskrevet av Wille (2017) som en individualisering av matematiske oppgaver som til vanlig krever mer enn en person for å gjennomføre oppgaven. En imaginær dialog er et krav om en dialog eller samtale mellom to eller flere personer som løser en matematisk oppgave. Elevene blir invitert til å bruke et mer uformelt språk til å argumentere og finne sammenhenger, i motsetning til en lærergjennomgang på tavla som ofte bruker et mer formelt språk. Dette kan gjøre det lettere for elevene å komme i gang med en matematisk argumentasjon og forstå matematikken i problemet (Lekaus & Askevold, 2015, s. 18).

Wille (2017) bygger på idéen at tenking er en form for kommunikasjon og læring kan oppfattes som en endring i kommunikasjon. Han fortsetter med å beskrive at tale og tenking blant barn har et utviklingspotensial der tenking utvikles til språk og tale til kunnskap. Derfor kan tenking oppfattes som en individualiserende versjon av kommunikasjon, der det er mulig å kommunisere matematisk med både en selv så vel med andre. Endringer i elevers matematiske kommunikasjon vil i større grad være med på å utvikle deres kompetanse til å delta i matematiske diskusjoner, samt utvikle deres matematiske læring.

Dualitet er et viktig begrep i imaginære dialoger ifølge Wille (2017). I en imaginær dialog er det to fiktive personer som diskuterer og rollene de to personene har vil ha en innvirkning på hvordan ytringene mellom dem blir tolket. Hvis det er to fiktive personer i dialogen, hvilken rolle skal hver av dem ha? Skal den ene være spørrende og den andre komme med svar? Skal de være likeverdige partnere og utforsker problemet sammen? Eller skal den ene være flinkere enn den andre? Dette vil ha en innvirkning på hvordan ytringene blir formulert av eleven.

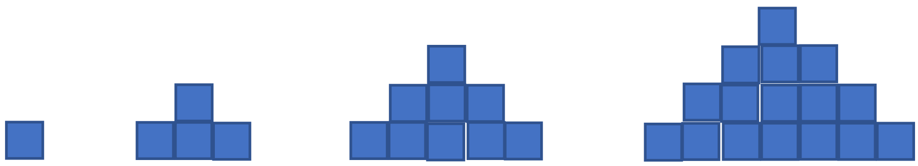
Det er også ubevisste ytringer som skaper dualiteter i imaginære dialoger. Ifølge Wille (2017) har både informasjon i oppgaven en ubevisst påvirkning på eleven, samt tidligere erfaringer som danner ubevisste forventninger. Informasjonen i oppgaven kan lede eleven i en løsningsretning basert på tilkoblinger eleven har med bestemte ord og formuleringer. Tidligere erfaringer vil påvirke hvordan eleven uttrykker seg i den imaginære dialogen.

Wille (2017) trekker også fram dualiteten mellom en dialog og en imaginær dialog. I en vanlig dialog vil det være to involverte personer som bytter på å lytte og å snakke, mens i en imaginær dialog må ofte en person ta ansvaret for begge stemmene. Dette skaper en dobbel refleksjon. Eleven settes i en aktiv talende rolle hvor han svarer på tidligere ytringer fra oppgaven eller motparten i den imaginære dialogen, men samtidig holdes en aktiv rolle som lytter og skaper en forståelse av hva som foregår. Eleven blir både en aktiv snakker og en aktiv lytter.

3.3.3 Bygge trapper

«Bygge trapper» var en av seks startdialoger EVU-studentene ble introdusert for, og var oppgaven elevene skulle jobbe.

Knut:	Figurene viser trapper bygget av klosser.



Idunn:	OK, vi skal altså finne ut hvor mange klosser som trengs for å bygge en trapp med fire trinn opp, en med fem trinn opp osv.
Knut:	Ja! Den første trappen har jo bare ett trinn. Om vi legger sammen klossene til den andre trappen, får vi 1+2+1. Her er det jo et system. Se her: 1=1 1+2+1=4 1+2+3+2+1=9 1+2+3+4+3+2+1=16
Idunn:	Jeg tror det blir 25 i trappen med fen trinn opp.
Knut:	Ja, det tenkte jeg også. Vi bare legger til 5+4. Altså jeg mener at antall klosser i trappen med fire trinn opp er 16, vi legger til 9. Det blir 16+5+4=25.
Idunn:	Hm ... Jeg tenkte bare 5 ganger 5, altså at antall klosser er 5*5=25.
Knut:	Det ser ut til å bli likt om vi bruker din måte eller min måte.
Idunn:	Ja, det stemmer for en trapp med seks trinn opp: 25+6+5=36 og 6*6=36.
Knut:	Vi skal altså finne ut hvor mange klosser som trengs for å bygge en slik trapp uansett hvor mange trinn opp den har?
Idunn:	Hm ... Hva om vi ...

Elevene ble introdusert for to fiktive personer, Idunn og Knut, som diskuterer et matematisk problem. De overtok der Knut og Idunn stoppet og skulle fortsette å diskutere det matematiske problemet ved å bruke matematiske argument. Elevene skulle skrive ned sine argument, slik at EVU-studentene kunne identifisere deres argumentasjon. Hovedidéen var at elevene argumenterte for å overbevise seg selv at antall klosser i figuren tilsvarte kvadrattallet til figurnummeret.

3.3.4 Planlegging og gjennomføring av timen

EVU-studentene skulle planlegge og gjennomføre en undervisningsøkt hvor de prøvde verktøyet imaginære dialoger. I økta ble elevene delt inn i par eller grupper av tre og skrev ferdig dialogen «Bygge trapper». Elevene fortsatte arbeidet med det matematiske problemet der startdialogen sluttet.

EVU-studentene ble informert at undervisningsøkta kunne gjennomføres med en startaktivitet der klassen gjennomgår planen for timen felles før de arbeider i par/grupper med oppgaven. Timen avsluttes med en oppsummering, for å presisere for elevene hva målet med timen var. Det kunne i tillegg være lurt for EVU-studentene å lage forventede argumentasjoner tilsvarende nivå 1, 2 og 3 til Balacheffs taksonomi. For å lettere identifisere elevenes argumentasjon etter økta.

3.3.5 Identifisering av matematisk argumentasjon

Etter at EVU-studentene hadde gjennomført undervisningsøkta valgte de ut tre av de imaginære dialogene som elevene hadde produsert. Med de imaginære dialogene gjorde de følgende. Først ble den imaginære dialogen presentert, for eksempel et bilde av den skriftlige dialogen elevene hadde produsert. Deretter identifiserte EVU-studenten hvilken form for overbevisning elevene argumenterte med i den imaginære dialogen, basert på Balacheffs taksonomi. Dette tilsvarer første hoveddel i rapporten, som blir utdypet i kapittel 3.3.6, og grunnlaget for datamaterialet mitt.

3.3.6 Rapporten

Rapporten EVU-studentene skrev la hovedfokus på deres egne erfaringer med identifisering av bevisnivåer i elevenes imaginære dialoger basert på Balacheffs taksonomi. Rapporten inneholdt en innledning om nødvendig informasjon, hoveddel med erfaringer knyttet til imaginære dialoger og matematisk argumentasjon og avslutningsvis en spørreundersøkelse.

Innledningen ble delt i to deler. Den første delen tok for seg forberedelser EVU-studenten gjorde på forhånd, faglige mål, antall elever, presentasjon av «Bygge trapper» og imaginære dialoger som arbeidsform. Den andre delen inneholdt gjennomføringen av undervisningsøkten, utførelsen av undervisningsøkta, forberedelser på spørsmål om oppgaven og aspekter ved bruken av imaginære dialoger.

Hoveddelen av rapporten var også todelt. Den første delen inneholdt en presentasjon av elevenes arbeid med imaginære dialoger. EVU-studentene skulle etter gjennomført undervisningsøkt velge ut tre av de imaginære dialogene elevene hadde produsert. Dialogene skulle identifiseres og finne hvilke former for overbevisning elevene brukte på vegne av Knut og Idunn i den imaginære dialogen, basert på Balacheffs taksonomi. Deretter skrev EVU-studentene en refleksjon over egne erfaringer med identifikasjon og begrunnelse av bevisnivå. Dette danner grunnlaget for datamaterialet mitt.

I den andre hoveddelen reflekterer EVU-studentene over hvilke identifiseringer og begrunnelser de har presentert, der de svarte på tre veiledende spørsmål. Spørsmålene tok for seg hvilke innsikter EVU-studenten fikk av elevenes argumentasjon, begrunnelse og bevis, og hvilke aspekter av Balacheffs teori som var nyttig eller utfordrende med identifiseringen.

Til slutt svarte EVU-studentene på en spørreundersøkelse. Den tok for seg spørsmål om nyttigheten og utfordringene med imaginære dialoger, Balacheffs nivåer og hvordan de samspiller i klasserommet. EVU-studentene skulle krysse av på et tall fra 0-10 på 14 spørsmål, hvor 0 var helt uenig og 10 var helt enig.

3.4 Utvalg

Deltagerne i studien tok kurset «MA-922 Algebra, tallteori og geometri I» og et av arbeidskravene i kurset dannet grunnlaget for en prosjektoppgave av, blant annet, faglærerne i kurset. EVU-studentene ble dermed spurt etter et samtykke, der deres rapport kunne brukes som datamaterialet for prosjektoppgaven. De samtykkete rapportene til prosjektoppgaven ble senere presentert for meg av mine veiledere som mulig datamaterialet for min studie. Derimot var antall rapporter alt for omfattende for min studie, og jeg måtte gjøre et utvalg.

Jeg valgte å kun fokusere på rapporter fra 10. trinn, og dermed fikk jeg kun tilsendt de rapportene som baserte seg på elevargumentasjoner fra 10.trinn. Valget var hovedsakelig basert på tidsbruk, da mange rapporter ville bli tidkrevende. Totalt var det 17 av 73 rapporter, hvor 8 (av 39) var fra 2018 og 9 (av 34) var fra 2019. Generelt inneholdt hver rapport tre imaginære dialoger, med unntak av en som kun inneholdt to imaginære dialoger. Det ga totalt 50 imaginære dialoger mellom elevpar fra 10. trinn. Grunnlaget for datamaterialet var argumentasjonen elevene produserte i den imaginære dialogen og EVU-studentenes identifiseringer og begrunnelser av identifiseringene av elevargumentasjonen i rapportene.

De 50 imaginære dialogene ble deretter identifisert av meg, før mine og EVU-studentenes identifisering ble kategorisert. Det var en rapport hvor de imaginære dialogene var utydelige å lese, (rapport 18R02, se tabell 1, kapittel 3.5) derfor ble ikke denne med i datamaterialet. Ut ifra EVU-studentenes og min identifisering ble bevisnivåene til Balacheff (1988b) utvidet til 9 kategorier, dette blir utdypet i kapittel 3.5. Identifisering fra EVU-studentene og meg ble samlet i et dokument for å sammenligne likheter og ulikheter i hvordan argumentasjonen til elevene ble identifisert. Basert på denne informasjonen formulerte jeg problemstillingen og forskningsspørsmålet til å handle om det generiske eksempelet. Derifra ble alle imaginære dialoger som ikke inneholdt identifisering fra enten meg eller EVU-studenter til en generisk argumentasjon fjernet. Da sto jeg igjen med 21 imaginære dialoger.

3.5 Analyseverktøy

Analyseverktøyet jeg utviklet tar utgangspunkt i hvordan EVU-studentene identifiserer sine elevers argumentasjon, der EVU-studentene baserte sin identifisering på Balacheffs taksonomi, jf. kapittel 2.1. Analyseverktøyet består derfor av de fire kategoriene naiv empirisme, det avgjørende eksperimentet, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet (Balacheff, 1988b). I tillegg ble det inkludert fire «være på vei mot»-kategorier og en kategori 0, som er inspirert av Brodahl, Larson, Wathne og Bjørkestøl (2020).

Utvidelsen fra Balacheffs (1988b) fire nivåer til ni kategorier ble gjort fordi EVU-studenter brukte formuleringene «på vei mot et nivå», eller «nærmer seg et nivå». Slike formuleringer kom da EVU-studentene identifiserte elevbesvarelsen til å inneholde trekk av et gitt bevisnivå, men de mente det ikke kvalifiserte helt til nivået. I tillegg forekom det identifiseringer hvor EVU-studentene mente argumentasjonen var utenfor Balacheffs taksonomi, dette tilsvarer kategori 0 i analyseverktøyet.

Analyseverktøyets funksjon var å samle EVU-studentenes og mine identifiseringer til hver skriftlig dialog i en tabell. Den inneholdt samtlige dialoger i datamaterialet (50 rapporter). Koder for år og dialog skiller de forskjellige skriftlige elevdialogene, slik de gjengis i EVU-studenters rapporter. År oppgir hvilket år EVU-studenters rapport er fra. Dialog står for en spesifikk studentrapport dette året og en av de tre dialogene i studentens rapport. Kombinasjonen År, Dialog og Identifikasjon utgjør en entydig nøkkel som identifiserer en rad i tabellen. Identifikasjonen oppgir hvem som har identifisert den imaginære dialogen spesifisert i År og Dialog. Kategori er en samling av de identifiserte kategoriene av EVU-studentene (EVU) eller meg (OO). Balacheffs nivåer er nummerert fra 1-4, der deres «på vei mot»-kategori er nummerert fra (1)-(4) og kategori 0 er 0. Kolonnene fra 0 til 4 viser hvilke kategorier som er identifisert med et 1-tall, og ikke identifisert med et 0-tall. Figur 1 er et utklipp og viser strukturen på den opprinnelige analysetabellen.

År	Dialog		Identikasjon	Kategori	0	(1)	1	(2)	2	(3)	3	(4)	4
2019	S1-03	1	OO	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2019	S1-03	1	EVU	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2019	S1-03	2	OO	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2019	S1-03	2	EVU	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2019	S1-03	3	OO	1, (3)	0	0	1	0	0	1	0	0	0
2019	S1-03	3	EVU	1, 2, (3)	0	0	1	0	1	1	0	0	0

Figur 1: Et utsnitt fra den opprinnelige analysetabellen. Nøkkel for figur 1: År og dialog = skriftlig elevdialog (årstall, kode for EVU-studentens rapport og dialognummer). Identifikasjon = EVU-studentens eller egen identifikasjon (OO). For hver av analyseverktøyets kategorier 0, (1), 1, (2), 2, (3), 3, (4) og 4 angis om den inngår (1) eller ikke inngår (0) i identifikasjonen.

Den opprinnelige analysetabellen (se figur 1) hadde en tredelt nøkkel for entydig å kunne henvise til en dialog. Delnøklene besto av årstall EVU-studentens identitet og dialognummer som EVU-studenten brukte i sin prosjektrapport. Disse tre delnøklene ble siden slått sammen til en ny nøkkel, ååRnn-Dn, for å forenkle henvisninger. I den nye nøkkelen oppgir åå hvilket år rapporten er fra, Rnn er en spesifikk studentrapport og Dn en imaginær dialog i en spesifikk rapport. Den nye nøkkelen er tatt i bruk i den andre og siste versjonen av analysetabellen. Den (se tabell 1) bruker to hovedkolonner. Kolonnen Skriftlig elevdialog bruker unike koder (ååRnn-Dn) for å skille mellom dialogene. Kolonnen Identifikasjon er delt i to underkolonner for henholdsvis EVU-studentenes (EVU) og mine (OO) identifiseringer, som gjør det mulig å stille sammen alle identifiseringene til hver av dialogene. Analysetabellen er også delt i to like store halvdeler, der den venstre delen er hovedsakelig rapporter fra 2018 og den høyre delen er rapporter fra 2019. En imaginær dialog fra 2019 ligger i venstre del for å ha tabellen symmetrisk.

Tabell 1

EVU-studenters og egne (OO) identifiseringer

Skriftlig elevdialog	Identifikasjon		Skriftlig elevdialog	Identifikasjon	
	EVU	OO		EVU	OO
18R01-D1	1, 2	1, 2	19R09-D2	2	0
18R01-D2	1, 2, (3)	1, 2, (3)	19R09-D3	1, 2, (3)	1, 2, (3)
18R01-D3	(3)	(3)	19R10-D1	1, (2)	1
18R02-D1			19R10-D2	1, 2, (3)	1, 2, (3)
18R02-D2			19R10-D3	1, (3)	(3)
18R02-D3			19R11-D1	1	1
18R03-D1	1, 2	1	19R11-D2	1	(1)
18R03-D2	3, 4	(2), (3)	19R11-D3	2, (3)	0
18R03-D3	1	1	19R12-D1	1, (2)	1, (2)
18R04-D1	1	1	19R12-D2	1, (3)	(3)
18R04-D2	1	1	19R12-D3	1, (3)	1
18R04-D3	1, (4)	0	19R13-D1	1	1
18R05-D1	3	(1)	19R13-D2	1	0
18R05-D2	1, 2, (3)	1, (2)	19R14-D1	1	1
18R05-D3	2, (3)	1	19R14-D2	(2), 3	0
18R06-D1	1, (3)	1	19R14-D3	0	0
18R06-D2	1, 2, (3)	1, (3)	19R15-D1	1	1, 2
18R06-D3	1, (2)	1, (2)	19R15-D2	1	1
18R07-D1	1, 2, 3	1, 2, 3	19R15-D3	2, (3)	1, 2, 3
18R07-D2	1, 2, (3)	1, 2, (3)	19R16-D1	1	1, 2
18R07-D3	1, 2, 3, (4)	1, 3	19R16-D2	1	1, 2
18R08-D1	1, 2	1	19R16-D3	0	(4)
18R08-D2	3, (4)	(3)	19R17-D1	1	1
18R08-D3	1	1	19R17-D2	1	(3)
19R09-D1	0	0	19R17-D3	1	1

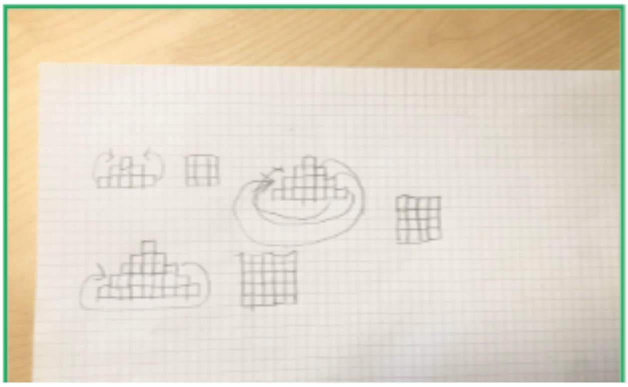
Notat: N=50.

For å demonstrere «være på vei mot»-kategoriene brukes en imaginær dialog jeg identifiserte til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Idunn: Hva om vi legger like mange kuber som er på den nederste delen under den, og legger 1 på begge sidene og fortsette med det samme. Da finner vi ut hvor mange klosser vi har uansett hvor mange trappetrinn vi har.
1=1
1+2+1=4
1+2+3+2+1=9
1+2+3+4+3+2+1=16

Knut: Oja det var jo simpelt å skjønne.

Idunn: Hvis man tar den ene halvparten av trappetrinnene og snur den om til andre siden, så blir det til en kvadrat uansett hvor mange kuber man har.



Figur 2: Eksempel for «være på vei mot»-kategori

Denne skriftlige elevdialogen tilsvarer et bevis på vei mot det generiske eksempel. I siste replikk argumenterer eleven for at et spesielt tilfelle vil gjelde for alle tilfeller av trapper. Besvarelsen inneholder også en illustrasjon for hvordan alle tilfeller vil oppføre seg nederst i besvarelsen. Derimot mangler tydelige argument for hvorfor summen av alle trapper kan kalkuleres med å ta kvadrattallet av figurnummeret og vil derfor ikke være et generisk eksempel. Argumentasjonen vil «være på vei mot» det generiske eksempelet.

I det følgende kommer en forklaring på kriterier for hver kategori. Kategoriene er nummerert slik at Balacheffs bevisnivåer har kategori nummer 1, 2, 3 og 4 for henholdsvis naiv empirisme, det avgjørende eksperimentet, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet. «Være på vei mot»-kategoriene har nummer (1), (2), (3) og (4) til hver sin hele kategori. Kategori 4 blir presentert først, deretter kategori (4), og slikt blir kategoriene presentert annenhver i synkende rekkefølge. Dette gjør det lettere å kunne henvise fra «være på vei mot»-kategoriene til sin hele kategori, og det unngås beskrivelser av krav flere ganger. Hensikten med analyseverktøyet var å lage en presis identifisering av hvilke kategorier elevenes argumentasjon tilsvarte.

3.5.1 Kategori 4: Tankeeksperimentet

Tankeeksperimentet beveger seg bort fra selve handlingen i oppgaven, og fokuserer på en forklaring av det generelle. For å klare dette fremheves det tre krav fra Balacheff (1988a). Første krav er å eliminere det spesielle i argumentasjonen. Det andre kravet krever argumentasjonen til å være universell, det vil si at den alltid vil gjelde, selv om noe informasjon i argumentet endres. Det siste kravet er kravet om å fjerne alle aktører som deltar i oppgaven, argumentasjonen vil gjelde i enhver sammenheng. De tre kravene gir opphav til et bevis som er deduktivt. Tankeeksperimentet krever logisk deduktive slutninger som leder fram til en konklusjon.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» må elevene oppfylle de tre nevnte kravene for tankeeksperimentet, og danne en deduktiv slutning. For å skape en deduktiv slutning i «Bygge trapper» kan elevene først starte med å finne en relevant påstand som innebærer antall trappetrinn opp og antall klosser i figuren. Påstanden formuleres algebraisk, gjennom deduktive eller induktive prosesser (Knuth & Elliott, 1998). Neste steg er å argumentere for den formulerte påstanden i en deduktiv prosess. Argumentasjonen må være deduktiv og algebraisk, men kan inneholde generaliserende figurer eller generaliserende numeriske uttrykk. Derimot skal verifikasjonen baseres på egenskapene til objektene som forekommer i påstanden, og et logisk resonnement. Den skal ikke være basert på eksemplene. Egenskapene må være formulert på en generell måte for å kvalifisere som et bevis til kategori 4. Det essensielle for tankeeksperimentet er deduktive slutninger som leder til konklusjonen om kvadrattall, og presisering av generalitet.

3.5.2 Kategori (4): Være på vei mot tankeeksperimentet

For at et argument skal kvalifiseres som et bevis til kategori 4 må argumentasjonen inneholde de tre angitte kravene i kapittel 4.5.1 som leder til et deduktivt bevis. Dersom argumentasjonen kun inneholder en eller to krav vil den kun kvalifiseres som kategori (4). Med andre ord vil de deduktive slutningene fortsatt ha en generalitet, men nødvendige steg er ikke dokumentert.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» skal det presiseres en generalitet av påstanden om kvadrattall for å kvalifisere til kategori (4). Elevene skal bruke deduktive prosesser på algebraiske uttrykk for å generalisere påstandens gyldighet. Argumentasjonen kan inneholde generaliserte figurer eller generaliserte numeriske uttrykk, og de deduktive utledningene baseres på algebraiske uttrykk. For kategori (4) skal påstanden formuleres algebraisk, men steg i de logiske resonnementene fram mot en konklusjon kan mangle.

3.5.3 Kategori 3: Det generiske eksempelet

Det generiske eksempelet handler om å bruke et enkelt eksempel for å argumentere for alle tilfeller, gjennom en generalisering av argumentasjonen (Balacheff, 1988a). En måte å argumentere for et generisk eksempel er gjennom et representasjonsbasert argument. Her blir matematiske resonnement basert på en visuell representasjon, tekst eller generaliserte enkelteksempler som uttrykker det generelle fra et spesielt tilfelle. Det viktige, uansett representasjonsform, er at representasjonen må uttrykke hvorfor argumentasjonen holder stand. Argumentasjonen trenger å inneholde en representasjon av påstanden, som kan være figurer, tekst eller algebraisk. Den skal også uttrykke hvorfor det spesielle tilfelle gjelder for alle tilfeller.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» trengs det en generell påstand om relasjonen mellom trappene og kvadrattallene, og en representasjon som illustrerer et spesielt tilfelle av en trapp. I vårt datamateriale er denne representasjonen ofte en figur av en trapp. Det spesielle tilfelle er nøye utvalgt av elevene, fordi de mener denne karakteriserer alle tilfeller. For å kvalifisere argumentasjonen til kategori 3 må figuren illustrere hvordan den kan omformes til et kvadrat. Argumentasjonen skal også presisere hvorfor dette enkelttilfelle karakteriserer alle tilfeller, og hvorfor alle trapper kan omformes til kvadrater.

3.5.4 Kategori (3): Være på vei mot det generiske eksempelet

Argument kvalifisert til kategori (3) vil inneholde en representasjon av et spesielt tilfelle som karakteriserer alle tilfeller. Representasjonen kan være tekst, visualisering eller generaliserte enkelteksempler. Derimot mangler en utfyllende forklaring på hvorfor den karakteriserer alle. Argumentasjonen vil mangle en konklusjon og/eller begrunnelse som spesifiserer dens generalitet.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» vil dette sikte til en figur som er bevisst valgt ut av elevene for å representere alle tilfeller av trapper. Figuren vil illustrere hvordan trappen kan konstrueres til et kvadrat. Det er også mulig å fremkalle dette gjennom andre representasjonsformer. Det kreves spesifisering av elevene at dette tilfelle gjelder for alle tilfeller. Derimot vil det mangle en konkluderende formulering, eller begrunnelse fra elevene for hvorfor dette gjelder for alle trappene.

3.5.5 Kategori 2: Det avgjørende eksperiment

Ifølge Balacheff (1988b) vil et avgjørende eksperiment utfolde seg på den måten at «gjelder det her, vil det alltid gjelde». Dette støttes av Knut & Elliott (1998) som setter intensjonaliteten til valg av eksperiment i fokus. Det blir tatt et bevisst valg som gjør at eksperimentet ansees som overbevisende. Det avgjørende eksperimentet tester en påstand om dens gyldighet på et bevisst tilfelle. Dersom påstanden består eksperimentet har den overbevist eleven og blir tolket som en sannhet, hvis den ikke består blir påstanden falsifisert.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» må eksperimentet være en stor trapp som klart tester påstanden om kvadrattall. Dersom elevene har testet et par mindre trapper, f.eks. trapper med 3, 4 og 5 trappetrinn opp, må det avgjørende eksperimentet ha en trapp med 8 trappetrinn opp. Det må være en differanse på de tilfeldig valgte trappene og det bevisste valget på tre trinn. Har elevene ikke gjennomført noen tilfeldige trinn først, vil et valg av en trapp ikke anses som bevisst før den er på trapp 7.

Elevene skal illustrere en stor trapp, og konstruere den som et kvadrat. Deretter må det komme fram en konklusjon fra elevene om at de blir overbevist av påstanden og fortsetter med den, eller forkaster påstanden. Dette sikter til matematiske utregninger der høyden av trappen kvadreres og sammenlignes ved kolonnevis, eller radvis addisjon av klossene i figuren. Finner elevene en overenstemmelse, er påstanden korrekt og de er overbevist.

3.5.6 Kategori (2): Være på vei mot det avgjørende eksperiment

Er argumentasjonen på vei mot det avgjørende eksperimentet vil det eksperimenteres på et spesielt tilfelle som tester en påstand, men mangler en tydelig formulering om at dette eksperimentet ansees som overbevisende. Eksperimentet vil bli utført på et stort eksempel, der stort vil være i samme betydning som i kategori 2. Derimot vil det ikke være tydelig hvorfor dette tilfelle vil gjelde for alle tilfeller.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» må eleven gjennomføre et eksperiment som tydelig tester påstanden om kvadrattall, men hvor en konklusjon rundt resultatet mangler. Eleven klarer, med andre ord, å gjennomføre eksperimentet med addisjon og multiplikasjon, men klarer ikke å komme med en konklusjon som bekrefter overbevisningen eleven har om påstanden.

3.5.7 Kategori 1: Naiv empirisme

I naiv empirisme settes det krav om å løse spesielle tilfeller ved hjelp av en matematisk teknikk basert på en påstand. En matematisk teknikk vil ofte være regning for hånd, men det er også mulig å konstruere spesielle eksempler med figur, tekst eller annen matematisk fremstilling. Det trenger ikke være noen sammenheng i hvilke spesielle eksempler som blir undersøkt.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» vil elevene føre et bevis tilsvarende naiv empirisme med å forstå og videreføre påstanden om kvadrattall, hintet til av Idunn i oppgaveteksten. Elevene kommer med spesifikke eksempler på påstanden, og utfører beregninger på disse eksemplene. Det trenger ikke være noen sammenheng i hvilke eksempler de velger, slik det også er understreket av Knuth og Elliott (1998). Elevene kan for eksempel bruke formelen for kvadrattall på figurene med trappetrinn 3, 4 og 5 opp, og sammenligne med antall klosser figurene inneholder. Dette kan være så enkelt som å gjengi startdialogen elevene har fått utdelt.

Forskjellen på naiv empirisme og det avgjørende eksperimentet er at det avgjørende eksperimentet handler om å begrunne argumentasjonens overbevisning i påstanden. For det avgjørende eksperimentet velger eleven bevisst et eksempel som skal verifisere påstanden, i motsetning til naiv empirisme der eksemplene blir sett på som tilfeldige uten noen sammenheng.

3.5.8 Kategori (1): Være på vei mot naiv empirisme

Når en argumentasjon er på vei mot naiv empirisme ligger det til rette argumentasjon som inneholder en påstand for hvordan elevene vil løse spesielle tilfeller. Derimot har de ikke klart å utføre spesielle eksempler matematisk.

Settes dette inn i konteksten med «Bygge trapper» vil det være mulig å observere formuleringer av påstanden om kvadrattall. Formuleringen kan være tekst, algebraisk og/eller figur. Elevene vil derimot ikke klare å anvende påstanden på spesifikke tilfeller av trappene. De mangler matematiske utregninger på hvor mange klosser det er i spesifikke figurer ved bruk av formelen for kvadrattall.

3.5.9 Kategori 0: Utenfor Balacheffs nivåer

I kategori 0 mangler en argumentasjon som kan knyttes til Balacheffs nivåer, jf. kapittel 2.1 For å kvalifisere argumentasjonen til kategori 0 mangler argumentasjonen en påstand på hvordan oppgaven kan løses. Den foretrukne løsningsstrategien mangler sammenheng, og det er derfor tilfeldig om argumentasjonen løser oppgaven eller ikke.

Settes dette inn i konteksten «Bygge trapper» vil argumentasjonen til elevene ikke spesifisere påstanden om kvadrattall, men kan bruke andre påstander. Elevene klarer ikke å omforme trappene til kvadrater, og ei heller å gjøre utregninger som baserer seg på at figurnummeret kvadrert gir antall klosser i figuren. De kan derimot løse oppgaven gjennom addisjon av rader eller kolonner. Dette setter elevens bevarelse utenfor de åtte kategoriene som inneholder Balacheffs nivåer (kategori 1-4), og de tilsvarende fire «på vei til»-kategoriene, det vil si kategori (1)-(4).

3.6 Kvalitet i studien

Reliabilitet og validitet er begreper som brukes for å sikre objektivitet og kvalitet i studien. Bryman (2016) omtaler validitet og reliabilitet som kvalitetskrav som bør være tilnærmet oppfylt. Validitet handler om i hvilken grad konklusjonene kan forankres i forskning som er utført (Bryman, 2016). Reliabilitet handler om i hvilken grad studien og resultatene er reproduserbar. Dersom en annen forsker benytter de samme metodene vil forskningen gi like resultater (Wellington, 2015; Bryman, 2016; Thagaard, 2018). I dette delkapittelet vil jeg beskrive hvordan studiens reliabilitet, validitet og etiske betraktninger blir ivaretatt.

3.6.1 Validitet og Reliabilitet

Validitet deles ofte i to kategorier, indre og ytre validitet. Ifølge Bryman (2016) handler den indre validiteten om sammenhengen mellom de observerte funnene og de teoretiske idéene som blir utviklet i studien. Vi kan formulere det som forholdet mellom to eller flere variabler. Hvis x forårsaker y, kan vi da være helt sikre på at det kun er x sin fortjeneste? Eller er det andre faktorer som spiller inn. Det skapes en troverdighet til funnene. Den indre validiteten handler om samsvar mellom konklusjonene og dataene i studien, og om de konklusjonene som er trukket er riktige (Bryman, 2016).

I studien er det viktig at analysen av rapportene er knyttet til hva EVU-studentene har gjort for å sikre oppgavens indre validitet. Derfor utviklet jeg et analyseverktøy til å omfatte flere kategorier basert på formuleringer som EVU-studentene brukte. Disse kategoriene ble da en utvidelse av de opprinnelige fire nivåene om bevisføring fra Balacheffs taksonomi, og danner en sammenheng mellom de observerte funnene og det teoretiske rammeverket.

Den ytre validiteten handler om hvorvidt studiens resultater kan generaliseres til å gjelde utenfor den gjeldende studien. Denne studien har et lite utvalg datamaterialet som gjør at den i mindre grad vil bidra til å kunne si noe generelt om lærerstudenters identifisering av bevisføring. Det er derfor viktig å påpeke at mine slutninger og konklusjoner ikke vil være bastante, eller generaliserbare. Derimot kan andre forskere bruke mine funn og dermed undersøke en større gruppe lærerstudenter og deres identifisering av bevisføring.

Reliabilitet er knyttet til studiens replikerbarhet. Det vil si reliabilitet er målet på hvor godt en annen forsker kan gjenta studien og få de samme resultatene (Bryman, 2016; Thagaard, 2018). Reliabilitet kan også deles i to hovedformer, indre- og ytre reliabilitet. Den ytre reliabiliteten er i hvilken grad andre forskere vil generere samme fenomen. Dette kan være utfordrende for min studie, fordi elevers skriftlige dialoger er unike. Det kan ikke forventes at forskerne får identiske data ved bruk av samme undersøkelsesopplegg på ulikt tidspunkt om det samme fenomenet, i og med at EVU-studentene identifiserer ulike dialoger. Dette aspektet gjør det utfordrende å belyse graden av ytre reliabilitet, med referanse til datamaterialets pålitelighet. I denne studien derimot har ytre reliabilitet blitt sikret ved at studien er så transparent som mulig og forskningsprosessen har blitt gjort rede for.

I denne studien har indre reliabilitet blitt sikret ved at studien bruker et begrepsapparat og et analyseverktøy som også andre forskere vil kunne bruke på tilsvarende måte i nye studier. Begrepsapparatet mitt baseres på Balacheffs taksonomi og utvides til kategorier som beskrevet i kapittel 3.5. Begrepene er basert på tidligere forskning i tillegg til beskrivelser lærerstudenter selv bruker når de identifiserer. Derfor vil begrepsapparatet ikke bare være overførbart til andre forskere, men også fremme reliabiliteten i studien. Tilsvarende vil analyseverktøyet mitt være overførbart til annen forskning. Studier som Varghese (2011) og Brodahl et. al. (2020) uttrykker også at identifiseringer av bevisføringer kan inneholde trekk av et nivå fra Balacheffs taksonomi. Derfor vil både begrepsapparatet og analyseverktøyet være overførbart til annen forskning.

Casestudien ble utført på et begrenset antall deltakere fra to påfølgende kull EVU-studenter, og med fokus på et utvalg, nemlig de som underviser på 10. trinn. Selv om dette ikke ugyldiggjør resultatene, må leserne ta i betraktning at replikasjonsstudier med en større populasjon kan bekrefte eller stille spørsmål ved disse forskningsresultatene.

3.6.2 Etiske betraktninger

«All vitenskapelig virksomhet krever at forskerne forholder seg til etiske prinsipper som gjelder så vel internt i forskningsmiljøet som i relasjon til omgivelsene» (Thagaard, 2018, s. 20). Etiske betraktninger og prinsipper må reflekteres over i forkant av et forskningsprosjekt, så vel som det må diskuteres og stilles spørsmål til valgene man tar underveis. Dette vil være med å styrke kvaliteten i en forskers arbeid (Postholm & Jacobsen, 2011).

Før jeg startet forskningen min samrådet jeg med mine veiledere om egen datainnsamling, men vi kom fram til at eksisterende og anonymiserte forskningsdata fra to prosjekt kunne brukes. Datamaterialet, innsamlet av veilederne, hadde fått godkjenning av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) og har referansekodene 784542 og 144658. Svaret fra NSD på veiledernes henvendelser pr. 21.06.2019 bekrefter at rutiner for innmelding av masterprosjekt ikke vil komme i bruk, da det hverken innhentes eller lagres personopplysninger. Derfra var det bare å starte studien min.

Forskeren har et ansvar for at deltakerne i studien ikke skal bli utsatt for skade, hverken fysisk eller psykisk, eller urimelige belastninger som følge av forskningen (Thagaard, 2018). Det kan derfor formuleres fire etiske prinsipper man bør ta hensyn til i forskningen. Den første er at man ikke skal påføre noen form for skade. Siden datamaterialet allerede var innsamlet var dette utenfor min kontroll, men jeg har forsikret meg, ved å spørre veilederne, at deltagerne ikke ble utsatt for noen form for skade.

Det andre prinsippet handler om at informantene må godkjenne sin deltagelse (Bryman, 2016). Kun prosjektrapporter fra EVU-studentene som krysset av for at de ga «samtykke til at opplysningene i prosjektrapporten kan innhentes fra Canvas og personopplysninger i navneliste/koblingsnøkkel kan lagres til prosjektslutt», er gjort tilgjengelig for masteroppgaven i anonymisert form. Deltagelse i studien var frivillig.

Det tredje prinsippet går ut på å ivareta deltagernes privatliv. Deltagerne har kun svart på fagrelaterte spørsmål, så deres privatliv er godt ivaretatt. Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt. Navn til deltagerne er erstattet med nummerkoder, som bare faglærerne i emne «MA-922 Algebra, tallteori og geometri I» har tilgang til. Disse navnelistene blir lagret adskilt fra de resterende data. I publikasjonen vil deltagerne ikke gjenkjennes, og informantenes data er ikke knyttet til informantenes svar. Navnelistene vil makuleres etter publikasjonsdato, men ikke senere enn 31.12.2020.

Det fjerde prinsippet går ut på at deltagerne ikke blir løyet til. Deltagerne krysset av på et samtykkeskjema, der de ble informert om at deres rapport kan bli brukt i forskningsarbeid angående masterprosjekt. Derfor har de hele tiden vært informert om hva deres rapport kan bli brukt til.

4.0 Analyse

I dette kapittelet vil det presenteres resultater, funn og analyser av datamaterialet som vil brukes til å svare på forskningsspørsmålet:

> *Hvordan begrunner lærerstudenter sin identifisering av elevers bevisføring som et generisk eksempel?*

I kapittel 3.4 ble utvalget av dialogene beskrevet, for å finne de relevante dialogene til å svare på forskningsspørsmålet. De relevante dialogene for forskningsspørsmålet er de som er identifisert på eller på vei mot det generiske eksempelet av EVU-studentene eller meg. Tabell 1 (jf. kapittel 3.5) viser en oversikt over alle de imaginære dialogene til elevene og kategoriene de er identifisert til, både fra EVU-studentene og meg. Ut ifra den hentet jeg ut og samlet de relevante dialogene i tabell 2. Den er laget for å gi en oversikt over kategoriene EVU-studentene har identifisert de skriftlige dialogene til. Kapitlene 4.1 og 4.2 tar utgangspunkt i tabell 2, der det i kapittel 4.1 analyseres dialogene på vei mot nivå 3 og i hvert delkapittel analyseres dialogene fra en kolonne. I kapittel 4.2 analyseres dialogene på nivå 3, og i hvert delkapittel analyseres dialogene fra en kolonne. I tillegg var det en dialog som ble identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet av meg, men ikke av EVU-studenten. Denne dialogen vil bli analysert i kapittel 4.3. Før kapittelet avsluttes med en oppsummering av resultatene i kapittel 4.4.

Tabell 2

Skriftlige dialoger av EVU-studenter identifisert som på vei mot eller på Balacheffs nivå 3

På vei til nivå 3				På nivå 3				
(3)	1, (3)	2, (3)	1, 2, (3)	3	2, 3	3, 4	1, 2, 3	1, 2, 3, (4)
18R01-D3	18R06-D1	18R05-D3	18R01-D2	18R05-D1	19R14-D2	18R03-D2	18R07-D1	18R07-D3
	19R10-D3	19R11-D3	18R05-D2			18R08-D2		
	19R12-D2	19R15-D3	18R06-D2					
	19R12-D3		18R07-D2					
			19R09-D3					
			19R10-D2					

Notat: N=20. Ikke helt APA. Mangler overskrift som identifiserer oppføringer i kolonnen lengst til venstre.

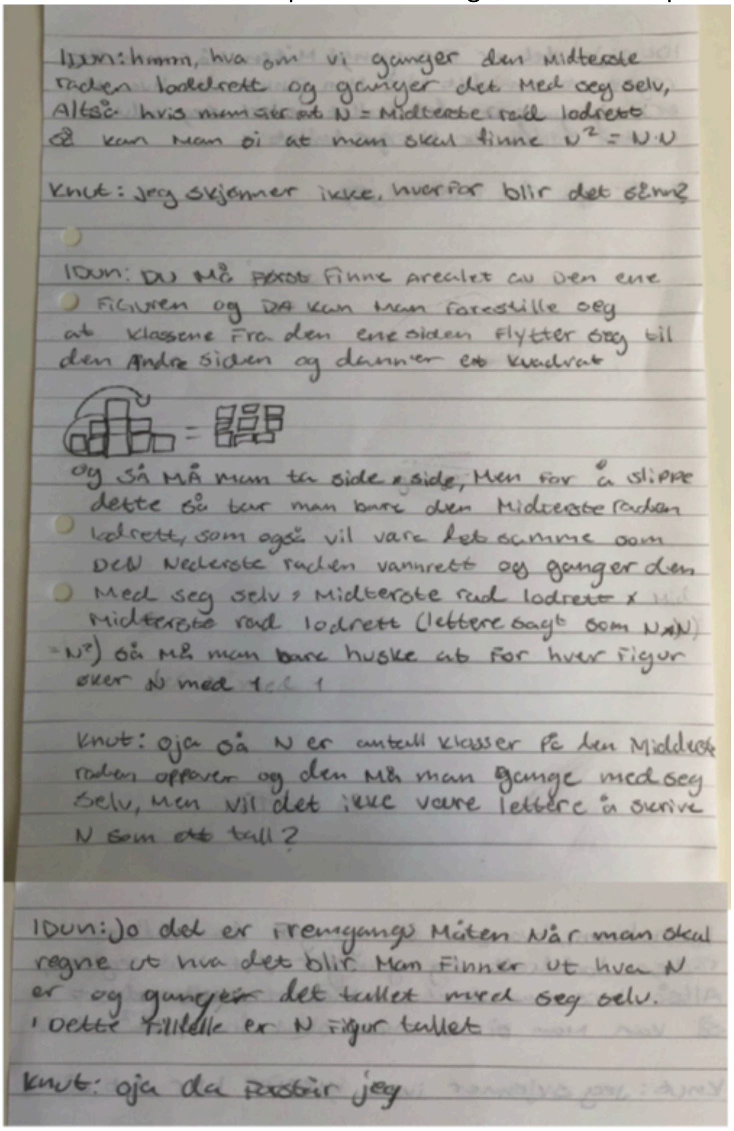
Delkapitlene i dette kapittelet følger en lik oppbygning. I hvert delkapittel vil først argumentasjonen til elevene bli presentert. Denne er presentert som en skriftlig dialog mellom to fiktive personer, Idunn og Knut, som legger fram de argumentene elevene bruker for å føre et bevis av oppgaven «Bygge trapper». Deretter følger EVU-studentens begrunnelser og identifiseringer. Før min identifisering, basert på analyseverktøyet, av elevargumentasjon avslutter delkapittelet.

4.1 Identifiseringer på vei mot det generiske eksempelet

I dette delkapittelet har jeg tatt for meg de dialogene som ble identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet av EVU-studentene. Underkapitlene fokuserer på forskjellige argumentasjoner som leder fram til et bevis blant elevene. Kapittel 4.1.1 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori (3). Kapittel 4.1.2 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 1 og (3). Kapittel 4.1.3 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 2 og (3). Kapittel 4.1.4 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 1, 2 og (3).

4.1.1 På vei mot det generiske eksempelet

I dette delkapittelet analyseres den skriftlige dialogen (18R01-D3) som ble identifisert av EVU-studenter til kun å være på vei mot det generiske eksempelet (tabell 2).



Idun: hmm, hva om vi ganger den midterste raden loddrett og ganger det med seg selv, Altså hvis man sier at N = Midterste rad loddrett så kan man si at man skal finne $N^2 = N \cdot N$

Knut: Jeg skjønner ikke, hvorfor blir det sånn?

IDUN: Du må først finne arealet av den ene figuren og DA kan man forestille seg at klossene fra den ene siden flytter seg til den andre siden og danner et kvadrat

og så MÅ man ta side x side, Men for å slippe dette så tar man bare den Midterste raden loddrett, som også vil være det samme som DEN Nederste raden vannrett og ganger den Med seg selv : Midterste rad loddrett x Midterste rad loddrett (lettere sagt som N x N) = N^2) så må man bare huske at for hver figur øker N med 1

Knut: oja så N er antall klosser på den Midterste raden oppover og den må man gange med seg selv, men vil det ikke være lettere å skrive N som et tall?

IDUN: Jo det er fremgangsmåten Når man skal regne ut hva det blir. Man finner ut hva N er og ganger det tallet med seg selv. I dette tilfelle er N figur tallet

Knut: oja da forstår jeg

Figur 3: Elevenes argumentasjon i dialog 18R01-D3

EVU-studentens identifikasjon

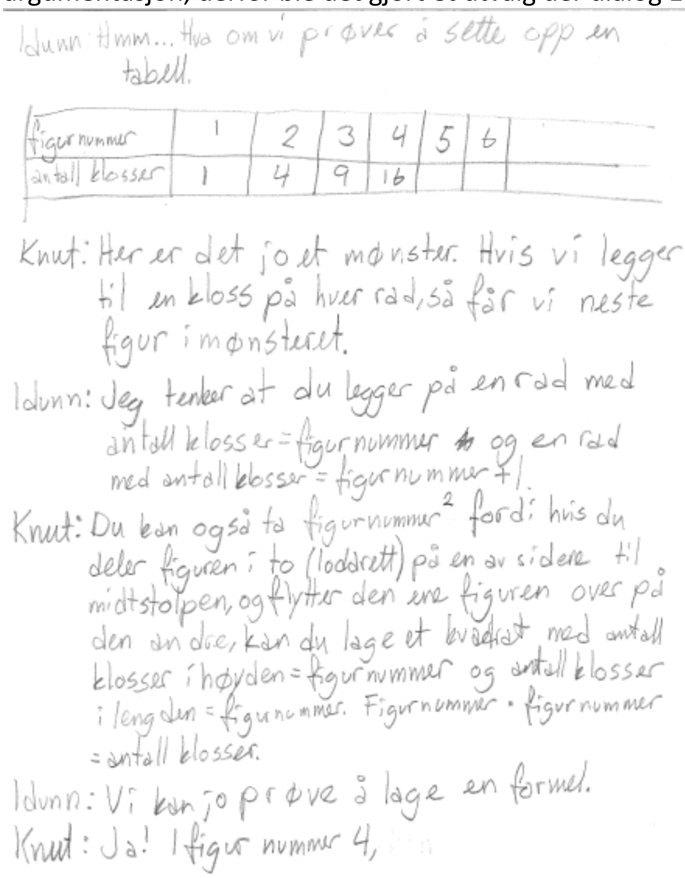
EVU-studenten identifiserte den skriftlige dialogen (figur 3) til å være på vei mot det generiske eksempelet. Dette kommer fram når EVU-studenten skriver «Denne gruppen prøver gjennom et enkelt eksempel å vise hva som skjer på en generell måte» (vedlegg 1). Begrunnelsen til EVU-studenten støtter seg på illustrasjonen elevene bruker og beskrivelsene av N. Elevene forklarer at N er den midterste rad loddrett (mener nok midterste kolonne i trappen, forskers anmerkning).

Videre skriver EVU-studenten «[Studenten] oppfatter ikke dette som et tankeeksperiment, men som det generiske eksempelet. Selve formelen de har kommet fram til er for enkel. Den sier ikke noe om hvor tallene kommer fra». Identifiseringen til EVU-studenten av argumentasjonen er at elevene bør være på et generisk argument. Derimot motsies konklusjonen med å begrunne at formelen i argumentasjonen til elevene er for enkel, og sår usikkerhet rundt hvor tallene kommer fra. EVU-studenten identifiserer argumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet. I likhet med EVU-studenten identifiserer jeg dialogen til å være på vei mot det generiske eksempelet. Elevene formulerer i første replikk påstanden om kvadrattall som en formel (N*N) de vil jobbe med. Der de uttrykker N som midterste rad loddrett (midterste kolonne, forskers anmerkning). I den tredje replikken argumenterer Idunn for hvordan en figur av en trapp kan omformes for å illustrere et kvadrat. Elevene forklarer også hvordan formelen vil operere uansett N, eller uansett figurnummer.

Den skriftlige dialogen identifiseres til å være på vei mot det generiske eksempelet. Elevene har med en illustrasjon av hvordan figuren kan omformes til et kvadrat. De sier spesifikt dette vil gjelde generelt med en formel. Derimot mangler elevene en begrunnelse på hvorfor klossene kan flyttes for at argumentasjonen skal være et generisk eksempel.

4.1.2 Naiv empirisme og på vei mot det generiske eksempelet
I dette delkapittelet analyseres de skriftlige dialogene som ble identifisert til å omfatte naiv empirisme og på vei mot det generiske eksempelet (tabell 2). Dialogene 19R10-D3 og 19R12-D2 ble begrunnet tilnærmet likt av EVU-studentene og innehar tilnærmet lik argumentasjon fra elevene. Derfor ble det gjort et utvalg hvor dialog 19R12-D2 belyser deres begrunnelse og argumentasjon. Det samme gjelder dialogene 18R06-D1 og 19R12-D3. Begge innehar tilnærmet lik begrunnelse og argumentasjon, derfor ble det gjort et utvalg der dialog 18R06-D1 belyser identifiseringene.


Idunn: Hmm... Hva om vi prøver å sette opp en tabell.

figurnummer	1	2	3	4	5	6
antall klosser	1	4	9	16		

Knut: Her er det jo et mønster. Hvis vi legger til en kloss på hver rad, så får vi neste figur i mønsteret.
Idunn: Jeg tenker at du legger på en rad med antall klosser = figurnummer og en rad med antall klosser = figurnummer + 1.
Knut: Du kan også ta figurnummer² fordi hvis du deler figuren i to (loddrett) på en av sidene til midtstolpen, og flytter den ene figuren over på den andre, kan du lage et kvadrat med antall klosser i høyden = figurnummer og antall klosser i lengden = figurnummer. Figurnummer · figurnummer = antall klosser.
Idunn: Vi kan jo prøve å lage en formel.
Knut: Ja! I figur nummer 4,

Figur 4: Elevenes argumentasjon i dialog 19R12-D2

EVU-studentens identifikasjon
EVU-studentens identifiseringer blir begrunnet med to oppdagelser som elevene gjør. «1. et mønster for hvordan klosseantallet endrer seg fra figur til figur, 2. at antallet klosser er kvadratet av figurtallet.» (vedlegg 2). Den første oppdagelsen baseres på mønsteret for hvordan klosseantallet endres, og det begrunnes ut ifra tabellen som elevene representerer. Tabellen er basert på informasjon hentet fra startdialogen. Dette identifiserer EVU-studenten til naiv empirisme.

Den andre oppdagelsen oppstår i fjerde replikk, der de uttrykker sammenhengen mellom figurnummer og antall klosser i figuren. EVU-studenten skriver «... men beveger seg over til det generiske eksperimentet når de lar Knut oppdage at man kan reorganisere trappa til et kvadrat og at dette gjelder alle trapper» (vedlegg 2). Formelen elevene kommer fram til (figurnummer*figurnummer=antall klosser, figur 4), og Knuts formulering av hvordan trappen kan «reorganiseres» (figur 4) identifiserer EVU-studenten til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne skriftlige dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme og å være på vei mot det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studentene identifiserer jeg den skriftlige dialogen til å kun å være på vei mot det generiske eksempelet. I replikk fire argumenterer Knut for påstanden om kvadrattall, der figurnummer opphøyd i andre gir antall klosser i figuren. Han støtter påstanden med å forklare hvordan figuren kan omformes til et kvadrat. Argumentasjonen identifiseres til å være på vei mot det generiske eksempelet. Argumentasjonen mangler en forklaring på hvorfor trappen kan omformes til et kvadrat og blir derfor ikke identifisert til det generiske eksempelet.

De to andre dialogene som ble identifisert av EVU-studenter til naiv empirisme og på vei mot det generiske eksempelet var også tilnærmet like i begrunnelse og argumentasjonen. De blir derfor belyst med den skriftlige dialogen 18R06-D1.

Idunn: jeg prøver å skjønne systemet
knut: jeg skjønner bare nr 2
knut: det blir 9 brikker bortover på den me seks trinn
knut: nei det blir 11 brikker bortover
idunn: skal vi regne ut hvor mange klosser det blir
knut: ja ;)
idunn skriver: 1+2+3+4+5+4+3+2+1
knut: nei nå glemte du nr 6
idunn skriver: 1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36
knut: 6 x 6 = 36
idunn: kor fekk du 6x6 fra
knut: eg vett ikje eg såg bare det sto 5x5 der oppe så då tenkte eg at det va det
knut: formelen e x*x, men eg vett ikje koffe
idunn: eg bryr meg ikkje
knut: me gange de 5 trinnan opp me dei 5 trinnan ner, 5x5
knut: me vett ikje koffe ting e som de e, de bare e sånn. ferdig.

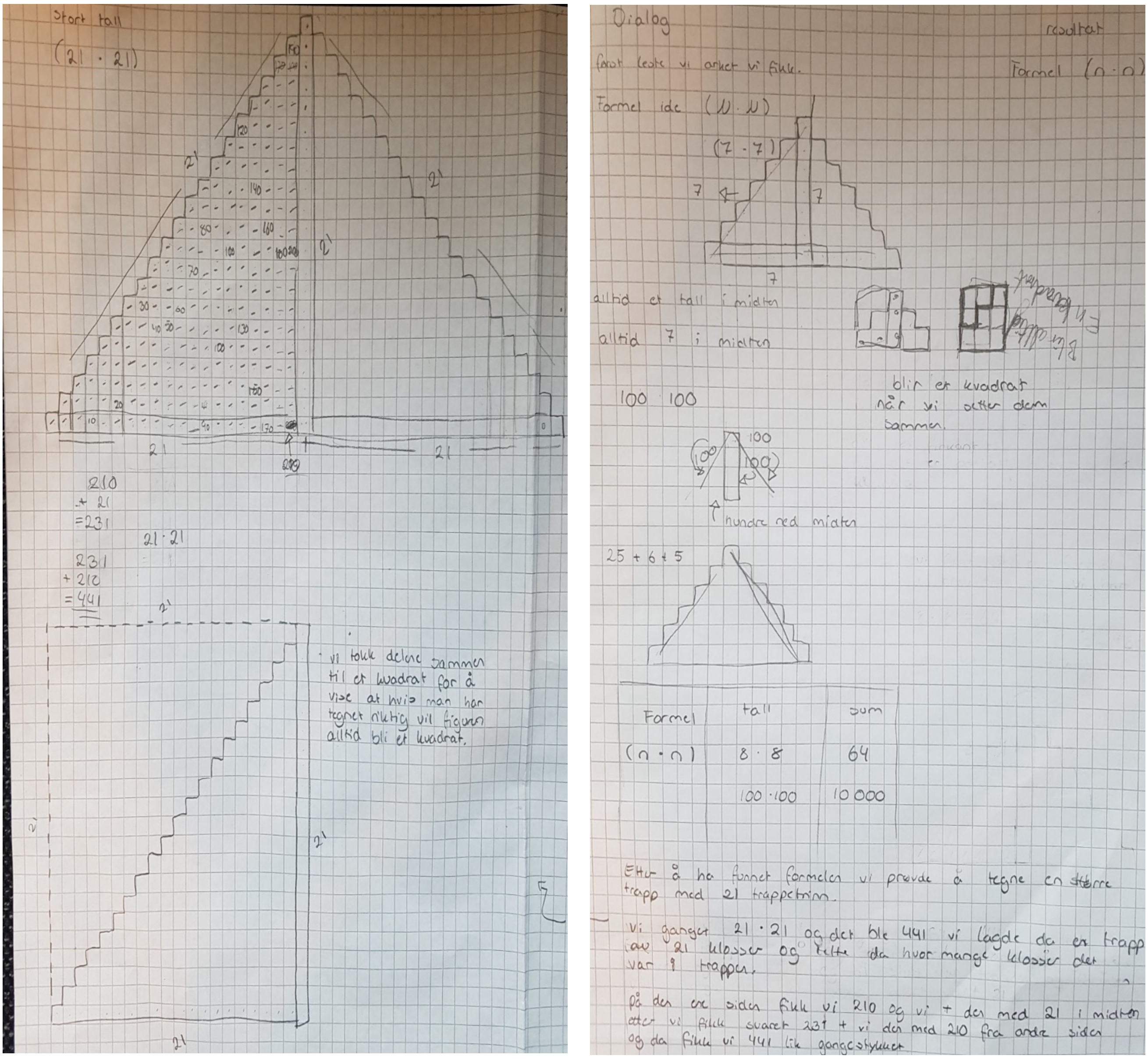
Figur 5: Elevenes argumentasjon i dialog 18R06-D1

EVU-studentens identifikasjon
EVU-studenten identifiserer den skriftlige dialogen til naiv empirisme og å være på vei mot det generiske eksempelet. «Ut ifra dialogen forstår vi at elevene argumenterer ut fra naiv empirisme. De hadde enkle og få utprøvinger ...» (vedlegg 3). Identifiseringen til naiv empirisme blir begrunnet med de enkle og få utprøvingene elevene gjennomfører, med 6*6 og 5*5.

EVU-studenten fortsetter med «Deretter konkluderer han med at formelen er x*x ... Her tenker jeg at Knut søker etter en generisk begrunnelse» (vedlegg 3). Formelen elevene presenterer i dialogen (figur 5) gir grunnlag for EVU-studenten til å identifisere argumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme og på vei mot det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg kun naiv empirisme. I replikk ti kommer et argument som identifiserer argumentasjonen til naiv empirisme. Replikken inneholder et spesielt tilfelle av påstanden om kvadrattall. Denne trappen har blitt påvist 36 klosser i replikk ni med å summere kolonnene. Argumentet inneholder et tilfeldig tilfelle av trappene, seks trinn opp, og utfører påstanden om at antall klosser i trappen samsvarer med kvadrattallet av antall trinn opp. Dette identifiseres som naiv empirisme.

4.1.3 Det avgjørende eksperimentet og på vei mot det generiske eksempelet
I dette kapittelet analyseres de skriftlige dialogene (18R05-D3, 19R11-D3 og 19R15-D3) som ble identifisert av EVU-studenter til kun det avgjørende eksperimentet og på vei mot det generiske eksempelet (tabell 2). Det var to dialoger (18R05-D3 og 19R11-D3) som hadde tilnærmet lik begrunnelse fra EVU-studentene og elevargumentasjon. Derfor ble det gjort et utvalg der 19R11-D3 belyser deres identifisering. I tillegg blir dialog 19R15-D3 analysert i dette delkapittelet.



Figur 6: Elevenes argumentasjon i dialog 19R15-D3

EVU-studentens identifikasjon

EVU-studenten argumenterer for at dette er et avgjørende eksperiment med «Grunnen til at [studenten] mener de har gjort et avgjørende eksperiment er at de har tatt et tydelig valg om å teste teorien sin på en så stor figur som de kunne tegne» (vedlegg 4). Den store figuren blir bedømt ut ifra trappen med 21 trinn opp. De første figurene, 3, 7 og 8, blir ikke bedømt til stor nok av EVU-studenten, men argumentasjonen med 21 trinn opp er overbevisende nok for å identifiseres som et avgjørende eksperiment.

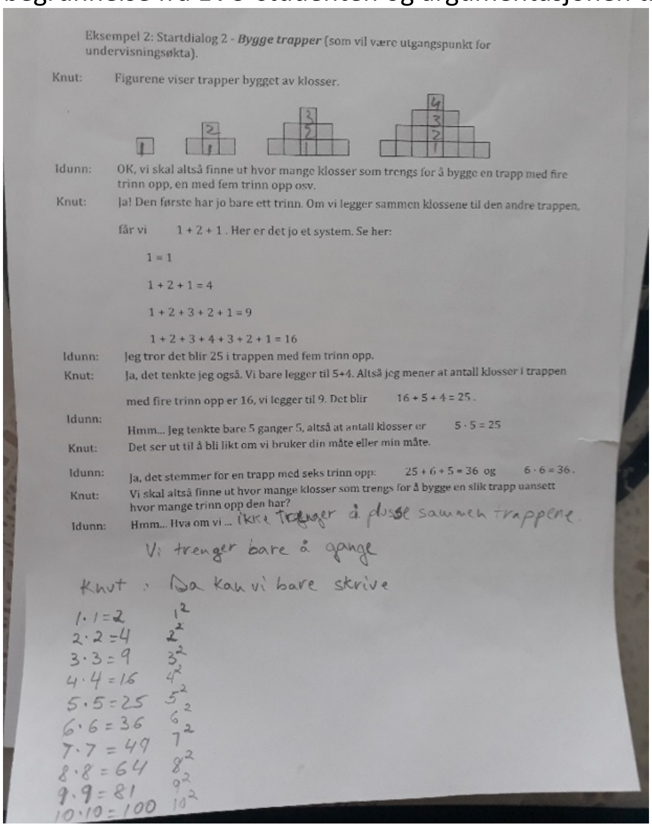
Begrunnelsen for identifiseringen til å være på vei mot det generiske eksempelet gis med «Grunnen til at [studenten] sier de er nærme nivå 3, men er på nivå 2 er også det at jeg ser at de har begynt med å lage konkrete eksempler som kunne ha vært med på å underbygge deres generelle utrykk n×n, men de mangler den visuelle presentasjonen og argumentasjonen for å bevise at figuren alltid kan bli et kvadrat» (vedlegg 4). EVU-studenten identifiserer argumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet basert på en formel og konkrete eksempler som kan hjelpe dem med å visualisere en generell sammenheng. Derimot blir det ikke identifisert til det generiske eksempelet, fordi det mangler en generell visuell representasjon og argumentasjon.

Egen identifikasjon
I denne skriftlige dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte et avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og det generiske eksempelet. Dialogen inneholder et par tilfeldige spesielle tilfeller med 3, 7 og 8, der de tester de tilfeldige trappene litt forskjellig. Trapp 3 er den tydeligste av de tre, der den omformes til et kvadrat. Omformingen gjør elevene sikre på at denne figuren har et kvadratisk antall klosser. Dette identifiserer jeg til naiv empirisme.

Illustrasjonen av trapp 21 er et tilfelle av det avgjørende eksperimentet. Elevene testet påstanden sin om n*n, der n er trappetrinn opp, på trapp 21. De finner først 21*21 er 441, deretter teller de alle klossene i illustrasjonen. Dette finner de ut samstemmer med påstanden, og påstanden er dermed forsterket. Argumentasjonen identifiserer jeg til det avgjørende eksperiment.

Argumentasjonen identifiseres også til det generiske eksempelet. Elevene har et generelt uttrykk med formelen, som også blir et algebraisk uttrykk for deres påstand. Med figuren av trapp 21 illustrerer elevene hvordan trappen kan omformes til et kvadrat. På siden av kvadratet skriver elevene en konklusjon på hvorfor dette tilfelle representerer alle tilfeller. Argumentasjonen identifiserer jeg til det generiske eksempelet.

De to andre dialogene blir belyst med dialog 19R11-D3, siden de inneholder tilnærmet lik begrunnelse fra EVU-studenten og argumentasjonen til elevene er tilnærmet lik.


Eksempel 2: Startdialog 2 - ***Bygge trapper*** (som vil være utgangspunkt for undervisningsøkta).

Knut: Figurene viser trapper bygget av klosser.

Idunn: OK, vi skal altså finne ut hvor mange klosser som trengs for å bygge en trapp med fire trinn opp, en med fem trinn opp osv.

Knut: Ja! Den første har jo bare ett trinn. Om vi legger sammen klossene til den andre trappen, får vi $1 + 2 + 1$. Her er det jo et system. Se her:

$1 = 1$

$1 + 2 + 1 = 4$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

Idunn: Jeg tror det blir 25 i trappen med fem trinn opp.

Knut: Ja, det tenkte jeg også. Vi bare legger til 5+4. Altså jeg mener at antall klosser i trappen med fire trinn opp er 16, vi legger til 9. Det blir $16 + 5 + 4 = 25$.

Idunn: Hmm... Jeg tenkte bare 5 ganger 5, altså at antall klosser er $5 \cdot 5 = 25$

Knut: Det ser ut til å bli likt om vi bruker din måte eller min måte.

Idunn: Ja, det stemmer for en trapp med seks trinn opp: $25 + 6 + 5 = 36$ og $6 \cdot 6 = 36$.

Knut: Vi skal altså finne ut hvor mange klosser som trengs for å bygge en slik trapp uansett hvor mange trinn opp den har?

Idunn: Hmm... Hva om vi ... ikke trenger å plusse sammen trappene. Vi trenger bare å gange

Knut: Da kan vi bare skrive

$1 \cdot 1 = 2$ 1^2
$2 \cdot 2 = 4$ 2^2
$3 \cdot 3 = 9$ 3^2
$4 \cdot 4 = 16$ 4^2
$5 \cdot 5 = 25$ 5^2
$6 \cdot 6 = 36$ 6^2
$7 \cdot 7 = 49$ 7^2
$8 \cdot 8 = 64$ 8^2
$9 \cdot 9 = 81$ 9^2
$10 \cdot 10 = 100$ 10^2

Figur 7: Elevenes argumentasjon i dialog 19R11-D3

EVU-studentens identifikasjon
EVU-studenten identifiserer den skriftlige dialogen til det avgjørende eksperiment basert på utregninger gjort på en høy trapp, en trapp med ti trinn. «De har kommet med konklusjonen at å gange antall trappetrinn med seg selv er det samme med å addere klosser ... resultatene de har fått

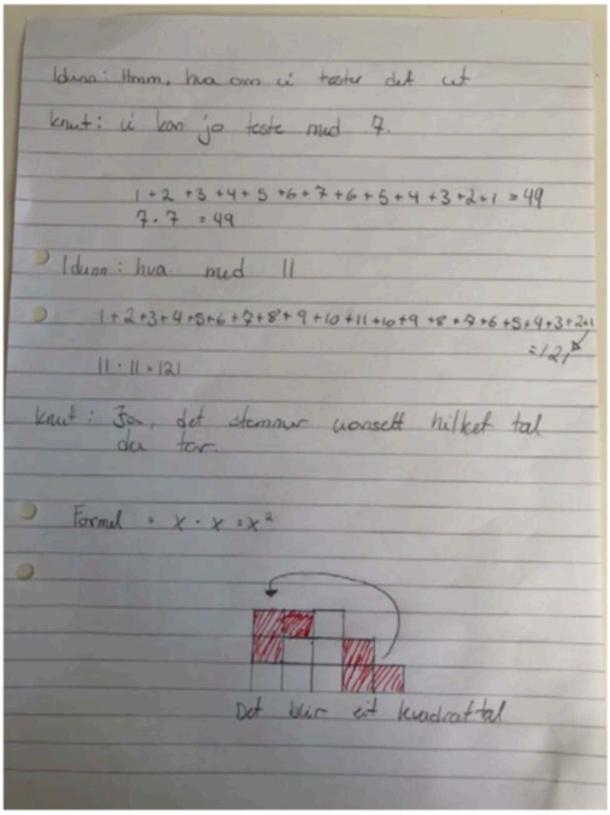
er kvadrattallet av antall trapp opp» (vedlegg 5). EVU-studenten identifiserer at argumentasjonen inneholder store eksempler som tilsvarer det avgjørende eksperimentet.

Argumentasjonen blir også identifisert av EVU-studenten til å nærme seg det generiske eksempelet. Dette begrunnes med «De skriver ned kvadrattallene, men de glemmer å argumentere i form av dialog hva de har gjort og hvordan de har tenkt». Dialogen inneholder kvadrattallene, dette identifiserer EVU-studenten til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjon til å omfatte det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg dialogen til å være utenfor Balacheffs nivåer. Elevene skriver de bare kan gange, men spesifiserer ikke hva de kan gange. Deretter skriver de ned noen regneoperasjoner som viser hva de første ti kvadrattallene blir (med unntak av 1*1). Dialogen innehar ingen omforminger av trappene til kvadrater, eller enkle regneoperasjoner som danner en påstand om at antall klosser i trappen tilsvarer kvadratet av antall trinn opp. Argumentasjonen oppfyller ingen av kriteriene for noen kategorier, og identifiseres derfor til å være utenfor Balacheffs nivåer. Identifiseringen for dialog 18R05-D3 skiller seg litt, siden den har tilfeldige spesielle tilfeller. Den identifiserer jeg derfor til naiv empirisme.

4.1.4 Naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet

I dette kapittelet analyseres de dialogene som ble identifisert til naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet av EVU-studenter. Fire av dialogene (18R01-D2, 18R07-D2, 19R09-D3 og 19R10-D2) ble begrunnet tilnærmet likt av EVU-studentene, og hadde tilnærmet lik argumentasjon fra elevene. Disse fire dialogene vil derfor bli belyst gjennom analysen av dialog 18R01-D2. De to andre dialogene (18R05-D2 og 18R06-D2) var også tilnærmet like i begrunnelse og argumentasjon, derfor blir de belyst gjennom analysen av dialog 18R05-D2.



Figur 8: Elevenes argumentasjon i dialog 18R01-D2

EVU-studentens identifikasjon
Basert på den første replikken til Knut identifiserer EVU-studenten den skriftlige dialogen til naiv empirisme. Dette begrunnes med «Elevene viser dette på en grundig måte, gjennom å skrive alle trappetrinnene i trapp nr. 7» (vedlegg 6). Trapp nummer syv blir testet for både Knuts summeringsmetode og påstanden om kvadrattall. EVU-studenten identifiserer dette som naiv empirisme.

EVU-studenten begrunner sin identifisering av det avgjørende eksperiment til Idunns andre replikk. EVU-studenten begrunner at dette argumentet holder fordi «... de hopper over noen trapper» (vedlegg 6). Elevene hopper over trappene 8, 9 og 10 før de bruker samme løsningsstrategi, som de brukte på trapp 7, på trapp 11. EVU-studenten identifiserer dette som et avgjørende eksperiment.

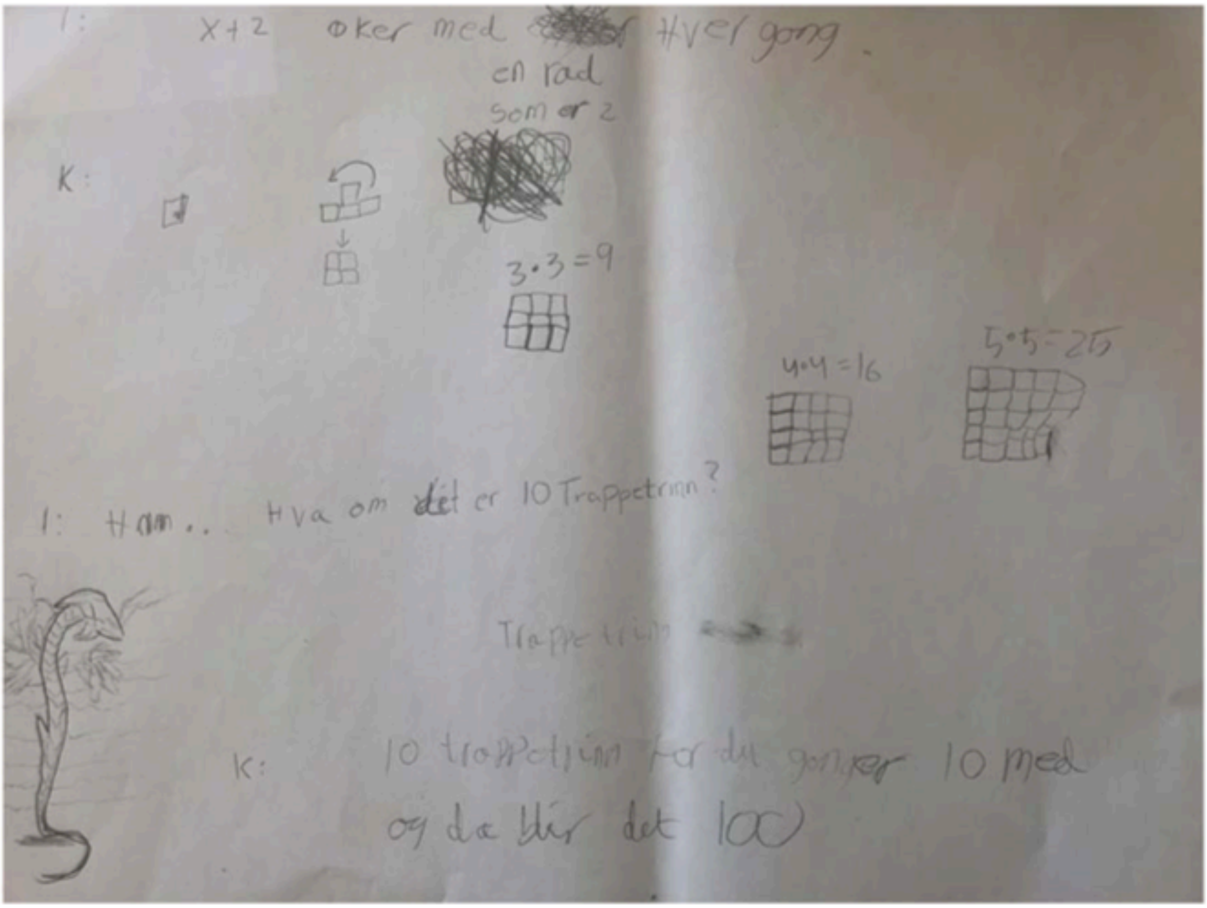
EVU-studenten mener også at argumentasjonen er på vei mot det generiske eksempelet. Dette begrunnes med «Gjennom illustrasjonen viser de hvorfor trappa vil kunne danne et kvadrat» (vedlegg 6). Siden de danner et kvadrat mener EVU-studenten at det vil være korrekt å multiplisere figurnummeret med seg selv, som viser sammenhengen med kvadrattall. EVU-studenten oppgir også hva som mangler for at argumentasjonen skal være det generiske eksempelet, «For å nå dette nivået måtte de ha fortsatt dialogen og utdypet hva det er som gjør figurene til kvadrat» (vedlegg 6). EVU-studenten skriver at elevene mangler en forklaring på hvorfor trappene kan gjøres til kvadrater for å være det generiske eksempelet, men identifiserer dialogen likevel til å være på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet. I likhet med EVU-studenten identifiserte jeg naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet. Elevene tester påstanden om kvadrattall med den tilfeldige trappen med syv trinn opp, og forsikrer seg at den stemmer med å summere kolonnene. Dette identifiseres som naiv empirisme.

Elevene gjennomfører samme test på en trapp med elleve trinn opp. Elevene gjør et bevisst valg med å hoppe over tre trapper, og elevene viser overbevisning i replikk fire i figur 8. Dette identifiserer argumentasjon til et avgjørende eksperiment.

Til slutt presenterer elevene en figur som illustrerer hvordan en trapp kan omformes til et kvadrat. Der de også påpeker at det gjelder alle tall med tekst og formelen x*x. Elevene mangler en forklaring på hvorfor klossene kan flyttes som de gjør. Dialogen identifiseres til å være på vei mot det generiske eksempelet.

De to siste skriftlige dialogene EVU-studentene identifiserte til å omfatte naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet blir belyst med dialog 18R05-D2. Begge dialogene har tilnærmet lik begrunnelse fra EVU-studenten og argumentasjon fra elevene.



Figur 9: Elevenes argumentasjon i dialog 18R05-D2

EVU-studentenes identifikasjon
EVU-studenten identifiserer argumentasjonen til naiv empirisme. Dette begrunnes med «Elevene hadde en tanke om at trappetrinnene kunne gjøres om til kvadrater og det ble prøvd ut med enkle eksempler» (vedlegg 7). De enkle eksemplene er de som allerede er presentert i startdialogen, men suppleres med illustrasjoner til kvadrater. EVU-studenten identifiserer dette som naiv empirisme.

Deretter presenterer elevene argumentasjon som EVU-studenten identifiserer til det avgjørende eksperimentet. Dette gjorde de med å teste for en høyere trapp, en trapp med ti trinn opp. Elevene skriver «10 trappetrinn ... ganger med 10 og da blir det 100» (figur 9), som er grunnlaget til EVU-studenten for identifikasjonen til det avgjørende eksperiment.

Den skriftlige dialogen har ikke mer tekst, men EVU-studenten tar med en muntlig kommentar fra elevene «... de ganger bare trappetrinn med seg selv ... siden det er kvadrat» (vedlegg 7). EVU-studenten skriver dette er en mer generell forklaring, men identifiserer det kun på vei mot det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg kun naiv empirisme og på vei mot det avgjørende eksperiment. Utregningene og tegningene av trappene i figur 8 illustrerer enkelttilfeller av hvordan elevene har tenkt. De får fram at trappene kan omformes til kvadrater med figuren med fire klosser. De anvender denne kunnskapen med å kalkulere antall klosser i trappene på et par enkelttilfeller, som jeg identifiserer til naiv empirisme.

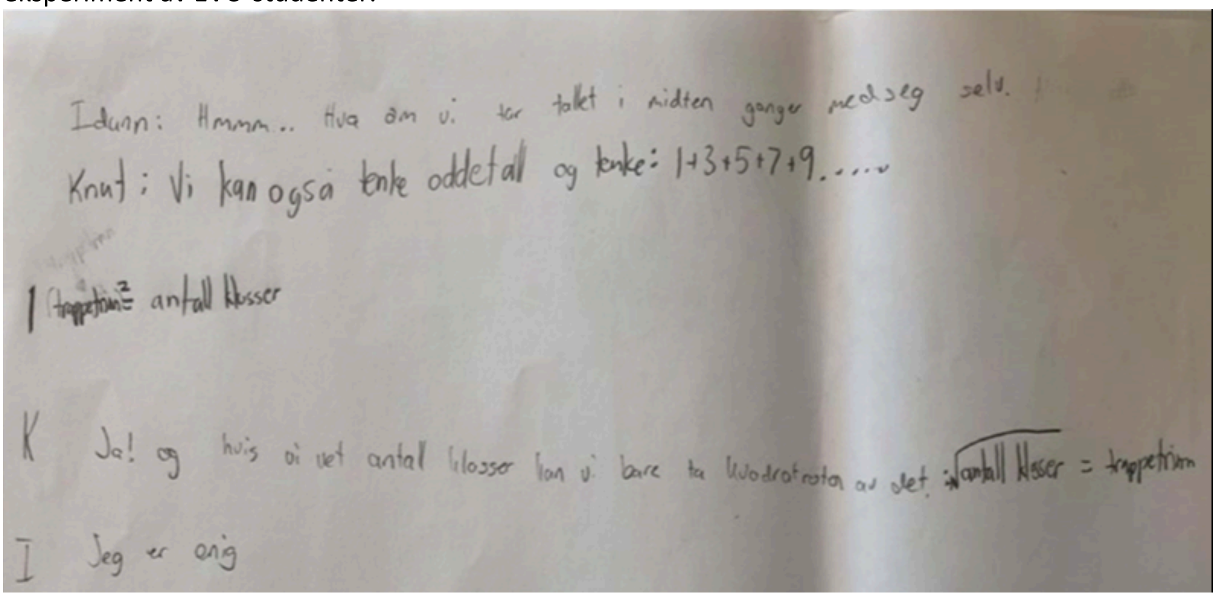
Deretter prøver elevene påstanden på en trapp med ti trinn opp. Her har elevene kun gjort utregningen, og mangler en konklusjon og beskrivelse av overbevisning for påstanden om kvadrattall. Dette identifiserer jeg til å være på vei mot det avgjørende eksperiment.

4.2 Identifisering til det generiske eksempelet

I dette delkapittelet har jeg tatt for meg de dialogene som ble identifisert til det generiske eksempelet av EVU-studentene. Underkapitlene fokuserer på forskjellige argumentasjoner som leder fram til et bevis blant elevene. Strukturen på kapittel 4.2 blir tilsvarende som kapittel 4.1. Kapittel 4.2.1 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kun kategori 3. Kapittel 4.2.2 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 2 og 3. Kapittel 4.2.3 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 3 og 4. Kapittel 4.2.4 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 1, 2 og 3. Kapittel 4.2.5 inneholder identifiserte argumentasjoner der begrunnelsen av EVU-studenten tilsvarer kategori 1, 2, 3 og (4).

4.2.1 Det generiske eksempelet

I dette delkapittelet analyseres den skriftlige dialogen (18R05-D1) identifisert til kun det generiske eksperiment av EVU-studenter.



Figur 10: Elevenes argumentasjon i dialog 18R05-D1

EVU-studentens identifikasjon

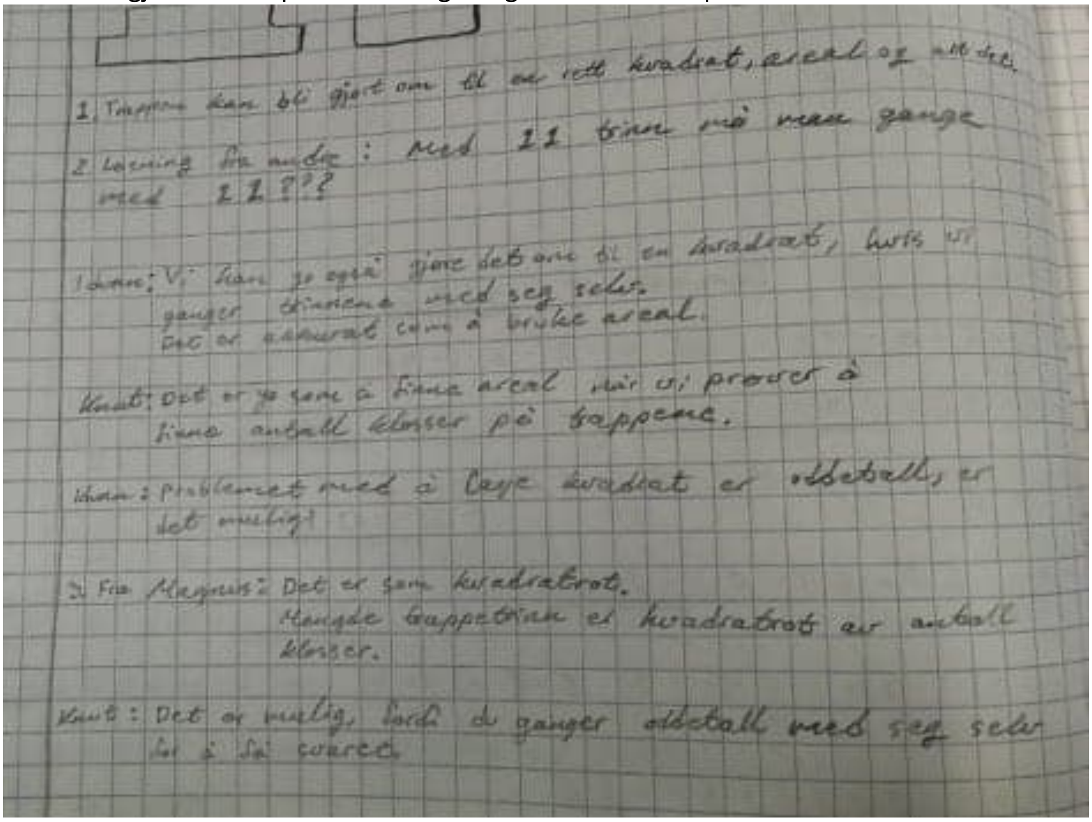
EVU-studenten identifiserer argumentasjonen til det generiske eksempelet. Dette begrunnes med elevenes generelle ordbruk, som ifølge EVU-studenten er «Tallet i midten, trappetrinn og antall klosser» (vedlegg 8). Elevene bruker disse begrepene til å formulere en formel, som gir grunnlaget for identifikasjonen. EVU-studenten skriver også at «Elevene brukte det de kunne om kvadrat, utregning av areal og sider uten å bruke noen konkrete eksempler» (vedlegg 8). Bruk av tidligere tilegnet kunnskap om kvadrater og ingen bruk av konkrete eksempler gjør at EVU-studenten identifiserer den skriftlige dialogen til det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon

I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg dialogen til å være på vei mot naiv empirisme. I første replikk kommer elevene med en påstand, gjennom tekst, om sammenhengen mellom kvadrattall og trappene. Denne påstanden opptrer klarere i den tredje replikken, når Idunn sier «trappetrinn^2=antall klosser» (figur 10). Det er ingen anvendelser av påstanden på tilfeldige, eller bevisste tilfeller. Argumentasjonen identifiserer jeg derfor til å være på vei mot naiv empirisme.

4.2.2 Det avgjørende eksperimentet og det generiske eksempelet

I dette delkapittelet analyseres den skriftlige dialogen (19R14-D2) identifisert av EVU-studenter til kun det avgjørende eksperimentet og det generiske eksempelet.



Figur 11: Elevenes argumentasjon i dialog 19R14-D2

EVU-studentens identifikasjon

EVU-studenten identifiserer den skriftlige dialogen til å være på vei mot det avgjørende eksperiment. Dette begrunnes med «At eleven trekker inn hvor mange klosser som trengs for å bygge en trapp med 11 trinn, kan tyde på at eleven forsøker å komme med et avgjørende eksperiment» (vedlegg 9). Derimot identifiserer ikke EVU-studenten argumentasjonen helt til det avgjørende eksperiment basert på at elevene ikke gjennomfører eksperimentet.

EVU-studenten identifiserer også det generiske eksempelet. Dette begrunnes med «Ved å presentere at man alltid kan bygge kvadrater av trappene» (vedlegg 9). En forklarende tekst på generaliteten til trappene gjør at EVU-studenten identifiserer argumentasjonen til det generiske eksempelet.

Egen identifikasjon

I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å være på vei mot det avgjørende eksperiment og det generiske eksempelet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg dialogen til å være på vei mot naiv empirisme. I første replikk skriver elevene at alle trappene kan bli omformet til et kvadrat (figur 11). Derfra danner de påstanden om at antall klosser er kvadratet av antall trinn opp. Derimot kommer det ikke noen forklaring, eller forklarende figurer på hvordan eller hvorfor det er slik. Elevene har klart å formulere en påstand, men mangler videre argumentasjon med spesielle eller generelle tilfeller. Jeg identifiserer argumentasjonen til å være på vei mot naiv empirisme.

4.2.3 Det generiske eksempelet og tankeeksperimentet

I dette delkapittelet analyseres de skriftlige dialogene (18R03-D2 og 18R08-D2) identifisert til det generiske eksempelet og tankeeksperimentet. Disse blir belyst med en analyse av dialog 18R03-D2, siden begge ble begrunnet tilnærmet likt av EVU-studentene og argumentert for tilnærmet likt av elevene.

Idun: vi ser på den nederste raden. Se her, hvis vi tar den nederste raden – 2 får du den raden over den raden og så videre. Så det blir den nederste raden + nederste raden – 2, og så den raden etter den nederste raden – 2 osv.

Knut: for eksempel: 5 + 5 – 2 + 3 – 2 = 9.

Idun: Mengdene klosser i figurene blir: 1, 4, 9, 16, 25, 36. Altså du ganger antall trinn med seg selv. Det blir jo og like mange som antall klosser i søylen i midten av trappa.

Knut: Hvis man tar alle klossene fra høyresiden av søylen i midten, snur den 90 grader til høyre og plasserer den oppe til venstre for figuren blir det et kvadrat. Og siden søylen i midten blir den ene siden og alle sidene i et kvadrat er like lange vet vi at å gange søylen i midten med seg selv er riktig fordi det blir det samme som side · side i kvadratet.

Idun: Men, da kan vi jo finne ut hvor mange klosser det er i en trapp uansett, så lenge vi vet hvor mange trinn trappa har. Det blir jo side · side. Eller side^2.

Knut: Hvis vi kaller siden da for *k* fordi vi vil finne ut hvor mange klosser trappa består av, så kan vi jo si at uttrykket for å finne det ut er k^2. Da vet vi at om en trapp har 24 trinn så vet vi at vi må regne $24^2 = 576$, så da består trappa av 576 klosser.

Idun: Det går jo ann å finne ut hvor mange trinn trappa har også om vi vet antallet klosser. Da kan vi snu det om. Hvis vi fikk vite at trappa besto av 1296 klosser, så kunne vi regne kvadratrota og da ville vi finne ut hvor mange trinn det er. $\sqrt{1296} = 36$.

Figur 12: Elevenes argumentasjon i dialog 18R03-D2

EVU-studentens identifikasjon

EVU-studenten identifiserer den skriftlige dialogen til det generiske eksempelet. Dette begrunnes med «... de kan endre figuren og tegner et eksempel. Der de ser de kan forandre formen på trappa til et kvadrat» (vedlegg 10). Illustrasjonen som elevene presenterer nederst i dialogen identifiserer EVU-studenten til det generiske eksempelet.

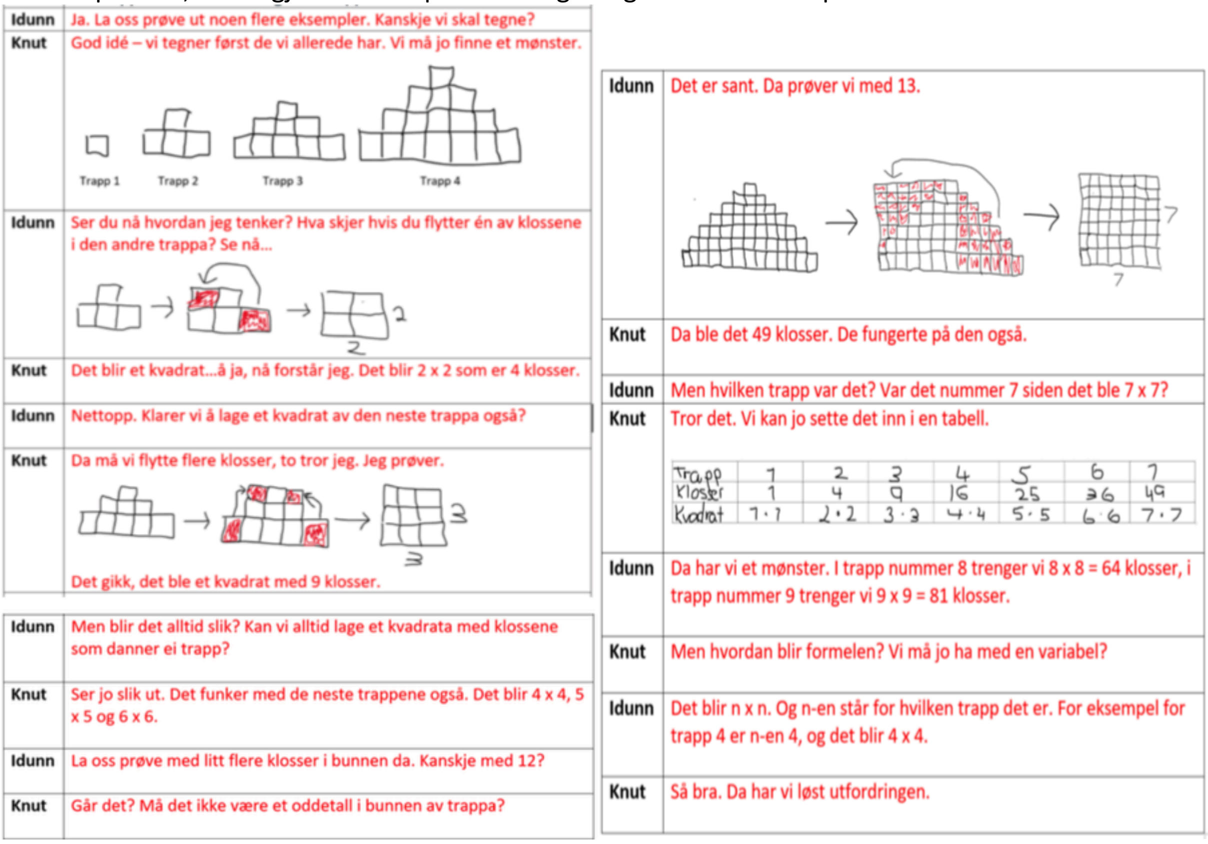
EVU-studenten mener dialogen beveger seg mot et tankeeksperiment. Dette begrunnes med «... den generelle formelen for areal ... her bygger de videre på denne og lager et algebraisk uttrykk k^2» (Vedlegg 10). Formelen blir oppfattet som et krav for tankeeksperimentet, der EVU-studenten begrunner videre «De løsriver seg fra konkretiseringen i oppgaven ... og lager en generell formel for ... antall klosser i en trapp når de kjenner antallet trinn. De klarer også vise at dette er reversibelt» (vedlegg 10). Løsrivingen fra det konkrete stammer fra formelen elevene produserer, og at de klarer å beskrive hva formelen betyr i forhold til trinn og klosser i trappen. I siste replikk viser også Idunn hvordan det er reversibelt, som blir en del av begrunnelsen for at argumentasjonen identifiseres til et tankeeksperiment.

Egen identifikasjon

I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte det generiske eksempelet og tankeeksperimentet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg dialogen til å være på vei mot det generiske eksempelet. Påstanden om kvadrattall blir etablert i replikk tre. Når Idunn sier «altså du ganger antall trinn med seg selv» (figur 12). I replikk fire forklarer Knut hvordan en trapp kan omformes til et kvadrat, som er illustrert nederst i dialogen med tegninger (figur 12). Argumentasjonen blir derfor identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet. Den identifiseres ikke til det generiske eksempelet fordi elevene mangler en konklusjon som forklarer hvorfor klossene kan flyttes.

4.2.4 Naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og det generiske eksempelet

I dette delkapittelet analyseres den skriftlige dialogen (18R07-D1) identifisert av EVU-studenter til naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og det generiske eksempelet.



Idunn	Ja. La oss prøve ut noen flere eksempler. Kanskje vi skal tegne?
Knut	God idé – vi tegner først de vi allerede har. Vi må jo finne et mønster.
Idunn	Ser du nå hvordan jeg tenker? Hva skjer hvis du flytter én av klossene i den andre trappa? Se nå…
Knut	Det blir et kvadrat…å ja, nå forstår jeg. Det blir 2 x 2 som er 4 klosser.
Idunn	Nettopp. Klarer vi å lage et kvadrat av den neste trappa også?
Knut	Da må vi flytte flere klosser, to tror jeg. Jeg prøver. Det gikk, det ble et kvadrat med 9 klosser.
Idunn	Men blir det alltid slik? Kan vi alltid lage et kvadrata med klossene som danner ei trapp?
Knut	Ser jo slik ut. Det funker med de neste trappene også. Det blir 4 x 4, 5 x 5 og 6 x 6.
Idunn	La oss prøve med litt flere klosser i bunnen da. Kanskje med 12?
Knut	Går det? Må det ikke være et oddetall i bunnen av trappa?
Idunn	Det er sant. Da prøver vi med 13.
Knut	Da ble det 49 klosser. De fungerte på den også.
Idunn	Men hvilken trapp var det? Var det nummer 7 siden det ble 7 x 7?
Knut	Tror det. Vi kan jo sette det inn i en tabell.
Idunn	Da har vi et mønster. I trapp nummer 8 trenger vi 8 x 8 = 64 klosser, i trapp nummer 9 trenger vi 9 x 9 = 81 klosser.
Knut	Men hvordan blir formelen? Vi må jo ha med en variabel?
Idunn	Det blir n x n. Og n-en står for hvilken trapp det er. For eksempel for trapp 4 er n-en 4, og det blir 4 x 4.
Knut	Så bra. Da har vi løst utfordringen.

Trapp	1	2	3	4	5	6	7
Klosser	1	4	9	16	25	36	49
Kvadrat	1·1	2·2	3·3	4·4	5·5	6·6	7·7

Figur 13: Elevenes argumentasjon i dialog 18R07-D1

EVU-studentens identifikasjon

EVU-studenten identifiserer denne argumentasjonen til naiv empirisme. EVU-studenten skriver «konkrete eksempler testes ut» (vedlegg 11). Hen sikter til replikk 3 og replikk 6 der påstanden om omforming fra en trapp til kvadrat blir testet ut på konkrete eksempler (figur 12). EVU-studenten identifiserer dette til naiv empirisme.

EVU-studenten identifiser også argumentasjonen til det avgjørende eksperiment. I dialogen tester elevene påstanden på en større trapp, der EVU-studenten henviser til eksperimentet med 13 klosser i bunn. EVU-studenten skriver dette om forsøket på en stor trapp, «Dette blir avgjørende for om de fortsatt tror på egen teori» (vedlegg 11). EVU-studenten begrunner at gjennomføring av et forsøk på en stor trapp og overbevisningen elevene får tilsvare det avgjørende eksperimentet.

EVU-studenten identifiserer også argumentasjon til det generiske eksempelet. Elevene følger en strategi av mønstergjenkjenning når de setter opp tabellen der de leter etter mønster. «Elevene finner et mønster, og setter opp en formel (n*n) ... det har skjedd en bevegelse fra det konkrete til det generelle gjennom å ... omkonstruere ... trappene» (vedlegg 11). EVU-studenten begrunner identifiseringen av det generiske eksempelet med at elevene finner en generell sammenheng uttrykt med en formel. De klarer også å omkonstruere trappene til kvadrater, og dette identifiserer EVU-studenten til det generiske eksempelet.

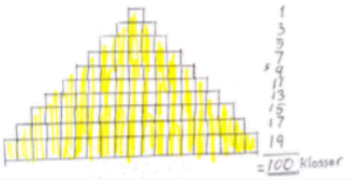
Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme, et avgjørende eksperiment og det generiske eksempelet. I likhet med EVU-studenten identifiserte også jeg de tre kategoriene. Elevene tester påstanden om at antall klosser i trappen er kvadratet av den lengste kolonnen. Dette gir de en oversikt over med tabellen i replikk 14 (figur 13). Påstanden blir sjekket med å omforme noen tilfeldige figurer fra trapper til kvadrater. Dette identifiserer jeg til naiv empirisme.

Elevene utfører også det avgjørende eksperiment i replikk 11 (figur 13). De velger bevisst en større trapp og tester om påstanden er gyldig. De omformer figuren og oppdager at den har syv kolonner med syv klosser i høyden. Dette blir vist ved regning i tabellen deres i replikk 14 (figur 13). Argumentasjonen inneholder summering av kolonner for en stor trapp i replikk 11, utført med omforming av en trapp til et kvadrat. Dette har de også regnet ut med påstanden om kvadrattall, som en del av tabellen (figur 13). Jeg identifiserer argumentasjonen til det avgjørende eksperiment.

I replikk 11 illustreres omformingen av hvordan trappen blir til et kvadrat, og elevene argumenterer for hvorfor antall klosser i trappen er lik et kvadrat i replikk 17. De argumenterer at de konkrete tallene i tabellen leder til uttrykket n*n, der n er hvor mange trinn opp det er i trappen. Argumentasjonen er derfor også identifisert til det generiske eksempelet.

4.2.5 Naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet

I dette delkapittelet analyseres den skriftlige dialogen (18R07-D3) identifisert av EVU-studenten til naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempel og på vei mot tankeeksperimentet.

Knut	Vi skal altså finne ut hvor mange klosser som trengs for å bygge en slik trapp uansett hvor mange trinn opp den har?
Idunn	Men hva hvis vi tenker på en litt annen måte. Trappa blir jo høyere og høyere. Den får jo en etasje ekstra for hver gang.
Knut	Det er sant. Den første trappa ha en etasje og en kloss. Den andre trappa har to etasjer og fire klosser, tre ekstra i etasjen som legges til. Det blir 1 + 3 = 4 klosser.
Idunn	Og den neste har enda en etasje som vi kan legge til. Det blir 1 + 3 + 5 = 9 klosser. Ser ut til at alle etasjene er oddetall.
Knut	Du har rett. Neste trapp blir 1 + 3 + 5 + 7 = 16 klosser. Jeg tror vi har funnet et mønster.
Idunn	Så regelen blir at vi legger sammen alle klossene i hver etasje. Og trapp en har en etasje, trapp to har to etasjer og trapp tre har tre etasjer....
Knut	Skjønner. Og alle er oddetall. Trapp nummer fem blir å finne summen av de fem første oddetallene, altså 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.
Idunn	Så trapp nummer 10 har 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100 klosser?
Knut	Tror det, ja. Vi kan jo tegne trappa og telle opp. Oddetall nummer 10 er 19, så da starter vi med det i bunnen. 
Idunn	Det stemte, det ble 100 klosser. Men kan vi lage en formel som gjelder for alle trappene?

Knut	Det er lett å forklare hva du gjør med ord, men hvordan gjør vi det med symboler eller variabler?
Idun	Hmm...kanskje vi skal prøve på en annen måte. Tenke på stabler i stedet for etasjer. Da blir regnestykkene slik som du sa i starten.
Knut	Tenker du på 1 + 2 + 1 og 1 + 2 + 3 + 2 + 1 og 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1, og ....
Idunn	Nemlig. Hva om vi sorterer litt på disse regnestykkene? Trappene er jo symmetriske, altså likt på hver side av stabelen i midten. 1+2+1 = 1+1+2 = 2+2 1+2+3+2+1 = 1+2+1+2+3 = 3+3+3 1+2+3+4+3+2+1 = 1+3+1+3+2+2+4 = 4+4+4+4
Knut	Klarer du å tegne det du gjorde nå?
Idunn	Jeg kan prøve. Blir jo som å bruke legoklossene, rekonstruere litt. 
Knut	Det blir jo kvadrater til slutt. Alle trappene blir til kvadrater. Og antall klosser blir jo arealet til kvadratet. Og arealet til et kvadrat er $s \cdot s = s^2$. Og 3 + 3 + 3 er vel gjentatt addisjon, som er det samme som multiplikasjon, altså 3 x 3? Lærte vi ikke det på barneskolen?
Idunn	Gjorde vi? Men bør vi sjekke det ut med ei større trapp også? Skal vi prøve med den vi tegnet med 19 klosser i bunnen?

Figur 14: Elevenes argumentasjon i dialog 18R07-D3

EVU-studentens identifikasjon

EVU-studenten begrunner identifisering av naiv empirisme med «elevene starter med å undersøke de første trappene, ser etter mulige mønstre ...» (vedlegg 12). EVU-studenten sikter til de første replikkene mellom Knut og Idunn der de diskuterer hvor mye de må legge til for å lage neste trapp (figur 14). EVU-studenten identifiserer dette til naiv empirisme.

EVU-studenten identifiserer også det avgjørende eksperiment i argumentasjonen fra elevene. Med utgangspunkt i trappen med 19 klosser i bunn skriver EVU-studenten «Ei trapp med mange etasjer blir undersøkt ...» (vedlegg 12). Kravet fra EVU-studenten er at trappen må være stor nok, og det skal gjennomføres et eksperiment. EVU-studenten identifiserer derfor elevenes argumentasjon til det avgjørende eksperiment.

EVU-studenten begrunner også at det forekommer argumentasjon tilsvarende det generiske eksempelet. «De ser etter en måte å uttrykket det konkrete på en generell måte, ... $n*n=n^2$. På veien brukes både tegning og symboler som representasjon» (vedlegg 12). EVU-studenten begrunner identifiseringen med at elevene uttrykker det konkrete generelt med en formel. Der også tegningene mot slutten av dialogen står sentralt. Tegningene illustrerer hvordan trappene kan omformes til kvadrater. Derfor identifiserer EVU-studenten dialogen til det generiske eksempelet.

I tillegg identifiserer EVU-studenten at elevene nærmer seg tankeeksperimentet. EVU-studenten begrunner dette med at «Elevene bruker et matematisk symbolspråk når de prøver å gå fra de konkrete eksemplene til en generell formel» (vedlegg 12). Siden elevene argumenterer med matematiske symboler identifiserer EVU-studenten dialogen til å være på vei mot tankeeksperimentet.

Egen identifikasjon

I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til å omfatte naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempelet og å være på vei mot tankeeksperimentet. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg kun to kategorier, naiv empirisme og det generiske eksempelet. Elevene bruker mesteparten av dialogen til å addere rader og kolonner før de i replikk 15 dekomponerer utvalgte trapper til kolonner (figur 14). De blir deretter omformet til like store kolonner, «et visuelt bilde på gjentatt addisjon er multiplikasjon» (figur 14). Utregningen tatt med i betraktning identifiserer jeg til naiv empirisme.

Deretter setter elevene kolonnene sammen til et kvadrat, og i replikk 16 konkluderer elevene at antall klosser i trappen er likt antall trinn i trappen kvadrert (figur 14). Elevene har vist hvordan trappen omformes. De forklarer også hvorfor det gjelder, med gjentatt addisjon, og kommer med en konklusjon i replikk 16. I tillegg har de påstanden om sammenhengen mellom trinn opp og antall klosser. Argumentasjonen identifiseres til det generiske eksempelet.

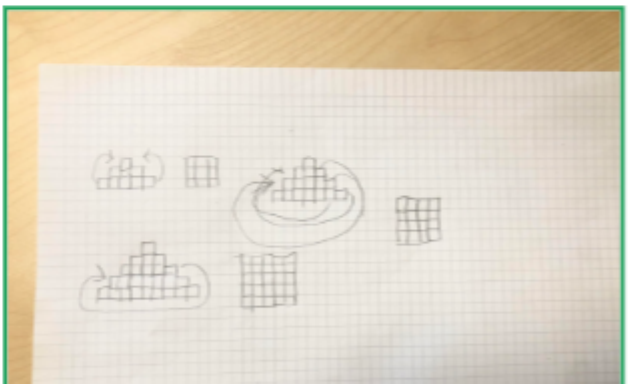
4.3 Identifiseringer utenfor det generiske eksempelet

I dette delkapittelet analyseres dialog 19R17-D2. Dialogen er den eneste som ble identifisert av meg til å være en generisk argumentasjon, men ikke av EVU-studenten.

Idunn: Hva om vi legger like mange kuber som er på den nederste delen under den, og legger 1 på begge sidene og fortsette med det samme. Da finner vi ut hvor mange klosser vi har uansett hvor mange trappetrinn vi har.
1=1
1+2+1=4
1+2+3+2+1=9
1+2+3+4+3+2+1=16

Knut: Oja det var jo simpelt å skjønne.

Idunn: Hvis man tar den ene halvparten av trappetrinnene og snur den om til andre siden, så blir det til en kvadrat uansett hvor mange kuber man har.



Figur 15: Elevenes argumentasjon i dialog 19R17-D2

EVU-studentens identifikasjon
EVU-studenten identifiserer dialogen til å være et bevis til naiv empirisme. I begrunnelsen skriver EVU-studenten «Her forklarer hun hvordan ... oppgaven kan løses ved å bruke kvadrattall» (vedlegg 13). EVU-studenten er klar over forklaringen på omformingen av trappen til et kvadrat, derimot blir argumentasjonen ikke sett på som generell. «De har ikke forsøkt å motbevise tankerekken, og de har heller ikke laget noen generaliserende likning til oppgaven» (vedlegg 13). Siden argumentasjon til elevene ikke prøver å motbevise påstanden, og ikke fremlegger en generell ligning, identifiserer EVU-studenten denne dialogen til å være naiv empirisme.

Egen identifikasjon
I denne dialogen identifiserte EVU-studenten argumentasjonen til naiv empirisme. I motsetning til EVU-studenten identifiserte jeg dialogen til å være på vei mot det generiske eksempelet. Dette begrunnes med siste replikk til Idunn og illustrasjonen. I den siste replikken uttrykker Idunn at denne omformingen gjelder uansett «... det blir en kvadrat uansett hvor mange kuber man har» (figur 15). I tillegg illustrerer tegningen hvordan klossene kan flyttes for å danne et kvadrat. Argumentasjonen identifiseres til å være på vei mot det generiske eksempelet.

4.4 Oppsummerende analyse
I analysen forekom det flere begrunnelser fra EVU-studentene for å identifisere en elevargumentasjon til å være generisk. Derimot opptrådte flere av de samme begrunnelsene. De fleste EVU-studentene krevde en generell påstand mellom trappene og kvadrattallene for å identifisere elevargumentasjonen til å være generisk, der noen kun krevde påstanden for å identifisere argumentasjonen til å være generisk. Disse EVU-studentene viser usikkerhet i hvilke krav hvert nivå i Balacheffs taksonomi krever og er derfor ulik min identifikasjon.

Flere EVU-studenter begrunnet sin identifikasjon av en elevargumentasjon til å være generisk basert på en omforming av en trapp til et kvadrat. Dette kunne elevene gjøre på flere måter, der de fleste brukte enten tekst eller illustrasjon. Generelt er det argumentasjoner med en illustrasjon som er identifisert likt mellom EVU-studentene og meg, derimot forekommer det unntak som vil bli diskutert i diskusjonskapittelet.

Det var også to dialoger som ble identifiserte likt av EVU-studenter og meg til det generiske eksempelet. Begge inneholdt en generell påstand om trappene og kvadrattallene. De inneholdt en omforming fra trapp til kvadrat, samt en generell forklaring på hvorfor dette alltid vil gjelde. Dette viser at elever på 10. trinn kan klare å argumentere tilsvarende det generiske eksempelet, og at EVU-studenter kan anvende Balacheffs taksonomi.

Analysen viser at de samme begrunnelsene opptrer blant EVU-studentene når de identifiserer en elevargumentasjon på vei mot eller på det generiske eksempelet. Der noen EVU-studenter trenger flere argument enn andre for å bli overbevist at det er generisk. Resultater fra analysen viser også at Balacheffs taksonomi ikke dekker alle identifiseringene av elevargumentasjonene, siden flere EVU-studenter begrunner sin identifikasjon til å være på vei mot et nivå.

5.0 Diskusjon

I dette kapittelet vil forskningsspørsmålet bli diskutert basert på studiens analyse. Det kan derfor være formålstjenlig å repetere forskningsspørsmålet:

> *Hvordan begrunner lærerstudenter sin identifisering av elevers bevisføring som et generisk eksempel?*

Studiens analyse av EVU-studentenes identifikasjon av elevargumentasjoner skiller mellom to kategorier av generisk argumentasjon «på vei mot generisk eksempel» og «på nivået generisk eksempel». I dette kapittelet skal jeg diskutere analysen av EVU-studentenes identifiseringer og koble den opp til det teoretiske rammeverket for å svare på forskningsspørsmålet.

Dette kapittelet er delt opp i fire delkapitler. I det første delkapittelet diskuteres begrunnelsene EVU-studentene identifiserer «på vei mot» det generiske eksempelet. «På vei mot» identifiseringene vil inneholde trekk av det generiske eksempel, men ikke oppfylle alle kravene EVU-studenten forventer. Det andre delkapittelet har hovedfokus på likheter og ulikheter i EVU-studentenes og mine begrunnelser av identifiseringene. Kapittelet er bygget opp av delkapitlene «lik begrunnelse», «delvis lik begrunnelse» og «ulik begrunnelse». Lik, delvis lik og ulik begrunnelse handler om EVU-studentene har identifisert elevargumentasjonene likt, delvis likt eller ulikt mine identifikasjoner.

Det tredje delkapittelet har hovedfokus på hvilke begrunnelser EVU-studentene bruker, og hvilke kategorier de har identifisert med de begrunnelsene de har lagt fram. Dette kapittelet er bygget opp av delkapitlene «Identifiseringer begrunnet med påstand», «Identifiseringer begrunnet med påstand og omforming», «Identifiseringer begrunnet med påstand, omforming og forklaring» og «Identifiseringer begrunnet med kvadrattall». *Påstand* er hypotesen elevene formulerer og er relasjonen mellom trappene og kvadrattallene. Elevene begrunner hypotesen med enkelttilfeller eller andre induktive argument. Elevene vet at hypotesen ikke er tilstrekkelig og trenger videre utforskning for å bevises. *Omforming* er en beskrivelse av elevenes argument når de forklarer hvordan en trapp kan omformes til et kvadrat, mens *forklaring* er elevenes argument når de beskriver hvorfor trappen har like mange klosser som et kvadrat. *Kvadrattall* er en begrunnelse brukt av en EVU-student, der opptreden til kvadrattall er nok til å identifisere argumentasjonen som generisk. I det fjerde delkapittelet diskuteres didaktiske implikasjoner fra denne studien.

5.1 Begrunnelser på vei mot det generiske eksempelet

EVU-studenter som identifiserte elevargumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet vil bli diskutert i dette delkapittelet. Begrunnelsene av identifiseringene kan deles i to former. I den første formen beskriver EVU-studentene trekk i elevargumentasjonen som viste at elevene var på vei mot det generiske eksempelet. Dette kommer fram i analysen av dialogene 18R01-D3, 19R12-D2, 18R06-D1, 19R11-D3 og 18R05-D2. Den andre formen forekommer i de to dialogene 18R01-D2 og 19R15-D3. Her beskrives trekk elevargumentasjonen hadde for et generisk eksempel, men også hva det manglet for å være et generisk eksempel.

Dialogene 18R06-D1 og 18R05-D2 begrunner sin identifisering med en generell formel mellom trappetrinnene opp og kvadrattallene. I begge dialogene skriver EVU-studentene at den generelle formelen viser trekk ved generalitet, og elevene vil være på vei mot det generiske eksempelet. Dialogene 19R12-D2 og 18R01-D3 begrunner sin identifisering med en formel og en illustrasjon som viser hvordan en trapp kan, generelt, omformes til et kvadrat. Likt for alle fire er at de beskriver at de har trekk, men ikke hva de mangler for å bevise tilsvarende det generiske eksempelet. Dette viser at elever kan produsere argumentasjoner som ikke Balacheffs taksonomi fanger opp, siden de kun inneholder trekk av et nivå. Derfor kan det være nyttig å utvikle taksonomien med flere kategorier, som denne studien og Brodahl et. al. (2020) gjør, og Varghese (2011) foreslår.

EVU-studentenes begrunnelser av identifiseringen i dialogene 18R01-D2 og 19R15-D3 var litt annerledes. Begge identifiseringene beskrev trekk i elevargumentasjon som var på vei mot det generiske eksempelet, likt med de tidligere nevnte dialogene i delkapittelet. Derimot beskrives også hvilke trekk som mangler for at elevargumentasjonen skal være et generisk eksempel. Begge har dermed krav til en generell påstand, illustrasjon og forklaring på hvordan klossene kan omformes til et kvadrat. Elevargumentasjonene inneholder kun trekk av det generiske eksempelet, mens de andre trekkene er påpekte mangler i argumentasjonen av EVU-studenten. Argumentasjonen tilsvarer derfor ikke det generiske eksempel, og det kan derfor være nyttig å legge til flere kategorier til Balacheffs taksonomi, som også Brodahl et. al. (2020) gjør.

5.2 Likheter og ulikheter i min og lærerstudenters begrunnelser

I dette delkapittelet diskuteres EVU-studentenes og mine likheter og ulikheter i begrunnelsen av identifiseringen. I kapittel 5.2.1 diskuteres dialogene der EVU-studentenes og mine begrunnelser av identifiseringer er like. I kapittel 5.2.2 diskuteres dialogene der EVU-studentenes og mine begrunnelser av identifiseringer er delvis lik. Med delvis lik menes de dialogene der EVU-studenten og jeg har identifisert til kategori (3) eller 3, men der de andre kategoriene avviker. I kapittel 5.2.3 diskuteres de dialogene der EVU-studenten har identifisert en generisk argumentasjon, mens jeg ikke identifiserer en generisk argumentasjon.

5.2.1 Lik begrunnelse

Av de 20 dialogene EVU-studentene identifiserte til generisk argumentasjon ble seks av dem begrunnet og identifisert likt som meg (18R01-D3, 18R01-D2, 18R07-D2, 19R09-D3, 19R10-D2 og 18R07-D1). Fem av dem inneholdt begrunnelser til både naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot eller på det generiske eksempel, unntaket er dialog 18R01-D3 som kun ble identifisert til å være på vei mot det generiske eksempel.

En av grunnene til at argumentasjonene med de tre første nivåene i Balacheffs taksonomi ble identifisert likt av EVU-studentene og meg kan være at argumentene til de tre første nivåene ble tydelige i elevargumentasjonen. Hvis elevene argumenterer til naiv empirisme vil det være enkle utregninger, med en tydelig påstand. Påstanden vil baserer seg på forholdet mellom trappene og kvadrattallene. Påstanden ville ha blitt testet ut på en stor trapp, for å utføre det avgjørende eksperimentet. Deretter ville elevene ha prøvd å argumentere for hvordan og/eller hvorfor dette vil gjelde for alle trappene. En slik struktur går igjen i alle argumentasjonene som ble likt identifisert til naiv empirisme, det avgjørende eksperiment og på vei mot eller på det generiske eksempelet. Ifølge Varghese (2011) kan Balacheffs nivåer være vanskelige å skille. Derimot hvis de tre første nivåene opptrer i en argumentasjon, kan det være tydeligere å finne skillene mellom nivåene.

Dialog 18R01-D3 er mer avansert enn de andre dialogene som ble identifisert likt. Balacheffs (1988b) nivåer er kategorisert etter hvor avansert beviset til elevene er. Siden dialog 18R01-D3 kun identifiseres til kategori (3), viser elevene at de direkte prøver å argumentere ved det generiske eksempelet. De øvrige elevargumentasjonene viser at de først må argumentere ved de andre nivåene. Først blir de overbevist av mindre avanserte bevis før de kan føre et bevis med argument tilsvarende det generiske eksemplet. Elevene utvikler deres matematiske evner til å føre et bevis, gjennom å psykologisk stille høyere krav til hva som overbeviser dem. Dette er en nødvendighet for å føre et transparent bevis basert på Stylianides (2008) pedagogiske komponent. Elevene utfører først bevis tilsvarende naiv empirisme som de skjønner, subjektivt, ikke er et godt nok bevis. Dermed utvikler de det matematiske beviset til et avgjørende eksperiment, før samme prosess gjentas til det generiske eksempel. De lærer underveis at de første bevisnivåene i Balacheffs taksonomi ikke er tilstrekkelige bevis. Derimot vil en argumentasjon som går direkte mot det generiske eksempelet være mer avansert enn argumentasjon som tar med naiv empirisme og det avgjørende eksperiment, siden elevene allerede innehar kunnskapen at de tidligere nivåene ikke er holdbare bevis.

5.2.2 Delvis lik begrunnelse

Av de 20 dialogene som EVU-studentene identifiserte til en generisk argumentasjon hadde jeg delvis lik identifisering med syv av elevargumentasjonene (19R10-D3, 19R12-D2, 19R15-D3, 18R06-D2, 18R03-D2, 18R08-D2 og 18R07-D3). Det opptrer også noen likheter mellom disse dialogene som kan diskuteres. Seks av dialogene, med unntak av 19R15-D3, har alle blitt identifisert av EVU-studenter til å inneholde flere kategorier, eller å ha mer avanserte kategorier enn av meg.

Årsaken til at flere kategorier blir identifisert av EVU-studentene sammenlignet med meg, kan være at de er usikre på hva som kreves for hvert nivå i Balacheffs taksonomi. EVU-studentene har lite erfaring med å undervise og jobbe med Balacheffs nivåer og bevisføring. Dette påvirker deres identifiseringer. Varghese (2011) skriver at det er vanskelig å skille mellom Balacheffs (1988b) tre første nivåer, og det er ingen klare grenser mellom dem. Siden grensene mellom nivåene er utydelige, og EVU-studentene har liten erfaring med Balacheffs (1988b) nivåer, vil dette påvirke hvilke nivåer de identifiserer, og potensielt påvise flere kategorier enn behørig.

Grunnen til at EVU-studentene identifiserer flere eller mer avanserte kategorier kan også påvirkes av elevenes muntlige aktivitet. EVU-studentene var til stede mens elevene gjorde oppgaven, og siden elevene jobbet i par har de diskutert muntlig. Elevene kan ha formulert flere gode argument muntlig, men fått problemer med å føre dem. EVU-studentene kan ha overhørt de muntlige argumentene og tatt det med i betraktning når hen har identifisert elevargumentasjonen. Dette kan ha overbevist EVU-studenten om at elevene innehar flere og/eller mer avanserte bevisnivåer enn de får vist gjennom den skriftlige argumentasjonen.

5.2.3 Ulik begrunnelse

Av de 20 dialogene som ble identifisert til en generisk argumentasjon av EVU-studentene identifiserte jeg syv ulikt (18R06-D1, 19R12-D3, 18R05-D3, 19R11-D3, 18R05-D2, 18R05-D1 og 19R14-D2). Felles for alle dialogene EVU-studentene og jeg identifiserte ulikt er at ingen av dem har en illustrasjon som forklarer hvordan klossene kan omformes til et kvadrat, eller en forklaring på hvorfor de kan flyttes til et kvadrat.

For å forklare hvorfor EVU-studentene identifiserer dialoger uten en omforming eller forklaring til det generiske eksempel, kan skyldes at de ikke vet hva som kreves for hvert bevisnivå. Siden det forekommer færre bevisnivåer i elevargumentasjonen, kan det fremme vanskeligheten med å skille nivåene. De utydelige skillene mellom Balacheffs (1988b) bevisnivåer, som Varghese (2011) poengterer, kan skape usikkerhet blant EVU-studentene når de identifiserer elevargumentasjonen. Det kan også skyldes påvirkninger fra muntlig aktivitet. Likt som i kapittel 5.2.2 kan EVU-studentene ha vurdert elevenes muntlige aktivitet i tillegg til det skriftlige.

Årsaken til at identifiseringen mellom EVU-studentene og meg ble så forskjellig kan også skyldes deres oppfatning av bevis. Ifølge Reid (2005) vil enhver lærer ha en oppfatning av hvordan bevis bør være, men matematikkdidaktikere har ikke en entydig oppfatning av bevis. Derfor bør det ikke være noen overraskelse at EVU-studentene identifiserer ulike bevisnivåer, selv om de har gjennomgått samme opplæring. Alle vil ikke ha samme oppfatning av hva et bevis skal inneholde, og hvordan det skal føres for å være gyldig. Et bevis er påvirket av det psykologiske og blir subjektivt forstått (Stylianides, 2008; Reid & Vargas, 2018). Dersom en lærer har en svak kunnskap av bevis vil dette påvirke identifiseringene hen gjør. Dette stemmer overens med funnene i Stylianides (2016) forskning også, der den første faktoren påpeker at flere lærere har en svak kunnskap om bevis.

5.3 Lærerstudenters begrunnelser

Analysen av EVU-studentenes identifisering av elevargumentasjoner viste variasjon i hvilke begrunnelser de brukte når en argumentasjon er generisk. Noen begrunnelser opptrådte hyppigere enn andre. De fleste argumentasjonene identifisert til å være generisk, inneholdt en omforming av en trapp til et kvadrat. Det var også flere argumentasjoner med en generell påstand, ofte i form av en formel. Dette viser at EVU-studentene har noen felles krav for hva de ønsker elevene skal vise når de argumenterer mot det generiske eksempelet.

I dette delkapittelet diskuteres hvilke ulike begrunnelser EVU-studentene brukte når de identifiserte en argumentasjon til å være generisk. I kapittel 5.3.1 diskuteres dialoger begrunnet med kun en påstand. I kapittel 5.3.2. diskuteres dialoger begrunnet med påstand og omforming. I kapittel 5.3.3 diskuteres dialoger begrunnet med påstand, omforming og forklaring, og i kapittel 5.3.4 diskuteres dialoger begrunnet med kvadrattall.

5.3.1 Identifiseringer begrunnet med påstand

Det er noen EVU-studenter som kun anser en påstand om sammenhengen mellom trappene og kvadrattallene som nok for at en argumentasjon er på vei mot eller på det generiske eksempelet. Dialogene 18R05-D2, 18R06-D1, 19R14-D2 og 19R15-D3 ble alle identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet. Alle dialogene ble kun begrunnet ut ifra en påstand uttrykt med en formel. Komponentene i formelen ble forklart direkte i dialog 18R05-D2 med en muntlig kommentar EVU-studenten tok med, og indirekte gjennom utregninger i 19R15-D3. I dialog 18R06-D1 ble det kun formulert en formel der komponentene forble uforklarte.

Interessant med dialog 19R15-D3 er at jeg identifiserte den til kategori 1, 2 og 3. Det vil si jeg fant argument som viste en generell illustrasjon av en trapp omformet til et kvadrat, og en forklaring på hvordan dette skjer, i tillegg til en generell påstand. EVU-studenten oppfatter illustrasjonen i figur 6 som kun et ekstremtilfelle, eller et avgjørende eksperiment. Jeg identifiserer det som en illustrasjon på hvordan trappen kan omformes til et kvadrat. Dette stemmer med hva Varghese (2011) skriver, at argumentasjoner mellom de tre første nivåene er vanskelige å skille, så lenge det ikke kommer tydelig fram hva elevene mener. I tillegg nevner ikke EVU-studenten teksten på siden av illustrasjonen i figur 6, mens jeg identifiserer det som en forklarende tekst som viser til generaliteten. Der generaliteten blir fremstilt som et krav for et generisk bevis av Varghese (2011) og Reid og Vargas (2018).

EVU-studenter begrunnet også dialogene 18R05-D1 og 19R14-D2 med kun en påstand, uttrykt med en formel eller ord. Komponentene i påstanden ble også her forklart, men EVU-studentene identifiserte dialogene til å være det generiske eksempelet. Årsaken at EVU-studentene oppfatter en formel som et generisk eksempel, kan komme av deres konsept av et bevis (Reid, 2005). Hvis EVU-studentene oppfatter en formel som et generelt bevis, vil de heller ikke kreve mer av elevene for å argumentere på det generiske eksempelet. Elevene har brukt sannheter etablert i den sosiale settingen til å bevise noe generelt. Dette viser at EVU-studentene har liten erfaring med Balacheffs nivåer, og er usikre på hva som forventes for de forskjellige nivåene. EVU-studentene viser også svak kunnskap om bevis, som overensstemmer med Stylianides (2016) funn.

5.3.2 Identifiseringer begrunnet med påstand og omforming

Det var flere EVU-studenter som krevde mer enn bare en påstand om sammenhengen med kvadrattall for å identifisere en elevargumentasjon til å være på vei mot eller være det generiske eksempelet. Dialogene 18R01-D3, 19R12-D2, 18R01-D2 og 18R03-D2 inneholder alle identifikasjoner begrunnet med en påstand og en illustrasjon som viser en omforming av en trapp til et kvadrat. Dialogene 18R01-D3, 19R12-D2 og 18R01-D2 ble alle identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet, noe som står i tråd med min egen identifikasjon. Dialog 18R03-D2 ble identifisert til tankeeksperimentet og kan være interessant å ta en nærmere titt på. I tillegg ble dialog 19R17-D2 identifisert til å inneholde en omforming som EVU-studenten påpeker, men fortsatt ikke identifiserer til å være en generisk argumentasjon.

Dialog 18R03-D2 ble identifisert til det generiske eksempelet kun basert på en illustrasjon. Formelen elevene kommer fram til (side*side, vedlegg 10) mener EVU-studenten plasserer argumentasjonen nærmere et tankeeksperiment. Det kan hende EVU-studenten tenker illustrasjonen er et konkret hjelpemiddel for elevene til å vise et generelt strengt bevis. Ifølge Knuth og Elliott (1998) og Reid og Vargas (2018) er det lov å bruke konkrete eksempler på vei mot et strengt matematisk bevis, som tankeeksperimentet er. Tankeeksperimentet skal være basert på deduktive prosesser, men kan inneholde induktive prosesser som genererer en påstand (Knuth & Elliott, 1998).

Grunnen til at argumentasjonen ikke ble identifisert til et tankeeksperiment av meg, er fordi argumentene baseres på induktive prosesser. Elevene bruker en figur som viser hvordan enhver figur kan omformes, men den er basert på et enkelt tilfelle. Elevene har ikke formulert at figuren er generell gjennom algebraiske formuleringer. I tillegg er formelen (side*side) bare nevnt som k^2 uten en algebraisk forklaring på hvorfor den stemmer. Den er derimot forklart gjennom tekst. Dette ble derfor ikke identifisert som et tankeeksperiment av meg, men på vei mot det generiske eksempelet. EVU-studenten har dermed ikke klart å differensiere de forskjellige kravene til Balacheffs (1988b) nivåer. Dette underbygges av Vargheses (2011) forskning som påpeker at det er utydelige skiller mellom nivåene, og med mindre det er tydelig forklart, er det ikke mulig å trekke bastante slutninger basert på skriftlig argumentasjon alene. Det kan også påvirkes av EVU-studentens subjektive oppfatninger av bevis. Hva som oppfattes som et bevis er blant annet påvirket av egne subjektive oppfatninger (Reid, 2005; Stylianides, 2008; Reid & Vargas, 2018).

Dialog 19R17-D2 ble ikke identifisert til en generisk argumentasjon av EVU-studenten, men hen begrunnet at den inneholdt en forklaring på hvordan trappene har en sammenheng med kvadrattallene. EVU-studenten fremstilte også krav som måtte oppfylles dersom argumentasjonen skulle være innenfor andre bevisnivåer. «[Elevene] har ikke forsøkt å motbevise tankerekken, og de har heller ikke laget noen generaliserende likning til oppgaven» (vedlegg 13). For det avgjørende eksperiment forventet EVU-studenten et eksempel der elevene prøvde å motbevise påstanden (tankerekken) de hadde. For et generisk eksempel forventet EVU-studenten en likning som forklarte sammenhengen mellom trappene og kvadrater i argumentasjonen.

Selv om EVU-studenten har identifisert omformingen fra en trapp til et kvadrat, og elevene spesifiserer at dette gjelder for alle trapper, så mener EVU-studenten at argumentasjonen ikke er et generisk eksempel. I opplæringen til EVU-studentene blir de introdusert for Balacheffs nivåer, der på vei mot notasjonen ikke inngår i Balacheffs taksonomi. Det kan derfor være at EVU-studenten ikke foretar noe forsøk på å identifisere elevargumentasjonen til å være på vei mot det generiske eksempelet. EVU-studenten stiller også kun et krav om en formel (vedlegg 13) for at det skal være det generiske eksempelet. Dette viser at EVU-studenten ikke helt har forstått hva som kreves for det generiske eksempelet. Dette er i overenstemmelse med Varghese (2011) som påpeker at skillene mellom nivåene i Balacheffs taksonomi er utydelige, og Stylianides (2016) første faktor.

5.3.3 Identifiseringer begrunnet med påstand, omforming og forklaring

Det var to dialoger identifisert til det generiske eksempelet begrunnet med mer enn en påstand og en omforming av EVU-studenter. Dialogene 18R07-D1 og 18R07-D3 hadde begge en begrunnelse som inneholdt en påstand mellom kvadrattallene og trappene, en omforming som illustrerte sammenhengen og en forklaring på hvorfor klossene kunne flyttes i figuren.

Begge dialogene har blitt identifisert av EVU-studenten og meg til det generiske eksempelet. De kan med andre ord ha forstått Balacheffs krav for det generiske eksempel, og oppdaget dem i elevargumentasjonen. Det kan derfor være interessant å diskutere hvorfor kun disse to innehar de nødvendige kravene for det generiske eksempelet. Slik Reid og Vargas (2018) postulerer er det ingen nødvendighet for det generiske eksempelet å være matematisk strengt, så lenge ingen viktige steg er hoppet over, men det må være psykologisk og sosialt akseptert. Den psykologiske faktoren berøres siden de ikke betviler sin egen løsning. I argumentasjonen bruker elevene argument som er aksepterte sannheter i klasserommet, derfor vil den også være sosialt akseptert. Argumentasjonen er et gyldig bevis innad i klasserommet, fordi de psykologiske og sosiale faktorene er oppfylt og ingen viktige steg er hoppet over, som underbygges av forskningen til Reid og Vargas (2018).

Elevargumentasjonene i denne studien er basert på 10. trinns elevers besvarelser, derfor kunne det forventes at flere elevargumentasjoner tilsvarte det generiske eksempelet. Den nye læreplanen som trer i kraft fra høsten 2020 har et kjerneelement om at elevene kan generalisere og argumentere generelt når de er ferdig med ti års skolegang. Elevene skal kunne finne sammenhenger og strukturer gjennom figurer, tallmønster, o.l. (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette gjør elevene når de illustrerer generelt med en trapp hvordan den kan omformes til et kvadrat, og forklarer den algebraiske formelen. Argumentasjonene vil være forventet etter ti års skolegang i et fremtidig scenario der elevene tidlig i skolegangen lærer å følge og vurdere matematiske resonnementer for å argumentere for en påstand. Det kan virke urovekkende at bare to elevargumentasjonene innehar de nødvendige kvalifikasjonene som utdanningsdirektoratet setter etter 10. års skolegang angående generalisering og argumentering. Her har lærerne et mulig forbedringspotensial når det kommer til å undervise bevisføring. For å forbedre lærernes kunnskap om bevis kan lærerutdanningen vektlegge det i større grad.

5.3.4 Identifiseringer begrunnet med kvadrattall

En dialog skilte seg ut med særegne elevargument. Her diskuteres dialogen, som av EVU-studentene, ble identifisert til en generisk argumentasjon basert på begrunnelser som kun inneholdt kvadrattallene.

Dialog 19R11-D3 hadde kanskje den mest særegne argumentasjonen. Den ble identifisert til å være på vei mot det generiske eksempelet basert på de ti første kvadrattallene. Begrunnelsene EVU-studenten brukte baserte seg mye på en samtale mellom elevene. I rapporten skriver EVU-studenten at elevene «diskuterer og argumenterer, ... men glemmer å argumentere å form av dialog hva de har gjort og tenkt» (vedlegg 5). EVU-studenten baserer sin identifikasjon på en muntlig samtale mellom elevene fremfor hva de har i den skriftlige dialogen.

EVU-studenten identifiserer elevargumentasjonen tilsvarende det avgjørende eksperiment og på vei mot det generiske eksempelet basert på muntlig aktivitet. Derimot skriver ikke EVU-studenten spesifikt hva de har diskutert og argumentert muntlig, annet enn «... de har fått er kvadrattall av antall trapp opp ...» (vedlegg 5). I rapporten skulle kun den skriftlige imaginære dialogen identifiseres. EVU-studenten har derfor identifisert elevargumentasjonen på mer datamaterialet enn oppgaven tilsa. Det er derfor ikke mulig å trekke slutninger på hvilken forståelse EVU-studenten har angående det generiske eksempelet.

Argumentene elevene fremlegger i den imaginære dialogen tilsvarer kategori 0, fordi det er ingen sammenheng mellom enkelteksemplene elevene fremlegger og teksten de produserer. «[Vi] trenger bare å gange» (figur 7), forklarer ingenting om en påstand elevene kan ha formulert muntlig. Derfor identifiserer jeg denne type argumentasjon til kategori 0.

5.4 Didaktiske implikasjoner

Studien har vist hvordan en gruppe EVU-studenter har mange like begrunnelser når de identifiserer en elevargumentasjon til et generisk eksempel. Den viser også flere ulike identifiseringer basert på de samme begrunnelsene. EVU-studenter har begrunnet identifiseringene sine med «påstand», «påstand og omforming», «påstand, omforming og forklaring» eller «kvadrattall» og i hvert tilfelle forekommer det argumentasjoner som er identifisert ulikt med mine egne.

Den enkelte matematikklærers begrunnelser for det generiske eksempelet, kan påvirke hvordan hen underviser om bevisføring. Dersom en lærer bruker invalide argument for å begrunne et bevis, vil dette overføres til elevene. Elevene vil dermed utvikle invalide argument til å danne ikke-transparente bevis og få en ikke-universell forståelse av bevis. Den pedagogiske rollen læreren har, påvirker dermed elevenes matematiske og psykologiske evner om bevisføring. Dette underbygges av Stylianides (2007a; 2008) som skriver de tre komponentene påvirker hverandre.

Diskusjonene i kapittel 5.2 og 5.3 påpeker EVU-studentenes begrunnelser av gyldig bevisføring, og hvor ulikt EVU-studentene begrunner et gyldig bevis. Da kan det stilles spørsmål ved fokuset på bevisføring i lærerutdanningen. Den nye læreplanens kjerneelement har et fokus på å bevise at argumentasjoner er gyldige. Derfor bør også lærerutdanningen legge mer til rette for hvordan fremtidige og utdannede lærere kan undervise bevisføring. Dette vil kunne bidra til at de samme reglene gjelder på tvers av lærere og gir elever en felles universell forståelse av bevis, som Stylianides (2008) komponenter kan være til hjelp med. Dette vil støtte opp om instruksjonsstøtten lærerne får, og vil dermed påvirke den fjerde faktoren Stylianides (2016) påpeker.

I kapittel 5.3 kommer det også fram at EVU-studentene har ulike begrunnelser av hva som er gyldige argument for det generiske eksempelet. De har liten erfaring med undervisning av bevisføring med utgangspunkt i Balacheffs taksonomi. Dette gjør det utfordrende for EVU-studentene å identifisere hvilke nivåer elevenes argumentasjoner tilsvarer og fører til ulike undervisninger om bevisføring mellom forskjellige lærere. Det kan derfra stilles ulike krav til elever, som kan ende opp med ulik forståelse av bevisføring basert på læreren de har. Resultater fra analysen i denne studien har dermed fremmet kunnskapen lærere har om bevis, der resultatene støtter forskningen til Stylianides (2016), om at flere lærere har svak kunnskap om tema.

6.0 Avslutning

For å undersøke hvilke begrunnelser lærere bruker når de identifiserer elevers argumentasjon, har denne studien forsøkt å svare på følgende forskningsspørsmål:

> *Hvordan begrunner lærerstudenter sin identifisering av elevers bevisføring som et generisk eksempel?*

I dette kapittelet vil jeg først konkludere angående de viktigste funnene fra studien i lys av forskningsspørsmålet. Deretter vil jeg komme med studiens betydning for meg selv og avslutningsvis komme med forslag til hva som kan være interessant å studere videre.

6.1 Konklusjon

I metodekapittelet ble det adressert hvorfor jeg trengte å utvide Balacheffs taksonomi og inkludere forløpere for hvert av de fire nivåene. I analysen ble det bekreftet at mange EVU-studenter identifiserte argumentasjoner til alle ni kategoriene i mitt analyseverktøy. De begrunnet at argumentasjonen hadde trekk av det nivået de var på vei mot, men mente det ikke inneholdt alle kravene for et nivå. Dette var hovedtanken med å utvide de fire nivåene fra Balacheffs taksonomi til ni kategorier i analyseverktøyet.

Denne studien fokuserte på lærerstudenters identifiseringer av bevisnivåer i elevers skriftlige argumentasjoner. EVU-studentenes identifiseringer varierte i begrunnelsene til en generisk argumentasjon. Det forekom flere tilfeller der EVU-studenter identifiserte elevargumentasjonen til å være på vei mot et nivå. Da inneholdt argumentasjonen trekk av et gitt nivå, men ikke alle kravene EVU-studenten forventet for nivået ble møtt. I begrunnelsen av identifiseringen forekom det også ulike krav for det generiske eksempelet. Det ble brukt *påstand*, *omforming*, *forklaring* og *kvadrattall*, der det varierte mellom EVU-studentene hvilke krav som krevdes for et generisk eksempel. EVU-studentene har dermed forskjellig forståelse av hva som kreves for et generisk eksempel, noe som viser at de har varierende kunnskap om bevisføring. Utviklingen av analyseverktøyet med beskrivelser av krav til hver kategori tilsvarende nivåene i Balacheffs taksonomi og krav til kategoriene på vei til et nivå, ble derfor nyttig for å skille begrunnelsene av identifiseringene til EVU-studentene.

Resultatene fra analysen viser også at EVU-studentene identifiserte elevargumentasjoner til forskjellige nivåer sammenlignet med meg. Dette viser at de setter ulike krav for nivåene, og fremmer Vargheses (2011) poeng. Det er ikke klare skiller mellom Balacheffs tre første nivåer, og argument til de kan være vanskelig å skille. Samtidig virker det som i de dialogene der alle de tre første nivåene i Balacheffs taksonomi forekom, var det lettere å identifisere de nevnte nivåene.

EVU-studentene identifiserte elevenes argumentasjoner ut ifra en felles undervisning av Balacheffs taksonomi, men har fortsatt egne idéer om hva et bevis er. Her kommer den psykologiske komponenten i Stylianides rammeverk inn, som fokuserer på den som lærer. Studien tydeliggjør også at et bevis i skolen er preget av lærerens subjektive oppfatninger om hva et bevis er og dermed kan variere fra klasserom til klasserom (Stylianides, 2007a). Dette overensstemmer med den første av fire faktorer Stylianides (2016) fremhever som spesielt viktige for å løfte bevisets plass i grunnskoleelevers matematiske arbeid. At lærerens svake kunnskap om bevis kan påvirke læringsutbytte av bevisføring.

Resultatene fra studien viser at det er få elever på 10. trinn som argumenterer tilsvarende det generiske eksempelet, som stiller tilnærmet like krav som kjerneelementer i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor bør lærerutdanningen oppfordres til å implementere bevisføring i større grad i undervisningen. Dette baseres på EVU-studentenes svake kunnskap om bevisføring, men også fordi generalisering og argumentasjon blir en større del av læreplanen fra og med høsten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020). Denne studien prøver, med analyseverktøyet, å tydeliggjøre hvordan elever kan bevise, og gir lærere støtte for å nå målene sine i klasserommet om bevisføring. Dette tilsvarer den fjerde faktoren Stylianides (2016) påpeker er essensiell for å løfte bevisets plass i grunnskolen.

6.2 Eget utbytte av studien

Denne studien er noe av det mest utfordrende jeg har gjort. Det jeg er mest fornøyd med i studien er ikke hva analysen eller diskusjonen har ledet fram til, selv om det har vært interessante funn. Det jeg er mest stolt av er det som legger til rette for analysen, analyseverktøyet. Dette har blitt hjerte i studien, det kobler sammen teori og analyse, og har vært et hjelpemiddel for hvordan jeg har identifisert og diskutert i studien, samt kategorisert datamaterialet.

Diskusjonene fra kapittel 5 har også gitt meg en bredere oppfatning av hvilke ulikheter som er blant lærere. Jeg synes det er overraskende hvor forskjellig man kan begrunne en argumentasjon og ende opp med forskjellig identifisering, men også foruroligende. For meg viser dette at det godtas forskjellige forståelser av et bevis, som Reid (2005) poengterer i sin forskning at eksisterer. Derimot må det også genereres en mer universell forståelse av gyldig bevisføring, slik at det unngås å bruke invalid bevisføring blant lærere og elever blir bedømt på likt grunnlag.

Ulikhetene har også gitt meg større forståelse for ulike oppfatninger utenfor bevisføring. Hvis det er slike forskjeller bare på et emne, hvor store ulikheter er det på generell basis mellom lærere og måten de underviser? Og ikke bare lærere, det er opplagt at elever er forskjellige, og jeg vil si at denne studien har gjort meg mer forståelsesfull og tålmodig ovenfor elever. I analysen forekommer det mange varianter av argument. Dette viser at elever ikke argumenterer likt, og de må få muligheten til å forklare sin argumentasjon. For en annerledes argumentasjon enn hva læreren foretrekker trenger ikke være feil.

6.3 Videre arbeid

Denne studien forsker på bevisføringen til elever og lærerens identifisering, der datamaterialet baseres på ett møte med bevisføring. Derfor synes jeg det kunne vært interessant å utforske ungdomsskoleelevers utvikling av bevisføring og lærerens utvikling av forståelse av bevisnivåer. Det kan da være mulig å gjennomføre en longitudinell casestudie der elevers bevisføring sammenlignes før og etter en periode med undervisning rettet mot bevisføring. Det kunne vært interessant å observere hvordan elevers argument og lærerens forståelse etter bevisst undervisning av bevisføring utvikler seg. Da er det også mulig å ha to parallelle klasser. Hvor den ene følger skolens vanlige årsplan, mens den andre klassen følger en bevisst undervisning for bevisføring over en gitt periode. Det gir muligheten til å sammenligne likheter og forskjeller fra starten av undersøkelsen til slutten, men også likheter og forskjeller mellom de to klassene.

Siden denne studien tar for seg læreres identifiseringer av bevis på det generiske eksempelet, kunne det vært interessant å forske på læreres identifiseringer av andre nivåer, kanskje spesielt tankeeksperimentet. Dette nivået anbefales å utforske på et høyere nivå, videregående eller universitet, for å kunne få nok datamaterialet. Basert på datamaterialet brukt i studien er det kun et fåtall elevargumentasjoner fra 10. trinn som tilsvarer tankeeksperimentet.

7.0 Referanseliste

Balacheff, N. (1988a). A study of students´ proving processes at the junior high school level.

Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils´practice of school mathematics. I D.Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bell, A. W. (1979). The Learning of Process Aspects of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 10*(3), 361-387.

Brodahl, C., Larson, N., Wathne, U., & Bjørkestøl, K. (2020). Measuring in-service teachers´ ability to analyse their students´ mathamtical argumentation.

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5 utg.). Oxford: Oxford University Press.

Enge, O., & Valenta, A. (2014). Student teachers´work on reasoning and proving. *Nordic research in mathematics education: Proceedings of NORMA14, Turku*, 61-70.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studie. I A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Red.), *Research in Collegiate Mathematics Education,* Vol. 3, s. 234-283. Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. K. Lester (Red.), *Second hand- book of research on mathematics teaching and learning* (s. 805-842). Greenwich, CT: Information Age Publisher.

Hovik, E. A., & Solem, I. H. (2013). Argumentasjon, begrunnelse og bevis på barnetrinnet. I I. Pareliussen, BB Moen, A. Reinertsen, & T. Solhaug (Red.). *FoU i praksis 2012 conference proceedings*, 120-126.

Knuth, E. J., & Elliott, R. L. (1998). Characterizing Students' Understandings of Mathematical Proof. *The mathematics teacher, 91*(8), 714-717.

Lee, K. (2016). Students´proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 26-44.

Lekaus, S., & Askevold, A. (2015). Elevar si argumentasjon. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(1), 18-23.

Piaget, J. (1978). Recherches sur la généralisation *Etudes d'Epistemologie Cognitive* (Vol. XXXVI). Paris: Presse Universitaire de France.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 458-468.

Reid, D., & Vargas, E. V. (2018). When is a generic argument a proof? *Advances in mathematics education research on proof and proving, 1*, 238-250.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.

Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). PROSPECTIVE TEACHERS' CHALLENGES IN TEACHING REASONING-AND-PROVING. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463-1490.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (5 utg.). Bergen: Fagbokforl.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk*. (MAT01-05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf.

Varghese, T. (2011). Considerations Concerning Balacheff´s 1988 Taxonomy of Mathematical Proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2011, 7*(3), 181-192.
Wellington, J. (2015). *Educational Research: Contemporary issues and practical approches* (2 utg.). London: Bloomsbury Academic.
Wille, A. M. (2017). Imaginary dialogues in mathematics education. *Journal fü Mathematik-Didaktik, 38*(1), 29-55. doi:10.1007/s13138-016-0111-7

8.0 Vedlegg

Vedlegg 1: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R01-D3

Denne gruppen prøver gjennom et enkelteksempel å vise hva som skjer på en generell måte. De tar i bruk en illustrasjon og støtter seg på denne når de forklarer det matematiske problemet. Jeg oppfatter ikke dette som et tankeeksperiment, men som et generisk eksempel. Selve formelen de har kommet fram til er for enkel. Den sier ikke noe om hvor tallene kommer fra. Elevene viser at de har en ide om hva N er for noe, men de mangler kunnskap og innsikt i hvordan formulere et formelt og gyldig bevis.

De velger å la Knut være den som ikke forstår og Idunn må være den som prøver å forklare på nye og bedre måter slik at Knut skal forstå. På denne måten klarer de også å få fram flere poenger og beviser i sin forklaring.

Vedlegg 2: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 19R12-D2

Elevene har vært flinke til å få til en dialog. De starter med å organisere funnene til Knut og Idunn i en tabell. De oppdager at man for hver ny trapp legger til en kloss på hver kolonne (elevene skriver rad). De lar også Idunn oppdage at man for hver ny figur legger til en ny kolonne (elevene skriver rad) som har en høyde som tilsvarer figurtallet i nåværende figur og en kolonne som er én kloss høyere (figurnummer + 1).

Så lar de Knut oppdage at trappefigurene kan bli kvadratiske ved å flytte på klosser. Matematisk uttrykker de dette med som $Figurnummer^2$ og $figurnummer \cdot figurnummer = antall\ klosser$

Elevene har gjort to vesentlige oppdagelser: 1. et mønster for hvordan klosseantallet endrer seg fra figur til figur, 2. at antallet klosser er kvadratet av figurtallet. Dessverre har de ikke kommet videre i prosessen med å formulere en formel.

Utfra Balacheffs nivåinndeling er elevene på et pragmatisk nivå. De er så vidt innom begrepsmessig bevis når Idunn snakker om figurnummer + 1. De starter med naiv empirisme ved å studere Knut og Idunns oppdagelser og sette dem inn i en tabell. Det hadde vært et tydeligere uttrykk for naiv empirisme dersom de hadde latt Knut og Idunn gjort noen flere utregninger enn dem som framkommer av startdialogen. De har ikke utført noe avgjørende eksperiment, men beveger seg over til det generiske eksperimentet når de lar Knut oppdage at man kan reorganisere trappa til et kvadrat og at dette gjelder alle trapper.

Totalt sett kan en si at elevene gjennom dialogen har presentert pragmatiske bevis, men ikke holdbare begrepsmessige bevis.

Vedlegg 3: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R06-D1

På denne gruppa var det en elev fraværende, og dermed ble det et pararbeid. Den ene i paret er den deprimerte eleven, og det synes jeg gjenspeiles i dialogen i utsagnet til Idunn «Eg bryr meg ikkje.» Mine observasjoner var på det tidspunktet at eleven hadde brukt opp energien og konsentrasjonen sin, og hadde ikke mer overskudd til å formulere seg. Dette var som forventet.

I begynnelsen av oppgaven bygget elevene de fem første trappene ved hjelp av klosser. Da var de ivrige og telte klosser, og dialogen viser ikke at de faktisk har snakket om trappen med 5 trinn. Jeg prøvde å oppmuntre dem til å ta med dette i dialogen, men da var de så fokusert på selve utforskningen at de ikke prioriterte å skrive på dialogen.

Ut fra dialogen forstår vi at elevene argumenterer ut fra naiv empirisme. De hadde enkle og få utprøvninger, og dessverre gjenspeiles ikke alle utprøvningene i dialogen. Det vi ser i dialogen, er at de systematisk jobber videre med 6-trinnstrappa. Ut fra det de har skrevet i dialogen, ser vi at Idunn regner seg fram til antall klosser med 6 trinn ved å summere antall klosser for hver kolonne ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$). Knut tilføyer da at man kan ta $6 \cdot 6 = 36$. Idunn spør hvorfor, og Knut henviser til trappen på 5 trinn som i startdialogen viste $5 \cdot 5 = 25$. Han overfører dette til trappen med 6 trinn. Deretter konkluderer han med at formelen er $x \cdot x$, og sier at han ikke skjønner hvorfor. Her tenker jeg at Knut søker etter en generisk begrunnelse. Idunn har på dette tidspunktet gitt opp.

Vedlegg 4: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 19R15-D3

Tar vi utgangspunkt i beskrivelsene av Balaceff sin teori fra Askevold & Lekaus (2015) vil jeg si at elevene er, på tross av dårlig struktur, de som er nærmest nivå 3 i Balaceff sin teori om argumentasjonsnivå, men jeg mener vi kan argumentere for at de er på nivå 2 som er mye likt nivå 1 bare at de har et mer tydelig avgjørende eksperiment. Bakgrunnen for at jeg mener de er på nivå 2 er at de har testet ut hypotesen sin om $n \times n$ = antall klosser på enkle eksempler først, før de har et mer tydelig eksperiment med en større figur på side 2. Ser vi på beskrivelsen av et avgjørende eksperiment i Solem et. al. (2017) der spennvidden i det som bør undersøkes for å nå nivå 2 bør være stor, er kanskje ikke hoppet fra figur nr. 3, 6 og 7 så stor. Grunnen til at jeg mener de har gjort et avgjørende eksperiment er at de har tatt et tydelig valg om å teste teorien sin på en så stor figur som de kunne tegne. De viser med en tegning at de kan gjøre figur nr. 3 om til ett kvadrat og vil derfor også teste dette med figur nr. 21. Grunnen til at jeg sier de er nærme nivå 3, men er på nivå 2 er også det at jeg ser at de har begynt med å lage konkrete eksempler som kunne ha vært med på å underbygge deres generelle utrykk $n \times n$, men de mangler den visuelle presentasjonen og argumentasjonen for å bevise at figuren alltid kan bli et kvadrat.

Vedlegg 5: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 19R11-D3

Denne gruppen består av 3 elever. De synes at problemet er interessant. De har skjønt hvordan Idunn og Knut har bygd trappene. Elevene diskuterer, og argumenterer med hverandre ganske mye og de vil ikke jobbe med klosser. De prøver ut på større trapper. De øker størrelsen av trappen fram til 10. trapp. De har kommet med konklusjonen at å gange antall trappetrinn med seg selv er det samme med å addere klosser. Deretter har de oppdaget at resultatene de har fått er kvadrattallet av antall trapp opp. De skriver ned kvadrattallene, men de glemmer å argumentere i form av dialog hva de har gjort og hvordan de har tenkt.

Elevene fra denne gruppen er på nivå 2. De argumenterer med hjelp av «Det avgjørende eksperimentet», ifølge Balacheffs teori. De nærmer seg ganske mye med «det generiske eksempelet». Elevene befinner seg på et pragmatisk bevisnivå.

Vedlegg 6: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R01-D2

Denne gruppen bestod av 3 elever. De kom raskt fram til hvordan de kunne vise den neste trappa. Den første replikken til Knut er på det laveste bevisnivået, naiv empirisme. Elevene viser dette på en grundig måte, gjennom å skrive alle trappetrinnene i trapp nr. 7. Replikk nr. 2 til Idunn beveger seg over mot bevisnivå 2, det avgjørende eksperiment ved at de hopper over noen trapper. På slutten slenger de på en formel og prøver å vise hvorfor Idunn sin framgangsmåte i startdialogen vil

fungere for alle tall. Gjennom illustrasjonen viser de hvorfor trappa vil kunne danne et kvadrat og på den måten vil det bli riktig å gange figurnummeret med seg selv. Jeg vil ikke kalle dette et fullgodt generisk eksempel, men elevene er inne på noe og ville kunnet utvikle dette til å kunne fungere som et generelt bevis. For å nå dette nivået måtte de ha fortsatt dialogen og utdypet hva det er som gjør figurene til et kvadrat.

Vedlegg 7: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R05-D2

Elevene noterte ned en tanke før de gikk videre med å tegne et argument, en forklaring. Her begynner elevene med Balacheffs nivå 1, «Naiv empirisme». Elevene hadde en tanke om at trappetrinnene kunne gjøres om til kvadrater og det ble prøvd ut med enkle eksempler. Deretter gikk de over til å nivå to «Det avgjørende eksperiment» ved å teste ut for et høyere tall. De stoppet opp her og elevene gikk ikke over til å forklare generelt skriftlig. De løsrev seg ikke fra det konkrete, heller ikke i den siste setningen. Da jeg utfordret eleven på å forklare hva de har tenkt oppsummerte allikevel en av elevene med: *«... de ganger bare trappetrinnene med seg selv ... siden det er kvadrat»*. Dette kan kanskje tolkes som at elevene var på vei til å oppnå Balacheffs nivå 3 «Det generiske eksemplet» gjennom en muntlig mer generell forklaring.

Vedlegg 8: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R05-D1

Elevene på denne gruppen startet dialogen med å tenkeskrive de to første dialogiske setningene. Etter hvert glemte de dialogen litt men fortsatte å diskutere noe skriftlig. Det meste av diskusjonen foregikk allikevel muntlig og elevene skrev på en I for Idunn og K for Knut i etterkant.

Elevene lette etter mønster og sammenheng. Det ser vi av de to første setningene i dialogen (bilde 1), men tanken til Knut ble ikke fulgt opp fordi eleven fulgte et annet spor og raskt slo seg til ro med dette. For meg ser det ut som elevene argumenterte generelt fra første stund. *«Tallet i midten»*, *«Trappetrinn»* og *«Antall klosser»* viser det. Elevene brukte det de kunne om kvadrat, utregning av areal og sider uten å bruke noen konkrete eksempler. De forklarte generelt: *«(trappetrinn)^2 = antall klosser»* og *«$\sqrt{antall\ klosser}$ = trappetrinn»*

Jeg tror derfor elevene operere på Balacheffs nivå 3. De snakket generelt og ga et generisk eksempel gjennom å utrykke hva som er typisk for strukturen. Elevene uttrykte generaliseringen skriftlig med ord og ikke bokstaver eller tall gjennom verbal representasjon (Heiberg, Alseth, Eriksen, Smedstad, 2017, Tall og tanke s. 78) De henviser ikke til eksempler.

Vedlegg 9: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 19R14-D2

Figur 3 viser den mest omfattende dialogen som ble produsert i løpet av økta. Her vises en kombinasjon av ideer eleven fikk inn og produksjon av dialogen. I begynnelsen lister eleven opp noen ideer, før hen fortsetter med dialogen. I dialogen forklarer Idunn at man kan gjøre trappen om til et kvadrat, deretter sammenliknes måten man finner antall klosser i trappen med måten man finner arealet av et rektangel på. Her forsøker eleven å generalisere, ved at man alltid kan lage et kvadrat av trappene, og vi vet alltid hvordan vi beregne arealet av et kvadrat, da stemmer det å ta kvadrattallet. Det kan virke som om eleven har forstått det, men så begynner Idunn å trekke inn oddetall. Det kan virke som om eleven ikke har forstått at sidene i et kvadrat også kan være oddetall. Notatene til eleven viser at hen har fått et innspill fra en medelev (Magnus), og Knut konkluderer dermed med at man kan finne kvadrattallet for alle tall.

Jeg synes det er vanskelig å klassifisere denne dialogen. Jeg synes den rører ved flere ulike nivåer av bevis, men eleven kommer aldri dypt nok til at vi får et bilde av at hen virkelig har forstått det. At eleven trekker inn hvor mange klosser som trengs for å bygge en trapp med 11 trinn, kan tyde på at eleven forsøker å komme med et avgjørende eksperiment (Solem, 2017), altså bevisnivå 2. Samtidig undersøker ikke eleven nærmere om det faktisk stemmer at en trapp med 11 trinn faktisk har 11*11 klosser. Eleven forsøker derimot å generalisere ytterligere. Ved å presentere at man alltid kan bygge kvadrater av trappene. Dette kvalifiserer til bevisnivå 3. Eleven kommer ikke frem til noe tankeeksperiment med algebraisk notasjon, dermed er det tydelig at nivå 4 ikke er nådd.

Vedlegg 10: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R03-D2

Denne elevgruppens dialog mener jeg rekker opp på nivå 4 *tankeeksperiment*. De kommer seg dit via nivå 3 *Det generiske eksemplet*. Da de først ser at de kan endre figuren og tegner et eksempel. Der ser de at de kan forandre formen på trappa til et kvadrat. Etter denne oppdagelsen går de videre til et tankeeksperiment, der de går over til den generelle formelen for arealet av en firkant. Her bygger de videre på denne og lager seg et algebraisk uttrykk k^2. De løsriver seg fra konkretiseringen av oppgaven og går over til å bruke begrepsmessige bevis og lager en generell formel for hvordan de kan finne antall klosser i en trapp når de kjenner antallet trinn. De klarer også å vise at dette er reversibelt. De sier at de kan finne antall trappetrinn om de kjenner antallet klosser i trappa fordi de kan regne kvadratrota av antall klosser.

Vedlegg 11: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R07-D1

<table>
<tr><th></th><th>Balacheffs nivåer</th><th>Kommentar til eleveksempel 1</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Pragmat isk bevis</td><td>1. Naiv empirisme</td><td>Elevene startet med å teste ut løsningsstrategiene på de fire først trappene. Konkrete eksempler testes ut, noe som er karakteristisk for dette nivået av bevisførsel.</td></tr>
<tr><td>2. Det avgjørende eksperiment</td><td>Etter å ha kommet frem til en hypotese (trappene kan bygges om til kvadrater), tester elevene denne ut på ei større trapp. Dette blir avgjørende for om de fortsatt tror på egen teori, noe som er karakteristisk for dette nivået av bevisførsel.</td></tr>
<tr><td>3. Det generiske eksempel</td><td>Elevene prøver mot slutten av dialogen å ta det konkrete til det generelle. Strategien er å sette det konkrete opp i en tabell, for å se etter et mønster. Elevene finner mønsteret, og setter opp en formel (n · n), men klarer ikke helt å forankre denne i en matematisk argumentasjon ut over de konkrete eksemplene. Men det har skjedd en bevegelse fra det konkrete til det generelle gjennom å undersøke og omkonstruere strukturen til trappene.</td></tr>
<tr><td>Begreps-messig bevis</td><td>4. Tankeeksperiment</td><td>Elevene ender opp i en formel for antall klosser i en trapp, og gir formelen i et matematisk språk: n · n. Et formelt bevis løsrevet fra det konkrete, mangler.</td></tr>
<tr><td>Konklusjon</td><td colspan="2">Elevene ender på det tredje nivået til bevisføring iht. Balacheff. De holder seg til det konkrete i hele dialogen, og klarer i liten grad å løsrive seg fra denne representasjonen.</td></tr>
</table>

Vedlegg 12: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 18R07-D3

	Balacheffs nivåer	Kommentar til eleveksempel 3
Pragmatisk bevis	**1.** Naiv empirisme	Elevene starter med å undersøke de første trappene, ser etter mulige mønstre som kan sette de på sporet av en hypotese: «Så regelen blir at vi legger sammen alle klossene i hver etasje.».
	2. Det avgjørende eksperiment	Ei trapp med mange etasjer blir undersøkt for å se om hypotesen stemmer, noe den gjør.
	3. Det generiske eksempel	Elevene sliter med å gi hypotesen et matematisk symbolspråk, og fortsetter å undersøke strukturer og egenskaper ved trappene (fra «etasjer» til «stabler» og symmetri). De ser etter en måte å uttrykke det konkrete på en generell måte, og kommer frem til formelen $n \cdot n = n^2$. På veien brukes både tegning og symboler som representasjon.
Begrepsmessig bevis	**4.** Tankeeksperiment	Elevene bruker et matematisk symbolspråk når de prøver å gå fra de konkrete eksemplene til en generell formel. Selv om de ikke kommer helt i mål bevismessig, de klarer ikke å løsrive seg fra det konkrete, så viser de en matematisk innfallsvinkel til et problem.
Konklusjon	Disse elevene opererer i stor grad på det tredje nivået i Balacheffs bevisføring. De undersøker bevisst trappenes strukturer og egenskaper, de endrer hypotesen sin underveis, og har som mål å finne en generell formel for antall klosser i trapp nummer n. De beveger seg mot det fjerde nivået i bevisførsel.	

Vedlegg 13: EVU-studentens begrunnelse av identifisering av dialog 19R17-D2

I denne dialogen har elevene forsøkt seg på en tankegang i starten som er vanskelig å oppfatte hva de har tenkt. De forsøker å forstå det som var skrevet i starten av dialogen som fulgte med oppgaven. De er tydelig at Knut ikke har skjønt hva Idunn forsøker å forklare. Idunn kommer fram med et løsningsforslag gjennom tegning. Her forklarer hun hvordan hun har tenkt at oppgaven kan løses ved å bruke kvadrattall. Hun forsøker å komme med en forklaring på hvorfor det blir kvadrater når man flytter kuber over høyeste trappetrinn. De har ikke forsøkt å motbevise tankerekken, og de har heller ikke laget noen generaliserende likning til oppgave. Denne gruppen har også et bevishetsnivå på naiv empirisme.