Brøkbegreper på mellomtrinnet

En studie av hvilke brøkbegreper som er observerbare hos elever
på 6.trinn

CHRISTINA LUNDEN

VEILEDER
Per Sigurd Hundeland

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for Teknologi og Realfag
Institutt for Matematiske Fag

Forord

Denne masteravhandlingen symboliserer slutten på en femårig lærerutdanning ved Universitetet i Agder. Veien videre vil bli spennende og jeg er klar for å ta imot nye utfordringer som venter.

Det har vært krevende å komme hit og det har blitt lagt ned utallige timer med arbeid. Samtidig har jeg fått noe i gjengjeld. Gleden av å få muligheten til å undersøke et så stort og komplekst tema i matematikken har gitt meg en ny giv. Jeg vil rette en spesiell takk til min dyktige veileder Per Sigurd Hundeland for et godt samarbeid, viktige tilbakemeldinger og ikke minst gitt meg motivasjonen til å fortsette når prosessen har vært vanskelig.

Jeg vil også takke skolene, lærerne og elevene som har deltatt i prosjektet og som gjorde det mulig for meg å gjennomføre dette prosjektet.

Til slutt vil jeg takke familie og venner som har støttet og oppmuntret meg underveis i arbeidet. Uten dere ville veien ha vært så ufattelig mye lenger.

Takk!

Kristiansand, 2019

Christina Lunden

Sammendrag

Behr, Lesh, Post og Silver (1983) peker på de rasjonale tallene og mener de er blant de mest komplekse og viktigste ideene et barn skal gjennom i matematikkundervisningen på grunnskolen. På bakgrunn av dette har jeg valgt å fokusere på brøk i skolen. I denne oppgaven undersøker jeg hvilke brøkbegreper som er observerbare hos elever på mellomtrinnet og Behr et al. (1983) presenterer en teoretisk modell som deler brøk inn i fem deler: del-hel, operator, kvotient, måling og forhold. Det er disse begrepene oppgaven tar utgangspunktet i.

En klasse på 15 elever har blitt observert og 6 elever har deltatt i oppgavebaserte gruppeintervju. I tillegg har det blitt gjennomført et lærerintervju. Forskningen har tatt utgangspunkt i det kvalitative og følgende forskningsspørsmål er blitt stilt:

Hvilke brøkbegreper er observerbare blant elever på 6.trinn?

I teorikapittelet blir brøkbegrepene presentert sammen med den teoretiske modellen og eksempler. Videre legges det fram teori knyttet til forståelse av brøk og brøk i skolen. I analysen av observasjonsdataene presenteres den matematiske kommunikasjonen i klassen sammen med oppgavene elevene arbeidet med. De oppgavebaserte gruppeintervjuene består av et sett med oppgaver elevene skulle løse muntlig. Gruppeintervjuene blir presenter og sammenliknet.

I denne undersøkelsen kommer det fram flere delbegreper i arbeid med brøk. Særlig delbegrepene del-hel og operator er fremtredende hos elevene. I tillegg er også delbegrepene kvotient og måling observerbare blant elevene på mellomtrinnet. Delbegrepet forhold viser seg å være det delbegrepet som er minst fremtredende hos elevene i 6.klasse.

Summary

Behr, Lesh, Post and Silver (1983) points to the rational numbers and believe they are among the most complex and most important ideas a child will have in mathematics education at primary school. Based on this, I have chosen to focus on fractions in the school. In this study, I investigated which fractional concepts are observable among middle stage pupils and Behr et al (1983) presents a theoretical model that divides fractions into five parts: part-whole, operator, quotient, measure and ratio. These are the terms on which the task is based.

A class of 15 students has been observed and 6 students have participated in a task-based group interview. In addition, a teacher interview has been conducted. The research has been based on a qualitative research strategy. The following research question has been asked:

Which fractional terms are observable among pupils in the 6th stage?

In the theory chapter, the fractional concepts are presented together with the theoretical model and examples. Furthermore, theory is presented related to understanding of fractions and fractions in the school. The mathematical communication in the classroom is presented together with the tasks the students worked with in the analysis of observation data. The task-based group interviews consist of a set of tasks the students should solve. These are presented and compared.

In this study, several subconstructs shows up when working with fractions. Particularly the subconstructs of part-whole and operator are prominent in the students. Quotient and measurement are also observable among the pupils on the intermediate stage. The concept about ratio turns out to be the subconstruct that is least prominent among the students in the 6th grade.

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Brøk har vært en del av matematikken i flere tusen år og de rasjonale tallene er blant de mest komplekse og viktigste ideene et barn skal lære i skolen ifølge Behr, Lesh, Post og Silver (1983). Susan J. Lamon påpeker også at det er et av de mest krevende temaene å undervise i (Lamon, 2007). Matematikkfaget består av flere temaer elevene skal gjennom i løpet av grunnskolen og dagens læreplanverk deler matematikken inn i fem hovedområder: *Tall og algebra*, *geometri*, *måling*, *statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* og *funksjoner* (Utdanningsdirektoratet, 2013). De rasjonale tallene vil møte elevene i samtlige hovedområder og skal elevene komme seg gjennom disse er det viktig at elevene danner seg et godt begrep knyttet til de rasjonale tallene.

Matematikk har alltid vært et fag jeg likte godt på skolen. På lærerstudiet valgte jeg fordypning i matematikk med en motivasjon om å gjøre matematikkfaget like kjekt for mine fremtidige elever. Vi mennesker er forskjellige og det merkes også i tilknytning til matematikkfaget hvor det er sterke meninger om hvorvidt faget er kjekt eller ei. I forbindelse med min masteravhandling ønsket jeg å fokusere på et tema elevene ble introdusert for tidlig i grunnskolen da min egen utdanningen er tilpasset 1.-7.trinn. De rasjonale tallene er både spennende og komplekse og ved å ta en nærmere titt på disse var jeg ikke lenger i tvil. Brøk måtte bli temaet for min masteravhandling.

Forskningen har som mål å få en oversikt over hvilke brøkbegreper som kommer frem hos elever på mellomtrinnet. I oppgaven ser jeg også etter om noen av disse begrepene er mer fremtredende enn andre. Ifølge Lamon er del-hel det begrepet som er mest fremtredende i matematikkundervisningen (Lamon, 2012). Vil dette stemme for min forskning? Jeg håper med denne oppgaven å kunne bevisstgjøre flere på brøkens kompleksitet, samtidig som jeg selv blir mer bevisst på det og kan ta det med meg videre inn i min egen matematikkundervisning.

Gjennom arbeidsprosessen har jeg fokusert på ulike brøkbegreper og forholdt meg til følgende forskningsspørsmål:

Hvilke brøkbegreper er observerbare hos elever på 6.trinn?

For å belyse dette forskningsspørsmålet har jeg valgt å benytte meg av den kvalitative metoden i form av observasjon og intervju. En klasse har blitt observert gjennom fire undervisningstimer i matematikk, en matematikklærer har svart på noen spørsmål og seks elever har deltatt i gruppeintervju.

1.2 Oppbygging

Denne masteravhandlingen består av seks kapitler i tillegg til litteratur og vedlegg. Jeg har i innledningen begrunnet valg av oppgave og presentert problemstillingen sammen med formålet for forskningen.

I kapittel 2 blir brøkbegrepet presentert sammen med en teoretisk modell av Behr et al (1983) som knytter ulike *underkonstrukt* av brøkbegrepet sammen. Disse underkonstruktene blir nærmere presentert og er det teoretiske rammeverket for oppgaven. På slutten av kapittelet blir teori knyttet til forståelse av brøk og brøk i skolen lagt fram.

I kapittel 3 begrunner jeg valg av forskningsmetode og hvordan jeg arbeidet med dataene. Her blir også metode for analyse presentert. Det blir videre gjort rede for kvaliteten av studien og hvordan forskningen har forholdt seg til de forskningsetiske prinsippene.

Kapittel 4 består av resultater og analyse som knyttes opp til den teoretiske modellen til Behr et al (1983). I kapittel 5 blir noen av funnene trukket frem og drøftet sammen med teori. Avslutningsvis blir det i kapittel 6 presentert en konklusjon knyttet til forskningsspørsmålet sammen med spørsmål til videre forskning.

2 Teori

2.1 Hva er brøk?

Brøk er en tallmengde under de rasjonale tallene i matematikken og kan representeres på tre ulike måter: brøk, prosent og desimaltall. For eksempel vil 25% tilsvare brøken 25/100 eller 1/4 og desimaltallet 0,25. Hvis et tall kan skrives på formen a/b hvor a og b er hele tall, defineres det som en brøk (Solem, Alseth og Nordberg, 2010). Streken som skiller a og b kalles for en brøkstrek, hvor tallet a defineres som en teller og tallet b defineres som en nevner. 3/5 er et eksempel på en brøk hvor telleren er lik tre og nevneren lik fem. Snur vi brøken på hodet vil vi få en uekte brøk hvor telleren er større enn nevneren. Denne brøken kan også gjøres om til det vi kaller for blandet tall. Et slikt tall vil bestå av et helt tall og en brøk (figur 1).

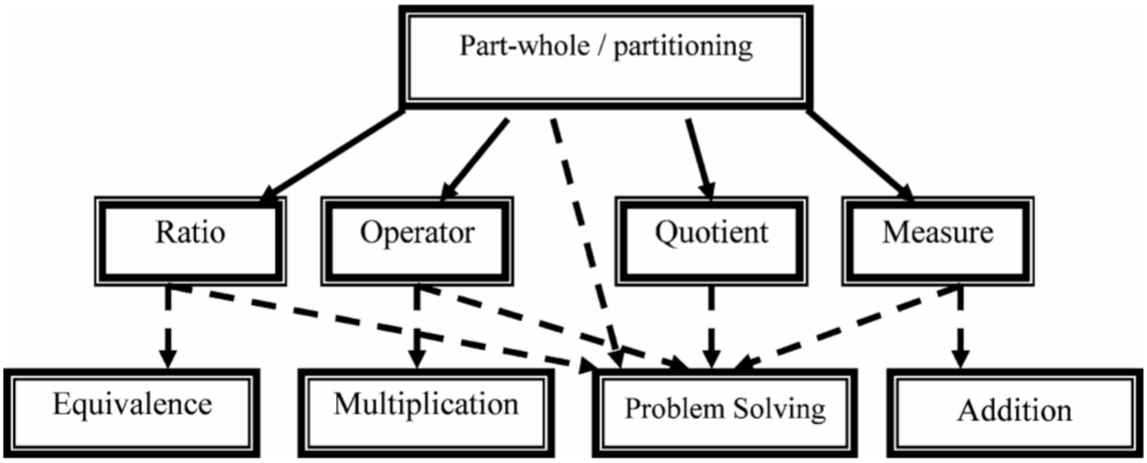
$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Figur 1. *Fra uekte brøk til blandet tall*

Når vi arbeider med brøk har rekkefølgen en betydning. For eksempel vil ikke 3/5 være det samme som 5/3. Det finnes heller ingen unik tallrekkefølge på brøk slik det gjør med de hele tallene. Mellom to brøker eksisterer det nemlig uendelig mange tall (Siegler og Lortie-Forgues, 2007). I tillegg er det fort å la seg lure av størrelsen på tallene i en brøk. Selv om brøken 18/76 består av større sifre enn 3/5 er det ikke dermed sagt at 18/76 er den brøken med høyest tallverdi slik det er med de hele tallene. Merlyn J. Behr påpeker at brøk er en av de mest komplekse og viktigste matematiske ideene et barn skal gjennom i løpet av sin skolegang (Behr, Lesh, Post og Silver, 1983). Dermed er det viktig å sette seg inn i brøk og se på det komplekse knyttet til temaet brøk i matematikken.

2.2 En teoretisk modell

Kieren (1976) og Behr et al. (1983) deler brøk inn i fem ulike *subconstructs*; del-hel og oppdeling, forhold, operator, kvotient og måling. Jeg vil videre bruke ordet *delbegrep* for hvert av begrepene. Behr et al. (1983) presenterer en modell som knytter sammen de ulike delbegrepene. Delbegrepet del-hel troner over resten av delbegrepene. Charalambous og Pitta-Pantazi skriver at delbegrepet del-hel må ligge til grunn for å kunne utvikle forståelse av de resterende delbegrepene som knyttes til de ulike operasjonene med brøk, samt problemløsing og likeverdighet i matematikken (figur 2) (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).



Figur 2. *Den teoretiske modellen knytter sammen de ulike delbegrepene (Behr, Lesh, Post og Silver, 1983)*

Delbegrepet *del-hel* blir ofte presentert tidlig i grunnskolen og elevene danner seg en primitiv forståelse av delbegrepet (Behr, et al., 1983). Når elevene kommer høyere opp i skolen vil de utforske og utvide sine ideer knyttet til rasjonale tall og ta de med videre i arbeid med algebra. I følge Behr et al. (1983) kan elevenes tidligere, ufullstendige ideer knyttet til brøk være grunnlag for mange elevers vansker med algebra i senere tid. Delbegrepet *forhold* beskrives som et forhold mellom to mengder og anses som det mest naturlige delbegrepet knyttet til likeverdighet (Behr et al.,1983). Behr et al. (1983) kommer med et eksempel på delbegrepet hvor en ser på forholdet mellom antall gutter og jenter i et rom. Brøk som *operator* knyttes til multiplikasjon og bidrar til forståelse av de multiplikative operasjonene med brøk (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Et eksempel på dette kan være regnestykke $\frac{2}{3} * \frac{4}{5}$. Videre knyttes delbegrepet *måling* til de additive operasjonene med brøk. Måling benyttes ofte i oppgaver med tallinjer hvor elevene skal plassere tall og legge til eller trekke fra. Brøk som *kvotient* knyttes til problemløsing hvor Behr et al. (1983) kommer med følgende eksempel: «*There are 4 cookies and 3 children. If the cookies are shared equally by the three children, how much cookie does each child get?”* (Behr et al., 1983). Selv om sistnevnte knyttes til problemløsing i matematikken, mener Charalambous og Pitta-Pantazi at en må ha forståelse for alle de fem ulike delbegrepene for å kunne løse problemer knyttet til brøk (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).

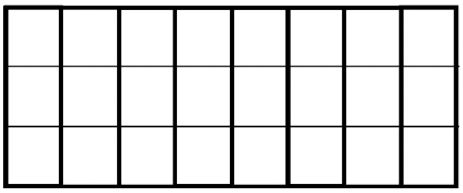
Behr et al. (1983) påpeker at de tykke pilene står for etablerte forhold, mens de stiplete pilene er hypnoser mellom de rasjonale tallene, forhold og ulike operasjoner. Oppsummert sier modellen at delbegrepet del-hel er grunnlaget for å videre kunne utvikle forståelse av de resterende delbegrepene. For å utvikle forståelse rundt multiplikasjon og addisjon står delbegrepene operator og måling sentralt og likeverdighet og problemløsning representeres best gjennom delbegrepene forhold og kvotient (Behr et al., 1983).

2.3 Delbegrepene

Om elevene skal klare å mestre brøk i matematikken er det viktig at elevene har forståelse for hvert enkelt delbegrep (Bjerke, Eriksen, Rodal og Ånestad, 2013). I dette delkapittelet vil jeg gå gjennom hver av de fem ulike delbegrepene og si litt om hva som må til for at elevene skal kunne mestre hvert enkelt delbegrep.

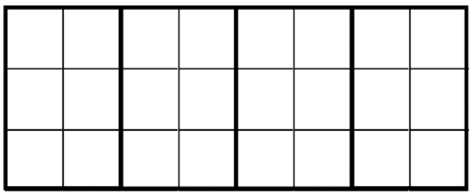
2.3.1 Del-hel

Delbegrepet del-hel defineres som en situasjon hvor et sett med diskrete objekter eller kontinuerlige mengder er delt inn i like størrelser (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det vil si at hver enkelt del av den aktuelle mengden eller objektet til sammen skal utgjøre den hele. Hver av delene er like store og telleren i brøken kan ikke være større enn nevneren (Charaambous og Pitta-Pantazi). Brøken $\frac{a}{b}$ representerer *a* deler ut av *b* like deler og hver del kan bestå av mindre størrelser (Lamon, 2012). For eksempel kan $\frac{1}{8}$ representere tre kakestykker (figur 3). Det vil med andre ord si at en del ikke nødvendigvis svarer til et kakestykke, men kan svare til flere. I dette tilfellet har vi åtte like deler som hver består av tre kakestykker.



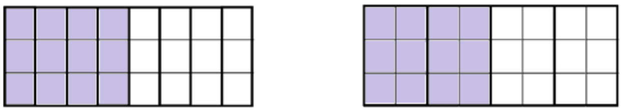
Figur 3. $\frac{1}{8}$ *representert som 3 kakestykker.*

Vi kan også dele kaken inn i færre deler. Da vil hver del bestå av flere kakestykker. Ved å dele kaken inn i 4 deler i stedet for 8, vil vi få 6 kakestykker per del (figur 4).



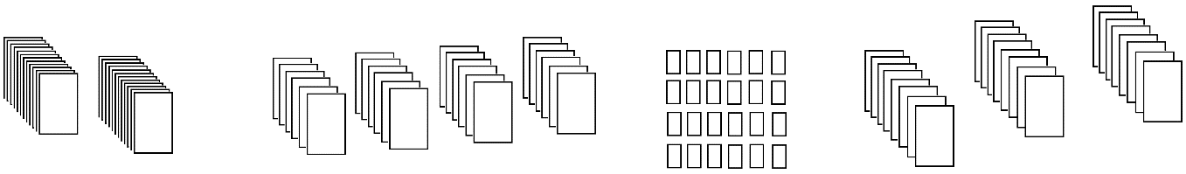
Figur 4. *¼ representert som 6 kakestykker.*

Deler vi kaken i to vil vi i figur 1 få $\frac{4}{8}$ og i figur 2 få $\frac{2}{4}$. Disse brøkene er det vi kaller ekvivalente, som betyr at de representerer den samme relative mengden (Lamon, 2012) (figur 5). Dette må elevene kunne for å videre arbeide med *unitizing* og *reunitizing.* Disse begrepene kan oversettes til samlebegrepet *partisjonering* eller *oppdeling*.



Figur 5. *Ekvivalente brøker*

Lamon definerer partisjonering som en mental eller visuell prosess hvor enheten deles opp på ulike måter (Lamon, 2012). Kaken i figur 3 og 4 er delt inn på to ulike måter. Figur 3 inneholder åtte deler med tre kakestykker i hver del, mens figur 4 inneholder fire deler med seks kakestykker i hver del. Uansett inndeling består kaken av tjuefire kakestykker. Et annet eksempel kan være med kortstokk. La oss si vi har tjuefire kort. Disse kortene kan vi for eksempel dele inn i to bunker med tolv kort i hver, tre bunker med åtte kort i hver, fire bunker med seks kort i hver eller hele tjuefire bunker med ett kort i hver (figur 6).



Figur 6. *2 bunker med 12 kort, 4 bunker med 6 kort, 24 bunker med 1 kort og 3 bunker med 8 kort*

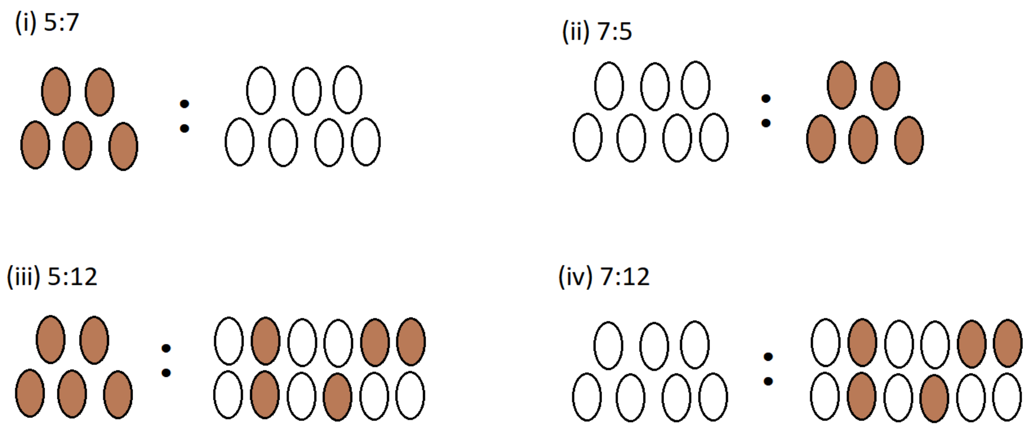
Kieren påpeker at erfaring med partisjonering for å utvikle konsepter med rasjonale tall er vel så viktig som telleerfaring når det kommer til å utvikle konsepter rundt hele tall (Kieren, 1993). Elevene bør derfor arbeide mye med partisjonering slik at de får forståelse for at for eksempel brøken 1/3 alltid vil representere en av tre like deler. Charalambous og Pitta-Pantazi påpeker også at det er viktig å utvikle evner innenfor dette området både ved å dele en enhet inn i like deler, men også ved å finne den hele ved hjelp av delene (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Eksempel på dette kan være å konstruere 2/5 når eleven har fått tildelt den hele eller å konstruere den hele når eleven har fått tildelt 2/5.

For at elevene skal beherske brøk som del-hel legger Charalambous og Pitta-Pantazi vekt på at elevene må se forholdet mellom delene og den hele på tre ulike måter; (a) delene utgjør til sammen den hele, (b) jo flere deler den hele er delt inn i, desto mindre består hver del av og (c) forholdet mellom delene og den hele vil hele tiden være det samme uavhengig av størrelse, form, arrangement og orientering av delene (Charalambous og Pitta-Pantazi).

2.3.2 Forhold

Brøk som forhold refererer til en sammenlikning mellom to mengder (Lamon, 2012, s.182). Dette delbegrepet blandes ofte med begrepet *rate*. Lamon definerer rate som en sammenlikning av to ulike typer mengder, mens delbegrepet forhold (ratio) defineres som en sammenlikning av to like typer mengder (Lamon, 2012). Et eksempel på en rate er antall kroner per kilogram (*kr/kg)*, mens et forhold vil være pris mot pris eller kilo mot kilo. Brøk som forhold kan ikke uttrykkes som et enkelt tall (Lamon, 2012).

Vi kan skille mellom to typer forhold hvor en sammenlikner to like typer mengder: *del-hel* og *del-del*. Del-hel-sammenlikningen er forhold hvor deler av mengden blir sammenliknet med hele mengden, mens del-del-sammenlikningen er forhold der en del av mengden blir sammenliknet med en annen del av mengden (Lamon 2012). Lamon illustrerer dette ved hjelp av en eggekartong hvor fem egg er brune og syv egg er hvite. Disse eggene kan representere fire ulike forhold: (i) brun-hvit-sammenlikning, 5:7 (del-del), (ii) hvit-brun-sammenlikning, 7:5 (del-del), (iii) brune, 5:12 (del-hel) og (iv) hvite, 7:12 (del-hel) (figur 7).



Figur 7. *Fire ulike forhold med tolv egg hvor fem er brune og syv er hvite*

I motsetning til de andre delbegrepene som ofte skrives på brøkform, kan notasjonen til dette delbegrepet skrives på flere ulike måter, for eksempel *a: b* eller $a \rightarrow b$ (Lamon, 2012). Dette gjør det enklere å skille brøkforhold fra andre brøker om nødvendig. Særlig delbegrepene forhold og del-hel kan være vanskelige å skille dersom en ikke benytter seg av en annen notasjon for forhold enn $\frac{a}{b}$. Forholdet mellom to mengder innebærer også at om mengdene endres, endres de sammen. Det betyr at forholdet mellom dem vil forbli uendret. Dersom elevene multipliserer mengdene med det samme tallet (bortsett fra 0), vil verdien av forholdet forbli det samme. Dette er noe elevene må ha forståelse for dersom de skal beherske forhold som delbegrep. *«The-Orange-Juice-Task»* er en oppgave som er blitt mye brukt for å teste elevers forståelse av brøk som forhold (Noelting, 1978). Videre må elevene forstå betydningen av et forhold mellom to mengder samt ideen om brøkens likeverdighet. Dette vises også i den teoretiske modellen hvor forholdsbegrepet blir knyttet til likeverdighet (Behr et al, 1983).

2.3.3 Operator

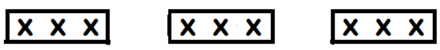
Brøk som operator blir sett på som en funksjon til et tall, et objekt eller et sett (Behr et al., 1983). Dette delbegrepet handler om å forminske og forstørre eller forkorte og utvide, ofte ved hjelp av multiplikasjon og divisjon (Lamon, 2012). En operator kan med andre ord ses på som en *forvandlingsmaskin* hvor tall, objekter eller sett endres. En slik forvandling kan ifølge Lamon skje på tre ulike måter: (i) gjøre linjestykker lengre eller kortere, (ii) øke eller minske antall enheter i et sett av diskrete objekter, eller (iii) gjøre en figur i det geometriske planet større eller mindre med lik form (Lamon ,2012).

En operator er et sett med instrukser. For eksempel vil $\frac{3}{4}$ av en mengde M være en operator hvor instruksene vil være å multiplisere med 3 og dele på 4. Vi vil få det samme resultatet uavhengig av hvilken operasjon vi gjør først.:

$$\frac{3}{4}(M) = 3\left(\frac{M}{4}\right) = \frac{3M}{4}$$

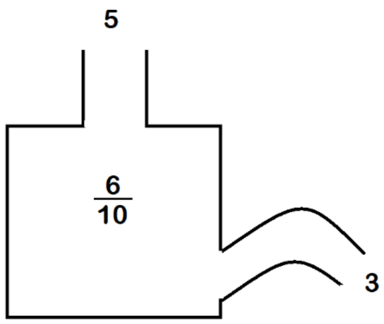
La oss si at mengden $M = 12$. $\frac{3}{4}$ av 12 kan da løses på to ulike måter hvor vi (i) multipliserer telleren med M og deretter dividerer på nevneren (figur 8) eller (ii) hvor vi multipliserer telleren med resultatet der M divideres på nevneren (figur 9).

Figur 8*. (3 kopier av 12): 4 = 9*



Figur 9*. 3 kopier av (12: 4) = 9*

Lamon viser et lignende eksempel og påpeker at det i enkelte tilfeller kan være lurt å starte med en av operasjonene framfor den andre da det vil gjøre utregningene enklere (Lamon, 2012). Et annet eksempel er en operator som øker eller minsker antallet ved hjelp av en «input-output»-funksjon. En slik funksjon starter med et gitt antall som puttes på en *maskin*. Denne maskinen inneholder en operator og ut kommer produktet som har blitt forvandlet i maskinen (figur 10).



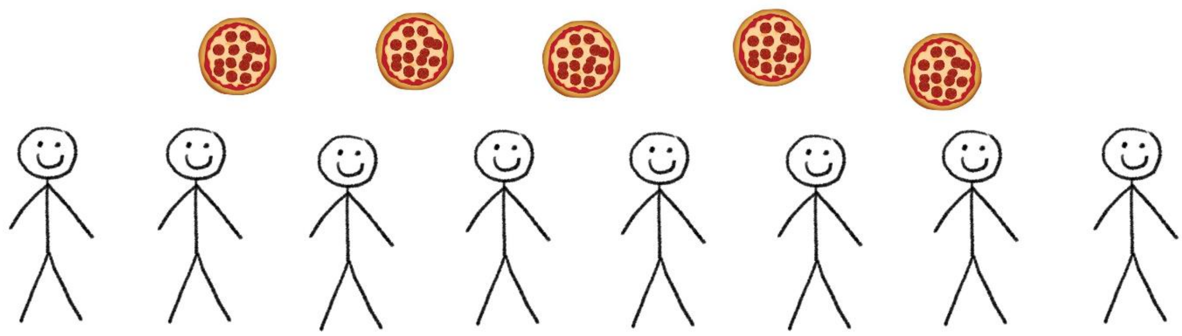
Figur 10*. Antallet endres fra 5 til 3 ved hjelp av operatoren* $\frac{6}{10}$

For at elevene skal beherske brøk som operator, er det viktig at elevene kan (i) tolke en brøkmultiplikator på ulike måter, for eksempel at ¾ er 3 ganger ¼ og ¼ 3 ganger, (ii) forstå at rekkefølgen på de to operasjonene multiplikasjon og divisjon er uavhengige og (iii) benytte seg av «input-output»-funksjonen. I tillegg kan det være lurt at elevene benytter seg av modeller i arbeidet med brøk som operator (Lamon,2012,). Behr (1983) påpeker også at det å forstå brøk som operator forsterker forståelsen av multiplikasjon med brøk, særlig der hvor elevene skal ta en del av en del av en hel, for eksempel $\frac{2}{5}$ av $\frac{3}{7}$ (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).

2.3.4 Kvotient

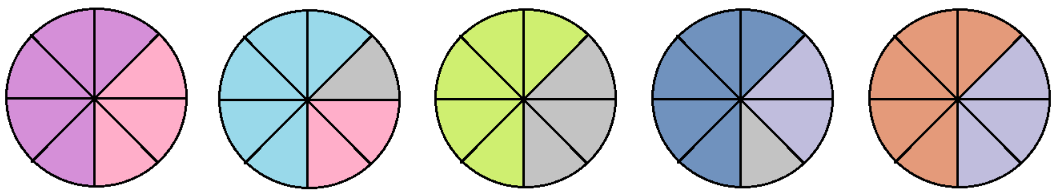
Brøk som kvotient er et resultat av en divisjon (Lamon, 2012). Brøken $\frac{x}{y}$ består av en dividend *x,* en divisor *y* og en kvotient $\frac{x}{y}$, hvor x og y representerer hele tall (Kieren, 1993). Brøken $\frac{2}{3}$ er en numerisk verdi og kan for eksempel tilsvare mengde kake hver person får dersom 3 personer deler 2 kaker (Kieren, 1993). Situasjoner hvor elevene må arbeide med brøk som kvotient er ifølge Pitta-Pantazi med på å hjelpe elevene til å komme fram til rettferdig deling av kontinuerlige mengder, som for eksempel pizzaer eller kaker (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Dette kan minne om del-hel-begrepet, men en kvotient er ikke begrenset av brøkens størrelse. Telleren i brøken kan både være mindre, lik eller større enn nevneren og resultatet likeså i forhold til utgangspunktet (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). I tillegg er det ikke den hele som deles, men dividenden *x*.

Vi kan dele divisjon inn i to ulike typer: *delingsdivisjon* og *målingsdivisjon*. Delingsdivisjon legger vekt på mengden hver deltaker får hvis mengden er likt fordelt. Et eksempel på en oppgave med delingsdivisjon kan være: «8 barn skal dele 5 pizzaer likt, hvor mye pizza får hvert barn?» (figur 11).



Figur 11*. Delingsdivisjon: 8 personer deler 5 pizzaer.*

Målingsdivisjon legger mer vekt på antall like deler en kan få når en deler en mengde likt (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Om vi snur litt på sistnevnte oppgave, kan vi heller gi følgende spørsmål: «5 pizzaer deles likt på noen barn. Hvert av barna får 5/8 av pizzaene, hvor mange barn er det til sammen?» (figur 12).

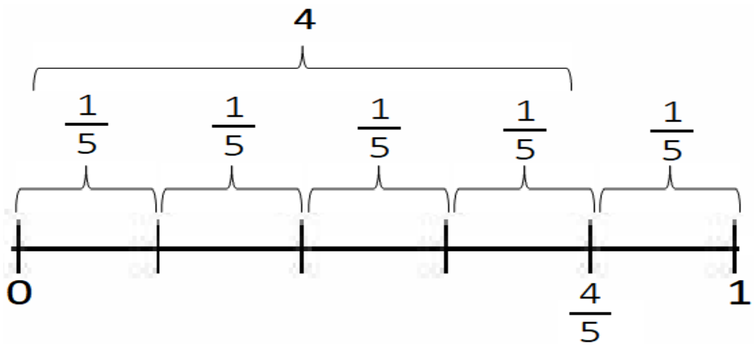


Figur 12. *Målingsdivisjon: 5 pizzaer delt inn i 5/8.*

Skal elevene mestre brøk som kvotient, må de ha forståelse for brøkens ubegrensede størrelse, samt dividenden og divisoren sin rolle (Charalambous og Pitta-pantazi, 2007). Elevene må kunne identifisere en brøk ved divisjon og kunne svare på spørsmålet *hvor mye er en del*, samt kunne forklare hvor mye av helheten en del tilsvarer (Lamon, 2012).

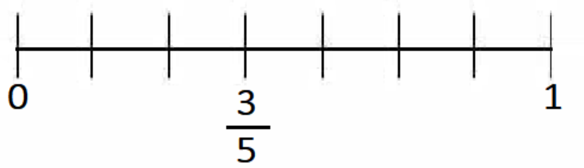
2.3.5 Måling

Brøk som måling er en utvidelse av tallsystemet og betraktes som tallstørrelser. En brøk kan være større eller mindre andre brøker og elevene kan ha vansker med å forstå hvilke brøker som er størst (Hovik og Kleve, 2016). Et eksempel på dette kan være brøkene $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{7}$ hvor elevene tror den sistnevnte brøken er størst på grunn av nevnerens verdi. Det finnes uendelig mange brøker og tall mellom to brøker og Siegler og Lortie-Forgues påpeker at elever sliter med forståelsen av dette (Sigler og Lortie-Forgues, 2017). I arbeid med dette delbegrepet er det derfor nyttig å benytte seg av tallinjer slik at elevene kan se hvor de ulike brøkene plasserer seg. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) påpeker at elevene har vanskeligheter med å plassere tall på tallinja. Dette henger sammen med en uttalelse av Carraher som hevder at det er naivt å tro det er enkelt for elever å forstå delbegrepet måling (Carraher, 1996). Sammen med brøkens størrelse kommer også intervaller og enhetsbrøker inn i bildet. En enhetsbrøk gjentas flere ganger for å bestemme en lengde fra et gitt startpunkt (Lamon, 2001). For eksempel vil $\frac{4}{5}$ tilsvare lengden av 4 $\frac{1}{5}$ -enheter fra et gitt punkt (figur 13).



Figur 13. $\frac{4}{5}$ *delt inn i* $\frac{1}{5}$ *-enheter og plassert på tallinjen.*

Dersom elevene ikke klarer å dele opp brøken i enheter som samsvarer med brøkens nevner, vil elevene møte på utfordringer ved plassering av brøken på tallinjer bestående av andre enheter (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Et eksempel på dette kan være å plassere $\frac{3}{5}$ på en tallinje delt inn i $\frac{1}{7}$ – enheter (figur 14).



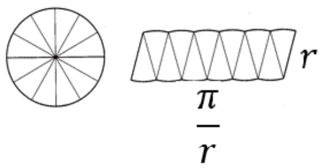
Figur 14. *Brøkens nevner samsvarer ikke med tallinjens oppdeling og blir plassert feil*

Delbegrepet måling blir knyttet til regneoperasjonen addisjon i den teoretiske modellen til Behr et al (1983). For at elevene skal beherske målingsbegrepet må elevene forstå tettheten av tall og at det finnes uendelig mange brøker og tall mellom to brøker (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).

2.4 Forståelse ved brøk

Ifølge Richard Skemp (1976) kan vi skille mellom *instrumentell* og *relasjonell* forståelse i matematikken. Den instrumentelle forståelsen knyttes til formler og regler som hjelper elevene med å huske hvordan oppgavene skal løses og forbindes gjerne med den tradisjonelle undervisningsmetoden (Skemp, 1976). Den relasjonelle forståelsen bygger på begreper og sammenhenger mellom dem. I tillegg til at elevene skal huske hvordan oppgavene løses skal de også vite hvorfor det er sånn (Skemp, 1976). Det relasjonelle knyttes ofte til det undersøkende i matematikken.

Et eksempel som viser skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse kan være arealet av en sirkel. Ved en instrumentell forståelse kjenner elevene til formelen πr^2, men kan ikke si noe om hvorfor den fungerer. Ved en relasjonell forståelse vil elevene ha en dypere forståelse av hvorfor formelen fungerer som den gjør (figur 15). Elevene vil kjenne til tallet π og vite hvorfor akkurat dette tallet benyttes.



$$\frac{\pi}{r} * r = \pi r^2$$

Figur 15. *Relasjonell forståelse av sirkelens areal*

Anna Sfard mener de matematiske begrepene er komplementære og at elever bør ha forståelse for begge aspektene for å forstå de matematiske begrepene fullt ut (Sfard, 1991).
Skal elevene forstå brøkbegrepet fullstendig bør de har forståelse for de fem ulike delbegrepene, både instrumentelt og relasjonelt (Bjerke et al, 2013).

2.5 Brøk i skolen

I dagens læreplan for de matematiske fellesfagene står det at elevene etter 2.års trinn skal kunne doble og halvere. Etter 4.års trinn skal elevene kunne bruke enkle brøker i praktiske sammenhenger og etter 10. års trinn skal elevene blant annet kunne sammenlikne og regne med brøk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Brøk er med andre ord en del av grunnskolen fra starten av og grunnlaget skal legges allerede de første årene. Etter 7.års trinn skal elevene kunne følgende: «*beskrive og bruke plassverdisystemet for desimaltall, regne med positive og negative hele tall, desimaltall, brøker og prosent og plassere de ulike størrelsene på tallinja*», samt «*finne fellesnevner og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøker*» (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Fra og med høsten 2020 melder Kunnskapsdepartementet om nye læreplaner (Regjeringen, 2017). Læreplanene er under høring våren 2019 og den nye læreplanen for de matematiske fellesfagene skal legge mer vekt på sammenhenger innenfor fagets eget kunnskapsområde, samt sammenhenger mellom fagets eget kunnskapsområde og andre fags kunnskapsområder. Disse områdene skal føre til mer tilrettelegging for dybdelæring og forståelse i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019).

3 Metode

I dette kapittelet gjør jeg greie for hva jeg har gjort for å senere kunne svare på forskningsspørsmålet. Jeg beskriver først mine valg av metode og utvalg. Deretter beskriver jeg hvordan oppgaveheftet ble til. Videre beskriver jeg hvordan datainnsamlingen ble gjennomført og analysert før jeg til slutt gjør greie for reliabilitet og validitet samt etikk i forskningen.

3.1 Innsamlingsmetode

Formålet med dette prosjektet var å finne ut hvilke brøkbegreper som er observerbare hos elever på 6.trinn. For å kunne undersøke dette nærmere valgte jeg observasjon og to typer intervju som min innsamlingsmetode. Observasjon valgte jeg som en metode da problemstillingen spør etter hvilke brøkbegreper som er *observerbare* hos elevene. Jeg valgte oppgavebaserte gruppeintervjuer da jeg ønsket å komme tettere inn på enkelte elevers tanker og ideer i arbeid med brøk. Lærerintervjuet valgte jeg da jeg ønsket bakgrunnsinformasjon knyttet til brøkundervisning.

Forskningen min er i utgangspunktet basert på en kvalitativ metode da den er mer *åpen* enn ved en kvantitativ metode (Postholm og Jacobsen, 2016). Den kvalitative metoden er ofte ressurskrevende og går i dybden på det spesielle i stedet for det generelle (Postholm og Jaobsen, 2016). Ved et elevintervju vil jeg dermed få et større innsyn i hvordan elever tenker og hvilke begreper de benytter seg av enn ved et spørreskjema som på den andre siden vil nå ut til flere deltagere (Postholm og Jacobsen, 2016). Tid blir nemlig en begrenset faktor ved observasjon og intervju og dermed får en ikke undersøkt like mange elever som ved et spørreskjema. Likevel vil det kvalitative med sine unike historier gi mulighet til å kunne gå i dybden på hvilke begreper som er framtredende innenfor brøkbegrepet. Både observasjon og intervju regnes som mer allsidig enn et spørreskjema (Christoffersen og Johannessen, 2012). Likevel skal en ikke skille den kvalitative og kvantitative metoden fra hverandre, men se på de som komplementære hvor de utfyller hverandre, gir ulik informasjon og inspirerer til større refleksjon og diskusjon (Postholm og Jacobsen, 2016). Det vil med andre ord si at en forskning nødvendigvis ikke kun er av den kvalitative metoden, men også kan inneholde deler av den kvantitative metoden og motsatt.

3.1.1 Utvalg

Jeg ønsket å observere en brøkperiode på mellomtrinnet og valgte å ta kontakt med en skole jeg kjente til fra før. Jeg kom i kontakt med en matematikklærer på 6.trinn og da Roåker[1] Skole kun bestod av en klasse på hvert trinn var det allerede opplagt hvilken klasse jeg skulle observere. Videre måtte jeg velge ut elever til gruppeintervjuene. Postholm og Jacobsen (2016) ramser opp tre ulike hovedutvalg; (a) et utvalg elever en antar er representativt for klassen, (b) et utvalg elever en antar kan gi best informasjon og (c) et utvalg elever en antar representerer spekteret i klassen (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg ønsket et utvalg der elevene kunne gi meg best mulig informasjon. I tillegg til samtykke fra foresatte, måtte elevene selv ønske å delta. Ut i fra disse kriteriene ble elevene valgt ut i samarbeid med faglærer. Til lærerintervjuet valgte jeg å benytte meg av klassens faglærer i matematikk da den var lett tilgjengelig i tillegg til å ha deltatt i noen av mine observasjoner.

[1] Roåker Skole er et fiktivt navn

3.1.2 Observasjon

Jeg valgte observasjon som en av mine innsamlingsmetoder da jeg ville undersøke hvilke brøkbegreper som kom fram i forbindelse med klassens brøkundervisning. I samarbeid med faglærer avtalte vi en brøkperiode på 3 uker. Klassen hadde matematikk to dager i uka; tirsdag fra 12.00-13.30 og onsdag fra 09.45-10.45. Klassen bestod av 6 gutter og 9 jenter som til sammen var 15 elever.

Ved observasjon er det også noen valg en må foreta seg på forhånd. Postholm og Jacobsen (2016) peker på tre valg; (a) hvem og når, (b) observatørrollen og (c) åpen eller strukturert observasjon (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg endte som sagt opp med å observere en klasse på 6.trinn. Observasjonen fant sted i klassens klasserom og skulle foregå på en periode over tre uker. Ut i fra observasjonens lengde vil en få mer og bedre informasjon jo lenger den varer (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg forholdt meg til klassens timeplan som vil si at da matematikktimen var over var også min observasjon for dagen over. Observatørrollen jeg inntok var en ikke-deltakende observatørrolle. Postholm og Jacobsen beskriver det som en *fullstendig observatør* hvor en observerer på sidelinjen samtidig som en befinner seg på samme sted som handlingene foregår (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg var hele tiden på plass i et av klasserommets hjørner og noterte ned samtaler samt det som foregikk på tavlen og smartboarden i løpet av undervisningen. Til slutt kommer valget om åpen eller strukturert observasjon. Jeg valgte førstnevnte. Jeg var ute etter eventuelle brøkbegreper som kom fram knyttet til brøkundervisningen, men hadde ikke på forhånd laget meg skjemaer med kategorier eller lignende. Det eneste jeg hadde gjort klart på forhånd var en mal som inneholdt tidspunkt samt hvor mange elever og lærere det var til stede. Jeg tok heller ikke og noterte hvor ofte enkelte hendelser inntraff, noe som beskriver en mer strukturert observasjon (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg var med andre ord åpen for ulike hendelser og situasjoner og startet hver observasjon med så å si blanke ark.

3.1.3 Lærerintervju

Jeg valgte å ha med et lærerintervju i min innsamlingsdata da jeg ønsket informasjon om hva elevene kunne slite med knyttet til brøkbegrepet samt lærerens filosofi rundt brøkundervisningen. Denne informasjonen var ikke direkte knyttet til min problemstilling, men jeg ønsket å ha dette med som en tilleggsinformasjon. Intervjuet valgte jeg å gjennomføre på slutten av brøkperioden da all observasjon var ferdig.

Postholm og Jacobsen peker på fem valg en må ta stilling til før et intervju; (a) hva ønsker en informasjon om, (b) hvem skal en prate med, (c) hvilken form for dialog skal en velge, (d) hvordan skal en gjennomføre samtalen og (e) hvordan gjennomfører en intervjuet (Postholm og Jacobsen, 2016). Jeg ønsket som sagt informasjon om lærerens undervisningsfilosofi og hva elevene kunne slite med rundt brøkbegrepet. Det var dermed et naturlig valg å prate med matematikklæreren til klassen jeg hadde observert. Dialogen skjedde i en asynkron form via e-post. Ved et slikt intervju mister en noe av spontaniteten ved svarene og den intervjuede får bedre tid på å formulere sine svar. På den måten kan intervjuet bli mer reflektert (Postholm og Jacobsen, 2016). Dette intervjuet var heller ikke en stor del av innsamlingsdataen og dermed var et slikt intervju å foretrekke på grunn av visse omstendigheter. Dette vil jeg komme tilbake til i delkapittel 3.2. Samtalen ble gjennomført som et strukturert intervju hvor jeg på forhånd hadde spørsmålene klare. Disse ble sendt nummerert til lærer på e-post. Et strukturert intervju kan minne om et spørreskjema hvor deltageren får utforme sitt eget svar uten oppfølgingsspørsmål fra intervjuer (Postholm og Jacobsen, 2016).

3.1.4 Oppgavebasert gruppeintervju

Problemstillingen for oppgaven spør etter hvilke brøkbegreper som er observerbare hos elever på 6.trinn. For å kunne svare på denne problemstillingen valgte jeg å gjennomføre to oppgavebaserte gruppeintervjuer. Jeg ønsket minst to intervjuer med tre til fire elever per intervju. Jeg ønsket også lydopptak av gruppeintervjuene slik at jeg senere kunne gå tilbake å høre samtalen mellom elevene. Dette ville også gjøre transkriberingen enklere for meg i etterkant av intervjuene. Oppgavene til intervjuet laget jeg med inspirasjon fra ulike læreverk og forskningen til Charalambous og Pitta-Pantazi (2007). Hver enkelt oppgave var knyttet til et brøkbegrep og alle de ulike begrepene ble representert (vedlegg 1).

I følge Postholm og Jacobsen kan et intervju enten skje individuelt eller i gruppe (Postholm og Jacobsen, 2016). Et individuelt intervju står sterkt når det handler om å få fram hvordan individet oppfatter eller fortolker virkeligheten, men vil være svakt med tanke på all tid som går med til gjennomføringen. Når det gjelder gruppeintervju vil en ofte få fram mer diskusjon og refleksjon hos den enkelte da deltagerne må lytte, samt forklare og begrunne sine svar ovenfor resten av deltagerne (Postholm og Jacobsen, 2016). Om deltagerne ikke respekterer hverandre kan det fort oppstå uenigheter og konflikter (Postholm og Jacobsen, 2016). Her er det viktig at intervjueren er på banen og bryter inn dersom det skulle være nødvendig.

Da jeg ønsket meg et oppgavebasert intervju med tre til fire elever per intervju endte jeg opp med gruppeintervjuer. Jeg ønsket som sagt et hensiktsmessig utvalg hvor elevene kunne gi meg best mulig informasjon. Elevene måtte velges ut blant de som samtykket til intervju og da det kun var fire elever ved Roåker Skole som samtykket til et slikt intervju, kunne jeg ikke lenger velge ut et hensiktsmessig utvalg. Utvalget ble derfor et mer representativt utvalg for klassen der to gutter og to jenter samtykket til intervju.

Dialogen fant sted ansikt til ansikt. Dette er den vanligste formen for et intervju og fører ofte til en åpen samtale (Postholm og Jacobsen, 2016). Den største ulempen med et ansikt-til-ansikt-intervju er at begge parter må være fysisk til stede på samme sted, noe som ikke alltid vil være like lett (Postholm og Jacobsen, 2016). Selv om dette var et ansikt-til-ansikt-intervju inntok jeg en passiv rolle i gruppeintervjuet. Dette valgte jeg å gjøre fordi jeg ønsket en samtale mellom elevene uten innblandinger fra min side. Jeg var likevel tilgjengelig til enhver tid om elevene skulle lure på noe underveis. Intervjuet kan ses på som et strukturert intervju da elevene fikk utdelt de samme oppgavene. Postholm og Jacobsen påpeker at et slikt intervju kan sammenlignes med et spørreskjema (Postholm og Jacobsen, 2016). Forskjellen er at jeg tok lydopptak og oppfordret elevene til å tenke og samtale høyt om oppgavene. I tillegg hadde jeg muligheten til å spørre elevene direkte dersom det skulle oppstå noe underveis. Jeg fikk kun gjennomført et gruppeintervju på Roåker skole. Grunnen til dette vil jeg komme tilbake til i kapittel 3.2. Videre går jeg inn på oppgavene elevene fikk utdelt under gruppeintervjuet.

Oppgave 1: Regn ut

Den første oppgaven i heftet bestod av to deloppgaver a) og b) som jeg knyttet til delbegrepet operator. Her skulle elevene multiplisere et helt tall med en brøk samt multiplisere to brøker (figur 16). Lamon (2012) nevner blant annet at delbegrepet operator handler om å gjøre noe mindre eller større ved hjelp av multiplikasjon og divisjon. Etter 7.trinn skal elevene kunne multiplisere med brøk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Divisjon med brøk nevnes ikke som et overordnet mål i læreplanverket og jeg valgte derfor bort divisjonsoppgaver.

a) $2 \cdot \frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}$

Figur 16. *Oppgave knyttet til delbegrepet operator med fokus på multiplikasjon. Laget selv*

En elev med forståelse for brøk som operator vil kunne løse disse oppgavene ved hjelp av multiplikasjon der den multipliserer teller og nevner hver for seg.

Oppgave 2: Utvid brøkene

Den neste oppgaven i heftet knyttet jeg også opp mot delbegrepet brøk som operator. Charalambous og Pitta-pantazi (2007) legger vekt på at delbegrepet omfatter utvidelse av brøk. Jeg valgte derfor å lage to deloppgaver der elevene skulle utvide en brøk med et gitt tall (figur 17).

a) Utvid brøken med 3 $\frac{4}{7}$ b) Utvid brøken med 5 $\frac{4}{9}$

Figur 17. *Oppgave knyttet til delbegrepet operator med fokus på utvidelse. Laget selv*

Elevene vil kunne mestre denne oppgaven dersom de løser den ved å hjelp av en operator som multipliseres med den gitte brøken. Operatoren vil henholdsvis være 3 i deloppgave a) og 5 i deloppgave b).

Oppgave 3: Pizza

Den tredje oppgaven knyttet jeg til brøk som kvotient. Oppgaven fant jeg i artikkelen til Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) som påpeker at elevene må forstå telleren og nevnerens betydning der telleren står for antall deler i hver del og nevneren for antall deler totalt. Oppgaven ble kalt for *pizza* og bestod av to deloppgaver a) og b) hvor den første oppgaven knyttes til delingsdivisjon og den andre til målingsdivisjon (figur 18).

a) Tre pizzaer skal fordeles likt på fire barn. Hvor mye pizza blir det til hvert barn?

b) Tre pizzaer fordeles likt på noen venner. Hver av dem får 3/5 pizza. Hvor mange venner er de til sammen?

Figur 18. *Oppgave knyttet til brøk som operator (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007)*

En elev som viser forståelse av kvotientbegrepet vil i denne oppgaven for eksempel kunne finne brøkene i oppgaveteksten og ved hjelp av disse se hvor mange deler hver del består av og hvor mange deler det er totalt sett.

Oppgave 4: Appelsinsaft

Den neste oppgaven knyttet jeg til brøk som forhold. Her skulle elevene finne ut hvilken oppskrift som ga den sterkeste og svakeste saften blant fire ulike oppskrifter (figur 19). Oppgaven nevnes i artikkelen til Charalambous og Pitta-Pantazi og har blitt brukt mye for å teste elevers forståelse av forholdsbegrepet (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Oppgaven er laget med inspirasjon fra *«The-orange-juice-task»* laget av Noelting (1978).

Even og Maria skal blande appelsinsaft til klassen. For å finne ut hvilken blanding som smaker best, prøver de ut noen ulike oppskrifter.

Oppskrift A
2 dl appelsinsaft
3 dl kaldt vann

Oppskrift B
1 dl appelsinsaft
4 dl kaldt vann

Oppskrift C
4 dl appelsinsaft
8 dl kaldt vann

Oppskrift D
3 dl appelsinsaft
5 dl kaldt vann

a) Hvilken oppskrift vil gjøre appelsinsaften sterkest?
b) Hvilken oppskrift vil gjøre appelsinsaften svakest?

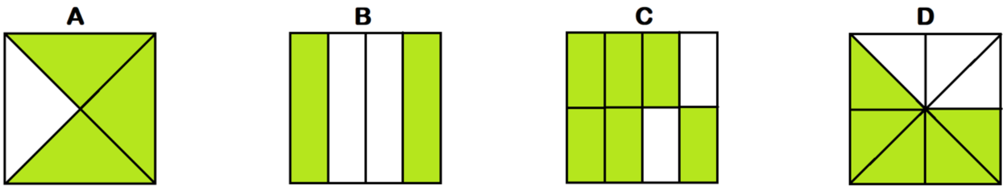
Figur 19. *Oppgave knyttet til delbegrepet forhold*

En elev med forståelse for forholdsbegrepet vil for eksempel kunne løse denne oppgaven ved å se på del-hel-forholdet i hver oppskrift.

Oppgave 5: Figurer

Den femte oppgaven knyttet jeg til delbegrepet del-hel. Oppgaven valgte jeg å kalle for *figurer* og bestod av tre deloppgaver a), b) og c) (figur 20). I oppgave a) skulle elevene markere de figurene som var fargelagt ¾ og i oppgave b) skulle elevene notere ned hvor stor brøkdel av figurene som var fargelagt. I oppgave c) fikk elevene oppgitt et antall klinkekuler som representerte 2/3 av en klinkekulesamling. Her skulle elevene finne ut hvor mange klinkekuler klinkekulesamlingen bestod av til sammen. Disse oppgavene ble laget med inspirasjon fra Multi læreverk (Alseth, Nordberg og Røsseland, 2007)) og artikkelen til Charalambous og Pitta-Pantazi (2007).

a) I hvilke figurer er ¾ fargelagt?



b) Hvor stor brøkdel av figuren er fargelagt?

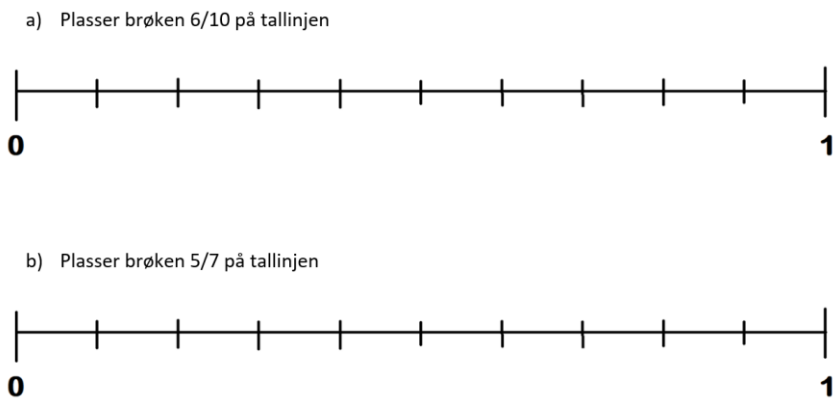
c) Hvis fire klinkekuler representerer 2/3 av klinkekulesamlingen til Anders, hvor mange klinkekuler har da Anders til sammen?

Figur 20*. Oppgave knyttet til delbegrepet del-hel*

En elev med forståelse for delbegrepet del-hel vil for eksempel kunne løse denne oppgaven ved hjelp av partisjonering der eleven ser at hver del er av samme størrelse.

Oppgave 6: Tallinje

Den siste oppgaven i heftet knyttet jeg til delbegrepet måling. Denne oppgaven bestod av deloppgavene a) og b) hvor begge inneholdt en tallinje (figur 21). I oppgave a) skulle elevene plassere brøken 6/10 på en tallinje som var delt inn i ti deler. Også i oppgave b) var tallinjen delt inn i ti deler. Her skulle elevene plassere brøken 5/7. Forskning viser at elever har problemer med å plassere tall på tallinja da de teller seg fram til antall streker på tallinja uten å sjekke tallinjens oppdeling, samt brøkens nevner (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Oppgaven laget jeg med inspirasjon fra Charalambous og Pitta-Pantazi sin artikkel (2007).



Figur 21. *Oppgave knyttet til delbegrepet måling*

En elev med forståelse av delbegrepet måling vil for eksempel kunne løse denne oppgaven ved å sammenlikne brøkens nevner med tallinjens inndeling og deretter dele tallinjen inn i enheter som samsvarer med denne nevneren.

3.2 Gjennomføring

Jeg tok kontakt med Roåker skole i desember og fikk positiv tilbakemelding på min forespørsel. Jeg ble ønsket velkommen til å forske på 6.trinn og i begynnelsen av januar ble det avtalt tid og sted for observasjon og intervju sammen med faglærer i matematikk. Roåker er en kombinert barne- og ungdomsskole med én klasse per trinn opp til 10.trinn. Skolen består av rundt 160 elever som tilsvarer et gjennomsnitt på 16 elever per trinn.

3.2.1 Observasjonene

Observasjonene ble gjennomført i løpet av fire matematikktimer på Roåker skole. Den første uken observerte jeg to timer; en på tirsdag og en på onsdag. Jeg startet min første observasjonsdag med å hilse på vikaren før timen startet og dette viste seg å være klassens kontaktlærer. Matematikklæreren hadde laget klart et opplegg for timen som vikaren skulle følge. Jeg plasserte meg på en stol bak i venstre hjørne av klasserommet. Jeg noterte ned alle mine observasjoner på pc. På forhånd hadde jeg laget meg et dokument som inneholdt dato og klokkeslett, samt antall lærere og elever slik at jeg slapp å bruke tid på dette i timen. På observasjonsdag nummer to var det ny vikar for matematikklæreren. Dette var også en vikar elevene hadde tidligere kjennskap til og matematikklæreren hadde også denne gangen laget klart et opplegg til vikaren.

I uke to ble det gjennomført én observasjon. Denne fant sted på tirsdagen. Klassen hadde fått tildelt nye plasser siden sist uke og en tredje vikar var satt inn for matematikklæreren.

Den siste uken observerte jeg en time på onsdagen. Elevene hadde igjen fått tildelt nye plasser og nå var også matematikklæreren tilbake på plass. Dette var min siste observasjonstime.

Elevene jobbet mye i hefter og på ark i løpet av observasjonsperioden. Etter hver time sørget jeg for å få med meg eksemplarer av det elevene hadde fått utdelt i løpet av matematikktimen. Når timen var ferdig, var også mine observasjoner over.

3.2.2 Lærerintervjuet

På grunn av private omstendighetene hos matematikklæreren var det vanskelig å få tid til et lærerintervju ansikt til ansikt. Jeg valgte derfor å utsette lærerintervjuet og heller gjennomføre det via e-post. Jeg skrev ned tre konkrete spørsmål jeg ønsket svar på og fikk respons til hvert av dem. Svarene ble samlet sammen med spørsmålene i et eget dokument (vedlegg 2).

Spørsmålene jeg stilte var følgende:

1. *Hvilke utfordringer har elever med brøk?*
2. *Hva mener du er det viktigste i forhold til brøk i din undervisning?*
3. *Hva er din filosofi rundt brøkundervisning?*

3.2.3 Gruppeintervjuene

Når det kommer til gruppeintervjuene hadde jeg på forhånd avtalt med matematikklæreren at de skulle bli gjennomført den siste uken av observasjonsperioden. Som nevnt tidligere var det fire elever som samtykket til intervju ved Roåker Skole. Matematikklæreren hjalp meg med å fordele disse elevene på to grupper og det endte opp med en gutt og en jente på hver gruppe. Jeg tok med meg den første gruppen inn på et grupperom og informerte om hva som skulle skje før jeg startet lydopptaket. Elevene fikk hvert sitt eksemplar av oppgaveheftet og fikk beskjed om å prate sammen og samarbeide om oppgavene. Jeg informerte om at jeg ville være tilgjengelig dersom det var noe de lurte på, samtidig som jeg oppfordret dem til å prøve så langt det lot seg gjorde selv. Da jeg startet lydopptaket gikk det ikke lang tid før en av elevene brøt intervjuet. Eleven mente selv den ikke kunne så mye om brøk da den ikke hadde vært i matematikktimene den siste tiden. Eleven ønsket å gå tilbake til klasserommet. Jeg sendte eleven inn igjen til resten av klassen og måtte ta et spontant valg om veien videre. Enten kunne jeg gjennomføre intervjuet med den gjenværende eleven og samtale sammen med den om oppgavene eller så kunne jeg hente ut de to elevene som tilhørte den andre gruppen og danne en større gruppe bestående av tre elever. Jeg valgte det sistnevnte. Dette fordi jeg ønsket en samtale mellom elevene og var derfor redd for å blande meg for mye. Jeg ga informasjonen rundt intervjuet på nytt og satte gruppa i gang. Under selve intervjuet dukket det opp enkelte situasjoner der jeg blandet meg inn, men elevene samarbeidet godt seg imellom og kom seg gjennom alle oppgavene. Da intervjuet var over samlet jeg inn alle oppgaveheftene og takket for innsatsen før jeg sendte dem inn igjen til resten av klassen.

På grunn av situasjonen som oppstod satt jeg nå igjen med ett oppgavebasert gruppeintervju. Jeg ønsket meg minst to og tok derfor kontakt med en ny skole da Roåker Skole kun bestod av én klasse på 6.trinn. Sjøvik[2] (anonymisert) er en barneskole med rundt 420 elever bestående av to til tre klasser per trinn. Jeg kontaktet teamet på 6.trinn og ble ønsket velkommen av en av trinnets kontaktlærere. Jeg avtalte tid og sted og av de som samtykket ble tre elever plukket ut av kontaktlæreren på forhånd. Elevgruppen bestod av tre gutter som kontaktlæreren mente klarte seg bra i matematikkfaget. Vi ble tildelt et eget rom hvor intervjuet skulle foregå. Jeg håndhilste på elevene da de kom inn og informerte om hva som skulle skje før jeg startet lydopptaket og delte ut et eksemplar av oppgaveheftet til hver av dem. Elevene satt i gang med oppgavene og var flinke til å tenke høyt. Jeg måtte blande meg inn et par ganger, men elevene hadde stort sett kontroll. Da

[2] Sjøvik Skole er et fiktivt navn

intervjuet var over gikk vi gjennom oppgavene sammen da de var spente på om de hadde fått til alle oppgavene. Jeg samlet sammen oppgaveheftene, takket for innsatsen og sendte dem tilbake til klasserommet.

3.3 Arbeid med resultatene

Postholm og Jacobsen (2016) påpeker at analyse ikke er en aktivitet som kun foregår etter datainnsamlingen, men som hele tiden er til stede. Datainnsamling og analyse påvirkes av hverandre og beskrives som et dynamisk forhold (Postholm og Jacobsen, 2016).

Observasjonene ble dokumentert ved at jeg noterte underveis i undervisningen. De ble deretter skrevet ut på ark og satt inn i en perm delt inn etter datoer. Utdelte materialer ble samlet inn og lagt ved gjeldende dato. Jeg gikk gjennom materialet for å undersøke hvilke brøkbegreper som ble representert. Observasjonene blir i resultat- og analysekapittelet fremstilt som beskrivende og knyttes til Behr et al. (1983) sin teoretiske modell. Modellen representerer de fem ulike delbegrepene og knytter disse sammen til ulike operasjoner i matematikken. På grunnlag av dette har jeg valgt å benytte meg av den modellen i arbeid med resultatene.

De oppgavebaserte gruppeintervjuene ble tatt opp på lydopptak og transkribert samme dag (vedlegg 3). Når en transkriberer går en fra muntlig tale til skriftlig form (Kvale og Brinkmann, 2009). Elevene ble ikke identifisert med navn, men fikk utdelt et tall 1, 2 og 3 sammen med forbokstaven på sin skole. Jeg laget et skjema med tre kolonner som inneholdt nummer, elev og elevens sitat. Ved å nummerere sitatene ville det blir enklere for meg å eventuelt henvise tilbake til dem senere. Jeg tok også vare på elevenes besvarelser som jeg kunne støtte meg på i arbeidet med transkriberingen. I transkripsjonen har jeg benyttet meg av følgende transkripsjonsnøkkel:

Symbol	***Betydning***
(.)	Pause på under ett sekund
(2)	Pause på to sekunder
[…]	Informanten har sagt noe før eller etter ytringen, men det som ble sagt er ikke relevant og er tatt bort
~	Brukt ved avbrytelser. Etter tekst betyr at ytringen blir avbrutt, før tekst betyr at ytringen avbryter en annens.
…	Brukt dersom en ytring er blitt hengende i luften

Lydopptakene ble spilt gjentatte ganger for å sikre at jeg fikk med meg det elevene sa. Siden gruppene fikk utdelt de samme oppgavene kunne intervjuene sammenlignes opp mot hverandre. De oppgavebaserte gruppeintervjuene blir i resultat- og analysedelen presentert og analysert hvor de sammenlignes og til slutt presenteres i en tabell.

Lærerintervjuet foregikk via e-post og ble senere lagt sammen i et dokument. Da lærerintervjuets hensikt var å gi meg tilleggsinformasjon for å fylle ut mitt bilde blir ikke dette tatt med i resultat og analyse, men vil bli brukt som supplement i drøftingsdelen.

3.4 Reliabilitet og validitet

I en kvalitativ forskning vil forskeren kunne påvirke resultatene i en større grad gjennom sine tolkninger. Det finnes ingen absolutte korrekte fortolkninger av en tekst eller en handling ifølge Gilje og Grimen (1993). Dataen kan med andre ord oppfattes og tolkes forskjellig fra forsker til forsker. Reliabilitet og validitet er to begreper som står sentralt knyttet til forskning. Reliabilitet kommer fra det engelske ordet *reliability* som på norsk kan oversettes til ordet *pålitelighet* (Christoffersen og Johannessen, 2012). Pålitelighet handler om forskerens nøysomhet og kan ikke garanteres hundre prosent (Postholm og Jacobsen, 2016). Hvilke data som blir samlet inn og benyttes, samt hvordan dataene blir bearbeidet er viktige punkter knyttet til reliabilitet (Christoffersen og Johannessen, 2012). Validitet kommer fra det engelske ordet *validity* og kan oversetter til ordet *gyldighet* (Christoffersen og Johannessen, 2012). Gyldighet handler om hvorvidt en kan stole på forskerens tolkninger av resultatene og knyttes til begreper som ærlighet og grundighet (Postholm og Jacobsen, 2016).

Vi kan styrke reliabiliteten ved å gjøre forskningsprosessen transparent (Silverman, 2014). Det vil si at forskeren gir en detaljert beskrivelse av framgangsmåte og metode slik at personer utenfra kan vurdere forskningen trinn for trinn. I denne forskningen har jeg forsøkt å gjøre alle trinn så synlige som mulig ved å være tydelig på når mine egne og andre sine ord kommer frem. Dette har jeg vært bevisst på slik at leseren selv kan trekke en konklusjon. Ved gruppeintervjuene ble elevene informert skriftlig om at det var frivillig å delta. Elevene som deltok hadde derfor en viss motivasjon for å delta og gjorde en innsats med oppgavene. I tillegg til å ha spilt gjennom lydopptakene gjentatte ganger, samlet jeg inn elevenes besvarelser slik at jeg hadde noe å støtte meg på dersom svarene deres ikke kom godt nok fram i lydopptaket i arbeidet med transkriberingen. I tillegg sørget jeg for at oppgaveheftet elevene fikk utdelt i intervjuet ikke bestod av for mange oppgaver, da dette kunne føre til ukonsentrerte og demotiverte elever. Jeg har også gått gjennom mine tolkninger av observasjonene gjentatte ganger slik at dataene mine er mest mulig nøyaktige.

Validiteten er avhengig av hvor grundig forskeren går til verks for å begrunne sine fortolkninger (Thaagard, 2018). Vi kan styrke validiteten ved å legge vekt på *teoretisk transparens* ifølge Silverman (2014). Med dette menes den teorien som representerer grunnlaget for våre tolkninger. I denne forskningen støtter jeg meg på litteraturen når jeg begrunner hvilke delbegreper som er observerbare. Gruppeintervjuene følger det samme oppgavesettet og kan dermed sammenliknes. Flere av sitatene fra gruppeintervjuene er også gjengitt i sin helhet, noe som er med på å styrke gyldigheten av mine data.

I min studie inngår to gruppeintervjuer, ett lærerintervju og en observasjonsperiode på tre uker. Dette er ikke nok grunnlag for å kunne generalisere mine funn, men det gir en pekepinn på hvilke delbegreper som kommer til syne og er observerbare i skolen. Jeg kan ikke være sikker på at en annen forsker ville fått de samme resultatene da jeg kan ha oversett og tolket situasjoner feil. En mer erfaren forsker ville kanskje ha fokusert på og tolket situasjoner annerledes. Likevel mener jeg metoden kunne vært benyttet av andre for å forske på det samme temaet, selv om funnene nødvendigvis ikke ville ha blitt de samme. Christoffersen og Johannessen påpeker at ingenting er absolutt og at en ikke kan garantere reliabilitet og validitet (2012). Likevel kan en minske faktorer som er med på å redusere påliteligheten og gyldigheten.

3.5 Etikk

Ved kvalitativ forskning er gjerne forskeren i nærkontakt med informantene. I forbindelse med dette må forskeren forholde seg til forskningsetiske retningslinjer slik at informantene beskyttes. Informantene skal informeres om forskningsprosjektet og hva det innebærer for den enkelte. Det skal være frivillig å delta og informanten kan når som helst trekke seg. Det vil ikke medføre negative konsekvenser dersom en ikke deltar eller senere velger å trekke seg. Dette fikk elevene og læreren skriftlig informasjon om gjennom et samtykkeskjema (vedlegg 4). Siden elevene var under 15 år måtte de i tillegg ha samtykke fra en foresatt. Norsk senter for forskningsdata (NSD) ble informert og godkjente forskningsprosjektet (vedlegg 5).

Thagaard peker på tre hovedprinsipper innenfor etikken: *Konfidensialitet*, *informert samtykke* og *konsekvenser for deltakerne* (Thagaard, 2018). Ved konfidensialitet peker hun på at deltakerne har rett på beskyttelse av sine privatliv og at de skal bli anonymisert (Thagaard, 2018). I denne oppgaven har jeg anonymisert ved å gi fiktive navn på skolene og elevene har blitt koblet mot en tall- og bokstavkode hvor bokstavene markerer hvilken skole elevene tilhører. Informert samtykke har jeg allerede vært inne på og i denne oppgaven ble det delt ut et skriv til læreren og et til elevene. Skrivet til elevene var adressert både til elev og foresatte da de var under 15 år. Thagaard sier det kan være vanskelig å se hvilke konsekvenser forskningen vil ha på forhånd og at det derfor stilles krav til respekt, frihet og medbestemmelser (Thagaard, 2018). Forskeren må tenke gjennom hvordan deltakerne kan beskyttes ved hvert enkelt i tilfelle. I denne oppgaven har både observasjonene og intervjuene hatt fokus på det matematiske og det personlige har ikke vært relevant eller blitt gått i dybden på. Retningslinjene til NSD er fulgt og alle data vil bli slettet ved forskningsprosjektets slutt.

Etikk kan knyttes til å*penhet*, *tillit*, *ansvar* og *respekt*. Som forsker har jeg en viktig rolle og mine beslutninger påvirker forskningens kvalitet. Som forsker var det viktig for meg å vite at alle informantene følte seg trygge i situasjonen. Under observasjonsperioden var det jeg som var på besøk hos informantene og opptrådte deretter. Ved gruppeintervjuene hilste jeg på elevene og småpratet litt med dem før lydopptaket ble satt i gang. Jeg var også opptatt av å møte informantene på deres ståsted og tilrettelegge deretter dersom det var behov for det.

4 Resultater og analyse

I dette kapittelet legger jeg frem mine data og analyserer dem. Observasjonstimene blir analysert hver for seg sammen med det aktuelle materialet elevene fikk utdelt i løpet av timen. Observasjonene blir analysert ved bruk av Behr et al (1983) sin teoretiske modell. Videre presenteres resultatene fra gruppeintervjuene ved Roåker og Sjøvik Skole. Disse intervjuene blir også analysert ved bruk den teoretiske modellen til Behr et al (1983) hvor jeg benytter meg av en sammenlikning som til slutt presenteres i en tabell.

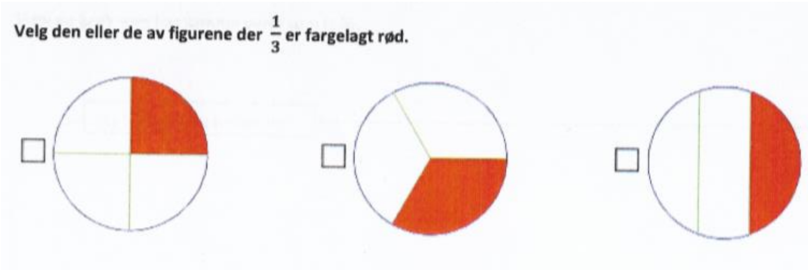
4.1 Observasjon

I løpet av fire matematikktimer var det fire forskjellige lærere som stod for undervisningen. Tre av disse var vikarer og den fjerde var klassens ordinære matematikklærer. Felles for alle timene var oppstarten hvor det ble satt i gang repetisjon av brøk. Det ble ikke introdusert noe nytt stoff. Det ble delt ut en del materiale på ark til elevene i løpet av timene og det meste bestod av oppgaver knyttet til brøk. Vikarene hadde fått tildelt opplegg for timen på forhånd. De ulike delbegrepene ble ikke i konkret nevnt av lærere eller elever i undervisningen, men de ble representert gjennom tavlen, smartboarden og materialet elevene fikk utdelt. Både vikarene og matematikklæreren fulgte opp elevene så godt de kunne. I to av timene var timens aktuelle lærer alene med elevene. Dette førte til at læreren ikke rakk over alle elevene som trengte hjelp. På tavlen ble det bruk av pizzaer for å illustrere ulike situasjoner. Elevene jobbet mye med addisjon og subtraksjon av brøk, samt likeverdige brøker i løpet av perioden og det ble brukt ulike undervisningsmetoder. Det var mye arbeid på ark, men også noe gjennom smartboard og fysisk aktivitet.

4.1.1 Første observasjonstime

V_1[3] startet timen med å spørre klassen om hvordan en brøk så ut. Klassen svarte en strek og to tall og V_1 skrev opp 2/3 som et eksempel på tavla. Klassen samtalte om teller og nevner og kom fram til at telleren var den som telte hvor mange ting det var. Etter noe repetisjon av brøk fikk elevene utdelt et oppgavehefte hentet fra matematikksenteret (vedlegg 6). Heftet bestod av fjorten oppgaver hvor de fleste oppgavene var knyttet til delbegrepene del-hel og operator. Et par av dem kunne knyttes til delbegrepene forhold og måling. Oppgaveheftet la vekt på at elevene skulle forklare hvordan de tenkte ved hjelp av et åpent felt under hver oppgave med overskriften *«Vis hvordan du tenker her»*. Jeg observerte flere hender i været ved den første oppgaven i heftet og to elever påpekte at de syntes oppgaven var vanskelig (se figur 22). Her skulle elevene krysse av på den eller de figurene der 1/3 av figuren var fargelagt med rødt.

[3] V_1 står for vikar dag 1



Figur 22. *Den første oppgaven i oppgaveheftet*

Denne oppgaven knytter jeg til delbegrepet del-hel der Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) påpeker at partisjonering er en viktig del av hva elevene må kunne beherske innenfor det aktuelle delbegrepet. En del av en hel vil alltid representere en av flere like deler (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). I denne oppgaven er det kun en del som er fargelagt rødt i hver figur. Dersom elevene ikke behersker delbegrepet del-hel kan flere av disse figurene stemme overens med elevenes tankegang og ideer. Den første figuren er delt inn i fire like deler og tilhører sånn sett delbegrepet del-hel, men inndelingen samsvarer ikke med brøkens nevner. Den siste figuren i rekken hører derimot ikke hjemme i delbegrepet del-hel da figuren er delt inn i ulike deler hvor noen er større enn andre. At elevene syntes denne oppgaven er vanskelig kan peke på ulike ting. Min første tanke er at om elevene ikke hadde hatt forståelse for delbegrepet ville alle rutene blitt huket av. Når elevene derimot stopper opp og er usikre tar jeg det som et tegn på at elevene er inne på noe.

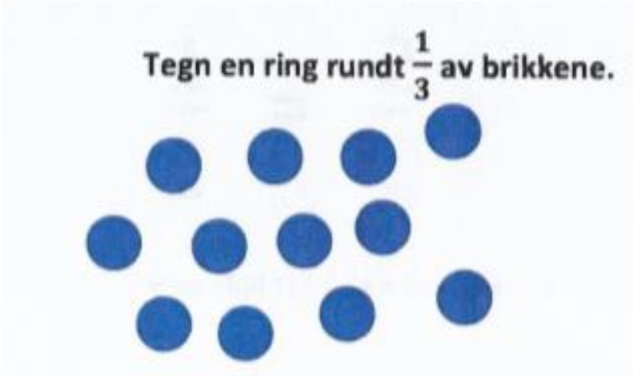
Den neste oppgaven i hefte viste seg også å være en vanskelig oppgave for elevene. Her skulle elevene gjøre om et desimaltall til en brøk (figur 23). V_1 spurte klassen om de hadde lært noe om å gå fra desimaltall til brøk, men elevene ristet på hodet.

Skriv en brøk som har samme verdi som 0,46.

Figur 23. *Den andre oppgaven i oppgaveheftet – fra desimaltall til brøk*

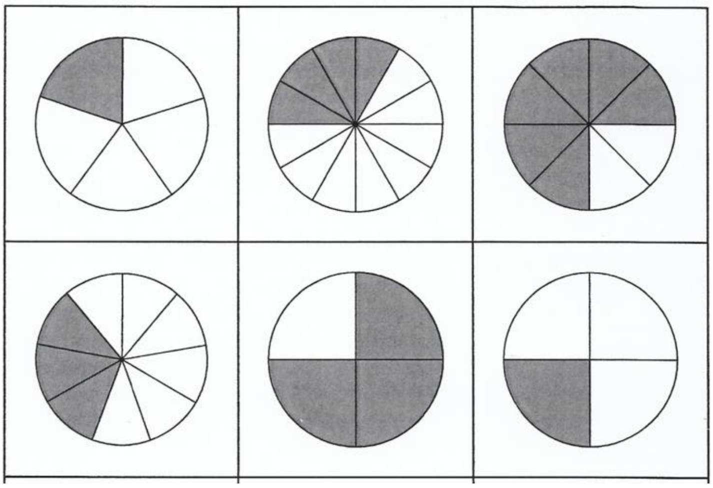
Ved å gjøre om fra desimaltall til brøk må elevene kunne noe om plassverdien til de ulike sifrene. I dette tilfellet ville desimaltallet 0,46 tilsvart brøken 46/100. Ved å forkorte denne brøken ville elevene benyttet seg av delbegrepet operator, som Lamon (2012) blant annet knytter til å forkorte og utvide brøker. Dette er også i tråd med Behr et al. (1983) sin modell som knytter delbegrepet operator til regneoperasjonen multiplikasjon.

Videre i oppgaveheftet støtte elevene på en oppgave hvor de skulle sette ring rundt 1/3 av brikkene (figur 24). Noen av elevene var usikre på denne og ba om hjelp. Denne oppgaven knytter jeg til delbegrepet del-hel. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) sier det er viktig å utvikle ferdigheter innenfor partisjonering ved å dele den hele opp i like deler. Dersom elevene ikke klarer dette vil en slik oppgave bli vanskelig for dem.



Figur 24. *Den tredje oppgaven i oppgaveheftet*

Etter en del arbeid i oppgaveheftet gikk klassen over på en ny oppgave. V_1 delte ut to ark til elevene bestående av bingobrett og en spinner (vedlegg 6). Elevene jobbet sammen to og to og flere var ivrige. Spinneren bestod av 12 brøker representert med tall. Disse skulle elevene finne igjen på bingobrettet som bestod av fjorten sirkler delt inn og skravert på ulike måter (figur 25).



Figur 25. *Utklipp fra bingobrett*

Denne oppgaven velger jeg å knytte til delbegrepet del-hel da elevene må se sammenhengen mellom antall deler og brøkens nevner, samt de skraverte feltene og brøkens teller. Delbegrepet representerer blant annet mengder delt inn i like størrelser, noe som samsvarer med sirklenes inndelinger (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).

4.1.2 Andre observasjonstime

Timen startet med repetisjon via et tankekart og V_2[4] skrev opp ord knyttet til brøk på tavlen. En elev kom med en huskeregel for teller og nevner hvor telleren startet på t og stod for *topp*, mens nevneren begynte på n og stod for *nede.* V_2 spurte videre om elevene visste hva en uekte brøk var. Flere av elevene påpekte at det var en falsk brøk og kom med eksempelet 2/1. Etter en kort oppsummering gikk V_2 over på dagens opplegg og fortalte at klassen skulle ha om addisjon og

[4] V_2 står for vikar dag 2

subtraksjon av brøk. V_2 skrudde på Smartboarden og fant fram nettsiden *«Campus Inkrement»*. Her gikk V_2 inn på 6.trinn og valgte temaet *brøk*. Brøktemaet var delt inn i åtte delemner (figur 26), blant annet *«Del av en hel»* og *«Del av en mengde»*.

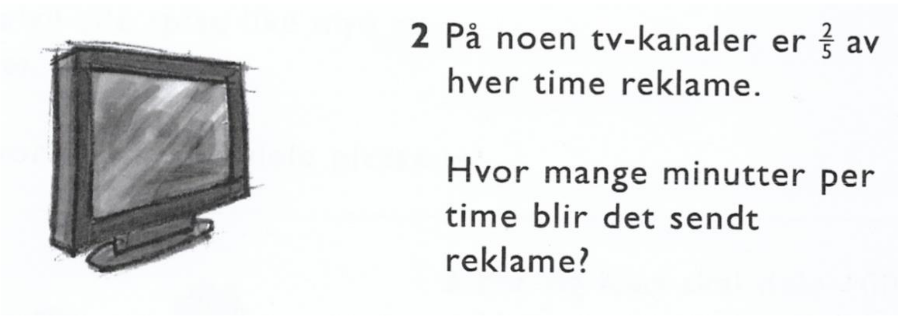
Figur 26. *Brøk delt inn i åtte delemner (Campus Inkrement)*

Da addisjon og subtraksjon var på agendaen ble delemnet *«Addisjon og subtraksjon»* valgt for timen. Dette delemnet var delt inn i tre deler bestående av teori, eksempler og egenvurdering. I timen ble det jobbet med teoridelen som bestod av seks videosnutter og fire *svar*-sider. Videoene bestod av oppgaver som endte i spørsmål til klassen. Klassen svarte ved å fylle inn svaret på svarsiden og deretter gikk en ny video gjennom det korrekte svaret. Videoene bestod av en stemme som forklarte underveis (figur 27).

Figur 27. *Skjermbilder fra delemnet «Addisjon og subtraksjon» på Campus Inkrement*

I arbeid med Campus Inkrement benyttet elevene seg i denne timen av delbegrepene del-hel og måling. Sistnevnte knytter Behr et al. (1983) i sin modell til regneoperasjonen addisjon.

Videre i timen fikk elevene utdelt et hefte bestående av ulike kopioriginaler fra Multi kopiperm for 5.-7.trinn (vedlegg 6). Dette hefte bestod av flere problemløsningsoppgaver, men også regnestykker. Flere elever ba om hjelp på oppgave 2 (figur 28). Denne oppgaven omhandlet tv-tid og reklame og en av elevene var oppgitt da den ikke kunne noe særlig om klokka. Med litt hjelp fra V_2 klarte etterhvert flere i klassen å løse oppgaven.

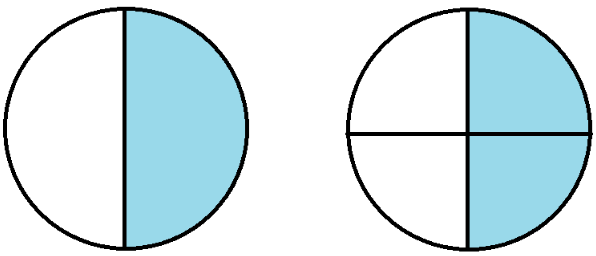


Figur 28. *Oppgave 2 i heftet*

I dette heftet blir alle delbegrepene representert, noen i større grad enn andre. Kvotient er det delbegrepet som knyttes direkte til problemløsning i Behr et al. sin modell (1983) og er også det delbegrepet som er mest fremtredende i heftet, i tillegg til delbegrepet del-hel. På slutten av timen spurte V_2 klassen om hvordan det hadde gått med oppgavene og flere av elevene var enige om at oppgavene hadde vært vanskelige. Dette kan det ha vært flere årsaker til. En mulig årsak kan være hvorvidt elevene er vant med å arbeide med problemløsningsoppgaver på generell basis. De kommer gjerne i form av tekstoppgaver hvor elevene selv må hente ut informasjonen. I arbeid med delbegrepet kvotient påpeker Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) at elevene må ha kontroll på dividenden og divisoren sin rolle for å kunne mestre delbegrepet.

4.1.3 Tredje observasjonstime

V_3[5] startet timen med en repetisjon av noen begreper knyttet til brøk. Begrepene *teller*, *nevner*, *brøkstrek*, *likeverdige brøker*, *blanda tall* og *uekte brøk* ble skrevet opp på tavlen og klassen ble spurt om begrepene var kjente for dem. Flere av elevene nikket. V_3 gikk gjennom alle begrepene på tavlen og da V_3 spurte klassen om hva en brøkstrek var, svarte en elev at den trodde det var et minustegn. En annen elev trodde det var er delestrek. Videre ble klassen spurt om de kjente til likeverdige brøker og en elev mente det var det samme som å legge sammen to brøker. V_3 var ikke med på elevens tankegang og illustrerte begrepet ved hjelp av to pizzaer hvor den ene ble delt i to like deler og den andre i fire like deler (figur 29). V_3 fortalte at den ønsket å spise halvparten av hver pizza. Elevene kom fram til at V_3 da måtte spise ½ av den første pizzaen og 2/4 av den andre pizzaen. En elev påpekte at de kunne skrive ½ i stedet for 2/4 og V_3 satte dermed et likhetstegn mellom brøkene.

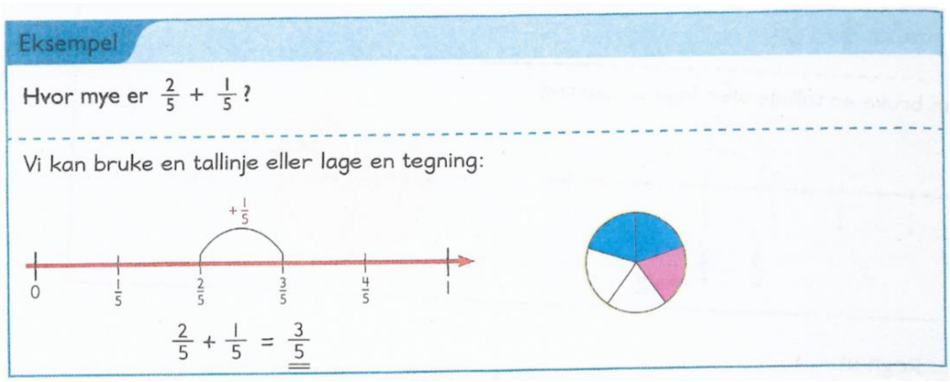


Figur 29. To likeverdige brøker illustrert

[5] V_3 står for vikar dag 3

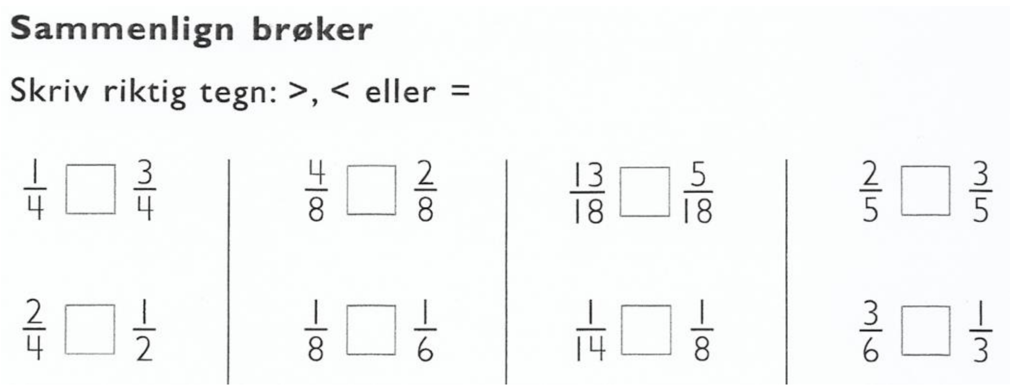
Her fikk elevene benyttes seg av delbegrepet del-hel, samt delbegrepet forhold som knyttes direkte til likeverdighet i modellen til Behr et al (1983). I tillegg benyttes også delbegrepet operator da elevene forkorter brøken for å visualisere likheten.

Elevene fikk videre i timen utdelt et oppgaveark som bestod av addisjon- og subtraksjonsoppgaver (vedlegg 6). Her ble det gitt eksempel på hvordan elevene kunne løse oppgavene ved hjelp av en tallinje og tegning (Figur 30). Dette oppgavearket knytter jeg til delbegrepene del-hel og måling da det blant annet kan tas i bruk tallinje i arbeid med oppgavene. Måling er også det delbegrepet som knyttes direkte til addisjon i den teoretiske modellen til Behr et al (1983). Ut i fra mine observasjoner virket det som om klassen behersket oppgavene da flere av elevene ble ferdige med arket. Det var få hender i været og arbeidsro i klasserommet. Før arket ble utdelt hadde klassen pratet om addisjon og subtraksjon av brøk og blitt enige om at brøkene måtte ha samme nevner for å kunne legges sammen. Dette er et tegn på at elevene har noe forståelse for delbegrepet måling.



Figur 30. *Eksempel på hvordan elevene kan legge sammen to brøker*

I den siste delen av timen fikk klassen utdelt et nytt ark hvor elevene skulle sammenlikne brøker (vedlegg 6). Elevene samarbeidet to og to og et elevpar var usikre på hvordan de skulle løse oppgavene. En av dem skjønte ikke oppgaven, mens den andre husket ikke hvordan det skulle gjøres. På arket skulle elevene sette inn riktig tegn (figur 31).



Figur 31. *Sammenlikning av brøker (utdrag fra oppgaveark)*

Her blir delbegrepet operator representert ved at elevene ved enkelte oppgaver må utvide eller forkorte brøker for å finne likheter eller forskjeller. I tillegg representeres delbegrepet måling hvor

Hovik og Kleve påpeker at elevene kan ha vansker med å vite hvilken brøk som er størst og minst (Hovik og Kleve, 2016).

4.1.4 Fjerde observasjonstime

ML[6] var spent på hva klassen hadde lært om brøk i de siste matematikktimene og tok en spørrerunde hos elevene. Elevene forklarte at en brøk bestod av to tall og en strek hvor tallet oppe ble kalt for teller og tallet nede ble kalt for nevner. Brøkstreken viste at man skulle dele. En elev fortalte at to likeverdige brøker kunne være ½ og 2/4. *ML* fortsatte på denne tråden og ba elevene om hjelp til å finne en likeverdig brøk til 1/3. Klassen ble enige om at det måtte være 2/6. Videre spurte *ML* om klassen kunne finne en likeverdig brøk til 2/6. En elev svarte at det kunne være 3/12. *ML* forklarte elevene at de måtte multiplisere med det samme tallet i telleren og nevneren. Klassen kom fram til at svaret måtte bli 4/12. En elev påpekte at 1/3 var det samme som 3/9. *ML* samtykket og fortalte at de da hadde multiplisert med tallet 3 oppe og nede. Klassen viser her en viss forståelse for delbegrepet forhold og operator da de utvider brøker med både 2 og 3 som operator.

Videre skulle elevene jobbe med oppgaver i Multi 6B. Elevene fikk beskjed om å bla opp på side 53 og løse oppgave 6.46 før de skulle ta den felles på tavla. Oppgaven bestod av seks deloppgaver hvor elevene skulle subtrahere med blandede tall (figur 32).

6.46 Regn ut.

a $1\frac{5}{8} - \frac{4}{8}$ **c** $1\frac{2}{5} - \frac{4}{5}$ **e** $2\frac{6}{12} - 1\frac{9}{12}$

b $2\frac{6}{7} - \frac{3}{7}$ **d** $1\frac{2}{9} - \frac{5}{9}$ **f** $7\frac{7}{9} - 3\frac{5}{9}$

Figur 32. *Oppgave 6.46 i Multi Grunnbok 6B*

Etter en stund spurte *ML* elevene hvordan de hadde løst oppgaven. En elev hadde skrevet opp (8+5)/8 – 4/8 = 9/8. *ML* roste eleven og spurte om resten av klassen forstod det. Flere elever var forvirret og *ML* tok den neste deloppgaven på tavla. Først ble klassen spurt om hvordan en hel så ut. Klassen var enig om at det var 7/7. Videre ble de spurt om hvordan to hele så ut. Klassen svarte 14/7 og *ML* skrev opp 14/7 + 6/7 – 3/7 på tavlen. *ML* ba elevene om å gjøre ferdig de siste deloppgavene på egenhånd. I denne oppgaven benytter elevene seg av delbegrepene del-hel, måling og operator. Både multiplikasjon og subtraksjon er regneoperasjoner som trekkes fram i modellen til Behr et al (1983). Her tolker jeg at subtraksjon hører til under addisjon da disse er motsatte operasjoner. Det samme gjelder multiplikasjon og divisjon.

Da elevene hadde gjort ferdig oppgaven, ba *ML* elevene om å samle seg på gulvet til en ny aktivitet. *ML* fortalte klassen at de skulle gjennomføre en *liv-og-røre*-aktivitet[7] og delte elevene inn i fire

---

[6] *ML* står for matematikklærer

[7] Liv og Røre er et prosjekt som legger til rette for fysisk aktivitet i fag

grupper. Hver gruppe fikk utdelt en plakat bestående av tre streker med likhetstegnet mellom (figur 33).

$$\rule{2cm}{0.4pt} = \rule{2cm}{0.4pt} = \rule{2cm}{0.4pt}$$

Figur 33. *Plakaten elevene fikk utdelt bestod av tre streker med likhetstegnet mellom*

ML forklarte klassen hvordan aktiviteten skulle foregå. Elevene skulle opp en og en og hente et tall fra en bunke med ulike tall. For å komme frem måtte elevene ta spensthopp. Tallene gruppa samlet skulle plasseres på plakaten hvor strekene symboliserte brøkstreker. Gruppene skulle lage tre likeverdige brøker og *ML* ga elevene råd om å starte med en brøk bestående av lave tall. Klassen var ivrig og tre av gruppene utvidet ved å multiplisere med 2 oppe og nede for hver brøk (figur 34).

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Figur 34. Tre av gruppene utvidet med 2 for hver brøk

Den siste gruppa hadde utvidet ved hjelp av addisjon. Her hadde gruppa lagt til 1 oppe og 2 nede for hver brøk (figur 35).

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$$

Figur 35. *En av gruppene legger til 1 på teller og 2 på nevner for hver brøk*

I forbindelse med liv-og-røre-aktiviteten benyttet elevene seg av delbegrepene del-hel, forhold og operator. Tre av gruppene viser en forståelse av likeverdige brøker ved at de har multiplisert brøkene med den samme operatoren. Den siste gruppa viser også en viss forståelse ved at de har lagt til de samme tallene i telleren og nevneren for hver brøk.

4.2 Intervjuene

Elevene ved Roåker Skole hadde nettopp vært gjennom en periode med brøk da gruppeintervjuet ble gjennomført. På Sjøvik Skole kunne ikke elevene huske sist de hadde hatt om brøk og da intervjuet ble gjennomført holdt elevene på med statistikk i matematikken.

4.2.1 Gruppeintervju ved Roåker Skole

Elevene startet med de første oppgaven i heftet. Disse var knyttet til delbegrepet operator og den første oppgaven var en *regn-ut*-oppgave hvor elevene skulle multiplisere en brøk med et helt tall og en brøk med en brøk:

> *Er ikke dette uekte brøker?*[8] (Elev 3R[9])

Gruppa responderte ved å avkrefte dette og samtalte videre om oppgavene. Elevene var raskt ute med å fullføre den første deloppgaven. I den neste oppgaven skulle elevene utvide brøker med gitte tall. En av elevene leste opp oppgaveteksten for resten av gruppa og stilte spørsmålet:

> *Hva er å utvide en brøk?* (Elev 1R)

De andre elevene så på oppgaven og en av dem kom fram til at de måtte multiplisere med det gitte tallet oppe og nede. Elevene løste de to deloppgavene og gikk videre til neste oppgave som omhandlet delbegrepet kvotient. Oppgaven ble lest opp. Den første deloppgaven løste elevene kjapt hvor de delte hver pizza inn i fire deler. Den neste og siste deloppgaven løste elevene også relativt kjapt ved å tegne opp tre pizzaer og dele hver av dem i fem. Etter å ha diskutert fram og tilbake ble de enige om at det var fem venner som skulle dele pizzaene. Elevene gikk videre på oppgaven som omhandlet delbegrepet forhold. Oppgaven ble lest opp og en av dem mente appelsinsaften ble sterkest der det var mest saft. En annen mente det kom an på hvordan en fordelte det:

> *Det er vel (2) c? c! Fire av åtte for at da får du halvparten* (Elev 2R)
>
> *Ja, men der så er det jo to av tre? Nei, jeg vet ikke* (Elev 1R)

To av elevene snakket sammen og stod mellom oppskrift A og C. Elevene mente det kunne være opskrift A, men at de fikk mindre. De var likevel enige om at det var oppskriften som ga sterkest saft og svarte A. Videre skulle elevene finne ut hvilken oppskrift som ga den svakeste saften. Gruppa ble fort enige om at det var oppskrift B da den kun inneholdt en desiliter appelsinsaft. De neste oppgavene var knyttet til delbegrepet del-hel og den første deloppgaven bestod av fire figurer hvor elevene skulle ringe rundt den eller de figurene der ¾ av figuren var fargelagt. En av elevene så kjapt at det var figur A og gikk videre på neste deloppgave. Her skulle elevene skrive brøker som tilsvarte figurene. En av elevene telte opp antall trekanter i den første figuren og kom fram til at det var tre av fem trekanter fargelagt. De andre elevene rettet på eleven og mente det var fem av åtte trekanter fargelagt. Elevene gikk videre på de to neste figurene. Da elevene var på vei over til den siste deloppgaven stoppet jeg dem og ba dem gå tilbake til den første deloppgaven:

> *Dere, se på den første oppgaven. Er det flere figurer?* (Intervjuer)

---

[8] Sitat fra intervjuene er skrevet i kursiv
[9] R står for elev ved Roåker Skole

Den der tror jeg faktisk (Elev 2R)

Ja, den der, c (Elev 3R)

Gruppa ble enige om at det måtte være figur C og gikk tilbake til den siste deloppgaven:

> *Hvis fire klinkekuler representerer to av tre av klinkekulesamlingen til Anders, hvor mange klinkekuler har da Anders til sammen? Fire? (.) To, nei det er en av tre, er det ikke det da? …* (Elev 1R)

Etter å ha samtalt fram og tilbake ble to av elevene enige om at det måtte være seks klinkekuler til sammen. Gruppa gikk videre til den siste oppgaven i oppgaveheftet. Denne var knyttet til delbegrepet måling og i den første deloppgaven skulle elevene plassere brøken seks av ti på tallinjen En elev mente de kunne telle seg fram og en av de andre var usikker på om brøken kunne plasseres på fire:

> *Skal den på den som ligger på fire da kanskje? Eller skal den på seks?* (Elev 2R)

En elev bekreftet at den skulle på seks og lurte på hvor eleven fikk fire fra. Gruppa gikk videre på neste tallinje. En elev startet med å telle seg fram til syv. En annen trodde den hadde svaret:

> *Men skal ikke den kanskje egentlig hvis det er (2) seks av sju, nei, fem av sju, er det ikke egentlig to som blir svaret da? …* (Elev 2R)

Det ble stille i gruppa og jeg brøyt inn for å hjelpe elevene videre. Jeg spurte elevene om hvor mange deler tallinjen var delt inn i og om det hadde vært enklere for dem å plassere brøken dersom tallinjen hadde vært delt inn i syv. Elevene bekreftet dette og mente at de da ville ha plassert brøken på fem. Elevene stod fortsatt fast og jeg spurte elevene om brøken var mer eller mindre enn halvparten. Elevene var enige i at det var mer enn halvparten og at de nå visste hvilken side av tallinjen brøken skulle plasseres på. En elev tenkte høyt:

> *Skal vi se (2) Jeg aner ikke hva jeg gjør. Her er fem av sju, den siste er ti. Åtte (.) jeg tror det er her kanskje?* (Elev 1R)
>
> *På åtte?* (Elev 2R)
>
> *Nei* (Elev 1R)
>
> *Nei, sju? På sju?* (Elev 2R)

Eleven mente brøken skulle plasseres på syv og gruppa ble til slutt enig med eleven og plasserte brøken på syv.

4.2.2 Gruppeintervju ved Sjøvik Skole

Elevene startet rett på første oppgave. Denne var knyttet til delbegrepet operator og en av elevene var raskt ute med å svare:

> *To ganger to av fem det blir fire av fem* (Elev 1S[10])

Gruppa ble enige om svaret og gikk over på neste deloppgave. En av dem leste opp oppgaven:

> *Fem av syv delt på fire ganger fem av fire (.) Det er jeg dårlig på* (Elev 1S)

På grunn av dårlig kopi ble 3-tallet i deloppgave b) forvekslet med tallet 5 hos elevene på Sjøvik. Dette førte til at elevene fikk en uekte brøk i oppgaven og ble usikre. En av dem påpekte at brøken var uekte. Gruppa valgte å gå videre på neste oppgave og heller komme tilbake til oppgaven senere. I den neste oppgaven skulle elevene utvide brøkene med gitte tall:

> *(…) Utvid brøken med tre, hva vil det egentlig si?* (Elev 1S)

En av elevene mente de hadde hatt om det før, men påpekte at den ikke husket helt hva det innebar. Jeg spurte elevene om hva de trodde det betydde og en av dem trodde det var å gjøre brøken større:

> *Å ja, du tar det tretallet over på toppen kanskje? (Elev 1S)*
>
> *Kanskje, jeg vet ikke* (Elev 3S)
>
> *Ja, da hadde det blitt syv syvdeler* (Elev 2S)
>
> *Syv syvdeler eller så kunne det være syv tideler* (Elev 1S)

Elevene var usikre, men ble enige om å legge til tre i telleren. I den neste deloppgaven gjorde elevene samme prosedyre ved å legge til fem i telleren. En av elevene påpekte at det virket litt dumt og en annen var enig:

> *Kanskje en bare skal gange hele brøken med tre?* (Elev 2S)

En av dem var skeptisk og mente de heller kunne legge på det gitte tallet oppe og ned. Resten av gruppa var enig og gikk videre til neste oppgave på arket som var knyttet til delbegrepet kvotient. Tre pizzaer skulle fordeles likt på fire barn. En av elevene foreslo at de kunne dele opp pizzaene, mens en annen var usikker på om det gikk:

> *Tre delt på fire, går det? (.) Nei, det går ikke* (Elev 1S)

En av dem foreslo at de kunne dele pizzaene på fire. Da ble det tre pizzabiter til hver. En av de andre var uenig da det ikke stod hvor mange stykker pizzaene skulle deles opp i. Gruppa diskuterte fram og tilbake hvordan de kunne dele opp pizzaene:

> *Eller hva med å dele alle pizzaene opp i halv, så får de en halv hver også deler vi de opp i kvart* (Elev 3S)

Til slutt ble elevene enige om at svaret måtte bli ¾. I den neste deloppgaven var elevene raskt ute med å finne ut at det var femten pizzastykker totalt og at det da måtte være fem venner som delte de tre pizzaene. Elevene ble usikre på hvordan de kunne sette det opp og ble samtidig usikre på om

---

[10] S står for elev ved Sjøvik skole

de hadde rett eller ei. De gikk gjennom oppgaven på nytt og kom fram til at det fortsatt var femten pizzastykker:

Også kan du gange tre så mye som mulig til det går opp i femten (Elev 1S)

Gruppa ble enige om at det måtte være fem venner og gikk videre til oppgaven knyttet til forhold. En av elevene leste opp oppgaven og gruppa diskuterte litt fram og tilbake før de valgte oppskrift A som den sterkeste saften:

Sterkest, skal vi se … (Elev 1S)

Det blir to tredjedeler? Eller? (Elev 2S)

Det blir kanskje to tredjedeler? Eller vent litt (.) Ja, det blir to tredjedeler (Elev 1S)

Når det gjaldt oppskriften som ga den svakeste saften var gruppa enige om at det måtte være oppskrift B. Før gruppa gikk videre på neste oppgave oppsummerte de oppskriftene for å være sikre på svarene sine:

Det er en halv, det er litt over en halv, det er en kvart og er a er den, ja (Elev 2S)

Ja (Elev 3S)

Den som er sterkest er a (Elev 1S)

Den neste oppgaven omhandlet delbegrepet del-hel og på de to første deloppgavene gikk elevene gjennom en og en figur sammen, samtalte om dem og ble enige om et svar. På deloppgave c) ble elevene enige om at svaret måtte være seks:

Det blir vel seks. Så da kan vi dele opp (2) Da må vi dele opp i tre så da har vi to (Elev 2S)

En av elevene påpekte at klinkekulesamlingen var liten og gruppa gikk videre til den neste oppgaven i heftet som ble knyttet til målingsbegrepet. Her skulle elevene plassere 6/10 på tallinjen:

En to tre fire fem seks syv åtte ni ti. En to tre fire fem seks (Elev 1S)

Elevene plasserte brøken relativt fort på tallinjen og gikk over på den siste oppgaven i heftet. Her skulle elevene plassere brøken 5/7 på tallinjen. Gruppa oppdaget fort at tallinjen var delt inn i ti og ble usikre på hvor den skulle plasseres. Elevene diskuterte seg imellom. En elev mente brøken var det samme som 3/5:

Men altså, fem sjudeler eller ja, det er vel det samme som tre femtedeler. Hvis man dobler det (Elev 3S)

En av de andre var med på tanken og utvidet brøken til 6/10. Gruppa ønsket å plassere brøken mellom seks og syv, men var usikre på om det var lov:

Jeg bare tenkte hvis vi hadde tatt sånn også lagt på tre, så måtte vi lagt på en og en halv og da hadde det vært seks og en halv, men jeg vet ikke helt. Jeg har ingen anelse (Elev 2S)

(…) Seks og en halv da er det jo en halv (.) Da er det jo seks og en halv også er det, skal vi se, da er det tre og en halv opp og det blir kanskje riktig

Elevene valgte å gå tilbake til start for å fullføre oppgaven de hadde hoppet over tidligere knyttet til operator. En elev var sikker på at svaret ble 25/28. En av de andre spurte eleven om den var sikker:

> *Jeg vet ikke. Jeg bare ganger fem og fem og syv og fire* (Elev 2S)

Gruppa ble enige om svaret og gikk tilbake til den siste oppgaven:

> *(…) Ok, da må vi svare på den siste oppgava. Jeg bare sier seks og en halv der* (Elev 1S)
>
> *Ja, jeg og. Jeg tror det er seks og en halv* (Elev 2S)
>
> *Vi sier det* (Elev 3S)
>
> *Det kan være det er riktig, men det kan også være veldig feil* (1S)

4.2.3 Sammenlikning av gruppeintervjuene

I arbeid med oppgavene tilknyttet delbegrepet operator løste elevene ved Roåker den første oppgavene ved bruk av multiplikasjon. Dette er i tråd med Behr et al som knytter operator direkte til regneoperasjonen multiplikasjon i den teoretiske modellen (Behr et al, 1983). Også oppgaven med utviding av brøk ble løst ved bruk av multiplikasjon, men elevene var i starten usikre på hva det ville si å utvide en brøk. Elevene ved Sjøvik reagerte også på begrepet *utvid brøken*, men kom fram til at det måtte være å gjøre noe større. Gruppa var inne på om brøken skulle multipliseres, men løste oppgaven ved bruk av addisjon hvor de adderte i teller og nevner. Her viser elevene ved Sjøvik Skole i liten grad forståelse av delbegrepet operator når det kommer til å utvide brøker. Elevene på Roåker Skole viser på den andre siden en større grad av forståelse knyttet til delbegrepet da de benyttet seg av multiplikasjon i samtlige oppgaver.

I oppgave 3 skulle elevene løse to deloppgaver knyttet til delbegrepet kvotient. På Roåker valgte elevene å løse oppgavene ved å illustrere pizzaene. På den måten fikk elevene visualisert oppgavene og det virket som om gruppa visste hva de skulle gjøre. Elevene benyttet seg av brøken som kom fram i oppgaveteksten og klarte å finne ut hvor mange deler en del bestod av, samt antall deler totalt. Elevene viser her en forståelse av både delingsdivisjon og målingsdivisjon i arbeid med oppgavene og dermed også en forståelse av kvotientbegrepet. På Sjøvik var elevene i et øyeblikk uenige om hvordan pizzaene skulle deles opp da det ikke stod noe om dette i oppgaveteksten. Dette kunne ha vært et tegn på at elevene ikke klarte å fange opp relevante brøker i teksten, men gruppa fant etter hvert brøkene og resonnerte seg fram til svarene sine ved hjelp av hoderegning. Elevene viser dermed en viss forståelse av kvotientbegrepet ved at de både klarer å løse oppgavene knyttet til målingsdivisjon og til delingsdivisjon.

Oppgave 4 ble knyttet til delbegrepet forhold. Elevene ved Roåker Skole tenkte først at oppskriften med mest appelsinsaft ville gi den sterkeste saften. Dette var oppskrift C og bestod av 4 dl saft og 8 dl vann. Gruppa konkluderte med at denne ga halvparten av hver del. Her klarer ikke elevene å se sammenhengen mellom del-hel-forholdet og tenker 4/8 i stedet for 4/12. Senere finner gruppa ut at dette ikke stemmer og bestemmer seg for oppskrift A som består av 2 dl saft og 3 dl vann. I deloppgave b) spør oppgaveteksten etter den svakeste saften og elevene er kjapt ute med å svare oppskrift B som består av 1 dl saft og 4 dl vann. Selv om elevene klarer å løse deloppgavene, viser de i liten grad forståelse av forholdsbegrepet da de ikke klarer å se antall dl hver oppskrift består av totalt sett. På Sjøvik var elevene relativt kjappe med å peke ut oppskrift A, men gikk gjennom alle oppskriftene for å være sikre. De andre oppskriftene ble beskrevet som en kvart, en halv og litt mer enn en halv. Igjen klarer ikke elevene å se del-hel-forholdet i oppskriftene og forholdene 1:4, 4:8 og 3:5 omtales som henholdsvis ¼, ½ og 3/5 i stedet for 1/5, 1/3 og 3/8. Elevene ved Roåker svarer riktig på begge deloppgavene, men viser ingen forståelse av del-hel-forholdet i hver enkelt oppskrift.

I oppgave 5 skulle elevene arbeide med tre deloppgaver knyttet til delbegrepet del-hel. I den første deloppgaven skulle elevene krysse av på den eller de figurene som var fargelagt ¾. Elevene ved Sjøvik gikk systematisk gjennom hver figur og kom også med eksempel på hvordan en av de utelukkede figurene kunne ha tilsvart ¾ dersom en sjette del hadde vært fargelagt. Elevene ved Roåker mente figur A tilsvarte ¾ og gikk videre til deloppgave b). Med et hint om at det kunne være flere figurer i deloppgave a) gikk elevene tilbake og krysset også av på figur C. I deloppgave b) skulle elevene skrive ned brøken som ble representert gjennom figurene. En elev ved Roåker telte de skraverte og de hvite delene hver for seg slik at figuren som representerte 5/8 ble til 3/5. I dette tilfellet ble figuren delt inn i to separate deler del-del i stedet for del-hel. På grunn av dialog i gruppa ble dette rettet opp i og gruppen fikk løst alle oppgavene ved å benytte seg av del-hel-begrepet. Elevene ved Sjøvik viste forståelse av delbegrepet del-hel gjennom alle figurene i deloppgave b). I deloppgave c) skulle elevene finne ut hvor mange klinkekuler Anders hadde til sammen. Elevene ved Roåker Skole resonnerte seg først fram til hvor mange klinkekuler 1/3 bestod av før de konkluderte med at klinkekulesamlingen til sammen bestod av seks klinkekuler. Elevene viser gjennom denne deloppgaven en forståelse for at en del kan bestå av flere deler og at hver del er av samme størrelse som videre viser en forståelse av delbegrepet del-hel. Elevene ved Sjøvik tok den siste deloppgaven kjapt og var alle enige om at svaret måtte bli seks. Gjennom oppgave 5 viser både Roåker og Sjøvik forståelse av del-hel-begrepet.

Den siste oppgaven var knyttet til delbegrepet måling hvor elevene skulle plassere henholdsvis 6/10 og 5/7 på en tallinje delt inn i ti deler. På Sjøvik Skole plasserte elevene brøken 6/10 ved å telle seg fram på tallinjen. På Roåker ville en av elevene plassere brøken på fire, mens resten av gruppa mente den skulle plasseres på seks. Da elevene skulle plassere 5/7 på tallinjen mente den samme eleven at brøken kunne plasseres på to. Her ser det ut til at eleven trekker telleren fra nevneren i brøken slik at brøkene 6/10 og 5/7 blir til subtraksjonsstykkene $10 - 6 = 4$ og $7 - 5 = 2$. Etter et par hint om hvilken side av tallinjen brøken skulle plasseres på, valgte elevene ved Roåker å plassere brøken på syv da det var to mer enn fem på tallinjen. Ved Sjøvik var en av elevene opptatt av at 5/7 tilsvarte det samme som 3/5. Her kan det se ut som om eleven har «forkortet» brøken ved å trekke fra to i teller og nevner. Elevene ved Sjøvik var inne på tanken om å doble 3/5 slik at de fikk 6/10, men gruppa mente det ikke gikk opp i 5/7. Elevene bestemte seg for å plassere brøken mellom seks og syv da brøken måtte være større enn 6/10 og brøkens nevner var syv. Både Roåker og Sjøvik klarte å plassere 6/10 på tallinjen. Brøken 5/7 var derimot vanskeligere å få plassert. Verken Sjøvik eller Roåker klarte å plassere brøken på riktig plass, selv om begge gruppene var relativt nærme. Elevene oppdaget at tallinjens inndeling og brøkens nevner var ulike, men ingen av gruppene klarte eller forsøkte å dele tallinjen inn i enheter som samsvarte med brøkens nevner. Elevene viser en viss forståelse av delbegrepet måling når brøkens nevner samsvarer med antall enheter, mens det i liten grad er forståelse av delbegrepet når brøkens nevner ikke samsvarer med antall enheter.

Ut i fra gruppeintervjuene viser elevene forståelse for flere av delbegrepene. Kvotient og del-hel er de begrepene elevene viser størst forståelse for. Elevene viser forståelse av operator i ulik grad og en viss forståelse av målingsbegrepet. Delbegrepet forhold viser elevene i liten grad forståelse av. Dette har jeg framstilt i en tabell som oppsummerer likheter og forskjeller hos elevgruppene på Roåker og Sjøvik skole:

	Roåker Skole	***Felles***	***Sjøvik Skole***
Oppgave 1: Operator		Benytter seg av multiplikasjon Viser forståelse av delbegrepet	
Oppgave 2: Operator	Multipliserer i teller og nevner Større grad av forståelse	Vet ikke hva det betyr å utvide en brøk	Adderer i teller og nevner Liten grad av forståelse
Oppgave 3: Kvotient	Visualiserer ved hjelp av illustrasjoner	Mestrer delingsdivisjon og målingsdivisjon Viser forståelse av delbegrepet	Usikre på hvordan pizzaene skal deles Bruker hoderegning
Oppgave 4: Forhold	4:8 = 4/8	Klarer ikke å se del-hel-forholdet Viser i liten grad forståelse av delbegrepet	1:4 = en kvart 4:8 = en halv 3/5 = litt mer enn en halv
Oppgave 5: Del-hel	Viser forståelse for at en del kan bestå av flere deler	Viser forståelse av delbegrepet	
Oppgave 6: Måling	*Brøken 5/7 blir til subtraksjonstykket 7 – 5 = 2* *Plasserer 5/7 på 7*	Plasserer brøken 6/10 på rett plass Viser en viss forståelse av delbegrepet	«Forkorter» 5/7 til 3/5 ved å trekke fra to i teller og nevner Plasserer 5/7 på 6,5

Tabell 1: Sammenlikning av gruppeintervjuene fremstilt i en tabell

4.3 Oppsummering

Elevene har gjennom observasjonene jobbet med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, likeverdighet og problemløsning. Flere av disse metodene kommer fram i den teoretiske modellen til Behr et al som knytter dem opp til de ulike delbegrepene (Behr, et al., 1983). Det er ingen direkte bruk av delbegrepene, men de benyttes og kommer fram i arbeidet med brøk. I det innsamlede materialet fra undervisningen viser det seg at delbegrepene del-hel, måling og operator er de mest fremtredende begrepene, mens forhold og kvotient dukker opp i enkelte oppgaver. Flere av elevene syntes det var vanskelig å gjøre om fra blandet tall til uekte brøk da de arbeidet med dette. Problemløsningsoppgavene var også utfordrende for flere i klassen. I arbeid med likeverdighet av brøk benyttet flere elever seg av addisjon framfor multiplikasjon. Dette kommer også fram i gruppeintervjuet ved Sjøvik Skole hvor elevene adderte i teller og nevner. I forbindelse med gruppeintervjuene er det delbegrepene del-hel, operator og kvotient som er mest fremtredende hos elevene. Elevene klarte å løse oppgaven knyttet til forholdsbegrepet, men benyttet seg ikke av delbegrepet i arbeid med oppgaven. Det samme gjelder den siste oppgaven hvor det viste seg å være vanskelig å plassere brøk på tallinje delt inn i andre enheter enn brøkens nevner.

5 Drøfting

I dette kapittelet blir funnene fra resultatdelen sett i forhold til problemstillingen. Resultatene blir drøftet på bakgrunn av det teoretiske rammeverket for oppgaven og er i tråd med de lover og forskrifter som gjelder. De ulike delbegrepene blir drøftet hver for seg og til slutt drøftes det hvorvidt mine valg av metoder har vært egnet for forskningen.

5.1 Delbegrepene

I en av observasjonstimene ble det påpekt at telleren startet på t og var på topp, mens nevneren startet på n og var nede. Her kom elevene med en huskeregel på teller og nevner som kan knyttes til den instrumentelle forståelsen. Da elevene ble spurt om brøkstreken i en av de andre observasjonstimene trodde en elev at det var et minustegn. Skal elevene forstå brøkbegrepet er det viktig at elevene også får den relasjonelle forståelsen av brøkbegrepet i tillegg til den instrumentelle. Dette er i tråd med Anna Sfard som mente at elevene måtte ha forståelse for begge aspektene for å kunne forstå et matematisk begrep fullt ut.

I oppstarten av hver enkelt undervisningstime ble det i ulik grad repetert rundt brøkbegrepet. *Hvordan ser en brøk ut? Hva er en uekte brøk? Kan noen fortelle hva en likeverdig brøk er?* Dette tror jeg kan henge sammen med lærersituasjonen hvor det var en ny lærer for hver matematikktime jeg observerte. Disse lærerne kunne ikke på forhånd vite hva klassen kunne fra før av og det var også en fin mulighet til å bli litt bedre kjent med klassen på før de startet på undervisningsopplegget de hadde fått av matematikklæreren. I tillegg ble elevene satt i en posisjon der de måtte sette ord på matematikken muntlig og i den siste observasjonstimen kom elevene med eksempler fra noen av de tidligere matematikktimene jeg hadde observert. I denne timen var også matematikklæreren tilbake på plass, noe jeg tror kan ha vært en avgjørende faktor da elevene virket tryggere på seg selv. Når det er sagt hadde elevene nettopp vært gjennom flere undervisningstimer knyttet til brøk og det at elevene hadde blitt mer faglige trygge på brøkbegrepet kan også ha vært en faktor.

Dagens læreplan i matematikk legger opp til arbeid med de rasjonale tallene allerede etter 2.års trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013). Skal elevene mestre brøkbegrepet er det viktig at et godt grunnlag blir lagt allerede her. Kunnskapsdepartementet har meldt om nye læreplaner fra og med høsten 2020 og disse skal blant annet legge til rette for mer dybdelæring og forståelse i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). I forhold til brøkbegrepet i matematikken tror jeg dette kan være med på å utvikle forståelsen av brøkbegrepet hos elevene. Jeg har også tro på at en større bruk av modellering og problemløsning i arbeid med de rasjonale tallene kan være med på å gi elevene en forståelse av brøkbegrepet på et dypere plan. Ifølge Skemp knyttes den undersøkende matematikken til den relasjonelle forståelsen hvor elevene i tillegg til å huske regler og formler også skal vite hvorfor de fungerer (Skemp, 1976). Den undersøkende matematikken kan knyttes direkte til modellering og problemløsning hvor elevene selv må finne ut av hvordan de skal løse oppgavene uten gitte formler og regler i forkant. Det finnes heller ingen fasit på rett og galt i forhold til fremgangsmetode.

Del-hel

I teorien tilknyttet de ulike delbegrepene peker Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) sammen med Lamon (2012) på flere elementer elevene må ha forståelse for før en kan si at elevene har forståelse for hele delbegrepet. Når disse elementene er på plass og elevene har forståelse for hvert av de ulike delbegrepene vil det til sammen utgjøre en forståelse av hele brøkbegrepet.

Delbegrepet del-hel sies å være det delbegrepet elevene blir presentert for først i møte med de rasjonale tallene (Behr et al, 1983). Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) påpeker at dette delbegrepet må ligge til grunn for å kunne utvikle forståelse av de resterende delbegrepene og dette gjenspeiles også i den teoretiske modellen. Elevene kan ha benyttet seg av begreper knyttet til brøk før de møter de rasjonale tallene på skolen, for eksempel *halvpart* eller *rettferdig deling*. Matematikklæreren til klassen var opptatt av å knytte brøk til det daglige da jeg jeg spurte om hva som var viktigst i forhold til brøk i undervisningen. Dette kan være med på å motivere elevene i en større grad samt gjøre matematikkfaget mer praktisk.

I intervjuet med matematikklæreren kom det også fram at elevene kunne ha vansker med å forstå at en brøk var en del av en hel eller en del av noe. Dette går igjen både i observasjonene og i de oppgavebaserte gruppeintervjuene. I sistnevnte ble elevene blant annet introdusert for tre deloppgaver knyttet til delbegrepet del-hel. I en av oppgavene var tre figurer delt inn og fargelagt ulikt der oppgaven spurte etter hvilken brøk som samsvarte med figuren. Den første figuren var et kvadrat delt inn i åtte like deler hvor fem av åtte deler var fargelagt. En av elevene telte de hvite og de fargelagte delene hver for seg slik at brøken ble 3/5. For at elevene skal beherske brøkbegrepet del-hel må de blant annet forstå at delene til sammen utgjør den hele (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007), slik også matematikklæreren påpekte. I dette tilfellet ble delene telt opp mot hverandre og kan minne om et del-del-forhold. Dette hører ikke hjemme under del-hel-begrepet. Eleven har også snudd brøken slik at de fargelagte delene ble representert i nevneren og de hvite i telleren. Dette kan ha blitt gjort slik at eleven unngikk å få en uekte brøk.

Under observasjonene kom det fram at også flere av elevene i klassen syntes det var vanskelig med enkelte oppgaver knyttet til del-hel. I den ene oppgaven skulle elevene krysse av på den eller de sirklene der 1/3 var fargelagt. Den første sirkelen var delt inn i fire og skravert ¼, den andre sirkelen var delt inn i tre og skravert 1/3 mens den siste var delt inn i tre ujevne deler og skravert en del. Oppgaven kan muligens ses på som en diagnostisk oppgave da elevene kan bli *lurt* dersom de ikke har delbegrepet del-hel på plass. Hver sirkel var skravert en del og kunne dermed sammenlignes med brøkens teller. Her er det viktig at elevene også klarer å se sammenheng med brøkens nevner når det kommer til antall deler sirklene er delt opp i. På den måten ville den første sirkelen ha blitt utelukket da den bestod av fire deler. Det samme ville gjeldt den siste sirkelen da den var delt inn i ujevne deler og del-hel-begrepet defineres som kontinuerlige mengder delt inn i *like* størrelse (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Det som var fint med denne oppgaven i tillegg til at den kan betegnes som en diagnostisk oppgave var det tilhørende feltet med *«vis-hvordan-du-tenker-her».* Dette kan være til hjelp både for lærer og elev. Eleven må sette *ord* på det den gjør ved å illustrere eller skrive ned sine tanker og kan dermed bli mer bevisst på sine valg. Dette er også til hjelp for læreren da et par kryss her og der nødvendigvis ikke sier noe om elevens tanker og ideer knyttet til brøkbegrepet. Her får læreren muligheten til å samle inn oppgavene og bli med inn i elevenes tankegang dersom elevene har klart å sette ord på det de gjør. Læreren kan på den måten også få muligheten til å se i hvilken grad elevene har forståelse for brøkbegrepet, enten om det er på det instrumentelle eller det relasjonelle forståelsesnivået.

Forhold

Del-hel og forhold er to delbegreper det kan være vanskelig å skille. En vesentlig forskjell mellom disse delbegrepene er brøkens teller som i forholdsbegrepet kan være større enn nevneren. Dette er ikke tilfellet i delbegrepet del-hel hvor hver enkelt del av mengden til sammen utgjør den hele, altså nevneren.

I forbindelse med brøkundervisningen og mine observasjoner var delbegrepet forhold et av de begrepene som var mindre til stede både gjennom tavleundervisningen og oppgavene elevene fikk utdelt. Begrepet var til stede i enkelte oppgaver i oppgaveheftene, men de fleste rakk ikke å komme seg gjennom alle oppgavene før undervisningen gled over i noe annet. Av de aktivitetene jeg observerte tilknyttet forholdsbegrepet hadde de fleste fokus på likeverdighet, noe Behr et al (1983) kobler direkte til forholdsbegrepet i sin modell. I tillegg til en illustrasjon av to likeverdige brøker i oppstarten av en undervisningstime, arbeidet elevene med begrepet i forbindelse med «liv-og-røre»-aktiviteten som ble gjennomført i den siste undervisningstimen. Denne kommer jeg tilbake til under delbegrepet operator.

I gruppeintervjuene kom det fram at elevene hadde liten forståelse av delbegrepet forhold da de ikke klarte å se del-hel-forholdet i juiceoppskriftene. Elevene omtalte blant annet forholdet 4:8 som brøken 4/8 slik at den totale mengden så ut til å være 8 desiliter. I elevenes framstilling av begrepet benytter de seg av del-del-forholdet, men de ser ikke ut til å være klar over dette da de omtaler det som en helhet. Begge elevgruppene svarte riktig på spørsmålene i oppgaven, men dette er et klart eksempel på at elevene nødvendigvis ikke har forståelse av begreper selv om de svarer rett på oppgaver knyttet til dem. Dette tenker jeg det er viktig å være bevisst på i rollen som matematikklærer slik at en får rettet opp eventuelle misoppfatninger hos elevene så tidlig som mulig. Til vanlig blir ikke elevene tatt opp på lydopptak i arbeid med oppgaver og elevene samtaler heller ikke høyt om hva de tenker til enhver tid. For å kunne få innsyn i elevenes tanker knyttet til begreper i matematikken kan det være en idé å samtale med elevene enkeltvis i etterkant av prøver eller oppgaver fra timen. Dette er gjerne ressurskrevende for en lærer med allerede en hel del punkter på to-do-listen, men det kan være et nyttig grep som for eksempel kan bidra til færre misoppfatninger blant elevene.

En mulig årsak til at elevene mangler forståelse av forholdsbegrepet kan henge sammen med hvor mye eller lite elevene har jobbet med delbegrepet tidligere. Lamon (2012) påpeker at del-hel er det delbegrepet som blir hyppigst brukt i undervisningen og da vil det være naturlig at andre delbegreper blir benyttet mindre. Samtidig illustrerer den teoretiske modellen til Behr et al (1983) at brøk er et komplekst begrep hvor de ulike delbegrepene henger sammen. Matematikklæreren til klassen på Roåker Skole var som sagt opptatt av å knytte brøk til det dagligdagse. Forholdsbegrepet kan for eksempel enkelt illustreres ved å blande saft. Dette er noe de fleste er kjent med fra før. Bak på saftflasken skal det stå blandingsforhold og her kan klassen få utfolde seg med praktiske oppgaver. Appelsinsaft-oppgaven kunne for eksempel vært utgangspunktet i en slik oppgave.

Operator

Delbegrepet operator var representert i tre av fire undervisningstimer og jeg vil påstå dette var et av begrepene som var mest fremtredende. Elevene har gjennom observasjonstimene og intervjuene benyttet seg en del av utvidelse og forkortelse av brøk. I sammenheng med dette tar elevene i bruk brøk som operator ved å multiplisere og/eller dividere objekter. I forbindelse med gruppeintervjuene ble det hos den ene gruppen benyttet addisjon i arbeid med å utvide brøker. Elevene ga uttrykk for at de var usikre på om de skulle multiplisere eller addere og da gruppen bestemte seg for å addere var de usikre på om de kun skulle addere i teller eller om de skulle addere i både teller og nevner. Elevene viste her en viss forståelse av å utvide en brøk ved at de la til noe i stedet for å trekke fra, men de viste i liten grad forståelse av delbegrepet operator. Den andre gruppen benyttet seg i samme tilfelle av multiplikasjon og viste i den forstand en større forståelse av delbegrepet. Det interessante med dette var at samme situasjon fant sted i forbindelse med *«liv-og-røre»*-aktiviteten hvor elevene skulle utvide en brøk to ganger. Det vil si, først utvide brøken en gang og deretter utvide den nye brøken. Klassen var delt inn i fire grupper og en av disse gruppene utvidet brøken ved å gjøre noe lignende av det den ene gruppen i det oppgavebaserte gruppeintervjuet gjorde. Her ble det nemlig lagt til én i teller og to i nevner for hver brøk. På den ene siden kan en si at elevene har forstått noe av kjernen ved å utvide en brøk, men på en annen siden vises det i liten grad forståelse av likeverdighet og operator som blir knyttet sammen i Behr et al (1983) sin teoretiske modell. Den ene gruppen i undervisningen la altså til én i nevner og to i teller, noe som skiller seg litt fra gruppen i intervjuet da elevene i undervisningen benyttet seg av to ulike tall. Tilfellene fant sted på hver sin skole og elevene i undervisningen og elevene i intervjuet kan derfor ikke ha vært de samme. Med andre ord kan ikke dette ha vært et enkelt tilfelle hos et par elever, men var utbredt blant flere av elevene i undersøkelsen. I gruppeintervjuene fikk elevene bryne seg på to oppgaver knyttet til brøk som operator og i den første oppgaven benyttet begge gruppene seg av multiplikasjon. Dette viser på sett og vis forståelse av delbegrepet og hadde jeg *kun* hatt med denne oppgaven i oppgaveheftet ville elevene mest sannsynlig gitt meg et bedre inntrykk av deres forståelse knyttet til delbegrepet enn det som kom fram. Dette er et eksempel på hvor viktig det er å være bevisst på hvilke oppgaver en gir elevene.

I den siste observasjonstimen jobbet blant annet elevene med subtraksjonsoppgaver bestående av brøker og blandede tall og her kom det fram at flere i klassen syntes det var vanskelig å gjøre om fra blandede tall til uekte brøk. Her må elevene ta i bruk sine ferdigheter knyttet til multiplikasjon, men også legge merke til brøkens nevner. Den første oppgaven så slik ut: $1\frac{5}{8} - \frac{4}{8}$ og en elev løste denne fint ved å legge nevneren sammen med telleren slik at regnestykket ble $\frac{(8+5)}{8} - \frac{4}{8}$. Denne eleven hadde *knekt koden* og viste en forståelse for flere av delbegrepene ved å løse denne, blant annet del-hel-begrepet, brøk som operator og målingsbegrepet. Gjennom denne forskningen har jeg sett flere oppgaver der de ulike delbegrepene blir representert i flertall. Dette er mer en realitet enn et unntak og som Bjerke et al (2013) sier, må elevene ha forståelse av hvert enkelt delbegrep for å mestre brøkbegrepet totalt sett. Det vil med andre ord bety at elevene vil mestre flere oppgaver i arbeid med brøk dersom de har et godt grunnlag for hvert av de ulike delbegrepene. Når all denne kunnskapen settes sammen, vil brøkbegrepet til elevene bli mer komplett.

Kvotient

Kvotientbegrepet er det delbegrepet som ble minst representert i mine observasjoner. Behr et al (1983) knytter delbegrepet direkte til problemløsning i deres modell og det var også i forbindelse med et hefte bestående av flere problemløsningsoppgaver at begrepet kvotient kom fram. I denne timen ble klassen spurt om hvordan det hadde gått i arbeid med oppgavene og flere av elevene var enige om at oppgavene hadde vært vanskelige. Dette kan det ha vært flere årsaker til. En mulig årsak kan være hvorvidt elevene er vant med å arbeide med problemløsningsoppgaver på generell basis. Slike oppgaver kommer gjerne i form av tekstoppgaver hvor elevene selv må hente ut informasjon. Det er heller ingen fasit på hvordan oppgavene skal løses. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) mener elevene må ha kontroll på dividenden og divisoren sin rolle for å kunne mestre brøk som kvotient. Det er ikke den hele som deles slik det er i del-hel-begrepet, men dividenden (telleren) (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007).

Innenfor kvotientbegrepet finner en også to ulike typer divisjon og disse to divisjonene fikk elevene jobbe med i gruppeintervjuene i forbindelse med oppgaven knyttet til det aktuelle delbegrepet. Begge elevgruppene viste en forståelse av kvotientbegrepet da de klarte å løse oppgavene ved å hente ut informasjon og bruke den riktig. Elevene mestret både delingsdivisjon og målingsdivisjon i møte med oppgaven og dette er i tråd med Lamon (2012) som mener disse to divisjonene må ligge til grunn for å kunne mestre hele delbegrepet. Samtidig vil det ikke dermed si noe om den totale forståelsen av delbegrepet hos elevene. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) sier blant annet at elevene også må forstå brøkens ubegrensede størrelse for å kunne mestre kvotientbegrepet. Elevene fikk ikke vist forståelse av dette gjennom denne oppgaven da det ikke ble lagt opp til. Her kunne oppgaven vært annerledes og representert større deler av delbegrepet. Dette vil jeg komme tilbake til i kapittelet om metodekritikk.

Måling

Delbegrepet måling ble representert flere ganger i løpet av mine observasjoner. I en av undervisningstimene holdt blant annet klassen på med nettsiden Campus Inkrement hvor addisjon og subtraksjon stod i fokus. Regneoperasjonen addisjon knyttes direkte til målingsbegrepet i Behr et al sin modell (1983) og delbegrepet måling var derfor sentralt i denne timen. I en av oppgavene ble en kake delt inn i fem deler hvor også en figur ble tegnet for å illustrere kakens oppdeling. To personer skulle spise en del hver og spørsmålet til klassen ble hvor stor brøkdel personene spiste til sammen. I tillegg til addisjon blir også enhetsbrøk representert gjennom oppgaven. En enhetsbrøk gjentas flere ganger og bestemmer lengden fra et gitt punkt (Lamon, 2012). I dette tilfellet gir en del av kaken enhetsbrøken 1/5 og når to personer spiser en del hver blir enhetsbrøken representer to ganger. Vi får altså 2 $\frac{1}{5}$ -enheter. Ifølge Charalambous og Pitta-Pantazi er det viktig at elevene klarer å dele opp brøk i enheter som samsvarer med brøkens nevner. Klarer de ikke dette vil de møte på utfordringer når de skal plassere brøker på tallinjer bestående av andre enheter (Charalambous og Pitta-Pantazi, 2007). Dette viste seg å stemme relativt bra da elevene fikk i oppgave å plassere brøken 5/7 på en tallinje delt inn i ti deler under gruppeintervjuet. Elevene la merke til at tallinjen og brøkens nevner var ulike og dette er en god start, men elevene delte ikke videre tallinjen inn i enheter som samsvarte med brøkens nevner. Hadde elevene gjort dette, ville de ha klart å plassere brøken ganske så nøyaktig på 7,142 selv uten kalkulator.

Målingsbegrepet ble også representert gjennom et addisjon- og subtraksjonsark samt et oppgaveark hvor elevene skulle sammenlikne brøker og sette inn *krokodille*-tegn (>, <) eller likhetstegn. Dette er en fin oppgave for elevene i forhold uttalelsen til Hovik og Kleve som påpekte at elevene kunne ha vansker med å forstå hvilke brøker som var minst og størst (Hovik og Kleve, 2016).

5.2 Metodekritikk

Gjennom denne oppgaven har målet vært å få en oversikt over hvilke brøkbegreper som er observerbare hos elever på 6.trinn. Intervjuer og observasjoner har gitt meg en oversikt over dette og jeg mener disse metodene har vært egnet for formålet. Begrunnelse for dette er beskrevet i metodekapittelet. Likevel finnes det svakheter. Gjennom observasjonene valgte jeg en ikke-deltakende observatørrolle, noe som innbar at jeg forholdt meg til den samme plassen gjennom hele observasjonstimen. Jeg noterte ned det som ble sagt av både elever og lærere i plenum og også noen situasjoner elevene imellom i arbeid med brøk. Hadde jeg inntatt en mer delaktig observatørrolle kunne jeg fanget opp flere av disse situasjonene hvor elevene arbeidet sammen og også kanskje spurt dem om noen spørsmål underveis. På den andre siden hadde jeg noen gruppeintervjuer i vente som la opp til samtale mellom elever i arbeid med brøk. Når det gjelder de oppgavebaserte gruppeintervjuene ble ikke disse helt som tenkt på forhånd, men i etterkant er jeg glad for at det ble som det ble og at jeg fikk muligheten til å gjennomføre gruppeintervjuene på to forskjellige skoler. Elevene var flinke til å tenke høyt, samtale og samarbeide om oppgavene de fikk utdelt.

Når det gjelder oppgavene jeg laget klart til gruppeintervjuene vil jeg rette noe kritikk til meg selv. Da jeg laget oppgavene var jeg opptatt av at hver oppgave skulle være rettet til et av de fem ulike delbegrepene og at alle delbegrepene ble representert. Jeg ønsket heller ikke for mange oppgaver da jeg var redd for at elevene skulle bli demotiverte og ukonsentrerte underveis. I etterkant ser jeg at jeg blant annet kunne lagt opp til flere problemløsningsoppgaver. Slike oppgaver knyttes gjerne til delbegrepet kvotient, men kan også representere samtlige av de resterende delbegrepene. Oppgavene jeg laget ble totalt sett for få til å kunne se hele forståelsen av brøkbegrepet hos elevene. Kanskje skulle en bare fokusert på et par av delbegrepene og sett etter hvorvidt de kom fram hos elevene. Likevel var jeg opptatt av å se etter alle delbegrepene slik at jeg også kunne si noe om elevenes forståelse av brøkbegrepet samlet sett. Oppgavene kunne ha representert større deler av delbegrepene og vært lagt opp annerledes. Likevel, ved at jeg har vært bevisst på dette, mener jeg at elevene gjennom oppgavene har fått vist sin forståelse av de ulike delbegrepene.

5.2.1 Den teoretiske modellen som analyseverktøy

Jeg valgte den teoretiske modellen til Behr et al (1983) som mitt analyseverktøy i arbeid med resultatene (avsnitt 2.2). Modellen gir en oversikt over de ulike delbegrepene og brøkbegrepets kompleksitet. Uten modellen ville mest sannsynlig brøkbegrepet i denne oppgaven blitt forsket på i en mindre grad da jeg på forhånd ikke kjente til alle delbegrepene. På den ene siden er modellen fin å bruke da den presenterer de ulike delbegrepene og knytter disse videre til ulike operasjoner som for eksempel addisjon og multiplikasjon, samt problemløsning i arbeid med brøk. På den andre siden gir ikke modellen noen dypere forklaring på hvorfor for eksempel delbegrepet operator knyttes til regneoperasjonen multiplikasjon. Hvorfor kan to brøker med ulik nevner multipliseres, men ikke adderes? Og hvorfor må en multiplisere og ikke addere i arbeid med å utvide brøker? Modellen gir ikke noe konkret svar på dette, men brøkbegrepet er komplekst og de ulike delbegrepene henger sammen, noe som betyr at forståelse for et delbegrep vil hjelpe eleven i arbeid med det neste.

Når det gjelder den instrumentelle og den relasjonelle forståelsen av brøkbegrepet, blir ikke dette representert gjennom den teoretiske modellen og her måtte en eventuelt ha tilføyd et analyseverktøy som sa noe mer konkret om forståelsen av de ulike delbegrepene. Likevel har det gjennom denne oppgaven vært fokus på hvilke brøkbegreper som er observerbare og derfor mener jeg den teoretiske modellen har egnet seg godt som analyseverktøy i arbeid med resultatene for denne oppgaven.

6 Avslutning

6.1 Konklusjon

Formålet med denne forskningen var å undersøke *hvilke brøkbegreper som var observerbare hos elever på 6.trinn.* For å få svar på problemstillingen observerte jeg en klasse på 15 elever i fire matematikktimer og intervjuet 6 elever i arbeid med oppgaver knyttet til de ulike delbegrepene. Jeg intervjuet også observasjonsklassens matematikklærer. Utvalget mitt var rekruttert fra to ulike skoler og representerer derfor det spesielle framfor det generelle og kan dermed ikke generaliseres. Noen av delbegrepene kommer bedre frem enn andre, men ingen av delbegrepene blir konkret nevnt av elever eller lærere.

Lamon (2012) påstår at delbegrepet del-hel er mest fremtredende i matematikkundervisningen, men i mine observasjoner kommer det frem flere delbegreper som skiller seg ut i tilknytning til matematikkundervisningen. Gjennom observasjonene arbeidet elevene med flere ulike oppgaver knyttet til brøkbegrepet hvor delbegrepene del-hel, operator og måling var de mest fremtredende begrepene. I gruppeintervjuene var det delbegrepene del-hel, operator og kvotient som kom best frem hos elevene. Med andre ord er det i denne forskningen enklere å peke på det delbegrepet som er minst fremtredende, nemlig forhold. Forholdsbegrepet ble i liten grad representert i matematikkundervisningen og var også det begrepet som var minst observerbart hos elevene i gruppeintervjuene.

Forskningen viser at delbegrepene *del-hel*, *operator*, *kvotient* og *måling* er de brøkbegrepene som er observerbare hos elever på 6.trinn. Jeg hadde ikke på forhånd gjort meg opp noen meninger om hvilke av brøkbegrepene som kunne være observerbare, men jeg hadde sett for meg at en mindre del av brøkbegrepet kom til å være fremtredende hos elevene. Dermed kommer disse funnene litt overraskende på meg, men på en positiv måte. Det er flott at en såpass stor del av brøkbegrepet er observerbart hos elevene på 6.trinn og dermed er også elevene på god vei til å kunne mestre hele det komplekse brøkbegrepet.

6.2 Veien videre

I denne forskningen er det altså fire av fem delbegreper som er observerbare hos elevene på 6.trinn. Videre åpner det seg nye, store spørsmål som for eksempel *Hvorfor er delbegrepet forhold det minst fremtredende brøkbegreper hos elever på 6.trinn?* Dette er et interessant spørsmål jeg gjerne skulle forsket mer på. Ved en slik forskning måtte en gjerne gått enda mer i dybden på hvert enkelt delbegrep. Hvilke delbegreper benyttes oftest av matematikklæreren i undervisningen? Hvilket delbegrepet legges det mest vekt på i utvalg av oppgaver? Har de ulike delbegrepene ulik vanskelighetsgrad? Og er i så fall forholdsbegrepet et av de mer vanskelige delbegrepene? Her dukker det opp mange interessante spørsmål en kan ta med seg i videre i betraktningen av brøkbegrepet.

7 Litteratur

Alseth, B., Nordberg, G. & Røssland, M. (2007). *Multi: matematikk for barnetrinnet: Grunnbok 6b*. Oslo: Gyldendal Undervisning

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. I R. L. M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikkje er tall. Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B. B. Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug (Red.), *Fo i Praksis 2012 conference proceedings.* Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Red.), *Theories of Mathematical Learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Student's understandings of fraction. *An International Journal.*

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt Forlag.

Gilje, N., & Grimen, H. (1993). *Samfunnsvitenskapens forutsetninger: innføring i samfunnsvitenskapens vitenskapsfilosofi.* Oslo: Universitetsforlaget.

Hovik, E.K. & Kleve, B. (2016). *Undervisningskunnskap i matematikk*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. I R. Lesh (Red.), *Number and measurement: Papers from a research workshop.* Columbus: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. I T.P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Red.). *Rational Numbers: An Integration of Research.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervjuet* (3.utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics*. North Carolina: Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3.utg). New York: Routledge.

Noelting, G. (1978). The development of proportional reasoning in the child and the adolescent through combination of logic and arithmetic. *Proceedings of the Second PME Conference.* Vest-Tyskland: University of Osnabruck.

Pedersen, P. I., Pedersen, B. B. & Skoogh, L. (2007). *Abakus: matematikk for barnetrinnet: Abakus for sjette trinn. Oppgavebok 6B.* Oslo: Aschehoug

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2016). Læreren med forskerblikk. *Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Oslo: Cappelen Damm.

Regjeringen. (2017). *Fag og læreplaner*. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/tema/utdanning/grunnopplaring/artikler/innhold-vurdering-og-struktur/id2356931/?expand=factbox2615775

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides on the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. Hentet fra: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF00302715.pdf

Silverman, D. (2014). *Interpreting Qualitative Data* (5.utg). London: Sage

Solem, I. H., Alseth, B. & Nordberg, G. (2010). *Tall og tanke: Matematikkundervisning på 1. til 4. trinn.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavene til gruppeintervju

Oppgave 1: Regn ut

a) $2 \cdot \frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}$

Oppgave 2: Utvid brøkene

a) Utvid brøken med 3

$\frac{4}{7}$

b) Utvid brøken med 5

$\frac{4}{9}$

Oppgave 3: Pizza

a) Tre pizzaer skal fordeles likt på fire barn. Hvor mye pizza blir det til hvert barn?

b) Tre pizzaer fordeles likt på noen venner. Hver av dem får 3/5 pizza. Hvor mange venner er de til sammen?

Oppgave 4: Appelsinsaft

Even og Maria skal blande appelsinsaft til klassen. For å finne ut hvilken blanding som smaker best, prøver de ut noen ulike oppskrifter.

Oppskrift A

2 dl appelsinsaft

3 dl kaldt vann

Oppskrift B

1 dl appelsinsaft

4 dl kaldt vann

Oppskrift C

4 dl appelsinsaft

8 dl kaldt vann

Oppskrift D

3 dl appelsinsaft

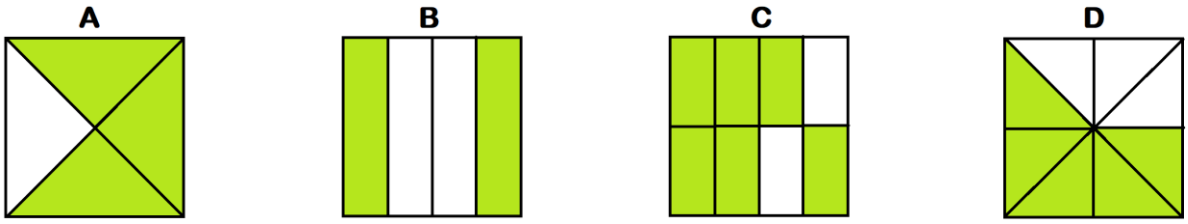
5 dl kaldt vann

a) Hvilken oppskrift vil gjøre appelsinsaften sterkest?

b) Hvilken oppskrift vil gjøre appelsinsaften svakest?

Oppgave 5: Figurer

a) I hvilke figurer er ¾ fargelagt?

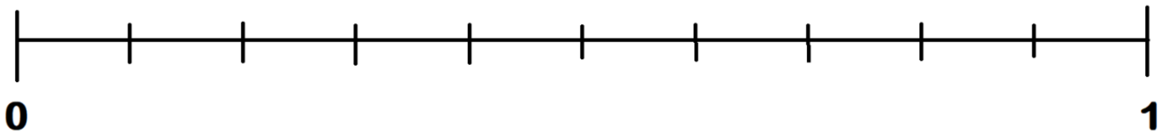


b) Hvor stor brøkdel av figuren er fargelagt?

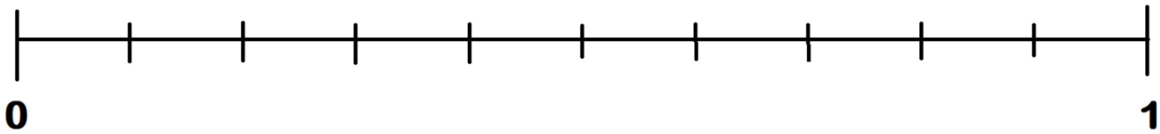
c) Hvis fire klinkekuler representerer 2/3 av klinkekulesamlingen til Anders, hvor mange klinkekuler har da Anders til sammen?

Oppgave 6: Tallinje

a) Plasser brøken 6/10 på tallinjen



b) Plasser brøken 5/7 på tallinjen



Vedlegg 2: Lærerintervju

1	Intervjuer	Hvilke utfordringer har elever med brøk sett fra dine øyne?
2	*ML*	Utfordringer er at de ikke forstår at en brøk er en del av en hel eller en del av noe. Forskjellen på teller og nevner er også vanskelig for mange.
3	Intervjuer	Hva mener du er det viktigste i forhold til brøk i din undervisning?
4	*ML*	Å få dem til å forstå at brøk er noe vi bruker i det daglige med å si at jeg tar en halv av den. Eller når de skal lese oppskrifter og treger ¾.
5	Intervjuer	Hva er din filosofi rundt brøkundervisningen?
6	*ML*	Å gjøre det så enkelt som mulig og dra inn brøk der en kan andre steder. For eksempel i mat og helse hvor det er ganske naturlig.

Vedlegg 3: Gruppeintervju

Gruppeintervju ved Roåker Skole

1	1 R	Hvis vi samarbeider ~
2	3 R	Er ikke dette uekte brøker?
3	2 R	Nei
4	1 R	Det er fire
5	2 R	Er det fire?
6	1 R	Ja
7	3 R	To gange to ~
8	1 R	Er fire
9	2 R	Ja, men så er det jo ~
10	1 R	To
11	2 R	Ja
12	1 R	Ja, også ~
13	2 R	Fire
14	1 R	Så, fire av fem
15	2 R	Var det fire av fe ... ja, fire av fem, ja
16	3 R	Sånn
17	1 R	Okey, også den …
18	2 R	Hm, fem av sju gange …
19	1 R	Fem gange tre er femten
20	2 R	Ja
21	1 R	Femten på toppen da
22	2 R	Eh
23	1 R	Sju gange fire
24	2 R	Tjueåtte
25	1 R	Ja, eh (.) tjueåtte
26	3 R	[…]
27	1 R	[…] Eh, utvid med tre. Hva er å utvide en brøk?
28	2 R	Skal vi se (2) utvid brøken med tre (.) Sånn! Det blir tolv oppe
29	1 R	Åja
30	2 R	Tolv, er det ikke det da?
31	1 R	Jo, fire ganger tre er tolv
32	2 R	Jeg bare (2) ja
33	3 R	Legger på tre?
34	1 R	Og sju gange tre er tjueen
35	2 R	Tjueen, ja
36	1 R	Også neste (.) Utvid brøken med fem
37	2 R	Mm
38	1 R	Fire gange fem er tjue
39	2 R	Ja (.) Ni gange fem er førtifem
40	1 R	Okey, oppgave tre. Tre pizzaer skal fordeles på tre, nei fire barn. Okey …
41	2 R	Okey, det var en fjerdedel?
42	1 R	Vi kan bare gjøre sånn her, eh (2) …
43	2 R	En pizza delt på fire
44	1 R	~ sånn, sånn og sånn
45	2 R	Mm

46	1 R	Da får du tre pizzaer der
47	2 R	Ja, også blir det en fjerdedel til hver
48	1 R	Ja. Okey, neste oppgave
49	2 R	Ja, tre pizzaer fordeles likt på noen venner
50	1 R	Okey, tre pizzaer
51	2 R	Ja, og dele på fem
52	3 R	Hm (.) Det er tre pizzaer
53	1 R	Dele alle i fem?
54	2 R	Ja
55	3 R	Hm
56	2 R	Sånn
57	1 R	Men hvor mange venner er de?
58	2 R	Tre ~
59	1 R	~ Tre
60	2 R	Da får de ~
61	1 R	En to tre fire fem (teller)
62	2 R	Eller er de tre eller fire venner?
63	1 R	Fem. De er fem venner
64	2 R	Da får de tre pizzabiter hver da
65	1 R	Ja, for de er fem venner
66	2 R	Ja, da får de tre pizzabiter hver for det er femten
67	1 R	Ja, hvor mange venner er de til sammen? Fem venner?
68	2 R	Fem venner, ja
69	1 R	Ja
70	2 R	Ja, neste?
71	1 R	Even og Maria skal blande appelsinsaft til klassen. For å finne ut hvilken blanding som smaker best prøver dem ulike oppskrifter. Hvilken oppskrift gjøres appelsinsaften sterkest? Da er det vel mest saft da
72	2 R	Nja, men det kommer helt an på hvordan en fordeler det på
73	1 R	Ja, men mest saft …
74	2 R	Det er vel (2) c? c! Fire av åtte for at da får du halvparten
75	1 R	Ja, men der så er det jo to av tre? Nei, jeg vet ikke
76	2 R	For kaldt vann blander jo ut vet du
77	1 R	Ja
78	2 R	Hvis det er fire desiliter appelsinsaft, åtte desiliter vann så er jo det halvparten
79	1 R	Men ~
80	2 R	Eller er det mer på a?
81	1 R	Der får man litt mindre da, men …
82	2 R	Ja, men skal jo ha sterkest mulig
83	1 R	Ja
84	2 R	Er det sterkest mulig?
85	1 R	Ja, to desiliter
86	2 R	Ja, så vi svarer a på den da?
87	1 R	Ja
88	2 R	Er du med på den, elev 3?
89	3 R	Ja
90	2 R	Også b (.) hvilken oppskrift … svakest?
91	3 R	b?
92	2 R	Ja
93	1 R	Det er en desiliter

94	3 R	Ja, en desiliter. Tar du også det?
95	1 R	Ja
96	3 R	Så på a er det a og på b er det b (ler)
97	1 R	Ja (ler)
98	2 R	Hm …
99	1 R	Hvilke figurer er tre fjerdedeler
100	3 R	a? Jeg bare tar en ring rundt a jeg
101	1 R	Også den her?
102	2 R	Ja, kanskje
103	1 R	Ja, det er jo en to tre (teller)
104	2 R	Det er hvert fall ~
105	3 R	Den første er åtte
106	1 R	Ja
107	2 R	Nei
108	1 R	Jo
109	2 R	Nei, tre av fem
110	3 R	Den er åtte
111	1 R	Fem av åtte
112	2 R	Hæ, på den første?
113	1 R	Ja
114	2 R	En to tre (teller)
115	1 R	En to tre fire fem (teller)
116	2 R	Ja
117	1 R	Det er fargelagt
118	2 R	Ja
119	1 R	Okey, tre …
120	3 R	Åtte, nei tre av åtte
121	1 R	Hm (2) en to tre (teller)
122	2 R	Ja, så er det den siste. To og ~
123	3 R	To av seks ~
124	1 R	~ To av seks
125	Intervjuer	Dere, se på den første oppgaven. Er det flere figurer?
126	1 R	Hm …
127	2 R	Den der tror jeg faktisk
128	3 R	Ja, den der, c
129	2 R	c, er den det?
130	3 R	Ja
131	2 R	Ja, det er den
132	1 R	Å ja
133	2 R	Jeg tror det bare er de to da
134	1 R	Ja. Hvis fire klinkekuler representerer to av tre av klinkekulesamlingen til Anders, hvor mange klinkekuler har da Anders til sammen? Fire? (.) To, nei det er en av tre, er det ikke det da? …
135	2 R	Vet ikke …
136	1 R	To. To klinkekuler er en av tre
137	2 R	Det er seks er det ikke det da? Nei
138	1 R	Seks? Jo seks
139	2 R	Ja ~
140	1 R	~ Ja
141	2 R	Seks (.) To av tre

142	1 R	Ja
143	2 R	Ja, skal vi svare seks på den da?
144	1 R	Seks
145	2 R	Ja
146	1 R	Plasser brøken seks av ti på tallinjen. Det er bare å telle
147	2 R	Skal ikke den der da? Er det ikke (2) Er det ikke fire?
148	1 R	En to tre fire fem seks (teller)
149	2 R	Skal den på den som ligger på fire da kanskje? Eller skal den på seks?
150	1 R	Den skal på seks. Fire?
151	3 R	Jeg trodde du sa fire?
152	2 R	En to tre (.) Ja, seks av ti der
153	1 R	Ja (2) Hvor da?
154	2 R	Der
155	1 R	Der, ja. Også fem av sju
156	2 R	Fem av sju …
157	1 R	En to tre fire fem seks sju
158	2 R	Men skal ikke den kanskje egentlig hvis det er (2) seks av sju, nei, fem av sju, er det ikke egentlig to som blir svaret da? …
159	1 R	Vet ikke …
160	2 R	Hm …
161	Intervjuer	Hvor mange deler er tallinjen deres delt inn i da?
162	2 R	Ti
163	Intervjuer	Ti, ja. Om tallinja hadde vært delt inn i syv da, hadde det vært enklere for dere å plassere brøken da?
164	2 R	Ja, da hadde den vært på (.) fem
165	Intervjuer	Ja. Er fem syvdeler mer eller mindre enn halvparten da?
166	1 R	Å ja
167	2 R	Det er mer
168	1 R	Ja
169	Intervjuer	Det er mer? Da vet dere hvilken side av tallinjen den må være på hvert fall
170	2 R	Ja
171	1 R	Skal vi se (2) Jeg aner ikke hva jeg gjør. Her er fem av sju, den siste er ti. Åtte (.) jeg tror det er her kanskje?
172	2 R	På åtte?
173	1 R	Nei
174	2 R	Nei, sju? På sju?
175	1 R	Ja
176	3 R	[…]
177	2 R	Er det sju da? Sju
178	1 R	Jeg tror det er det
179	2 R	For det er to mer enn ~
180	1 R	Ja
181	2 R	Skal vi svare sju da?
182	1 R	Ja, vi tar det (.) Ja sju av ti
183	3 R	Ja

Gruppeintervju ved Sjøvik Skole

1	1 S	To ganger to av fem det blir fire av fem
2	2 S	Ja, det gjør vel det
3	1 S	Ja, siden du gjør jo ikke om, du ganger jo ikke den nede
4	2 S	Nei
5	1 S	Skal vi se (2) Fire av fem
6	2 S	Fem syvdeler …
7	1 S	Fem av syv delt på fire ganger fem av fire (.) Det er jeg dårlig på
8	3 S	Ja
9	1 S	Fem av fire
10	2 S	Fem firedeler, da er det jo ~
11	1 S	Da er det en for mye
12	2 S	Ja, da er det en for mye
13	3 S	Ja
14	1 S	Hva heter det igjen da? Fake?
15	2 S	Uekte
16	3 S	Ja, uekte brøk
17	1 S	Jeg skulle til å si fake brøk
18	2 S	[…]
19	1 S	Jeg går heller på neste oppgave og kommer tilbake jeg tror jeg
20	Intervjuer	Det er lov
21	1 S	Ja. Utvid brøken med tre, hva vil det egentlig si?
22	2 S	Det hadde vi om sist gang (.) Jeg husker ikke helt
23	Intervjuer	Hva tror dere det betyr da?
24	1 S	Å gjøre den større
25	Intervjuer	Ja
26	1 S	Å ja, du tar det tretallet over på toppen kanskje?
27	3 S	Kanskje, jeg vet ikke
28	2 S	Ja, da hadde det blitt syv syvdeler
29	1 S	Syv syvdeler eller så kunne det vært syv tideler
30	3 S	Ja, jeg vet ikke jeg
31	1 S	Vent, skal vi se (.) Skal vi satse på det, eller?
32	3 S	Ja, sju sjudeler
33	1 S	I så fall tar jeg sju sjudeler
34	3 S	Ja
35	2 S	Ja
36	1 S	Ja, jeg prøver det da
37	3 S	Også blir det da ni nideler da
38	1 S	Eller (.) Det er litt dumt
39	2 S	Det står jo utvide da, det står ikke pluss. Plusse tre …
40	1 S	Ja. Utvide med tre (2) Kanskje det er sju tideler?
41	2 S	Kanskje en bare skal gange hele brøken med tre?
42	3 S	Ja ~
43	1 S	~ Ja
44	2 S	Så det blir liksom tolv tjueendeler
45	1 S	Eller gange? Er du sikker på at det ikke heller bare er syv tideler da?
46	2 S	Ja, vi kan godt ta det
47	1 S	Utvid brøken med tre (.) Plusse på tre
48	3 S	Ja. Sju tideler kanskje?

49	1 S	Ja, jeg tror kanskje jeg prøver det, eller …
50	3 S	Sju tideler tror hvert fall jeg tror jeg, og så ~
51	1 S	Utvid med fem, da må det jo bli ni
52	3 S	Ni fjortendeler
53	1 S	Ja, ni fjortendeler
54	2 S	Ja
55	1 S	Tre pizzaer ~
56	3 S	Skal fordeles på fire barn
57	2 S	Tre pizzaer skal deles på fire barn. Hvor mye?
58	1 S	Skal vi se (2) Da blir det jo …
59	2 S	Hm …
60	1 S	Skal vi se, men da blir det jo ...
61	2 S	Da må vi kanskje dele opp pizzaene
62	3 S	Ja
63	1 S	Tre delt på fire, går det? (.) Nei, det går ikke
64	2 S	Hvis man deler pizzaene på fire?
65	1 S	Kan jeg ta trehundre prosent del på fire?
66	2 S	Da blir det tolv. Tolv pizzaer.
67	3 S	Ja
68	2 S	Tolv, da blir det tre pizzabiter til hver, så da blir det ~
69	1 S	Ja, men det står ikke hvor mye vi deler opp i eller hvor mange stykker
70	2 S	Nei, eller det skal deles i fire siden det er fire unger
71	1 S	Ja, men hvor mange stykker vi skal dele opp på hver pizza?
72	2 S	Da blir det tre fjerdedeler til hver også får den siste ungen en bit fra hver pizza
73	3 S	Eller hva med å dele alle pizzaene opp i halv, så få de en halv hver også deler vi de opp i kvart
74	1 S	Skal vi se …
75	2 S	Tre fjerdedeler, tror jeg
76	3 S	Blir det det?
77	2 S	Ja, det blir jo ~
78	1 S	Ja, det blir det
79	2 S	Hvis man deler pizzaen opp i fire, da blir det tre til den ene også deler du den andre i fire og så, ja
80	1 S	Ja, det er sant
81	3 S	Tre fjerdedeler
82	2 S	Fra hver pizza da
83	1 S	Ja. Tre pizzaer deles likt på noen venner, hver av dem får tre av fem pizzaer. Okey. Tre pizzaer. Hver av dem får tre av fem av en pizza da vel?
84	2 S	Ja
85	3 S	Tre pizzaer fordeles likt på noen venner.
86	2 S	Ja, da blir det …
87	1 S	Okey, skal vi se (.) Hvis da, da blir det jo femten totalt
88	2 S	Ja, da blir det ~
89	1 S	Skal vi se, da blir det fem venner da. Hvordan skal jeg sette det opp?
90	2 S	Nei vent litt. Okey, det er tre pizzaer
91	3 S	Ja, tre pizzaer
92	1 S	Ja, men det blir fem venner
93	2 S	Ja, det blir det vel?
94	3 S	Ja

95	1 S	På grunn av det blir jo (2) Fem er jo en pizza og det er tre pizzaer, da blir det femten
96	2 S	Femten også ni
97	1 S	Også kan du gange tre så mye som mulig til det går opp i femten
98	3 S	Skal vi se, det blir fem
99	1 S	Ja, skal vi se, fem venner
100	3 S	Even og Maria skal blande appelsinsaft til klassen. For å finne ut hvilken blanding som smaker best, prøver de ut noen ulike oppskrifter. Hvilken oppskrift vil gjøre appelsinsaften sterkest?
101	1 S	Sterkest, skal vi se …
102	2 S	Det blir ~
103	1 S	Det blir, skal vi se …
104	2 S	Blir det to tredjedeler? Eller?
105	1 S	Det blir kanskje to tredjedeler? Eller vent litt (.) Ja, det blir to tredjedeler
106	2 S	b er hvert fall svakest, det går det an å se
107	3 S	Ja, det blir a
108	2 S	Ja. b er svakest, så oppgave b da er det svakest
109	1 S	Ja, men a, det er vel a som er sterkest? Siden da er det ~
110	2 S	Hvis vi hadde gjort den til ~
111	1 S	Si fire da, fire av seks da. Den andre den er ~
112	3 S	Den vil gjøre den sterkest. c er jo en halv også der er jo halvparten
113	2 S	Det er en halv, det er litt over en halv, det er en kvart og a er den, ja
114	3 S	Ja
115	1 S	Den som er sterkest er a
116	2 S	Ja
117	1 S	Jeg har skrevet at a er sterkest, b er ~
118	3 S	b er svakest
119	2 S	Ja
120	1 S	Ja
121	3 S	Tre fjerdedeler farget
122	1 S	Hvilke figurer er farget tre fjerdedeler?
123	2 S	Tre fjerdedeler (.) Det er a
124	3 S	Ja
125	2 S	b, det er to fjerdedeler (.) Ring rundt a
126	3 S	a og b? Nei, a og c?
127	2 S	a, det er jo bokstavelig talt tre av fire
128	3 S	Ja
129	2 S	Også er det den to av fire også er det ~
130	1 S	Men c er jo også tre av fire. a og c
131	3 S	Ja. Nei. Jo, det er seks av åtte, ja
132	1 S	Ja, men det blir jo det samme?
133	3 S	Ja, det blir det samme
134	2 S	Ja, det blir det
135	1 S	Også blir ikke d det
136	3 S	Nei. Jo? d blir en to tre fire fem (teller). Å ja, nei
137	1 S	Hadde den biten der også vært med, da hadde det blitt det. Men da blir det a og c.
138	3 S	Ja
139	2 S	Hvor stor brøkdel av figuren er fargelagt?
140	3 S	Fem åttendeler

141	1 S	Fem av åtte
142	3 S	Ja og tre av åtte
143	2 S	[…]
144	1 S	En to tre fire fem seks syv åtte (teller)
145	2 S	Tre av åtte
146	1 S	Seks og to. To sjettedeler
147	2 S	Ja. Må vi forminske brøkene eller? Jeg vet ikke
148	1 S	[…]
149	2 S	[…]
150	1 S	Nei, jeg tror ikke det
151	2 S	Vi kunne eventuelt tatt en tredjedel (.) Ja, nei vi gidder ikke det
152	1 S	Hvis fire klinkekuler representerer to av tre ~
153	3 S	To av, ja, to tredjedeler
154	1 S	Representerer to av tre av klinkekulesamlingen
155	2 S	Ja, han har seks klinkekuler
156	1 S	Anders (.) Hvor mange klinkekuler har da Anders til sammen?
157	2 S	Det blir vel seks, så da kan vi dele opp (2) Da må vi dele opp i tre så da har vi to
158	1 S	Jeg må lese det på nytt for å få det med meg. Hvis fire klinkekuler representerer to av tre av klinkekulesamlingen til Anders (2) Da blir det seks ja
159	2 S	Han hadde en liten klinkekulesamling hvert fall
160	3 S	Ja
161	1 S	Okey, skal vi se. Jeg kunne jo tatt fire minus, nei delt på, nei, ja, nei bare glem det. Jeg bare skriver svaret jeg
162	2 S	Plasser brøken seks av ti. Da må vi jo bare ta den …
163	3 S	Ja
164	1 S	En to tre fire fem seks syv åtte ni ti (teller). En to tre fire fem seks (teller)
165	2 S	Jeg bare satt pil jeg
166	3 S	Ja, jeg bare skrev den opp
167	2 S	Fem syvdeler.
168	1 S	Men er det syv her da?
169	3 S	Nei, det er ti
170	2 S	Den går opp til egentlig én da, men den er inndelt i ti deler
171	3 S	Ja
172	1 S	Ja, men hvor skal jeg sette den opp da? For fem av sju, det blir …
173	2 S	Fem syvdeler …
174	3 S	Det blir jo …
175	1 S	Fem av sju …
176	3 S	Blir ikke det det samme som tre femtedeler?
177	2 S	Det blir vel det (.) Eller jeg vet ikke
178	1 S	Det er vel egentlig ikke så vanskelig vel
179	2 S	Nei, kan vel egentlig ikke være det
180	1 S	Nei og vi sliter faktisk
181	2 S	Ja, vi gjør det
182	1 S	Det er godt jobba. Plasser brøken fem av sju på tallinjen. Okey, men hva ~
183	2 S	Du kan jo tenke en to tre fire fem seks syv. Syv er der og fem er der, så da ~
184	1 S	Men hva blir fem av sju? Ja, men du kan ikke bare sette den på fem?
185	2 S	Nei, men jeg tenker sånn at da er det to på denne siden og en to tre fire (teller) på den siden
186	3 S	Er det? Ja, det er sant

187	2 S	Ja, også er det (.) Å nei, fem er midten, da blir det ujevnt, det tenkte jeg ikke på. Jeg ville tenkt at vi kanskje kunne prøvd å forskyve den, men det hadde vært litt vanskelig
188	1 S	Ja, men hvis syv, det er jo der vel
189	2 S	Syv er et ujevnt tall
190	1 S	Jeg bare setter den der og da er det, skal vi se (.) En to tre fire fem seks (teller) på den sida og to tre på den sida og hvor ~
191	3 S	Men altså, fem sjudeler eller ja, det er vel det samme som tre femtedeler. Hvis man dobler det
192	1 S	Skal vi se (.) Men da blir det jo ~
193	3 S	Det blir det samme som tre femtedeler blir det ikke?
194	1 S	Tre femtedeler?
195	3 S	Ja, fem sjudeler
196	1 S	Ja, kanskje ja
197	3 S	Og hvis man dobler det?
198	1 S	Ja, blir det det da?
199	3 S	Jeg vet ikke
200	1 S	Sikker på det? Det er jo tre, nei det blir ikke det, det blir to og en halv vel, nei, blir det det?
201	2 S	Nei, men hvis vi tenker siden hvis vi hadde gjort det da og forstørra den så hadde det blitt seks av ti
202	1 S	Skal vi se …
203	2 S	Men det hadde ikke gått opp på syv av fem, vi hadde bare gjort den større. Og går vi midt mellom blir det jo seks og en halv, blir det ikke? Er det seks og en halv? Skal vi liksom bare (2) Seks også putte den der? Liksom går det?
204	1 S	Jeg vet ikke jeg
205	2 S	Er det lov?
206	1 S	Ja, okey, da gjør vi det da?
207	3 S	Hva da?
208	2 S	Å putte den midt på
209	3 S	Seks komma fem?
210	2 S	Ja, bare putte den ved seks og en halv. Går det?
211	1 S	Skal vi se ~
212	2 S	Jeg vet ikke om det er riktig svar en gang
213	1 S	Men vi må jo regne ut om det er riktig først i så fall
214	2 S	Ja, det er jo (.) Jeg vet jo ikke om det er riktig
215	1 S	Nei
216	2 S	Jeg bare tenkte hvis vi hadde tatt sånn også lagt på tre, så måtte vi lagt på en og en halv og da hadde det vært seks og en halv, men jeg vet ikke helt. Jeg har ingen anelse
217	1 S	Okey, skal vi se (.) Seks og en halv da er det jo en halv (.) Da er det jo seks og en halv også er det, skal vi se, da er det tre og en halv opp og det blir kanskje riktig
218	3 S	Og det er ti?
219	1 S	Ja, det har ikke noe med saken å gjøre da. Eller har det det? Det har jo kanskje det? (.) Jeg tror jeg gjør den andre først jeg
220	2 S	Ja, jeg og
221	1 S	Skal vi se. Fem av syv gange fem av fire. Okey, nå ~
222	2 S	Skal vi bare gjøre at det er tjuefem tjueåttendeler?
223	1 S	Ja, men ~
224	2 S	Det var jo faktisk lett hvis vi bare ganger det

225	3 S	Tjuefem tjueåtte?
226	1 S	Ja, men er det det? Er du sikker på det?
227	2 S	Tjuefem av tjueåtte? Jeg vet ikke
228	1 S	Men okey, skal vi se, da blir det ~
229	2 S	Jo, vi prøver det. Tjuefem av tjueåtte
230	1 S	Sikker på at det er det?
231	3 S	Nei
232	1 S	Nei, nettopp
233	2 S	Jeg vet ikke. Jeg bare ganger fem og fem og syv og fire
234	1 S	Okey
235	2 S	Skal vi bare gjøre det? Fem gange fem
236	1 S	Tjuefem tjueåttendeler
237	2 S	Ja
238	1 S	Det kan jo være
239	2 S	Ja, eller syv gange fire (.) Ja, tjueåtte
240	1 S	Det blir riktig, men (2) Spørsmålet er om svaret ~
241	2 S	Er riktig
242	3 S	Ja, om svaret er det samme som vårt svar
243	1 S	Ja. Ok, da må vi svare på den siste oppgava. Jeg bare sier seks og en halv der
244	2 S	Ja, jeg og. Jeg tror det er seks og en halv
245	3 S	Vi sier det
246	1 S	Det kan være det er riktig, men det kan også være veldig feil

Vedlegg 4: Informasjon- og samtykkeskjema

Til elever ved Roåker Skole:

Vil du delta i forskningsprosjektet

***" Brøkbegreper på mellomtrinnet"*?**

Dette er et spørsmål til deg/dere og deres barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke brøkbegreper som er observerbare i matematikken blant elever på mellomtrinnet. I dette skrivet gir vi dere informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for barnet.

Formål

Formålet med dette forskningsprosjektet er å studere hvilke brøkbegreper som kommer fram blant elever på mellomtrinnet. Forskningen innebærer observasjon av undervisning, intervju med lærer og oppgavebaserte gruppeintervju med noen elever. Forskningsprosjektet er en masteroppgave i samarbeid med lærerutdanningen på Universitetet i Agder og forskningsspørsmålet for dette prosjektet er følgende: *Hvilke brøkbegreper er observante blant elever på 6.trinn?*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for matematiske fag og avdeling for lærerutdanning ved Universitetet i Agder er ansvarlige for prosjektet, sammen med Per Sigurd Hundeland.

Hvorfor får dere spørsmål om å delta?

[redacted] Skole har sagt seg villig til å bidra til innsamling av forskningsdata av min studie. Studien har spesielt fokus på brøkbegreper hos elever på mellomtrinnet. I den forbindelse vil det være stor verdi dersom deres barn kan delta.

Hva innebærer det for dere å delta?

Hvis dere velger å delta i prosjektet, innebærer det at jeg som forsker vil observere undervisningen i matematikk. Noen elever vil frivillig bli spurt om å delta i et gruppeintervju hvor vi vil samtale om matematikk og brøk. Det vil bli tatt lydopptak av dissen intervjuene.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om barnet vil bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere og barnet dersom dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om barnet til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Undertegnede og prosjektansvarlig ved Universitetet Agder vil ha tilgang til opplysningene.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.desember 2019. Ved prosjektslutt vil alle personopplysninger og videoopptak bli slettet.

Dine rettigheter

Så lenge barnet kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om barnet,
- å få rettet personopplysninger om barnet,
- få slettet personopplysninger om barnet,
- få utlevert en kopi av barnets personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deres barn?
Vi behandler opplysninger om barnet basert på deres samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis dere har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte dere av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Christina Lunden tlf.:41856945 mail: chril14@uia.no
- Per Sigurd Hundeland (veileder) mail: per.s.hundeland@uia.no
- Personvernombudet ved Universitetet i Agder tlf.: 45254401 mail: ina.danielsen@uia.no
- NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55582117

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Student
Per Sigurd Hundeland	Christina Lunden

Samtykkeerklæring

Jeg/vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Brøkbegreper på mellomtrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg/vi samtykker til at vårt barn

☐ Deltar i observasjon av matematikkundervisning
☐ Deltar i lydopptak av eventuelt intervju

Jeg/vi samtykker til at vårt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 20.12.19

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Til lærer ved Roåker Skole:

Vil du delta i forskningsprosjektet
" Brøkbegreper på mellomtrinnet"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke brøkbegreper som er observerbare i matematikken blant elever på mellomtrinnet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette forskningsprosjektet er å studere hvilke brøkbegreper som kommer fram blant elever på mellomtrinnet. Forskningen innebærer observasjon av undervisning, intervju med lærer og oppgavebaserte gruppeintervju med noen elever. Forskningsprosjektet er en masteroppgave i samarbeid med lærerutdanningen på Universitet i Agder og forskningsspørsmålet for dette prosjektet er følgende: *Hvilke brøkbegreper er observante blant elever på 6.trinn?*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Institutt for matematiske fag og avdeling for lærerutdanning ved Universitetet i Agder er ansvarlige for prosjektet, sammen med Per Sigurd Hundeland.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
[redacted] Skole har sagt seg villig til å bidra til innsamling av forskningsdata av min studie. Studien har spesielt fokus på brøkbegreper hos elever på mellomtrinnet. I den forbindelse vil det være til stor verdi dersom du kan delta.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at jeg som forsker vil observere undervisningen i matematikk. Du vil i tillegg bli spurt om et intervju i slutten av perioden.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Undertegnede og prosjektansvarlig ved Universitetet i Agder vil ha tilgang til opplysningene.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.desember 2019. Ved prosjektslutt vil alle personopplysninger og videoopptak bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Avdeling for lærerutdanning ved Universitet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Christina Lunden tlf.:41856945 mail: chril14@uia.no
- Per Sigurd Hundeland (veileder) mail: per.s.hundeland@uia.no
- Personvernombudet ved Universitetet i Agder tlf.: 45254401 mail: ina.danielsen@uia.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata As, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Student
Per Sigurd Hundeland	Christina Lunden

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Brøkbegreper på mellomtrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i observasjon av matematikkundervisning
- ☐ å delta i et intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 20.12.19

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Til elever ved Sjøvik Skole

Vil du delta i forskningsprosjektet

" Brøkbegreper på mellomtrinnet"?

Dette er et spørsmål til deg/dere og deres barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke brøkbegreper som er observerbare i matematikken blant elever på mellomtrinnet. I dette skrivet gir vi dere informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for barnet.

Formål
Formålet med dette forskningsprosjektet er å studere hvilke brøkbegreper som kommer fram blant elever på mellomtrinnet. Forskningen innebærer observasjon av undervisning, intervju med lærer og oppgavebaserte gruppeintervju med noen elever. Forskningsprosjektet er en masteroppgave i samarbeid med lærerutdanningen på Universitetet i Agder og forskningsspørsmålet for dette prosjektet er følgende: *Hvilke brøkbegreper er observante blant elever på 6.trinn?*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Institutt for matematiske fag og avdeling for lærerutdanning ved Universitetet i Agder er ansvarlige for prosjektet, sammen med Per Sigurd Hundeland.

Hvorfor får dere spørsmål om å delta?
[redacted] Skole har sagt seg villig til å bidra til innsamling av forskningsdata av min studie. Studien har spesielt fokus på brøkbegreper hos elever på mellomtrinnet. I den forbindelse vil det være stor verdi dersom deres barn kan delta.

Hva innebærer det for dere å delta?
Hvis dere velger å delta i prosjektet, innebærer det noen elever frivillig vil bli spurt om å delta i et gruppeintervju hvor vi vil samtale om matematikk og brøk. Det vil bli tatt lydopptak av disse intervjuene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om barnet vil bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere og barnet dersom dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om barnet til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Undertegnede og prosjektansvarlig ved Universitetet Agder vil ha tilgang til opplysningene.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.desember 2019. Ved prosjektslutt vil alle personopplysninger og videoopptak bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge barnet kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om barnet,
- å få rettet personopplysninger om barnet,
- få slettet personopplysninger om barnet,
- få utlevert en kopi av barnets personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deres barn?
Vi behandler opplysninger om barnet basert på deres samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis dere har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte dere av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Christina Lunden tlf.:41856945 mail: chril14@uia.no
- Per Sigurd Hundeland (veileder) mail: per.s.hundeland@uia.no
- Personvernombudet ved Universitetet i Agder tlf.: 45254401 mail: ina.danielsen@uia.no
- NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55582117

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Student
Per Sigurd Hundeland	Christina Lunden

Samtykkeerklæring

Jeg/vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Brøkbegreper på mellomtrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg/vi samtykker til at vårt barn

☐ Deltar i lydopptak av gruppeintervju

Jeg/vi samtykker til at vårt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 20.12.19

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 5: NSD godkjenning

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Brøkbegreper på mellomtrinnet

Referansenummer

338764

Registrert

14.12.2018 av Christina Lunden - chril14@student.uia.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Avdeling for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Per Sigurd Hundeland, per.s.hundeland@uia.no, tlf: 38141539

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Christina Lunden, christina.lunden@hotmail.com, tlf: 41856945

Prosjektperiode

01.01.2019 - 20.12.2019

Status

17.01.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

17.01.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 17.01.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 20.12.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Foreldre/foresatte vil samtykke for de registrerte i utvalg 1 (elever 11-12 år).

Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes/foreldres samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte/foreldre vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert/forelder tar kontakt om sine rettigheter/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

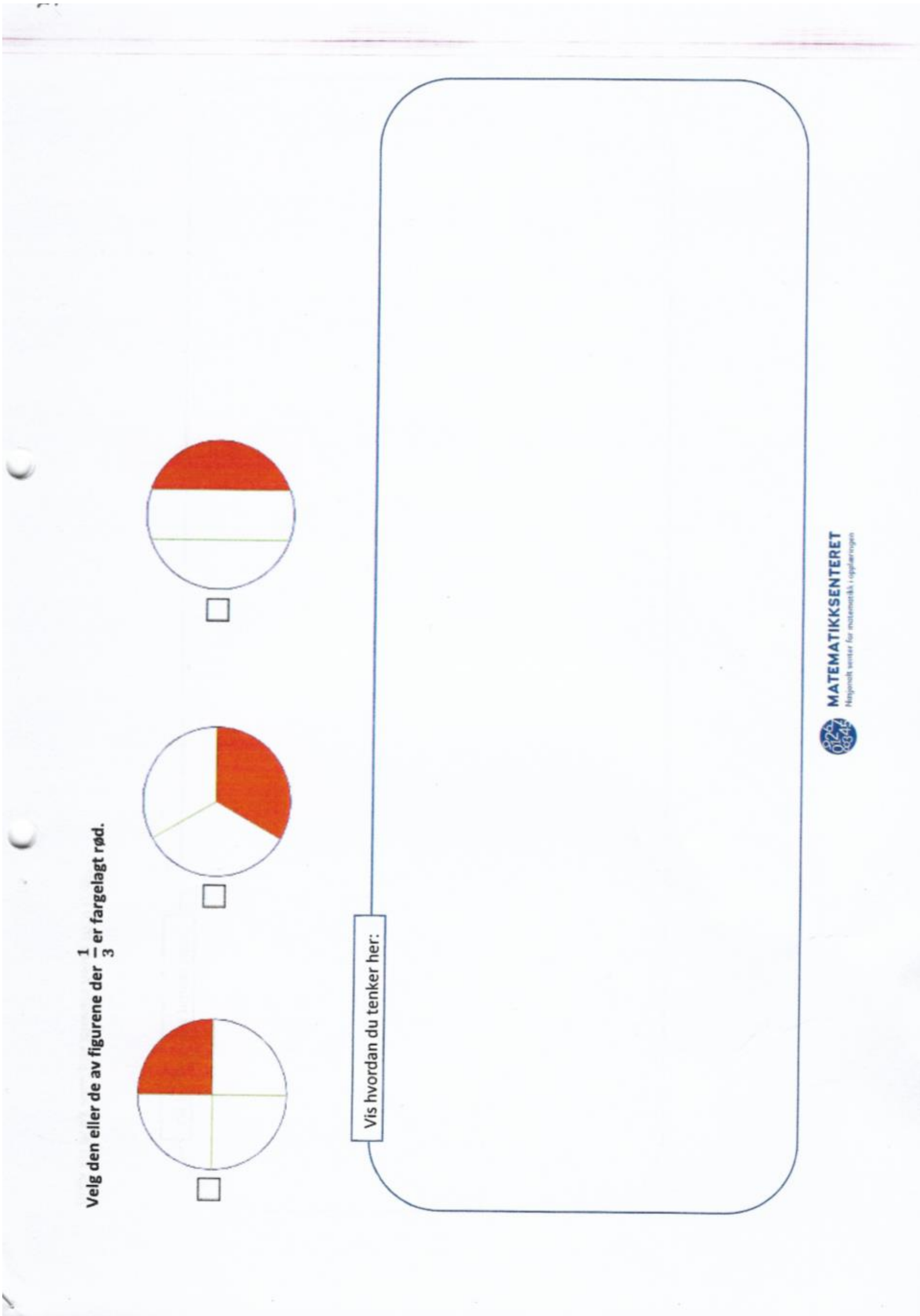
OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Eva J B Payne
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 6: Datamateriale fra observasjon

Oppgavehefte fra Matematikksenteret



Skriv en brøk som har samme verdi som 0,46.

Vis hvordan du tenker her:

Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene.

Vis hvordan du tenker her:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{}$$

Hva skal stå i den tomme ruta?

Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Familien til Henrik er på biltur. Henrik spør om de har igjen $\frac{1}{3}$ av turen.
Mor sier de har igjen mindre enn det.

Hvor langt kan de ha igjen av turen?

Vis hvordan du tenker her:

Skriv en brøk som har samme verdi som $\frac{4}{5}$.

Vis hvordan du tenker her:

Hvor stor brøkdel av flagget til Ecuador er rødt?

Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skriv en brøk som har dobbel så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Velg den eller de av figurene der $\frac{1}{5}$ er fargelagt blå.

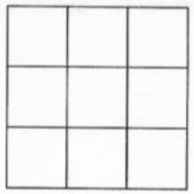
Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skriv $\frac{1}{4}$ som desimaltall.

Vis hvordan du tenker her:

Sett kryss i $\frac{3}{3}$ av rutene nedenfor



Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{4}$ L saft.

Hvor mange liter får de hver?

Vis hvordan du tenker her:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{}$$

Hva skal stå i den tomme ruta?

Vis hvordan du tenker her:

Skriv $\frac{4}{5}$ som desimaltall.

Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Henrik og Hanna får ukepenger.
Henrik sparer $\frac{1}{4}$ av pengene sine, mens Hanna sparer $\frac{1}{2}$ av pengene sine.

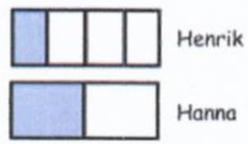
Fire elever blir spurt om Henrik kan spare mer penger enn Hanna.

Hvilken forklaring er riktig?

○ Vis hvordan du tenker her:

Henrik sparer mer enn Hanna, hvis han får mer enn dobbelt så mye i ukelønn.

○ Vis hvordan du tenker her:



Hanna sparer alltid mer enn Henrik.

○ Vis hvordan du tenker her:

Henrik sparer alltid mer enn Hanna fordi $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$.

○ Vis hvordan du tenker her:

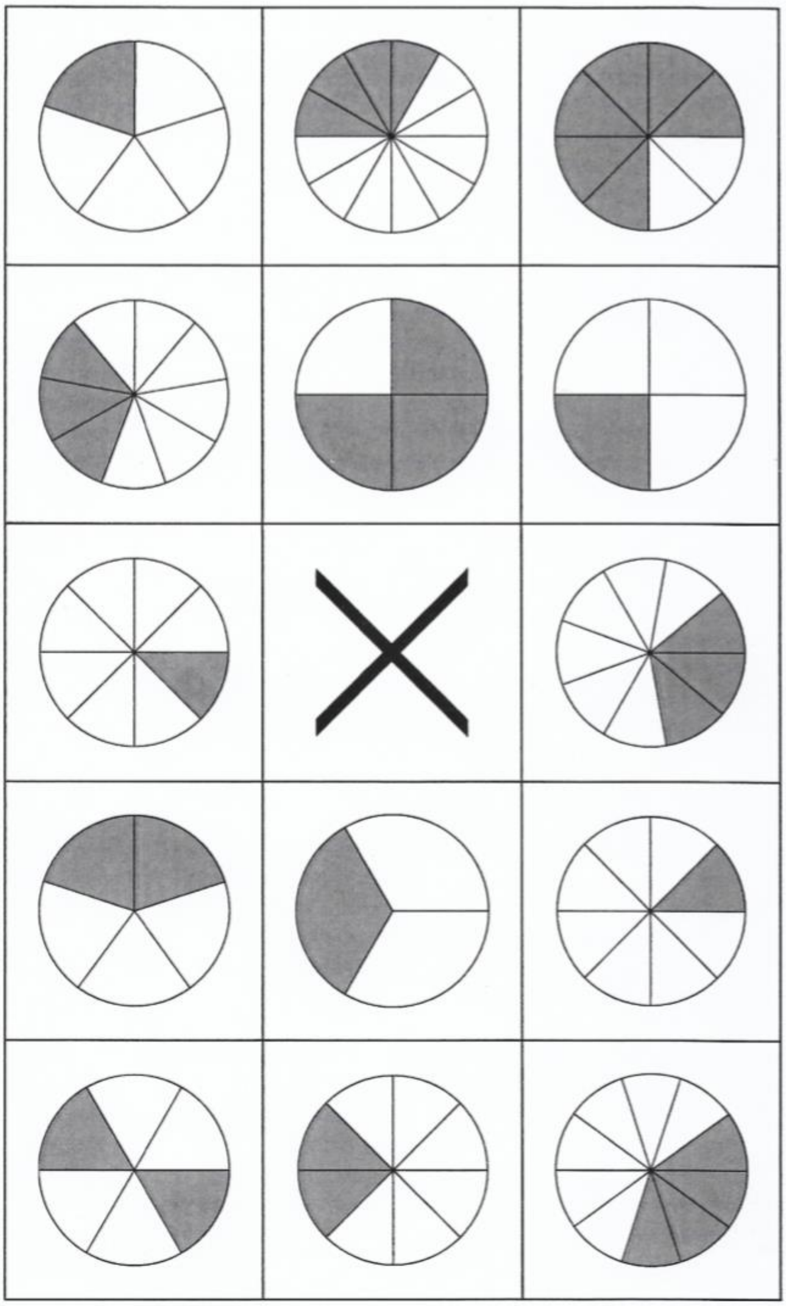
Begge sparer like mye.

Brøkbingo og spinner

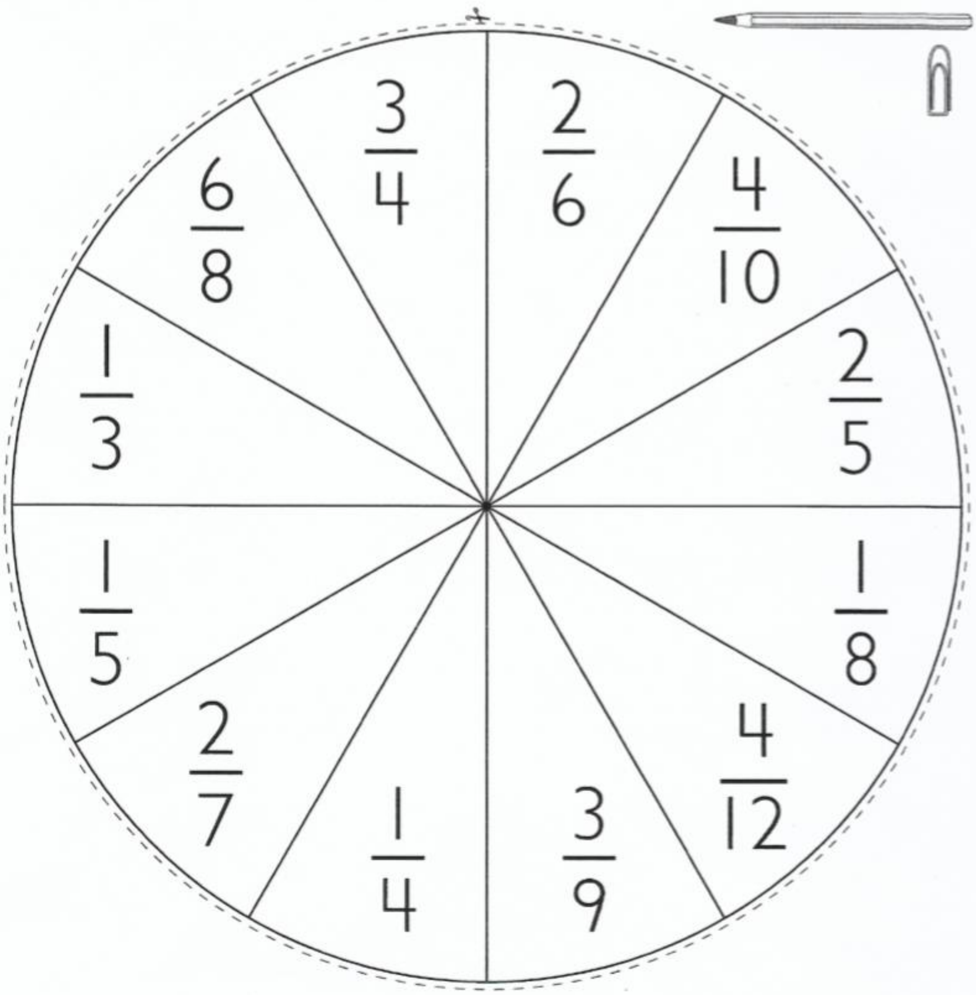
Kopioriginal 5.149

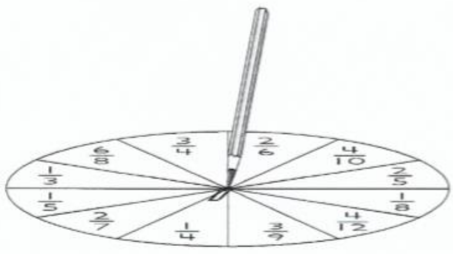
Spill: Brøk–bingo

Et brett til hver spiller. 10 brikker til hver. Hver spiller plasserer én brikke i x–feltet. Snurr en binders i spinneren (Kopioriginal 5.150). Legg en brikke i den ruta som viser brøken bindersen peker på. Vinneren er den som først får tre brikker på rad, vannrett, loddrett eller diagonalt.



Spinner til brøk-bingo





Problemløsing om brøk I

1 Basketlaget Ullern vant finalen og skåret 90 poeng. Valentin skåret 30 av disse poengene.

Hvor stor brøkdel av den totale poengsummen laget Valentin?

2 På noen tv-kanaler er $\frac{2}{5}$ av hver time reklame.

Hvor mange minutter per time blir det sendt reklame?

3 Tone holder på å skrive en bok. Hun planlegger at den skal være på 48 sider. Til nå har hun skrevet 12 sider.

Hvor stor brøkdel av boka har hun skrevet?

Problemløsing om brøk 2

1 Fire venner er på pizzarestaurant. De bestiller tre like pizzaer. De skal ha like mye hver.

Hvordan skal de dele pizzaene?

2 Fire andre venner er også på restauranten. De bestiller tre pizzaer med ulike smaker De vil alle spise like mye av hver pizza.

Hvordan skal de dele pizzaene?

3 Per og Kari skal dele 100 kr. Halvparten av det Per får er lik $\frac{1}{3}$ av det Kari får. Sagt med andre ord, Pers halvdel er like mye som Karis tredel.

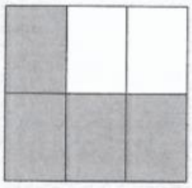
Hvor mye får de hver?

4 Christine tjente 90 kr på tre dager. Det var bare $\frac{2}{3}$ av det hun tjener på en uke.

Hvor mye tjener hun på en uke?

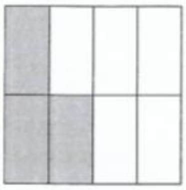
Addisjon med brøk

1 Legg sammen.



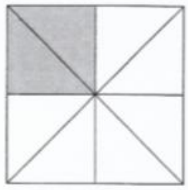
$$\frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6}$$

a



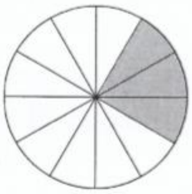
$\frac{}{8} + \frac{}{8} = \frac{}{8}$

b



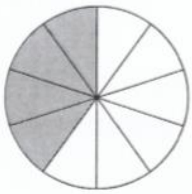
$\frac{}{8} + \frac{}{8} = \frac{}{8}$

c



— + — = —

d



— + — = —

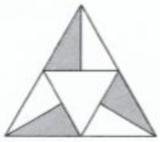
e

— + — = —

2 Lag regnestykker til figurene.

a

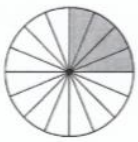
b



c

d

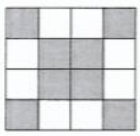
e



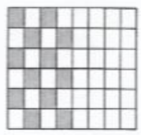
f

g

h



i



Problemløsing med brøk 3

1 Familien Larsen må klippe plenen. Ingen har spesielt lyst, og de bestemmer derfor at de skal dele på arbeidet.

- Far klipper halvparten av plenen den ene dagen.
- Neste dag tar mor halvparten av det stykket som er igjen.
- Om kvelden deler Lars og Trine det siste stykket som gjenstår.

Hvor stor brøkdel av plenen klipper de forskjellige familiemedlemmene?

---

2 Tor og Erik spiller et spill med klinkekuler. Når de starter, har Tor tre ganger så mange kuler som Erik. Men så taper han en tredel av kulene sine til Erik.

Hvordan er kulene fordelt nå?

---

3 4 kg honning skal tømmes over i bokser som hver rommer $\frac{3}{4}$ kg.

a Hvor mange bokser blir fulle?

b Hvor stor del av den siste boksen fylles med honning?

c Hvor mye honning blir det i den siste boksen?

Sammenlign brøker

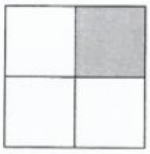
Skriv riktig tegn: >, < eller =

$\frac{1}{4} \square \frac{3}{4}$	$\frac{4}{8} \square \frac{2}{8}$	$\frac{13}{18} \square \frac{5}{18}$	$\frac{2}{5} \square \frac{3}{5}$
$\frac{2}{4} \square \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8} \square \frac{1}{6}$	$\frac{1}{14} \square \frac{1}{8}$	$\frac{3}{6} \square \frac{1}{3}$
$\frac{1}{12} \square \frac{1}{16}$	$\frac{2}{3} \square \frac{2}{12}$	$\frac{2}{6} \square \frac{1}{3}$	$\frac{2}{10} \square \frac{2}{5}$
$\frac{8}{16} \square \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2} \square \frac{3}{6}$	$\frac{1}{8} \square \frac{1}{5}$	$\frac{1}{3} \square \frac{2}{8}$

$\frac{1}{5} \square \frac{1}{7}$	$\frac{4}{12} \square \frac{1}{3}$	$\frac{4}{20} \square \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \square \frac{2}{12}$
$\frac{3}{12} \square \frac{2}{14}$	$\frac{4}{16} \square \frac{3}{18}$	$\frac{1}{20} \square \frac{1}{30}$	$\frac{5}{15} \square \frac{1}{3}$
$\frac{1}{6} \square \frac{2}{12}$	$\frac{3}{24} \square \frac{2}{8}$	$\frac{1}{4} \square \frac{2}{12}$	$\frac{2}{3} \square \frac{2}{12}$
$\frac{3}{4} \square \frac{4}{8}$	$\frac{5}{20} \square \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \square \frac{25}{100}$	$\frac{4}{8} \square \frac{1}{2}$

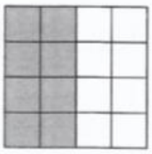
Arbeid med brøk 1

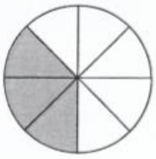
1 Hvor stor del er fargelagt?

a


c

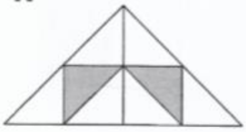

e


g


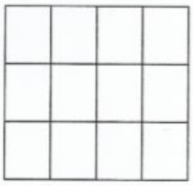
b


d

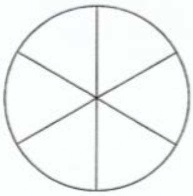

f


h


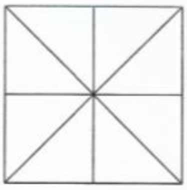
2 Fargelegg så stor del som brøken viser.

a


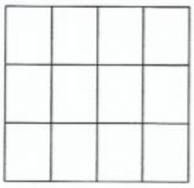
$\frac{4}{12}$

c


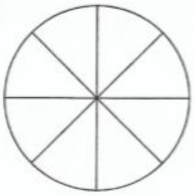
$\frac{1}{3}$

e


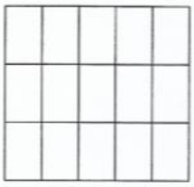
$\frac{3}{8}$

b


$\frac{1}{4}$

d


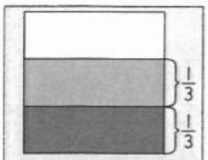
$\frac{4}{8}$

f


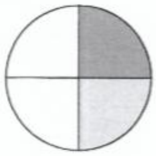
$\frac{1}{3}$

Arbeid med brøk 2

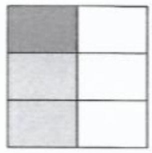
1 Regn ut. Hvor stor del er fargelagt?



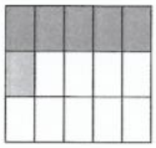
$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$

b 

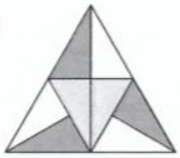
$\frac{\quad}{4} + \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{4}$

d 

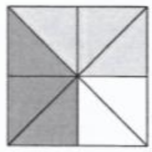
______

a 

______

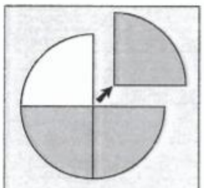
c 

______

e 

______

2 Regn ut.



$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{2}{4}}$

a 

______

b 

______

3 Regn ut.

$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} =$ ____ $\qquad \frac{4}{5} - \frac{3}{5} =$ ____ $\qquad \frac{6}{12} - \frac{2}{12} =$ ____

$\frac{8}{13} - \frac{5}{13} =$ ____ $\qquad \frac{9}{12} - \frac{5}{12} =$ ____ $\qquad \frac{8}{16} - \frac{4}{16} =$ ____

$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} =$ ____ $\qquad \frac{14}{20} - \frac{7}{20} =$ ____ $\qquad \frac{12}{15} - \frac{6}{15} =$ ____

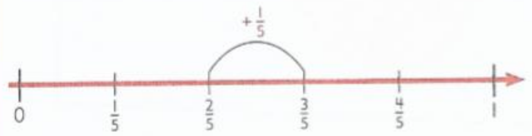
Oppgaveark med addisjon- og subtraksjonsoppgaver

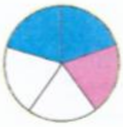
Addisjon og subtraksjon av brøker [redacted]

Eksempel

Hvor mye er $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$?

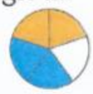
Vi kan bruke en tallinje eller lage en tegning:





$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$

6.29 Regn ut.

a  $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} =$ ____

b  $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$ ____

c  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$ ____

d  $\frac{5}{12} + \frac{2}{12} =$ ____

6.30 Regn ut.

a $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} =$ ____

b $\frac{7}{14} + \frac{4}{14} =$ ____

c $\frac{7}{18} + \frac{8}{18} =$ ____

d $\frac{12}{24} + \frac{5}{24} =$ ____

e $\frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} =$ ____

f $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} =$ ____

Hvilke tall mangler?

6.31

a $\frac{2}{7} + \frac{\quad}{7} = 1$

b $\frac{\quad}{6} + \frac{5}{6} = 1$

c $\frac{\quad}{8} + \frac{1}{8} = 1$

d $\frac{7}{14} + \frac{\quad}{14} = 1$

e $\frac{3}{8} + \frac{\quad}{8} = \frac{5}{8}$

f $\frac{\quad}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

6.32

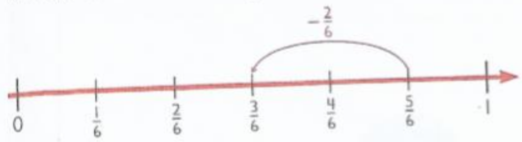
a $\frac{\quad}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$

b $\frac{7}{14} + \frac{\quad}{14} + \frac{2}{14} = \frac{12}{14}$

Eksempel

Hvor mye er $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$?

Vi kan bruke en tallinje eller lage en tegning:



$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{3}{6}}}$$

6.33 Regn ut.

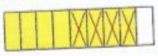
a  $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$ ______

b  $\frac{6}{8} - \frac{3}{8} =$ ______

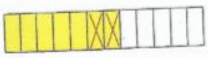
c  $\frac{7}{10} - \frac{4}{10} =$ ______

d  $\frac{9}{12} - \frac{3}{12} =$ ______

6.34 Regn ut.



a $\frac{8}{9} - \frac{4}{9} =$ ______



b $\frac{7}{12} - \frac{2}{12} =$ ______

c $\frac{9}{10} - \frac{4}{10} =$ ______

d $\frac{10}{14} - \frac{2}{14} =$ ______

6.35 Hvilke tall mangler?

a $\frac{7}{8} - \frac{\_\_}{8} = \frac{3}{8}$

b $\frac{\_\_}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$

c $\frac{\_\_}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12}$

d $\frac{\_\_}{15} - \frac{8}{15} = \frac{6}{15}$

6.36 Regn ut.

a $\frac{4}{7} - \frac{2}{7} =$ ______

b $\frac{7}{9} - \frac{3}{9} =$ ______

c $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} =$ ______

d $\frac{14}{15} - \frac{11}{15} =$ ______

e $\frac{15}{20} - \frac{8}{20} =$ ______

f $\frac{21}{30} - \frac{15}{30} =$ ______

Ark med sammenlikning av brøker

[redacted] Kopioriginal 5.166

Sammenlign brøker

Skriv riktig tegn: >, < eller =

$\frac{1}{4} \square \frac{3}{4}$	$\frac{4}{8} \square \frac{2}{8}$	$\frac{13}{18} \square \frac{5}{18}$	$\frac{2}{5} \square \frac{3}{5}$
$\frac{2}{4} \square \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8} \square \frac{1}{6}$	$\frac{1}{14} \square \frac{1}{8}$	$\frac{3}{6} \square \frac{1}{3}$
$\frac{1}{12} \square \frac{1}{16}$	$\frac{2}{3} \square \frac{2}{12}$	$\frac{2}{6} \square \frac{1}{3}$	$\frac{2}{10} \square \frac{2}{5}$
$\frac{8}{16} \square \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2} \square \frac{3}{6}$	$\frac{1}{8} \square \frac{1}{5}$	$\frac{1}{3} \square \frac{2}{8}$

$\frac{1}{5} \square \frac{1}{7}$	$\frac{4}{12} \square \frac{1}{3}$	$\frac{4}{20} \square \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \square \frac{2}{12}$
$\frac{3}{12} \square \frac{2}{14}$	$\frac{4}{16} \square \frac{3}{18}$	$\frac{1}{20} \square \frac{1}{30}$	$\frac{5}{15} \square \frac{1}{3}$
$\frac{1}{6} \square \frac{2}{12}$	$\frac{3}{24} \square \frac{2}{8}$	$\frac{1}{4} \square \frac{2}{12}$	$\frac{2}{3} \square \frac{2}{12}$
$\frac{3}{4} \square \frac{4}{8}$	$\frac{5}{20} \square \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \square \frac{25}{100}$	$\frac{4}{8} \square \frac{1}{2}$