Problemløsing i matematikklærebøker for 8.trinn

En undersøkelse av forekomsten av problemløsingsheuristikker i eksemplene i fire lærebøker tilknyttet to ulike læreplaner

HEIDI MARIE SKREGELID TREDAL

VEILEDER
Kristina Markussen Raen

Universitetet i Agder, 2020
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Jeg har skrevet denne masteroppgaven som avslutning på den toårige mastergraden i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder. Det har vært en krevende prosess, med både opp- og nedturer underveis. I løpet av disse to årene har jeg lært mye om både matematikkundervisning og forskning innen dette. I denne masteroppgaven forsøker jeg å kanalisere denne lærdommen i ett stort, avsluttende prosjekt. Dette hadde jeg ikke klart på egenhånd, så heldigvis har jeg hatt en veileder i Kristina Markussen Raen, som har oppmuntret meg og gitt meg konstruktive tilbakemeldinger underveis. Særlig har tilbakemeldingene jeg har fått i løpet av de siste månedene hjulpet meg til å reflektere over det jeg har skrevet. Dette ønsker jeg å takke for. I tillegg har foreleserne jeg har hatt i forskjellige fag i løpet av disse to årene både inspirert og lært meg mye innenfor undervisning i problemløsing og forskningsmetoder.

Forlagene og redaktørene for de nye lærebøkene har vært generøse nok til å sende meg eksemplarer av disse, noe jeg er veldig takknemlig for, da undersøkelsen ikke hadde vært mulig ellers på grunn av utsatte utgivelsesdatoer. Etter ønske fra Cappelen Damm er ikke bilder fra deres lærebøker inkludert i masteroppgaven. Dette er årsaken til at alle bildene i oppgaven er fra Aschehoug sine lærebøker.

Jeg må i tillegg få takke både ektemann, venner og familie som har holdt ut med meg i løpet av dette masterstudiet. Espen, som for to år siden oppmuntret meg til å gjøre det jeg hadde lyst til, selv om det innbar enda flere år med studier. Malene, Tonje og Maria for at dere alltid lytter til mine utfordringer, kommer med gode råd og for hjelp til korrekturlesing av oppgaven. Mamma og pappa for alle gode middager og for at dere alltid stiller opp når vi trenger hjelp med noe. Jeg hadde ikke klart dette uten alle dere og er veldig takknemlig for all hjelp og støtte.

Kristiansand, mai 2020

Heidi Marie Skregelid Tredal

Sammendrag

Temaet for denne oppgaven er problemløsing i lærebøker. Målet er blant annet å finne ut hvordan problemløsing og ulike strategier vektlegges i den gamle og den nye læreplanen og hvordan dette gjenspeiles i lærebøkene. Den overordnende problemstillingen i denne oppgaven er: *Hvordan legger lærebøker for 8.trinn i matematikk til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse?*

For å svare på denne problemstillingen har jeg gjennomført en innholdsanalyse av to matematikklærebøker fra Cappelen Damm og to fra Aschehoug for 8. trinn, hvorav én av bøkene fra hvert av forlagene er tilknyttet den gamle læreplanen i matematikk for grunnskolen MAT1-04 (2013) og én av bøkene fra hvert forlag er tilknyttet den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen MAT01-05 (2020), som vil innføres for åttende trinn fra august 2020.

Jeg har undersøkt utbredelsen av problemløsingsheuristikker i eksemplene i disse fire matematikklærebøkene. Heuristikker kan betegnes som tommelfingerregler man kan benytte seg av for enklere å kunne løse et problem. Fra rådende teori på området finner man at slike heuristikker er et viktig aspekt ved problemløsing og noe det egner seg å fokusere på når man skal undersøke lærebøker.

Undersøkelsen av lærebøkene ble gjennomført ved å benytte et analyseverktøy utviklet av Tom Rune Kongelf. Han utviklet dette analyseverktøyet i forbindelse med gjennomføringen av delstudie 1 i hans doktorgrad, hvor han undersøkte heuristikker i matematikklærebøker for 9. trinn. Dette analyseverktøyet består av ni kategorier med tilhørende underkategorier. Disse kategoriene er heuristikkene «se etter et mønster», «lag en systematisk tabell», «lag en visualisering», «gjett og sjekk», «løs deler av problemet», «jobb baklengs», «tenk på et lignende problem», «gjør problemet enklere» og «se problemet fra en annen side». I tillegg har jeg inkludert «bruk digitale hjelpemidler».

Ved undersøkelse av de to læreplanene i matematikk for grunnskolen fant jeg at de begge vektlegger problemløsing og bruken av ulike løsningsmetoder og strategier. Dette gjenspeiles til en viss grad i lærebøkene, ved at alle bøkene inneholder gjennomsnittlig minst to problemløsingsheuristikker per eksempel. Fordelingen og vektleggingen av heuristikkene er imidlertid noe ulik i de fire bøkene, men noen likheter blir observert. «Løs deler av problemet», «lag en visualisering» og «se problemet fra en annen side» er tre av de fire mest brukte heuristikkene i alle bøkene. Heuristikker som «gjett og sjekk», «jobb baklengs» og «gjør problemet enklere» er imidlertid lite eller aldri brukt i alle bøkene.

Summary

The theme of this assignment is problem solving in textbooks. The goal is, among other things, to find out how problem solving and different strategies are emphasized in the old and new curriculum and how this is reflected in the textbooks. The overall problem in this assignment is: *How do textbooks for the 8th level in mathematics facilitate the pupils' development of problem solving skills?*

To answer this question, I have conducted a content analysis of two math textbooks from Cappelen Damm and two from Aschehoug for 8th grade. One of the books from each of the publishers is associated with the old curriculum in mathematics and one of the books from each publisher is associated with the new curriculum, which will be introduced for 8th grade in August 2020.

I have explored the use of problem-solving heuristics in the examples in these four math textbooks. Heuristics can be referred to as “rules of thumb” that one can use to more easily solve a problem. From prevailing theory in the field, it is found that such heuristics are an important aspect of problem solving and something that is suitable to focus on when examining textbooks.

The study of the textbooks was carried out using an analysis tool developed by Tom Rune Kongelf. He developed this analysis tool as part of his Ph.D., where he examined heuristics in mathematics textbooks for 9th grade. This analysis tool consists of nine categories with associated subcategories. The categories are then the heuristics "look for a pattern", "make a systematic table", "make a visualization", "guess and check", "solve part of the problem", "work backwards", "think of a related problem", "simplify the problem" and "change your point of view". In addition, I have included "use digital tools".

When examining the old and new curriculum in mathematics for lower secondary school, I found that they both emphasize problem solving and the use of different solution methods and strategies. This can to some extent be reflected in the textbooks, in that all the books contained an average of at least two heuristic approaches per example. However, the distribution of the heuristics was somewhat different. "Solve part of the problem", "make a visualization" and "change your point of view" were found to be three of the four most commonly used heuristics in all books, while heuristics such as "guess and check", "work backwards" and "simplify the problem" was little or never used in all books.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Begrunnelse for valg av tema

I løpet av studiene har jeg vært utplassert i praksis på ungdomsskole og videregående skole. Jeg la merke til at lærebøkene i matematikk ble mye brukt, og syns også selv at det kunne være litt vanskelig å løsrive meg fra dem ved planlegging og gjennomføring av undervisning. Undersøkelser viser at læreboka fortsatt er læremiddelet som blir mest brukt i matematikkundervisningen (Gilje et al., 2016). Selv om det har blitt mer vanlig å bruke en kombinasjon av lærebok, digitale læremidler og andre verktøy, er det fortsatt papirbasert lærebok og kladdebok som dominerer i undervisningstimene (Gilje et al., 2016). I og med at lærebøkene blir mye brukt tenker jeg at det er viktig at det i disse legges til rette for at elevene har mulighet til å utvikle ulike kompetanser i matematikk, både for å forenkle lærerens forberedelser og for å formidle til elevene at flere kompetanser verdsettes. Jeg ønsker å se på hvordan det i lærebøker for ungdomstrinnet legges til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse. Jeg ønsker å fokusere på ungdomstrinnet da matematikkfaget her er felles for alle. Problemløsingskompetanse verdsettes i de fleste yrker og ellers i livet, og det er dermed viktig at alle elever opparbeider seg denne kompetansen, ikke bare dem som skal arbeide innenfor realfaglige yrker.

Begrunnelsene for at jeg ønsker å fokusere på hvordan det legges til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse i lærebøkene er mange. For det første legges det vekt på denne type kompetanse i både den gjeldende læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013) og i den reviderte som blir gjeldende fra høsten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020). I sistnevnte er ett av de nye kjerneelementene som skal gjennomsyre hele matematikkfaget nettopp *Utforsking og problemløsing* (Kunnskapsdepartementet, 2018). På Utdanningsdirektoratets sider ligger ressursen «Hva er nytt i matematikk» hvor det står spesifikt og uthevet at elevene skal bli gode problemløsere (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Dermed sendes et sterkt signal om hvor viktig problemløsing er og blir i matematikkundervisningen.

I tillegg blir det etterhvert lagt større vekt på matematikkens prosesser, og ikke bare produkter, i undervisningen (Skott, Jess & Hansen, 2013). Tradisjonelt sett har elevene arbeidet med en bestemt matematisk algoritme som på forhånd har blitt presentert og demonstrert av læreren. Ved bruk av kun en slik tradisjonell deduktiv undervisning i matematikk, frarøver man elevene innsikten og forståelsen de kunne fått ved å arbeide med selve prosessen og oppdagelsen av algoritmen (Skott et al., 2013). Ved å benytte seg av problemløsing i undervisningen kan elevene få en mer helhetlig opplevelse av hvordan matematikere arbeider.

Andre argumenter for å vektlegge problemløsing i matematikkundervisningen kan være elevenes motivasjon og holdninger til faget, for å styrke kreativitet og for å øke fokuset på samarbeid og refleksjon. Jeg vil komme tilbake til flere begrunnelser for hvorfor problemløsing og kompetanse innen dette er viktig senere i oppgaven (kapittel 3.1.4).

I studien min benytter jeg meg av en deduktiv innholdsanalyse, hvor jeg bruker et analyseverktøy utviklet av Tom Rune Kongelf (2019) i sammenheng med den første delstudien fra doktorgradsavhandlingen hans. Artikkelen fra denne ble først publisert i 2011.

Jeg benytter meg av publiseringen i en bok fra 2017. Dette analyseverktøyet blir brukt for å vurdere forekomsten av problemløsingsheuristikker i fire forskjellige lærebøker for åttende trinn. To av disse er tilpasset den gjeldende læreplanen i matematikk for grunnskolen MAT1-04 (2013), og to er nye lærebøker skrevet i forbindelse med læreplanfornyelsen og læreplanen MAT01-05 (2020).

1.2 Mål med studien

Som beskrevet over er det mange grunner til å undersøke hvordan problemløsing vektlegges i undervisning. Lærebøkene er som nevnt fortsatt mye brukt i norske klasserom og kan dermed sees på som et viktig moment i undervisningen. Det er dermed grunnlag for å undersøke hvordan lærebøker vektlegger problemløsing.

I denne studien vil målet være å finne ut hvordan forekomsten av ulike, kjente problemløsingsheuristikker er i lærebøker for 8. trinn, og om det er noen endring fra de gamle til de nye lærebøkene når det kommer til vektleggingen av disse. Med de nye kjerneelementene og kompetansemålene står problemløsingskompetanse sterkt i læreplanfornyelsen. Det blir dermed interessant å undersøke om dette gjenspeiles i lærebøkene.

Resultatene fra denne studien vil kunne være relevant informasjon for skoler, lærere og lærebokforfattere, og ikke minst gi meg som kommende lærer et godt grunnlag for å vurdere læremidler i fremtiden.

1.3 Kapitteloppbygging

I denne oppgaven følger først en presentasjon og beskrivelse av problemstilling og forskningsspørsmål under kapittel 2, deretter en gjennomgang av det teoretiske rammeverket og tidligere forskning på feltet under kapittel 3.
Så følger en gjennomgang av ulike typer lærebokforskning og metoden brukt i denne studien, sammen med en detaljert beskrivelse av analyseverktøyet og kodingen – alt dette under kapittel 4, metodekapittelet.
I kapittel 5 presenteres resultatene fra de to læreplanene som er undersøkt, de to eldre lærebøkene og deretter de to nye lærebøkene. Her blir det også presentert en sammenligning av fordelingen av de ulike heuristikkene i alle de fire lærebøkene.
I kapittel 6 følger en diskusjon av resultatene som har blitt presentert i kapittel 5. Dette gjøres blant annet gjennom en sammenligning av gammel og ny bok fra samme forlag.
Til slutt følger en avslutning som inneholder en konklusjon på problemstillingen, refleksjoner rundt studien og fremtidig forskning som kunne vært interessant i kapittel 7.

2 Problemstilling og forskningsspørsmål

I det følgende vil problemstillingen og tilhørende forskningsspørsmål bli presentert, samt en forklaring og begrunnelse av disse.

Problemstillingen er:
Hvordan legger lærebøker for 8.trinn i matematikk til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse?

Det jeg vil finne ut av her er med andre ord om problemløsing blir vektlagt i lærebøkene slik at det kan være med på å hjelpe elevene i deres utvikling av problemløsingskompetanse. Ved å gjennomføre en ren lærebokstudie kan jeg selvsagt ikke svare på om elever faktisk utvikler en slik kompetanse. Det jeg ønsker å finne ut av er i hvilken grad bøkene vektlegger problemløsing og dermed kan være en del av grunnlaget for elevenes mulighet til å utvikle problemløsingskompetanse. Når man skal gjennomføre en ren lærebokstudie kan det være mest hensiktsmessig å undersøke bruken av heuristikker, noe jeg vil komme tilbake til.

I og med at lærebøkene fortsatt blir mye brukt i undervisningen er det interessant å få et innblikk i hvordan det i disse legges til rette for at elevene skal bli bedre problemløsere. Problemløsingskompetanse er, i følge blant andre Niss og Jensen (2002), en viktig kompetanse i matematikkfaget. De har utviklet en beskrivelse av åtte kompetanser i matematikk, noe jeg vil komme nærmere inn på i kapittel 3.1.3. Denne kompetansemodellen har hatt sterk påvirkning på utviklingen av norske læreplaner (Botten, 2016), noe vi også ser i den reviderte læreplanen (2020) med de seks kjerneelementene. Dermed ønsker jeg å se på sammenhengen mellom lærerplanen i matematikk for grunnskolen fra revideringen i 2013 (MAT1-04) og lærebøkene som har vært brukt i tilknytning til denne, og å se på lærerplanrevideringen fra 2020 (MAT01-05) og lærebøker som har blitt utviklet i sammenheng med denne. Fornyelsen av læreplanen i 2020 er den største siden Kunnskapsløftet i 2006 (Kunnskapsdepartementet, 2018). I tillegg vil jeg sammenligne de gamle og nye lærebøkene fra samme forlag og se om det er noen endringer i forekomsten av problemløsingsheuristikker i eksemplene.
For å svare på problemstillingen har jeg utviklet noen forskningsspørsmål som mer konkret beskriver hvordan jeg skal gå frem for å gjøre dette. Disse er som følger:

- Hva sier den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen om problemløsing for åttende trinn, og hvordan gjenspeiles dette i lærebøkene?

- Hvilke problemløsingsheuristikker brukes, og hvordan er utbredelsen av disse, i eksemplene i de gamle og de nye matematikklærebøkene for åttende trinn?

Jeg skal med andre ord fokusere på eksemplene i lærebøkene utviklet for åttende trinn på ungdomsskolen. Dette gjøres med sterk inspirasjon fra Kongelf sin doktorgradsstudie (2019), hvor han i delstudie 1 fra 2011 så på problemløsingsheuristikker i eksemplene tilhørende alle kapitlene i seks forskjellige lærebøker for 9.trinn. I tillegg ønsker jeg å se på hvordan den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen tar for seg problemløsing og problemløsingsheuristikker, og likheter og ulikheter mellom disse.

3 Teori

I denne delen av oppgaven vil jeg gå nærmere inn på det teoretiske rammeverket for studien min og relevante aspekter innenfor problemløsing, undervisning i dette og tidligere lærebokanalyser innenfor temaet.

3.1 Teoretisk rammeverk

3.1.1 Lærebok

En lærebok er et læremiddel som er en del av et læreverk. Et læremiddel er noe som brukes som en del av undervisningen og for å nå bestemte mål i denne (Grepperud & Skrøvset, 2012). Dette kan være nettsider, bøker, oppgaveark utformet av læreren, naturen utenfor skolen, en kalkulator osv. Et læreverk er betegnelsen på alt som er inkludert av lærerveiledninger, elevbøker, oppgavehefter, digitale ressurser og lignende i en serie. Dette kan for eksempel være Cappelen Damm sin serie Faktor (Hjardar & Pedersen) for 8-10. trinn, hvor det finnes tilhørende grunnbok, oppgavebok, alternativ oppgavebok, lærerens bok, lærernettsted med terminprøver, eksamensforberedende hefte, regelhefte, fordypningshefte og fagnettsted (Cappelen Damm Undervisning, u.å.a). Her blir det da det som kalles grunnbok som er læremiddelet jeg vil analysere. Dette er en bok elevene har tilgjengelig, som inneholder både tekst, eksempler og oppgaver i hvert kapittel. Lærebøker kan defineres som å være «bøker som med utgangspunkt i skolens læreplaner er skrevet for elever og undervisning» (Grepperud & Skrøvset, 2012, s. 225). Dermed er det som defineres som en lærebok, og det jeg skal fokusere på i denne studien, altså boken som er ment for elevene. Denne kan være både i fysisk bokform og digital. Lærebokøkene Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2019) har jeg eksempelvis kun sett på som digitale versjoner, da disse ikke var på universitetets bibliotek og de digitale versjonene er identiske med dem i bokform, utenom at de har noen forklaringsvideoer inkludert underveis. Disse videoene inngår uansett ikke i analysen, og jeg anser det derfor som irrelevant at jeg benytter den digitale versjonen av disse lærebøkene, og ikke de fysiske bokutgavene.

Mange lærebøker i matematikk følger samme oppbygning, med en introduksjon og forklaring, etterfulgt av eksempler og til slutt oppgaver i hvert kapittel/delkapittel. Denne tradisjonelle oppbygningen kan kalles for «the exposition-examples-exercise model» (Love & Pimm, 1996, s. 386). Dette er ofte en repeterende syklus i matematikklærebøker (Love & Pimm, 1996). Dette gjelder også i mange norske lærebøker i matematikk (Kongelf, 2019) og kan påvirke innholdet av heuristikker, noe vi vil se senere.

3.1.2 Eksempel

I denne studien fokuseres det på eksemplene i lærebøkene. Dette betyr at det som inkluderes i studien er oppgaver som blir presentert med en løsning underveis i kapitlene i de utvalgte lærebøkene. Disse er merket og uthevet som eksempler underveis i teksten. Et eksempel defineres i Store norske leksikon som et «einskilt tilfelle eller forhold som blir brukt til å kaste lys over ein ålmenn regel; òg: tilfelle, forhold som kan tene til mønster eller åtvaring» (Nordbø, 2018). Med andre ord kan et eksempel i en lærebok være noe som skal demonstrere eller belyse en bestemt regel, et tilfelle eller et mønster innenfor det bestemte faget og temaet.

Kongelf skriver at han «tolker et eksempel som en måte å hjelpe noen til å forstå noe gjennom å vise hvordan det blir brukt, hvor bruken er typisk for det det er en del av» (Kongelf, 2019, s. 35). Forskning har vist at elever og studenter oftest benytter seg av uthevet tekst i lærebøkene når de skal løse matematikkoppgaver eller prøve å forstå noe (Kongelf, 2019). Dermed blir uthevede eksempler i teksten og innholdet i disse spesielt viktige å undersøke når man skal vurdere hvilke kompetanser elevene potensielt kan sitte igjen med etter å ha brukt en bestemt lærebok.

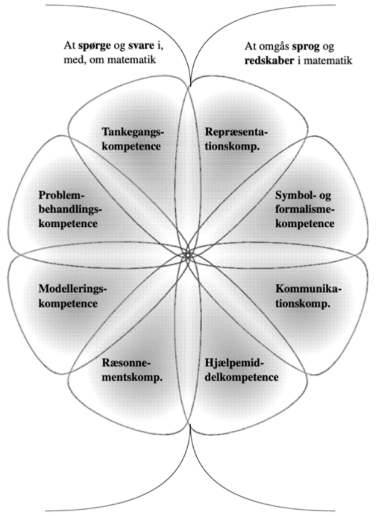
3.1.3 Kompetanse i matematikk

I KOM-prosjektet i Danmark på begynnelsen av 2000-tallet ble kompetansebegrepet i matematikk belyst. Prosjektet ble ledet av Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen. Geir Botten poengterer i boken «Matematikk med mening – mening for alle» at dette prosjektet også har blitt viktig for matematikkundervisningen i Norge (Botten, 2016). I rapporten *«Kompetencer og matematikklæring»* (Niss og Jensen, 2002) som kom ut av prosjektet blir kompetanse i matematikk beskrevet som dette:

> *matematisk kompetence* består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematik- virksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger.
> (Niss & Jensen, 2002, s. 43)

Med andre ord definerer de matematisk kompetanse som noe som innebærer å kunne bruke matematikk i forskjellige sammenhenger hvor matematikk er et nyttig verktøy. Det innebærer også å kunne vurdere når og hvordan man kan bruke matematikk i de ulike sammenhengene. I tillegg blir det i rapporten presentert åtte delkompetanser i matematikk som henger sammen og påvirkes av hverandre. Disse blir ofte presentert som en blomst (se figur 1) hvor bladene overlapper hverandre for å illustrere sammenhengen.

Disse åtte delkompetansene er tankegangskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse, hjelpemiddelkompetanse, resonnementskompetanse, modelleringskompetanse og problembehandlingskompetanse. Sistnevnte beskrives i rapporten som evnen til å formulere og løse matematiske problemer (Niss & Jensen, 2002). Kongelf (2019) poengterer i tillegg at de åtte delkompetansene i Niss og Jensen (2002) sin rapport har tydelig sammenheng med de grunnleggende ferdighetene i læreplanen.



Figur 1: De åtte delkompetansene. Fra «Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark» av M. Niss & T. H. Jensen, 2002, Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, 18, s.45. Roskilde Universitetscenter.

Botten poengterer at kompetansebegrepet til Niss og Jensen ikke inneholder aspekter som elevers følelser, holdninger og lignende (Botten, 2016), noe som også beskrives i rapporten (Niss & Jensen, 2002).

Ofte blir Kilpatrick m.fl. (2001) sitt profiency- begrep benyttet når det er snakk om matematikkompetanse, da dette inneholder holdninger til faget i tillegg (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Kilpatrick m.fl. (2001) sitt profiency- begrep inneholder fem komponenter som veves sammen og er avhengige av hverandre. Disse er oversatt av Botten (2016) til «fleksibel tenking», «strategisk kompetanse», «begrepsforståelse», «produktiv holdning» og «prosedyrekunnskap» (Botten, 2016, s. 62). I Kilpatrick sin modell kan blant annet strategisk kompetanse knyttes til problemløsing, da Botten beskriver at dette innebærer «evnen til å formulere, representere, løse og vurdere løsningen av matematiske problem» (Botten, 2016, s. 62). I min studie velger jeg allikevel å benytte meg av Niss & Jensen (2002) sitt kompetansebegrep, da jeg gjennomfører en ren lærebokstudie og elever og deres holdninger til faget ikke inkluderes i studien.

3.1.4 Kompetansebegrepet i læreplanene

Både den gjeldende læreplanen og den reviderte er kompetansebaserte (Utdanningsdirektoratet, 2016). Det vil si at det legges vekt på hvilke kompetanser elevene sitter igjen med etter endt utdanning. I den gjeldende læreplanen defineres kompetanse slik:

«Evnen til å løse oppgaver og mestre komplekse utfordringer. Elevene viser kompetanse i konkrete situasjoner ved å bruke kunnskaper og ferdigheter til å løse oppgaver. Det kan handle om å mestre utfordringer på konkrete områder innenfor utdanning, yrke og samfunnsliv eller på det personlige plan.» (Utdanningsdirektoratet, 2016)

I den reviderte læreplanen som blir gjeldende fra høsten 2020 fornyes kompetansebegrepet. Nå lyder definisjonen slik:

«Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.» (Kunnskapsdepartementet, 2020)

Ut ifra disse to definisjonene av kompetansebegrepet kan det se ut til at det i læreplanfornyelsen fokuseres mer på å kunne bruke det man har lært til å løse problemer man ikke tidligere har erfaring med. Det er i tillegg poengtert at kompetansebegrepet innebærer forståelse og evne til kritisk tenkning, noe som ikke er nevnt i den gjeldende læreplanens definisjon av kompetansebegrepet.

I den førstnevnte definisjonen av kompetansebegrepet fra læreplanene legges det omtrent kun vekt på ferdighetsaspektet fra Niss & Jensen (2002) sin beskrivelse av kompetanse, mens det i sistnevnte i tillegg inkluderes forståelse. Niss & Jensen (2002) inkluderer også evnen til å bruke matematikk og matematikkunnskap i et mangfold av sammenhenger, noe som reflekteres i LK06 ved at man skal «mestre utfordringer på konkrete områder innenfor utdanning, yrke og samfunnsliv eller på det personlige plan» (Utdanningsdirektoratet, 2016), mens det i LK20 legges mer vekt på at dette kan være både kjente og ukjente sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2020). I denne sistnevnte trekkes også evnen til refleksjon og kritisk tenkning inn, noe som kan knyttes til Kilpatrick m.fl. (2001) sitt profiency- begrep og komponenten *Fleksibel tenking.* Denne beskrives av Botten som følgende: «Fleksibel tenking handler om evne til å tenke logisk, reflektere, forklare og vurdere sannhetsverdien av en påstand, et argument eller et resultat.» (Botten, 2016, s. 62)

Kompetansebegrepet og definisjonen av dette er med andre ord endret endel fra LK06 til LK20, hvor det tidligere har vært størst fokus på å kunne løse oppgaver, til å nå inkludere at elevene er i stand til å opparbeide seg ferdigheter og forståelse, og å tenke kritisk. Fra definisjonen tilhørende LK06 kunne man da vurdere om elevene hadde matematisk kompetanse ut ifra om de var i stand til å løse oppgaver. I fagfornyelsen er det spesifisert at kompetanse innebærer å løse oppgaver i både kjente og ukjente sammenhenger.

I tillegg kommer det frem hva som legges i begrepene kunnskap og ferdigheter i den reviderte læreplanen: «Kunnskap innebærer å kjenne til og forstå fakta, begreper, teorier, ideer og sammenhenger innenfor ulike fagområder og temaer. Ferdigheter er å beherske handlinger eller prosedyrer for å utføre oppgaver eller løse problemer, og omfatter blant annet motoriske, praktiske, kognitive, sosiale, kreative og språklige ferdigheter.» (Kunnskapsdepartementet, 2020). Dette har en sterk kobling til problemløsingskompetanse og bruk av ulike og varierte løsningsmetoder og -strategier, som vil være i fokus i denne oppgaven.

3.1.5 Problemløsingskompetanse

For å analysere lærebøkene for muligheter og hvordan de tilrettelegger for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse trenger man en definisjon av problemløsingskompetanse. Mona Røsseland definerer det, i tråd med Niss og Højgaard Jensen (2002), som evnen til å «finne og formulere matematiske problemstillinger, kunne løse matematiske problemstillinger og etter hvert også kunne løse dem på forskjellige måter» (Røsseland, 2005, s. 51). Dermed vil kompetansen innebære at elevene klarer å stille spørsmål og undersøke disse, opparbeide seg strategier for å løse nye problemer og reflektere over forskjellige løsningsstrategier.
I følge Kongelf (2019) betyr problemløsingskompetanse å kunne løse matematiske problemer, å kunne benytte seg av ulike løsningsmetoder og å forstå disse og andres løsninger av problemer. Når man kun skal undersøke eksemplene i lærebøker og ikke inkluderer elevers matematiske arbeid, blir det vanskelig å vurdere om elever faktisk utvikler problemløsingskompetanse ut ifra disse. Det man derimot kan undersøke er om lærebøkene vektlegger bruk av flere ulike løsningsstrategier i form av heuristikkene jeg skal undersøke.

Mason og Davis legger i sin utgivelse *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving* fra 1991 vekt på at elevene kan øves opp i å spesialisere problemene, fremstille hypoteser, utvide problemer og generalisere når de arbeider med problemløsingsoppgaver (Mason & Davis, 1991). Spesialisering kan for eksempel gjøres ved å teste med noen spesifikke verdier eller lage visualiseringer. Man kan se etter et mønster i spesialiseringen for å generalisere. Både «lag en visualisering» og «se etter et mønster» er heuristikker som er inkludert i denne studien, og som altså kan være nyttige momenter av Mason & Davis (1991) sin problemløsingsprosess. Denne kan sammenlignes med Polya sine fire kjente faser innen problemløsing; å forstå og tolke problemet, utarbeide en plan for å løse problemet, gjennomføre den utarbeidete planen og til sist se tilbake, reflektere og eventuelt endre denne planen (Polya, 1990). Polya (1990) nevner også spesialisering og generalisering som viktige elementer i problemløsing. Han vektlegger i tillegg mer konkrete problemløsingsheuristikker i sin kjente utgivelse *How to solve it* fra 1945 (Polya, 1990), noe jeg vil komme tilbake til.

Dermed ser vi at problemløsingskompetanse innebærer å kunne opparbeide seg og bruke ulike strategier for å løse problemer, vurdere hvilke løsningsmetoder som egner seg best i forskjellige situasjoner, reflektere over strategier og løsninger og å kunne bruke kjente løsningsmetoder eller resultater i nye situasjoner. Det blir derfor viktig å se på om lærebøkene vektlegger bruk av flere ulike metoder og strategier i eksemplene og om bruken av disse vurderes og forklares.

3.1.6 Problem og problemløsing

Kongelf poengterer at «det ikke eksisterer en felles forståelse av hva matematisk problemløsing er» (Kongelf, 2019, s. 24). Det finnes altså flere syn på hva et problem og problemløsing i matematikk er. I dette avsnittet skal jeg gå nærmere inn på noen av disse.

I løpet av åttitallet ble andre elementer enn kun regelpugging vektlagt mer enn tidligere i matematikkfaget rundt om i verden. I utgivelsen *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics* av Alan H. Schoenfeld fra 1992 er det poengtert at elever må få utforske i matematikken, ikke kun lære seg regler (Schoenfeld, 1992). Elevene må få utforske mønstre, fremstille hypoteser og søke løsninger på andre måter enn kun ved bruk av en gitt prosedyre (Schoenfeld, 1992). I Norge ble fokuset tydelig gjennom Mønsterplanen for grunnskolen fra 1987, M-87 (Botten, 2016). I denne kom problemløsing for første gang som et eget hovedemne i matematikkfaget og det poengteres at arbeid med problemløsingsoppgaver vil gi motivasjon og stimulere kreativitet hos elevene (Botten, 2016).

Synet på hva et problem er kan i hovedsak deles opp i to ulike grener, beskriver Schoenfeld i sin tidligere nevnte artikkel fra 1992. For det første kan man se på et problem som en oppgave som skal løses, uansett vanskelighetsgrad (Schoenfeld, 1992). Altså inkludert det vi ser på som tradisjonelle oppgaver i matematikkfaget. For det andre kan man se på et problem som et mer komplekst spørsmål, hvor man ikke har en løsningsmetode for hånden (Schoenfeld, 1992).

Røsseland beskriver også et problem i matematikken som en oppgave hvor eleven ikke vet fra før av, eller har fått oppgitt, hvilken metode som kan brukes for å løse den (Røsseland, 2005), altså i tråd med Schoenfelds andre definisjon beskrevet over. Rutineoppgaver, hvor elevene kan følge en oppskrift for å løse oppgavene, regnes ikke tradisjonelt som matematiske problemløsingsoppgaver (Røsseland, 2005). Et annet kjennetegn ved problemløsingsoppgaver er at elevene føler et ønske eller behov for å løse dem (Botten, 2016). Det er dermed individuelt om en oppgave kan regnes som et problem. Noe som for én elev kan oppleves som en problemløsingsoppgave etter denne definisjonen, altså at man ikke har en løsningsmetode for hånden, kan være en rutineoppgave for en annen (Botten, 2016). Niss & Jensen poengterer også i sin rapport at såkalte rutineoppgaver, eller oppgaver hvor det ikke er behov for en matematisk undersøkelse, ikke defineres som matematiske problemer (Niss & Jensen, 2002). Hva som er et problem blir dermed etter deres definisjon også bestemt av personen som skal løse det. Det essensielle i denne definisjonen av et problem er dermed at eleven møter et problem som ser interessant ut å løse – det må trigge nysgjerrigheten, hvor det ikke blir presentert en metode for å løse problemet og eleven ikke har løst en mer eller mindre lik oppgave tidligere. Denne definisjonen ser også ut til å være gjeldende i den reviderte læreplanen. I Matematikkrådets presentasjon står det blant annet «Problemløsing handler om at elevene utvikler løsningsmetoder på et problem de ikke kjenner fra før» (Matematikkrådet, 2018). Her poengteres det at elevene ved hjelp av undervisning i og med problemløsing kan trenes i, og utvikle, mange nyttige matematiske ferdigheter. Blant annet å kunne utvikle egne løsningsstrategier og tålmodighet, og å få muligheten til å være nysgjerrige og systematiske (Matematikkrådet, 2018).

Når man skal undersøke lærebøker og deres innhold – uten å se på bruken av disse, blir det vanskelig å benytte seg av definisjonen av et problem slik som beskrevet i avsnittet over. Kongelf (2019) og Fan og Zhu (2007) poengterer dette og viser til en mer passende definisjon av begrepet problem. Denne er «a situation that requires a decision and/or answer, no matter if the approach of solution is readily available or not to the problem solver» (Kongelf, 2017, s. 161), likt med den første definisjonen fra Schoenfelds nevnte artikkel over. Dermed kan man ved å bruke denne definisjonen benytte seg av analyseverktøyet utviklet av Kongelf (2017) for å vurdere alle typer oppgaver. Da kan man se på omfanget av problemløsingsheuristikker i lærebøkene, uavhengig av om oppgaven kan defineres som et problem eller ikke etter den mer tradisjonelle definisjonen av et problem. Med andre ord så trenger man ikke å vurdere om oppgaven er en problemløsingsoppgave eller ei for å inkludere den i analysen, noe som uansett ville blitt vanskelig da det som nevnt er individuelt om en oppgave kan defineres som et problem eller ikke etter den mer tradisjonelle definisjonen. Det er både fordeler og ulemper ved å benytte seg av denne typisk lærerbokvennlige definisjonen av et problem. Man får ikke luket bort eksempler hvor det faktisk ikke er behov for en matematisk undersøkelse for å komme fram til løsningen. Alle typer eksempler inkluderes, også dem som tradisjonelt betegnes som rutineoppgaver. Dermed får man ikke nødvendigvis fram bruken av kreativitet og undersøkelsesmomenter i lærebøkene ved å benytte seg av denne definisjonen. Det man derimot har muligheten til å få fram er hvilke løsningsstrategier som vektlegges i eksemplene i lærebøkene, uavhengig av vanskelighetsgrad og kompleksitet. Forskning har vist at elever i hovedsak benytter seg av uthevet tekst, som eksempler, når de bruker matematikklærebøker (Kongelf, 2019). Dermed er det viktig å legge vekt på hvilke strategier som formidles som viktige i eksemplene, fordi det kan være nettopp disse strategiene elevene sitter igjen med. Ved å inkludere alle eksempler får jeg med hvor ofte det demonstreres mer eller mindre nyttige momenter av problemløsingsheuristikker. Om det for eksempel i de fleste eksempler som inneholder en tabell eller visualisering er direkte etterspurt i oppgaveteksten, kan elevene kanskje få inntrykk av at dette er noe som benyttes kun når oppgaven direkte spør etter det. Om det derimot er benyttet tabeller eller visualiseringer som en del av løsningsprosessen, når det ikke er etterspurt, kan elevene kanskje i stedet få inntrykk av at dette faktisk er nyttige redskaper de kan benytte seg av når de skal løse andre problemer i fremtiden.

3.2 Mer om problemløsing

3.2.1 Problemløsingsteknikker og -prosesser

Polya og Schoenfeld er to navn som ofte dukker opp når det snakkes om problemløsing. Polya kom i 1945 med sin kjente utgivelse *How to solve it* (1990), hvor problemløsing og alt det innebærer virkelig ble satt på agendaen. Schoenfeld beskriver denne utgivelsen som «an attempt to revive heuristic in modern and modest form, offering what might be considered a guide to useful problem-solving techniques» (Schoenfeld, 1985, s. 23). Schoenfeld (1985) poengterer at studien av heuristikker inntil utgivelsen av *How to solve it* i 1945 var så godt som glemt. Dermed kan Polya sees på som den moderne problemløsingens far og er dermed fortsatt aktuell å trekke frem når det kommer til problemløsingsteknikker og heuristikker.

Polyas guide til problemløsingsteknikker presenteres i en kjent firetrinnsmodell. Denne inneholder de fire følgende, overordnede fasene i en problemløsingsprosess:

1. *Forstå problemet.*
2. *Lag en plan.*
3. *Utfør planen*.
4. *Se tilbake.*

   (Polya, 1990)

Under hver av disse fasene er det nevnt flere strategier som kan benyttes underveis, blant annet å tegne en figur, tenke på lignende problemer du har løst tidligere eller teorem du kan bruke, se problemet fra en annen side eller forenkle problemet (Polya, 1990).

Schoenfeld (1985) er inspirert av Polyas studie av heuristikker og har undersøkt hvordan studenter og matematikere går frem når de skal løse problemer, hvor da problemer er definert som oppgaver de ikke har løst tidligere og hvor de ikke har en løsningsmetode for hånden. Han kommer da frem til fire hovedpunkter som er viktige for en problemløser. Disse kaller han «*resources», «heuristics», «control*» og «*belief systems»* (Schoenfeld, 1985, s. 15). *Resources* beskriver han som den matematiske kunnskapen problemløseren innehar og kan benytte seg av i problemløsingsprosessen, altså forståelse av, og kunnskap om, fakta, algoritmer og andre fremgangsmåter innenfor området problemet tilhører. *Heuristics* beskrives som: «Strategies and techniques for making progress on unfamiliar or nonstandard problems; rules of thumb for effective problem solving, including drawing figures; introducing suitable notation, exploiting related problems, reformulating problems; working backwards, testing and verification procedures» (Schoenfeld, 1985, s. 15).
Control refererer til planlegging, avgjørelser i forhold til løsningsprosessen og valg av strategier, vurdering og overvåking av disse valgene (Schoenfeld, 1985). *Belief systems* handler om holdninger og hvordan dette påvirker et individs handlinger (Schoenfeld, 1985).

I min studie blir det da punkt nummer to, nemlig heuristikker, som blir viktig. Dette fordi elever, problemløsere, ikke er inkludert i studien og det kun blir undersøkt hvilke heuristikker som vektlegges, og dermed formidles som viktige, i lærebøkene. Schoenfeld (1985) poengterer at slike strategier kan undervises i og læres. Da han leste Polyas *How to solve it* fra 1945 oppdaget han at mange av heuristikkene som ble gjennomgått var strategier han hadde opparbeidet seg og benyttet seg av selv (Schoenfeld, 1985). Han ble da interessert i å finne ut hvordan man kunne undervise og lære studenter opp i å bruke heuristikker, slik at de ikke trenger å «oppdage» dem på egenhånd, slik han hadde brukt mye tid på å gjøre (Schoenfeld, 1985).

3.2.2 Problemløsingsheuristikker

En heuristikk defineres i Store Norske Leksikon som «en enkel fremgangsmåte eller strategi som en problemløser kan ta i bruk for å øke sjansen til å løse en oppgave» (Teigen, 2019). Kongelf (2017) definerer, i likhet med Store norske leksikon, heuristiske tilnærmingsmåter som: «rules of thumb for successfully solving problems, general approaches that help an individual to understand a problem better and/or to make progress towards its solutions» (Kongelf, 2017, s. 162). Han poengterer at han i denne definisjonen inkluderer den typisk lærerbokvennlige definisjonen av begrepet problem (Kongelf, 2017), i motsetning til Schoenfeld (1985) sin definisjon over.

Polya beskriver i *How to solve it* «the studie of heuristic» (Polya, 1990, s. 130). Dette innebærer, ifølge Polya, å forsøke å forstå problemløsingsprosessen og hvilke operasjoner som kan inngå i denne, og da spesielt de mentale operasjonene som er nyttige i en problemløsingsprosess (Polya, 1990). Han skriver også at: «It is emphasized that all sorts of problems, especially practical problems, and even puzzles, are within the scope of heuristic … Heuristic discusses human behavior in the face of problems» (Polya, 1990, s. 132) Polya bruker «heuristic approaches» om mentale strategier som kan benyttes i problemløsingsprosessen (Polya, 1990). Kongelf oversetter dette til heuristiske tilnærmingsmåter eller kun heuristikker (Kongelf, 2019)*,* noe jeg også bruker. Polya har detaljerte eksempler og beskrivelser av ulike heuristiske tilnærmingsmåter. Noen av disse er «think of a related problem», «draw a figure», «restate the problem» og «work backwards» (Polya, 1990). Dette er eksempler på slike mentale operasjoner, eller *heuristic approaches,* man kan benytte seg av når man skal forsøke å løse alle typer problem (Polya, 1990). Vurderingen og valg av problemløsingsheuristikk faller inn under det andre trinnet i Polyas kanskje mer kjente firetrinnsprosess innen problemløsing. Det er ofte disse fire stegene som trekkes fram når det kommer til Polya og problemløsing i undervisning, mens Polyas heuristikker kanskje er mer tilgjengelige for matematikere eller eldre studenter. Schoenfeld (1985) mener at *heuristics* som beskrevet at Polya (1990) er for avansert for barn og ungdom. Dermed foregår hans forskning på problemløsing på universitetsnivå (Schoenfeld, 1985). Men fundamentet for å kunne benytte seg av heuristikker i problemløsing som de er beskrevet av Polya bør legges underveis i hele matematikkutdanningsløpet (Schoenfeld, 1985). Yngre elever kan også ha glede av heuristikker i matematisk problemløsing, ved at de kan gjenkjenne og kopiere bruken av slike (Schoenfeld, 1985; Kongelf, 2017). Schoenfeld poengterer også at «the foundation for using such strategies can and should be established during the whole of a student´s mathematical career. Indeed, if such groundwork was routinely done, much of the essentially remedial work I am compelled to do at college level would be unnecessary» (Schoenfeld, 1985, s. 75). Ved trening og undervisning i bruk av heuristikker kan altså elever på ungdomsskolenivå ha nytte av disse. Kongelf (2017) har derfor tilpasset utvalget av heuristikker og beskrivelsene av disse i sin forskning til ungdomsskolenivå. Dette har han gjort med utgangspunkt i en litteraturgjennomgang av blant annet Polya (1990) og Fan & Zhu (2007) og en prøveanalyse (Kongelf, 2017). Han endte da til slutt opp med ni heuristiske tilnærmingsmåter, nemlig «look for a pattern», «make a systematic table», «make a visualisation», «guess and check», «solve part of the problem», «work backwards», «think of a related problem», «simplify the problem» og «change your point of view» (Kongelf, 2017, s. 163).

Kongelf (2019) beskriver at begrepene metode, strategi, heuristisk tilnærmingsmåte og heuristikk brukes litt om hverandre i problemløsingslitteraturen. Jeg velger å bruke begrepet metode om spesifikke løsningsmetoder, som for eksempel multiplikasjonsalgoritmen eller lignende, mens strategi og heuristikk brukes mer synonymt. Kongelf (2019) beskriver at han inspirert av Schoenfeld (1985) mener noe først kan kalles for en strategi når en problemløser har opparbeidet seg og kan bruke en metode bevisst på egenhånd. I og med at det ikke inkluderes elever eller andre problemløsere i min studie tenker jeg på strategi og heuristikk som noe av det samme.

3.2.3 Undervisning i problemløsing og utvikling av problemløsningskompetanse

Som nevnt over var Schoenfeld (1985) interessert i å finne ut hvordan man kunne undervise studenter i problemløsing og heuristikker. Mason & Davis (1991) kommer med konkrete tips for hvordan man kan gjøre dette for yngre elever. Selv om disse utgivelsene er av relativt eldre dato, er de fortsatt relevante i dag. Det tar tid før man ser påvirkningen forskning har på undervisning i skolen, og disse konkrete undervisningsspesifikke tipsene har kanskje enda ikke sett dagens lys mange steder.

Mason & Davis (1991) legger vekt på både klassemiljø og lærerens rolle når det kommer til undervisning i problemløsing. Det er lærerens oppgave å skape et positivt og støttende miljø, som igjen kan føre til at flere elever føler seg trygge nok til å dele sine ufullstendige tanker med klassen (Mason & Davis, 1991). Det er en viktig del av problemløsningsprosessen å forsøke å forklare tankene sine til medelever og lærer, og dermed må man som lærer vise at man verdsetter dette – og ikke bare korrekte svar. Mason og Davis (1991) beskriver hvordan man kan skape et slikt klasseromsmiljø, eller «conjecturing athmosphere» som de kaller det. Dette kan gjøres ved å legge vekt på at alt som blir sagt av lærer og elever blir sagt som hypoteser som kan vurderes, modifiseres eller avvises (Mason & Davis, 1991). Tålmodighet hos både lærer og medelever er viktig når en elev skal forklare sine ufullstendige tanker. Her er det også mulighet til å oppdage hvor i tankeprosessen elevene eventuelt har trådd feil. Som lærer må man i tillegg være villig til å la elevene modifisere det du selv har sagt, å ikke alltid vite svaret på forhånd og å være åpen for nye ideer og løsningsmetoder (Mason & Davis, 1991).

Mason & Davis (1991) har i tillegg helt konkrete tips for hvordan man som lærer kan gjennomføre problemløsningsundervisningen. Når elevene kommer med forslag til hypoteser eller løsningsmetoder, burde man skrive dem opp på tavla uten å knytte dem til bestemte elever. Altså ikke føre opp navnene til dem som har kommet med forslagene, da dette kan føre til konkurranse i klassen. I tillegg kan elevene som har kommet med forslag som forkastes miste selvtilliten og ikke ønske å bidra med forslag senere om disse forslagene er direkte knyttet til dem. Man gir elevene mulighet til å endre mening underveis i prosessen ved å ikke «binde» dem til deres opprinnelige forslag. Hvis man oppnår et mer støttende enn konkurrerende læringsmiljø i klasserommet, vil flere elever enn dem som vanligvis er muntlig aktive i timene bidra. (Mason & Davis, 1991).

Elevene må lære seg å arbeide utforskende og ikke få utgitt en oppskrift på alle oppgaver de skal løse. Men det nytter ikke å levere ut en problemløsningsoppgave og forvente at elevene har gode strategier for å komme frem til en løsningsmetode uten at de har blitt undervist i hvordan man kan bruke ulike problemløsingsheuristikker.

Mason & Davis (1991) sin problemløsningsprosess går ut på at man spesialiserer problemet ved hjelp av for eksempel å lage et diagram eller en tegning, kommer med kvalifiserte gjetninger eller hypoteser for hva som vil være utfallet, prøver å overbevise andre om at hypotesen din er rett ved å prøve å bevise den, og å prøve å generalisere problemet. Det er med andre ord fokus på å arbeide på en utforskende måte, men med klare rammer. Dermed har elevene frihet, men vet også hvordan de kan gå frem for å løse problemene.

Det er viktig at elevene får undervisning spesifikt rettet mot problemløsing og heuristikker, og hvordan de kan gå fram for å løse problemer. Schoenfeld (1985) mener som nevnt tidligere at problemløsingsheuristikker er noe som kan læres om det eksplisitt vektlegges i undervisningen, slik at ikke studenter må bruke mange år på å oppdage slike på egenhånd. Men en adskilt presentasjon av problemløsingsheuristikker, enten av lærer i matematikktimene eller i læreboken, kan også føre til at elevene ser på de ulike strategiene eller metodene som regler innenfor problemløsing (Fan & Zhu, 2007). Det er dermed viktig at det blir poengtert at disse heuristikkene kun er strategier man kan vurdere om er hensiktsmessig å benytte seg av for å løse et problem. Et viktig aspekt innen problemløsing er jo nemlig å kunne vurdere hvilke strategier som er hensiktsmessig å benytte seg av i en gitt situasjon.

For å bli en god problemløser kreves det trening i å bruke ulike heuristikker i løsningsprosessen i mange ulike type problemer (Polya, 1990). I Kongelf (2017) sin studie kommer det frem at eksemplene i matematikkbøker for niende trinn er fulle av heuristikker, men at disse ikke nevnes eksplisitt. Dette går imot Schoenfeld (1985) med flere sin anbefaling. Kongelf (2017) poengterer at det i eksemplene enkelt kunne vært inkludert en beskrivelse av hvilke heuristikker som blir benyttet og hvorfor. Dermed blir det interessant å se om det i kjølvannet av Kongelf sin studie er lagt mer vekt på å eksplisitt nevne hvilke heuristikker som brukes i eksemplene i de nye lærebøkene tilpasset læreplanfornyelsen.
I denne studien skal det ikke undersøkes hvordan man best mulig kan legge opp undervisningen for å bedre elevenes problemløsningskompetanse, da dette er en ren lærebokanalyse. Det er derimot viktig å være klar over hva som kjennetegner god undervisning i problemløsing, da lærebøkene også kan oppmuntre til dette ved bruk av ulike problemløsingsheuristikker i eksemplene. Fan & Zhu (2007) poengterer at for at elevene ikke skal se på de ulike problemløsingsheuristikkene som uavhengige regler innenfor problemløsing, er det hensiktsmessig at disse implementeres i alle de ulike matematiske temaene i bøkene. I deres studie fant de at det i noen av matematikklærebøkene fra Singapore ble introdusert spesifikke problemløsingsheuristikker separat fra andre temaer, noe de ikke vil anbefale (Fan & Zhu, 2007). Dermed kan man ved å studere eksemplene i lærebøkene finne ut om det generelt benyttes problemløsingsheuristikker, uavhengig av tema eller vanskelighetsgrad på oppgaven.

3.1.4 Hvorfor er problemløsing viktig?

Som tidligere nevnt er det mange argumenter for å fokusere på problemløsing i undervisningen. Ved å fokusere på mentale operasjoner elevene kan benytte seg av for å løse vanskelige eller nye problemer i undervisningen, altså heuristikker, kan elevene trene opp noe annet enn ved å utføre rene rutineoppgaver hvor de bruker en gitt algoritme eller oppskrift. Dette er også ferdigheter elevene får bruk for senere i livet og som etterspørres i arbeidslivet. I utredningen «Fremtidens skole» er det blitt lagt frem kompetanser som forskning viser at vil være viktige å inneha i fremtiden (NOU 2015:8). Dermed er det grunnlag for å fokusere undervisningen i nåtidens skole på disse kompetansene som elevene vil ha nytte av å ha opparbeidet seg før de skal ut i arbeidslivet. Her nevnes problemløsningsevne som viktig. Dette innebærer å opparbeide seg metoder og tenkemåter for å kunne løse alle typer problemer, både teoretiske, praktiske, hverdagslige og faglige (NOU 2015:8). Dermed er det viktig at elevene får mulighet til å opparbeide seg strategier, som heuristikkene det skal undersøkes omfanget av i denne studien, for å løse nye og ulike type problemer.

Å arbeide med problemløsingsaktiviteter er ofte mer tidkrevende og blir kanskje derfor ikke prioritert. Ved å vektlegge problemløsing i matematikkundervisningen vil imidlertid elevene kunne få større læringsutbytte enn ved å gjennomføre mange rutineoppgaver (Stedøy & Torkildsen, 2018). Dermed er det grunnlag for å argumentere for at man burde bruke tid på dette i undervisningen. Undervisning med fokus på problemløsing kan i tillegg gjøre elevene mer selvsikre, øke kommunikasjonsevnen og de kunstneriske ferdighetene deres (Europabanken, 2017). Dette viser en studie fra Storbritannia hvor det ble undersøkt hvordan det vil påvirke både lærere og elever å forsøke å arbeide slik ingeniører arbeider i undervisningen på skolen, ved hjelp av blant annet problemløsing.

Elevers holdninger til matematikk er også en god grunn til å fokusere på undervisning med mer utforsking, kreativitet og samarbeid. Det kan være mange årsaker til at elever utvikler negative holdninger til matematikkfaget, men noen av dem kan ifølge Geir Botten (2016) være:

- «Mekanisk læring uten forståelse»
- «Ensidige arbeidsmåter med stor vekt på å løse enkle drilloppgaver»
- «Snevert fagsyn og syn på hvordan matematikk læres»
- «Sterk vekt på individuell konkurranse i faget»
  (Botten, 2016, s. 250)

Dermed er det viktig at lærere legger vekt på å variere undervisningen og ta i bruk metoder som fokuserer mer på forståelse og selve læringsprosessen, som for eksempel undervisning i problemløsing.

Det finnes mange grunner for at problemløsingskompetanse er en betydningsfull kompetanse å være i besittelse av, og dermed er det viktig at aspekter ved denne fokuseres på. En viktig del av problemløsing er som vi har sett å være i besittelse av ulike løsningsstrategier, eller heuristikker. Dermed er det grunnlag for å undersøke om dette er noe som vektlegges i lærebøker og i matematikkundervisningen generelt. Betydningen av problemløsing og kompetanse innen dette kommer også til uttrykk i både den gjeldende læreplanen i matematikk for grunnskolen (MAT1-04, 2013) og i fagfornyelsen (MAT01-05, 2020), noe jeg vil gå nærmere inn på i undersøkelsen av disse i kapittel 5.1.

3.3 Tidligere forskning på problemløsingsheuristikker i lærebøker

Det har vært gjennomført flere studier tidligere hvor fokuset har vært på problemløsingsheuristikker i lærebøker i matematikk. Her vil jeg gå nærmere inn på funnene i noen av disse.

Som del av doktorgradstudiet til Tom Rune Kongelf (2019), som jeg har nevnt flere ganger tidligere, undersøkte han problemløsing i seks lærebøker for niendetrinn. Han så på problemløsingsheuristikker i eksemplene i samtlige kapitler i de seks lærebøkene. Ved å benytte seg av et analyseverktøy bestående av ni heuristiske tilnærmingsmåter fant han at det ble benyttet endel problemløsingsheuristikker i eksemplene, men at det var noen som dominerte. Han skriver at de fire mest brukte tilnærmingene «løs deler av problemet», «lag en visualisering», «se problemet fra en annen side» og «lag en systematisk tabell» utgjorde tilsammen nærmere 97 % av alle tilfellene av heuristiske tilnærmingsmåter (Kongelf, 2019). I tillegg fikk han inntrykk av at heuristiske tilnærmingsmåter ikke ble bevisst presentert av lærebokforfatterne som følge av en kulturell lærebokpraksis (Kongelf, 2017). Han skriver også at:

> Many well-known approaches are almost absent. Approaches such as "look for a pattern", "quess and check", "work backwards", "thinking of a related problem" and "simplify the problem" seem to be something every pupil has the right to know something about and to have experienced in mathematics class … There is a lot of potential for improving mathematics textbooks in lower secondary school in Norway concerning heuristics approaches. (Kongelf, 2017, s. 187)

De ni heuristikkene vil bli presentert ytterligere under beskrivelsen av analyseverktøyet i metodedelen av denne oppgaven, da jeg har benyttet meg av det samme analyseverktøyet som Kongelf (2019) gjorde i sin studie.

Doktorgradsstudien til Kongelf (2019) har blant annet influert arbeidet med en ny kvalitetsveileder for læremidler fra Utdanningsdirektoratet, hvor det blant annet inngår en påstand som har sterk tilknytning til problemløsingsstudien hans. Denne er «Læremiddelet har gode eksempler som viser hvordan eleven kan bruke ulike problemløsningsstrategier.» (Kongelf, 2019, s. 88). Fra en høring til utvikling av de nye kjerneelementene i matematikkfaget fra 2017 er spesifikke strategier innenfor problemløsing nevnt i forbindelse med kjerneelementet *Utforsking og problemløsing* (Utdanningsdirektoratet, 2017b).

Disse er «se etter et mønster, systematisere, visualisere, gjett og sjekk, løse deler av problemet, arbeide baklengs, tenke på et tilsvarende problem, løse et enklere problem, endre angrepsmåte» (Utdanningsdirektoratet, 2017b). Disse ser ut til å være direkte hentet fra Kongelf (2019) sin problemløsingsstudie fra 2011. Disse strategiene ble imidlertid ikke inkludert i den ferdige beskrivelsen av dette kjerneelementet, men er nok det de legger i begrepet *strategier* i denne. Denne ferdige beskrivelsen av kjerneelementet *Utforskning og problemløsing* vil bli presentert i kapittel 5.

Kongelf ble inspirert av, og har flere av kategoriene sine fra, Fan & Zhu (2007), som har undersøkt lærebøker i matematikk fra USA, Singapore og Kina. I sin studie fant de at de mest brukte løsningsstrategiene var «draw a diagram», «use an equation» og «restate the problem» i de tre landene (Fan & Zhu, 2007). De fant også, som tidligere beskrevet, at lærebøkene fra Singapore ofte introduserte problemløsingsheuristikker separat fra andre temaer, noe de ikke vil anbefale da dette kan føre til at elevene ser på problemløsing som et eget matematisk emne og heuristikkene som bestemte regler innenfor dette (Fan & Zhu, 2007).

I tillegg til Kongelf (2017) sin studie (delstudie 1 av doktorgraden) er det flere masteroppgaver som har benyttet seg av Kongelf sitt analyseverktøy og gjort interessante funn. Harder (2013) og Aaseth (2016) har brukt analyseverktøyet til å undersøke lærebøker for videregående skole, mens Yan (2018) har brukt det til å undersøke lærebøker for ungdomstrinnet.

Veronika Klungland Harder (2013) har sett på problemløsing i algebraeksemplene i norske matematikkbøker for videregående (1T og R1) ved bruk av Kongelf sitt analyseverktøy. Fra gjennomføringen av analysen fant hun at det var begrenset og lite variert bruk av problemløsingsheuristikker i algebraeksemplene, og at det ved bruk av slike ikke var godt nok forklart (Harder, 2013). I Harder (2013) sin studie er «gjør problemet enklere» og «lag en illustrasjon» funnet til å være de mest benyttede heuristikkene. Årsaken til at Harder (2013) får en av de minst brukte heuristikken fra Kongelf (2017) sin studie, nemlig «simplify the problem», som en av de mest brukte i sin studie, er nok hovedsakelig fordi hun har endret definisjonen av denne heuristikken til en viss grad. Noe jeg vil komme tilbake til i metodekapittelet.

Natalia Aaseth (2016) brukte analyseverktøyet i en sammenligning av norske og russiske matematikklærebøker. De norske lærebøkene var også i hennes studie tilknyttet kursene 1T og R1. Hun fant tilsvarende til Harder (2013) at bøkene ikke presenterer heuristikker i tilstrekkelig grad (Aaseth, 2016). I både de norske og russiske bøkene var det heuristikken «lag en illustrasjon» som ble registrert flest ganger. En av de største forskjellene mellom lærebøkene fra de to landene var at «bruk digitale hjelpemidler» var en av de mest brukte heuristikkene i de norske bøkene, men en av de minst brukte i de russiske (Aaseth, 2016).

Yan Qin (2018) har sammenlignet problemløsing i eksemplene i lærebøker for ungdomstrinnet fra Norge og Kina. Av norske lærebøker var det lærebøkene for 8., 9. og 10. trinn i Faktor-serien (Hjardar & Pedersen) fra Cappelen Damm som var inkludert. Yan (2018) inkluderte en undersøkelse av Polyas (1990) fire faser i tillegg til Kongelfs (2017) analyseverktøy på eksemplene tilhørende alle kapitlene i lærebøkene. Resultatene viste at noen heuristikker dominerte i både de kinesiske og norske lærebøkene, men det var litt større variasjon i de kinesiske lærebøkene (Yan, 2018). Den mest brukte strategien i de norske lærebøkene ble funnet til å være «tenk på et lignende problem» (Yan, 2018, 88). Dermed kan elevene få inntrykk av at det å kopiere en tidligere brukt løsningsmetode er det viktigste i matematikken og fokuset på memorering kan øke. Yan (2018) har kodet eksemplene som løses med en regel eller formel som er introdusert i tilhørende kapittel i boka som «tenk på et lignende problem». Dette har ikke Kongelf (2017) gjort. Yan (2018) inkluderte i tillegg metoden «se tilbake og/eller fremover», som kan sammenlignes med Polays fjerde trinn, og fant at denne var en av de fire mest brukte metodene i kinesiske lærebøker, men lite brukt i norske. Det blir også funnet at noen viktige heuristikker som «prøv og feil», «se etter et mønster», «bruk digitale hjelpemidler» og «se problemet fra en annen side» sjelden blir brukt (Yan, 2018, 90).

Kongelf (2017) finner at «se problemet fra en annen side» er en av de mest brukte metodene fordi han inkluderer underkategorien «endre uttrykksform», som Yan (2018) har ekskludert. Jeg vil komme tilbake til mer detaljerte beskrivelser av de ulike kategoriene og underkategoriene hos både Kongelf (2017), Yan (2018) og Harder (2013) i metodekapittelet.

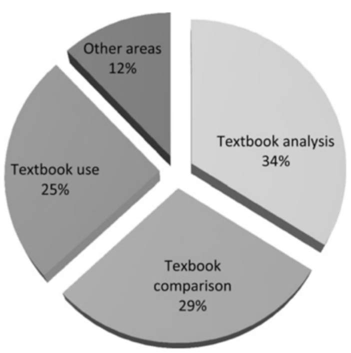
Alle studiene omhandlende norske lærebøker finner at det er noen av problemløsingsheuristikkene som dominerer i lærebøkene og andre som sjelden eller aldri blir brukt. Dermed blir det interessant å se på om disse studiene kan ha påvirket forfatterne av de nye lærebøkene i matematikk, og om det i disse blir benyttet flere ulike heuristikker i eksemplene.

4 Metode
I denne oppgaven skal jeg undersøke læreplaner og lærebøker i matematikk for ungdomstrinnet med vekt på problemløsing. Metoden som blir benyttet i denne studien er dokumentanalyse, hvor dokumentene som blir undersøkt er læreplaner og lærebøker i matematikk, med det som kan kalles en problemorientert tilnærming (Bell & Waters, 2018). Dette betyr at man har formulert problemstillingen man vil undersøke før man studerer dokumentene. Som tidligere beskrevet skal jeg benytte meg av et analyseverktøy fra Tom Rune Kongelf sin doktorgradsavhandling (2019). Dette analyseverktøyet brukes til å analysere utbredelsen av ti ulike problemløsingsheuristikker i eksemplene i fire matematikklærebøker for 8. trinn. Dette analyseverktøyet egner seg godt til å besvare problemstillingen: *Hvordan legger lærebøker for 8.trinn i matematikk til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse?* Og spesielt forskningsspørsmålet: *Hvilke problemløsingsheuristikker brukes, og hvordan er utbredelsen av disse, i eksemplene i de gamle og nye matematikklærebøkene for åttende trinn?*
Jeg vil i dette kapittelet gå nærmere inn på ulike typer lærebokforskning, metoden som er brukt i denne oppgaven, utvalget i studien min og analyseverktøyet jeg har benyttet meg av. I tillegg vil studiens validitet og reliabilitet diskuteres.

4.1 Ulike typer lærebokforskning
Innen lærebokforskning finnes det ulike tilnærminger. Fan, Zhu & Miao (2013) har gjennomført en undersøkelse av 111 lærebokstudier hvor de blant annet har kartlagt hvilke typer lærebokundersøkelser som er mest utbredt. Ved å gjennomføre et omfattende litteratursøk utformet de fire kategorier innenfor lærebokforskning. Disse er:

1. «Role of textbooks»
2. «Textbook analysis and comparison»
3. «Textbook use»
4. «Other areas»
   (Fan, Zhu & Miao, 2013, s. 635)

Den mest utbredte kategorien her fant de til å være kategori 2, og deretter 3 (Fan et al., 2013). De delte i tillegg opp kategori 2 og fant at flest studier inneholdt innholdsanalyser av lærebøker, etterfulgt av sammenligninger av lærebøker og deretter bruken av lærebøker, som vist i figur 2 (Fan et al., 2013, s. 635). Her har de ekskludert artikler omhandlende lærebøkers rolle, da disse som regel ikke er frittstående studier, men heller er tilknyttet andre. Dermed er 11 studier ekskludert i inndeling i figur 2 (Fan et al., 2013).



Figur 2: Distribution of empirical studies on mathematics textbooks surveyed in different focus areas. Fra “Textbook research in mathematics education: development status and directions” av L. Fan, Y. Zhu og Z. Miao, 2013, ZDM Mathematics Education, 45, s. 635.

Min studie vil havne under kategori 2 hos Fan, Zhu & Miao (2013), da jeg skal undersøke lærebøkers innhold og i tillegg sammenligne de gamle lærebøkene med de nye. Som beskrevet er det gjennomført mange studier innenfor denne kategorien i ulike land. Det som gjør min studie relevant og interessant er at helt nye lærebøker i matematikk inkluderes, i tillegg til at jeg heller ikke har funnet andre norske studier som ser på problemløsingsheuristikker i flere bøker utviklet for 8.trinn.

Rezat & Strässer (2017) har også utviklet en kategorisering av tilnærminger innen lærebokforskning. Dette ble gjort etter å ha studert 24 studier omhandlende lærebøker fra nordiske og baltiske land. De deler de ulike studiene inn i disse kategoriene:

1. «Research that focuses on the influences on textbooks»
2. «Research that focuses on the mathematics textbook itself»
3. «Research on the use of mathematics textbooks and its impact»
   (Rezat & Strässer, 2017, s. 495)

Her vil min studie havne under kategori 2, som kan sammenlignes med kategori 2 hos Fan, Zhu & Miao (2013). Innenfor lærebokforskning generelt, og kategorien «forskning på selve læreboken» spesielt, er innholdsanalyse en mye brukt forskningsmetode (Rezat & Strässer, 2017). Rezat & Strässer (2017) påpeker at denne metoden har sine begrensninger – man kan ikke trekke noen konklusjoner angående elevenes oppnådde kompetanser eller lærebøkenes påvirkning på undervisningen, læreren eller elevene ved å benytte seg av innholdsanalyser.

4.2 Metode

Dokumenter er en type kilde som kan undersøkes for å hente ut informasjon til datainnsamling og analysering (Grønmo, 2011). Grønmo (2011) påpeker at innholdet og informasjonen i en kilde ikke i seg selv kalles for data før det har blitt hentet ut, bearbeidet og registrert på en systematisk måte med tanke på bestemte analyser. I denne studien vil det bli hentet ut informasjon fra eksempler i lærebøker og denne informasjonen vil videre bli undersøkt på en systematisk måte. Ifølge Grønmo (2011) kan innholdsanalyse defineres som en type dokumentanalyse hvor man gjennomfører «systematiske undersøkelser av innholdet i dokumenter» (Grønmo, 2011, s. 121). I en innholdsanalyse undersøker man ofte dokumenter som ikke er laget med tanke på at de skal forskes på, som for eksempel bøker, tidsskrifter, artikler og lignende. Dette gjelder da også i min studie, i og med at jeg undersøker lærebøker som i hovedsak er utviklet for bruk i undervisning og for skoleelever.

I analysen som gjennomføres i denne studien benyttes allerede eksisterende kategorier ved datainnsamlingen. Denne type analyse, hvor man ikke selv utvikler et analyseverktøy eller egne kategorier, kan betegnes som en deduktiv innholdsanalyse. En slik innholdsanalyse kan defineres som en systematisk og objektiv metode å samle inn data på (Bryman, 2012). Dette fordi man benytter seg av forhåndsbestemte kategorier og er konsekvent i kodingen, resultater blir presentert på en oversiktlig måte som gjøre det enkelt å gjennomføre replikasjoner og oppfølgingsstudier, og fordi resultatene da blir lite påvirket av den som gjennomfører kodingen (Bell & Waters, 2018; Bryman, 2012).

Man skiller ofte mellom en kvalitativ og kvantitativ innholdsanalyse. I begge formene for analyse ønsker man å undersøke og systematisere de delene av innholdet i dokumentene som er relevante for problemstillingene man arbeider ut ifra (Grønmo, 2011).

Grønmo (2011) beskriver en kvantitativ innholdsanalyse som en analyse hvor man plasserer de relevante delene av innholdet i de utvalgte dokumentene i et systematisk kategoriskjema. I denne studien vil da analysen gå ut på å registrere antall heuristikker i hvert eksempel i lærebøkene i et kategoriskjema. Ved å samle inn og registrere data på denne måten, uttrykt ved tall og mengdeenheter, kaller man disse dataene i hovedsak kvantitative (Grønmo, 2011). Selv om en analyse i hovedsak kan defineres som kvalitativ eller kvantitativ, vil det ofte være momenter av den andre inkludert (Grønmo, 2011). Dette er også tilfellet i min studie, hvor jeg bruker et analyseverktøy utviklet av Kongelf (2019). Kongelf (2019) argumenterer for at metoden han benytter seg av også inneholder kvalitative elementer, da man må tolke eksemplene og vurdere hvilke heuristikker de inneholder, ikke kun telle heuristikker. Det vil alltid være en viss subjektiv oppfatning av hvilke heuristikker et eksempel inneholder og dermed vil min undersøkelse også inneholde kvalitative momenter. Men ved å utforme en detaljert beskrivelse av hva som inngår i de ulike kategoriene håper jeg å få en så objektiv og reproduserbar analyse som mulig, dette for å styrke reliabiliteten.

4.3 Utvalg

Her vil jeg gjennomgå og begrunne utvalget av lærebøker, klassetrinn og innholdet i lærebøkene som er inkludert i studien min.

4.3.1 De utvalgte lærebøkene

I denne studien har utvalget av lærebøker som har blitt analysert blant annet blitt styrt av hvilke forlag som har utgitt nye lærebøker i løpet av våren 2020 i tilknytning til den reviderte læreplanen som vil være gjeldende fra høsten 2020. I tillegg er det blitt fokusert på 8.trinn da det er læreplanen for dette trinnet som vil bli tatt i bruk først på ungdomstrinnet og disse bøkene som har blitt utgitt først ila våren 2020. Jeg ønsker å se på om det er noen endringer fra bøkene som har vært brukt i tilknytning til LK06 (og revideringen i 2013) og bøkene som nå skal tas i bruk høsten 2020 i tilknytning til den reviderte læreplanen (LK20). Dermed har det vært naturlig å se på bøkene fra Aschehoug og Cappelen Damm. Gyldendal kommer ikke med ny versjon av sin lærebok Maximum før i august 2020 og har dermed ikke blitt tatt med i studien, da denne blir utgitt etter min leveringsfrist. I tillegg er det gjennomført en spørreundersøkelse blant lærere som viser at bøker fra Cappelen Damm og Aschehoug er mest brukt på ungdomstrinnet (Waagene & Gjerustad, 2015). Det er da snakk om sinusserien fra Aschehoug og faktorserien fra Cappelen.

Cappelen Damm har bøkene Faktor (Hjardar & Pedersen) og Nye Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen) tilhørende LK06/13 og boken Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) i tilknytning til den nye læreplanen som skal innføres fra 2020. Aschehoug har Sirkel (Torkildsen & Maugesten) og Nummer (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace) tilhørende LK06/13 og Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) tilhørende den nye læreplanen. Fra Aschehoug er det Nummer 8 (Hole et al., 2019) av de eldre bøkene som har blitt inkludert i studien, da denne er den nyeste av de eldre lærebøkene og var tilgjengelig som Unibok, i tillegg til at én av forfatterne går igjen i den nye boka.
På Cappelen Damm sine sider står det at Matematikk- serien er en videreutvikling av Faktor-serien (Cappelen Damm undervisning, u.å.b). Det er i tillegg de samme forfatterne som har skrevet Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), og det blir dermed naturlig å velge denne boken fremfor Nye Mega (Guldbrandsen et al.), som i tillegg ikke ser ut til å være fornyet siden 2006.

Matematikk- serien beskrives på nettsidene til Cappelen Damm som en ny lærebokserie som er utviklet med tanke på dybdelæring og kjerneelementene i den nye læreplanen (Cappelen Damm Undervisning, u.å.b). Elevene skal ved bruk av disse bøkene få muligheten til å arbeide lengre med hvert tema. Utforskning og problemløsing nevnes også som eneste kjerneelement spesifikt i beskrivelsen av denne læreboken. Dermed får man forventninger til at det i denne boka kommer til å vektlegges, noe som er interessant for gjennomføringen av min studie.

Det er flere av forlagene som har hatt mye brukte lærebøker tilknyttet LK06, som ikke skal fornye eller lage nye versjoner av disse av ulike årsaker. Dette gjelder Elektronisk Undervisningsforslags bok Grunntall (Elektronisk Undervisningsforlag AS) og Fagbokforlagets bok Tetra (Hagen & Dahl), som begge er med i Kongelf (2017) sin studie. Dermed er heller ikke disse inkludert i min studie.

Da jeg kun fokuserer på bøkene fra Aschehoug og Cappelen Damm, kan ikke resultatet fra denne studien generaliseres til å gjelde alle lærebøker som har vært brukt siden 2006 og som vil bli tatt i bruk fra og med høsten 2020. Men dette er store forlag med mye brukte bøker, hvor dermed resultatene kan regnes som representative for markedet. Under følger en opplisting av de fire lærebøkene som er inkludert i studien min og generell informasjon om dem.

Faktor 8, Cappelen Damm
Digital versjon av Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), basert på utgave 1, opplag 5 av boka fra 2017. Første digitale versjon. Redaktør: Berit Rogstad.

Nummer 8, Aschehoug
Digital versjon av Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2019), basert på 1. utgave, 2. opplag av boka fra 2019. 1. opplag kom i 2014. Redaktør: Kari Kleivdal.

Matemagisk 8, Aschehoug
Boka Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) fra Aschehoug fikk jeg fra redaktør Kari Kleivdal. Wallace er medforfatter i både Nummer 8 og Matemagisk 8.

Matematikk 8, Cappelen Damm
Boka Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) fra Cappelen Damm fikk jeg tilsendt som vurderingseksemplar fra redaktør Asbjørn Hageli. Her er det de samme forfatterne som har laget grunnboka i Faktor-serien for åttendetrinn

4.3.2 Utvalgt del av lærebøkene til analyse

Problemstillingen min går ut på å undersøke lærebøkers tilretteleggelse for utvikling av problemløsingskompetanse. Kjerneelementene skal gjennomsyre all undervisningen og komme til syne i alle temaer, og det er dermed interessant å inkludere alle temaer og kapitler i lærebøkene, ikke kun dem som inneholder temaer knyttet til kompetansemål omhandlende problemløsing. Problemløsing innebærer ulike prosesser, faktorer og teknikker, som jeg tidligere har vært inne på. Da man ikke kan undersøke verken affektive sider ved problemløsing eller hva som kan defineres som et problem etter den mer subjektive definisjonen av dette når man kun skal undersøke lærebøker, blir det mest hensiktsmessig å undersøke heuristikkbruken. Dette er en meget viktig faktor ved problemløsing, som det er viktig at elevene får muligheten til å trene på gjennom hele undervisningsforløpet. Når man skal undersøke forekomsten av heuristikker i lærebøkene må man velge deler av lærebøkene som inneholder heuristikkbruk. Lærebøkene består hovedsakelig av introduksjons- eller forklaringstekster, eksempler og oppgaver. Oppgavene inneholder ikke heuristikker, da løsningen av disse som regel er presentert uten noen utregning eller forklaring. Teksten i kapitlene inneholder forklaringer og noen ganger demonstrasjoner av hvordan en utregningsmetode kan brukes eller hvordan man kan tenke. Her kan det forekomme heuristikkbruk, men det skilles som regel ikke på hva som er selve *problemet* (etter den lærerbokvennlige definisjonen) og hva som er strategiene som blir brukt for å løse det. Eksemplene utgjør de delene av lærebøkene som konsekvent inneholder mest heuristikker og hvor det er tydelig at det er et problem som skal løses, i motsetning til i teksten. I tillegg har forskning vist at uthevet tekst, og da spesielt eksempler, er det elever og studenter fokuserer på når de bruker lærebøker (Kongelf, 2019). Dermed blir den utvalgte delen av lærebøkene som inngår i studien min de merkede eksemplene.

4.3.3 Læreplaner

I tillegg til hovedundersøkelsen av lærebøkene gjennomføres det en problemorientert dokumentanalyse av den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen, MAT1-04 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og MAT01-05 (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det arbeides altså ut ifra allerede definerte spørsmål ved undersøkelsen av læreplanene. Her er det ikke forhåndsbestemte kategorier som benyttes, og analysen kan dermed ikke kalles en deduktiv innholdsanalyse.

Målet her er i hovedsak å finne ut hvordan problem, problemløsing og heuristikker presenteres og omtales i de to læreplanene, med særlig fokus på 8. trinn. Dette for å kunne besvare forskningsspørsmål 2; *Hva sier den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen om problemløsing for åttende trinn, og hvordan gjenspeiles dette i lærebøkene?*

4.4 Analyseverktøy

Jeg har, som sagt, valgt å benytte meg av et analyseverktøy utviklet av Kongelf (2017) inspirert av Fan & Zhu (2007). Kongelf utviklet dette analyseverktøyet i forbindelse med den første artikkelen i doktorgradsavhandlingen sin, som ble publisert i 2011. Dette analyseverktøyet består av et kategorisystem som brukes for å vurdere forekomsten av forskjellige problemløsingsheuristikker i eksemplene i lærebøker. Her vil jeg gå nærmere inn på de ulike kategoriene og hvordan de er presentert i kodemanualen til Kongelf (2017), Harder (2013) og Yan (2018). I tillegg blir kodeskjemaet som blir brukt presentert. Til slutt følger en slags oppsummering på hvordan jeg beskriver kategoriene og tilhørende underkategorier og eksempler på disse.

4.4.1 Kategoriene og kodemanualen til Kongelf (2019)

Verktøyet inneholder ni ulike heuristikker. Disse er:

1. «Look for a pattern»
2. «Make a systematic table»
3. «Make a visualisation»
4. «Guess and check»
5. «Solve part of the problem»
6. «Work backwards»
7. «Think of a related problem»
8. «Simplify the problem»
9. «Change your point of view»
   (Kongelf, 2019, s. 60-61)

Fan & Zhu (2007) undersøkte matematikklærebøker fra Kina, Singapore og USA i sin problemløsningsstudie. I denne studien ble det sett på både implementeringen av Polyas (1990) firetrinnsmodell og 17 problemløsingsheuristikker i lærebøkene (Fan & Zhu, 2007). Kongelf (2019) gjennomførte en pilotstudie hvor han benyttet seg av analyseverktøyet utviklet av Fan & Zhu (2007). Etter å ha gjennomført pilotstudien og studert den norske læreplanen i matematikk for grunnskolen, lærebøker, flere problemløsingsstudier og Polya (1945) og Schoenfeld (1985) sine beskrivelser av heuristikker valgte Kongelf (2019) å modifisere Fan & Zhu (2007) sine kategorier og endte opp med de ni problemløsingsheuristikkene over (Kongelf, 2019).

Kongelf (2019) oppdaget at noen av heuristikkene fra Fan & Zhu (2007) ikke var representert i norske læreplaner eller -bøker, i tillegg til at han opplevde noen av dem som overlappende. Dermed har han ekskludert eller slått sammen endel av de 17 heuristikkene Fan & Zhu (2007) benyttet seg av, og han har i tillegg endret litt på formuleringen i de heuristikkene han har valgt ut. Han har endret «draw a diagram» hos Fan & Zhu til «make a visualisation» da beskrivelsen deres av «draw a diagram» var at man lagde en tegning for å lage en visualisering av problemet. Fan & Zhu (2007) sine kategorier «act it out» og «use a model» faller også litt under «make a visualisation» hos Kongelf (2019). «Restate the problem» hos Fan & Zhu (2007) faller ut hos Kongelf da han mener dette faller under kategorien «simplify the problem» (Kongelf, 2019, s. 60). «Make a systematic list» og «make a table» hos Fan & Zhu (2007) ser ut til å ha blitt slått sammen til «make a systematic table» hos Kongelf (2019).

Under følger en beskrivelse av de ulike problemløsingsheuristikkene i tabell 1. Beskrivelsene er hentet fra Kongelf (2019, s. 60-61).

Problemløsingsheuristikk	**Beskrivelse**
1. Look for a pattern	Identifying patterns in the given problem based on observations of common characteristics, variations, or differences in the problem.
2. Make a systematic table	Constructing a systematic list or table containing the possibilities for a given situation.
3. Make a visualisation	Creating a visualisation on the available information to visually represent the problem.
4. Guess and check	Making a reasonable guess of the answer and then checking the result to see if it works. If necessary, repeating the procedure to find the answer, or at least a close approximation.
5. Solve part of the problem	Dividing a problem into sub-problems, then solving them one by one in order to solve the original problem.
6. Work backwards	Approaching a problem from its outcomes or solutions backwards to find what conditions they eventually need to meet.
7. Think of a related problem	Using methods or results of a related problem, or recalling a related problem, or considering a similar problem solved before in order to solve the problem.
8. Simplify the problem	Changing the complex numbers or situations in the problem into simpler ones without altering the problem mathematically.
9. Change your point of view	Approaching a problem from another angle.

Tabell 1: Kodemanual til delstudie 1 om heuristiske tilnærmingsmåter. Fra «Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?», T. R. Kongelf, 2019, s. 60-61.

I tillegg har Kongelf (2019) laget underkategorier til kategori 2, 5 og 9. Disse er i min studie oversatt til «lag en visualisering», «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side». Underkategoriene ho Kongelf (2019) presenteres i tabell 2 under. Jeg har ikke klart å finne en grundigere beskrivelse av hvordan Kongelf (2019) gjennomfører kodingen. Han nevner underkategoriene «trinnvis utførelse» og «endre uttrykksform» uten noen videre forklaring på om han har flere underkategorier under kategoriene «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side», eller om han da koder resterende eksempler som inneholder disse heuristikkene som «resten» av kategorien, altså uten oppdeling i flere underkategorier.

Kategori	**Underkategorier**
Lag en visualisering	A1: Del av problemtekst, informativ A2: Del av problemtekst, dekorativ B: Direkte etterspurt C: Del av løsningsprosessen
Løs deler av problemet	Trinnvis utførelse
Se problemet fra en annen side	Endre uttrykksform

Tabell 2: Underkategorier hos Kongelf (2019, s. 61).

Etter å ha studert masteroppgavene til Harder (2013) og Yan (2018), som har benyttet seg av analyseverktøyet til Kongelf, fant jeg ut at de har brukt litt andre underkategorier og endret på noen av formuleringene i beskrivelsen av de ulike kategoriene. Harder (2013) undersøkte eksemplene tilknyttet algebrakapitlene i tre ulike lærebøker for kursene 1T og R1 på videregående skole. Yan (2018) har sammenlignet det norske læreverket Faktor (Hjardar & Pedersen) for 8-10. trinn med et kinesisk læreverk for tilsvarende trinn i Kina.

Harder (2013) bruker underkategoriene som Kongelf (2019) har brukt under «lag en visualisering» både under denne kategorien og under «lag en systematisk tabell». Yan (2018) har kuttet ut disse underkategoriene. Jeg velger å inkludere disse underkategoriene, vist i tabell 2, både under «lag en systematisk tabell» (ekskluderer A2 under denne kategorien da det ikke er relevant) og «lag en visualisering» slik som Harder (2013), for å få en oversikt over hvordan tabeller/lister og illustrasjoner/visualiseringer brukes i eksemplene i lærebøkene.

I motsetning til Fan & Zhu (2007) koder Kongelf (2017) rene regneeksempler hvor utregningen deles opp i en trinnvis utførelse som kategori 5 «løs deler av problemet». Både Harder (2013) og Yan (2018) har ekskludert denne underkategorien og koder altså ikke eksempler som inneholder en trinnvis utregning som «løs deler av problemet». Under denne kategorien inkluderer de kun eksempler hvor problemet er delt opp i uavhengige delproblem som løses uavhengig, før resultatene av disse brukes for å løse hovedproblemet. Jeg tar med underkategorien «trinnvis utførelse» for å kunne sammenligne resultatene mine med Kongelf og fordi jeg mener dette kan sees på som en dimensjon av kategorien «løs deler av problemet», men jeg koder eksempler hvor problemet faktisk er delt opp i uavhengig løste problem som underkategorien «oppdeling av problemet» under «løs deler av problemet». Dermed får jeg en oversikt over hvor mange eksempler som inkluderer både en trinnvis utregning og en faktisk oppdeling av problemet, og kan sammenligne dette med de andre studiene om det skulle bli relevant.

Under kategorien «tenk på et lignende problem» har Harder (2013) benyttet samme beskrivelse som Kongelf (2011), mens Yan (2018) har endret beskrivelsen til «Lete etter liknende problemer som blir presentert eller er løst i tilhørende kapitler i læreboka for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.» (Yan, 2018, s. 50) under denne kategorien. Dermed kodes eksempler hvor det brukes en løsningsmetode som er demonstrert forut for eksempelet som «tenk på et lignende problem» hos Yan (2018), noe som er med på å vise hvor hyppig lærebøkene legger opp til at elevene skal lete etter og kopiere løsningsmetoder på liknende oppgaver. Jeg syns dette er en hensiktsmessig endring, og har derfor selv lagt dette inn som en underkategori under «tenk på et lignende problem». Jeg har altså ikke endret beskrivelsen av kategorien slik som Yan (2018), men lagt det inn som en underkategori for å få oversikt over hvor mange eksempler som følger etter en demonstrasjon av løsningsmetode. Dermed kan jeg enkelt se hvor mange eksempler som er kodet som dette og eventuelt ekskludere dem om jeg skal sammenligne resultatene med Kongelf (2017). Det blir dermed enkelt å oppdage hvorfor man får en uoverensstemmelse med resultatene fra de andre studiene. Jeg har inkludert denne underkategorien da jeg syns det er interessant å få med hvor ofte det i boken indirekte oppfordres til å kopiere løsningsmetoder eller lignende. Yan (2018) beskriver denne heuristikken som «en typisk mekanisk problemløsningsmetode i analysen min som ikke trenger dyp læring og forståelse i problemløsningen» (Yan, 2018, 48).

Under kategorien «gjør problemet enklere» har Harder (2013) inkludert «å forandre uttrykksform», som Kongelf (2017) koder som kategori 9 «se problemet fra en annen side». Verken Harder (2013) eller Yan (2018) inkluderer eksempler hvor det forandres uttrykksform under kategorien «se problemet fra en annen side».

Her har jeg valgt å følge Kongelf (2017), altså ved å kode eksempler hvor det forandres uttrykksform som «se problemet fra en annen side». Jeg har dette som en underkategori, slik at jeg kan skille mellom eksempler hvor det kun forandres uttrykksform og eksempler hvor det er inkludert ulike måter å løse hele problemet på, eller hvor problemet sees fra en annen side ved at det vises en annen måte å tenke på når problemet er vanskelig å løse, for eksempel ved å tenke på multiplikasjon som gjentatt addisjon.

Kongelf (2017) poengterer at det å endre uttrykksform faktisk kan være mer i tråd med heuristikken «se problemet fra en annen side» enn at det samme problemet løses på ulike måter. Dette fordi at endring av uttrykksform er noe som tas i bruk når en tidligere prøvd metode ikke har vært effektiv. Når det derimot demonstreres to ulike løsningsmetoder er ikke dette fordi den ene ikke har fungert (Kongelf, 2017), men heller for å vise at man kan løse problemer på forskjellige måter – noe som jo også er nyttig å være klar over at man kan gjøre.

Både Harder (2013) og Yan (2018) inkluderte kategorien «bruk av digitale hjelpemidler», som følge av at Kongelf (2017) poengterer at dette kunne vært inkludert i hans studie da han oppdaget denne tilnærmingen i eksemplene underveis i kodingen. Jeg har også valgt å inkludere denne kategorien da bruk av digitale hjelpemidler er en viktig faktor i både den gamle og den nye læreplanen.

Etter denne gjennomgangen ender jeg opp med kategoriene og underkategoriene presentert i tabell 3 under. Beskrivelsene av kategoriene er de samme som hos Kongelf (2019), presentert i tabell 1.

Kategori	**Underkategorier**
1. Se etter et mønster	
2. Lag en systematisk tabell/liste	A: del av problemtekst, informativ B: direkte etterspurt C: del av løsningsprosessen
3. Lag en visualisering/illustrasjon	A1: del av problemtekst, informativ A2: del av problemtekst, dekorativ B: direkte etterspurt C: del av løsningsprosessen
4. Gjett og sjekk	
5. Løs deler av problemet	A: trinnvis utførelse B: oppdeling av problemet
6. Jobb baklengs	
7. Tenk på et lignende problem	A: tidligere problem nevnes og benyttes i løsningen B: bruk metode fra umerket eksempel
8. Gjør problemet enklere	
9. Se problemet fra en annen side	A: endre uttrykksform B: løs problemet på ulike måter C: Annet
10. Bruk digitale hjelpemidler	Det brukes et digitalt hjelpemiddel for å løse problemet.

Tabell 3: Mine kategorier og underkategorier hentet fra/inspirert av Kongelf (2011), Harder (2013) og Yan (2018).

Jeg inkluderer alle merkede eksempler i min studie. Dette hadde ikke vært mulig om man benyttet seg av den tradisjonelle definisjonen av problem. Men ettersom jeg bruker den lærerbokvennlige definisjonen av problem, som beskrevet tidligere, kan alle eksempler inkluderes. Jeg skal bruke analyseverktøyet til å vurdere omfanget av problemløsingsheuristikker i fire ulike matematikklærebøker for åttende trinn. Dette ble gjennomført ved bruk av et skjema i Excel hvor jeg plottet inn hver gang en heuristikk ble brukt i et eksempel. Kodingsbeskrivelsene til Kongelf (2019), Harder (2013) og Yan (2018) har fungert som en slags veiledning for hvordan de forskjellige eksemplene har blitt kodet. Jeg vil komme tilbake til hvordan datainnsamlingen har foregått, og en mer detaljert beskrivelse av hva som inngår i de ulike kategoriene, i avsnitt 4.4.3 under.

4.4.2 Analyseskjema

I analyseskjemaet som er brukt er det blitt ført inn hvilken bok som undersøkes, kapittelnummer og navn, delkapittel, sidetall, eksempelnavn eller nummer og eventuelle brukte heuristikker i de ulike eksemplene, sistnevnte er ført inn med tall. Alle disse aspektene inkluderes for å lettere kunne finne tilbake til forskjellige eksempler og for å kunne sjekke resultatene i ettertid. I figur 3 under vises et utdrag fra analyseskjemaet brukt ved datainnsamling fra boka Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) før registreringen av heuristiske tilnærmingsmåter. Alle analyseskjemaene er lagt ved ferdig utfylt under vedlegg.

					Kategori																			
					Se etter mønster	Lag en tabell/ liste			Lag en visualisering				Gjett og sjekk	Løs deler av problemet		Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem		Gjør problemet enklere	Endre innfallsvinkel			Bruk digitale hjelpemidler	Antall
Bok	Kapittel	Delkapittel	Side	Eks. Nr.		A	B	C	A1	A2	B	C		A: trinnvis	B: oppdeling		A: nevnes	B: følger demo		A: uttrykksform	B: ulike løsn	c: annet		
Faktor 8	1: tall og tallforståelse	naturlige tall	9	eks. 1.1																				
			11	eks. 1.2																				
			15	eks. 1.3																				
		desimaltall	25	eks. 1.4																				
		overslagsregning	29	eks. 1.5																				
		regnerekkefølge	37	eks. 1.6																				
				6																				
Faktor 8	2: brøk	utviding og forkorting av brøker	54	eks. 2.1																				
			56	eks. 2.2																				
		addisjon og subtraksjon av brøker med lik	59	eks. 2.3																				
		addisjon og subtraksjon av brøker med ulik	62	eks. 2.4																				
			64	eks 2.5																				
			64	eks. 2.6																				
		uekte brøk og blandet	67	eks. 2.7																				
		brøk og desimaltall	70	eks. 2.8																				
			71	eks. 2.9																				
			72	eks. 2.10																				

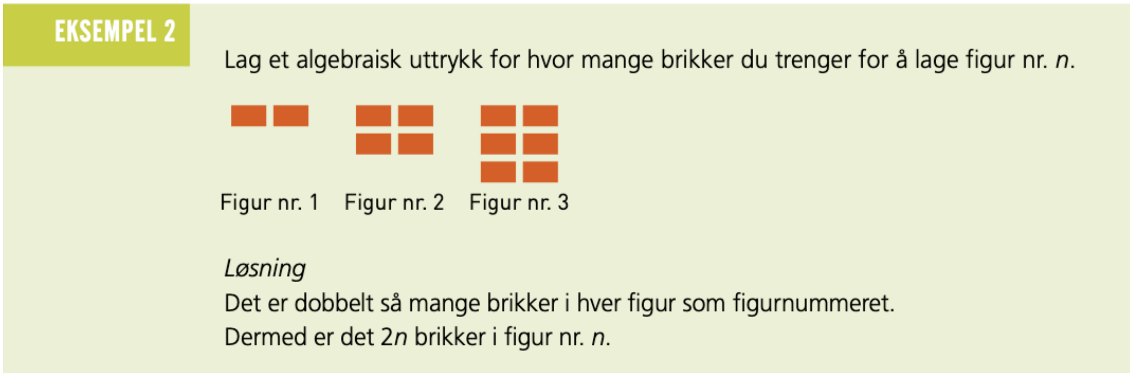
Figur 3: Utdrag fra kodeskjemaet som er benyttet ved analysering av Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) før registrering av heuristiske tilnærmingsmåter

4.4.3 Beskrivelse av de ulike kategoriene og eksempler på klassifisering

For å ha klare rammer for hva som skal inn under hver kategori vil det her følge en mer detaljert beskrivelse på hvordan jeg har valgt å gjennomføre klassifiseringen, samt eksempler på kategoriene. Det er viktig å ha kategorier som ikke overlapper hverandre, og dermed trenger jeg litt mer detaljerte beskrivelser for å kunne skille alle fra hverandre.

Kategori 1: Se etter et mønster

Eksempler som havner under denne kategorien inneholder for eksempel problemer hvor man skal finne et uttrykk for det n´te tallet i en tallfølge, finne en generell formel etter å ha sett på spesialtilfeller, finne den neste figuren i en følge, problemer hvor noe generaliseres ved å fremheve at det *alltid er slik* eller hvor et mønster vises. For eksempel kan det være som et problem i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 12) hvor det blir poengtert at om man multipliserer/dividerer med 10, 100, 1000 osv. så blir sifrene verdt 10, 100, 1000 osv. ganger mer/mindre. Et kanskje mer typisk eksempel på kategorien er å finne et uttrykk for antall brikker i den n-te figuren ved å se etter et mønster, som vist i figur 4 under, fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 116).


EKSEMPEL 2

Lag et algebraisk uttrykk for hvor mange brikker du trenger for å lage figur nr. n.

Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

Løsning

Det er dobbelt så mange brikker i hver figur som figurnummeret.

Dermed er det $2n$ brikker i figur nr. n.

Figur 4: Eksempel på "se etter et mønster" fra «Matemagisk 8» av A. L. Kongsnes & A. K. Wallace, 2020, s. 116. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2020.

Denne kategorien kodes som 1 per oppgave/deloppgave, eventuelt per løsningsmetode om det er demonstrert flere løsningsmetoder som innebærer å se etter et mønster. Så om ett enkelt eksempel inneholder flere oppgaver eller deloppgaver hvor alle faller under kategori 1, kodes det som flere.

Kategori 2: Lag en systematisk tabell/liste

Denne kategorien inneholder tre underkategorier for å få fram om tabeller/lister faktisk brukes som en del av løsningsprosessen, uten at det er direkte etterspurt eller er en del av selve problemteksten. Tabeller som benyttes i eksempelet uten at de er vist i selve eksempelet er også tatt med i kodingen da disse er inkludert ved at det for eksempel står «vi bruker tabell ... til å lage en graf» eller lignende. Da kodes de som kategori 2A; Del av problemtekst, informativ.

Om et eksempel inneholder flere tabeller eller lister kodes det som flere.

I noen tilfeller kan det være vanskelig å bedømme om en tabell/liste er del av problemtekst eller løsningsprosess i eksemplene. I tvilstilfeller blir det konsekvent kodet som underkategori C «del av løsningsprosessen».

Kategori 3: Lag en visualisering/illustrasjon
Denne kategorien inneholder også de tre samme underkategoriene som kategori 2, av samme grunn som beskrevet over. I tillegg er underkategorien A2 «del av problemtekst, dekorativ» tatt med, da det flere ganger er inkludert illustrasjoner i eksemplene som ikke har noen nytteverdi. I eksempler hvor det er flere tegninger eller lignende som tydelig er del av samme visualisering, for eksempel ved konstruksjoner, flere figurer i sammenheng med å finne mønster i figurtall eller visualisering av å finne den ukjente i en likning, så kodes dette som én visualisering. Den trinnvise utførelsen ved konstruksjonen av en vinkel kommer heller frem ved at dette i tillegg er kodet som kategori 5 «løs deler av problemet» i underkategorien «trinnvis utførelse».
I noen av bøkene er det tegninger av personer som går igjen og som flere ganger er tegnet delvis overlappende eksemplene. Disse er ikke inkludert under denne kategorien. I noen eksempler er det derimot tegnet personer som tydelig er en del av eksempelet, men som ikke har noen informativ verdi. Disse er da kodet som A2 «del av problemtekst, dekorativ», sammen med andre dekorative bilder eller lignende som er tatt med i forskjellige eksempler. Det er, som i kategori 2, noen tilfeller hvor det er vanskelig å bedømme om en illustrasjon er del av problemteksten eller løsningsprosessen. I tvilstilfeller blir det konsekvent kodet som underkategori C «del av løsningsprosessen».

Kategori 4: Gjett og sjekk/prøv og feil
Under denne kategorien havner problemer hvor man for eksempel tester ulike verdier for så å finne en som passer med kravene i problemet. Kodes som 1 per separate problem, selv om en «gjettesekvent» kan inneholde flere gjetninger. Kodes eventuelt som flere om et eksempel inneholder flere adskilte problemer hvor heuristikken benyttes.

Kategori 5: Løs deler av problemet
Her har jeg inkludert underkategorien «trinnvis utførelse» etter Kongelf (2017) sin begrunnelse om at dette kan regnes som en delvis løsing av et problem, som beskrevet tidligere. Han beskriver dette som en utregning hvor det er ett eller flere steg mellom selve problemet og løsningen, altså en trinnvis utregning.
Det som kan virke mer interessant å finne ut av innenfor denne kategorien er om problemer deles opp og delproblemene løses separat før man løser hovedproblemet, noe som kodes som underkategori B «oppdeling av problemet». Dette fordi det er mer i tråd med selve heuristikken «løs deler av problemet» og beskrivelsen av denne. Det poengteres også i læreplanene at dette er en viktig strategi når man skal løse problemer, noe jeg kommer tilbake til. I figur 5 under er det vist et problem som klassifiseres som «løs deler av problemet» i underkategorien «oppdeling av problemet». Dette er fra Nummer 8 (Hole et al., 2019, s. 272). Her går da oppdeling ut på å først finne ut hvor mange pølser det er totalt i tillegg til antall barn disse pølsene skal deles på, før man kan finne ut av hovedproblemet. Selv om ikke selve løsningen på delproblemene er tatt med underveis, regnes dette som en «oppdeling av problemet» da dette demonstrerer hvordan man først finner ut hva de ulike delene som skal inngå i hovedutregningen er.

EKSEMPEL 6

Å LAGE REGNEUTTRYKK MED FLERE LEDD I NEVNEREN

Tre familier feirer 17. mai sammen hjemme hos Hilde. I den ene familien er det tre barn, i familie nummer to er det fire barn, og Hilde er enebarn. Hilde skal servere pølser til seg selv og de andre barna. Hun har kjøpt to pakker med pølser. Det er 16 pølser i hver pakke. Vi skal finne ut hvor mange pølser det blir til hvert barn.

Løsning

Antall pølser Hilde har kjøpt: $2 \cdot 16$

Antall barn som skal dele pølsene: $3 + 4 + 1$

Antall pølser på hver:

$$\frac{2 \cdot 16}{3+4+1} = \frac{32}{8} = 4$$

Her finner vi først ut hvor mange pølser Hilde har kjøpt. Så finner vi antall barn som skal dele pølsene. Ved å ta antall pølser og dividere på antall barn, finner vi ut hvor mange pølser det blir til hvert barn. Hvert barn får fire pølser.

Figur 5: Løs deler av problemet, "del problemet i delproblem". Fra «Nummer 8» av A. Hole, R. Jensen, H. K. Tellefsen & A. K. Wallace, 2019, s. 272, digital versjon av 1. utgave, 2. opplag. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2014

Kongelf poengterer som tidligere nevnt at «Examples that display intermediate steps are beside their role as sub-category also occupying an important role regarding how one can explain a solution process by using mathematical symbols» (Kongelf, 2017, s. 178). Jeg har ikke inkludert algoritmiske utregninger hvor stegene i utregningen ikke forklares eller lignende som «trinnvis utførelse», i og med at dette ikke er en trinnvis utregning hvor hvert trinn i utregningen har samme matematiske verdi. Disse blir inkludert om hvert trinn i utregningen i eksempelet blir beskrevet, dette fordi man da viser en «trinnvis utførelse» som går an å følge for eleven. Kun eksempler hvor deler av problemet løses steg for steg, for eksempel trekke sammen ledd o.l. inkluderes. Der hvor det vises flere trinn fordi man deler opp tall, faktoriserer og lignende, kodes dette i stedet som «endre uttrykksform» under kategori 9 «se problemet fra en annen side». Det er heller ikke inkludert eksempler hvor tall kun settes inn i formler under «trinnvis utførelse», med mindre det demonstreres flere steg i utregningen etter selve innsettingen. I figur 6 under er et eksempel på et problem som kodes som «trinnvis utførelse» fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 164). Her er det i tillegg tatt med forklaringer på hva som gjøres i de ulike stegene, noe som kan gjøre det lettere å følge.

EKSEMPEL 6

$2x - 3 = 4x + 7$

$2x - 3 - 2x = 4x + 7 - 2x$ — Vi trekker fra $2x$ på begge sider av likhetstegnet.

$-3 = 2x + 7$ — Vi forenkler uttrykkene på hver side.

$-3 - 7 = 2x + 7 - 7$ — Vi trekker fra 7 på begge sider av likhetstegnet.

$\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2}$ — Vi deler på 2 på begge sider av likhetstegnet.

$-5 = x$

$x = -5$ — Vi får løsningen $x = -5$

Figur 6: Eksempel på underkategorien "trinnvis utførelse", Fra «Matemagisk 8» av A. L. Kongsnes & A. K. Wallace, 2020, s. 164. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2020.

Konstruksjoner hvor det vises flere steg i konstruksjonen og hvor hvert trinn beskrives blir som tidligere nevnt også kodet som underkategorien «trinnvis utførelse».
Dermed er det flere relativt ulike type problemer som vil havne inn under denne kategorien.

Kategori 6: Jobb baklengs
For at problemer skal kodes som denne kategorien må det beskrives eller vises at man tenker seg at man har løsningen, for deretter å finne ut hvordan man skal komme seg til denne. Man arbeider altså ut ifra løsningen. Dette kan være en nyttig strategi når man for eksempel skal løse geometriske problemer.

Kategori 7: Tenk på et lignende problem
Kodinger i denne kategorien har jeg valgt å gjøre på omtrent samme måte som Yan (2018), for å få frem hvor ofte boken legger opp til at man skal kopiere løsningsmetoder eller lignende. Yan (2018) inkluderer alle eksempler som inneholder løsningsmetoder som er demonstrert i tilhørende kapittel i læreboka i denne kategorien. Jeg har valgt å kode kun eksempler som inneholder løsningsmetoder som er demonstrert i problemer i teksten i tilhørende delkapittel i læreboka, for å begrense det. I tillegg er det i hovedsak der hvor eksempler følger rett etter et problem i teksten som benytter samme løsningsmetode at det demonstres tydeligst at man kan «tenke på et lignende problem» uten at dette nevnes. Dette blir en mer mekanisk løsningsstrategi, som også kan være interessant å få frem. Jeg velger å inkludere denne beskrivelsen av heuristikken da jeg tenker dette er måten denne implisitt brukes i lærebøkene. Kongelf (2019) m.fl. har funnet at det som regel brukes heuristikker i eksemplene uten at disse eksplisitt nevnes.

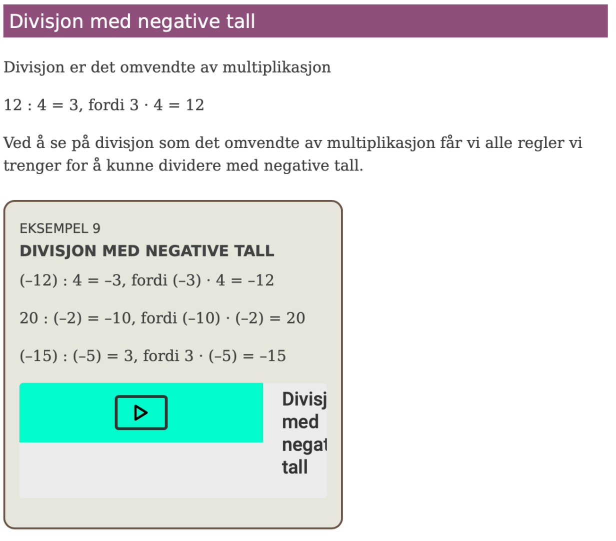
Det er altså kun der det er vist et lignende problem i teksten – et umerket eksempel– at det merkede eksempelet kodes som underkategori B «bruke metode fra umerket eksempel». Dette gjøres altså ikke når det benyttes en regneregel eller lignende som kun er presentert før eksempelet uten å være vist i et umerket eksempel.

Under denne kategorien kodes det som 1 per problem/delproblem i eksempelet. Det vil si at det kodes som mer enn 1 per eksempel kun når eksempelet inneholder flere adskilte deloppgaver eller oppgaver. Eksempler som kodes som «tenk på et lignende problem», men ikke som underkategori B, er eksempler hvor det nevnes at det gitte problemet ligner på et annet problem, eller at man kan tenke på samme måte som ved løsing av et annet type problem. Man bruker da altså metoder eller resultater fra et annet nevnt problem i løsingen.

Kategori 8: Gjør problemet enklere
Denne kategorien beskriver Kongelf (2017) i kodingsmanualen sin på følgende måte: «Changing the complex numbers or situations in the problem into simpler ones without altering the problem mathematically» (Kongelf, 2017, s. 170).
Et eksempel på problemer som kategoriseres som «gjør problemet enklere» er om man runder av tall for å enklere kunne utføre multiplikasjon uten bruk av multiplikasjonsalgoritmen eller kalkulator, og dermed finner en tilnærming til svaret.
Her kodes det med 1 per forenklingsmetode. Om det er benyttet flere ulike vil det da bli kodet som mer enn 1, men om samme metode brukes flere ganger kodes det bare som 1.

Kategori 9: Se problemet fra en annen side

Denne kategorien er delt opp i tre underkategorier fordi det å endre uttrykksform og å for eksempel løse hele problemet på to ulike måter er to ganske forskjellige nyanser av å se problemet fra en annen side. De tre underkategoriene er «endre uttrykksform», «løs problemet på ulike måter» og «annet». Et eksempel på problemer som kodes som sistnevnte underkategori kan være som eksempel 9 fra Nummer 8 (Hole et al., 2019, s. 48) i figur 7 under, altså når man tenker på divisjon som det omvendte av multiplikasjon for å løse et divisjonsstykke. Eksempel 9 vil i tillegg kodes som «bruk metode fra umerket eksempel» under kategori 7 «tenk på et lignende problem», da det demonstreres et helt tilsvarende problem i teksten rett før eksempelet.


Divisjon med negative tall

Divisjon er det omvendte av multiplikasjon

12 : 4 = 3, fordi 3 · 4 = 12

Ved å se på divisjon som det omvendte av multiplikasjon får vi alle regler vi trenger for å kunne dividere med negative tall.

EKSEMPEL 9

DIVISJON MED NEGATIVE TALL

(–12) : 4 = –3, fordi (–3) · 4 = –12

20 : (–2) = –10, fordi (–10) · (–2) = 20

(–15) : (–5) = 3, fordi 3 · (–5) = –15

Divisj med negat tall

Figur 7: Eksempel på "se problemet fra en annen side", i underkategorien «annet». Eksempel 9 fra «Nummer 8» av A. Hole, R. Jensen, H. K. Tellefsen & A. K. Wallace, 2019, s. 48, digital versjon av 1. utgave, 2. opplag. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2014

Kongelf (2017) poengterer, som beskrevet tidligere, at det å endre uttrykksform fra desimaltall til brøk faktisk er å «se problemet fra en annen side».
Jeg koder ikke eksempler som underkategorien «endre uttrykksform» når dette er selve problemet som skal løses, altså når det er direkte etterspurt. For eksempel når det i oppgaveteksten i eksempelet står «gjør desimaltallet om til brøk og forkort». Dette fordi strategien da ikke benyttes for å komme videre i å løse et problem.

I underkategorien «endre uttrykksform» inkluderes alle typer endringer, som å forandre et tall fra brøk til desimaltall eller prosent, dele opp eller faktorisere et heltall og utvide eller forkorte brøker, der hvor dette er noe som gjøres for å komme videre i utregningen. Også endringer fra for eksempel centimeter til meter kodes som «endre uttrykksform».
Etter de første gjennomgangene av bøkene oppdaget jeg at det i eksempler hvor det ble endret uttrykksform, typisk forekom flere ganger. Jeg valgte derfor å kode problemer som inneholdt endringer i uttrykksform som 1, uansett hvor mange endringer som forekommer. Dette fordi denne kategorien blir veldig overrepresentert om hver minste endring i hvert eksempel kodes som 1 per endring. I noen eksempler kunne det for eksempel være opptil syv mer eller mindre like endringer i uttrykksform. Dermed er endringer i uttrykksform kodet som 1 per oppgave/deloppgave eller regnestykke i eksemplene.

Eksempel 12 fra læreboka Nummer 8 (Hole et al., 2019, s. 65) i figur 8 under er for eksempel kodet som 2 endringer av uttrykksform, da det er to ganger dette gjøres for å komme videre i løsningsprosessen i separate utregninger.

EKSEMPEL 12

PRIMTALLSFAKTORISERING

Hvilke av disse tallene har 2 som faktor?

15 32 42

Løsning

32 og 42 er partall og er delelige med 2.

Hvilke andre faktorer har disse tallene i tillegg til faktoren 2?

Løsning

$32 = 16 \cdot 2 = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

32 har bare faktoren 2 som er primtall.

$42 = 21 \cdot 2 = 7 \cdot 3 \cdot 2$

42 har faktorene 7, 3 og 2 som alle er primtallsfaktorer.

Hvilke faktorer har det tallet som ikke har 2 som faktor?

Løsning

$15 = 3 \cdot 5$

15 har faktorene 3 og 5.

Figur 8: Eksempel hvor det endres uttrykksform. Fra Nummer 8, A. Hole, R. Jensen, H. K. Tellefsen & A. K. Wallace, 2019, s. 65, digital versjon av 1. utgave, 2. opplag. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2014

Kategori 10: Bruk digitale hjelpemidler

Jeg har i likhet med Harder (2013) og Yan (2018) lagt til denne kategorien i analysen min da dette var en tilnærming Kongelf (2017) oppdaget underveis i sin undersøkelse av lærebøkene for 9. trinn. I tillegg benyttes den i flere eksempler i lærebøkene som er inkludert i min studie.

Eksempler som er inkludert for å demonstrere hvordan ulike digitale hjelpemidler som regneark, GeoGebra eller Python brukes, og som ikke inneholder et oppgavespørsmål, er konsekvent kun kodet som «bruk digitale hjelpemidler» og ikke noen andre kategorier. Dette fordi det er vanskelig å vurdere om noen andre heuristikker enn «bruk digitale hjelpemidler» benyttes i løsningsprosessen når det ikke kommer tydelig frem hva som er problemet som skal løses. Eksemplene som inneholder et oppgavespørsmål og eventuelt tabeller eller illustrasjoner som ikke er skjermbilder av det digitale hjelpemiddelet blir kodet som vanlig i tillegg til kategori 10 «bruk digitale hjelpemidler».

4.5 Kritisk metodediskusjon

4.5.1 Kildekritiske vurderinger

Når man skal gjennomføre en dokumentanalyse stilles det visse krav til dokumentene som skal undersøkes (Grønmo, 2011). Det er spesielt fire vurderinger som må gjøres ved valg av dokumenter, nemlig dokumentenes tilgjengelighet, relevans, autentisitet og troverdighet (Grønmo, 2011). Her vil jeg gjennomgå disse fire i forhold til min studie og de inkluderte dokumentene, altså lærebøkene og læreplanene.

Vurderingen av *tilgjengelighet* er noe som må gjøres før man starter selve datainnsamlingen. De eldre lærebøkene var som nevnt mulige å få tak i på nett, mens de nye måtte fremskaffes på andre måter. Jeg fikk tilsendt vurderingseksemplarer av to nye lærebøker fra redaktørene av disse. Som beskrevet tidligere var det ikke mulig å få de nye lærebøkene fra alle forlagene på markedet, noe som har svekket *tilgjengeligheten* til en viss grad. Både den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen er tilgjengelig på nett, og dermed enkle å få tilgang til.

Dokumentenes *relevans* for studien er det ingen tvil om – det som skal undersøkes er jo nettopp læreplaner og lærebøker for 8. trinn. Dermed er kildene svært relevante for å kunne svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene.

Den tredje vurderingen man må gjøre er om dokumentene er *autentiske.* Med dette menes det at kildene er ekte og faktisk er det de framstår som (Grønmo, 2011). Læreplanene er funnet gjennom Utdanningsdirektoratets sider på nett. Det ville vært utenkelig at de her skulle publisert falske læreplaner. Lærebøkene som er studert digitalt er kjøpt direkte fra forlagene og krever innlogging via disse for å få tilgang. Det er utenkelig at disse ikke skulle være ekte, da denne innloggingen via forlagene kreves og da jeg ikke kan se hva man skulle oppnå ved å lage en falsk lærebok.
De to nye lærebøkene har jeg fått tilsendt direkte fra redaktørene av bøkene, som jeg har kommet i kontakt med via forlagene. Det er dermed også utenkelig at disse skulle være falske. Disse har jeg i tillegg mottatt uten kostnad, noe som hadde vært spesielt om disse var falske og formålet var å tjene penger på å distribuere falske lærebøker.

Dokumentenes *troverdighet* handler om hvorvidt det er mulighet for at dokumentene har blitt, eller kan bli, endret på (Kongelf, 2019). I mitt tilfelle er dette et aspekt som er relevant, i og med at versjonene jeg har analysert av de nye lærebøkene ikke er ferdige, trykte bøker, og de eldre bøkene er digitale. Jeg har derimot ikke grunnlag for å mistenke at forlagene skulle ønske å endre på innholdet i bøkene på bakgrunn av at jeg skulle studere dem. Den nye læreboka fra Aschehoug var, som jeg forstod det, allerede sendt til trykk da jeg fikk tilsendt et eksemplar på PDF. Den nye boka fra Cappelen Damm fikk jeg derimot tilsendt som et vurderingseksemplar på PDF. Denne var da ikke ferdig og kan bli endret på før utgivelse. Dermed er det ikke sikkert at mine resultater stemmer eksakt med innholdet i den ferdige boken. Det var derimot ikke veldig lenge til publiseringsdato for denne sistnevnte læreboka da jeg fikk den tilsendt, så jeg antar at eventuelle endringer som er lagt inn er minimale.

Bøkene som det er innhentet data fra digitalt er det liten sjanse for at skulle være endret med hensyn til min studering av dem, da jeg kjøpte tilgangen uten å informere forlagene om hva jeg skulle med den. Jeg har i tillegg sammenlignet ett av kapitlene fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) med en eldre versjon av Faktor, som var tilgjengelig på universitetsbiblioteket, og disse var identiske. Jeg vil dermed vurdere dokumentene som troverdige, på tross av at Kongelf (2019) poengterer at man ved å vurdere digitale læremidler får en større forskningsmessig utfordring med tanke på troverdighet.

Læreplanene har vært ute på flere høringer og vurderinger før de ferdige versjonene har blitt publisert på Utdanningsdirektoratets sider på nett. Disse er da ferdig vurderte og laget etter mange gjennomganger, og for å skulle bli endret må det foretas en ny revidering. De læreplanene som er inkludert i studien min vil da fortsatt være tilgjengelige uten endringer, da disse eventuelle endringene kommer i en ny, revidert læreplan. Dermed vil jeg påstå at disse dokumentene er troverdige.

4.5.2 Validitet og reliabilitet

Validitet kan sies å være en «betegnelse på datamaterialets gyldighet for de problemstillingene som skal belyses. Høy validitet innebærer at undersøkelsesopplegget og datainnsamlingen resulterer i data som er relevante for problemstillingene» (Grønmo, 2011, s. 426). Ved å benytte meg av analyseverktøyet som er brukt i denne studien vil jeg få svar på hvilke problemløsingsheuristikker som blir benyttet i eksemplene i lærebøkene og utbredelsen av disse ulike heuristikkene. Dermed kan man ved bruk av analyseverktøyet få svar på problemstillingen og forskningsspørsmålene jeg arbeider ut ifra når det kommer til utbredelsen av ulike løsningsstrategier/heuristikker. Det som derimot kan svekke validiteten i studien er at alle eksemplene tas med i gjennomføringen av analysen. Det vurderes ikke om et eksempel regnes som en rutineoppgave eller et problem ut ifra den typiske definisjonen av disse. Jeg følger definisjonen av et problem som en oppgave som skal løses, uavhengig av om man har en løsningsmetode for hånden eller ikke, som beskrevet tidligere. Dette fordi det er individuelt om noe kan defineres som en problemløsingsoppgave etter den tradisjonelle definisjonen og denne dermed er vanskelig å benytte seg av når man ikke inkluderer elever i undersøkelsen. Jeg anser imidlertid heuristikkene som nyttige verktøy uavhengig av vanskelighetsgraden på en oppgave. De fleste av heuristikkene kan benyttes i mange forskjellige situasjoner og oppgaver, noe som tilsier at de kan inkluderes i bøkene uavhengig av oppgavetype. Eksemplene som ikke inneholder noen av de ti problemløsingsheuristikkene i analyseverktøyet er også er med i studien og vil kunne trekke gjennomsnittlig antall brukte heuristikker i hvert eksempel ned, noe som er med på å besvare hvordan forekomsten og utbredelsen av de ulike heuristikkene er. Analyseverktøyet er i tillegg brukt i flere lignende studier tidligere, noe som styrker validiteten.

Grønmo beskriver reliabilitet som en «betegnelse på datamaterialets pålitelighet. Høy reliabilitet innebærer at undersøkelsen er gjennomført på en nøyaktig måte.» (Grønmo, 2011, s. 423). Som beskrevet tidligere er metoden som har blitt benyttet i denne studien en metode som kan benyttes av andre for å gjenta og gjøre replikasjoner av studien. Dette er noe som er med på å styrke reliabiliteten til denne studien. Ved at jeg presenterer eksempler på problemer som har blitt kodet til å inneholde de ulike heuristikkene og at alle analyseskjemaene er inkludert som vedlegg som kan sjekkes av andre, vil reliabiliteten til oppgaven styrkes. I tillegg er alle de 262 eksemplene blitt gjennomgått minst tre ganger for å få kodingen så konsekvent som mulig. Ved begge de to første gjennomgangene ble det oppdaget utfordringer med å plassere eksempler eller eksempler som var ganske forskjellige, men som uansett passet under samme kategori. Dermed ble det nødvendig med en mer detaljert beskrivelse av de ulike kategoriene og kodingen enn den jeg fant hos Kongelf (2019) for å klare å få analysen så konsekvent og objektiv som mulig. Det vil alltid inngå en subjektiv oppfatning av hvilke heuristikker et eksempel inneholder, men ved å beskrive de ulike kategoriene og hva som har blitt inkludert i dem så detaljert som mulig håper jeg å ha fått minimert denne så mye som mulig.

5 Resultater

I dette kapittelet vil jeg starte med en gjennomgang av læreplanene. Jeg vil da gå inn på likheter og ulikheter mellom den gamle læreplanen MAT1-04 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og den nye læreplanen MAT01-05 (Utdanningsdirektoratet, 2020) i matematikk for grunnskolen. I tillegg vil undersøkelsen av disse gå ut på å lete etter forekomster og beskrivelser av ordene *problem* og *problemløsing* og hvordan disse henger sammen med grunnleggende ferdigheter og kompetansemål i de to læreplanene. Det blir også viktig å undersøke om noen av problemløsingsheuristikkene som er med i analyseverktøyet i lærebokanalysen blir nevnt i læreplanene, eller om konkrete kompetansemål kan knyttes til noen av disse heuristikkene.
Dette ble gjort for å kunne besvare forskningsspørsmål 1:

- Hva sier den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen om problemløsing for åttende trinn, og hvordan gjenspeiles dette i lærebøkene?

Jeg vil med andre ord begynne med å presentere funnene fra de to læreplanene. Deretter vil jeg presentere funnene fra hovedundersøkelsen av de fire lærebøkene. Dette for å kunne svare på både forskningsspørsmål 1 over og forskningsspørsmål 2:

- Hvilke problemløsingsheuristikker brukes, og hvordan er utbredelsen av disse, i eksemplene i de gamle og de nye matematikklærebøkene for åttende trinn?

5.1 Undersøkelsen av de to læreplanene

Læreplanen som ble utarbeidet i forbindelse med Kunnskapsløftet i 2006 og revidert i 2013, har vært gjeldende til dags dato. Om revideringen i 2013 skrives det i en rapport fra Utdanningsdirektoratet: «I matematikk er det mindre endringer, men noe mer algebra i grunnskolen, i tillegg til noen endrede kompetansemål og hovedområder.» (Utdanningsdirektoratet, 2014). Mange av lærebøkene utviklet i forbindelse med Kunnskapsløftet i 2006 har fortsatt blitt brukt frem til i dag – noen med nye utgaver. Dette gjelder blant annet læreboka Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) som er inkludert i min studie.

Fra høsten 2020 vil nye læreplaner gradvis ta over for de gjeldende. I matematikk vil læreplanene for 1.-9. trinn og Vg1 bli innført i august 2020, mens 10. trinn og Vg2 følger i august 2021 og Vg3 i august 2022 (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Denne lærerplanrevideringen er den største siden Kunnskapsløftet og det har blitt gjort flere endringer. Her vil jeg gå nærmere inn på disse.

Den nye læreplanen har blant annet fått en ny overordnet del, kompetansemål etter hvert trinn i grunnskolen og noen ekstra vektlagte kjerneelement i hvert fag. Tidligere har kompetansemålene for hele ungdomstrinnet vært samlet under ett, nemlig «Kompetansemål etter 10. årssteget» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8). I den nye læreplanen for matematikk er kompetansemålene delt opp slik at alle trinn har egne kompetansemål. Kompetansemålene har tidligere også vært fordelt under hovedområdene *Tall og algebra*, *Geometri*, *Måling*, *Funksjoner* og *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* på ungdomstrinnet. Matematikkfaget har i Kunnskapsløftet vært strukturert rundt disse hovedområdene (Utdanningsdirektoratet, 2013).

De nye læreplanene er ikke delt opp i slike tematiske hovedområder. Nå er det i stedet kjerneelementene som skal være i fokus og kan knyttes til de ulike kompetansemålene. De nye kjerneelementene er:

1. Utforskning og problemløsing
2. Modellering og anvendelser
3. Resonnering og argumentasjon
4. Representasjon og kommunikasjon
5. Abstraksjon og generalisering
6. Matematiske kunnskapsområder
   (Utdanningsdirektoratet, 2020)

Disse kjerneelementene er det viktigste innen matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2017a). Her faller da de tidligere hovedområdene inn under *Matematiske kunnskapsområder.* Matematikkrådet (2018) skriver at nettopp kjerneelementet *Utforskning og problemløsing* er det viktigste. Stedøy og Torkildsen mener at «arbeid med problemløsing gir elevene muligheter til å utvikle seg innenfor alle kjerneelementene» (Stedøy & Torkildsen, 2018, s. 1), noe som gjør problemløsing veldig aktuelt i matematikkfaget for å fokusere på alle de nye kjerneelementene.

5.1.1 Problemløsing i MAT1-04

I læreplanen som har vært gjeldende siden Kunnskapsløftet i 2006, med en fornyelse i 2013, nevnes problemløsing blant annet under Formål. Her står det at «Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er ... Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening.». (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2)

Under Grunnleggende ferdigheter nevnes også problem og problemløsing flere ganger. Den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* beskrives som dette:

> *Å kunne rekne* i matematikk inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem. Dette inneber å kjenne att og beskrive situasjonar der matematikk inngår, og bruke matematiske metodar til å behandle problemstillingar. Eleven må òg kommunisere og vurdere kor gyldige løysingane er. Utvikling av å rekne i matematikk går frå grunnleggjande talforståing og å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar. Vidare inneber dette i aukande grad å bruke ulike hjelpemiddel i berekningar, modellering og kommunikasjon.
> (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 5)

Her poengteres det at regneferdigheter blant annet innebærer å kunne bruke varierte strategier til problemløsing, vurdere gyldigheten av løsninger og å løse enkle og mer komplekse problem ved hjelp av forskjellige metoder og strategier. Ut ifra dette ser problemløsing ut til å ha vært viktig og noe som skal gå igjen i alle områder i matematikkfaget også frem til dags dato.

I beskrivelsen av de grunnleggende ferdigheten *digitale ferdigheter, muntlige ferdigheter* og *å kunne skrive* nevnes også problem eller problemløsing:

«*Digitale ferdigheiter* i matematikk inneber å bruke digitale verktøy til læring gjennom spel, utforsking, visualisering og presentasjon. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar, problemløysing, simulering og modellering.» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 5)

«*Munnlege ferdigheiter* i matematikk inneber å skape meining gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysingar og strategiar med andre.» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4)

«*Å kunne skrive* i matematikk inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar.» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4)

Dermed ser vi at problemløsing er inkludert i alle de grunnleggende ferdighetene utenom *Å kunne lese*. Spesielt interessant for min studie er når det nevnes i forbindelse med løsningsstrategier. Problemløsingsstrategier blir vektlagt i forbindelse med ferdighetene *Å kunne regne* og *Muntlige ferdigheter*.

I MAT1-04 (Utdanningsdirektoratet, 2013) har kompetansemålene for ungdomstrinnet vært samlet under ett. Det har altså ikke vært føringer på hvilke spesifikke kompetansemål som skal være nådd etter 8.trinn. Lærebokforfattere har dermed stått mer fritt til å velge hvilke mål de vil fokusere på i de forskjellige bøkene. Under hovedområdet *Tall og algebra* har vi to kompetansemål som nevner problem eller problemløsing spesifikt. Disse er:

- «Løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8).
- «Bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8).

Under hovedområdet *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* har vi kompetansemålet «drøfte og løyse enkle kombinatoriske problem» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9).

Med tanke på at min studie ikke går ut på å undersøke hvordan forskjellige matematiske områder benyttes innenfor problemløsing, for eksempel om tall og variabler blir brukt for å løse et problem, kommer hovedfokuset ikke til å være på om lærebøkene spesifikt vektlegger ulike kompetansemål. Fokuset blir heller på hvordan blant annet kompetansemålene er med på å påvirke utbredelsen av de ulike heuristikkene jeg undersøker. I den gamle læreplanen er det noen kompetansemål man kan knytte direkte til ulike heuristikker fra analyseverktøyet mitt. Dette gjelder blant annet kompetansemål omhandlende uttrykksform:

- «samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege» (Utanningsdirektoratet, 2013, s. 8)
- «rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk» (Utanningsdirektoratet, 2013, s. 8)
- «bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8)

Disse er her inkludert fordi de kan påvirke forekomsten av heuristikken «se problemet fra en annen side» og underkategorien «endre uttrykksform».

Hode- og overslagsregning er også inkludert i ett av kompetansemålene, noe som kan påvirke forekomsten av heuristikken «gjør problemet enklere», fordi man forenkler tall for å lettere kunne utføre utregningen. Dette kompetansemålet finner vi også under hovedområdet *Tall og algebra,* og det er: «utvikle, bruke og gjere greie for ulike metodar i hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning med dei fire rekneartane» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8).

Geometri og *Måling* er to av hovedområdene i den eldre læreplanen, noe som kan påvirke forekomsten av heuristikken «lag en visualisering/illustrasjon», fordi alle illustrasjoner inkluderes i denne heuristikken. Dermed er det hensiktsmessig å inkludere underkategoriene «del av problemtekst, informativ», «del av problemtekst, dekorativ», «direkte etterspurt» og «del av løsningsprosessen» under denne heuristikken for å kunne få et overblikk over hvordan disse visualiseringene/illustrasjonene benyttes.

Hovedområdet *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* kan påvirke forekomsten av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste», fordi det også her inkluderes alle lister. For eksempel vil en opplisting av ulike temperaturmålinger hvor man skal finne gjennomsnittstemperaturen eller lignende, bli kodet som «lag en systematisk tabell/liste». Her er det dermed også inkludert de samme underkategoriene som under «lag en visualisering/illustrasjon», minus underkategorien «del av problemtekst, dekorativ» da dette ikke er relevant under denne heuristikken.

5.1.2 Problemløsing i MAT01-05

I den reviderte læreplanen som vil begynne å bli innført fra høsten 2020 er det i matematikkfaget, som nevnt tidligere, fokus på seks kjerneelementer som er viktige innenfor hele undervisningen. Ett av disse er som beskrevet *Utforskning og problemløsing*. Dette kjerneelementet beskrives på følgende måte:

> Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing. Elevane skal leggje meir vekt på strategiane og framgangsmåtane enn på løysingane. Problemløysing i matematikk handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk. Vidare inneber det å vurdere om delproblema best kan løysast med eller utan digitale verktøy. Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige. (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2)

I denne beskrivelsen kommer det frem at det er løsningsstrategiene og -metodene skal fokuseres på i problemløsingsundervisningen. Dermed er beskrivelsen av dette kjerneelementet en god begrunnelse for å undersøke hvilke problemløsingsheuristikker som vektlegges i lærebøker. Det nevnes også at elevene skal utvikle evne til å vurdere om et problem eller delproblem best kan løses ved hjelp av digitale hjelpemidler, noe som gir grunnlag for å inkludere heuristikken «bruk digitale hjelpemidler» i analysen min.

Det er tre kompetansemål for 8. trinn som knyttes direkte til kjerneelementet Utforskning og problemløsing på Utdanningsdirektoratet sine sider. Disse er:

- «bruke potensar og kvadratrøter i utforsking og problemløysing og argumentere for framgangsmåtar og resultat»
- «utforske algebraiske reknereglar»
- «utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering»
  (Utdanningsdirektoratet, u.å.)

Kjerneelementene skal som nevnt gjennomsyre hele faget, og problemløsing er dermed relevant når det kommer til oppnåelse av alle kompetansemålene. I de overnevnte kompetansemålene kan vi imidlertid se det mer eksplisitt. Her ser vi igjen at programmering, og altså bruken av digitale hjelpemidler, knyttes til problemløsing, hvilket ytterligere underbygger valget om å inkludere heuristikken «bruk digitale hjelpemidler» i min undersøkelse av lærebøkene.

I tillegg vil jeg spesifikt nevne kompetansemålene «beskrive og generalisere mønster med egne ord og algebraisk» og «lage og løse problem som omhandler sammensatte måleenheter» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12), som også kan knyttes til problemløsing og heuristikkene i min studie. Forekomsten av heuristikken «se etter et mønster» kan påvirkes av det første av disse kompetansemålene. I tillegg kan kompetansemålet «utforske og beskrive primtalsfaktorisering og bruke det i brøkrekning» (Utanningsdirektoratet, 2020, s. 12) påvirke forekomsten av underkategorien «endre uttrykksform» under «se problemet fra en annen side». Kompetansemålene omhandlende funksjoner kan påvirke heuristikken «lag en visualisering/illustrasjon», da grafiske fremstillinger av funksjoner inkluderes i denne.

Under Grunnleggende ferdigheter i LK20 nevnes problem eller problemløsing både under muntlige ferdigheter, å kunne skrive, å kunne regne og under digitale ferdigheter. Her følger utdrag fra, og kommentarer til, beskrivelsene av de grunnleggende ferdighetene hvor dette er tilfellet:

«Munnlege ferdigheiter i matematikk inneber å skape meining gjennom å samtale i og om matematikk. Det vil seie å kommunisere idear og drøfte matematiske problem, strategiar og løysingar med andre.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 4)

Det vil ikke være relevant for min studie med muntlige ferdigheter i matematikk da jeg kun fokuserer på innholdet i lærebøker. Men vi ser her at muntlige ferdigheter i matematikk innebærer å kunne snakke om og diskutere ulike løsningsstrategier med andre, noe som igjen forutsetter at elevene har opparbeidet seg noen løsningsstrategier og kan sette ord på disse. Læreboka kan legge grunnlag for dette ved å beskrive løsningsstrategiene som benyttes i presenterte problem.

«Å kunne skrive i matematikk er ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring. Det inneber å kunne løyse problem og presentere løysingar som er tilpassa mottakaren og situasjonen.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 4)

Ved å observere hvordan ulike problem er presentert i eksemplene i lærebøkene kan elevene få et innblikk i hvordan de selv kan løse og presentere problemer skriftlig. Om eksemplene i lærebøkene inneholder beskrivelser av valgte heuristikker, grundige utførelser og gode framstillinger, kan elevene dra nytte av dette i sin egen formidling og skriving innen problemløsing.

> Å kunne rekne i matematikk vil seie å bruke matematiske representasjonar, omgrep og framgangsmåtar til å gjere utrekningar og vurdere om løysingar er gyldige. Det inneber å kjenne att konkrete problem som kan løysast ved rekning, og formulere spørsmål om desse. Matematikk har eit særleg ansvar for opplæringa i å kunne rekne. Utviklinga av rekneferdigheiter i matematikk handlar om å analysere og løyse eit spekter av stadig meir komplekse problem med effektive og formålstenlege omgrep, symbol, metodar og strategiar. (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5)

Den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* er selvsagt viktig i matematikkfaget. Her snakkes det konsekvent om *problemer,* og ikke oppgaver. I tillegg trekkes bruken av effektive metoder og strategier frem som viktige momenter av denne ferdigheten. Dette legger igjen grunnlag for å undersøke vektleggingen av problemløsingsstrategier i lærebøkene.

> Digitale ferdigheiter i matematikk inneber å kunne bruke grafteiknar, rekneark, CAS, dynamisk geometriprogram og programmering til å utforske og løyse matematiske problem. Vidare inneber det å finne, analysere, behandle og presentere informasjon ved hjelp av digitale verktøy. Utviklinga av digitale ferdigheiter inneber i aukande grad å bruke og velje formålstenlege digitale verktøy som hjelpemiddel for å utforske, løyse og presentere matematiske problem. (Utdanningsdirektoratet, 2020. s. 5)

Digitale ferdigheter innebærer spesielt, som vi kan se av beskrivelsen over, å kunne bruke digitale hjelpemidler for å løse problemer. Dermed blir det å bruke digitale hjelpemidler svært relevant innen problemløsing og er tatt med som en egen heuristikk i min analyse av lærebøkene.

Vi legger merke til at beskrivelsen av de fleste grunnleggende ferdighetene inkluderer problem eller problemløsing både i den gamle og den nye læreplanen. Det ser ikke ut til at de største endringene i læreplanene i matematikk for grunnskolen befinner seg innenfor disse beskrivelsene. Det er likevel interessant å se at de grunnleggende ferdighetene både i den gamle og nye læreplanen knyttes til problemløsing og bruk av ulike strategier.

5.1.3 Oppsummering

Vi har her sett at det er gjort noen store strukturelle endringer på læreplanen i matematikk for grunnskolen, mens for eksempel de grunnleggende ferdighetene fortsatt er de samme, med noe endrede beskrivelser. Problem eller problemløsing nevnes i både den gamle og den nye læreplanen i forbindelse med fire av disse fem grunnleggende ferdighetene. Kompetansemålene er i den nye læreplanen presentert trinnvis for ungdomsskolen, mens disse tidligere var samlet under ett. Dette kan påvirke innholdet i lærebøkene. I tillegg deles ikke kompetansemålene i den nye læreplanen inn under matematiske hovedområder lenger, som i MAT1-04 (Utdanningsdirektoratet, 2013). I den nye læreplanen kobles kompetansemålene heller til de nye kjerneelementene, noe som kan vise seg i lærebøkene ved at kompetansene som inngår i kjerneelementene vektlegges mer enn tidligere. Ett av disse kjerneelementene er som sagt *Utforsking og problemløsing.*

5.2 Undersøkelsen av lærebøkene
De fire bøkene som er inkludert inneholder tilsammen 262 eksempler som har blitt analysert. Det er, som beskrevet tidligere, kun eksempler som er uthevet og merket som eksempler i teksten som er inkludert i denne studien. Eksemplene som er presentert underveis i teksten, men ikke merket som eksempler, inkluderes på den måten at de kan påvirke resultatet av kategori 7 «tenk på et lignende problem» når et etterfølgende merket eksempel bruker samme løsningsmetode (ikke heuristikk) som er demonstrert i det umerkede eksempelet. Lærebøkene inneholder ulikt antall eksempler, fra 50 på det minste til 86 på det meste. Lærebøkene som er inkludert i denne studien har i tillegg noe ulik oppbygning og struktur som kan påvirke resultatene. For eksempel bruker noen av bøkene uthevede eksempler eller elevoppgaver som introduksjon til nye tema, mens andre har en mer tradisjonell oppbygning med en introduksjonstekst og demonstrasjon før eksempler, og til slutt elevoppgaver. Dette vil jeg komme tilbake til senere.

Først vil jeg presentere utbredelsen av heuristikker i de fire lærebøkene separat, sammen med en rask gjennomgang av bokens oppbygning og andre observasjoner gjort underveis i kodingsprosessen. Her vil jeg først presentere funnene for hver av de to lærebøkene tilknyttet den gamle læreplanen fra 2013 og deretter de to nye lærebøkene tilknyttet læreplanfornyelsen fra 2020. Til slutt følger en sammenligning av den relative fordelingen av heuristikker i de fire lærebøkene. Denne oppbygningen er valgt for å først gi et godt innblikk i hver lærebok separat, før man videre ser på eventuelle likheter og ulikheter mellom dem.

5.2.1 Bøker tilknyttet den gamle læreplanen
Bøkene som har vært inkludert i denne studien tilhørende MAT1-04 (2013) er, som nevnt tidligere, Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Nummer 8 (Hole et al., 2019). Disse er relativt ulike når det kommer til oppbygning og innhold av heuristikker, og de kan dermed ikke sammenlignes med de nye bøkene under ett. Jeg vil først presentere funnene fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), samt kommentarer til disse. Deretter følger funnene fra Nummer 8 (Hole et al., 2019), og kommentarer til disse.

5.2.1.1 Faktor 8
Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) inneholder totalt 50 eksempler, som igjen inneholder til sammen 114 registrerte heuristikker. Dermed ser man at mange eksempler må inneholde mer enn én problemløsingsheuristikk. Gjennomsnittlig inneholder hvert eksempel 2,28 heuristikker i denne læreboka. Under følger en tabell som viser antall registreringer per kategori.

1. Se etter møns-ter	2. Lag en tabell/ liste	3. Lag en illustrasjon/ visualise-ring	4. Gjett og sjekk	5. Løs deler av pro-blemet	6. Jobb bak-lengs	7. Tenk på et lignende problem	8. Gjør problemet enklere	9. Se problemet fra en annen side	10. Bruk digitale hjelpemidler	Totalt antall
0	12	19	0	15	0	45	2	20	1	114

Tabell 4: Antall registreringer i hver kategori fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Deler av årsaken til at noen av kategoriene får et høyt antall registrerte heuristikker er at mange av eksemplene i Faktor 8 inneholder flere separate oppgaver/deloppgaver. Dette har ført til at kategori 7 «tenk på et lignende problem» har blitt registrert 45 ganger selv om det *ikke* er kun 5 eksempler som ikke benytter seg av denne heuristikken.

Dette fordi denne heuristikken registreres som 1 per adskilte problem eller deloppgave i et eksempel. Alle tilfellene av kategorien «tenk på et lignende problem» havner i underkategorien «bruk metode fra umerket eksempel». Som beskrevet tidligere inkluderer Kongelf (2017) ikke eksempler som følger etter en slik demonstrasjon som «tenk på et lignende problem». Om denne ekskluderes fra min undersøkelse blir det gjennomsnittlig 1,38 heuristikker per eksempel i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), altså nesten 1 heuristikk mindre per eksempel.

Det er, som man kan se i tabell 4, noen vanlige problemløsningsheuristikker som ikke er representert i eksemplene i Faktor 8. Dette er «se etter et mønster», «gjett og sjekk» og «jobb baklengs». «Gjør problemet enklere» forekommer kun to ganger og «bruk digitale hjelpemidler» kun én gang, dette ved at bruken av kalkulator og hvordan man kunne løst noe på denne nevnes.
Kategori 2, 3, 5, 7 og 9 er delt opp i underkategorier. I tabell 5-8 vises fordelingen i disse underkategoriene for kategori 2, 3, 5 og 9, i og med at tilfellene av kategori 7 forekom kun i underkategorien «bruk metode fra umerket eksempel» og dermed ikke er nødvendig å vise.

Kategori 2: Lag en systematisk tabell/liste		
A: Del av problemtekst, informativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
7	3	2

Tabell 5: Fordelinga i underkategorier under kategori 2 i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Kategori 3: Lag en visualisering/illustrasjon			
A1: Del av problemtekst, informativ	A2: Del av problemtekst, dekorativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
6	6	5	2

Tabell 6: Fordelinga i underkategorier under kategori 3 i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Kategori 5: Løs deler av problemet	
A: Trinnvis utførelse	B: Oppdeling av problemet
10	5

Tabell 7: Fordelinga i underkategorier under kategori 5 i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Kategori 9: Se problemet fra en annen side		
A: Endre uttrykksform	B: Løs problemet på ulike måter	C: Annet
18	1	1

Tabell 8: Fordelinga i underkategorier under kategori 9 i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Her kommer det fram at særlig underkategorien «endre uttrykksform» dominerer kategori 9. Kongelf (2017) har, som beskrevet tidligere, argumentert for at denne underkategorien faktisk skal regnes med som en problemløsingsheuristikk, mens Harder (2013) og Yan (2018) har ekskludert denne fra sine studier. Jeg har valgt å inkludere denne underkategorien basert på begrunnelsene til Kongelf (2017), men observerer at den øker forekomsten av heuristikker i eksemplene betraktelig.

I kategori 2 og 3 er det underkategori C «del av løsningsprosessen» som er den mest interessante delen av kategoriene med tanke på å bruke heuristikkene «lag en systematisk tabell/liste» og «lag en visualisering/illustrasjon» som del av en problemløsingssekvens. Dette fordi det er underkategori C som faktisk demonstrerer at man kan bruke disse strategiene for å løse problemer uten at dette er etterspurt. I kategori 2 utgjør denne underkategorien ca. 17 % og i kategori 3 utgjør den ca. 11 % av alle tilfellene.

Det kan også være interessant å undersøke hvilke tema som er inkludert i de ulike lærebøkene, hvor mange eksempler hvert av dem inneholder og utbredelsen av de ulike heuristikkene i forhold til tema i bøkene. I tabell 9 under vises en oversikt over de ulike kapitlene og antall eksempler i hvert av dem. Tabell 10 under inneholder en oversikt over de ulike kapitlene og tilhørende registreringer av heuristikker i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Kapittel	**Antall eksempler**
Tall og tallforståelse	6
Brøk	14
Prosent	4
Geometri	3
Statistikk	8
Tall og algebra	9
Måling og enheter	6

Tabell 9: Antall eksempler som er inkludert i analysen per kapittel i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017)

Kapittel/Kategori	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Totalt antall**
Tall og tallforståelse	-	-	1	-	1	-	3	2	2	1	10
Brøk	-	1	-	-	8	-	21	-	8	-	38
Prosent	-	-	2	-	-	-	3	-	4	-	9
Geometri	-	-	4	-	1	-	1	-	1	-	7
Statistikk	-	11	6	-	1	-	3	-	-	-	21
Tall og algebra	-	-	3	-	3	-	12	-	-	-	18
Måling og enheter	-	-	3	-	1	-	2	-	5	-	11

Tabell 10: Antall registrerte heuristikker per kategori i hvert kapittel i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017)

Her kan vi blant annet observere at registrerte anvendelser av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste» hovedsakelig stammer fra kapittelet omhandlende statistikk. Noe som ikke fremkommer i denne tabellen er hvor mange av disse tabellene/listene som faktisk er en del av løsningsprosessen. 7 av de 11 tilfellene er registrert i underkategorien «del av problemtekst, informativ», 2 er «direkte etterspurt» og 2 er registrert i underkategorien «del av løsningsprosessen». Kategorien «lag en visualisering/illustrasjon» blir også registrert flest ganger i statistikkapittelet. Dette er da aldri i underkategorien «del av løsningsprosessen».

Kapittelet omhandlende brøk inneholder flest eksempler og får dermed, naturlig nok, høyest forekomst av flere av heuristikkene. Særlig forekomsten av kategori 5 «løs deler av problemet» og kategori 7 «tenk på et lignende problem» er fremtredende i dette kapittelet. Brøkkapittelet, sammen med kapitlene omhandlende prosent og måling, inneholder flest registreringer av kategori 9 «se problemet fra en annen side». Som vi så i tabell 8 over, er de fleste registrerte tilfellene av denne kategorien forbundet med endring av uttrykksform. Dette kan forklare hvorfor det er i akkurat disse kapitlene «se problemet fra en annen side» forekommer oftest, selv om direkte etterspurte endringer i uttrykksform ikke inkluderes. Det endres i disse kapitlene ofte uttrykksform underveis i løsningsprosessen i eksemplene. Dette kan være ved for eksempel å endre et desimaltall til en brøk med 100 som nevner for å lettere kunne se hva det blir i prosent.

5.2.1.2 Nummer 8

Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2019) inneholder 86 eksempler som har blitt analysert. Denne boka har det høyeste antallet eksempler av bøkene i denne studien. Disse eksemplene inneholdt tilsammen 177 heuristikker. Dermed blir det gjennomsnittlig ca. 2,06 heuristikker per eksempel. I tabell 11 under vises antall registreringer i hver kategori i Nummer 8.

1. se etter møn-ster	2. lag en tabell/ liste	3. Lag en illustrasjon/ visualisering	4. Gjett og sjekk	5. Løs deler av problemet	6. Jobb bak-lengs	7. Tenk på et lignende problem	8. Gjør problemet enklere	9. Se problemet fra en annen side	10. Bruk digitale hjelpe-midler	Totalt antall
3	22	38	2	39	0	25	0	40	8	177

Tabell 11: Antall registreringer per kategori i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

I denne boka ser man at kategori 1 og 4 også er representert i noen eksempler, i tillegg til at heuristikken «bruk digitale hjelpemidler» benyttes oftere enn i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). «Gjør problemet enklere» er derimot ikke registrert i Nummer 8 (Hole et al., 2019), noe den er i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017).

Antallet heuristikker per eksempel blir lavere enn i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), på tross av at flere kategorier er representert. Dette er et resultat av at det i Nummer 8 (Hole et al., 2019) ikke like ofte demonstreres hvordan lignende problemer kan løses som innledning til eksempelet. Om man ekskluderer den gjeldende underkategorien under «tenk på et lignende problem», blir antallet heuristikker per eksempel 1,81, altså høyere enn i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). I Nummer 8 (Hole et al., 2019) brukes også flere eksempler som introduksjon til en ny regneregel eller løsningsmetode som kan benyttes i oppgavene. Noen ganger er også elevoppgavene innledning til nye tema, men da som regel etter en kort forklaring eller introduksjon til temaet.

I og med at det i denne boka benyttes eksempler for å demonstrere noe som ikke allerede er vist i teksten, så er det ikke alle eksemplene som inneholder spesifikke oppgaver. De inneholder spesifikke eksempler på situasjoner eller lignende, men det kommer ikke fram noe tydelig skille mellom oppgavetekst og løsning. Flere av disse eksemplene er demonstrasjoner av hvordan man bruker ulike digitale hjelpemidler, som regneark og GeoGebra. Da er de kodet som kun kategori 10 «bruk digitale hjelpemidler», som beskrevet i avsnitt 4.4.3.

Ved å se på den overnevnte fordelingen av de ulike heuristikkene i eksemplene og gjennomsnittet per eksempel, ser man ikke nødvendigvis en stor forskjell fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). Under følger tabeller som viser fordelingen i underkategoriene, som også viser større ulikheter mellom de to bøkene som er laget med utgangspunkt i den gamle læreplanen.

Kategori 2: Lag en tabell/liste		
A: Del av problemtekst, informativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
11	0	11

Tabell 12: Fordelingen i underkategorier under kategori 2 i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Kategori 3: Lag en visualisering/illustrasjon			
A1: Del av problemtekst, informativ	A2: Del av problemtekst, dekorativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
6	4	14	14

Tabell 13: Fordelingen i underkategorier under kategori 3 i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Kategori 5: Løs deler av problemet	
A: Trinnvis utførelse	B: Oppdeling av problemet
22	17

Tabell 14: Fordelingen i underkategorier under kategori 5 i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Kategori 7: Tenk på et lignende problem	
A: Lignende problem nevnes	B: Bruk metode fra umerket eksempel
4	21

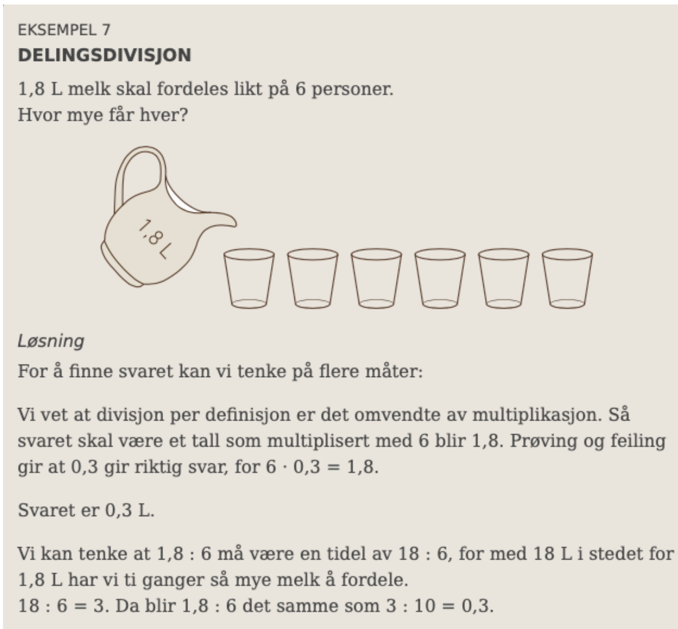
Tabell 15: Fordelingen i underkategorier under kategori 7 i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Kategori 9: Se problemet fra en annen side		
A: Endre uttrykksform	B: Løs problemet på ulike måter	C: Annet
14	16	10

Tabell 16: Fordelingen i underkategorier under kategori 9 i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

I Nummer 8 (Hole et al., 2019) ser vi et høyt antall både av eksempler hvor tabeller/lister og visualiseringer er en del av løsningsprosessen, eksempler som inneholder en oppdeling av problemer, altså under kategori 5 «løs deler av problemet», og eksempler som demonstrerer ulike måter å løse et problem.

I tillegg er det i Nummer 8 (Hole et al., 2019) fire eksempler hvor det faktisk nevnes at man tenker på et lignende problem og dets resultat eller løsningsmetoder for å løse det gjeldende problemet. Det er også ti tilfeller av kategori 9 «se problemet fra en annen side» hvor det demonstreres at du kan tenke på en annen måte for å løse problemet. For eksempel ved å tenke på divisjon som det motsatte av multiplikasjon, som vist i figur 9 under (Hole et al., 2019, s. 111). Dette eksempelet er i tillegg kodet som kategori 9B fordi det demonstreres to ulike måter å løse problemet på, kategori 3A fordi det er inkludert en informativ visualisering som del av oppgaveteksten og kategori 4 «gjett og sjekk». Sistnevnte er den eneste heuristikken som eksplisitt nevnes. Dette er tilfellet ved begge registreringene av «gjett og sjekk» i Nummer 8 (Hole et al., 2019).
I dette eksempelet er begge løsningsmetodene som er demonstrert kodet som kategori 9C «annet» under «se problemet fra en annen side», da det også i den andre løsningsmetoden demonstreres hvordan man kan se problemet fra en annen side ved å tenke på 1,8 : 6 som en tidel av 18 : 6.



EKSEMPEL 7

DELINGSDIVISJON

1,8 L melk skal fordeles likt på 6 personer.
Hvor mye får hver?

Løsning

For å finne svaret kan vi tenke på flere måter:

Vi vet at divisjon per definisjon er det omvendte av multiplikasjon. Så svaret skal være et tall som multiplisert med 6 blir 1,8. Prøving og feiling gir at 0,3 gir riktig svar, for $6 \cdot 0{,}3 = 1{,}8$.

Svaret er 0,3 L.

Vi kan tenke at 1,8 : 6 må være en tidel av 18 : 6, for med 18 L i stedet for 1,8 L har vi ti ganger så mye melk å fordele.
18 : 6 = 3. Da blir 1,8 : 6 det samme som 3 : 10 = 0,3.

Figur 9: Eksempel på blant annet underkategorien «annet» under «se problemet fra en annen side». Fra «Nummer 8» av A. Hole, R. Jensen, H. K. Tellefsen & A. K. Wallace, 2019, s. 111, digital versjon basert på 1. utgave, 2. opplag. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2014.

De ulike temaene/kapitlene, antall eksempler og fordelingen av heuristikker i disse vises i tabell 17 og 18 under.

Kapittel	**Antall eksempler**
Tall og tallregning	12
Mer om tall og tallregning	17
Geometri	19
Tall og algebra	18
Statistikk og sannsynlighet	20

Tabell 17: Antall eksempler som er inkludert i analysen per kapittel i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Kapittel/Kategori	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Totalt antall**
Tall og tallregning	-	-	10	-	1	-	10	-	10	-	31
Mer om tall og tallregning	-	-	4	2	6	-	6	-	14	2	34
Geometri	1	2	17	-	10	-	5	-	5	1	41
Tall og algebra	2	2	3	-	14	-	1	-	7	-	29
Statistikk og sannsynlighet	-	18	4	-	8	-	3	-	4	5	42

Tabell 18: Antall registrerte heuristikker per kategori i hvert kapittel i Nummer 8 (Hole et al., 2019).

Her kan vi også observere at kapittelet omhandlende statistikk og sannsynlighet inneholder desidert flest tilfeller av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste», noe som er naturlig i forhold til innholdet i dette kapittelet. Her skiller denne boka seg også fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), ved at ca. 44 % av disse tilfellene faller inn under underkategorien «del av løsningsprosessen».

Det er kapittelet omhandlende geometri som inneholder flest tilfeller av kategorien «lag en visualisering/illustrasjon», noe som kan forklares med at det her er mange etterspurte konstruksjoner. Ni av 17 tilfeller av denne heuristikken havner i underkategorien «direkte etterspurt» i dette kapittelet. To tilfeller er «del av problemtekst, informativ» og seks tilfeller er «del av løsningsprosessen».

Kapittelet *Tall og algebra* har høyest forekomst av kategori 5 «løs deler av problemet». Dette er et resultat av at det i dette kapittelet er inkludert flere trinnvise utregninger. 11 av de 14 tilfellene faller inn under underkategorien «trinnvis utførelse».

Nevning av problem eller problemløsing er ikke observert mange ganger i denne læreboka, men nevnes i forbindelse med å sette opp likninger. I delkapittel 4E ved navn *Likninger* står det at «Likninger kan brukes til å løse praktiske problemer, og i matematikken er det svært viktig å kunne sette opp likninger. Da løser vi ofte oppgavene raskere og med mindre skriving.» (Hole et al., 2019, s. 289). Deretter følger eksempelet vist i figur 10 under.

EKSEMPEL 13

Å SETTE OPP LIKNINGER

Emmy har 5 kr, og til sammen har hun og Kurt 8 kr. La x være antall kroner som Kurt har.

Hvor mange kroner har Kurt? Sett opp en likning, og finn svaret ved å løse likningen.

Løsning

Her kan det være flere måter å tenke på når vi skal sette opp likningen. Vi kan sette opp fire ulike likninger:

$x = 8 - 5$ Kurt har 8 kr minus de 5 som Emmy har.
$5 + x = 8$ 5 kr pluss det som Kurt har, må bli 8.
$8 = x + 5$ 8 kr må være summen av det Kurt og Emmy har.
$8 - x = 5$ 8 kr minus det Kurt har, må bli 5 kr.

$x = 3$ blir løsningen til alle disse likningene. Kurt har 3 kr.

Figur 10: Eksempel fra Nummer 8 hvor det benyttes likning for å løse et problem. Fra «Nummer 8» av A. Hole, R. Jensen, H. K. Tellefsen & A. K. Wallace, 2019, s. 289, digital versjon basert på 1. utgave, 2. opplag. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2014.

5.2.1.3 Generelt om bøkene tilknyttet den gamle læreplanen

I likhet med Kongelf (2017) sine funn, og funnene fra de andre masteroppgavene som har benyttet seg av Kongelf sitt analyseverktøy, fant også jeg at det som regel ikke ble eksplisitt beskrevet hvilke problemløsingsheuristikker som ble benyttet i eksemplene i de gamle bøkene. Dermed er det flere eksempler som blir kodet med ulike problemløsingsheuristikker, uten at disse faktisk nevnes eller beskrives i bøkene. Det blir også ofte introdusert en løsningsmetode og en demonstrasjon av denne i et umerket eksempel før et merket eksempel, hvor denne deretter blir benyttet i eksempelet for å løse dette. Dette uten at det blir spesifikt nevnt at man bruker lignende metode. Det blir ikke beskrevet at de i eksempelet tenker på et lignende problem, men det har blitt kodet som «tenk på et lignende problem» i underkategorien «bruk metode fra umerket eksempel» om løsningsmetoden som er benyttet er demonstrert i et umerket eksempel rett før det analyserte eksempelet. Dette var som beskrevet over spesielt utbredt i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). I Nummer 8 (Hole et al., 2019) er det fire eksempler hvor det foregående eksempelet, eller annet lignende problem, og løsningen av dette blir nevnt som en del av å løse problemet i det gitte eksempelet. Dermed er det kun ved fire tilfeller i de eldre bøkene at kodingen av et eksempel i kategori 7 «tenk på et lignende problem» ikke er et tilfelle av at det følger etter en demonstrasjon i teksten.
Jeg observerte at det i begge bøkene ble en høy forekomst av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste» under kapitlene omhandlende statistikk og sannsynlighet, og at geometrikapitlene inneholdt mange visualiseringer/illustrasjoner.

5.2.2 Bøker tilknyttet den nye læreplanen i matematikk

Bøkene som er laget i forbindelse med fagfornyelsen er Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) fra Cappelen Damm og Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) fra Aschehoug, som beskrevet tidligere. Her vil jeg presentere funnene fra disse. Både antall heuristikker, fordelingen i de ulike kategoriene og hvilke tema de nye bøkene inkluderer. Likheter og ulikheter mellom disse nye bøkene og de gamle vil bli nærmere presentert i kapittel 5.2.3 og diskutert i kapittel på 6.

5.2.2.1 Matematikk 8

Boken Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) inneholder 75 merkede eksempler. Disse eksemplene inneholder igjen totalt 240 registrerte heuristikker. Dette blir gjennomsnittlig 3,2 heuristikker per eksempel, noe som demonstrerer at det også i denne boken benyttes mer enn én problemløsingsheuristikk per eksempel. I tabell 19 under ser man hvor mange ganger de ulike heuristikkene representeres i de 75 eksemplene i Matematikk 8.

1. se etter møn-ster	2. lag en tabell/ liste	3. Lag en illustrasjon/ visualisering	4. Gjett og sjekk	5. Løs deler av problemet	6. Jobb bak-lengs	7. Tenk på et lignende problem	8. Gjør problemet enklere	9. Se problemet fra en annen side	10. Bruk digitale hjelpe-midler	Totalt antall
0	3	21	0	64	0	87	3	55	7	240

Tabell 19: Antall registreringer av hver kategori i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Alle tilfellene av kategori 7 «tenk på et lignende problem» er eksempler hvor en løsningsmetode som er demonstrert i samme delkapittel før eksempelet er blitt brukt. Om denne ekskluderes blir gjennomsnittet heuristikker per eksempel 2,04.
I Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) inneholder mange av eksemplene flere deloppgaver eller uavhengige oppgaver, noe som fører til et høyt antall heuristikker per eksempel, men ikke nødvendigvis per løste problem. Dette kan man se ved å trekke fra kategori 7 «tenk på et lignende problem», som beskrevet over, som ofte ble representert med mer enn 1 per eksempel. Dette fordi den ble registrert som 1 per deloppgave/oppgave i hvert eksempel.

Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) har, som den eldre boka fra Cappelen Damm, Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), en tradisjonell oppbygning. Mange av eksemplene inneholder rene tallproblemer. Underkategorien «trinnvis utførelse» blir dermed hyppig representert.

Det ble observert at et delkapittel ved navn «mønster i tall» (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 187) ikke inneholder noen merkede eksempler. Om det hadde vært merkede eksempler i dette delkapittelet, hadde antageligvis heuristikken «se etter et mønster» blitt representert. Delkapittel kalt «å løse et problem ved hjelp av tegning» (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 196) nevner direkte en av heuristikkene i forbindelse med å løse et problem, altså visualisering. Her beskrives det at man kan bruke ulike *metoder* når man skal løse et problem, og at tegninger er én av disse. Deretter følger ett umerket og ett merket eksempel hvor de benytter seg av visualiseringer for å løse problemene.

Et annet delkapittel kalt «Problemløsing og likninger» nevner også problemløsing. Her trekkes i tillegg «å prøve seg fram til løsningen» og «bruke tabell eller tegning» fram (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 226), uten at disse blir benyttet i noe form for eksempel. Her er altså fokuset på å løse problemer ved hjelp av likninger, noe som ikke er en av heuristikkene i min studie. Fan & Zhu (2007) hadde blant annet denne tilnærmingen med i sin studie, men Kongelf (2017) har ekskludert denne fordi den er mer å regne som en generell enn heuristisk tilnærming, som beskrevet tidligere.

Under følger tabeller som viser hvordan fordelingen i underkategoriene av kategori 2, 3, 5 og 9 i Matematikk 8 er.

Kategori 2: Lag en tabell/liste		
A: Del av problemtekst, informativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
1	1	1

Tabell 20: Fordelingen i underkategorier under kategori 2 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Kategori 3: Lag en visualisering/illustrasjon			
A1: Del av problemtekst, informativ	A2: Del av problemtekst, dekorativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
2	4	9	6

Tabell 21: Fordelinga i underkategorier under kategori 3 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Kategori 5: Løs deler av problemet	
A: Trinnvis utførelse	B: Oppdeling av problemet
56	8

Tabell 22: Fordelinga i underkategorier under kategori 5 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Kategori 9: Se problemet fra en annen side		
A: Endre uttrykksform	B: Løs problemet på ulike måter	C: Annet
33	21	1

Tabell 23: Fordelinga i underkategorier under kategori 9 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Her kan vi observere at det under kategori 5 «løs deler av problemet» er åtte eksempler med problemer som deles opp i delproblem og løses separat før hovedproblemet løses, men at underkategorien «trinnvis utførelse» dominerer. Det er også mange eksempler hvor det demonstreres flere ulike løsningsmetoder i denne boka.

Under er det to tabeller som viser antall eksempler per kapittel i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) og antall heuristikker registrert i de ulike kategoriene i hvert kapittel. Her kan vi observere at kategori 7 «tenk på et lignende problem» er mest representert i alle kapitlene utenom *Tall og tallforståelse*, hvor «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side» får et høyere antall registreringer. I og med at kapittelet omhandler tall og tallforståelse er det naturlig at det inneholder mange eksempler hvor en trinnvis utførelse og endring av uttrykksform benyttes. Dette kan forklare det høye antallet registreringer av kategori 5 og 9. Det er i tillegg dette kapittelet som inneholder flest eksempler.
I algebrakapittelet har kategori 5 «løs deler av problemet» fått like mange registreringer som kategori 7 «tenk på et lignende problem». Her er dette også et resultat av mange trinnvise utregninger.

Kapittel	Antall eksempler
Tall og tallforståelse	29
Delelighet og brøk	21
Algebra	17
Funksjoner	8

Tabell 24: Antall eksempler per kapittel i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Kapittel/Kategori	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totalt antall
Tall og tallforståelse	-	-	5	-	26	-	21	3	25	1	81
Delelighet og brøk	-	1	4	-	12	-	36	-	24	-	77
Algebra	-	-	2	-	22	-	22	-	6	-	52
Funksjoner	-	2	10	-	4	-	8	-	-	6	30

Tabell 25: Antall registrerte tilfeller av hver kategori i de ulike kapitlene i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Kapittelet omhandlende funksjoner inneholder desidert færrest eksempler, men får likevel den høyeste forekomsten av kategori 3 «lag en visualisering/illustrasjon». Dette kan forklares ved at dette kapittelet inneholder mange grafiske representasjoner av funksjoner, noe som etter definisjonen min inkluderes i kategori 3. To av ti forekomster av denne kategorien er plassert i underkategorien «del av problemtekst, informativ», fire i «del av problemtekst, dekorativ», tre i «direkte etterspurt» og én i «del av løsningsprosessen». Dermed er det ikke så ofte disse visualiseringene faktisk er brukt som en strategi for å komme videre i løsningsprosessen.

Kapitlene *Tall og tallforståelse* og *Delelighet og brøk* inneholder mange registreringer av kategori 9 «se problemet fra en annen side». Som nevnt tidligere kan dette være et resultat at disse kapitlene inneholder mange endringer i uttrykksform. Førstnevnte kapittel omhandler blant annet regning med potenser, noe som kan innebære mange endringer i uttrykksform. Kapittelet *Delelighet og brøk* omhandler blant annet faktorisering og utviding og forkorting av brøker som kan øke forekomsten av underkategorien «endre uttrykksform» under kategori 9 «se problemet fra en annen side». Om vi går inn i resultatene og undersøker fordelingen i underkategorier i disse nevnte kapitlene finner vi at kapittelet *Tall og tallforståelse* inneholder 18 registrerte tilfeller av underkategorien «endre uttrykksform» og syv av underkategorien «løs problemet på ulike måter». Kapittelet *Delelighet og brøk* inneholder 11 registrerte tilfeller av «endre uttrykksform», 12 av «løs problemet på ulike måter» og ett tilfelle i underkategorien «annet». Dermed ser vi at det er mange eksempler hvor det endres uttrykksform som en del av løsningsprosessen i kapittelet omhandlende tall og tallforståelse, mens det i kapittelet omhandlende delelighet og brøk er ganske jevnt fordelt mellom endring av uttrykksform og tilfeller av «løs problemet på ulike måter».

5.2.2.2 Matemagisk 8

Boken Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) har ikke en tradisjonell *tekst-eksempler-oppgaver* – oppbygning, slik som Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). I Matemagisk 8 er det ofte diskusjonsspørsmål eller andre elevoppgaver som innleder kapitlene. Eksemplene er som regel brukt for å introdusere en måte å løse et problem på eller for å vise hvordan man kan løse problemene etter tilsvarende problemer har blitt løst av elevene. Matemagisk inneholder tilsammen 51 eksempler som er blitt analysert. Totalt antall registrerte heuristikker er 103. Dette fører til et gjennomsnittlig antall heuristikker per eksempel på 2,02. I tabell 26 vises antall registreringer per heuristikk i Matemagisk 8.

1. se etter møn-ster	2. lag en tabell/ liste	3. Lag en illustrasjon/ visualisering	4. Gjett og sjekk	5. Løs deler av problemet	6. Jobb bak-lengs	7. Tenk på et lignende problem	8. Gjør problemet enklere	9. Se problemet fra en annen side	10. Bruk digitale hjelpe-midler	Totalt antall
7	5	23	0	28	0	3	0	27	10	103

Tabell 26: Antall registrerte tilfeller per kategori i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020*).*

Her kan man observere et betydelig lavere antall registreringer under kategori 7 «tenk på et lignende problem» enn i de andre lærebøkene i studien. Dette kommer nok av at eksemplene i denne boka ofte brukes på en annen måte enn i de andre bøkene i studien, som beskrevet over. Om vi ekskluderer kategori 7B her får man gjennomsnittlig 1,98 heuristikker per eksempel, altså ikke en markant endring fra om kategori 7B tas med i beregningen, som i noen av de andre lærebøkene.
Fordelingen i underkategoriene under kategori 2, 3, 5, 7 og 9 vises i tabell 27-31.

Kategori 2: Lag en tabell/liste		
A: Del av problemtekst, informativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
0	0	5

Tabell 27: Fordelingen i underkategorier under kategori 2 i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Kategori 3: Lag en visualisering/illustrasjon			
A1: Del av problemtekst, informativ	A2: Del av problemtekst, dekorativ	B: Direkte etterspurt	C: Del av løsningsprosessen
4	0	1	18

Tabell 28: Fordelinga i underkategorier under kategori 3 i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Kategori 5: Løs deler av problemet	
A: Trinnvis utførelse	B: Oppdeling
23	5

Tabell 29: Fordelinga i underkategorier under kategori 5 i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Kategori 7: Tenk på et lignende problem	
A: Lignende problem nevnes	B: Bruk metode fra umerket eksempel
1	2

Tabell 30: Fordelingen i underkategorier under kategori 7 «tenk på et lignende problem» i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Kategori 9: Se problemet fra en annen side		
A: Endre uttrykksform	B: Løs problemet på ulike måter	C: Annet
14	11	2

Tabell 31: Fordelinga i underkategorier under kategori 9 i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Vi kan observere at underkategorien «del av løsningsprosessen» dominerer både kategori 2 og 3 i denne læreboka. Dette er som beskrevet den delen av disse kategoriene som er tettest forbundet med selve problemløsingsprosessen.
Vi observerer at det også i denne boka er underkategorien «trinnvis utførelse» som dominerer kategori 5 «løs deler av problemet». Fordelingen i kategori 9 «se problemet fra en annen side» er relativ lik i underkategoriene «endre uttrykksform» og «løs problemet på ulike måter», men underkategorien «annet» er lite representert.
Under følger tabeller som viser hovedtemaene/kapitlene, antall eksempler i hvert av disse og antall registreringer per kategori i hvert av disse i læreboka Matemagisk 8 (kongsnes & Wallace, 2020).

Kapittel	**Antall eksempler**
Hele tall	5
Brøk og desimaltall	9
Algebraiske uttrykk og formler	4
Potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge	6
Algebra og likninger	8
Parenteser og likninger	4
Hva er en funksjon	5
Grafen til en funksjon	3
Lineære funksjoner	3
Sammensatte målinger	4

Tabell 32: Antall eksempler per kapittel i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020)

Kapittel/Kategori	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Totalt antall**
1. Hele tall	2	-	4	-	3	-	1	-	3	-	13
2. Brøk og desimaltall	-	1	2	-	4	-	-	-	5	6	18
3. Algebraiske uttrykk og formler	2	1	4	-	2	-	-	-	-	1	10
4. Potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge	-	-	-	-	3	-	1	-	6	-	10
5. Algebra og likninger	-	-	4	-	6	-	-	-	4	-	14
6. Parenteser og likninger	2	1	3	-	4	-	-	-	5	-	15
7. Hva er en funksjon	1	1	1	-	1	-	-	-	-	1	5
8. Grafen til en funksjon	-	1	3	-	-	-	-	-	-	-	4
9. Lineære funksjoner	-	-	1	-	3	-	-	-	-	2	6
10. Sammensatte målinger	-	-	1	-	2	-	1	-	4	-	8

Tabell 33: Antall registrerte tilfeller av hver kategori i de ulike kapitlene i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020)

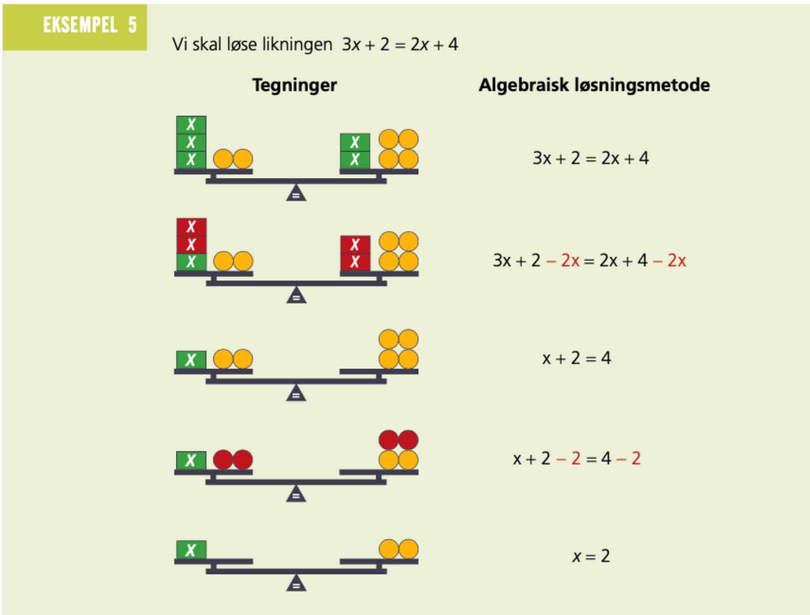
Denne læreboka er delt opp i flere små kapitler, noe som kan gjøre det vanskelig å oppdage noen sammenhenger mellom tema og antall registreringer av ulike heuristikker. Derfor har jeg laget en tabell hvor jeg slår sammen kapitlene i omtrent samme tematiske fordeling som i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).

Tema/kategori	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Totalt antall heuristikker**	**Antall eksempler**
Tall og tallforståelse (kapittel 1, 4)	2	-	4	-	6	-	2	-	9	-	23	11
Delelighet og brøk (kapittel 2)	-	1	2	-	4	-	-	-	5	6	18	9
Algebra (kapittel 3, 5, 6)	4	2	11	-	12	-	-	-	9	1	39	16
Funksjoner (kapittel 7, 8, 9)	1	2	5	-	4	-	-	-	-	3	15	11
Sammensatte målinger (kapittel 10)	-	-	1	-	2	-	1	-	4	-	8	4

Tabell 34: Fordelingen av registrerte heuristikker per tema i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).

Vi observerer her at kapitlene omhandlende funksjoner inneholder gjennomsnittlig færrest registrerte heuristikker per eksempel. I funksjonskapitlene er det flest registreringer i kategori 3 «lag en visualisering/illustrasjon», noe det er naturlig å tenke at kan henge sammen med etterspurte grafiske representasjoner av funksjoner, som beskrevet tidligere. Om man undersøker fordelingen i underkategoriene av kategori 3 kommer det derimot frem at fire av de fem tilfellene er plassert i underkategorien «del av løsningsprosessen».

Kapitlene omhandlende algebra inneholder tilsammen flest eksempler. Dermed er det naturlig at det også er registrert flest heuristikker innenfor dette teamet. Eksemplene her inneholder gjennomsnittlig omtrent 2,44 heuristikker, noe som også er det høyeste gjennomsnittlige antallet innenfor et tema i denne læreboka. Her ser vi spesielt et høyt antall registrerte heuristikker i kategoriene «lag en visualisering/illustrasjon», «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side». Årsaken til at heuristikken «lag en visualisering/illustrasjon» blir registrert relativt hyppig i disse kapitlene er blant annet fordi det er mange eksempler som inneholder figurtall og mønster, med både visualiseringer som del av oppgavetekst og løsningsprosessen. I tillegg er det mange visualiseringer av hvordan man løser likninger, som vist i eksempel 5 i figur 11 under (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 162). Her er likningen løst ved både bruk av visualisering og algebraisk, og eksempelet blir dermed også kodet som kategori 9B, «løs problemet på flere måter». I tillegg er det kodet som kategori 5A, «trinnvis utførelse».



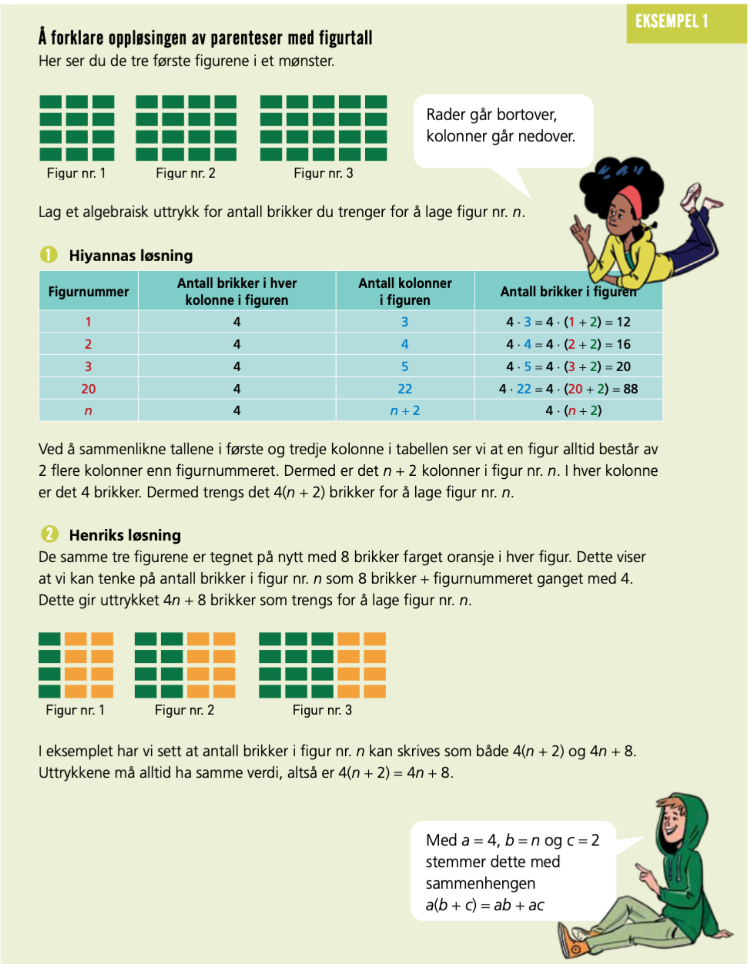
Figur 11: Visualisering av likning. Fra «Matemagisk 8» av A. L. Kongsnes & A. K. Wallace, 2020, s. 162. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2020.

I Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) blir det ikke observert at noen av de ulike heuristikkene som er inkludert i min studie nevnes spesifikt i teksten, slik som i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). Det som imidlertid beskrives også i denne boka er det å sette opp likninger i forbindelse med problemløsing. I delkapittel 5C «Likninger i praktiske situasjoner» er det for eksempel poengtert at «Å sette opp likninger som beskriver praktiske situasjoner kan være en nyttig problemløsningsstrategi» (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 168).

5.2.2.3 Generelt om bøkene tilknyttet LK20

Tilsvarende som i de gamle lærebøkene, beskrives eller nevnes som regel ikke heuristikkene eksplisitt når de benyttes i eksemplene i lærebøkene utviklet i forbindelse med læreplanfornyelsen. Som jeg har beskrevet i kapitlene over inneholder de begge imidlertid noe mer beskrivelser av heuristikker enn de eldre bøkene – da utenom eksemplene.
I Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) nevnes flere av heuristikkene inkludert i min analyse i forbindelse med problemløsing, uten at alle disse demonstreres eller gås noe nærmere inn på. Én av heuristikkene inkludert i min studie, nemlig «lag en visualisering», beskrives som problemløsingsstrategi og benyttes i etterfølgende eksempel i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). Det vektlegges også at bruken av likninger er en nyttig problemløsingsstrategi i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020).
I Matemagisk 8 får man inntrykk av at problemløsing tilknyttes det som kalles «praktiske situasjoner», ved at det er i disse kapitlene trekkes paralleller til problemløsing. I delkapittel 5C «Likninger i praktiske situasjoner» er det for eksempel poengtert at «Å sette opp likninger som beskriver praktiske situasjoner kan være en nyttig problemløsningsstrategi» (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 168). Dermed er det bruken av likninger som eksplisitt vektlegges som problemløsingsstrategi i begge de nye lærebøkene. Denne strategien er som nevnt ikke inkludert i min studie da det er mer å regne som en generell tilnærming enn en heuristisk tilnærming. Heuristikkene som det er undersøkt forekomsten av i min analyse er dermed også i de nye bøkene som regel demonstrert implisitt.
Noen av eksemplene i de nye lærebøkene inneholder mange ulike heuristikker, som for eksempel «Eksempel 1», vist under, fra Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 116).

Her er det både 2 registreringer av «se etter et mønster», 1 av «lag en systematisk tabell som del av løsningsprosess», 1 av «se problemet fra en annen side» da to ulike løsningsmetoder demonstreres, og 1 «lag en visualisering som del av løsningsprosess». Dermed inneholder eksempelet mange løsningsstrategier uten at disse nevnes eksplisitt. Det kommer derimot tydelig frem at man kan benytte ulike løsningsmetoder for å løse problemet, og kategori 9B fremkommer derfor mer eksplisitt enn de andre. Det er også eksplisitt nevnt i problemteksten at figurene er del av et mønster, noe som tilsier at de leter etter dette mønsteret i eksempelet, uten at dette nevnes som en del av løsningsprosessen.



EKSEMPEL 1

Å forklare oppløsingen av parenteser med figurtall

Her ser du de tre første figurene i et mønster.

Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

Rader går bortover, kolonner går nedover.

Lag et algebraisk uttrykk for antall brikker du trenger for å lage figur nr. n.

1 Hiyannas løsning

Figurnummer	Antall brikker i hver kolonne i figuren	Antall kolonner i figuren	Antall brikker i figuren
1	4	3	$4 \cdot 3 = 4 \cdot (1 + 2) = 12$
2	4	4	$4 \cdot 4 = 4 \cdot (2 + 2) = 16$
3	4	5	$4 \cdot 5 = 4 \cdot (3 + 2) = 20$
20	4	22	$4 \cdot 22 = 4 \cdot (20 + 2) = 88$
n	4	$n + 2$	$4 \cdot (n + 2)$

Ved å sammenlikne tallene i første og tredje kolonne i tabellen ser vi at en figur alltid består av 2 flere kolonner enn figurnummeret. Dermed er det $n + 2$ kolonner i figur nr. n. I hver kolonne er det 4 brikker. Dermed trengs det $4(n + 2)$ brikker for å lage figur nr. n.

2 Henriks løsning

De samme tre figurene er tegnet på nytt med 8 brikker farget oransje i hver figur. Dette viser at vi kan tenke på antall brikker i figur nr. n som 8 brikker + figurnummeret ganget med 4. Dette gir uttrykket $4n + 8$ brikker som trengs for å lage figur nr. n.

Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

I eksemplet har vi sett at antall brikker i figur nr. n kan skrives som både $4(n + 2)$ og $4n + 8$. Uttrykkene må alltid ha samme verdi, altså er $4(n + 2) = 4n + 8$.

Med $a = 4$, $b = n$ og $c = 2$ stemmer dette med sammenhengen $a(b + c) = ab + ac$

Figur 12: Eksempel med mange heuristikker. Fra «Matemagisk 8» av A. L. Kongsnes & A. K. Wallace, 2020, s. 116. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2020.

5.2.3 Sammenligning av alle de fire lærebøkene

Nedenfor, i tabell 34, er fordelingen av de ulike heuristikkene i prosent vist. Med tanke på at lærebøkene inneholder et ulikt antall eksempler kan det være hensiktsmessig å vise fordelingen på denne måten for å kunne sammenligne vektleggingen av de ulike heuristikkene i de fire lærebøkene.

	Kategori										
Lærebok	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Totalt**
Faktor	0	10	17	0	13	0	39	2	18	1	100
Nummer	2	12	21	1	22	0	14	0	23	5	100
Matematikk	0	1	9	0	27	0	36	1	23	3	100
Matemagisk	7	5	22	0	27	0	3	0	26	10	100

Tabell 35: Relativ fordeling av heuristikker i prosent i de fire bøkene.

Her ser vi tydelig at kategori 4 «gjett og sjekk», 6 «jobb baklengs» og 8 «gjør problemet enklere» utgjør en liten andel av totalt antall registrerte heuristikker i alle de fire lærebøkene. Kategori 1 «se etter et mønster» er lite representert i Faktor 8, Nummer 8 og Matematikk 8, mens det i Matemagisk 8 er den femte mest brukte heuristikken, med en andel av totalt antall heuristikker på 7 %. Matemagisk 8 skiller seg i tillegg ut fra de andre lærebøkene spesielt under kategori 7 «tenk på et lignende problem» og kategori 10 «bruk digitale hjelpemidler», som utgjør henholdsvis en mindre og en større andel av de registrerte heuristikkene i denne læreboka enn i de andre.
Man kan observere at den desidert mest vektlagte heuristikken i både Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) er «tenk på et lignende problem» (kategori 7). I Faktor 8 følger deretter kategori kategori 9 «se problemet fra en annen side», 3 «lag en visualisering» og kategori 5 «løs deler av problemet». I Matematikk 8 vektlegges også kategori 5 og 9 mye, mens kategori 3, som er den fjerde mest vektlagte kategorien, utgjør en betydelig lavere andel av totalen.
I Nummer 8 (Hole et al., 2019) er det heuristikkene «se problemet fra en annen side» (kategori 9), «løs deler av problemet» (kategori 5) og «lag en visualisering/illustrasjon» (kategori 3) som vektlegges mest, og omtrent likt med litt over 20 % hver.
Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) skiller seg som sagt litt ut fra de andre, men også i denne utgjør kategori 5, 9 og 3 en betydelig andel av totalen. Dette er de mest representerte heuristikkene i denne læreboka.

Dermed ser vi at særlig heuristikkene «lag en visualisering/illustrasjon» (kategori 3), «løs deler av problemet» (kategori 5) og «se problemet fra en annen side» (kategori 9) vektlegges i alle de fire undersøkte lærebøkene i matematikk for 8. trinn. Dette kan da tilsynelatende regnes som et midlertidig svar på forskningsspørsmålet:
Hvilke problemløsingsheuristikker brukes og hvordan er utbredelsen av disse i eksemplene i de gamle og nye matematikklærebøkene for åttende trinn?
I det kommende kapittelet vil jeg drøfte disse resultatene nærmere og gi et grundigere svar på dette forskningsspørsmålet.

6 Diskusjon

I forrige kapittel ble resultatene fra innholdsanalysen av de to læreplanene og de fire lærebøkene presentert. Første del av forskningsspørsmål 1 ble besvart ved at vi så på hva den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen sier om problemløsing. Helt til sist i forrige kapittel fikk vi i tillegg et midlertidig svar på forskningsspørsmål 2.
I dette kapittelet vil jeg gå nærmere inn på betydningen av resultatene.
Forskningsspørsmålene er, repetert fra kapittel 2:

- Hva sier den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen om problemløsing for åttende trinn, og hvordan gjenspeiles dette i lærebøkene?
- Hvilke problemløsingsheuristikker brukes, og hvordan er utbredelsen av disse, i eksemplene i de gamle og de nye matematikklærebøkene for åttende trinn?

Jeg vil først presentere en overordnet diskusjon av funnene fra de fire lærebøkene, før jeg går nærmere inn på eventuelle endringer fra de gamle til de nye bøkene. Gjennom en diskusjon av disse endringene vil jeg belyse forskningsspørsmålene ytterligere. Her mener jeg det er mest hensiktsmessig å se på endringen i bøkene fra hvert forlag separat. Dette fordi man da kan få et innblikk i hvordan de de ulike forlagene forholder seg til endringene i læreplanen. Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) tar over for Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) hos Cappelen Damm og det er de samme forfatterne som har laget begge bøkene. Matematisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) ser ut til å ta over for Nummer 8 (Hole et al., 2019) hos Aschehoug. Her er det samme redaktør og én forfatter som går igjen. Det er i tillegg enklere å sammenligne bøkene utgitt av samme forlag da disse har en likere oppbygning. Oppbygningen påvirker, som vi har sett i kapittel 5, utbredelsen av problemløsingsheuristikker.

6.1 Utbredelsen av problemløsingsheuristikker i de fire lærebøkene

I teorigjennomgangen ble det funnet at selv om heuristiske tilnærmingsmåter som de er beskrevet hos Polya (1990) kan være for avansert for elever i skolealder, burde fundamentet for å kunne benytte seg av disse legges underveis i hele undervisningsforløpet (Schoenfeld, 1985). I tillegg kan problemløsere i alle aldre ha nytte av heuristikkene slik de er beskrevet i dette studiet, i det minste ved å kunne gjenkjenne og kopiere dem (Kongelf, 2017). Vi har observert at eksemplene i samtlige av de fire lærebøkene inneholder problemløsingsheuristikker. Dette kommer imidlertid ikke som en overraskelse da heuristikkene som er inkludert i denne studien, og beskrivelsen av disse, er tilpasset ungdomsskolenivå. Utbredelsen av, og hvordan de ulike heuristikkene presenteres, er derimot noe ulik i de forskjellige lærebøkene. I de to gamle lærebøkene kommer ikke bruken av heuristikkene så tydelig frem, noe som kan sammenlignes med Kongelf (2017) sine funn fra undersøkelsen av lærebøkene for 9. trinn. Dette er ikke i tråd med anbefalingene til blant annet Schoenfeld (1985), som mener at elevene ikke skal behøve å utvikle strategiene uten støtte.
Vi observerte at begrepene problemløsing og problem, og bruken av varierte strategier og løsningsmetoder, ble vektlagt i både den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen. For at elevene skal kunne opparbeide seg ulike strategier innen problemløsing må disse være tilgjengelige og eksplisitt fremstilt. Dette kan man argumentere for at ikke er tilfellet i de gamle lærebøkene, ved at de som regel ikke presenterer heuristikkene eksplisitt.

I den nye læreplanen er det de seks kjerneelementene som er viktigst, og som faget skal bygges opp rundt. Ved at problemløsing faktisk inngår i ett av disse seks kjerneelementene som skal gå igjen i all undervisningen i faget, vil det kunne oppfattes som enda viktigere enn i den gamle læreplanen, selv om problemløsing også her nevnes ofte. I de nye bøkene kommer, som beskrevet tidligere, noen av heuristikkene og hvordan disse kan benyttes mer eksplisitt frem. Dette kan være et resultat av at kjerneelementet *Utforsking og problemløsing* er inkludert i den nye læreplanen og presentert som det viktigste av alle de seks kjerneelementene. I tillegg har studien til Kongelf (2019) påvirket utformingen av den nye kvalitetsveilederen for læremidler fra Utdanningsdirektoratet, hvor blant annet påstanden «Læremiddelet har gode eksempler som viser hvordan eleven kan bruke ulike problemløsningsstrategier» (Kongelf, 2019, s. 88) er inkludert. Lærebokforfatterne kan ha brukt denne kvalitetsveilederen i arbeidet med fornyelsen av lærebøkene. Dermed kan Kongelf (2019) sin studie direkte ha påvirket innholdet i eksemplene i lærebøkene. For at lærere som skal benytte seg av denne kvalitetsveilederen skal kunne vurdere om eksemplene inneholder ulike løsningsstrategier, må bruken av disse strategiene nødvendigvis komme mer eksplisitt frem. I denne studien har jeg imidlertid også vurdert den implisitte bruken av ulike strategier, noe som kan tale for at lærere og elever også kan oppdage implisitt brukte strategier i eksemplene når de skal bruke og vurdere disse bøkene. Jeg vil derimot påstå at man ikke vil kunne oppdage like mye av den implisitte bruken av heuristikkene i en vanlig skolehverdag som i en studie hvor man går grundig inn for det. Dette fordi mange av eksemplene inneholder skjulte heuristikker som har blitt inkludert i min analysering uten at det antageligvis har vært lærebokforfatternes intensjon å eksemplifisere disse.

Undersøkelsen av hvilke temaer bøkene inneholdt, og antall eksempler og heuristikker i disse, viste oss at de gamle bøkene for 8. trinn ikke inkluderte funksjoner, men statistikk og geometri, noe de nye bøkene ikke gjør. I de nye bøkene inkluderes derimot funksjoner. Fra undersøkelsen av læreplanene fant vi at den gamle læreplanen ikke er oppdelt med kompetansemål for hvert klassetrinn på ungdomsskolen. I den nye læreplanen er det en slik inndeling, noe som fører til at det er tall og tallforståelse, brøk, algebra og funksjoner som blir vektlagt i de nye lærebøkene. Dette medfører særlig at de eldre lærebøkene inneholder mer tabeller og lister i forbindelse med kapitlene som omhandler statistikk. Geometrikapitlene i de gamle lærebøkene og funksjonskapitlene i de nye lærebøkene inneholder endel visualiseringer/illustrasjoner. Dermed blir kanskje ikke andelen registreringer av denne heuristikken påvirket i like stor grad av det ulike temainnholdet i de gamle og nye lærebøkene. Fra teorigjennomgangen ser vi at elevene burde trenes i å bruke heuristikkene i mange ulike type problemer for å bli gode problemløsere (Polya, 1990). Dette kan være et argument for å mene at ikke det ulike innholdet av temaer i de gamle og de nye lærebøkene burde påvirke heuristikkbruken. Vi har imidlertid observert mulige sammenhenger mellom det ulike innholdet i gammel og ny læreplan og de tilknyttede bøkene. Jeg vil gå nærmere inn på likheter og ulikheter mellom de gamle og de nye lærebøkene i de etterfølgende delkapitlene.

6.2.1 Sammenligning av Faktor 8 og Matematikk 8

Jeg vil nå gå nærmere inn på likheter og ulikheter mellom den gamle og nye læreboka i matematikk fra Cappelen Damm. Under følger en tabell som viser resultatene fra de kvantitative innholdsanalysene av Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), også presentert i forrige kapittel.

Bok/Kategori	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totalt
Faktor 8	0	12	19	0	15	0	45	2	20	1	114
Matematikk 8	0	3	21	0	64	0	87	3	55	7	240

Tabell 36: Antall registreringer per kategori i lærebøkene fra Cappelen Damm.

Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) inneholder flere eksempler enn Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), noe som naturlig fører til at denne førstnevnte læreboka inneholder flere registrerte heuristikker. Men det er likevel en betydelig økning fra gammel til ny bok, da Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) har 3,2 gjennomsnittlig antall registrerte heuristikker per eksempel, mot Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) sine 2,28. Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) har det høyeste registrerte antallet heuristikker per eksempel av alle bøkene i denne studien. Som vi kan se av tabellen over er ikke de utelatte heuristikkene fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) inkludert i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) heller. Det er derimot noen andre interessante likheter og forskjeller som jeg skal gå nærmere inn på her.

Som beskrevet i forrige kapittel har Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) en tradisjonell oppbygning, med en introduksjon og mange ganger en demonstrasjon av hvordan man løser noe, deretter ett eller flere merkede eksempler hvor man benytter det som er demonstrert, og til slutt elevoppgaver. Det samme er tilfellet i den nye læreboka Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) fra Cappelen Damm. I tillegg inneholder mange av eksemplene flere deloppgaver eller separate oppgaver. Dette fører til en høy forekomst av kategori 7 «tenk på et lignende problem» i begge bøkene, da det veldig ofte demonstreres i et umerket eksempel hvordan man kan løse et gitt problem før et merket eksempel følger. Det er den mer mekaniske delen av denne heuristikken, altså kopiering av løsningsmetoder som er demonstrert rett før eksempelet, som dominerer kategori 7 i begge disse lærebøkene. Vi så tidligere at om vi ekskluderte denne ble det gjennomsnittlig 2,04 heuristikker per eksempel i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) og 1,38 i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). Dermed er det fortsatt en økning i antall registrerte heuristikker per eksempel fra gammel til ny bok om kategori 7 «tenk på et lignende problem» ekskluderes. Sistnevnte resultat kan også sammenlignes med resultatene fra Kongelf (2017) sin studie av heuristikker i lærebøker for 9. trinn. Der har han registrert totalt 107 heuristikker fordelt på 89 eksempler i læreboka Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) for niende trinn (Kongelf, 2017). Dette tilsvarer da ca. 1,2 heuristiske tilnærmingsmåter per eksempel. Kongelf (2017) inkluderte, som beskrevet tidligere, ikke det som hos meg kalles kategori 7B. Uten denne kategorien ser vi altså at det både i den gamle åttende- og niendetrinnsboka ble registrert gjennomsnittlig under 1,5 heuristiske tilnærmingsmåter per eksempel, mens det i den nye åttendetrinnsboka er registrert over 2.

Kun ett eksempel i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) viser hvordan man kan løse noe med ulike løsningsmetoder, noe som er godt representert i de andre bøkene i studien. Noe av årsaken til dette er som tidligere nevnt at det i denne boka deles opp i ulike etterfølgende eksempler hvis det skal demonstreres ulike løsningsmetoder. Dermed fremkommer det ikke i min analyse. Dette er derimot ikke gjort så ofte i denne boka at det ville endret resultatene mine nevneverdig om det hadde blitt tatt høyde for. I Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) er dette en av de største forskjellene fra den gamle boka utgitt av Cappelen Damm. Her demonstreres det flere ganger hvordan man kan løse et problem på ulike måter i samme eksempel. Hele 21 av de 55 registreringene av kategori 9 «se problemet fra en annen side» er eksempler på at problemet løses på ulike måter i denne nye læreboka. Læreplanene legger også opp til at elevene skal læres opp i å bruke ulike metoder og strategier i problemløsing. Her oppfatter jeg metoder som mer konkrete løsningsverktøy, som for eksempel multiplikasjonsalgoritmen. Dermed kan det gjennom underkategorien «løs problemet på ulike måter» vektlegges at elevene skal kjenne til ulike løsningsmetoder og kunne løse et problem på ulike måter.

Strategier kan, som beskrevet tidligere, tettere forbindes med heuristikkene som det undersøkes forekomsten av i denne studien. Kongelf (2019) beskriver strategier som noe individuelt. Heuristikkene er upersonlige, men kan utvikle seg til å bli strategier hos den enkelte problemløser over tid. Dette krever øving og vektlegging av heuristikker i undervisningen. Som presentert under resultatene fra de ulike lærebøkene observerte jeg at heuristikkene som regel ikke ble beskrevet eksplisitt i eksemplene, men heller ble brukt implisitt. På denne måten får ikke elevene mulighet til å opparbeide seg et vokabular for heuristikkene som kan benyttes i problemløsing og må «oppdage» disse på egenhånd. Schoenfeld (1985) anbefalte en mer eksplisitt fremstilling og undervisning i heuristikker underveis i hele matematikkopplæringen. Vi så at det i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) ble nevnt flere heuristikker og poengtert at disse kan benyttes for å løse problemer. Dette er mer i tråd med anbefalingene og er en endring fra Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), hvor jeg ikke har observert at problemløsing eller noen av heuristikkene nevnes. Disse heuristikkene, utenom «lag en visualisering», brukes derimot ikke i de etterfølgende eksemplene i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), noe som kunne gitt dem enda mer tyngde. Det at de nevnes i forbindelse med problemløsing kan i det minste føre til at de trekkes frem i undervisningen ved bruken av denne læreboka og at elevene har mulighet til å reflektere over hvordan de kan benytte seg av dem. Disse heuristikkene blir i tillegg presentert ganske naturlig og ikke som for eksempel en liste over strategier man kan bruke innen problemløsing. Fan & Zhu (2007) anbefalte, som nevnt, ikke å skille ut beskrivelse og oppramsing av heuristikker og problemløsing som et eget emne i lærebøkene, da dette kan føre til at elevene oppfatter heuristikkene som regler innenfor problemløsing.

Når det kommer til forekomsten av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste» (kategori 2) ser vi at denne har en motsatt utvikling enn mange av de andre heuristikkene. Fra 12 registrerte tilfeller i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), til kun tre registrerte tilfeller i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). Dette har, som jeg har vært inne på tidligere, en sammenheng med hvilke tema som inkluderes i bøkene etter endringen av læreplanen, da det er kapittelet omhandlende statistikk som inneholder 11 av de 12 tilfellene i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). Noe som kanskje kan forventes da dette kapittelet inneholder mange systematiske lister.

Dette emnet er ikke inkludert i de nye lærebøkene for 8. trinn. Av disse tilfellene er det kun to som er tilfeller av underkategorien «del av løsningsprosessen». I den nye læreboka er det ett registrert tilfelle per underkategori av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste». Det vil si at om man går inn på bruken av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste» for å faktisk løse et problem, observerer vi at endringen ikke er like stor som det først kan ha sett ut til.

Som vi ser i tabell 36 over er «lag en visualisering/illustrasjon» presentert 19 ganger i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og 21 ganger i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). Men i og med at Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) inneholder mye færre eksempler enn Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), er prosentandelen denne heuristikken utgjør av totalt antall heuristikker større i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) enn i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020). I Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) utgjør denne heuristikken 17 %, mens den i Matematikk 8 kun utgjør 9 %. Som vi så i presentasjonen av resultatene fra undersøkelsen av Faktor 8 utgjør underkategorien «del av løsningsprosessen» kun ca. 11 % av heuristikken «lag en visualisering/illustrasjon», med 2 tilfeller. Det ser med andre ord ikke ut til å være hovedfokuset at verken tabeller/lister eller visualiseringer/illustrasjoner brukes som en del av løsningsprosessen i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). I Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) utgjør derimot underkategorien «del av løsningsprosessen» omtrent 29 % av totalt antall registreringer av heuristikken «lag en visualisering/illustrasjon». Som nevnt tidligere inneholder Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) nettopp en beskrivelse av at man kan benytte seg av tegninger når man skal løse problemer. Dette kan være noe av forklaringen på økningen i bruken av denne kategorien som del av løsningsprosessen.

Vi har her sett at eksemplene i lærebøkene Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) inneholder de samme heuristikkene, men en ulik vektlegging av noen av disse. Oppbygningen av de to læreplanene kan ha spilt en rolle for fordelingen av heuristikker ved at ulike temaer inkluderes som følge av at det i den nye læreplanen spesifiseres hvilke kompetansemål som gjelder for hvert trinn på ungdomsskolen. Kongelf (2019) sin studie, og dennes påvirkning på kvalitetsveilederen for læremidler fra Utdanningsdirektoratet, kan også ha influert lærebokforfatterne til å inkludere flere varianter av de ulike heuristikkene i eksemplene i den nye læreboka Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), som underkategorien «løs problemet på ulike måter» under kategori 9. I tillegg nevnes og beskrives noen heuristikker eksplisitt i den nye læreboka, som anbefalt av Kongelf (2019). Disse beskrivelsene er imidlertid fortsatt ikke inkludert så ofte i eksemplene som de kanskje kunne ha vært.

6.2.2 Sammenligning av Nummer 8 og Matemagisk 8

Gjennom en sammenligning av de to lærebøkene fra Aschehoug, Nummer 8 (Hole et al., 2019) og Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) vil jeg diskutere resultatene fra disse presentert i forrige kapittel. Under følger en tabell som viser antall registrerte heuristikker fordelt på de ti ulike kategoriene i disse to lærebøkene.

Bok/Kategori	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totalt
Nummer 8	3	22	38	2	39	0	25	0	40	8	177
Matemagisk 8	7	5	23	0	28	0	3	0	27	10	103

Tabell 37: Antall registreringer per kategori i bøkene fra Aschehoug.

Nummer 8 (Hole et al., 2019) inneholder 35 flere eksempler enn Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020), noe som naturlig forårsaker et høyere antallet registrerte heuristikker i tabellen over. Gjennomsnittlig antall heuristikker per eksempel er derimot omtrent det samme i de to bøkene, på rett over 2 per eksempel. Om man ekskluderer den mer mekaniske delen av kategori 7 «tenk på et lignende problem», blir gjennomsnittlig antall heuristikker per eksempel høyere i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) enn i Nummer 8 (Hole et al., 2019). Dermed kan man også her se en økning i problemløsingsheuristikker fra gammel til ny bok om man utelater delen av denne heuristikken som går ut på å kopiere løsningsmetoder fra foregående umerkede eksempler. Denne økningen er derimot ikke nevneverdig stor, kun omtrent 0,17.

Den utradisjonelle oppbygningen i læreboka Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) kan sies å være mer i tråd med den tradisjonelle definisjonen av problem og problemløsing, i og med at det ikke demonstreres hvordan man kan løse tilsvarende problem før dette gjøres. Mange av kapitlene i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) starter med oppgaver eller diskusjonsspørsmål, før man viser noe med enten umerkede eller merkede eksempler – eller ikke i det hele tatt. Det at det ikke alltid benyttes eksempler for å vise noe, men at elevene heller skal finne ut av ting selv, kan også være noe av forklaringen på at antallet eksempler er kuttet så betraktelig fra gammel til ny bok hos Aschehoug.

I kapittel 5.2.3 så vi at kategori 3 «lag en visualisering/illustrasjon», 5 «løs deler av problemet» og 9 «se problemet fra en annen side» stod for over 20 % hver av det totale registrerte antallet heuristikker i både Nummer 8 (Hole et al., 2019) og Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Dette er de tre mest brukte heuristikkene i eksemplene i begge disse bøkene. I Nummer 8 (Hole et al., 2019) er det deretter kategori 7 «tenk på et lignende problem» og kategori 2 «lag en systematisk tabell/liste» som er mest demonstrert, mens det i Matemagisk 8 er kategori 10 «bruk digitale hjelpemidler» og kategori 1 «se etter et mønster». Under følger en diskusjon av disse endringene.

Vi har allerede vært inne på endringen i heuristikken «tenk på et lignende problem».
Når det kommer til forekomsten av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste», kunne vi observere at 18 av 22 registrerte tilfeller av heuristikken «lag en systematisk tabell/liste» stammer fra kapittelet omhandlende statistikk i Nummer 8 (Hole et al., 2019), noe som kan forklare nedgangen i bruken av denne heuristikken fra gammel til ny lærebok. Som beskrevet tidligere er ikke dette temaet inkludert i de nye lærebøkene for 8. trinn på grunn av endringene i læreplanen.

Man kunne da tenke seg at det var enten underkategorien «del av problemtekst, informativ» eller underkategorien «direkte etterspurt» som dominerte denne kategorien i Nummer 8 (Hole et al., 2019). Vi så imidlertid tidligere at underkategorien «del av løsningsprosessen» faktisk var benyttet like mange ganger som underkategorien «del av problemtekst» i Nummer 8 (Hole et al., 2019) under kategori 2 «lag en systematisk tabell/liste», hele 11 av 22 ganger.
I Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) er tabeller/lister kun varianter av «del av løsningsprosessen», men kun registrert 5 ganger. Dermed blir denne underkategorien benyttet over dobbelt så mange ganger i Nummer 8 (Hole et al., 2019) som i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Dermed kan det på den ene siden se ut til å være en nedgang i bruken av denne heuristikken fra gammel til ny bok.
På den andre siden kan vi vurdere den prosentvise andelen av totalt antall heuristikker denne underkategorien utgjør. Vi har tidligere observert at Nummer 8 (Hole et al., 2019) inneholder et betydelig høyere antall eksempler enn Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Dette fører til at bruken av tabeller/lister som en del av løsningsprosessen utgjør ca. 6 % av totalt antall heuristikker i Nummer 8 (Hole et al., 2019) og ca. 5 % i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Dermed ser vi at vektleggelingen av denne underkategorien i forhold til annen heuristikkbruk er omtrent lik i de to bøkene.

Heuristikken «bruk digitale hjelpemidler» er registrert åtte ganger i Nummer 8 (Hole et al., 2019) og ti ganger i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Dermed er det ikke en stor endring i antall ganger denne heuristikken er brukt i de to bøkene.
Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) er den eneste av de fire lærebøkene hvor det er eksempler som demonstrerer programmering, noe som er inkludert som et kompetansemål direkte knyttet til kjerneelementet *Utforsking og problemløsing* i den nye læreplanen. Kompetansemålet er som vi husker: «utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12).

I den nye læreplanen er det som vi så et kompetansemål som spesifikt omtaler heuristikken «se etter et mønster». Dette er: «beskrive og generalisere mønster med egne ord og algebraisk» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12). Dette kan ha ført til at denne heuristikken vektlegges mer i den nye boka fra Aschehoug. Noen ganger kommer den også eksplisitt frem i løsingen av problemet, og ikke bare i problemteksten, som i et tidligere vist eksempel fra denne boka. Dette er tilfellet i «Eksempel 4» i figur 13 under, hvor det spesifikt står «vi leter etter et mønster...» i løsningsteksten i eksempelet (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 119).

EKSEMPEL 4

Her ser du de tre første figurene i et mønster.

Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

Lag et algebraisk uttrykk for hvor mange brikker du trenger for å lage figur nr. *n*.

Løsning
Vi leter etter et mønster for å forstå hvordan figurene utvikler seg.
Her er figurene tegnet på nytt med ulike farger.

Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

Hver figur består av en svart brikke i midten. Hver figur har fire «armer» markert med én arm i hver farge. Hver arm består av like mange brikker som figurnummeret.
Vi systematiserer disse opplysningene i en tabell.

Figurnummer	Antall svarte brikker i midten av figuren	Antall armer figuren har	Antall brikker på hver arm	Antall brikker i figuren
1	1	4	1	$1 + 4 \cdot 1 = 5$
2	1	4	2	$1 + 4 \cdot 2 = 9$
3	1	4	3	$1 + 4 \cdot 3 = 13$
4	1	4	4	$1 + 4 \cdot 4 = 17$
n	1	4	n	$1 + 4 \cdot n$

Vi har $1 + 4n$ brikker i figur nr. *n*.

Figur 13: "se etter et mønster", Fra «Matemagisk 8» av A. L. Kongsnes & A. K. Wallace, 2020, s. 119. Copyright H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2020.

Som vi har sett tidligere kan denne heuristikken også benyttes mer implisitt, men eksempler som dette i figur 13 er med på å få den frem eksplisitt.
Heuristikken «gjett og sjekk» (kategori 4) er kun brukt i eksempler i Nummer 8 (Hole et al., 2019) av alle lærebøkene i min studie. Dette skjer da kun to ganger, men er begge gangene nevnt eksplisitt som «prøving og feiling» (se eksempel fra figur 9). Slike mer eksplisitte fremstillinger av heuristikkene er som beskrevet anbefalt, da de da kan bli lettere å oppdage og tilegne seg for elevene.

Vi har her sett at det er heuristikkene «lag en visualisering/illustrasjon», «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side» som er de tre mest vektlagte i både Nummer 8 (Hole et al., 2019) og Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020). Heuristikkene «jobb baklengs» og «gjør problemet enklere» er ikke representert i verken gammel eller ny bok fra Aschehoug. Forekomsten av «tenk på et lignende problem» har gått ned fra gammel til ny bok grunnet strukturelle endringer. Den nye boka Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020) skiller seg ut fra de andre i studien på flere måter, men særlig grunnet den ikke-tradisjonelle oppbygningen.

7 Avslutning

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en lærerik og interessant prosess. Jeg har lært mye om forskjellige aspekter ved problemløsing og undervisning, i tillegg til alle andre lærdommer som kommer ut av å gjennomføre et større prosjekt.
Som en avslutning på denne oppgaven vil jeg presentere en konklusjon hvor en besvarelse på den overordnende problemstillingen og de tilhørende forskningsspørsmålene gjennomgås. Deretter følger noen kommentarer til studien, hva som kunne vært gjort annerledes og noen forslag til hva som kunne vært interessant å se mer på.

7.1 Konklusjon

I denne studien ville jeg prøve å finne ut hvordan det i matematikklærebøker legges til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse. Det ble funnet at problemløsingskompetanse blant annet innebærer å kunne bruke og vurdere bruken av ulike strategier og løsningsmetoder. Jeg fant dermed ut at det mest hensiktsmessige aspektet å undersøke innenfor problemløsing i lærebøker var heuristikker. Dette fordi man ved å gjennomføre en ren lærebokanalyse verken kan bruke den mer tradisjonelle definisjonen av problem eller få rede på om elevene faktisk har fått utviklet problemløsingskompetanse av å bruke bøkene. Dermed ble det ene forskningsspørsmålet:
Hvilke problemløsingsheuristikker brukes, og hvordan er utbredelsen av disse, i eksemplene i de gamle og de nye matematikklærebøkene for åttende trinn?

Det ble i tillegg laget et forskningsspørsmål omhandlende læreplanens behandling av problemløsing, for å se på hvordan innholdet i gammel og ny læreplan kan påvirke innholdet i lærebøkene. Dette forskningsspørsmålet var:
Hva sier den gamle og den nye læreplanen i matematikk for grunnskolen om problemløsing for åttende trinn, og hvordan gjenspeiles dette i lærebøkene?

Begge læreplanene vektlegger, som funnet, problemløsing og bruken av ulike metoder og strategier for å løse problemer. I den nye læreplanen er *Utforskning og problemløsing* et av kjerneelementene (Utdanningsdirektoratet, 2020), og problemløsing burde kanskje derfor vektlegges enda mer i de nye lærebøkene.

Gjennom undersøkelsen av lærebøkene som er inkludert i denne studien har jeg funnet at eksemplene i disse gjennomsnittlig inneholder over to problemløsingsheuristikker hver i alle de fire bøkene. Heuristikkene «lag en visualisering/illustrasjon», «løs deler av problemet» og «se problemet fra en annen side» er mye brukt i alle bøkene, men på noe ulike måter. I likhet med flere av de andre studiene omhandlende heuristikker i lærebøker, finner også jeg at det er noen få heuristikker som dominerer og står for det meste av strategibruken i eksemplene. Heuristikker som «gjett og sjekk», «gjør problemet enklere» og «jobb baklengs» er lite eller aldri brukt i alle lærebøkene i studien min.

De ulike lærebøkene har med andre ord høye forekomster av noen av heuristikkene, noe som kan være med på å demonstrere bruken av disse for elever som benytter seg av bøkene. Dette gjelder ifølge forskning først og fremst heuristikker som eksplisitt fremkommer og undervises spesifikt i.

Om det er en veldig lærerbokstyrt lærer som bruker bøkene i sin undervisning vil det da ved å benytte seg av de eldre bøkene ikke være godt nok grunnlag for å si at elevene får utviklet problemløsingskompetanse innenfor bruk av ulike heuristikker.

I de nye bøkene er det, som beskrevet, inkludert noe mer beskrivelser av problemløsingsstrategier. I Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace,2020) er heuristikken «se etter et mønster» mer brukt og kommer delvis mer eksplisitt frem. I Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) beskrives blant annet bruken av tegninger, altså visualisering, som problemløsingsstrategi og brukes deretter i et eksempel. Om de andre heuristikkene som nevnes i denne boka også hadde blitt benyttet i eksempler og eksplisitt fremkommet som strategier her, hadde det vært enda større grunnlag for å konkludere med at det i de nye lærebøkene legges til rette for elevenes utvikling av problemløsingskompetanse.

7.2 Kommentarer til studien

Rezat & Strässer (2017) påpeker, som beskrevet i kapittel 4, at metoden som er benyttet i denne studien har sine begrensninger – man kan ikke trekke noen konklusjoner angående elevenes oppnådde kompetanser eller lærebøkenes påvirkning på undervisningen, læreren eller elevene ved å benytte seg av innholdsanalyser. Forskningen innenfor problemløsing viser imidlertid at man kan legge til rette for at elevene blir opplært i heuristikkbruk ved å vektlegge dette i undervisningen. Lærebøkene er fortsatt et mye brukt læremiddel i matematikkundervisningen og mange undervisningsaktiviteter forberedes med utgangspunkt i denne (Gilje et al., 2016). Dermed vil innholdet i lærebøkene kunne påvirke undervisningen, selv om vi jeg ikke kan trekke noen konklusjoner på om den faktisk gjør det ut ifra min studie.

Jeg har kun sett på eksemplene i lærebøkene, og introduksjonen til disse for å se om eksempelet skal kodes som underkategorien «bruk metode fra umerket eksempel» under kategori 7 «tenk på et lignende problem». Dermed kan jeg ikke si noe om endringen i elevoppgavene som gis i verken grunnboka eller andre deler av læreverkene. Jeg har lagt merke til at det i for eksempel Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) stilles spørsmål til undring til elevene uten en beskrivelse av hvordan de skal tenke, noe som potensielt kan føre til utforskning og problemløsing om disse benyttes i undervisningen. Det er også mange diskusjonsspørsmål underveis i kapitlene i Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020).
At noen heuristikker ikke er representert i eksemplene betyr heller ikke at de ikke kan fremkomme i arbeidet med oppgaver og være bakgrunn for diskusjon og vurdering av disse heuristikkene i undervisningen. Men heuristikkene som faktisk vektlegges i eksemplene vil kanskje stå frem som de viktigste for elever som bruker læreboka mye, spesielt siden forskning viser at elever ofte hopper rett til uthevet tekst, og da merkede eksempler.

Mange eksempler i de undersøkte lærebøkene inneholdt flere deloppgaver eller adskilte oppgaver. Dette førte til at endel av disse eksemplene ble kodet med et høyt antall heuristikker, selv om dette kun betydde at hver deloppgave inneholdt samme heuristikk. Mange ganger kunne dette bety at hver deloppgave i eksempelet inneholdt de mer mekaniske underkategoriene «bruk metode fra umerket eksempel» under «tenk på et lignende problem» og «trinnvis utførelse» under «løs deler av problemet».

Hvis eksempelet da inneholdt tre mer eller mindre identiske deloppgaver hvor alle var tilfeller av dette, ble da eksempelet kodet med tilsammen 6 heuristikker. Disse tilfellene var med på å trekke gjennomsnittlig antall heuristikker per eksempel i spesielt Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020) opp, da disse bestod av mange eksempler med flere deloppgaver av denne typen. Dermed kunne det vært vurdert å inkludere en oppdeling eller lignende ved kodingen av slike eksempler.
Man kunne også vurdert å kun kode alle eksempler med adskilte oppgaver som inneholder en heuristikk én eller flere ganger som kun 1, uavhengig av hvor mange ganger heuristikken er representert i eksempelet. Dette for å ikke få et så høyt antall av enkelte av heuristikkene. Disse heuristikkene er faktisk representert flere ganger enn de andre, uavhengig av om de kun benyttes på samme måte flere ganger i adskilte oppgaver i samme eksempel. Dermed vil det være større sannsynlighet for at elevene oppfatter disse heuristikkene som viktige, og derfor viktig å få med alle i kodingen. Om det hadde vært en av de mindre representerte heuristikkene, som for eksempel «gjett og sjekk» som ble benyttet i flere deloppgaver eller adskilte oppgaver i samme eksempel, hadde denne kategorien også fått flere registreringer.

Når de merkede eksemplene er omtrent identiske med de foregående umerkede eksemplene kan det, som jeg har vært inne på tidligere, kanskje sende signaler om at det viktigste i matematikken er kopiering og memorering. Dermed kan det ved å kun betrakte forekomsten av heuristikker se ut til at dette er et større fokus i bøkene fra Cappelen Damm. Det som imidlertid ikke kommer frem er når mange av de etterfølgende merkede eksemplene er ganske like, og at løsningsmetoder går igjen i disse også når det ikke nevnes spesifikt. Vi har tidligere vært inne på at elever først og fremst benytter seg av merket tekst og eksempler i lærebøkene. Om de da kun ser på eksemplene, og ikke på introduksjonsteksten i kapitlene, kan det tenkes at de heller ved mange lignende merkede eksempler kan få inntrykk av at kopiering og memorering er viktige momenter i matematikk.

Jeg skal ikke bedømme og sammenligne bøkene når det kommer til læringsutbytte. Vi har imidlertid sett at alle bøkene inneholder heuristiske tilnærmingsmåter i eksemplene, men med noe ulikt fokus. Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017) er den eldste læreboka inkludert i studien og ser ikke ut til å være endret i nevneverdig grad siden første utgivelse i 2006. Denne boka har også den snevreste bruken av heuristikkene, ved at det som regel er de delene av heuristikkene som ikke er tettest forbundet med problemløsing som benyttes. Som for eksempel at underkategorien «trinnvis utførelse» under heuristikken «løs deler av problemet» og underkategorien «bruk metode fra umerket eksempel» under heuristikken «tenk på et lignende problem» vektlegges. Underkategorien «del av løsningsprosessen» under kategori 2 og 3 vektlegges ikke, som beskrevet tidligere, i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017). I tillegg er det heller ingen eksempler som inneholder bruk av digitale hjelpemidler som regneark, digital graftegner eller programmeringsprogrammer. De andre bøkene inneholder bruken av minst én av disse tre.
Dermed kan det argumenteres for at vi kan se en positiv utvikling i bruken og behandlingen av problemløsingsheuristikker i matematikklærebøker for 8. trinn, selv om det fortsatt er forbedringspotensialer.

Denne studien er ikke en evaluering av hvor gode eller dårlige de ulike bøkene er, hvilke lærebøker man burde benytte seg av eller lignende. Dette er kun en undersøkelse av hvilke ulike problemløsingsheuristikker som benyttes og vektlegges i eksemplene i lærebøkene. Jeg kan dermed ikke uttrykke meg bestemt om hvilke bøker som egner seg best til undervisning. Det er mange andre faktorer som påvirker hvordan undervisningen i problemløsing blir. Læreren har selvfølgelig et stort ansvar når det kommer til hvordan dette blir vektlagt og hvordan bøkene brukes i undervisningen. Min studie innebærer imidlertid undersøkelse av en viktig del av det store feltet *problemløsing,* nemlig heuristikker, som jeg får inntrykk av at ikke like ofte vektlegges i opplæringen av verken matematikklærere eller elever. Dette er som beskrevet mentale metoder, eller tommelfingerregler, som man kan benytte seg av når man skal løse omtrent alle typer problemer. Dette gjør det veldig relevant å fokusere på i skolen. Som vi har sett anbefaler forskere at slike heuristikker eksplisitt fremkommer og vektlegges i undervisningen i hele undervisningsforløpet, noe lærebøkene kan være med på å påvirke. Dermed ser jeg på denne studien og metoden som er benyttet her som relevante, uavhengig av om man kan svare på om elever faktisk har utviklet problemløsingskompetanse ved å bruke de ulike lærebøkene eller ikke.

7.3 Et blikk fremover

Fra høsten innføres gradvis de nye læreplanene i skolen. Jeg har vært så heldig å få se på noen av de nye matematikklærebøkene som er skrevet i forbindelse med dette. Det skal imidlertid komme flere nye lærebøker på alle trinn og dermed mange muligheter for videre lærebokforskning. Som jeg har beskrevet tidligere ble det i de nye lærebøkene observert en noe mer tydelig fremstilling av problemløsingsstrategier. Denne kunne imidlertid vært enda mer utbredt. Dette er noe som kan gjøres i fremtidige lærebøker i matematikk.

Underveis, og spesielt ved skrivingen av diskusjonskapittelet, så jeg at det hadde vært interessant å inkludere en mer dyptgående undersøkelse av hvordan og hvor ofte heuristikkene navngis i eksemplene. Jeg har vært inne på dette i oppgaven, men ikke gått systematisk til verks for å finne det ut. Dette er, som beskrevet, et viktig moment ved heuristikkbruk, da elevene antagelig ikke kan tilegne seg like mye av de implisitt presenterte heuristikkene som blir registrert i denne studien. Som Schoenfeld (1985) beskrev, burde heuristikker vektlegges og undervises i underveis i hele matematikkutdanningen til elevene. Jeg har iallfall blitt veldig inspirert av både teorien som har vært gjennomgått i forbindelse med denne masteroppgaven, og selve utførelsen av studien.

Referanseliste

Litteratur

Aaseth, N. (2016). *Problemløsning i norske og russiske matematikklærebøker for videregående skole: En sammenlignende studie av eksempler i norske og russiske lærebøker.* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Bergen). Hentet fra http://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/15811/143493278.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bell, J. & Waters, S. (2018). *Doing your research project: a guide for first-time researchers* (7.utg.). Maidenhead: McGraw-Hill Education.

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening: Mening for alle.* Bergen: Caspar Forlag AS.

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4.utg.). Oxford: Oxford University Press.

Cappelen Damm Undervisning. (u.å.a). Faktor. Hentet 21. mars 2020 fra https://www.cappelendammundervisning.no/verk/Faktor-106279

Cappelen Damm Undervisning. (u.å.b). Matematikk 8-10 fra Cappelen Damm. Hentet 9. mars 2020 fra https://www.cappelendammundervisning.no/verk/Matematikk%208-10%20fra%20Cappelen%20Damm-153429

Europabanken. (2017, 3. mai). *Mer problemløsing og mindre fag i skolen.* Hentet oktober 2019 fra http://europabanken.no/praksis/mer-problemlosing-og-mindre-fag-skolen

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 61-75. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education,* 45: 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., ... Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP: Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* Hentet fra https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf

Grepperud, G. & Skrøvset, S. (2012). *Undervisningslære: eksempler, ideer og refleksjoner.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Grønmo, S. (2011). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole.* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Oslo). Hentet fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/38054/Harder-master.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Kongelf, T. R. (2017). What characterizes the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway?. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries* (s. 155-194). Oslo: Cappelen Damm AS.

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?.* (Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder). Hentet fra https://hvlopen.brage.unit.no/hvlopen-xmlui/bitstream/handle/11250/2616700/Kongelf.pdf?sequence=4

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Fornyer innholdet i skolen* (Nr: 132-18). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Overordnet del - kompetanse i fagene*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/

Love, E. & Pimm, D. (1996). "This is so": a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* Deakin University.

Matematikkrådet. (2018). Hentet fra https://matematikkradet.no/saker2018/NMR-2018-norum-jensen.pdf

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. Nr. 18 – 2002, Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie). København: Undervisningsministeriet.

Nordbø, B. (2018). Eksempel. I *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/eksempel

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/?ch=2

Polya, G. (1990) *How to solve it: the classic introduction to mathematical problem-solving.* (2nd edition, with a foreword by Ian Stewart) London: Princeton University Press.

Rezat, S. & Strässer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Reaserch in Nordic and Baltic countries* (s. 495-514). Oslo: Cappel Damm AS.

Røsseland, M. (2005). Hva er matematisk kompetanse? – del 2. *Tangenten, 16*(2), 48-53. http://www.caspar.no/tangenten/2005/rosseland_2_2005.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2013). *Matematikk for lærerstuderende, Delta, Fagdidaktikk* (5. utg.). Danmark: Forlaget Samfundslitteratur.

Stedøy, I. M. & Torkildsen, S. (2018). Hvorfor problemløsing? Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/resources/Hvorfor%20problemløsing.pdf

Teigen, K. H. (2019). Heuristikk. I *Store norske leksikon*. Hentet 11. mai 2020 fra https://snl.no/heuristikk

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2014, 20. oktober). Erfaringer og vurderinger av eksamen 2013. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/Erfaringer-og-vurderinger-av-eksamen-2013/6-Reviderte-lareplaner/

Utdanningsdirektoratet. (2016, 18. mai). Å forstå kompetanse. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/forsta-kompetanse/

Utdanningsdirektoratet. (2017a, 15. september). Kjerneelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2017b, 23. oktober). Matematikk. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/162?notatId=252

Utdanningsdirektoratet. (2019a, 11. november). Nye læreplaner – grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/nye-lareplaner-i-grunnskolen-og-gjennomgaende-fag-vgo

Utdanningsdirektoratet. (2019b, 18. november). Hva er nytt i matematikk? Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05).* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). Kompetansemål etter 8. trinn. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16?lang=nno&Kjerneelementer=true

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere. *NIFU Arbeidsnotat* 12. Hentet fra https://nifu.brage.unit.no/nifu-xmlui/bitstream/handle/11250/297862/NIFUarbeidsnotat2015-12.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Yan, Q. (2018). *Problemløsning i norske og kinesiske lærebøker i matematikk for ungdomsskolen.* (Mastergradsavhandling). Høgskolen i Oslo og Akershus: Oslo.

Lærebøker

Faktor 1
Hjardar, E. & Pedersen, J. (2017). *Faktor 8* (Digital utgave basert på 1. utgave, 5. opplag). Oslo: Cappelen Damm AS.

Nummer 8
Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K. & Wallace, A. K. (2019). *Nummer 8* (Digitalutgave Unibok. basert på 1. utgave, 2. opplag). Oslo: Aschehoug Undervisning.

Matematikk 8
Hjardar, E. & Pedersen, J. (2020). *Matematikk 8* (vurderingseksemplar). Oslo: Cappelen Damm AS.

Matemagisk 8
Kongsnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8.* Oslo: Aschehoug Undervisning.

Figurer

Vedlegg

Analyseskjema Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2017), Cappelen Damm

					Kategori																				
					Se etter mønster	Lag en tabell/ liste				Lag en visualisering				Gjett og sjekk	Løs deler av problemet		Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem		Gjør problemet enklere	Endre innfallsvinkel			Bruk digitale hjelpemidler	Antall
Bok	Kapittel	Delkapittel	Side	Eks. Nr.		A1	A2	B	C	A1	A2	B	C		A: trinnvis	B: oppdeling		A: nevnes	B: følger demo		A: uttrykksform	B: ulike løsn	c: annet		
Faktor 8	1: tall og tallforståelse	naturlige tall	9	eks. 1.1																					0
			11	eks. 1.2															1		1				2
			15	eks. 1.3							1														1
		desimaltall	25	eks. 1.4															1	1					2
		overslagsregning	29	eks. 1.5																1		1			2
		regnerekkefølge	37	eks. 1.6											1				1					1	3
				6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	3	2	1	1	0		10
Faktor 8	2: brøk	utviding og forkorting av brøker	54	eks. 2.1															2						2
			56	eks. 2.2												1			1		1				3
		addisjon og subtraksjon av brøker med lik nevner	59	eks. 2.3															1						1
		addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner	62	eks. 2.4											1				2		2				5
			64	eks 2.5				1								1			1		1				4
			64	eks. 2.6												1			1		1				3
		uekte brøk og blandet tall	67	eks. 2.7											2				2		2				6
		brøk og desimaltall	70	eks. 2.8															2						2
			71	eks. 2.9															1						1
			72	eks. 2.10															1						1
			73	eks. 2.11															3						3
		brøk og multiplikasjon	75	eks. 2.12															2						2
			76	eks. 2.13											1				1		1				3
		brøk og divisjon	78	eks. 2.14											1				1						2
				14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5	3	0	0	21	0	8	0	0		38
Faktor 8	3: prosent	prosentbegrepet	87	eks. 3.1							1								1						2
		prosent som brøk	91	eks. 3.2								1									2				3
		prosent av et tall	96	eks. 3.3															1		1				2
		å finne prosenten	100	eks. 3.4															1		1				2
				4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	3	0	4	0	0		9
Faktor 8	4: Geometri	omkrets	123	eks. 4.1						1									1				1		3
			126	eks. 4.2						1															1
		konstruksjon av trekanter	142	eks. 4.3								1	1		1										3
				3	0	0	0	0	0	2	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		7
Faktor 8	5: statistikk	frekvens	155	eks. 5.1				1		1	1								2						5
		stolpediagram	158	eks 5.2				1		1		1													3
				eks 5.3		1						1													2
		ulike sentralmål og variasjonsbredde	162	eks. 5.4		1									1										2
			163	eks. 5.5		2			2																4
			164	eks. 5.6		1																			1
			165	eks. 5.7		1																			1
		linjediagram	169	eks. 5.8		1						1							1						3
				8	0	7	0	2	2	2	1	3	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	0		21
Faktor 8	6: tall og algebra	Talluttrykk	183	eks. 6.1											2				2						4
		uttrykk med variabler	186	eks.6.2							1								1						2
			186	eks. 6.3							1								1						2
		sette tall inn i uttrykk	189	eks. 6.4						1									2						3
		regning med bokstavuttrykk	191	eks. 6.5															2						2
		likninger	194	eks. 6.6															1						1
			195	eks. 6.7																					0
			197	eks. 6.8															2						2
			199	eks. 6.9												1			1						2
				9	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	2	1	0	0	12	0	0	0	0		18
Faktor 8	7: måling og enheter	målestokk	213	eks. 7.1						1											1				2
			215	eks. 7.2									1								1				2
		volum	224	eks. 7.3																	1				1
		masse	227	eks. 7.4												1					1				2
		tid	230	eks. 7.5															1		1				2
		vei, fart, tid	234	eks. 7.6							1								1						2
				6	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	2	0	5	0	0		11
Antall					0	7	0	3	2	6	6	5	2	0	10	5	0	0	45	2	18	1	1		114
Totalt antall				50	0				12				19	0		15	0		45	2		20		1	**114**

Analyseskjema Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2019), Aschehoug

					Kategori																				
					Se etter mønster	Lag en systematisk tabell/liste				Lag en visualisering				Gjett og sjekk	Løs deler av problemet		Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem		Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side			Bruk digitale hjelpemidler	
Bok	Kapittel	Delkapittel	Side	Eks. Nr.		a1	a2	b	c	a1	a2	b	c		a: trinnvis	b: oppdeling		a: nevnes	b: følger demo		a: endre uttrykksform	b: ulike løsn	c: annet	løs digitalt	Antall
Nummer	1: tall og tallregning	1A: funnet på og funnet ut	11	eksempel 1																					0
		1B: tallsystemet - hele tall og desimaltall	17	eksempel 2																					0
			19	eksempel 3								1							1						2
		1C: regning med positive og negative hele tall	27	eksempel 4																					0
			31	eksempel 5								3										2			5
			32	eksempel 6																					0
			40	eksempel 7									1						1						2
			44	eksemeel 8									1					1							2
			48	eksempel 9															3				3		6
		1D: regneuttrykk og parenteser	54	eksempel 10											1										1
		1E: primtall, sammensatte tall og faktorisering	60	eksempel 11									4						1			3			8
			65	eksempel 12															3		2				5
				12	0	0	0	0	0	0	0	4	6	0	1	0	0	1	9	0	2	5	3	0	31
	2: mer om tall og tallregning	2A: brøk	85	eksempel 1								1													1
			89	eksempel 2															1		1				2
			90	eksempel 3																	1				1
		2B: regning med desimaltall	106	eksempel 4									1										1		2
			107	eksempel 5																			1		1
			110	eksempel 6																				1	1
			111	eksempel 7						1				1								1	2		5
			112-113	eksempel 8						1				1				1				1	2		6
			115	eksempel 9															1						1
		2C: prosent og promille	120	eksempel 10												1									1
				eksempel 11												1									1
			121	eksempel 12												1									1
			122-123	eksempel 13												1								1	2
			128	eksempel 14												1									1
			129	eksempel 15												1									1
		2D: potenser	134	eksempel 16															3		2				5
			135	eksempel 17																	1	1			2
				17	0	0	0	0	0	2	0	1	1	2	0	6	0	1	5	0	5	3	6	2	34
	3: geometri	3A: linjer, sirkler og vinkler	160	eksempel 1								1			1										2
			161-162	eksempel 2								1			1										2
			164	eksempel 3								1			1										2
			165-166	eksempel 4								1			1										2
			167-168	eksempel 5								1			1										2
			170	eksempel 6								1			1										2
		3B: mangekanter	174	eksempel 7								1	1		1										3
			176	eksempel 8																				1	1
			182	eksempel 9	1							1	1		1				1						5
		3C: lengde	192	eksempel 10		1			1												1				3
			197	eksempel 11						1															1
		3D: areal	203	eksempel 12									2												2
			205	eksempel 13									1			1					1				3
			207	eksempel 14															1		1		1		3
			211	eksempel 15									1						1						2
			214	eksempel 16						1						1									2
		3E: omkrets og areal av sirkler	222	eksempel 17														1				1			2
			223	eksempel 18																					0
			226	eksempel 19								1							1						2
				19	1	1	0	0	1	2	0	9	6	0	8	2	0	1	4	0	3	1	1	1	41
	4: tall og algebra	4B: regneregler	261	eksempel 1							1				2							1			4
			262	eksempel 2											2							1			3
			264	eksempel 3							1				2							1			4
		4C: å lage og tolke regneuttrykk	266-267	eksempel 4											2							1			3
			270	eksempel 5					1							1									2
			272	eksempel 6											1	1									2
			276	eksempel 7																					0
			277	eksempel 8														1							1
		4D: å lage formler	281	eksempel 9	1																				1
			284	eksempel 10	1				1																2
		4E: likninger	286	eksempel 11						1															1
			288	eksempel 12																					0
			289	eksempel 13																		3			3
			291	eksempel 14																					0
		4F: å finne den ukjente	294	eksempel 15												1									1
			296	eksempel 16																					0
				eksempel 17											1										1
			297-298	eksempel 18											1										1
				18	2	0	0	0	2	1	2	0	0	0	11	3	0	1	0	0	0	7	0	0	29
	5: statistikk og sannsynlighet	5A: frekvens og relativ frekvens	315	eksempel 1					1										1						2
			316-317	eksempel 2		1			1										1						3
			318	eksempel 3					1												2				3
			322	eksempel 4		1										1								1	3
		5B: diagrammer	329	eksempel 5						1						1									2
			330-331	eksempel 6		1			1		1					1			1						5
			331	eksempel 7									1												1
			334	eksempel 8																				1	1
			336	eksempel 9																				1	1
		5C: sentralmål og spredningsmål	339	eksempel 10		1																			1
			341	eksempel 11		1									1	1									3
			343	eksempel 12		1			1																2
			344	eksempel 13		1			1						1										3
			345	eksempel 14					1							1									2
			347	eksempel 15		1			1																2
			352	eksempel 16		1																			1
			355	eksempel 17																				1	1
			356	eksempel 18		1										1								1	3
		5D: sannsynlighet	368	eksempel 19																	1				1
			369-370	eksempel 20							1										1				2
				20	0	10	0	0	8	1	2	0	1	0	2	6	0	0	3	0	4	0	0	5	42
				Totalt antall	3	11	0	0	11	6	4	14	14	2	22	17	0	4	21	0	14	16	10		177
		antall eksempler		86																					
				Antall per kategori	3				22				38	2		39	0		25	0		40		8	177

Analyseskjema Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020), Cappelen Damm

					Kategori																				
					Se etter mønster	Lag en systematisk tabell/liste				Lag en visualisering				Gjett og sjekk	Løs deler av problemet		Jobb baklengs	Tenk på et lignende problem		Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen side			løs digitalt	
Bok	Kapittel	Delkapittel	Side	Eks. Nr.		a1	a2	b	c	a1	a2	b	c		a: trinnvis	b: oppdeling		a: nevnes	b: følger demo		a: endre uttrykksform	b: ulike løsn	c: annet		**Antall**
Matematikk 8	1: Tall og tallforståelse	Regnestrategier	9	Eksempel 1.1											3						2	2			7
			11	Eksempel 1.2											2							1			3
			12	Eksempel 1.3											2						1	1			4
			15	Eksempel 1.4											2						1	1			4
			16	Eksempel 1.5									1			1						1			3
			18	Eksempel 1.6											2						2				4
			19	Eksempel 1.7											1						1	1			3
		Flere regnearter på én gang	23	Eksempel 1.8											1										1
			23	Eksempel 1.9											1				1						2
		Positive og negative tall	29	Eksempel 1.10									1												1
			29	Eksemepl 1.11									1												1
			31	Eksempel 1.12															2						2
			35	Eksempel 1.13											2										2
			39	Eksempel 1.14															2						2
			39	Eksempel 1.15															2						2
		Desimaltall	43	Eksempel 1.16								1							1						2
			48	Eksempel 1.17																					0
			49	Eksempel 1.18																					0
			50	Eksempel 1.19																1					1
			55	Eksempel 1.20															2						2
			59	Eksempel 1.21																					0
			62	Eksempel 1.22																2					2
		Potenser	66	Eksempel 1.23															3		1				4
		Regning med potenser	70	Eksempel 1.24											3				2		3				8
			73	Eksempel 1.25											1				4		1				6
		Kvadrattall og kvadratrot	78	Eksempel 1.26								1							1		2				4
			81	Eksempel 1.27															1					1	2
		Regning med parenteser	85	Eksempel 1.28											3						2				5
		Regnerekkefølgen	89	Eksempel 1.29											2						2				4
				29	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0	25	1	0	0	21	3	18	7	0	1	81
	2: Delelighet og brøk	Delelighet	101	Eksempel 2.1																					0
			102	Eksempel 2.2															1						1
			105	Eksempel 2.3								4							2			2			8
			105	Eksempel 2.4															1			4			5
		Faktorisering og primtallsfaktorisering	109	Eksempel 2.5											1				2		1	1			5
		Utviding og forkorting av brøk	115	Eksempel 2.6															2						2
			115	Eksempel 2.7															2		2	1			5
		Sammenhengen mellom brøk og desimaltall	121	Eksempel 2.8															3						3
			125	Eksempel 2.9											3				3						6
			127	Eksempel 2.10															2						2
			128	Eksempel 2.11															2						2
		Sammenhengen mellom prosent, brøk og desimaltall	131	Eksempel 2.12															3		2				5
		Addisjon og subtraksjon av brøker med lik	135	Eksempel 2.13															1						1
			135	Eksempel 2.14															1						1
		Metoder for å finne fellesnevner	142	Eksempel 2.15					1							1			1		1				4
			143	Eksempel 2.16												1			1		1				3
		Brøk og multiplikasjon	147	Eksempel 2.17											2				2			1	1		6
			148	Eksempel 2.18											1				2		1	1			5
			148	Eksempel 2.19											1				1		1	1			4
			149	Eksempel 2.20											1				1			1			3
		Divisjon av brøk	153	Eksempel 2.21											1				3		2				6
				21	0	0	0	0	1	0	0	4	0	0	10	2	0	0	36	0	11	12	1	0	77
	3: Algebra	Algebraiske uttrykk	165	Eksempel 3.1											2				1		1				4
			168	Eksempel 3.2																					0
		Addisjon og subtraksjon av algebraiske uttrykk	172	Eksempel 3.3															2						2
		Potenser i algebraiske uttrykk	176	Eksempel 3.4											1				4		1	2			8
		Multiplikasjon og divisjon av algebraiske uttrykk	180	Eksempel 3.5											1				4		2				7
		Parenteser i algebraiske uttrykk	184	Eksempel 3.6											2				2						4
		Å løse et problem ved hjelp av tegning	197	eksempel 3.7									1			1									2
			201	Eksempel 3.8															1						1
		Likninger	207	Eksempel 3.9															1						1
			208	Eksempel 3.10											2				2						4
			213	Eksempel 3.11											2				2						4
			216	Eksempel 3.12											1										1
			218	Eksempel 3.13											1										1
		Å kontrollere løsningen på en likning	222	Eksempel 3.14											1	1			1						3
			223	Eksempel 3.15											2	1			1						4
		Problemløsing og likninger	228	Eksempel 3.16											1	1			1						3
			229	Eksempel 3.17									1		1	1									3
				17	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	17	5	0	0	22	0	4	2	0	0	52
	4: Funksjoner	Bestemme et punkt	242	Eksempel 4.1						1															1
			247	Eksempel 4.2						1			1						1						3
			248	Eksempel 4.3								1							1						2
		Koordinater som danner en graf	253	Eksempel 4.4		1						1							2						4
		Fra situasjon til funksjonsuttrykk	259	Eksempel 4.5											2				1						3
			264	Eksempel 4.6				1			2	1							3						7
			268	Eksempel 4.7							1				1									3	5
			270	Eksempel 4.8							1				1									3	5
				8	0	1	0	1	0	2	4	3	1	0	4	0	0	0	8	0	0	0	0	6	30
		ANTALL		75	0	1	0	1	1	2	4	9	6	0	56	8	0	0	87	3	33	21	1	7	240
					0				3				21	0		64	0		87	3		55		7	240

Analyseskjema Matemagisk 8 (Kongsnes & Wallace, 2020), Aschehoug

					Kategori																				
					1. Se etter mønster	**Lag en systematisk tabell/liste**				**Lag en visualisering**				**Gjett og sjekk**	**Løs deler av problemet**		**Jobb baklengs**	**Tenk på et lignende problem**		**Gjør problemet enklere**	**Se problemet fra en annen side**			**løs digitalt**	
Bok	Kapittel	Delkapittel	Side	Eks. Nr.		a1	a2	b	c	a1	a2	b	c		a: trinnvis	b: oppdeling		a: nevnes	b: følger demo		a: endre uttryk	b: ulike løsn	c: annet		**Antall**
Matemagisk 8	**1: Hele tall**	1A: regnestrategier	12	eksempel 1	2																				2
		1B: variabler og egenskaper ved multiplikasjon	26	eksempel 2											2							1			3
		1C: primtall og faktorisering	30	eksempel 3											1				1						2
		1D: : negative tall	38	eksempel 4									2												2
			38	eksempel 5									2										2		4
				5	2	0	0	0	0	0	0	0	4	0	3	0	0	0	1	0	0	1	2	0	13
	2: brøk og desimaltall	2A: brøk	49	eksempel 1					1						1	1					2	1			6
			53	eksempel 2											1						1				2
			54	eksempel 3									2									1			3
			56	eksempel 4																					0
		2D: programmering i python	86	eksempel 5																				2	2
			88	eksempel 6																				1	1
				eksempel 7																				1	1
			89	eksmepel 8																				1	1
			91	eksempel 9											1									1	2
				9	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	3	1	0	0	0	0	3	2	0	6	18
	3: algebraiske uttrykk og formler	3A: verdien av algebraiske uttrykk	100	eksempel 1											2										2
		3D. Figurtall	116	eksempel 2	1					1															2
			117	eksempel 3						1														1	2
			119	eksempel 4	1				1	1			1												4
				4	2	0	0	0	1	3	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
	4: potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge	4A: potenser og kvadratrøtter	129	eksempel 1															1		2				3
			139	eksempel 2																	2				2
		4B: regnerekkeføllge	140	eksempel 3											1										1
				eksempel 4																	1				1
			141	eksempel 5											1						1				2
			142	eksempel 6											1										1
				6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	6	0	0	0	10
	5: algebra og likninger	5A: forenkling av algebraiske uttrykk	154	eksempel 1																					0
			155	eksempel 2									1												1
			156	eksempel 3											1						1	1			3
		5B: algebraisk løsningsmetode for likninger	161	eksempel 4									1		1							1			3
			162	eksempel 5									1		1							1			3
			164	eksempel 6											1										1
				eksempel 7											1										1
		5C: likninger i praktiske situasjoner	168	eksempel 8									1			1									2
				8	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	0	0	0	0	1	3	0	0	14
	6: parenteser og likninger	6A: parenteser i algebraiske uttrykk	177	eksempel 1	2				1	1			1									1			6
			179	eksempel 2											1										1
			186	eksempel 3											2						2	1			5
			188	eksempel 4									1		1							1			3
				4	2	0	0	0	1	1	0	0	2	0	4	0	0	0	0	0	2	3	0	0	15
	7: hva er en funksjon	7A: funksjonsmaskiner	203	eksempel 1																					0
			204	eksempel 2									1												1
			206	eksempel 3																					0
			207	eksempel 4	1				1																2
			208	eksempel 5											1									1	2
				5	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5
	8: grafen til en funksjon	8B: å tegne grafen til en funksjon	227	eksempel 1									1												1
			229	eksempel 2					1			1													2
			233	eksempel 3									1												1
				3	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
	9: lineære funksjoner	9A: lineære funksjoner i praktiske situasjoner	241	eksempel 1												1									1
			242-243	eksempel 2											1									2	3
			244	eksempel 3									1			1									2
				3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	2	6
	10: sammensatte målinger	10A: forholdstrekanten	272	eksempel 1									1		1							1			3
				eksempel 2												1					2	1			4
			276	eksempel 3																					0
		10B: gjennomsnittsfart	285	eksempel 4														1							1
				4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	2	2	0	0	8
			Antall	51	7	0	0	0	5	4	0	1	18	0	23	5	0	1	2	0	14	11	2	10	103
			Antall per heuristikk		7				5				23	0		28	0		3	0		27		10	103