BEGRUNNELSE OG RESONNEMENT I DIVISJON AV BRØK

En case studie av hvordan åttende trinns elever begrunner og resonnerer når de løser divisjon av brøk oppgaver.

KRISTIN GRIMSRUD

VEILEDER
Unni Wathne

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for Teknologi og Realfag
Institutt for Matematiske fag

Forord

Arbeidet med masteroppgaven startet senhøsten 2018, og har deretter pågått i en periode på seks måneder. Min tid som student startet høsten 2013 da jeg tok et årsstudium i spansk ved universitetet i Oslo, med en liten tanke om at dette kunne bli et av mine undervisningsfag som lærer. Et år senere begynte jeg på Universitet i Agder i Kristiansand. Her begynte jeg på master i grunnskolelærerutdanning 5-10. Dette ble mitt endelige utdanningsvalg, og fagene jeg valgte å fordype meg i var naturfag og matematikk. Plutselig var fire år gått og jeg var klar til å ta fatt på min masteroppgave i matematikkdidaktikk. Med det setter jeg et foreløpig punktum for min studenttilværelse, og jeg ser nå frem til å tre inn i læreryrket.

En mengde personer har vært viktige for meg i mitt arbeid med masteroppgaven, og jeg vil her anerkjenne deres bidrag for å hjelpe meg i mål. Først og fremst vil jeg rette en stor takk til veileder Unni Wathne, som har bidratt med glimrende veiledning tilpasset meg og min studie. Jeg er utrolig takknemlig! Din veiledning har bidratt til å motivere meg, utfordre meg og ikke minst vært utrolig støttende i arbeidet mitt. Jeg vil også takke rektor og lærere ved skolen jeg utførte min forskning for hjelpsomheten og tålmodigheten. Ikke minst vil jeg rette en stor takk til elevene som bidro til at denne forskningen var mulig å gjennomføre.

Jeg vil rette en stor takk til mine medstudenter, både på masterprogrammet og fra tidligere i utdanningen. Dere har vært gode støttespillere og hjulpet meg til å nå mine mål. En spesiell takk til Marte Lia for deling av frustrasjoner, tanker og latter under disse to årene på masteren i matematikkdidaktikk. Familie og venner har også vært viktige. Tusen takk for støtte og råd underveis. Nå kan dere ringe meg uten å bekymre dere for at dere skal forstyrre. Gro Stamsås, takk for at du har tatt deg tid til korrekturlesing når det nærmet seg slutten og for entusiasmen du har vist for mitt arbeid. Til slutt vil jeg rette en stor takk til min fantastiske kjæreste Asle Efteland. Takk for tålmodigheten du har vist meg dette året og din urokkelige tro på at jeg klarer det jeg bestemmer meg for. Din evne til å vise interesse for det jeg driver med, hjelpe meg med å holdet motet og humøret oppe når det ble som mest utfordrende, og ikke minst tvinge meg til å ta pauser har vært uvurderlig.

Kristin Grimsrud

Kristiansand, mai 2019

Sammendrag

Brøk er de mest komplekse tallene elever møter i grunnskolen og et komplekst fenomen (Bulgar, 2002). I tillegg blir divisjon av brøk sett på som den mest mekaniske og minst forståtte algoritmen elevene møter (Tirosh, 2000). Derfor har jeg i denne studien vurdert hvordan elever begrunner og resonnerer i oppgaver med divisjon av brøk, med utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1) *Hvordan begrunner og resonnerer åttende trinns elever i oppgaver med divisjon av brøk?*
   a) *Hvilke representasjoner blir brukt og hvordan blir disse brukt i elevenes begrunnelser og resonnement?*
   b) *Hvilke feil eller mulige misoppfatninger kommer frem i elevenes begrunnelse og resonnement?*

For å besvare forskningsspørsmålene har åttende trinns elever svart på én oppgave knyttet til målingsdivisjon og én oppgave knyttet til delingsdivisjon. Disse elevbesvarelsene har blitt vurdert i forhold til hvordan type begrunnelse og resonnement som brukes: Motsigelse, gjenkjennelse av mønster, naturlig tall, brøk og måling. I tillegg har det blitt sett etter ulike representasjoner og feil. For å gi en dypere forklaring av besvarelsene og tankegangen bak dem i møte med oppgavene, ble seks elever valgt ut til intervju.

For å gi en mer helhetlig fremstilling av divisjon av brøk, er brøkbegrepet og andre regneoperasjoner med brøk også beskrevet i studiens teoretiske rammeverk. Denne delen består også av tidligere forskning gjort på begrunnelse og resonnement i forbindelse med divisjon av brøk. Relevant teori om representasjoner og feil er også presentert. På den måten kan analyse av besvarelsene begrunnes med relevant teori.

Målingsdivisjonsoppgaven bidro til å få frem en rekke ulike begrunnelser og resonnement, der ulike representasjoner ble brukt for å forklare begrunnelsene. I delingsdivisjonsoppgaven var det ikke like stor spredning i bruk av begrunnelse og resonnement, og representasjonssystemer. Studiens hovedfunn er allikevel observerbare i begge oppgavene.

Elevenes begrunnelse og resonnement kan deles opp i tre hovedkategorier: Brøk, naturlig tall og måling. Elevenes bruk av representasjoner kan deles inn fire hovedkategorier: Symboler i form av tall, symboler i form av matematiske tegn, tegning som begrunnelse og resonnement og språk som begrunnelse og resonnement
I tillegg kan feilene elevene har gjort kategoriseres i tre typer feil, disse er algoritmebaserte feil, intuitive feil og feil basert på formell kunnskap.

Det viste seg også at det er stor variasjon innenfor hver kategori. I flere besvarelser av én oppgave kommer en kombinasjon av begrunnelser og resonnement til uttrykk. Samtidig som flere forskjellige semiotiske representasjoner brukes i én og samme begrunnelse og resonnement. En feil elevene gjør kan plasseres innenfor ulike kategorier og mulig være forårsaket av mangel på ulike kunnskaper.

Abstract

Fractions are the most complex numbers students meet in Elementary school and a complex concept (Bulgar, 2002). In addition, division of fraction is considered the most mechanical and least understood algorithm (Tirosh, 2000). In this study I have therefore considered how students justify and reason in tasks with division of fractions. The study was based on these research questions:

1) *How do eight-degree students justify and reason in tasks with division of fractions?*
   a) *Which representations are used and how are they used in the students´ justification and reasoning?*
   b) *Which errors and misconceptions occur in students´ justification and reasoning?*

To answer these research questions, eight-degree students have solved one task that involved measurement division and one task about partitive division. Each student´s assignment has been considered relative to which justification and reasoning that's used: Contradiction, recognition of patterns, natural numbers, fractions and measurement. In addition, representations, errors and misconceptions have been considered. To give a deeper explanation of the student's assignments and their thinking process when solving the tasks, six students have been chosen for an interview.

To provide a more comprehensive representation of division of fraction, the fraction concept and other arithmetic operations are described in the theoretical framework. This part also consists of earlier research performed on justification and reasoning during division of fractions. Relevant theory about representations and errors are also presented in this part. In this way, the analysis of the students´ assignments can be justified with relevant theory.

Measurement division contributed reveal many different justifications and reasonings, where different representations were used to explain the justifications. In det partitive division task, the use of different justification and reasoning, and different systems of representations were not clear as it was in the measurement division task. The main findings in the study are still observable in both of the tasks.

Students´ justification and reasoning can be categorized into three main categories: Fraction, natural numbers and measurement. Students´ use of representations can be categorized into four main categories: Symbols as numbers, symbols as mathematical signs, drawing as justification and reasoning and language as justification and reasoning. In addition, the errors students have made can be categorized into three different types of errors: Algorithmically based errors, intuitive errors, and errors based on formal knowledge.

It turned out that there is a big variation within each category. In several assignments it occurs that one task has been solved with a combination of justifications and reasonings. Different semiotic representations can be used in the same justification and reasoning. Lack of different types of knowledge can result in errors being categorized into different categories.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Gjennom hele min skolegang har jeg alltid likt matematikk, det å få til matte gav en mestringsfølelse jeg ikke fikk i noe annet fag. Flere år etter at min første lærer skapte mestringsfølelse knyttet til matte, bestemte jeg meg for at jeg også ville bli lærer. At matte var faget jeg ville fordype meg i var det ingen tvil om. Som snart ferdig utdannet lærer, med økt forståelse for matte og kunnskaper knyttet til matematikkdidaktikk, ser jeg virkelig frem til å skape mestringsfølelse for mine fremtidige matematikkelever.

I løpet av utdanningen min fikk jeg mulighet til å dra på utveksling til Montclair State University i USA. Her fikk jeg opplevelser, lærdom for livet og jeg ble kjent med et helt nytt skolesystem. Et av fagene jeg tok var «Mathematics in elementary schools II». Gjennom dette faget fikk jeg et helt nytt syn på brøk og en forståelse for dette emnet som jeg ikke har hatt tidligere. Jeg forstår nå de ulike algoritmene innenfor brøkregning på en helt annen måte og spesielt regelen om «å snu den bakerste brøken og deretter multiplisere brøkene» gir mening. Med denne forståelsen kunne jeg analysere, løse og lage egne tekstoppgaver om divisjon av brøk. Dette fikk meg senere til å jobbe for å forstå matematikken enda mer enn tidligere. Allikevel har dette med brøk festet seg og blitt med meg både det siste året på utdanningen og i praksiserfaringer. Senere i studien vil det komme frem at divisjon blir sett på som den mest komplekse regneoperasjonen elevene møter i grunnskolen. Gjennom møte med elever i praksisfeltet har jeg fått inntrykk av at divisjon av brøk er en algoritme som pugges og ikke forstås, på den måten glemmes den ofte raskt. Gjennom utvekslingsoppholdet, utdanningen på UIA og praksiserfaringer har jeg også opplevd at matematikk ikke nødvendigvis må begrunnes med en regneoperasjon og symboler. Andre representasjoner har hjulpet meg til å forstå matematikk, og jeg har også sett elever mestre matematikk ved at de fikk forklaring ved bruk av andre representasjoner enn bare symboler.

Som fremtidig lærer ønsker jeg å hjelpe mine elever til å forstå algoritmer og regler, fremfor å pugge de. Derfor vil jeg i denne studien se nærmere på elevers løsning av to oppgaver knyttet til divisjon av brøk og få et inntrykk av hvordan elever på åttende trinn begrunner og resonerer seg frem til sitt svar.

1.2 Forskningsspørsmål

Ønsket mitt om å se nærmere på hvordan elever på et 8. trinn løser forskjellige oppgaver knyttet til divisjon av brøk har bidratt til følgende forskningsspørsmål:

1) *Hvordan begrunner og resonnerer åttende trinns elever i oppgaver med divisjon av brøk?*
   a) *Hvilke representasjoner blir brukt og hvordan blir disse brukt i elevenes begrunnelser og resonnement?*
   b) *Hvilke feil eller mulige misoppfatninger kommer frem i elevenes begrunnelse og resonnement?*

Forskningsspørsmålene gjennomsyres av begrunnelse og resonnement, disse begrepene vil bli redegjort for i kapittel 2.7. I det teoretiske rammeverket vil også de andre begrepene bli definert. Gjennom datainnsamlingen skal det redegjøres for hvilke begrunnelser og resonnement, representasjoner, feil og misoppfatninger elevene bruker og gjør i oppgaveløsning.

1.3 Innsnevring og avgrensing

Arbeidet med temaet brøk, divisjon av brøk, begrunnelse og resonnement, representasjoner, feil og misoppfatninger har vist meg at jeg for denne masteroppgaven har valgt et omfattende tema. Dette har gjort at jeg har måtte foretatt meg spesifiseringer og avgrensinger av temaet på grunn av denne studiens omfang.

Det første valget var knyttet til forskningsspørsmål. Det kunne vært interessant å sett på hvordan elever løser oppgaver knyttet til divisjon av brøk i et samspill med hverandre. Altså sett studien i sammenheng med et sosiokulturelt perspektiv. Som fremtidig lærer ville det også vært spennende å se hva disse funnene sier om undervisningskunnskapen man som lærer må inneha for å gi elevene god kunnskap om divisjon av brøk. Dette er i seg selv omfattende temaer og kunne vært en egen studie, derfor vil dette kun bli sett på i kapittel 7 som avsluttende implikasjoner.

I studiens teoretiske rammeverk har jeg også måtte foretatt valg for å avgrense oppgaven. Brøkbegrepet sammen med de ulike aspektene ved brøkbegrepet kunne også vært beskrevet i større omfang. Da dette ikke er hovedfokus i oppgaven er dette begrenset til å ta for seg det som kommer frem gjennom datainnsamlingen. Det er viktigere for meg at divisjon av brøk blir forklart tydelig da dette er det matematiske temaet studien er knyttet opp mot. Når det gjelder begrunnelse og resonnement og representasjoner er dette et stort tema, i denne studien har det blitt innsnevret til å gjelde underkategorier presentert i en tidligere studie av Bulgar (2002). Feil og misoppfatninger er blitt avgrenset til å gjelde tre ulike under kategorier som er knyttet til divisjon av brøk.

Det har også blitt tatt valg knyttet til innsamling av data. Dette gjelder spesielt antall oppgaver og antall intervjuer som har blitt utført. Slike valg blir beskrevet i studiens metodedel, kapittel 3. Datamaterialet er allikevel stort, derfor ser jeg først på de store linjene i datamaterialet. Deretter blir fokuset innsnevret til å gjelde oppgavebesvarelser knyttet til intervjuede elever, og utdrag fra noen andre oppgavebesvarelser.

1.4 Oppbygging av oppgaven

Når det gjelder oppbyggingen av oppgaven har det blitt tatt en rekke hensyn, det gjelder spesielt oppbyggingen av det teoretiske rammeverket. Denne studien dreier seg om besvarelser elever har svart på, og kunnskap elevene viser gjennom disse og intervjuer. Derfor ble det unaturlig å posisjonere meg selv innenfor noe læringsperspektiv som i tillegg skal gjennomsyre resten av oppgaven. I teoridelen delen er derfor fokuset først rettet mot brøkbegrepet, før jeg tar for meg temaet divisjon av brøk som er hovedtemaet for studien. Grunnen til dette er at brøkbegrepet er en forutsetning for å forstå de ulike algoritmene innenfor brøkregning (Van de Walle, 2004). Multiplikasjon bygger på addisjon, og divisjon bygger på multiplikasjon. Derfor er det naturlig å presentere addisjon og subtraksjon før multiplikasjon og divisjon av brøk. På bakgrunn av at kategoriene begrunnelse og resonnement, representasjoner, feil og misoppfatninger bygger på divisjon av brøk presenteres disse avslutningsvis i det teoretiske rammeverket.

Jeg har valgt å slå sammen studiens resultat og analysedel. Dette er den mest omfattende delen av analysen. For at det skal bli enklere å se de store linjene i sammenheng med analyse av enkelte oppgavebesvarelser blir dette presentert i samme kapittel. Gjennom diskusjonen vil de store linjene, enkelt besvarelser og intervju bli sett på i en sammenheng og diskutert opp mot den presenterte teorien.

2.0 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet vil studiens teoretiske rammeverk bli presentert. Jeg vil først se på brøk og divisjon av brøk sin plass i nåværende og kommende læreplan. Videre tar jeg for meg brøkbegrepet, ulike aspekter knyttet til brøkbegrepet og regneoperasjoner med brøk. I kapittel 2.5 går jeg i dybden på divisjon av brøk som er fokus for denne oppgaven. Til slutt tar jeg for meg begrepene begrunnelse og resonnement, representasjoner og feilkategorier, samt hvordan disse kan knyttes til divisjon av brøk. Det er disse begrepene som danner hovedgrunnlag for studiens resultat og analyse del.

2.1 Introduksjon

I læreplanen for matematikk fellesfag kommer brøk, divisjon og divisjon av brøk under hovedområdet tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2006). Det er derimot ikke slik at elevene ikke møter disse emnene før skolestart, barn opplever for eksempel fra tidlig alder divisjon gjennom å dele ting likt. De fleste barn har nok også hørt uttrykk som en halv liter melk eller et kvarter (Birkeland, Venheim & Breiteig, 2011). Før skolealder har altså elevene gjort seg opp ideer og erfaringer om brøk (Litwiller & Bright, 2002).

I norsk skole møter elevene både divisjon og brøk de første årene i grunnskolen, etter andre årstrinn skal elevene kunne halvere og vite hva det ligger i nettopp dette begrepet (Utdanningsdirektoratet, 2006). Det blir da lærerens oppgave å kombinere den konstruerte kunnskapen eleven har fra før med ny kunnskap slik at elevene gjennom skolen utvikler sin kunnskap om brøk, divisjon og divisjon av brøk (Litwiller & Bright, 2002). Videre skal elevene bruke sin konstruerte kunnskap og kunnskapen fra de første årene på skolen til å kunne bruke enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger, uttrykke tallstørrelser på varierte måter, samt regne med brøk og plassere de på tallinja. Når elevene er ferdig med grunnskolen altså etter tiende årstrinn er det disse områdene innenfor brøk elevene skal ha kunnskap om:

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne
>
> - samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege (Utdanningsdirektoratet, 2006)
> - rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Ettersom det fra 2020 vil komme en ny og gjeldende læreplan er det verdt å spørre seg om brøk og divisjon av brøk fortsatt vil være et viktig og aktuelt tema i grunnskolen. I høringsutkastet til denne blir divisjon særlig vektlagt på fjerde trinn, mens etter femte trinn blir brøk spesifikt nevnt for første gang. Etter syvende trinn står det at elevene skal kunne regne med brøk og brøkregning blir også nevnt i kompetansemålene etter åttende trinn. (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette viser at selv om det kommer en ny læreplan vil brøk og divisjon være aktuelt i grunnskolen. Det er derfor viktig å fortsatt ha fokus på dette emnet som alltid har vært en utfordring for elevene (Van de Walle, 2004). Bondø (2010) understreker også at mange elever opplever brøk som vanskelig og at de sliter med å huske regneoperasjonene. Van de Walle (2004) skriver at elevene tar med seg den manglende forståelsen av brøkbegrepet videre og at dette skaper vanskeligheter når de møter regneoperasjoner med brøk. På bakgrunn av dette vil jeg ta for meg brøkbegrepet og ulike aspekter knyttet til dette.

2.2 Brøk som begrep og matematiske begreper knyttet til brøk

I følge Van de Walle (2004) forbinder elever som oftest brøk med rettferdig deling når de begynner på skolen. Svært få klarer å se sammenhengen med divisjon av hele tall. Det første målet for elevene bør derfor være å forstå ideen om «*fractional parts of the whole* – the parts that result when the whole or unit has been partioned into *equal-sized portions* or *fair shares*» (Van de Walle, 2004, s. 243). Videre vil elevene møte mange forskjellige brøkbegreper gjennom sin skolegang, matematikk.net definerer brøk på følgende måte:

> En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek betyr det samme som deletegn. En brøk er en del av noe. Hvor stor del kommer an på teller og nevner. Nevneren forteller hvor mange deler helheten er delt opp i (Matematikknett, 2019) .

I denne definisjonen ser vi altså at brøkstrek og deletegn omtales som det samme. Birkeland, Venheim og Breiteig (2011) definerer derimot brøk som at «en brøk a/b er svaret på divisjonsoppgaven a : b» (Birkeland et al., 2011, s. 189). Dette er tre svært ulike måter å definere brøk på som alle er riktige. Dermed vises kompleksitetene brøkbegrepet har tydelig. Denne kompleksiteten og mangfoldet av betydninger i ulike sammenhenger viser hvorfor brøk kan oppleves utfordrende for mange elever (Birkeland et al., 2011). I tillegg opplever mange elever at brøksymbolikken er villedende og vanskelig å huske (Van de Walle, 2004). Derfor ønsker jeg å omtale noen matematiske begrep som er knyttet til brøk.

2.2.1 Teller, nevner og brøkstrek

En brøk er et tall som er satt sammen av to tall og en brøkstrek. Tallene står skrevet over hverandre med en strek imellom, det er denne streken vi kaller brøkstrek. Tallet over brøkstreken kalles teller, mens tallet under kalles nevner (Birkeland et al., 2011). En brøk kan gjøres om til desimaltall ved å dele teller på nevner, dermed har brøkstreken samme funksjon som et divisjonstegn (Bue, Engeseth & Solvik, 2000). I Van de Walle (2004) blir teller og nevner forklart med topp-tall og bunn-tall på følgende måte (egen oversettelse):

- Topp-tallet: Dette er telle-tallet. Det forteller hvor mange deler vi har. Det forteller hvor mange som har blitt telt. Det forteller hvor mange deler vi snakker om. Det teller delene.
- Bunn-tallet: Forteller hva som blir telt. Det forteller hvilke brøkdeler som telles. Hvis det er 4, betyr det at vi teller fjerdedeler; Hvis det er 6, teller vi seksdeler osv. (Van de Walle, 2004, s. 248).

2.2.1 Ekte brøk og stambrøk, uekte brøk, blandet tall

Bue et al. (2000) skriver at man i brøkregning skiller mellom ekte brøk, uekte brøk og blandet tall. En ekte brøk er et tall mellom null og en, for eksempel $\frac{2}{3}$. Blandet tall derimot har en heltallsdel og en brøkdel som er en ekte brøk, for eksempel $2\frac{1}{3}$. En uekte brøk er et tall som har høyere tall i teller enn nevner, for eksempel $\frac{23}{5}$. En uekte brøk kan gjøres om til blandet tall og blandet tall kan gjøres om til uekte brøk. Eksempel: $2\ \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ og $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$. I denne studien er det også viktig å definere begrepet stambrøk. En stambrøk eller unit fraction på engelsk «is a single fractional part» (Van de Walle, 2004, s. 250). Det vil si en brøk med en i teller som for eksempel $\frac{1}{3}$. Altså er en stambrøk en ekte brøk, men en ekte brøk er ikke nødvendigvis en stambrøk.

2.3 Ulike aspekter ved brøkbegrepet

Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) hevder at brøk er et av det mest komplekse konseptet som elver møter i grunnskolen, de peker på at en mulig årsak til dette kan være at brøk begrepet er så mangfoldig. Birkeland et al. (2011) understreker også dette gjennom at brøk kan ha forskjellig betydning i ulike sammenhenger som vi møter i hverdagslivet. Videre vil jeg derfor presentere ulike aspekter ved brøkbegrepet, flere av disse aspektene kan bli berørt i arbeidet med forskjellige brøkoppgaver.

2.3.1 Brøk som del av det hele

Tidligere har det blitt påpekt at elevene i møte med brøk først bør oppfatte ideen om brøk som del av det hele (Van de Walle, 2004). Dette og konseptet om rettferdig deling er fundamentet til å forstå de fire andre konseptene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Å oppfatte brøk som del av det hele innebærer også at elevene må forstå at brøk handler om å finne et forhold mellom delen og det hele, heller enn å finne en størrelse (Van de Walle, 2004).

I oppgavesettet som elevene har løst, kommer brøk som del av det hele til uttrykk gjennom å gjenkjenne hva som er enheten. Når elever møter brøk må de oppfatte at enheten kan bestå av mer enn et objekt. «The unit 'one' always referred to a single object. In fractions, however, the unit may consist of more than one object or it might be a composite unit, that is, it may consist of several objects packaged as one» (Lamon, 2012, s. 21). Noen elever ser ikke at enheten endrer seg i løpet av oppgavesettet og at meter og gaver representerer hver sin enhet. Lamon (2012) understreker viktigheten av å identifisere enheten og være sikker på at hver brøk er tolket med betingelsen om enheten. På den måten kan man sammenligne brøker, det kan man ikke hvis de er basert på forskjellig enhet.

2.3.2 Brøk som måling

Brøk som måling er et aspekt som kan knyttes til to forskjellige, men sammenhengende oppfatninger. Den første handler om at brøk blir sett på som et tall, det vil si mengden som blir beskrevet gjennom brøken. Altså hvor stor er brøken. Den andre oppfatningen handler om måling av et intervall, man definerer en stambrøk og repeterer den for å bestemme en distanse fra et gitt startpunkt. $\frac{3}{4}$ tilsvarer for eksempel distansen av 3 ($\frac{1}{4}$ enheter) fra et gitt punkt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I oppgavesettet kommer dette til uttrykk gjennom tegninger og andre begrunnelser og resonnement elevene har brukt i oppgavene. I følge Van de Walle (2004) og kompetansemålene i LK06, skal eleven vite hvor stor en brøk er og enkelt fortelle hvilke av to brøker som er størst eller minst. Å ha kontroll på dette vil hjelpe elevene i videre arbeid med brøk. Hvis eleven kan sammenligne sitt svar med andre tall i oppgaven kan de få et inntrykk av om svaret er riktig eller ikke.

2.3.3 Brøk som divisjon

«Any fraction can be seen as the result of a division situation» (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 299). Det vil si at 3:8 eller $\frac{3}{8}$ både representerer en regneprosess, noe som skal regnes ut, og gi et svar. På den andre siden er det som vi har sett tidligere, forholdet mellom 3 og 8 og et tall. «Når brøkene er tilgjengelige som tall, kan vi alltid dividere to hele tall med hverandre, bortsett fra å dividere med null» (Birkeland et al., 2011, s. 189). Hvis elevene mestrer brøk på denne måten vil det gi de muligheten til å bruke forskjellig notasjoner avhengig av den matematiske sammenhengen og de får et annet verktøy til å avdekke størrelser på mengde. I datainnsamlingen kan dette observeres gjennom at elever gjør om brøken til desimaltall før de utfører en regneoperasjon.

2.3.4 Brøk som operator

En slik oppfatning av brøkbegrepet innebærer at selve brøken beskriver en operasjon som må gjøres. Altså blir brøkene betraktet som funksjoner brukt på tall, objekt eller sett. Å mestre dette konseptet innebærer at en elev kan skrive brøkdels multiplum på ulike måter, $\frac{3}{4}$ kan skrives som 3 • ($\frac{1}{4}$ av en enhet) eller $\frac{1}{4}$ • 3 enheter. Brøk som operator innebærer altså sammenligning av to størrelser, der den ene er en brøkdel av den andre (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

«Estimation of fraction computations is tied almost entirely to concepts of the operations of fractions» (Van de Walle, 2004, s. 264). Ut fra dette ser man at brøk representerer en instruksjon for å utføre en handling. Videre skriver han at dette innebærer operasjoner innen tre kategorier, addisjon og subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Van de Walle, 2004).

2.3.5 Brøk som forholdstall

Å oppfatte brøk som forhold innebærer sammenligning mellom et ordnet par av tall eller målinger (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Van de Walle, 2004). Forhold kan skrives som 1 : 3 eller $\frac{1}{3}$. Vi ser altså at forhold faller helt sammen med brøkregning, men hvis vi skal blande noe i forholdet 1 : 3, har vi ikke $\frac{1}{3}$ av noe vi har $\frac{1}{4}$ av noe og $\frac{3}{4}$ av noe annet (Birkeland et al., 2011).

2.4 Regneoperasjoner med brøk

I løpet av grunnskolen lærer elever algoritmer for de ulike regneoperasjonene med brøk. En algoritme kan defineres som «en steg for steg prosess som garanterer riktig svar til et gitt problem, gitt at stegene er utført riktig» (Morrow, 1998, s. 69). Gjennom historien har algoritmer spilt en viktig rolle i utvikling av matematisk forståelse (Morrow, 1998). I læreboken som elevene i denne studien bruker, blir regelen/algoritmen for de ulike regneoperasjonen med brøk presentert med en gang elevene møter en ny regneoperasjonen (Hjardar & Pedersen, 2014a) Van de Walle (2004) hevder derimot at fremfor å presentere regler og algoritmer for regneoperasjonene bør man begynne med enkle oppgaver som inneholder en kontekst slik at elevene kan utvikle sine egne metoder for regning med brøk.

> Premature attention to rules for fraction computation has a number of serious drawbacks. None of the rules helps students think about the operations and what they mean. Armed only with rules, students have no means of assessing their results to see if they make sense (Van de Walle, 2004, s. 265).

Kunnskap og forståelse av brøk er det viktigste grunnlaget for å mestre brøkregning, allikevel bør man knytte sammen regning med brøk og hele tall. I tillegg bør estimering, uformelle metoder og bruk av modeller prege undervisning av regning med brøk. Med en slik start vil elevene gradvis utvikle mer standard metoder og algoritmer for å regne med brøk fremfor å pugge de fra begynnelsen (Van de Walle, 2004).

2.4.1 Addisjon og subtraksjon av brøk

Mange lærere forteller sine elever vanligvis at for å addere eller subtrahere brøker må du først finne felles nevner (Van de Walle, 2004). I Faktor 8, som er læreboka til elevene i denne, studien, presenteres addisjon og subtraksjon av brøk på en lignende måte: «Når vi skal addere eller subtrahere brøker med ulike nevnere må vi først utvide eller forkorte brøkene slik at de får felles nevner» (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 61). Utfordringen og vanskelighetene med en slik algoritme er at noen elever aldri lærer algoritmen. For de elevene som lærer seg algoritmen er det mange som ikke oppfatter hvorfor de gjør de ulike stegene i den og de klarer ikke å se når algoritmen kan brukes for å løse et problem (Morrow, 1998). For å kunne bruke regelen må eleven først og fremst forstå hva addisjon og subtraksjon betyr, de må også forstå ordene og hva det vil si å utvide og forkorte. Begrepet fellesnevner må også være kjent og elevene må vite hvordan felles nevner kan finnes.

Van de Walle (2004) peker også på at en slik regel eller algoritme heller ikke er riktig fordi elever gjennom å bruke egne strategier kan få riktig svar uten å finne felles nevner. Elevene skal gjennom undervisningen forstå hva det betyr å addere og subtrahere brøker, at nevneren betegner antall deler og telleren type deler. I tillegg skal eleven kunne vurdere hva som er en fornuftig løsning på et problem. Dette er lettere hvis elevene har utviklet sine egne strategier, da kan man som lærer hjelpe elevene slik at disse strategiene kan generaliseres (Morrow, 1998; Van de Walle, 2004). Ved en slik undervisningsmetode kan elevene lære å tenke og resonere rundt matematiske situasjoner, og de vil huske å ta med seg forståelsen i møte med de andre regneoperasjonene med brøk (Morrow, 1998).

2.4.2 Multiplikasjon av brøk

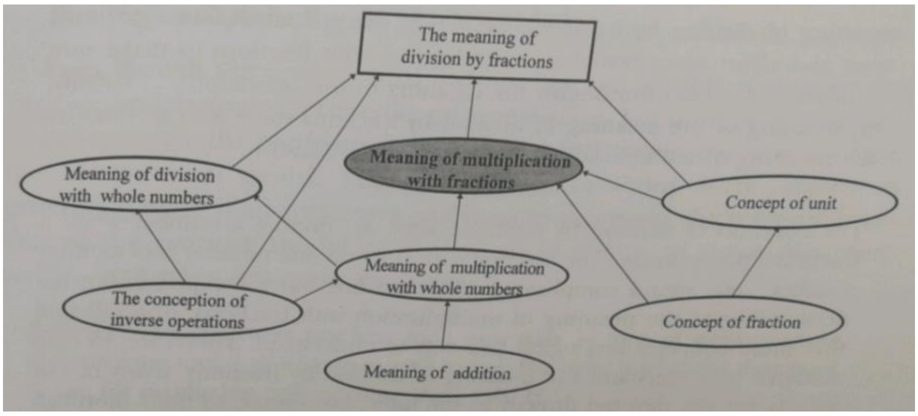
«Å multiplisere to brøker er teknisk enklere enn å addere. Det er «bare» å gange teller med teller og nevner med nevner» (Birkeland et al., 2011, s. 198). På samme måte blir multiplikasjon av brøk presentert i Faktor 8, men her møter elevene også en regel for multiplikasjon av brøk med heltall «Vi multipliserer et helt tall med en brøk ved å multiplisere det hele tallet med telleren og beholde nevneren» (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 74). Dersom målet er at elevene skal forstå reglene og skape varig og fleksibel kunnskap er det som med addisjon og subtraksjon ikke riktig å drille inn en slik regel (Birkeland et al., 2011). Som lærer bør man introdusere elevene for ulike multiplikasjons problemer, man bør starte på hele tall og la eleven oppfatte at 3•5 betyr 3 sett av 5. Deretter bør man fortsette med hele tall og brøk, da blir det lettere for elevene å forstå multiplikasjon med to brøker (Van de Walle, 2004).

Gjennom en slik prosess er det viktig at elevene får løse problemene på sin egen måte å bruke modeller og tegning som de selv ønsker. Det eneste man som lærer bør forlange er at elevene kan forklare deres resonnement. I møte med multiplikasjon av brøk vil det være nyttig for elevene å huske at nevneren også er en divisor, dette åpner for å finne en del av den andre faktoren (Van de Walle, 2004). I det neste avsnittet vil det komme frem hvor viktig det er å kunne multiplikasjon av brøk for å kunne forstå og bruke divisjon av brøk.

2.5 Divisjon av brøk

«Når vi dividerer en brøk med en brøk, multipliserer vi den første brøken med den omvendte av den andre» (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 77). Van de Walle (2004) hevder at dette er en av de mest mystiske reglene i elementær matematikk. Divisjon blir sett på som den vanskeligste av de fire regneoperasjonene, mens brøker er de mest komplekse tallene elevene møter i grunnskolen. Derfor blir divisjon av brøk sett på som en av de vanskeligste temaene i grunnskolen (Bulgar, 2002; Ma, 2010). Samtidig sies algoritmen å være den mest mekaniske og minst forståtte algoritmen i grunnskolematematikk (Tirosh, 2000).

Ma (2010) har forsket på amerikanske og kinesiske læreres evne til å utføre divisjon av brøk, hvordan de gir algoritmen mening og deres forståelse av divisjon av brøk. I denne studien kom det for eksempel frem at kun 1 av de 23 amerikanske lærerne klarte å komme opp med en riktig tekstoppgave eller problem til et regnestykke med divisjon av et blandet tall med en stambrøk. De fleste klarte derimot å regne ut regnestykket ved å bruke algoritmen. Det å pugge en regel uten å forstå den som disse amerikanske lærerne har gjort vil i følge både Van de Walle (2004) og Birkeland et al. (2011) verken gi lærerne eller elevene en varig og fleksibel forståelse. Allikevel viste lærerne i Ma (2010) studie om mange ulike konsepter, som de så på som viktig å ha kunnskap og forståelse om, for å forstå divisjon av brøk. Disse konseptene er satt inn i det Ma (2010) kaller en kunnskapspakke (figur 1).



Figur 1: Kunnskapspakke for å forstå meningen av divisjon med brøk (Ma, 2010).

«You should see a knowledge "package" when you are teaching a piece of knowledge. And you should know the role of the present knowledge in that package» (Ma, 2010, s. 18). Hvilke kunnskaper som skal inn i kunnskapspakken vil variere fra lærer til lærer og hvordan elever man har. Hensikten med kunnskapspakken er altså ikke at man skal pakke sammen konsepter for hvert emne, men at man skal være klar over at ulike konsepter støtter opp om hverandre og at å lære et matematisk emne ikke er isolert fra å lære andre emner. I denne kunnskapspakken er multiplikasjon (farget grått) et nøkkelpunkt, og ifølge mange av lærerne som ble intervjuet nødvendig for å forstå divisjon av brøk.

> The meaning of multiplication with fractions is particularly important because it is where the concepts of division by fraction are derived… Given that our students understand very well that multiplying by a fraction means finding a fractional part of a unit, they will follow the logic to understand how the models of its inverse operation work (Ma, 2010, s. 77).

Elever må oppfatte sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, ikke bare som inverse operasjoner, men også se elementer som en gruppe og koble delen og det hele. Dette danner et essensielt grunnlag for å forstå brøk og divisjon av brøk (Birkeland et al., 2011; Jong & Magruder, 2014). Ut fra sitatet og figuren ser man også at elevene må ha kunnskap om enhet begrepet. Det samme gjelder inverse operasjoner. Også multiplikasjon med hele tall og addisjon er nevnt som konsepter elevene bør være kjent med. De to siste konseptene; divisjon av hele tall og brøkbegrepet nevnes også av Van de Walle (2004) og Morrow (1998) som essensielle for å tilegne seg kunnskap om divisjon av brøk.

2.5.1 Måling- og delingsdivisjon

> «For division by a fraction, the two ways of thinking about the operation-partition and measurement are extremely important. The partition or fair-sharing concept of division will lead to a very different division procedure than will the measurement or repeated subtraction concept» (Van de Walle (2004, s. 264).

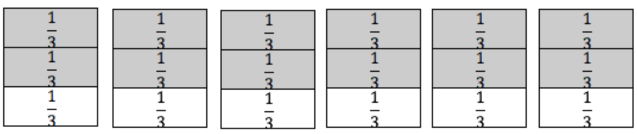
På bakgrunn av dette og at jeg i min datainnsamling bevisst har valgt en målings- og delingsdivisjonsoppgave vil jeg ta for meg begrepene målings og delingsdivisjon.

Gjennom å legge vekt på å representere divisjon på flere måter og la elever møte divisjon i ulike sammenhenger kan man legge til rette for at elevene får en konseptuell forståelse for divisjon (Lamberg & Wiest, 2012). Kjennskap til både måling- og delingsdivisjon vil hjelpe elever til å oppfatte situasjoner og problemer hentet fra den virkelige verden og styrke forståelsene av sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. Møte med brøk, regneoperasjoner og spesielt divisjon av brøk kan oppleves lettere på grunnlag av god bakgrunns kunnskap (Jong & Magruder, 2014).

Når elever møter divisjon på skolen har de en oppfatning av dette fra før, og de fleste elevene kjenner til delingsdivisjon og rettferdig deling. Mange finner derfor denne typen divisjon enklere å forstå (Lamberg & Wiest, 2012). Et typisk eksempel på en oppgave elevene får eller kan lage selv er: 24 epler skal deles på 4 personer, hvor mange epler får hver? Forholds problemer er også eksempler på delingsdivisjon: Du går 21 km på 3 timer, hvor mange km går du per time? Det som kjennetegner begge disse problemene er at de spør, hvor mange er en? (Van de Walle, 2004). Det hele (24 epler eller 21 km) er i disse oppgavene dividenden, antall grupper (4 personer og 3 timer) er divisoren og antall elementer i én gruppe er kvotienten eller svaret (Jong & Magruder, 2014).

I målingsdivisjon er fortsatt det hele, altså dividenden kjent for oss. Vi kjenner også hvor mange det er i hver delmengde, antall i én som nå er divisoren. Antall delmengder/grupper er nå det vi skal finne, altså kvotienten eller svaret (Birkeland et al., 2011; Jong & Magruder, 2014). Et eksempel på en slik type oppgave, som elevene også vil møte lignende av i oppgaver, med divisjon av brøk er: «Du har 18 liter limonade som skal fylles på flasker som holder 3 liter hver, hvor mange flasker kan du fylle? (Birkeland et al., 2011; Van de Walle, 2004). Mange elever tilnærmer seg slike oppgaver gjennom gjentagende subtraksjon. En slik tankegang ville kommet til uttrykk gjennom at man tenker hvor mange ganger kan 3 subtraheres fra 18 (Birkeland et al., 2011; Jong & Magruder, 2014). Selv om de fleste elever oppfatter divisjon lettest gjennom delingsdivisjon er det essensielt å presentere målingsdivisjon i ulike oppgaver også, da denne er viktig for å tilegne seg kunnskap om divisjon av brøk. Faktisk er det slik at flesteparten av alle oppgaver knyttet til divisjon av brøk, som elever vil møte, er målingsdivisjon (Jong & Magruder, 2014; Van de Walle, 2004).

I oppgavesettet jeg har utarbeidet for datainnsamlingen til denne studien møter elevene i oppgave 1 målingsdivisjon der alle deloppgavene er knytet til et naturlig tall som dividend og brøk som divisor. I faktor åttes oppgavebok møter elevene følgende oppgave: «Herman og Sara har plukket 6 liter tyttebær. De skal fryse bærene i bokser som rommer $\frac{2}{3}$ liter. Hvor mange beholdere trenger de?» (Hjardar & Pedersen, 2014b, s. 48). Van de Walle (2004) peker på at den største utfordringen elever har med en slik oppgave er å se dette som $6 \div \frac{2}{3}$. En måte mange elever vil løse denne oppgaven er å tegne 6 ting delt inn i 3 og telle hvor mange sett av $\frac{2}{3}$ man kan finne.



Figur 2: Viser eksempel på hvordan tegning kan løse målingsdivisjons oppgave.

I tegningen (figur 2) er det tegnet seks bokser som er delt inn i tre, hver del er $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$ av hver boks er skravert, disse tilsvarer én beholder og derfor har man seks beholdere. Videre har man da $\frac{1}{3}$ igjen av hver boks, det tilsvarer tre hele beholdere. Dermed er svaret på oppgaven ni beholdere.

En annen måte å løse målingsdivisjonsoppgaver er som nevnt ved å bruke gjentagende subtraksjon. Da finnes først felles nevner, i oppgaven over ville det blitt $\frac{18}{3} \div \frac{2}{3}$. Da er svaret det samme som heltall problemet $18 \div 2$ som gir svaret ni (Van de Walle, 2004). Hvis oppgaven hadde inneholdt en rest, som for eksempel at det var $\frac{1}{3}$ liter til overs kan dette skape problemer for elevene. Da må de oppfatte at det er $\frac{1}{2}$ beholder og ikke $\frac{1}{3}$ beholder som elevene kan mene at tegningen viser. På bakgrunn av dette bør elever, fra de møter divisjon både med hele tall og brøk, bli introdusert for begrepet rest. Hvis oppgavene og situasjonene elevene møter er konkrete, vil dette være noe elevene oppfatter (Lamberg & Wiest, 2012).

Når eleven møter delingsdivisjons oppgaver med brøk, er det viktig og hjelpsomt at elevene kjenner til at man spør hvor mange er én, og ikke bare at delingsdivisjon handler om rettferdig deling (Van de Walle, 2004). Videre nevnes det at når elevene møter oppgaver der dividenden er blandet tall eller brøk og divisoren er et helt tall vil mange elever klare å forstå dette som rettferdig deling situasjoner og de mestrer å løse det. Det er når elevene møter brøk som divisor at problemer ofte oppstår. Da vil modellen de tidligere har brukt for rettferdig deling bli vanskeligere å bruke (Van de Walle, 2004).

Van de Walle (2004) gir blant annet følgende problem som eksempel for delingsdivisjon «Aidan fant ut at om hun går veldig fort i løpet av hennes morgentrening, kan hun dekke $2\frac{1}{2}$ miles på $\frac{3}{4}$ time. Hun lurer på hvor fort hun løper i miles per time» (Van de Walle, 2004, s. 275). I denne oppgaven spørres det spesifikt etter miles per time. Elever kan derfor forstå at de skal dele antall miles på deler av timen for å få miles per time. Hvis oppgaven hadde vært for eksempel: $\frac{1}{2}$ kake fyller $\frac{3}{5}$ av en boks. Hvor mye kake trengs for å fylle hele boksen? Da kan det være vanskelig å forstå at oppgaven handler om divisjon (Cengiz & Rathouz, 2011). Også i slike oppgaver kan elever slite med å forstå hvordan regnestykke skal se ut, altså $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$. I denne typen oppgaver skriver Van de Walle (2004) at man først skal finne mengden av $\frac{1}{5}$. Altså hvor mye kake som fyller $\frac{1}{5}$ av boksen. Deretter verdien av en hel, altså hvor mye som fyller $\frac{5}{5}$ av boksen. Oppgaven kan løses slik med tegning:

$\frac{1}{2}$ kake

Kake	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Boks	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	

Figur 3: Viser hvordan tegning kan være med å løse delingsdivisjonsoppgave.

Tegningen (figur 3) viser at $\frac{1}{2}$ kake passer i $\frac{3}{5}$ av en boks. Ved å dele $\frac{1}{2}$ på 3 finner vi hvor mye kake som passer i $\frac{1}{5}$ av en boks. For å finne hvor mye kake som passer i én boks multipliserer vi $\frac{1}{6}$ med 5 og får at $\frac{5}{6}$ av en kake passer i en boks. Morrow (1998) forklarer også hvordan en slik oppgave kan løses med forholdstabell. En slik tabell er et representasjonsverktøy som elevene kan organisere arbeidet sitt for å løse problemer. En slik tabell gir elevene fleksibilitet fordi de kan manipulere forhold gjennom addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon til de får riktig svar. Figur 4 viser hvordan en slik tabell for miles oppgaven ville sett ut:

$\div 3$ $\bullet 4$

Miles	$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6} = 3\frac{1}{3}$
Timer	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

$\div 3$ $\bullet 4$

Figur 4: Viser hvordan forholdstabell kan løse delingsdivisjonsoppgave.

Fra disse to ulike måtene å representere løsning på oppgaven ser vi at begge gir mening til algoritmen for divisjon av brøk om å snu divisoren for deretter å multiplisere brøkene. Hvis algoritmen skal brukes på miles oppgaven ville det sett slik ut: $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \bullet \frac{4}{3} = \frac{20}{6} = 3\frac{2}{6}$ $= 3\frac{1}{3}$.

I denne teksten har målingsdivisjon og delingsdivisjon bli tatt opp hver for seg. Når elever møter divisjon med brøk i klasserommet bør problemer for modellene blandes. Ved å la elevene prøve seg frem vil de komme frem til ulike begrunnelser og resonnementer som gir riktig svar. De ulike begrunnelsene bør gradvis generaliseres slik at elevene til slutt kan bruke enten fellesnevner algoritmen eller snu divisoren og multipliser algoritmen. Hvordan elever utfører en operasjon spiller liten rolle så lenge resonnementet gir mening, er riktig og nøyaktig (Van de Walle, 2004).

2.6 Begrunnelse og resonnement

Begrunnelse og resonnement i denne studien tilsvarer de engelske ordene «justification» og «reasoning». Å kunne begrunne er en viktig del i matematikken og innebærer å engasjere seg i å skape og utrykke egne begrunnelser og matematiske argumenter. I matematikkundervisning er det viktig å bygge på elevers egne begrunnelser og argumenter for å skape forståelse (Brodie, 2010). Dette henger sammen med Van de Walle (2004) som understrekte at regneoperasjoner i brøk ikke bør introduseres gjennom algoritmer. Elevene bør heller prøve å komme frem til løsning på problemer basert på tidligere kunnskap.

Resonnement henger sammen med begrunnelse og kan defineres slik: «Mathematical reasoning refers to the ability to analyse mathematical situations and construct logical arguments» (Kaur & Toh, 2012, s. 2). Å resonnere matematisk og å begrunne svar er svært viktige ferdigheter i matematikk og innebærer å forklare hvorfor et svar eller resultat er riktig. Det er også viktig for å bli selvstendige tenkere slik at de kan evaluere sine egne og andres svar. Å kunne resonnere og begrunne fører også til at elevene kan se sammenhenger mellom ulike områder innenfor matematikken, matematikk og andre fag, samt matematikk og dagliglivet (Kaur & Toh, 2012; Thompson, 2012).

I den norske læreplanen kommer begrunnelse og resonnement til uttrykk gjennom de grunnleggende ferdighetene. Spesielt innenfor muntlige ferdigheter, å kunne skrive og å kunne regne. I denne studien kommer begrunnelse og resonnement først og fremst frem gjennom å kunne skrive og å kunne regne. «Skriving i matematikk er ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring» (Utdanningsdirektoratet, 2006). Elevene skal kunne løse problemer og presentere løsninger ved å beskrive og forklare tankegangen sin med symboler og det matematiske språket. Gjennom å regne skal elevene «bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem» (Utdanningsdirektoratet, 2006).

2.6.1 Tidligere forskning på begrunnelse og resonnement

Bulgar (2002) har gjort en studie av hvordan fjerdeklasse elever i USA bygger deres egne ideer om regning med brøk fremfor hvordan de bruker de ulike algoritmene. På bakgrunn av observasjoner og elevbesvarelser ser hun på hvordan begrunnelse og resonnement elevene bruker. Disse deles inn syv ulike underkategorier, representasjoner, motsigelse, gjenkjennelse av mønster, naturlige tall, og metaforer og paradigmer. I denne studien har jeg valgt å utelukke den siste, samtidig som jeg vil ta for meg representasjoner som en egen kategori i kapittel 2.7. Selv om disse begrunnelsene og resonnementene er klart avgrenset og vil bli presentert hver for seg, er det viktig å huske at elevene kan bruke forskjellig begrunnelse og resonnement på ulike oppgaver og også en kombinasjon av flere begrunnelser og resonnement i samme oppgave. Dette vil komme frem i resultat og analyse delen av denne studien.

2.6.2 Begrunnelse og resonnement som involverer motsigelse

I Bulgar (2002) heter denne underkategorien «Justification and reasoning involving contradiction» (Bulgar, 2002, s. 229). I en artikkel av Yankelewitz, Mueller og Maher (2010) som bygger på en oppgave brukt i Bulgars studie blir denne koden beskrevet som at elever setter en øvre og nedre grense for hva svaret kan være og resonnerer seg frem mot et svar ved å bruke disse grensene. Dette involverer motsigelse fordi eleven tror det finnes et svar som er mellom disse grensene, men så viser det seg at det ikke finnes allikevel. Denne underkategorien blir ikke nevnt videre i studien da ingen elever bruker den i sine besvarelser.

2.6.3 Begrunnelse og resonnement som involverer gjenkjennelse av mønster

Denne underkategorien heter i den opprinnelige studien «Justification and reasoning involving the recognition of patterns» (Bulgar, 2002, s. 229). Å kjenne igjen mønster kan som Thom (2011) skriver bety å kjenne igjen regelmessigheter og strukturer ved figurer. I oppgavesettet som er laget til denne studien kommer begrunnelse og resonnement som involverer gjenkjennelse av mønster til uttrykk gjennom at elever kjenner igjen regelmessigheter og strukturer i oppgavene. Elevene ser likheter mellom oppgavene og oppdager et mønster på hvordan de kan løses.

2.6.4 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlige tall

Dette er den første av tre koder som vektlegges i Bulgars (2002) studie og heter «Justification and reasoning involving natural numbers» (Bulgar, 2002, s. 278). I den opprinnelige studien er dette en av de mest brukte begrunnelsene og resonnementene og brukes av 33,3% av elevene. Når elevene bruker en slik begrunnelse, argumenterer de for svaret sitt gjennom å gjøre om for eksempel en meter til 100 cm og dividere på nevneren i brøken, for eksempel 2, 3 og 4. Ved å løse oppgaven på en slik måte viser de også en forståelse for at for eksempel $\frac{1}{3}$ meter innebærer å dividere med 3. Selv om elevene viser kunnskap om brøk, er det naturlige tall som er hovedbegrunnelsen da elevene gjør om m til cm (Bulgar, 2002). Det er også viktig å huske på at å gjøre om til en annen måleenhet enn centimeter, for eksempel desimeter innebærer å bruke begrunnelse og resonnement som involverer naturlige tall.

2.6.5 Begrunnelse og resonnement som involverer måling
Dette er den andre koden som beskrives i Bulgars (2002) studie, og er opprinnelig kalt «Justification and reasoning involving measurement» (Bulgar, 2002, s. 229). 16,8% av elevene bruker denne begrunnelsen og resonnementet i den opprinnelige studien. Å løse oppgaven på en slik måte innebærer at elevene lager seg et målingsverktøy (Bulgar, 2002). Et eksempel på dette kan være at elevene tar det hvite innpakningsbåndet som er en meter og deler det inn i ønsket antall deler, for eksempel to deler. Da har de et entodels målingsverktøy. Når de skal finne hvor mange 1/2 metere du får av et 2 eller 3 meters bånd kan dette legges inntil. Deretter kan elevene telle hvor mange ganger det kan legges inntil (Bulgar, 2002). I denne studien kan ikke elevene bruke konkreter for å uttrykke dette. Allikevel er det viktig å inkludere måling som underkategori, fordi elevene kan uttrykke det sammen gjennom bruk av tegning eller språk.

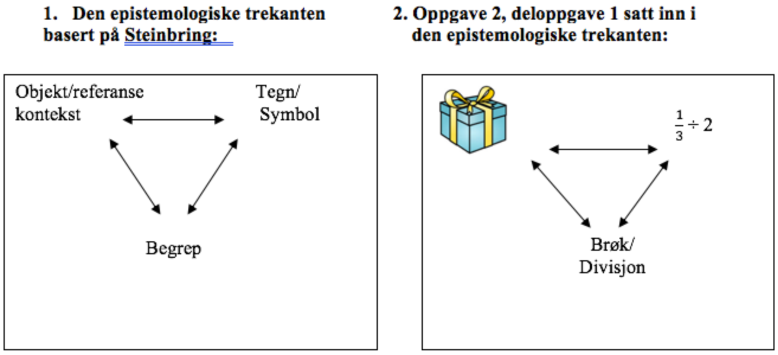
2.6.6 Begrunnelse og resonnement som involverer brøk
Dette er den tredje koden som det blir lagt vekt på av Bulgar (2002) og kalles «Justification and reasoning involving fractions» (Bulgar, 2002, s. 229). 32,5% av elevene i den opprinnelige studien brukte en form for kunnskap om brøk som hovedbegrunnelse. Disse elevene forstår for eksempel at hver meter inneholder et likt antall brøkdeler og multipliserte dette tallet med antall meter. Når elevene senere i studien møtte på andre brøker enn stambrøk fikk noen elever problemer fordi det var vanskelig å forstå for eksempel hvor mange $\frac{2}{3}$ det var i en meter (Bulgar, 2002). I denne studien har elevene tidligere vært introdusert for brøkbegrepet og regneoperasjonene med brøk. Eleven har også så vidt møtt likninger med brøk. Derfor vil brøk som begrunnelse og resonnement igjen innebære bruk av forskjellige argumenter.

2.7 Representasjoner
Matematikken har sitt eget språk, der både ord og tegn har egne betydninger. Dette kan være en utfordring for mange elever når de skal lære matematikk. For eksempel har ord som fellesnevner, stambrøk, blanda tall og ekte brøk egen betydning i matematikkverden, mens de gir liten betydning i andre sammenhenger. Samtidig blir det også i matematikken benyttet ulike semiotiske tegn, det vil si tegn som representerer noe annet enn seg selv. $\frac{1}{3}$ kan for eksempel representere $\frac{1}{3}$ meter i en sammenheng, mens $\frac{1}{3}$ innpakningsbånd i en annen sammenheng. Også tegninger brukes i matematikken, det kan være konkrete tegninger av ulike objekter, men det kan også være tegninger, figurer, grafer, tabeller, skisser og diagram som er tilpasset en situasjon og brukes for å løse et problem (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Felles for både ord, tegn og tegninger er at de er det Duval (2006) kaller semiotiske representasjoner. Det er kun gjennom semiotiske representasjoner man kan få tilgang på en matematisk idé. Altså er semiotiske representasjoner alle mulige måter vi kan representere matematiske ideer på. Bruk av representasjoner er kjernen av matematisk forståelse og brukes som et verktøy for å produsere ny kunnskap og for å kommunisere mentale representasjoner, altså uttrykke kunnskap (Duval, 2006). I Bulgars studie blir ulike representasjoner studert gjennom observasjon og elevbesvarelsene. I denne studien har jeg lagt mest vekt på representasjoner som kan uttrykkes gjennom de skriftlige besvarelsene og disse vil nå bli presentert.

2.7.1 Symboler og tegn
Symboler og tegn er et av språksystemene som brukes i matematikken. Skolematematikken er spesielt avhengig av symbol-og tegnbruk. Allikevel oppleves bruk av tegn og symboler som utfordrende for mange elever. Den epistemologiske trekanten kan brukes for å få en oversikt

over utfordringen elever møter i arbeidet med matematikk, og det å forstå semiotiske tegn eller symboler.



Figur 5: Den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006).

Den epistemologiske trekanten (figur 5) viser at elever må bevege seg mellom forskjellige representasjoner for å forstå en oppgave. Den viser også at tegn har to funksjoner, de har en semiotisk funksjon fordi de står for noe annet og en epistemologisk funksjon fordi de forklarer kunnskapen de står for (Steinbring, 2006). … «these signs do not have a meaning of their own, this has to be produced by the learner by means of establishing a mediation to suitable reference contexts» (Steinbring, 2006, s. 135).

Eleven må i denne studiens oppgaver forstå at tegnet eller symbolet her representert ved $\frac{1}{3} \div 2$ bærer med seg kunnskap om lengden på innpakningsbånd til en gave. Samtidig må de forstå at begrepet som blir benyttet for å gjøre om brøk til den faktiske lengden er divisjon. I tillegg til at tegnet kan representere ulike objekt, kan et objekt også bli representert av ulike tegn. For eksempel kan $\frac{1}{3}$ meter skrives som 0,3333333 m, 33,33333 cm, 3,33333 dm, $\frac{2}{6}$ m eller det kan skrives med bokstaver; en tredjedels meter (Steinbring, 2006). I studiens analysedel vil man se at symbol underkategorien er delt i to. Den ene er tall, både naturlige tall og rasjonale tall, mens den andre er matematiske tegn. Med det begrepet menes tegn som for eksempel =, ÷, •, + og -. Elever som bruker matematiske tegn sammen med tall bruker ofte en regneoperasjon i sine besvarelser.

2.7.2 Tegninger

Tegninger og visuelle representasjoner er en viktig del av å kunne uttrykke seg skriftlig i matematikk. Eksempler på tegninger kan være tallinje, tallfigurer, geometriske figurer, tabeller, diagrammer og grafer. Det kan også være konkrete tegninger av et objekt eller en situasjon (Utdanningsdirektoratet, 2006). Ulike tegninger kan forekomme i besvarelsene, derfor skilles det i denne studien mellom to ulike typer tegninger. Den første er tegninger som er konkreter eller beskriver et objekt. Det kan for eksempel være tegning av en gave. Den andre typen tegning er tegninger som brukes for å komme frem til en løsning på problemet. Det er denne typen tegning som vil bli omtalt senere i studien. Martinussen og Smestad (2010) mener at det i møte med divisjon av brøk er svært viktig å bruke tegninger slik at elevene kan se for seg situasjonen og forstå algoritmen. I denne studien vil ulike tegninger komme frem i analysedelen. Felles for mange av disse tegningene er at de også inneholder andre representasjoner. Dette stiller krav til elevene gjennom at de må bevege seg mellom ulike systemer av semiotiske representasjoner. For mange elever kan det å bevege seg mellom ulike representasjonsregister være vanskelig, men å forstå matematikk innebærer å mestre slike overganger (Duval, 2006).

2.7.3 Språk:

Matematikken har et eget språk som omfatter, tegn, ord og tegninger. Språk som representasjon handler her om ord brukt i besvarelsene, eller uttrykt muntlig i intervjuene. Hiebert (1988) kaller dette representasjonssystemet for naturlig språk og kan på lik linje eller sammen med andre representasjonssystemer brukes for å beskrive matematiske idéer. Å bruke et naturlig språk er spesielt vanlig i matematiske bevis og disse kan ikke uttrykkes på samme måte ved bruk av symboler (Duval, 2006). I læreplanen står det at elevene skal bruke et naturlig språk med begreper, fagterminologi og et uformelt språk i samtaler, for å kommunisere matematiske problemer og løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2006). Dette kan både komme til uttrykk gjennom intervjuene og i besvarelsene. I besvarelsene har jeg valgt å skille mellom to ulike typer bruk av språk. Den ene handler om å bruke språk som begrunnelse og resonnement, mens den andre handler om å bruke naturlig språk i en svarsetning.

2.8 Feil og misoppfatninger

Gjennom kunnskapspakken til Ma (2010) kom det frem at kunnskap bygger på hverandre, og når elever møter et nytt matematisk konsept, bygger det på andre matematiske konsepter de bør ha gode kunnskaper om. Når elever derfor arbeider med oppgaver som innebærer divisjon av brøk, kan elevene sitte med misoppfatninger knyttet til for eksempel multiplikasjon av brøk eller brøkbegrepet. Dette kan gjøre læring av brøkdivisjon vanskelig.

For å forklare hva en misoppfatning er, må misoppfatninger skilles fra feil. Brekke, matematikkundervisningen og Læringssenteret (2002) skiller feil og misoppfatninger ved at feil er noe man gjør, mens misoppfatninger er noe man har. En feil kan bli gjort av mange grunner, for eksempel; mangel på oppmerksomhet, mistolkning av symboler eller tekst, mangel på relevant erfaring eller kunnskap knyttet til det matematiske temaet eller begrepet. Det kan også være at elevene ikke er bevisst på å sjekke svaret de har gitt (Drews, 2005). Feil kan altså komme av dårlig tid eller andre faktorer som ikke sier noe om hvorvidt eleven mestrer oppgaven eller ikke. Misoppfatninger derimot er ikke tilfeldige, de kommer fra at man har bestemte tanker og ideer knyttet til et matematisk emne som man bruker konsekvent (Brekke et al., 2002). Misoppfatninger kan for eksempel være feil bruk av regler, de kan stamme fra at det gjøres generaliseringer som ikke er riktig eller at man har en alternativ idé av en situasjon. Det er viktig at man som lærer har kunnskap om elevers feil og misoppfatninger, man må forstå hvor de kommer fra, hvordan de kan unngås og hvordan de kan rettes opp (Drews, 2005). På den måten vil man unngå at elever tar med seg misoppfatninger knyttet til divisjon eller brøk når de møter divisjon av brøk.

Tirosh (2000) har studert hvilke typer feil elever gjør i arbeid med divisjon av brøk og kategorisert disse inn i tre kategorier. Det er viktig å huske på at selv om dette kalles feil kan feilen være et resultat av at eleven har misoppfatninger knyttet til et matematisk emne som eleven tar med seg inn i oppgaven.

2.8.1 Algoritmebaserte feil

Dette er feil elever gjør når de har satt opp et divisjonsstykke med brøk og skal regne det ut. Slike typer feil blir forklart gjennom at elevene pugger og memorerer en algoritme. Elevene forstår ikke algoritmen og den blir sett på som en meningsløs serie av steg som skal gjøres for å komme frem til riktig svar. I prosessen med å dividere brøker kan elevene dermed glemme noen av disse stegene og svaret blir feil (Tirosh, 2000). Eksempler på slike feil kan være at elevene snur dividenden istedenfor divisoren eller begge før de multipliserer tellerne og nevnerne. Et annet eksempel innenfor denne kategorien kan være at elevene blander divisjonsalgoritmen for brøk med andre algoritmer for brøkregning.

2.8.2 Intuitive feil

Tirosh (2000) skriver at slike feil er knyttet til elevenes oppfatning av divisjon. I møte med divisjon av brøk bygger elevene sin kunnskap på divisjon med naturlige tall (Van de Walle, 2004). Hvis elevene kun kjenner til den enkle modellen for delingsdivisjon der et visst antall elementer skal deles likt på noen, kan dette føre til begrenset forståelse av divisjon som igjen kan føre til misoppfatninger (Tirosh, 2000). Dermed vil det å kun kjenne til delingsdivisjon og modellen for rettferdig deling kunne skape misoppfatninger basert på generaliseringer elevene har gjort i møte med divisjon av naturlige tall. Eksempler på slike misoppfatninger kan være at divisoren må være et helt tall, at divisoren må være mindre enn dividenden og at kvotienten må være mindre enn dividenden. Disse oppfatningene av divisjon vil kunne gi elevene problemer når de møter oppgaver med divisjon av brøk, og spesielt tekstoppgaver som involverer divisjon av brøk (Tirosh, 2000).

2.8.3 Feil basert på formell kunnskap

Feil som dette handler om at elevene har begrenset kunnskap eller misoppfatninger knyttet til brøkbegrepet og/eller regneoperasjoner (Tirosh, 2000, s. 7). Dette kan føre til forskjellige feil når elever arbeider med oppgaver knyttet til divisjon av brøk. Det kan for eksempel være knyttet til manglende oppfatning av aspekter ved brøkbegrepet. Hart og Team (1981) skriver også om dette og nevner blant annet at mange elver tror at divisjon er kommutativ. Det vil si at elevene tror $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ fordi $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$. Slike feil kan også stamme fra de tidligere kategoriene (Hart & Team, 1981, s. 72, 76-78, 208). For eksempel kan feilen $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = 2$ være en algoritme feil der dividenden er snudd før multiplikasjon og ikke divisoren. Det kan også være en intuitiv feil der eleven tror dividenden må være større enn divisoren (Tirosh, 2000).

3.0 Metode

I denne studien har jeg utforsket hvordan elever på 8. trinn løser to oppgaver knyttet til divisjon av brøk. Jeg har sett på hvilke begrunnelser og resonnementer de bruker, hvilke representasjoner som forekommer og hvilke feil de gjør eller mulige misoppfatninger de har knyttet til divisjon av brøk. I dette kapittelet vil jeg presentere metoden jeg har benyttet for å besvare mitt forskningsspørsmål. Det vil bli gjort rede for forskningsstrategi, før jeg presenterer gjennomføringen av forskningen. Under dette punktet vil jeg også beskrive bakgrunn for valg av oppgaver og begrunnelse av valgene. Deltagere i studien vil bli omtalt i et eget delkapittel, før jeg tar for meg metodene for datainnsamling. Deretter vil jeg presentere dataanalysestrategier og håndtering av datamaterialet. Til slutt vurderes studiens kvalitet og det blir gjort rede for etiske betraktninger.

3.1 Forskningsstrategi

I denne studien har jeg valgt en kvalitativ tilnærming da forskningens fokus er på dybde. Dette understrekes av spørsmålsformene «hvordan» og «hvilke» som bidrar til å utforske både en prosess og fenomener. Postholm og Jacobsen (2011) hevder at dette er et kjennetegn på kvalitativ forskning fordi elevenes kunnskap ikke kan måles objektivt på en tallskala og inneholder mange ulike nyanser som må tas i betraktning. Kvantitativ forskning derimot er mer egnet for å uttrykke seg generelt om et tema og skape en oversikt over et fenomen på bakgrunn av et større datamateriale. På bakgrunn av dette vil noe data bli presentert kvantitativt med tall og statistikk, fordi dette gir en oversikt over datamaterialet samtidig som det gjør det mulig å sammenligne mine funn med andre studier. Både Postholm og Jacobsen (2011) og Wellington (2015) understreker også dette og skriver at kvantitativ og kvalitativ metode gir ulik type informasjon som utfyller hverandre.
Studien har form som et «case»-studie eller saksstudie. En saksstudie beskrives som en detaljert og intensiv studie av en enkel sak og gjerne i et bestemt samfunn eller organisasjon (Bryman, 2016). Saken kan også være et bestemt fag eller fagområde (Wellington, 2015). I denne studien har jeg derfor valgt å gå i dybden på hvordan 8. trinns elever løser oppgaver med divisjon av brøk.

3.2 Gjennomføring av forskningen

Målet med denne studien er å se hvordan elever på åttendetrinn løser oppgaver knyttet til divisjon av brøk. Jeg ønsker å ha fokus på hvordan elevene begrunner og resonnerer seg frem til sine svar, og hvilke representasjoner de bruker i sine løsninger. Jeg ønsker også å se på hva slags feil de gjør eller hvordan misoppfatninger de eventuelt har til divisjon av brøk. På bakgrunn av disse ønskene utarbeidet jeg et oppgaveark som fire åttende klasser har utført. Hver klasse fikk en klokketime til å svare på oppgavene. Utarbeidelsen av oppgavearket og oppgavearket blir presentert i avsnitt 3.2.1.

Forskningen ble utført i løpet av to uker i februar og mars 2019. Jeg som forsker var tilstede med de elevene som skulle delta, mens en annen lærer tok med de elevene som ikke hadde samtykket til å delta i studien. Før elevene startet på oppgavearket presenterte jeg hva de skulle gjøre. I presentasjonen hadde jeg fokus på at jeg først og fremst var ute etter fremgangsmåten og at de måtte forklare hvordan de kom frem til svaret. Jeg introduserte de også for oppgavene, på den måten fikk elever som synes det er vanskelig å lese høre oppgavene muntlig. I samtykkeskjemaet elevene fikk utdelt stod det at studiens fokus var på divisjon av brøk, under presentasjonen i forskningstimen ble de ikke opplyst om at disse oppgavene var knyttet til divisjon av brøk. Årsaken til dette er for å få frem variasjon i begrunnelser, resonnement og representasjoner. Når elevene jobbet med oppgavene gikk jeg rundt i klasserommet. Elevene fikk ikke hjelp til løsningen, men de kunne få muntlig forklaring på oppgaven.

På bakgrunn av besvarelsene ble seks elever plukket ut til intervju, gjennomføringen av intervjuet er basert på elevens løsning av oppgavene med fokus på noen av oppgavene. Disse blir presentert i avsnitt 3.5.

3.2.1 Oppgavearket

Prosessen med å utarbeide et passende oppgaveark for studien startet tidlig. Det første utkastet inneholdt forskjellige typer oppgaver knyttet til divisjon av brøk. Det var rene utregningsoppgaver (uten tekst), tekstoppgaver hentet fra forskjellige lærebøker for åttendetrinn og noen oppgaver jeg lagde selv basert på oppgaver jeg selv hadde under faget MTHM 302 på Montclair State University. Oppgavearket inneholdt også «Holiday Bow» oppgaven jeg vil komme tilbake til senere i avsnittet.

Å bruke et slikt oppgaveark ville gitt et enormt og uoversiktlig datamateriale. Derfor bestemte jeg for å kutte til tekstoppgaver som handler om divisjon av brøk. Ønsket med tekstoppgavene var at det skulle være en blanding av måling- og delingsdivisjons oppgaver. Da «Holiday Bow» oppgaven var en målingsdivisjonsoppgave var det naturlig å bruke denne (Bulgar, 2002). Da denne oppgaven var blitt brukt i en tidligere studie hadde jeg ved å bruke denne oppgaven et analyseverktøy jeg kunne ta utgangspunkt i. Etter å ha kombinert denne oppgaven med en annen delingsdivisjonsoppgave, innså jeg at det ville gitt en sammenheng for både meg som forsker og elevene om oppgaven inneholdt samme kontekst.

På bakgrunn av dette startet jeg å jobbe med «Holiday bow» oppgaven (figur 6) og brukte denne også som inspirasjon for å lage en delingsdivisjonsoppgave med samme kontekst. Oppgavearket jeg har brukt i denne studien har jeg utarbeidet selv med inspirasjon fra oppgaven «Holiday Bow» i (Bulgar, 2002).

HOLIDAY BOWS

(1) Red ribbon comes packaged in 6 meter lengths;
(2) Gold ribbon comes packaged in 3 meter lengths;
(3) Blue ribbon comes packaged in 2 meter lengths; and
(4) White ribbon comes packaged in 1 meter lengths.

Bows require pieces of ribbon that are different lengths.

Your job is to find out how many bows of particular lengths can be made from the packaged lengths for each color ribbon.

I. White Ribbon	Ribbon Length of Bow	Number of Bows
1 meter	1/2 meter	
1 meter	1/3 meter	
1 meter	1/4 meter	
1 meter	1/5 meter	
II. Blue Ribbon	Ribbon Length of Bow	Number of Bows
2 meters	1/2 meter	
2 meters	1/3 meter	
2 meters	1/4 meter	
2 meters	1/5 meter	
2 meters	2/3 meter	
III. Gold Ribbon	Ribbon Length of Bow	Number of Bows
3 meters	1/2 meter	
3 meters	1/3 meter	
3 meters	1/4 meter	
3 meters	1/5 meter	
3 meters	2/3 meter	
3 meters	3/4 meter	
IV. Red Ribbon	Ribbon Length of Bow	Number of Bows
6 meters	1/2 meter	
6 meters	1/3 meter	
6 meters	1/4 meter	
6 meters	1/5 meter	
6 meters	2/3 meter	
6 meters	3/4 meter	

Figur 6: Oppgaven "Holiday Bow" (Bulgar, 2002, s.364-365)

Den opprinnelige oppgaven handler om julesløyfer, noe norske åttendeklassinger har lite kjennskap til. Jeg ønsket derfor å endre konteksten slik at elevene kan forstå og relatere den til personlige erfaringer. På bakgrunn av dette og ønske om en målingsdivisjonsoppgave og en delingsdivisjonsoppgave utarbeidet jeg et oppgaveark som handler om å pakke inn gaver. Oppgave 1 var bygd opp som «Holiday Bow» oppgaven, men inneholdt færre deloppgaver, tre fargede innpakningsbånd og fire deloppgaver for hver farge. Oppgave 2 handler også om å pakke inn gaver men dette er en delingsdivisjon oppgave, denne oppgaven hadde fire deloppgaver.

Basert på dette oppgavearket utførte jeg en pilotundersøkelse på 19 niendeklassinger. Disse fikk samme opplysninger som deltagerne på åttendetrinn før de svarte på oppgavearket. Flertallet av disse svarte på alle oppgavene. Jeg kunne observere flere begrunnelser og resonnementer, det ble også brukt ulike representasjoner. Niendeklassingene fikk 50 minutter til å svare på oppgavene og mange fikk litt dårlig tid. På bakgrunn av dette valgte jeg å fortsette med samme type oppgaver, men antall deloppgaver ble kuttet ned. Dermed endte jeg opp med oppgavearket i vedlegg tre. I dette avsnittet vil jeg presentere oppgave teksten.

Oppgave 1:

Du skal pakke inn forskjellige gaver som krever ulik lengde innpakningsbånd. Disse gavene krever én bestemt lengde innpakningsbånd. Du må finne ut hvor mange gaver som kan bli pakket inn for hvert farget innpakningsbånd.

Du skal pakke inn gaver med hvitt innpakningsbånd, det er 1 meter langt:

a) Du bruker 1/2 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
b) Du bruker 1/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
c) Du bruker 1/4 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?

Du skal pakke inn gaver med blått innpakningsbånd, det er 2 meter langt:

a) Du bruker 1/2 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
b) Du bruker 1/5 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
c) Du bruker 2/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?

Du skal pakke inn gaver med gult innpakningsbånd, det er 3 meter langt:

a) Du bruker 1/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
b) Du bruker 2/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?
c) Du bruker 3/4 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn?

Oppgave 2:

Noen har rotet med innpakningsbåndet og båndene er klippet opp i forskjellige lengder. Noen biter holder til flere gaver, mens andre holder ikke en gang til én gave. Før du kan begynne å pakke inn, må du finne ut hvor mye innpakningsbånd som du trenger til én gave?

a) 1/3 meter bånd holder til 2 gaver. Hvor langt bånd trenger du til én gave?
b) 3/4 meter bånd holder til 2/3 gave. Hvor langt bånd trenger du til én gave?
c) 3 meter bånd holder til $4\frac{1}{2}$ gaver. Hvor langt bånd trenger du til én gave?

I oppgavene møter elevene naturlige tall og ulike typer brøker. Grunnen til dette er at det vil stille ulike krav til elevenes kunnskap om brøk og forståelse av brøkbegrepet. Samtidig kan det være med å vise forskjellige begrunnelser og resonnementer som er hovedfokuset i denne oppgaven. Grunnen til at jeg starter med divisjon av naturlige tall med stambrøker er for å gå frem gradvis. Dette skriver Martinussen og Smestad (2010) er svært nyttig når elevene skal lære å regne med brøk. Selv om elevene har vært igjennom divisjon av brøk tidligere, velger jeg dette slik at de kan oppleve mestring før de møter andre brøker og vanskeligere oppgaver.

3.3 Informanter

99 elever på åttendetrinn fra fire forskjellige klasser på samme skole fikk forespørsel om å delta i studien. Av disse var det 47 som leverte samtykkeskjema. Det er disse 47 som er mine informanter i studien. Gjennom sin deltagelse i arbeid med oppgavene, regnes disse som mine hovedkilder til datamaterialet.

Av disse 47 samtykket 27 til et eventuelt intervju. Seks av disse elevene ble plukket ut til intervju basert på besvarelsene av oppgavene. Disse seks informantene er med på å styrke og forklare mine funn ytterligere gjennom å forklare sine svar og besvare mine spørsmål.

Når det gjelder utvalget av elever til å besvare oppgavene har jeg ikke hatt noen kriterier. Som lærerne i de forskjellige klassene påpekte kan det allikevel være en sammenheng mellom nivå og innlevering av samtykkeskjema. For å få flest mulig til å levere, og dermed få et representativt utvalg, minnet lærerne elevene på dette. De hadde også flere samtykkeskjemaer tilgjengelige slik at de kunne levere til elever som mistet skjemaet. Lærerne skrev også beskjed på ukeplan til elevene slik at foreldre/foresatte hadde mulighet til å se at de har fått utdelt ark. Under informasjon i hver klasse om studien la jeg vekt på at deres deltagelse og besvarelse ikke vil påvirke elevenes matematikk karakter. Samtidig som deltagere i studien ikke vil gå glipp av matematikkundervisning. Elevene som ble plukket ut til intervju ble valgt på bakgrunn av besvarelsene. Nøyere begrunnelse for hvorfor disse elevene ble plukket ut kommer frem i avsnitt 3.5.

For å sikre anonymitet til hver enkelt elev ble alle navnene anonymisert og verken klasse eller skole er nevnt. Første side av oppgaveheftet inneholdt en side der elevene skrev navn og klasse. Etter datainnsamlingen ble besvarelsene nummerert og forsiden med navn ble revet av. Navn og hvilket nummer besvarelsen ble lagret i en mappe som krever passord for å få innsyn i. På den måten kunne jeg sikre anonymitet, men enkelt vite navnet på de elevene jeg ønsket å intervjue. I studiens begynnelse ble det søkt godkjenning fra NSD, da denne var i orden ble informasjonsskriv og samtykkeskjema «Forespørsel om deltagelse i masteroppgave» (se vedlegg nr. 2) sendt ut til elever og foresatte. Det ble lagt vekt på elevenes medbestemmelse til å delta i studien, i tillegg til foreldre/foresattes godkjennelse.

Kontakt med skolen ble opprettet ved studiens oppstart og jeg fikk godkjennelse av skolens rektor og matematikklærere på åttendetrinn med visshet om at de når som helst kunne trekke seg. Jeg forsikret også lærerne om at studien ikke ville kreve noe mer arbeid for noen av de involverte, men heller tvert imot da elevene får repetert brøk og divisjon av brøk. Lærerne fikk også tilsendt oppgavene som ble brukt slik at de kan bruke disse i senere undervisning om ønskelig.

3.4 Metoder for datainnsamling

Min datainnsamling består i hovedsak av skriftlige elevbesvarelser av to oppgaver knyttet til divisjon av brøk. I tillegg har jeg intervjuet seks elever basert på deres besvarelse for å kunne få økt innsyn og forståelse av deres begrunnelser, resonnement, bruk av representasjoner og eventuelle feil eller misoppfatninger. Gjennom en slik metodekombinasjon får jeg belyst forskningsspørsmålene gjennom flere ulike typer data som kan være med å utfylle hverandre (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 44). Før utarbeidelse av oppgavene skaffet jeg meg informasjon om hvilke emner elevene har vært gjennom innen brøk gjennom samtale med de aktuelle matematikklærerne og bruk av elevenes lærebok. Gjennom bruk av elevenes lærebok har jeg hatt et spesielt fokus på hvordan divisjon av brøk blir presentert for elevene, utenom dette forekommer det ingen analyse av tekster i elevenes lærebok. Hver elevbesvarelse har blitt analysert og elementer fra taleopptak av intervjuene har blitt transkribert og analysert. I videre lesing er det viktig å huske på at det er de skriftlige besvarelsene som vil bli brukt for å presentere studiens resultater. De skriftlige begrunnelsene, resonnementene, representasjonene og feilene som uttrykker seg i besvarelsene vil bli støttet opp av intervjuene og danne hovedgrunnlaget for analysen.

Videre blir gjennomføringen av mine innsamlingsmetoder presentert, basert på mine valg, forskningsetiske refleksjoner og i lys av relevant teori.

3.4.1 Oppgavebesvarelse

For å besvare mine forskningsspørsmål ble oppgavebesvarelse valgt som primære datainnsamlingsmetode. Dette er det Wellington (2015) og Bryman (2016) kaller dokumenter som kilde for data. I denne studien er dokumentene private fordi informantene har produsert de gjennom sine egne begrunnelser, resonnementer og bruk av representasjoner. Oppgavene er produsert for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Besvarelsene blir dermed relevante for forskningen og de blir bevart både i papirform og digitalt til studiens slutt, slik at de er tilgjengelige for analyse (Bryman, 2016). Selv om oppgavene er laget for å kunne svare på forskningsspørsmålene gir også slike elevbesvarelser mulighet for å finne andre interessante funn som er relevante for temaet divisjon av brøk.

Det foreslås fire kriterier for å vurdere kvaliteten til dokumenter i en studie. Disse er «autheticity, credibility, representativeness og meaning» (Wellington, 2015, s. 213). I denne studien er det første kravet om at dokumentene skal være autentiske i stor grad oppfylt da det er elevbesvarelser. Det andre punktet går på troverdighet. I en studie med elever er det selvsagt en viss fare for at de ikke skal svare det de kan eller ikke skrive opp hele sin begrunnelse og resonnement fordi dette tar lang tid. For at dette i minst mulig grad skal finne sted har jeg lagt vekt på at elevene selv skal bestemme om de vil delta og de har også blitt oppfordret til å forbedre sine begrunnelser og resonnement hvis de var ferdig før tiden. For å ivareta punktet om representativitet har jeg valgt å sende forespørsel til elever i fire forskjellige klasser. Selv om elevene bruker lik lærebok har elevene tre forskjellige matematikklærere. Det vil si at ikke alle elevene har fått samme introduksjon til temaet divisjon av brøk tidligere i skoleåret. Det siste kriteriet går på mening, når det gjelder elevbesvarelser er dette en utfordring fordi noen besvarelser kan være vanskelig å forstå. På bakgrunn av dette ble noen av elevene intervjuet slik at de kunne forklare sine svar. Grunnen til dette er at konklusjonene må kunne begrunnes og trekkes på grunnlag av det elevene har svart.

3.4.2 Intervju

I denne studien har jeg gjennomført seks kvalitative intervjuer for å få mer detaljerte svar, og frembringe svar som kan bli kodet og bearbeidet (Bryman, 2016). Disse vil være med å styrke og forklare funnene jeg gjør gjennom analyse av oppgavebesvarelsene. På bakgrunn av dette har jeg valgt det Postholm og Jacobsen (2011) kaller et halvstrukturert intervju. Dette er det samme som Bryman (2016) kaller et semi-strukturert intervju. Grunnen til dette er at jeg har noen bestemte overskrifter eller spørsmål jeg vil ha svar på ut fra det eleven har svart på oppgavene. Allikevel vil jeg la elevene snakke mest mulig fritt, og la de komme opp med flest mulig tanker og erfaringer de gjorde uten at jeg stiller spørsmål. Dette kan også føre til at elevene kommer inn på noe som er interessante for oppgaven som jeg ikke hadde forutsett, og som jeg kan følge opp videre med spørsmål som ikke var planlagt på forhånd (Bryman, 2016; Postholm & Jacobsen, 2011). Det ble laget en intervjuguide til hvert intervju, i vedlegg fire finnes derimot malen som jeg tok utgangspunkt i for hver intervjuguide.

Elevintervjuene ble gjennomført ca. fire uker etter at oppgavene ble besvart. For å få inn nok data, men allikevel sikre at ikke dataomfanget skulle bli for stort for denne oppgavens omfang, valgte jeg seks elever. Interessante deler av disse intervjuene vil være med å styrke funnene fra alle oppgavebesvarelsene.

Før intervjuet ønsket jeg også ha god kunnskap og innsikt i elevenes besvarelser slik at jeg kunne være forberedt på det elevene fortalte, og stille gode oppfølgingsspørsmål som er enkle og lett forståelige, slik at elevene kan forstå spørsmålene. På den måten ville det også være lettere for meg å lytte til hva eleven uttrykker og vise interesse for dette. På grunn av tidsavstanden mellom besvarelse og intervju fikk elevene bruke noen minutter før intervjuet til å se på sin besvarelse. Vi snakket også sammen om skole og matte generelt slik at elevene skulle bli komfortable med meg som forsker. Disse punktene er en del av Kvale (1996) liste for et suksessfullt intervju.

3.4.3 Bruk av instrumenter

Lydopptak ble brukt som instrument for å dokumentere intervjuene jeg har gjort i denne studien. Mackay og Heritage (1987) skriver at fordelen med lydopptak er at man korrigerer de naturlige begrensingene vårt minne har og at det intervjuobjektet sier kommer riktig og klart frem. I min forskning gjennomførte jeg seks intervjuer som hver tok mellom ti og tjuefem minutter. I tillegg hadde eleven et ark de kunne notere på og oppgavebesvarelsen foran seg. For å kunne følge med på hva elevene gjorde, hvor de pekte, stille gode spørsmål, være en aktiv lytter, notere viktige momenter og en samtalepartner var det helt nødvendig for meg å bruke lydopptak for deretter å transkribere noe av dette (Postholm & Jacobsen, 2011). Bruk av lydopptak og transkribering gjør at jeg kan gjøre en grundigere analyse av hva elevene har sagt og gå tilbake til utsagnene flere ganger. Det kan være med å hindre at jeg analyserer og forklarer noe av det elevene har sagt feil. Samtidig blir det lettere for andre å gå inn å evaluere den analysen jeg har utført. Før intervjuene hadde jeg et analyseverktøy klart og visste at jeg var ute etter å vite mer om elevenes begrunnelse og resonnement, bruk av representasjoner, feil og misoppfatninger. Allikevel kan lydopptak og transkriberingen gi meg funn jeg selv ikke hadde tenkt på eller idéer om hvordan jeg kan bruke funnene på nye måter eller se på det i lys av annen teori (Bryman, 2016).

For å få frem det jeg ønsket var det nødvendig å bruke lydopptak. På en annen side er dette noe som er nytt for elevene, og det kan virke skummelt for elevene med en lydopptaker. De kan bli nervøse og ikke få frem det de ønsker (Bryman, 2016). For at elevene ikke skulle bli nervøse beregnet jeg god tid til hvert intervju. På den måten kunne vi starte å ha en samtale om skolehverdagen og andre ting uten lydopptak. Deretter gjentok jeg informasjon for eleven om at navn, klasse, skole ville bli anonymisert, og at elevene når som helst kan trekke seg fra studien. Når jeg startet lydopptaket begynte jeg intervjuet om matematikk generelt og hva de tenkte rundt oppgavene før fokuset ble lagt på elevenes besvarelser (Se intervjuguide i vedlegg fire).

3.4.4 Begrensinger i datainnsamling

Under min datainnsamling oppstod det flere begrensinger. Kvalitative metoder for datainnsamling egner seg for å se på det spesielle, men de er også ressurskrevende og inneholder mange nyanser. På bakgrunn av dette startet jeg først som beskrevet i avsnitt 3.2.1 med å begrense oppgavearket. På den måten kunne jeg fortsatt få en bred oversikt med 47 elevbesvarelser. Ettersom studien har begrenset varighet og omfang ble det valgt å begrense antall intervjuobjekter slik at funnene ikke skulle bli for komplekse og uoversiktlige å håndtere (Postholm & Jacobsen, 2011).

En annen begrensing som er knyttet til oppgavebesvarelsene er om man som forsker virkelig finner ut hva elevene har gjort. Besvarelsene sier ikke alt om hva elevene har tenkt og får heller ikke frem noen forklaring på feilene som elevene har gjort. For å motvirke dette ble det gjennomført intervjuer, men feil er individuelle og de kan ikke forklares likt selv om de i besvarelsene kan se like ut.

Seks intervjuer gir meg en stor mengde data. For å sikre meg nok data, så jeg meg allikevel nødt til å intervjue denne gruppen med elever. Hvert intervju tok mellom ti og tjuefem minutter. Å transkribere hvert intervju ord for ord vil gitt meg en stor og uoversiktlig mengde data og da intervjuene ikke er min primære datainnsamlingsmetode har jeg valgt å kun transkribere deler av intervjuene. Jeg har hatt fokus på deler av intervjuene som kan forklare funn og resultater fra oppgavebesvarelsene, samt elementer som besvarelsene i seg selv ikke kan forklare (Wellington, 2015).

3.5 Analyse av data og håndtering av datamaterialet

Analyse handler om å utvikle forståelse og trekke ut essens av all informasjonen man har samlet inn. Gjennom analyse skal man skape et system, mønster og mening av informasjonen (Postholm & Jacobsen, 2011). I det videre arbeidet vil jeg presentere hvordan analyseverktøyet har blitt utarbeidet på bakgrunn av håndtering av datamaterialet og valg tatt underveis i denne prosessen. Målet har hele tiden vært å etterstrebe system, mønster og mening.

På bakgrunn av forskningsspørsmålene mine der temaene begrunnelse og resonnement, representasjoner og feilkategorier er sentrale, har jeg i denne studien brukt tematisk analyse for å analysere datamaterialet. Dette er en av de vanligste metodene som blir brukt for å analysere kvalitative data. En slik analysemodell gir meg også få spesifikasjoner til hvordan analysen skal gjennomføres. På den måten står jeg fritt til å tilpasse kategorier som passer datamaterialet og fokusområdet for forskningen. (Bryman, 2016).

På forhånd av datainnsamlingen utarbeidet jeg analysekategorier basert på studien til Bulgar (2002). Den første kategorien var begrunnelse og resonnement. Denne kategorien ble delt inn i ulike underkategorier. Disse var begrunnelse og resonnement som involverer motsigelse, gjenkjennelse av mønster, naturlig tall, måling og brøk. Videre ville jeg også ha en kategori som gikk på bruk av representasjoner. Dette ble også analysert i Bulgars (2002) studie. Før datainnsamlingen delte jeg denne kategorien opp i underkategorier. Disse var språk, symboler, tegninger og modeller.
Selv om datainnsamlingsmetodene i min og Bulgar (2002) sin studie er forskjellige gir det å bruke noen av de samme kategoriene mulighet for sammenlikning og diskusjon. Den siste kategorien for analyse er feilkategoriene i Tirosh (2000). Disse ble presentert i avsnitt 2.8.1, 2.8.2 og 2.8.3 og er inkludert som analysekategori for de vil kunne forklare eventuelle feil elevene gjør i oppgavene. Å foreta en slik meningsfull utvelgelse av kategorier kalles «purposive sampling» (Bryman, 2016). «The sampling is conducted with the reference to the

research questions, so that the units of analysis are selected in terms of criteria that will allow the research questions to be answered» (Bryman, 2016, s. 410).

Etter at alle elevbesvarelsene var samlet inn ønsket jeg først å få en oversikt over antall svar per oppgave og riktige svar. En oversikt over dette er presentert i avsnitt 4.1 og 4.2. På den måten fikk jeg også et innblikk i hver enkelt besvarelse. Deretter kunne jeg begynne å se nøyere på besvarelsene hver for seg samt se de i en sammenheng (Postholm & Jacobsen, 2011).

I løpet av prosessen over så jeg at noen av kategorien jeg hadde satt opp til analyse måtte endres. Begrunnelse og resonnement kategorien valgte jeg og ikke endre da denne kategorien kan sammenlignes med Bulgar (2002)s studie. Feilkategoriene valgte jeg også å la stå uendret.

For å få frem hvordan ulike representasjoner ble brukt i begrunnelse og resonnement måtte jeg gjøre endringer innenfor denne kategorien. Det er vanskelig å skille mellom modeller og tegninger, derfor fjernet jeg kategorien modeller. For å få frem forskjell på bruk av naturlig språk og tegning valgte jeg og dele disse kategoriene. Den ene forteller om språk eller tegning er brukt som begrunnelse og resonnement, mens i den andre blir disse representasjonene kun brukt for å uttrykke svar. Det vil gjøre det lettere for meg i videre arbeid, da det er hvordan de ulike representasjonene blir brukt i begrunnelse og resonnement jeg først og fremst vil se nærmere på. Derfor er det kun språk og tegning som begrunnelse og resonnement jeg vil ta for meg i analyse og diskusjon. Da en form for tall så ut til å bli brukt i omtrent alle besvarelser så jeg meg også nødt til å dele opp underkategorien symboler. Den ene omfatter derfor tall og den andre omfatter matematiske tegn. I videre analyse og bruk av besvarelsene vil det derfor være mulig å skille de som har brukt tall i forbindelse med en av de andre representasjonene, og de som hovedsakelig har brukt matematiske tegn og tall til å uttrykke en regneoperasjon.

Da hver besvarelse ble analysert ble det naturlig å gi hver av kategoriene en kode slik at denne prosessen skulle være lettere for meg som forsker. På bakgrunn av dette har jeg utarbeidet følgene tabell som viser analysekategoriene og kode brukt i arbeidet med å analysere besvarelsene.

Tabell 1: En oversikt over de ulike analysekategoriene for besvarelsene og intervjuene.

Begrunnelse og resonnement	**Koder**
1) Begrunnelse og resonnement som involverer <u>motsigelse</u>	Mot
2) Begrunnelse og resonnement som involverer <u>gjenkjennelse av mønster</u>	GM
3) Begrunnelse og resonnement som involverer <u>naturlige tall</u>	NT
4) Begrunnelse og resonnement som involverer <u>måling</u>	M
5) Begrunnelse og resonnement som involverer <u>brøk</u>	B
Representasjoner som elevene bruker	**Koder**
1) Språk a) Som begrunnelse og resonnement b) Som svar	S a) S – BR b) S - S
2) Tegninger a) Som begrunnelse, resonnement b) For å symbolisere svar	T a) T – BR b) T - S
3) Symboler a) Tall	S a) SY – T

b) Matematiske tegn	b) SY – MT
Feilkategorier	**Koder**
1) Algoritmebaserte feil	AF
2) Intuitive baserte feil	IF
3) Feil basert på formell kunnskap	FFK

Tabellen viser en oversikt over de ulike analysekategoriene for besvarelsene og intervjuene. De analyseres altså med hensyn på begrunnelse og resonnement, bruk av representasjoner og feilkategorier. Alle disse kategoriene og underkategoriene er beskrevet i kapittel 2. Hver elevbesvarelse har blitt analysert etter kategoriene i tabell 1. Tabell 2 viser et eksempel på hvordan en besvarelse har blitt analysert.

Tabell 2: Viser eksempel på hvordan hver besvarelse har blitt analysert, dette er besvarelse nr. 15.

	Begrunnelse og resonnement	**Representasjoner**	**Feil**
Oppgave 1, hvitt bånd (a)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, hvitt bånd (b)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, hvitt bånd (c)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, blått bånd (a)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, blått bånd (b)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, blått bånd (c)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, gult bånd (a)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, gult bånd (b)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 1, gult bånd (c)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	
Oppgave 2 (a)	B	SY – T SY – MT	

		S – S T - S	
Oppgave 2 (b)	IKKE SVART		
Oppgave 2 (c)	NT (desimeter)	SY – T SY – MT S – S T - S	

I analyseskjemaet (Tabell 2) ser vi at eleven har brukt begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall og brøk. I parentesen står det desimeter, dette er mest for å gi meg som forsker mulighet til å gjenkjenne og enkelt gå tilbake til besvarelser. Ettersom innsamlingsmetoden var skriftlige besvarelser er det vanskelig å skille mellom hva som er hovedbegrunnelse og ikke i svarene. Derfor kommer det i flere analyseskjemaer frem at ulike begrunnelser og resonnement brukes i samme oppgave. I Tabell 2 kommer det også frem at flere representasjoner er brukt i hver oppgave. I denne besvarelsen har det ikke blitt gjort feil, men i andre besvarelser har koden for feilen blitt ført inn og det har i de fleste tilfeller også blitt skrevet en kommentar om hva feilen var i parentes etter koden.

Da hver besvarelse var analysert kunne jeg se besvarelsene i en sammenheng. På bakgrunn av dette kunne jeg utarbeide generelle resultater som er presentert i avsnitt 4.3 og 4.4. En analyse av hver besvarelse gjorde også at jeg kunne velge ut et utvalg til intervju som representerte ulike begrunnelser og resonnementer, representasjoner og feil. Derfor ble besvarelse 3, 5, 10, 23, 36 og 39 plukket ut. Hver av disse besvarelsene inneholder like eller lignende begrunnelser og resonnement, bruk av samme type representasjon eller feil som i flere andre elevbesvarelser. På den måten kan det elevene sier i intervjuene gi innblikk og til en viss grad forklare andre besvarelser. Jeg vil i det følgende gi en begrunnelse for hvorfor disse seks besvarelsene ble valgt ut.

Besvarelse 3
Denne eleven bruker gjennomgående begrunnelse og resonnement som involverer brøk i oppgave 1. Eleven brukte også tegning som begrunnelse for å representer sine svar på denne oppgaven. Disse var svært klare og gjennom intervjuet vil jeg kunne få svar på hvorfor eleven gjennomgående bruker tegning og hvordan de blir forklart. I oppgave 2 bruker eleven algoritme for å løse oppgavene, men har også gjort én feil. Gjennom intervjuet kan jeg finne ut om dette er en feil eller om det stammer fra en misoppfatning.

Besvarelse 5
Denne eleven bruker gjennomgående i oppgave 1 både begrunnelse og resonnement som involverer måling og naturlige tall i hver deloppgave. I tillegg blir hvert svar representert med tegning. Intervjuet kan vise hva eleven tenker om svarene som er feil, og hvordan tegning har blitt brukt i disse svarene.

Besvarelse 10
Denne eleven veksler mellom å bruke begrunnelse og resonnement som involverer brøk og naturlige tall gjennom hele oppgave settet. Jeg vil finne ut hva eleven tenker om de ulike svarene, og hvorfor eleven i noen tilfeller bruker naturlig språk som representasjon.

Besvarelse 23
Denne eleven representerer alle sine svar med tegning. Tegningene skiller seg også fra andre besvarelser ved at denne eleven bruker kvadrater og rektangler mens de fleste andre bruker

tallinje eller bånd lignende tegninger. I intervjuet ønsket jeg å finne ut om det er noen spesiell grunn for dette.

Besvarelse 36
Gjennom hele denne besvarelsen har eleven brukt begrunnelse og resonnement som involverer brøk. Eleven har også gjennomgående brukt symboler for å representere sine begrunnelser og resonnementer. På bakgrunn av dette og at også denne eleven gjør noen feil er det ulike elementer som er interessante og ta opp i intervju.

Besvarelse 39
Denne eleven bruker gjennomgående i oppgave 1 begrunnelse og resonnement som involverer naturlige tall. Det er også flere elever som bruker slik begrunnelse og resonnement i sine svar. På oppgave 2 går derimot eleven over til å bruke begrunnelse og resonnement som involverer brøk. Eleven har også en del feil i oppgavesettet som jeg gjennom intervjuet kan finne ut mer om.

I kapittel 4 som er denne studiens analysedel, vil besvarelsene bli støttet opp med utdrag fra intervjuene. Det vil både bli brukt utdrag fra besvarelsen til de seks elevene som har blitt intervjuet, men utdrag fra andre elevbesvarelser vil også bli brukt og analysert.

3.6 Kvalitet i studien

I dette kapittelet vil jeg diskutere kvaliteten i min studie. Forskningen ble gjennomført med to forskjellige metoder på én skole og et relativt lite antall elever. På bakgrunn av dette er det viktig å være bevisst på styrker og svakheter ved forskningen. Jeg vil først ta for meg forskningens validitet og reliabilitet før jeg til slutt ser på etiske betraktninger.

3.6.1 Validitet og reliabilitet

En studies validitet vil si i hvilken grad konklusjonene kan forankres i forskningen som er utført (Bryman, 2016). Det vil si hvordan studiens konklusjon samsvarer og bygger på de funn som er gjort gjennom datainnsamling, analyse og diskusjon av funnene. Det skilles ofte mellom to hovedformer for validitet, den indre/interne gyldigheten og den eksterne/ytre gyldigheten. Den interne gyldigheten handler om samsvar mellom studiens konklusjoner og dataene som er samlet inn, og om de konklusjoner som er trukket, er riktige (Bryman, 2016; Jacobsen, 2015).

Når det gjelder den indre validiteten i min studie har jeg måtte ta forskjellige valg som bidrar til min studies interne gyldighet. De første valgene jeg tok gikk på utformingen av oppgavearket som ble presentert i avsnitt 4.2.1. Jeg måtte stille kritiske spørsmål til om svarene på oppgavene kunne bidra til å svare på mine forskningsspørsmål. Valg av informanter er også noe som kan bidra til studiens interne validitet. Jeg måtte først ta hensyn til hvor mange elever som skulle få utdelt samtykkeskjema, og om antallet som leverte samtykke til å svare på oppgavene samt deres besvarelser ville gi oppgaven validitet. Etter å ha analysert oppgavebesvarelsene måtte jeg velge informanter til intervju. Hensikten med intervjuene var å forklare de bestemte oppgavene. Samtidig ønsket jeg at de kunne forklare andre besvarelser som hadde brukt like begrunnelser og resonnement, representasjoner og gjort samme feil. Derfor måtte jeg være kritisk i denne utvelgelsesprosessen. En utfordring i denne prosessen som kan bidra til å svekke validiteten er at ikke alle elevene hadde samtykket til intervju, dermed var noen elever utelukket fra begynnelsen av denne prosessen. I studien er det viktig at analyse av besvarelsene er knyttet til hva elevene har gjort for å sikre oppgavens validitet. På bakgrunn av dette endret jeg analyseverktøyet til å omfatte flere delkategorier når det gjelder representasjoner, jeg så også at ikke alltid bare én begrunnelse eller et resonnement kan knyttes til en elevs besvarelse på én deloppgave. I presentasjonen av oppgavene oppfordret jeg elevene til å legge vekt på tydelig begrunnelse og resonnement samt bruk av representasjoner. Etter hvert spørsmål er det også skrevet «vis, tegn, skriv». Dette kan være med å svekke validiteten, fordi det kan legge føringer på hva elevene svarer i oppgaven, og det kan være at den «riktige» informasjonen ikke kommer frem. Dette er også en av grunnen til at jeg har gjennomført intervju, slik at noen av elevene kan forklare besvarelsen og hvordan de tenker.

Den eksterne eller ytre validiteten er knyttet til om studiens resultater og studien i seg selv kan generaliseres til å være valid utenfor den gjeldende studien (Bryman, 2016, s. 42). Denne studien er såpass liten at den i liten grad kan bidra til å si noe om norske elevers begrunnelse, resonnement og forståelse av brøkdivisjon. Da jeg heller ikke har tatt hensyn til noe mer enn om elevene samtykket til deltagelse til å svare på oppgavene, kan man ikke fastslå at utvalget er et representativt utvalg for trinnet. Det er derfor viktig å påpeke at jeg ikke vil benytte mine funn til å trekke bastante slutninger eller generalisere i særlig grad. Andre forskere kan midlertidig lese min studie og mine funn. Og dermed kunne bruke oppgavene til å undersøke en større gruppe åttendeklassingers begrunnelser og resonnement i arbeid med divisjon av brøk oppgaver.

Bryman (2016) nevner også tre andre typer validitet. Da dette er en kvalitativ studie er ikke målingsvaliditet som er relatert til kvantitativ forskning relevant i denne studien (Bryman, 2016, s. 41). Den andre er økologisk validitet og handler om resultatene er anvendbare i hverdagen. Denne studien har til en viss grad dette da divisjon av brøk er noe som opptrer i samfunnet og elevene vil i større eller mindre grad møte dette både i og utenfor skolen. Samtidig kan studien være relevant for lærere i grunnskolen da den tar for seg utfordringer elever møter, og forskjellige begrunnelser og resonnement de bruker under løsning av divisjon av brøk oppgaver. Den siste er slutningsvaliditet og handler om hvordan studiens slutninger og konklusjoner er forsvart gjennom studiens funn. I denne studien sikrer jeg dette gjennom å sette tall på resultatene fra besvarelsene. Dette kommer frem i kapittel 4. I tillegg er analysen av besvarelsene blitt gjort basert på et analyseverktøy med tydelige kategorier.

Reliabilitet er knyttet til om studiens resultater er gjentagbare. Det vil si om forskningen ville gitt like resultater dersom en annen forsker benyttet seg av de samme metodene (Bryman, 2016; Thagaard, 2018). Ettersom dette er en kvalitativ studie kan det stilles spørsmål om total reliabilitet da det forskes på mennesker og et bestemt fenomen (Wellington, 2015). Gjennom kapittel 3 har jeg allikevel beskrevet valg for at en viss reliabilitet skal være mulig. Det handler om valg av utvalg for å gjøre funnene mest mulig autentiske. I tillegg handler det om å presentere funnene på en objektiv og korrekt måte.

3.6.2 Etiske betraktninger

«All vitenskapelig virksomhet krever at forskerne forholder seg til etiske prinsipper som gjelder så vel internt i forskningsmiljøet som i relasjon til omgivelsene» (Thagaard, 2018, s. 20). Etiske betraktninger og prinsipper må reflekteres over i forkant av et forskningsprosjekt, så vel som det må diskuteres og stilles spørsmål til valgene man tar underveis. Dette vil være med å styrke kvaliteten i en forskers arbeid (Postholm & Jacobsen, 2011).

Før jeg startet forskningen min søkte jeg godkjenning fra Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). Alle forskning- og studentprosjekter som gjennomføres ved universiteter, høgskoler og andre forskningsinstitusjoner skal meldes NSD ved å fylle ut et skjema som er tilpasset dette formålet. Etter at NSD hadde godkjent mitt prosjekt (vedlegg 1) i forhold til gjeldende forskningsetiske regler kunne jeg starte opp mitt prosjekt (Thagaard, 2018).

Som forsker har man ansvar for at studiens informanter ikke skal bli utsatt for fysisk skade, alvorlige eller urimelige belastninger som følge av forskningen (Thagaard, 2018). Derfor bør man ta hensyn til fire etiske prinsipper i forskningen. Den første er at man ikke skal påføre deltagerne noen form for skade. I denne studien er ikke deltagerne påført noen form for skade verken psykisk eller fysisk. Derimot kan det diskuteres om noen av informantene kan ha fått svekket selvtillit fordi de opplevde oppgavene utfordrende. Derfor ble det lagt vekt på at deltagelsen i prosjektet ikke hadde noe å si for deres matematikk karakter. På den måten er ikke studien med på å ødelegge elevenes framtidsutsikter og karrieremuligheter. Den bryter heller ikke med regler for taushetsplikt og avslører ikke deltagernes identitet (Bryman, 2016).

Det andre prinsippet går ut på at informantene må godkjenne sin deltagelse (Bryman, 2016). «Utgangspunktet for ethvert forskningsprosjekt er at forskeren må ha deltakerens *informerte samtykke*» (Thagaard, 2018, s. 22). Etter godkjenning fra NSD sendte jeg derfor ut samtykkeskjema, «Forespørsel om deltagelse i forskningsprosjekt» (vedlegg 2). Dette var utarbeidet i henhold til mal på NSDs sider og også godkjent. Fra dette skjemaet fremgår det at både foreldre/foresatte må godkjenne elevens deltagelse samt eleven selv. Det var også beskrevet at både foreldrene kunne trekke elevens deltagelse og eleven kunne trekke seg selv. Skrivet beskrev også forskningsprosjektet og vektla anonymisering av elev, klasse og skole. Disse elementene fremhevet jeg også før elevene svarte på oppgavene og i forkant av intervju med elevene.

Prinsipp tre går ut på at informantenes privatliv ikke skal invaderes. Dette er godt i varetatt i denne studien da de kun svarer på fagrelaterte spørsmål. Det siste prinsippet handler om at deltakerne ikke skal bli ført bak lyset eller løyet for. Elevene har hele tiden vært klar over hensikten med innhenting av besvarelser og hvordan disse skal brukes i forskningen, samt at besvarelsene og intervjuene holdes anonyme (Bryman, 2016). I kvalitative studier må man allikevel alltid ta stilling til hvor mye informasjon man skal gi om prosjektet slik at deltagernes atferd ikke påvirkes, i denne studien gjelder dette spesielt besvarelsene (Thagaard, 2018). Derfor valgte jeg å informere om at prosjektet handlet om divisjon av brøk i samtykkeskjemaet, men la ikke vekt på det når oppgavearket ble presentert for elevene.

4.0 Resultater og analyse

Innledningsvis i dette kapittelet vil jeg presentere en oversikt over antall svar per deloppgave. Denne er relevant for utregning av prosentandel bruk av ulike begrunnelser og resonnement, og representasjoner. I kapittel 4.2 vil antall riktige svar per deloppgave bli presentert, dette er med å gi en oversikt over hvor elever møter problemer samt relevant for diskusjonen i kapittel 5. Videre i kapittelet vil hovedfokuset være kategoriene begrunnelse og resonnement, representasjoner, feil og misoppfatninger. I tabellene som presenteres gjennom dette kapittelet vil det bli benyttet gul og blå farge. Dette brukes for å forsterke hvilken oppgave resultatene viser til.

4.1 Antall svar per oppgave

Alle elever har ikke svart på alle oppgavene. Hvis eleven har skrevet «jeg vet ikke» eller lignende eller lagt ruten stå tom, har jeg regnet det som ikke svar på oppgaven. Tabell 3 viser svarprosenten på oppgavene.

Tabell 3: Svarprosenten på oppgavene i 47 elevbesvarelsene

	Deloppgave a	Deloppgave b	Deloppgave c
Oppgave 1 – hvitt bånd	100%	97,87%	97,87%
Oppgave 1 – blått bånd	97,87%	95,74%	95,74%
Oppgave 1 – gult bånd	100%	91,49%	85,11%
Oppgave 2	91,49%	74,47%	68,01%

Tabell 3 viser at det er lavest svarprosent på oppgave 2b og 2c, samt oppgave 1, gult bånd (c).

4.2 Antall riktige svar per oppgave

Tabell 4 viser prosentandel riktige svar. Prosentandelen har blitt regnet ut fra antall svar på oppgavene og ikke det totale antallet elevbesvarelser. Elevens begrunnelse og resonnement har ikke blitt tatt hensyn til i denne fremstillingen. Det vil si hvis eleven har oppgitt riktig svar, men ikke vist begrunnelse og resonnement regnes det som riktig svar. Både svar oppgitt i brøk, naturlige tall og eventuelt desimaltall er tatt med som riktig svar. På oppgave 1, gult bånd (b), er både 4, 4,5 og dette skrevet på andre måter tatt med som riktig svar.

Tabell 4: Prosentandel riktige svar på hver oppgave.

	Deloppgave a	Deloppgave b	Deloppgave c
Oppgave 1 – hvitt bånd	100%	95,65%	100%
Oppgave 1 – blått bånd	91,30%	82,60%	80,43%
Oppgave 1 – gult bånd	85,11%	46,52%	70%
Oppgave 2	74,42%	20%	34,38%

Tabell 4 viser at elevene i stor grad fikk riktig svar på oppgave 1, hvitt bånd. Deretter synker prosenten for antall riktige svar. Oppgave 1, gult bånd (b) utmerker seg med lavt antall riktige svar. Resultatene fra oppgave 2 viser også at mange klarer a), mens b) og c) har et lavt antall riktige svar.

4.3 Begrunnelse og resonnement i besvarelsene

Tabell 5 viser prosentandel bruk av hver type begrunnelse og resonnement. Hver besvarelse ble analysert som tabell 2 viser, og deretter sett i sammenheng. Jeg kunne ikke finne noen besvarelser som brukte begrunnelse og resonnement som involverer motsigelse. Denne kategorien er derfor utelukket i tabell 5. Det samme er begrunnelse og resonnement som involverer gjenkjennelse av mønster. Denne kategorien vil likevel bli sett på i avsnitt 4.3.7, da noen besvarelser inneholder svar som kan minne om slik begrunnelse og resonnement. Gjennom analysen kom det frem at flere elever bruker en kombinasjon av forskjellige begrunnelser og resonnement. I tillegg kommer ikke begrunnelse og resonnement som involverer måling frem som egen underkategori i besvarelsene. I tabell 5 er også kategorien «ingen begrunnelse og resonnement» inkludert. Denne kategorien inneholder hovedsakelig de besvarelsen som ikke hadde noen begrunnelse og resonnement, samt de som ikke gikk under de andre kategoriene.

Tabell 5: Prosentandel forekomst av begrunnelser og resonnement i besvarelsene.

Oppgave	**Naturlige tall**	**Brøk**	**Naturlige tall og brøk**	**Naturlige tall og måling**	**Brøk og måling**	**Brøk, naturlige tall og måling**	**Ingen begrunnelse og resonnement**
1, hvitt bånd (a)	4,25%	76,60%			6,38%	4,25%	8,52%
1, hvitt bånd (b)	4,35%	76,11%		2,17%	6,52%	4,35%	6,52%
1, hvitt bånd (c)	10,87%	71,74%		2,17%	4,35%	4,35%	6,52%
1, blått bånd (a)	4,35%	80,44%	2,17%	2,17%	6,52%		4,35%
1, blått bånd (b)	11,11%	73,33%	6,67%	2,22%	4,45%		2,22%
1, blått bånd (c)	6,67%	66,66%			8,89%		17,78%
1, gult bånd (a)	4,26%	85,10%		2,13%	6,38%		2,13%
1, gult bånd (b)	4,65%	76,74%	2,33%		9,30%		6,98%
1, gult bånd (c)	5%	85%			10%		
2 (a)	6,98%	86,04%					6,98%
2 (b)	2,86%	91,42%			2,86%		2,86%
2 (c)	6,25%	81,25%	3,125%		3,125%		6,25%

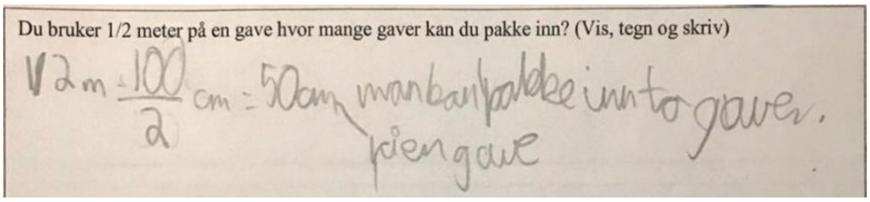
Tabell 5 viser at et klart flertall av elevene bruker begrunnelse og resonnement som involverer brøk. Spesielt skiller oppgaven med gult bånd og oppgave 2 seg ut med høy prosentandel bruk av brøk. Avsnitt 4.3.2 vil midlertidig vise at brøk brukes på forskjellige måter i besvarelsene. Det er verdt å merke seg at på oppgave 1, hvitt bånd (c) og oppgave 1, blått bånd (b) er andelen som bruker naturlig tall omtrent doblet sammenlignet med de andre deloppgavene. I oppgave 1, blått bånd (c) er det en mye større andel som ikke bruker noen begrunnelse og resonnement enn på de øvrige oppgavene. Videre viser oppgave 1, gult bånd (b) og (c) at en noe større andel enn på de andre deloppgavene bruker brøk og måling som begrunnelse og resonnement. I tillegg er (c) på samme oppgave den eneste deloppgaven der alle elevene har en begrunnelse og et resonnement til sitt svar. Når det gjelder resultatene fra oppgave 2 er det verdt å merke seg at i a-oppgaven blir kun to ulike begrunnelser og resonnement brukt hvis man ser bort i fra «ingen begrunnelse og resonnement».

Videre tar jeg for meg hver av underkategoriene fra tabell 5 bortsett fra «ingen begrunnelse og resonnement». Det vil komme frem hvordan disse underkategoriene uttrykkes i elevbesvarelsene og intervjuene. Samtidig blir det begrunnet med relevant teori.

4.3.1 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall

Å bruke naturlig tall for å løse en oppgave med divisjon av brøk kommer i studien til Bulgar (2002) til uttrykk gjennom å gjøre om 1 meter eller de andre meterslengdene til centimeter. I denne studien gjør elevene også om brøken til for eksempel centimeter. En slik strategi bruker gjennomsnittlig 5,97% av elevene på hver deloppgave i denne studien. Disse elevene bruker ikke brøk direkte i sine besvarelser. Likevel vil oppfattelse av ulike aspekter ved brøkbegrepet synliggjøres gjennom elevenes begrunnelser og resonnement (Bulgar, 2002; Van de Walle, 2004).

Elev 39 (figur 7) bruker begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall i flere av deloppgavene. Besvarelsen av denne oppgaven viser at eleven har gjort om en meter til 100 cm. Eleven forklarer svaret og sin begrunnelse på følgende måte i intervjuet:

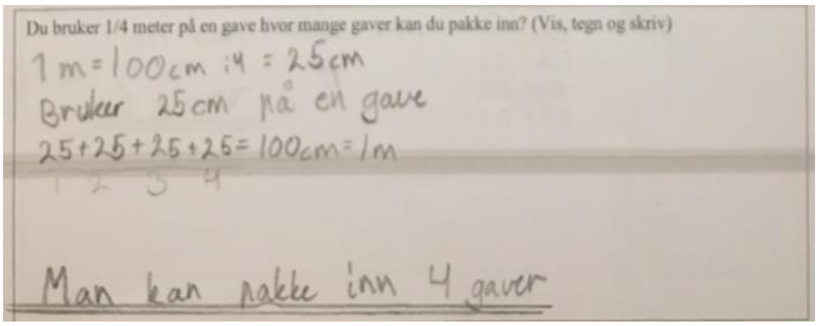


Figur 7: Elev 39, oppgave 1, hvitt bånd (a).

> Elev 39: Når det er så lite som skal måles så er det greit med cm også blir det mer virkelig. Jeg delte 100 på 2. Da får jeg 50 cm, og 50 pluss 50 er 100, så da kan jeg pakke inn to. Og sånn har jeg tenkt på de andre, men må dele på tre og fire på de andre.

Eleven presiserer også i løpet av intervjuet at oppgaven blir mer virkelig ved å gjøre om til cm. Eleven har også presisert tidligere i intervjuet at «måling og sånt, areal» er elevens favorittemaer i matematikk. Dette er med på å forklare hvorfor eleven velger en slik begrunnelse og resonnement. Det å bruke kunnskap eleven liker for å løse et slik problem viser at eleven kan analysere situasjonen for å konstruere en logisk begrunnelse og resonnement. Samtidig ser eleven sammenheng mellom de matematiske områdene divisjon av brøk og måling (Kaur & Toh, 2012).

Elev 10 (figur 8) har også brukt naturlig tall som begrunnelse og resonnement i noen oppgave. Intervjuet med elev 10 tyder på at elev 10 og 39 har tenkt likt når de løser oppgaven.



Figur 8: Elev 10, oppgave 1, hvitt bånd (c).

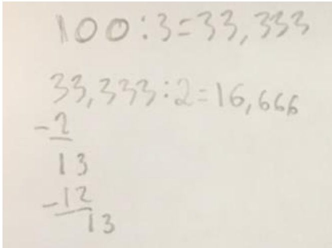
> Elev 10: 1 meter er jo 100 cm også delte jeg det på 4 så da blir det 25 cm på en gave, også tenkte jeg hvor mange ganger man kan bruke 25 for å få 100. Det er fire så da blir det fire gaver.

Begge elevene tenker hvor mange ganger antall centimeter til en gave går inn i enheten, altså antall meter. Det kommer også frem at elevene oppfatter at $\frac{1}{2}$ betyr å dele på to (Bulgar, 2002). Elev 39 (figur 7) bruker brøkstreken for å symbolisere divisjon, selv om eleven ikke har forklart dette i intervju kan det tyde på at eleven har en oppfatning av brøk som divisjon eller operator (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Elev 14 bruker en lignende begrunnelse og resonnement som elev 10. I motsetning til de andre elevene som har gjort om til centimeter har denne eleven brukt prosent. Prosent og brøk er beslektede temaer, og måten eleven har gjort om $\frac{1}{4}$ til 25% kan tyde på at denne eleven som elev 39 har en oppfattelse av brøk som divisjon eller operator (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Elev 10, 18 og 19 har løst oppgave 2a ved å bruke naturlig tall. Disse har brukt lik begrunnelse og resonnement. Elev 19 sin besvarelse vises i figur 10, mens elev 10 forklarer begrunnelsen og resonnementet i intervju.

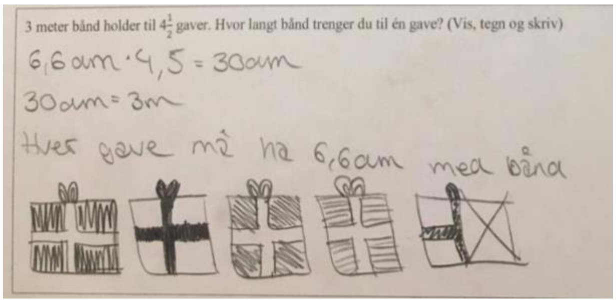
> Elev 10: Jeg har delt en meter på tre meter så fikk jeg 33,333 også har jeg delt det på to. Siden jeg skal finne til én gave. Også har jeg fått 15,555.



Figur 9: Elev 19, oppgave 2a.

Det er verdt å merke seg at elev 10 har gjort feil i divisjonen av 33,333 med to, men begrunnelsen og resonnementet er riktig. Forklaringen til elev 10 viser at for å finne antall cm til én gave, innebærer det å dele antall cm til to gaver med to. På bakgrunn av dette kan det se ut til at elev 10 og mulig elev 18 og 19 har en oppfattelse av at delingsdivisjon betyr å finne «hvor mange/mye er én» (Van de Walle, 2004).

Elev 15 har brukt naturlig tall som begrunnelse og resonnement gjennomgående i alle oppgavene utenom på oppgave 2a hvor eleven har brukt brøk. Eleven har ikke gitt noe svar på 2b. I alle oppgavene har eleven i motsetning til de andre elevene jeg har nevnt gjort om fra meter til desimeter. Dette gjør også eleven i oppgave 2c (figur 10). Begrunnelsen og resonnementet viser at eleven vil finne et tall 4,5 gaver kan multipliseres med for å få 30 dm. Eleven har derimot ikke vist ved utregning hvordan 6,6 dm er kommet fram ti. I utregningen skiller eleven klart mellom hva som er gaver og hva som er desimeter. Eleven skiller altså enhetene i oppgaven fra hverandre, noe som er viktig for å kunne løse oppgaver med divisjon av brøk (Lamon, 2012). Ettersom eleven gjør om $4\frac{1}{2}$ til 4,5 og bruker naturlig tall som begrunnelse og resonnement i nesten hele oppgavesettet tyder dette på at eleven har kunnskap om aspektet ved brøk som divisjon. Eleven har oppfattet at 1 og 2 er to hele tall som kan deles på hverandre (Birkeland et al., 2011).



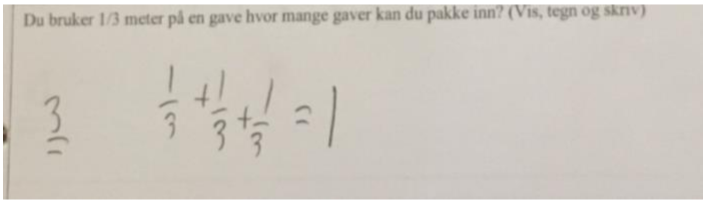
Figur 10: Elev 15, oppgave 2c.

4.3.2 Begrunnelse og resonnement som involverer brøk

Gjennomsnittlig er det 79,62% som bruker begrunnelse og resonnement som involverer brøk. Gjennom tabell 5 kommer det også fram at det er den mest brukte begrunnelse og resonnement i hver deloppgave. Det er i midlertidig stor variasjon i hvordan elevene har brukt brøk i sine besvarelser.

I oppgave 1 brukes brøk som begrunnelse og resonnement på hovedsakelig to forskjellige måter. Flere av elevene har gjort som elev 13 (figur 11) og brukt gjentatt addisjon. En slik begrunnelse og resonnement har eleven brukt i hver deloppgave gjennom oppgave 1.

Figur 11 viser at $\frac{1}{3}$ blitt addert tre ganger, eleven får da 1 meter til svar. Ut fra dette forstår eleven at 3 gaver kan pakkes inn. Eleven viser gjennom dette svaret kunnskap om hvordan brøker adderes når nevneren er lik (Van de Walle, 2004).



Figur 11: Elev 13, oppgave 1, hvitt bånd (b)

Gjentatt addisjon er tett knyttet opp mot multiplikasjon, som er den andre måten elevene hovedsakelig løser oppgave 1 på. Elev 36 løser flere av deloppgavene ved å bruke multiplikasjon. Eleven skriver at «$\frac{1}{2}$ • 2 = 1» og avslutter med svarsetningen «Du kan pakke inn 2 gaver». I intervju forklarer eleven begrunnelsen og resonnementet slik:

> Elev 36: De første, det var jo. Du bruker ½ meter på en gave. Og båndet er én meter langt. Da kan du jo pakke inn to gaver. Det er jo ganske lett å forstå det.

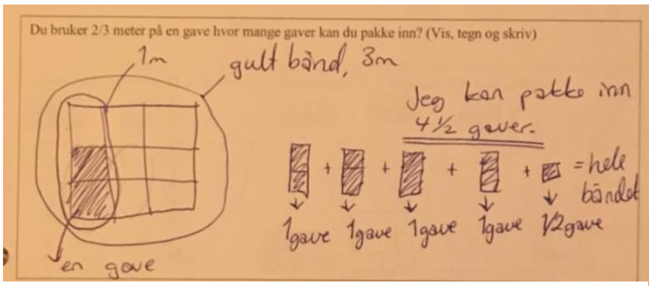
Eleven forklarer ikke hvorfor eller hvordan multiplikasjon blir brukt som begrunnelse og resonnement. Uttalelsen på slutten gir inntrykk av at eleven forstår hva svaret skal være, men å forklare hvorfor svaret blir slik er vanskeligere. Eleven analyserer situasjonene og finner et svar, men sier i intervju at det er vanskelig å skrive utregning eller begrunnelse. På oppgave 1, blått bånd (a) har eleven svart «$\frac{1}{4}$ • 4 = 2» og avsluttet med svarsetningen «Du kan pakke inn 4 gaver». Besvarelsen forklares av eleven på følgende måte.

> Elev 36: Hvis jeg ganget ½ meter med fire får jeg to meter derfor kan jeg pakke inn fire gaver.

Her argumenterer eleven i større grad for svaret. Eleven ser sammenhengen mellom situasjonen og kunnskap eleven har om multiplikasjon av brøk (Kaur & Toh, 2012). Besvarelsen viser oppfattelse av at nevneren i brøken er en divisor da svaret på multiplikasjonen blir besvart med to og ikke $\frac{4}{2}$. Dette tyder på at eleven oppfatter brøk som divisjon og operator (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

En slik oppfattelse av brøkbegrepet kommer også til uttrykk i elev 18 sin besvarelse av oppgave 1, hvitt bånd (a) og blått bånd (a). Eleven har svart «0,5 • 4 = 2,0, Du kan pakke inn 4 gaver». Brøken har blitt omgjort til desimaltall og deretter multiplisert som elev 36 har gjort. Eleven ser at svaret på oppgaven, er tallet, 0,5 må multipliseres med for å få to.

Elev 23 har brukt tegning for å løse hele oppgave 1. Elevens svar på disse oppgaven og viser at eleven gjennom tegningene sine gjenkjenner hva som er enheten og skiller mellom gaver og meter. Elevens svar på oppgav 1, gult bånd (b) (figur 12) viser dette:



Figur 12: Elev 23, oppgave 1, gult bånd (b).

Eleven forklarer svaret på følgende måte:

> Elev 23: Også der tenkte jeg egentlig det samme (henviser til deloppgave 1 på gult bånd). At hver kolonne er 1 meter så jeg tegner tre sånn. Så bruker jeg to av tre deler på en gave. Da får jeg fire (henviser til de små rutene tegnet for seg selv) som jeg har tegnet der. Også er det 1 rute igjen og det er $\frac{1}{2}$ gave. Så da blir det 4,5 gaver.

Eleven viser gjennom forklaringen og tegningen evne til å se at ruta som er igjen ikke er $\frac{1}{3}$ gave, men en $\frac{1}{2}$ gave. Eleven skiller gaver og meter fra hverandre, samt gjenkjenner enheten (Lamon, 2012). I oppgave 1, gult bånd (b) er dette utfordrende for mange elever fordi man sitter igjen med en rest oppgitt i meter. Denne resten må gjøres om til antall gaver (Lamberg & Wiest, 2012). På bakgrunn av dette viser eleven at problemene er oppfattet riktig og kunnskap om aspektet; brøk som del av det hele (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

På oppgave 2a viser tabell 5 at 86,04% av elevene har brukt brøk som begrunnelse og resonnement. Mange av eleven har her skrevet opp følgende regnestykke «$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$». Elev 36 er en av elevene som har løst oppgaven slik og forklarer i intervjuet:

> Elev 36: Hvis $\frac{1}{3}$ er til to gaver må $\frac{1}{6}$ være til én gave fordi du må dele det på to.

Eleven har oppfattet at for å finne hvor mange meter som trenges til 1 gave må man dele på 2. Eleven forklarer derimot ikke hvorfor $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$, altså hvordan divisjon av brøk fungerer. Eleven ser at svaret er halvparten av $\frac{1}{3}$ som er $\frac{1}{6}$. Det samme kommer frem i elev 5 sin besvarelse av oppgaven.

> Elev *5:* At her, ehh, (leser oppgaven). Så her tenkte jeg at $\frac{1}{3}$ meter er nok til to gaver også delte jeg $\frac{1}{3}$ meter på to og da fant jeg ut at $\frac{1}{6}$ meter er nok til 1 gave.
> Intervjuer: Her har du skrevet $\frac{2}{2}$ er det, to gaver?
> Elev 5: Jeg tenkte $\frac{1}{3}$ delt på to også oppe og nede.

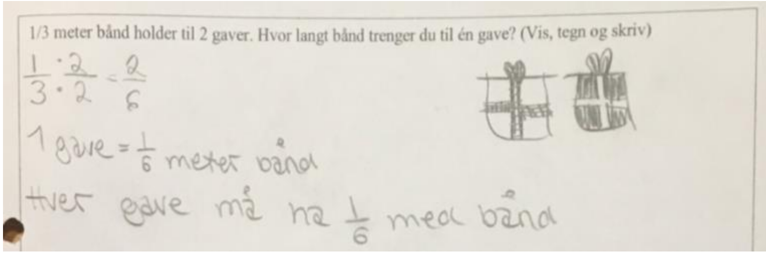
Først kommer det frem at eleven ikke har skrevet 2 som brøk riktig. Det ser ut til at eleven ikke har tenkt på at brøkstreken også symboliserer divisjonstegn og at $\frac{2}{2} = 1$ (Bue et al., 2000). Eleven har tenkt at divisjon av brøk innebærer at teller og nevner i dividenden skal deles på to. Etter hver forstår eleven at $\frac{2}{2}$ ikke er 2 gaver og at det nye regnestykke må bli $\frac{1}{3} : \frac{2}{1}$. Eleven for da spørsmål på hvordan dette regnestykke kan bli $\frac{1}{6}$ som eleven vet er svaret på oppgaven, og resonnerer seg frem til det på følgende måte:

> Elev 5: Du deler oppe og nede er det ikke noe sånt?
> *(…)*
> Elev 5: Ja, nå husker jeg. Du bytter oppe og nede så det blir $\frac{3}{1} : \frac{1}{2}$, er det ikke sånn?
> *(…)*
> Elev 5*:* Nei, du tar $\frac{1}{3}$ del gange med $\frac{1}{2}$ del blir det ikke det?
> Intervjuer: Ja! Hva gjør du?
> Elev 5: Du snur den siste og ganger så da blir det $\frac{1}{6}$.

Eleven kommer til slutt frem til svaret, men begrunnelsen og resonnementet tyder på at eleven synes algoritmen er vanskelig å huske. Gjennom setningen «du snur den siste og ganger» kan man få inntrykk av at algoritmen er mekanisk for eleven (Tirosh, 2000).

Elev 3 bruker også divisjon i sin begrunnelse og resonnement. Når eleven skal løse divisjonsstykke brukes ikke algoritmen. Løsningen av divisjonsstykket blir forklart ved hjelp av kunnskapen eleven har om å utvide brøker.

> Elev 3: Hvis du har to gaver må man dele det på to for å få én gave og da må jeg dele $\frac{1}{3}$ på to også.
> Intervjuer: Ja, jeg forstår, hvordan vet du at $\frac{1}{3}$ delt på to er $\frac{1}{6}$ del?
> Elev 3: Jeg tenker det litt. For du kan jo utvide den til 2/6 så da må halvparten bli 1/6.



Figur 13: Elev 15, oppgave 2a.

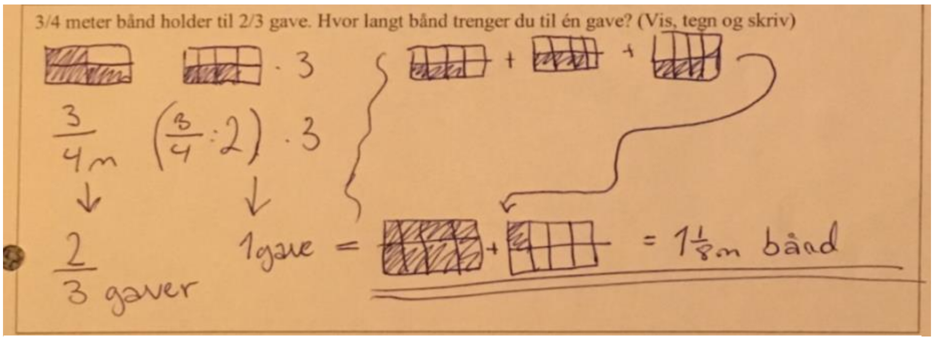
Gjennom den skriftlige besvarelsen til elev 15 (figur 13) kommer også utviding av brøk frem som begrunnelse og resonnement. Elevene utvider brøken til $\frac{2}{6}$ og oppfatter da at til én gave trenger man $\frac{1}{6}$. Elevene bruker fortsatt divisjon av brøk, men ikke algoritmen direkte. Dette viser at ulike begrunnelser kan føre til riktig svar, og at algoritmen ikke nødvendigvis må innføres med det første elevene møter divisjon av brøk (Van de Walle, 2004).

Til tross for at elev 3 ikke forklarte løsningen av oppgave 2 a med algoritmen viser det seg i oppgave 2 b at eleven også mestrer algoritmen. Eleven har løst oppgaven på følgende måte «$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \bullet \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$». Eleven har også skrevet «finner til 1» i sin besvarelse, i intervju forklarer eleven dette på følgende måte:

> Elev 3: Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal forklare det, det er på en måte det du gjør her. Du må dele for å finne svaret.
> Intervjuer: Du har skrevet finner til én, hva mener du med det?
> Elev 3: Det er jo det du gjør når du deler så finner du til én.

Eleven viser dermed kunnskap om at delingsdivisjon ikke bare innebærer rettferdig deling, men også å finne hvor mange til én (Van de Walle, 2004).

Elev 23 sin besvarelse (figur 14) av denne oppgaven skiller seg fra de andre elevbesvarelsene som har brukt algoritme. I intervju forklarer eleven begrunnelsen og resonnementet på følgende måte:

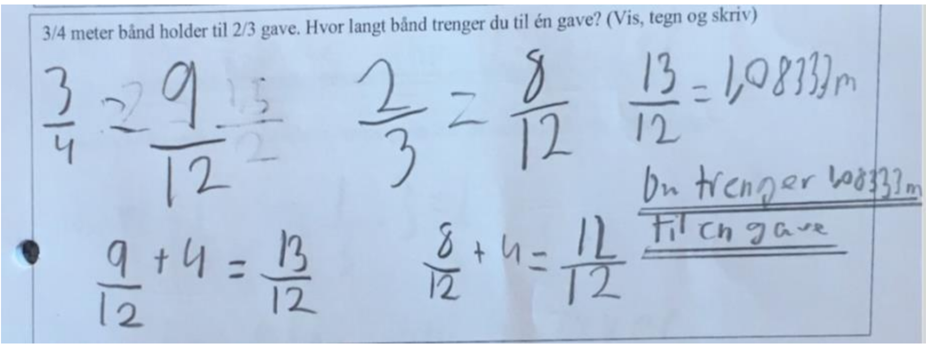


Figur 14: Elev 23, oppgave 2b

> Elev 23: Ehh, jeg skrev først det som stod at $\frac{3}{4}$ dels meter bånd er til $\frac{2}{3}$ dels gave. Også må jeg dele på to for å finne ut hvor mange det blir til $\frac{1}{3}$ gave. Så da deler jeg rutene i to, men det er fortsatt bare tre av de som er skravert så jeg tegner den tegningen der (peker på tegning). Også for å finne hvor mye jeg trenger til én gave ganger jeg med tre så da tegner jeg det sånn også blir det sånn som er $\frac{9}{8}$. Så det blir 1 og $\frac{1}{8}$ dels meter for én gave.

Eleven oppfatter at bruk av divisjonsalgoritmen for brøk innebærer å finne for én endel. Det gjør eleven ved å dividere med to. Da finner eleven hvor mye bånd som trengs til $\frac{1}{3}$ dels gave. Deretter finner eleven for én hel ved å multiplisere med 3 (Van de Walle, 2004). Samtidig ser man at eleven kjenner til aspektet brøk som divisjon gjennom at $\frac{3}{3}$ er det samme som én gave (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Elev 36 (figur 15) bruker også begrunnelse og resonnement som involverer brøk og gir følgende svar:



Figur 15: Elev 36, oppgave 2b.

I intervjuet forklarer eleven svaret sitt slik:

> Elev 36: Jeg ganget begge med tre for å få lik verdi, eller lik nevner. Også plusset jeg med 4 på begge.
> Intervjuer: Hvorfor har du plusset med fire?
> Elev 36: Det har jeg virkelig ikke peiling på. Kanskje fordi det står fire der da?

Det kommer frem at eleven har gitt brøkene lik nevner. På bakgrunn av dette kan det tenkes at eleven vil bruke strategien om gjentagende subtraksjon som Van de Walle (2004) skriver om. Dette ville videre innebære at eleven forstod at åtte går opp i ni en gang, og at man sitter igjen med $\frac{1}{8}$ meter i tillegg. Her har i stedet eleven valgt å addere hver teller med 4 for deretter å svare $\frac{13}{12}$. Svaret er ikke langt unna det riktige svaret i verdi, på bakgrunn av dette kan eleven ha tenkt at det er riktig. Selv om begrunnelsen og resonnementet ikke gir mening til divisjon av brøk har eleven prøvd å begrunne svaret sitt og forklare dette med symboler og et matematisk språk knytet til brøk (Kaur & Toh, 2012; Utdanningsdirektoratet, 2006).

I figur 14 forklarer elev 23 algoritmen for divisjon av brøk om å snu divisoren for deretter å multiplisere dividend med divisor. Eleven gjenkjente også enheten i denne oppgaven, altså meter. I oppgave 2c velger derimot elev 23 å dividere 4,5 med 3. Eleven klarer ikke her å gjenkjenne riktig enhet og finner derfor hvor mange gaver som kan pakkes inn på en meter fremfor hvor mange meter som trengs for å pakke inn én gave. I løpet av intervjuet oppfatter eleven at tre må deles på 4,5. Selv om eleven løste oppgave 2 b med brøk og tegning, velger eleven her å dividere slik at et desimaltall blir svaret. Elev 36 og 39 har også utført oppgaven på samme måte og svart «3 : 4,5 = 0,66 meter for én gave».
Kun fire elever bruker algoritmen om å snu divisoren og multiplisere riktig i denne oppgaven. Elev 2 er en av disse og svarer: «$4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \frac{6}{2} \bullet \frac{2}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$». Det som skiller elev 2 sitt svar fra de andre som bruker algoritmen er at 3 skrives som $\frac{6}{2}$ i stedet for $\frac{3}{1}$. Eleven viser med dette svaret forståelse for aspektet ved brøk som divisjon og operator (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Elevene som løser oppgaven med algoritme viser også kunnskap om blandet tall, uekte brøk og hvordan man kan gjøre om mellom disse måtene å skrive et tall på (Bue et al., 2000).

4.3.3 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall og brøk

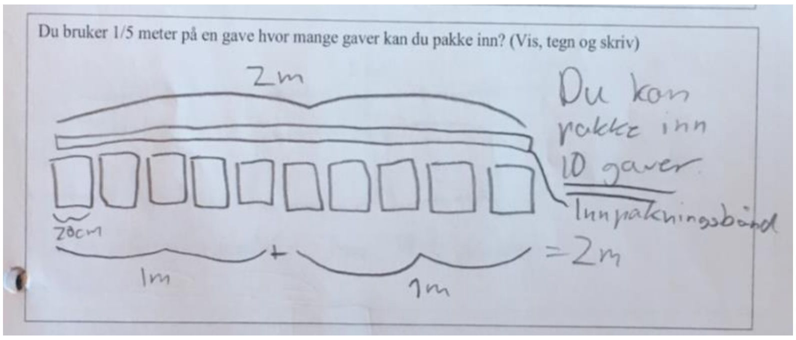
I avsnitt 4.3.1 ble det vist hvordan elevene som bruker begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall også viser kunnskap om brøk. Det å bruke en kombinasjon av naturlig tall og brøk som begrunnelse og resonnement vil derfor ha likheter med å kun bruke naturlige tall. Likevel har jeg valgt å plassere noen besvarelser i denne underkategorien. Tabell 5 viser at denne type begrunnelse og resonnement ikke kommer frem i alle deloppgavene. Tre elever har brukt en kombinasjon av brøk og naturlig tall på oppgave 1, blått bånd (b) og (c). Dette er den største andelen når det gjelder denne type begrunnelse og resonnement.

Felles for de tre besvarelsen er at for eksempel $\frac{1}{5}$ gjøres om til 0,2 meter eller 20 cm. Dette blir deretter multiplisert med ti som gir svaret to meter. Elevene oppfatter at dette er enheten i oppgaven og at det er ti gaver som kan pakkes inn. Elev 12 er en av eleven som bruker en kombinasjon av disse to begrunnelsene og resonnementene på denne oppgaven og svarer: «Du kan lage 10 gaver. 0,2 m bruker jeg på en gave og vis jeg ganger det med 10 blir det 2 meter, da kan jeg lage 10 gaver» (skrevet ordrett fra elevbesvarelse 12). Naturlig tall kommer til uttrykk gjennom at eleven gjør om til 0,2 m som er lik 20 cm (Bulgar, 2002). Aspektet brøk som divisjon kommer til uttrykk gjennom at eleven ser at $\frac{1}{5}$ er det samme som 0,2 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

4.3.4 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall og måling

Tabell fem viser at dette er den nest minst brukte kombinasjonen av de ulike begrunnelsene og resonnementene. Kombinasjonen av naturlig tall og måling kommer kun til uttrykk i én besvarelse. Elev 5 bruker den i oppgave 1, hvitt bånd (b) og (c) og blått bånd (a) og (b).

I besvarelsen (figur 16) kommer naturlig tall til uttrykk ved at eleven gjør om $\frac{1}{5}$ til 20 cm. Eleven viser med dette oppfattelse av aspektet brøk som divisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Måling kommer først og fremst til uttrykk gjennom tegningen. Eleven har tegnet et bånd som representerer to meter og under dette rektangler som representerer 20 cm bånd og antall gaver. Eleven ser altså hvor mange slike det er plass til under båndet og får 10 som svar. I intervjuet med eleven forklares tankegangen slik:



Figur 16: Elev 5, oppgave 1, blått bånd (b).

> Elev 5: Du har to meter også deler du på fire. Da får du 0,5 og det blir 50 cm. Og hvis man ganger 50 cm med fire får man to meter så derfor blir det fire gaver.

I elevens forklaring brukes både divisjon og multiplikasjon. Det blir også nevnt at man må se hvor mange deler av en meter man har. Dette tyder på at eleven har kunnskap om flere av elementene i kunnskapspakka til Ma (2010). Blant annet brøkbegrepet, divisjon av hele tall, multiplikasjon av hele tall og addisjon kommer frem. Det samme gjør kunnskap om inverse operasjoner fordi eleven starter med to som dividend når han dividerer og ender med to som produkt etter multiplikasjon. Eleven ser for seg problemet og situasjonen, og lager en tegning som kan brukes for å resonnere seg frem til et svar (Kaur & Toh, 2012). Samtidig beskriver og forklarer eleven tankegangen ved å bruke et matematisk språk og matematiske begreper (Utdanningsdirektoratet, 2006).

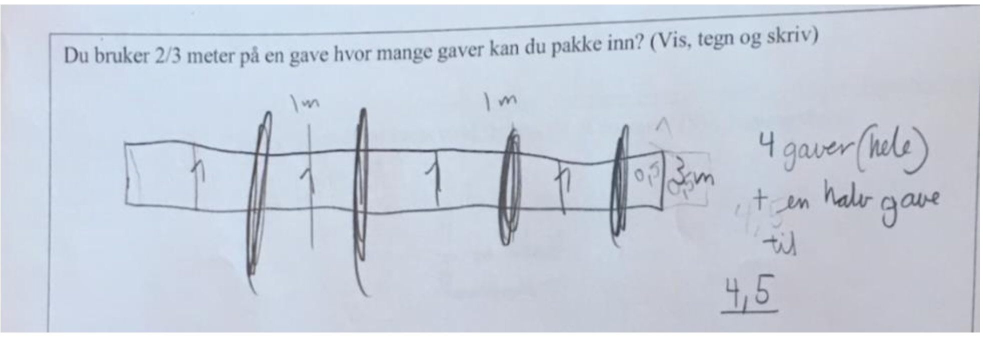
4.3.5 Begrunnelse og resonnement som involverer brøk og måling

I avsnitt 4.3.2 ble det vist at kategorien begrunnelse og resonnement som involverer brøk kommer frem på mange ulike måter i besvarelsene. Brøk kommer også til uttrykk sammen med måling. Felles for elevene som bruker begrunnelse og resonnement som involverer brøk og måling er at de bruker tegning som representasjon. Denne kombinasjonen av begrunnelse og resonnement er som tabell 5 viser, brukt i alle deloppgaver utenom oppgave 2 a. Tabell 5 viser også at den blir brukt mest på oppgave 1, gult bånd. Der bruker gjennomsnittlig 8,56% av elevene en slik begrunnelse og resonnement.

Elev 3 bruker brøk og måling som begrunnelse og resonnement gjennomgående i hele oppgave 1. Den første deloppgaven løser eleven også som likning. På spørsmål om hvorfor eleven ikke bruker likning videre svarer eleven følgende:

> Elev 3: Det var det greieste da kan man se det for seg litt mer. Men det går jo å løse med likning der også.

Eleven velger å bruke brøk og måling som begrunnelse og resonnement for å kunne se det for seg. Det viser at eleven har evne til å vurdere sine begrunnelser og svar, og velger bevisst den ene begrunnelsen fremfor den andre (Kaur & Toh, 2012). Oppgave 1, gult bånd (b) løser eleven på følgende måte:



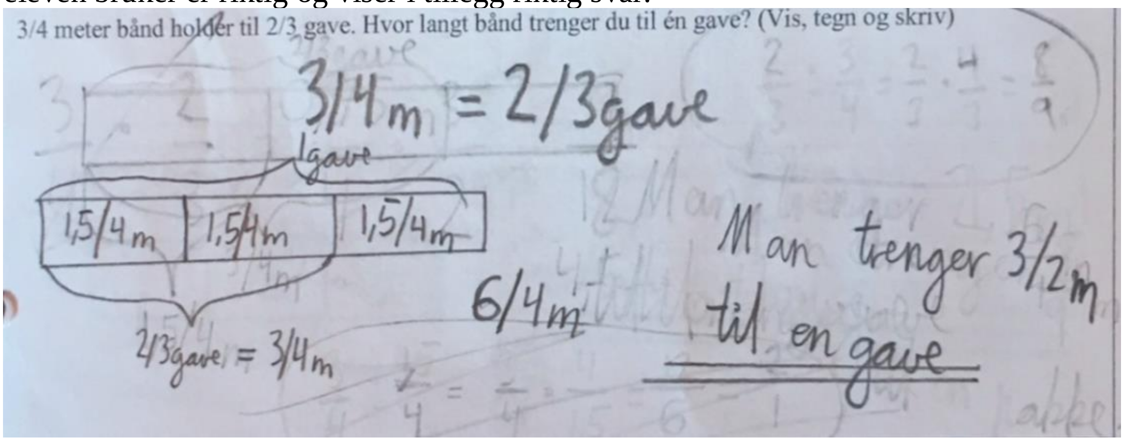
Figur 17: Elev 3, oppgave 1, gult bånd (b)

Besvarelsen (figur 17) viser at eleven har tegnet et bånd og delt det inn i tre meter. Deretter er hver meter delt inn i tre deler. Eleven gjenkjenner enheten og hvor mange deler enheten skal deles inn i. Samtidig oppfattes det at nevneren forteller hvor mange brøkdeler hver meter skal deles inn i. Hvor stor del av båndet én gave trenger blir markert med de tykke strekene. Om delen som er igjen sier eleven følgende i intervju:

> Elev 3: Jeg tenkte på en måte usynlig, at linja fortsetter og hvis det hadde vært en rute til så hadde det vært én gave så da ser jeg at det må være $\frac{1}{2}$ gave.

Flere elever som har løst oppgaven på en lignende måte som elev 3, klarer ikke å se at den siste $\frac{1}{3}$ meteren tilsvarer $\frac{1}{2}$ gave. Elev 3 viser dermed evne til å se for seg problemet samtidig som eleven viser kunnskap om aspektet brøk som del av det hele og brøk som divisjon ved å oppgi svaret 4,5 fordi $\frac{1}{2}$ er lik 0,5 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Elev 41 bruker også brøk og måling som begrunnelse og resonnement under løsning av flere av oppgavene. Eleven er for eksempel den eneste som bruker brøk og måling som begrunnelse og resonnement på oppgave 2b og c. På oppgave 2b oppgir eleven feil svar, men tegningen eleven bruker er riktig og viser i tillegg riktig svar.

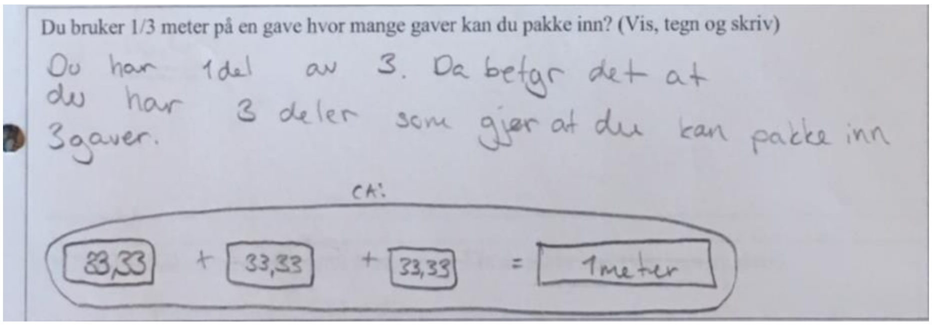


Figur 18: Elev 41, oppgave 2b.

Eleven viser med tegningen (figur 18) det som er oppgitt i oppgaven, at $\frac{3}{4}$ meter er nok bånd til $\frac{2}{3}$ gave. Eleven dividerer deretter telleren i dividenden med telleren i divisoren. Det gir svaret 1,5/4 som eleven viser i tegningen er nok til $\frac{1}{3}$ gave. Deretter multipliserer eleven 1,5 med 3, nevneren i den opprinnelige divisoren. Svaret blir dermed 4,5/4 = 1,125, som er det samme som $\frac{9}{8}$. Tegningen viser at eleven kan se for seg situasjonen og begrunne det ved å resonnere matematisk (Kaur & Toh, 2012). Eleven begrunner og resonnerer seg frem til svaret uten å bruke en gitt algoritme og ser at oppgaven handler om divisjon. Eleven oppfatter at antall meter må divideres med antall gaver for å finne antall meter til én gave (Van de Walle, 2004).

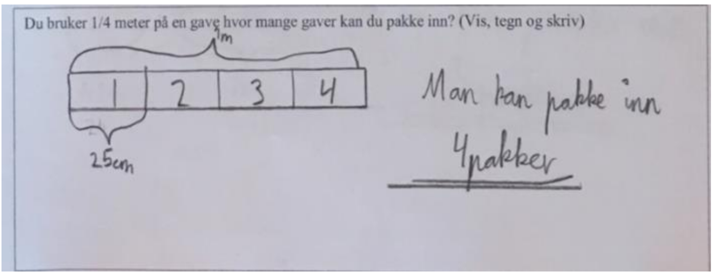
4.3.6 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall, brøk og måling

Denne kombinasjonen av alle begrunnelsene og resonnementene brukes kun i oppgave 1, hvitt bånd. I elev 37 sin besvarelse (figur 19) kommer både naturlig tall, brøk og måling til uttrykk gjennom begrunnelsen og resonnementet.



Figur 19: Elev 37, oppgave 1, hvitt bånd (b).

Begrunnelse og resonnement som involverer brøk kommer til uttrykk i elevens svar med naturlig språk. Eleven gjenkjenner at enheten er en meter og at den består av tre deler, og viser dermed forståelse for brøk som del av det hele (Van de Walle, 2004). Naturlig tall kommer til uttrykk gjennom tegningen, eleven oppfatter at hvert bånd må være 33,33 cm. Dette innebærer at eleven ser at $\frac{1}{3}$ = 0,3333 m = 33,33 cm, eller at 100 cm : 3 = 33,33 cm. Begge disse metodene innebærer at eleven har en oppfatning av brøk som divisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Måling kommer til uttrykk gjennom tegningen fordi elevene legger bånd på 33,33 cm etter hverandre 3 ganger.



Figur 20: Elev 41, oppgave 1, hvitt bånd (c).

Elev 41 (figur 20) bruker også en kombinasjon av alle begrunnelsene og resonnementene, men viser det kun gjennom bruk av tegning og symboler. Måling kommer til uttrykk gjennom tegningen, ved at et bånd deles opp i biter som legges etter hverandre. Naturlig tall kommer til uttrykk gjennom å finne ut hvor mange centimeter bånd som brukes på én gave. Det som skiller elev 41 sin besvarelse fra elev 37, er at begrunnelse og resonnement som involverer brøk kommer til uttrykk i tegningen. Et bånd som representerer en meter er delt opp i fire deler, der en del representerer en gave. Dette viser oppfattelse av aspektet brøk som del av det hele (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)

4.3.7 Begrunnelse og resonnement som involverer gjenkjennelse av mønster

Begrunnelse og resonnement som involverer gjenkjennelse av mønster kommer ikke til uttrykk som egen begrunnelse og resonnement i besvarelsene. Gjennom analyse av besvarelsene er det likevel kommet frem at flere elever bruker samme begrunnelse og resonnement i besvarelse av flere av deloppgavene.

I avsnitt 4.3.5 kom det frem at elev 3 bruker samme begrunnelse og resonnement i hele oppgave 1. Det tyder på at eleven ser at det er et mønster gjennom oppgavene. Elevens bruk av samme type tegning på oppgave 1, tyder på at eleven ser regelmessigheter og strukturer ved tegningen (Thom, 2011). På oppgave 2 endrer elev 3 begrunnelse og resonnement, dette forsterker inntrykket at eleven ser et mønster gjennom oppgave 1, og en måte disse deloppgavene kan løses på. Når eleven deretter kommer til oppgave 2, ser ikke eleven dette mønsteret og tegningen passer ikke inn. Elev 23 bruker firkanter eller flere kolonner ved siden av hverandre i tegningene for å begrunne svarene sine. Det kan bety at eleven forstår kjennetegn og strukturer ved tegningen sin. På den måten forstår eleven hvordan samme type tegning kan brukes for å løse flere ulike oppgaver (Thom, 2011).

Elev 39 er også en elev som konsekvent bruker samme begrunnelse og resonnement i sin løsning av oppgave 1. Eleven dividerer antall cm med antall brøkdeler meteren er delt inn, figur 7 viser eksempel på dette. I deloppgavene der eleven ikke møter stambrøker, brøker som ikke har 1 som teller, gir ikke begrunnelsen og resonnementet alltid riktig svar. Eleven multipliserer antall cm bånd med telleren i brøken før dette svaret divideres med brøkens nevner. Eleven følger et mønster gjennom løsning av oppgave 1 og avviker ikke fra dette. I løpet av intervjuet forstår eleven at en slik begrunnelse og resonnement ikke fungerer når oppgaven ikke inneholder stambrøk. Utdraget fra intervjuet med eleven på oppgave 1, gult bånd (b) viser dette:

> Elev 39: Jeg har vel gjort noe av det samme som jeg gjorde med blått bånd. Men det blir jo 66,66 cm på en meter. Også hvis da. Nei jeg kan tegne. (Tegner) Tre meter også dele inn i tre også tre igjen. Én gave blir der, to gaver, tre gaver. Det er jo noe igjen. Det blir fire også blir det 4,5. (…) Den siste er $\frac{1}{3}$ og det er $\frac{1}{2}$ gave.

Eleven oppfatter nå at hver gave trenger 66,66 cm med bånd. Videre går eleven bort fra begrunnelsen og resonnementet som elven brukte i besvarelsen. Eleven tegner en tegning som ligner tegningen til elev 3 i figur 19. Eleven går bort fra begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall til brøk og måling som begrunnelse og resonnement. Besvarelsen viser at når oppgavene ligner hverandre, kan det være lett å gå inn i et mønster å løse oppgavene på. Når et slikt mønster følges kan det være vanskelig å reflektere over om svaret er riktig og analysere oppgaven (Van de Walle, 2004).

Elev 36 går bort fra et mønster i sin besvarelse, fordi elevene oppdager at det ikke er like lett å bruke. Eleven bruker en begrunnelse og resonnement som involverer multiplikasjon av brøk på de 4 første deloppgavene. Deretter skifter eleven begrunnelse og resonnement til å gjelde divisjon. Eleven sier følgende i intervjuet:

> *Elev 36:* Ja, jeg skiftet teknikk midt i, det husker jeg. Da tenkte jeg at en gave er $\frac{1}{5}$ del og to meter er $\frac{10}{5}$ og siden en gave er $\frac{1}{5}$ og du skal bruke $\frac{10}{5}$ så er det jo ti gaver.

I intervjuet kommer det altså frem at eleven skifter begrunnelse og resonnement. Eleven skriver nå to meter som brøk med samme nevner som brøken er oppgitt i. På den måten har eleven fortsatt kontroll på at hver meter består av fem deler og at en gave tilsvarer en femtedel.

4.4 Representasjoner i begrunnelse og resonnement

Tabell 6 viser prosentandel bruk av hver representasjon i besvarelsene. Disse resultatene har kommet frem gjennom analyse av alle besvarelsen, slik tabell 2 viser. Deretter har bruk av hver representasjon blitt telt opp, og prosentandel bruk har blitt regnet ut på bakgrunn av antall besvarelser per oppgave. Denne studien har som hensikt å se hvordan representasjoner brukes i begrunnelsene og resonnementene. Da tegning og språk som svar ikke sier noe om dette er disse underkategoriene utelukket fra tabellen og videre analyse.

Tabell 6: Prosentandel bruk av hver representasjon i oppgavene.

Oppgave	**Språk som begrunnelse og resonnement**	**Tegning som begrunnelse og resonnement**	**Symboler - tall**	**Symboler – matematiske tegn**
1, hvitt bånd (a)	21,28%	19, 15%	97,87%	76,60%
1, hvitt bånd (b)	19,56%	26,09%	100%	63,04%
1, hvitt bånd (c)	19,56%	19,56%	100%	71,74%
1, blått bånd (a)	15,22%	21,74%	97,82%	73,91%
1, blått bånd (b)	17,78%	15,56%	100%	75,56%
1, blått bånd (c)	4,44%	17,78%	97,78%	75,56%
1, gult bånd (a)	6,38%	17,02%	100%	80,85%
1, gult bånd (b)	6,98%	23,26%	100%	72,10%
1, gult bånd (c)	7,5%	22,5%	100%	75%
2 (a)	9,30%	9,30%	95,35%	88,37%
2 (b)	11,43%	17,14%	94,29%	80%
2 (c)		15,625%	100%	93,75%

Tabell 6 viser at alle representasjoner blir brukt i hver deloppgave, bortsett fra språk som begrunnelse og resonnement som ikke blir brukt i oppgave 2c. Tabellen viser at symboler i form av tall er brukt i nær alle besvarelser av hver deloppgave. Symboler i form av matematiske tegn er den nest mest brukte representasjonen. Prosentandelen er svært høy i oppgave 2c. Dette kan forklares med at ingen elever bruker språk som begrunnelse og resonnement i denne oppgaven. På oppgave 1, hvitt bånd (b) er prosentandelen for denne representasjonen lavere sammenlignet med de andre deloppgavene. Dette kan forklares med andelen som bruker tegning som begrunnelse og resonnement er høyere på denne deloppgaven. Fra disse resultatene er det også verdt å merke seg at andelen som bruker språk som begrunnelse og resonnement synker fra oppgave 1, blått bånd (c).

Selv om det ikke kommer frem fra tabell 6 er det verdt å merke seg at i nesten hver besvarelse er brukt mer enn én representasjon for å løse oppgaven og oppgi svaret. På oppgave 1, hvitt bånd er det brukt flere representasjoner i hver besvarelse utenom en elev som kun bruker én type representasjon i (a). Det samme gjelder i oppgave 1, blått bånd og gult bånd. Utenom én elev som kun bruker én representasjon i blått bånd (c) og gult bånd (b). I oppgave 2 derimot brukes det mer enn én representasjon i hver besvarelse.

I kapittel 4.3 ble elevers begrunnelser og resonnement presentert ved bilder. Her kan man se at elvene bruker ulike representasjoner for å begrunne og resonnere seg frem til sine svar. I det videre vil jeg ta for meg underkategoriene fra tabell 6 mer systematisk. Jeg vil presentere hvordan de brukes i elevenes begrunnelse og resonnement, samt begrunne det med relevant teori.

4.4.1 Språk som begrunnelse og resonnement

Tabell 6 viser som påpekt at språk som begrunnelse og resonnement blir brukt i alle deloppgaver, bortsett fra 2c. Representasjonen brukes av flest elever i oppgave 1, hvitt bånd. Der bruker 19% til 21% av elevene språk som begrunnelse og resonnement.

Analysen av besvarelsene viser at en slik begrunnelse og resonnement hovedsakelig blir brukt sammen med andre representasjoner. Til tross for dette uttrykker elev 32 sin begrunnelse og resonnement kun ved hjelp av naturlig språk på oppgave 1, hvitt bånd (a) og skriver: «To halvmetere blir en hel, du kan pakke inn to gaver». Både tall og begrunnelse blir her representert med det Hiebert (1988) kaller naturlig språk.

Videre i oppgavebesvarelsen bruker elev 32 språk som begrunnelse og resonnement sammen med symboler i form av tall. Det er på denne måten flertallet av elevene bruker språk som begrunnelse og resonnement, noe som er helt naturlig da symboler er svært viktig i det matematiske språket og spiller en stor rolle i skolematematikken (Steinbring, 2006). Elev 10 bruker en slik kombinasjon i sitt svar på oppgave én, hvitt bånd (b) og skriver: «Hvis du har 3 biter papir som er en meter. Og du bruker 1 på en gave. Da har du 2 igjen. Og bruker du de, bruker du 3». Eleven forklarer svaret på følgende måte:

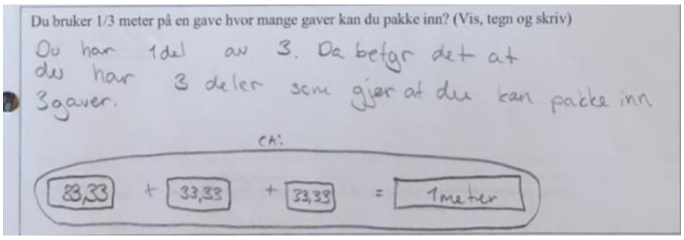
> Elev 10: Jeg vet ikke, hvis det er en av tre til en gave så blir to av tre til to gaver også tre av tre blir tre gaver.

Intervjuet viser også at elevene forklarer svaret ved å bruke språk sammen med symboler i form av tall, eleven nevner ikke noe om for eksempel regneoperasjoner som ville krevd flere representasjoner. På spørsmål om hvorfor eleven skriver ned begrunnelsen gis det følgende svar:

> Elev 10: Jeg synes det er litt vanskelig for jeg vet svaret men ikke hvordan jeg skal vise det med regning.

Eleven velger å begrunne svaret med naturlig språk, fordi det for eleven oppleves vanskelig å skrive ned en regneoperasjon. Det er viktig å huske på at selv om eleven ikke setter opp et regnestykke er oppgaven riktig løst. Den skriftlige begrunnelsen med naturlig språk gir like mye mening og beskriver den matematiske ideen på lik linje som for eksempel et regnestykke med symboler (Hiebert, 1988).

Elev 37 har vi sett i figur 19 bruke både språk, symboler og tall som begrunnelse og resonnement. Disse ble brukt på forskjellige måter og begrunner forskjellig aspekter ved oppgaven. Igjen ser vi at den skriftlige delen av besvarelsen begrunner svaret like godt som tegningen. Som eleven også har skrevet med «ca», gir ikke tegningen en nøyaktig begrunnelse fordi man ikke får nøyaktig én meter ved å gjøre om $\frac{1}{3}$ til 33,33 cm og addere de.



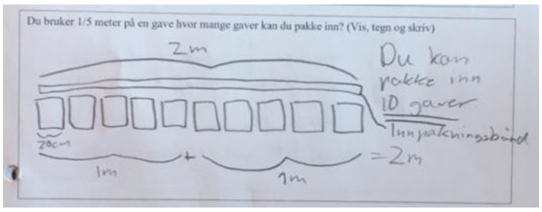
Figur 21: Elev 37, oppgave 1, hvitt bånd (b). (Lik figur 19).

Besvarelsene til disse elevene viser at selv om symboler er en viktig del av skolematematikken, skal man ikke glemme at skriftlige eller muntlige besvarelser med naturlig språk. Disse er også riktige og kan begrunne et svar like godt, i tillegg er det også en del av læreplanen som brukes i skolen (Utdanningsdirektoratet, 2006).

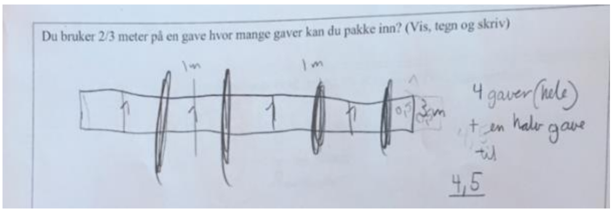
4.4.2 Tegning som begrunnelse og resonnement

I kapittel 4.3 ble det vist flere eksempler fra besvarelser som bruker tegning som begrunnelse og resonnement. Tabell 6 viser at klart flest elever bruker tegning når de løser oppgave 1, mens andelen synker fra gjennomsnittlig 20,29% bruk i oppgave en til 14% bruk i oppgave 2.

Gjennom å analysere hver besvarelse har jeg sett at elevene som bruker tegning som begrunnelse og resonnement i oppgave 1 tegner én tegning som ligner et bånd eller en tallinje. I avsnitt 4.3.4 og 4.3.5 så man hvordan elev 5 og 3 begrunner og resonnerer seg frem til svaret gjennom sin tegning.



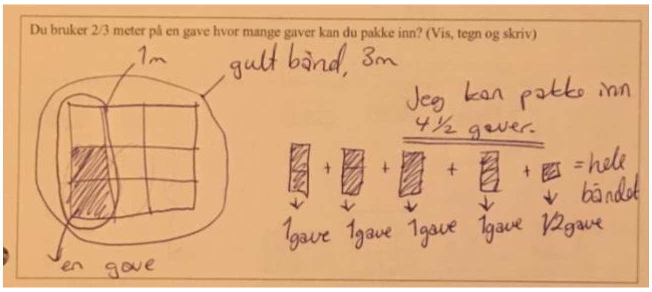
Figur 22: Elev 5, oppgave 1, blått bånd (b) (Lik figur 16).



Figur 23: Elev 3, oppgave 1, gult bånd (b). (Lik figur 17)

Under intervju svarer begge disse elevene på at tegning som representasjon hjelper de å løse oppgaven og for å gjøre problemet mer virkelig. Dette vises gjennom tegningen da den ligner et bånd (figur 22 og 23)

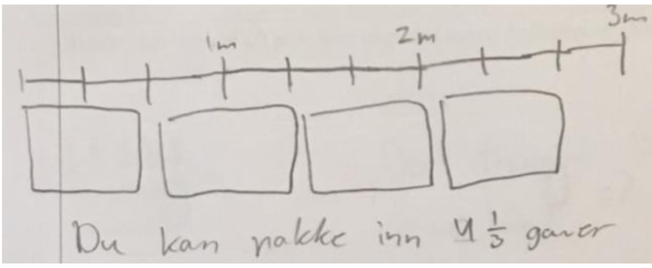
Elev 23 sin tegning (figur 24) som begrunnelse og resonnement skiller seg fra de tidligere tegningene. Eleven velger å tegne kolonner etter hverandre fremfor et langt bånd eller en tallinje lignende tegning.



Figur 24: Elev 23, oppgave 1, gult bånd (b). (Lik figur 12)

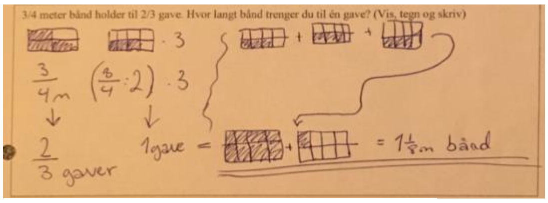
Felles for tegningene er at elevene med disse klarer å se for seg situasjonen noe som er viktig i møte med oppgaver som innebærer divisjon av brøk (Martinussen & Smestad, 2010). I tillegg ser man i tegningen til både elev 3, 5 og 23 at begrunnelsen og resonnementet også inneholder flere representasjoner enn tegning. I alle ser vi at de bruker symboler i form av tall, dette stiller krav til at elevene må bevege seg mellom forskjellige semiotiske representasjoner (Duval, 2006). I elev 3 og 23 sin tegning ser vi at elevene mestrer en slik overgang fordi de ser at den siste $\frac{1}{3}$ meteren tilsvarer $\frac{1}{2}$ gave.

Elev 5 er et eksempel på en elev som ikke klarer å skille tegningen og symbolet slik som de to andre. Tegningen består av en slags tallinje, og gaver under (figur 25). Tegningen egner seg like godt som tegningen til elev 3 og 23 til å resonnere seg frem til riktig svar. Det eleven ikke oppfatter er at den siste $\frac{1}{3}$ meteren ikke er $\frac{1}{3}$ gave, men $\frac{1}{2}$ gave. Det kan derfor se ut til at denne eleven opplever det mer utfordrende å bevege seg mellom ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006).

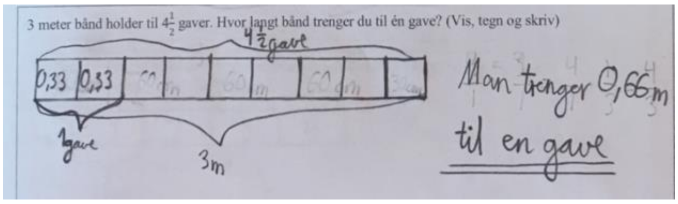


Figur 25: Elev 5, oppgave 1, gult bånd (b).

I oppgave 2 er det færre elever som bruker tegning som representasjon for å begrunne og resonnere seg frem til svaret. Elev 23 og 41 viser allikevel gjennom sine svar på henholdsvis 2b og c at situasjonen og regningen som utføres kan støttes opp og forklares med tegning.

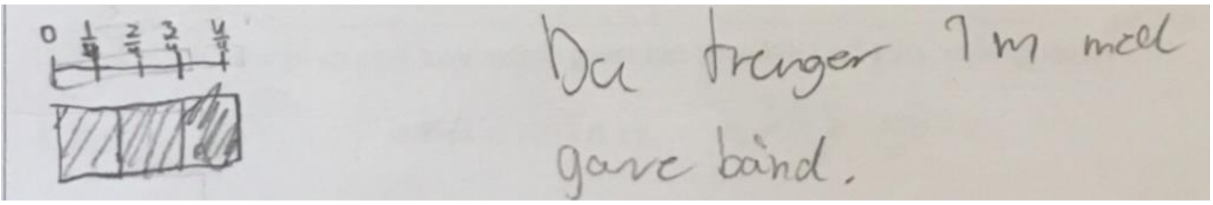


Figur 26: Elev 23, oppgave 2b. (Lik figur 14)



Figur 27: Elev 41, oppgave 2c.

Disse elevene utrykker seg skriftlig ved hjelp av tegning, og viser forståelse for hvordan ulike figurer kan hjelpe til å løse problemet (Utdanningsdirektoratet, 2006). Elev 5 forsøker også å tegne for å løse denne oppgaven.



Figur 28: Elev 5, oppgave 2b.

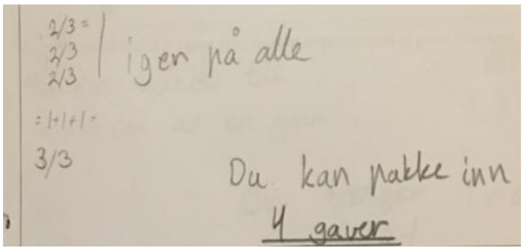
Eleven forklarer svaret på oppgaven på følgende måte:

> Elev 5: Dette var noe jeg og han jeg satt sammen med ikke skjønte helt. Vi prøvde å tegne også fikk vi en meter men det var litt vanskelig. $\frac{3}{4}$ og $\frac{2}{3}$ er jo ikke det samme. $\frac{2}{3}$ er 0,66 og $\frac{3}{4}$ er 0,75 så for en meter. Så vi tegna tre pakker og to pakker er $\frac{3}{4}$ også blir tre pakker $\frac{4}{4}$ som er 1 meter.

Besvarelsen (figur 28) og forklaringen viser at eleven oppfatter at problemet spør etter hvor mange meter til én gave. I tegningen så skiller eleven mellom de semiotiske representasjonene tegning og symboler, eleven beveger seg mellom ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006) I begrunnelsen derimot har eleven problemer med å skille symbolene for meter og gaver, samtidig som eleven ikke oppfatter at begrepet divisjon av brøk gjør sammensetningen av symbolene om til antall meter per gave (Steinbring, 2006).

4.4.3 Symboler i form av tall som begrunnelse og resonnement

I tabell 6 kom det frem at mellom 94% og 100% av elevene bruker symboler i form av tall i sine besvarelser. Dette understreker at tall er et av de mest brukte språksystemene i matematikken (Steinbring, 2006). Likevel er det viktig å påpeke at tall sjelden brukes alene, de trenger en av de andre representasjonene for at de skal kunne gi fullstendig mening til en begrunnelse og resonnement. Gjennom alle oppgavene eleven har løst må elevene skille mellom når symbolene representerer gaver og når de representerer meter. I avsnitt 4.4.2 kan man se hvordan elev 5 på oppgave 1, hvitt bånd (b) ikke skiller at den siste $\frac{1}{3}$ meteren på tegningen representerer $\frac{1}{2}$ gave. En slik utfordring møter også elev 10 på denne oppgaven (figur 29). Eleven har løst oppgaven og forklarer løsningen på følgende måte:

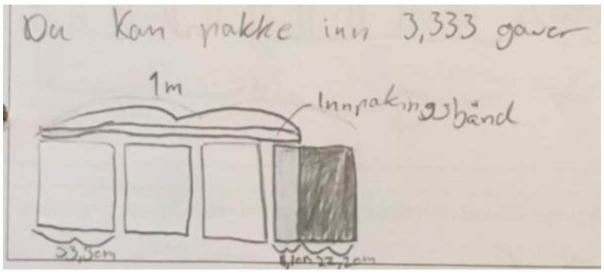


Figur 29: Elev 10, oppgave 1, gult bånd (b).

Elev 10: Hvis hver er på én meter så er det én igjen på hver. Da blir det først tre også blir det en til med to av de.
Intervjuer: Men da har du fortsatt noe igjen?
Elev 10: Jeg tok jo alle tre også den ene som var igjen på to av de så det blir 4 gaver.
Intervjuer: Men på den siste så har du noe igjen?
Elev 10: Ja, da er det $\frac{1}{3}$ del igjen da så det blir 4 og $\frac{1}{3}$.

I besvarelsen kan man se at tall som representasjon spiller en stor rolle, det gjør det også i elevens forklaring der eleven bruker tall i hver setning. Eleven forstår i besvarelsen og intervjuet at det er $\frac{1}{3}$ igjen på hver meter og at to av disse blir én gave. Eleven bruker derimot tid på å se den siste $\frac{1}{3}$ meteren, og når eleven oppfatter den ser ikke eleven at den representerer $\frac{1}{2}$ gave. Eleven møter utfordringen om at tegn står for noe annet, i dette tilfellet meter. Samtidig bærer tegnet med seg kunnskap, i dette tilfellet at $\frac{1}{3}$ meter representerer $\frac{1}{2}$ gave (Steinbring, 2006).

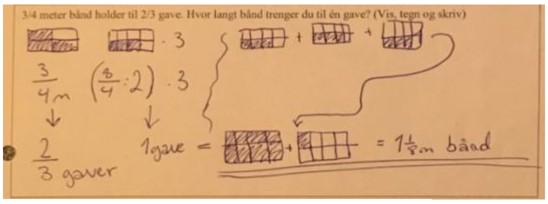
Gjennom flere av besvarelsene ser man hvordan elevene forstår at et objekt, for eksempel $\frac{1}{4}$ meter kan bli representert av ulike tegn. Elev 10 og 39 sammen med flere elever representerer det som 25 cm, elev 15 som 2,5 dm, elev 1 og 14 som 25%, og elev 6 som 0,25 m (Steinbring, 2006). I besvarelsen til elev 5 kommer det også frem at dette kan være utfordrende for noen elever. Eleven viser at $\frac{1}{3}$ meter kan skrives som 33,33 cm. Besvarelsen tyder derimot på at eleven blander dette symbolet inn når eleven skal avgjøre svaret på oppgaven, og svarer derfor 3,333 gaver.



Figur 30: Elev 5, oppgave 1, hvitt bånd (b).

4.4.4 Symboler i form av matematiske tegn som begrunnelse og resonnement

Utfra tabell 6 kan man regne ut at gjennomsnittlig 77,21% av elevene bruker symboler i form av matematiske tegn i oppgavene. De fleste elevene bruker matematiske tegn sammen med tall for å uttrykke regneoperasjoner. Dette gjør også elev 23 (figur 31), men i tillegg brukes de for å frem begrunnelsen og resonnementet i tegningen. Vi ser at eleven bruker det matematiske tegnet + for å knytte sammen tegningene.



Figur 31: Elev 23, oppgave 2b. (Lik figur 14 og 26).

I avsnitt 4.3.2 ble det vist at elevene som bruker brøk som begrunnelse og resonnement bruker hovedsakelig addisjon eller multiplikasjon gjennom oppgave 1. Elev 2 svarer for eksempel på oppgave 1, hvitt bånd (b) at «$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$». Dette tyder på at eleven oppfatter at sammensetningen av de ulike symbolene representerer én meter bånd, tre gaver, og begrepet addisjon av brøk. Det samme gjelder elev 36 som svarte at «$\frac{1}{3}\bullet 3 = 1$» i samme oppgave. Eleven oppfatter at symbolene representerer én meter, tre gaver og begrepet multiplikasjon av brøk (Steinbring, 2006)

Oppgave 2a blir som vi har sett tidligere løst av elev fem på følgende måte «$\frac{1}{3}:\frac{2}{2} = \frac{1}{6}$». Elev fem oppfatter at dette regnestykket og symbolene representerer antall meter bånd til én gave og begrepet divisjon av brøk. Allikevel kan man ikke konkludere med at eleven forstår dette, utdraget fra intervjuet med eleven i kapittel 4.3.2 viser at eleven ikke med det første forstår at $\frac{2}{2}=1$. Eleven vet heller ikke hvordan divisjon av brøk utføres, men oppfatter at $\frac{1}{6}$ må være det riktige svaret. Når eleven senere løser deloppgave tre dividerer eleven 4,5 med 3. Eleven tror fortsatt at dette representerer å finne antall meter til én gave, men nå finner eleven antall gaver på én meter. Dette tyder på at eleven verken oppfatter begrepet, her divisjon av brøk, eller referansekonteksten, her antall meter bånd til én gave, som regnestykket og symbolene representerer (Steinbring, 2006).

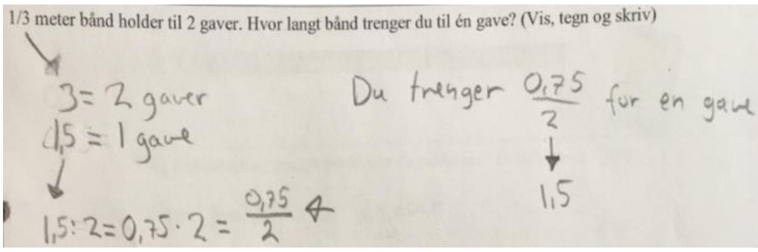
4.5 Feil og misoppfatninger i begrunnelse og resonnement

Å oppfatte om elevene gjør en feil eller bærer med seg misoppfatninger i skriftlige besvarelser og korte intervjuer er vanskelig. Det er derfor farlig å konkludere noe rundt dette. Oppgavene i denne studien er heller ikke laget for å avdekke misoppfatninger. I tillegg er det utfordrende å plassere én type feil i én feilkategori. På bakgrunn av dette vil det ikke bli presentert noen oversiktstabell knyttet til feilkategorier. I dette avsnittet vil jeg derfor ta for meg noen feil elever har gjort, kategorisere de og vise hvorfor de passer i kategorien. Jeg vil komme inn på mulige misoppfatninger elevene kan ha som bakgrunn for at de gjør en slik feil.

4.5.1 Algoritmebaserte feil

Algoritmebaserte feil for divisjon av brøk kommer til uttrykk i oppgave 2 da det kun er i denne oppgaven elevene begrunner svarene sine med divisjon av brøk algoritmen. I oppgave 2a kommer det til syne at flere elever gjør samme algoritmebaserte feil. Elev 37 er bare et eksempel på dett og svarer «$\frac{1}{3}:2=\frac{0,5}{1,5}$». Eleven deler både teller og nevner i dividenden med to og svaret blir dobbelt så stort som det egentlig skal. Eleven forkorter brøken og verdier er fortsatt den samme. Besvarelsen kan tyde på at eleven bruker sine kunnskaper om divisjon av naturlig tall direkte i møte med brøk, og ikke knytter det opp mot brøkkunnskaper (Van de Walle, 2004)

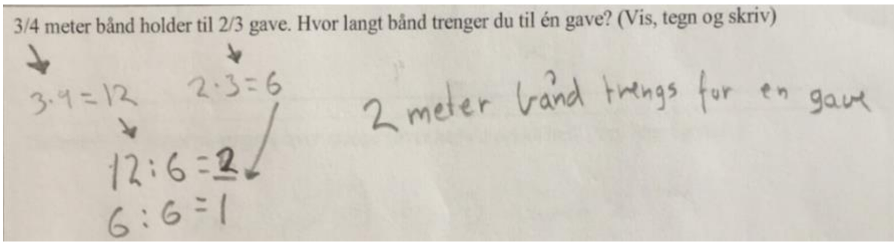
Gjennom besvarelsen til elev 12 (figur 32) kommer det også frem at eleven ikke bruker algoritmen for divisjon av brøk riktig. I besvarelsen ser det ut som eleven tar utgangspunkt i nevneren i brøken og dividerer denne med to, for deretter å dividere dette med to igjen. I svarsetningen som eleven oppgir er dette nok en gang dividert med to.



Figur 32: Elev 12, oppgave 2a.

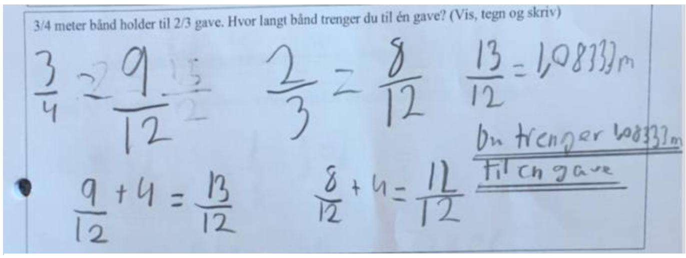
Elev 5 har som påpekt tidligere oppgitt riktig svar på denne oppgaven, men viser i intervju at eleven ikke vet hvordan algoritmen for divisjon av brøk utføres. Eleven nevner først at begge brøkene skal snus og deretter multipliseres, altså $\frac{3}{1} \bullet \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Å snu begge brøkene, eller feil brøk som denne eleven uttrykker, er i følge Tirosh (2000) vanlige eksempler på algoritmebaserte feil. Ettersom eleven vet at svaret skal bli $\frac{1}{6}$, klarer eleven til slutt å komme frem til riktig måte å utføre divisjon av brøk på.

I oppgave 2b kommer det også frem ulike algoritmebaserte feil, for eksempel har elev 12 (figur 33) også her utført algoritmen feil. Her har det derimot blitt gjort annerledes enn på oppgave 2a. Eleven har multiplisert teller og nevner i hver av brøkene, og deretter delt produktene på hverandre. Besvarelsen kan tyde på at eleven husker at noe skal multipliseres, men ikke hva. Eleven har også fått et svar som er et stykke unna riktig svar. Dette tyder på at eleven ikke klarer å vurdere hva som er et fornuftig svar på problemet (Van de Walle, 2004).



Figur 33: Elev 12, oppgave 2b.

Elev 36 utfører også en algoritmebasert feil (figur 34). Denne typen feil bærer mer preg av at eleven blander de ulike regneoperasjonene for brøk da eleven finner felles nevner og adderer med 4 (Tirosh, 2000).



Figur 34: Elev 36, oppgave 2b. (Lik figur 15).

Elev 39 sin algoritmebaserte feil tyder på at eleven har utført divisjon av brøk slik divisjon med naturlige tall utføres. Eleven har svart følgende: «$\frac{3}{4}$: 2 = $\frac{1,5}{2}$». Eleven har altså sett bort i fra nevneren i divisoren og delt både teller og nevner i dividenden med to. I intervjuet får eleven spørsmål om hvorfor dette har blitt gjort og gir følgende svar:

> Elev 39: Jeg vet egentlig ikke. (tenker). Tror egentlig jeg burde delt på $\frac{2}{3}$.

Eleven innser ganske fort at det i begrunnelsen og resonnementet ikke har blitt tatt hensyn til hele brøken, og at det derfor er feil. På videre spørsmål om hvordan divisjonen utføres fortsetter ikke eleven med samme strategi om å dele teller på teller og nevner på nevner.

> Elev 39: Det er vel noe greier om at man må gjøre om til samme nevner. Så da blir det tolv. Men da må jeg gange oppe også så da blir det. $\frac{9}{12} : \frac{8}{12}$. Så blir det $\frac{1}{12}$. Ehh, nei det blir vel minus det.

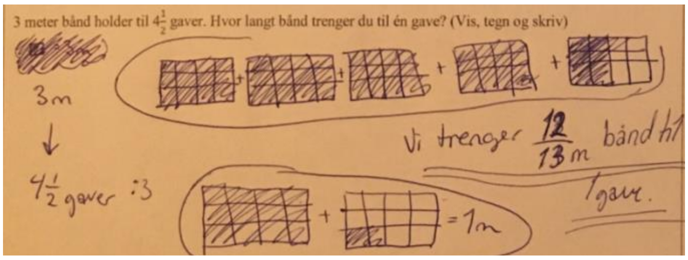
Elev gjør altså nå en annen vanlig algoritmebasert feil og blander divisjon av brøk med subtraksjon av brøk (Tirosh, 2000).

4.5.2 Intuitive feil

Intuitive feil er knyttet til elevenes oppfatning av divisjon og kommer derfor også til uttrykk i oppgave 2. I teori delen ble det nevnt at en misoppfatning mange bærer med seg er at dividenden må være større enn divisoren. Grunnen til det er at elevene er vant med dette fra delingsdivisjon som omhandler rettferdig deling (Tirosh, 2000). I flere elevbesvarelser på oppgave 2c ser man at elevene dividerer 4,5 med 3 istedenfor 3 : 4,5 som er det riktige. Elev 5 er en av elevene som har gjort det på denne måten i intervjuet sier eleven

> Elev 5: (…) men det er liksom lettere å dele 4,5 på tre enn motsatt.

Gjennom dette får man altså ikke inntrykk av at eleven har en misoppfatning knyttet til divisjon, kun at det er lettere å dividere et større tall på et mindre tall enn motsatt. Elev 23 har også delt 4,5 med tre. Eleven forklarer besvarelsen på følgende måte i intervjuet:



Figur 35: Elev 23, oppgave 2c.

> Elev 23: Jeg skrev først ned det jeg hadde at tre meter er til 4,5 gave. Så finner jeg hvor mange gaver til 1 meter bånd. Her har jeg fire også deler jeg alle i tre. Da hadde jeg ikke trengt de loddrette linjene. Så da fant jeg ut at én meter bånd er så mye for det må deles på tre.

Elevens utsagn tyder ikke på noen misoppfatning knyttet til at dividend må være større enn divisor. Eleven forstår også at divisjon i dette tilfellet betyr å finne til én, dette aspektet ved delingsdivisjon peker (Van de Walle, 2004) på at mange ikke forstår. Det er altså ikke aspektet om rettferdig deling ved delingsdivisjon som gir eleven begrensinger for å løse oppgave. Problemet er at eleven finner antall gaver per meter og ikke antall meter per gave. Det tyder på at eleven ikke oppfatter problemet, eller ikke oppfatter for å finne antall meter per gave må antall meter deles på antall gaver og ikke motsatt.

4.5.3 Feil basert på formell kunnskap

Denne kategorien knyttes til at elevene har misoppfatninger eller manglende kunnskap knyttet til brøkbegrepet eller regneoperasjoner. I avsnitt 4.5.2 ble det presentert at elever i deloppgave tre på oppgave to har dividert 4,5 med 3, blant annet elev 5, 6, 19, 23, 30, 34. I følge Hart og Team (1981) kan også dette bety at eleven har en misoppfatning om at divisjon er kommutativ. Intervjuene med elev 5 og 23 tyder derimot ikke på at elevene har en misoppfatning om dette. Mens ulike feil og oppfatninger kun kan knyttes til oppgave 2, kan oppfatninger om brøkbegrepet komme frem i alle deloppgavene i oppgaveheftet.

Selv om analysen har vist at mange elever gjenkjenner enheten i oppgaven viser besvarelsene at noen elever ikke gjenkjenner enheten også. Å gjenkjenne enheten kan knyttes til aspektet om brøk som del av det hele (Van de Walle, 2004). Dette kommer blant annet frem i elev 39 sin besvarelse på oppgave 1, blått bånd (a) og (b). Eleven har svart at to og fem gaver kan pakkes inn. I intervjuet innser derimot eleven at feil enhet har blitt brukt når eleven får spørsmål om hva $\frac{1}{2}$ er.

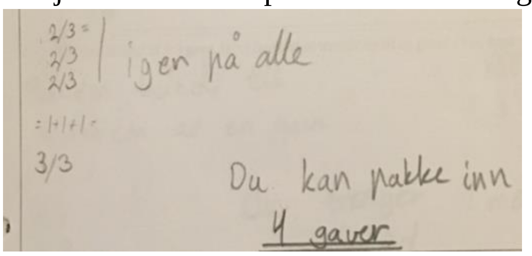
> Elev 39: Det er ½ meter. Åja, da blir det dobbelt så mye altså fire. Da har jeg gjort feil der også. Det blir vel egentlig ti. Siden det er to meter.

På bakgrunn av dette kan man altså ikke si at eleven har en misoppfatning knyttet til dette, da eleven fort innser feilen sin. Det kan like gjerne være en feil basert på at eleven ikke har lest oppgaven nøye nok (Drews, 2005). Samme elev møter også problemer på oppgave 1, blått bånd (c), gult bånd (b) og (c). Felles for disse oppgavene er at eleven ikke lenger møter stambrøker, brøker med en i teller (Van de Walle, 2004). Eleven forklarer svaret på oppgave 1, blått bånd (c) slik:

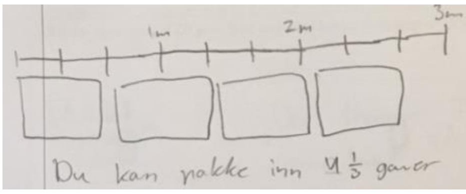
> Elev 39: Det er fortsatt to meter så det blir 200 cm også har jeg ganget det med to. Så blir det 400 også har jeg delt på tre. Da blir det 133,3 så kan jeg pakke inn tre gaver.

Eleven får med en slik begrunnelse og resonnement riktig på denne oppgaven, men når eleven gjør det samme på oppgave 1, gult bånd (b) og (c) får eleven feil svar. Dette viser at eleven får problemer med divisjon når det ikke lenger regnes med stambrøk. Eleven vet ikke hva som skal gjøres med telleren i brøken. En utfordring dette kan være knyttet til er elevens oppfatning av del hel aspektet ved brøk, og at eleven ikke oppfatter at telleren representerer antall deler (Van de Walle, 2004).

Oppgave 1, gult bånd (b) har også gitt elever utfordringer på en annen måte. I både elevbesvarelse 10 (figur 36) og 5 (figur 37) ser man at eleven ikke klarer å se at den siste tredjedelsmeteren representerer en halv gave.



Figur 36: Elev 10, oppgave 1, gult bånd (b) (Lik figur 29).



Figur 37: Elev 5, oppgave 1, gult bånd (b). (Lik figur 25).

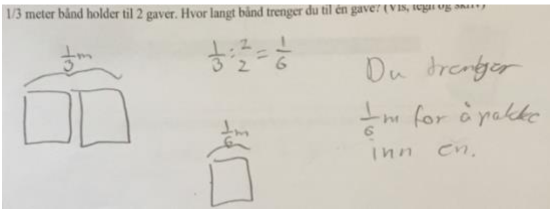
I denne oppgaven skiller ikke elevene enhetene meter og gave fra hverandre gjennom løsningen av hele oppgaven. Eleven møter utfordringer på slutten når de må oppfatte at enheten ikke lenger er en meter, men én gave som er $\frac{2}{3}$ av en meter. Samtidig må de oppfatte at $\frac{1}{3}$ er halvparten av $\frac{2}{3}$.

Å kunne utføre divisjon av brøk innebærer å ha kunnskaper om mange ulike emner blant annet brøkbegrepet (Ma, 2010). Kunnskap om brøkbegrepet innebærer blant annet å kunne hva de ulike delene av en brøk kalles (Birkeland et al., 2011). Når elev 36 i intervjuet skal dele 3 med $\frac{9}{2}$ ser man at eleven ikke har dette klart for seg og sier følgende:

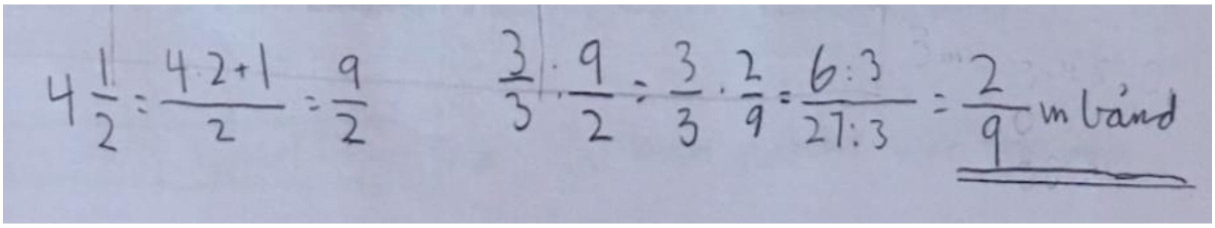
Elev 36: Er det ikke sånn at man må dele ehhh. Vi har lært det, men jeg har glemt det. Er det ikke noe sånt at man må dele med telleren, nei nevneren. Hvilken er teller og hvilken er nevner?

Å uttrykke seg både muntlig og skriftlig i matematikk innebærer å kunne bruke fagbegreper (Utdanningsdirektoratet, 2006). I elevens utsagn kommer det frem at å forklare hvordan divisjon av brøk utføres er vanskelig når eleven ikke kan begrepene som er knyttet til brøk.

Spesielt i oppgave 2 kommer det til uttrykk at eleven må ha kunnskap om aspektet knyttet til brøk som divisjon og operator når de skal bruke algoritmen for å dividere en brøk med naturlig tall eller et naturlig tall med brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I besvarelsen til elev 5 (figur 38) i oppgave 2a gir eleven riktig svar. Skulle man utført divisjonen eleven har satt opp ville svaret blitt $\frac{2}{6}$. Elev 3 har gjort samme type feil i oppgave 2c (figur 39) og har også dratt med seg denne typen feil i utregningen slik at svaret blir feil.



Figur 38: Elev 5, oppgave 2a.



Figur 39: Elev 3, oppgave 2c.

Når eleven får spørsmål om å forklare oppgaven i intervju svarer eleven:

Elev 3: Jeg tror jeg har svart feil fordi jeg burde satt $\frac{3}{1}$ deler der for det er jo bare én (peker på $\frac{3}{3}$ deler).

Eleven innser altså fort at det her har blitt gjort en feil. Derfor kan man ikke si at dette er misoppfatninger elevene har om brøk som de drar med seg inn i divisjon av brøk. Det viser derimot viktigheten av at elevene må ha kunnskap om de ulike aspektene ved brøk begrepet og være obs på disse for å kunne mestre brøkregning (Ma, 2010; Van de Walle, 2004).

5.0 Diskusjon

I kapittel fire ble denne studiens resultater presentert i ulike tabeller. Underkategoriene i tabell 5 og 6 ble videre sett nærmere på i en analyse av oppgavebesvarelsene og intervjuene. I tillegg ble ulike feil i elevenes begrunnelse og resonnement analysert. I dette kapittelet vil jeg rette meg mer spesifikt mot forskningsspørsmålene, som var utgangspunkt for min analyse av datamaterialet. Tolkning av data handler om å legge mening i resultater, og sette disse i en større sammenheng gjennom bruk av sammenlikning og/eller teori (Jacobsen, 2015). Målet med dette kapittelet er derfor å syntetisere resultatene og analysen i kapittel 4 til et mer helhetlig svar på forskningsspørsmålene i lys av aktuell teori. Før dette kan det derfor være formålstjenlig med en repetisjon av forskningsspørsmålene:

1) *Hvordan begrunner og resonnerer åttende trinns elever i oppgaver med divisjon av brøk?*
   a) *Hvilke representasjoner blir brukt og hvordan blir disse brukt i elevenes begrunnelser og resonnement?*
   b) *Hvilke feil eller mulige misoppfatninger kommer frem i elevenes begrunnelse og resonnement?*

I det videre vil jeg derfor ta for meg begrunnelse og resonnement, representasjoner og feilkategorier. Jeg vil diskutere hvordan kategoriene kommer til uttrykk når elevene jobber med oppgaver knyttet til divisjon av brøk. I tillegg vil kategorien begrunnelse og resonnement bli sammenlignet med studien av Sylvia Bulgar (2002).

5.1 Elevers begrunnelse og resonnement i divisjon av brøk oppgaver

I dette avsnittet vil begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall, brøk og måling bli vurdert og diskutert på bakgrunn av funnene i resultatene og analysen, Bulgars (2002) studie og annen relevant teori som er presentert kapittel 2. Jeg velger å ta for meg naturlig tall, brøk og måling da disse er hovedkategoriene og det er disse som kommer frem i Bulgar (2002) sin studie.

5.1.1 Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall

Naturlig tall er de tallene vi kaller telletallene, altså et positivt heltall. Naturlig tall kommer til uttrykk gjennom at elevene gjør om antall meter til for eksempel centimeter (Bulgar, 2002). Gjennom analyse av besvarelsene i denne studien kom det frem at elevene ikke bare gjør om antall meter og brøkene til centimeter, men også til desimeter og prosent.

I Bulgar (2002) sin studie er dette den mest brukte begrunnelse og resonnement med en prosentandel på 33,3%. Gjennomsnittlig bruk av naturlig tall som begrunnelse og resonnement i denne studien derimot viser tabell 5 kun er 5,97%. I tillegg bruker gjennomsnittlig 3,17% av elevene naturlig tall sammen en annen type begrunnelse og resonnement. En naturlig forklaring på dette kan være alderen på studiens informanter. Denne studiens elever er eldre og har derfor vært innom flere matematiske emner. Læreplanen viser at elevene skal ha kunnskaper innen forskjellige brøkemner, som å regne med brøk og uttrykke tallstørrelser på varierte måter (Utdanningsdirektoratet, 2006). I den opprinnelige studien ble Holiday Bow oppgaven brukt som en introduksjon for divisjon av brøk. Van de Walle (2004) skriver at elever bør utvikle egne metoder for å løse oppgaver med brøk fremfor å bli introdusert for algoritmer. Ettersom elevene i denne studien har lært mye om brøk kan det være en forklaring på at et lavt antall elever bruker naturlig tall som begrunnelse og resonnement. Til tross for dette er det verdt å merke seg at ingen elever bruker algoritmen for divisjon av brøk på oppgave 1 som er en målingsdivisjonsoppgave.

Elevene som begrunner og argumenterer sine svar i oppgave 1 med naturlig tall gjør dette i stor grad riktig på alle deloppgavene. Selv om det i analysedelen har blitt presentert noen unntak. Dette viser at elevene kan se sammenheng mellom ulike områder innenfor matematikken. I dette tilfellet ser de en sammenheng mellom lengdeenheter og brøk. Elevene ser også en sammenheng mellom matematikk og dagliglivet (Kaur & Toh, 2012). Brøk blir sett på som et av de mest komplekse tallene elevene møter i løpet av grunnskolen (Bulgar, 2002; Ma, 2010). Det å bruke naturlig tall som begrunnelse og resonnement gir derfor elevene mulighet til å ikke regne direkte med brøk. Dette opplever mange elever vanskelig fordi de blander regneoperasjoner (Van de Walle, 2004). I tillegg har elever i intervju påpekt at naturlig tall gjør oppgaven mer virkelig, og på den måten kan elevene se en sammenheng med dagliglivet (Birkeland et al., 2011).

Til tross for at elevene bruker naturlig tall som hovedbegrunnelse så man gjennom analyse av besvarelsen at kunnskap om brøkbegrepet blir uttrykt gjennom besvarelsene. I tillegg viser tabell 5 at naturlig tall også i noen besvarelser kombineres med begrunnelse og resonnement som involverer brøk. Brøkbegrepet er mangfoldig og forskjellige aspekter kommer til uttrykk i forskjellige situasjoner og oppgaver (Birkeland et al., 2011). I Bulgar (2002)s studie kommer det frem at elevene som brukte naturlig tall forstår at nevneren betyr å dele på for eksempel fire. Besvarelsene i denne studien viser også dette. Elevene viser med det at de har en oppfattelse av aspektet brøk som divisjon, nevneren blir sett på som en divisor, $\frac{1}{4}$ er resultatet av divisjonen 1 : 4 (Birkeland et al., 2011). Gjennom en slik tankegang opptrer også aspektet brøk som operator, fordi elevene ser på brøken i seg selv som en operasjon som må gjøres (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Selv om elevene ikke bruker brøk som begrunnelse og resonnement, må eleven fortsatt gjenkjenne enheten i disse oppgavene for å kunne begrunne og resonnere seg frem til riktig svar. I analysen er det kommet frem at dette kan være en utfordring for noen elever, mens andre mestrer det. Utfordringen ligger i at elevene må oppfatte av at enhetene kan bestå av mer enn ett objekt, i disse oppgavene betyr det at enheten er flere meter (Lamon, 2012). Analyse av elevbesvarelser som bruker naturlig tall på 2a viser at elevene oppfatter konseptet om rettferdig deling (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Årsaken til at en slik oppfattelse kommer tydelig til uttrykk her kan være at dette er en delingsdivisjonsoppgave. Fra tidlig alder kjenner elevene en slik modell for divisjon gjennom at de alltid har delt forskjellige ting likt mellom seg (Lamberg & Wiest, 2012). At divisoren her er et helt tall fremfor brøk er også med å gjøre det tydeligere.

5.1.2 Begrunnelse og resonnement som involverer brøk

I Bulgar (2002)s studie er begrunnelse og resonnement som involverer brøk brukt av 32,5% av elevene. I denne studien derimot viser tabell 5 at denne er det desidert mest brukte begrunnelsen og resonnementet, med en gjennomsnittlig bruk på 79,2%. I tillegg bruker gjennomsnittlig 5% av elevene brøk sammen med en annen type begrunnelse og resonnement. Det gjør brøk til den klart mest brukte begrunnelsen og resonnementet, et slikt resultat kan begrunnes i læreplanens kompetansemål knyttet til brøk (Utdanningsdirektoratet, 2006). Samtidig viser elevenes lærebok at elevene har vært igjennom alle regneoperasjonene knyttet til brøk (Hjardar & Pedersen, 2014a).
Til tross for at brøk er blitt brukt av svært mange elever, finner man ulike begrunnelser og resonnementer i de ulike besvarelsene. Dette viser at elevene kan skape og uttrykke egne begrunnelser basert på forskjellig kunnskap de har om brøk (Brodie, 2010; Van de Walle, 2004). Analysen viser to hovedtendenser innenfor brøk som begrunnelse og resonnement i

oppgave 1. Den første hovedtendensen er addisjon av brøk, på mange måter kan det virke overraskende når det er en målingsdivisjonsoppgave. Ser man derimot på Ma (2010) sin kunnskapspakke er addisjon av brøk en del av denne og en av emnene man må ha kunnskap om for å kunne oppfatte divisjon av brøk. Gjennom å bruke addisjon av brøk med lik nevner riktig viser også elevene en oppfattelse av brøk som del av det hele. Grunnen til dette er at elevene oppfatter flere deler av samme enhet og hvor mange deler enheten består av. Samtidig viser de kunnskap om at telleren forteller mange deler vi har, mens nevneren viser hvilke brøkdeler som telles (Van de Walle, 2004).

Den andre hovedtendensen i besvarelsene innenfor denne underkategorien er multiplikasjon av brøk. Dette blir sett på som hovedkunnskapen for å forstå divisjon av brøk. Multiplikasjon av brøk innebærer å finne en brøkdel av en enhet. Hvis eleven ser dette blir det lettere å oppfatte at multiplikasjon og divisjon er inverse operasjoner (Ma, 2010). Allikevel vil ikke dette si at elevene vet hvordan divisjon av brøk utføres. Analysen viser at for eksempel elev 36 mestrer multiplikasjon av brøk i oppgave 1, blått bånd (a), mens samme elev i oppgave 2b (figur 15) ikke klarer å utføre divisjon av to brøker. På bakgrunn av den presenterte teorien kan en mulig årsak til dette være at eleven ikke forstår at multiplikasjon og divisjon er inverse operasjoner (Ma, 2010). To andre årsaker kan være at eleven ikke husker algoritmen for divisjon av brøk eller at eleven ikke har møtt modellen for delingsdivisjon i problemer med divisjon av brøk (Van de Walle, 2004). I elevbesvarelsen som bruker multiplikasjon av brøk som begrunnelse og resonnement kan det se ut til at elevene oppfatter brøkbegrepet som operator. Grunnen til dette er at de ser hvordan $\frac{3}{3}$ kan skrives som $3 \cdot \frac{1}{3}$ og at 3 symboliserer antall gaver (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

I analysen ble det vist hvordan flere elever bruker tegning som representasjon for å uttrykke brøk som begrunnelse og resonnement. Felles for disse besvarelsene er at en oppfattelse av brøk som del av det hele kommer frem. Elevene gjenkjenner enheten og at den består av et gitt antall brøkdeler. Deretter ser elevene hvor mange deler av brøkdelene som brukes til å pakke inn én gave (Van de Walle, 2004). I besvarelsene der elevene gjør om brøk til desimaltall kommer derimot målingsaspektet til brøk frem, gjennom at tallet blir sett på som en størrelse (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Allikevel er nok aspektet brøk som divisjon mest fremtredende i en slik begrunnelse, som den også var i begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall. Elevene ser at $\frac{1}{2} = 0{,}5$ og resultatet av divisjonen 1 : 2 (Birkeland et al., 2011). Med en slik tankegang har elevene også oppfattet at brøkstreken har samme funksjon som et divisjonstegn (Bue et al., 2000).

Gjennom resultat og analysedelen, samt diskusjonen så langt har det blitt påpekt at elevene bruker svært mange ulike begrunnelser og resonnement i oppgave 1. Årsaken til dette kan være at dette er en målingsdivisjonsoppgave, fordi antall grupper/delmengder er ukjent, i dette tilfellet gaver (Jong & Magruder, 2014). Når elevene møter divisjon av brøk er det for det meste denne modellen som brukes i oppgaver (Van de Walle, 2004). Det kan se ut til at elevene opplever det lettere å se for seg situasjonen, resonnere seg frem til et svar og begrunne det i målingsdivisjonsoppgaver fremfor delingsdivisjonsoppgaver (Kaur & Toh, 2012). Oppgave 2 er en delingsdivisjonsoppgave og spør etter antall i én, i dette tilfellet antall meter til én gave. I tabell 5 og analysen kommer det frem at det er mindre variasjon i begrunnelse og resonnement i disse deloppgavene. Innenfor kategorien brøk som begrunnelse og resonnement er det også mindre variasjon. Elevene bruker for det meste algoritmen for brøkdivisjon som begrunnelse og resonnement. Det å ha kunnskap om modellen for delingsdivisjon handler om å vite at det omhandler å finne til én og ikke kun rettferdig deling (Van de Walle, 2004). Elever som ikke ser dette kan ha vanskeligheter med å identifisere at divisjon kan brukes for å løse disse oppgavene, eller oppfatte hvilke tall i oppgaven som er divisor eller dividend.

I tabell 4 kommer det frem at langt flere elever klarer oppgave 2a fremfor 2b og c. Årsaken til at langt flere elever får til denne oppgaven kan være at prinsippet om rettferdig deling kommer frem i denne oppgave. Denne modellen for delingsdivisjon kjenner elevene til før de møter divisjon på skolen (Lamberg & Wiest, 2012). I tillegg kommer det frem i denne oppgaven at noe skal halveres, altså deles på to. Læreplanen viser at eleven allerede etter andre trinn skal være kjent med halvering (Utdanningsdirektoratet, 2006). I oppgave 2b og c kommer ikke dette frem, her må elevene forstå at det dreier seg om delingsdivisjon samt kunne bruke brøkkunnskap eller algoritme for å løse den. Dette kan være en forklaring på at dette er oppgaven med lavest svarprosent og lavest prosentandel riktige svar. Elevene som løser denne oppgaven riktig viser gode kunnskaper om forskjellige emner. For eksempel viser figur 18 og 27 at elev 41 klarer å se for seg situasjonen, og utvikler en egen metode for å komme frem til svaret, fremfor å fokusere på algoritmer og regler (Van de Walle, 2004). Denne eleven og andre elever som løser denne oppgaven ved å bruke brøk som begrunnelse og resonnement, viser kunnskap om uekte brøk, blandet tall og hvordan man gjør om mellom disse tallene (Bue et al., 2000).

Gjennom de ulike begrunnelsene og resonnementene kommer som det har blitt vist og diskutert ulike aspekter ved brøk til syne. Når elever bruker divisjon for å begrunne og resonnere seg frem til et svar kommer kunnskap om brøk som forhold til syne. Å sette opp et regnestykke slik flere elever har gjort, tyder på at de forstår at det de egentlig gjør er for eksempel å finne forholdet mellom $\frac{3}{4}$ og $\frac{2}{3}$. Fordi elevene først finner forholdet mellom $\frac{1}{3}$ gave og antall meter og deretter forholdet mellom én gave og antall meter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)

5.1.3 Begrunnelse og resonnement som involverer måling

Begrunnelse og resonnement som involverer måling blir i Bulgars studie brukt av 16,8% av elevene, og gjenkjennes hovedsakelig gjennom hvordan elevene bruker konkreter eller tegning for å løse oppgaven (Bulgar, 2002). Gjennomsnittlig 4,87% av elevene i denne studien bruker måling som begrunnelse og resonnement. I denne studien lot måling seg gjenkjenne i elevbesvarelser med tegning som representasjon. Gjennom besvarelsen var det vanskelig å se om elevene kun bruker måling som begrunnelse og resonnement. Derfor forekommer måling sammen med begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall, brøk eller begge. Årsaken til dette kan være at elevene i denne studien ikke kunne bruke konkreter som for eksempel brøkkonkreter laget for undervisning eller bånd og målebånd som er konkreter tilpasset oppgaven.

Å bruke måling som begrunnelse og resonnement viser at eleven ser for seg situasjonen, og det praktiske aspektet ved den. For å begrunne sine svar lager eleven en matematisk tegning basert på situasjonen. Tegningene viser for eksempel et bånd slik at det passer til konteksten i oppgaven, samtidig som tegningen fortsatt kan brukes til et matematisk resonnement. Eleven viser gjennom tegningen eller andre representasjoner kunnskap om andre områder innenfor matematikken (Kaur & Toh, 2012). Kunnskap om brøk gjennom aspektene; brøk som del av det hele, divisjon og operator kommer til uttrykk gjennom hvordan elevene deler opp tegningen og gjør om til naturlige tall. Aspektet ved brøk som måling kommer tydeligst frem innenfor denne type begrunnelse og resonnement. Grunnen til dette er at flere av elevene ser på brøken som et tall og en mengde, men også fordi elevene tegner tallinjeformede figurer som brukes til å måle ulike intervaller (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

5.2 Representasjoner i begrunnelsene og resonnementene

I dette avsnittet vil representasjoner som blir brukt i begrunnelsene og resonnementene bli vurdert og diskutert på bakgrunn av funnene i resultatene og analysen, samt relevant teori som er presentert i kapittel 2. Jeg velger å ta for meg symboler i form av tall og matematiske tegn i ett avsnitt da disse har mye til felles. Deretter blir tegning som begrunnelse og resonnement diskutert og til slutt språk som begrunnelse og resonnement.

5.2.1 Symboler og tegn i begrunnelse og resonnement

I tabell 6 samt gjennom analysen kom det frem at symboler i form av tall enten som brøk, naturlig tall eller desimaltall brukes som representasjon i nær alle besvarelsene. Den samme tabellen viser også at et klart flertall av elevene bruker symboler i form av matematiske tegn. Dette funnet kan sies å være naturlig fordi oppgavene elevene har løst inneholder tall og noe som skal regnes ut. Dette funnet kan også forklares gjennom Steinbring (2006) som skriver at symboler og tegn er et av de mest brukte språksystemene som brukes i matematikk, og spesielt skolematematikken avhenger av mye symbol og tegnbruk.

Gjennom sine begrunnelser og resonnement viser elevene kunnskap om hvordan et objekt kan bli representert av forskjellige tegn. Analysen viser at for eksempel $\frac{1}{4}$ meter kan bli representert som 0,25 meter, 25 centimeter, 2,5 desimeter, 25 og 25%. Til tross for dette skaper også bruk av tegn utfordringer for elevene. Grunnen til dette kan være at: «signs do not have a meaning of their own, this has to be produced by the learner by means of establishing a mediation to suitable reference contexts» (Steinbring, 2006, s. 135). Når elevene bruker en regneoperasjon må de forstå hvor mange meter og gaver sammensetningen av symboler representerer. Samtidig som de må oppfatte regneoperasjonen og hvordan denne skal utføres. Elever som ikke bruker en regneoperasjon må forstå den doble meningen til tegn. I oppgave 1 må elevene forstå at en brøk representerer antall meter per gave, samtidig som den bærer med seg kunnskap om hvor mange gaver som kan pakkes inn på et gitt antall meter.

Oppgave 2a er en oppgave mange elever mestret og et godt eksempel på en oppgave i denne studien hvor elevene viser kunnskap om bruk av tegn. Elevene oppfatter at symbolene $\frac{1}{3} : 2$ representerer antall meter bånd på én gave og at divisjon er begrepet som blir brukt for å finne dette. Det elevene fikk problemer med var derimot hvordan de skulle utføre regneoperasjonen, dette så man i avsnitt 4.5.1 og vil bli videre diskutert i avsnitt 5.3.1. På oppgave 2b og c viser det seg derimot at flere av elevene ikke oppfatter at divisjon er begrepet som brukes for å gi mening til symbolene som oppgis i oppgaven. En grunn til dette kan være at det oppgis både brøker og blandet tall, som gir oppgaven et ekstra kunnskapselement (Bue et al., 2000). Den mest sannsynlige årsaken, basert på tidligere funn og som tidligere nevnt er at oppgave 2 er en delingsdivisjonsoppgave. Elevene er vant med å møte målingsdivisjonsoppgaver i møte med divisjon av brøk. I oppgave 2a kan elevene forestille seg rettferdig deling, ettersom divisoren er et helt tall, dette blir vanskeligere for elevene i oppgave b og c. I disse oppgavene må elevene forstå at delingsdivisjon handler om å finne for én.

Oppgaven som skiller seg mest ut med tanke på å forstå hva symbolene representerer og deres doble mening er oppgave 1, gult bånd (b). Dette er deloppgaven på oppgave 1 med færrest riktige svar. De fleste feilene skyldes at elevene ikke klarer å oppfatte at den siste $\frac{1}{3}$ representerer $\frac{1}{3}$ meter, og at den tilsvarer $\frac{1}{2}$ gave og ikke $\frac{1}{3}$ gave. I tillegg til symbolenes doble mening som Steinbring (2006) mener kan en annen forklaring være at elevene her møter divisjon med rest.

Rest kan være utfordrende for elever hvis de ikke er vant med å bruke det og har møtt rest i forskjellige kontekster og med både hele tall og brøk (Lamberg & Wiest, 2012).

5.2.2 Tegning som begrunnelse og resonnement

I kapittel 4 ble det presentert utdrag fra ulike besvarelser som bruker tegning for å representere sine begrunnelser og resonnement. Felles for alle disse er at de blant annet bruker tegning som en semiotisk representasjon for å komme frem til sitt svar. Martinussen og Smestad (2010) skriver at bruk av tegning kan hjelpe elevene med å se for seg situasjonen og forstå algoritmen. Tegningene elevene bruker viser at de ser for seg situasjonen og tegner en forenklet tegning av virkeligheten som også kan brukes til et matematisk resonnement. Dette viser at eleven kan uttrykke seg skriftlig matematisk ved å bruke tegning og visuelle representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Tabell 4 viser at flere elever bruker tegning som begrunnelse og resonnement i oppgave 1 enn oppgave 2. Dette kan forklares med at de har møtt flere målingsdivisjonsoppgaver med divisjon av brøk tidligere, og at situasjonen dermed er lettere å se for seg. Figur 2 i teoridelen viser eksempel på hvordan en annen målingsdivisjonsoppgave kan løses med tegning. Selv om tegningene er forskjellige, på grunn av ulik oppgave, har de svært mange likheter med tegningene som blir presentert i kapittel 4. I alle tegningene er enheten tydelig representert og hvor mange deler som går inn i hver gruppe vises også gjennom tegningene (Van de Walle, 2004). Gjennom slike tegninger kan elevene enklere se for seg hvordan en enhet kan referere til flere objekter og ikke bare ett objekt eller én meter som i disse oppgavene (Lamon, 2012). Figur 3 i teoridelen viser hvordan en delingsdivisjonsoppgave kan løses med tegning. Det er svært få elever som løser oppgave 2 riktig med tegning. En årsak til dette kan være at elevene ikke klarer å se for seg situasjonen. Tegningene til elev 41 (figur 18 og 27) minner litt om figur 3, da begge deles inn i deler for å finne antall centimeter bånd som tilsvarer ulikt antall gaver. Det som skiller tegningene er at tegningen i figur 3 skiller gaver og meter fra hverandre, mens elev 41 blander de sammen. Tegningen til elev 41 gir allikevel riktig svar, men som Lamon (2012) påpeker er det viktig å kunne skille enheter fra hverandre. Figur 4 i teoridelen ligner ingen av tegningene til elevene. Det kan imidlertid trekkes likheter mellom denne og elev 23 sin tegning i figur 14, da eleven først finner forholdet mellom $\frac{1}{3}$ gave og antall meter bånd, og til slutt forholdet mellom én gave og antall meter bånd.

Felles for alle elevene som bruker tegning for å representere sin begrunnelse og resonnement er at de også bruker andre representasjoner. Hovedsakelig blir symboler i form av tall brukt for å forklare tegningen. På grunn av dette må elevene bevege seg mellom ulike systemer av semiotiske representasjoner (Duval, 2006). Gjennom å mestre dette vet elevene hvor de ulike symbolene skal plasseres på tegningen, slik at det både gir mening for eleven sitt matematiske resonnement og at sammensetningen av representasjoner gir mening for andre. I analysen kommer det også frem at elever ikke mestrer det å bevege seg mellom ulike semitiske representasjoner. Dette gjelder blant annet på oppgave 1, gult bånd (b). Vi har sett at elever sliter med den doble meningen til symboler, men elever som bruker tegning har også problemer her. Selv om for eksempel elev 5 (figur 25) tegner gaver under tallinjen, klarer ikke eleven å oppfatte at den siste $\frac{1}{3}$ meteren representerer $\frac{1}{2}$ gave.

5.2.3 Språk som begrunnelse og resonnement

Språk som representasjonssystem i denne studien omhandler det Hiebert (1988) kaller naturlig språk og innebærer bruk av ord. Naturlig språk i matematikken forbindes ofte med matematiske bevis fordi disse ikke er så lett å uttrykke med symboler (Duval, 2006). Dette ser man tendenser til i noen av besvarelsene som bruker språk som begrunnelse og resonnement. Elevene vet intuitivt svaret på oppgaven, og beviser dette ved i stor grad eller kun med naturlig språk.

I skolematematikken er symboler først og fremst brukt, men som Van de Walle (2004) påpeker, bør det eneste man kan forlange av elevene være at de kan forklare deres resonnement. I denne studien kommer dette til syne ved at språk som begrunnelse og resonnement fungerer like bra for å representere et svar som det en regneoperasjon gjør. I oppgave 1 som er en målingsdivisjonsoppgave har det blitt vist hvordan elever velger andre regneoperasjoner enn divisjon. Elevene klarer å komme frem til riktig svar, men det viser også at språk som begrunnelse og resonnement i like stor grad må bli sett på som riktig. En elev som kan bruke språk som begrunnelse og resonnement viser fortsatt evne til å analysere en situasjon og konstruere et logisk argument for svaret på oppgaven (Kaur & Toh, 2012). Bruk av språk som begrunnelse og resonnement gir mulighet til å kommunisere hva eleven tenker, samtidig som språk i disse oppgavene viser elevenes kunnskap og oppfattelse av brøk og regneoperasjoner med brøk (Duval, 2006).

I læreplanen kommer det frem at elever skal kunne bruke et naturlig språk for å kommunisere matematiske løsninger. Dette naturlige språket skal være uformelt, noe det i stor grad er i besvarelsene presentert i analysen. Det kan se ut til at elevene skriver hva de tenker. Samtidig skal elevene også kunne bruke begreper og fagterminologi (Utdanningsdirektoratet, 2006). Bruk av begreper og fagterminologi kommer ikke like klart frem i hverken besvarelser eller intervjuer, men ord som «del» blir brukt. I sammenheng med brøkbegrepet er dette ordet essensielt, spesielt med tanke på aspektet brøk som del av det hele (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I tillegg brukes ordet «del» både for å forklare tellerens rolle i brøken, men også nevnerens rolle ved ordet «brøkdeler». Dette viser kompleksiteten ved brøkbegrepet og at samme ord kan beskrive ulike tall (Ma, 2010).

5.3 Feil og misoppfatninger i begrunnelse og resonnement

I analysen ble ulike feil funnet i besvarelsene presentert, og delt inn i tre ulike kategorier. I dette kapittelet vil jeg diskutere disse feilkategoriene og se de i en sammenheng med annen presentert teori i denne studien.

5.3.1 Algoritmebaserte feil

Denne feilkategorien er knyttet til divisjon av brøk og forekommer kun i oppgave 2, da ingen elever brukte divisjon i målingsdivisjonsoppgaven. Årsaken til dette har blitt diskutert tidligere. Gjennom studien har to algoritmer for divisjon av brøk blitt presentert. Den første algoritmen er den elevene i denne studien har lært gjennom sin lærebok og er å snu divisoren for deretter å multiplisere brøkene (Hjardar & Pedersen, 2014a; Van de Walle, 2004). Den andre algoritmen er den Van de Walle (2004) kaller for gjentagende subtraksjon og innebærer først og finne felles nevner, for deretter å se hvor mange ganger divisor går opp i dividenden. Analysen viste at elevene i denne studien bruker førstnevnte algoritme. Dette er naturlig da elevene har blitt presentert for denne algoritmen i sin lærebok.

I analysedelen ble ulike algoritmebaserte feil som elevene har gjort i besvarelse av oppgave to presentert. Flertallet av disse feilene er knyttet til at eleven utfører algoritmen feil. Det forekommer også feil som kan tyde på at elever blander algoritmen for divisjon av brøk med andre algoritmer innenfor brøkregning (Tirosh, 2000). Det har kommet frem at disse elevene likevel har vist kunnskap om brøk, ulike aspekter ved brøk, andre regneoperasjoner med brøk og naturlige tall i oppgave 1. Dette skriver Van de Walle (2004) som viktige kunnskaper og et grunnlag for å forstå divisjon av brøk. Disse emnene er også en del av kunnskapspakken som Ma (2010) mener må være på plass for at divisjon av brøk skal kunne bli forstått. Dette tyder altså på at man ikke kan konkludere ut fra skriftlige besvarelser og kun målingsdivisjonsoppgaver at eleven oppfatter brøk på en god måte. De mange ulike algoritmebaserte feil tyder på at divisjon av brøk algoritmen er mekanisk for elevene (Tirosh, 2000). Dette betyr at hvis man ikke husker algoritmen er den vanskelig å bruke. I møte med delingsdivisjonsoppgaver bør eleven derfor oppfordres til å bruke tidligere kunnskaper til å estimere, prøve uformelle metoder og se for seg situasjonene med modeller eller argumentere for hva som kan være et fornuftig svar (Van de Walle, 2004).

Noen elever viser i sine besvarelser at de enten mestrer algoritmen eller at de oppfatter hvordan delingsdivisjonsoppgaver kan analyseres og møtes. Gjennom dette viser elevene at algoritmen og delingsdivisjon med brøk er blitt oppfattet. Dette kan være med å skape en fleksibel og varig kunnskap knyttet til divisjon av brøk (Birkeland et al., 2011). Tabell 6 viser også at bruk av tegning som begrunnelse og resonnement brukes av noen færre elever på oppgave 2 enn oppgave 1. Elevene kan ha vanskeligheter med å se for seg situasjonen, og koble den til virkeligheten eller annen matematisk kunnskap som Kaur og Toh (2012) påpeker som viktig når elever skal begrunne og resonnere seg frem til svar. På bakgrunn av dette velger flere elever å prøve seg på algoritmen selv om de ikke er trygge på hvordan den brukes.

5.3.2 Intuitive feil

Som algoritmebaserte feil forekommer intuitive feil i oppgave 2, årsaken til dette er at feilene avslører elevenes oppfatning av divisjon (Tirosh, 2000). En slik feil kommer til uttrykk gjennom oppgave 2c, der flere elever har dividert 4,5 med 3 fremfor 3 med 4,5 som er riktig. Det har i analysen blitt pekt på at årsaken til dette kan være at elevene tror divisor må være større enn dividenden. Dette er en vanlig misoppfatning elever kan ha knyttet til divisjon (Tirosh, 2000). Til tross for dette tyder de øvrige resultatene på at elevene i denne studien ikke har en slik misoppfatning. Et eksempel er at de samme elevene oppfatter at i oppgave 2a at $\frac{1}{3}$ skal divideres med to og ikke motsatt. På bakgrunn av dette kan det se ut til at årsaken er som elev fem sier at det er lettere å dele 4,5 med 3.

I avsnitt 5.1.2 ble det diskutert at årsaken til at flere elever mestrer oppgave 2a er at elevene i denne oppgaven lettere kan se for seg at det handler om rettferdig deling. Dette er noe elevene kjenner til allerede før de begynner på skolen (Lamberg & Wiest, 2012). Når elevene møter oppgave 2c får elevene problemer må å sette oppgaven inn i modellen for rettferdig deling. Her stilles det krav til at elevene må gå bort fra modellen for rettferdig deling. Elevene må oppfatte at delingsdivisjon handler om å finne til én (Van de Walle, 2004). Samtidig må problemet analyseres riktig slik at man finner for én gave og ikke én meter. Elevene konstruerer matematiske argumenter ut fra hvordan de forstår situasjonen og når situasjonen blir oppfattes feil kan også argumentene lede frem til feil svar (Kaur & Toh, 2012).

At flere elever gjør en slik feil viser viktigheten av å la elevene møte divisjon i ulike sammenhenger, måling- og delingsdivisjon, med rest og uten rest, brøk, hele tall, dividend som er større enn divisor eller kvotient mindre enn dividend. På den måten kan man legge til rette for at elevene får en konseptuell forståelse for divisjon og kan oppfatte hvordan ulike oppgaver kan løses (Lamberg & Wiest, 2012; Van de Walle, 2004).

5.3.3 Feil basert på formell kunnskap

Til skilnad fra de to tidligere feilkategoriene kommer disse feilene også til uttrykk i oppgave 1. Grunnen til det er at disse feilene omhandler begrenset kunnskap knyttet til brøkbegrepet eller divisjon (Tirosh, 2000). Gjennom besvarelsene og resultatene kan man se at noen feil knyttet til oppfatning av brøkbegrepet kommer tydelig frem, og disse vil jeg diskutere i dette avsnittet.

I tabell 4 kommer det frem at nær alle klarer å løse oppgave 1, hvitt bånd riktig. En av grunnen til at de mestrer denne oppgaven er at enheten som er én meter blir gjenkjent. På oppgave 1, blått bånd og gult bånd blir enheten flere objekter, altså to og tre meter. Alle elevene forstår ikke dette når de løser oppgaven. Grunnen til dette kan være at elevene er vant med at en enhet er én, men som Lamon (2012) påpeker, er det viktig at elevene lærer at enheten også kan være flere objekter. Derfor må elevene få mulighet til å møte ulike oppgaver, der enheten skifter mellom å være et objekt og flere objekter. I tillegg er det viktig at elevene kan skille enheter, spesielt i møte med divisjon av brøk der antall meter er en enhet, mens én gave er en annen enhet. Dette kommer spesielt til uttrykk gjennom oppgave 1, gult bånd (b). Det har også blitt diskutert andre grunner til at denne oppgaven er spesielt utfordrende for mange elever i avsnitt 5.2.1. Hensikten er at elevene i denne oppgaven må forstå at de skal finne et forhold mellom tre meter og antall gaver (Van de Walle, 2004).

Gjennom analysen har det blitt vist hvordan elever bruker samme begrunnelse og resonnement i store deler av oppgave 1. Det ble påpekt at eleven ser et mønster ved oppgaven ved å gjenkjenne strukturer og bruke disse videre (Thom, 2011). Problemet til eleven var at begrunnelsen og resonnementet ikke fungerte når eleven møtte andre brøker enn stambrøker. Tabell fire viser at antall riktige svar er lavere på oppgavene hvor man ikke møter stambrøk. En årsak til dette kan være at eleven ikke oppfatter hva som er topp-tallets rolle i en brøk, altså at telleren representerer antall deler, og at det derfor er forskjell om vi teller en eller to tredjedeler (Van de Walle, 2004). Oppfattelse av brøk som operator kan også knyttes til dette, hvis elevene kunne sett for eksempel $\frac{3}{4}$ som 3 • ($\frac{1}{4}$ av en meter). På den måten kunne det vært enklere for eleven å se at 3 deler av hver meter går til én gave, og utfra dette resonnert seg frem til det endelige svaret (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Tidligere i diskusjonen har det blitt påpekt at studiens deltagere gjennom ulike begrunnelser og resonnement bruker aspektet brøk som divisjon for å begrunne sine svar. Allikevel er det også elever som gjør feil knyttet til dette, disse feilene gjelder spesielt når et helt tall skal skrives om til brøk. Når elevene gjør slike feil, er de ikke oppmerksomme på at brøkstreken er et divisjonstegn og at nevneren er en divisor (Bue et al., 2000). Da elevene som har gjort denne feilen innså dette fort i intervjuet, viser eleven oppfattelse for konseptet brøk som divisjon i andre oppgaver. Derfor kan ikke dette karakteriseres som noen misoppfatning elevene har. Det tyder heller på at elevene gjør en feil basert på at de ikke sjekker svaret og sin begrunnelse og resonnement nøye nok (Brekke et al., 2002; Drews, 2005). Selv om det her kommer frem som en feil, er det viktig at man som lærer tar tak i disse feilene slik at de kan rettes opp og ikke utvikler seg til misoppfatninger (Drews, 2005). Feilene elevene gjør viser hvor komplekst brøkbegrepet er og hvor mange deler det består av. Når man skal utføre regneoperasjoner med brøk må man ta med seg de ulike kunnskapene om brøkbegrepet og bruke de aktivt. Hvis ikke kan man gjøre feil som for eksempel å ikke gjenkjenne enheten, eller skrive et helt tall som brøk på feil måte (Van de Walle, 2004).

6.0 Konklusjon

I denne studien har målet vært å få mer innsikt i hvordan elever begrunner og resonnerer når de løser oppgaver med divisjon av brøk. Dermed ble følgende forskningsspørsmål utformet:

1) *Hvordan begrunner og resonnerer åttende trinns elever i oppgaver med divisjon av brøk?*
   a) *Hvilke representasjoner blir brukt og hvordan blir disse brukt i elevenes begrunnelser og resonnement?*
   b) *Hvilke feil eller mulige misoppfatninger kommer frem i elevenes begrunnelse og resonnement?*

For å svare på forskningsspørsmålene har elevers begrunnelser og resonnement, bruk av representasjoner, feil og misoppfatninger blitt studert.

Gjennom datainnsamlingen ble det klart at elevene bruker mange ulike begrunnelser og resonnementer, representasjoner og gjør ulike feil i sine oppgaver. Selv om man kan gjøre en oppdeling av feil innenfor ulike underkategorier har det kommet frem i denne studien at en feil er et sammensatt fenomen som ofte passer inn under flere underkategorier. I mange av oppgavebesvarelsene og generelt i denne studien har det kommet frem at det er et skille mellom oppgave 1 og oppgave 2. Årsaken til dette skillet skyldes oppgavenes struktur. Oppgave 1 er en målingsdivisjonsoppgave og spør etter antall gaver. Oppgave 2 er en delingsdivisjonsoppgave og spør etter antall meter på én gave, det vil si hvor mye er én. Når forskningsspørsmålene nå vil bli besvart er det viktig å være klar over dette skillet.

Elevene begrunner og resonnerer seg fram til sine svar på hovedsakelig to forskjellige måter. Enten så involverer de brøk eller bruker naturlig tall. Begrunnelse og resonnement som involverer brøk er den desidert mest brukte. Innenfor målingsdivisjonsoppgaven uttrykkes brøk hovedsakelig gjennom addisjon og multiplikasjon av brøker. Elever bruker også kunnskap fra aspektet «brøk som del av det hele» for å resonnere seg frem til svar i oppgave 1. Ingen elever bruker algoritmen «snu den siste brøken og multipliser» i oppgave 1. Derimot er dette den typen begrunnelse og resonnement som blir mest brukt i oppgave 2. Begrunnelse og resonnement som involverer naturlig tall er den type begrunnelse og resonnement som nest flest elever bruker. En slik type begrunnelse og resonnement er mest synlig i oppgave 1 hvor elevene enten gjør om enheten eller brøken til et naturlig tall. I oppgave 2 er en slik type begrunnelse og resonnement mindre fremtredende, men noen elever bruker en slik begrunnelse og resonnement riktig også her.

Begrunnelse og resonnement som involverer måling kommer ikke til uttrykk alene, men sammen med enten brøk eller naturlig tall. Det som skiller måling fra de andre typene begrunnelse og resonnement er at måling representeres med tegning i alle besvarelsene. Tegningene i disse tilfellene ligner et bånd, og gaver representeres ved en ny tegning under båndet eller ved å avgrense båndet. Tegning brukes som hjelpemiddel for å lettere kunne forstå situasjonen (Martinussen & Smestad, 2010).

Tegning som begrunnelse og resonnement blir derimot ikke bare brukt som representasjon for å forklare måling, og ligner ikke nødvendigvis alltid et bånd. Disse tegningene kan i like stor grad brukes til å resonnere frem til et riktig svar. Tegning brukes sjelden alene, og i de fleste begrunnelser og resonnement støttes tegning opp av andre representasjoner, oftest symboler. Gjennom bruk av ulike semiotiske representasjoner viser elevene hvordan de kan bevege seg mellom dem, og bruke de sammen for å skape en begrunnelse og resonnement som gir mening for eleven selv, og for svaret (Duval, 2006).

Naturlig språk er det minst brukte representasjonssystemet. Dette forekommer alene, men de fleste elevene bruker også symboler i form av tall i sine begrunnelser og resonnement. Selv om symboler er det mest brukte representasjonssystemet i skolematematikken, viser disse elevene at de kan gi fullstendige begrunnelser og resonnement til svar ved kun å bruke et naturlig språk. Disse begrunnelsene og resonnementene forklarer også elevens tankegang samtidig som de viser kunnskap om brøk (Duval, 2006).

Symboler i form av tall blir brukt av nesten alle elevene gjennom de ulike oppgavene elevene har løst. Symboler i form av matematiske tegn er også en semiotisk representasjon som brukes av svært mange elever. Eleven viser i sine besvarelser at tegn kan representeres på forskjellige måter, noe som spesielt vises blant elevene som begrunner svarene sine med naturlig tall. Flere elever oppfatter også tegnenes doble funksjon, ved at de representerer noe og bærer med seg kunnskap om noe. Samtidig er dette er også noe som skaper problemer for noen elever. Det kommer spesielt tydelig frem i oppgaven med rest og i delingsdivisjonsoppgaven. I oppgaven med rest forstår de fleste at $\frac{1}{3}$ representerer $\frac{1}{3}$ meter. Det som skaper problemer er å oppfatte at tegnet bærer med seg kunnskap om at dette tilsvarer $\frac{1}{2}$ gave. I møte med delingsdivisjon settes symboler sammen til et regnestykke. Elevene har både problemer med å se hvordan regnestykket skal representere antall meter bånd til én gave, og oppfatte at begrepet som blir benyttet for å gjøre om brøk til den faktiske lengden er divisjon (Steinbring, 2006). Deretter, for å løse oppgaven, må elevene vite hvordan divisjon av brøk utføres.

Når elevene løser delingsdivisjonsoppgaven og regnestykkene de har satt opp basert på problemet, kommer det frem at elevene gjør ulike algoritmebaserte feil. Denne typen feil viser at elevene ikke husker algoritmen for divisjon av brøk, og dermed prøver å gjøre noe, som for eksempel å snu begge brøkene før multiplikasjon. Noen elever tar også med seg kunnskap fra divisjon med hele tall, og gjør feil fordi elevene tror algoritmen fungerer på samme måte som med hele tall. Å blande ulike algoritmer for brøkregning er også en algoritmebasert feil som forekommer.

Til tross for at elevene i oppgave 1 viser gode kunnskaper, og at mange i oppgave 2a ufører en delingsdivisjonsoppgave riktig, viser elevene også at det utføres formative feil. Disse feilene knyttes til manglende forståelse av brøkbegrepet og divisjon. Et eksempel på en slik feil er i oppgaven med rest. Besvarelsene i denne oppgaven viser at elevene ikke oppfatter tegnenes betydning og gjenkjenner ikke riktig enhet. Feil knyttet til enhet kommer også til syne i oppgavene hvor enheten er flere meter. Dette kan tyde på at elevene har problemer med at enheten endres og at enhet i brøk kan bestå av flere objekter, i dette tilfellet meter (Lamon, 2012). En annen feil som er knyttet til manglende forståelse av brøkbegrepet kommer til syne i oppgavene hvor det ikke er stambrøk. Prosentandelen feil stiger i disse oppgavene, dette handler om at noen elever ikke oppfatter at telleren sier noe om hvor mange deler man har (Van de Walle, 2004).

En annen type feil som er vanlig innenfor divisjon av brøk er intuitive feil. En slik type feil kommer til uttrykk i oppgave 2 (c). Elevene dividerer her 4,5 med 3 fremfor motsatt, som er det riktige. En slik type feil kan tyde på at elevene har en misoppfatning knyttet til at dividend må være større enn divisor. Intervjuene i denne studien har vist at noen elever forklarer en slik feil ved at det er enklere å dele 4,5 med 3. Andre elever peker på at det ikke oppfatter at 3 dividert med 4,5 er divisjonsstykke som vil gi antall meter per gave.

Da studien baserer seg på elevbesvarelser og intervjuer er det vanskelig å konkludere rundt elevers misoppfatninger da dette er bestemte feil eleven gjør over tid. Når det gjelder feil, kan man peke på mulige årsaker. Hver enkelt elev er derimot forskjellige, og som Drews (2005) påpeker kan en feil også skyldes at eleven ikke har lest oppgaven godt nok. Det studien derimot viser er at elevene gjør ulike feil knyttet til både måling- og delingsdivisjonsoppgaver. Som lærer bør man derfor ha kunnskap om ulike typer feil til å avdekke slike feil. Og dermed hjelpe elevene til å rette de opp. På den måten kan man hindre at elever vil gjenta feilene, lage seg uriktig matematiske idéer som senere kan utvikle seg til overgeneraliseringer og lede til misoppfatninger (Brekke et al., 2002).

Studiens funn viser at det er et skille i hvordan elevene bruker begrunnelse og resonnement og representasjoner i en delingsdivisjonsoppgave og i en målingsdivisjonsoppgave. I tillegg gjør elevene fler feil i delingsdivisjonsoppgavene. Van de Walle (2004) skriver at det i klasserommet er viktig at elever møter både delingsdivisjons- og målingsdivisjonsoppgaver med forskjellig kontekst. Funn i denne studien kan derfor tyde på at elevene ikke i like stor grad har møtt delingsdivisjonsoppgaver med brøk og ulike kontekster tidligere. Derimot viser elevene i målingsdivisjonsoppgaven stor fleksibilitet i valg av ulike begrunnelser og resonnement, og evne til å representere disse. På bakgrunn av dette er det viktig å poengtere; at så lenge begrunnelsene og resonnementene til elevene gir mening, forklarer svaret, samt gir riktig svar, må man ikke benytte seg av kun én bestemt regneoperasjon (Van de Walle, 2004).

7.0 Avslutning

I dette kapittelet vil de didaktiske implikasjonene av forskningen betraktes, samt en vurdering av videre forskning.

7.1 Didaktiske implikasjoner

I den innledende fasen av dette studiet var det viktig for meg at det jeg skulle skrive om, var noe jeg kunne dra nytte av i min undervisning som fremtidig lærer. Jeg ønsket at dette studiet skulle utvikle mine ferdigheter som lærer, slik at jeg kan gjøre matematikken meningsfull og forståelig for mine kommende elever. Studien har gitt meg økte matematikkunnskaper om brøk og divisjon av brøk. Samtidig har jeg fått innsikt i hvordan jeg som lærer kan gjenkjenne ulike begrunnelser, resonnement og feilkategorier. Ikke minst har jeg også fått kunnskap om hvordan jeg som lærer kan legge til rette for at elever skal kunne begrunne og resonnere sine svar på forskjellige måter og bruke ulike representasjoner. Dette gjennom både oppgaveutforming og undervisning.

I flere anledninger under arbeidet med denne studien har det slått meg hvor mange ulike måter elever kan begrunne og resonnere seg frem til samme svar på en oppgave. Dette viser hvor viktig det er, som Van de Walle (2004) skriver, at elevene i begynnelsen med læring av en ny regneoperasjon møter forskjellige problemer som de kan løse med kunnskap de har fra før. Der det eneste kravet til løsningen bør være at eleven kan begrunne den. I intervjuet med noen av elevene kommer det frem at de forstår hva svaret skal bli, men at de synes det er vanskelig å forklare hvordan svaret blir slik. Å kunne forklare sine tanker, løse problemer og begrunne løsningene med et matematisk språk er en viktig del av grunnleggende ferdigheter i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2006). Dette viser viktigheten av at elevene kan jobbe med problemer uten å vite nøyaktig hvordan løsningen skal begrunnes. I oppgave 1 brukte flere av elevene andre regneoperasjoner med brøkregning enn divisjon og kom fortsatt frem til riktig svar. Gjennom oppgave 1 kommer også ulike oppfattelser av brøkbegrepet frem i elevenes besvarelser. I besvarelsene kan alle fem aspektene ved brøkbegrepet observeres; brøk som del av det hele, brøk som måling, brøk som divisjon, brøk som operator og brøk som forholdstall. Dette viser brøkbegrepets kompleksitet og mangfoldighet og hvordan det kommer til uttrykk i ulike situasjoner (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er viktig at man som lærer er bevisst på denne kompleksiteten. Kompetanse innen dette området, både matematisk, hvordan de kommer til uttrykk i forskjellige oppgaver, og hvordan forskjellige semiotiske representasjoner kan brukes, vil hjelpe meg som lærer i fremtiden ved å være enda mer bevisst på de ulike aspektene.

> «For division by a fraction, the two ways of thinking about the operation-partition and measurement-are extremely important. The partition or fair-sharing concept of division will lead to a very different division procedure than will the measurement or repeated subtraction concept» (Van de Walle (2004, s. 264).

Dette sitatet er svært relevant i denne studien da det har kommet frem et skille mellom oppgave 1 og 2, både når det gjelder svarprosent, bruk av begrunnelse og resonnement, representasjoner, antall riktige svar og type feil. Det viser viktigheten av at elevene møter målingsdivisjons- og delingsdivisjonsoppgaver allerede i møte med divisjon av hele tall og gradvis møter divisjon med rest i disse oppgavene og ulike tall. Elevene bør også oppfordres til å begrunne å løse oppgavene med tidligere kunnskap (Van de Walle, 2004). Dette krever en bevisstgjøring blant lærere. De viser at læreren både må ha et godt grunnlag i form av matematisk kompetanse da kunnskap bygger på hverandre. Læreren må ha matematikkdidaktisk kompetanse for å kunne gjenkjenne begrunnelser, resonnement og feil. Samtidig som læreren må vite hvordan ulike representasjoner kan brukes i undervisning, slik at forklaringer kan bli tydeligere for elever.

7.2 Videre forskning

Det må vurderes i hvilken grad min studie kunne ha blitt utviklet med tanke på videre forskning. Det har blitt klart for meg at dette er et omfattende område, men at det allikevel ikke eksisterer mye forskning på begrunnelse og resonnement i divisjon av brøk på denne aldersgruppen av elever. Derimot finnes det mye forskning på divisjon av brøk i seg selv, brøkbegrepet, bruk av begrunnelse og resonnement, representasjoner, feil og misoppfatninger. På bakgrunn av dette kan min studie bidra til å gi innsikt i en liten del av denne forskningen og knytte de ulike emnene til hverandre.

I forlengelsen av min studie kunne det vært interessant å sett nøyere på sammenhengen mellom begrunnelse og resonnement, bruk av representasjoner og hvilke feil som forekommer. Basert på mine funn kan man se tendenser til at elever som bruker algoritmen for divisjon av brøk gjør flest feil. Dette kan henge sammen med at i de ulike semiotiske representasjonene er det symboler som skaper mest problemer og feil for elevene. Allikevel har jeg på bakgrunn av avgrensinger satt i denne oppgaven gjort meg opp tanker om to veier for videre forskning.

Det kunne vært spennende å sett hvordan elevene løste disse oppgavene sammen i grupper, og sett om samspillet i et sosiokulturelt perspektiv bidro til løsning av oppgavene. Det er mulig at andre begrunnelser og resonnement, og bruk av andre semiotiske representasjoner kunne ha blitt tatt i bruk. Fra slike samtaler kunne det også klarer blitt avdekket hvor ulike feil stammer fra. Gjennom besvarelsene til elevene i denne studien ser vi at mange bruker tegning for å se for seg situasjonene. Ved å la elvene ha tilgang på konkreter kunne dette også ha ført til andre begrunnelser og resonnement, samtidig som bruk av konkretene kunne avslørt elevenes oppfatning av brøkbegrepet og feil som gjøres.

Avslutningsvis kunne det vært spennende å sett denne studien i sammenheng med undervisningskunnskapen en lærer trenger. Dette kunne for øvrig ha vært inkludert som et forskningsspørsmål i den eksisterende studien. På en annen side kunne det vært spennende og intervjuet lærere om hva de mener ligger i undervisningskunnskap knyttet til divisjon av brøk og sammenlignet dette med relevant teori. Tirosh (2000) skriver at algoritmen er den minst forståtte algoritmen i grunnskolen. Derfor bør det være et mål for lærere at deres elever skal forstå algoritmen slik at de kan bruke den for å løse forskjellige problemer med ulike kontekster. Hva slags matematisk kompetanse og matematikkdidaktisk kompetanse en lærer må inneha for at elevene skal beherske denne algoritmen ville mulig ha kommet frem under en slik videre studie.

8.0 Prosjektets betydning for meg

Når jeg nå retter blikket bakover og betrakter mitt prosjekt i sin helhet, er det en rekke fenomener jeg ønsker å belyse. Disse går blant annet på utarbeidelsen av dokumentet. Dette studiet har vart et halvt år, og underveis i prosessen har det vært vanskelig å se helheten i arbeidet. I arbeid med tidkrevende deler som utarbeidelse av oppgaveark og analyse av hver besvarelse var det spesielt vanskelig å se for seg hvordan det endelige målet kunne nås. Dette har lært meg mye om hvorfor det er viktig å arbeide seg planmessig fremover. På den måten har jeg stadig oppdaget nye sammenhenger mellom funn og teori, samtidig som jeg sakte men sikkert tok skritt i retning av målet. Til tross for dette er det vært viktig å fokusere på langsiktige mål, fremfor detaljer underveis. Likevel synes jeg dette også har vært vanskelig da disse ofte har vært svært interessante. Derfor var det viktig å notere detaljene og inkludere når det var relevant.

Før mitt arbeid med denne studien var jeg uvitende om at elever som arbeidet med samme oppgave kunne bruke så mange og ulike måter å resonnere og begrunne svaret sitt på. Jeg har fått økt innsikt i hvor forskjellig elever tolker og analyserer oppgaver og hvor stor variasjon det er i valg av representasjoner for å beskrive sine begrunnelser og resonnement. Denne store variasjonen mellom elevers valg av resonnement, begrunnelse og representasjon resulterer i at elever gjør en rekke ulike typer feil når de løser oppgaver. Gjennom å analysere dette har jeg fått økt kunnskap om hvordan jeg som lærer kan avdekke hvilken type feil elevene gjør, og dermed legge opp undervisningen deretter. I avsnitt 7.2 ble det presentert hvordan mine funn kan bidra til å forberede min pedagogiske praksis. Mer overordnet har jeg oppdaget verdien av å knytte forskning opp mot en skolehverdag. Forskningen kan virke overveldende og ubetydelig, men ved en nærmere betraktning kan den avdekke betydningsfulle funn knyttet til elevers læring. Det er viktig å ikke undervurdere det arbeidet forskere før meg har presentert, men ha en åpen holdning for ny forskning, da den kan ha stor betydning i en skolehverdag.

Min pedagogiske kompetanse og mine ferdigheter som lærer har blitt utviklet gjennom denne studien. Den har gitt meg økt innsikt i brøk og divisjon av brøk Jeg har også fått økt innsikt i å tolke ulike begrunnelser, resonnement, representasjoner og feilkategorier som kommer til uttrykk i elevbesvarelser. Det er allikevel mye igjen og lære. Mitt håp er at jeg som lærer også kan bruke den kunnskapen jeg har opparbeidet meg om begrunnelse, resonnement, representasjoner og feil i fler matematiske emner enn brøk og divisjon av brøk.

9.0 Litteraturliste

Birkeland, P. A., Venheim, R. & Breiteig, T. (2011). *Matematikk for lærere : 1* (5. utg. Per Arne Birkeland, Trygve Breiteig og Rolf Venheim. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Bondø, A. (2010). Brøk - er det noe problem, da? *Tangenten, 21*(1), 35-38.

Brekke, G., matematikkundervisningen, K. i. & Læringssenteret. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* (Bokmål[utg.]. utg.). Oslo: Læringssenteret.

Brodie, K. (2010). Pressing Dilemmas: meaning-making and justification in mathematics teaching. *Journal of Curriculum Studies, 42*(1), 27-50. https://doi.org/10.1080/00220270903149873

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Bue, O., Engeseth, J. & Solvik, J. I. (2000). *Elektrofag* (3. utg., bokmål. utg.). Oslo: Aschehoug.

Bulgar, S. (2002). Through a teacher's lens. I: No Publisher Supplied.

Cengiz, N. & Rathouz, M. (2011). Take a Bite out of Fraction Division. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(3), 146-153.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293-316. https://doi.org/ http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Drews, D. (2005). Children´s mathematical errors and misconceptions: perspectives on the teacher´s role. I H. Alice (Red.), *Children´s errors in Mathematics: Understanding common Misconceptions in Primary School*. Exeter: Learning Matters Ltd.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning for Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Hart, K. M. & Team, C. M. (1981). *Children's understanding of mathematics : 11-16*. London: John Murray.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 333-335.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2014a). *Faktor 8 Grunnbok*. Oslo: Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2014b). *Faktor 8 Oppgavebok*. Oslo: Cappelen Damm.

Jacobsen, D. I. (2015). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? : innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (3. utg. utg.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Jong, C. & Magruder, R. (2014). Beyond Cookies: Understanding Various Division Models: Reflect and Discuss. *Teaching Children Mathematics, 20*(6), 366-373.

Kaur, B. & Toh, T. L. (2012). Reasoning, Communication and Connections in Mathematics: An Introduction. I B. Kaur & T. L. Toh (Red.), *Reasoning, Communication and Connections in Mathematichs* (s. 1-10). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Kvale, S. (1996). *Interviews : an introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, Calif: Sage.

Lamberg, T. & Wiest, L. R. (2012). Conceptualizing Division with Remainders. *Teaching Children Mathematics, 18*(7), 426-433.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding : essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed. utg.). New York: Routledge.

Litwiller, B. E. & Bright, G. E. (2002). *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions. 2002 Yearbook*.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics : teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Anniversary ed. utg.). New York: Routledge.

Mackay, R. & Heritage, J. (1987). Garfinkel and Ethnomethodology. *Canadian Journal of Sociology, 12*. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/3340947

Martinussen, G. & Smestad, B. (2010). Multiplikasjon og divisjon av brøk. *Tangenten, 21*(1), 30-38. Hentet fra http://www.caspar.no/tangenten/2010/t-2010-1.pdf

Matematikknett, D. (2019). Brøkregning. Hentet 09.04.2019 fra https://matematikk.net/side/Brøkregning

Morrow, L. J. (1998). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (5. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Thom, J. S. (2011). Nurturing Mathematical Reasoning. *Teaching Children Mathematics, 18*(4), 234-243.

Thompson, D. R. (2012). Reasoning and Justification in the Secondary Mathematics Classroom. I B. Kaur & T. L. Toh (Red.), *Reasoning, Communication and Connections in Mathematics* (s. 89-106). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. .

Tirosh, D. (2000). Enhancing Prospective Teachers´Knowledge of Children´s Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/749817

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2019). Læreplan i matematikk fellesfag 1. - 10. trinn. Hentet 08.04.2019 fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=686

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (5th ed. utg.). Boston: Allyn and Bacon.

Wellington, J. (2015). *Educational Research: Contemporary Issues and Practical Approaches* (2 utg.). London: Bloomsbury Academic.

Yankelewitz, D., Mueller, M. & Maher, C. A. (2010). A task that elicts reasoning: A dual analysis. *The journal of Mathematical Behaviour, 29*(2), 76-85.

Vedlegg

1: Godkjenning fra NSD

2: Forespørsel om deltagelse til elever og foreldre/foresatte

3: Oppgavearket

4: Intervjuguide

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Divisjon av brøk

Referansenummer

508605

Registrert

16.11.2018 av Kristin Grimsrud - kristg14@student.uia.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Unni Wathne, unni.wathne@uia.no, tlf: 38141696

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Kristin Grimsrud, grimsrudkristin@gmail.com, tlf: 47284146

Prosjektperiode

01.01.2019 - 21.06.2019

Status

28.01.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

28.01.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 28.1.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 21.06.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er

avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Rådgiver Pernille E. Grøndal.
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2

Forespørsel om deltagelse i masteroppgave

«Divisjon av brøk»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever tilnærmer seg divisjon av brøk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål:
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan elever tilnærmer seg divisjon av brøk. Ut fra dette håper jeg også å få et innblikk i hvordan man som lærer kan bidra til økt forståelse av divisjon av brøk. Dette vil gjøres ved at elevene skal jobbe med et oppgavesett knyttet til divisjon av brøk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitet i Agder er ansvarlig for prosjektet. Masteroppgaven skrives og gjennomføres som en del av grunnskolelærerutdanning for trinn 5-10 ved Universitet i Agder. Det er ingen ekstern oppdragsgiver.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Divisjon av brøk har vært tema i matematikk tidligere på 8. trinn og på bakgrunn av dette vil hele 8. trinn få forespørsel om å delta i undersøkelsen.

Hva innebærer deltagelse i studien?
Deltagelse i prosjektet innebærer at elevene svarer på et oppgavesett knyttet til divisjon av brøk i en skoletime. Flere av oppgavene vil likne på oppgaver fra elevenes lærebok som elevene har arbeidet med tidligere dette skoleåret. Elevene får mulighet til å snakke med en medelev/medelever slik at situasjonen skal bli mest mulig lik en klasseromsituasjon i matematikk. Disse oppgavebesvarelsene vil danne hovedgrunnlaget for datainnsamlingen til prosjektet. Ved interessante besvarelser ønsker jeg å gjennomføre et intervju med noen av elevene for å få økt innsikt i hva eleven tenker. I forbindelse med intervju vil lydopptak bli benyttet. Ved ønske kan foresatte få tilgang til oppgavene og eventuelt intervjuguiden på forhånd.

Frivillig deltakelse
Deltagelse er frivillig, eleven kan når som helst trekke seg eller foresatte kan bestemme at eleven allikevel ikke skal delta ved å ta kontakt med meg. Opplysningene vil da bli anonymisert og elevens besvarelse, og evt. intervju vil bli slettet eller makulert og ikke bli benyttet i studien. Som deltaker eller foresatt har du også rett til å sende klage til personvernombudet eller datatilsynet om behandling av dine personopplysninger.

Hva skjer med opplysningene om deg?
Det er kun meg som student og veileder som vil ha tilgang til dataene som blir samlet inn, og de vil bli lagret på data med brukernavn og passord på et arbeidsrom som krever spesiell tilgang. Hvilken oppgave elevens navn er knyttet til vil lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.

Ved analyse av besvarelser vil elevens navn ikke komme frem. Det er kun ved interessante besvarelser jeg vil gå til denne navnelisten for å eventuelt kunne gjennomføre intervju.
Lydopptak vil bli transkribert og utdrag fra transkripsjon og bilde av besvarelser kan bli benyttet i oppgaven. Elevene som deltar i undersøkelsen vil ikke kunne gjenkjennes i den endelige publikasjonen, og det vil benyttes fiktive navn på skole og elever.
Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2019. Lydopptak, transkripsjon, elevenes besvarelser og evt. andre notater vil da bli slettet og makulert.

Dine rettigheter:
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder ved student Kristin Grimsrud har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitetet i Agder ved student Kristin Grimsrud på (kristg14@student.uia.no) telefon 47 28 41 46 eller veileder Unni Wathne på (unni.wathne@uia.no) telefon 38 14 16 96
- Vårt personvernombud: Ina Danielsen (Ina.danielsen@uia.no) på telefon 452 54 401.
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Student Kristin Grimsrud

Prosjektansvarlig
Unni Wathne

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg ……………………………………………………………………

Underskrift av foresatt

Godkjenner at …………………………………………………………

Elevens navn

Kan delta i studien om han/hun ønsker. Kryss av for hva elven kan være med i:

☐ Løse oppgaver

☐ Delta i intervju med taleopptak

Jeg setter stor pris på tilbakemelding så fort som mulig (lever tilbake til lærer)!

Med vennlig hilsen

Kristin Grimsrud.

Navn:

Klasse:

Dette er oppgavesettet knyttet til min masteroppgave, du skal svare så godt du kan på alle oppgavene. Det er først og fremst fremgangsmåten jeg er mest interessert og ikke riktig svar.

Oppgave 1:

Du skal pakke inn forskjellige gaver som krever ulik lengde innpakkingsbånd. Hver gave krever en bestemt lengde innpakningsbånd. Du må finne ut hvor mange gaver som kan bli pakket inn for hvert farget innpakningsbånd.

Du skal pakke inn gaver med hvitt innpakningsbånd, det er 1 meter langt:

Du bruker 1/2 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 1/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 1/4 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du skal pakke inn gaver med blått innpakningsbånd, det er 2 meter langt:

Du bruker 1/2 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 1/5 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 2/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du skal pakke inn gaver med gult innpakningsbånd, det er 3 meter:

Du bruker 1/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 2/3 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Du bruker 3/4 meter på en gave, hvor mange gaver kan du pakke inn? (Vis, tegn og skriv)

Oppgave 2:

Noen har rotet med innpakningsbåndet og båndene er klippet opp i forskjellige lengder. Noen biter holder til flere gaver, mens andre holder ikke en gang til én gave. Før du kan begynne å pakke inn, må du finne ut hvor mye innpakningsbånd som du trenger til én gave.

1/3 meter bånd holder til 2 gaver. Hvor langt bånd trenger du til én gave? (Vis, tegn og skriv)

3/4 meter bånd holder til 2/3 gave. Hvor langt bånd trenger du til én gave? (Vis, tegn og skriv)

3 meter bånd holder til $4\frac{1}{2}$ gaver. Hvor langt bånd trenger du til én gave? (Vis, tegn og skriv)

Intervjuguide

Intervjuguiden baseres på oppgavesettet som vil bli utarbeidet og hva elevene har besvart. Derfor er disse spørsmålene forslag til spørsmål som kan være relevante for å få et bedre innblikk i elevenes besvarelse og tilnærming til divisjon av brøk.

Info før lydopptak:
Snakke litt generelt med eleven om skolen og andre ting for å bli kjent med eleven
Informere om at deltagelse er frivillig og at eleven når som helst kan trekke seg.
Informere om prosjektet (kort) og at elevens navn, klasse og skole ikke vil kommer frem.
Spørre om eleven lurer på noe før vi starter.

Spørsmål under lydopptak:
Enkle spørsmål for å bli kjent med eleven:

- Hva synes du om matte?
- Liker du det, liker du det ikke?
- Har du noen favorittemaer?
- Hva tenkte du rundt oppgavene du løste her?

Dialog med eleven gjennom oppgavene, med fokus på elementer som har kommet fram gjennom analyse som interessante. Spørsmål som kan være aktuelle:

- Beskriv hva du har gjort her?
- Hva tenkte du for å komme frem til dette?
- Forklar hvorfor du gjorde dette?
- Hvordan vil du forklare denne tegningen?
- Kan du gå nærmere inn på dette?

Avslutning/oppsummering:
Spørre om elevene har noe å legge til eller om eleven har noen spørsmål. Takke for at eleven stilte opp i intervju. Minne om at eleven når som helst kan trekke seg og at navn eller skole ikke vil komme frem i oppgaven.