Kognitive krav og forståelse av funksjoner

En studie av oppgaver i to lærebøker i Matematikk 1P

JØRGEN STEEN

VEILEDERE
Kristina Markussen Raen og Ingvald Erfjord

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Etter fem år på lektorutdanningen ved Universitetet i Agder er jeg nå klar for å levere masteroppgaven min i matematikkdidaktikk. Årene her i Kristiansand har vært svært spennende, opplevelsesrike og ikke minst lærerike. De siste fem årene har gitt meg mye kunnskap og mange erfaringer som jeg vil ta med meg videre i livet, ikke minst inn i klasserommet når jeg nå skal stå på andre siden av kateteret.

Jeg vil først og fremst takke mine to flotte veiledere Kristina og Ingvald. Uten deres gode oppfølging og mange tilbakemeldinger vet jeg ikke om det hadde vært noe oppgave å levere. Jeg setter pris på at dere har vært så tilgjengelige, slik at jeg ikke har måttet vente lenge på hverken svar på spørsmål eller veiledning dersom jeg stod litt fast. Igjen tusen takk for støtten og oppfølgingen. Jeg vil også takke foreleserne jeg har hatt og vært i kontakt med gjennom disse årene ved Universitetet i Agder, dere har alle bidratt til at både kunnskapen min og gleden over å jobbe med fagene mine har økt. Takk for alt dere har lært meg.

Videre vil jeg takke mine medstudenter, og spesielt min gode samarbeidspartner gjennom studiet Henrik. Takk for alle gode råd, samtaler og støtte. Og takk for alle hyggelige minner og opplevelser her i Kristiansand. Takk til alle medstudenter som har pushet og støttet gjennom mange timer på biblioteket og lange lunsjer i kantina nå i innspurten.

Sist men ikke minst vil jeg takke min nærmeste familie og kjæreste for all støtte gjennom hele studietiden. Dere har vært veldig gode å ha, spesielt når jeg selv har slitt med å finne motivasjon.

Kristiansand, mai 2019

Jørgen Steen

Sammendrag

Denne studien har som formål å undersøke hvor krevende oppgaver gitt i lærebøker og på skriftlig eksamen i faget Matematikk 1P er. Jeg har sett på oppgaver gitt innen emnet funksjoner, og har undersøkt hvordan oppgavene gir mulighet for en rik forståelse av funksjoner. Matematikk er et fag der læreboka er en viktig kilde til informasjon og oppgaver. Det er derfor viktig at disse oppgavene er tilpasset elevenes ulike nivå, og at de gir mulighet for god forståelse. Denne studien har som formål å besvare følgende forskningsspørsmål:

- Hvilke kognitive nivåer blir elever utfordret på i lærebøkers oppgaver i Matematikk 1P?
- Hvordan er vanskelighetsgraden på oppgaver i lærebøker sammenliknet med oppgaver gitt på skriftlig eksamen i Matematikk 1P?
- Hvilke muligheter for rik forståelse av funksjoner i Matematikk 1P gir oppgaver i to utvalgte lærebøker?

Dette ble undersøkt gjennom å se på oppgaver i to lærebøker, *Sinus 1P* og *Matematikk 1P,* og oppgaver gitt til skriftlig eksamen i 1P de fire siste årene. Jeg har kategorisert oppgavene etter hvilke kognitive krav de stiller til elevene, og etter hvilke transformasjoner av semiotiske representasjoner som er brukt i oppgavene. Analysen min tar utgangspunkt i en allerede eksisterende analysemodell presentert av Brändström (2005) og utviklet en modell som passer til mine forskningsspørsmål.

Resultatene fra denne studien viser at elever arbeider mye med å bruke prosedyrer i oppgavene både i lærebøkene og på skriftlig eksamen. Det er blant oppgavene typiske algoritmiske oppgaver der de får trening i å bruke prosedyren for å komme frem til riktig svar, men mest oppgaver der elevene må ha forståelse for meningen bak prosedyren. De analyserte oppgavene inneholder mange konverteringer mellom ulike representasjonsformer for funksjoner, med færrest til eller fra en numerisk tabell.

I denne studien blir man som lærer bevisst på hvilke typer utfordringer ulike oppgaver kan gi til elevene, og hva slags forståelse de gir mulighet for. Man blir også bevisst på hvilke typer oppgaver man finner i lærebøker i 1P. Det er da viktig å kunne gi alle elever utfordringer på sitt nivå og være kritisk til oppgavene man gir til elevene. Denne studien gir også innsikt i ulike måter å kategorisere oppgaver, som kan brukes til å få en oversikt over ulike aspekter ved oppgavene.

Summary

The purpose of this study is to investigate how demanding tasks given in school textbooks and written exam in the subject Matematikk 1P are. I have studied tasks given within the subject of functions, and how the tasks allow for a rich understanding of functions. Mathematics is a subject where the textbook is an important source of both information and tasks. It is therefore important that these tasks are adapted to the students' different levels, and that they provide the opportunity for good understanding. This study aims to give an answer to the following research questions:

- AT which cognitive levels are the students challenged in the textbooks' tasks in Matematikk 1P
- How is the difficulty level of tasks in textbooks compared to tasks given in a written exam in Matematikk 1P?
- What opportunities for a rich understanding of functions in Matematikk 1P are given by the tasks in two different textbooks.

This was studied by looking at tasks in two different textbooks, *Sinus 1P* and *Matematikk 1P*, and tasks given in written exams in 1P over the last four years. I have categorized the tasks according to the cognitive demands they give students, and by which transformations of semiotic representations that are used in the tasks. My analysis is based on an already existing model of analysis presented by Brändström (2005) and developed a model that fits my research questions.

The results from this study show that the students work a lot using procedures in tasks, both in textbooks and written exams. Among these tasks are typical algorithmic tasks where the focus is getting the right answer, but for the most tasks the students need to understand the meaning behind the procedure. The analyzed tasks use many conversions between different forms of representations for functions, with fewer conversions to or from a numerical table.

From a teacher's point of view this study can make you more aware of what challenges students face with different tasks, and what type of understanding the tasks can give. You can also become more aware of the types of tasks you find in textbooks in 1P. It is then important for teachers to be able to give all students challenges at their level and be critical to the tasks they give to the students. This study also provides insight into different ways of categorizing tasks, which can be used to get an overview of different aspects of the tasks.

Innholdsfortegnelse

1 Introduksjon

I denne studien ønsker jeg å undersøke oppgaver gitt i lærebøker i matematikk på videregående skole. Jeg vil undersøke hva oppgavene krever av elevene, og hvordan oppgavene kan være med på å bygge opp en vid forståelse for emnet funksjoner. Jeg vil også sammenlikne vanskelighetsgraden på oppgavene gitt i lærebøkene med oppgaver gitt på skriftlig eksamen de fire siste årene. For å gjennomføre denne studien var det flere valg og begrensninger som måtte tas. Jeg vil i dette kapittelet begrunne valg av tema for studien, før jeg begrunner valg av fag, lærebøker og matematisk emne. Til slutt vil jeg presentere mine forskningsspørsmål.

1.1 Begrunnelse for valg av tema

Nettsiden *utdanningsnytt* publiserte i 2016 en artikkel der de blant annet skrev at «.. undersøkelser viser at matematikk er et papirdominert fag også på videregående» (Jelstad, 2016). Dette er basert på undersøkelser gjort i forbindelse med prosjektet ARK&APP som undersøkte bruken av læremidler i norske skoler. Det er derfor rimelig å hevde at lærebøkene er mye brukt, en viktig kilde til oppgaver for elevene, og det at det er viktig at disse oppgavene er gode.

Bruk av lærebøker har lenge vært og er fortsatt dominerende i matematikkundervisning. Det er primærkilden for undervisning i matematikk og brukes som et bindeledd mellom læreplan og praksis, da de brukes både som veiledning for undervisning og som en kilde for oppgaver (Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Rezat & Straesser, 2015; Svingen & Gilje, 2018). Det er derfor relevant å se på hvilke typer oppgaver man finner i lærebøkene og vurdere kvaliteten på disse oppgavene. Jeg har flere ganger hørt fra andre lærere at de er misfornøyde med lærebøkene, og enkelte velger også å undervise uten lærebøker. Hvorfor de er misfornøyde kan ha mange grunner. Jeg velger i min studie å undersøke hvilke typer oppgaver som blir gitt til elevene i lærebøker, og karakterisere hva disse krever av elevenes kognisjon og hvordan de legger grunnlag for forståelse i et emne. Dette ønsker jeg også å sammenlikne opp mot eksamensoppgaver som har blitt gitt, da jeg ønsker å finne ut om det er overenstemmelse mellom vanskelighetsgraden på oppgaver elevene arbeider med på skolen og de som blir gitt på eksamen.

I følge Opplæringsloven (1998, §1-3) er skolen pliktig å tilpasse undervisning til den enkelte elev. All opplæring og skolegang er bundet av denne. Dette burde derfor også gjenspeiles gjennom lærebøkene som brukes i skolen. For å kunne tilpasse til hver enkelt elev bør oppgavene i lærebøkene gi tilstrekkelige og tilpassede utfordringer til alle elever. Jeg ønsker i denne studien å se om oppgavene i bøkene gir utfordringer til elever på ulike nivåer. Oppgavene bør dermed være av varierende vanskelighetsgrad slik at alle elever har mulighet til å øke forståelse gjennom arbeid med disse.

For min egen del som fremtidig lærer i ungdomsskole eller videregående skole er dette temaet meget relevant. Det å kjenne til utfordringer og muligheter ved oppgaver i lærebøkene er viktig for å kunne tilpasse undervisningen på en god måte. Jeg ønsker basert på innsikt fra min studie å bli bedre på å vurdere oppgaver slik at jeg får økt min kompetanse til å vurdere hvilke deler av en oppgave som er mer eller mindre krevende, og hvor *rike* oppgavene er til å stimulere til læring og dypere kunnskaper i matematikk.

1.2 Valg av fag, lærebøker og matematisk emne

Rammene for denne oppgaven fører til at jeg har måttet ta noen valg og avgrensninger. Jeg har valgt å se på oppgaver innen matematikkfaget 1P. En grunn til at jeg valgte 1P er at forskjellen mellom standpunktkarakterer og eksamenskarakterer i dette faget har vist seg å være veldig stor. Tabell 1 viser en oversikt over gjennomsnittlig eksamenskarakter (skriftlig) og standpunktkarakter på landsbasis i perioden 2013-2018 i faget 1P. Dette skillet var større enn for alle de andre matematikkfagene på videregående skole (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Matematikk 1P	2013 - 2014	2014 - 2015	2015 - 2016	2016 - 2017	2017 - 2018
Eksamenskarakter	2,5	2,4	2,5	2,4	3
Standpunktkarakter	3,4	3,3	3,5	3,4	3,5

Tabell 1: Oversikt over eksamenskarakterer og standpunktkarakterer i 1P i perioden 2013-2018 (Utdanningsdirektoratet, 2019)

I tabellen kan man se at karakterene på skriftlig eksamen i 1P er betydelig lavere enn standpunktkarakterene i faget. Det kan derfor stilles spørsmål ved om en av grunnene til dette er at vanskelighetsgraden på oppgavene gitt til eksamen er høyere enn vanskelighetsgraden på oppgavene elevene arbeider med i lærebøkene på skolen. Det er her viktig å nevne at eksamensoppgaver er laget for å måle avsluttende kunnskaper mens oppgaver i lærebøkene gis for å bygge opp til en slik sluttkunnskap. I tillegg er eksamenskarakteren kun basert på én skriftlig prøve imens standpunktkarakter også inkluderer blant annet muntlige ferdigheter, slik at det kan være mange grunner til dette karakterskillet.

Tidsperspektivet på denne studien gjør at jeg ikke velger å se på alle lærebøkene i 1P, jeg har også valgt ut kun et emne i bøkene. Jeg ser på lærebøkene *Matematikk 1P* og *Sinus 1P* ut fra at disse er de mest brukte i videregående skole i dag. Begge bøkene sorterer oppgavene sine etter vanskelighetsgrad, noe som gjør at jeg også kan sammenlikne oppgaver på de ulike nivåene hver for seg. Det er sjelden slik at en elev jobber med alle oppgavene i boka, noen jobber mest med de oppgavene læreboka kategoriserer som «enkle» og andre med vanskeligere oppgaver. Det vil være interessant å se hvordan forfatternes inndeling er sammenliknet med min kategorisering av vanskelighetsgrad på oppgavene jeg analyserer. Bøkene jeg analyserer i denne studien er hentet fra hver sine læreverk som også inkluderer blant annet digitale ressurser. Jeg vil i min studie kun se på oppgaver gitt i lærebøkene.

Det matematiske emnet jeg har valgt å se på er funksjoner. Det er flere grunner til at jeg har valgt nettopp dette emnet. Funksjoner trekkes ofte fram som et emne i matematikk som mange elever sliter med å få tilstrekkelig forståelse for (Hollar & Norwood, 1999). Forskning viser at elever stadig etter gjennomført ungdomstrinn og videregående skole ikke har en tilstrekkelig forståelse for funksjoner (Hole & Grønmo, 2017). Det kan oppleves som et abstrakt tema, og jeg synes det er interessant å se hvordan oppgavene i lærebøker er med på å gi elevene en forståelse for emnet.

1.3 Forskningsspørsmål

Med bakgrunn i valgene nevnt ovenfor har jeg kommet frem til tre forskningsspørsmål:

- Hvilke kognitive nivåer blir elever utfordret på i lærebøkers oppgaver i Matematikk 1P?
- Hvordan er vanskelighetsgraden på oppgaver i lærebøker sammenliknet med oppgaver gitt på skriftlig eksamen i Matematikk 1P?
- Hvilke muligheter for rik forståelse av funksjoner i Matematikk 1P gir oppgaver i to utvalgte lærebøker?

Spørsmålene vil besvares gjennom en undersøkelse av to lærebøker og eksamensoppgaver fra de fire siste årene. Basert på teori om ulike kognitive nivåer på oppgaver og forståelse av funksjoner, vil jeg i kapittel 3 presentere en modell som jeg vil analysere oppgavene ut ifra. I kapittel 4 presenterer jeg analysen av lærebøkene og eksamen hver for seg, før jeg til slutt sammenlikner disse og i kapittel 5 diskuterer funnene opp mot teorien jeg presenterer i kapittel 2 og forskningsspørsmålene.

2 Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teori som jeg vil bruke som grunnlag for analysen og diskusjonen av de analytiske funnene. Jeg vil først karakterisere hva kunnskap og forståelse betyr i matematikk. Deretter vil jeg se på teori om kunnskap og forståelse i tilknytning til det matematiske emnet *funksjoner.* Jeg vil så presentere to begreper; kognitive prosesser og kognitive krav, som jeg senere vil bruke i min analyse. Til slutt vil jeg presentere en oversikt over hva som er gjort av tidligere forskning på lærebøker, og en studie som også har undersøkt oppgaver i lærebøker.

2.1 Kunnskap og forståelse i matematikk

I denne studien ønsker jeg å finne ut av hvilke utfordringer elever møter i arbeidet med oppgaver i lærebøker. Det er derfor relevant å se hvordan lærebøkene har bygd opp oppgavene med tanke på å øke elevers kunnskap og forståelse innen det matematiske emnet. Jeg ønsker her å tydeliggjøre hva jeg mener med kunnskap og forståelse, og hva ulik teori sier er god måte å oppnå forståelse. I dette kapittelet vil jeg først se på betydningen av kunnskap og hvordan kunnskap oppnås, før jeg presenterer ulike former for forståelse.

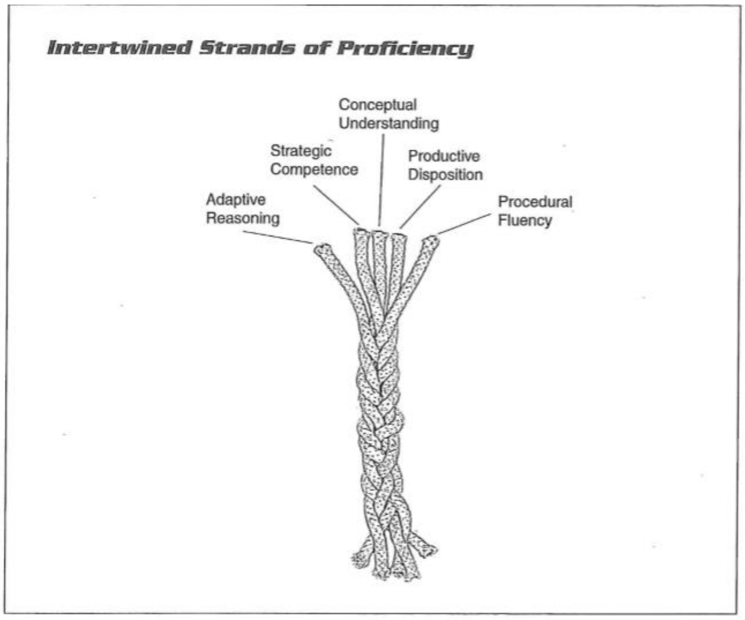
Kunnskapens natur, og hvordan man kan oppnå kunnskap er noe som har opptatt filosofer gjennom hele vår historie (Holmen, 2017a). Det finnes ingen enighet om en bestemt definisjon av begrepet kunnskap, men den mest kjente er den såkalte klassiske definisjonen som spores helt tilbake til Platon. Han så på kunnskap som en begrunnet sann oppfatning. «Et subjekt vet noe *p* hvis, og bare hvis: 1. *p* faktisk er sant 2. han eller hun tror *p* er sant og 3. han eller hun har fullverdig grunn til å tro at *p* er tilfelle» (Holmen, 2017b). Kunnskap handler altså om å vite.

Det skilles ofte mellom ulike former for kunnskap, og ulike måter å kategorisere kunnskapen. Innen konstruktivismen skiller Piaget mellom to typer kunnskap (Imsen, 2015, s. 154). Figurativ kunnskap er basert på fysisk læring, eller pugging. Det er kunnskap som ikke trenger noen logisk forankring, men som bare lagres i hukommelsessystemet. På den andre siden har vi operativ kunnskap som forankrer seg i generelle skjemaer. Denne oppnås av læring som går på å se et mer helhetlig bilde av et konsept, ikke bare enkeltfenomener. I matematikkundervisning brukes ofte fysisk læring til innlæring av formler, det vil si at elevene pugger formlene men ikke lærer hva den egentlig betyr. Det å kjenne til meningen bak symbolene er derimot operativ kunnskap.

I tillegg til å inneha kunnskap er det viktig at elevene har forståelse for kunnskapen. Kunnskapstypene nevnt ovenfor likner Skemp (1976) sin inndeling av typer forståelse i matematikk. Han skiller på to typer; instrumentell og relasjonell forståelse. Den relasjonelle forståelsen innebærer å både vite hva du skal gjøre og hvorfor. Det krever at man kjenner til meningen bak formlene, og Skemp mener denne typen forståelse er bedre enn den instrumentelle. Den instrumentelle forståelsen er i likhet med figurativ kunnskap «regler uten mening» (Skemp, 1976). Skemp trekker allikevel frem mange positive sider ved begge typer forståelse. En instrumentell forståelse kan være lettere å tilegne seg, da enkelte konsepter kan være vanskelig å forstå relasjonelt. Dersom en elev for eksempel skal lære å regne ut arealet av et rektangel, er det lettere å gi formelen $A = L * B$ som eleven kan pugge, enn å forklare hvorfor det faktisk er slik. Problemet med en instrumentell forståelse er at det kan være vanskelig å vite hvilken regel man skal bruke dersom oppgaven man skal løse er stilt på en uvant måte. Det blir også veldig mange regler å holde styr på om man skal lære alle på denne måten. Har man derimot en relasjonell forståelse er det lettere å tilpasse seg til nye typer oppgaver, og man slipper å huske alle regler.

I den nye overordna delen av læreplanen, *Verdier og prinsipper for grunnopplæringen* (Utdanningsdirektoratet, 2017a) står det at «Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger» (Utdanningsdirektoratet, 2017a, s. 11). Dybdelæring har mange av de samme elementene som det Skemp (1976) kaller relasjonell forståelse. I motsetning til overflatelæring handler dybdelæring om å se sammenhenger, og knytte nye begreper eller idéer til tidligere kunnskap og erfaringer. Svingen og Gilje (2018) poengterer at skolematematikken slik den er i dag kan skape overflatelæring hos elevene. En konsekvens av dette er at elevene ikke blir i stand til å finne løsninger på problemer der de ikke kjenner fremgangsmåten, de blir altså lite tilbøyelig for å løse oppgaver som ikke bærer preg av rutine. Da klarer elevene effektivt å løse oppgaver dersom de har sett liknende oppgaver tidligere, men får raskt problemer når oppgavene krever en forståelse av prosedyrene eller formlene som brukes.

Det kan være vanskelig å skille på hva som er kunnskap og hva som er forståelse i matematikk. Kilpatrick et al. (2001) setter sammen en modell som omfatter alt det de mener er nødvendig for å lære matematikk på en vellykket måte, både kunnskap, forståelse, ferdigheter og motivasjon. Denne består av fem komponenter eller «tråder» (*strands,* egen oversettelse) som alle henger sammen slik vist i figur 1.



Figur 1: De fem komponentene av matematisk ferdighet (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

Kilpatrick (2001) sine fem komponenter er:

- Konseptuell forståelse – forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner.
- Prosedyrekunnskap – ferdighet i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig.
- Strategisk kompetanse – evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer.
- resonnering – evne til logisk tanke, refleksjon, forklaring og begrunnelse.
- produktiv disposisjon – tilbøyelighet til å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt, kombinert med tro på aktsomhet og egen effektivitet

Konseptuell forståelse og prosedyrekunnskap kan knyttes tett opp mot Skemp sine kategorier relasjonell og instrumentell forståelse. Skemp (1976) ser på dette som en dikotomi, altså at man enten lærer relasjonelt eller instrumentelt. Kilpatrick et al. (2001) mener derimot at disse komponentene utfyller hverandre, altså trenger man begge i like stor grad. Forståelse gjør at man er mindre tilbøyelig til å glemme, men på den annen side trenger man ferdigheter for å kunne lære ulike matematiske begreper. Oppgaver i matematikk kan ofte kreve begge deler, nemlig å kunne bruke prosedyrer rett og å ha forståelse for meningen bak det man jobber med. I tillegg til dette trenger man ifølge Kilpatrick også strategisk kompetanse og resonneringsevne. Fagfornyelsen, den nye læreplanen som kommer i 2020, trekker frem viktigheten av nettopp det å jobbe med metoder og tenkemåter for å få bedre forståelse (Kunnskapsdepartementet, 2018). Det kan være nødvendig å ha når man arbeider med mer kompliserte oppgaver, der det ikke er opplagt hvilken prosedyre som skal brukes slik at man strategisk må velge fremgangsmåte. Det kan også i flere oppgaver være nødvendig å kunne reflektere over blant annet svarene, altså om svarene gir mening. Det siste punktet, produktiv disposisjon, er også meget viktig ifølge Kilpatrick et al. (2001). Troen på at matematikk er forståelig, og troen på at man selv kan få det til er nødvendig for å kunne utvikle konseptuell forståelse, prosedyrekunnskap, strategisk kunnskap og resonnering. Dette krever at elever blir utsatt for situasjoner der de føler at matematikken er nødvendig, og at det gir mening å arbeide med matematikk (Kilpatrick et al., 2001). Oppgaver som inneholder bruk av matematikk i en praktisk situasjon kan være med å støtte dette.

I følge Kilpatrick et al. (2001) er ikke disse komponentene selvstendige, men de representerer ulike aspekter ved en «kompleks helhet» (s. 116). For å lære matematikk på en god måte er det dermed ikke nok å tilegne seg kunnskap om matematiske konsepter, man må også utvikle andre kompetanser. Det vil i denne studien være interessant å se hvordan lærebøkene tar hensyn til denne utviklingen av forståelse når de presenterer oppgaver.

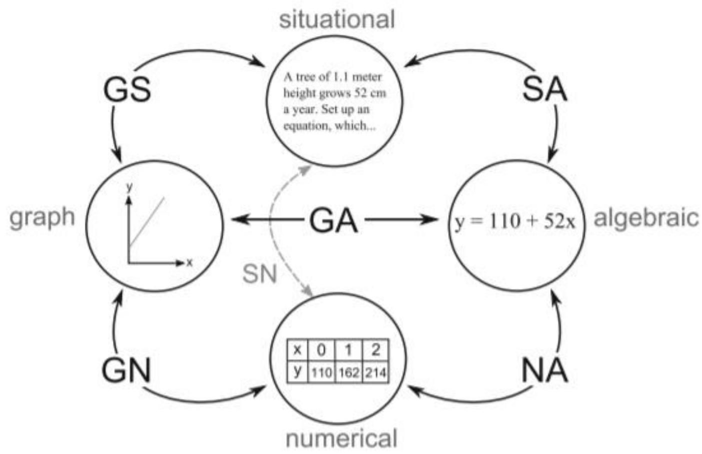
2.2 Forståelse av funksjoner

Funksjoner innen matematikken er et emne som elever ofte har vanskeligheter med å oppnå god forståelse av. Dette kommer til uttrykk i internasjonale undersøkelser som TIMSS der norske elever scorer gjennomgående dårlig på algebra og funksjoner (Hole & Grønmo, 2017). I dette kapittelet vil jeg se nærmere på hvordan elever kan bygge opp en forståelse av funksjoner, og i den forbindelse presenterer jeg teori om semiotiske representasjoner og konvertering mellom disse. I denne studien studerer jeg om oppgavene i lærebøkene danner grunnlag for å kunne gi en god forståelse av funksjoner. Jeg ønsker på bakgrunn av det også å se på hva som er spesielt med funksjoner i forhold til faget Matematikk 1P. Her vil jeg se på hva læreplanen sier om hvilken forståelse elevene i 1P skal ha for temaet funksjoner.

2.2.1 Semiotiske representasjoner

Matematikk skiller seg fra fag som fysikk, biologi og kjemi ved at objektene i matematikk ikke er tilgjengelige for direkte observasjon. Der man i andre fag kan bruke instrumenter for å undersøke objekter trenger man i matematikken noe annet. Derfor bruker vi symboler eller *semiotiske representasjoner* for å illustrere for eksempel tall, figurer eller funksjoner (Duval, 2006). En matematisk funksjon er ikke noe man finner i naturen og kan observere direkte. Man trenger måter å representere funksjoner, som en graf eller et algebraisk uttrykk, for å kunne undersøke dem.

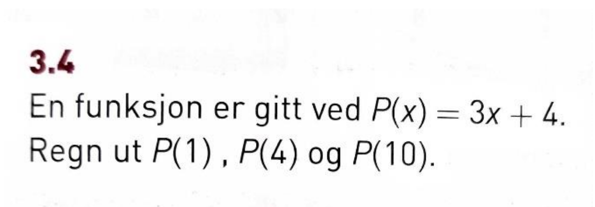
Forskning viser at overgang mellom ulike representasjonsformer for funksjoner er viktig for å bygge opp en god forståelse (f.eks. Ainsworth, Bibby & Wood, 2002; Duval, 2006). For å forstå et matematisk objekt holder det ikke med en representasjonsform, da objektet skiller seg betraktelig fra representasjonen. Man trenger flere representasjonsformer, og evnen til å bevege seg mellom disse for å virkelig forstå det matematiske objektet (Duval, 2006, s. 107). Nitsch et al. (2015) har undersøkt elevers kompetanser i arbeid med funksjoner på 9. og 10. trinn. De utviklet en modell som rettet seg mot overganger mellom ulike representasjonsformer.



Figur 2: De fem komponentene av matematisk ferdighet (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 117)

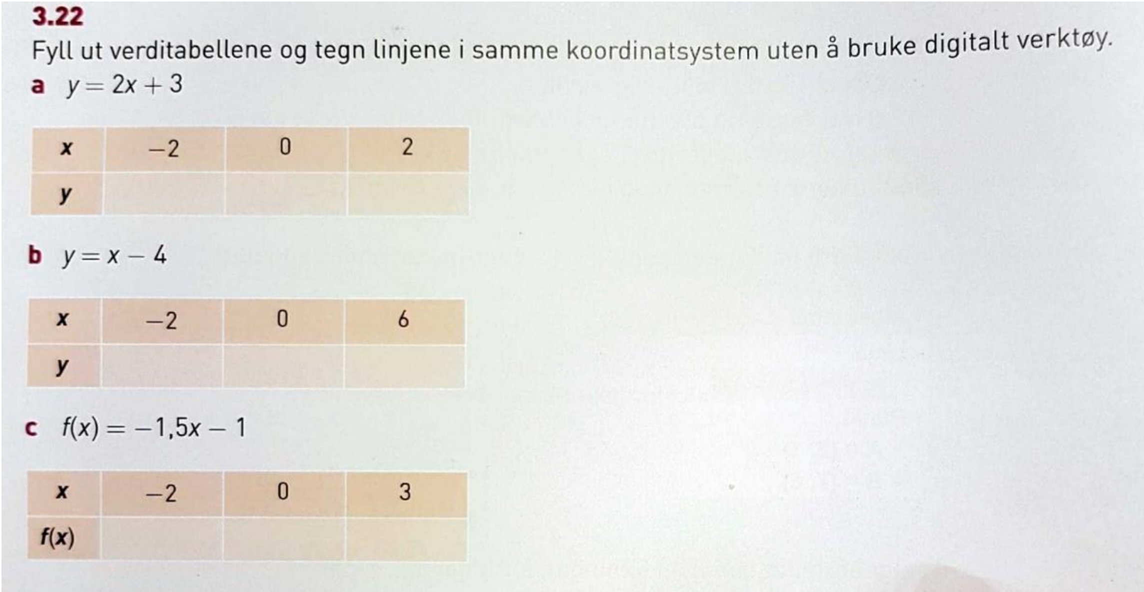
Modellen vist i figur 2 er basert de på de fire representasjonsformene graf (G), numerisk tabell (N), algebraisk formel (A) og beskrivelse av situasjon (S). Resultatene deres bekrefter tidligere forskning fra Duval og andre om at det er viktig å fokusere på alle typer overganger for å få en god forståelse av funksjoner. Lærebøker bør inneholde alle typer overganger, likt fordelt, og oppgaver bør variere mellom alle typer overganger (Nitsch et al., 2015, s. 674). I modellen inkluderer de alle overganger, men overgangen mellom situasjon og tabell (SN) er sladdet ut. De hadde ikke bruk for denne overgangen i undersøkelsen, men jeg tar den med her. Illustrasjonen av denne modellen tar ikke hensyn til hvilken retning overgangen går. Det er en mer generell klassifisering enn for eksempel Janvier (1987) sin modell, som har egne verb for konverteringer som går ulike retninger. Overgangene i modellen til Nitsch et al. (2015) er representert med piler, der for eksempel GS betyr overgangen fra graf til situasjon eller motsatt.

I tillegg til å takle overganger mellom ulike representasjonsformer er det nødvendig at elever klarer å arbeide innen hver av dem. Det finnes ifølge Duval (2006) to typer transformasjoner av semiotiske representasjoner: *behandling* (treatment) og *konvertering* (conversion). Behandling er transformasjoner som foregår innen en type semiotisk representasjon, altså der man ikke beveger seg mellom ulike representasjonsformer. Innen funksjoner kan det for eksempel være å regne ut funksjonsverdier for bestemte punkter basert på en algebraisk formel, slik som vist i figur 3.


3.4
En funksjon er gitt ved $P(x) = 3x + 4$.
Regn ut $P(1)$, $P(4)$ og $P(10)$.

Figur 3: Eksempel på en oppgave som viser behandling innen samme representasjonsform (Heir et al., 2014, s. 95).

Konvertering er der man beveger seg mellom ulike semiotiske representasjoner, som for eksempel å tegne en graf basert på en tabell gitt for funksjonen. Konverteringen kan altså representeres gjennom de ulike overgangene i figur 4. Duval (2006) sier at dersom behandling er det viktigste fra et matematisk synspunkt, er konvertering den avgjørende faktoren for læring. Det å kunne bruke de ulike overgangene er altså essensielt for å lære, eller oppnå forståelse. Figur 4 viser en oppgave hentet fra boka *Matematikk 1P* der elevene får bruk for ulike konverteringsprosesser.



3.22
Fyll ut verditabellene og tegn linjene i samme koordinatsystem uten å bruke digitalt verktøy.

a $y = 2x + 3$

x	−2	0	2
y			

b $y = x - 4$

x	−2	0	6
y			

c $f(x) = -1{,}5x - 1$

x	−2	0	3
f(x)			

Figur 4: Eksempel på oppgave som viser ulike overganger mellom representasjonsformer (Heir et al., 2014, s. 108)

I oppgaven ovenfor må elevene konvertere mellom ulike representasjonsformer. Disse konverteringene kan kategoriseres utfra Nitsch sin modell (figur 2). Her skal elevene først fylle ut en tabell basert på en formel (NA), for så å tegne en graf som tilhører tabellen (GN). Den inneholder altså to konverteringsprosesser. I denne studien ønsker jeg å se på hvilke transformasjoner som blir brukt i oppgaver gitt i lærebøkene og til eksamen. Jeg vil da i første omgang skille på behandling og konvertering og i tillegg se på hvilke av konverteringsprosessene vi finner i oppgavene.

2.2.2 Funksjoner og Matematikk 1P

I faget Matematikk 1P er det lagt vekt på praktisk bruk av matematikk. Innen temaet funksjoner betyr dette at det er viktig å arbeide med funksjoner som beskriver praktiske situasjoner. Læreplanen (LK06) legger frem følgende kompetansemål for temaet funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2013):

- *gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt*
- *omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar*
- *undersøkje funksjonar som beskriv praktiske situasjonar, ved å fastsetje nullpunkt, ekstremalpunkt og skjeringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultata*

Utfra disse kompetansemålene kan man se at bruk av praktiske eksempler eller situasjoner er ment å være en viktig kontekst for arbeidet med funksjoner i Matematikk 1P. Elevene skal kunne bruke begrepet lineær vekst for å beskrive praktiske situasjoner. Det vektlegges også at elevene skal kunne omgjøre mellom ulike representasjoner av funksjoner. De ulike representasjonsformene og konverteringsprosessene er beskrevet i kapittel 2.2.1. Siste punkt sier at elevene skal kunne undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner. Det legges igjen vekt på den praktiske bruken av funksjoner, og elevene skal kunne tolke verdier praktisk.

Det er også spesifisert i læreplanen at elevene skal kunne arbeide med funksjoner digitalt. I 2015 kom det en revidert eksamensordning for skriftlig eksamen i matematikk. For faget 1P innebar det blant annet at elevene skal kunne bruke regneark og graftegner på del to av eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2015). Innen arbeid med funksjoner betyr dette å bruke digital graftegner (som GeoGebra) for å tegne grafer og undersøke funksjoner. Dette kan gi både muligheter og utfordringer til arbeidet med funksjoner. Hals (2010) har gjort en undersøkelse av hvorfor, eventuelt hvorfor ikke, lærere på 10. og 11. trinn velger å bruke matematisk programvare i undervisningen, særlig programmet GeoGebra. Undersøkelsen foregikk ved hjelp av elektronisk spørreskjema besvart av over 300 matematikklærere. De mest nevnte årsakene for å ta i bruk IKT i matematikkundervisningen var å øke motivasjonen til elevene og at det sparte tid på eksamen. De mest brukte argumentene for å ikke bruke IKT i matematikkundervisningen var at nytteverdien for elevene var for liten i forhold til tidsbruken. I 2015 ble som nevnt eksamensordningen endret, slik at regneark og graftegner må benyttes på skriftlig eksamen i matematikk. Dette er i tråd med Hals' funn, som fant at IKT i matematikk i stor grad vurderes som nyttig for elevene.

2.3 Kognitive prosesser

Kognitiv er ifølge Store norske leksikon det som har med erkjennelse, oppfatning og tenking å gjøre (Kjøll & Tranøy, 2018). Elever bruker ulike kognitive prosesser når de arbeider med oppgaver. Prosessene kan knyttes opp mot Blooms taksonomi (Bloom, 1956) som lenge har vært brukt til å lage og analysere oppgaver i matematikk (Brändström, 2005). Denne taksonomien ble i 2001 revidert av Anderson et al. (2001). Her ble substantivene erstattet med verb, noe som passer bedre for å analysere hvilke prosesser som foregår når elever arbeider med oppgaver. Dette vil jeg senere se i sammenheng med hvilke kognitive krav en oppgave har til elevene. Jeg velger å presentere denne versjonen av kognitive prosesser slik Brändström presenterer den:

Kognitive prosesser
Huske
Forstå
Anvende
Analysere
Evaluere
Skape

Tabell 2: Kognitive prosesser (Brändström, 2005, s. 30, egen oversettelse)

Å huske innebærer å kunne hente inn relevant informasjon fra langtidshukommelsen (Anderson et al., 2001). Hvis en elev for eksempel blir bedt om å oppgi koordinatene til origo utfra et koordinatsystem må eleven i denne oppgaven ta i bruk denne prosessen. Eleven må huske hva vi mener med origo, og bruke denne informasjonen sammen med informasjonen eleven har om hvordan man skriver punkter. Dette blir sett på som den laveste kognitive prosessen. Å huske er essensielt for meningsfull læring ettersom denne kunnskapen også blir brukt i mer komplekse problemer. Denne prosessen innebærer å gjenkjenne og å minnes tidligere kunnskap (Anderson et al., 2001, s. 66-69).

Å forstå innebærer å kunne konstruere mening av instruktive beskjeder gitt enten muntlig, skriftlig eller grafisk. Elevene kan skape sammenheng mellom ny kunnskap og kunnskap de allerede har. Inkludert i denne prosessen er å kunne tolke, eksemplifisere, klassifisere, summere, antyde, sammenlikne og forklare (Anderson et al., 2001, s. 70) Elevene kan altså lese og tolke en oppgave og gjøre seg opp en mening om hva de må gjøre, de innehar en konseptuell forståelse. For å kunne bevege seg mellom ulike representasjoner er forståelse en viktig prosess, man må kunne tolke det som står i en representasjon og bruke dette til å representere det på en annen måte.

Å anvende kunnskap innebærer å kunne bruke prosedyrer til å gjøre oppgaver. Dette inkluderer både oppgaver der eleven vet hvilken prosedyre som skal brukes og oppgaver der dette er ukjent. Eleven må altså kunne utføre rutineproblemer med korrekte prosedyrer men også implementere kunnskap for å velge rett prosedyre i et ukjent problem, sistnevnte krever en konseptuell forståelse (Anderson et al., 2001, s. 77).

Å analysere innebærer å kunne bryte opp informasjon i biter og bestemme hvordan bitene relateres til hverandre og en overordnet struktur. Elever må kunne bestemme relevante deler av en oppgave, hvordan de er organisert og finne den underliggende meningen bak oppgaven for å kunne løse en oppgave som krever denne kognitive prosessen. Dette er en utvidelse av å forstå, og et grunnlag for å kunne evaluere og skape (Anderson et al., 2001, s. 79).

Å evaluere innebærer å kunne gjøre vurderinger basert på ulike kriterier og standarder. En oppgave kan for eksempel be elevene om å vurdere svaret sitt eller metoden de har brukt, da må de bruke denne prosessen. Det innebærer også å kunne bevise at valg de har tatt stemmer, og å kunne kritisere eget arbeid om de ser at noe kunne vært gjort på en bedre måte (Anderson et al., 2001, s. 83)

Å skape innebærer å sette elementer sammen og forme en sammenhengende eller funksjonell helhet. Elever må kunne se mønstre og sette sammen mønstre for å skape et originalt produkt. Dette kan innebære at elevene selv designer oppgaver eller hypoteser, eller at de bruker kjent informasjon til å skape et fysisk produkt. Denne prosessen innebærer å kunne generere, planlegge og produsere. Oppgaver som krever bruk av denne prosessen ses på som mest kognitivt krevende (Anderson et al., 2001, s. 84-85)

Sammen med disse prosessene bruker Anderson et al. (2001) de fire kunnskapstypene faktakunnskap, konseptuell kunnskap, prosedyrekunnskap og metakognitiv kunnskap for å danne sitt rammeverk, noe som likner Kilpatrick (2001) sin beskrivelse av forståelse. Jeg ønsker som nevnt å se prosessene i sammenheng med kognitive krav presentert i kapittel 2.5.

2.4 Kognitive krav

Matematikkoppgaver i lærebøker setter ulike krav til elevenes kognitive prosesser. Jeg har som fokus å se hvor kognitivt krevende oppgavene er, og vil her presentere en modell laget av Stein og Smith (1998). Deres analyse av oppgaver er basert på tanken om at oppgaver brukt i klasserommet former grunnlaget for elevers forståelse. Det vil si at dersom elever kun blir utsatt for oppgaver som krever instrumentell forståelse kan det føre til at de kun oppnår en instrumentell forståelse. Elever trenger derfor oppgaver som utfordrer ulike sider av forståelsen, og oppgaver av ulik vanskelighetsgrad med tanke på kognisjon. I modellen de utviklet delte de kognitive kravene inn i to hovedkategorier, oppgaver med lave kognitive krav og høye kognitive krav. Ved hjelp av en slik modell kan man studere hva slags tenking som kreves av elever i arbeid med ulike oppgaver.

Under lave kognitive krav finner vi kategoriene *memorering* og *prosedyrer uten forbindelse*. Disse er igjen delt inn hierarkisk slik at oppgaver med prosedyrer uten forbindelse er mer kognitivt krevende enn oppgaver som havner under kategorien memorering. Kategoriene *prosedyrer med forbindelse* og *å gjøre matematikk* utgjør det Stein og Smith (1998) mener er høye kognitive krav. Jeg vil nå se på hvordan forfatterne beskriver de ulike kategoriene og vise noen eksempler på oppgaver som kategoriseres utfra denne modellen.

Memorering

Oppgaver innen denne kategorien involverer å reprodusere fakta, regler, formler eller definisjoner. De krever ingen forståelse av sammenheng til meningen bak reglene eller definisjonene. Oppgavene kan ikke bli løst ved bruk av prosedyrer, enten fordi en prosedyre for å løse oppgaven ikke eksisterer, eller at tidsrammen for oppgaven er for kort for å ta i bruk en prosedyre. En slik oppgave er heller ikke tvetydig, og krever ingen forståelse av meningen bak det som reproduseres (Smith & Stein, 1998).

Dette kan altså knyttes tett opp mot en instrumentell forståelse eller figurativ kunnskap. En oppgave i denne kategorien kan se slik ut:

Memorization

What are the decimal and percent equivalents for the fractions 1/2 and 1/4?

Expected student response:

$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

Figur 5: Eksempel på oppgave innen «memorering» (Stein & Smith, 1998, s. 269)

Denne oppgaven krever kun at elevene skal huske desimalrepresentasjonen og prosentverdien for brøkene. Elevene denne oppgaven er gitt til har ikke lært noen prosedyre for å løse oppgaven enda, og må derfor «huske» verdien på brøkene. Denne typen oppgave utvikler ikke direkte noen av Kilpatrick (2001) sine forståelsestyper, men kan legge grunnlag for å senere utvikle en konseptuell forståelse.

Prosedyrer uten forbindelse

Innen det andre nivået finner vi oppgaver der elevene trenger en prosedyre for å komme frem til svaret. Dette blir allikevel sett på som lavt kognitivt nivå, da oppgaver i denne kategorien ikke krever noe mer enn prosedyren. En slik oppgave kan være:

Procedures without connections

Convert the fraction 3/8 to a decimal and a percent.

Expected student response:

Fraction	Decimal	Percent
$\frac{3}{8}$	$\begin{array}{r} 0.375 \\ 8\,\overline{)3.000} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \end{array}$	$0.375 = 37.5\%$

Figur 6: Eksempel på oppgave i kategorien «prosedyrer uten forbindelse» (Stein & Smith, 1998, s. 269)

Denne typen oppgave setter litt høyere krav til elevenes tenking enn en oppgave i kategorien memorering. Disse oppgavene er algoritmiske, og det er tydelig hvilken prosedyre som er tenkt at elevene skal bruke, enten i form av tidligere eksempler eller lærerens gjennomgang. I likhet med oppgavene innen memorering kreves det ikke noen forståelse av meningen bak prosedyren. Fokuset i oppgaven er å få korrekt svar, ikke å utvikle matematisk forståelse. Det kreves heller ingen forklaring, kun det matematiske svaret. Slike oppgaver stiller lave kognitive krav til elevene (Smith & Stein, 1998, s. 348)

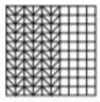
Prosedyrer med forbindelse

Formålet med oppgaver i denne kategorien er å øke elevenes forståelse for emnet, gjennom bruk av prosedyrer. Her kreves det en forståelse av meningen bak prosedyren for å kunne gjennomføre oppgaven. Oppgaver av denne typen foreslår enten eksplisitt eller implisitt en bred prosedyre å følge som har nær forbindelse med de underliggende konseptuelle idéene. De er ofte representert på ulike måter, og ved å skape forbindelse mellom de ulike representasjonene øker elevene forståelsen sin. Elevene må kunne følge prosedyrer, men ikke uten å tenke og være kritiske. Det kreves bruk av underliggende begreper for å fullføre oppgaven (Smith & Stein, 1998). En oppgave i denne kategorien kan se slik ut:

Procedures with connections

Using a 10 × 10 grid, identify the decimal and percent equivalents of 3/5.

Expected student response:

Pictorial	Fraction	Decimal	Percent
	$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$	$\frac{60}{100} = 0.60$	$0.60 = 60\%$

Figur 7: Eksempel på oppgave innen kategorien «prosedyrer med forbindelse» (Stein & Smith, 1998, s. 269)

I denne oppgaven bruker elevene flere representasjonsformer for å oppnå forståelse for meningen bak en brøk, et desimaltall og et prosenttall. Bruken av et 10 x 10 rutenett er med på å forsterke meningen bak tallene man finner. Det kreves at elevene tar valg når de bruker rutenettet, og klarer å bruke dette på en hensiktsmessig måte for å få verdiene de trenger.

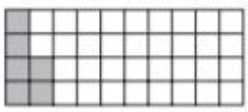
Å gjøre matematikk

Det øverste kognitive nivået inkluderer oppgaver som krever at man «gjør matematikk». Dette krever at elevene utforsker og forstår de matematiske konseptene, prosessene eller sammenhengene. Det er her altså ikke eksplisitt foreslått en forutsigbar innlært metode å løse oppgaven. En oppgave av denne typen se slik ut:

Doing mathematics

Shade 6 small squares in a 4 × 10 rectangle. Using the rectangle, explain how to determine each of the following: (a) the percent of area that is shaded, (b) the decimal part of area that is shaded, and (c) the fractional part of area that is shaded.

One possible student response:



(a) One column will be 10%, since there are 10 columns. So four squares is 10%. Then 2 squares is half a column and half of 10%, which is 5%. So the 6 shaded blocks equal 10% plus 5%, or 15%.

(b) One column will be 0.10, since there are 10 columns. The second column has only 2 squares shaded, so that would be one-half of 0.10, which is 0.05. So the 6 shaded blocks equal 0.1 plus 0.05, which equals 0.15.

(c) Six shaded squares out of 40 squares is 6/40, which reduces to 3/20.

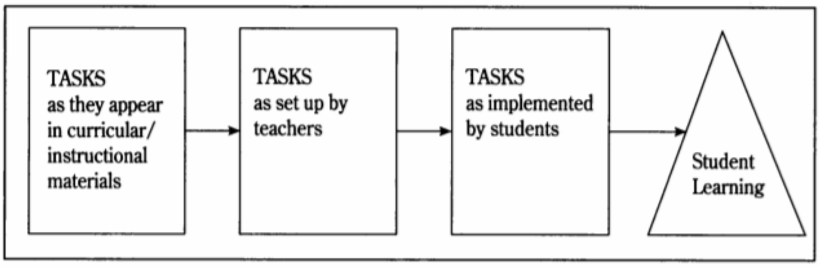
Figur 8: Eksempel på oppgave innen «å gjøre matematikk» (Stein & Smith, 1998, s. 269)

Her må elevene selv komme frem til en prosedyre, de må da ta i bruk relevant kunnskap for å komme frem til en løsning. Det er oppgitt at de skal bruke et 4x10 rektangel, men det å bruke det på riktig måte for å komme frem til svaret krever at de kan koble oppgaven opp mot de underliggende matematiske konseptene. Elevene må tolke, kunne ta valg, finne ut hva som er relevante og nødvendige opplysninger i situasjonen og bruke disse. Dette krever kompleks og ikke-algoritmisk tenking og ses derfor på som det høyeste kognitive kravet i oppgaver (Smith & Stein, 1998).

I undersøkelsen til Smith og Stein (1998) fikk de 33 lærere til å analysere 20 oppgaver utfra deres forklaring av de ulike kategoriene for kognitive krav. Det de fant i undersøkelsen var at lærerne stort sett var enige om kategoriseringen. Der det var uenighet, var det for det meste ikke uenighet om det var høye eller lave kognitive krav, men heller hvilken av de to kategoriene under hver av disse oppgaven skulle kategoriseres som. For en oppgave var for eksempel alle enige om at den hørte til høye kognitive krav, men det var uenighet om den var i kategorien «prosedyrer med forbindelse» eller «å gjøre matematikk». Uenigheten kom ofte av at det var uenighet om forutsetningene til elevene som skulle løse oppgavene, noe som er en viktig faktor når man skal kategorisere oppgavene (Smith & Stein, 1998).

Oppgavenes ulike faser

Stein og Smith (1998) beskriver også tre ulike faser oppgavene passerer. Disse fasene har ifølge Stein og Smith stor betydning for hva elevene lærer. De ulike fasene er presentert i figur 9.



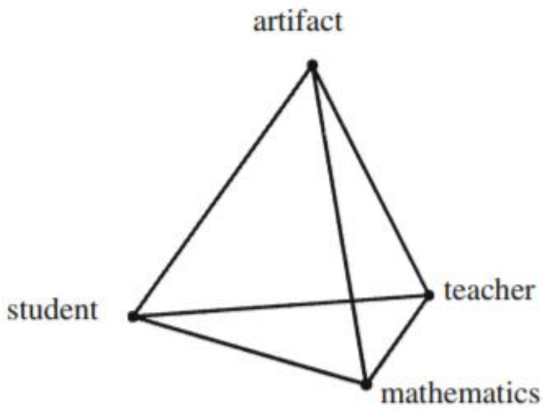
Figur 9: Ulike faser en oppgave passerer (Stein & Smith, 1998, s. 270)

Første fase en oppgave passerer gjennom er ifølge Stein og Smith hvordan de er fremstilt i faglige tekster som lærebøker eller digitale læremidler. Deretter hvordan oppgavene blir presentert av lærerne, og til slutt hvordan elevene selv implementerer oppgavene. Alle disse fasene har innflytelse på hva elevene lærer av oppgaven. Oppgavenes art endres ofte når de går fra en fase til en annen. Hvilke kognitive krav en oppgave faktisk stiller til elevene er derfor avhengig av flere elementer enn bare hva som står i oppgaveteksten.

2.5 Tidligere forskning

Utdanningsdirektoratet har nå nylig lansert et verktøy for å vurdere kvalitet av læremidler (Utdanningsdirektoratet, 2018). Her kan blant annet lærere gå inn og vurdere læreverk, noe de kan bruke som grunnlag for å diskutere valg av lærebøker på skolene. Verktøyet er delt inn i tre hoveddeler; design, pedagogisk og didaktisk kvalitet, og kobling til læreplanverket. Det mest interessante for min studie er den pedagogiske og didaktiske kvaliteten. Her vurderes blant annet hvorvidt oppgavene i læremiddelet legger til rette for at elevene tar i bruk ulike kognitive prosesser og om oppgavene stiller høye kognitive krav. I tillegg vurderer man om læremiddelet bruker ulike representasjoner og viser overganger, og om det legges opp til varierte arbeidsmåter og strategier. Ulike representasjoner og overganger trekkes også her frem som noe av det viktigste for å forstå matematiske funksjoner.

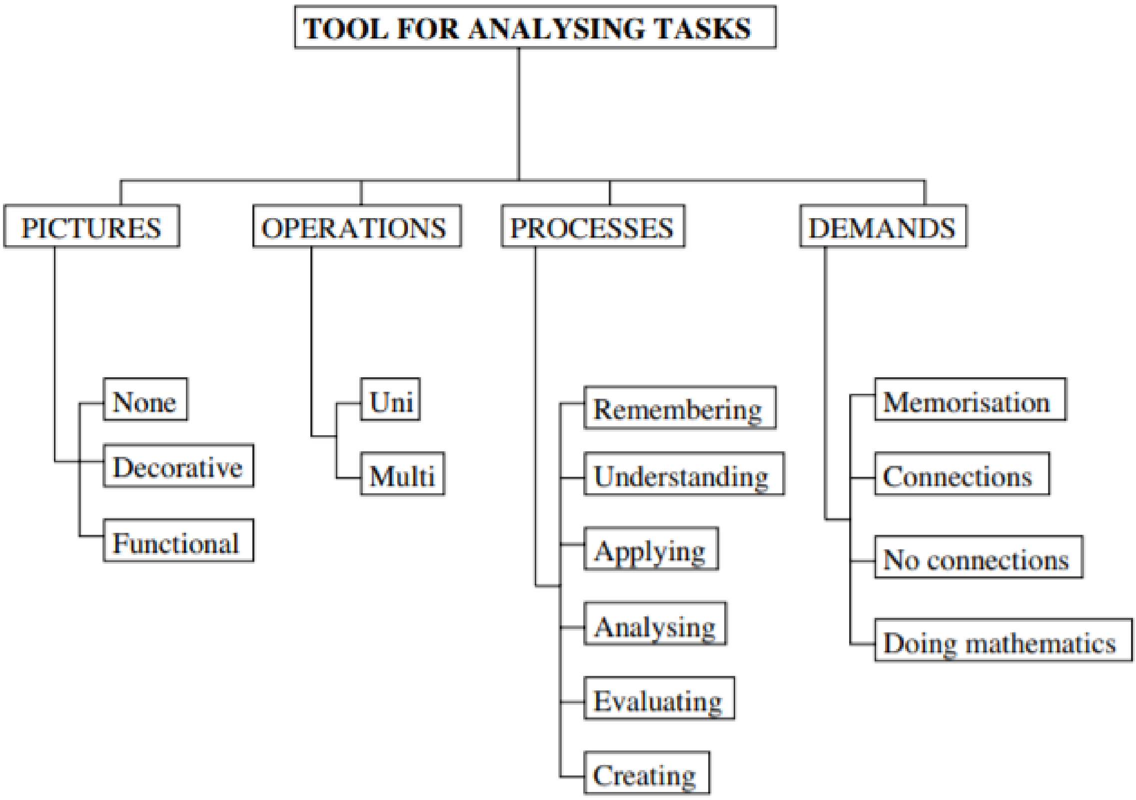
Verktøyet er laget på grunnlag av tidligere forskning representert i *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for lærebøker i matematikk* (Svingen & Gilje, 2018). Her presenteres blant annet ulike tilnærminger til å analysere lærebøker. Det didaktiske tetraederet, presentert av Rezat og Sträßer (2012), trekkes frem for å illustrere ulike innfallsvinkler man kan ha når man analyserer læremidler. Dette er en utvidelse av den didaktiske trekanten mellom lærer, elev og fag, der læremiddelet blir plassert på toppen som et hjelpemiddel. Ved å ta utgangspunkt i dette tetraederet når man skal analysere lærebøker kan man velge hvilke av disse faktorene man vil ha fokus på.



Figur 10: Det didaktiske tetraederet (Rezat & Sträßer, 2012, s. 645)

Verktøyet som Utdanningsdirektoratet utviklet ser spesielt på relasjonen mellom lærer og læremiddel, det vil si fokuset ligger på hvordan læreren bruker læremiddelet og lærerens forståelse av læremiddelet. I min studie ønsker jeg å undersøke de to andre relasjonene, nemlig mellom elev og læremiddel og mellom matematikk og læremiddel. Jeg ønsker å se hvordan matematikken er presentert i oppgavene i lærebøkene og hvordan oppgavene gir ulike utfordringer til elevene. Rezat og Straesser (2015) har sett på studier av lærebøker i Norden, og skriver at de fleste tidligere studier ser på relasjonen mellom matematikk og læremiddel, nemlig hvordan matematikken er presentert i lærebøker.

Brändström (2005) har gjort en studie av oppgaver i lærebøker i Sverige. Hun ønsket å se på vanskelighetsgraden på oppgavene, for å se om oppgavene utfordret elever på ulike nivåer. Dette var altså en studie av differensieringen av oppgaver. I studien har Brändström sett på tre lærebøker i matematikk. For å vurdere vanskelighetsgraden på oppgaver utviklet hun en modell der hun så på fire ulike kriterier for oppgavene. Denne er presentert i figur 11.



Figur 11: Brändströms verktøy for å analysere oppgaver (Brändström, 2005, s. 47)

Brändströms modell er satt sammen av de fire kategoriene; bruk av bilder, antall operasjoner, kognitive prosesser og kognitive krav. Gjennom en kategorisering av oppgavene blant disse fire kategoriene ønsket Brändström å undersøke differensieringen av oppgavenes vanskelighetsgrad. Resultatene hennes viser at det er differensiering av oppgaver i lærebøkene. Hun så at på lavere kognitivt nivå var det i stor grad fokus på å følge prosedyrer algoritmisk, og derfor en instrumentell tilnærming, mens oppgavene på høyere kognitivt nivå var mer varierte og utfordrende. Studien fant at det finnes få oppgaver på det høyeste kognitive nivået «å gjøre matematikk».

3 Metode

Lærebøker brukes mye i matematikkundervisning, og innholdet og bruken av lærebøker har som nevnt derfor en viktig innvirkning på hva elevene lærer. Jeg har i denne studien sett på hvordan oppgavene i lærebøker gir mulighet for å skape et godt grunnlag for en sammensatt forståelse for funksjoner, og hvilke kognitive krav oppgavene stiller til elevene. Jeg har også sett på hvordan oppgavene i lærebøkene er sammenliknet med eksamensoppgaver. Mye av grunnen til dette er at jeg har sett at eksamenskarakterene er betraktelig lavere enn standpunktkarakterene i 1P, og det kan derfor være interessant å se om oppgavene skiller mye i vanskelighetsgrad. Jeg ønsker å analysere oppgavene opp mot de kognitive kravene (se kapittel 2.4) de stiller elevene. I hvilken grad oppgavene legger opp til en god forståelse av funksjoner ser jeg på ved å analysere hvilke transformasjoner og overganger som finnes i oppgavene, og om det er variasjon mellom disse, sammen med hva slags forståelse de ulike oppgavene legger opp til. Ettersom det er matematikk 1P jeg har valgt å analysere, vil jeg også se på læreplanen i 1P, som legger mye vekt på praktisk bruk av funksjoner. Jeg ønsker derfor å se spesielt på om oppgavene legger vekt på praktisk forståelse. Bruk av overganger til eller fra en praktisk situasjon er tegn på at oppgaven har fokus på praktisk forståelse.

I dette kapittelet vil jeg presentere hvordan jeg har designet denne studien for å kunne besvare forskningsspørsmålene mine. Jeg vil presentere bakgrunnen for en modell jeg har kommet frem til, og begrunne valg jeg har tatt underveis. Deretter vil jeg presentere modellen sammen med en kort forklaring av hvordan jeg bruker den i dataanalysen. Til slutt vil jeg begrunne mine valg av læreverk til studien og argumentere for studiens kvalitet.

3.1 Studien

Denne studien baserer seg på analyse av oppgaver i lærebøker og tidligere eksamener i matematikk, og kan kategoriseres som det Bryman (2016) kaller dokumentanalyse. I analysen vil jeg kategorisere oppgaver, slik at jeg kan danne meg en oversikt over hvordan oppgavene i bøkene og eksamensoppgavene er fordelt mellom de ulike kognitive kravene og hvilke overganger som finnes i oppgavene. Jeg ønsker også å analysere innholdet i oppgavene og gjennom dette kunne karakterisere hva som er typiske oppgaver innenfor de ulike kategoriene.

Etter at jeg hadde kommet fram til hva jeg ønsket å undersøke, gikk mye av tiden med til å orientere meg om hva som fantes av tidligere forskning gjort på lærebøker i matematikk. Mange tidligere studier ser på hvordan lærebøker presenterer matematiske emner, altså forholdet mellom lærebok og matematikk (se figur 10). Jeg ønsker i denne studien å se spesielt på oppgavene i lærebøkene, både hva slags forståelse de legger til grunn og hvor krevende de fremstår å være for elevene. Jeg ser da både på forholdet mellom lærebøkene og matematikken, men også mellom lærebok og elev, altså elevenes forståelse. Ettersom skillet mellom standpunktkarakter og eksamenskarakter i 1P har vist seg å være stort, ønsker jeg også å undersøke om det var et stort skille mellom vanskelighetsgraden på oppgavene gitt på eksamen og oppgavene gitt i lærebøkene. Det er imidlertid ikke rimelig å anta at fordelingen av typen oppgaver verken er eller nødvendigvis bør være lik i en lærebok og en eksamen. Eksamen er en avsluttende test som skal måle læringsutbyttet til elevene etter arbeid med fagstoff, mens læreboka skal bygge opp til et slikt læringsutbytte og et læringsforløp som skal gi godt grunnlag for forståelse. Videre gis en standpunktkarakter basert på både muntlig og skriftlige prestasjoner i faget over tid. Det kan derfor være mange grunner til dette karakterskillet.

Ettersom jeg ønsker å spesifikt se på temaet funksjoner, velger jeg oppgaver innenfor dette temaet i min undersøkelse. Oppgavene fra lærebøkene er derfor valgt utfra kapittelet bøkene kaller «Funksjoner», og av eksamensoppgavene valgte jeg ut de som inneholdt arbeid med funksjoner. Jeg trengte også teori som sa noe om oppgavenes vanskelighetsgrad, og etter en stund falt valget på å se på kognitive prosesser og kognitive krav. Dette var mye grunnet at jeg så at dette ble brukt av blant annet Brändström i hennes undersøkelser om matematikkoppgaver, i tillegg til at jeg har brukt det selv tidligere. Dette gjør også kategoriene mer troverdige. I hvilken grad oppgavene gir grunnlag for en rik forståelse av funksjoner vil jeg vurdere gjennom blant annet å se på variasjon av transformasjoner og konverteringer.

3.2 Bakgrunn og innhold i modellen

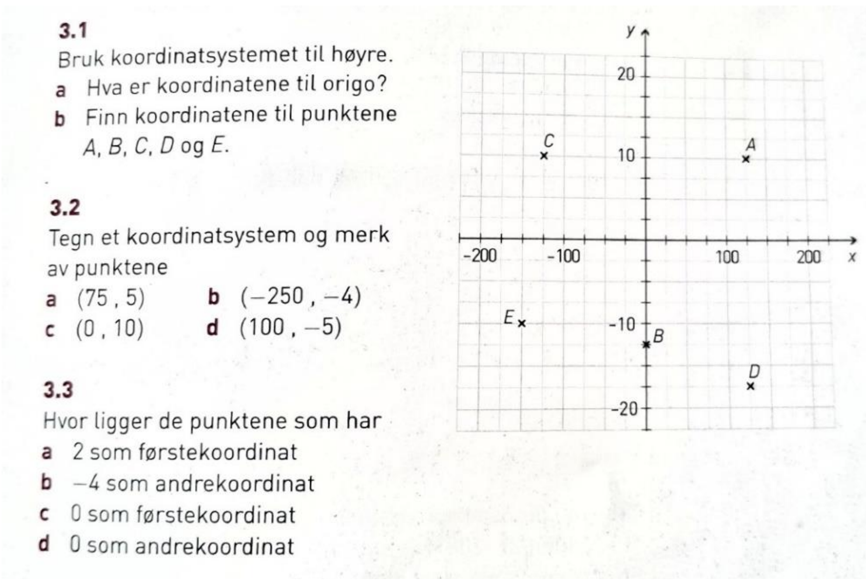
For å analysere oppgavene har jeg utviklet en modell med bakgrunn i tidligere forskning. Modellen min bygger på modellen utviklet av Brändström (2005), som jeg har presentert i figur 2. Jeg har valgt to hovedkategorier i min modell, «kognitive krav» og «overganger». Kategorien kognitive krav er også brukt i Brändströms studie av differensiering av oppgaver i lærebøker. Jeg har valgt å inkludere den, og å se den i sammenheng med kognitive prosesser, som Brändström har som en egen kategori. Kategorien «overganger» innebærer å se på hvilke transformasjoner som finnes i oppgavene, noe jeg vil beskrive nærmere i kapittel 3.2.2.

3.2.1 Kognitive krav

Kategorien *kognitive krav* er hentet fra Brändströms modell. Jeg ønsker å undersøke hvilke krav oppgavene stiller til elevenes tankeprosesser. Brändström skiller mellom kognitive prosesser og kognitive krav, mens jeg i min studie ønsker å se disse i sammenheng. Elevene tar i bruk ulike kognitive prosesser når de arbeider med oppgaver. Som nevnt i kapittel 2.4 brukes noen av disse prosessene på oppgaver på lavere kognitivt nivå og andre på oppgaver på høyere kognitivt nivå. Jeg vil se nærmere på dette når jeg presenterer kategoriene hver for seg under. De ulike kategoriene velger jeg å kalle «memorering», «uten forbindelse», «med forbindelse» og «å gjøre matematikk». Jeg vil nå beskrive kort de ulike kategoriene, samt trekke inn ulike prosesser og typer forståelse for å se hva som ligger til grunn for at en oppgave havner innen en av kategoriene, og hva det betyr for forståelsen.

Memorering

Oppgaver som krever memorering (se kapittel 2.4) er oppgaver som ifølge Smith og Stein (1998) befinner seg på lavt kognitivt nivå. Disse oppgavene inneholder ingen sammenheng til meningen bak reglene, formlene eller definisjonene som blir brukt. De kan ikke bli løst ved bruk av prosedyrer, men innebærer å reprodusere tidligere innlærte fakta, regler, formler eller definisjoner. Eksempler på slike oppgaver kan man se på figur 12.


3.1
Bruk koordinatsystemet til høyre.
a Hva er koordinatene til origo?
b Finn koordinatene til punktene A, B, C, D og E.

3.2
Tegn et koordinatsystem og merk av punktene
a $(75, 5)$ b $(-250, -4)$
c $(0, 10)$ d $(100, -5)$

3.3
Hvor ligger de punktene som har
a 2 som førstekoordinat
b -4 som andrekoordinat
c 0 som førstekoordinat
d 0 som andrekoordinat

Figur 12: Eksempler på oppgaver innen kategorien «memorering» (Heir, Engeseth, Moe & Borgan, 2014, s. 93).

Dette er de tre første oppgavene elevene møter innen temaet funksjoner i boka *Matematikk 1P (Heir et al., 2014).* Disse oppgavene krever at elevene har et forhold til koordinatsystemet. Oppgavene krever ingen prosedyre, da de enten skal lese av et koordinatsystem, eller merke av oppgitte punkter i et koordinatsystem. Oppgavene kan fint løses uten en forståelse av meningen bak koordinatene, og krever derfor ingen konseptuell forståelse, men bare å huske forholdet mellom koordinater og koordinatsystemet. Innenfor denne kategorien finner vi oppgaver som krever den kognitive prosessen «å huske». Dette innebærer at elevene henter inn informasjon fra langtidshukommelsen, i denne sammenhengen vil det si å gjenkjenne oppgavetypen og derfor raskt vite hva man skal gjøre (Anderson et al., 2001). De operasjoner som kreves for å løse en slik oppgave er allerede kjent av elevene, det kreves derfor at elevene *husker* hvordan de skal gå frem.

Uten forbindelse

Oppgaver som krever prosedyrer uten forbindelse, altså oppgaver i kategorien «uten forbindelse», befinner seg i følge Smith og Stein (1998) også under lavere kognitivt nivå, men over «memorering». Her finner vi oppgaver som krever bruk av en prosedyre. Som beskrevet i kapittel 2.5 er dette oppgaver som heller ikke krever noen kobling til meningen bak prosedyren som blir brukt. De inneholder ingen tvetydighet, og det er tydelig hvordan man skal løse oppgaven. En slik oppgave fokuserer på å produsere rette svar effektivt gjennom innlærte prosedyrer, og krever derfor delvis det Kilpatrick et al. (2001) kaller prosedyrekunnskap. Arbeid med slike oppgaver kan være med på å bygge opp det Skemp (1976) kaller instrumentell forståelse, da det er kun det å bruke prosedyren for å få rett svar som er i fokus (se kap. 2.1). Ifølge Skemp er det ikke nødvendig at elevene virkelig forstår oppgaven selv om de klarer å løse den, de er kjent med prosedyren og vet hva de skal gjøre uten å vite hvorfor. Et eksempel på en slik oppgave, fra eksamen i 1P våren 2015 (Marthinsen, Hagen & Baggethun, 2019), er vist i figur 13.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

a) Skriv av verditabellen nedenfor i besvarelsen din, og fyll inn tallene som mangler.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

b) Tegn grafen til f for $-4 \leq x \leq 2$.

Figur 13: Eksempel på en oppgave i kategorien «uten forbindelse». Hentet fra eksamen våren 2015 (Marthinsen et al., 2019)

I oppgaven ovenfor blir elevene bedt om å fylle ut en tabell basert på en oppgitt formel, og deretter tegne en graf ved bruk av tabellen og/eller formelen. Når elevene fyller inn tabellen krever det at de er kjent med at de skal sette inn de ulike verdiene for x i formelen ovenfor. Den krever derimot ingen forståelse for det underliggende begrepet funksjon, altså hva en funksjon er, eller hvorfor de gjør som de gjør. Det å tegne grafen basert på tabellen krever heller ingen dypere forståelse, bare at de kan merke av punktene og trekke linje gjennom disse. Selv om oppgaven ikke direkte krever denne forståelsen, betyr det ikke at man ikke kan bruke denne forståelsen for å løse oppgaven. Enten kan man huske at en andregradsfunksjon har en graf som ikke følger en rett linje, eller så kan man forstå hvorfor – men det kreves ikke. Oppgaven blir derfor plassert i kategorien «uten forbindelse». Delvis brukes den kognitive prosessen «anvende» i arbeid med slike oppgaver, men det å implementere kunnskap og velge rett prosedyre er noe som hører til høyere kognitive krav.

Med forbindelse

Oppgaver i kategorien «prosedyre med forbindelse» er oppgaver som i større grad utfordrer elevenes konseptuelle forståelse og prosedyrekunnskap (se. Kap. 2.1). Disse oppgavene kategoriseres som «høyere kognitive krav» av Smith og Stein (1998). Fokuset er å oppnå dypere forståelse for konseptene eller idéene som ligger bak gjennom bruk av prosedyrer. I arbeid med slike oppgaver bruker elevene de kognitive prosessene «anvende» og «analysere». Det kreves at elevene mestrer å se hva som er viktig i oppgaven, og bruke informasjonen til å finne passende prosedyre. Prosedyrene kan ikke følges tankeløst, det kreves en grad av kognitiv anstrengelse. Ved arbeid med slike oppgaver oppnår man i større grad det Skemp (1976) kaller relasjonell forståelse. Slikt arbeid kan være med på å utvikle både prosedyrekunnskap, strategisk kunnskap, resonnering og konseptuell forståelse (se kap. 2.1). Nedenfor kan man se et eksempel på en oppgave jeg har plassert i denne kategorien.

Oppgave 1 (5 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnadene $K(x)$ kroner og inntektene $I(x)$ kroner ved produksjon og salg av x enheter av varen er gitt ved

$$K(x) = 8{,}5x^2 + 25x + 11\,900 \qquad 10 \le x \le 100$$

$$I(x) = 790x \qquad 10 \le x \le 100$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til funksjonene K og I i samme koordinatsystem.

b) For hvilke verdier av x er inntektene og kostnadene like store?

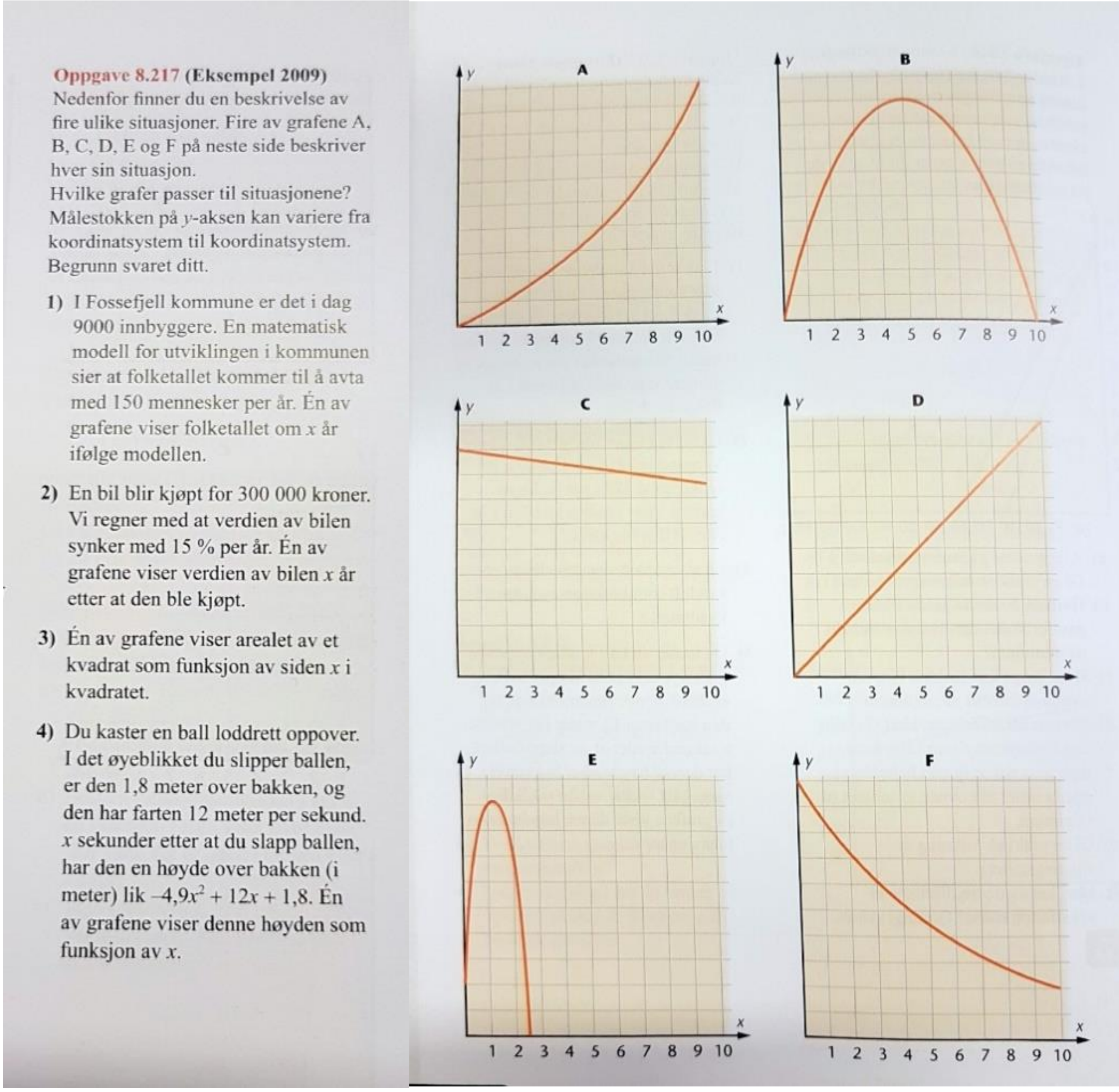
c) Hvor mange enheter av varen må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig? Hvor stort blir overskuddet da?

Figur 14: Eksempel på oppgave i kategorien "med forbindelse" - Hentet fra eksamen høsten 2015 (Marthinsen et al., 2019)

I oppgaven skal elevene først tegne inn grafene til de to funksjonene basert på funksjonsuttrykkene for kostnad og inntekt til en bedrift. Dette krever at de husker hvordan de skriver inn funksjoner i GeoGebra, altså lavt kognitivt krav. Oppgave b) ber elevene bestemme for hvilke *x*-verdier inntektene og kostnadene er like store. De skal til slutt bestemme hvor mange enheter av varen bedriften må produsere for å få størst mulig overskudd. I oppgave b) og c) kreves det at elevene har en forståelse av hva funksjonen betyr i praksis. De må kunne finne spesielle punkter og intervaller på grafen, og tolke hva disse betyr. Dette krever en større grad av forståelse, denne oppgaven er derfor i kategorien «med forbindelse».

Å gjøre matematikk

Oppgavene som stiller høyest kognitive krav er ifølge Stein og Smith (1998) de som krever «å gjøre matematikk». Her finner vi oppgaver som krever kompleks og ikke-algoritmisk tenking. Elevene må utforske og forstå de underliggende matematiske konseptene, prosessene eller sammenhengene i arbeid med slike oppgaver. Disse oppgavene utfordrer i stor grad det Skemp (1976) kaller relasjonell forståelse. Det finnes ofte ingen tydelig fremgangsmåte for slike oppgaver, elevene må i større grad finne ut av denne selv. Oppgaver i denne kategorien er derfor ofte åpne og krever at elevene har en undersøkende tilnærming. Et eksempel på en slik oppgave er vist i figur 14.



Oppgave 8.217 (Eksempel 2009)
Nedenfor finner du en beskrivelse av fire ulike situasjoner. Fire av grafene A, B, C, D, E og F på neste side beskriver hver sin situasjon.
Hvilke grafer passer til situasjonene?
Målestokken på y-aksen kan variere fra koordinatsystem til koordinatsystem.
Begrunn svaret ditt.

1) I Fossefjell kommune er det i dag 9000 innbyggere. En matematisk modell for utviklingen i kommunen sier at folketallet kommer til å avta med 150 mennesker per år. Én av grafene viser folketallet om x år ifølge modellen.

2) En bil blir kjøpt for 300 000 kroner. Vi regner med at verdien av bilen synker med 15 % per år. Én av grafene viser verdien av bilen x år etter at den ble kjøpt.

3) Én av grafene viser arealet av et kvadrat som funksjon av siden x i kvadratet.

4) Du kaster en ball loddrett oppover. I det øyeblikket du slipper ballen, er den 1,8 meter over bakken, og den har farten 12 meter per sekund. x sekunder etter at du slapp ballen, har den en høyde over bakken (i meter) lik $-4{,}9x^2 + 12x + 1{,}8$. Én av grafene viser denne høyden som funksjon av x.

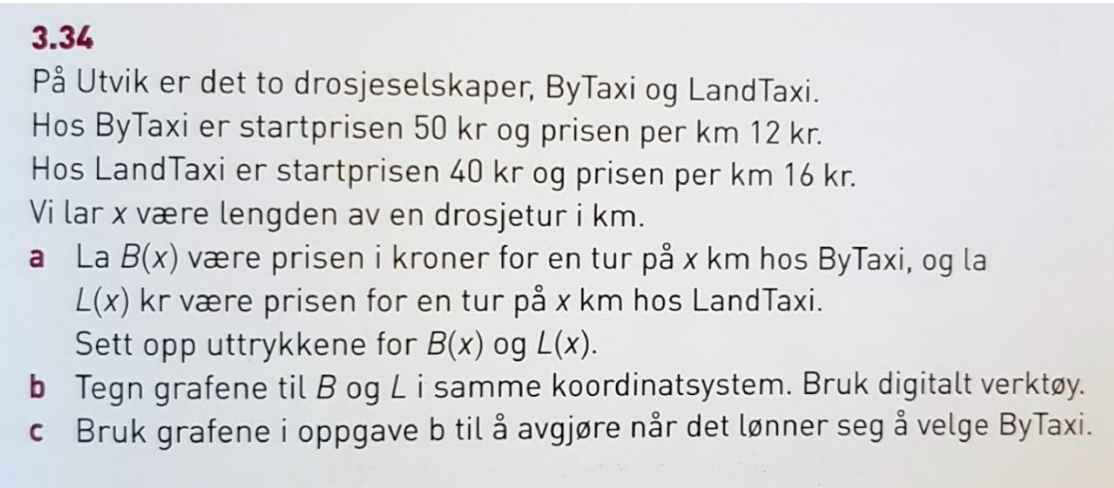
Figur 15: Eksempel på oppgave i kategorien «å gjøre matematikk» (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2014, s. 401-402).

I oppgaven ovenfor er det beskrevet fire ulike situasjoner på venstre side. Disse skal kobles sammen med tilhørende graf til høyre. På koordinatsystemene er det ikke lagt inn verdier på y-aksen og målestokken på y-aksen kan variere mellom hvert koordinatsystem. Dette gjør oppgaven mer krevende etter som de ikke kan regne ut verdier og sette direkte inn i koordinatsystemet for å sammenlikne med grafene presentert. Det kreves en forståelse for hvordan grafen til hver av situasjonene vil se ut i form, om den er stigende eller synkende og om den krysser y-aksen i origo eller ikke. Dette krever mye av elevenes kognisjon, og det finnes ingen algoritme å følge for å løse oppgaven. Elevene må utforske sammenhengen mellom graf og situasjon og ha en god forståelse for konseptet funksjon for å løse denne oppgaven. Denne blir derfor kategorisert som «Å gjøre matematikk», det høyeste kognitive kravet ifølge Smith og Stein (1998).

3.2.2 Overganger

Som beskrevet i kapittel 2.3 går mye av forståelsen for funksjoner på å kunne bruke ulike representasjonsformer og regne mellom disse. Jeg har derfor valgt å inkludere en kategori der jeg ser på hvilke overganger som finnes i de ulike oppgavene i lærebøkene og eksamenene. Dette har jeg gjort ved å bruke teorien beskrevet i kapittel 2.2. Jeg skiller på de to transformasjonene av semiotiske representasjoner; behandling og konvertering. Behandling er en transformasjon der man arbeider innenfor en semiotisk representasjon, altså ved å manipulere symboler og regne ut bestemte verdier. Konvertering er prosessen der man har en overgang mellom ulike representasjonsformer. De fire representasjonsformene for funksjoner brukt i denne studien er graf, numerisk tabell, algebraisk uttrykk og situasjon. Jeg ønsker å kategorisere oppgavene ved å bruke de ulike konverteringene vist i figur 2. Dette gjør jeg for å se om det er variasjon mellom de to transformasjonene og de ulike konverteringene.

Ettersom 1P er et praktisk matematikkfag og læreplanmålene fokuserer på den praktiske tolkningen av funksjoner vil det være naturlig at konverteringen til og fra en situasjon som beskriver funksjonen er mye brukt i oppgavene. Jeg ønsker derfor å undersøke hvor stor andel av oppgavene som ser på den praktiske bruken av funksjoner, noe jeg vil gjøre gjennom å se på om oppgavene inneholder bruk av representasjonen *situasjon*. For å få en god forståelse for funksjoner er det likevel viktig å kunne bruke alle representasjonsformene og dermed alle konverteringene. Det står også i læreplanen at elevene skal kunne «omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det er derfor viktig at elevene får bruke de ulike overgangene i oppgavene. Jeg vil nå presentere et eksempel på hvordan jeg går frem for å kategorisere ulike konverteringer i en oppgave.



3.34
På Utvik er det to drosjeselskaper, ByTaxi og LandTaxi.
Hos ByTaxi er startprisen 50 kr og prisen per km 12 kr.
Hos LandTaxi er startprisen 40 kr og prisen per km 16 kr.
Vi lar x være lengden av en drosjetur i km.

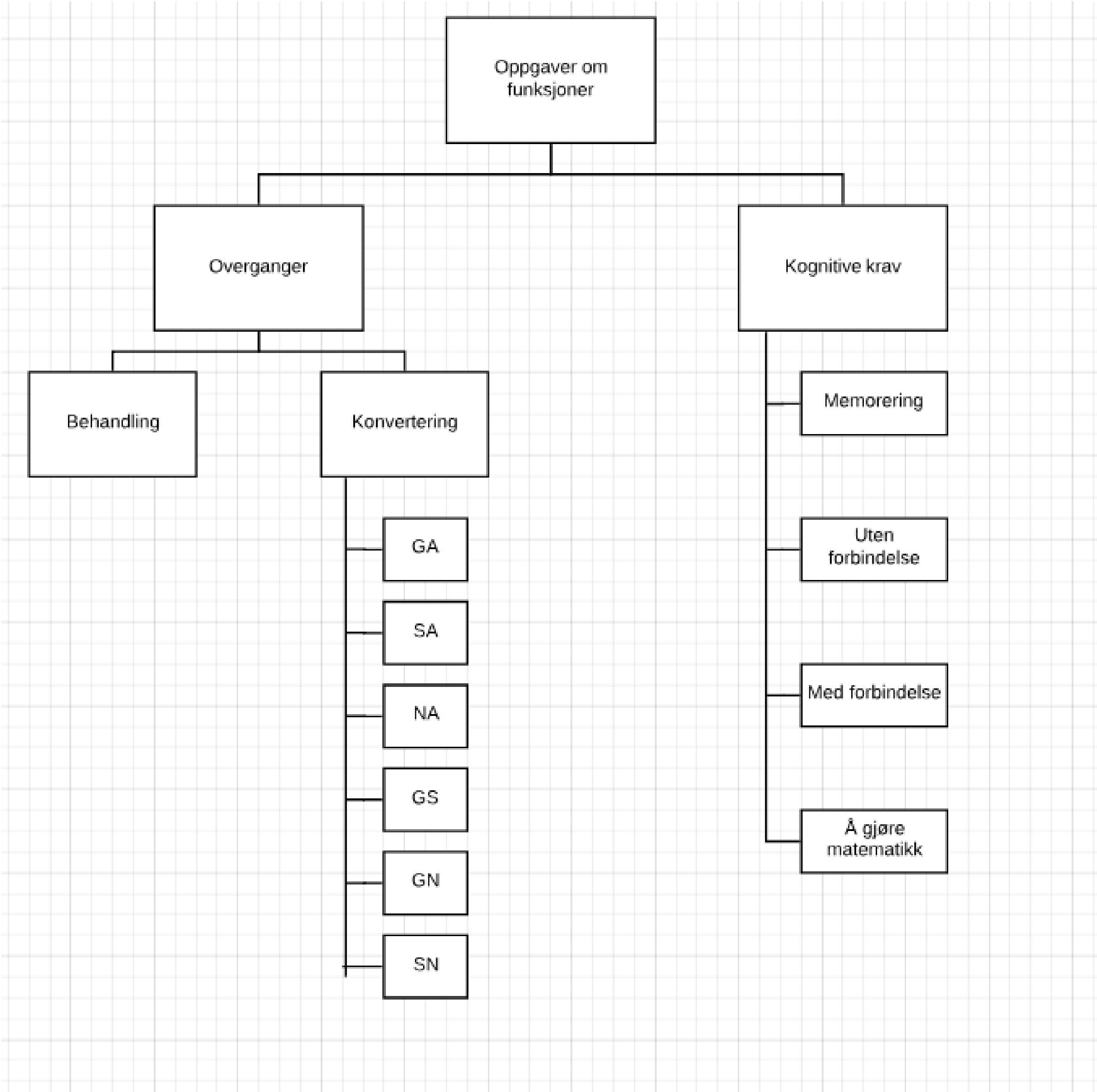
a La $B(x)$ være prisen i kroner for en tur på x km hos ByTaxi, og la $L(x)$ kr være prisen for en tur på x km hos LandTaxi. Sett opp uttrykkene for $B(x)$ og $L(x)$.
b Tegn grafene til B og L i samme koordinatsystem. Bruk digitalt verktøy.
c Bruk grafene i oppgave b til å avgjøre når det lønner seg å velge ByTaxi.

Figur 16: Oppgave hentet fra boka Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 115)

Figur 16 viser en oppgave hentet fra boka *Matematikk 1P*. Her blir elevene presentert for en situasjon der de får beskrevet prisene for to taxiselskaper. Deloppgave a) går ut på å sette opp algebraiske uttrykk basert på denne situasjonen, altså konverteringen SA. I deloppgave b) skal elevene tegne grafene basert på disse uttrykkene, noe som tilsvarer konverteringen GA. Til slutt skal de avgjøre når det lønner seg å velge det ene taxiselskapet basert på grafene, det er altså konverteringen mellom graf og situasjon, GS. Denne oppgaven inkluderer altså tre konverteringer, SA, GA og GS og i analysen blir denne kategorisert som disse tre konverteringene. I analysen vil det også være interessant å se på antall ulike konverteringer i oppgavene, og se hvordan det er for ulike typer oppgaver.

3.3 Analysemodellen

På bakgrunn av de kategoriene jeg har forklart i kapitlene over har jeg bygd opp en analysemodell som vist i figur 17.



Figur 17: Modellen brukt til analysen av oppgaver om funksjoner

Analysemodellen min består av de to hovedkategoriene «kognitive krav» og «overganger». «Kognitive krav» er som nevnt hierarkisk inndelt, slik at hver av disse henger sammen med en bestemt vanskelighetsgrad. Jeg har i denne kategorien valgt å kategorisere oppgavene i kun en av underkategoriene. For eksempel blir en oppgave som inneholder både det kognitive kravet «memorering» og «prosedyre uten forbindelse» kategorisert som den sistnevnte. Dette er fordi jeg alltid velger å plassere oppgaven innen det høyeste nivået i hierarkiet. Dette gir en mer oversiktlig fremstilling av resultatene totalt sett. For noen av oppgavene jeg analyserte var jeg i tvil om hvilket kognitivt krav de skulle klassifiseres som. Smith og Stein (1998) diskuterer i sin artikkel at lærerne som gjennomførte en slik kategorisering flere ganger var uenig om hvor en oppgave skulle plasseres i hierarkiet. Det må tas hensyn til elevenes tidligere kunnskaper, deres alder og i tillegg hvordan oppgaven legges frem av læreren, eller på hvilket tidspunkt og i hvilken kontekst den blir presentert for eleven. Alt dette kan ikke jeg ta hensyn til i min studie, jeg har valgt å se på hva oppgaven henger sammen med i læreboka, altså hva de skal ha lært før oppgaven utføres og se hvilket potensial oppgaven har. En oppgave som kan kategoriseres som «å gjøre matematikk» kan for eksempel bli forklart nøye av en lærer slik at det bare blir en «prosedyre uten forbindelse» for eleven, men dette har jeg ikke tatt hensyn til i min studie.

Den andre hovedkategorien i min modell er «overganger». Her ser jeg som nevnt på hvilke konverteringsprosesser som finnes i oppgavene, og om det er bruk av behandling. Jeg har, med utgangspunkt i Nitsch et al. (2015) sin teori, sett på de fire representasjonsformene graf (G), algebraisk uttrykk (A), numerisk tabell (N) og situasjon (S). Konverteringene beskrives av forkortelser slik at GA betyr konverteringen fra graf til algebraisk uttrykk eller motsatt. Oppgavene jeg analyserer i lærebøkene og eksamensoppgavene inneholder ofte flere ulike konverteringer, og noen både konverteringer og behandling. Her kan jeg altså ikke plassere hver oppgave innen kun en av underkategoriene. Jeg har valgt å inkludere alle overgangene som inngår i oppgavene én gang, slik at en oppgave der samme overgang blir brukt flere ganger kun regnes som en av denne overgangen. Figur 18 viser et utdrag av min kategorisering fra boka *Matematikk 1P.*

3.24	ga	b		
3.25	ga			
3.26	ga	b		
3.27	na	b		
3.28	b			
3.29	gs	ga	b	
3.30	sa	b		
3.31	gs	sa	ga	b
3.32	gs	b		

Figur 18: Et utdrag av hvilke transformasjoner og overganger som finnes i oppgavene i Matematikk 1P

For å kunne skille på innlæringsoppgavene, de røde og de blå oppgavene har jeg lagt inn fargekoder. B står for behandling og er alltid plassert til høyre for alle overgangene slik at jeg kan få oversikt over hvor mange oppgaver som kun inneholder behandling, og derav hvor mange som inneholder minst en type konvertering. For eksempel inneholder oppgave 3.31 de tre konvertering GS, SA, og GA i tillegg til behandling. Fra denne oversikten kan man også se at det er variasjon i antall konverteringer i hver oppgave. Dette vil jeg se nærmere på i analysen.

3.4 Valg av lærebøker

Etter å ha valgt teori og analyseverktøy ville jeg gjøre meg kjent med ulike lærebøker brukt i Matematikk 1P. Valget falt etter hvert som nevnt på *Matematikk 1P*, og *Sinus 1P*. Mye av grunnen til dette var at disse likner i strukturen av oppgaver, og en bok som Sigma skiller seg veldig fra disse. Dermed ble det lettere å sammenlikne oppgaver som er gitt til samme vanskelighetsnivå. Bøkene fra Aschehoug og Cappelen er også ifølge en undersøkelse gjort av Waagene og Gjerustad (2015) mye brukt i matematikk i fellesfaget første året på videregående skole. Tabell 3 viser hvilke lærebøker de 75 lærerne i deres studie oppga at ble brukt.

	Andel (%)
Matematikk (Aschehoug)	24
Matematikk for yrkesfag (Aschehoug)	7
TALL I ARBEID (Aschehoug)	8
Sinus (Cappelen)	41
Sigma (Gyldendal)	20
Totalt	100

Tabell 3: Oversikt over lærebok brukt i matematikk på Vg1 (Waagene & Gjerustad, 2015, s. 32)

Fra tabellen kan vi se at 41% av lærerne svarte at de brukte *Sinus* og 24% svarte at de brukte *Matematikk*, og dette var de to mest brukte bøkene. På bakgrunn av dette og at *Sinus 1P* og *Matematikk 1P* var mye like i inndeling av oppgaver falt valget på disse to lærebøkene. Disse, sammen med eksamensoppgavene, vil jeg presentere i kapittel 4.1.

3.5 Studiens kvalitet

Det finnes ulike måter å vurdere kvaliteten til en studie. Bryman (2016, s. 41) bruker begrepet reliabilitet om det som omhandler om resultatene av en studie er repeterbare. Det vil si at resultatene av min kategorisering av oppgaver bør være så godt begrunnet at dersom en annen skulle utført samme kategorisering ville personen kommet frem til omtrent de samme resultatene. For å imøtekomme krav om reliabilitet, har jeg vektlagt å gi en grundig beskrivelse av prosedyren jeg har vært gjennom for å analysere oppgavene (se kapittel 3.2 og 3.3). Jeg vil også i neste kapittel presentere flere eksempler på oppgaver som begrunner min kategorisering og mine resultater. Dette er tiltak som kan være med på å styrke denne studiens reliabilitet. I tillegg har jeg fått en medstudent til å analysere noen av oppgavene basert på min beskrivelse av kategoriene. Dette gjorde jeg for å se om min kategorisering var troverdig. Når det gjaldt kognitive krav var vi veldig enig med tanke på om en oppgave skulle kategoriseres som høye eller lave kognitive krav. Det var derimot noen av oppgavene vi ikke var helt enige om hvilken av de to kategoriene innen høye eller lave kognitive krav den hørte til. Det var et fåtall av oppgavene, og vil ha lite å si for helheten, men om oppgavene skulle være analysert av noen andre kan det hende de ikke hadde fått nøyaktig samme tall. Dette er som nevnt tidligere noe Smith og Stein også opplevde i sin undersøkelse, noe de forklarte med at lærerne i undersøkelsen var uenig om forutsetningene til elevene (Smith & Stein, 1998), noe man i en studie som dette bare kan antyde etter hva de skal ha lært tidligere. Kategorien *overganger* er mer tydelig, altså er det veldig klart om en oppgave inneholder ulike konverteringer eller behandling, noe som gir denne kategorien sterk reliabilitet.

Et annet mål på kvaliteten av en studie er validiteten. Dette omhandler integriteten til konklusjonene som trekkes i en studie. Bryman (2016) beskriver blant annet en type validitet som kalles målingsvaliditet (measurement validity), som er det mest relevante for min studie. Dette stiller spørsmål ved om verktøyet man bruker for å måle noe faktisk måler det man ønsker. For eksempel kan det diskuteres om en IQ-test er et godt mål på intelligens. For min studie kan det derfor stilles spørsmål ved om kognitive krav er et godt mål på en oppgaves vanskelighetsgrad, eller om man kan finne ut om en oppgave gir en vid forståelse for funksjoner ved å se på bruken av ulike transformasjoner som behandling og konvertering. Et av mine forskningsspørsmål går direkte på å undersøke om oppgavene i bøkene gir utfordringer til elever på ulike kognitive nivå, noe som gjør kategorien kognitive krav relevant. Ettersom denne kategorien også er brukt ved tidligere studier for å svare på spørsmål om oppgavers vanskelighetsgrad styrker det også validiteten til denne kategorien. Stein og Smith (1998) forteller at kategorien deres er hierarkisk inndelt, og jeg mener derfor den kan brukes til å måle ulike nivåer av vanskelighetsgrad.

Når det gjelder forskningsetikk, kan det her diskuteres om læreverkene blir rettferdig behandlet og i hvilken grad jeg er nøytral i fremstillingen av eksempler og resultater. Bryman (2016) bruker begrepet *deception* om det å representere arbeid som noe annet enn det det er. Jeg ønsker i denne studien å presentere resultatene mine nøytralt, og jeg er transparent i fremstillingen av disse. Jeg har også gitt grundig beskrivelse av min fremgangsmåte, noe jeg mener er etisk riktig å gjøre. Det er også viktig at bøkene jeg har analysert er rettferdig behandlet. Jeg har ingen intensjon av å stille noen av lærebøkene i godt eller dårlig lys, men ønsker å være nøytral. Jeg har derfor valgt å inkludere alle oppgavene innen funksjoner i begge bøkene, i stedet for å kun plukke ut interessante oppgaver.

4 Resultater fra analyse av oppgaver om funksjoner

I dette kapittelet vil jeg presentere mine resultater fra analysen jeg har gjort av oppgavene om funksjoner i de to læreverkene. Modellen presentert i kapittel 3.3 er brukt til å analysere oppgavene i de to bøkene og eksamensoppgavene. I dette kapitlet presenterer jeg først de to utvalgte læreverkene og eksamensoppgavene, før jeg viser resultatene for hver av lærebøkene og eksamensoppgavene for seg. Jeg vil i hvert delkapittel presentere data fra analysen illustrert med eksempler på oppgaver. I kapittel 5 vil jeg samle disse resultatene og prøve å skape et oversiktlig bilde før jeg diskuterer funnene opp mot mine forskningsspørsmål.

4.1 Læreverkene

Rammene for studien ga begrensninger på hvor mange læreverk og oppgaver jeg kunne analysere. Jeg har på bakgrunn av dette valgt å se på lærebøker i to læreverk, i tillegg til eksamensoppgaver fra de fire siste årene (2015 t.o.m. 2018). Nedenfor vil jeg beskrive de to lærebøkene tilhørende to ulike læreverk. Jeg presenterer de to lærebøkene og eksamenene hver for seg. Begge bøkene er tilpasset etter læreplanrevisjonen fra 2013 og eksamensordningen fra 2015 (Heir et al., 2014; Oldervoll et al., 2014). Jeg har derfor kun valgt å se på eksamensoppgaver gitt fra 2015 og senere, ettersom de tidligere eksamenene fulgte en annen ordning.

4.1.1 Læreverket Matematikk 1P

Matematikk 1P (Heir et al., 2014) er et læreverk skrevet av Odd Heir, John Engeseth, Håvard Moe og Ørnulf Borgan. Det er utgitt av Aschehoug forlag i 2014, og er beregnet til bruk i faget Matematikk 1P på videregående skole. Læreverket inneholder en lærebok, en forenklet tilleggsbok og digitale ressurser for lærer og elev. Boka har en tydelig struktur for hvert kapittel. Det blir først presentert et eksempel som viser bruken av fagstoffet som skal gjennomgås i praksis. Fagstoffet blir deretter presentert på en oversiktlig måte, før det presenteres noen eksempler på oppgaver der det vises fremgangsmåter for det som nettopp er skrevet om. I hvert delkapittel er viktige regler, begreper eller fremgangsmåter rammet inn og gjort tydelige for leseren. Deretter blir det presentert det Heir et al. (2014) kaller innlæringsoppgaver som henger tett sammen med fagstoffet og eksemplene som nettopp er vist. Disse oppgavene skal hjelpe elevene å lære de grunnleggende begrepene og fremgangsmåtene. I noen av delkapitlene er det også rammet inn diskusjonsoppgaver forfatterne kaller «Snakke matte». Her får elevene mulighet til å diskutere stoffet muntlig og lære seg å argumentere for fremgangsmåter eller regler. Dette er ifølge forfatterne for å inkludere muntlige ferdigheter i matematikk, som er en del av de grunnleggende ferdighetene beskrevet i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013).

På slutten av hvert delkapittel finnes differensierte oppgaver. Det skilles på røde og blå oppgaver: «Røde oppgaver er for elever som trenger mer drill. Blå oppgaver er for elever som mestrer lærestoffet godt» (Heir et al., 2014, s. 3). De røde oppgavene fokuserer altså på at elevene skal få «drille» de innlærte prosedyrene og bli trygge på å gjennomføre disse gjentatte ganger. De blå oppgavene skal være mer kognitivt krevende og utfordre elevene som «mestrer lærestoffet godt». På slutten av hvert hovedkapittel er det lagt inn et sammendrag av fagstoffet før det presenteres en «Kapitteltest». Denne testen er i to deler, der første del skal løses uten hjelpemidler og del to kan eller må løses med hjelpemidler som digitale verktøy og læreboken. Innen kapittelet funksjoner er det flere oppgaver som krever at elevene bruker dynamiske verktøy som GeoGebra. Det er tydelig vist hvilke av oppgavene som krever det, ved at det er nevnt i oppgaven eller at de følger etter eksempler der det er brukt GeoGebra.

Til slutt i boka er det et todelt eksamenstreningskapittel med oppgaver som likner de som gis på en skriftlig eksamen. Her er det oppgitt hvilke av oppgavene som hører til hvilket hovedkapittel i boka. Disse er også delt inn etter oppgaver som skal løses uten hjelpemidler og oppgaver som kan eller må løses med hjelpemidler. Her finnes også oppgaver fra tidligere skriftlige eksamener. I tillegg til læreboka inneholder læreverket også en «forenklet tilleggsbok» og digitale ressurser for både lærer og elever. I de digitale ressursene finnes en interaktiv kapitteltest og opplæring til bruk av digitale verktøy. Det ligger også løsninger til oppgaver fra læreboka her (Heir et al., 2014). Jeg har i min oppgave kun valgt å se på oppgavene som er presentert i læreboka.

4.1.2 Læreverket Sinus 1P

Læreverket *Sinus 1P* er skrevet for matematikkurset 1P for studieforberedende program. Læreverket består av en lærebok med teori og oppgaver i tillegg til en nettside. På denne nettsiden finnes blant annet videoer til omvendt undervisning, løsningsforslag på noen oppgaver og interaktive oppgaver (Cappelen Damm, 2014). Læreboka er skrevet av Tore Oldervoll, Odd Orskaug, Audhild Vaaje, Otto Svorstøl og Sigbjørn Hals. Den er utgitt i 2014 av Cappelen Damm forlag. Forfatterne skriver i forordet at «Boka legger vekt på den praktiske matematikken og inneholder lite bokstavregning» (Oldervoll et al., 2014, s. 3). Boka har altså lagt fokuset på å bruke matematikk i praktiske situasjoner, noe som også er typisk for faget 1P. Kapitlene og delkapitlene i boka er lagt opp slik at det Oldervoll et al. (2014) mener er det vanskeligste stoffet ofte kommer til sist. I hvert delkapittel er viktige formler og regler rammet inn og gjort tydelige for leseren. Som i boka *Matematikk 1P* er det i denne også lagt inn oppgaver sammen med fagstoffet i hvert delkapittel. På slutten av hvert kapittel blir det presentert et sammendrag av regler og metoder som er vist tidligere.

Boka inneholder også en oppgavedel som er plassert etter alle hovedkapitlene. Her finnes det ifølge Oldervoll et al. (2014) både enkle repetisjonsoppgaver, treningsoppgaver og mer krevende oppgaver. Disse oppgavene er delt i tre hoveddeler. Den første delen kalles «Øv mer». Disse oppgavene er ordnet etter ulike delkapitler som i teoridelen. Disse oppgavene er differensierte etter vanskelighetsgrad. Først blir det presentert noen «helt enkle» oppgaver med lys farge, og deretter noen «vanskeligere» oppgaver med mørkere farge (Oldervoll et al., 2014, s. 3). Blant disse oppgavene er det tydelig vist hvilke som skal løses ved hjelp av digitale verktøy som GeoGebra. Del to heter «Uten hjelpemidler» og inneholder oppgaver som skal løses uten digitale hjelpemidler. Disse oppgavene likner eksamensoppgaver fra del 1 og blant de er også noen oppgaver hentet fra tidligere skriftlige eksamener. Del tre heter «med hjelpemidler» og er som del to oppgaver som likner eksamensoppgaver og inneholder blant annet tidligere eksamensoppgaver fra del 2. Oppgavene i denne delen kan eller må løses ved hjelp av digitale hjelpemidler. Oppgavene i del to og del tre er ikke ordnet etter delkapitler men det står merket hvilke oppgaver som kan løses når elevene er ferdig med hvert delkapittel.

4.1.3 Eksamensoppgaver

Skriftlig eksamen er ifølge Utdanningsdirektoratet (2017b) en sluttvurdering der kandidaten får vise sin kompetanse ved å løse en kompleks oppgave eller utfordring. Læreplanen og kompetansemålene beskrevet i læreplanen er grunnlaget for vurdering av kompetansen eleven viser i besvarelsen. Eksamen skal: «dekke sentrale deler av læreplanen og gjenspeile læreplanen og formålet med faget» (Utdanningsdirektoratet, 2017b, s. 5). Oppgavene skal være tydelige, slik at både eleven og sensor forstår hva som kjennetegner et relevant og presist svar på oppgaven. Elever på alle nivå skal ha mulighet til å vise sin kompetanse på eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2017b).

Eksamensoppgavene jeg har sett på i denne studien er hentet fra eksamenene utgitt av Utdanningsdirektoratet i årene 2015, 2016, 2017 og 2018. Det gis en ordinær eksamen på våren og en eksamen for elever som for eksempel tar opp faget på høsten, så jeg har sett på oppgaver fra totalt åtte eksamener. Disse er delt i to deler, der del 1 består av oppgaver som skal løses kun ved hjelp av skrivesaker, passer, linjal og gradskive. På del 2 er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra internett og hjelpemidler som tillater kommunikasjon med andre. Det legges her til rette for at elevene kan eller må bruke regneark (som Excel) eller dynamiske programvarer (som GeoGebra). De to delene blir utdelt samtidig, og elevene har totalt fem timer på eksamen. Del 1 skal være levert etter to timer, slik at de har minimum tre timer på å besvare del 2.

4.2 Resultater fra analyse av læreboka *Matematikk 1P*

Oppgavene i *Matematikk 1P* er sortert i tre ulike typer: innlæringsoppgaver, røde oppgaver og blå oppgaver. Jeg har sett på alle oppgavene innen kapittelet «Funksjoner», totalt 88 oppgaver. Jeg vil først presentere en samlet oversikt over alle de 88 oppgavene, før jeg ser på hva som kjennetegner oppgaver innen hver av disse tre typene. I tillegg til disse oppgavene er det en kapitteltest på slutten av kapittelet, som er et eksempel på en prøve i temaet funksjoner. Det er også en seksjon bak i boka forfatterne kaller «Eksamenstrening» som inneholder tidligere eksamensoppgaver. Jeg har valgt å kategorisere kapitteltesten og eksamensoppgavene for seg, da disse trolig vil være bedre sammenliknbare med eksamensoppgavene ettersom de er laget for å teste elevenes kunnskaper etter å ha jobbet med kapittelet. I tillegg vil jeg skille på oppgaver med og uten bruk av digitale verktøy, for å enklere kunne sammenlikne med eksamensoppgaver fra del 1 og del 2. Som beskrevet i metodekapittelet har jeg delt analysemodellen inn i to hovedkategorier; «kognitive krav» og «overganger». Jeg vil først se på resultatene fra de to kategoriene hver for seg før jeg presenterer disse sammen og ser på sammenhenger.

4.2.1 Kognitive krav

Kognitive krav er som nevnt delt inn i kategoriene «memorering», «uten forbindelse», «med forbindelse» og «å gjøre matematikk». Dette innebærer hvilke tankeprosesser som kreves av elevene i arbeid med oppgavene, og har sammenheng med hvilken type forståelse eleven sitter igjen med. Kategoriene er hierarkisk ordnet, der «memorering» er det laveste nivået og «å gjøre matematikk» inneholder de mest krevende oppgavene. Jeg vil her se på hvordan oppgavene i *Matematikk 1P* fordeler seg på de ulike kategoriene og vise eksempler for å forklare hvordan jeg har kommet frem til dette.

Oppgaver i kapittelet

Tabell 4 viser en oversikt over hvordan oppgavene i kapittelet funksjoner i *Matematikk 1P* fordeler seg på de ulike kognitive kravene. Jeg velger å presentere en samlet oversikt over alle oppgavene i kapittelet «Funksjoner». Tabellen viser antall oppgaver innen hver kategori, og hvor stor prosentdel dette utgjør av de totalt 88 oppgavene som er kategorisert.

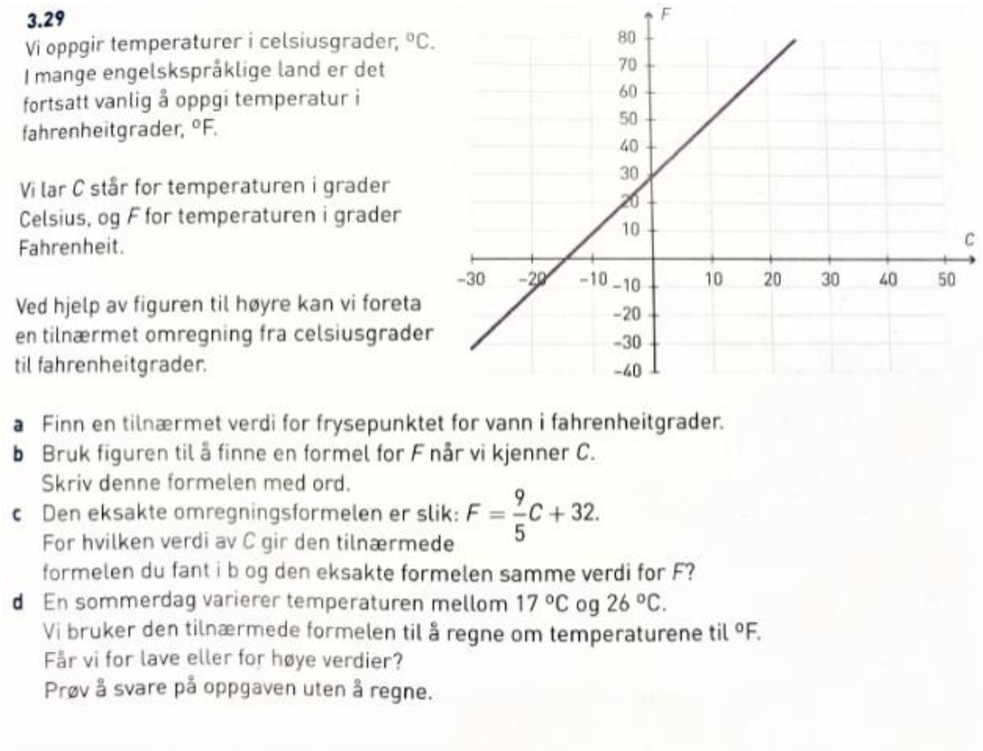
Kognitive krav	**Antall (N=88)**	**Prosent**
Memorering	13	14,8 %
Uten forbindelse	31	35,2 %
Med forbindelse	43	48,9 %
Å gjøre matematikk	1	1,1 %

Tabell 4: Oversikt over oppgaver innen ulike kognitive krav i Matematikk 1P

Fra tabellen kan vi se at 44 av oppgavene befinner seg på lavt kognitivt nivå, dette tilsvarer 48,9 % av oppgavene. Altså er oppgavene i *Matematikk 1P* nesten likt fordelt mellom lavt og høyt kognitivt nivå ifølge min analyse. Det kan tyde på at forfatterne både legger vekt på oppgaver der elevene skal lære seg grunnleggende prosedyrer og begreper, men også oppgaver som krever at elevene tenker seg frem til løsninger og arbeider med forståelsen. I boka er det kun én oppgave som er kategorisert som «å gjøre matematikk», altså legges de lite opp til at elevene skal utforske sammenhenger på egenhånd uten noen prosedyrer å forholde seg til.

Hele 84% av oppgavene er kategorisert som «uten forbindelse» eller «med forbindelse», altså oppgaver der elevene utfører en prosedyre. Elevene jobber altså mye med å utvikle prosedyrekunnskap i oppgavene i denne boka, både på høyt og lavt kognitivt nivå. Kun én oppgave befinner seg på det høyeste kognitive nivået, «å gjøre matematikk». Resten befinner seg i kategorien «memorering», oppgaver som krever at elevene bruker langtidshukommelsen og prosessen «å huske». Jeg vil nå presentere noen eksempler for å vise hva som er typisk for denne boka og forklare hva det innebærer at en oppgave plasseres i en kategori.

Kategorien med flest oppgaver er «med forbindelse». Her finner vi nesten halvparten av de 88 oppgavene i *Matematikk 1P.* Dette er oppgaver som stiller høye krav til elevenes kognisjon. Oppgavene i denne kategorien fokuserer på å utvikle elevenes forståelse. Det er ofte ikke åpenbart hvilken prosedyre elevene skal bruke for å løse oppgaven, slik at elevene aktivt må tenke seg frem til en passende fremgangsmåte. Disse oppgavene krever derfor en relasjonell forståelse eller operativ kunnskap av elevene. I tillegg til en operasjonell forståelse kan det også være nødvendig med en evne til resonnering og konseptuell forståelse for å løse slike oppgaver. Et eksempel på en slik oppgave fra boka *Matematikk 1P* kan du se i figur 19.



3.29
Vi oppgir temperaturer i celsiusgrader, °C. I mange engelskspråklige land er det fortsatt vanlig å oppgi temperatur i fahrenheitgrader, °F.

Vi lar C står for temperaturen i grader Celsius, og F for temperaturen i grader Fahrenheit.

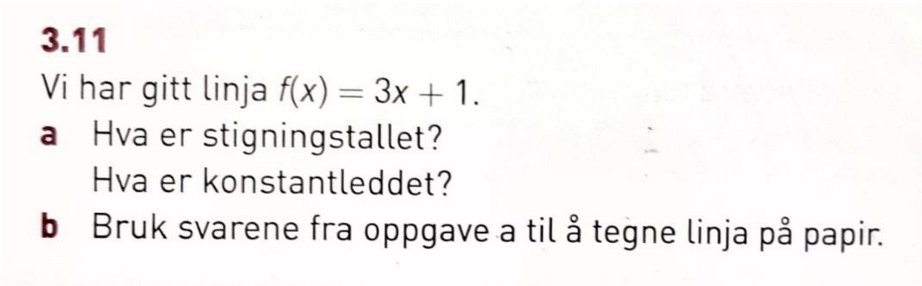
Ved hjelp av figuren til høyre kan vi foreta en tilnærmet omregning fra celsiusgrader til fahrenheitgrader.

a Finn en tilnærmet verdi for frysepunktet for vann i fahrenheitgrader.
b Bruk figuren til å finne en formel for F når vi kjenner C. Skriv denne formelen med ord.
c Den eksakte omregningsformelen er slik: $F = \frac{9}{5}C + 32$. For hvilken verdi av C gir den tilnærmede formelen du fant i b og den eksakte formelen samme verdi for F?
d En sommerdag varierer temperaturen mellom 17 °C og 26 °C. Vi bruker den tilnærmede formelen til å regne om temperaturene til °F. Får vi for lave eller for høye verdier? Prøv å svare på oppgaven uten å regne.

Figur 19: Eksempel på oppgave i kategorien "Prosedyre med forbindelse" fra Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 109)

I denne oppgaven skal elevene både lage en tilnærmet modell og bruke en eksakt modell for omregningen mellom celsiusgrader og fahrenheitgrader. Deloppgave a) og b) kan fint løses uten å ha forståelse for de underliggende konseptene. Det å lese av verdier og lage en formel basert på en graf er noe elevene gjør gjentatte ganger, slik at dette for mange er noe de kan gjøre uten å tenke så mye på hva det betyr. Her er det tydelig gitt hvilken prosedyre elevene skal bruke, så disse kan kategoriseres som «uten forbindelse». Deloppgave c) går ut på at elevene skal sammenlikne formelen de har laget basert på grafen og den eksakte formelen gitt i oppgaven. Det er her ikke tydelig hvordan de skal gå frem for å løse oppgaven. Denne kan løses på flere måter, for eksempel ved å gjette og teste for ulike verdier, sette de to uttrykkene lik hverandre eller å tegne grafene i samme koordinatsystem og se på skjæringspunktet. Elevene må selv finne ut hva som er mest hensiktsmessig. Det krever at elevene har forståelse for hva det betyr at de to funksjonene gir samme verdi. I deloppgave d) skal elevene vurdere om den tilnærmede formelen gir for lave eller høye fahrenheitgrader for to valg av celsiusgrader. De blir oppfordret til å løse oppgaven uten å regne, noe som krever en forståelse av hvordan de ulike funksjonene utvikler seg. Deloppgave c) og d) gjør at denne oppgaven kategoriseres som «med forbindelse» Som man kan se her inneholder noen oppgaver mange ulike deloppgaver på ulike kognitive nivå, og jeg har som nevnt tidligere valgt å kategorisere disse som det mest krevende i oppgaven. Det er derfor ikke slik at halvparten av arbeidsmengden i disse oppgavene er innen høye kognitive krav selv om halvparten av oppgavene er kategorisert som høye kognitive krav. Deler av en oppgave kan ofte løses ved lavere kognitive krav enn den er kategorisert som.

Kategorien med nest flest oppgaver er «uten forbindelse». Omtrent en tredjedel av oppgavene i *Matematikk 1P* befinner seg i denne kategorien. Oppgaver i denne kategorien er oppgaver der elever bruker en prosedyre eller algoritme for å komme frem til rett svar, uten å nødvendigvis forstå meningen bak. Dette kan være oppgaver som er gitt for å få trening i å bruke prosedyrer riktig, og dermed bygge opp en prosedyrekunnskap. Det krever derimot ikke at elevene skal velge rett prosedyre, da oppgaver i denne kategorien tydelig oppgir implisitt eller eksplisitt hvordan elevene skal gå frem. Figur 20 viser en oppgave fra boka Matematikk 1P jeg har kategorisert som «uten forbindelse».


3.11
Vi har gitt linja $f(x) = 3x + 1$.
a Hva er stigningstallet?
Hva er konstantleddet?
b Bruk svarene fra oppgave a til å tegne linja på papir.

Figur 20: Oppgave kategorisert som «uten forbindelse» fra Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 101)

I oppgaven ovenfor skal elevene ta utgangspunkt i en oppgitt formel for en linje. Deloppgave a) ber elevene bestemme stigningstall og konstantledd for denne linja. Når elevene utfører denne er det nødvendig at de husker hvilket av tallene som er stigningstall og hvilket tall som er konstantledd. Denne oppgaven ville jeg kategorisert som «memorering» dersom den kun inneholdt deloppgave a), ettersom denne oppgaven ikke krever noen prosedyre. Deloppgave b) ber elevene bruke tallene de fant i deloppgave a) til å tegne linja som funksjonsuttrykket beskriver. Her er fremgangsmåten tydelig og det kreves ingen dypere forståelse for meningen bak funksjonen. Denne oppgaven kategoriseres derfor som «uten forbindelse».

Fra oppgavene presentert i figur 19 og 20 kan man beskrive mønsteret som går igjen blant mange av oppgavene i boka. Som nevnt er de fleste oppgavene kategorisert som enten «med forbindelse» eller «uten forbindelse», og det som ofte skiller disse kategoriene i denne boka er bruken av den semiotiske representasjonen *situasjon.* Oppgaver i denne boka som inneholder en situasjon er oppgaver der elevene blir bedt om å tolke verdier, se sammenhenger og dermed vise en større forståelse for funksjoner. De praktiske oppgavene er altså de som ofte blir kategorisert på høyt kognitivt nivå, og oppgavene som ikke inneholder en situasjon er ofte algoritmiske. Dette vil jeg se nærmere på i kapittel 4.2.3.

Av oppgavene i *Matematikk 1P* har jeg kategorisert 17% som det laveste kognitive nivået, «memorering». Dette er oppgaver der elevene blir bedt om å gjengi tidligere innlærte fakta eller regler og må ta i bruk den kognitive prosessen «å huske». Oppgaver i denne kategorien finnes ofte i starten av delkapitlene blant innlæringsoppgavene. Eksempler på dette er vist i figur 11, der man kan se at de tre første oppgavene i kapitlet funksjoner kategoriseres som «memorering». Ettersom dette er oppgaver på det laveste kognitive nivå er det naturlig at disse blir gitt som de første oppgavene.

Kapitteltest og eksamenstrening

Jeg vil nå se på hvordan oppgavene gitt i kapitteltesten og eksamenstreningen fordeler seg mellom de ulike kognitive kravene. Resultatene fra denne kategoriseringen er presentert i tabell 5. Her vises antallet oppgaver i hver kategori og hvor stor prosentandel dette utgjør av de totalt 18 oppgavene.

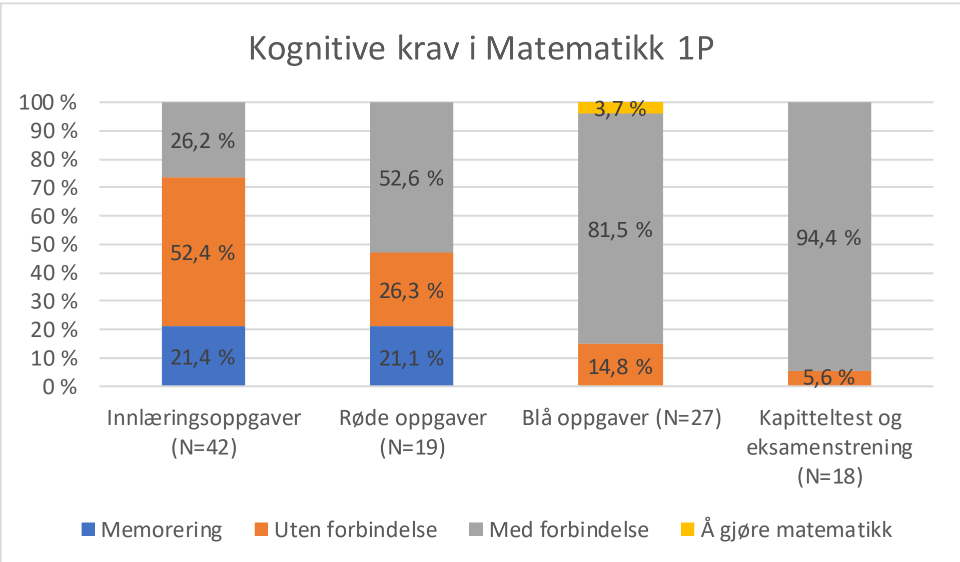
Kogntive krav	Antall (N=18)	Prosent
Memorering	0	0,0 %
Uten forbindelse	1	5,6 %
Med forbindelse	17	94,4 %
Å gjøre matematikk	0	0,0 %

Tabell 5: Oversikt over hvordan oppgaver fra kapitteltesten og eksamenstreningsoppgavene i boka Matematikk 1P fordeler seg mellom ulike kognitive krav

Fra tabellen ovenfor kan man se at nesten alle oppgavene er plassert i kategorien «med forbindelse». Ettersom dette er oppgaver forfatterne har lagt inn i kapitteltest og eksamenstrening, kan man anta at de mener at det er denne typen oppgaver som skal gis i en avsluttende prøve for elevene. Eksamenstreningen inneholder blant annet tidligere gitte eksamensoppgaver, så disse resultatene antyder at det er typisk at disse oppgavene er i kategorien «med forbindelse». Det er interessant å se om dette gjelder for flere eksamensoppgaver, noe jeg skal se nærmere på i kapittel 4.4.

Ulike typer oppgaver i *Matematikk 1P*

Som nevnt tidligere er oppgavene i *Matematikk 1P* fordelt mellom innlæringsoppgaver, røde oppgaver og blå oppgaver. I tillegg er det en kapitteltest i slutten av kapittelet og en oppgavedel forfatterne kaller «eksamenstrening» til slutt i boka. Figur 21 viser en oversikt over hvordan de ulike typene oppgaver i boka *Matematikk 1P* fordeler seg blant de kognitive kravene. Fra denne figuren kan man se at innlæringsoppgavene stort sett er kategorisert blant lave kognitive krav. Oppgavene kategorisert som «memorering» befinner seg som nevnt mest blant disse, og oppgaver i kategorien «uten forbindelse» er der vi finner de fleste innlæringsoppgavene. De fleste av innlæringsoppgavene er altså lagt på lavt kognitivt nivå. Ettersom dette er de første oppgavene elevene ser for hvert delkapittel, er det grunn til å anta at forfatterne ønsker at elevene først skal jobbe med å lære begreper og prosedyrer, før de senere jobber mer med forståelse.



Figur 21: Oversikt over kognitive krav i Matematikk 1P innen de ulike oppgavetypene

De røde oppgavene i boka, altså oppgaver som ifølge Heir et al. (2014) for elever som mer trenger «drill», fordeler seg ganske jevnt mellom høyt og lavt kognitivt nivå. De røde oppgavene på lavt kognitivt nivå er spredt på både «memorering» og «uten forbindelse» mens alle oppgavene på høyt kognitivt nivå er i kategorien «med forbindelse». Blant de 19 røde oppgavene er 4 kategorisert som «memorering», 5 som «uten forbindelse» og 10 som «med forbindelse».

De blå oppgavene, som er for elever som mestrer stoffet godt, befinner seg for det meste i kategorien «med forbindelse». Her finner vi hele 22 av de totalt 27 oppgavene. Disse oppgavene er ifølge forfatterne for elever som mestrer stoffet godt, de er derfor naturlig at disse befinner seg på høyt kognitivt nivå. Blant de blå oppgavene finner vi også den eneste oppgaven i kategorien «å gjøre matematikk». Denne skiller seg fra alle de andre oppgavene i boka, og krever mye av elevene for å løse. Oppgaven er presentert i figur 22.

3.67

En vennegjeng leier en hytte for 16 000 kr. La x være antallet venner som er med på turen.
To av vennene skal betale halvparten av hva de andre betaler.
Hvis de andre betaler y kr, betaler altså hver av de to $\frac{y}{2}$ kr.

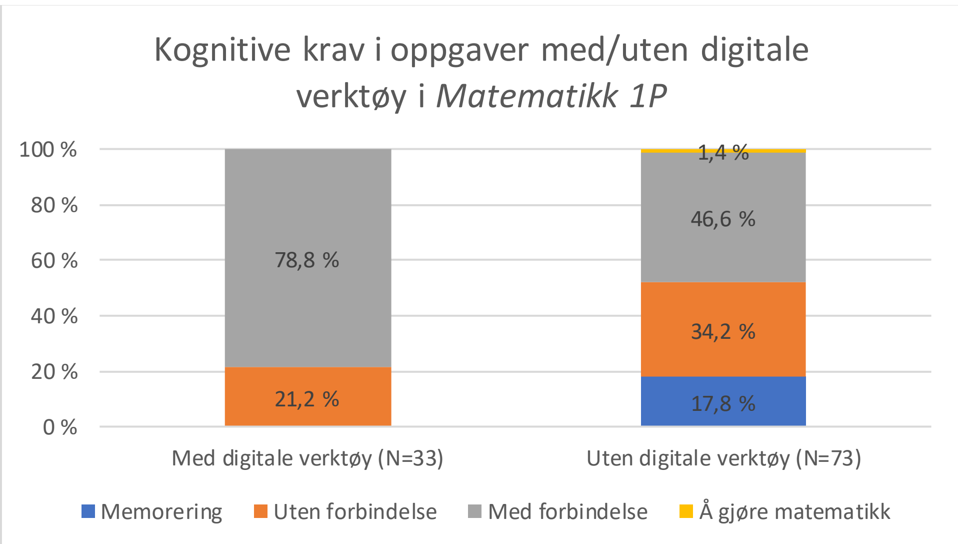
Sett opp en formel for y uttrykt ved x.
Er y og x omvendt proporsjonale?

Figur 22: Oppgave i kategorien «å gjøre matematikk» fra boka Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 128)

Oppgaven ovenfor går ut på at elevene skal sette opp en formel basert på en situasjon som er beskrevet. Denne går ut på at en vennegjeng skal spleise på en hytte som koster 16 000 kr å leie. Det som gjør denne oppgaven kognitivt krevende er at to av vennene i denne gjengen skal betale halvparten av det de andre betaler. Elevene kjenner ikke til noen bestemt prosedyre for å komme frem til denne formelen, og det kreves kompleks tenking for å løse oppgaven. Denne oppgaven blir derfor kategorisert som «å gjøre matematikk».

Oppgaver med digitale verktøy

Som nevnt tidligere legger boka Matematikk 1P opp til at elevene skal bruke digitale verktøy på flere av oppgavene. For å enklere kunne sammenlikne resultatene med oppgaver fra del 1 og del 2 av eksamen har jeg valgt å skille på oppgaver i bøkene der det skal brukes digitale hjelpemidler og ikke. Jeg vil nå presentere en oversikt over hvordan oppgavene som skal løses med og oppgavene som skal løses uten digitale hjelpemidler fordeler seg blant de kognitive kravene. Oppgavene her er hentet både fra kapittelet funksjoner, kapitteltesten og eksamenstreningen. Figur 23 viser en oversikt over min analyse av disse to oppgavetypene.



Figur 23: Kognitive krav i oppgaver med/uten digitale verktøy i boka Matematikk 1P

Som man kan se fra figuren ovenfor er det relativt få av oppgavene om funksjoner i boka *Matematikk 1P* som er ment å løses med bruk av digitale verktøy, kun 33 av de totalt 106 oppgavene. Allikevel kan man se at fordelingen av kognitive krav er veldig ulik for oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy. Blant oppgavene som skal løses med digitale verktøy er hele 78,8% kategorisert som «med forbindelse». Resten er i kategorien «uten forbindelse», altså er disse oppgavene kun fordelt mellom kategoriene der elevene bruker en prosedyre. De fleste befinner seg på høyt kognitivt nivå, og det er ingen oppgaver i kategoriene «memorering» eller «å gjøre matematikk».

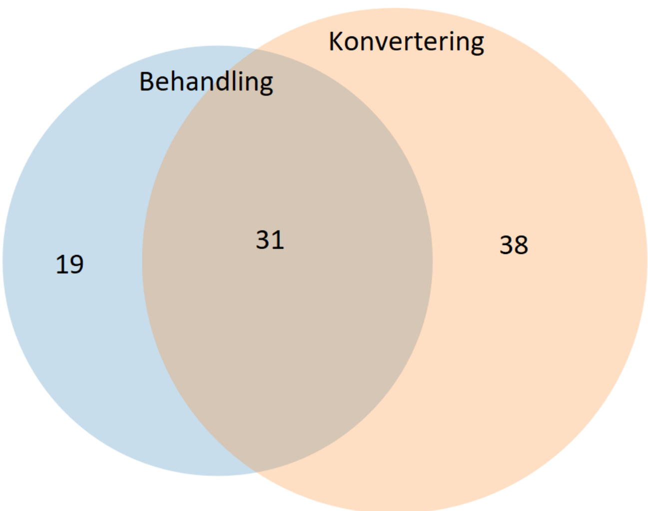
Oppgavene som er ment å skulle løses uten bruk av digitale verktøy er veldig jevnt fordelt mellom lave og høye kognitive krav. Kategorien med flest oppgaver er også her «med forbindelse», som utgjør 46,6% av disse oppgavene. Her finner vi også mange oppgaver i kategorien «uten forbindelse» og en del i kategorien «memorering». Den ene oppgaven i kategorien «å gjøre matematikk» befinner seg blant disse oppgavene. Det er altså flere forskjellige typer oppgaver der elevene ikke bruker digitale verktøy, mens oppgavene som skal løses med digitale verktøy stiller ofte liknende krav til elevene. Som nevnt tidligere er skillet mellom kategoriene «med forbindelse» og «uten forbindelse» ofte bruk av representasjonen *situasjon.* Figuren ovenfor antyder derfor at oppgavene der elevene skal bruke digitale verktøy inneholder mye bruk av denne representasjonen. Denne sammenhengen vil jeg se nærmere på i kapittel 4.2.3.

4.2.2 Overganger

For å få innsyn i hvor gode oppgavene i *Matematikk 1P* er med tanke på å bygge opp en rik forståelse for funksjoner har jeg som nevnt tidligere valgt å se på hvilke overganger som finnes blant oppgavene. Jeg har først sett på de totalt 88 oppgavene gitt i kapittelet funksjoner. Deretter har jeg også sett på oppgavene gitt i kapitteltesten og eksamenstreningen. Jeg har også valgt å skille på oppgavene der elevene skal bruke digitale verktøy og der det ikke trengs, noe som gjør det enklere å sammenlikne med del 1 og del 2 av eksamensoppgavene. Jeg ønsker å se på fordelingen mellom de to transformasjonstypene *behandling* og *konvertering*, for så å se hvilke av konverteringsprosessene som brukes i oppgavene. Som nevnt tidligere inneholder mange av oppgavene flere ulike konverteringer. Jeg ønsker å se hvor mange konverteringer som finnes i oppgavene, og vil presentere en oversikt over dette.

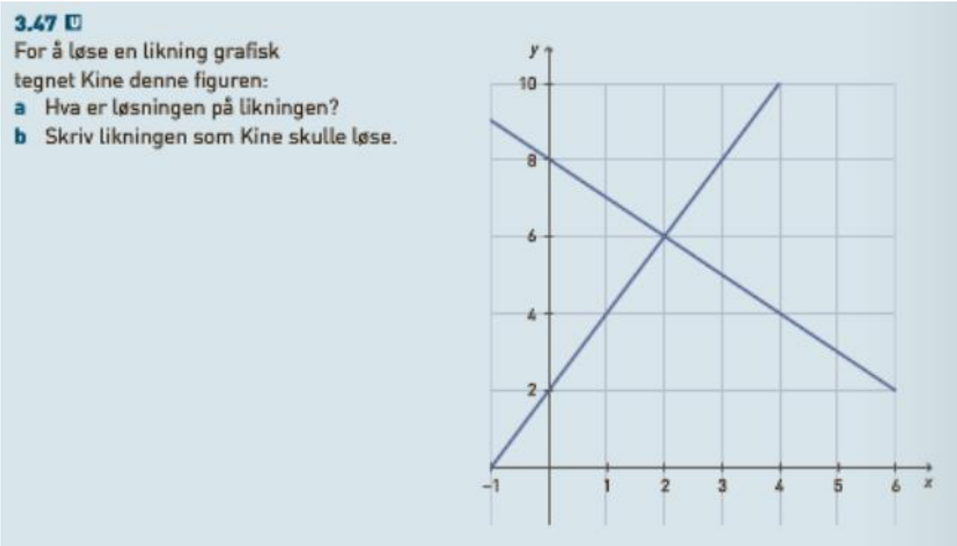
Oppgavene i kapittelet

Venndiagrammet nedenfor viser en oversikt over hvordan de 88 oppgavene i kapittelet funksjoner i boka *Matematikk 1P* fordeler seg mellom transformasjonene behandling og konvertering.



Figur 24: Oversikt over antall oppgaver med behandling og/eller konvertering i Matematikk 1P

I figuren kan man se at 69 av oppgavene inneholder minst én konverteringsprosess, og 50 oppgaver inneholder en behandling. Fokuset blant de fleste oppgavene ligger altså på å kunne bruke de ulike konverteringene mellom representasjonsformene. Dette er noe som også er tydelig nevnt i læreplanen i 1P. Kun litt over halvparten av oppgavene inneholder en form for behandling, altså oppgaver der elevene arbeider innenfor en representasjonsform, ved å for eksempel regne ut bestemte verdier. Av de 88 oppgavene er det 31 som inneholder både en form for behandling og én eller flere konverteringer. Oppgaven vist i figur 25 er hentet fra boka *Matematikk 1P.*



Figur 25: Eksempel på oppgave med behandling og konvertering fra boka Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 118)

I oppgaven skal elevene først finne løsningen på likningen som er representert grafisk. Her må de ha forståelse for hva de to linjene i koordinatsystemet viser, og hvor på grafen man kan lese av løsningen på likningen. Dette er kategorisert som en behandling, da man ikke behøver å bevege seg mellom noen representasjonsformer for de to funksjonene. Man kan bruke grafene direkte til å lese av verdien som løser likningen. I deloppgave b skal elevene skrive likningen som er representert grafisk som et uttrykk. Dette er kategorisert som en konvertering mellom graf og algebraisk uttrykk.

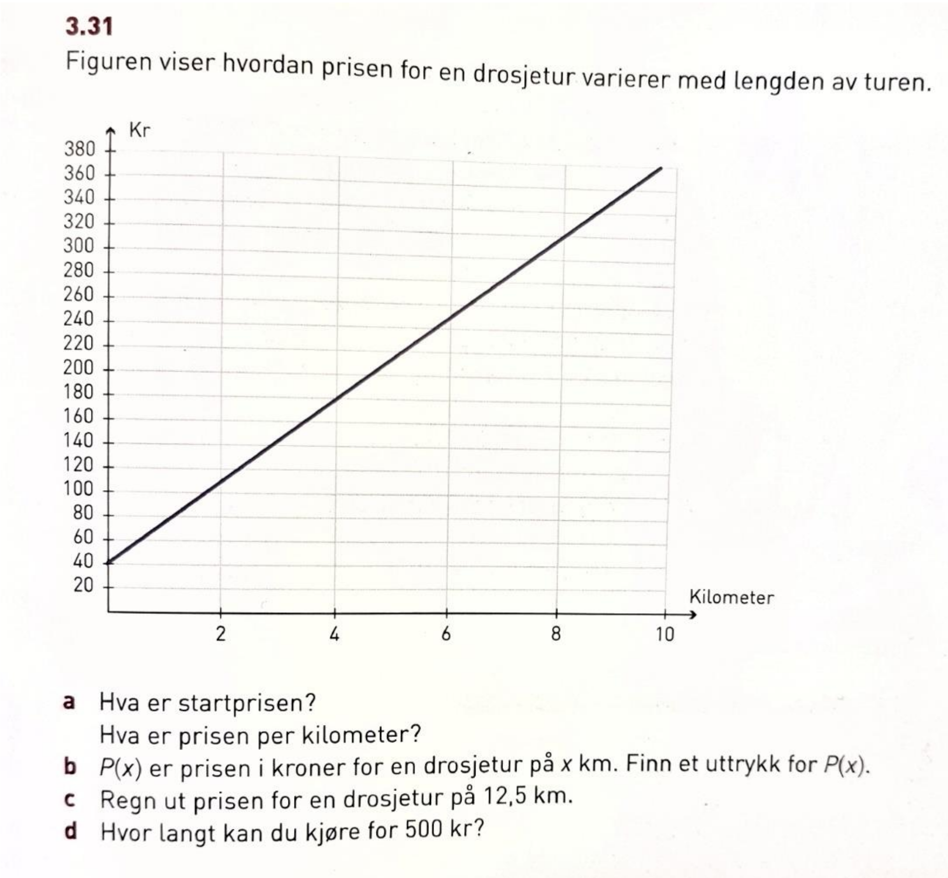
Jeg vil nå se på hvordan de ulike konverteringene er fordelt mellom oppgavene i kapittelet funksjoner. Tabell 6 viser en oversikt over antall oppgaver som inneholder de ulike konverteringene og hvor stor prosentandel dette utgjør av de totalt 88 oppgavene.

Konvertering	**antall**	**Prosent**
GN	6	6,8 %
SN	6	6,8 %
NA	8	9,1 %
GS	25	28,4 %
SA	32	36,4 %
GA	38	43,2 %

Tabell 6: Oversikt over de ulike konverteringene i oppgavene i kapittelet funksjoner i boka Matematikk 1P

Som man kan se i tabellen er konverteringen som er oftest representert i oppgavene konverteringen mellom en graf og et algebraisk uttrykk. Dette er oppgaver der elevene enten skal lage et algebraisk uttrykk basert på en graf som er gitt i oppgaven, eller tegne en graf basert på et uttrykk. De andre konverteringene som er mye brukt er mellom situasjon og algebraisk uttrykk, og mellom graf og situasjon. Det er få oppgaver i denne boka som inneholder konvertering til eller fra en numerisk tabell.

Fra tabellen ovenfor kan man se at det er stor variasjon mellom hvor mye en konvertering er brukt. Elevene skal bruke konverteringen mellom graf og algebraisk uttrykk i 43,2% av oppgavene, og konverteringene mellom situasjon og numerisk tabell og mellom graf og numerisk tabell i kun 6,8% av oppgavene. Elevene får altså mye trening i enkelte typer konverteringer, og mindre trening i andre. De tre mest brukte konverteringene er GS, SA og GA, og som man kan se i tabellen er det et relativt stort skille mellom hvor mye disse er brukt, og hvor mye de tre andre er brukt. Jeg vil nå presentere en oppgave fra kapittelet funksjoner som inneholder de tre mest brukte konverteringene. De tre inngår sammen i flere av oppgavene, slik som den presentert i figur 26.


3.31
Figuren viser hvordan prisen for en drosjetur varierer med lengden av turen.

a Hva er startprisen?
Hva er prisen per kilometer?
b $P(x)$ er prisen i kroner for en drosjetur på x km. Finn et uttrykk for $P(x)$.
c Regn ut prisen for en drosjetur på 12,5 km.
d Hvor langt kan du kjøre for 500 kr?

Figur 26: Oppgave med de tre konverteringene GA, SA og GS fra boka Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 113)

Oppgaven vist i figuren ovenfor viser en graf som representerer prisen for en drosjetur som funksjon av lengden på turen. Elevene blir i deloppgave a bedt om å finne startprisen og prisen per kilometer med utgangspunkt i grafen. Denne deloppgaven består derfor av konverteringen fra graf til situasjon, GS. Deloppgave b ber elevene finne et algebraisk uttrykk for funksjonen som er presentert i oppgaven. Dette kan gjøres enten ved å se på grafen som er oppgitt, eller bruke verdiene som ble funnet i deloppgave a som beskriver situasjonen. Jeg har derfor valgt å både kategorisere dette som GA og SA. I deloppgave c og d skal elevene bruke funksjonsuttrykket til å regne ut prisen for en gitt drosjetur, og hvor langt man kan kjøre for en viss sum. Dette kategoriseres derfor som konverteringen SA. Oppgaven inkluderer derfor de tre konverteringene GS, GA og SA, som er de mest brukte overgangene i kapittelet funksjoner i *Matematikk 1P.*

Kapitteltest og eksamenstrening

Jeg vil nå presentere hvordan oppgavene om funksjoner i kapitteltesten og eksamenstreningen fordeler seg mellom de to transformasjonene behandling og konvertering. Tabell 7 viser en oversikt over de totalt 18 oppgavene.

Transformasjon	Antall (N=18)	Prosent
Konvertering	18	100,0 %
Behandling	3	16,7 %

Tabell 7: Oversikt over transformasjoner i kapitteltest og eksamenstrening i boka Matematikk 1P

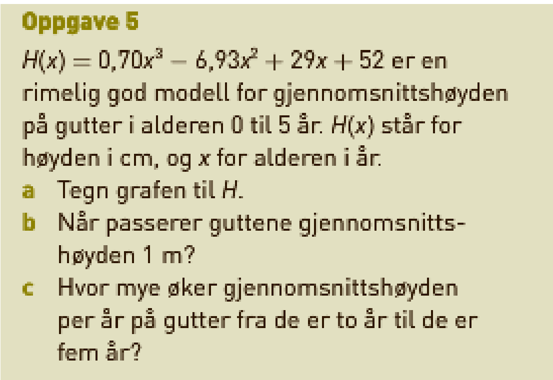
Tabellen ovenfor viser at alle de 18 oppgavene inneholder en form for konvertering, altså en transformasjon der man beveger seg mellom ulike representasjonsformer, 3 av disse inneholder også en behandling. Oppgavene i kapitteltesten og eksamenstreningen er oppgaver som er ment å likne oppgaver gitt på en prøve eller eksamen, altså oppgaver som skal teste elevene. Ettersom alle disse oppgavene i denne boka inneholder en konvertering er det trolig at forfatterne av denne boka mener at det er en stor del av det som skal testes. Det vil være interessant å se om det samme gjelder for eksamensoppgavene jeg har analysert i kapittel 4.4.

Tabell 8 viser oversikt over hvordan oppgavene i kapitteltesten og eksamenstreningen fordeler seg mellom de ulike konverteringene.

Konvertering	antall	Prosent
SN	0	0,0 %
GN	2	11,1 %
NA	2	11,1 %
SA	7	38,9 %
GA	9	50,0 %
GS	13	72,2 %

Tabell 8: Oversikt over konverteringer i kapitteltest og eksamenstrening i boka Matematikk 1P

Tabellen ovenfor viser at det også for disse oppgavene er de konverteringene med numerisk tabell som er brukt minst. Hele 13 av 18 oppgaver inneholder konverteringen GS, altså fra en grafisk fremstilling til en situasjon eller motsatt. Sammenliknet med resultatene fra analysen av oppgavene i kapittelet kan man se at også her er det få av oppgavene som inneholder bruk av numerisk tabell. Det er altså de tre overgangene SA, GA og GS som er brukt mest i disse oppgavene også. I figur 27 vises en oppgave hentet fra kapitteltesten, som inneholder de to mest brukte konverteringene.



Oppgave 5

$H(x) = 0{,}70x^3 - 6{,}93x^2 + 29x + 52$ er en rimelig god modell for gjennomsnittshøyden på gutter i alderen 0 til 5 år. $H(x)$ står for høyden i cm, og x for alderen i år.

a Tegn grafen til H.

b Når passerer guttene gjennomsnitts-høyden 1 m?

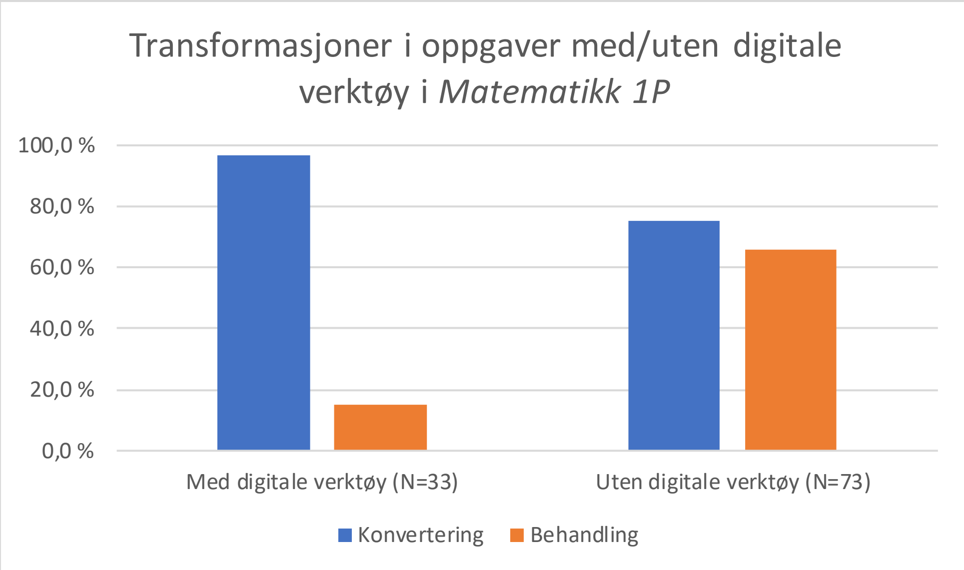
c Hvor mye øker gjennomsnittshøyden per år på gutter fra de er to år til de er fem år?

Figur 27: Oppgave hentet fra kapitteltesten etter kapittelet funksjoner i boka Matematikk 1P (Heir et al., 2014, s. 143)

I oppgaven ovenfor blir det presentert et algebraisk uttrykk som er en modell for gjennomsnittshøyden på gutter i alderen 0 til 5 år. Basert på dette skal elevene i deloppgave a tegne grafen som viser denne modellen. Dette skal de gjøre ved hjelp av digital graftegner. I deloppgave b og c skal elevene bruke modellen til å finne ut når gutter passerer gjennomsnitthøyden 1 m og hvor mye gjennomsnittshøyden øker per år fra guttene er to til fem år. De skal altså tolke grafen for å si noe om situasjonen den beskriver. Denne oppgaven inneholder derfor de to konverteringene GA og GS.

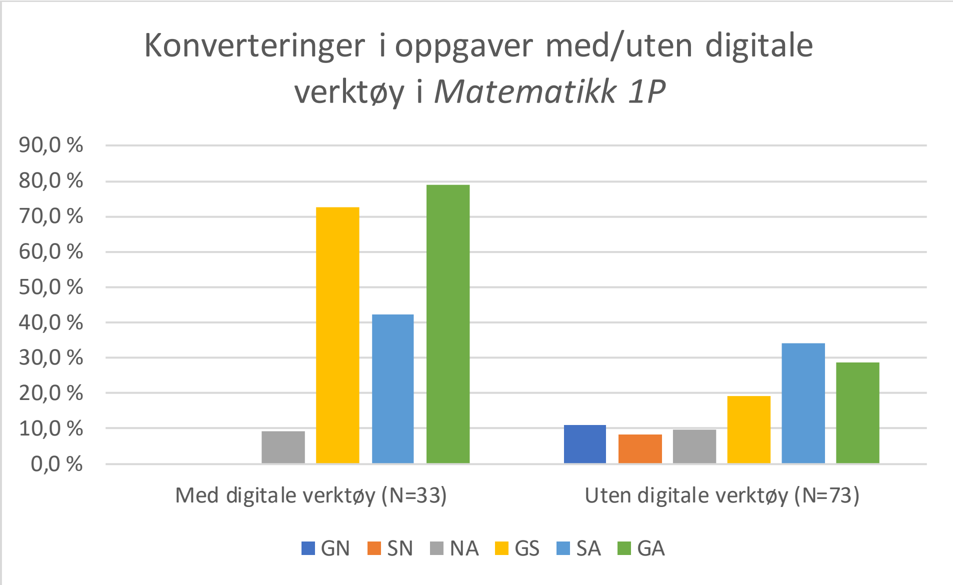
Oppgaver med digitale verktøy

Oppgavene om funksjoner i boka *Matematikk 1P* kan fordeles mellom de som krever bruk av digitale verktøy (som GeoGebra) og de som ikke gjør det. Jeg vil nå se på hvordan oppgavene som skal løses med og oppgavene som skal løses uten digitale hjelpemidler fordeler seg mellom de to transformasjonene behandling og konvertering. Deretter vil jeg presentere hvilke konverteringer som er brukt i disse oppgavene. Figur 28 viser en oversikt over hvordan oppgaver med eller uten bruk av digitale verktøy fordeler seg mellom de to transformasjonstypene ifølge min analyse. Her har jeg samlet resultatene for alle de 106 oppgavene innen funksjoner i boka *Matematikk 1P.*



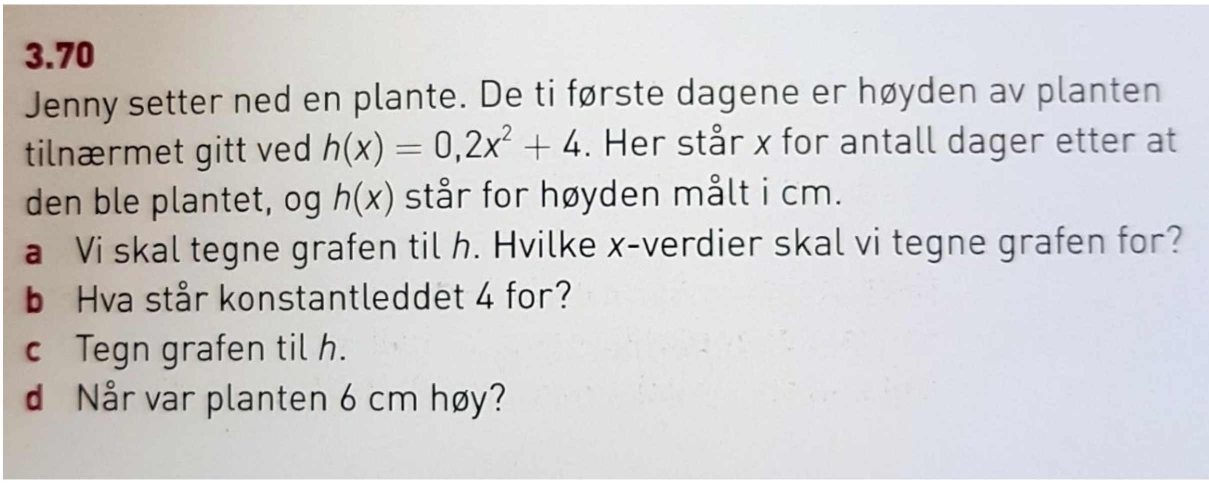
Figur 28: Oversikt over transformasjoner i oppgaver som skal løses med/uten digitale verktøy i boka Matematikk 1P

I figuren ovenfor kan man se at oppgavene som er laget for at elevene skal bruke digitale verktøy inneholder lite bruk av behandling, og nesten alle oppgavene inneholder en form for konvertering. Dette skiller seg fra oppgavene som skal løses uten bruk av digitale verktøy, der det er en nokså jevn fordeling mellom oppgaver som inneholder konvertering og behandling. Det kan virke som at oppgavene der elevene bruker digitale verktøy fokuserer mer på konverteringer mellom representasjonsformer, og det vil være interessant å se hvilke konverteringer som dominerer blant disse oppgavene. Figur 29 viser en oversikt over konverteringer i oppgaver med eller uten bruk av digitale verktøy blant de 106 analyserte oppgavene i *Matematikk 1P.*



Figur 29: Oversikt over konverteringer i oppgaver som skal løses med/uten digitale verktøy i Matematikk 1P

I figuren ovenfor kan man til venstre se hvordan oppgavene som skal løses ved hjelp av digitale verktøy (totalt 33 oppgaver) er kategorisert blant de forskjellige overgangene ifølge min analyse. Det vises som en prosentandel av de 33 oppgavene. Det er blant disse oppgavene et stort skille mellom hvilke konverteringer det er mye og lite av. Konverteringene GN og SN er ikke å finne blant disse oppgavene, og det er også lite bruk av konverteringen NA. Det er for så vidt også disse tre som er minst brukt i hele boka, men kontrasten er enda større blant disse oppgavene. Her kan vi se at de to konverteringene GS og GA er brukt i mesteparten av oppgavene, og dette er noe som er typisk for en oppgave om funksjoner som skal løses med digitale verktøy i denne boka. Konverteringen SA er brukt i litt under halvparten av disse oppgavene. I figur 30 vises en oppgave hentet fra boka *Matematikk 1P* som skal løses med hjelp av digitale verktøy.


3.70
Jenny setter ned en plante. De ti første dagene er høyden av planten tilnærmet gitt ved $h(x) = 0{,}2x^2 + 4$. Her står x for antall dager etter at den ble plantet, og $h(x)$ står for høyden målt i cm.

a Vi skal tegne grafen til h. Hvilke x-verdier skal vi tegne grafen for?
b Hva står konstantleddet 4 for?
c Tegn grafen til h.
d Når var planten 6 cm høy?

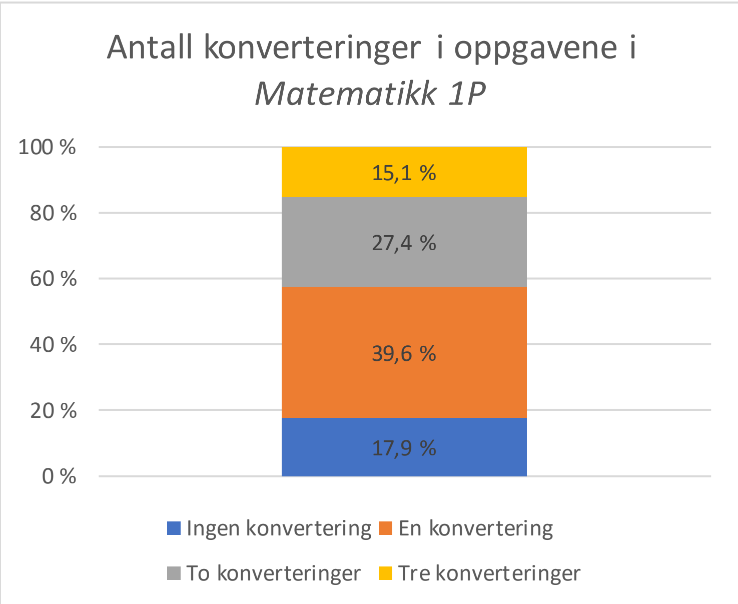
Figur 30: Oppgave som skal løses ved bruk av digitale verktøy fra boka Matematikk 1P

I oppgaven ovenfor blir det presentert et algebraisk uttrykk som beskriver høyden av en plante som funksjon av antall dager etter at den ble plantet. Deloppgave a går ut på å bestemme hvilke x-verdier grafen skal tegnes for. Det kreves her at elevene vurderer situasjonen beskrevet slik at de kan tegne grafen for riktige verdier, dette er derfor konverteringen GS. Deloppgave b går ut på å forklare hva konstantleddet oppgitt i uttrykket betyr for denne situasjonen, og er derfor konverteringen SA. I deloppgave c skal grafen tegnes, noe som gjøres basert på uttrykket gitt i oppgaven, og er derfor konverteringen GA. Deloppgave d går ut på å bestemme når planten når en viss høyde, noe som på dette nivået løses ved hjelp av grafen. Denne oppgaven inneholder altså de tre overgangene GS, SA og GA.

Oppgavene som skal løses uten bruk av digitale verktøy inneholder færre ulike konverteringer enn de som skal løses med digitale verktøy. Dette er synlig i figur 29 ved at stolpene til høyre til sammen er lavere enn de til venstre. I disse oppgavene er det også mest bruk av de tre konverteringene GS, SA og GA, men kontrasten mellom disse og konverteringene som inneholder bruk av numerisk tabell er mindre. Det er altså en jevnere fordeling av de ulike konverteringene blant disse oppgavene enn for de som skal løses ved hjelp av digitale verktøy.

Antall konverteringer

Oppgavene i kapittelet som omhandler funksjoner i *Matematikk 1P* inneholder som nevnt ulikt antall konverteringer. Jeg vil nå se på hvor mange ulike konverteringer det er i disse oppgavene. En oversikt over dette er presentert i figur 31.



Figur 31: Oversikt over antall konverteringer i oppgavene om funksjoner i boka Matematikk 1P

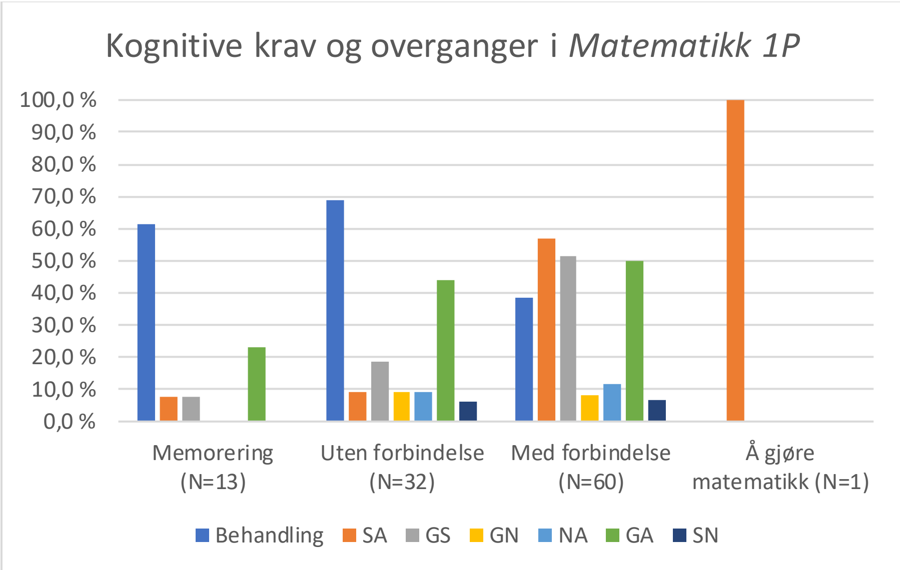
Figuren ovenfor viser at de fleste av de totalt 106 oppgavene i kapittelet funksjoner inneholder en type konvertering. Dette er ofte oppgaver med færre deloppgaver enn de som inneholder flere ulike konverteringer. 27,4% av oppgavene inneholder to ulike konverteringer og 15,1% inneholder hele tre ulike konverteringer. Betydningen av dette kommer frem i neste delkapittel, og i diskusjonsdelen.

4.2.3 Oppsummering av resultater for Matematikk 1P

Innenfor kategorien kognitive krav har vi nå sett at de fleste av oppgavene i boka Matematikk 1P er kategorisert enten som «uten forbindelse» eller «med forbindelse». Innlæringsoppgavene og de røde oppgavene i boka, altså de oppgavene som ifølge forfatterne skal være litt enklere har en nokså jevn fordeling mellom høye og lave kognitive krav. Blant innlæringsoppgavene finner vi også en del av oppgavene kategorisert som «memorering», det laveste kognitive kravet. De blå oppgavene derimot har sterk overvekt av oppgaver på høyt kognitivt nivå, da spesielt innenfor kategorien «med forbindelse». Oppgavene i kapitteltesten og eksamenstreningen er også for det meste kategorisert som høye kognitive krav. Innen oppgaver om funksjoner i denne boka har jeg kun kategorisert en oppgave som «å gjøre matematikk». Mange av de analyserte oppgavene i denne boka går altså ut på at elevene skal bruke prosedyrer, både på høyt og lavt kognitivt nivå.

Innenfor hovedkategorien overganger har jeg sett at det er lite bruk av de tre konverteringene til og fra representasjonen numerisk tabell. Det er derimot mye bruk av de tre andre konverteringene, særlig blant oppgavene der elevene skal bruke digitale verktøy som en graftegner. Bruken av konvertering til eller fra en praktisk situasjon som representerer funksjonen er mye brukt, noe som samsvarer godt med at det er oppgaver i faget 1P jeg har analysert, som nettopp har fokus på praktisk bruk av matematikk. Det er også mange av oppgavene som går ut på å tegne graf basert på et funksjonsuttrykk, gjerne i sammenheng med å tolke verdier fra grafen eller uttrykket praktisk.

Jeg har tidligere nevnt at bruk av konverteringer som inneholder den semiotiske representasjonen situasjon som ofte skiller de to kognitive kravene «uten forbindelse» og «med forbindelse». Figur 32 viser en oversikt over hvilke overganger som finnes i oppgaver med ulike kognitive krav. Her kan vi altså se hvilke sammenhenger som eksisterer mellom kognitive krav og overganger basert på min analyse. Antall overganger er vist som en prosentandel av oppgavene innen hvert av de kognitive kravene.



Figur 32: Oversikt over sammenhengen mellom kognitive krav og overganger i boka Matematikk 1P

De to kategoriene innen kognitive krav det er flest oppgaver innenfor er som nevnt «uten forbindelse» og «med forbindelse». Dersom man ser på hvilke overganger som finnes blant disse oppgavene kan man se at det er et klart skille. Oppgavene i kategorien «uten forbindelse» inneholder mye bruk av behandling, og blant konverteringene er det særlig GA som skiller seg ut, mens de andre er lite brukt. Ser man på oppgavene i kategorien «med forbindelse», er det derimot mest bruk av de to konverteringene SA og GS, og GA er også mye brukt. Her finner vi altså oppgaver som inneholder konverteringer til og fra en situasjon, altså de oppgavene jeg har valgt å kalle praktiske. I kategorien «med forbindelse» er det også i snitt flere ulike konverteringer per oppgave enn for oppgaver innen de andre kognitive kravene. Det er derimot mindre bruk av behandling i disse oppgavene.

Oppgavene som er kategorisert som «memorering» inneholder relativt lite bruk av konverteringer. Relativt mange av disse, 8 av 13, inneholder behandling. Den konverteringen som er brukt mest for disse oppgavene er mellom graf og algebraisk uttrykk. Dette er oppgaver som krever lite av elevene kognitivt, og det er derfor naturlig at de inneholder færre konverteringer enn oppgaver innen de andre kognitive kravene. Dersom man skal konvertere mellom ulike representasjoner krever det ofte en prosedyre, noe som ikke eksisterer blant oppgaver innen «memorering».

4.3 Resultater fra analyse av læreboka *Sinus 1P*

Som i boka *Matematikk 1P* er også oppgavene i *Sinus 1P* delt inn i ulike kategorier. Det er oppgaver i hvert delkapittel sammen med fagstoffpresentasjonen, som er av varierende vanskelighetsgrad. I tillegg er det oppgaver i slutten av boka som er differensierte mellom «lette» og «litt vanskeligere» oppgaver. Dette er til sammen 68 oppgaver innen kapittelet funksjoner, som jeg vil kalle «oppgaver i kapittelet». Helt til slutt er det også oppgaver som likner eksamensoppgaver inndelt etter oppgaver som kan løses uten og med hjelpemidler, disse har jeg valgt å kalle *eksamensliknende oppgaver*. Her finner vi til sammen 50 oppgaver slik at det totalt er 118 oppgaver om funksjoner. Jeg vil her presentere resultater både fra kapittelet og de eksamensliknende oppgavene. Jeg vil først se på de 68 oppgavene fra kapittelet, så eksamensdelen før jeg til slutt ser på oppgavene samlet. Dette gjør jeg for å lettere kunne sammenlikne med resultatene fra *Matematikk 1P* og eksamensoppgavene. Jeg velger å først presentere resultatene for kognitive krav, så for overganger før jeg til slutt oppsummerer og ser etter sammenhenger mellom de to kategoriene i denne boka.

4.3.1 Kognitive krav

Kognitive krav er som nevnt delt inn i de fire kategoriene «memorering», «uten forbindelse», «med forbindelse» og «å gjøre matematikk». Her vil jeg presentere hvordan oppgavene i boka *Sinus 1P* fordeler seg mellom disse kategoriene, før jeg viser eksempler som begrunner denne kategoriseringen. Jeg vil først presentere resultatene for analysen av oppgavene gitt før de som skal likne eksamensoppgavene, disse vil jeg som nevnt kalle «oppgaver i kapittelet». Deretter vil jeg se på de eksamensliknende oppgavene, før jeg sammenlikner de forskjellige typene oppgaver i Sinus 1P. Til slutt vil jeg presentere resultatene for oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy.

Oppgaver i kapittelet

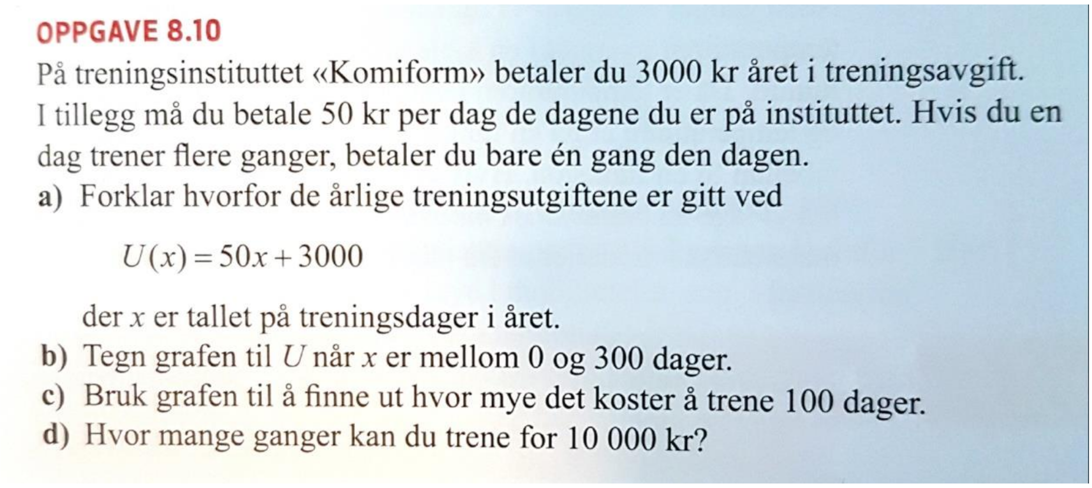
Jeg vil her presentere en oversikt over hvordan de 68 oppgavene gitt i kapittelet funksjoner fordeler seg mellom de ulike kognitive kravene. Dette er oppgavene gitt i teoridelen og delen kalt «øv mer». Resultatet fra min analyse er vist i tabell 9.

Kognitive krav	**Antall (N=68)**	**Prosent**
Memorering	0	0,0 %
Uten forbindelse	32	47,1 %
Med forbindelse	33	48,5 %
Å gjøre matematikk	3	4,4 %

Tabell 9: Oversikt over hvordan oppgavene i Sinus 1P er fordelt mellom kognitive krav

I tabellen kan man se at litt under halvparten av oppgavene befinner seg på lavt kognitivt nivå og litt over halvparten på høyt kognitivt nivå. Oppgavene i denne boka er altså jevnt fordelt mellom høyt og lavt kognitivt nivå. Omtrent alle oppgavene, hele 65 av 68, er kategorisert som enten «uten forbindelse» eller «med forbindelse». Fra min kategorisert ser det derfor ut til at forfatterne er opptatt av at elevene skal bruke prosedyrer, både på høyt og lavt kognitivt nivå. Resten av oppgavene finner vi i kategorien «å gjøre matematikk», altså oppgaver på det høyeste kognitive nivået. Ingen av oppgavene jeg har sett på i denne boka ble plassert i kategorien «memorering».

Jeg har kategorisert flest av oppgavene i denne boka som «med forbindelse», som er oppgaver der elevene bruker prosedyrer på høyt kognitivt nivå. Oppgaver i denne kategorien har som fokus å øke forståelsen til elevene. Disse krever mye av elevenes kognisjon, og det er ofte ikke åpenbart hvilken prosedyre elevene skal bruke. Sammenhengen mellom prosedyren og meningen bak de konseptene som blir brukt i oppgaven er viktig i denne kategorien. Det kreves derfor en evne til resonnering og en konseptuell forståelse for å løse slike oppgaver. Figur 33 viser en oppgave jeg har plassert i kategorien «med forbindelse» fra boka *Sinus 1P*.



OPPGAVE 8.10

På treningsinstituttet «Komiform» betaler du 3000 kr året i treningsavgift. I tillegg må du betale 50 kr per dag de dagene du er på instituttet. Hvis du en dag trener flere ganger, betaler du bare én gang den dagen.

a) Forklar hvorfor de årlige treningsutgiftene er gitt ved

$$U(x) = 50x + 3000$$

der x er tallet på treningsdager i året.

b) Tegn grafen til U når x er mellom 0 og 300 dager.

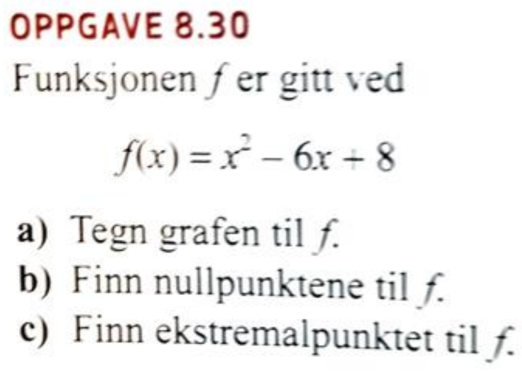
c) Bruk grafen til å finne ut hvor mye det koster å trene 100 dager.

d) Hvor mange ganger kan du trene for 10 000 kr?

Figur 33: Oppgave i kategorien «med forbindelse» fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 215)

I oppgaven vist ovenfor blir elevene presentert for en situasjon som beskriver hvor mye det koster å trene på et treningsinstitutt. I deloppgave a skal elevene forklare hvorfor det algebraiske uttrykket viser sammenhengen mellom antall treningsdager og de årlige treningsutgiftene. Dette krever at de har forståelse for hva de ulike elementene i uttrykket betyr, altså meningen bak formelen. Deloppgave b ber elevene tegne grafen for denne funksjonen, basert på uttrykket gitt i deloppgave a. I deloppgave c skal de bruke denne grafen til å finne ut hvor mye det koster å trene 100 dager, og de må da se sammenhengen mellom grafen og situasjonen for å vite hvor på grafen de kan lese av dette tallet. Til slutt skal elevene regne ut hvor mange ganger man kan trene for 10 000kr, enten ved å bruke grafen eller uttrykket som er oppgitt. Oppgaven krever at elevene klarer å bruke riktige prosedyrer til å se sammenhenger mellom graf, uttrykk, og situasjonen beskrevet, og de blir også bedt om å forklare uttrykket i deloppgave a. Den blir derfor kategorisert som «med forbindelse».

Kategorien med nest flest oppgaver er «uten forbindelse». Dette er oppgaver der elevene skal bruke prosedyrer, men det er svaret som står i fokus og ikke forståelsen. Det er ofte oppgaver der elevene følger en algoritme, uten å trenge å forstå meningen bak konseptene de arbeider med. I denne kategorien finner vi 32 av de totalt 68 oppgavene. I figur 34 vises en oppgave jeg har plassert i denne kategorien.



OPPGAVE 8.30

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

a) Tegn grafen til f.

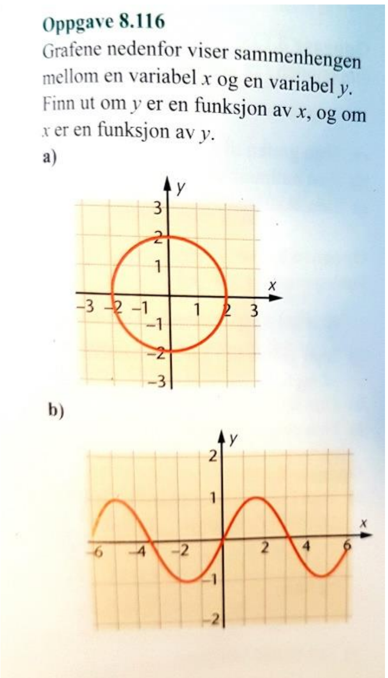
b) Finn nullpunktene til f.

c) Finn ekstremalpunktet til f.

Figur 34: Oppgave i kategorien «uten forbindelse» fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 222)

I oppgaven vist ovenfor blir det presentert et uttrykk som beskriver funksjonen f. Basert på dette uttrykket, skal elevene i deloppgave a tegne grafen til f. Dette krever at elevene kjenner en prosedyre for å finne funksjonsverdier de kan markere i et koordinatsystem og tegne en graf utfra. Det krever derimot ingen forståelse av meningen bak denne funksjonen. Elevene skal i deloppgave b og c bruke grafen til å finne nullpunkter og ekstremalpunkt for funksjonen. Dette krever at elevene vet hva som menes med nullpunkter og ekstremalpunkter, og hvordan man kan finne de på en graf. Denne oppgaven krever ingen forståelse av meningen bak det som arbeides med, men kjennskap til begreper og prosedyre for å tegne graf. Denne er derfor kategorisert som «uten forbindelse».

Blant de 68 oppgavene i kapittelet funksjoner i boka *Sinus 1P* er 3 oppgaver kategorisert som det høyeste kognitive kravet, «å gjøre matematikk». Dette er oppgaver som krever mye av elevene, de må i disse oppgavene utforske og forstå de matematiske konseptene, prosessene eller sammenhengene. En forutsigbar metode er ikke eksplisitt foreslått for å kunne løse slike oppgaver. De tre oppgavene i kapittelet som er plassert i denne kategorien går alle ut på det samme, nemlig å forstå når noe er en funksjon basert på en grafisk fremstilling. Eksempel på en av disse er vist i figur 35.



Figur 35: Oppgave i kategorien «å gjøre matematikk» fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 391)

Oppgaven ovenfor viser to ulike grafiske sammenhenger mellom en variabel *x* og en variabel *y*. Elevene skal i oppgaven finne ut om *y* er en funksjon av *x*, og om *x* er en funksjon av *y*. Dette krever at elevene forstår hva som skal til for at noe er en funksjon, og derfor en dyp forståelse av hva som ligger bak konseptet funksjon. Det er ikke foreslått noen eksplisitt metode for elevene i oppgaven, og det krever at elevene utforsker konseptet for å så kunne bestemme hva som skal til for at noe er en funksjon. Denne oppgaven er derfor plassert i kategorien «å gjøre matematikk».

Eksamensliknende oppgaver

De siste oppgavene i boka *Sinus 1P* er oppgaver som skal likne de oppgavene som er gitt på eksamen. Disse er delt inn etter oppgaver som gis på del 1 og på del 2, og blant de finnes også noen eldre eksamensoppgaver. Resultatet fra min analyse av disse oppgavene i forhold til kognitive krav er presentert i tabell 10.

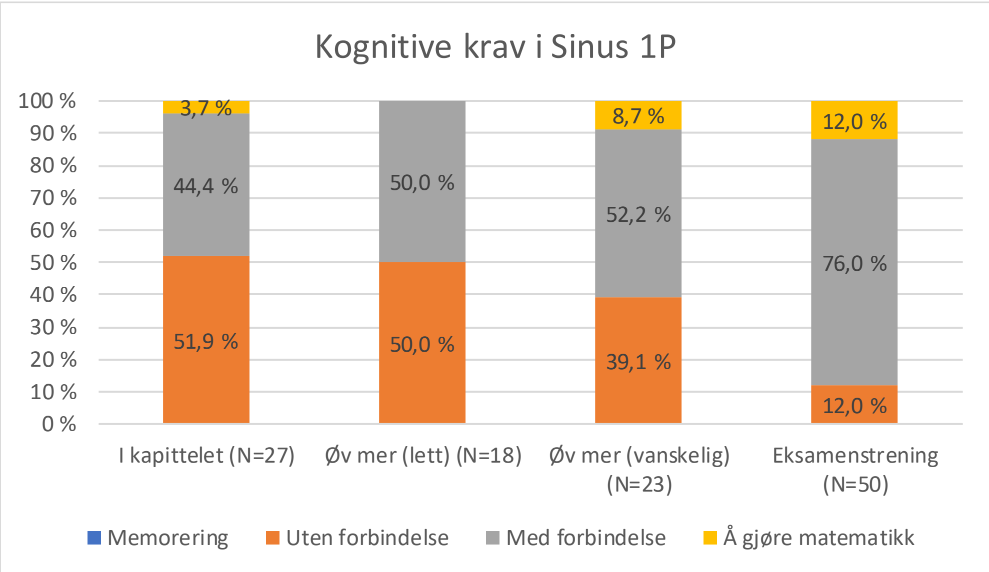
Kognitive krav	**Antall (N=50)**	**Prosent**
Memorering	0	0,0 %
Uten forbindelse	6	12,0 %
Med forbindelse	38	76,0 %
Å gjøre matematikk	6	12,0 %

Tabell 10: Kognitive krav for eksamensliknende oppgaver i boka Sinus 1P

I tabellen ovenfor kan man se at hele 76% av de eksamensliknende oppgavene er kategorisert som «med forbindelse» ifølge min analyse. Altså er nesten alle disse oppgavene slik at elevene skal arbeide med prosedyrer der forståelsen av det de jobber med er det sentrale i oppgaven. Disse oppgavene skal likne oppgaver som tester elevene på en avsluttende eksamen, så det kan tyde på at forfatterne her mener at det er typen «med forbindelse» som skal gis ved en avsluttende test. Resten av disse oppgavene fordeler seg likt mellom kategoriene «uten forbindelse» og «å gjøre matematikk». Altså er hele 88% av disse oppgavene kategorisert på høyt kognitivt nivå. Det vil være interessant å se om det samme gjelder for eksamensoppgavene som jeg skal analysere i kapittel 4.4.

Ulike typer oppgaver i Sinus 1P

Oppgavene i boka *Sinus 1P* er som nevnt fordelt mellom oppgaver som er gitt i kapittelet sammen med teoridelen, kategorien «øv mer» som er delt inn mellom «helt enkle» og vanskeligere oppgaver før det til slutt kommer eksamensliknende oppgaver, noe jeg har valgt å kalle eksamenstrening. Jeg vil nå se på hvilke kognitive krav som finnes blant de ulike typene oppgaver. Denne oversikten er presentert i figur 36.



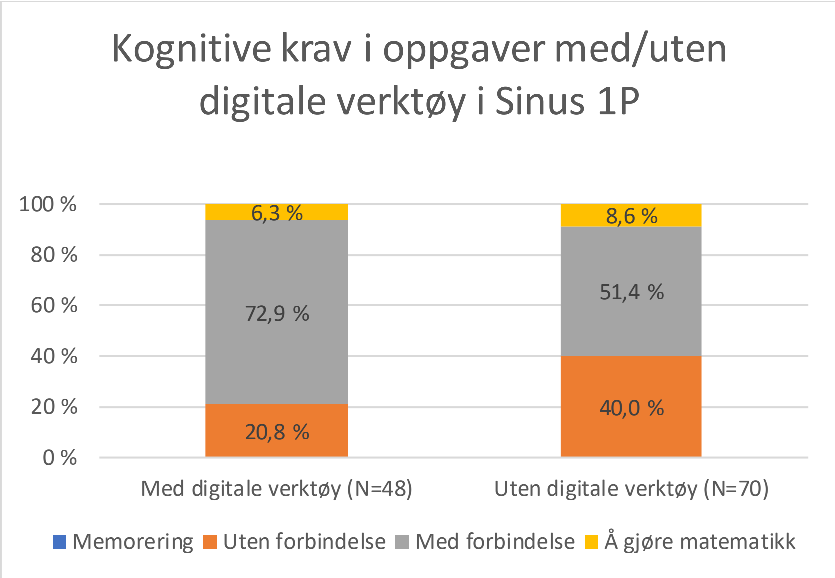
Figur 36: Kognitive krav blant ulike typer oppgaver i Sinus 1P

De 27 oppgavene gitt underveis i kapittelet fordeler seg jevnt mellom lave og høye kognitive krav. Oldervoll et al. (2014) skriver at i kapitlene i boka er organisert slik at det letteste står først og det vanskeligste står til sist, så det burde både være enklere og vanskeligere oppgaver her, noe vi kan se stemmer overens med fordelingen av lave og høye kognitive krav. De fleste av oppgavene befinner seg i kategorien «uten forbindelse», altså oppgaver der elevene bruker prosedyrer der å kunne bruke denne rett for å få rett svar står i fokus. Den nest største kategorien er «med forbindelse», altså oppgaver med prosedyrer på høyt kognitivt nivå. Det er også en oppgave blant disse som er kategorisert som «å gjøre matematikk» utfra min analyse.

Oppgavene forfatterne har kalt «øv mer» er delt inn etter det de mener er «helt enkle» og «vanskeligere» oppgaver (Oldervoll et al., 2014). De 18 oppgavene som er av den enkle typen er ifølge min analyse helt likt fordelt mellom de to kategoriene «uten forbindelse» og «med forbindelse». Her er det ingen av oppgavene som er kategorisert som «memorering» eller «å gjøre matematikk». De «vanskeligere» oppgavene er på sin side for det meste kategorisert som høye kognitive krav, her finner vi også noen oppgaver i kategorien «å gjøre matematikk».

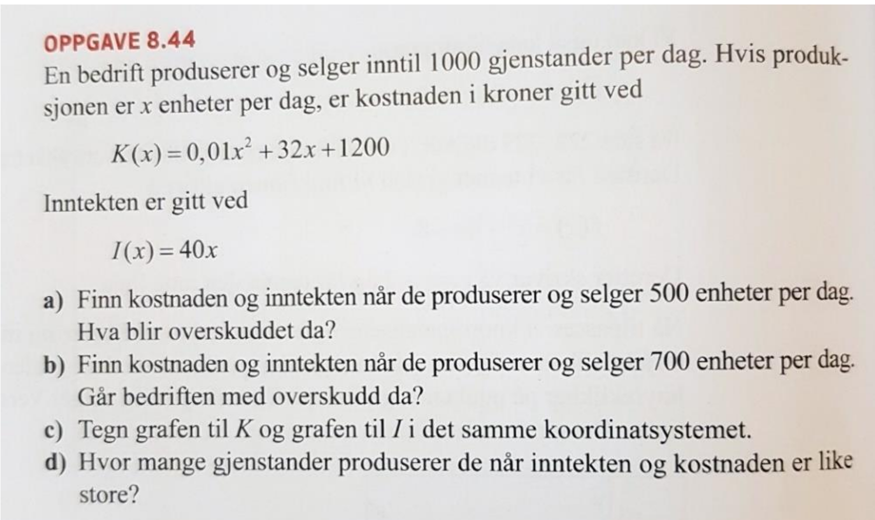
Oppgaver med digitale verktøy

I boka *Sinus 1P* er det tydelig merket hvilke oppgaver elevene kan eller må løse ved hjelp av digitale verktøy som graftegner. Dette er enten eksplisitt oppgitt i oppgaven, eller så er det underforstått ved at det følger et delkapittel som omhandler å bruke digitale verktøy i arbeid med funksjoner. Jeg vil her se på hva som skiller oppgaver som skal løses ved hjelp av digitale verktøy og oppgaver som skal løses uten dette når det gjelder hvilke kognitive krav de er kategorisert som. Figur 37 viser en oversikt over dette, på bakgrunn av min analyse av de totalt 118 oppgavene i *Sinus 1P*.



Figur 37: Kognitive krav i oppgaver med/uten digitale verktøy i boka Sinus 1P

I figuren ovenfor kan man se prosentvis fordeling av kognitive krav blant oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy. Blant de 48 oppgavene som skal løses med digitale verktøy er hele 72,9% kategorisert som «med forbindelse». Videre er 20,8% av disse oppgavene plassert i kategorien «uten forbindelse» og 6,3% i kategorien «å gjøre matematikk». Vi finner altså en stor overvekt av oppgaver på høyt kognitivt nivå blant disse oppgavene. Blant oppgavene som skal løses uten digitale verktøy er det også flest i kategorien «med forbindelse». Her er det derimot en mer jevn fordeling mellom denne kategorien og «uten forbindelse», og også her noen få oppgaver i kategorien «å gjøre matematikk». En typisk oppgave som skal løses ved hjelp av digitale verktøy hentet fra boka Sinus 1P er vist i figur 38.


OPPGAVE 8.44

En bedrift produserer og selger inntil 1000 gjenstander per dag. Hvis produksjonen er x enheter per dag, er kostnaden i kroner gitt ved

$$K(x) = 0{,}01x^2 + 32x + 1200$$

Inntekten er gitt ved

$$I(x) = 40x$$

a) Finn kostnaden og inntekten når de produserer og selger 500 enheter per dag. Hva blir overskuddet da?

b) Finn kostnaden og inntekten når de produserer og selger 700 enheter per dag. Går bedriften med overskudd da?

c) Tegn grafen til K og grafen til I i det samme koordinatsystemet.

d) Hvor mange gjenstander produserer de når inntekten og kostnaden er like store?

Figur 38: Oppgave som skal løses ved hjelp av digitale verktøy fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 228)

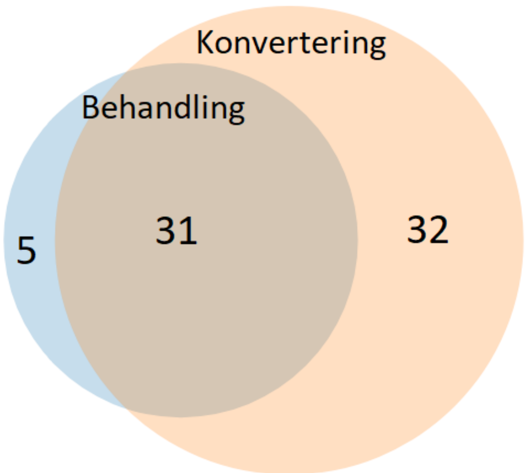
I oppgaven ovenfor blir det presentert to uttrykk for funksjoner som beskriver kostnad og inntekt for en bedrift som en funksjon av antall solgte enheter per dag. Deloppgave a og b går på å regne ut kostnad og inntekt til bedriften for et visst antall solgte enheter, og bestemme overskuddet. Dette krever at elevene forstår sammenhengen mellom uttrykket og situasjonen som er beskrevet. Elevene må også se sammenhengen mellom de to funksjonene for å kunne finne overskuddet. Deloppgave c ber elevene tegne grafene til funksjonene som beskriver kostnaden og inntekten i samme koordinatsystem. Dette skal gjøres ved hjelp av digital graftegner. I deloppgave d skal elevene bestemme hvor mange enheter som blir produsert når kostnaden og inntekten er like store. Dette skal løses ved å bruke grafen, da de i 1P ikke skal lære å løse andregradslikninger på denne måten. Oppgaven krever totalt sett at elevene ser sammenheng mellom funksjonsuttrykkene, grafene og situasjonen beskrevet for å vite hvordan de skal gå frem for å løse oppgaven. Denne er derfor kategorisert som «med forbindelse».

4.3.2 Overganger

Jeg vil nå vise resultatene fra kategorien overganger for boka Sinus 1P. Her vil jeg først presentere resultatene fra oppgavene i kapittelet før jeg ser på de eksamensliknende oppgavene og deretter skiller på oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy. Jeg vil se på antall oppgaver som inneholder behandling og konvertering, før jeg så viser en oversikt over hvilke konverteringer som finnes blant oppgavene. Til slutt vil jeg presentere en oversikt over antall ulike konverteringer i oppgavene.

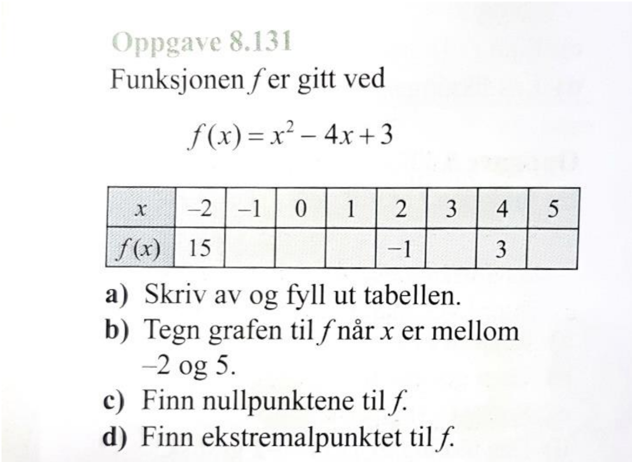
Oppgaver i kapittelet

Disse oppgavene inkluderer oppgavene gitt sammen med fagstoffpresentasjonen, og oppgaver i kategorien «øv mer». Nedenfor vises en oversikt over hvilke transformasjoner som er brukt i disse oppgavene.



Figur 39: Oversikt over antall oppgaver med behandling og/eller konvertering i boka Sinus 1P

I venndiagrammet kan man se at de aller fleste oppgavene, hele 63 av 68 inneholder minst én form for konvertering. 36 av oppgavene inneholder en behandling, og blant disse er det 31 som også inneholder en form for konvertering. Fokuset i de fleste oppgavene er altså å bruke ulike konverteringer mellom representasjonsformene for funksjoner. Flere av oppgavene inneholder også flere ulike konverteringer, slik at antallet konverteringer i oppgavene egentlig er høyere enn vist i figuren. Oppgaven vist i figur 40 er et eksempel på en oppgave med både behandling og flere typer konverteringer.



Oppgave 8.131

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	15				–1		3	

a) Skriv av og fyll ut tabellen.

b) Tegn grafen til f når x er mellom –2 og 5.

c) Finn nullpunktene til f.

d) Finn ekstremalpunktet til f.

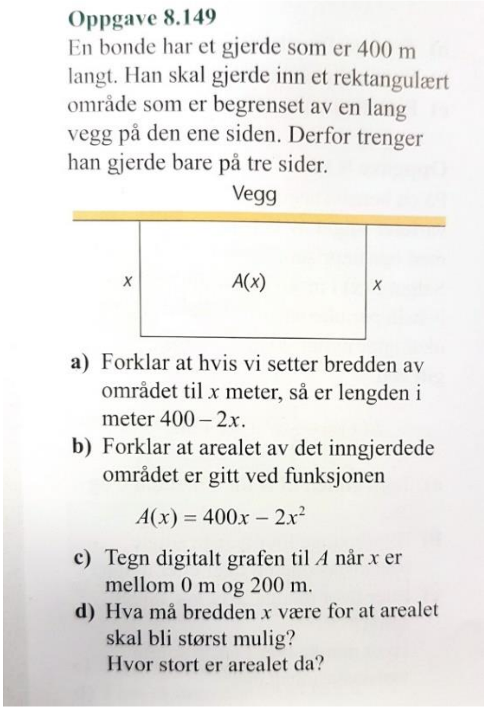
Figur 40: Eksempel på oppgave med behandling og konvertering fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 392)

I oppgaven ovenfor er det oppgitt et uttrykk som beskriver funksjonen f, sammen med en delvis utfylt tabell for samme funksjon. I deloppgave a skal elevene fylle ut resten av tabellen, ved å ta utgangspunkt i uttrykket for funksjonen. Dette kategoriseres som konverteringen NA, altså mellom algebraisk uttrykk og numerisk tabell. Deloppgave b ber elevene tegne grafen til funksjonen for noen bestemte *x*-verdier. Dette gjøres med utgangspunkt i tabellen, og er derfor konverteringen GN, fra tabell til graf. Deloppgave c og d går ut på å finne nullpunkter og ekstremalpunktet til funksjonen ved å bruke grafen. D ette er behandlingsoppgaver, da det arbeides med funksjonen innen samme representasjonsform. Denne oppgaven inneholder derfor både bruk av behandling, og de to konverteringene NA og GN. Videre vil jeg nå se på hvilke konverteringer som er brukt i oppgavene i kapittelet funksjoner i Sinus 1P. Tabell 11 viser en oversikt over dette.

Konvertering	**Antall (N=68)**	**Prosent**
SN	1	1,5 %
GN	4	5,9 %
NA	7	10,3 %
GS	20	29,4 %
SA	21	30,9 %
GA	51	75,0 %

Tabell 11: Oversikt over de ulike konverteringene i oppgavene i kapittelet funksjoner i boka Sinus 1P

Fra tabellen ovenfor kan man se at den mest brukte konverteringen i de analyserte oppgavene er GA, altså konverteringen mellom graf og algebraisk uttrykk. Hele 75% av oppgavene inneholder denne konverteringen. De to andre konverteringene som er mye bruk i denne boka er GS og SA, altså mellom graf og situasjon og mellom situasjon og algebraisk uttrykk. Ettersom dette er praktisk matematikk er det viktig at elevene får arbeide med praktisk tolkning av funksjoner og derfor at konverteringer som inneholder representasjonsformen situasjon blir brukt i oppgavene. De tre konverteringene som inneholder bruk av numerisk tabell, SN, GN og NA er lite brukt i disse oppgavene. Det kan virke som om det er lite fokus på denne representasjonsformen i denne boka. Oppgaven vist i figur 41 er hentet fra oppgavedelen «øv mer» i boka Sinus 1P, og inneholder de tre mest brukte konverteringene.



Oppgave 8.149
En bonde har et gjerde som er 400 m langt. Han skal gjerde inn et rektangulært område som er begrenset av en lang vegg på den ene siden. Derfor trenger han gjerde bare på tre sider.

a) Forklar at hvis vi setter bredden av området til x meter, så er lengden i meter $400 - 2x$.

b) Forklar at arealet av det inngjerdede området er gitt ved funksjonen

$$A(x) = 400x - 2x^2$$

c) Tegn digitalt grafen til A når x er mellom 0 m og 200 m.

d) Hva må bredden x være for at arealet skal bli størst mulig?
Hvor stort er arealet da?

Figur 41: Oppgave med de tre konverteringene GA, SA og GS fra boka Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014, s. 394)

I oppgaven ovenfor blir det presentert en situasjon der en bonde skal gjerde inn et område med et 400 m langt gjerde. Deloppgave a ber elevene forklare hvorfor lengden i rektangelet er gitt ved uttrykket $400 - 2x$ dersom bredden av området er x meter. Her må elevene se sammenheng mellom situasjonen og uttrykket, og derfor bruke konverteringen SA. Deloppgave b viser et uttrykk for funksjonen som beskriver arealet av området, og ber elevene forklare hvorfor uttrykket blir slik. Dette er også en konvertering fra situasjon til algebraisk uttrykk, da elevene må se sammenhenger mellom disse. I deloppgave c skal grafen for funksjonen som beskriver arealet tegnes. Dette gjøres basert på uttrykket gitt i deloppgave b, og er derfor konverteringen GA, mellom algebraisk uttrykk og graf. Deloppgave d ber elevene bestemme bredden *x* slik at arealet er størst mulig, og finne ut hvor stort arealet er da. Dette kan gjøres ved å se på grafen og finne ekstremalpunktet, og kategoriseres derfor som konverteringen SA, fra graf til situasjon. Oppgaver med disse konverteringene er som nevnt mye brukt i denne boka.

Eksamensliknende oppgaver

De siste oppgavene i boka *Sinus 1P* er oppgaver som skal likne de oppgavene som er gitt på eksamen. Disse er som nevnt delt inn etter oppgaver som skal løses med eller uten hjelpemidler, og blant de finnes også noen eldre eksamensoppgaver. Jeg vil nå se på hvilke transformasjoner og hvilke konverteringer som finnes blant disse oppgavene. Tabell 12 viser en oversikt over antall oppgaver med behandling og konvertering i disse oppgavene.

Transformasjon	Antall (N=50)	Prosent
Konvertering	47	94,0 %
behandling	18	36,0 %

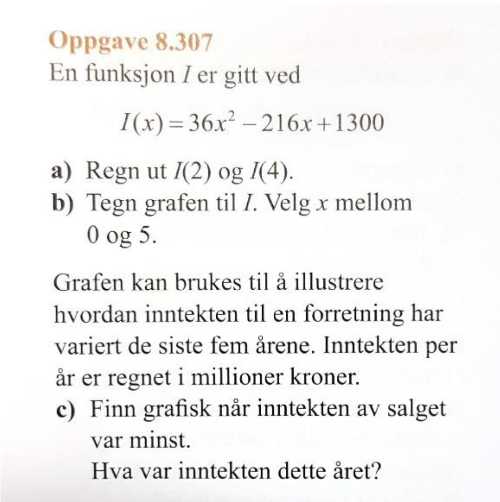
Tabell 12: Oversikt over transformasjoner i eksamensliknende oppgaver i boka Sinus 1P

I tabellen ovenfor kan man se at nesten alle de eksamensliknende oppgavene inneholder minst én form for konvertering, imens 18 av oppgavene inneholder en form for behandling. Dette er oppgaver som skal likne de som gis til en prøve eller avsluttende eksamen. Det kan derfor tyde på at forfatterne av denne boka er opptatt av at konverteringsprosessene er en stor del av det som skal testes, noe som stemmer overens med læreplanen i 1P. Det vil være interessant å se om det samme gjelder for eksamensoppgavene jeg har analysert i kapittel 4.4. Tabell 13 viser en oversikt over antall oppgaver som inneholder de ulike konverteringene, og hvor stor prosentandel det utgjør av de totalt 50 oppgavene.

Konvertering	**Antall (N=50)**	**Prosent**
SN	1	2,0 %
GN	7	14,0 %
NA	4	8,0 %
GS	31	62,0 %
SA	25	50,0 %
GA	34	68,0 %

Tabell 13: Oversikt over antall konverteringer for eksamensliknende oppgave i boka Sinus 1P

Tabellen ovenfor viser at det også for disse oppgavene er de tre konverteringene GS, SA og GA som er mest brukt. Konverteringene som inneholder bruk av numerisk tabell er også her lite representert. Den mest brukte konverteringen er også her GA, mellom graf og algebraisk uttrykk. Konverteringen GS, mellom graf og situasjon, er også mye brukt i disse oppgavene. Det kan tyde på at forfatterne av boka mener at disse konverteringene er viktig med tanke på en avsluttende test eller eksamen. En oppgave hentet fra oppgaver som skal løses med hjelpemidler av de eksamensliknende oppgavene i Sinus 1P er vist i figur 42. Denne inneholder de to mest brukte konverteringene GA og GS.


Oppgave 8.307

En funksjon I er gitt ved

$$I(x) = 36x^2 - 216x + 1300$$

a) Regn ut $I(2)$ og $I(4)$.

b) Tegn grafen til I. Velg x mellom 0 og 5.

Grafen kan brukes til å illustrere hvordan inntekten til en forretning har variert de siste fem årene. Inntekten per år er regnet i millioner kroner.

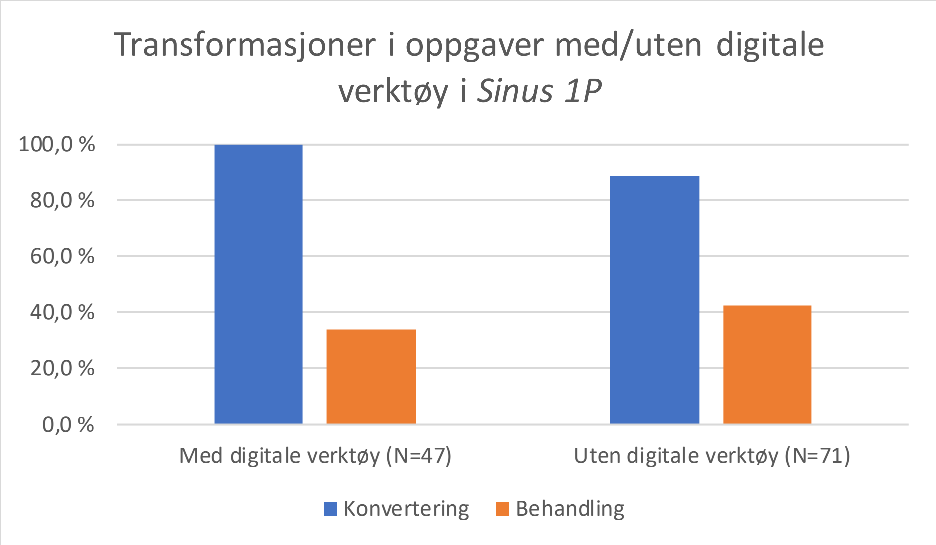
c) Finn grafisk når inntekten av salget var minst.
Hva var inntekten dette året?

Figur 42: Oppgave med de mest brukte konverteringene fra eksamensliknende oppgaver i Sinus 1P

I oppgaven vist ovenfor blir det presentert et uttrykk som beskriver funksjonen *I(x)*. Deloppgave a ber elevene regne ut funksjonsverdien for to verdier av *x*. De skal da bruke uttrykket for å finne verdien, og dette kategoriseres som en behandling. I deloppgave b skal elevene tegne grafen til *I* for noen bestemte *x*-verdier. De skal da bruke uttrykket presentert i oppgaven, så dette kategoriseres som konverteringen GA, fra algebraisk uttrykk til graf. Deloppgave c introduserer en situasjon som funksjonen beskriver, nemlig hvordan inntekten til en forretning har variert de fem siste årene. Elevene skal her finne når inntekten var minst, og hva inntekten var da, basert på grafen de tegnet i deloppgave b. Dette kategoriseres derfor som GS, konverteringen mellom graf og situasjon.

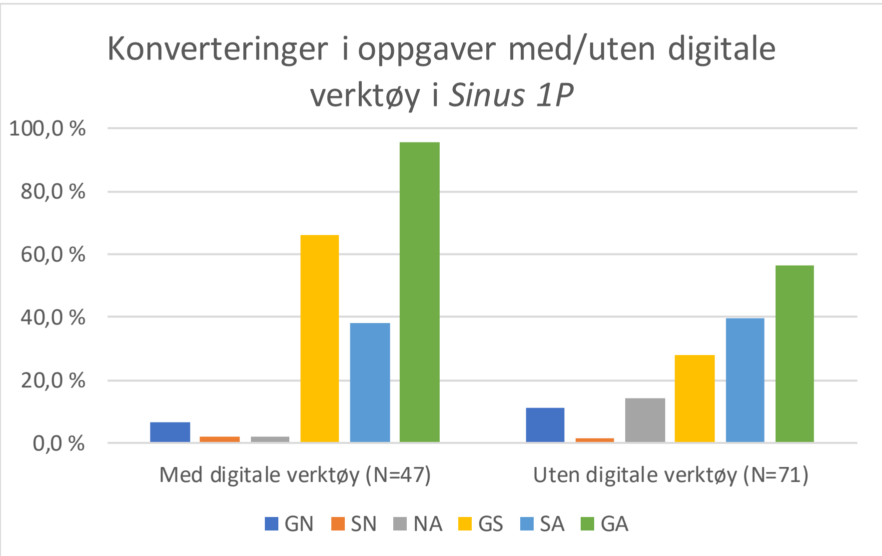
Oppgaver med digitale verktøy

Oppgavene om funksjoner i boka *Sinus 1P* kan fordeles mellom de som krever bruk av digitale verktøy (som GeoGebra) og de som ikke gjør det. Jeg vil nå se på hvordan oppgavene som skal løses med og oppgavene som skal løses uten digitale hjelpemidler fordeler seg mellom de to transformasjonene behandling og konvertering. Deretter vil jeg presentere hvilke konverteringer som er brukt i disse oppgavene. Figur 43 viser hvordan oppgavene som skal løses med eller uten digitale verktøy fordeler seg mellom de to transformasjonene. Jeg har her analysert alle oppgavene om funksjoner i Sinus 1P, totalt 118 oppgaver.



Figur 43: Oversikt over transformasjoner i oppgaver som skal løses med/uten digitale verktøy i boka Sinus 1P

I figuren ovenfor kan man se at oppgaver som skal løses ved hjelp av digitale verktøy inneholder lite bruk av behandling, og alle disse oppgavene inneholder minst en form for konvertering. Blant oppgavene som skal løses uten bruk av digitale verktøy inneholder også de fleste en form for konvertering, og en litt større andel av disse inneholder også behandling. Det tyder på at oppgaver som skal løses ved hjelp av digitale verktøy legger ekstra fokus på konvertering mellom ulike representasjonsformer, og det vil være interessant å se hvilke konverteringer som finnes blant disse oppgavene. Figur 44 viser en oversikt over hvor stor andel av oppgavene som skal løses med eller uten digitale verktøy som inneholder de ulike konverteringene.



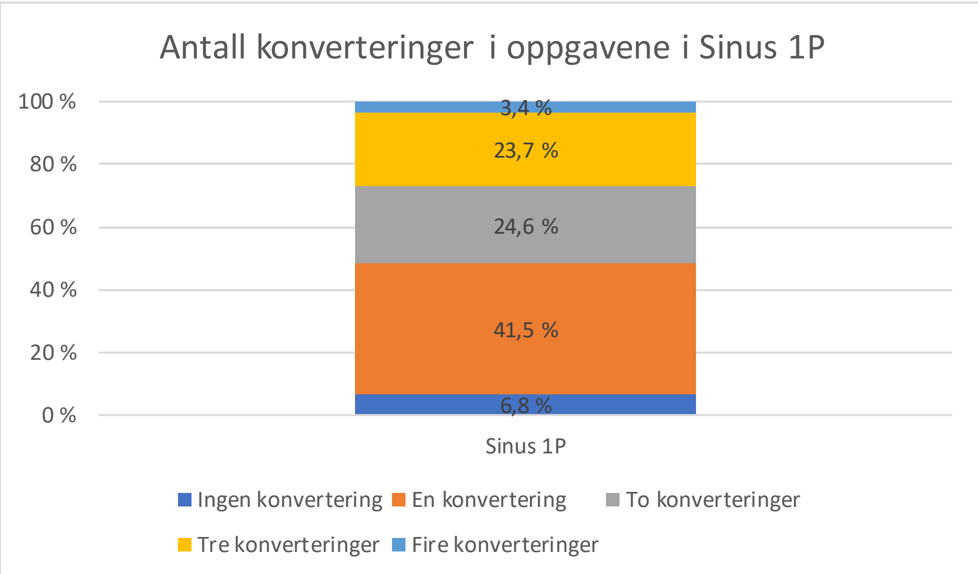
Figur 44: Oversikt over konverteringer i oppgaver som skal løses med/uten digitale verktøy i Sinus 1P

Til venstre i figuren ovenfor ser man hvor stor prosentandel av de 47 oppgavene som skal løses med digitale verktøy som inneholder de ulike konverteringene ifølge min analyse. Her er det et stort skille mellom hvilke konverteringer som er brukt i oppgavene. De tre konverteringene GN, SN og NA, altså de som er til eller fra en numerisk tabell er nesten ikke brukt i disse oppgavene. Konverteringen GA, mellom graf og algebraisk uttrykk, er brukt i nesten alle oppgavene. Konverteringen GS er også brukt i over halvparten av disse oppgavene, altså er disse to konverteringene typiske for oppgaver som skal løses med digitale verktøy i *Sinus 1P.* Konverteringen SA, mellom situasjon og algebraisk uttrykk er også brukt i ca. 40% av disse oppgavene.

Til høyre i figur 44 kan man se hvordan oppgavene som skal løses uten bruk av digitale verktøy fordeler seg mellom de ulike konverteringene. Det vises som en prosentandel av de 71 oppgavene som skal løses uten bruk av digitale verktøy. Blant disse oppgavene ser vi også at det er konverteringene GS, SA og GA som er mest brukt, men er ikke kontrasten like stor. En del av disse oppgavene inneholder også overgangene GN og NA, mellom graf og numerisk tabell og mellom numerisk tabell og algebraisk uttrykk. Nesten ingen av disse oppgavene inneholder konverteringen SN, mellom situasjon og numerisk tabell, som er den minst brukte konverteringen i hele boka.

Antall konverteringer

Oppgavene i kapittelet som omhandler funksjoner i *Sinus 1P* inneholder som nevnt ulikt antall konverteringer. Jeg vil nå se på hvor mange ulike konverteringer det er i disse oppgavene. En oversikt over dette er presentert i figur 45.



Figur 45: Oversikt over antall konverteringer i oppgavene om funksjoner i boka Sinus 1P

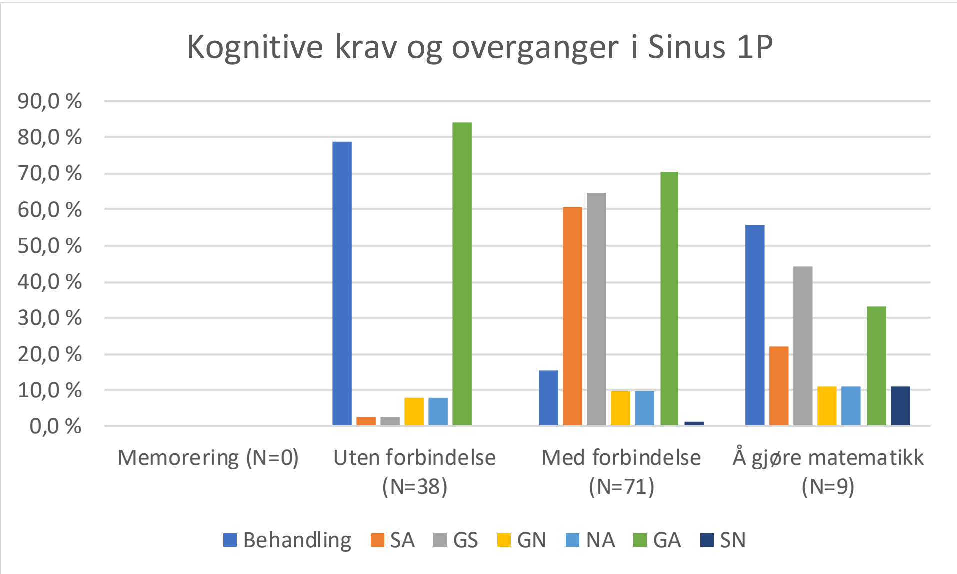
I figuren ovenfor kan vi se at de fleste av de analyserte oppgavene i *Sinus 1P* inneholder én type konvertering. Det er også en del av oppgavene som inneholder to eller tre konverteringer, og et fåtall som inneholder hele fire ulike konverteringer. Oppgaver med flere ulike konverteringer er ofte mer komplekse, og inneholder flere deloppgaver. Dette vil jeg se nærmere på i diskusjonsdelen.

4.3.3 Oppsummering av resultater for *Sinus 1P*

I boka *Sinus 1P* har jeg analysert totalt 118 oppgaver om funksjoner, der 68 av disse befant seg blant *oppgavene i kapittelet* og 50 blant *eksamensliknende oppgaver.* Innen kategorien kognitive krav har jeg sett at de fleste av oppgavene er kategoriser som «med forbindelse» eller «uten forbindelse», altså oppgaver som skal løses med prosedyrer på henholdsvis høyt og lavt kognitivt nivå. Oppgavene som er gitt sammen med teoridelen i boka, og oppgaver i første del av «øv mer», altså de lettere oppgavene er jevnt fordelt mellom høye og lave kognitive krav. Oppgavene i andre del av «øv mer», altså de vanskeligere oppgavene er for det meste kategorisert innen høye kognitive krav. Blant de eksamensliknende oppgavene er nesten alle kategorisert som «med forbindelse». Det er ingen av oppgavene innen funksjoner i denne boka som jeg har kategorisert som det laveste kognitive kravet, «memorering».

I hovedkategorien overganger har jeg i analysen av denne boka sett at det er tre konverteringer som dominerer, nemlig SA, GA og GS. Det er derimot lite bruk av de tre konverteringene til eller fra numerisk tabell. Bruken av overganger til og fra praktisk situasjon er også i denne boka mye brukt, noe som samsvarer godt med at det er oppgaver i faget 1P jeg har analysert, der det er viktig med praktisk bruk av matematikk. Det er også mange av oppgavene som går ut på å tegne graf basert på et funksjonsuttrykk, gjerne i sammenheng med å tolke verdier fra grafen eller uttrykket praktisk.

Av resultatene for *Matematikk 1P* så vi at det var sammenheng mellom bruken av situasjon i oppgavene og det kognitive kravet «med forbindelse». Oppgaver som ikke inneholdt bruk av situasjon var derimot ofte blant oppgavene i kategorien «uten forbindelse». Figur 46 viser en sammenheng mellom kategoriene kognitive krav og overganger for de analyserte oppgavene i *Sinus 1P.* Det er her vist hvilke overganger som finnes blant oppgavene som er kategorisert som de ulike kognitive kravene.



Figur 46: Oversikt over sammenhengen mellom kognitive krav og overganger i boka Sinus 1P

De to største kategoriene innenfor kognitive krav er som nevnt «uten forbindelse» og «med forbindelse». Dersom man ser på hvilke overganger som finnes blant oppgavene i disse to kategoriene er det et stort skille. Oppgavene i kategorien «uten forbindelse» inneholder mye bruk av behandling, og blant konverteringer inneholder over 80% av disse oppgavene konverteringen GA, og lite av de andre. Blant oppgaver i kategorien «med forbindelse» er det få oppgaver som inneholder behandling. For disse oppgavene er også konverteringen GA mye brukt, men her er også konverteringene SA og GS representert i over halvparten av oppgavene. Sammenhengen mellom kategorien «med forbindelse» og bruk av situasjon er altså tydelig også for oppgavene i denne boka.

Av de ni oppgavene i kategorien «å gjøre matematikk» inneholder fem bruk av behandling. Av konverteringer er det her GS som skiller seg ut, der fire av oppgavene inneholder denne konverteringen. Noen få av oppgavene inneholder også konverteringene SA og GA. Konverteringene GN, NA og SN er alle representert i én oppgave. Av de analyserte oppgavene i *Sinus 1P* er som nevnt ingen kategorisert som «memorering».

4.4 Resultater fra analyse av eksamensoppgaver

Som tidligere nevnt har jeg valgt å inkludere tidligere eksamensoppgaver i min analyse. Dette for å se om det er et stort skille mellom vanskelighetsgrad på oppgaver gitt til eksamen og oppgaver gitt i lærebøkene. Eksamensoppgavene er fra eksamener i 1P gitt de fire siste årene. Jeg har totalt sett på oppgaver fra åtte eksamener og valgt ut til sammen 30 oppgaver. Jeg har kun valgt å ta med oppgaver innen temaet funksjoner. Disse er fordelt mellom del 1 og del 2 av eksamen, så jeg har valgt å se på begge delene samtidig først, før jeg ser på dem hver for seg. Jeg vil i dette kapittelet først se på de kognitive kravene brukt i eksamensoppgavene, før jeg ser på de ulike overgangene og til slutt oppsummerer disse resultatene.

4.4.1 Kognitive krav

Kognitive krav er som vi nå vet delt inn i de fire kategoriene «memorering», «uten forbindelse», «med forbindelse» og å gjøre matematikk. Jeg vil her se på hvordan de utvalgte eksamensoppgavene fordeler seg mellom disse kategoriene. Tabell 14 viser en oversikt over antall oppgaver innen hver kategori og hvor stor prosentandel dette utgjør av oppgavene.

Kognitive krav	Antall (N=30)	Prosent
Memorering	0	0,0 %
Uten forbindelse	9	30,0 %
Med forbindelse	19	63,3 %
Å gjøre matematikk	2	6,7 %

Tabell 14: Oversikt over de ulike kognitive kravene i eksamensoppgavene

Fra tabellen ovenfor kan vi se at hele 19 av 30 oppgaver er kategorisert som «med forbindelse». Dette er altså oppgaver der elever tar i bruk prosedyrer, med et formål om å forbedre forståelse. I eksamenssammenheng kan dette ses som at det er formål om å teste forståelse. Ni av oppgavene er klassifisert som «uten forbindelse» og de to resterende er i kategorien «å gjøre matematikk». Det er altså ingen av eksamensoppgavene som er kategorisert som «memorering». Figur 47 viser en oppgave hentet fra eksamen høsten 2016.

Oppgave 7 (2 poeng)

Et firma som selger settepoteter, har lagt ut prislisten nedenfor.

Mengde	Pris
50 kg	350 kroner
100 kg	700 kroner
250 kg	1 750 kroner
400 kg	2 800 kroner

a) Vis at mengde og pris er proporsjonale størrelser.

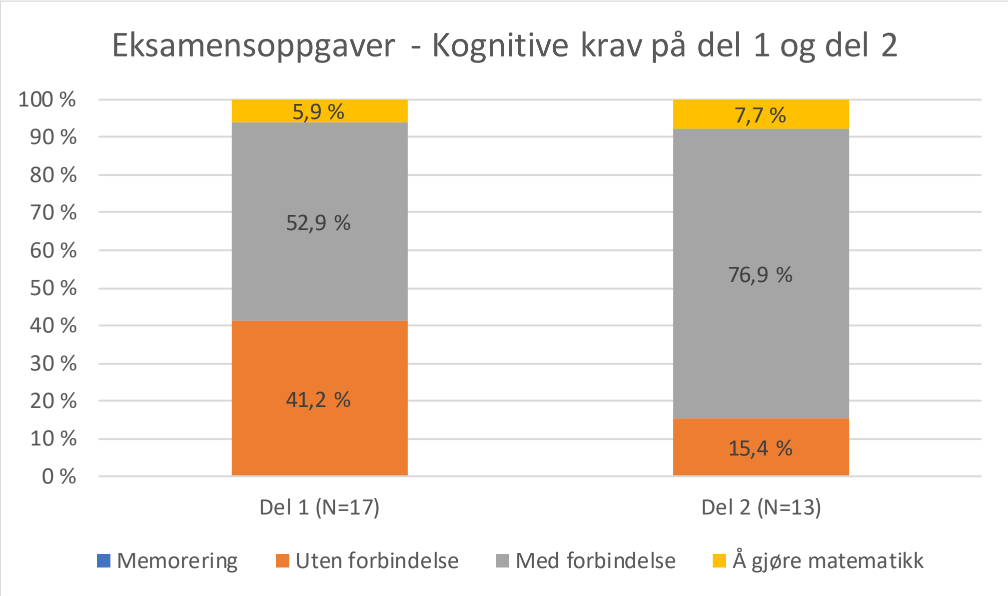
b) Sett opp en formel som viser sammenhengen mellom mengde og pris.

Figur 47: Oppgave i kategorien «uten forbindelse» hentet fra eksamen høsten 2016 (Marthinsen et al., 2019)

I oppgaven ovenfor blir det presentert en tabell som viser prislisten til et firma som selger settepoteter. I deloppgave a skal elevene vise at mengden poteter og prisen er proporsjonale størrelser. Dette krever at elevene vet hva som menes med proporsjonale størrelser, og at de klarer å sette opp denne sammenhengen for den gitte situasjonen. Deloppgave b ber elevene sette opp en formel som viser sammenhengen mellom mengde og pris. Her kan man vise prisen som en funksjon av mengden, eller motsatt. Denne oppgaven krever at elevene kan se sammenhengen mellom situasjonen og funksjonen den beskriver. Dersom elevene kjenner begrepet proporsjonale størrelser og prosedyren for å finne ut om størrelser er proporsjonale kan de løse oppgaven. Oppgaven krever ingen forklaring, og ingen dypere forståelse av meningen bak funksjonen som formelen beskriver, og denne oppgaven er derfor kategorisert som «uten forbindelse».

Del 1 og del 2

Eksamen i 1P er som nevnt delt inn i to deler. Del 1 skal løses uten hjelpemidler, og del to kan eller må løses ved hjelp av blant annet digitale hjelpemidler som graftegner. Jeg vil nå vise hvordan oppgavene på de to delene er kategorisert blant de kognitive kravene.

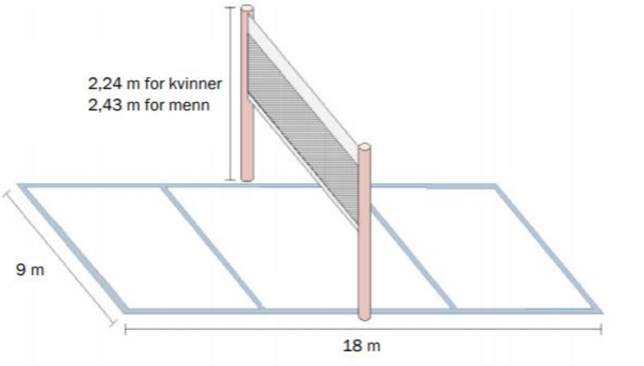


Figur 48: Kognitive krav på del 1 og del 2 av analyserte eksamensoppgaver

På del 1 av eksamen kan man se at de fleste av oppgavene er plassert i kategorien «med forbindelse». Her er det også mange oppgaver i kategorien «uten forbindelse» og det er en jevnere fordeling mellom høye og lave kognitive krav enn for oppgavene fra del 2. Blant oppgavene fra del 2 av eksamensoppgavene er hele 76,9% kategorisert som «med forbindelse». Det kan tyde på at på del 2 er det enda større fokus på forståelse og meningen bak prosedyrene som brukes enn på del 1. Jeg vil nå presentere en oppgave hentet fra del 2 av eksamen høsten 2018. Denne er vist i figur 49.

Oppgave 1 (6 poeng)

Skissen nedenfor viser en volleyballbane. Nettet står midt på banen. Når kvinner spiller kamper, skal høyden på nettet være 2,24 m, og når menn spiller kamper, skal høyden på nettet være 2,43 m.



En spiller slår en ball fra enden av sin banehalvdel og rett over mot den andre siden. Vi antar at ballen beveger seg parallelt med langsidene på volleyballbanen. Funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}07x^2 + 0{,}67x + 2{,}04 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvor mange meter $h(x)$ ballen vil være over bakken når den har beveget seg x meter horisontalt, dersom den ikke treffer på noen hindringer.

a) Hvor høyt over bakken er ballen idet spilleren slår den?

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til h for $0 \leq x \leq 12$

c) Hvor høyt over bakken vil ballen være på det høyeste?

d) Vil ballen gå over nettet?
Begrunn svaret ditt.

Figur 49: Oppgave hentet fra del 2 av eksamen i 1P høsten 2018 (Marthinsen et al., 2019)

I oppgaven vist ovenfor blir høyden over bakken på en ball som blir slått over et volleyballnett beskrevet som en funksjon av hvor langt ballen har beveget seg horisontalt. Dette er beskrevet gjennom en situasjon og et uttrykk for funksjonen. I deloppgave a skal elevene bestemme hvor høyt over bakken ballen er idet den blir slått av volleyballspilleren. Dette gjøres med utgangspunkt i uttrykket gitt i oppgaven, og krever at elevene forstår sammenhengen mellom uttrykket og situasjonen beskrevet. Deloppgave b ber elevene tegne grafen til funksjonen ved hjelp av graftegner. Dersom elevene kjenner prosedyren for å tegne grafer i graftegner kan de løse denne deloppgaven. Deloppgave c og d stiller spørsmål om hvor høyt ballen vil gå over bakken, og om den vil gå over nettet. Her kan elevene bruke grafen for å lese av toppunktet, videre må de vurdere situasjonen og ha innsyn i hva som skal til for at ballen går over nettet. De skal også begrunne svare i deloppgave d, altså må de kunne forklare sammenhengen mellom grafen og situasjonen noe som krever forståelse av meningen bak funksjonen. Denne oppgaven er på bakgrunn av dette plassert i kategorien «med forbindelse».

4.4.2 Overganger

Jeg vil nå se på resultatene fra kategorien overganger for de analyserte eksamensoppgavene. Jeg vil først presentere en samlet oversikt over alle oppgavene, før jeg ser på oppgaver fra del 1 og del 2 hver for seg. Som tidligere presenterer jeg først antall oppgaver som inneholder konverteringer og behandling, før jeg ser på hvilke konverteringer som er brukt i oppgavene. Til slutt vil jeg vise en oversikt over hvor mange konverteringer som finnes i eksamensoppgavene.

Tabell 15 viser en oversikt over antall oppgaver som inneholder konverteringer og behandling i de analyserte eksamensoppgavene, og hvor stor prosentandel dette utgjør av de totalt 30 oppgavene.

Transformasjon	Antall (N=30)	Prosent
Konvertering	30	100,0 %
Behandling	3	10,0 %

Tabell 15: Oversikt over antall oppgaver med konvertering og behandling i analyserte eksamensoppgaver

I tabellen kan man se at alle de analyserte eksamensoppgavene inneholder mist en type konvertering, og kun tre av de inneholder en form for behandling. Det er tydelig at fokuset i de analyserte eksamensoppgavene ligger på å kunne bruke ulike konverteringer mellom representasjonsformer for funksjoner. Dette er også noe som er nevnt i læreplanen i 1P, så det er viktig at dette blir testet. Jeg vil nå se på hvilke av de ulike konverteringene som er brukt i de analyserte eksamensoppgavene. Tabell 16 viser en oversikt over hvor mange oppgaver som inneholder de ulike konverteringene, og hvor stor prosentandel dette utgjør av de totalt 30 oppgavene.

Konvertering	Antall (N=30)	Prosent
SN	1	3,3 %
GN	4	13,3 %
NA	7	23,3 %
SA	12	40,0 %
GS	16	53,3 %
GA	17	56,7 %

Tabell 16: Oversikt over de ulike konverteringene i oppgavene i kapittelet funksjoner i de analyserte eksamensoppgavene

I tabellen ovenfor kan man se at det er tre konverteringer som skiller seg ut som de som blir mest brukt i oppgavene. Konverteringen GA er brukt mest, i hele 17 av oppgavene og konverteringen GS er brukt i 16 av oppgavene. Deretter følger konverteringen SA som er brukt i 12 av oppgavene. Det er altså de tre samme overgangene som er mest brukt i eksamensoppgavene som i de to lærebøkene. Konverteringene til og fra numerisk tabell er også her lite brukt, mest brukt av disse er konverteringen NA, mellom numerisk tabell og algebraisk uttrykk som er brukt i 7 av 30 oppgaver. Konverteringen mellom situasjon og numerisk tabell, SN, er kun brukt i én av oppgavene. Oppgaven vist i figur 50 er hentet fra del 1 av eksamen våren 2017 og inneholder de tre mest brukte konverteringene.

Oppgave 7 (2 poeng)

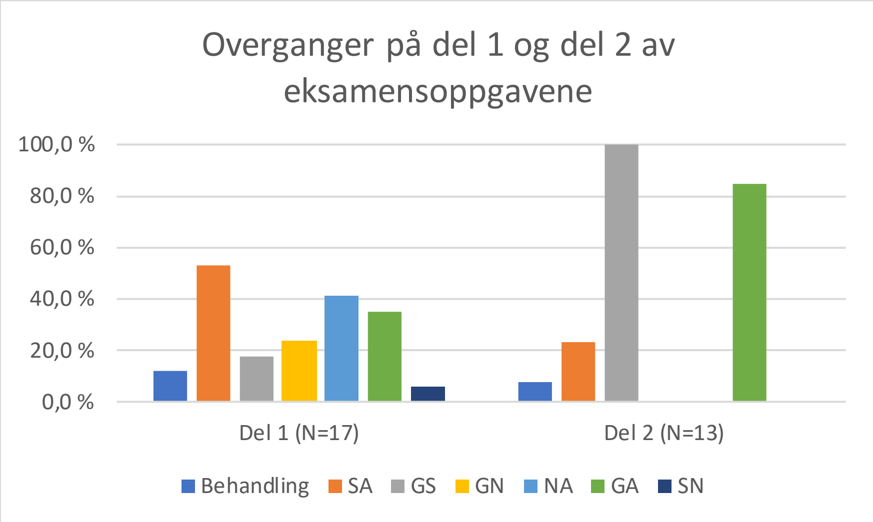
Gi et eksempel på en sammenheng fra virkeligheten som kan beskrives med en lineær funksjon. Bestem funksjonsuttrykket, og lag en skisse av grafen til funksjonen.

Figur 50: Oppgave med de tre konverteringene GS, SA og GA hentet fra eksamen våren 2017 (Marthinsen et al., 2019)

I oppgaven vist ovenfor skal elevene gi eksempel på en sammenheng fra virkeligheten som kan beskrives med en lineær funksjon. De skal så bestemme funksjonsuttrykket og lage en skisse av grafen til denne funksjonen. Oppgaven krever at elevene finner en funksjon som beskriver noe fra virkeligheten. Oppgaven krever at elevene forstår sammenhengen mellom de tre representasjonsformene algebraisk uttrykk, graf og situasjon. De velger så selv hvilke konverteringer som brukes når de skal bestemme funksjonsuttrykk og tegne graf, denne er derfor kategorisert som alle de tre konverteringene GS, SA og GA. Elevene må kunne se alle disse sammenhengene for å kunne løse denne oppgaven. I forhold til kognitive krav er denne kategorisert som «å gjøre matematikk», da den ikke foreslår noen prosedyre for elevene, men er åpen og krever at elevene utforsker sammenhenger og meningen bak funksjonen.

Del 1 og del 2

Eksamensoppgavene er som nevnt delt inn etter de som skal løses uten hjelpemidler (del 1), og de som kan eller må løses ved hjelp av blant annet digitale verktøy (del 2). Blant de analyserte eksamensoppgavene har vi sett at alle inneholder en form for konvertering, og kun tre inneholder behandling. Jeg har derfor valgt å presentere en samlet oversikt over antallet oppgaver på del 1 og del 2 av eksamensoppgavene som inneholder behandling og hvilke ulike konverteringer disse inneholder. Denne oversikten er vist i figur 51.

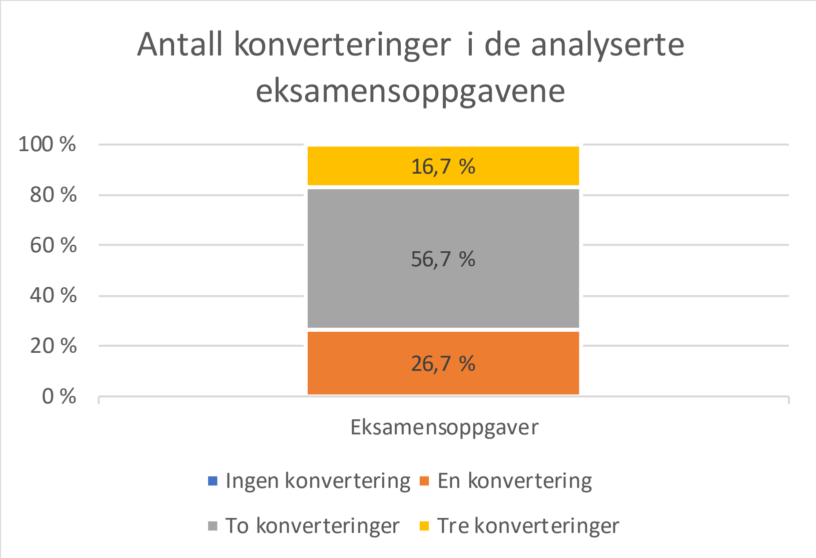


Figur 51: Oversikt over ulike typer overganger i eksamensoppgavene fra del 1 og del 2

I figuren ovenfor kan man se at oppgavene gitt på del 1 av eksamen fordeler seg ganske jevnt mellom de ulike konverteringene. Den mest brukte konverteringen blant disse oppgavene er SA, konverteringen mellom situasjon og algebraisk uttrykk. Etter denne er NA, konverteringen mellom numerisk tabell og algebraisk uttrykk, nest mest brukt. Dette er en konvertering som ellers er lite brukt både i eksamensoppgavene totalt sett og i de analyserte oppgavene fra lærebøkene. De andre konverteringene er mindre brukt blant disse oppgavene, og konverteringen SN er kun brukt i én av oppgavene. Ser man derimot på oppgavene fra del 2 av de analyserte eksamensoppgavene er det et klart skille. Her er konverteringen GS, mellom graf og situasjon, brukt i alle oppgavene, og konverteringen GA, mellom graf og algebraisk uttrykk, brukt i de aller fleste. Det er ellers få oppgaver som inneholder konverteringen SA, mellom situasjon og algebraisk uttrykk, og ingen som inneholder de andre konverteringene. Det er altså lagt veldig fokus på å kunne bruke konverteringene GS og GA i de analyserte oppgavene fra del 2 av eksamen.

Antall konverteringer

Jeg har tidligere presentert en oversikt over hvor stor andel av de analyserte oppgavene i lærebøkene som inneholder ulike antall konverteringer. Jeg vil nå gjøre det samme for de analyserte eksamensoppgavene. Oversikten over dette er presentert i figur 52.



Figur 52: Oversikt over antall konverteringer i analyserte eksamensoppgaver

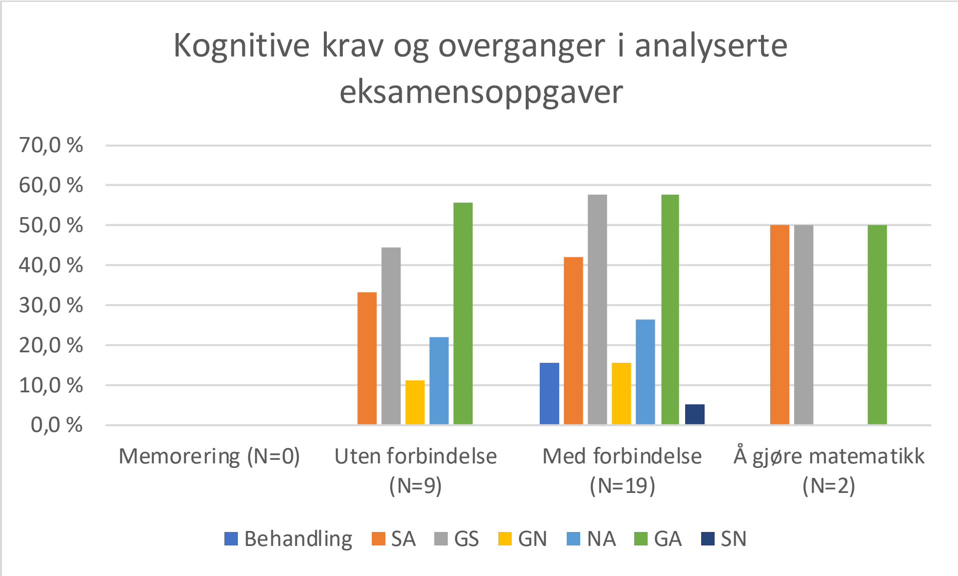
Figuren ovenfor viser at rett over halvparten av de analyserte eksamensoppgavene inneholder to konverteringer. 26,7% av oppgavene inneholder én konvertering og 16,7% inneholder tre konverteringer. Alle de analyserte eksamensoppgavene inneholder altså konverteringer, og de fleste av de inneholder to konverteringer slik at det er til sammen relativt mange konverteringer i eksamensoppgavene.

4.4.3 Oppsummering av resultater fra eksamensoppgaver

Oppgavene jeg har analysert fra tidligere eksamensoppgaver er som nevnt hentet fra åtte skriftlige eksamener gitt i løpet av de fire siste årene. Fra disse har jeg analysert totalt 30 oppgaver, 17 fra del 1 av eksamenene og 13 fra del 2. I forhold til kategorien kognitive krav har jeg sett at de fleste er plassert i kategorien «med forbindelse», noe som er ekstra tydelig blant oppgavene fra del 2. Det finnes også en del oppgaver plassert i kategorien «uten forbindelse» og to oppgaver i kategorien «å gjøre matematikk». Det er ingen av de analyserte eksamensoppgavene som er kategorisert som «memorering».

I kategorien overganger har jeg sett at alle oppgavene inneholder en form for konvertering, og kun tre en form for behandling. Mange av oppgavene går ut på å bruke konverteringene GA, GS og SA, og få inneholder bruk av konverteringer til eller fra numerisk tabell. Dersom man ser på del 1 for seg, er det derimot en del av disse som inneholder konverteringen NA, altså mellom numerisk tabell og algebraisk uttrykk. Blant oppgavene på del 2 er det et tydelig skille på hvilke konverteringer som er brukt, der konverteringene GS og GA er brukt i omtrent alle oppgavene, og de andre er mindre brukt.

Jeg har tidligere sett at for de analyserte oppgavene i de to lærebøkene har det vært sammenheng mellom oppgaver i kategorien «med forbindelse» og oppgaver som inneholder bruk av konverteringer til eller fra en situasjon. Det har også vert sammenheng mellom oppgaver i kategorien «uten forbindelse» og konverteringer som ikke går til eller fra en situasjon. Jeg vil nå se på sammenhengen mellom de ulike kognitive kravene og hvilke overganger som finnes blant disse for de analyserte eksamensoppgavene. Denne sammenhengen er vist i figur 53.



Figur 53: Oversikt over sammenhengen mellom kognitive krav og overganger for de analyserte eksamensoppgavene

I figuren ovenfor kan man se at oppgavene i kategorien «uten forbindelse» inneholder mest bruk av konverteringen GA. Det er her også mye bruk av konverteringene SA og GS, noe som står til kontrast fra resultatene fra de analyserte oppgavene i lærebøkene. Oppgaver i kategorien «med forbindelse» inneholder også mye bruk av konverteringene GA, GS og SA, og man kan se at fordelingen blant disse oppgavene og oppgavene i kategorien «uten forbindelse» likner veldig. Her er altså fordelingen mellom ulike typer konvertering veldig lik uavhengig om oppgaven er i kategorien «uten forbindelse» eller «med forbindelse». Av de to oppgavene i kategorien «å gjøre matematikk» kan vi se at de inneholder bruk av de tre konverteringene SA, GS og GA én gang, og ingen bruk av de andre konverteringene. I neste kapittel vil jeg som en del av diskusjonen foreta en sammenlikning av lærebøkene og eksamensoppgavene for å vurdere forskjellen i vanskelighetsgrad på disse oppgavene.

5 Diskusjon

I dette kapittelet ønsker jeg å trekke frem deler av resultatene fra analysen jeg mener er interessante for mine forskningsspørsmål. Mine forskningsspørsmål er:

- Hvilke kognitive nivåer blir elever utfordret på i lærebøkers oppgaver i Matematikk 1P?
- Hvordan er vanskelighetsgraden på oppgaver i lærebøker sammenliknet med oppgaver gitt på skriftlig eksamen i Matematikk 1P?
- Hvilke muligheter for rik forståelse av funksjoner i Matematikk 1P gir oppgaver i to utvalgte lærebøker?

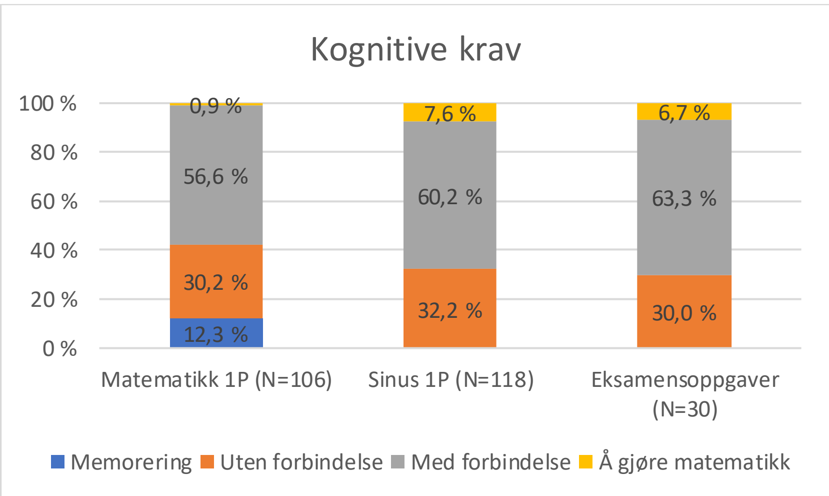
Dette har jeg valgt å undersøke gjennom å bruke en analysemodell presentert i kapittel 3.3. Denne går ut på å kategorisere oppgavene etter ulike kognitive krav, og ulike overganger. Jeg vil nå først presentere resultatene fra kategorien kognitive krav for alle de analyserte oppgavene samlet, og diskutere dette opp mot teorien presentert i kapittel 2, før jeg gjør det samme med kategorien overganger. Jeg ønsker å se om det er likheter eller forskjeller mellom oppgavene i de to lærebøkene, og mellom lærebøkene og eksamensoppgavene. Jeg vil så bruke dette til å diskutere hvilken betydning dette har i forhold til mine forskningsspørsmål. Spørsmålet om vanskelighetsgrad blir undersøkt gjennom å se på hvilke kognitive krav oppgavene stiller.

5.1 Kognitive krav

Den ene hovedkategorien jeg har bruk for å analysere oppgavene har jeg kalt kognitive krav. Denne er i hovedsak brukt for å kunne svare på spørsmål om oppgavene i lærebøkene gir utfordringer til elevene på ulike kognitive nivåer. De ulike kognitive kravene sier også noe om vanskelighetsgraden på oppgaver, noe jeg kan bruke til å sammenlikne vanskelighetsgraden på oppgavene i bøkene og på eksamen. Kognitive krav forteller også noe om hva slags type forståelse oppgavene gir mulighet for, slik at det delvis kan brukes til å si noe om hvorvidt oppgavene gir mulighet for en rik forståelse av funksjoner.

Alle analyserte oppgaver

Figur 54 viser en samlet oversikt over hvordan alle de analyserte oppgavene i lærebøkene og eksamensoppgavene er fordelt mellom de ulike kognitive kravene.



Figur 54: Oversikt over kognitive krav for alle analyserte oppgaver

Fra figuren kan man se at det er kun oppgaver i *Matematikk 1P* som er plassert i kategorien «memorering», altså oppgaver på det laveste kognitive nivået. Utenom dette er fordelingen veldig lik mellom de to bøkene og eksamensoppgavene. Blant de analyserte oppgavene har *Matematikk 1P* færrest oppgaver på høyt kognitivt nivå, spesielt i kategorien «å gjøre matematikk», der det kun er en oppgave. Fra boka *Sinus 1P* og eksamenssettene er det også få av de analyserte oppgavene i denne kategorien. Kategorien «med forbindelse» skiller seg ut som den største kategorien blant alle oppgavene, rundt 60% av de analyserte oppgavene i begge bøkene og i eksamensoppgavene er plassert i denne kategorien. Tilsvarende er rundt 30% av oppgavene i kategorien «uten forbindelse», den nest største kategorien.

Elevene får altså gjennom arbeid med oppgavene i begge disse bøkene mye trening i å bruke prosedyrer på høyt kognitivt nivå, altså oppgaver innen kategorien «med forbindelse». Dette er oppgaver der elevene skal bruke prosedyrer med et formål om å øke forståelse. I arbeid med slike oppgaver må elevene bruke de kognitive prosessene *anvende* og *analysere.* Å anvende går ut på å bruke prosedyrer til å gjøre oppgaver, både der prosedyren er kjent og der den ikke er det. Å analysere innebærer å kunne bryte opp informasjon i biter og bestemme hvordan bitene relateres til hverandre. Elever må kunne bestemme hvilke deler av en oppgave som er relevante, hvordan de er organisert og finne den underliggende meningen bak oppgaven for å kunne løse en oppgave som krever denne kognitive prosessen. Dette har sammenheng med det Kilpatrick (2001) beskriver som prosedyrekunnskap og strategisk kompetanse. Oppgaver i denne kategorien kan også bygge opp en konseptuell forståelse og evne til resonnering (se kap. 2.1). Slike oppgaver utgjør også en stor del av eksamensoppgavene jeg har analysert, så det kan se ut til at oppgavene i begge lærebøkene gir utfordringer på tilsvarende nivå som oppgavene på eksamen.

Den nest største kategorien blant de analyserte oppgavene i begge bøkene og eksamensoppgavene er «uten forbindelse». Oppgaver i denne kategorien krever som nevnt tidligere bruk av en prosedyre, men ingen kobling til meningen bak prosedyren. Fokuset i slike oppgaver er å få rett svar, ikke øke forståelsen. Det er her tydelig hvilken prosedyre elevene skal bruke, så slike oppgaver er en øvelse i å bruke prosedyren rett. Dette er en algoritmisk tilnærming og likner det Skemp (1976) beskriver som instrumentell forståelse som beskrives som regler uten mening. Slike oppgaver kan være nødvendig for å lære seg viktige prosedyrer, slik at man senere kan forstå meningen bak. Oppgavene kan altså gi delvis det Kilpatrick (2001) beskriver som prosedyrekunnskap, noe som senere kan brukes til å oppnå en konseptuell forståelse.

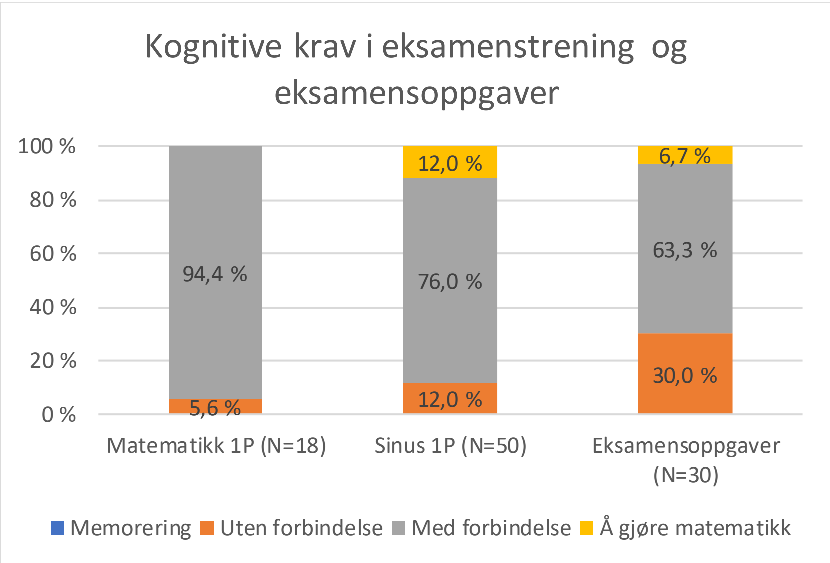
Sammenliknet med *Matematikk 1P* er fordelingen i *Sinus 1P* mer lik fordelingen i eksamensoppgavene, da denne boka inkluderer flere oppgaver i kategorien «å gjøre matematikk» og ingen i kategorien «memorering». Det er altså ingen oppgaver i denne boka som kun går ut på at elevene skal lære seg begreper, formler eller definisjoner uten bruk av prosedyrer. I boka *Matematikk 1P* er derimot 12,3% av de analyserte oppgavene plassert i kategorien «memorering». Disse er ofte gitt blant de første oppgavene i hvert delkapittel, og er brukt for å lære inn viktige begreper eller metoder som senere kan brukes i mer avanserte oppgaver. Dette gir kanskje en bedre inngang til emnet funksjoner for svakere elever.

Det er viktig å nevne at selv om en oppgave er kategorisert på høyt kognitivt nivå, kan ofte deler av den løses på lavere kognitivt nivå. De analyserte oppgavene inneholder ofte flere deloppgaver, der noen av deloppgavene kan løses med lavere kognitive krav enn andre. Det er derfor ikke slik at min fordeling av kognitive krav representerer fordelingen av arbeidsmengden på hvert kognitive krav. På eksamen er det også slik at elever får uttelling for å løse deler av en oppgave, slik at selv om mange oppgaver er i kategorien «med forbindelse» kan ofte deler av oppgavene løses på lavere kognitivt nivå og gi uttelling. Det er også slik at måten oppgavene blir presentert har noe å si for hvilket kognitivt krav den stiller til elevene. Stein og Smith (1998) beskriver som nevnt tre faser en oppgave går gjennom, som alle har betydning for hva eleven lærer av oppgaven (se kap. 2.4). Dersom en lærer forklarer prosedyren til en oppgave som i utgangspunktet er på nivået «å gjøre matematikk», vil den være på et lavere nivå, da elevene ikke lenger trenger å utforske og oppdage fremgangsmåter. Dette har jeg ikke tatt hensyn til i min kategorisering av oppgavene.

Jeg har sett at det er få oppgaver både på eksamen og i lærebøkene som befinner seg i kategorien «å gjøre matematikk». Oppgavene i lærebøkene gir ifølge min analyse ganske like utfordringer som oppgavene gitt til eksamen. Det kan allikevel diskuteres om dersom oppgavene likner i vanskelighetsgrad gir det gode muligheter for å gjøre det bra på eksamen. En oppgave i kategorien «å gjøre matematikk» gir gode muligheter for å oppnå god forståelse, men det er ikke nødvendigvis denne typen oppgaver som gis til eksamen. Man kan stille seg kritisk til om man skal undervise «for» eksamen, eller å bygge opp gode ferdigheter og god forståelse i faget.

Oppgaver i eksamenstrening

Om det er relevant å sammenlikne oppgavene i lærebøkene med eksamensoppgavene kan diskuteres. Oppgavene gitt i lærebøkene er gitt for å bygge opp elevenes forståelse innen emnet funksjoner, og samtidig forberede elevene på oppgaver som kan komme til en avsluttende test eller eksamen. Oppgavene gitt på eksamen er av en annen type, da disse kun skal teste elevers forståelse og vurdere elevens kompetanse opp mot kompetansemålene. Begge bøkene inneholder en oppgavedel med oppgaver som skal likne eksamensoppgaver, her kalt eksamenstrening. Disse fremstår som de mest relevante oppgavene i lærebøkene å sammenlikne med eksamensoppgavene, noe jeg har fremstilt i figur 55.

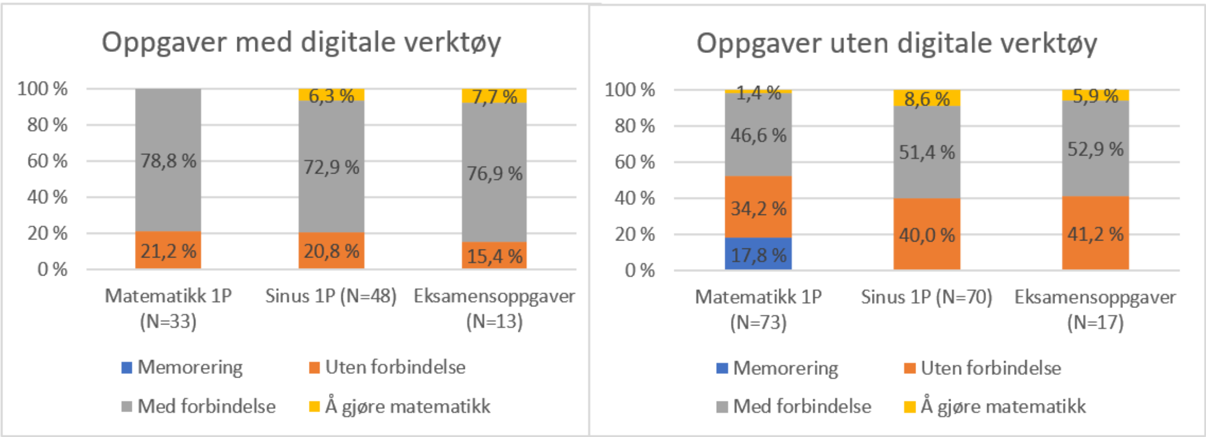


Figur 55: Oversikt over kognitive krav i oppgaver fra eksamenstrening i begge bøkene og analyserte eksamensoppgaver

I figuren kan man se at det er en stor andel av oppgavene i eksamenstreningen som er plassert i kategorien «med forbindelse». Denne forskjellen er meget synlig for oppgavene i boka *Matematikk 1P*. Det er viktig å legge merke til at det er mange flere oppgaver i denne delen i *Sinus 1P* enn det er i *Matematikk 1P* noe som kan gjøre at forskjellen blir enda større. Her er det heller ikke i *Matematikk 1P* noen oppgaver kategorisert som «memorering». I boka *Sinus 1P* finner vi her mange av oppgavene plassert i kategorien «å gjøre matematikk», det høyeste kognitive kravet. Oppgaver i kategorien «med forbindelse» kan som nevnt være med på å bygge opp en god forståelse for funksjoner, noe som gjør at man kan stille bedre rustet til eksamensoppgavene.

Oppgaver med og uten digitale verktøy

Oppgavene jeg har analysert i begge lærebøkene og i eksamensoppgavene kan som vi har sett deles inn etter de som skal løses uten og med digitale verktøy. På eksamen tilsvarer det som nevnt oppgaver som gis til henholdsvis del 1 og del 2. Figur 56 viser en oversikt over hvilke kognitive krav oppgavene som skal løses med digitale verktøy, og oppgavene som skal løses uten, er kategorisert som.



Figur 56: Oversikt over kognitive krav for oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy

I figuren ovenfor kan man se at oppgavene som skal løses med digitale verktøy for det meste er kategorisert som «med forbindelse» i begge bøkene og eksamensoppgavene. Her er altså de aller fleste oppgavene innen høye kognitive krav. Jeg har tidligere sett at oppgavene som skal løses med digitale verktøy inneholder mange konverteringer til eller fra representasjonen situasjon. Slike konverteringer har jeg sett har sammenheng med kategorien «med forbindelse», særlig blant oppgavene i lærebøkene.

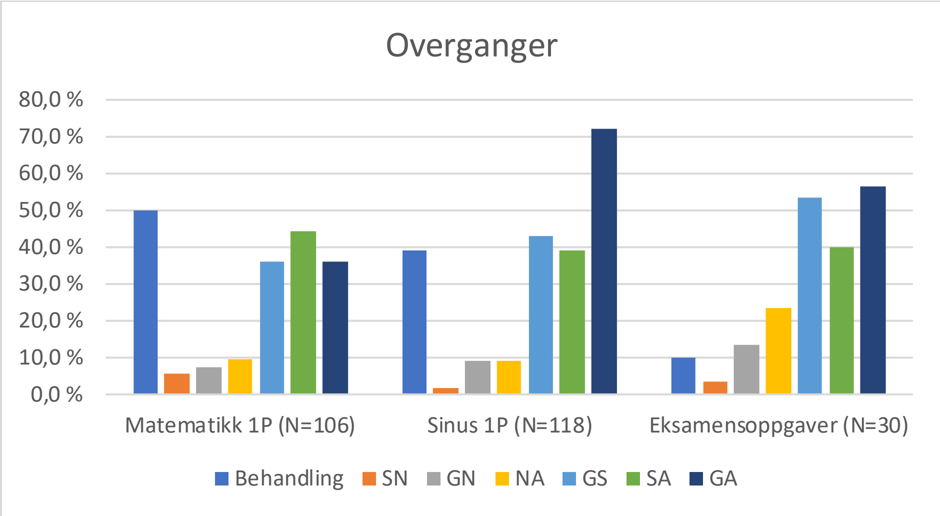
Blant oppgavene som skal løses uten digitale verktøy, er det flest i kategorien «med forbindelse» i begge bøkene og i eksamensoppgavene. Her er det derimot en jevnere fordeling mellom høye og lave kognitive krav, og relativt mange oppgaver i kategorien «uten forbindelse». *Matematikk 1P* skiller seg fra *Sinus 1P* og eksamensoppgavene ved at det her er oppgaver i kategorien «memorering» og omtrent lik fordeling mellom høye og lave kognitive krav. I *Sinus 1P* og eksamensoppgavene er det flest oppgaver innen høye kognitive krav også her, men kontrasten er ikke like stor som for oppgavene som skal løses med digitale verktøy. Oppgaver som skal løses med digitale verktøy stiller altså ofte høyere kognitive krav til elevene.

5.2 Forståelse av funksjoner

Et av forskningsspørsmålene mine går ut på å undersøke hvorvidt oppgavene i lærebøkene gir mulighet for en rik forståelse for funksjoner. Her har jeg tatt i betraktning hva som er skrevet i kompetansemålene for faget 1P, sammen med en teori for hva som gir god forståelse for funksjoner. Det var i teorien klart at det var viktig å kunne bevege seg mellom ulike representasjonsformer av funksjoner for å bygge opp en rik forståelse. I 1P legges det også fokus på praktisk betydning av funksjoner. På bakgrunn av dette er som beskrevet tidligere min andre hovedkategori i analysemodellen overganger. Denne kategorien går som nevnt ut på å kategorisere hvilke konverteringer som finnes i oppgavene, og om det er bruk av transformasjonen behandling.

Alle analyserte oppgaver

Figur 57 viser en oversikt over antall oppgaver som inneholder bruk av behandling og de ulike konverteringene blant alle de analyserte oppgavene.



Figur 57: Oversikt over overganger for alle analyserte oppgaver

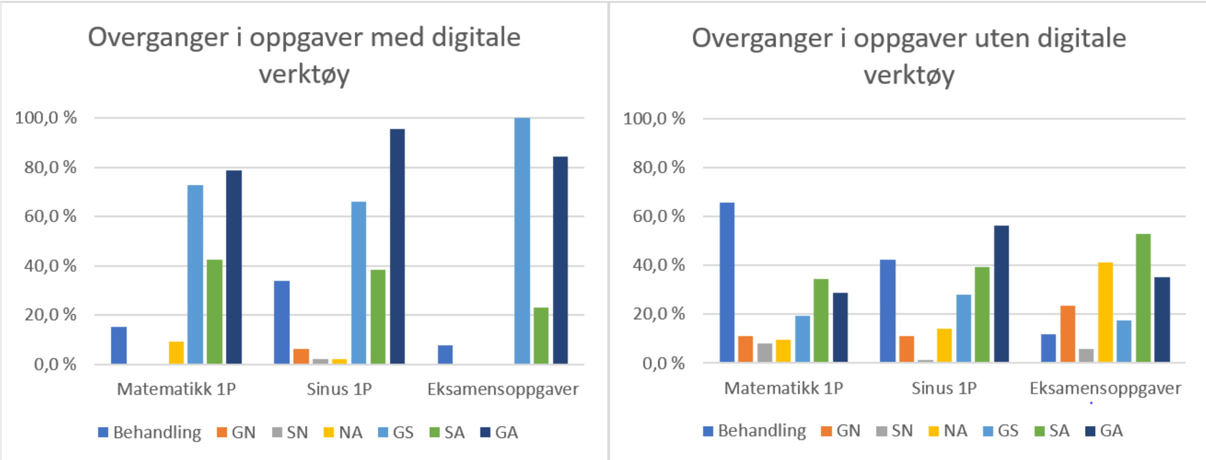
Som nevnt tidligere er de tre største kategoriene innen konverteringer GS, SA og GA, altså konverteringer mellom graf og situasjon, situasjon og algebraisk uttrykk, og graf og algebraisk uttrykk. Dette kan man se at gjelder for de analyserte oppgavene i begge lærebøkene og eksamenene i figuren ovenfor. Boka *Sinus 1P* skiller seg ut med at over 70% av oppgavene inneholder konverteringen GA, mot 35% av oppgavene i boka *Matematikk 1P.* Det er altså sterkt fokus på denne konverteringen blant oppgavene i *Sinus 1P,* allikevel er det omtrent like stor bruk av de andre konverteringene som i *Matematikk 1P.* Eksamensoppgavene inneholder også mye av konverteringen GA, og her skiller også konverteringen GS seg ut som mye brukt. Blant eksamensoppgavene er også konverteringen NA brukt i en større andel av oppgavene enn i oppgavene i lærebøkene. Det er også lite bruk av behandling i eksamensoppgavene i forhold til oppgavene i lærebøkene.

I begge lærebøkene har jeg tidligere sett at de aller fleste analyserte oppgavene inneholder minst én konvertering. I teorikapittelet ble det tydeliggjort at det å kunne bruke konverteringer mellom ulike representasjonsformer er essensielt for å få en rik forståelse av funksjoner. Det kan altså på bakgrunn av dette se ut til at begge bøkene har oppgaver som gir grunnlag for en rik forståelse av funksjoner. Det er også viktig å kunne bruke ulike konverteringer, noe jeg har sett at begge bøkene legger opp til. Begge bøkene har fokus på konverteringene GA, SA og GS, og lite bruk av konverteringer til og fra numeriske tabeller. Oppgavene i bøkene legger altså mye vekt på praktisk bruk av funksjoner, og mindre på tabeller som systematiserer spesifikke funksjonsverdier.

Jeg har valgt å analysere oppgaver brukt i faget 1P, altså praktisk matematikk. Det er derfor hensiktsmessig å se på om oppgavene som gis i lærebøkene og på eksamen tar hensyn til den praktiske delen av matematikken som faget skal. Dette står også spesifisert i læreplanen, som jeg presenterte i kapittel 2.2.3. Elevene burde på bakgrunn av dette jobbe en del med praktiske oppgaver. Praktiske oppgaver menes her som oppgaver som innebærer at man bruker matematikk i sammenheng med en praktisk situasjon. For å analysere hvor mange oppgaver innen funksjoner som er praktiske har jeg valgt å se på hvor stor andel av oppgavene som inneholder overganger til eller fra en situasjon som beskriver funksjonen. Det er ingen oppgaver som kun inneholder behandling innenfor representasjonen situasjon så dette vil inkludere alle oppgavene som her kalles praktiske. I forrige kapittel har jeg sett at de analyserte oppgavene i bøkene og eksamenene inneholder mye av konverteringene GS og SA, altså praktiske oppgaver. Dette samsvarer godt med kompetansemålene i 1P. De praktiske oppgavene har også særlig i lærebøkene sammenheng med de som er i kategorien «med forbindelse», altså høyere kognitive krav. Oppgaver i denne kategorien gir mulighet for en dypere forståelse enn de på lavere kognitive nivåer. Konverteringen SN er derimot lite brukt, noe Nitsch et al. (2015) også så i deres studie.

Oppgaver med og uten digitale verktøy

Jeg har tidligere sett at oppgaver som skal løses med og oppgaver som skal løses uten digitale verktøy inneholder ulik fordeling av konverteringer. I figur 58 har jeg samlet resultatene for kategorien overganger for oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy i begge bøkene og de analyserte eksamensoppgavene.

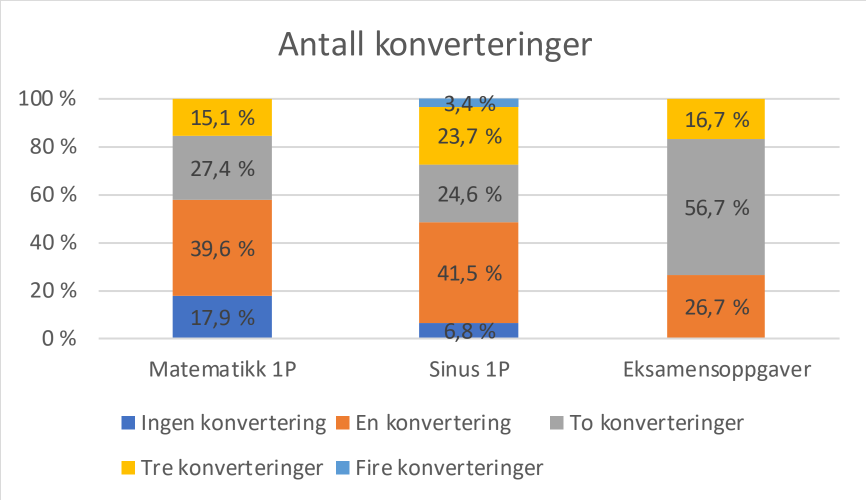


Figur 58: Oversikt over overganger for oppgaver som skal løses med og uten digitale verktøy

Som vist i figuren ovenfor er de to konverteringene GA og GS som er særlig mye brukt i alle de analyserte oppgavene som skal løses med digitale verktøy. Det kan tenkes at dette henger sammen med at det er det dynamiske verktøyet GeoGebra som skal brukes i disse oppgavene, da dette nettopp tegner grafer og kan være nødvendig når man har vanskelige funksjonsuttrykk. Som jeg har sett tidligere inkluderer ofte oppgaver som skal løses med digitale verktøy at man tegner en graf basert på et funksjonsuttrykk, for deretter å finne og tolke spesielle verdier på grafen praktisk basert på situasjonen funksjonen beskriver. Oppgavene som skal løses uten digitale verktøy har i de to lærebøkene en jevnere fordeling mellom ulike konverteringer. Her er det de tre konverteringene GA, GS og SA som er brukt mest, men ikke like mye som for oppgavene som skal løses med digitale verktøy. Ser vi på eksamensoppgavene derimot, er det to andre konverteringer som også er mye brukt, nemlig GN og NA. Disse er lite brukt i bøkene, så det kan se ut til at eksamensoppgavene har et litt annet fokus enn oppgavene i lærebøkene med tanke på konverteringer.

Antall konverteringer

Hvor mange av de analyserte oppgavene som inneholder minst én konvertering, som jeg har sett på tidligere, viser ikke det hele bildet av antallet konverteringer i oppgavene. Jeg har derfor tidligere også presentert oversikter over hvor stor andel av oppgavene som inneholder et bestemt antall ulike konverteringer. En samlet oversikt er vist i figur 59.



Figur 59: Oversikt over antall konverteringer i de analyserte oppgavene

De to lærebøkene har en ganske lik fordeling mellom antall ulike konverteringer i de ulike oppgavene. De fleste oppgavene inneholder én konvertering, en del inneholder to konverteringer og litt færre inneholder tre konverteringer. I boka *Sinus 1P* er det også noen få oppgaver som inneholder fire ulike konverteringer. I *Matematikk 1P* er det også en del oppgaver som ikke inneholder noen konverteringer. Utfra dette kan man se at begge bøkene inneholder mye bruk av konverteringer, noe som presisert tidligere er viktig for å bygge opp en god forståelse av funksjoner.

6 Avslutning

I dette kapittelet presenteres først en konklusjon med de svar masteroppgaven gir på forskningsspørsmålene. Jeg vil også kommentere hvilke konsekvenser dette har fra en lærers synspunkt, og hva man som pedagog kan dra nytte av fra denne studien. Til slutt vil jeg se tilbake på prosessen med å utføre denne studien og komme med oppfordringer til videre arbeid innenfor emnet denne studien dreier seg om.

6.1 Konklusjon

I denne studien har jeg prøvd å finne svar på følgende tre forskningsspørsmål:

- Hvilke kognitive nivåer blir elever utfordret på i lærebøkers oppgaver i Matematikk 1P?
- Hvordan er vanskelighetsgraden på oppgaver i lærebøker sammenliknet med oppgaver gitt på skriftlig eksamen i Matematikk 1P?
- Hvilke muligheter for rik forståelse av funksjoner i Matematikk 1P gir oppgaver i to utvalgte lærebøker?

Det første spørsmålet har jeg undersøkt gjennom å kategorisere oppgaver i boka *Sinus 1P* og *Matematikk 1P* etter hovedkategorien kognitive krav. I begge bøkene er det oppgaver som er gitt sammen med fagstoffpresentasjonen i de ulike delkapitlene. I tillegg er det en oppgavedel som skiller på enklere og vanskeligere oppgaver. Til slutt i kapitlene er det også oppgaver som likner eksamensoppgaver, og dette inkluderer noen tidligere eksamensoppgaver. Innen kognitive krav ble oppgavene plassert blant fire kategorier. Av de analyserte oppgavene er det kun noen oppgaver i boka *Matematikk 1P* som er i kategorien «memorering». Disse finnes blant oppgavene som står med fagstoffet, og de *enklere* oppgavene. Det er derimot kun én av de analyserte oppgavene fra denne boka som er i kategorien «å gjøre matematikk». De fleste oppgavene er enten i kategorien «uten forbindelse» eller i kategorien «med forbindelse», med flest i den sistnevnte. Av de analyserte oppgavene i *Sinus 1P* er derimot ingen i kategorien «memorering», men et fåtall er i kategorien «å gjøre matematikk». Oppgavene i begge bøkene er altså mye fokusert på å bruke prosedyrer, for det meste på høyt kognitivt nivå. Disse oppgavene legger ofte vekt på praktisk tolkning av funksjonene, noe som er sentralt i faget 1P. De gir også mulighet for en dypere forståelse for funksjoner, slik at elevene kan løse oppgaver som ikke nødvendigvis bærer preg av rutiner. Det er derimot få oppgaver på høyeste og laveste kognitive nivå, altså er det færre oppgaver for de veldig svake og få oppgaver der elevene må utforske sammenhenger på egenhånd. Dette samsvarer med hva Brändström (2005) fant i sin studie, nemlig at det på lave kognitive krav var fokus på å bruke prosedyrer, og at det var få oppgaver i kategorien «å gjøre matematikk».

Mitt andre spørsmål har jeg stilt blant annet med bakgrunn i at jeg har sett at skillet mellom standpunktkarakter og karakter på skriftlig eksamen i 1P har vært stort de siste årene. Dette kan ha mange grunner, men jeg har i denne studien undersøkt om det er stort skille mellom vanskelighetsgraden på oppgavene i lærebøkene og på skriftlig eksamen i 1P. Jeg finner at oppgavene gitt i lærebøkene likner mye på oppgavene gitt på tidligere eksamener med tanke på kognitive krav. De analyserte oppgavene i begge bøkene og eksamenene har flest oppgaver i kategorien «med forbindelse» og relativt mange i kategorien «uten forbindelse». Det er få oppgaver i kategoriene «memorering» og «å gjøre matematikk» blant de analyserte oppgavene. *Sinus 1P* har i likhet med eksamenene flere oppgaver som stiller høye kognitive krav sammenlignet med *Matematikk 1P.* Det er verdt å nevne at bøkene skal legge opp til et læringsforløp for å berike forståelsen, mens eksamen skal teste kunnskap eller forståelse opp mot kompetansemålene. Det er derfor naturlig at det finnes andre typer oppgaver i lærebøkene, men jeg har allikevel sett at de ligger på tilnærmet samme nivå som eksamensoppgavene. Begge bøkene inneholder også som nevnt oppgaver som likner eksamensoppgaver. Disse er ifølge min analyse i gjennomsnitt mer kognitivt krevende enn eksamensoppgavene, men har også flest oppgaver i kategorien «med forbindelse».

Det tredje forskningsspørsmålet går ut på å undersøke om oppgavene i lærebøkene gir mulighet for en rik forståelse av funksjoner. Jeg har sett at det i lærebøkene er mange av de analyserte oppgavene som går ut på å konvertere mellom ulike representasjonsformer for funksjoner. Dette er særlig viktig for å bygge opp en rik forståelse for begrepet funksjoner. Jeg har sett at de konverteringene som er mye brukt er mellom graf, situasjon og algebraisk uttrykk. Det er færre oppgaver i begge bøkene som inneholder konverteringer til eller fra en numerisk tabell. Dette samsvarer godt med kompetansemålene i faget 1P, som legger vekt på praktisk tolkning av funksjoner. Det kan på bakgrunn av dette virke som at oppgavene i begge lærebøkene gir mulighet for en rik forståelse av funksjoner, og at de legger fokus på det som står beskrevet i læreplanen. En rik forståelse i matematikk innebærer også å inneha de ulike forståelsestypene beskrevet av Kilpatrick (2001) (se kap. 2.1). Mange av de analyserte oppgavene i lærebøkene er kategorisert som det kognitive kravet «prosedyrer med forbindelse», som kan gi gode muligheter for å bygge opp både konseptuell forståelse, prosedyrekunnskap, resonnering og strategisk kompetanse. Kilpatrick snakker også om produktiv disposisjon som et av punktene som beskriver hva som skal til for å lære matematikk på en vellykket måte. Man må kunne se matematikken som fornuftig og verdifull, og ha tro på egen aktsomhet og effektivitet. Dette kan kanskje ikke oppgavene i seg selv bygge opp, men en oppgave som knytter matematikken til praktiske kunnskaper kan føre til dette.

6.2 Pedagogiske implikasjoner

I denne studien har jeg sett at det er forskjeller i hvor kognitivt krevende oppgaver i ulike lærebøker er. Det kan derfor som lærer være viktig å være bevisst på dette ved valg av lærebok. Dersom en lærebok man bruker inneholder lite oppgaver på høyt kognitivt nivå kan det være lurt å supplere med vanskeligere oppgaver for elever som trenger denne utfordringen. Til dette kan det for eksempel utnyttes andre ressurser knyttet til læreverkene, som deres nettsider. Tilsvarende gjelder om det er lite innhold av oppgaver på lavt kognitivt nivå. Det er også viktig å være bevisst på hvilken sammenheng oppgavene presenteres. Som forklart tidligere har både bokas og lærerens fremstilling av oppgavene mye å si for hvordan de fremstår for elevene. Dersom enten boka eller læreren for eksempel forklarer mye av en oppgave som i utgangspunktet kategoriseres som «å gjøre matematikk», kan det ødelegge hvilken grad elevene må utforske på egenhånd, og derfor blir oppgaven mindre kognitivt krevende. Det kan derfor være lurt å tenke over intensjonen med å gi oppgaven, slik at man ikke forklarer for mye eller for lite for elevene.

Som nevnt tidligere har jeg i denne studien sett at det er få av de analyserte oppgaver som blir kategorisert som «memorering» eller «å gjøre matematikk». Ifølge Opplæringsloven (1998, §1-3) er skolen pliktig til å tilpasse undervisningen til den enkelte elev. Som lærer bør man derfor ha innsikt i hvordan man kan tilpasse hvilke oppgaver man gir til elevene. Dersom det i bøkene ikke finnes oppgaver på lavt eller høyt nok nivå for eleven, bør man supplere med oppgaver slik at alle elevene kan få utfordringer på sitt nivå. Denne studien gir innsikt i nettopp hvor krevende oppgavene er, noe man som lærer kan bruke til å vurdere oppgavene man gir til sine elever. Jeg har også i denne studien sett at det er mye bruk av konverteringer mellom ulike representasjonsformer for funksjoner i oppgavene. Det er lagt vekt på noen av konverteringene i begge bøkene, og enkelte konverteringer er det veldig lite av. Det kan derfor være nødvendig å også supplere med oppgaver som bruker flere typer konverteringer, noe jeg også har sett kreves på eksamen.

6.3 Videre arbeid

For å gjennomføre denne studien har jeg måttet gjøre flere avgrensninger. Jeg valgte å undersøke oppgaver i to bestemte lærebøker, et utvalgt emne (funksjoner) og i et spesifikt fag på videregående skole (1P). Det finnes flere læreverk, så for å få en bedre forståelse for hvor krevende oppgavene er, eller hvor gode de er til å bygge opp forståelse kunne det vært interessant å undersøke oppgaver i flere læreverk. Det kunne også vært interessant å se på oppgavene i andre matematikkfag både på videregående skole og andre trinn. Jeg har også valgt å bare se på oppgavene i selve lærebøkene, men de finnes jo også flere oppgaver digitalt innen læreverkene og på andre nettsteder som kunne vært interessant å undersøke. I tillegg til dette har jeg kun undersøkt oppgaver innen temaet funksjoner. Det finnes mange andre temaer der man også kan undersøke oppgaver. Det finnes også mange andre måter å analysere eller kategorisere oppgaver, noe som kunne gitt bedre innsikt i mine eller andre spørsmål.

Jeg har valgt å kun se på oppgavene, og ikke på hvordan lærebøkene formidler teorien eller fremstiller eksempler. Det ville vært interessant å se på for å bedre kunne vurdere om lærebøkene totalt sett gir mulighet for en vid forståelse. Jeg har heller ikke sett på hvordan elevene løser oppgavene, men kategorisert oppgavene etter hvordan jeg tror de skal løses. Dette kunne blitt nøyere undersøkt ved å ta i betrakting elevers besvarelser. Det kunne også vært interessant å undersøke hvordan lærere bruker oppgavene i bøkene, og hvordan de blir presentert. Det har som nevnt mye å si for hvor kognitivt krevende oppgavene fremstår for elevene. Jeg har også sett spesielt på om vanskelighetsgraden på oppgavene gitt i lærebøkene skiller seg fra vanskelighetsgraden på oppgavene gitt på skriftlig eksamen i 1P. Det er veldig vanlig at elevene arbeider med tidligere gitte eksamener for å forberede seg til skriftlig eksamen, altså ikke bare oppgavene i lærebøkene. Det kan også være interessant å undersøke andre grunner til karakterskillet på skriftlig eksamen og standpunkt, og eventuelt også se hvordan dette er på muntlig eksamen.

Jeg har undersøkt oppgavene utfra de to hovedkategoriene *kognitive krav* og *overganger*. Det finnes mange andre måter å undersøke eller kategorisere oppgaver, noe som kunne gitt enda bedre innsikt i oppgavenes vanskelighetsgrad eller hvordan de gir muligheter for forståelse. Innen kategorien kognitive krav har jeg valgt å kategorisere hver oppgave som ett type krav. Deler av oppgavene kan som nevnt ofte løses ved lavere kognitive krav, så en mulighet kunne vært å se på hver enkelt deloppgave slik at man kan få en bedre oversikt over hvor stor del av arbeidsmengden som er på de ulike kognitive kravene. I kategorien overganger har jeg valgt å se på behandling generelt, altså ikke skilt på behandling av de ulike representasjonsformene. Jeg har også valgt å bare telle hver ulik konvertering én gang om den brukes flere ganger i samme oppgave. Dersom jeg skulle gjentatt dette ville jeg nok valgt å skille på ulike typer behandling og telle opp totalt antall ganger hver konvertering er brukt for å få en bedre oversikt over hvor stor del av arbeidsmengden i oppgavene elevene bruker på de ulike overgangene.

Det er verdt å nevne at det skal innføres en ny læreplan i 2020. Det vil også komme nye læreverk som skal følge denne planen. Det ville derfor i en framtidig studie være interessant å undersøke oppgavene i de nye læreverkene, og se hva som eventuelt skiller disse fra oppgaver i nåværende læreverk. I den nye læreplanen legges det sterkt fokus på dybdelæring. Jeg har i denne studien sett at de analyserte oppgavene i lærebøkene kan legge et godt grunnlag for dybdelæring, da mange er av typen «med forbindelse». Det vil være interessant å senere kunne undersøke hvilke konsekvenser den nye læreplanen har for oppgavene som kommer i de nye læreverkene og oppgavene gitt til eksamen.

7 Referanseliste

Ainsworth, S., Bibby, P. & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25-61.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., … Wittrock, M. C. (Red.). (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives* (Complete Edition. utg.). New York: Longman.

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. Vol. 1: Cognitive domain. *New York: McKay*, 20-24.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* Oxford university press.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* Luleå tekniska universitet.

Damm, C. (2014). Sinus 1P. Hentet 01.04.2019 fra https://sinus-1p.cappelendamm.no/

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Hals, S. (2010). *IKT i matematikkopplæringen-tidstjuv eller tryllemiddel?: en studie av faktorer som kan påvirke bruken av IKT generelt og GeoGebra spesielt hos lærere og elever på 10. og 11. årstrinn* Universitetet i Agder: University of Agder.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 1P* (3. utg.). Oslo: Aschehoug.

Hole, A. & Grønmo, L. S. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMMS Advanced og andre internasjonale studier* Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).

Hollar, J. C. & Norwood, K. (1999). The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 220-226.

Holmen, H. (2017a). Kunnskap. I *Store norske leksikon*. Store norske leksikon. Hentet fra https://snl.no/kunnskap

Holmen, H. (2017b). Teorier om kunnskap. I *Store norske leksikon*. Hentet fra https://snl.no/teorier_om_kunnskap

Imsen, G. (2015). *Elevens verden* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 27*, 32.

Jelstad, J. (2016). Over 6 av 10 lærere i grunnskolen velger papir. *Utdanningsnytt*. Hentet fra https://www.utdanningsnytt.no/nyheter/2016/mai/over-6-av-10-larere-i-grunnskolen-velger-papir/

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 101-116. https://doi.org/10.1023/a:1017973827514

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping students learn mathematics. I: Washington, DC: National Academy Press.

Kjøll, G. & Tranøy, K. E. (2018). Kognitiv. I *Store norske leksikon*. Hentet fra https://snl.no/kognitiv

Kunnskapsdepartementet. (2018). *KJERNEELEMENTER I FAG* Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 129-156.

Marthinsen, K., Hagen, J. E. & Baggethun, P. (2019). Matematikknet DA - 1P Hovedside. Hentet 02.04.2019 fra https://matematikk.net/side/1P_Hovedside

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2015). STUDENTS' COMPETENCIES IN WORKING WITH FUNCTIONS IN SECONDARY MATHEMATICS

EDUCATION—EMPIRICAL EXAMINATION OF A COMPETENCE STRUCTURE MODEL. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 657-682. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9496-7

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2014). *Sinus matematikk : 1P : lærebok i matematikk for vg1 : studieforberedende program* (3. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Opplæringsloven. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Hentet fra https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61

Rezat, S. & Straesser, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 247-266.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM, 44*(5), 641-651. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0448-4

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Svingen, O. L. & Gilje, Ø. (2018). Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk. Hentet fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-1p-%E2%80%93-vg1-studieforebuande-utdanningsprogram

Utdanningsdirektoratet. (2015). Revidert eksamensordning i matematikk. Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2017a). Overordnet del - Verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Hentet 13.03 2019 fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Utdanningsdirektoratet. (2017b). Rammeverk for eksamen. Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/rammeverk-eksamen/

Utdanningsdirektoratet. (2018). Kvalitetskriterier for læremidler i matematikk (for lærere). Hentet 21.02 2019 fra https://reflex.udir.no/egenvurdering/egenvurderingstema/Laerer/68/innhold

Utdanningsdirektoratet. (2019). Karakterstatistikk for videregående skole. Hentet 13.02 2019 fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-videregaende-skole/karakterer-vgs/?rapportsideKode=VGO_VGOkarakterer&filtre=EierformID(-10)_EnhetID(-12)_FagID(-12_3175)_KarakterTypeID(1_3)_KjoennID(-10)_TidID(201406_201506_201606_201706_201806)_UtdanningsprogramvariantID(-10)_VisAntallElever(1)_VisKarakterfordeling(0)&radsti=F!(3175)_(*)_(3175.*)

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere.