Universitetet i Agder

Hva karakteriserer S1-elevers algebraiske og grafiske løsninger av ulikheter?

En kvalitativ studie av en S1-klasses arbeid med lineære og kvadratiske ulikheter.

KRISTIN LANDE DAHLSTRØM

VEILEDERE
Hans Kristian Nilsen
Linda Gurvin Opheim

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk har foregått over en toårsperiode. Jeg har arbeidet flere år som lærer ved videregående skole, og fikk mulighet til å ta masterstudie i et fag jeg som jeg opplever som spennende og utfordrende. Prosessen har vært tidkrevende og samtidig lærerik fordi den har gitt meg fornyet innsikt og kunnskap om undervisning i matematikk. Når jeg nå er ved veis ende, ønsker jeg å rette en takk til de som har hjulpet meg på reisen.

Først og fremst vil jeg takke veilederne mine, Hans Kristian Nilsen og Linda Gurvin Opheim som har fulgt meg gjennom prosessen. Takk for konstruktive tilbakemeldinger og tålmodighet. Takk for god veiledning og faglige råd.

Takk til administrasjon og ledelse ved arbeidsplassen min som har latt meg få bruke tre år på studier, og som på alle måter har lagt til rette for å gjøre hverdagen så god som mulig. Jeg vil også takke faglærer (og min gode kollega) som la til rette slik at undersøkelsen kunne gjennomføres i hennes klasse og til elevene som var villige til å delta.

Takk til gode tante som har hatt åpen dør for meg i Kristiansand. Jeg takker min kjære Børge og de tre barna våre som har måttet tåle at mamma har brukt mange timer på kontoret og på reising til Kristiansand disse årene.

Til slutt et livsmotto fra en tidligere mattelærer, kollega og mentor, et stort forbilde som nå er pensjonist: En fornuftig måte å ære Skaperen på er alltid å gjøre sitt beste så langt evner og innsatsvilje rekker.

Lyngdal, mai 2019

Kristin Lande Dahlstrøm

Sammendrag

Formålet med studien er å få innsikt i hva som karakteriserer elevers løsningsmetoder og løsninger når de arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter. Det er rettet et spesielt fokus på hvordan elevene bruker grafisk og algebraisk tilnærming til ulikhetene og hva som karakteriserer løsningene deres ved disse tilnærmingene.

Matematiske ulikheter kan representeres som for eksempel algebraiske uttrykk, grafer og tallinjer. Duvals (1999, 2006) teori om representasjoner og registre blir relevante som teoretisk bakgrunn, og jeg gir spesielt en presentasjon av hvordan Sackur (2004) anvender hans teori inn mot grafisk løsning av ulikheter. Annen didaktisk forskning på matematiske ulikheter, spesielt fra Tsamir og Halmaghi, setter fokus på både misoppfatninger og mulige årsaker til disse, og dette er også relevant i forhold til oppgavens og forskningens tema.

Studien har et kvalitativt design der empiri er samlet i en klasse med 16 S1[1]-elever i en norsk videregående skole. Datainnsamlingen har foregått i to omganger. Første delen innebærer lydopptak av elevarbeid i grupper med et egenprodusert oppgavehefte som inneholdt lineære og kvadratiske ulikheter. Halvparten av oppgavene skulle løses algebraisk (ved regning) mens den siste halvdelen skulle løses grafisk. I etterkant intervjuet jeg en elev fra hver gruppe der vi gikk mer i dybden på oppgavene og besvarelsene deres. Det samlede datamaterialet bestod dermed av 16 elevhefter, lydopptak fra gruppearbeid og intervjuer. Analysen har fokus på hva som er karakteristisk når elevene arbeider med ulikhetene algebraisk og grafisk.

Studien bidrar til å belyse feil og misoppfatninger elevene kan av ulikheter og hvilke utfordringer de møter når de arbeider med ulikhetene i ulike semiotiske registre. Resultatet viser at elever har misoppfatninger knyttet til ulikheter både med tanke på hvordan de skal notere løsninger og betydningen av tegnene de bruker. Det mest fremtredende i elevenes algebraiske tilnærming var å behandle andregradsulikhetene som om de var likninger og at elevene trakk konklusjoner om løsninger basert på kunnskapen de hadde om likninger. Det virket også som om elevene hadde problemer med å løse ulikheter som ikke hadde løsning, eller der løsningen bestod av alle reelle tall. Disse problemene gjaldt for både algebraisk og grafisk tilnærming. Ut fra dette stiller jeg spørsmål ved om elevene egentlig har forstått at å løse en ulikhet handler om å finne verdier for variabelen som gjør utsagnet sant.

Få elever klarte å løse ulikhetene grafisk. Samtidig fant jeg at tre elever som behersket grafisk tilnærming til ulikhetene fant korrekte løsninger der algebraisk løsningsmetode førte dem til feil konklusjon. Funnene antyder at dersom elevene får opplæring i å kombinere algebraisk gitte ulikheter med grafer, har de større muligheter til å finne korrekte løsninger på ulikheter.

[1] Matematikk S1 «Matematikk for samfunnsfag», et programfag for elever i sitt andre år på videregående skole

Summary

The purpose of the study is to gain insight into what characterizes students' solution methods and solutions when dealing with linear and quadratic inequalities. A special focus is on how students use graphical and algebraic approaches to inequalities and what characterize their solutions through these approaches.

Students face different representations when dealing with mathematical inequalities in the form algebraic expressions, graphs and number-lines. Duval's (1999, 2006) theory of representations and registers is central here, and I especially give a presentation of how Sackur (2004) uses his theory when approaching inequalities graphically. Didactic research on mathematical inequalities, particularly from Tsamir and Halmaghi, focuses on both misconceptions and possible causes of these, and this is also relevant to the theme of my task and research.

The study has a qualitative design where empiricism is assembled in a class of 16 S1[2] students in a Norwegian high school. The data collection has been carried out in two ways. The first part contains audio recordings of student work in groups with a self-produced task booklet containing linear and quadratic inequalities. Half of the tasks should be solved algebraically while the last half should be solved graphically. In the aftermath, I interviewed a student from each group where we went into more depth on the tasks and their answers. The aggregate data was thus comprised of 16 student booklets, audio recordings from group work and interviews. The analysis focuses on what is characteristic when students work with the inequalities algebraically and graphically.

The study helps to illuminate the mistakes and misconceptions students can have of inequalities and the challenges they face when operating in different semiotic registries. The result shows that pupils have misconceptions related to inequalities both in terms of how to write solutions and the meaning of the signs they use. The most prominent in students ' algebraic approach was to treat the quadratic inequalities as if they were equations and that students drew conclusions about solutions based on the knowledge they had about equations. It also seemed like students had problems resolving inequalities that had no solution or where the solution consisted of all real numbers. These problems appeared in both algebraic and graphic approaches. From this I question whether students have really understood that resolving an inequality is about finding values for the variable that makes the statement true.

Few students were able to solve the inequalities graphically. At the same time, I found that three students found correct solutions graphically where the algebraic solution method led them to the wrong conclusion. The findings suggest that if students are trained to combine algebraic-given inequalities with graphs, they have greater opportunities to find correct solutions to inequalities

[2]Mathematics S1 "Mathematics for Social Sciences", a program for students in second year of high school

Innhold

1 Innledning

Jeg har arbeidet flere år som lærer i videregående skole. De siste årene har jeg blitt særlig oppmerksom på hvordan ulike representasjoner kan brukes i matematikk, og hvordan disse kan være både en øyeåpner, men også en utfordring for elevene. Våren 2017 kom jeg over en artikkel av Tsamir med flere (Pessia Tsamir, Almog & Tirosh, 1998). Forfatterne beskriver hvilke løsningsstrategier 16-17-åringer i Israel velger i møte med blant annet lineære, kvadratiske og rasjonale ulikheter. Artikkelen konkluderer med at elevene brukte både tallinjer, grafer og algebraiske manipuleringer i løsningsmetodene. Forfatterne mener å kunne se at elever som brukte grafer eller andre visuelle tilnærminger, oftere fant riktig løsning enn elevene som brukte rene algebraiske metoder. Det avsløres også at elevene har flere misoppfatninger knyttet til ulikheter.

Mine erfaringer er at selv om elever klarer å løse likninger, har de ofte problemer med å løse ulikheter, spesielt når de møter andregradsulikheter. Våren 2017 gjennomførte en medstudent og jeg en undersøkelse i en S1-klasse. Elevene var andreklassinger på videregående skole og hadde valgt matematikk som et av fagene de ville fordype seg i. De ble bedt om å løse lineære og kvadratiske ulikheter både grafisk og ved regning (algebraisk). Resultatet viste at de aller fleste elevene hadde problemer med å løse andragradsulikheter algebraisk. Et annet resultat var at bare to av de 20 elevene klarte å bruke grafene til å finne korrekte løsninger. Uten å legge for stor vekt på denne undersøkelsen, har den likevel vært med på å forme retningen for denne masteroppgaven. Tanker som «Hvorfor er andregradsulikheter så vanskelige for elevene?» og «Hvordan bør jeg undervise om ulikheter?» gav motivasjon til å fordype meg ytterligere i temaet.

Ulikheter spiller en vesentlig rolle innenfor flere områder i matematikk som algebra, analyse, geometri og utforskning av funksjoner (Luciana Bazzini & Tsamir, 2003; Pessia Tsamir et al., 1998). Almog og Ilany siterer George Polya som på et symposium om ulikheter skal ha sagt at «Inequalities play a role in most branches of mathematics and have widely different applications.» (Almog & Ilany, 2012, side 348). Til tross for dette, har ulikheter relativt liten plass i forskning (Pessia Tsamir & Bazzini, 2004; Verikios & Farmaki, 2010). Verikios hevder at «det er forsket nok på likninger, det samme er ikke tilfellet med ulikheter» (Farmaki & Verikios, 2008, side 515, min oversettelse). Også nyere forskning hevder at det er forsket lite på ulikheter «… little attention is devoted to inequalities compared to the concept of equation» (Espeland 2017 side 109).

Elevene kan bruke ulike representasjoner og løsningsmetoder når de arbeider med ulikheter, der algebraisk og grafisk metode er vanligst. Ofte er ulikheter plassert som et undertema av likninger, og dermed blir gjerne en algebraisk løsningsmetode vektlagt (Boero & Bazzini, 2004). Tsamir antydet i sin artikkel at en grafisk tilnærming oftere gav elevene riktig løsning (Tsamir 1998). Andre studier har vist at funksjoner og ulikheter også gir elevene utfordringer (Farmaki & Verikios, 2008; Sackur, 2004). Halmaghi har i sin doktoravhandling fra 2011 prøvd å finne ut hvorfor ulikheter er så vanskelig for studenter, og å kartlegge hva slags oppfatninger de har av ulikheter (Halmaghi, 2011). Selv om flere forskere har sett på hvordan elever løser ulikheter, har jeg ikke funnet noen som har sett på hvilke utfordringer norske elever i videregående skole møter. Denne studien vil kunne bidra til å kaste lys over S1-elevenes løsninger og løsningsmetoder i arbeidet med ulikheter, hvilke misoppfatninger de har av ulikheter og om det finnes en sammenheng mellom disse.

1.1 Forskningsspørsmål

Studien har som formål å karakterisere løsningene og løsningsmetodene til en klasse med 16 S1-elever når de arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter. Jeg ønsker å finne ut hvordan de arbeider med ulikhetene både algebraisk og grafisk. Forskningens fokus kan dermed oppsummeres i følgende spørsmål:

> Hva karakteriserer S1-elevenes grafiske og algebraiske løsninger og løsningsmetoder når de arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter?

I forskningsspørsmålet står algebraisk og grafisk løsningsmetode sentralt. Elevene møter ulike representasjoner når de arbeider med matematikk i form av både algebraiske uttrykk, grafer og tabeller. Duvals teori om matematiske representasjoner og registre står sentralt her, og jeg gir spesielt en presentasjon av hvordan Sackur (2004) anvender hans teori inn mot grafisk løsning av ulikheter. Denne teorien brukes jeg i analyse og drøfting av egen empiri. Annen didaktisk forskning på matematiske ulikheter setter fokus på både misoppfatninger og mulige årsaker til disse, og disse er også relevante i forhold til forksningsspørsmålet.

Jeg har valgt å fokusere på lineære og kvadratiske ulikheter fordi disse er nevnt spesifikt i kompetansemålene for matematikk S1. Algebraisk og grafisk løsningsmetoder er sentrale i arbeidet med både ulikheter og ulike representasjoner, og er også valgt basert på artikkelen av Tsamir et al., (1998). Fokuset er å finne ut hva som karakteriserer løsningsmetodene til elevene, og også hva som kjennetegner selve løsningene deres.

Datainnsamlingen ble gjennomført i to deler. Første del var en økt på ca 60 minutter der elevene jobbet i grupper med et oppgavehefte som inneholdt ulikheter designet for å finne svar på forskningsspørsmålene. I etterkant av oppgaveløsningen intervjuet jeg fem elever for å gå mer i dybden og forhåpentligvis kunne si mer om løsningsstrategier.

1.2 Oppgavens oppbygging

I neste kapittel presenterer jeg studiens teoretiske rammeverk hvor jeg først definerer ulikheter og deres plass i matematikken. Videre vil jeg beskrive nevnte teorier om semiotiske registre og anvendelse av disse inn mot ulikheter før jeg fremstiller didaktisk forskning knyttet til elevers løsninger av ulikheter. Mot slutten av kapittelet viser jeg hvordan ulikheter introduseres i læreplan og læreverk for elevene i denne studien. Kapittel 3 beskriver studiens metodologi. Her forklarer og begrunner jeg de ulike valg som er tatt med hensyn til innsamling av data, utvalg, gjennomføring og strategi for analyse. Jeg foretar også en vurdering av etikk og troverdighet knyttet til studien. I kapittel 4 blir resultater og analyse av elevarbeid og intervjuer presentert. Funn blir videre diskutert tematisk i kapittel 5 ut fra forskningsspørsmål og teori. Studien oppsummeres i kapittel 6 der jeg sammenfatter funn og ser på implikasjoner for videre arbeid med ulikheter i egen og eventuelt andres matematikkundervisning.

2 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet starter jeg med å definere ulikheter og deres plass i matematikken. Deretter gir jeg en oversikt over didaktisk forskning som er relevant i forhold til forskningsspørsmålet mitt før jeg avslutningsvis presenterer hvordan ulikheter introduseres og plasseres i læreplan og læreverk for matematikk S1.

Forskningsspørsmålet handler om hvordan elever løser ulikheter både grafisk og algebraisk, og dermed blir Duvals teori om representasjoner og registre relevant. Sackur (2004) har anvendt Duvals teorier spesifikt på grafisk løsning av ulikheter, og dette bruker jeg som utgangspunkt for analyse og drøfting av grafiske løsninger av ulikheter. I ulikheter spiller den ukjente, x, er viktig rolle, og elevenes ulike oppfatninger av x som ukjent og variabel blir beskrevet i et eget delkapittel. En del av forskningen som er gjort belyser feil og misoppfatninger som elever har vist i møte med ulikheter, og også mulige årsaker til dette. Det blir aktuelt når jeg skal se hva som karakteriserer elevenes løsninger fordi disse feilene kan være en del av det som karakteriserer løsningsmetodene eller løsningene til elevene i min undersøkelse. Halmaghi (2011) har skrevet en doktoravhandling med fokus på elevenes oppfatning av ulikheter. Der gir hun også en oversikt over hva forskningen så langt har vist er vanlige feil hos elevene. Hun har i tillegg utarbeidet COIN (Conceptions of inequalities) og sett på hva årsakene kan være til elevenes problemer i arbeidet med ulikheter. Selv om min studie ikke har som formål å se på elevenes oppfatninger, er Halmaghis liste med vanlige feil og også hennes betraktninger om årsaken til disse relevante i forhold til min studie.

2.1 Matematiske ulikheter

Definisjon og plass i matematikken

Rosalind Tanner hevder at «mathematics begins with inequality» (Tanner, 1961, side 292). Utsagnet er basert på at ideen om «mer» og «mindre» er eldre enn verdens språk, og hun henviser videre til hvordan antikkens grekere med Arkimedes i spissen brukte ulikheter og grenseverdier i arbeidet med å finne tilnærmingsverdier for tallet pi, nemlig $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Selv om ulikheter som fenomen og idé har lang historie i matematikk, var det først i 1631 i Thomas Harriots verk «Artis Analytic Praxis ad Aequationes resolvendas» at ulikhetstegnene < og > dukket opp på trykk.

Begrepet «ulikhet», eller «inequality» har tidvis vært problematisert. Rundt 1960-tallet ønsket enkelte matematikere å bruke begrepet «inequation» framfor «inequality». Forklaringen var enkel nok: Utsagnet «3 + 4 = 7» ble omtalt som en «equality», eller likhet, mens «$3x + 4 = 10$» var en «equation», en likning. På samme måte ville da «$(y - 2)^2 > 0$» og «$1 + 2 < 5$» være en «inequality» eller ulikhet, som kun skulle klassifiseres som sann eller usann. «$x + 2 < 5$» var derimot en «inequation», en «ulikning» (Bagni, 2005; Ellerton & Clements, 2011). Selv om man kan se logikken i dette resonnementet, velger jeg å følge læreplan og den allmenne begrepsbruken og omtaler både $(y - 2)^2 > 0$ og $x + 2 < 5$ som ulikheter, «inequalities». Ellerton og Clements referer til Henry Pollak og Alexander Karp som på 1950-tallet arbeidet med en universell definisjon av hva som menes med å *løse* en likning eller ulikhet. Ifølge Ellerton, ble det dannet en gruppe i forhold til læreplanarbeid som ble enige om at å løse en «åpen setning som involverer en variabel (vanligvis en likning eller en ulikhet) er å finne alle akseptable verdier for variabelen som vil gjøre setningen sann» (Karp og Pollak, sitert i Ellerton & Clements, 2011 side 380, min oversettelse).

Flere studier påpeker ulikhetenes viktige rolle i matematikk (Farmaki & Verikios, 2008; Pessia Tsamir & Bazzini, 2004). Interessant nok, starter et læreverk i kalkulus, som er i bruk ved flere norske universitet, med å plassere reelle tall på tallinjen for deretter å beskrive deres egenskaper og regler ved hjelp av ulikheter(Adams & Essex, 2014, side 3-4) . Slik kan man si at selve ordningsegenskapene til reelle tall knyttet til «større» og «mindre» danner fundamentet for kalkulus i matematikk. Adams (2013) beskriver ordningsegenskapene til tallstørrelser slik:

> Dersom a, b og c er reelle tall, har vi at
>
> 1. $a < b \quad \Longrightarrow a + c < b + c$
> 2. $a < b \quad \Longrightarrow a - c < b - c$
> 3. $a < b \text{ og } c \geq \quad \Longrightarrow \quad ac < bc$
> 4. $a < b \text{ og } c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc, \text{spesielt} - a > -b$
> 5. $a > 0 \quad \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$
> 6. $0 < a < b \quad \Longrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
>
> Regel 1-4 og 6 (for $a > 0$) gjelder også dersom $<$ og $>$ erstattes med $\leq$ og $\geq$.
>
> (Adams & Essex, 2014, side 4, min oversettelse)

Disse ordningsegenskapene angir hvordan ulikheter kan behandles algebraisk og hvordan de danner fundamentet for arbeid med tall og størrelser. I følge store norske leksikon er en matematisk ulikhet «et matematisk uttrykk som sier at en størrelse er enten mindre eller større enn en annen, altså at de to størrelsene ikke er like.» (Vatne, 2017) Dette ligger nær Halmaghis definisjon som sier at «En (algebraisk) ulikhet er et matematisk utsagn om at en størrelse er større eller mindre enn en annen»(Halmaghi, 2011, side 16, min oversettelse). Kort kan man si at en ulikhet er et matematisk utsagn som inneholder et av symbolene $<, \leq, >, \geq$ eller $\neq$. (Halmaghi, 2011 side 17)

2.2 Matematiske representasjoner av ulikheter

Ettersom denne studien dreier seg om løsning av ulikheter på både algebraisk og grafisk form, vil jeg si litt om hva som menes med ulike matematiske representasjoner, og hvilke muligheter og utfordringer dette kan gi elevene. I matematikk bruker vi symboler, figurer og tegn for å beskrive matematiske fenomener og vi kan bruke ulike representasjoner for samme fenomen. I S1- elevenes arbeid med ulikheter er overganger mellom slike uttrykksformer sentral. Siden Duval's (1999, 2006) teori i stor grad omhandler representasjonsformer og overgangene mellom dem, anser jeg dette som et relevant teoretisk bakteppe.

2.2.1 Duval og representasjoner

I følge Duval, er representasjoner og visualisering kjernen for forståelsen av matematikk (Duval, 1999). Han definerer representasjoner som «noe som står for noe annet» (Duval, 2006). Matematiske tegn, som ulikhetstegnet, blir et eksempel på en semiotisk representasjon som gir oss tilgang til kunnskap om ulikheter. Samtidig hevder Duval at for å forstå matematikk, må vi ikke sette likhetstegn mellom representasjonene og objektene de representerer. Dette kaller han et kognitivt paradoks: Hvordan kan vi klare å skille mellom matematiske representasjoner og objektene de representerer når objektene kun er tilgjengelige for oss gjennom representasjonene? (Duval 2006). Videre beskriver Duval hvordan representasjoner bygges til semiotiske systemer som han kaller registre. Et register gir spesifikke verktøy for å representere og prosessere matematisk tenkning. Algebraisk formulerte ulikheter og kartesisk koordinatsystem er eksempler på to registre som elevene møtte i min forskning. Det er en forutsetning for læring at eleven vet hvordan registeret fungerer, for eksempel hva som er forskjellen på $y = 2x$ og $y = x + 2$ i kartesisk koordinatsystem. Transformasjoner innen et register kaller han *behandling* («processing»*)*, mens overgang fra et register til et annet kalles *omforming* («conversion») (Duval, 2006). Når elevene løser ulikheten $3x - 2 \leq -x + 6$ ved algebraiske manipuleringer, driver de med behandling. Ulikheten $3x - 2 \leq -x + 6$ kan også representeres som to rette linjer i et plan. Løsningen kan leses av grafene, og dermed har man omformet ulikheten til et annet register. Enkelte omforminger kan være enkle den ene veien, men vanskelige tilbake igjen. Duval hevder at omforming av representasjoner er avgjørende for å løse matematiske problemer fordi det er slik man kan klare å løsrive representasjonene fra de matematiske objektene. Samtidig hevder han at det er dette som skaper størst problemer for elevene fordi de kan ha problemer med å kjenne igjen objektene etter en omforming.

Verikios og Farmaki (2010) tar tak i nyansene i de ulike representasjonene. De hevder, i tråd med Duval, at ettersom en enkelt representasjon ikke favner bredden i et matematisk konsept og at hver representasjon har sin fordel, vil kombinasjonen av flere være et effektivt verktøy for å gi elevene et utfyllende bilde av konseptet. Spesielt fremhever de funksjoner som fundamentale objekter innen algebra, og hvordan de ulike representasjonene hjelper elevene til å forstå konseptet knyttet til ulikheter (Verikios & Farmaki, 2010).

Ulike representasjoner kan gi økt forståelse, men på en annen side vil elevene ofte oppleve variasjonen av representasjoner som en utfordring i forståelse av matematikk (Sackur, 2004). Sackur beskriver de ulike transformasjonene som kreves for å løse ulikheter grafisk. Hun mener at elevene er innom fire ulike registre (algebraisk, funksjoner, grafisk todimensjonalt og grafisk endimensjonalt) for å løse ulikhetene. I løpet av disse prosessene varierer x mellom å være en ukjent og en variabel og dette kan være en krevende prosess for elevene. Sackurs artikkel presenteres mer utførlig i neste delkapittel (2.2.2 Funksjoner og ulikheter).

2.2.2 Funksjoner og ulikheter

Duval hevder at det er avgjørende for elevene å beherske omforming mellom ulike registre. Innledningsvis beskrev jeg hvordan en artikkel av Tsamir inspirerte meg til å sette fokus på ulikheter. Et funn i Tsamirs artikkel var at elever som brukte grafisk tilnærming i arbeidet med ulikheter oftere fikk riktig svar enn elevene som løste algebraisk. Flere studier har i ettertid tatt for seg hvordan funksjoner kan brukes i møte med ulikheter. Boero & Bazzini hevder at ulikheter ofte blir undervist som et undertema av likninger, muligens for å unngå vanskelighetene som kan oppstå i møte med funksjoner (Boero & Bazzini, 2004). Videre hevder de at en slik tilnærming, løsrevet fra funksjoner og grafer, vil føre til en algoritmisk, prosedyrepreget rutine som er vanskelig for elevene å både tolke og forstå. De kaller det en trivialisering («trivialisation») av konseptet ulikheter. Matematikere bruker ofte tilnærmingsmetoder basert på ulikheter når de arbeider med grenseverdikonsepter eller løser likninger. Boero og Bazzini hevder derfor at undervisning og læreplaner ikke tar ulikhetenes viktige matematiske rolle på alvor.

Farmaki et al., (2008) undersøkte hvilke fordeler og ulemper 13-åringer støtte på når de brukte grafisk (funksjoner) tilnærming i arbeide med likninger med den ukjente på begge sider av likhetstegnet. De hevder at elevene fikk et middel til å løse ulikheter, og at funksjonene hjalp elevene til å visualisere tankene sine. Enkelte av elevene hadde problemer med å håndtere to variabler, x og y, og det derfor er viktig å gjøre elevene oppmerksomme på at y bare er et annet navn på for eksempel uttrykket $3x + 3$. I artikkelen «Function representstions as problem solving strategies: the case of inequalities» omtaler Farmaki og Verikios funksjoner som episenteret i algebraundervisningen. Med funksjoner i sentrum, vil bokstavsymbolene bare være en av flere representasjoner for matematiske sammenhenger (Farmaki & Verikios, 2008).

Under konferansen til «The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME Group)» i 2004, bidro Sackur med foredraget «Problems related to the use of graphs in solving inequalities» (Sackur, 2004). Her beskriver hun de ulike registrene og transformasjonene som er involvert i grafisk løsning av ulikheter. Jeg velger her å ta med en heller fyldig del av hennes artikkel fordi den synliggjør at transformasjoner mellom ulike registre kan kreve forholdsvis høy kompetanse og innsikt hos elevene og fordi jeg senere bruker denne oversikten i analyse og drøfting av mine funn. Ved første øyekast, kan det å løse ulikheter grafisk handle om å sammenlikne to kurver. Elever som starter med en ulikhet på algebraisk form, må gjennom følgende prosess:

Ulikhet → Lage to funksjoner → tegne grafene etter å ha innført y → sammenlikne y-verdiene → gå tilbake til x

Videre identifiserer Sackur fire ulike registre som er involvert i grafisk løsning. Jeg velger å illustrere dette i tabell 2.1 på ulikheten $3x + 3 \leq x + 1$ som elevene i min studie arbeidet med (oppgave 3a).

	I	**II**	**III**	**IV**
Register	Algebraisk	Funksjoner[3]	Grafisk To-dimensjonal	Grafisk En-dimensjonal
Omforming	$3x + 3 \leq x + 1$	$f(x) = 3x + 3$ $g(x) = x + 1$	$y = 3x + 3$ $y = x + 1$	$x \in < \cdots >$
x	x som ukjent	x som variabel	x som variabel	x som ukjent med avdekket identitet

Tabell 2.2.1: Registre involvert ved grafisk løsning av ulikhet

I følge Duvals transformasjonsbegreper skjer behandling innen ett register og omforming fra et register til et annet. En algebraisk løsning krever kun behandling innen algebraisk register, mens elevene ifølge Sackur må innom fire registre ved grafisk løsning. Hun antar at flere elever går direkte fra **I** til **III**, og ser på de to «omformingene» **I**→ **III** og **III** → **IV**. I overgangen **I**→ **III** fra algebraisk til grafisk to-dimensjonalt register må elevene se at èn ulikhet gir dem to grafer. Elevene må også vite hvordan lineære funksjoner representeres grafisk. Videre poengterer Sackur at transformasjonene ved algebraiske manipuleringer i register **I** ikke korresponderer med det som skjer i **III**. Behandlingen innen det algebraiske registeret vil gi en rekke ekvivalente uttrykk som ikke dukker opp i grafisk register. Overgangene fra **I**→ **II** og **I**→ **III** innebærer at x skifter fra å være en ukjent til å bli en variabel. Dette skjer når y dukker opp. Løsningsprosessen videre avhenger av hvordan kurvene er plassert og hvilke og hvor mange skjæringspunkter de har. For å finne løsningen, må elevene fokusere nettopp på y-verdiene (funksjonsverdiene). I omformingen **III** → **IV** må de forholde seg til at kurvene deler planet inn i områder, og bruke y-verdier til å finne x-verdiene som angir løsningen(e). Likninger kan løses grafisk ved å finne eventuelle skjæringspunkt. Sackur påpeker ut fra dette at det er en opplagt forskjell på å løse likninger og ulikheter. Hun mener at elevene må legge bort noe av kunnskapen de har om grafer og funksjoner og rette fokus mot de punktene og avskjæringene som er sentrale i forhold til ulikheten de skal løse. Hun avslutter med å hevde at man ikke kan ta for gitt at elever som «løser grafisk» lærer samme matematikk som de som «løser algebraisk».

Selv om forskning viser at elever kan ha utbytte av å arbeide grafisk med ulikheter viser Sackur at å gå fra en algebraisk representasjon av ulikheter, via grafisk representasjon og løsning tilbake til algebraisk representasjon av løsningen kan være en krevende prosess for elevene. Forskning som er gjort har vist at elever også møter på andre utfordringer når de arbeider med ulikheter, og det vil jeg belyse i neste kapittel.

2.3 Didaktisk forskning knyttet til ulikheter

Under PME-konferansen i Bergen i 2004 var Boero og Bazzini en av bidragsyterne. De åpnet sitt foredrag med følgende påstand:

> This contribution deals with inequalities: an important subject from the mathematical point of view; a difficult subject for students; a subject scarcely considered till now by researchers in mathematics education. (Boero & Bazzini, 2004 side 139)

[3] Min oversettelse av «fonctional»(sic!)

Ulikheter spiller en vesentlig rolle innenfor flere områder i matematikk som algebra, analyse, geometri og utforskning av funksjoner (Bicer, Capraro & Capraro, 2014; Pessia Tsamir & Bazzini, 2004). De er nært knyttet til likninger, og kan derfor bli en viktig inngangsport til elevenes forståelse av prinsippet om likhet i matematikk . Ulikheter dukker også opp i dagligdagse settinger (P. Vaiyavutjamai & M. Clements, 2006). Vi bruker uttrykk som «mer enn», «mindre enn», «leveres innen» og jeg har for eksempel fått instrukser om at denne masteroppgave bør være mellom 50 og 80 sider. Samtidig viser studier som er gjort at ulikheter er et område der elevene stadig gjør feil. Blanco og Garrote (2007) viser til egen erfaring når de hevder at Bachillerator studenter i Italia (forkurs til universitetet), har vansker med å løse ulikheter, og at disse vanskene oppstår årlig. Til tross for disse momentene, påstod altså Boero og Bazzini i 2004 at forskning på ulikheter er en mangelvare i matematikkdidaktikk. Halmaghi (2011) hevder i sin doktoravhandling at PME kanskje er det forumet som har størst innflytelse i matematikkdidaktisk forskning. Selv om ulikheter har vært nevnt under noen av disse konferansene (Pessia Tsamir et al., 1998; Pessia Tsamir & Bazzini, 2001)var det først på konferansen i 2004 at ulikheter ble satt opp som eget tema. I fortsettelsen vil jeg belyse didaktisk forskning på ulikheter.

2.3.1 Algebra og ulikheter - x som variabel og ukjent

Wagner og Parker hevdet i 1993 at likninger og funksjoner var de algebraiske konseptene som hadde vært gjenstand for mest forskning på den tiden. De la til at det er en stor konseptuell forskjell mellom disse. I likninger vil bokstavene representere diskrete ukjente, i funksjonene står de for avhengige eller uavhengige variabler mens de i ulikheter representerer en uendelig mengde av tall (Wagner & Parker, 1993). De hevder at ulikheter ligger som en "conceptual intermediary", et konseptuelt mellomledd mellom likninger og funksjoner. Vi vet at x som «en uendelig mengde tall» gjelder for de fleste ulikhetene elevene møter i skolen, men ulikheter kan også ha en endelig løsningsmengde. For eksempel brukte Tsamir ulikheten $5x^2 \leq 0$ som har løsning $x = 0$ i en av sine undersøkelser (Pessia Tsamir & Bazzini, 2001). Poenget er at bokstaven(e) som elevene møter i ulikheter er annerledes enn de(n) de møter i likninger og funksjoner, og at dette kan skape problemer for dem.

Espeland (2017) hevder at bokstaver i skolematematikk hovedsakelig brukes som «plassholder» (placeholder) for tall (Espeland s.54). Videre skriver hun at dette tallet kan være spesifikt, som i likninger, det kan være generelt som i algebraiske regler eller det kan være en variabel som i funksjoner. Hun henviser videre til en artikkel av Küchemann fra 1981 der han beskriver seks kategorier eller nivåer for hvordan elever oppfatter bokstaver. De tre laveste nivåene er at bokstaver blir tildelt tallverdier, ignorert eller «fruktsalat»-tenkningen der $3a + a$ betyr tre appelsiner pluss en appelsin til (Küchemann, 1981). Selv om vi nok kan finne disse oppfatningene blant elever i videregående skole, vil jeg anta at elever som velger matematikk S1 ikke oppfatter bokstavene slik. De tre neste kategoriene til Küchemann er mer relevante med tanke på elevenes arbeid med likninger og ulikheter. Kategori 4 er elever som oppfatter at en bokstav skjuler et spesifikt, men ukjent tall, som i likninger. Elevene i neste kategori kan bruke bokstaver for et generelt tall slik vi møter dem i algebraiske formler. Her forstår elevene at bokstaven kan representere flere tallverdier. Den høyeste forståelesen oppnår elevene når de også kan oppfatte bokstaver som variabler. Ifølge Küchemann innbefatter denne forståelsen at bokstaven representerer en mengde av uspesifiserte tall, og at det eksisterer et forhold mellom disse tallmengdene, slik vi for eksempel møter dem i utsagnet $y = 3x - 3$.

Kongelf har undersøkt hvordan seks ulike norske læreverk introduserer algebra i ungdomsskolen. Han hevder lærebøker i liten grad lar algebra generalisere tallæren, og at særlig variabelaspektet ikke kommer frem i progresjon, kontekst eller forklaringer (Kongelf, 2015). Han hevder også at hovedvekten ligger på algebramanipulasjon med liten vekt på begrunnelser for notasjoner og begrunnelser for manipuleringene. Espeland (2017) bekrefter at verken undervisning eller læreverk i ungdomskole-klassen i hennes undersøkelse inneholdt beskrivelser av egenskapene til ulikheter eller sammenliknet dem med likningens egenskaper. Kongelf beskriver læreverk for ungdomsskolen mens min studie er lagt til andre året på videregående skole. Elevenes algebraundervisning fra ungdomstrinnet danner likevel grunnlaget for deres arbeide med algebra generelt og ulikheter spesielt i videregående skole. Det kan derfor være nyttig for meg å være klar over funnene fra Kongelfs undersøkelse.

2.3.2 Feil og misoppfatninger av ulikheter

Gard Brekke mener det er viktig for oss som matematikklærere å skille mellom feil og misoppfatninger. Han begrunner det med at en feil kan dukke opp tilfeldig, mens misoppfatninger er en konsekvent tanke hos elevene. (Brekke, 2002). Misoppfatninger defineres som «ufullstendige tanker knyttet til et begrep» (Brekke, 2002, s. 10) og er ofte et resultat av overgeneralisering hos elevene: Selv om de har kunnskaper innenfor matematikk, så er disse kunnskapene sjelden fullstendig utviklet. Idéene og begrepene de har, fungerer ikke nødvendigvis i alle nye situasjoner. En feil, derimot, kan skyldes at elevene ikke har lest oppgaven nøye nok, at de ikke er oppmerksomme eller liknende.

Almog og Ilany (2012) bekrefter at det er bred enighet om viktigheten av å kjenne til elevenes korrekte og ukorrekte tanker om matematiske konsepter. Kunnskap om elevens misoppfatninger hjelper oss i planlegging og gjennomføring av undervisning. Et eksempel på en vanlig misoppfatning i møte med andregradsulikheter, er at dersom den tilhørende andregradslikningen ikke gir løsning, så har heller ikke ulikheten noen løsning (Tsamir et al., 1998). En artikkel av Sfard og Lindchevski fra 1994 setter fokus på elevenes matematiske tenkning i møte med algebra. De stiller spørsmål ved hvorfor det er viktig for elevene å kunne forklare og forstå prosedyrene de utfører, og svarer selv at dette er avgjørende for at elevene skal kunne håndtere ikke-standard oppgaver eller mer avanserte algebraiske ideer som de kan møte i fremtiden. De fremholder at det likevel er flere fordeler med å regne «uten å tenke»: Det gir elevene effektive manipuleringer, senker kognitivt stress og frigjør kapasitet til å løse komplekse oppgaver. Faren er at dersom elevene aldri returnerer til de lavere, primære prosessene, kan de ende opp med et handikap i form av meningsløse regler. Dersom elevene ikke klarer å knytte algebraiske regler med aritmetiske lover vil de slite med å løse algebraiske problemer som krever fleksibilitet i forhold til innlærte prosedyrer/algoritmer. Dette eksemplifiseres dette med ulikheten $x^2 - x - 6 > 0$ som elevene besvarer med $x_1 > 3, x_2 > -2$. Forfatterne hevder at elevenes manglende evne til å forklare dette resultatet ikke vil endre deres overbevisning om at de har funnet riktig løsning (Sfard & Linchevski, 1994). Språket elevene brukte i deres forskning avslørte også at flere mente at løsningsprosedyrene skulle lede frem mot et sant utsagn i stedet for at man finner hvilke x-verdier som gjør utsagnet sant, og de hevder at «for the majority of pupils, it seems, an equation and inequality are meangless strings of symbols to which certain welldefined procedures are routinely applied» (Sfard & Linchevski, 1994, side 306).

I etterkant av PME-konferansen i 2004, var det flere forskere som tok tak i ulikheter. I sin doktorgradsavhandling fra 2011 har Halmaghi hatt en gjennomgang av matematikkdidaktisk forskning som er gjort på ulikheter. Ut fra dette har hun laget en liste med de åtte vanligste feilene elever gjør. Halmaghi hevder ikke eksplisitt at alle de åtte feilene nødvendigvis representerer misoppfatninger, men forskningen hun viser til bruker ofte det begrepet. Ikke alle åtte punkt er like relevante for min forskning da noen av disse inkluderer for eksempel løsning av rasjonale ulikheter. Jeg tar likevel med alle her, og nevner deretter de som jeg mener er mest relevant for meg: (1) multipliserer/dividerer begge sider av ulikheten med tall som ikke nødvendigvis er ulik null. (2) Utelater nevnere som inneholder en variabel eller parameter, f.eks ulikheten $\frac{x-5}{x+2} < 0$ blir til $x - 5 < 0$ (følger mønsteret for løsning av rasjonale likninger). (3) Konverterer ulikheter til intervaller, for eksempel blir ulikheten $x - 5 < 0$ omskrevet til $(5, +\infty)$ eller $(-\infty, 5]$. (4) Elever avslår løsninger som ikke passer i det generelle mønsteret de har for løsninger , for eksempel at en ulikhet må ha ulikhet til svar og en likning har en likning til svar, og vil derfor avvise x = a som mulig løsning på ulikhet (Pessia Tsamir & Bazzini, 2001). (5) Behandler positive/negative produkt som om alle komponentene er positive eller alle negative, for eksempel blir ulikheten $\frac{x-5}{x+2} < 0$ til $x - 5 < 0\ og\ x + 2 < 0$. (6) Elevene klarer ikke lese korrekte løsninger av grafen når de bruker funksjoner for å løse ulikheter. (7) Elevene klarer ikke notere løsningen for x, selv om selve avlesningen av grafene er korrekt. (8) Elever behandler ulikheter som likninger. Dette siste punktet blir bekreftet gjennom flere studier (Almog & Ilany, 2012; Espeland, 2017; Pessia Tsamir et al., 1998; P. Tsamir & Bazzini, 2002; P. Vaiyavutjamai & M. Clements, 2006). Jeg antar at elevene kan møte på alle disse problemene i min forskning, men ettersom rasjonale ulikheter ikke er innlemmet i min problemstilling, er det lite sannsynlig at jeg vil møte på feilene i punkt (1), (2) og (3). Halmaghi illustrerer punkt (5) med en rasjonal ulikhet, men her ser jeg for meg at hun like gjerne kunne brukt en andregradsulikhet, for eksempel $(x - 3)(x + 2) < 0$ som da blir til $x - 3 < 0$ og $x + 2 < 0$. Som et resultat av sin egen studie, forlenger Halmaghi denne åtte-punktslisten med ytterligere to punkt (Halmaghi, 2011 side 152). (9) Ukorrekt bruk av ulikhetstegnene. Hun nevner tre ulike eksempler på dette: (a) Løsningsintervallet $< -3{,}5]$ blir til $-3 \geq x > 5$ eller $x \geq -3 \quad x < 5$ (b) $2 < x < 2$ brukes som ekvivalens for uttrykket $x = 2$ og (c) notasjonen $5 < x < 5$ brukes der 5 er eneste utelatte reelle tall. (10) $x = 2$ kan ikke være løsning fordi dette er en vertikal linje.

Vaiyavutjamai og Clements viser i sin studie at Thailandske elever på 7-9 trinnet brukte likevektprinsippet og gjorde det samme på begge sider av ulikhetstegnet helt til x stod alene igjen på den ene siden. Selv om de ofte fikk riktig svar, forstod de ikke at en ulikhet kan ha en uendelig løsningsmengde (P. Vaiyavutjamai & M. Clements, 2006). Blanco og Garrote (2007) fant at også blant studenter som tok et forkurs til universitet var det mange som behandlet ulikheter som likninger. De hadde problemer med å forstå forskjellen på likninger og ulikheter, og mente at det kun var tegnene som forskjellige ($=, >, <, \geq, \leq$). En studie av Almog og Ilany (2012) viser til Kroll (1986) som hevder at elever ofte løser kvadratiske ulikheter på samme måte som de løser kvadratiske likninger, slik at ulikheten $x^2 - x - 6 > 0$ gir løsningen $x > 3\ ,\ -2$ på samme måte som likningen $x^2 - x - 6 = 0$ gir løsningen $x = 3,\ -2$. Samme studie hevder at elevene får feil når de løser ulikheter med absoluttverdier fordi de overgeneraliserer kunnskapen de har fra å løse tilsvarende likninger.

Tsamir og Bazzini har hatt flere undersøkelser knyttet til 16-17 åringers resonnement omkring ulikheter. En studie fra 1998 viser, at elevene har en tendens til å sette likhetstegn mellom andregradsulikheter og deres tilhørende likning (Pessia Tsamir et al., 1998). 5% av de 160 elevene i deres undersøkelse erstattet ulikhetstegnet med et likhetstegn i ikke-lineære ulikheter og løste dem som likninger. 63% av elevene konkluderte med at andregradsulikheten $x^2 - x + 1 > 0$ ikke har løsning siden tilhørende likning ikke har røtter. Samme studie viser også at elevene blander «og» og «eller» når de skal beskrive ulikheter med to løsningsintervall. Dette bekreftes også av Almog og Ilany (2012) som hevder at elevene ikke fullt ut forstår meningen med de logiske bindeleddene («logical connectors») *og* og *eller* og at de derfor ikke behersker bruken av dem. Tsmairs studie fra 1998 belyser også hvilke løsningsmetoder elever i videregående skole i Israel brukte til å løse ulikheter og hvilke metoder som fungerte best for elevene. Elevene løste ulikheter algebraisk, grafisk og ved hjelp av tallinja og i denne studien gav den algebraiske løsningsmetoden oftest feil svar (Pessia Tsamir et al., 1998). En artikkel fra 1999 beskriver at elever har problemer med ulikheter som ikke har løsning (Pessia Tsamir & Almog, 1999).

En studie fra 2004 undersøkte om 148 israelske elever i videregående skole ville godta ulikheter med én løsning (Pessia Tsamir & Bazzini, 2004). På spørsmålet «Kan x=3 være løsningen på en ulikhet?» svarte bare omtrent halvparten (51%) av elevene at det kunne den. Den andre halvdelen mente at en ulikhet måtte ha ulikhetstegn i svaret. Dette samsvarer med Kroll hos Almog og Ilany (2012) om forventet tegn i løsningen av andregradslikninger/ulikheter og også med Halmaghi (punkt 4) om å avvise løsninger som avviker fra det vanlige mønsteret. I Tsamir og Bazzinis studie fra 2004 avviste omtrent 25% av elevene at $x = 3$ kan være en løsnings samtidig som de like etter løste ulikheten $5x^2 \leq 0$ og svarte $x = 0$, altså en inkonsekvens i utsagnene.

Ellerton og Clements (2011) har studert kunnskap om likninger og ulikheter blant lærerstudenter i matematikk. Studentene i undersøkelsen deres hadde stort sett prestert høyt på videregående skole («high school») og var inne i sitt siste semester før de var kvalifisert som matematikklærere. Studentene arbeidet med åtte oppgaver som var designet som par med en likning og en tilhørende ulikhet, for eksempel likningen $x^2 + 6 = 0$ med tilhørende ulikhet $x^2 + 2 > 0$ og $4(x + 1) = 4(x - 3)$ med ulikheten $9(x + 1) > 9(x - 2)$. Ellerton og Clements hevder at studentene knyttet en sterk sammenheng mellom ulikheter og likninger. De mener at selv om dette i utgangspunktet var positivt, hadde analogien blitt overdrevet slik at det førte til overgeneralisering og ble en ulempe i stedet for en fordel for studentene. De hevder også at flere av studentene ikke visste hvordan de skulle løse ulikhetene, selv om de klarte å løse likningene. 47% av de 328 studentene løste likningene korrekt, mens for ulikheter var antallet 18%. De mener at elever i noen tilfeller trenger en bevisstgjøring rundt at de kan ha upresis algebrakunnskap. For å hjelpe studentene, anbefaler de å bruke grafer, men hevder samtidig at å lære studentene å tolke ulike representasjoner kan være like vanskelig som å lære dem egnede algoritmer. (Ellerton & Clements, 2011).

Kieran bidro også på PME-konferansen i Bergen i 2004. Hun kritiserte enkelte av studiene som er nevnt ovenfor (L Bazzini, Boero & Garuti, 2001; Pessia Tsamir et al., 1998) for å være for snevre fordi de nesten utelukkende vektlegger de manipulative aspektene ved algebraisk løsning (Kieran 2004c). Hun viser til en japansk studie der elever på åttende trinn fikk en praktisk ramme rundt en oppgave som involverte ulikheter. For å løse oppgaven brukte de kunnskap fra likninger og kom slik frem til korrekte løsninger på problemet. Kieran nevner at selv om elevene brukte ulike metoder for å løse ulikhetsproblemet, var det ingen som brukte grafer. Hun hevder de ovenfor nevnte studiene til en viss grad ignorerer den tette relasjonen mellom likninger og ulikheter. Hun innrømmer at denne relasjonen inneholder fallgruver for elevene, men at vi heller ikke må overse at likninger kan bidra til å fremme elevenes forståelse av ulikheter.

Også eldre elever har problemer med ulikheter. I sin doktoravhandling fra 2017 nevner Espeland en studie av Grevholm (2003). Hun gjennomførte en studie blant lærerstudenter der de blant annet skulle avgjøre om påstanden $2n > n + 2$ var sann alltid, aldri eller noen ganger. Studentene som mente «noen ganger» ble bedt om å forklare når utsagnet var sant. En av fire studenter svarte riktig. I samme avhandling har Espeland undersøkt hvordan elever i en norsk ungdomsskoleklasse arbeider med algebra. I forbindelse med ulikheter ble det i undervisningen lagt vekt på å lære elevene de riktige manipuleringene for å løse ulikhetene algebraisk. Ettersom elevene i ungdomsskolen «bare» arbeidet med lineære ulikheter, fikk de omtrent følgende instruks: Løs som en likning, men husk å snu tegnet dersom du multipliserer eller dividerer med et negativt tall. Espeland har to funn relatert til sine data. For det første var det tydelige tendenser til at elevene behandlet ulikhetene som likninger. Hun har med et eksempel der Ronny skal løse ulikheten $\frac{3x}{4} \geq \frac{4}{3}$. Han har lært å «kryssgange» når han løser likninger, og ender feilaktig opp med $16 \geq 9x$ som blir til $\frac{16}{9} \geq x$. Enkelte elever brukte likhetstegn i ulikhetene, noen rotet med å skifte retning på ulikhetstegnet og andre avslørte seg i språket. For det andre fant Espeland at elevene hadde problemer med å tolke løsningene de fikk. En elev ble bedt om å forklare hva løsningen $x > 2$ innebar. Han svarte at den ukjente er et tall fra to og oppover, altså en oppfatning av løsningen var et bestemt element i løsningsmengden og ikke hele mengden. Ifølge Espeland hadde elevene også problemer med å forstå hva selve ulikhetstegnene innebar, spesielt $\geq$ og $\leq$. Espeland antyder at årsaken til elevenes problemer ligger i at de ikke har blitt introdusert for eller sammenlignet egenskapene til ulikheter og egenskapene til likninger hverken i lærebok eller undervisningen. Dermed ender de opp med en oppfatning av at ulikheter er «meningsløse rekker av symboler der man anvender rutinepregede prosedyrer» (Sfard & Linchevski, 1994, side 306 min oversettelse).

2.3.3 Halmaghis COIN-modell, met-befores og missed-befores

Elena Halmaghi ønsker i sin forskning knyttet til doktoravhandlingen å finne ut hva som kan være årsaken til at ulikheter er så vanskelige for lærerstudenter i matematikk. Et resultat av hennes avhandling er COIN, *Conceptions of Inequalities* (Halmaghi, 2011). Hun er altså opptatt av hvilke oppfatninger studentene har, knyttet til ulikheter, og videre hvilke påvirkninger som har ført til disse oppfatningene. COIN beskriver fem ulike oppfatninger som hun fant hos sine studenter:

Oppfatning 0 Ulikhet som en blanding av bilder og symboler som oppstår i en matematisk setting.

Oppfatning 1 Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser

Oppfatning 2 Ulikhet som en fremmed eller rar («strange») slektning av likninger

Oppfatning 3 Ulikhet som en mental eller algebraisk prosess

Oppfatning 4 Ulikhet som et objekt

Oppfatning 0 beskriver elever som viser størst forvirring og misoppfatning. De nærmest famler seg frem i et mørkt rom og prøver å beskrive objektene de snubler over (s 159). Grafer har ingen, eller vage forbindelse til ulikheter, og elevene viser ukorrekt bruk av tegn og symboler. Neste oppfatning, *ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser,* ligger nær den formelle definisjonen av ulikheter. Elevene som viste denne oppfatningen i Halmaghis studie brukte gjerne en skala eller tallinje for å illustrere hva en ulikhet er. Dersom et tall er større enn et annet, fins det et tegn som beskriver denne relasjonen. Flere med denne oppfatningen hadde imidlertid problemer med å forstå sannheten i utsagnet $3 \geq 3$. Oppfatning 2 viser hvordan flere av elevene setter ulikheter sammen med likninger. De bruker ordet «equal» eller «equation» i beskrivelsen av ulikhet, og sier for eksempel at en ulikhet er «en likning der de to sidene ikke er like» (side 161, min oversettelse) eller som en «equation with unequal sides» (side 137). I praksis vil de bytte ulikhetstegnene med likhetstegn og løse som likning. Elever med oppfatning 3, *ulikhet som en mental eller algebraisk prosess,* beskriver at ulikheter handler om å følge bestemte regler, som å skifte retning på ulikhetstegnet dersom du dividerer på et negativt tall. Halmaghi mener at elevene med denne oppfatningen ofte behersker overgangene mellom ulike representasjoner og har en god flyt i arbeidet sitt. Denne flyten er imidlertid en flyt av regler og ikke av logiske sammenhenger. Den siste oppfatningen er *ulikhet som objekt* og beskrives som den mest avanserte oppfatningen. Elevene har mentale forestillinger om de ulike transformasjonene, de kan bearbeide ulikheter i alle formater og viser forståelse for hvordan ulikheter kan generere likninger, identiteter eller motsigelser. De klarer også å beskrive de ulike fenomenene med korrekt matematisk språk.

Halmaghi bemerker at de ulike oppfatningene viser til ulike aspekter ved ulikheter som hennes studenter viste. De aller fleste hørte til i de laveste klassene av oppfatninger, og viste dermed en forholdsvis svak eller snever oppfatning av ulikheter. Kun èn av de 170 studentene hun møtte hadde oppfatning 4. Hun bruker begrepet «met-befores» fra Tall (2004) om elevenes pre-eksisterende kunnskap, og deres tendens til å overføre denne til nye konsepter. Læring handler om å bygge ny kunnskap, og i undervisning blir vi ofte oppfordret til å relatere nye emner til det elevene kjenner fra før. Hensikten er å motivere og utvide elevenes læring. På en annen side hevder Halmaghi at «met-befores» potensielt kan før til mer skade enn gagn. Hun trekker spesielt frem elevens tilbøyelighet til å bruke balansemodellen fra likninger på ulikheter i den tro at dersom de utfører samme operasjoner på begge sider av tegnet, blir ekvivalensen bevart. En slik overgeneralisering vil føre til feil både i møte med rasjonale ulikheter, men også med andregradsulikheter på formen $x^2 > 1$ som elevene møtte i min forskning. Halmaghi definerer også noe hun kaller «missed-befores». Dette er «all experiences that were not met before and, if met, they could have had the potential of helping now a relational understanding of a concept» (Halmaghi, 2011, side 183). Hennes hypotese er at disse «missed-befores» som elevene har i forhold til ulikheter tvinger dem til å søke til likninger for å finne meningen bak manipuleringene de bruker i arbeidet med ulikheter. Videre antar hun at dersom elevene ikke hadde «missed the missed-befores», ville flere hatt en rikere oppfatning av ulikheter. Dette kan jeg se i sammenheng med funnene til Kongelf (2015) der elevenes algebraopplæring på ungdomsskolen vil ha konsekvenser for hvordan de løser ulikheter på videregående skole.

Halmaghi velger å fokusere på ulike oppfatninger som elever kan ha av ulikheter. Enkelte av oppfatningene hun beskriver kan føre til misoppfatninger, for eksempel oppfatningen om ulikheter som en slektning av likninger (se avsnitt 2.3.2 feil og misoppfatninger). På videregående skole har elevene med seg matematikkerfaringer i form av «met-befores» og «missed-befores» fra ulike matematiske konsepter. Erfaringene de har med for eksempel likninger og lineære ulikheter kan gi dem støtte, men også føre til fallgruver når de skal arbeide grafisk og algebraisk med ulikheter. Her spiller både læreplaner, læreverk og undervisning inn, og i neste avsnitt vil jeg presente hvordan ulikheter introduseres for elever i matematikk S1.

2.4 Ulikheter i matematikk S1

Elevene aktuelle for denne studien følger som nevnt matematikkfaget S1 på videregående skole. I dette avsnittet vil jeg redegjøre for læreplanens mål for faget og hvordan disse kan relateres til ulikheter. Læreplanen i S1 har et hovedområde som heter «Lineær optimering» der vi finner en formulering om at elevene skal modellere lineære likninger og ulikheter for å finne best mulig løsning på praktiske problemer. Tilhørende kompetansemål sier at elevene skal «modellere praktiske optimeringsproblemer i økonomi ved hjelp av lineære likninger og ulikheter» (Utdanningsdirektoratet, 2013)

Jeg har ikke satt praktiske situasjoner som ramme for noen av elevoppgavene i min undersøkelse, men er klar over at elevene har jobbet med denne typen problemstillinger og at dette arbeidet også inkluderte grafisk arbeid med lineære ulikheter.

Ordet «ulikhet» er også brukt i kompetansemålene for tall og algebra. Der heter det at

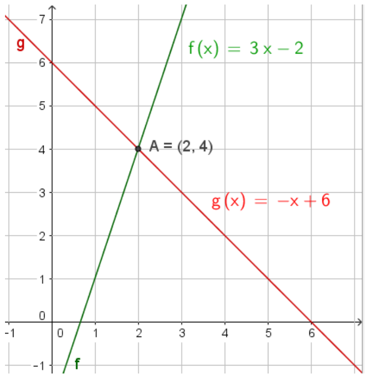
> Eleven skal kunne
>
> - omforme en praktisk problemstilling til en likning, en ulikhet eller et likningssystem, løse det og vurdere løsningens gyldighet
> - løse likninger, ulikheter og likningssystemer av første og andre grad, både ved regning og med digitale hjelpemidler (Utdanningsdirektoratet, 2013)

Det er siste punkt om å løse ulikheter av første og andre grad som er mest relevant for meg ettersom omforming av praktiske problemstillinger til ulikheter ikke er tema for min studie. Jeg har valgt å fokusere på løsning ved regning (algebraisk) og ved å bruke grafer uten digitale hjelpemidler (se delkapittel 3.4). Elevene i denne studien brukte læreverket SINUS S1. Her blir lineære ulikheter behandlet i kapittel 1 «Algebra», nærmere bestemt i delkapittel 1.4 «ulikheter». Forfatterne starter med å forklare hvilke ulikhetstegn vi har, og hva de betyr. Deretter skriver de at «Ulikheter løser vi omtrent på samme måte som likninger» (Oldervoll, Orskaug, Svorstøl & Hals, 2013, side 20) før regelen om å snu ulikhetstegnet ved divisjon/multiplikasjon av negativt tall fremheves. Ulikheten $3x - 2 \leq -x + 6$, som mine elever møtte, kan dermed løses slik:

$3x - 2 \leq -x + 6$	(Adderer x på begge sider)
$4x \leq 8$	(Dividerer med et positivt tall)
$x \leq 2$	(Løsningsmengden er $x \in \langle -\infty, 2\,]$)

Dette samsvarer med reglene til Adams (se avsnitt 2.1). Det finnes ingen bruk av grafisk tilnærming i dette delkapittelet. Kapittel 2 i læreverket heter «Rette linjer», og i delkapittel 2.5 «Områder avgrenset av rette linjer» får elevene innføring i hvordan et sett av tre eller flere lineære ulikheter danner et avgrenset grafisk område. Gjennom de neste delkapitlene bygger elevene videre på dette i arbeidet med lineær optimering, hovedsakelig ved hjelp av grafer tegnet på digitale hjelpemidler.

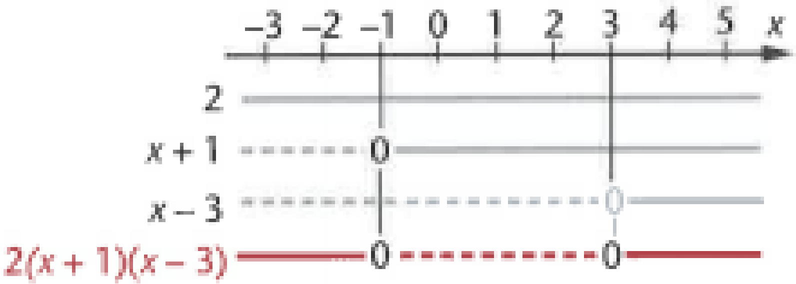
I grafisk fremstilling, vil ulikheten $3x - 2 \leq -x + 6$, vises som to rette linjer på følgende måte:



Figur 2.4.1: Grafisk løsning av lineære likninger

Her må elevene finne løsningen der den grønne linjen, som viser $3x - 2$ ligger lavere eller er lik den røde linjen, altså på venstre side av punktet A der x er mindre enn eller lik 2. Læreverket viser imidlertid ingen eksempler på en slik løsningsmetode av lineære ulikheter.

Kvadratiske ulikheter finner vi i kapittel 3.9 «Andregradsulikheter». Her bruker forfatterne to sider på å vise og forklare algebraisk fremgangsmåte. Først faktoriseres ulikheten $2x^2 - 4x - 6 < 0$ til $2(x + 1)(x - 3) < 0$ ved hjelp av nullpunktsfaktorisering ($ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$). Deretter viser forfatterne hvordan elevene kan tegne et fortegnsskjema (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl og Hals 2013, side 105):

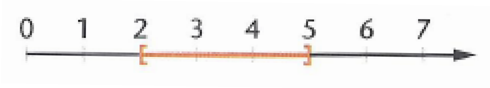


Figur 2.4.2: Fortegnsskjema for løsning av kvadratiske ulikheter.

Ettersom andregradsuttrykket skal være mindre enn null, vil nederste linje gi løsning $x \in < -1,3 >$. Adams bruker tilsvarende skjema («sign-chart») på en rasjonal ulikhet i sitt læreverk (Adams & Essex, 2014, side 6). Her kan vi si at elevene møter en tredje representasjon av ulikheten i form av fortegnsskjemaet. I beregninger av algebraisk løsning er imidlertid fortegnsskjemaet ofte en såpass integrert del av løsningsmetoden, at jeg i resten av oppgaven inkluderer bruk av fortegnsskjema i termen «algebraisk løsning».

I læreboken møter elevene ingen lineære ulikheter som har alle reelle tall som løsning eller ikke har løsning. Forfatterne gir ett eksempel på en andregradsulikhet med alle reelle tall som løsning (Oldervoll et al., 2013, side 107). Til sammen kan elevene løse 22 andregradsulikheter i forbindelse med kapittelet om andregradsulikheter (side 108 og 288). To har ingen løsning, to har løsninger på formen «$x =$» og èn av dem har løsning «alle $x \neq 2$». De øvrige 17 ulikhetene har ett eller to løsningsintervall. Jeg antar derfor at elevene er mest vant til at andregradsulikheter gir slike løsninger.

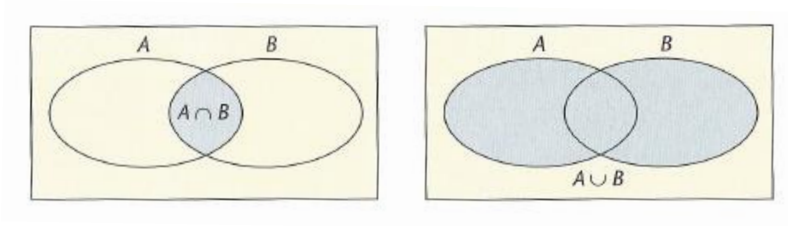
Elevene skal også notere løsninger korrekt. Læreboken Sinus S1 har et delkapittel (1.6) som heter Mengdelære der elevene får beskrevet tallmengdene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ og\ \mathbb{R}$. Forfatterne forklarer at symbolet $\in$ betyr «tilhører» og at «Når vi skriver x $\in \mathbb{R}$, betyr det at x er et hvilket som helst tall.» (Oldervoll, Orskaug et al. 2013, side 26). De beskriver også hva som menes med åpne og lukkede intervall, og skriver at "$x \in [2,5] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$" som også illustreres med figur 2.4.3.



Figur 2.4.3 Intervall på tallinjen

Deretter forklares tegnene for snitt og union i følgende avsnitt:

> Tallmengden $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ('A snitt B') består av de tallene som er med i både A og B. Mengden $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$('A union B') består av de tallene som er med enten i A eller B eller i begge. Vi kan skrive det slik:
>
> $$\mathrm{x} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{x} \in \mathrm{B}$$
>
> $$\mathrm{x} \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{B}$$
>
> Vi kan illustrere disse mengdene i et venndiagram:



(Oldervoll et al., 2013, side 29)

Forfatterne gir så fire eksempler på hvordan tallmengder kan beskrives enklest mulig, for eksempel, $[1,5] \cup \langle 3,7\rangle = [1,7\rangle$. I forbindelse med andregradsulikhetene i kapittel 3.9 brukes følgende notasjon av løsninger: Oppgave 3.91 har to løsningsintervall i oppgave a og ett i oppgave b. Fasiten skriver $a) x < 2 \; eller \; x > 3, \;\; b) -2 < x < 1$ (Oldervoll et al., 2013, side 360). Notasjonen med «eller» brukes konsekvent i alle oppgaver der løsningen består av to løsningsintervall. Oppgaver der løsningen er $x \in \emptyset$ besvares med «ingen løsning».

3 Metode

I introduksjonskapittelet beskrev jeg formålet med studien min som er å undersøke hva som karakteriserer løsningene og løsningsmetodene til en klasse med S1-elever når de arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter. Jeg ønsker også å finne ut hvilke resonnement som ligger bak løsningsmetodene deres. Forskningens hensikt ble deretter oppsummert i følgende forskningsspørsmål:

> Hva karakteriserer elevenes grafiske og algebraiske løsningsmetoder når de arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter?

I dette kapittelet vil jeg beskrive og begrunne studiets design og metoder for datainnsamling. Deretter presenterer jeg utvalget av elever og oppgavene de arbeidet med. Troverdighet og etiske betraktninger diskuteres i to delkapitler før jeg avslutningsvis gir en oversikt over hvordan jeg har analysert empirien.

3.1 Design og posisjonering

Design og posisjonering handler om hva som motiverer for forskningen samt hvilke kunnskapssyn og virkelighetssyn som ligger til grunn for den. Bryman sier det slik at «Social research and its associated methods do not take place in a vacuum» (Bryman, 2016 side 3). Motivasjonen bak denne studien er redegjort for i introduksjonskapittelet. Formålet med studien er å undersøke hvordan en forholdsvis liten gruppe elever løser og arbeider med lineære og kvadratiske ulikheter. Jeg har prøvd å forstå hva den enkelte eleven mener og tenker om strategiene og løsningene sine i møte med ulikheter og altså fortolket det de har skrevet og sagt. Jeg stiller meg derfor inn i en interpretivistisk tradisjon. Ifølge Bryman (2016) er interpretivisme en epistemologisk posisjon der forskeren arbeider med å forstå meningen bak aktørenes handlinger.

Forskningen er gjennomført som et kvalitativt case-studie i en enkelt matematikk-klasse på en videregående skole. I denne studien var kvalitativ tilnærming formålstjenlig på flere måter. Gjennom observasjoner av gruppearbeid og individuelle intervjuer fikk jeg tilgang på materiale som gjorde det mulig å gå i dybden med tanke på elvenes resonnement og strategier. Bryman hevder at case-studier skiller seg fra andre forskningsdesign nettopp ved at forskeren vanligvis er opptatt av å avdekke de unike egenskapene ved det tilfellet som studeres (Bryman, 2016). Siden formålet mitt var å få et dypere innblikk i elevenes arbeid med ulikheter, var dette designet godt egnet for denne studien.

3.2 Metoder for datainnsamling

Forskningsspørsmålet setter fokus på elevenes løsningsmetoder i møte med lineære og kvadratiske ulikheter. Dermed ble det et naturlig valg å la elevene arbeide med nettopp slike ulikheter. Jeg valgte å designe et hefte med oppgaver som en klasse med 16 elever skulle arbeide med gruppevis. For å få tilgang til resonnementene bak løsningsmetodene, valgte jeg å bruke en lydopptaker til hver av gruppene og å selv være til stede som observatør. I tillegg ønsket jeg å gjennomføre intervjuer med noen av deltakerne i etterkant av arbeidet. Ifølge Wellington (2015) er dette typiske metoder i kvalitative studier. Hensikten med å kombinere gruppearbeid, observasjon og intervju var å kunne belyse problemstillingen fra flere synsvinkler. Wellington hevder at ved å bruke disse kildene sammen i case-studier, tillater vi «a 'picture' to be built up of the case being studied» (Wellington, 2015 side 169). I forkant av datainnsamlingen besøkte jeg klassen og informerte om prosjektet. Elevene fikk utdelt samtykkeskjema og alle 16 valgte å signere positivt på deltakelse og lydopptak. To av dem reserverte seg mot å bli intervjuet, og jeg hadde dermed 14 potensielle intervjuobjekter.

3.3.1 Gruppearbeid med lydopptak og observasjon

Jeg valgte å fordele elevene i fem grupper der de jobbet med oppgavene slik at det var mulig for meg å ta opp lyd mens de samarbeidet, og i ettertid kunne høre resonnement og tanker som de gjorde seg mens de jobbet med oppgavene. Hovedintensjonen med gruppearbeidet var først og fremst å samle empiri til studien. Ettersom elevene arbeidet uten tilsyn av faglæreren sin, ville kanskje flere føle at de kunne «snakke fritt» på gruppene og diskutere hverandres innspill, selv med meg til stede og lydopptaker på pulten. Dermed kan slike grupper ikke bare gi supplerende informasjon sammen med elevbesvarelsene, men også gi informasjon som ellers ville vært utilgjengelig for meg som forsker (Wellington, 2015).

Gruppearbeid kan også medføre utfordringer. Selv om alle de 16 elevene fikk utdelt hvert sitt oppgavehefte, førte samarbeidet til at jeg i teorien stod i fare for å ende opp med identiske besvarelser innad i en gruppe. Dermed kunne jeg ende opp med fem besvarelser i stedet for 16, og slik miste individuelle løsningsmetoder og strategier. Selv om en lydopptaker til en viss grad vil fange opp dette, vil det i enkelte grupper være både dominante elever som kan overstyre de andre, og i motsatt fall være stille elever som ikke bidrar i arbeidet. Ettersom elevene i denne klassen hadde vært sammen i omtrent 10 måneder, går jeg ut fra at de kjenner hverandre og vet hvem som regnes for «flinke» i matematikk. Det er en mulighet for at disse elevene vil få større gjennomslag for sine ideer enn elever som regnes som «mindre flinke». Selv med disse ulempene i bakhodet, ønsket jeg å bruke gruppearbeid med lydopptak. Hensikten med dette er flerfoldig: For det første fikk jeg et rikt materiale å jobbe med, både med tanke på elevenes løsninger av ulikheter, og resonnement rundt løsningsstrategiene de brukte. Jeg ønsket også å vite hvordan de arbeidet med oppgavene: Valgte de å arbeide mest mulig individuelt eller å diskutere seg frem til felles svar? I tillegg fikk jeg et innblikk i hvem i gruppen som bidro på de ulike oppgavene. Elevenes arbeid i gruppene var også utgangspunkt for utvelgelse til intervju (se delkapittel 3.3 om utvalg).

Observasjon brukes gjerne i kvalitative studier (Wellington, 2015). Ved å observere kan forskeren se hva som skjer i øyeblikket uten å måtte hente informasjon via andre. Jeg kunne valgt å la elevene være alene i klasserommet, uten at jeg var til stede. Dette hadde kanskje ført til at de ville følt seg mindre overvåket eller passet på. På en annen side ville de da ikke hatt mulighet til å spørre meg dersom det var uklarheter i formuleringene eller dersom andre uforutsette ting skulle dukke opp (problemer med lydopptaker etc). Ettersom jeg var i samme klasserom som elevene da de arbeidet med oppgaveheftet, hadde jeg mulighet til å observere kroppsspråk, peking og mimikk og også komme med innspill i diskusjonene dersom de inviterte meg til det. I utgangspunktet ønsket jeg å ha en tilbaketrukket rolle som observatør fordi fokuset var å finne ut hvilke løsningsstrategier og resonnement elevene hadde (Observer-as- participant, Wellington, 2015 side 169). I enkelte situasjoner kan det hende jeg gikk ut over min rolle som «observatør som deltar» til å bli en «deltakende observatør» (Participant as observer).

3.3.2 Intervju

Hensikten med intervjuene var først og fremst å la elevene utdype resonnementene som lå bak løsningene og strategiene de hadde brukt under gruppearbeidet. Ønsket var et rikt materiale og gjerne detaljerte svar som kunne bli gjenstand for analyse og drøfting i forhold til forskningsspørsmålet. Understrekningen av intervjuobjektets perspektiv er et kjennetegn ved kvalitative intervju (Bryman, 2016). Wellington hevder at gjennom intervju tilbys intervjuobjektene en plattform der de kan la sine synspunkt bli hørt og også lest av andre (Wellington, 2015). Selv om kvalitative intervjuer har store fordeler, og ifølge Bryman «… is probably the most widely employed method in qualitative research» (Bryman, 2016 side 466), kan de også by på utfordringer. Elevene kjente meg ikke på forhånd, samtidig som jeg var avhengig av at de viste meg tillit slik at de kunne være ærlige i sine svar. For å skape tillit og gjøre elevene så trygge og komfortable som mulig la jeg vekt på å være rolig, blid, lyttende og imøtekommende. Jeg valgte også å legge intervjuet opp som en samtale mellom to parter mer enn en utspørring eller eksaminasjon av elevene.

Intervjuene var semi-strukturerte etter Brymans definisjon. Ifølge ham kjennetegnes slike intervjuer ved at intervjueren tar utgangspunkt i spørsmål fra en forberedt intervjuguide, men er fleksibel med tanke på rekkefølge og dybde i de enkelte spørsmålene (Bryman, 2016). Jeg hadde noen spørsmål i intervjuguiden som jeg ønsket å stille alle elevene, men også individuelle spørsmål ut fra besvarelsene deres på gruppearbeidet. I enkelte intervjuer berørte vi flere temaer. Andre tema ble mer særstoff ettersom elevene selv responderte og slik drev samtalen i ulike retninger. Ettersom man i kvalitativ forskning er interessert i intervjuobjektenes synspunkter, opplevde jeg ikke «tankesprang» eller små «avsporinger» nødvendigvis som ødeleggende eller irrelevante for forskningen. De kunne tvert imot vise seg å gi verdifull innsikt i intervjuobjektenes resonnement og være berikende i drøftingen av elevenes ulike løsninger og strategier i møte med ulikheter. Intervjuguiden med generelle spørsmål er vedlagt (vedlegg B).

Intervjuene startet gjerne med at jeg hentet jeg frem intervjuobjektets oppgavehefte som vi så gikk gjennom. Jeg hadde forberedt individuelle spørsmål til elevene på oppgaver der jeg ønsket utfyllende kommentarer, og i enkelte situasjoner tok de selv initiativ til å forklare mer i dybden. Spørsmålene var en blanding av åpne sonderende spørsmål, slik som «Kan du forklare hva du gjorde her?», og mer direkte som «Hvordan kan dette bli mer enn null?». Elevene fikk tid til å tenke seg om, og jeg var ikke redd for stillhet. Jeg brukte også her lydopptaker slik at jeg kunne ha fokus på å være deltakende i samtalen i visshet om at innspillingene gjorde det mulig for meg å lytte til og transkribere elevenes resonnement og innspill i ettertid.

3.3 Utvalg

Utvalget i denne studien var 16 elever som gikk andre året på en videregående skole. Elevene hadde valgt matematikk S1 (matematikk for samfunnsfag). Noen av dem hadde hatt matematikk 1T første året, og hadde der blant annet sitt første møte med andregradsulikheter. De øvrige hadde matematikk 1P der dette ikke er en del av kompetansemålene. Jeg ønsket en elevgruppe som hadde arbeidet med både lineære og kvadratiske ulikheter, og slik sett kunne jeg brukt elever i en 1T-klasse eller elever som hadde valgt R-løpet. Det var praktiske årsaker som gjorde valget falt på denne S1-gruppen. Jeg er selv ansatt ved skolen, og forhørte meg med mine kollegaer om hvem som hadde mulighet til å låne meg en klasse til studien. Læreren til S1-klassen meldte seg, og dermed ble det slik. Klassen bestod av 15 jenter og èn gutt. Hverken kjønn eller faglig nivå ble tatt i betraktning i dette utvalget ettersom alle ønsket å delta. Jeg vil karakterisere utvalget som målrettet[4] ut fra Brymans definisjon. Han hevder at målrettet utvalg handler om å samle deltakere strategisk slik at utvalget kan bidra i forhold til forskningsspørsmålet (Bryman, 2016). Jeg ønsket å se hva som karakteriserer løsninger av ulikheter blant elever i videregående skole. Dermed valgte jeg en klasse der elevene hadde lært om både lineære og kvadratiske ulikheter, og fordi jeg selv er ansatt ved en skole ble det praktisk med tanke på kontakter og tidsbruk å samle empiri der. Etiske betraktningen rundt å samle empiri ved egen arbeidsplass diskuteres i delkapittel 3.7.

Under gruppearbeidet ble elevene fordelt på fem grupper. Jeg valgte å intervjue èn representant fra hver av de fem gruppene. Elevenes besvarelser i oppgaveheftet samt deltakelse i diskusjonene i gruppearbeidet dannet utgangspunktet for utvelgelse til intervju. Jeg ønsket å gjennomføre intervjuene så snart som mulig etter gruppearbeidet slik at elevene kunne huske det de hadde arbeidet med. Dermed hadde jeg et visst tidspress på å velge ut de fem intervjuobjektene. Jeg leste gjennom alle 16 besvarelser og lyttet gjennom lydopptakene èn gang. Utvalget ble så gjort ut fra det Bryman kaller typical-case og maksimal variasjon-kriterier (Bryman, 2016): Noen intervjuobjekter var sterkt muntlig aktive i gruppearbeidet, andre var stillere. Noen hadde flere tydelig sterke matematiske resonnement mens andre var mer usikre og rotete i formuleringene. Ønsket var at

[4] Min oversettelse av «purposive»

elevene som ble intervjuet skulle gjenspeile variasjonen i klassen samtidig som de kunne gjøre rede for både egne og gruppens refleksjoner rundt ulikhetene i oppgaveheftet.

3.4 Oppgaveheftet

Før gruppearbeidet laget jeg et hefte med tre oppgaver knyttet til ulikheter. I oppgave 1a-d ønsket jeg at elevene skulle skrive sine tanker knyttet til fire spørsmål om matematiske ulikheter. Oppgave 2 bestod av til sammen sju lineære og kvadratiske ulikheter som skulle løses algebraisk, mens de sju ulikhetene i oppgave 3 skulle løses grafisk. Oppgavene i oppgaveheftet er basert på tidligere gitte oppgaver i flere studier (Ellerton & Clements, 2011; Halmaghi, 2011; P Tsamir & Almog, 2001). De er også fundert i læreplan for matematikk S1 som sier at elevene skal kunne løse ulikheter av første og andre grad. Jeg prøvde å innlemme både ulikheter som var ordinære for elevene, og også oppgaver som var mer uvanlige for dem. «Ordinære ulikheter» innebærer at ulikhetene ble gitt på en kjent algebraisk form for elevene, slik som ulikheten $x^2 - x - 4 > 2$. De kunne løses med metoder elevene kjente fra læreboken og selve løsningen(e) var også slik elevene har møtt gjennom tidligere oppgaver og dermed kanskje forventet å få. Oppgaveheftet inneholdt også flere oppgaver som jeg forventet ville være uvanlige for elevene. For eksempel blir ulikheten i oppgave 2f gitt ferdig faktorisert ($(x+3)^2 < 0$), mens ulikheten i oppgave 2b $(9(x+1) > 9(x-2))$ gir $0 > 0$, altså ingen løsning, jamfør delkapittel 2.4. Ifølge Sfard (1994) kan kuriositeter og ikke-standard eksempler skape muligheter til å gå dypere inn i elevens forståelse av ulike konsepter. Hensikten med å la elevene møte både vanlige og uvanlige ulikheter var å finne ut hvilke løsninger og metoder de ville bruke og hvordan de resonnerte i møte med disse. Videre følger en presentasjon av potensialet i de ulike oppgavene. Oppgaveheftet som helhet er vedlagt (vedlegg A).

3.4.1 Oppgave 1a-d

Denne oppgaven ble inkludert i heftet på grunn av potensialet til å gi verdifull informasjon om elevenes syn på og tanker om ulikhetsbegrepet før selve gjennomføringen. Det var dermed et bevisst valg å plassere denne oppgaven først slik at svarene her ikke skulle påvirkes av elevenes arbeid med ulikhetene i oppgaveheftet.

a. a) Skriv ned hva du legger i begrepet *matematisk ulikhet*. Du kan gjerne bruke symboler og illustrasjoner i tillegg til ord.
   b) På hvilke måter er likninger og ulikheter like og forskjellige?
   c) Hva menes med «en løsning av en ulikhet»? Gi eksempler.
   d) Kan x=2 være løsning av en ulikhet? Hvorfor /hvorfor ikke?

Figur 3.4.1 Spørsmålene i oppgave 1

Oppgave a-c baserer seg på oppgaver brukt i studien til Halmaghi (2011, s. 204), mens oppgave d er hentet fra Tsamir (2001). Tidligere forskning har vist at en vanlig misoppfatning blant elever og studenter er at de behandler ulikheter som likninger. I enkelte sammenhenger vil dette fungere greit og føre til riktig løsning, mens i andre sammenhenger vil analogier mellom likninger og ulikheter føre til feil løsning. Et eksempel er ulikheten i oppgave 2g ($x^2 + 2 > 0$) som løses av alle reelle tall mens likningen $x^2 + 2 = 0$ ikke har løsning. Spørsmålet i 1b ble tatt med fordi jeg var interessert i å høre hva elevene tenker om likheter og forskjeller på likninger og ulikheter. Spørsmålet i 1d vil gi informasjon om hva elevene forventer å få som løsning av en ulikhet. I tillegg vil den kanskje forberede elevene på hva de vil møte i regneoppgavene.

3.4.2 Oppgave 2 a-f

Overskriften for oppgave 2 i elevheftet var «Løs følgende ulikheter». Det ble ikke nevnt spesifikt at elevene måtte bruke algebraisk fremgangsmåte, men det viste seg at alle elevene valgte algebraiske tilnærming. Enkelte oppgaver liknet dem elevene hadde løst i læreboken, mens andre nok var noe uvante for dem. Figur 3.4.2 gir en oversikt over ulikhetene i oppgave 2

Lineære ulikheter	Kvadratiske ulikheter
a) $3x - 2 \geq -x + 6$	$d)$ $x^2 - x - 4 > 2$
$b)$ $9(x + 1) > 9(x - 2)$	$e)$ $x^2 > 1$
$c)$ $x + 3 > 6 - (3 - x)$	$f)$ $(x + 3)^2 < 0$
	$g)$ $x^2 + 2 > 0$

Figur 3.4.2 Oppgave 2: Ulikheter som ble løst algebraisk

Oppgave 2a-c Lineære ulikheter algebraisk

Oppgave 2a er en ordinær ulikhet for at elevene skulle komme i gang. Jeg forventet ingen vanskeligheter her, spesielt siden også divisjon av negative tall og regelen om å «snu tegnet» enkelt kan unngås. Oppgave 2b gir $1 > -2$ (eventuelt $9 > -18$), det vil si at løsningsmengden er $\mathbb{R}$. Dette er kanskje en uventet situasjon for elevene, og jeg ville se hvilke resonnement de gjorde seg rundt dette, særlig med tanke på Halmaghis punkt 4 der hun hevder at elevene ofte avviser løsninger som er avvikende i forhold til det de er vant til eller forventer. Tilsvarende gir oppgave 2c løsningen $3 > 3$ som aldri er sant for noen x, altså ingen løsning, jamfør Tsamir og Almogs studie fra 1998 om at elever får problemer når de møter ulikheter uten løsning. Begge disse ulikhetene er hentet fra Ellerton og Clements (2011) som fant at 23% av 328 lærerstudenter i matematikk løste ulikheten i 2b korrekt mens tilsvarende tall for 2c var 33%. Ulikhetene har løsninger som kanskje er nye eller uvanlige for elevene, og jeg var nysgjerrig på hvordan de resonnerte rundt dette.

Oppgave 2d-g Kvadratiske ulikheter algebraisk

Jeg regner første kvadratiske ulikhet , $x^2 - x - 4 > 2$, som en «ordinær» oppgave for elevene. Årsaken er at den kan løses ved de metodene elevene har blitt introdusert for gjennom læreverket sitt (se delkapittel 2.4). Andregradsuttrykket må først ordnes, det vil si samle alle tall og bokstaver på den ene siden slik at man får null på den andre ($x^2 - x - 6 > 0$). Deretter kan elevene finne nullpunkt og faktorisere andregradsuttrykket for eksempel ved hjelp av andregradsformelen. De får da to røtter, $x = 3$ og $x = -2$ som gir $(x - 3)(x + 2) > 0$. De kan deretter tegne fortegnsskjema som vist i avsnitt 2.4 og finne løsningen $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$. Den neste ulikheten $x^2 > 1$ kan enkelt faktoriseres uten andregradsformel og deretter drøftes i fortegnsskjema. Løsningen er $x < -1$ eller $x > 1$. Oppgave 2c ($(x + 3)^2 < 0$) har ingen reell løsning. Her forventet, eller håpet jeg, at i alle fall noen elever brukte det de vet om kvadrattall til å løse ulikheten uten fortegnsskjema. Elever som har et utydelig skille mellom likninger og ulikheter, kan komme til å konkludere med for eksempel «$x > \pm 1$» for $x^2 > 1$ og «$x = -3$» for $(x + 3)^2 < 0$. Ulikheten i 2g, $x^2 + 2 > 0$, er sann for alle x, mens den tilhørende likningen, $x^2 + 2 = 0$ ikke har noen løsninger. Her vil kanskje noen elever trekke slutningen at heller ikke ulikheten har løsning. Ellerton og Clements (2011) brukte også denne ulikheten i sin studie, og fant at 53 av 328 studenter (16%) løste den korrekt.

3.4.3 Oppgave 3a-f

Her skulle elevene bruke grafer til å løse sju ulikheter. Ulikhetene ble fremstilt algebraisk (se tabell 3.3) og som sju bilder med ferdig tegnede grafer. Elevene måtte selv finne ut hvilke bilder og ulikheter som hørte sammen, deretter lese løsningen av grafene og skrive den på algebraisk form. Jeg valgte å gi elevene grafene slik at de ikke trengte å tegne dem selv, verken for hånd eller ved hjelp av digitale hjelpemidler. Begrunnelsen er at jeg ønsket at elevene skulle fokusere på å løse ulikheter, og ikke tegne grafer, den tiden jeg hadde til rådighet. Oppgave 2 og 3 ble laget slik at de korresponderer, det vil si at 2a-3a, 2b-3b osv tilsvarer hverandre med tanke på oppstilling og løsning. Figur 3.4.3 gir en oversikt over ulikhetene i oppgave 3.

Lineære ulikheter	Kvadratiske ulikheter
a) $3x + 3 \leq x + 1$	d) $x^2 - 6x + 9 > 4$
b) $4(x + 1) > 4(x - 3)$	e) $x^2 > 4$
c) $x + 5 > 8 - (3 - x)$	f) $(x - 2)^2 < 0$
	g) $x^2 + 3x + 4 > 0$

Figur 3.4.3 Oppgave 3: Ulikheter med grafbilder

Oppgave 3a-3c Lineære ulikheter grafisk

3a er en standard lineær ulikhet med èn løsning (ett skjæringspunkt) mens 3b gir parallelle linjer der venstre side av ulikheten, $4(x + 1)$, alltid ligger over høyre siden $4(x - 3)$ og dermed er ulikheten sann for alle verdier av x. På samme måte som i 2c, vil ulikheten 3c algebraisk ende opp med en usann påstand: $5 > 5$. Grafisk vil dette gi to linjer som overlapper, og dermed vil ikke den ene være større enn den andre. Jeg forventet at elevene klarte å sette sammen riktig bilde til ulikhetene, men var spent på om de klarte å finne ut hvor løsningen av ulikhetene var.

Oppgave 3d-3g Kvadratiske ulikheter grafisk

Grafen til 3d er en parabel med et bunnpunkt og to nullpunkt. Elevene bør/kan her streke opp linjen y = 4, og lese av løsningene ved hjelp av skjæringspunktene. Ulikheten har to løsningsintervall, slik oppgave 2d har. Dersom elevene klarer oppgave 3d, vil 3e, $x^2 > 4$ kunne løses på tilsvarende måte, altså tegne linjen y = 4 og finne løsningene ved hjelp av skjæringspunktene mellom linjen og parabelen. Grafen til 3f $(x - 2)^2$ har ett nullpunkt i $x = -2$ og ligger ellers over førsteaksen. Selv om likningen $(x - 2)^2 = 0$ har en løsning, vil ulikheten $(x - 2)^2 < 0$ være usann for alle x. Andregradsuttrykket til ulikheten i 3f $(x^2 + 3x + 4 > 0)$ har ingen reelle røtter. Vi får en parabel som i sin helhet ligger over førsteaksen. Dermed er alle reelle tall løsninger av denne ulikheten. Jeg var nysgjerrig på om elevene klarte å bruke grafbildene til å løse ulikhetene og hvordan de arbeidet med overgangene mellom de ulike registrene (jamfør Duval). Jeg lurte også på om flere elever ville komme frem til riktig løsning ved å bruke grafer enn når de arbeidet algebraisk med kvadratiske ulikheter slik Tsamir fant i sin undersøkelse, eller om bruk av grafer førte til flere vanskeligheter for elevene.

3.5 Gjennomføring

Gruppearbeidet foregikk en dobbeltime (90 minutters økt) en mandag i mai. Ifølge læreren, var lineære ulikheter tema ved starten av skoleåret, mens andregradsulikheter stod på timeplanen i november. Det var dermed en stund siden elevene hadde hatt en periode med konsentrert fokus på ulikheter. Uken før gruppearbeidet hadde de hatt prøve i funksjonsdrøfting der de blant annet brukte fortegnsskjema til å finne ekstremalpunkt og drøfte monotoniegenskaper til polynomfunksjoner. Enkelte elever nevnte at fortegnsskjemaet brukes til dette og blandet nok noe sammen med ulikhetene.

Jeg brukte omtrent 10 minutter i starten av timen på å minne elevene om hva som var hensikten med prosjektet og oppfordret dem til å være muntlige på gruppene slik at jeg kunne få med resonnementene og tankene bak løsningsmetodene deres på lydopptaket i tillegg til de skriftlige besvarelsene. De 16 elevene fikk utdelt hvert sitt oppgavehefte og ble deretter fordelt på fem grupper. Jeg hadde èn lydopptaker til hver gruppe. En av gruppene bestod av fire elever, og i de øvrige gruppene var det tre deltakere. Alle gruppene var i samme klasserom. Ettersom jeg ikke kjente elevene, ble inndelingen foretatt ut fra dem de satt nærmest i klasserommet, og var slik sett tilfeldig fra min side. Elevene brukte omtrent 60 minutter på å fullføre oppgavene som jeg deretter samlet inn sammen med lydopptakene. Alle ble ferdige med hele oppgaveheftet. Jeg vil si at de arbeidet konsentrert og fokusert med oppgavene, og jeg opplevde at det var en god og positiv stemning i klasserommet. De fem intervjuene ble gjennomført i løpet av to dager uken etter gruppearbeidet. Intervjuene varte mellom 15 og 30 minutter, og også disse ble tatt opp med lydopptaker og transkribert.

3.6 Troverdighet

Bryman (2016) henviser til Lincoln og Guba (1985 og 1994) sine begreper for vurdering av kvalitativ forskning. De forslår å bruke «troverdighet» og «autentisitet» framfor validitet og reliabilitet som har sitt utgangspunkt i kvantitativ forskning. Dette begrunnes blant annet med at validitet og reliabilitet forutsetter at det finnes èn sann måte å forklare virkeligheten på, og at dette ikke vil være tilfelle i sosial forskning.

Videre beskriver Bryman fire kriterier som kan brukes for å vurdere troverdigheten til kvalitativ forskning: (1) «Credibility», eller pålitelighet i konklusjoner som legger vekt på om forskeren i tilstrekkelig grad har forsikret seg om at han har forstått deltakerne riktig. Gjennom lydopptak under gruppearbeid har jeg hatt mulighet til å høre elevenes diskusjoner, og dette kunne gi meg mulighet til å forstå resonnementene bak besvarelsene deres. Intervjuene i etterkant hadde også som en hensikt å gi elevene mulighet til å utdype uttalelser og refleksjoner, og slik kunne jeg få et bredere grunnlag for konklusjonene mine. Det er selvsagt likevel mulig at jeg kan ha misforstått uttalelser eller formuleringer fra elevene. (2) «Transferability», eller overførbarhet omhandler i hvilken grad forskningen min kan overføres eller være gjenkjennbar for andre. I kvalitativ forskning generelt, og case-studier spesielt, kan man ikke uten videre generalisere funn fordi forskningen skjer i en gitt sosial kontekst med gitte individer. Det er dermed ikke gitt at man vil få samme funn i en annen gruppe, kanskje heller ikke i samme gruppe eller kontekst på et annet tidspunkt. Ettersom jeg har forsket på èn gruppe med 16 elever, er jeg bevisst på at jeg har mulighet til å finne ut noe spesifikt om disse 16 elevenes løsninger av ulikheter, og at dette ikke uten videre kan generaliseres til å gjelde andre elever. Ifølge Bryman bør man etterstrebe rike og detaljerte beskrivelser av kulturen man forsker på for at leseren kan bedømme om funnene er gjenkjennbare og overførbare. I delkapittel 3.3 (utvalg) og 3.5 (gjennomføring) får man et lite innblikk i S1-klassen min. Transkripsjoner vil indirekte gi et innblikk i kommunikasjon mellom elevene, og håpet er at andre vil kjenne igjen både løsningsmetoder og resonnement som elevene brukte slik at resultat og funn kan oppleves som relevante for dem. (3) «Dependability» er et mål på i hvilken grad metodene og målingene er pålitelige. En måte å imøtekomme kravet om pålitelighet er å synliggjøre sporene som leder frem til konklusjonen. Dette kaller Bryman «audit trail» (Bryman, 2016, side 384), og handler om å dokumentere og gjøre de ulike prosessene gjennomsiktig for leseren. Lagrede dokumenter fra ulike steg i prosessen samt lydopptak fra gruppearbeid og intervjuer med tilhørende transkripsjoner kan være med på å dokumenter de ulike stegene og dermed styrke påliteligheten i min studie. (4) «Confirmability», belyser forskerens rolle. I sosial forskning må man ifølge Bryman erkjenne at «complete objectivity is impossible» (Bryman, 2016, side 386), men man skal tilstrebe at ikke personlige verdier og teorier styrer forskningen eller funnene. Også her vil jeg peke på gjennomsiktighet i prosessen med tanke på å gjøre nødvendig dokumentasjon tilgjengelig for leseren. Dette gjøres ved å bruke transkripsjoner fra gruppearbeid og intervjuer i analysen for å underbygge funnene samt en detaljert beskrivelse av analyseprosessen (kapittel 3.8). Enkelte formuleringer fra elevene kunne være vanskelige å fortolke eller forstås på flere måter. Det er dermed viktig at analysen tydelig viser hva som er deltakernes uttalelser og hva som er mine fortolkninger og også at jeg åpner opp for at uttalelser ikke alltid kan forstås på en bestemt måte.

Autentisitet, eller ekthet er et annet begrep Bryman (2016) nevner. Et kriterie for autentisitet er om studien gir en åpent og ærlig presentasjon av deltakernes ulike synspunkt. Jeg har søkt å la mangfoldet i elevenes synspunkt komme til uttrykk blant annet ved å velge maksimal-variasjon som kriterie for utvalg til intervju.

3.7 Etiske betraktninger

Bryman (2016) nevner flere etiske aspekter som er viktige for forskere å være bevisste på. Han nevner Diener og Crandall (1978) sine fire prinsipper som handler om å ikke påføre deltakerne noen form for skade, ansvar for å innhente informert samtykke, beskytte deltakernes privatliv og unngå alle former for bedrageri eller å føre dem bak lyset. I mitt tilfelle er jeg ansatt ved skolen der undersøkelsen foregikk. Jeg kjente navnene til et par av elevene, ellers var de ukjente for meg. Jeg hadde heller ikke vært lærer for dem i noen fag på det tidspunktet datainnsamlingen foregikk. Det var et bevisst valg å ikke forske på egne elever fordi jeg ville unngå en uheldig rolleblanding for både min og elevenes del i forhold til vurdering og karaktersetting. Jeg presiserte også for elevene at jeg ikke på noen måte ville videreformidle opplysninger fra undersøkelsen til deres faglærer i matematikk. Selv med disse forholdsreglene, kan det hende elevene ville oppleve det problematisk å forholde seg til meg som forsker og ikke som lærer fordi de visste at jeg var ansatt som lærer ved skolen, og også at jeg i perioder samarbeider med deres faglærer i matematikk.

I forkant av datainnsamlingen ble informert samtykke innhentet fra samtlige deltakere. Skjemaet inneholdt informasjon om formål med studien, hva eventuell deltakelse ville innebære og forespørsel om tillatelse til lydopptak både under gruppearbeid og eventuelt intervju. Elevene ble også informert om at deltakelsen var frivillig og at de når som helst kunne trekke samtykket uten å oppgi noen grunn. Ettersom alle elevene var over 16 år og det ikke var involvert video/bildeopptak, var det ikke nødvendig å innhente godkjenning fra foresatte. For å ivareta elevens anonymitet ble alle tilordnet fiktive navn i transkripsjonene. Siden prosjektet innebar behandling og lagring av lydopptak av personer, ble det meldt til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD). NSD godkjente prosjektet som dermed er vurdert å være i tråd med bestemmelsene i personvernloven §31.

3.8 Strategi for analyse

«There are many ways of analyzing qualitative data» (Coffey and Atkinson, 1996, i følge Wellington, 2015, side 260). Kvalitativ forskning produserer ofte mye data, og det blir derfor en viktig oppgave å både redusere, kategorisere og analysere datamengden for å finne frem til det som virkelig er funn i empirien.

Wellington (2015) beskriver data-analyse som en rotete og ofte komplisert prosess. Han viser til Miles og Hubermann (1994) som grovt sett bryter ned prosessen til tre steg: Datareduksjon, oversikt over data («data-display») og konklusjoner. Wellington selv deler inn i sju steg, og hevder at han i løpet av en analyseprosess beveger seg mellom disse flere ganger. I fortsettelsen tar jeg utgangspunkt i Miles og Hubermanns tre steg fordi det gjorde det enklere for meg å gi en samlet oversikt over min analysestrategi.

I mitt tilfelle hadde jeg 16 elevhefter som inneholdt besvarelser på til sammen fire spørsmål og 14 ulikheter. I tillegg hadde jeg fem lydopptak fra gruppearbeidet, hver på en time som skulle transkriberes, og notater og lydopptak fra fem intervjuer. Dette ble en stor mengde data, og det var helt nødvendig å redusere datamengden. Jeg nummererte de fem gruppene fra 1 til 5, og startet med å transkribere lydopptakene fra gruppe 1 og deretter intervjuet med eleven fra denne gruppen slik at jeg fikk mest mulig sammenheng mellom gruppearbeidet og resonnementene fra intervjuet. Deretter gjorde jeg det samme med neste gruppe og intervjuobjekt til jeg var ferdig med alle gruppene. Datainnsamlingen foregikk i mai, og fordi jeg skulle kombinere studier med ordinært arbeid ble jeg ikke ferdig før sommerferien. Dermed brukte jeg forholdsvis lang tid på å transkribere. Dette opplevde jeg stort sett som en fordel fordi det gav meg tid til å fordøye informasjonen jeg fikk gjennom skriveprosessen, og fordi jeg ble tvunget til å oppdatere meg og lese gjennom på nytt hver gang jeg skulle fortsette å skrive. Wellington (2015) bruker begrepene «immersion» (neddykking) og «reflecting» (refleksjon) om de to første stegene i analyseprosessen, og for min del foregikk dette om hverandre i transkripsjonsperioden.

Neste steg i analyseprosessen innebar å skaffe seg oversikt over dataene. Wellington hevder at ordet «analyse» bokstavelig talt betyr «to break down into components, or to divide a whole into its parts» (Wellington, 2015, side 261). Jeg arbeidet meg kronologisk gjennom oppgavene, det vil si at jeg startet med oppgave 1a og tok for meg alle de 16 besvarelsene samt transkripsjoner og intervjuer for denne oppgaven. Jeg så etter fellestrekk i besvarelsene, og også om elever eller grupper hadde utsagn ellet beskrivelser som skilte seg ut. For å få oversikt laget jeg tabeller for både grupper og etter hvert også enkeltelever der jeg fikk oversikt over beskrivelser de brukte på hvert enkelt spørsmål. Slik kunne jeg følge både grupper og enkeltelever gjennom de fire spørsmålene i oppgave 1. I utgangspunktet hadde jeg en todelt problemstilling som også innebar å analysere elevenes oppfatninger av ulikheter, og i den sammenheng var oppgave 1 sentral. Hensyn til oppgavens omfang førte til at jeg måtte redusere forskningstema, og jeg valgte å fokusere på hva som karakteriserer elevenes løsninger og løsningsmetoder. Selv om jeg i min prosess gjennomførte en detaljert analyse av oppgave 1, er denne tonet ned i analysen. Jeg valgte å ta med det som etter min mening ble relevant i forhold til forskningsspørsmålet, og ulikhetene elevene arbeidet med. Oppgave 1 er dermed først og fremst et supplement til oppgave 2 og 3.

Oppgave 2a-c handlet om å løse lineære ulikheter algebraisk. Ut fra teorien jeg hadde lest laget jeg en liste med forslag til kategorier, der jeg blant annet brukte Halmaghis liste over vanlige feil i møte med ulikheter (se delkapittel 2.3.2). Dermed hadde jeg a priori kategorier, for eksempel «avslår løsninger som ikke passer», «løser som likning» og «problemer når ulikheten ikke har løsning». Jeg tok så for meg oppgave 2a i alle grupper og intervjuer på samme måte som i oppgave 1, og prøvde å plassere besvarelser og resonnement i disse katogeriene. Etter hvert erfarte jeg det Wellington (2015) beskriver; at analysebitene ikke alltid passer i disse pre-eksistente kategoriene, og man må ut fra sitt materiale utvikle nye a posteriori kategorier slik at alle bitene i analyseprosessen får sitt hjem. Jeg tok dermed en ny runde med alle elevens besvarelser, og fokuserte konsentrert på følgende spørsmål, avledet av forskningsspørsmålet: Hvilke løsningsmetoder bruker elevene? Hva karakteriserer løsningene deres? Ut fra dette laget jeg tre kategorier for algebraisk løsning av lineære ulikheter: (1) korrekt løsning, (2) Svarer «ingen løsning» feilaktig, eller med feil begrunnelse, (3) utelater x i løsningen. Jeg trengte også en kategori der jeg kunne samle enkeltelever som hadde sine varianter, og denne kalte jeg (4) «annet». Bryman (2016) bruker begrepet «coding» om den innledende fasen i analyse av kvalitativ data og beskriver dette som en prosess der responsen fra deltakerne «is broken down into components which are given names» (Bryman, 2016, side 689). Enkelte av kategoriene svarer omtrent til a priori-kategoriene, for eksempel vil min kategori (2) til en viss grad innebære «avslår løsninger som ikke passer» eller «problemer når ulikheten ikke har løsning». Dermed ble kategoriene en slags blanding av a priori og a posteriori kategorier som ifølge Wellington (2015) er mest vanlig i kvalitativ forskning.

I oppgave 2d-f skulle elevene løse andregradsulikheter. Også her startet jeg med a priori kategorier ut fra teorien, for eksempel «løser som andregradslikning» og «godtar ikke x= i løsningen» (Pessia Tsamir & Bazzini, 2001). Etter hvert endte jeg likevel opp med fremgangsmåten fra forrige oppgaver, det vil si at jeg laget kategorier ut fra elevenes besvarelser med fokus på forskningsspørsmålet. Jeg brukte excel til å lage store tabeller der jeg fikk oversikt over grupper og enkeltelever i samme tabell. Tabell 3.8.1 på neste side er et eksempel på hvordan elevenes løsninger og metoder i oppgave 2d ble kodet og systematisert.

		Korrekt	x>2Vx>1	"A"	Feil ulikhetstegn	x=3Vx=-2 kun abc		abc	fortegn-skjema
	Jenny			1				1	1
	Vera			1				1	1
Gruppe 1	Nina			1				1	1
	Frida			og	1			1	1
	Åse				"="			1	1
Gruppe 2	Oda				1			1	1
	June			1		1		1	0
	Hedda					1		1	0
Gruppe 3	Nora					1		1	0
	Anna					1		1	0
	Helene				1			1	1
	Pia			1				1	1
Gruppe 4	Lars			1				1	1
	Hanne		1		1	1		1	0
	Dina		1		1	1		1	0
Grupge 5	Wilde		1		1	1		1	0
	Sum	0	3	6	6	7		16	9

Tabell 3.8.1 Eksempel på tabell fra analyseprosessen

Da jeg hadde laget tilsvarende oversikter over alle besvarelser i oppgave 2d-f måtte jeg finne måter å sette sammen disse «bitene» på. Wellington kaller dette punktet «Recombining/Synthesizing Data» (Wellington, 2015, side 262) og sier det handler om å finne mønster, tema og regelmessigheter i datamaterialet. Jeg tok igjen utgangspunkt i litteraturen fra kapittel 2 for å finne egnede samlekategorier. Et funn i tidligere forskning er at elever behandler ulikheter som likninger, og ut fra mine analyser passet det også å navngi en kategori til «Løser som andregradslikning». Her samlet jeg elever som kun brukte andregradsformel, elever som trakk kvadratrot på begge sider av ulikhetstegnet og elever som hevder at dersom uttrykket ikke har nullpunkt (de får negativt tall under rottegnet i andregradsformelen), vil ikke ulikheten ha løsning. I de to, og muligens tre, første andregradsulikheten kunne og kanskje burde elevene drøfte ulikheten i fortegnsskjema. Ettersom dette var et sentralt steg for å klare å løse disse ulikhetene ble dette et punkt som skilte elevene i forhold til løsningsstrategier og løsninger. Jeg valgte å bruke benevnelsen «fortegnsskjema» som en egen kategori. Elevene som tilhører kategorien «fortegnsskjema» har faktorisert andregradsuttrykket og drøftet faktorene. Selv om flere elever gjør dette fant jeg at en del elever hadde problemer med korrekt bruk av tegnene "$\wedge$," $\vee$ " («logical connectives» jamfør Pessia Tsamir et al., 1998) og ulikhetstegnene når de skulle notere løsningene sine. Disse samlet jeg også i en felles kategori som jeg kalte «Feil/mangelfull notasjon». Dette samsvarer med en a priori kategori jeg hadde fra Tsamir (1998) som jeg hadde kalt «problemer med og/eller» og Halmaghis punkt om «ukorrekt bruk av ulikhetstegn».

Oppgave 3 bestod av tre lineære og fire kvadratiske ulikheter sammen med sju grafbilder i tilfeldig rekkefølge. Jeg startet med oppgave 3a og denne gangen laget jeg ikke kategorier på forhånd, men analyserte gruppe 1 med tilhørende intervjuobjekt og laget etiketter ut fra deres løsninger. Når jeg så fortsatte med neste gruppe, brukte jeg samme kategorier som for gruppe 1 og supplerte med nye dersom jeg trengte det. Dermed vandret jeg frem og tilbake mellom ulike steg i analyseprosessen slik Wellington (2015) beskriver. Oppgave 3a-c omhandler grafisk løsning av lineære ulikheter. I disse oppgavene klarte alle elevene å finne riktig bilde, og jeg så det derfor som unødvendig å ha en egen kategori med «finner riktig bilde». Ikke alle elevene brukte imidlertid grafene til å løse ulikhetene. De som brukte dem ble plassert i en egen kategori kalt «grafisk løsning.» Flere elever valgte å arbeide algebraisk med ulikhetene selv om instruksen i overskriften til oppgave 3 lød «Bruk vedlagte grafer til å løse ulikhetene». Jeg valgte dermed å kalle en kategori «løser algebraisk». Enkelte elever løste ikke ulikhetene på noen måter. De kombinerte ulikheter med bilder og stanset der. Disse ble plassert i kategorien «Plasserer kun oppgaven til bildet». Ulikheten i oppgave 3a gir to linjer som krysser hverandre. Enkelte elever noterte skjæringspunktet som løsning. Man kan argumentere for at disse bruker grafene i løsningen sin, og derfor burde plasseres i «grafisk løsning». Jeg valgte imidlertid å lage en egen kategori «Finner kun skjæringspunkt» fordi disse utmerket seg i forhold til de andre som brukte grafene.

De fire siste ulikheten i heftet var oppgave 3d-g der elevene møtte andregradsulikheter som skulle løses grafisk. Her inneholdt hvert av de fire grafbildene kun en parabel hver. Oppgave 3d, $x^2 - 6x + 9 > 4$, ble dermed illustrert med grafen til $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Her burde jeg kanskje også tegnet $y = 4$ inn i bildet, men det glemte jeg å gjøre. Elevene måtte dermed eventuelt tegne denne linjen selv. Det er usikkert hvordan dette påvirket resultat og funn i forbindelse med oppgave 3d-g, men det hadde kanskje gjort det enklere for elevene å finne riktige bilder. Flere fant riktige bilder, men ikke alle. Dermed kalte jeg en kategori «Finner riktig bilde». Også i disse oppgavene var det elever som kombinerte bilder og ulikheter, men ikke brukte grafene til å løse dem, og jeg brukte samme kategori som for lineære ulikheter «Plasserer kun oppgave til bilde». Det samme gjelder kategoriene «løser algebraisk» og «løser grafisk» som er beskrevet ovenfor. Ut fra elevenes besvarelser trengte jeg en kategori til her som jeg også brukte i algebraisk løsning av andregradsulikheter, nemlig «feil/mangelfull notasjon». Elevene løser ulikheten, men har ukorrekt bruk av enten ulikhetstegn eller tegnene $\wedge$, $\vee$ når de noterer løsningene sine. Andre har mangelfull notasjon. Det innebærer at de i diskusjonene sier hva løsningen er uten å notere den ned, eller de tegner streker på grafbildene for å illustrere løsningene sine, og altså utelater en algebraisk notasjon.

Jeg brukte først og fremst intervjuene for å la elevene gi utfyllende kommentarer til gruppearbeidet og har valgt å presentere utdrag som er relevante i forhold til funn i elevens skriftlige besvarelser. Drøfting og presentasjon av data er en viktig del av en forskning. I analysen blir oppgavene presentert og analysert i kronologisk rekkefølge slik at vi følger klassen samlet gjennom ulikhetene de arbeidet med. Drøfting og diskusjon i kapittel 5 følger en tematisk oppbygging som ifølge Bryman (2016) er en mye brukt tilnærming i kvalitativ forskning. Jeg systematiserer de mest interessante funnene på tvers av oppgaver og grupper og diskuterer dette i lys av teorien som ble presentert i kapittel 2. Wellington (2015) beskriver viktigheten av å relatere egne funn med eksisterende teori, og også ha et kritisk blikk på egen forskning og metodebruk. Kritiske bemerkninger og videre implikasjoner i forhold til denne studien er ellers samlet i delkapittel 6.2 og 6.3.

4 Analyse og funn

I dette kapittelet ønsker jeg å gi en oversikt over mine resultater og funn. Jeg starter med å gi en kronologisk oversikt over elevbesvarelsene i oppgaveheftet, og belyser dem ut fra kategorier som blir beskrevet i tabellene som følger til hver oppgave. Kategoriene ble laget ut fra elevenes besvarelser på de ulike oppgaven. Ettersom oppgave 2 og 3 utgjør hovedkilden av empiri, vil funn fra oppgave 1 kun bli presentert i hovedtrekk uten en detaljert analyse. Jeg har da valgt ut de funnene som var relevante i forhold til elevenes besvarelser i oppgave 2 og 3. Elevene satt sammen i grupper mens de arbeidet med alle oppgavene i kapittel 4.1, 4.2 og 4.3, og jeg har også lydopptak og intervjuer som supplerer og utdyper deres skriftlige besvarelser.

4.1 Oppgave 1a-d Matematiske ulikheter

I disse fire oppgavene ble elevene bedt om å besvare spørsmål knyttet til ulikheter, deres løsninger og hva som er forskjell og likhet på likninger og ulikheter. Spørsmålene var:
a) Skriv ned hva du legger i begrepet *matematisk ulikhet*. Du kan gjerne bruke symboler og illustrasjoner i tillegg til ord. b) På hvilke måter er likninger og ulikheter like og forskjellige? c) Hva menes med «en løsning av en ulikhet»? Gi eksempler. d) Kan x=2 være løsning av en ulikhet? Hvorfor /hvorfor ikke?

I oppgave 1a skulle elevene beskrive hva det forbinder med matematiske ulikheter. Nesten alle elevene nevnte ulikhetstegnene, og flere skriver hvilke løsningsmetoder de bruker for å løse ulikheter. Ettersom jeg skal se på hva som karakteriserer løsningene deres, mener jeg løsningsmetoder er relevante å ta med her. Tabell 4.1 angir hvilke løsningsmetoder elevene nevnte. Noen elever skriver en av metodene, mens enkelte nevner flere.

	Snu retning på ulikhetstegnet	Andregradsformel	Fortegnsskjema
Antall elever	2	7	6

Tabell 4.1 Nevnte løsningsmetoder i oppgave 1a

Flest elever nevner andregradsformelen, eller «abc-formelen» som flere elever kalte den. Det er to elever på ulike grupper, som skriver at de må snu tegnet ved divisjon/multiplikasjon av negative tall. Andre elever nevner denne regelen senere i gruppearbeidet. Elevene på gruppe 4 har nærmest en oppramsing av alt de forbinder med ulikheter i sine skriftlige besvarelser. De nevner både abc-formel, faktorisering og fortegnsskjema foruten ulikhetstegnene og har slik sett en bred skildring av løsningsmetoder. Også de tre elevene på gruppe 2 nevner flere aspekter ved ulikheter, blant annet at de bruker fortegnsskjema. Dermed er det totalt seks elever som nevner dette.

I oppgave 1b skulle elevene beskrive likheter og forskjeller ved likninger og ulikheter. Igjen er flest opptatt av tegnene, og sier at i likninger brukes likhetstegn, mens man i ulikheter bruker ulikhetstegn. Elevene i gruppe 1 har denne samtalen i forbindelse med oppgave 1b:

> Nina: så er det jo også, det er jo samme ting du må gjøre med likninger for å få vekk sånn..
>
> Jenny: mm
>
> Nina: så må du gange med begge ting sånn på begge sider.
>
> Jenny: Mm. Du løser det jo likt, på en måte.
>
> Nina: Ja. Det kan vi skrive, at det løses likt.
>
> Nina: For det er liksom sånn at når jeg ser en ulikhet, så tenker jeg bare at jeg løser det akkurat som en likning nesten.
>
> Jenny: Ja, jeg tenker også det.

Vera: Og noen ganger så plutselig så bruker jeg jo er lik, ikke sant, for ulikhetstegnet. For jeg kommer ikke på at det er det (ler litt).

Jenny: Ja, også du regner likt, den eneste forskjellen er det er lik-tegnet.

Nina og Jenny skriver i besvarelsene sine at likheter og ulikheter løses likt, og i starten på dette utdraget sier Nina at de må gange med det samme på begge sider, altså bruke balanseprinsippet for å løse likninger og ulikheter. Hun fortsetter å si at en ulikhet løses på samme måte som en likning, nesten. Dette «nesten» blir ikke presisert videre i samtalen, men det kan jo tyde på at Nina mener at hun ikke alltid kan løse ulikheter som likninger. Vera og Jenny synes å mene at det er en tett relasjon mellom likninger og ulikheter, Vera sier til og med at hun av og til skriver likhetstegn i stedet for ulikhetstegn. Jenny mener at den eneste forskjellen er selve tegnet. Litt senere i samtalen (som ikke er tatt med her) kommer hun på regelen om å snu tegnet, og Vera sier at det er den eneste forskjellen hun vet om.

Oppgave 1c spør om hva som menes med en løsning av en ulikhet, og gjerne komme med eksempler. 10 elever gav eksempler på formen $x < 4$, $x \geq 5, x > -3$ eller liknende, og noen skrev også en forklaring til dette, som Helene i gruppe 4: «f.eks $x \geq 2$. Her må x være større enn eller lik 2 for at ulikheten skal være løst». Andre elever forteller at en løsning handler om å finne verdier for x. Wilde i gruppe 5 har skrevet «Når du finner mulige verdier for at ulikheten skal stemme». Det kan dermed virke som om hun mener at x kan ha flere verdier, altså kan x være en mengde av tall. Dette er det også fire andre elever som skriver. Noen bruker begrepet «verdimengde» og skriver at du skal «finne riktig verdimengde til x». June er en av dem, og hun ble intervjuet.

June: Ja, det er jo det som vi sier da, at du kan jo ikke få ett tall, men for eksempel en verdimengde. Som for eksempel at x skal være mer enn to. Så har du liksom…

Jeg: Så det er ikke bare ett tall, det kan være mange tall?

June: Mhm.

June sier at du kan få en verdimengde, og når jeg spør om det da kan være mange tall, bekrefter hun dette.

Ettersom flere elever så ut til å mene at ulikheter har en løsningsmengde med flere verdier, ble det interessant å se hva de tenkte om spørsmål 1d «Kan $x = 2$ være løsning av en ulikhet? Hvorfor /hvorfor ikke?» Oppgaven er formulert som et ja/nei-spørsmål med begrunnelse av svaret. De fleste elevene er opptatt av likhetstegnet i denne oppgaven og at dette ikke kan brukes i løsningen av en ulikhet. 14 av de 16 elevene mener at svaret er nei, det vil si at $x = 2$ ikke kan være løsning av en ulikhet. Fem av disse har imidlertid tilføyelser der de beskriver at under visse omstendigheter kan $x = 2$ være en løsning eller en del av en løsning av en ulikhet. Elevene i gruppe 3 har denne diskusjonen:

June: Jaja, men hvis du får inn, kanskje ikke av èn ulikhet, men hvis du får for eksempel rammer sånn at x skal være større eller lik to og x skal være mindre eller lik to så finner du ut at da er jo x to.

Nora: Ja.

June: Men ikke med bare èn ulikhet. (snakker og skriver) Ikke med bare èn ulikhet.

June sier her at $x = 2$ ikke kan være løsning av èn ulikhet, men finner et eksempel som hun mener gir to som løsning, nemlig $x \geq 2 \ og \ x \leq 2$. Hun ble intervjuet i etterkant, og jeg spør henne om hun mener at du *må* ha mer enn èn ulikhet, noe hun bekrefter. Andre elever er inne på samme tanke som June, og skriver at $x = 2$ kan være en løsning, men da som en del av løsningsmengden. En av elevene formulerer seg slik «Svaret må inneholde et ulikhetstegn. Samtidig kan x være 2 hvis x er et intervall mellom 1 og 3», altså at to er en av flere mulige verdier x kan ha, jamfør Espeland (2017). De to elevene som mener at $x = 2$ kan være en løsning sier at de bruker likhetstegn i andregradsformelen, og at dermed kan $x = 2$ være en del av løsningen til ulikheter.

4.2 Oppgave 2a-c Algebraisk løsning av lineære ulikheter

Lineære ulikheter er kjent for elevene fra ungdomsskolen der et av kompetansemålene i læreplanen for matematikk sier at etter 10 trinn skal elevene kunne «løyse likningar og ulikskapar av første grad» (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Elevene kan bruke samme algoritmer som de bruker for å løse lineære likninger, det vil si utføre samme algebraiske manipuleringer på begge sider av ulikhetstegnet. Dersom de dividerer eller multipliserer med negative tall, må de snu retning på ulikhetstegnet (se avsnitt 2.4 Ulikheter i matematikk S1). I fortsettelsen velger jeg å kalle denne fremgangsmåten for «likningsmetoden». I disse oppgavene var det dermed ikke selve løsningsmetoden som var mest interessant, men hvordan elevene tolket resultatene de fikk og hvordan de brukte disse til å løse ulikhetene. I oppgaveheftet møtte de en ordinær lineær ulikhet (2a) som gir en avgrenset løsningsmengde. Oppgave 2b og 2c er mer uvanlige i den forstand at den første løses av alle reelle tall mens den siste ikke har noen løsning. Tabell 4.2.1 nedenfor gir en oversikt over løsningene til de 16 elevene. Første kolonne inneholder oppgavene med løsning. Korrekt løsning (1) innebærer at elevene har brukt en matematisk korrekt løsningsmetode og notert løsningen med korrekt matematisk notasjon. Kategori (2) handler om å besvare oppgaver feilaktig med «ingen løsning». Elevene som har gjort dette har konkludert med at det ikke finnes noen løsning selv om det gjør det, eller de har konkludert korrekt med «ingen løsning», men begrunner det feil. Kategori (3) er de elevene som utelater x i løsningen. Det betyr at de svarer med "$0 > -27$" eller liknende uten videre drøfting av x. Kategori (4) Annet angir elever som har løsninger som ikke passer inn i øvrige kategorier. De øvrige tallene i resten av tabellen angir antall elever som tilhører kategorien.

Oppgave 2a-c	(1) Korrekt løsning	(2) Svarer «ingen løsning» feilaktig, eller med feilaktig begrunnelse	(3) Utelater x i løsning	(4) Annet
a) $3x - 2 \geq -x + 6$ Løsning: $x \geq 2$	16	0	0	
b) $9(x + 1) > 9(x - 2)$ Løsning: $0 > -27$, dvs $x \in \mathbb{R}$	0	8	8	
c) $x + 3 > 6 - (3 - x)$ Løsning: $0 > 0$, dvs ingen løsning	7	2 elever svarer «ingen løsning siden $x = 0$». 3 elever svarer «kan ikke løses»	3	1 elev svarer $x \geq \frac{3}{4}$

Tabell 4.2.1 Lineære ulikheter algebraisk

Tabellen viser noen tendenser. Alle elevene klarer å løse den «ordinære» ulikheten i oppgave 2a korrekt, mens flere hadde problemer med de mer uvanlige ulikhetene i oppgave 2b og 2c. I oppgave 2b viser tabellen at ingen elever kom frem til korrekt løsning. Her er det imidlertid nyanser, som vil komme frem senere i analysen. De sju elevene som kom fram til riktig løsning i 2c arbeidet sammen på to ulike grupper, så her var det tre grupper som ikke løste korrekt.

Oppgave 2a

Denne oppgaven, $3x - 2 \geq -x + 6$, har løsning $x \geq 2$. Alle elevene kom frem til riktig løsning her ved å bruke «likningsmetoden». De samlet x-ene på venstre side og tallene på høyre side av ulikhetstegnet, og endte korrekt opp med $x \geq 2$.

Oppgave 2b

Elevene skulle løse ulikheten $9(x+1) > 9(x-2)$ som gir $0 > -27, 1 > -2$ eller tilsvarende sanne utsagn. Ulikheten har alle reelle tall som løsning, og det var det ingen elever som kom frem til. Alle de 16 elevene bruker «likningsmetoden» og åtte elever svarer «ingen løsning». To av dem er på gruppe sammen, og de har denne samtalen i forbindelse med oppgaven:

> Hanne: Du skal jo finne ut av x, da.
>
> Dina: Jammen x-verdien forsvinner jo_
> Wilde: Jeg bare tok vekk x, jeg. (De ler)
>
> Dina: Jaja.
>
> Wilde: Vi fant ut at null er større enn minus 27 (ler). Det visste vi fra før.
>
> Dina: Men hva hvis vi flytter den over, hele greia, før vi ganger ut?
>
> Wilde: Mmmm, nei, for du må gange det, du kan ikke bare flytte parentesene hver for seg. Men det visste vi jo. Vi skal jo finne ut av x, egentlig. (6 sek stillhet)
>
> (Utydelig, flere som snakker samtidig)
>
> Wilde: Det er jo sant at null er større enn minus 27.
>
> Dina: Men da vet vi i alle fall at det ikke er en løsning til den likningen.

Hanne mener at de skal finne en verdi for x, og Dinas kommentar om at «x-verdien forsvinner» kan antyde at hun synes det er uvant eller blir vanskelig å si noe om x-verdien. Wilde bekrefter deretter at de skal «finne ut av x». Det er ikke klart om hun mener at de skal finne verdi(er) for x, eller om hun oppfatter x som en ukjent som i en likning. Hun sier også at svaret de har kommet frem til er sant fordi null er større enn minus 27. Dina sier at de da ikke har noen løsning. Hun henviser kanskje til utsagnet sitt om at x forsvinner, og på løsningsarket sitt har hun skrevet «Ingen løsning fordi x-en forsvinner». Også de andre to skriver «ingen løsning» og Hanne har en kommentar om at det er litt merkelig at x forsvant siden de skal finne x-verdien. Dina bruker ordet «likning» i siste linje i transkripsjonen over i stedet for «ulikhet». Det er usikkert om dette skyldes en forsnakkelse, eller om det er et uttrykk for at hun ikke skiller mellom ulikheter og likninger.

Åtte elever svarer $0 > -27$ eller $0x > -27$ og er plassert i kategori (3) over. Tre av dem er på gruppe 1 og kommenterer at de synes de fikk et rart svar, men at det er jo riktig at null er større enn minus 27. June fra gruppe 3 blir intervjuet. Alle på hennes gruppe har skrevet «ingen løsning» i tillegg til $0 > -27$. Vi har snakket om grafer tidligere i intervjuet, og June sier at i dette tilfellet vil vi få to parallelle linjer som ikke skjærer hverandre.

> Jeg: Det er helt rett, det vil de aldri gjøre. Går det likevel an å si at, hvis du tenker på dette som to linjer, da at den ene linja er..
>
> June: Større enn den andre. Hele tiden.
>
> Jeg: Ja. Går det an å si det?
>
> June: Ja, og det blir vel den, da, siden den er større enn minus 27.
>
> Jeg: Så finnes der noen, her er det jo på en måte ikke noen x i den løsningen der, null er mindre enn minus 27. Hvilken betydning har valget av x da? Altså hvis du skal velge x-verdi oppi her, hva … jeg vet ikke om jeg klarer å spørre så du skjønner.

June: Ja, det har vel ikke noe å si for den er jo, stigningstallet er det samme hele tiden, så, så lenge du vet at de går parallelt, så vil stigningstallet være ni x hele tiden bare. Du vil aldri få noe nytt definert fordi de skjærer aldri.

(..)

Jeg: Og at det er ingen løsning, det betyr..

June: At det ikke er noen skjæringspunkter mellom dem.

June sier at selv om linjene er parallelle, kan vi si at den ene er større enn den andre, og hun antar korrekt at det vil være linjen på venstre side av ulikhetstegnet. Når jeg så spør om hvilken rolle x spiller i forhold til løsningen, mener hun at x ikke har noe å si fordi stigningstallene er like. Til sist sier hun at ingen løsning betyr at linjene ikke vil ha noe skjæringspunkt.

Oppgave 2c

Ulikheten her, $x + 3 > 6 - (3 - x)$ regner jeg også som en uvanlig ulikhet for elevene siden de også her vil erfare at x forsvinner. Likningsmetoden vil her gi $0 > 0$, dvs ingen løsning. Tabell 4.2.2 gjengir oversikten over elevenes løsninger på oppgave 2c.

Oppgave 2c	(1) Korrekt løsning	(2) Svarer «ingen løsning» feilaktig, eller med feilaktig begrunnelse	(3) Utelater x i løsning	(4) Annet
$c)\ x + 3 > 6 - (3 - x)$	7	2 elever svarer ingen løsning siden x=0 3 elever svarer «kan ikke løses»	3	1 elev svarer $x \geq \frac{3}{4}$

Tabell 4.2.2 Oversikt over løsningene på oppgave 2c

Elevene løste også denne ulikheten med likningsmetoden, og 15 av dem kommer frem til at $0 > 0$, mens en elev gjør en regnefeil og svarer $x \geq \frac{3}{4}$. Til sammen sju elever konkluderer korrekt med at ulikheten ikke har løsning, blant annet de fire elevene i gruppe 4. Pia og Anna skriver «ulikheten har ikke løsning», Lars skriver «ulikheten er feil» og Helene at «dette svaret gir ikke mening». Lydopptaket viser at de har en diskusjon rundt formuleringene de bruker:

Pia: Da skriver vi bare ulikheten er feil?

Anna: Betyr det at den ikke har noen løsning, da, eller?

Helene: Ja.

Pia lurer på om ulikheten er feil, mens Anna foreslår at den da ikke har noen løsning, noe Helene bekrefter. Selv om formuleringene på svararkene deres er ulike, virker det som i alle fall Helene mener at det å skrive «ulikheten er feil» er det samme som å skrive «ingen løsning».

Ytterligere tre elever har svart korrekt på oppgave 2c. Det er June, Nora og Hedda som arbeidet sammen på gruppe 3. De har også kommet frem til $0 > 0$.

June: Okei, null x_

Nora: Det er jo ingen, det blir jo null og null, det.

Hedda: Hva skal vi gjøre da?

Flere samtidig: Ingen løsning.

Hedda lurer på hva de skal gjøre når de får uttrykket $0 > 0$, og flere svarer «ingen løsning». I oppgave 2b har de også skrevet «ingen løsning», og i den forbindelse sier June at «…det blir jo null x. Og da kan du bare skrive ingen løsning. Fordi x, det har ingen verdi over null». Det kan virke som hun tenker at når x faller bort, blir svaret alltid «ingen løsning». I oppgave 2b blir dette feil, mens i 2c blir det riktig. Det følger ingen videre diskusjon rundt dette i gruppen, men jeg tok det opp i intervjuet med June. Vi snakker om hva som er forskjellen på svaret i oppgave 2b som blir $0 > -27$ og denne oppgaven som blir $0 > 0$. June sier at den første er sann mens den andre er usann.

> Jeg: Den er usann. Men så har du skrevet på begge to at likevel så er, begge to har ingen løsning.
>
> June: Ja, fordi ingen, ingen skjærer med hverandre.

Tidligere i intervjuet har June snakket om at vi kan tenke på ulikheten som to rette linjer. I disse to oppgavene vil vi få linjer som ikke skjærer hverandre og hun mener dermed at de ikke har noen løsning. Selv om jeg er usikker på om elevene i denne gruppen har riktig begrunnelse for løsningen sin, har jeg valgt å plassere dem i kategorien «korrekt løsning».

Hele ni av de 16 elevene svarer feil på oppgave 2c, noe som viser at de har problemer med å løse ulikheter som ikke har løsning (Pessia Tsamir et al., 1998). Frida skriver at «ulikheten har ikke løsning siden $x = 0$». Oda formulerer seg omtrent på samme måte, at hun ikke kan regne ut dette «fordi i en ulikhet kan man ikke få 0 som x-verdi». Lydopptaket inneholder ingen tanker rundt løsningen deres eller hva de mener med at x ikke kan være null. De tre elevene i gruppe 5 mener også at ulikheten ikke kan løses. To av dem begrunner dette med at x forsvinner, og Wilde som er den tredje eleven skriver at ulikheten ikke kan løses «på samme måte som en vanlig ligning». Hun har ingen forslag til løsning eller løsningsmetode utover dette. Elevene i gruppe 1 setter to streker under $0 > 0$ og Nina, som ble intervjuet, føyer til at «dette var et rart svar». Under intervjuet spør jeg henne hvorfor det var rart, og hun svarer at «Null er jo bare null». Når jeg spør om det er sant eller usant at $0 > 0$ svarer hun at det er sant og gjentar at «null er jo bare null».

4.3 Oppgave 2d-g Algebraisk løsning av kvadratiske ulikheter

Elevene skulle løse fire kvadratiske ulikheter. Første ulikhet, $x^2 - x - 4 > 2$, er ordinær i den forstand at elevene kunne bruke løsningsmetoden som ble presentert i læreverket deres, det vil si nullpunktfaktorisering ved andregradsformelen og deretter tegne fortegnskjema (se avsnitt 2.4). Neste ulikhet, $x^2 > 1$, må også faktoriseres og drøftes i fortegnskjema mens de to siste ulikhetene er mer uvanlige for elevene. Den tredje, $(x + 3)^2 < 0$ er ferdig faktorisert og kan settes direkte i fortegnskjema, men kan også løses uten fortegnskjema med begrunnelse i at ingen kvadrattall er mindre enn null, altså ingen løsning. Siste oppgave, $x^2 + 2 > 0$, har ingen nullpunkt og kan ikke faktoriseres. Den kan løses ved å henvise til at kvadrering av alle reelle tall gir et positivt tall, og når man i tillegg skal legge til to vil alle reelle tall være løsning.

Tabell 4.3.1 gir en oversikt over de ulike oppgavene med løsning i første kolonne. Kategoriene i de øvrige kolonnene er laget ut fra det som karakteriserer elevenes besvarelser. Algebraisk korrekt (4) innebærer at elevene har brukt matematisk korrekte løsningsmetoder eller resonnement for å løse ulikheten, og også notert løsningen(e) korrekt. Kategori (5) betegner elever som løser ulikheten som en andregradslikning. De finner nullpunkt, enten ved å bruke andregradsforemelen (oppgave 2d) eller som i oppgave 2e ($x^2 > 1$) ved å trekke roten på begge sider. I begge tilfeller stanser elevene der, og unnlater å bruke nullpunktene til faktorisering og drøfting av ulikheten. Fortegnsskjema (6) betyr at elevene har faktorisert ulikheten, og tegnet fortegnskjema for å drøfte løsningen. Elevene har ikke nødvendigvis kommet frem til riktig løsning, poenget er at de har brukt fortegnsskjema som metode. Feil/mangelfull notasjon (7): I enkelte oppgaver klarer ikke elevene å notere løsningene sine korrekt. Noen bruker ulikhetstegnene feil, og skriver for eksempel "$-2 < x < 3$". Andre har feil bruk av tegnet $\wedge$ og svarer med $x < -2 \wedge x > 3$. Begge disse skrivemåtene betyr i matematisk terminologi at løsningen er tall som samtidig er mindre enn minus to og større enn 3. Noen av disse elevene har drøftet andregradsuttrykkene i fortegnsskjema, andre gjør det ikke, men skriver likevel et svar som inneholder ulikhetstegn. Alle elevene som bruker tegnene feil, er plassert i kategori 7. Også her fantes det elever med egne varianter, og disse ble plassert i kategori (8) Annet. Enkelte gjør flere feil i samme oppgave, og vi får derfor mer enn 16 når vi summerer tallene i noen av oppgavene.

Oppgave 2d-g Med løsning	(4) Algebraisk Korrekt	(5) Løser som andregrads-likning	(6) Fortegn-skjema	(7) Feil/mangelfull notasjon	(8) Annet
$d)\ \ x^2 - x - 4 > 2$ Løsning: $x \in < -\infty, -2 > \cup < 3, \infty >$	0	7	9	12	1 elev faktoriserer og tegner fortegnskjema og svarer «x=»
$e)\ \ x^2 > 1$ Løsning: $x \in < -\infty, -1 > \cup < 1, \infty >$	0	10	3	12	2 Faktoriserer til $(x+1)(x-1) > 0$ og stanser der.
$f)\ \ (x+3)^2 < 0$ Ingen løsning	0	13	3	0	2 fortegnskjema og svarer $x = -3$
$g)\ \ x^2 + 2 > 0$ Løsning: $x \in \mathbb{R}$	1	12	0	3	3 ikke løst

Tabell 4.3.1 Oversikt over elevenes algebraiske løsninger av kvadratiske ulikheter

Tabellen viser at nesten ingen elever løser andregradsulikheter korrekt, og også en klar tendens til at mange elever løser særlig de to siste ulikhetene som andregradslikninger eller trekker ukorrekte analogier mellom likninger og ulikheter. To av gruppene med til sammen 7 elever ba meg om hjelp på oppgave 2g, og kom gjennom samtalen frem til riktig løsning, men i utgangspunktet stod de fast eller hadde feil svar, og jeg har valgt å la tabellen avspeile dette. Jeg fant at mange elever strever med korrekt notasjon av løsninger i de to første oppgavene. Videre i analysen følger en kronologisk gjennomgang av elevenes løsninger av disse andragradsulikhetene der jeg tar for meg kategoriene i den rekkefølgen de er nevnt i tabellen.

Oppgave 2d

Elevene skulle her løse ulikheten $x^2 - x - 4 > 2$. Denne andregradsulikheten kan løses ved faktorisering og fortegnsskjema og har løsning: $x \in < -\infty, -2 > \cup < 3, \infty >$.Tabell 4.3 2 gjengir elevenes løsninger fra tabell 4.3.1.

Oppgave 2d	(4) Algebraisk Korrekt	(5) Løser som andregrads-likning	(6) Fortegns-skjema	(7) Feil/mangelfull notasjon	Annet
$x^2 - x - 4 > 2$	0	7	9	12	1 elev faktoriserer og tegner fortegnskjema og svarer «x=»

Tabell 4.3.2 Oversikt over løsningene på oppgave 2d

Her brukte alle de 16 elevene andregradsformel, mens bare ni av dem bruker nullpunktene til å faktorisere ulikheten og tegne fortegnsskjema. Selv om flere elever finner riktig løsningsintervall på fortegnsskjemaet, klarer ingen å notere løsningen korrekt. Noen bruker ulikhetstegnet feil, og svarer for eksempel "$x \leq -2 \text{ og } x \leq 3$", andre bruker feil tegn mellom løsningsintervallene og noen gjør begge feilene. Sju elever tegner ikke fortegnsskjema og løser ulikheten som en «ren» andregradslikning, det vil her si at de kun bruker andregradsformelen til å finne nullpunkt uten videre faktorisering eller drøfting. Dette gjelder blant annet alle elevene på gruppe 3 og 5. Fire elever bruker likhetstegn og svarer at løsningen er "$x = 3, x = -2$" eller liknende. De tre elevene i gruppe 5 har en diskusjon om bruk av tegn når de skal i gang med andregradsformelen:

Wilde: Du trenger ikke sette lik null, du må bare ha null på den ene siden, tror jeg.

(…)
Hanne: Åja, skitt, jeg skrev er lik der. Jeg skal jo ikke gjøre det.

Wilde: Jeg tror ikke du skal bytte når du bruker abc-formelen, men jeg husker ikke. mmm, ..x,..

Hanne: Skal du det?

Dina: Hva da?

Wilde: Jeg tror ikke du skal bytte vei.

Hanne: Jeg bare skriver er lik, da.

Wilde: Gjør det, du.

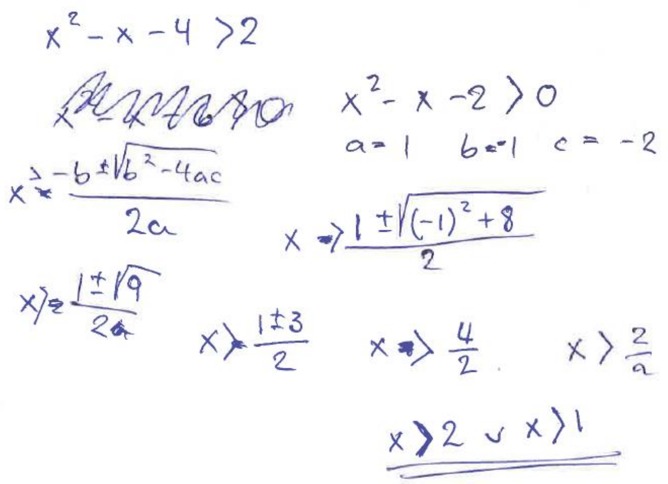
Dina: Hvis du setter er lik, må du ha er lik der og.

(Stillhet mens de jobber med andregradsformelen).

Dina: Hvilken vei er det? Sånn var det.

Wilde: Ja, for jeg tror du skal ha den samme vei hele tiden. Hvis ikke du ganger med noe negativt på begge sider.

Wilde mener at de ikke trenger å sette lik null, altså bruke likhetstegn når de bruker andregradsformelen. Besvarelsen hennes inneholder tegnet «>» gjennom hele denne oppgaven (se figur 4.3.3), og hun beholder også ulikhetstegnet i andre oppgaver der hun bruker andregradsformelen. Hun nevner regelen om å snu tegnet, og at hun ikke skal gjøre det her siden hun ikke har multiplisert med et negativt tall. Hanne bruker «=» i andregradsformelen, men ulikhetstegn i løsningen. De tre elevene arbeider sammen og gjør en regnefeil når de ordner ulikheten som fører til at de får $x^2 - x - 2 > 0$ i stedet for $x^2 - x - 6 > 0$. Dermed får de nullpunktene 2 og 1, ingen tegner fortegnskjema og alle tre svarer at løsningen er "$x > 2 \vee x > 1$". De har dermed feil bruk av ulikhetstegn.



Figur 4.3.3 Wildes løsning på oppgave 2d

Tre andre elever bruker også ulikhetstegnene feil i besvarelsen sin, deriblant Oda og Frida på gruppe 2. De har ordnet ulikheten til $x^2 - x - 6 > 0$, brukt andregradsformel til korrekt faktorisering og tegnet et riktig fortegnsskjema når denne samtalen finner sted:

Oda: Årh, nå kommer det jeg sliter med. Og det er å sette den derre tingen riktig vei.

Frida: Det er dødsvanskelig.

Oda: Jah! Men må man liksom svare sånn, da? Eh, jeg skjønner ikke hvordan man skal svare når det står, ..skal jeg skrive x, eh x i andre minus x er større enn seks *når* lalalalala?

(en av de andre): Ja.

Oda: Okei. Svar… (skrivelyder) Nei, men, hvordan ..det skal være større enn seks når, hvordan skal jeg se dette her på den?

Frida: x er, ..når x er mindre enn minus to og når x er større enn tre.

Oda: Fordi at det er positivt på disse her sidene?

Frida: Mhm.

Oda: Men hvis det hadde stått minus seks der, skulle jeg da tatt der? (antar peking på skjemaet) Det er det jeg ikke skjønner, for minus seks er jo ikke på (avbrutt av en kort utydelig kommentar)

(Ca 1 min med stillhet/skrivelyder/ et par uvesentlige småkommentarer)

Oda: Men, jeg skjønner ikke hvordan … hvordan skal jeg vite ..hvilken vei jeg skal, eller hva svaret skal bli? Må jeg bare se på det tallet jeg skal få det større enn og så gå ut ifra om det er positivt eller negativt?

Frida: eeh.. hva sa du nå?

Oda: Her, liksom, hvordan skal jeg_

Frida: Det har ingenting å si med det.

Oda: Ja, men hva er det jeg skal svare da? Hvordan vet jeg hvilken, skal jeg se på her inni eller skal jeg se på utenfor her?

Frida: Du skal se på det positive.

Oda: *Alltid* det positive? Det er jo av og til det er det negative også. Og så er det sånn, hvordan_

Frida: Jamen det er når du skal finne monotoniegenskapene, når den er stigende og når den synker. Nå skal du bare finne_
Oda: Okei.

Oda starter med å si at hun ikke vet hvilken vei hun skal sette ulikhetstegnet og sier at hun skal finne ut når $x^2 - x$ er større enn 6. Jeg antar at hun da flytter over minus seks og tenker på ulikheten $x^2 - x > 6$. Deretter sier hun at hun ikke vet hvordan hun skal kunne se svaret på «den», altså fortegnsskjemaet. Hun lurer på om hun skal se på tallet i oppgaven og så gå ut ifra om det er positivt eller negativt, altså at når hun skal finne ut når $x^2 - x$ er større enn 6, må hun se på det positive løsningsintervallet fordi 6 er et positivt tall. Frida sier først at det ikke har noe å gjøre med dette, og deretter at hun skal se på det positive. Når Oda så spør om hun alltid skal se på den positive delen (av fortegnsskjemaet) kan Fridas svar gi inntrykk av at hun mener at det stemmer, og at du bare bruker den negative delen av drøftingsresultatet når du skal drøfte monotoniegenskapene til funksjoner. Oda skriver "$-2 < x < 3$", Frida skriver "$x \leq -2 \ og \ x \leq 3$". En elev på en annen gruppe skriver «$3 < x < -2$» (jamfør Halmaghis punkt (9)).

To av de tre elevene i gruppe 3 skrive skriver "$x = 3 \, , x = -2$", mens June som også er på denne gruppen skriver "$x = 3 \ \wedge x = -2$", altså feil bruk av tegnet " $\wedge$ ".   Til sammen seks elever bruker dette tegnet, mens seks andre bruker ulikhetstegnene feil. Dermed er det 12 elever som har feil notasjon i løsningene sine.

Oppgave 2e

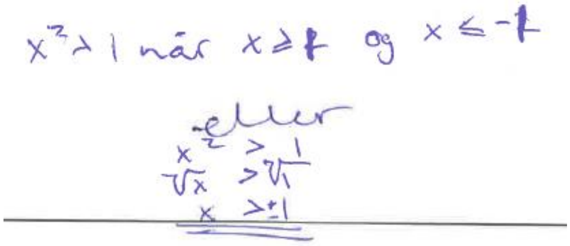
Ulikheten i 2e, $x^2 > 1$, likner på den forrige på den måten at den også skal ordnes, faktoriseres og drøftes i fortegnsskjema. Forskjellen er faktoriseringsmetoden der man her kan bruke konjugatsetningen. Løsningen er $x \in < -\infty, -1 > \cup < 1, \infty >$. Tabell 4.3.4 gir en oversikt over elevenes løsninger av oppgave 2e.

Oppgave 2e	(4) Algebraisk Korrekt	(5) Løser som andregrads-likning	(6) Fortegns-skjema	(7) Feil/mangelfull notasjon	(8) Annet
$x^2 > 1$	0	10	3	12	2 faktoriserer til $(x+1)(x-1) > 0$ og stanser der.

Tabell 4.3.4 Oversikt over løsningene på oppgave 2e

Tabellen viser at ingen elever løser ulikheten helt korrekt. Vi ser også at 10 av 16 elever løser som andregradslikning og bare tre lager fortegnsskjema. 12 elever har feil notasjon av løsningene sine, det vil si at de enten bruker ulikhetstegnene eller tegnet " ∧ " feil. De to elevene som nevnes i kategorien «Annet» faktoriserer ulikheten ved å bruke konjugatsetningen, men drøfter den ikke, og noterer ikke noen løsning.

Også to andre elever faktoriserer ulikheten til $(x+1)(x-1) > 0$. Det er Oda og Frida på gruppe 2. De bruker andregradsformel til faktorisering før alle tre på gruppa tegner fortegnsskjema. Frida skriver løsningen som vist i figur 4.3.5, altså at løsningen er $x \geq 1$ og $x \leq -1$" eller at den er "$x > \pm 1$". Lydopptaket viser ingen refleksjoner rundt disse to svarene, om hun mener at de er forskjellige eller om de skal bety det samme. Elevene på denne gruppa er de eneste som lager fortegnsskjema.



Figur 4.3.5 Fridas svar på oppgave 2e

Til sammen 10 elever løser denne oppgaven som en andregradslikning, det vil si at de gjør som Fridas nederste beregning i figur 4.3.5; trekker kvadratrota på begge sider av ulikhetstegnet og svarer enten "$x > \pm 1$" eller "$x^2 > \pm 1$". En elev skriver "$x^2 > 1$" og en annen "$x = \pm 1$". Alle disse bruker samme løsningsmetode i form av å ta kvadratroten på begge sider.

Av de 12 elevene som har feil notasjon, er det 10 som svarer "$x > \pm 1$", altså at x skal være både større enn minus èn og pluss èn. De to siste elevene i denne kategorien, har skrevet "$x > 1 \wedge x < -1$" altså brukt ∧ som innebærer at x samtidig skal være større enn èn og mindre enn minus èn.

Oppgave 2f

Denne ulikheten, $(x+3)^2 < 0$, er ferdig faktorisert, og kan enten drøftes direkte i et fortegnsskjema, eller løses med begrunnelse at i at kvadrering av reelle tall alltid resulterer i tall større enn eller lik null, og at ulikheten derfor ikke har noen løsning. Tabell 4.3.6 gir en oversikt over elevenes løsninger.

Oppgave 2f	(4) Algebraisk Korrekt	(5) Løser som andregrads-likning	(6) Fortegn-skjema	(7) Feil/mangelfull notasjon
$(x+3)^2 < 0$	0	13	3	0

Tabell 4.3.6 Oversikt over løsningene på oppgave 2f

Jeg fant at heller ikke her løser noen elever oppgaven helt korrekt, og at hele 13 av 16 elever løser som en andregradslikning. I denne oppgaven betyr det at disse 13 bearbeider ulikheten til $x^2 + 6x + 9 < 0$ og deretter bruker andregradsformelen til å finne nullpunktet uten å faktorisere videre eller drøfte faktorene i fortegnskjema. 12 elever svarer at løsningen er "$x = -3$", mens de tre elevene i gruppe 5 har hver sin variant, nemlig "$x < -3$", "$0 < -3$" og "$x > -3$". De har ingen diskusjon rundt dette.

Elevene har flere samtaler rundt løsningsmetodene og svarene sine på denne oppgaven. De tre elevene på gruppe 1 har brukt andregradsformelen og kommet frem til $x = -3$.

> Nina: Så da er det svaret?.. At x er lik minus 3? Det må være det.
>
> Jenny: Ja.
>
> Nina: Men da betyr jo det at i ulikheter så kan jo svaret bli sånn.
>
> Vera: Ja (ler).
>
> Jenny: Eller hvis vi bare har ett svar på x-en så kan vi jo prøve å sette den inn der (Antar at hun mener $(x + 3)^2$). Det blir jo bare null.
>
> Vera: Da kommer vi tilbake til den der jalla null er større enn null-greia.
>
> Nina: Ja, det er det vi sa.. Så i ulikheter så kan liksom svaret bli x er lik to?
>
> (ingen svarer)

Nina lurer på om løsningen er $x = -3$, og det virker som de andre bekrefter at den er det. Når hun sier at «det betyr at i ulikheter kan svaret bli sånn» tenker hun antakelig på spørsmålet de fikk i oppgave 1d om $x = 2$ kan være en løsning av en ulikhet. Disse tre elevene skrev der at du må ha ulikhetstegn i løsning av en ulikhet. Selv om 12 elever her svarer med $x = -3$, er det kun Nina som setter dette resultatet i sammenheng med spørsmålet de møtte i oppgave 1d. Under intervjuet spurte jeg henne om hun mente at $x = -3$ er løsningen, og hun bekrefter at det er den. 12 elever hevder altså i oppgave 1d at man må ha ulikhetstegn i løsningen, mens de her svarer med likhetstegn og har dermed en inkonsekvens i besvarelsen sin (Pessia Tsamir & Bazzini, 2001).

Tre elever bruker ikke andregradsformel, og en av dem er Frida i gruppe 2. Hun mener at uttrykket er ferdig faktorisert og velger å gå direkte til fortegnsskjema. Der ser hun at alt blir positivt, og Oda som er på gruppe med Frida mener at de da er tilbake ved startpunktet. Hun bestemmer seg for å prøve og bruke første kvadratsetning og deretter andregradsformel, og ender da (korrekt) opp med $x = -3$.

> Oda: Det var en rar oppgave, for man kan ikke tegne fortegnsskjema med det. Eller man kan, men det blir jo samme svaret uansett.
>
> Frida: Jeg skjønte ikke den.

Oda mener at de ikke kan tegne fortegnsskjema, og det virker som hun trekker denne konklusjonen ut fra at hun bare har fått ett nullpunkt. Alle de tre elevene på denne gruppen svarer "$x = -3$", og Oda og Åse føyer til at siden de bare fikk èn x-verdi er det ikke mulig å tegne fortegnsskjema.

Oppgave 2g

Ulikheten her er $x^2 + 2 > 0$. Uttrykket $x^2 + 2$ kan ikke faktoriseres. Elevene må her resonnere seg frem til at alle reelle tall løser ulikheten. Tabell 4.3.7 gir en oversikt over elevenes løsninger.

Oppgave 2g	(4) Algebraisk Korrekt	(5) Løser som andregrads-likning	(6) Fortegns-skjema	(7) Feil/mangelfull notasjon	(8) Annet
$x^2 + 2 > 0$	1	12	0	3	3 ikke løst

Tabell 4.3.7 Oversikt over løsningene på oppgave 2g

Tabellen viser at tendensen fra forrige oppgavene fortsetter også her; 12 elever løser som andregradslikning. Fem av dem bruker andregradsformel, fem andre flytter 2 over slik at de får $x^2 > -2$ mens to elever prøver begge fremgangsmåtene. I begge tilfeller ender elevene opp med et negativt tall under rottegnet. Ettersom de ikke får faktorisert uttrykket, er det heller ingen som lager fortegnsskjema.

10 av elevene som løser som andregradslikning svarer «ingen løsning» etter å ha fått negativt tall under rottegnet. De to siste i denne kategorien jobber sammen på en tremannsgruppe og svarer med "$x > -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$". Anna på gruppe 4 er imidlertid inne på korrekt løsning og metode. De tre andre på gruppa hennes har jobbet seg frem med andregradsformelen og funnet ut at de får $\sqrt{-8}$. De er enige om at de ikke kan trekke rota av et negativt tall.

> Anna: Men går det ikke egentlig an å bare ta minus to, pluss to over på andre sida og_
> (Flere snakker samtidig)
>
> Anna (fortsetter): For svaret blir jo uansett x ganger med seg selv det blir jo uansett større enn minus to?
>
> Helene: Jeg tror det. Det går jo an å flytte over, liksom.
>
> Pia: Men da blir det jo også kvadratrota av minus to.
>
> Anna: men… du trenger ikke å ta det, for uansett hva det er så blir det ..større enn minus to.

Anna foreslår her å ikke bruke andregradsformel, men å omforme uttrykket til $x^2 > -2$. Pia påpeker at hun da må trekke rota av minus to, og Anna sier at du ikke trenger å gjøre dette fordi x^2 blir større enn minus to uansett. Hun er den eneste eleven som resonnerer seg frem til riktig løsning på egen hånd. Elevene på gruppe 3 kommer også frem til riktig løsning, men det skjer først etter at de har jobbet seg gjennom sju ulikheter med grafer i oppgave 3. I første omgang skrev de «ingen løsning», og valgte å heller komme tilbake til oppgaven til slutt. Da er jeg sammen med dem, og spør hvorfor de opplever denne oppgaven som vanskelig. De svarer at de «mangler b-verdien», og at det eneste de vet er at dette er en «smilende» graf som skjærer y i to. Jeg forslår at de kan skrive ulikheten som $x^2 + 0x + 2 > 0$. De bruker dermed andregradsformel og får negativt tall under rottegnet.

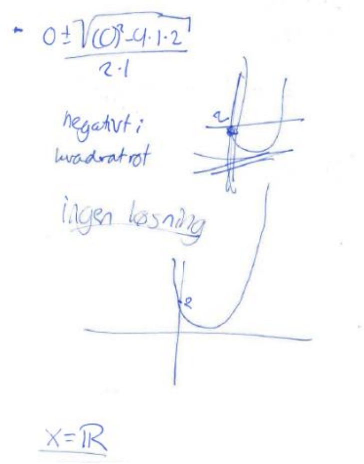
> Jeg: Hva betyr det, da, når man får negativt under rottegnet?
>
> June: Da er det ingen skjæringspunkt med x-aksen.
>
> Jeg: Ja. Det er helt rett.
>
> June (skriver og snakker): Ingen løsning.
>
> Jeg: Hva spør ulikheten om, da?
>
> June: Når tid er den større enn null. Funksjonen er større enn null.
>
> Jeg: Kan det hende at der finnes… tenk at du putter inn et tall der. Velg et eller annet tall og putt inn.
>
> Nora: Fem. Det blir 25 pluss to.
>
> Hedda: Men den er jo alltid større enn null. For hvis du har et minustall med x, så blir den pluss og hvis du har et plusstall med x så blir den pluss. Den er alltid større enn null.
>
> (…)

June: Ja, men dette her betyr at den ikke har skjæringspunkt her, så den ligger over. (Tegner på arket): Du har en sånn en, så her er to. Så ligger den for eksempel sånn whoo!

Jeg: Ja. Og hva kan dere skrive, hva er løsningen på ulikheten?

June: Alltid over null.

Jeg: Ja. Hvis man skal skrive det med veldig sånn mattespråk, så skriver vi altså x er lik alle reelle tall.



Figur 4.3.8 Junes oppgave 2g

June sier at når de får negativ rot, betyr det at det grafen ikke skjærer x-aksen, altså ingen nullpunkt. Hun mener da at det ikke er løsning. Når jeg så spør hva oppgaven ber om, sier hun at hun skal finne når funksjonen er større enn null. Hun bruker altså begrepet «funksjon» i stedet for ulikhet. Deretter forklarer Nora at uansett om de erstatter x med et positivt eller negativt tall, vil de alltid havne over null. June bekrefter dette, og har mot slutten en kommentar om at negativ rot betyr at det ikke finnes nullpunkt, men at her vil hele grafen ligger over x-aksen. Hun tegner en skisse på arket sitt (se figur 4.3.8) og konkluderer med at løsningen på ulikheten er «alltid over null». Jeg sier da at løsningen er at x kan være alle reelle tall. De tre elevene skriver dermed $x \in \mathbb{R}$. Selv om de ser at grafen alltid er over x-aksen og noterer løsningen, kan jeg ikke vite sikkert om de forstår overgangen fra graf til algebraisk løsning, eller om de bare skriver det jeg ber dem om.

De tre elevene i gruppe 1 snakker om å bruke andregradsformelen, men vet ikke hva de skal gjøre når førstegradsleddet, og dermed «b-verdien» i formelen mangler. De skriver bare et spørsmåltegn på denne oppgaven på svararkene sine, og er dermed de tre elevene som ikke har løst oppgaven.

4.4 Oppgave 3a-c Grafisk løsning av lineære ulikheter

For å gi en oversikt over elevenes løsninger i oppgave 3, bruker jeg tabeller med ulike kategorier, se tabell 4.4.1. Ettersom forskningsspørsmålet mitt handler om hva som karakteriserer elevenes løsningsmetode, er kategoriene laget ut fra metodene elevene brukte i besvarelsene sine. For de tre lineære ulikhetene i oppgave 3a-3c er kategoriene som følger: (1) Løser grafisk. Elevene bruker grafene, og resonnerer seg frem til en løsning. Løsningen trenger ikke nødvendigvis være riktig, her er poenget at elevene bruker grafene i begrunnelsen for den løsningen de har. (2) Løser algebraisk, det vil si at elevene løser ulikhetene ved hjelp av likningsmetoden som de også brukte i oppgave 2a-c. (3) Finner kun skjæringspunkt på grafen. Dette gjelder kun oppgave 3a ettersom det er eneste oppgave som gir skjæringspunkt. Elevene hevder da at løsningen er i skjæringspunktet. (4) Plasserer kun oppgave til bilde. Elevene finner riktig bilde til oppgaven, men bruker ikke bildet til å løse ulikheten. De løser heller ikke algebraisk eller på andre måter. Jeg minner om at alle elevene satte riktige bilder til oppgavene i 3a-c, og at dette også gjelder elevene som løste algebraisk i kategori (2). Tallene i tabellen angir antall elever av de 16 som brukte de ulike løsningsmetodene. Enkelte elever løste både algebraisk og grafisk, og vi får derfor mer enn 16 når vi summerer tallene i oppgavene.

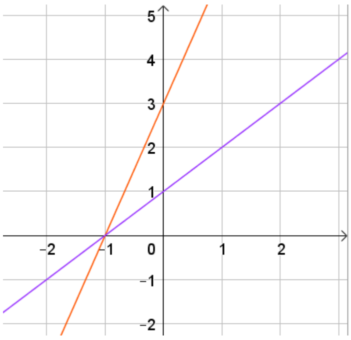
Oppgave 3a-c	(1) Løser grafisk	(2) Løser algebraisk	(3) Finner kun skjæringspunkt	(4) Plasserer kun oppgaven til bildet
$a)\ 3x + 3 \leq x + 1$	7	8	3	5
$b)\ 4(x + 1) > 4(x - 3)$	6	5	0	7
$c)\ x + 5 > 8 - (3 - x)$	3	8	0	5

Tabell 4.4.1 Oversikt over løsningene på oppgave 3a-c

Tallene i kategori 1 viser at ikke mange elever brukte grafene til å løse ulikhetene. Flere velger å løse algebraisk, eller å ikke løse i det hele tatt, men gir seg når de har funnet ut hvilke bilder og grafer som hører sammen. Videre presenterer jeg oppgavene kronologisk og går litt mer i dybden på elevenes besvarelser på hver av dem.

Oppgave 3a

Elevene skulle her løse ulikheten $3x + 3 \leq x + 1$ ved hjelp av bildet i figur 4.4.2. Alle elevene kom frem til riktig bilde, selv om noen brukte litt tid på å finne ut av det. Tabell 4.4.3 gir en oversikt over elevenes løsningsmetoder på denne oppgaven.



Figur 4.4.2 Graf til oppgave 3a

Oppgave 3a	(1) Løser grafisk	(2) Løser alge-braisk	(3) Finner kun skjærings-punkt	(4) Plasserer kun oppgaven til bildet
$3x + 3 \leq x + 1$	7	8	3	5

Tabell 4.4.3 Elevenes løsningsmetode på oppgave 3a

Sju elever fordelt på tre ulike grupper bruker bildet til å løse ulikheten og alle sju finner korrekt løsning. Her er et utdrag av samtalen mellom to av dem, Lars og Helene i gruppe 4, som snakker om hva de skal bruke grafene til:

> Helene: Åja, nei, det er jo når man, når man finner, når den der linjen har mindre funksjonsverdi enn den der. Hvis det gir mening.
>
> Lars: Åja!
>
> Helene: Hvis det står tre x pluss tre så er det jo den der, og den her får jo høyere verdi_
> Lars: Så når tid er den mindre eller lik den andre, det er jo der. Og videre nedover.
>
> Helene: Og når den her går bortover her, så har den jo større verdi enn den der. På en måte.

Helene har en avgjørende uttalelse når hun sier at de skal se på funksjonsverdiene til linjene. Dette klarer Lars å ta tak i når han svarer at «den er mindre eller lik den». Både han og Helene bruker funksjonsverdiene til å finne riktig løsning, og svarer "$x \leq -1$".

Fire av de sju elevene som løste grafisk, valgte også å løse ulikheten algebraisk. Til sammen åtte elever brukte algebraisk metode, og alle disse kom frem til riktig løsning unntatt Hedda som svarer "$x \leq -2$". Tre elever på to ulike grupper svarer "$x = -1$" og påpeker at linjene skjærer hverandre i minus èn. Nina er en av disse elevene. Hun ble intervjuet og jeg ba henne forklare hva som skjer i skjæringspunktet. Hun svarer at «de er like». Når jeg så påpeker at vi her har en ulikhet der hun skal finne når $3x + 3$ er mindre enn eller lik $x + 1$, ser hun på bildet og endrer svaret sitt til $x \leq -1$.

Fem elever løser ikke ulikhetene hverken algebraisk, grafisk eller på annen måte. Flere av dem har likevel diskusjoner på gruppene om hvordan de skal bruke grafene. De tre elevene på gruppe 2 har funnet riktig bilde og også funnet hvilke linjer som beskriver høyre og venstre side i ulikheten.

> Oda: Men, det som jeg synes er litt rart er at det står at den skal være ..mindre enn eller er lik. Og her.. blir jo denne større enn (4 sek stille). Skjønte dere hva jeg mente?

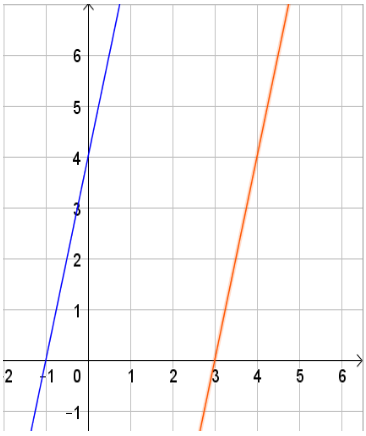
(...)

Oda: Her i oppgaven står det jo at denne her grafen, den oransje grafen, skal være mindre enn eller er lik den lilla. Men på denne her grafen går den jo *forbi* den lilla. Så det gir jo egentlig ikke så mye mening. Jaja, samme det. Vi går videre.

Oda påpeker korrekt at oppgaven spør etter når $3x + 3$ er mindre enn eller lik $x + 1$. Ut fra det siste utsagnet hennes kan det virke som om hun dermed forventer at grafen til $3x + 3$ alltid skal ligge under grafen til $x + 1$. Det virker som hun ikke forstår at hun skal bruke grafene til å finne *når* eller for hvilke x-verdier den ene linjen (oransje) er større enn eller lik den andre (blå).

Oppgave 3b

Ulikheten i denne oppgaven, $4(x + 4) > 4(x - 3)$ gir to parallelle linjer og har løsning $x \in \mathbb{R}$. Elevene skulle bruke bildet i figur 4.4.4 til å løse oppgaven. Seks elever brukte grafene for å begrunne løsningen sin. To av disse og tre andre brukte algebraisk fremgangsmåte. Ingen elever finner riktig løsning på ulikheten, verken de som løser grafisk eller algebraisk. Tabell 4.4.5 under gir en oversikt over elevenes løsninger på denne oppgaven. Kategori 3 «Finner kun skjæringspunkt» er ikke relevant her, og er derfor utelatt.



Figur 4.4.4 Graf til oppgave 3b

Oppgave 3b	(1) Løser grafisk	(2) Løser algebraisk	(4) Plasserer kun oppgaven til bildet
$4(x + 1) > 4(x - 3)$	6	5	7

Tabell 4.4.5 Oversikt over elevenes løsninger på oppgave 3b

Flere av elevene sier at ulikhetene gir to parallelle linjer og at de dermed aldri vil skjære hverandre uten å utdype hvilken betydning dette har for løsning på ulikheten. Elevene i gruppe 4 brukte grafene i forrige oppgave, og Helene påpekte der at de måtte se på funksjonsverdien. Nå har de funnet riktig bilde til oppgave 3b.

Helene: Det kommer jo ikke til å bli noen løsning på dem, for de er jo parallelle.

Lars: Ja, skulle til å si det.

Helene: De har jo samme stigningstall.

Pia: Ja, de stiger med fire.

(går videre til neste oppgave)

Helene sier at ulikheten ikke får noen løsning siden linjene er parallelle, og Lars støtter henne i det. Pia bekrefter at begge linjene har fire som stigningstall, og dermed går de videre til neste oppgave. De tre elevene i gruppe 3 har også funnet riktig bilde, June har allerede påpekt at siden linjene er parallelle vil de aldri skjære hverandre:

Hedda: Ja, riktig, men hva, hvordan løser vi den da uten å regne ut?

June: Det betyr egentlig bare at, altså det vil jo si, ja her er det jo ikke er lik-tegn. Så det vil si at den første funksjonen alltid vil ligge over (3 sek stille).

(snakker samtidig, utydelig)

Nora: ...når x, at det blir null her. At det blir ingen løsning?

June: Det betyr at det ikke er skjæringspunkt mellom dem. Og det er jo fordi de går parallelt med hverandre så de vil aldri skjære.

Hedda lurer på hvordan de skal løse ulikheten uten å regne. June påpeker at den ene linjen alltid vil ligge over den andre, og begrunner dette med tegnet som er gitt i oppgaven. Dermed kan det virke som hun tenker noe av det samme som Oda i forrige oppgave, nemlig at bildene skal illustrere to størrelser der den ene alltid er større enn den andre. Det er usikkert hva Nora mener med at «det blir null her», men hun foreslår at det ikke blir noen løsning. June svarer ikke direkte på Noras spørsmål, men konstaterer at linjene aldri vil skjære hverandre. Hun og Nora svarer blankt på arkene sine, mens Hedda som også er på deres gruppe skriver «ingen løsning (ingen skjæring)».

Alle de fem elvene som løser ulikheten algebraisk kommer frem til $0 > -16$. Nina på gruppe 1 er en av dem. Hun blir intervjuet, og vi snakker litt om denne oppgaven:

Jeg: Så er jo spørsmålet da: Når er den (peker på blå linje) større enn den (peker på oransje linje)?

Nina: Det ser vi jo ikke. De er jo parallelle.

Jeg: De er parallelle, ja. (3 sek stillhet). Så du tenker at (2-3 sek stillhet) hvis de, for å se det så må de krysse hverandre?
Nina: Mhm (bekreftende).

Nina sier at vi ikke kan se hvilken linje som er størst fordi de er parallelle, og bekrefter at de må ha skjæringspunkt for at vi skal kunne avgjøre dette. Det kan virke som flere elever tenker at uten skjæringspunkt kan ikke ulikheten løses eller ha løsning. Helene på gruppe 4 sier at «Det kommer jo aldri til å bli noen løsning på dem, for de er jo parallelle». Wilde på gruppe 5 svarer også «ingen løsning» og har en kommentar på lydopptaket der hun sier at linjene er parallelle, og at «da er det jo ingen som er større enn den andre, på en måte». Hun ble også intervjuet, og hun gjentar «da krysser de aldri, så da blir jo aldri den ene større enn den andre.» Wilde ser ut til å mene at parallelle linjer er like store, og for å undersøke dette tegnet jeg ro rette linjer gjennom $y = 1$ og $y = 3$ og spurte henne når den ene er større enn den andre.

Wilde: Da er jo den, y er lik tre, høyere hele tiden, egentlig. Ja. For tre er høyere enn en.

Jeg: Så da er det, når de parallelle, sånn vannrette, men hvis de er på skrå?

Wilde: Det blir jo y-verdien lik, gjør den ikke? Hm, jeg må tenke. (5 sek stille) Eller, den gjør jo ikke det hvis x er forskjellige…

(..)

Wilde: Altså, den blå der er jo større i verdien hele tiden..

Jeg: Ja? Hvilken verdi?

Wilde: y-ver, eller vent nå, x-verdier, da. (4 sek stille). For når x er, på en måte lavere så er jo den blå positiv og den oransje blir på en måte negativ. Hvis x er èn.

Jeg: Hvis x er èn.

Wilde: Ja, så er jo den blå høyt oppe og den oransje er sykt lavt nede.

Jeg: Ja?

Wilde: Så da er jo kanskje egentlig den blåe større enn den oransje.

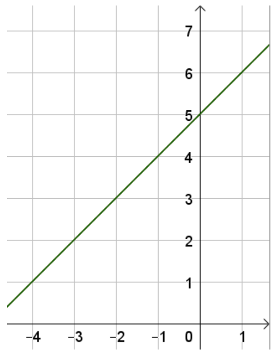
Jeg: Finnes der noen punkter langs denne x-aksen som ville gjort at den ikke var høyere? Eller vil den alltid være høyere?

Wilde: Den vil alltid være høyere i og med at de er parallelle og ikke krysser hverandre.

Wilde har sagt at linjene er like store fordi de ikke skjærer hverandre. Når jeg tegner parallelle linjer som er vannrette mener hun likevel at den ene er større enn den andre. Hun resonnerer seg deretter frem til at den blå linjen (se figur 4.4.4) hele tiden vil ha større y-verdier enn den andre, og at siden linjene er parallelle vil det alltid være slik. Nøkkelen i resonnementet hennes er når hun sammenlikner y-verdiene til begge linjene for $x = 1$, og ser at den blå linjen ligger høyere enn den oransje. Vi snakker videre om hvilken betydning valget av x har, men kommer ikke inn på hva som er løsningen av ulikheten. Selv om Wilde, på samme måte som June i oppgave 2b, konkluderer med at den ene linjen alltid vil være større enn den andre, kan jeg ikke si at hun dermed har klart å finne at løsningen til ulikheten er alle reelle tall.

Oppgave 3c

Ulikheten her, $x + 5 > 8 - (3 - x)$ gir samme rette linje på begge side av ulikhetstegnet, og har ingen løsning. Elevene skulle bruke bildet i figur 4.4.6 til å løse den. Tabell 4.4.7 viser hvilke løsningsmetoder elevene brukte.



Figur 4.4.6 Graf til oppgave 3c

Oppgave 3c	(1) Løser grafisk	(2) Løser algebraisk	(4) Plasserer kun oppgaven til bildet
$x + 5 > 8 - (3 - x)$	3	8	5

Tabell 4.4.7 Oversikt over elevenes løsninger på oppgave 3c

Tre elever brukte grafen for å argumentere for løsningen sin. Åtte elever valgte å arbeide algebraisk og fem andre plasserte kun oppgaven til bildet. De tre elevene som bruker grafbildet er de tre jentene på gruppe 3 som vi møtte i forrige oppgave da de diskuterte om det var «ingen løsning» der. De har nettopp bestemt seg for å regne på litt på denne oppgaven.

> Hedda: Okei. x pluss fem større, jammen her blir det jo egentlig også ingen løsning, blir det ikke det? (stillhet i 4 sek). For nå blir jo x..
>
> Nora: Ja.
>
> June: Null x. Ingen løsning. Men det er jo sikkert fordi den ikke har noen å på en måte sammenlikne seg selv med.

Hedda lurer på om de får «ingen løsning» på denne ulikheten også. June sier at de ikke har x, og at det da blir ingen løsning. Hun sier også at «den» ikke kan sammenliknes med andre, og jeg regner med at hun tenker på grafen. Alle disse tre skriver «ingen løsning» på sine skriftlige besvarelser. Selv om denne løsningen er korrekt, virker det som de knytter begrunnelsen til at x forsvinner fra ulikheten, og ikke til at et uttrykk ikke kan være større enn seg selv.

Alle de åtte elevene som løser algebraisk svarer "$0 > 0$". Noen har dette som eneste svar, andre kommenterer at linjene ligger oppå hverandre fordi uttrykkene blir like på begge sider av ulikhetstegnet, eller begrunner ut fra stigningstall eller konstantledd at ulikheten passer til bildet. De tre elevene i gruppe 2 har funnet riktig bilde, når denne samtalen finner sted:

> Oda: Jah. Men de er jo like, da. Og da blir jo det figur sju. Men det er jo litt rart at det står at de skal være ulik hverandre, eller det står at den ene skal være større enn den andre når de er prikk like.
>
> Frida: Ja.

Oda: Gir det mening? Den ene kan jo ikke være større enn den andre når de er prikk like?

Oda sier at de rette linjene er like hverandre, og at det er rart siden oppgaven inneholder tegnet «større enn». Hun påpeker også helt korrekt at linjer som er like ikke kan være større enn hverandre, men det virker som hun ikke klarer å omsette dette til at ulikheten dermed ikke har noen løsning. Det kan også virke som om hun mener bildene av grafene skal illustrere at vi har to linjer som er forskjellige siden oppgaven inneholder et ulikhetstegn, jamfør hennes resonnement i oppgave 3a. Elevene på Odas gruppe plasserer kun ulikhet og bilde sammen på denne oppgaven uten å foreslå løsning.

4.5 Oppgave 3d-g Grafisk løsning av kvadratiske ulikheter

De fire siste oppgavene i heftet, var kvadratiske ulikheter som skulle løses ved hjelp av grafbilder av andregradsfunksjoner. Ikke alle elever klarte å sette riktige bilder til ulikhetene. Her var det også større variasjoner i løsningsmetodene innad i gruppene enn tilfellet var med de lineære oppgavene. Tabell 4.5.1 gir en oversikt over elevenes løsninger. Kategoriene i tabellen er laget ut fra elevenes løsningsmetoder og er som følger: (5) Finner riktig bilde. Det betyr at elevene har funnet riktig bilde til oppgaven de skal løse. Noen klarte å se dette direkte ut fra oppgaven, mens i enkelte grupper valgte elevene å arbeide med ulikhetene algebraisk for å finne riktig bilde. Noen brukte andregradsformel for å finne nullpunkt, andre deriverte og fant ekstremalpunkt og kom slik frem til riktig bilde. (6) Plasserer kun oppgave til bilde (som punkt 4 for lineære ulikheter). Elevene finner riktig bilde til oppgaven, men bruker ikke bildet til å løse ulikheten. De løser heller ikke algebraisk eller på andre måter. (7) Løser algebraisk. Det vil si at elevene løser som en andregradsulikhet eller andregradslikning, enten ved å bruke andregradsformel, eller som i oppgave 3e $(x^2 > 4)$ ved å trekke roten på begge sider. Jeg skiller altså mellom å arbeide algebraisk for å finne riktig graf, og å løse selve ulikheten algebraisk. (8) Løser grafisk. Elevene bruker grafene, og resonnerer seg frem til en løsning. Løsningen trenger ikke nødvendigvis være riktig, her er poenget at elevene bruker grafene i begrunnelsen for den løsningen de har (som punkt 1 for lineære ulikheter. (9) Feil eller mangelfull notasjon. Elevene løser ulikheten, men har ukorrekt bruk av enten ulikhetstegn eller tegnene ∧∨ når de noterer løsningene sine. Andre har mangelfull notasjon. Det innebærer at de i lydopptaket sier hva løsningen er uten å notere den ned, eller de tegner streker på grafbildene for å illustrere løsningene sine, og altså utelater en algebraisk notasjon.

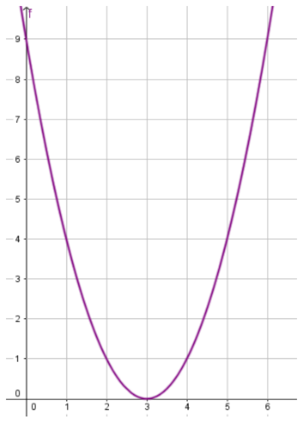
Oppgave 3d-g	(5) Finner riktig bilde	(6) Plasserer kun oppgave til bilde	(7) Løser algebraisk	(8) Løser grafisk	(9) Feil/mangelfull notasjon
$d)\ x^2 - 6x + 9 > 4$	16	10	0	6	5
$e)\ x^2 > 4$	15	4	8	3	12
$f)\ (x-2)^2 < 0$	12	14	0	2	2
$g)\ x^2 + 3x + 4 > 0$	13	11	3	2	0

Tabell 4.5.1 Oversikt over elevenes løsningsmetoder i oppgave 3d-g

Alle elevene finner riktig bilde i oppgave 3d, men at det ikke er tilfellet i de øvrige oppgavene. Tabellen viser også at en forholdsvis stor andel av elevene ikke løser ulikhetene, men stanser når de har satt sammen bilde og ulikhet. Videre følge en analyse av elevbesvarelsene på disse fire oppgavene.

Oppgave 3d

Denne ulikheten, $x^2 - 6x + 9 > 4$, har løsning $x \in < -\infty, 1 > \cup < 5, \infty >$. Elevene skulle bruke grafen i figur 4.5.2 til å løse oppgaven. Etter å ha funnet riktig bilde, må de finne ut når grafen ligger over linjen $y = 4$, og notere riktig løsningsintervall. Alle elevene fant riktig bilde til ulikheten, men



Figur 4.5.2
Graf til oppgave 3d

brukte ulike tilnærminger i prosessen. Selv om alle fant riktig bilde, var det bare seks av dem som brukte bildene til å løse ulikheten. Tabell 4.5.3 er en oversikt over elevenes løsningsmetoder til selve ulikheten, og ikke over hvordan de kom frem til riktig bilde. Ingen løste algebraisk så kategori (7) er utelatt i tabellen.

Oppgave 3d	(5) Finner riktig bilde	(6) Plasserer kun oppgave til bilde	(8) Løser grafisk	(9) Feil/mangel-full notasjon
$x^2 - 6x + 9 > 4$	16	10	6	5

Tabell 4.5.3 Oversikt over elevenes løsninger i oppgave 3d

Alle elevene finner riktig bilde til ulikheten, men de 10 elevene på gruppe 1,2 og 4 bruker ikke bildet til å løse den. Elevenes skriftlige besvarelser viser at elevene på gruppe 1 bruker har brukt andregradsformel, mens elevene i de to andre gruppene har derivert og funnet bunnpunkt. Diskusjonene indikerer at dette er metoder de bruker for å finne riktige bilder, og ingen av dem snakker om hva som er løsning av ulikheten. De tre elevene i gruppe 2 gjennomfører samme strategi i resten av oppgavene også; de deriverer for å finne bunnpunkt og finner riktig bilde for deretter å gå til neste oppgave uten å reflektere over om de har løst ulikheten eller hva løsningene eventuelt kan være.

Ingen elever løste ulikheten i 3d algebraisk, det vil si at ingen faktoriserte eller laget fortegnsskjema. De seks elevene som løser ulikheten grafisk, er på gruppe 3 og 5. Jentene i gruppe 3 har nettopp begynt på oppgaven, og prøver å finne riktig bilde:

> June: Eller vent, (snakker samtidig med Nora, utydelig). Hvis vi ikke flytter over den fire, så er det jo en som skjærer i ni.
>
> Hedda: Ja.
>
> June: For de vil egentlig bare finne ut av når tid den funksjonen her x i andre minus seks x pluss ni er større enn fire. Og den er større enn fire_
>
> Hedda: når x_
>
> June: Når x er mindre enn èn og større enn…, nei vent nå,
>
> Hedda: Kan vi se det på grafen? (6 sek stillhet)
>
> Juna. Ja, jeg tror egentlig vi kan det, men. Okei. Når tid er denne her grafen større enn fire? Vent, det blir vel kanskje (5 sek stillhet). Jeg blir så lurt når det står liksom sånn at dette her …

June finner riktig bilde ved å se på skjæring med andreaksen. Hun sier deretter at de skal finne ut når funksjonen er større enn fire, og kommer deretter raskt frem til at x må være mindre enn èn. Likevel virker de usikre, og bestemmer seg for å regne. De bruker andregradsformelen, og kommer frem til $x = 1$ og $x = 5$.

> June: Det de spør etter er jo egentlig bare når tid er denne her grafen større enn fire. Og med å se på denne her, så er jo denne grafen større enn fire når y-verdien er èn eller mer.
>
> Nora: Mhm.
>
> June: Så hvis du får svar med x_
>
> Hedda: Men jeg skjønner ikke helt fire, er det fire y eller fire x?

June: Jeg tror egentlig det er fire y. Fordi da vil du få, dette her er jo en andre, abc-formel. Så da vil du få x èn er lik, eh, du får sånn større lik èn, nei, mindre lik èn. Og større lik fem. De to x, de to x-uttrykkene du får er èn og fem. Men vi kan regne ut det (..)

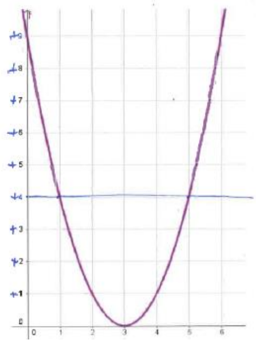
Hedda: Ja, fordi at vi, når y er fire, så_

June: Ja, altså, du kan egentlig ta en strek, y er lik fire. For da vet du at når dette her er mer, så da vil jo..

Hedda: Ja, fordi når en funksjon er bare ett tall, så er det bare en rett strek gjennom det, gjennom y-en. Så da blir det jo, da blir svaret (snakker litt samtidig med June, utydelig)

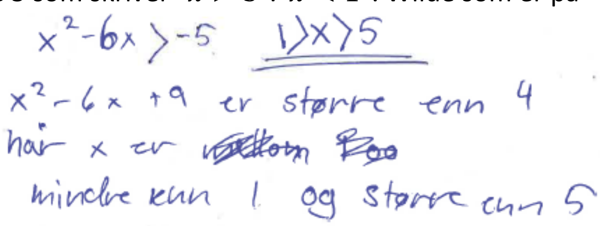
June: Når x blir mindre enn, mindre eller lik èn så er det mer enn fire, og når x er større eller lik fem.

June gjentar at de kan se når grafen er større enn fire. Hedda lurer på om de skal se på firetallet på første- eller andreaksen (x eller y-aksen). June mener de skal se på y-aksen, og begrunner dette med at de får x-verdier når de bruker andregradsformelen. Hun sier de kan tegne en strek på $y = 4$ og Hedda bekrefter at en konstant funksjon blir en vannrett linje. Alle tre jentene har tegnet en strek gjennom $y = 4$ på grafbildene sine (se figur 4.5.4), men ingen har skrevet noen løsning utover resultatene av andregradsformelen ($x = 1$ og $x = 5$). June sier at x kan være mindre eller *lik* minus èn, og større eller *lik* fem, mens det korrekte er at x ikke kan være lik, men kun mindre enn minus èn eller større enn fem. Junes muntlige løsning ikke er derfor helt riktig.



Figur 4.5.4 Junes oppgave 3d

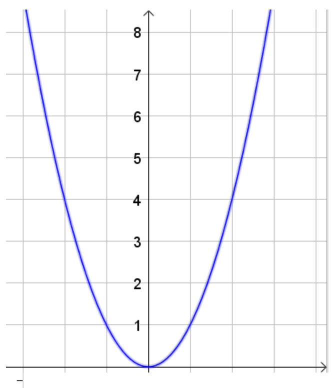
Også elevene i gruppe 5 løser ulikheten grafisk. De kommer raskt frem til riktig bilde, og bruker dette til å finne korrekt intervall. En av de til sammen seks elevene som løser grafisk skriver løsningsintervallene korrekt. Det er Hanne i gruppe 5 som skriver "$x > 5 \vee x < 1$". Wilde som er på samme gruppe sier i lydopptaket at «…når x er mindre enn èn og.. større enn fem». På løsningsarket skriver hun både "$1 > x > 5$" og «når x er mindre enn 1 og større enn 5» (se figur 4.5.5). Dina skriver også 1>x>5. De tre jentene i gruppe 3 unnlater å skrive noe, og jeg har kommentert at Junes muntlige løsning ikke er helt korrekt.



Figur 4.5.5 Wildes besvarelse oppgave 3d

Oppgave 3e

Grafen i figur 4.5.6 tilhører ulikheten skal brukes til å løse $x^2 > 4$. Også i denne oppgaven kan elevene finne riktig løsning ved å se når grafen ligger over linjen $y = 4$. Ikke alle elevene fant riktig bilde, og tabell 4.5.7 gjengir oversikten fra tabell 4.5.1 over løsningsmetodene i denne oppgaven:



Figur 4.5.6 Graf til oppgave 3e

Oppgave 3e	(5) Finner riktig bilde	(6) Plasserer kun oppgave til bilde	(7) Løser algebraisk	(8) Løser grafisk	(9) Feil/ mangelfull notasjon
$x^2 > 4$	15	4	8	3	12

Tabell 4.5.7 Oversikt over elevenes løsninger i oppgave 3e

15 elever fant riktig bilde. Anna i gruppe 4 valgte bildet til oppgave 3f, se figur 4.5.8. Alle de fire elevene på hennes gruppe løste algebraisk, det vil si at de trekker kvadratrota på begge sider av ulikhetstegnet og skriver "$x > \pm 2$". Til tross for at de innbyrdes velger ulike bilder, viser samtalen

dem imellom ingen diskusjon rundt dette. Fire elever i to andre grupper trekker også rot og svarer "$x > \pm 2$". Dermed er det til sammen åtte elever som løser algebraisk.

Fire elever plasserer kun bilde til graf, deriblant elevene i gruppe 2. De tre elevene i gruppe 3 løser grafisk som de gjorde i forrige oppgave. De bruker ikke lang tid på å løse denne ulikheten, her følger hele samtalen:

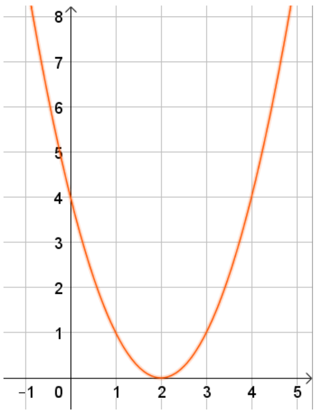
> June: Kun en x i andre, det er vel denne her, funksjon tre? Den.. skjærer gjennom null. (..) Da kan vi ta en strek på y.
>
> Hedda: Ja, på y er fire.
>
> June: Når er denne her større enn fire? Og det blir jo på en måte_
>
> Hedda: Minus to og to_
>
> June: Minus to og to.
>
> Nora: Da kan vi jo bare skrive x er lik_
>
> June: Du må egentlig skrive at den skal være større eller mindre enn det, men det, det ser vi godt selv, tenker jeg.

June sier at de kun har x^2, og dermed finner de raskt riktig graf. Hedda fortsetter med å si at de kan sette en strek i $y = 4$, og alle tre har laget en slik linje på løsningsarkene. Både Hedda og June sier at grafen er større i minus to og to, og June presiserer at x egentlig skal være «større eller mindre enn det». Det kan dermed virke som om de kommer frem til korrekt løsning, nemlig $x \in < -\infty, -2 > \cup < 2, \infty >$. Ingen har imidlertid riktig notasjon av løsningen. June og Nora skriver "$-2 \wedge 2$" og Hedda skriver "$-2 < x < 2$".

Til sammen 12 elever har feil eller mangelfull notasjon. Dette inkluderer flere av løsningene som allerede er presentert overfor, som "$x > \pm 2$" og "$-2 < x < 2$". Et par elever har også svart "$x > 2$". Det kan tyde på at også elevene som klarer å se løsningen grafisk, har problemer med å notere den korrekt, jamfør Halmaghis punkt 7.

Oppgave 3f

Ulikheten i 3f, $(x-2)^2 < 0$, har ingen løsning. Elevene skulle bruke bildet i figur 4.5.8 til å løse den.



Figur 4.5.8 Graf til oppgave 3f

12 elever finne riktig bilde her. De fire elevene som har feil, er elevene i gruppe 5 i tillegg til Anna i gruppe 4 som også valgte feil i forrige oppgave. Tabell 4.5.9 gjengir elevenes løsningsmetoder i denne oppgaven.

Oppgave 3f	(5) Finner riktig bilde	(6) Plasserer kun oppgave til bilde	(8) Løser grafisk	(9) Feil/ mangelfull notasjon
$(x-2)^2 < 0$	12	14	2	2

Tabell 4.5.9 Oversikt over elevenes løsninger i oppgave 3f

Elevene i gruppe 5 bruker bilde 4.5.6 til å løse denne ulikheten. Wilde skriver at løsningen til ulikheten $(x-2)^2 < 0$ er «x = mindre enn -3 og større enn 4» som hun også skriver som "$-3 > x > 4$". Dina skriver ved siden av bildet «denne grafen har x verdi som er mindre enn null». Hanne på gruppe 5 har kun skrevet "$x^2 - 2x + 4 > 0$" på arket sitt sammen med bildenummer, og jeg velger ut fra det å kategorisere henne som en som kun plasserer bilde til oppgave.

Elevene i gruppe 1-4 plasserer kun oppgaven til bildet og de fleste av dem har ingen videre refleksjoner knyttet til at de skal løse en ulikhet. Unntaket er elevene i gruppe 3 som har brukt grafene til å løse ulikhetene i de to foregående oppgavene. De ser at de to gjenværende grafene begge skjærer andreaksen i fire (se figur 4.5.10 Graf til oppgave 3g), og bestemmer seg for å bruke andregradsformelen til å finne nullpunkt. De begynner med ulikheten $(x-2)^2 < 0$ som omformes til "$x^2 - 2x + 4 > 0$". Deretter bruker de andregradsformelen på uttrykket "$x^2 - 2x + 4$".

> June (skriver og snakker): er lik ett nullpunkt. Og dette er jo nummer seks, da. Så da blir den siste (utydelig)
>
> Hedda: Men har vi løst den, da?
>
> Nora: Jeg har bare skrevet sånn, jeg.

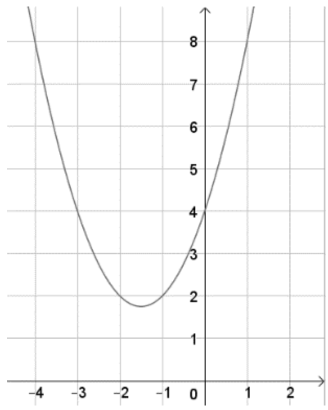
June har brukt andregradsformelen og korrekt funnet nullpunktet $x = 2$ som hun finner på «nummer seks» som er gjengitt i figur 4.5.8. Hedda spør da om de har løst oppgaven. Det har de ikke. Nora sier at hun «bare har skrevet sånn», og på hennes ark finner vi dette: «$(x-2)^2 < 0$ = ett nullpunkt. Nr.6». Hun har dermed bare plassert bilde til oppgave. De andre to svarer også på tilsvarende måte, og ingen av dem løser ulikheten.

Oppgave 3g

Ulikheten $x^2 + 3x + 4 > 0$ i var den siste i oppgaveheftet, og elevene skulle bruke grafen i figur 4.5.10 til å løse den. Grafen har ingen nullpunkt, og vil alltid være større enn null, altså er løsningen $x \in \mathbb{R}$. Tabell 4.5.11 gir en oversikt over elvenes løsninger på denne ulikheten.

Oppgave 3g	(5) Finner riktig bilde	(6) Plasserer kun oppgave til bilde	(7) Løser algebraisk	(8) Løser grafisk
$x^2 + 3x + 4 > 0$	13	11	3	2

Tabell 4.5.11 Oversikt over elevenes løsninger i oppgave 3g



Figur 4.5.10 Graf til oppgave 3g

13 elever finner riktig bilde, de tre jentene i gruppe 5 velger feil (se avsnittet over). De 11 elevene i gruppe 1, 2 og 4 plasserer kun oppgaven til bildet. Dina i gruppe 5 tilhører også denne kategorien ettersom hun ikke skriver noen løsning, og heller ikke har muntlige løsninger på lydopptaket. Jentene i gruppe 3 løste grafisk i oppgave 3d og 3e, men ikke i forrige oppgave. De har bare bildet i figur 4.5.10 igjen, og vil sjekke at bildet stemmer til ulikheten. De bruker andregradsformelen for å sjekke at grafen ikke har nullpunkt, og alle får korrekt $9 - 16$, altså negativt tall under rottegnet.

> June: Du ser det med en gang fordi det blir roten av 9-16. Ingen løsning. Da er vi egentlig ferdig.

June sier at siden de får roten til «9-16», altså roten til et negativt tall har de ingen løsning, og at de er ferdige med denne oppgaven. Alle tre skriver «ingen løsning» på arkene sine, og Nora skriver også «ingen løsning pga negativ i kvadratrota».

Wilde og Hanne i gruppe 5 er de to elevene som løser oppgaven grafisk. Begge brukte feil graf, nemlig grafen i figur 4.5.8. Ut fra dette bildet skal løsningen være alle reelle tall unntatt to. Jeg snakket med dem da de jobbet med denne oppgaven.

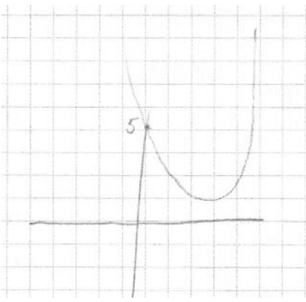
> Jeg: Dere har funnet at det er den grafen? Og så er spørsmålet, er jo når er den større enn null? Er det ikke det som er spørsmålet? Hva vil dere si?
>
> Wilde: Eh, x er større enn fire. Nei, når y, nei, mmm… x er større enn null.

Wilde lurer først på om løsningen er x større enn fire, men ombestemmer seg og sier at x skal være større enn null. Ut fra dette kan det virke som hun ser på skjæringspunktet (0,4) mellom grafen og andreaksen. Hun og Hanne har skrevet "$x \leq 0$" på svararket, og altså ikke x større enn null som hun sier. Jeg snakket med Wilde om denne oppgaven under intervjuet, og gav henne riktig graf. Spørsmålet var først om hun kunne løse likningen $x^2 + 3x + 4 = 0$ ved hjelp av grafen, og Wilde svarer at hun da ikke har noen løsning. Deretter ber jeg henne løse ulikheten $x^2 + 3x + 4 > 0$.

> Wilde: Daa, da er det jo hele tiden i og med at den ikke går under.
>
> Jeg: Og hvis jeg spurte om den er mindre enn null, hva ville du sagt da?
>
> Wilde: Da har den ikke løsning.
>
> Jeg: Hvis jeg spør når tid den er større enn åtte?
>
> Wilde: Da blir det jo derifra (peker korrekt på grafen) og opp.
>
> Jeg: Ja. Altså x, hva blir løsningen da?
>
> Wilde: Da er når x er mindre enn minus fire og større enn èn.

På første spørsmål svarer Wilde at grafen er over null hele tiden, deretter finner hun også riktige løsninger på ulikhetene $x^2 + 3x + 4 < 0$ og $x^2 + 3x + 4 > 8$ ved å se på grafen. Det kan dermed virke som om hun klarer å løse disse ulikhetene grafisk.

Under de fem intervjuene snakket vi om sammenhengen mellom andregradsulikheter og tilhørende likninger. Elevene ble bedt om å ta stilling til påstanden «Fordi $x^2 - 4x + 5 = 0$ ikke har noen løsning, har ulikheten $x^2 - 4x + 5 > 0$ ikke noen løsning.» To av elevene mener påstanden er sann, og begrunner det med at de får negativt tall under rottegnet i andregradsformelen. To mener den er usann, og begge sier $x = 1$ er et eksempel på en mulig løsning. Den femte eleven er Oda. Jeg velger her å ta med et lengre utdrag fra samtalen vår for å få frem hvordan hun bruker både grafisk og algebraisk register i resonnementet sitt. Vi så først på likningen $x^2 - 4x + 5 = 0$. Oda bruker andregradsformel, og får korrekt minus fire under rottegnet. Etter litt resonnering kommer hun frem til at likningen dermed ikke har løsning. Hun sier også at når man bruker andregradsformelen finner man nullpunktene. Jeg ber henne tegne grafen til $x^2 - 4x + 5$ og hun markerer at den skjærer y-aksen i fem (se figur 4.5.12). Deretter spør jeg henne hvilke konsekvenser resultatet $\sqrt{-4}$ får for grafen, og hun sier at grafen ikke får nullpunkt, og dermed ikke treffer x-aksen. Deretter ber jeg henne også ta stilling til påstanden «Fordi $x^2 - 4x + 5 = 0$ ikke har noen løsning, har ulikheten $x^2 - 4x + 5 > 0$ ikke noen løsning.» Hun sier at hun først tenker at det ikke stemmer, altså at den ikke har løsning, og henviser til andregradslikningen der hun har fått $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$. Deretter ser hun på grafen og sier «Mens her (peker på grafen) så du at det kan jo være større enn, alt større enn null liksom… Jeg tror kanskje at … det hadde gått å sette opp sånn [grafisk] selv om det ikke går sånn [andregradsformel].» Hun mener altså at grafen viser at $x^2 - 4x + 5$ er større enn null, mens andregradsformelen ser ut til å lede henne til motsatt slutning. Deretter bytter jeg ulikhetstegn og ber henne løse ulikheten $x^2 - 4x + 5 < 0$. Oda sier da at den ikke stemmer, og at hvis den skulle vært sann måtte grafen ligget under x-aksen.



Figur 4.5.12 Odas skisse av $f(x) = x^2 - 4x + 5$

I alle intervjuene snakket vi om oppgave 3g etter å ha sett på denne påstanden. Elevene fikk grafbildet foran seg (se figur 4.5.10). De ble bedt om å bruke bildet til å løse likningen $x^2 + 3x + 4 = 0$ og ulikhetene $x^2 + 3x + 4 > 0$ og $x^2 + 3x + 4 < 0$. Samtlige fem elever klarte dette. Jeg velger her å la Oda representere resonnementene flere av dem brukte fordi grafisk tilnærming i påstanden over så ut til å bringe henne til riktig løsning og også fordi Oda var på gruppe 2 der de ikke løste noen av de kvadratiske ulikhetene i oppgave 3d-g grafisk.

> Jeg: (skriver på arket $x^2 + 3x + 4 = 0$). Nå skal du ikke bruke abc-formel, du skal bare se på grafen og se. Kan du si litt om løsningen på den likningen? (17 sek stillhet)
>
> Oda: Hvordan vil du at løsningen her..
>
> Jeg: Mhm.
>
> Oda: .. er lik null.. ehm, ut ifra den vi hadde i sted så tenkte jeg at du må sikkert, at det liksom ikke ..gikk. Siden ..er lik null at da finner du nullpunktene. Men her har du ikke noen nullpunkt.
>
> Jeg: Nei.
>
> Oda: Ja (ler litt) det var det jeg tenkte med en gang i hvert fall.
>
> Jeg: Ja. Det er bra. Hvis jeg da spør for eksempel, eh, hvis jeg spør om den er større enn null, da. (Skriver på arket $x^2 + 3x + 4 > 0$) Hva ville du sagt at var løsningen da?
>
> Oda: Da stemmer det. Fordi det har, .. som vi ser at grafen liksom treffer over der y-verdien er null.

Jeg ber Oda løse andregradslikningen ved å se på grafen. Hun tenker en stund, og bruker erfaringen fra forrige oppgave ($x^2 - 4x + 5 = 0$) og svarer så at «det ikke går» ettersom grafen ikke har nullpunkt. Når hun så skal løse andregradsulikheten $x^2 + 3x + 4 > 0$ grafisk, sier hun at det stemmer fordi grafen er over y-aksen. Jeg spør henne så om hva som er løsningen på ulikheten.

> Jeg: Ja. Så hvilke tall er det som er løsning på den, sa du? Du sa at da stemmer det, sa du. Men hvis du skal skrive at x, hva slags x_
> Oda: Åja, x.. (8 sek stillhet)
>
> Jeg: Hvor finner, hvor finner en x-verdiene på grafen, egentlig?
>
> Oda: Må det være her et eller annet sted?

Selv om Oda ser at grafen ligger over null, og at sier at «den stemmer» virker det som det er vanskelig for henne å vite hvor hun skal finne løsningen til ulikheten. Videre i samtalen innrømmer Oda at hun ikke vet om hun skal se på x eller y-aksen. Hun tester noen x-verdier i uttrykket $x^2 + 3x + 4$ og kommer frem til at alle x-verdier fører til at vi får en størrelse som er over null. Jeg viser henne at vi kan skrive løsningen som $x \in \mathbb{R}$. Deretter bytter jeg tegn i ulikheten, og ber henne løse $x^2 + 3x + 4 < 0$.

> Oda: Den hadde jo ikke ..hadde det gått? Da er det ingen løsning.
>
> Jeg: Da er det ingen løsning? Hvorfor ikke?
>
> Oda: Fordi ..hvis *alle* tall gir at det er større enn null, så finner du jo ikke noe tall som gjør at det blir mindre enn null.
>
> Jeg: Nei. Kan du se det på grafen også?
>
> Oda: Ja, for du ser jo at grafen aldri, på en måte, går under null. Den holder seg liksom alltid der y-verdien er positiv.

Oda sier ulikheten ikke har løsning, og begrunner dette først med at ettersom alle x-verdier fører til at vi får større enn null, kan det ikke være noen som gir mindre enn null. Når jeg så ber henne se på grafen sier hun at den aldri er mindre enn null, og begrunner det med at grafen viser at du alltid får positive funksjonsverdier.

Elevenes arbeid med oppgave 3 viser at de ofte fant riktige bilder til ulikhetene. Flere av dem bruker derimot ikke grafene til å løse ulikhetene. I neste kapittel vil jeg gjennomføre en tematisk drøfting av funnene fra analysen.

5 Diskusjon

Formålet med studien er å finne ut hva som karakteriserer S1-elevenes algebraiske og grafiske løsninger av ulikheter. I dette kapittelet vil resultater og funn fra analysen drøftes og belyses ut fra litteratur som er presentert i kapittel 2. I analysen gikk jeg gjennom oppgavene kronologisk, i fortsettelsen her skal jeg forsøke å samle resultater på tvers av oppgaver og relatere til litteratur og forskningsspørsmålet. En slik tematisk oppbyggelse vil være tjenlig for å belyse hva som er karakteristiske trekk ved elevenes besvarelser. Jeg starter med å se på karakteriske trekk ved algebraiske løsninger med tanke på feil og misoppfatninger som elevene har vist. Jeg belyser også kort elevenes beskrivelser av den ukjente i ulikhetene. Deretter setter jeg fokus på grafiske løsninger der Sackurs beskrivelse av registre fra kapittel 2.2.2 er relevant. Jeg ser også på feil og misoppfatninger elever viser i grafiske løsninger. Til slutt er et kapittel der jeg sammenlikner grafisk og algebraisk tilnærmingene og diskuterer elevenes resonnement i forbindelse med disse.

5.1 Karakteristiske trekk ved algebraisk løsning av ulikheter

Elevene arbeidet både med lineære og kvadratiske ulikheter. Enkelte oppgaver har jeg beskrevet som vanlige for dem (oppgave 2a og 2d), men flere oppgaver var mer uvanlige. Tabell 5.1.1 nedenfor gjengir oppgavene med korrekt løsning, og også en kolonne med antall elever som kom frem til denne korrekte løsningen.

Oppgave 2 Algebraisk løsning	Korrekt løsning	Antall korrekt ($n = 16$)
Lineære ulikheter		
$a)\ 3x - 2 \geq -x + 6$	$x \geq 2$	16 (100%)
$b)\ 9(x+1) > 9(x-2)$	$x \in \mathbb{R}$	0
$c)\ x + 3 > 6 - (3 - x)$	Ingen løsning	7 (43,8%)
Kvadratiske ulikheter		
$d)\ x^2 - x - 4 > 2$	$x \in <\leftarrow, -2> \cup <3, \rightarrow>$	0
$e)\ x^2 > 1$	$x \in <\leftarrow, -1> \cup <1, \rightarrow>$	0
$f)\ (x+3)^2 < 0$	Ingen løsning	0
$g)\ x^2 + 2 > 0$	$x \in \mathbb{R}$	1 (6,25%)

Tabell 5.1.1 Oversikt over korrekte algebraiske løsninger

Bortsett fra oppgave 2a, er få ulikheter løst korrekt. I analysekapittelet beskrev jeg at elevene kunne streve med å både beregne og notere riktige løsninger. I fortsettelsen vil jeg først drøfte hvilke misoppfatninger som karakteriserer løsningene og løsningsmetodene til elevene i denne studien.

5.1.1 Feil og misoppfatninger i algebraiske løsninger

Brekke (2002) mener det er viktig å skille mellom feil og misoppfatninger og begrunner dette med at feil oppstår tilfeldig mens misoppfatninger er en konsekvent tanke hos elevene. I min studie har jeg sett eksempler på det jeg vil klassifisere som feil, for eksempel da elevene i gruppe 5 bearbeidet ulikheten i 2d fra $x^2 - x - 4 > 2$ til $x^2 - x - 2 > 0$, og altså gjør en fortegnsfeil når de skal «flytte over» 2 fra høyre til venstre side. Selv om slike feil kan være viktig å påpeke for elevene, vil Brekke hevde at det er viktigere å avsløre misoppfatninger fordi dette er varige tanker hos elevene.

Misoppfatninger knyttet til løsninger av ulikheter

Didaktisk forskning på ulikheter hevder at elever avviser løsninger som ikke passer i mønsteret de forventer. I oppgave 1c skulle elevene si hva de mente var «en løsning av en ulikhet». 10 av dem gav eksempler som $x < 4$, $x \geq 5, x > -3$ eller liknende og viser dermed en forventning om at løsningen skal inneholde ulikhetstegn. Også i oppgave 1d der elevene skulle si om $x = 2$ kunne være en løsning svarte 14 av de 16 elevene benektende og hevdet at løsningen måtte inneholde ulikhetstegn. De to som tilhørte mindretallet mente $x = 2$ kunne være en del av løsningsmetoden for eksempel at de kunne få $x = 2$ som et nullpunkt i andregradsformelen. Det er imidlertid ikke en løsning av selve ulikheten. Dermed hevder egentlig alle 16 at $x = 2$ i seg selv ikke kan være en løsning av en ulikhet og uttrykker en forholdsvis sterk forventning om at løsningen inneholder ulikhetstegn. Kun tre av de sju oppgavene i tabell 5.1.1 har ulikhetstegn i løsningen, og mangelen på ulikhetstegn i de fire øvrige oppgavene kan være en årsak til elevenes problemer.

Tidligere forskning har vist at elever hadde problemer når ulikheter ikke hadde løsning (Almog & Ilany, 2012; Pessia Tsamir & Almog, 1999). Ulikhetene i oppgave 2c og 2f har ingen løsning. I oppgave 2c finner 7 av 16 elever (44%) riktig konklusjon, men jeg har vist i analysen at flere knytter begrunnelsen for «ingen løsning» til at «x forsvinner», og ikke til at det ikke finnes x-verdier som vil gjøre ulikheten sann (se oppgave 2c i kapittel 4.2). Ellerton og Clements (2011) brukte oppgave 2c, $x + 3 > 6 - (3 - x)$, i sin studie av 328 lærerstudenter som studerte matematikk. 33% av studentene svarte korrekt mens 27% hevder at $x = 0$ eller $x > 0$. Det vanligste var at studentene stanset etter å ha bearbeidet ulikheten til $x + 3 > 3 + x$. I min studie bearbeider 15 elever ulikhetene til $0 > 0$. Til sammen 5 elever (31%) svarer at ulikheten ikke kan løses fordi x er null eller fordi x forsvinner. Jeg ser altså en viss likhet mellom resultatene i min og Ellertons undersøkelse med tanke på andel elever som svarer feil og hvilken feil elevene har. Ellertons studenter og mine elever stanser på ulike steder i regningsprosessen, men dette har få konsekvenser for konklusjonene de trekker. I oppgave 2f finner ingen riktig løsning, og jeg vil dermed påstå at elevene mine har problemer med ulikheter som ikke har løsning.

Når elevene mine møtte ulikheter der de kom frem til uvanlige utsagn som $0 > 0$ eller $0 > -27$, virker det som de ikke visste hva de skulle gjøre. Selv de som i oppgave 1c sier at å løse en ulikhet handler om å finne verdier for x, ser ut til å mene at de ikke kan gjør dette når x forsvinner fra uttrykket. Dette skjer i oppgave 2c og 2f som ikke har løsning (se forrige avsnitt) og også i oppgave 2b og 2g der alle reelle tall løser ulikheten. Kun èn av mine elever avgir riktig løsning her. Ellerton og Clements (2011) brukte også oppgave 2b, $9(x + 1) > 9(x - 2)$, i sin studie. De fikk korrekt svar hos 23% av studentene. De vanligste feilene blant dem som ikke fant riktig løsning var svaret «ingen løsning» eller svar som «$27 > 0$» eller «$9 > -18$». I min studie svarte åtte av 16 elever «ingen løsning», mens de resterende åtte svarte $0 > -27$ eller liknende, altså høyere innslag av feil enn i Ellertons studie. Flere av elevene i min undersøkelse som kom frem til $0 > -27$, kommenterer at utsagnet er sant. Utfordringen deres var å overføre denne kunnskapen om sannhet til variablene slik at de kunne formulere og notere matematisk korrekte løsninger til ulikhetene. Man kan dermed spørre om elevene egentlig har forstått at å løse en ulikhet handler om å finne hvilke x-verdier som gjør setningen sann. Elevene hadde tilsvarende problemer med grafisk tilnærming, og jeg kommer tilbake mulige årsaker til elevenes vansker med disse ulikhetene i delkapittel 5.3.1.

Blant deltakerne i studien, var det Oda som gav tydeligst uttrykk for at hun opplevde ulikhetstegnene som problematiske. Hun hadde blant annet problemer med retningen på ulikhetstegnene der løsningen bestod av to intervall, som i oppgave 2d og 2e. Hun sier at hun «sliter med å sette den derre tingen riktig vei» og skriver for eksempel «$-1 > x > 3$» og «$-1 > x > 1$». Under intervjuet ba jeg henne ta stilling til ulikhetene $7 > 5$ og $4 > 5$, og hun sier at den første er sann mens den andre er usann. Hun virker altså ikke til å ha problemer med å forstå hva tegnene innebærer. Når gruppen arbeider med oppgave 2e som har løsning $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$ sier hun korrekt «så må x være mindre enn minus èn og større enn èn» mens hun skriver «$-1 > x > 1$». I analysen så vi at også andre elever bruker samme notasjon som Oda, for eksempel Dina og Wilde (se figur 4.5.5) og Hanne. En mulig forklaring på at de skriver tegnene feil, kan være at de ikke tenker over at skrivemåten innebærer en løsningsmengde som samtidig skal være mindre enn minus èn og større enn èn, eller at de blander med skrivemåten for ett løsningsintervall: Dersom oppgave 2e hadde vært gitt som $x^2 <$

1, kunne løsningen blitt notert som «$-1 < x < 1$». Halmaghi (2011) fant også at studentene i hennes studie hadde problemer med ulikhetstegnet og nevner tre eksempler på dette (se punkt 9 i delkapittel 2.3.2 side 8). Jeg fant ikke disse tre variantene i min studie, men så altså at i alle fall tre elever bruker ulikhetstegnene feil i notasjon av to løsningsintervall.

Tsamir et al., (2008) fant i sin studie i 1998 at elever har problemer med tegnene *mellom* to løsningsintervall. Jeg så også i min undersøkelse at flere elever brukte tegnet «∧» eller skrev «og» mellom løsningsintervallene, andre utelot tegn og skrev «$x < -3, x > 2$». Almog og Ilany hevder at elevene i deres undersøkelse ikke fullt ut forstår meningen med de logiske bindeleddene («logical connectors») *og* og *eller* og at de derfor ikke behersker bruken av dem (Almog & Ilany, 2012). Jeg snakket ikke med elevene mine om dette under intervjuene, men nevnte det for faglæreren deres i etterkant. Hun sa at de ikke hadde jobbet bevisst med denne notasjonen i timene. Kongelf (2015) fant i sin undersøkelse av matematikkbøker for ungdomstrinnet at de la liten vekt på begrunnelser for notasjoner. Selv om læreboken til elevene i denne studien har et kapittel om mengdelære med noe notasjon virker det ikke som dette blir understreket i forbindelse med ulikheter eller er blitt vektlagt i undervisningen. Dersom verken læreverk eller undervisning bevisstgjør elevene på hva ulike tegn og symboler innebærer kan jeg kanskje ikke forvente at elevene er konsekvente i sin tegnbruk.

Samtalene fra gruppearbeidet inneholdt flere diskusjoner knyttet til tegnbruk, og viste at flere elever er usikre på hvilket tegn de skal bruke i løsningen. Hanne, som verken faktoriserte eller tegnet fortegnsskjema, brukte «=» i andregradsformelen, men ulikhetstegn når hun skriver hva nullpunktene er. Wilde mener at de skal beholde ulikhetstegnet når de bruker andregradsformelen fordi de ikke multipliserer med noe negativt på begge sider av tegnet. Wilde og Dina bruker konsekvent samme tegn som blir gitt i oppgaven gjennom alle beregninger og også i løsningene av alle de 14 ulikhetene i oppgave 2 og 3 (se Figur 4.3.3 Wildes løsning på oppgave 2d). Dette likner misoppfatningen Almog og Ilany (2012) refererer til om at ulikheten $x^2 - x - 6 > 0$ gir løsningen $x > 3, -2$ ettersom likningen $x^2 - x - 6 = 0$ gir løsningen $x = 3, -2$. Dette kan ha sammenheng med det elevene opplever som en tett relasjon mellom likninger og ulikheter der kun tegnet er forskjellig. Det vil jeg belyse i neste avsnitt.

Misoppfatninger knyttet til relasjonen mellom likninger og ulikheter

Forskningen som er gjort på ulikheter har vist at en av de vanligste misoppfatningene hos elever er å trekke for sterke analogier mellom likninger og ulikheter (Almog & Ilany, 2012; Blanco & Garrote, 2007; Ellerton & Clements, 2011; Espeland, 2017; Halmaghi, 2011; P. Vaiyavutjamai & M. K. Clements, 2006). Ellerton kaller dette «Over-emphasising relationships between equations and inequalities» (Ellerton & Clements, 2011, side 399), altså at elevene opplever et overdrevet sterkt forhold mellom likninger og ulikheter. Dette fant jeg også i min studie, særlig da elevene arbeidet med andregradsulikheter. Den sterke forbindelsen til likninger viste seg i hovedsak i tre varianter: (1) Elevene bruker andregradsformel til å finne nullpunktene, men verken faktoriserer eller drøfter ulikhetene. (2) Når andregradsulikheten mangler førstegradsledd, trekker elevene kvadratrot på begge sider og beholder ulikhetstegnet (Ellerton & Clements, 2011). (3) Dersom bruk av andregradsformelen gav negativt tall i kvadratroten, konkluderte elevene med at ulikheten ikke hadde løsning (Pessia Tsamir et al., 1998). Til sammen skulle elevene løse åtte andregradsulikheter i løpet av gruppearbeidet. Selv om de fire siste skulle løses grafisk, valgte enkelte elever å løse disse også algebraisk. Tabell 5.1.2 på neste side viser en oversikt over hvilke likningsanalogier elevene trakk i andregradsulikhetene.

I flere av oppgavene bruker en forholdsvis stor andel av elevene andregradsformel uten å anvende løsningen til videre faktorisering eller drøfting av ulikheten. Enkelte svarer med likhetstegn i løsningene, mens andre beholder ulikhetstegnet gjennom hele oppgaven. Både under gruppearbeidet og intervjuene snakket noen av elevene om hva som var hensikten med å bruke fortegnsskjema. Flere nevner at det handler om monotoniegenskaper og å finne ekstremalpunkt, og dette kan muligens ha sammenheng med at de nylig hadde brukt fortegnsskjema til drøfting av den deriverte, og dermed blandet disse to anvendelsene av skjemaet. Andre elever ga uttrykk for en tydeligere forståelse av løsningsprosedyrene de brukte, for eksempel Lars som løser oppgave 2d riktig og sier at de må se på den positive delen av resultatlinjen i fortegnsskjemaet fordi uttrykket skal være større enn null.

	(1) Andregrads-formel uten faktorisering	(2) Trekker kvadratrot	(3) Negativt tall under rottegnet gir ingen løsning	Min kommentar
Oppgave 2				Alle 16 elever løste algebraisk
$d)\ \ x^2 - x - 4 > 2$	7			
$e)\ \ x^2 > 1$	2	10		
$f)\ \ (x+3)^2 < 0$	13			
$g)\ \ x^2 + 2 > 0$		7	10	Kan ikke faktoriseres
Oppgave 3				Skulle løses grafisk
$d)\ x^2 - 6x + 9 > 4$				Ingen løst algebraisk
$e)\ x^2 > 4$		8		8 løste algebraisk
$f)\ (x-2)^2 < 0$				Ingen løst algebraisk
$g)\ x^2 + 3x + 4 > 0$			3	3 løste algebraisk. Kan ikke faktoriseres.

Tabell 5.1.2 Elevenes bruk av likningsmetoder i andregradsulikheter

I oppgave 2d som jeg regnet for å være en vanlig ulikhet er det sju elever som løser som likning, det vil si at de kun bruker andregradsformel til å finne nullpunkt og stanser der. June i gruppe 3 er en av dem og da hun ble intervjuet, spurte jeg henne hvordan hun løser denne ulikheten. Hun svarer at hun bruker andregradsformelen («abc-formelen»). Når jeg spør henne hvordan hun ville løst *likningen* $x^2 - x - 4 = 2$ sier hun «Jeg ville løst den helt likt». June brukte ikke fortegnsskjema i noen oppgaver, og svarer med «$x =$» i oppgave 2d og 2f, mens hun i 2e skriver «$x > \pm 1$». Hun er dermed ikke konsekvent i bruk av tegn, men i bruk av metode, det vil si at hun løser alle andregradsulikhetene på samme måte som hun kunne løst tilsvarende likninger, og kan se ut til å ha en misoppfatning i forhold til at ulikheter løses som likninger. Også andre elever sier at de tenker at de kan løse ulikhetene som likninger. I oppgave 1b skulle elevene skrive om forskjell på likninger og ulikheter. Da snakker elevene på gruppe 1 om at disse løses på samme måte. Vera sier at hun noen ganger bruker likhetstegn i stedet for ulikhetstegnet og Jenny bekrefter at den eneste forskjellen er tegnet. Dette samsvarer med Blanco og Garrote som hevder at elevene ikke forstår den matematiske forskjellen på ulikheter og likninger, og oppfatter at tegnene «$=, <, >, \leq, \geq$» ikke har annen hensikt enn å forbinde de to sidene i utsagnene (Blanco & Garrote, 2007). Vi kan også trekke paralleller til Halmaghis COIN-modell der en av oppfatningene nettopp er å tenke på ulikheter som en fremmed eller rar slektning av likninger. Ifølge Halmaghi vil elever med denne oppfatningen i praksis løse ulikhetene som likninger, og gjerne også bytte ut ulikhetstegnet med likhetstegn slik Vera sier at hun noen ganger gjør (Halmaghi, 2011).

Tre av ulikhetene var på formen $x^2 > a$, og i to av dem var a et positivt tall (oppgave 2e og 3e). Kun fire elever faktoriserer uttrykket i oppgave 2e, $x^2 > 1$. 10 av 16 elever trekker kvadratrot og de fleste svarer med $x > \pm 1$. Ingen av dem gir uttrykk for at dersom denne løsningen hadde vært sann, skulle de skrevet den som $x > 1$. Det samme er tilfelle i oppgave 3e der åtte elevene velger å løse algebraisk trekker kvadratrot og flesteparten svarer med $x > \pm 2$. Diskusjonene tyder imidlertid på at det er noe usikkerhet rundt fremgangsmåten med å trekke kvadratrot i enkelte grupper. Nina på gruppe 1 spør medelevene sine om de må snu tegnet når det tar kvadratrot, og de svarer at de er usikre på det. Jeg intervjuet June i gruppe 3 som også har svart med "$x > \pm 1$" og spør hva dette betyr. Hun svarer at «det blir vel to. Og tre. Sånne som er over positivt èn». Jeg spør om det finnes negative tall som gjør ulikheten sann, og June svarer raskt «minus to». Deretter resonnerer hun seg greit frem til at løsningen egentlig skal være «x må være mindre enn minus èn og x må være større enn èn». Når jeg spør henne hvordan hun kunne regnet seg frem til denne løsningen, vet hun imidlertid ikke hva hun skal gjøre. Ellerton og Clements (2011) brukte ulikheten $x^2 > 4$ (3e) i sin studie og 5% av 328 studenter løste denne algebraisk korrekt. De hevder at selv om elevene ofte har ideer om hvordan de skal løse likninger, er det sjelden de vet hvordan de skal løse tilsvarende ulikheter. I dette tilfellet har elevene løsningsstrategier for likningen $x^2 = a$, som de overfører til ulikheten $x^2 > a$ og viser at de ikke er bevisst på forskjellen mellom likninger og ulikheter (Blanco & Garrote, 2007).

Analogien mellom likninger og ulikheter ser vi også i oppgave 2g ($x^2 + 2 > 0$) der sju elever skriver at ulikheten ikke har løsning fordi man ikke kan trekke kvadratrot av et negativt tall. Også i oppgave 3g møter elevene negativt tall under rottegnet. Ti elever konkluderer med at da vil heller ikke ulikheten ha løsning. Dette stemmer med forskningen fra Tsamir med flere som fant at 63% av deltakerne i deres studie hevdet at ulikheten $x^2 - x + 1 > 0$ ikke har løsning siden tilsvarende likning ikke har reelle røtter (Pessia Tsamir et al., 1998). Vi ser det Halmaghi beskriver som «met-befores» der elevene overfører kunnskapen de har om andregradslikninger til ulikheter, og at i dette tilfellet leder denne overgeneraliseringen elevene til feil konklusjon (Halmaghi, 2011). Jeg vil også trekke fram Halmaghis «missed-befores» i denne sammenhengen fordi de understreker at når elever mangler erfaring innen ulikheter, tvinges de til å bruke analogier fra likninger som ikke nødvendigvis er korrekte.

Jeg har vist at ulikheter kan ha løsninger på formen «$x =$» (se 2.3.2). Elevene møtte imidlertid ingen ulikheter med slike løsninger i oppgaveheftet. Likevel fant jeg til sammen 23 besvarelser med «$x =$» i oppgave 2d-2f. Tydeligst vises det i oppgave 2f, $(x + 3)^2 < 0$, der 11 elever bruker andregradsformel og svarer med «$x = -3$». Flere elever gir uttrykk for at det var et uventet eller uvanlig resultat. Det kan være ulike aspekter ved denne løsningen som overrasket elevene. Oda sier for eksempel at hun ikke kan lage fortegnsskjema siden hun bare får ett nullpunkt. Det kan dermed virke som om hun enten ikke kjenner til doble nullpunkt eller ikke vet at man *kan* tegne fortegnslinje for bare èn faktor, selv om det siste i dette tilfelle ikke ville være korrekt. Frida som var på Odas gruppe tegner fortegnsskjema med to like faktorer $(x + 3)$ og sier «alt blir positivt». Hun klarer imidlertid ikke overføre dette resonnementet til selve ulikheten og svarer $x = -3$. Det kan virke som Frida har problemer med å tolke fortegnsskjemaet når hele resultatlinjen, bortsett fra nullpunktet, er positiv. Andre reagerer på at de får likhetstegn i det de tror er løsningen av ulikheten slik som Nina som henviser til at de i oppgave 1d har svart benektende på at «$x = 2$» kan være løsning av en ulikhet nettopp på grunn av likhetstegnet. Løsningen ville vært korrekt for *likningen* $(x + 3)^2 = 0$. Dersom jeg ser på oppgave 2d-f som helhet, har samtlige 16 elever levert skriftlige besvarelser (feilaktig) med «$x =$» samtidig som alle i oppgave 1d hevder at ulikheter må ha ulikhetstegn i løsningen, altså en inkonsistens i resonnementene (Pessia Tsamir & Bazzini, 2004).

Elevene i denne studien trekker flere ugyldige analogier mellom kvadratiske likninger og ulikheter. Løsningsalgoritmen for algebraisk løsning av andregradsulikheter kan være lang med faktorisering og å tegne fortegnsskjema. Enkelte elever kan ha tenkt at de er ferdige med oppgaven når de har funnet nullpunktene, og glemmer at hensikten med å finne nullpunkt er faktorisering og drøfting. Under intervjuet med Anna, som løste oppgave 2d som en «ren» andregradslikning kommer hun på at hun kanskje skulle tegnet fortegnsskjema, men sier at hun «ikke helt vet hvordan, jeg vet bare at det er noen sånne…prikker som er minus, tror jeg». Anna gir inntrykk av at hun ikke vet hvordan hun lager fortegnsskjema, og at hun ikke husket hva hun skulle gjøre. Annas usikkerhet kan minne om Halmaghis oppfatning null der elevene famler seg frem med tall og tegn uten å vite hva de skal gjøre med dem. Dette aktualiserer også Sfards utsagn om at elever opplever løsning av likninger og ulikheter som meningsløse rutinepregede prosedyrer (Sfard 1994, se kapittel 2.3.3). Flere studier hevder at læreverk og undervisning legger for stor vekt på prosedyrer og metoder i møte med ulikheter (Bicer et al., 2014; Blanco & Garrote, 2007; Espeland, 2017), og at elevene dermed mister oversikten over hva som er hensikten med regneoperasjonene de utfører.

5.1.2 Algebra og ulikheter - x som variabel og ukjent

Jeg minner om Wagner og Parkers (1993) uttalelse om ulikheter som en «conceptual intermediary» mellom likninger og funksjoner fordi bokstavene ofte representerer en tallmengde. Flere av elevene i denne studien bruker nettopp begrepet «mengde» når de skal beskrive løsningen av ulikheter i oppgave 1c. June er en av dem, og under intervjuet bekreftet hun at x kan være mange tall. Wilde skriver at «du finner mulige verdier for at ulikheten skal stemme», og er med et ganske nær definisjonen til Karp og Pollak (jamfør Ellerton & Clements, 2011)Andre har vagere formuleringer, som at i ulikheter er «x litt friere», at du «vet ikke akkurat hva x er» eller at «x ikke er et bestemt tall, men innenfor noen rammer». Dermed kan det i utgangspunktet virke som at elevene har en oppfatning om at x representerer hele løsningsmengden, og ikke bare enkelte elementer av den slik Espeland (2017) fant. Det finnes likevel enkelte uttalelser og beskrivelse under gruppearbeidet som kan problematisere en slik oppfatning, blant annet er det to elever som skriver at $x = 2$ kan være en løsning av en ulikhet «hvis x er et intervall mellom 1 og 3». Her kan det virke som eleven tenker at to er en mulig løsning av en ulikhet, som jo er korrekt, men at de ikke forstår at x representerer en uendelig løsningsmengde, og ikke bare enkelte elementer, jamfør Küchemann nest høyeste oppfatning av bokstaver (Küchemann, 1981).

De fleste elevene virker til å forstå at i ulikheter kan x ha flere verdier. Hedda sier at man kan velge både positive og negative tallverdier for x i ulikhetene $x^2 + 2 > 0$ og alltid få positive svar. June er inne på sammen tanke når hun resonnerer seg frem til løsningen av $x^2 > 1$. Selv om elevene oppfatter at x kan ha ulike verdier, altså at x er en variabel, er det ikke sikkert de oppfatter at x representerer en uendelig løsningsmengde, og ikke bare enkelte elementer (P. Vaiyavutjamai & M. Clements, 2006).

5.2 Karakteristiske trekk ved grafisk løsning av ulikheter.

En motivasjon bak denne studien, var resultatet til Tsamir og Almog der elever som valgte grafisk løsning av ikke-lineære ulikheter oftere fikk riktig løsning enn de som valgte andre tilnærminger (Pessia Tsamir et al., 1998). I deres studie hadde deltakerne i forkant fått opplæring i tre ulike metoder: algebraisk, grafisk og bruk av tall-linjer. I min studie innrømmet flere studenter at de ikke var vant til å bruke grafer til å løse ulikheter, selv om de hadde arbeidet grafisk med lineær optimering. En hovedforskjell på algebraisk og grafisk tilnærming, er at i grafisk løsning må elevene forholde seg til flere register. Jeg vil starte med å se på dette før jeg deretter ser på vanlige feil og misoppfatninger i grafiske løsninger i min studie.

5.2.1 Omforming mellom registre

I starten av kapittel to beskrev jeg Duvals teori om representasjoner og registre. Transformasjoner innen et register kaller han *behandling* («processing»*),* mens overgang fra et register til et annet kalles *omforming* («conversion») (Duval, 2006). Duval hevder at det er avgjørende at elever behersker omforminger for å løse matematiske problemer. Samtidig mener han at elever ofte har problemer med å kjenne igjen et objekt etter en omforming. De siste sju ulikhetene skulle elevene løse ved hjelp av grafer. Selve oppgavene ble gitt på algebraisk form, og jeg hadde en forventning om at elevene skulle skrive løsningen ved hjelp av matematiske symboler selv om dette ikke er eksplisitt uttrykt i oppgaveformuleringen. Sackur (2004) hevder at elevene må innom fire ulike registre for å løse ulikheter grafisk. Registre og omforminger ble presentert i tabell 2.2.1 som jeg gjengir på neste side.

	I	**II**	**III**	**IV**
Register	Algebraisk	Funksjoner	Grafisk To-dimensjonal	Grafisk En-dimensjonal
Omforming	$3x + 3 \leq x + 1$	$f(x) = 3x + 3$ $g(x) = x + 1$	$y = 3x + 3$ $y = x + 1$	$x \in < \cdots >$
x	x som ukjent	x som variabel	x som variabel	x som ukjent med avdekket identitet

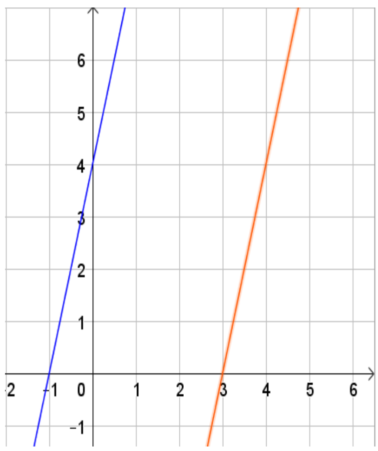
Figur 5.2.1: Kopi av tabell 2.2.1 Registre involvert ved grafisk løsning av ulikhet

Jeg bruker denne som utgangspunkt for en oversikt over hvordan elevene i min studie behersket omformingene mellom de ulike registrene i oppgave 3. Ettersom elevene fikk ferdig tegnede grafer, kan de gå direkte fra **I** Algebraisk til **III** Grafisk to-dimensjonal, og **II** Funksjoner blir dermed overflødig. Tabell 5.2.2 er en oversikt over hvor mange av de 16 elevene som klarte omformingen i grafisk løsning av ulikheter.

I Algebraisk register	**III** Grafisk to-dimensjonal (n=16)	**IV** Grafisk en-dimensjonal (n=16)
Lineære ulikheter		
$a)\ 3x + 3 \leq x + 1$	16	7
$b)\ 4(x + 1) > 4(x - 3)$	16	0
$c)\ x + 5 > 8 - (3 - x)$	16	0
Kvadratiske ulikheter		
$d)\ x^2 - 6x + 9 > 4$	16	6
$e)\ x^2 > 4$	15	3
$f)\ (x - 2)^2 < 0$	12	0
$g)\ x^2 + 3x + 4 > 0$	13	0

Tabell 5.2.2 Elevenes omforminger i grafisk løsning

De fleste elevene klarer omformingen fra algebraisk register til grafisk to-dimensjonal, det vil si at de fant riktige bilder til ulikhetene. De aller fleste fant raskt frem til riktige bilder for de lineære ulikhetene mens flere valgte å bearbeide andregradsulikhetene algebraisk for å finne riktige bilder: Enkelte deriverte for å finne ekstremalpunkt, andre brukte andregradsformel og fant nullpunkt. En mulig årsak til vanskene i møte med andregradsulikhetene kan være at bildene kun inneholdt parabler som representerte venstre side i ulikhetene, og ingen grafer for høyre side. Likevel finner forholdsvis mange elever frem til riktige bilder, og viser at de behersker omformingen fra algebraisk til grafisk register.



Figur 5.2.3 Bilde til oppgave 3b

Det mest karakteriske for elevene i denne S1-klassen er at de ikke bruker grafene til å løse ulikhetene. Selv om enkelte elever finner riktig løsninger, er det likevel et flertall som ikke behersker overgangen fra **III** grafisk to-dimensjonal til **IV** grafisk en-dimensjonal. Det kan være flere årsaker til dette. For det første er utfordringen at elevene må fokusere på y-verdiene, eller funksjonsverdiene for deretter å finne x-verdiene som angir løsningen(e). Enkelte elever klarte dette. Helenes uttalelse i oppgave 3a der hun sier at de skal finne «når den der linjen har mindre funksjonsverdi enn den der» impliserer at hun fokuserer på y-verdiene. Gruppen hennes finner dermed riktig løsning i 3a. I oppgave 3b er linjene parallelle (se figur 5.2.3), og her hevder Helene at ulikheten dermed ikke har løsning. I oppgave 3a henviser hun til y-aksen mens i 3b og 3c ser hun kun på at grafene er parallelle/overlappende uten noen referanser til andreaksen. Et avgjørende punkt for å finne riktige verdier for x, er å fokusere på y-verdiene. Dette gjør Helene i oppgave 3a, men ikke i 3b eller 3c. Hun er dermed inkonsekvent i sin bruk av grafene.

Halmaghi (2011) hevder at en vanlig feil er at elever ikke klarer å lese korrekte løsninger av grafer, og at de også konverterer det de ser til feil løsninger (se avsnitt 2.3.2). I starten av intervjuet med Wilde hevder hun at parallelle linjer er like store, men ved å fokusere på y-verdiene for $x = 1$ resonnerte hun seg frem til at den blå linjen i figur 5.2.3 ville være større enn den oransje. I analysen nevnte jeg at selv om Wilde konkluderer med at den ene linjen alltid vil være større enn den andre, kan jeg ikke si at hun dermed har klart å finne at løsningen til ulikheten er alle reelle tall. June er eksempel på dette. Under intervjuet sier hun også at den blå linjen hele tiden er større enn den andre. Hun har likevel svart «ingen løsning» og mener at dette stemmer siden linjene er parallelle. Jeg ser at selv om disse elevene analyserer grafene riktig, klarer de ikke nødvendigvis konvertere det de ser til løsninger av ulikheten. Men jeg kan kanskje antyde at gjennom å fokusere på y-verdiene er disse to nærmere å finne riktig løsning enn de elevene som hevder linjene er like store.

Flere elever gir uttrykk for at de ikke vet hvordan de skal forholde seg til aksene i koordinatsystemet. Hedda spør under arbeidet med oppgave 3d om de skal se på fire y eller fire x. Under intervjuet er Oda inne på det samme når vi snakker om å løse ulikheten $x^2 - 4x + 5 > 0$, og Oda lurer på om «…skal man på en måte tenker da på y-verdiene eller x-verdiene», og fortsetter med å si at hun er usikker på dette, og at hun aldri har tenkt over at det skal være en verdi på enten y-aksen eller x-aksen. Dette stemmer med Farmaki et al., (2008) som fant at elever hadde problemer med å håndtere to variabler når de arbeidet grafisk med ulikheter. For å hjelpe elevene mener de man må gjøre dem oppmerksomme på at y er et annet navn på for eksempel uttrykket $3x + 3$. Jeg er usikker på om dette ville hjulpet elevene i møte med for eksempel de parallelle linjene i oppgave 3b, men er enig med Farmaki i at elevene trenger å bli bevisst på hvordan aksene brukes for å finne løsninger på ulikheter.

En annen årsak til elevenes problemer med den siste omformingen, kan være at selv om de ser hvordan ulikheten kan skrives som to grafer, kjenner de ikke igjen selve ulikheten i det grafiske registeret. En gruppe regnet seg frem til $0 > -16$ på oppgave 3b, når en av elevene spør «Men skulle vi sett det med dette her [grafbildet]?» og slik gir uttrykk for at hun ikke vet hva de skal bruke grafene til. Tre av gruppene unnlater å bruke grafer på samtlige grafiske oppgaver, blant annet Odas gruppe. De snakker ikke om hva de skal bruke grafene til, men regner seg kun frem til hvilket bilde som tilhører de forskjellige ulikhetene. Enten vet de ikke hva de skal gjøre videre, eller så tror de kanskje at de har løst oppgaven når de har funnet riktig bildet. Dette samsvarer med Duvals punkt om at elever har problemer med å kjenne igjen et objekt etter en omforming (Duval, 2006). Også Halmaghi (2011) nevner at en vanlig feil blant elever er at de ikke klarer å lese korrekte løsninger av grafer.

Selv om mange elever hadde problemer med å løse ulikhetene grafisk, så jeg også eksempler på elever som brukte bildene til å finne riktige løsninger på ulikheten, spesielt gjaldt dette andregradsulikhetene i oppgave 3d og 3e. Her fant samtlige elever som brukte grafene riktig løsning selv om bare Hanne klarte å notere korrekt løsning på èn av oppgavene. Wilde løste begge disse korrekt, og under intervjuet klarte hun også grafisk løsning av andre kvadratiske ulikheter uten særlig betenkningstid. Mot slutten av samtalen vår spurte jeg henne om hun foretrakk å løse ulikheter ved regning eller grafer, og da sier hun at «jeg ville nok si at det er lettere å se på grafen. Hvis man klarer å forstå det, på en måte». Når jeg så spør om hun føler at *hun* forstår det svarer hun «Ofte». Hun berører dermed det som Duval poengterer, at forutsetningen for læring innen et register er at elevene vet hvordan registeret fungerer (Duval 2006). June gav under intervjuet direkte uttrykk for at hun vil løse andregradsulikhetene på samme måte som hun løser andregradslikninger. Det gjorde hun også i oppgave 2, og fikk dermed ingen korrekte løsninger. Når hun får grafer, finner hun riktig løsning til to av ulikhetene (3d og 3e). Samtalen med Oda som er analysert i siste avsnitt i analysekapittelet beskriver hvordan hun erfarer at hun kan bruke grafer til å finne korrekte løsninger på ulikheter der algebraisk tilnærming fører henne til feil konklusjoner. Dermed har jeg eksempler på Tsamirs (1998) funn som hevder at elever som får opplæring i og deretter bruker grafisk tilnærming har større mulighet til å finne riktig løsning enn elever som løser algebraisk når det gjelder ikke-lineære ulikheter.

Duval (2006) hevder at enkelte omforminger kan være enkle den ene veien, men vanskeligere den andre, og jeg har sett at selv om elevene klarer omformingen fra algebraisk til grafisk register er det ikke mange som klarer fortsettelsen fra grafisk register til algebraisk løsning eller det Sackur (2004) kaller for **IV** grafisk en-dimensjonal. Det kan være flere årsaker til dette. Flere elever gav uttrykk for at de ikke var vant til å løse ulikheter grafisk, slik som Anna gjorde under intervjuet. Da jeg spurte henne om hun ville valgt å løse ulikheter med grafer eller ved regning, sier hun at hun synes det er vanskelig å tegne grafer, og at hun heller ikke er så flink til å lese dem. Også June sa under intervjuet at hun foretrekker regning fordi hun er mest vant til det, og sier at hun har «vært litt dårlig på å skjønne grafer, men jeg har liksom begynt å forstå det litt dette året». Duval (2006) hevder at det er avgjørende å beherske et register dersom dette skal brukes til læring og da er det forståelig at elevene opplevde problemer i møte med grafisk løsningsmetode.

5.2.2 Feil og misoppfatninger i grafiske løsninger

I løpet av gruppearbeid og intervjuer avslørte noen av elevene det jeg vil kalle misoppfatninger i grafisk tilnærming til ulikheter. Den mest fremtredende er forestillingen om at det må finnes skjæringspunkt mellom grafene for at vi skal kunne løse ulikhetene. Til sammen åtte elever gir direkte uttrykk for dette, enten i diskusjonene eller som nedskrevet løsning i oppgave 3b eller 3c. I tre av intervjuene kom vi inn på oppgave 3b som har parallelle linjer, og alle de tre elevene gir uttrykk for at ulikheten ikke vil ha løsning med begrunnelse i at linjene er parallelle. Når jeg spør Nina når den ene linjen er større enn den andre, sier hun «Det ser vi jo ikke. De er jo parallelle». Også oppgave 3c som gir overlappende linjer fører til usikkerhet, og June sier i den sammenheng at ulikheten ikke har løsning fordi grafen ikke kan sammenliknes med andre. Det kan derfor virke som om disse elevene har en misoppfatning om at skjæringspunkt er en betingelse for å kunne løse grafisk, eller for at ulikhetene skal ha løsning.

En annen elev som kan gi inntrykk av en misoppfatning, er Oda. I oppgave 3a og 3c sier hun at bildene ikke stemmer med ulikhetene. I oppgave 3a ($3x + 3 \leq x + 1$) som består at to rette linjer som skjærer hverandre, sier hun at i oppgaven står det at «den oransje grafen [$3x + 3$] skal være mindre enn eller lik den lilla grafen [$x + 1$]. Men på denne her grafen går den jo *forbi* den lilla». Hun har tilsvarende utsagn i forbindelse med oppgave 3c der vi får like uttrykk på begge sider at ulikhetstegnet, og altså sammenfallende rette linjer. Da sier Oda at «det er jo litt rart at det står at de skal være ulik hverandre, eller det står at den ene skal være større enn den andre når de er prikk like». Hun målbærer dermed en forventning om at grafene skal illustrere at den ene siden *er* ulik den andre, og ikke brukes til å avgjøre *når* eller for hvilke x-verdier den er det. Dette kan minne om en grafisk variant at funnene til Sfard (1994) der elevenes språkbruk avslørte at flere elever mente løsningsprosedyrene skulle lede frem mot et sant utsagn fremfor å finne hvilke x-verdier som gjør utsagnene sanne. Forskjellen er at elevene i Sfards undersøkelse ikke brukte grafer, mens Oda nettopp henviser til at grafbildene skal avspeile utsagnene i ulikheten.

I kapittel 5.1 beskrev jeg at blant elevene som muntlig avgir riktige løsninger grafisk oppstår det feil når de skal notere løsningen skriftlig. Elevene i gruppe 2 bruker grafbildet til å finne løsningen til $x^2 > 4$, og June sier at det er når x er større eller mindre enn pluss to og minus to. Hun har skrevet løsningen som "$-2 \wedge 2$", og viser at elever har problemer med korrekt notasjon av løsninger slik som Halmaghi (2011) beskriver i sin liste.

5.3 Grafisk og algebraisk tilnærming til ulikheter

Jeg ønsket å undersøke hva som karakteriserer grafisk og algebraiske løsninger og metoder til elevene i min studie. Elevene arbeidet med til sammen 14 ulikheter fordelt på to oppgaver. Ulikhetene var laget slik at de parvis liknet hverandre med tanke på oppstilling og løsninger. I oppgave 2 brukte alle de 16 elevene algebraisk tilnærming. Det var min hensikt at alle 16 skulle bruke grafer til å løse ulikhetene i oppgave 3, men i praksis valgte en del av dem å bare sette sammen bilde og oppgave, eller å løse algebraisk. Tabell 5.3.1 under gir en oversikt over antall korrekte løsninger av alle sju parene med ulikheter. I oppgave 3a inkluderer jeg de tre elevene som mente at løsningen var i skjæringspunktet i kolonnen «Grafisk».

Oppgave 2 Algebraisk løsning		Oppgave 3 Grafisk løsning		
	Algebraisk ($n = 16$)		Grafisk (n varierer)	Algebraisk (n varierer)
Lineære ulikheter		Lineære ulikheter		
a) $3x - 2 \geq -x + 6$	16 (100%)	$a)$ $3x + 3 \leq x + 1$	7 av 10 (70%)	7 av 8 (87,5%)
$b)$ $9(x + 1) > 9(x - 2)$	0 (0%)	$b)$ $4(x + 1) > 4(x - 3)$	0 av 6 (0%)	0 av 5 (0%)
$c)$ $x + 3 > 6 - (3 - x)$	7 (43,8%)	$c)$ $x + 5 > 8 - (3 - x)$	0 av 3 (0%)	0 av 8 (0%)
Kvadratiske ulikheter		Kvadratiske ulikheter		
$d)$ $x^2 - x - 4 > 2$	0 (0%)	$d)$ $x^2 - 6x + 9 > 4$	6 av 6 (100%)	0 av 0 (0%)
$e)$ $x^2 > 1$	0 (0%)	$e)$ $x^2 > 4$	3 av 3 (100%)	0 av 8 (0%)
$f)$ $(x + 3)^2 < 0$	0 (0%)	$f)$ $(x - 2)^2 < 0$	0 av 0 (0%)	0 av 0 (0%)
$g)$ $x^2 + 2 > 0$	1 (6,3%)	$g)$ $x^2 + 3x + 4 > 0$	0 av 2 (0%)	0 av 3 (0%)

Tabell 5.3.1 Oversikt over tilnærminger og korrekte løsninger i oppgave 2 og 3

Det kan være vanskelig å trekke generelle konklusjoner ut fra oversikten. Jeg kan antyde at bortsett fra oppgave 2a og 3a, er det få elever som finner korrekte løsninger på ulikhetene uansett tilnærming. Omtrent ingen har riktig løsning av andregradsulikhetene i oppgave 2d-g. Enkelte løste disse andregradsulikhetene som likninger, og flere hadde problemer med korrekt notasjon av løsningene sine. Elevene som brukte grafer til å løse kvadratiske ulikheter i 3d-g fant oftere riktig løsning enn de som løste algebraisk, men her har jeg ikke satt samme krav til korrekt notasjon av løsninger som i oppgave 2 fordi poenget var om de kunne bruke grafene til å finne riktige løsninger. Ikke mange elever løser ulikhetene i oppgave tre grafisk. Som allerede nevnt, gav flere elever uttrykk for at de ikke var vant til å bruke grafer til å løse ulikheter. I kapittel 2.4 viste jeg at heller ikke læreboken til elevene la vekt på en slik tilnærming. Elevenes manglende erfaring kan være en medvirkende årsak til at få elever visste hvordan de skulle bruke grafene til å løse ulikhetene.

5.3.1 Fellestrekk for algebraisk og grafisk tilnærming

Et fellestrekk med grafisk og algebraisk tilnærming i denne undersøkelsen er at elevene har problemer med å løse ulikheter med løsning $x \in \mathbb{R}$ eller $x \in \emptyset$ (oppgave b, c, f, g). En årsak til dette kan være manglende erfaring med slike ulikheter. Læreverket deres inneholdt bare to andregradsulikheter der resultatet ble «ingen løsning» og ingen oppgaver med alle reelle tall som løsning. Dette var dermed en ny situasjon for elevene. Dersom de er bevisste på at å løse en ulikhet handler om å finne verdier for x, skal de likevel ha mulighet til å resonnere seg frem til riktig løsning. Jeg har allerede nevnt at flere elever brukte begrepet «å finne verdier for x» når de skulle beskrive hva som menes med å løse en ulikhet. Når elevene mine møtte ulikheter der x forsvant eller grafer som ble parallelle eller overlappende virker det likevel som de ikke visste hva de skulle gjøre og at de ikke tenker over at det fortsatt handler om å finne verdier for x. I algebraisk tilnærming må de fokusere på hvilke x-verdier som gjør utsagnene sanne, mens grafisk løses ulikhetene ved å fokusere på grafenes plassering i forhold til hverandre med fokus på funksjonsverdiene som deretter overføres til x-verdier. Begge disse tilnærmingene virket å skape problemer for elevene. Man kan spørre om elevene egentlig har forstått at å løse en ulikhet handler om å finne hvilke x-verdier som gjør setningen sann. Dersom de mangler denne grunnleggende forståelsen, vil de få problemer når de skal løse disse ikke-standard ulikhetene (Sfard & Linchevski, 1994). Elevenes vansker med de uvanlige ulikhetene kan ha flere forklaringer. Ellerton og Clements (2011) hevder at elevene mangler evnen til helhetlig tenkning i forbindelse med ulikheter. Halmaghi (2011) bruker begrepet «missed-befores» som betegnelse på elevens manglende erfaringer som kunne ha hjulpet dem til å løse disse ulikhetene. Jeg kan antyde at ettersom elevenes læreverk i liten grad utfordret dem på oppgaver med løsningsmengde $x \in \mathbb{R}$ eller $x \in \emptyset$, og heller ikke fokuserer på hva som menes med å løse en ulikhet, har de gått glipp av denne erfaringen og dermed mistet et sentralt aspekt ved ulikheter.

Elevene hadde problemer med notasjon av løsningen både når de arbeidet grafisk og algebraisk med ulikhetene. Da Oda arbeidet med andregradsulikhetene i oppgave 2 hadde hun problemer med å notere løsninger som bestod av to intervall, og skrev blant annet løsningen som «$-1 > x > 1$». Selv om hun etter hvert gir inntrykk av å finne riktig løsning med grafer, må hun forholde seg til ulikhetstegnene når hun skal notere løsninger her også. Elevene hadde også problemer med å bruke tegnene for «og» og «eller» når de arbeidet både algebraisk og grafisk. Dette har jeg belyst i kapittel 5.1.1 og 5.2.2.

5.3.2 Forskjeller i algebraisk og grafisk tilnærming

Forskning har vist at elever kan ha hjelp av grafisk tilnærming til ulikheter (P Tsamir & Almog, 2001), men at de også møter på utfordringer (Sackur, 2004). Det samme er tilfelle med algebraisk løsning. I min undersøkelse fant jeg eksempler på elever som hadde utbytte av grafisk tilnærming til ulikhetene. Wilde løste ingen andregradsulikheter korrekt da hun skulle løse algebraisk, men fant korrekt løsning på flere av dem ved grafisk tilnærming. Det samme gjelder June som løser alle algebraiske andregradsulikheter som om de var likninger, men løste oppgave 3d og 3e grafisk korrekt. Jeg fant også eksempler på at elevene fant korrekt løsning algebraisk, men ikke fant løsninger grafisk. Det skjedde med første lineære ulikhet (2a) som alle 16 elever løste korrekt algebraisk, mens bare sju fant riktig løsning på tilsvarende oppgave (3a) med grafisk tilnærming.

Jeg har vist at elevene trakk sterke analogier mellom likninger og ulikheter da de arbeidet algebraisk. Dette aspektet var nesten fraværende blant elevene som løste grafisk. Unntaket er oppgave 3a der tre elever skriver at løsningen er i skjæringspunktet mellom grafene. Det kan dermed virke som grafisk tilnærming til en viss grad kan visualisere forskjellen på likninger og ulikheter. Dette er i tråd med Farmaki et al., (2008) som hevder at funksjonene hjalp elevene i deres undersøkelse til å visualisere tankene sine. Under intervjuene snakket jeg med elevene om hva de mente var fordelene med grafisk og algebraisk metode. Vi brukte begrepene «å regne» og «å bruke grafer». Fire av elevene mente det var flest fordeler ved regning fordi de hadde trent mest på dette, og fordi de da fikk et mer nøyaktig svar. Oda var blant elevene som sa at hun foretrakk å regne. Mot slutten av intervjuet spurte jeg henne hva hun ville gjort dersom hun ikke fikk løsning på andregradsformelen, som for eksempel $x^2 + 3x + 4 = 0$.

> Oda: Ja. (4-5 sek stillhet) Det hadde vært litt vanskelig å gå videre da egentlig. For da hadde det blitt sånn, okei, ingen løsning. Kan jeg likevel ..gjøre noe annet for å på en måte..
>
> Jeg: Mhm. For det så vi jo her (peker på grafen på arket) på grafen.
>
> Oda: Ja, det er veldig praktisk på grafen. At det går jo på en måte, du ser jo ganske fort og det går jo ganske kjapt å skrive det. Men av og til så kan man bli litt sånn ..forvirret av grafen, og litt sånn hva skal jeg skrive, og..

Oda bekrefter at det er vanskelig å gå videre med en ulikhet dersom tilhørende likning ikke har løsning, og at hun tenker at da er det ingen løsning. Hun sier at det er praktisk på grafen, at hun finner løsningen fort, men at hun likevel synes grafen kan være forvirrende og at hun ikke helt vet hva hun skal skrive. Oda målbærer i sitt siste utsagn at grafen visualiserer ulikhetene på en praktisk måte, og nettopp denne visualiseringen kan være nyttig for elevene, spesielt i møte med ulikheter som ikke kan faktoriseres og der algebraisk tilnærming kan lede elevene til feil konklusjon.

Selv om Oda mener at grafene kan være «praktiske», uttrykker hun også at de kan forvirre henne. Flere elever gir uttrykk for forvirring når de skal bruke grafer, og enkelte nevner konkret at de ikke vet om de skal se på firetallet på x eller y-aksen når de skal løse ulikheten $x^2 - 6x + 9 > 4$. En av de største forskjellene på algebraisk og grafisk fremgangsmåte er nettopp at elevene må forholde seg til to variabler når de bruker grafer (Verikios & Farmaki, 2010). Sackur understreker at dette kan være kompliserende for elevene, noe min undersøkelse bekrefter (se delkapittel 5.2.1). I tillegg må de forholde seg til en bokstav (x) som varierer mellom å være ukjent og variabel. Ellerton et al., (2011) anbefaler å bruke grafer for å hjelpe elevene, men hevder samtidig at å lære studentene å tolke ulike representasjoner kan være like vanskelig som å lære dem egnede algoritmer. Ut fra gjeldende læreplaner, antar jeg at elevene i min undersøkelse har arbeidet med funksjoner både på ungdomsskolen og på videregående skole. De bør derfor være kjent med koordinatsystem og grafer og å forholde seg til uttrykk med to variabler. Utfordringen er å relatere dette til ulikhetene. Jeg antar likevel det bør være mulig å bruke elevenes kunnskaper om funksjoner slik at det blir til hjelp for dem i møte med ulikheter, slik Ellerton et al., (2011) hevder.

I løpet av intervjuet med Oda virker det som hun begynner å forstå hvordan hun kunne bruke grafer til å løse ulikhetene (se analyse av oppgave 3g i delkapittel 4.5). Likevel sier hun at hun foretrekker regning fremfor å bruke grafer. Når jeg spør hvorfor, sier hun at de har øvd mer på det. Hun mener også at en fordel med regning er at «…du har alltid èn måte du skal gjøre det på. Så følger du på en måte bare den.» Vi snakker ikke om hvilken metode Oda sikter til, men i oppgaveheftet har hun brukt andregradsformel og fortegnsskjema på to av de fire andregradsulikhetene i oppgave 2. Dersom det er denne metoden hun sikter til, kommer den til kort i oppgaver der uttrykket ikke kan faktoriseres. Oda skrev også at hun ikke kan tegne fortegnsskjema der hun bare får ett nullpunkt. Det virker som at Oda har lært seg en metode med andregradsformel og fortegnsskjema, men at hun ikke har en klar forestilling om at hensikten er å faktorisere andregradsuttrykket og at fortegnsskjemaet er et verktøy som brukes for å drøfte et produkt av faktorer som inneholder variabler. Dette kan minne om Halmaghis oppfatning 3 av ulikheter som en algebraisk prosess som handler om å følge bestemte regler. Oda bekrefter også Sfards påstand om at dersom ikke elevene forstår hensikten med prosedyrene de utfører, vil de få problemer med å håndtere ikke-standard oppgaver (Sfard & Linchevski, 1994).

Anna påpeker under intervjuet at hvis hun skal bruke grafer, «kan det være at det kommer sånn midt imellom og da kan det være vanskelig å se». Hun mener at det kan være vanskelig å vite hvilke tallverdier ulike punkter på grafen har dersom disse havner mellom linjene til rutenettet i koordinatsystemet. Det har hun rett i. For å finne korrekte løsninger grafisk er elevene avhengige av å ha nøyaktige grafbilder eller aller helst digitale graftegnere som både kan tegne grafene raskt og finne nøyaktige verdier i eventuelle skjæringspunkt. Enkelte elever nevnte at dette ville være mer tidkrevende enn å løse ved regning. Her kan algebraisk løsningsmetode ha en fordel i forhold til grafisk tilnærming.

Elevene har arbeidet med lineære likninger og ulikheter helt fra ungdomsskolen, mens kvadratiske likninger og ulikheter er forholdsvis nytt for dem. I tillegg var det flere måneder siden de hadde arbeidet med ulikheter, og flere gav uttrykk for at dette bidro til vanskelighetene. En slik argumentasjon fra elevene, at de ikke «husker fremgangsmåten», kan imidlertid tyde på at de har en prosedyrepreget rutine som løsningsstrategi, slik Boero og Bazzini (2004) hevder ofte blir resultatet av en ren algoritmisk tilnærming. Oda og Wilde er interessante fordi de viser at når de har forstått hvordan de skal operere innen graf-registeret, gir dette dem hjelp til å løse andregradsulikheter (Verikios & Farmaki, 2010). I prosjektet til Tsamir og Almog (1998) hadde elevene arbeidet tre måneder i forkant med både grafisk og algebraisk løsningsmetode. Mine elever hadde hatt hovedvekt på algebraisk metode, og jeg antar at det kan være en viktig årsak til at få elever klarte å løse ulikhetene grafisk (se tabell 5.3.1). En rimelig antakelse kan dermed være at dersom elevene hadde arbeidet mer med grafiske representasjoner av ulikhetene i forkant, ville dette kanskje ført til flere korrekte grafiske løsninger.

6 Avslutning

I denne studien har jeg belyst hva som karakteriserer 16 S1-elevers løsninger når de arbeider algebraisk og grafisk med lineære og kvadratiske ulikheter. Det hele begynte med artikkelen av Tsamir med flere der de blant annet fant at 16-17-åringer oftest fant korrekt løsning på ikke-lineære ulikheter når de løste dem med grafer (Pessia Tsamir et al., 1998). I avslutningskapittelet vil jeg oppsummere hva jeg mener er mine viktigste funn og si litt om hvilke didaktiske og forskningsmessige implikasjoner dette har. Avslutningsvis har jeg noen refleksjoner knyttet til studien og hvilken betydning dette arbeidet har hatt i forhold til egen praksis.

6.1 Hovedfunn

Oppsummert kan jeg si at alle elevene bruker samme løsningsstrategi når de løser lineære ulikheter algebraisk, nemlig at de «løser som likning» med samme algebraiske manipulasjoner på begge sider av ulikhetstegnet. Selv om de regner riktig, viser både svarene deres og det de sier i gruppediskusjonene at flere av dem har problemer med å tolke løsningene sine, spesielt på oppgaver uten løsning eller med alle reelle tall som løsning. Det samme er tilfelle med andregradsulikheter med slike løsninger. Særlig virker det som en forestilling hos flere av dem at når x «faller bort» betyr det at ulikheten ikke har løsning, eller ikke kan løses. Elevene hadde problemer når tilsvarende ulikheter skulle løses grafisk og de fikk parallelle eller overlappende grafer. Flere gir uttrykk for at grafer må ha skjæringspunkt dersom ulikheten skal ha løsning eller kunne løses. Enkelte elever var usikre på hvordan de skulle bruke x og y-verdiene og forholde seg til aksene. Jeg stiller derfor spørsmål ved om elevene egentlig har forstått at å løse en ulikhet handler om å finne «akseptable verdier for variabelen som gjør setningen sann» (Karp og Pollak, sitert i Ellerton 2011, side 380, min oversettelse).

Det er kjent gjennom flere studier at elever har en tendens til å behandle ulikheter som likninger (Ellerton & Clements, 2011; Espeland, 2017; P. Vaiyavutjamai & M. Clements, 2006). Denne overgeneraliseringen fant jeg også i min studie. Elevenes kobling mellom likninger og ulikheter viste seg først og fremst gjennom at de ville løst dem på samme måte. June målbærer dette under intervjuet når hun får spørsmål om hvordan hun vil løse andregradsulikheter og deres tilsvarende likninger og sier at hun ville løst disse helt likt. Den vanligste misoppfatningen blant disse S1-elevene var å behandle kvadratiske ulikheter som likninger, noe også tidligere studier har vist (Ellerton & Clements, 2011; Pessia Tsamir et al., 1998). Jeg fant spesielt at elevene unnlot å faktorisere andregradsulikheter på formen $x^2 > a$, men løste som tilsvarende andregradslikninger ved å trekke kvadratrot på begge sider av tegnet. Dersom elevene fikk et negativt tall under rottegnet her eller i andregradsformelen konkluderte de med at ulikheten ikke hadde løsning. Dette kan relateres til Halmaghis «met-befores» der elevene anvender kunnskapen de har fra andregradslikninger på ulikheter. I dette tilfellet fører det til en misoppfatning som leder elevene til feil konklusjon.

Få elever løste ulikhetene grafisk. Flere elever i min studie gav uttrykk for at i deres undervisning var algebraisk tilnærming til ulikheter mest vektlagt, og at de ikke var vant til å bruke grafer til å løse ulikheter. Duval (2006) hevder at for å beherske registrene må man vite hvordan de fungerer. Jeg kan dermed antyde at selv om elevene isolert sett har kunnskaper om funksjoner og ulikheter, mangler de opplæring i å bruke grafer til å løse ulikheter og at de ikke visste hvordan ulikheter ser ut i et koordinatsystem. Selv om elevene ikke klarte å løse ulikhetene grafisk, behersket de likevel omformingen fra algebraisk til grafisk register, men flere hadde problemer med å forstå hvor ulikhetene var i bildene (Duval, 2006; Halmaghi, 2011). Wilde og etter hvert Oda klarte omformingen videre fra grafisk til algebraisk register, og de fikk god hjelp av grafene til å finne riktige løsninger på ulikhetene. Dette samsvarer med funnene til Tsamir et al., (1998) der elevene som har arbeidet med grafisk tilnærming og brukte den i ikke-lineære ulikheter oftere fikk riktig svar enn de som brukte algebraisk. Duval (2006) mener at å kunne bevege seg mellom registre er avgjørende for å løse matematiske problemer. Jeg kan dermed si at et sentralt funn i denne studien er at de elvene som behersket omformingene som Sackur (2004) beskriver, kan ha økt mulighet for å finne korrekte løsninger på kvadratiske ulikheter.

6.2 Didaktiske og forskningsmessige implikasjoner

Denne studien viser at arbeid med ulikheter har aspekter ved seg som kan være krevende for elever. Innen grafisk løsning, bidrar studien til å kaste lys over de ulike omformingene elevene må bruke og hvilke problemer det kan medføre. For eksempel har jeg trukket fram Sackur (2004) som påpeker at x spiller ulike roller i ulike registre. Gjennom analysene av empiriske funn, har jeg argumentert for at elever som behersker omformingene mellom registrene kan ha økt mulighet for å løse kvadratiske ulikheter korrekt. Dette krever at elevene har fått opplæring i å bruke funksjoner og grafer til å løse ulikheter. Det blir viktig å fokusere på hvilken rolle bokstaven x spiller, og at den i grafisk løsning varierer mellom å være en ukjent og en variabel som betegner en tallmengde. I tillegg må elevene bevisstgjøres på hvordan vi bruker y-verdiene for å komme frem til løsningen(e). Ellerton et al., (2011) påpeker at å lære elever å tolke ulike representasjoner kan være like vanskelig som å lære dem egnede algoritmer. Samtidig hevder Duval (1999, 2006) at det er avgjørende for elevenes å behandle matematiske objekter i ulike registre. Gjennom å løse lineære og kvadratiske ulikheter både grafisk og algebraisk kan elevene få økt kunnskap om egenskapene til konseptet ulikheter.

Algebraisk er det først og fremst koblingen mellom løsning av likninger og ulikheter som byr på utfordringer. Som lærere blir det viktig å arbeide for å fremme bevisstheten rundt konseptene likninger og ulikheter, hvilke egenskaper de har og hva som er forskjeller og likheter mellom dem. Dette kan for eksempel gjøres visuelt gjennom å tegne tallinjer eller grafer. Det er også grunnleggende at elevene er bevisst på hva som menes med å løse ulikheter og likninger, og her kan Karp og Pollaks definisjon (Karp og Pollak, sitert i Ellerton & Clements, 2011, side 380) være viktig å trekke frem fordi den belyser sammenhengen mellom sannheten i utsagn og å finne x-verdier.

I et større perspektiv kan man generelt stille spørsmål ved i hvor stor grad algebra og funksjoner kobles sammen i matematikkundervisningen. Farmaki og Verikios (2008) ønsker funksjoner som sentrum for algebraopplæring, mens Sackur (2004) hevder at man ikke uten videre kan gå ut fra at elever som løser grafisk lærer det samme som dem som løser algebraisk. I norsk skole arbeides det for tiden med nye læreplaner, kalt Fagfornyelsen. Nåværende læreplan har hovedområder som «Funksjoner» og «Algebra», mens forslaget som er til høring ikke har slike inndelinger. Her er alle kompetansemål samlet under samme overskrift, og det kan virke som en av hensiktene er å bygge ned skillet mellom de ulike matematiske registrene. Fagfornyelsen inneholder også kjerneelementer der et av dem kalles «Representasjon og kommunikasjon». I matematikk S1 heter det at «Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger… Elevene må kunne …veksle mellom ulike representasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Dette er helt i tråd med Duval (1999, 2006). Begrepet «register» er ikke brukt i læreplanen, men resultatene fra min studie viser at elevene kan ha utbytte av å også kunne veksle mellom ulike registre.

Et annet kjerneelement heter «Utforskning og problemløsning» der det understrekes at «Elevene skal legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn løsningene.» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Dette samsvarer med Sfards tanker om å bevisstgjøre elevene på hensikten med prosedyrene de utfører (Sfard & Linchevski, 1994). Elevene skal også begrunne og resonnere rundt løsningsprosedyrene sine, og dersom de stadig spør seg selv hvorfor de utfører prosedyrene, hvorfor de bruke andregradsformel eller fortegnsskjema kan de få en forståelse for algoritmene de bruker. I forslaget til ny læreplan er andregradsulikheter tatt ut av læreplanen for S1 og flytte til matematikk 1T. Her heter det at elevene skal «utforske samanhengar mellom andregradslikningar og andregradsulikakapar, andregradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke det i problemløysing» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Lærere i matematikk 1T blir dermed pålagt å la elevene arbeide med hvilke sammenhenger vi har mellom likninger og ulikheter, og resultatene av min forskning har vist at det kan være vesentlig og nødvendig å gjøre for å avsløre og avverge misoppfatninger.

Denne studien har fokusert på hva som karakteriserer elevenes løsninger og løsningsmetoder. Selv om noe forskning i nyere tid har rettet fokus på læring og undervisning av ulikheter (Espeland, 2017), er det flere områder som kan undersøkes nærmere. Et sentralt spørsmål er hvordan man skal undervise for å gi elevene en riktig kobling mellom ulikheter og likninger. Dernest kommer tematikken knyttet til hvordan grafiske fremstillinger kan være et meningsfullt hjelpemiddel for elevene. Et tredje tema handler om hvordan elevene i norsk skole oppfatter ulikheter. Halmaghi (2011) har utviklet et analyseredskap for dette i form av sin COIN-modell, og det hadde vært interessant å anvende denne for å se om vi her kan finne ut mer om årsakene til at elever ofte har problemer med matematiske ulikheter.

6.3 Egenrefleksjon

Arbeidet med denne masteroppgaven har foregått over en toårsperiode. I løpet av denne tiden har jeg kombinert studier med arbeid i videregående skole. Jeg har blant annet undervist elever i matematikk 1T der de får sitt første møte med både andregradslikninger og andregradsulikheter. Arbeidet med oppgaven har gjort meg bevisst på hvordan jeg kan bruke grafer til å visualisere både likninger og ulikheter for elevene. Det har blitt viktig for meg å betone sammenhengen mellom andregradsformel og nullpunkt, og å stadig illustrere dette ved å tegne parabler og grafer samtidig som vi arbeider algebraisk med både likninger og ulikheter. Jeg har også blitt mer bevisst på å utfordre elevene på hvorfor de utfører prosedyrene sine når vi arbeider med ulike matematiske tema, for eksempel hvorfor vi faktoriserer og tegner fortegnsskjema når vi løser andregradsulikheter. Elevene tegner også fortegnsskjema når de drøfter den deriverte til polynomfunksjoner, og i den forbindelse diskuterer vi hva som er forskjellen, både algebraisk og grafisk, på å bruke fortegnsskjemaet i disse to sammenhengene.

Dersom jeg skulle gjennomført denne studien igjen, ville jeg tegnet grafer for begge sidene også til andregradsulikhetene i oppgave 3d-g. Det kunne kanskje ført til at enda flere elever fant riktige bilder, og stimulert til flere diskusjoner på gruppene knyttet til grafisk tilnærming. Det hadde også vært interessant å kanskje redusert antall deltakere og gått enda mer i dybden på den enkelte. En ulempe med å følge hele klassen med 16 elever er at jeg fikk mye data, og har måttet vær bevisst på å fremheve det som har vært mest relevant i forhold til forskningsspørsmålet. Fordelen er at jeg har fått resonnement og innspill fra flere elever som har vært med å belyse problemstillingen.

Et kritisk aspekt ved studien er at utgangspunktet er en forholdvis gammel artikkel (Pessia Tsamir et al., 1998). Det har vært en utfordring å finne nyere litteratur spesielt om kvadratiske ulikheter. Dette synliggjør muligens nettopp påstanden til flere forskere om at ulikheter har en relativt liten plass i matematikkdidaktisk forskning (Espeland, 2017; Pessia Tsamir & Bazzini, 2004; Verikios & Farmaki, 2010). Jeg mener likevel at jeg har funnet og brukt teori som har vært relevant og anvendbar i forhold til forskningsspørsmålet, og at denne studien har belyst hvilke løsninger og resonnement elevene i denne S1-klassen hadde i møte med ulikhetene de arbeidet med.

Referanser

Adams, R. A. & Essex, C. (2014). *Calculus: A complete course* (8 utg.). Toronto: Pearson Canada Inc.

Almog, N. & Ilany, B.-S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 347-364.

Bagni, G. T. (2005). Inequalities and equations: history and didactics. I I. M. Bosch (Red.), *Proceedings of the fourth congress of the european society for research in methematics education* (Vol. 4, s. 652-663). Sant Feliu de Guìxols, Spania: CERME.

Bazzini, L., Boero, P. & Garuti, R. (2001). Revealing and promoting the students' potential in algebra: A case study concerning inequalities. I H. Chick at al. (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 1, s. 61-68). Melbourne, Australia: Program Comittee of the 12th ICMI Study Conference.

Bazzini, L. & Tsamir, P. (2003). Connections between theory and research findings: the case of inequalities. I I. M. A. Mariotti (Red.), *European Research in Mathematics Education III* (Vol. 10, s. 1-3). Bellaria, Italia.

Bicer, A., Capraro, R. M. & Capraro, M. M. (2014). Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 5*(3).

Blanco, L. J. & Garrote, M. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(3), 221-229.

Boero, P. & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. I M. J. H. A. B. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 139-143). Bergen, Norway: Bergen University College.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5 utg.). Oxford: Oxford University Press.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning. I F. Hitt & M. Santos (Red.), *Proceedings of the 21th PME-NA conference* (Vol. 1, s. 3-26).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Ellerton, N. F. & Clements, M. A. k. (2011). Prospective Middle-School Mathematics Teachers' Knowledge of Equations and Inequalities. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (s. 379-408). Berlin, Heidelberg: Springer-verlag.

Espeland, H. (2017). *Algebra at the start of Upper Secondary School: A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses* (Doctoral dissertation). Universitet i Agder, Kristiansand, Norge.

Farmaki, V. & Verikios, P. (2008). Function representations as problem solving strategies: the case of inequality *the 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico.

Halmaghi, E. F. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities* (Doctoral dissertation). Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.

Kongelf, T. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 83-109.

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (Red.), *Children's understanding of mathematics* (s. 102-119). London, UK: John Murray.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Svorstøl, A. & Hals, S. (2013). *Sinus S1*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. I I. M. J. H. A. B. Fuglestad (Red.), *28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 148-151). Bergen, Norway: Bergen University College.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico, 52*(3), 279-307.

Tanner, R. C. H. (1961). Mathematics begins with inequality. *The Mathematical Gazette, 45*(354), 292-294.

Tsamir, P. & Almog, N. (1999). " No Answer" as a problematic response: The case of inequalities. I O. Zaslavsky (Red.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 328). Haifa, Israel: ERIC.

Tsamir, P. & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524.

Tsamir, P., Almog, N. & Tirosh, D. (1998). Students' solutions of inequalities *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 129-136). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Tsamir, P. & Bazzini, L. (2001). *Can x= 3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students.* Paper presentert på 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Tsamir, P. & Bazzini, L. (2002). Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities. I E. N. E. In A.D. Cockburn (Red.), *Proceedings of the 26th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics* (Vol. 4, s. 289-296). Norwich, UK.

Tsamir, P. & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic ‘single-value’inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(6), 793-812.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematik for samfunnsfag Matematikk S1*. (REA3026). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT4-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-s1

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Læreplan i matematikk programfag for samfunnsfag (høringsutkast)*. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=693

Vaiyavutjamai, P. & Clements, M. (2006). Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equations and linear inequalities. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 113-147.

Vaiyavutjamai, P. & Clements, M. K. (2006). Effects of classroom instruction on students’ understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal, 18*(1), 47-77.

Vatne, J. E. (2017). Ulikhet: matematikk i Store norske leksikon. Hentet 15.februar 2019 fra https://snl.no/ulikhet_-_matematikk

Verikios, P. & Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 515-530.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing Algebra. I I. P. S. Wilson (Red.), *Research ideas for the classroom, high school mathematics* (s. 119-139). New York, NY: Macmillian Publishing Co.

Wellington, J. (2015). *Educational research* (Second utg.). London: Bloomsbury Academic.

Vedlegg

Vedlegg A Oppgavehefte

Oppgavehefte **Navn:___________________________**

Dette heftet består av 3 matematikkoppgaver som dere skal arbeide med.

Oppgave 1.

a. Skriv ned hva du legger i begrepet *matematisk ulikhet*. Du kan gjerne bruke symboler og illustrasjoner i tillegg til ord.

b. På hvilke måter er likninger og ulikheter like og forskjellige?

c. Hva menes med «en løsning av en ulikhet»? Gi eksempler.

d. Kan x=2 være løsning av en ulikhet? Hvorfor /hvorfor ikke?

Oppgave 2. Løs følgende ulikheter:

a. $3x - 2 \geq -x + 6$

Løsning:

b. $9(x + 1) > 9(x - 2)$

Løsning:

c. $x + 3 > 6 - (3 - x)$

Løsning:

d. $x^2 - x - 4 > 2$

Løsning:

e. $x^2 > 1$

f. $(x+3)^2 < 0$

Løsning:

g. $x^2 + 2 > 0$

Løsning:

Oppgave 3. Bruk vedlagte grafer til å løse følgende oppgaver:

a. $3x + 3 \leq x + 1$

Løsning:

b. $4(x + 1) > 4(x - 3)$

Løsning:

c. $x + 5 > 8 - (3 - x)$

Løsning:

d. $x^2 - 6x + 9 > 4$

Løsning:

e. $x^2 > 4$

Løsning:

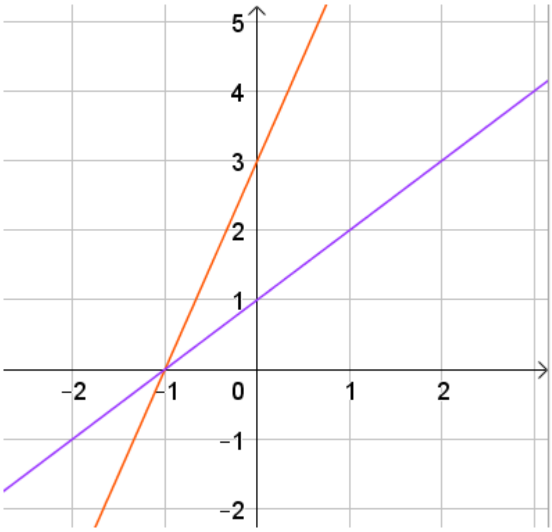
f. $(x-2)^2 < 0$

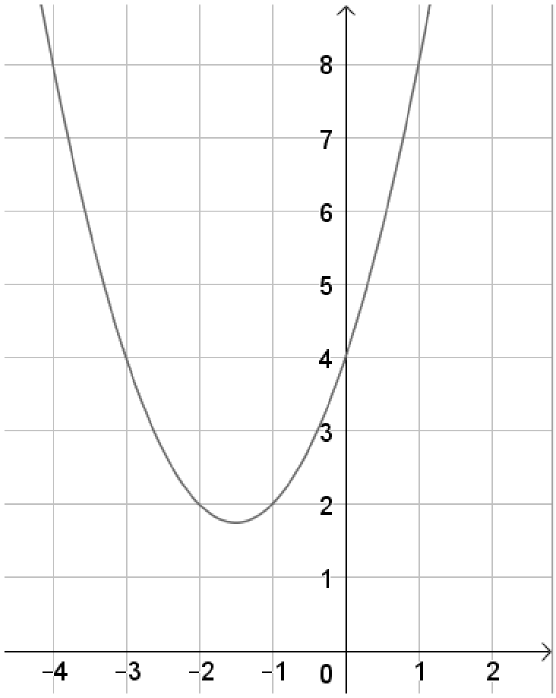
Løsning

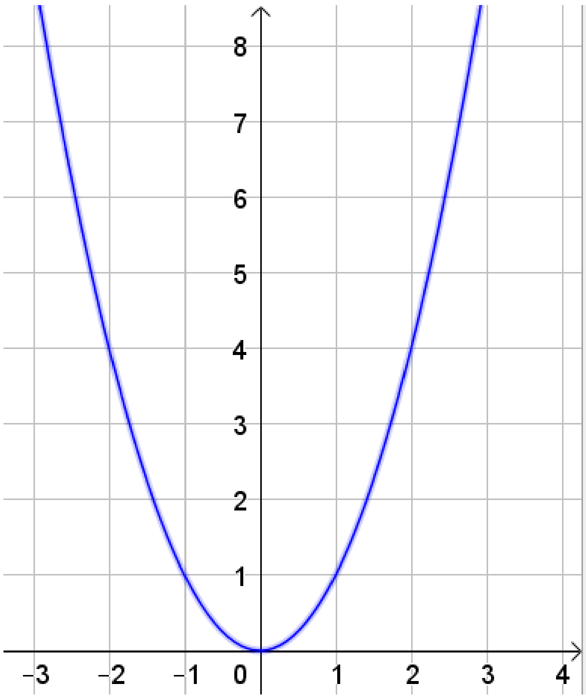
g. $x^2 + 3x + 4 > 0$

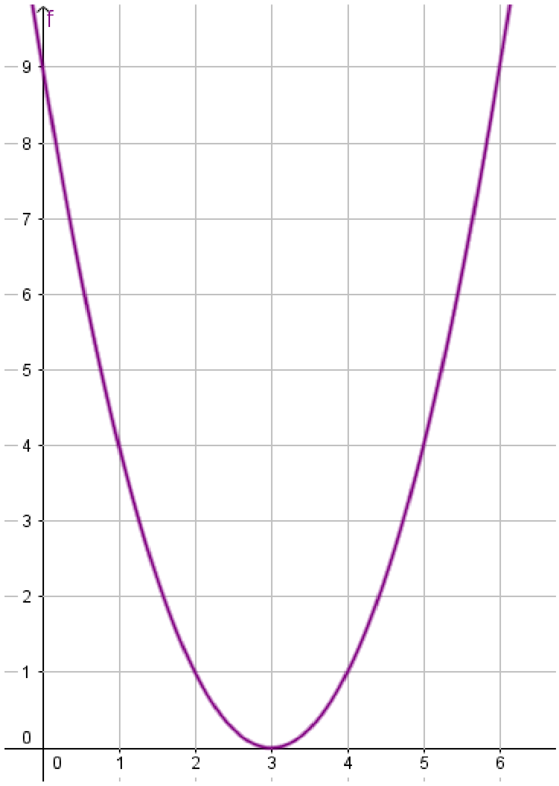
Løsning:

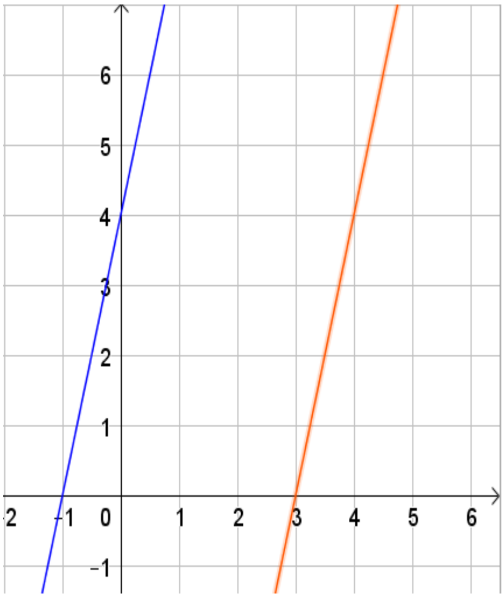
Grafer som skal brukes i oppgave 3a-g

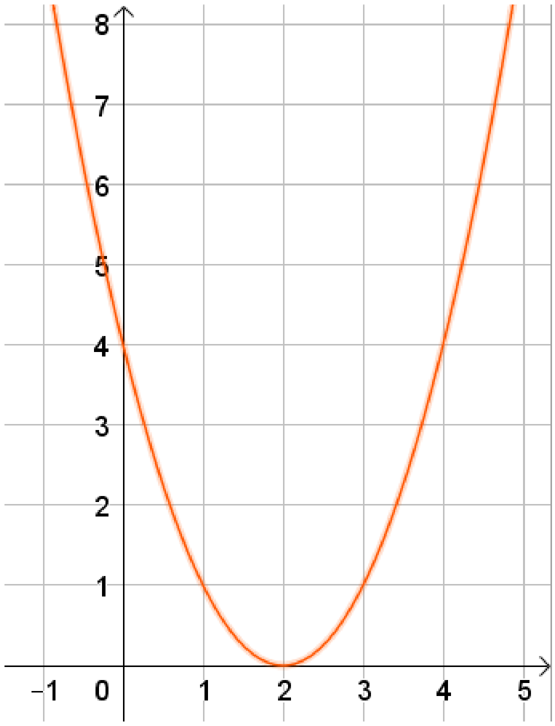


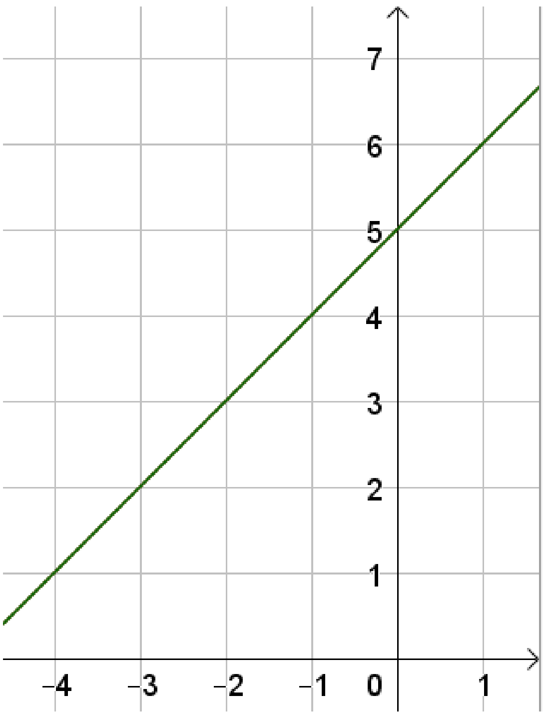







6
5
4
3
2
1
-1
2
-1
0
1
2
3
4
5
6


8
7
6
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4
5


7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1

Vedlegg B Intervjuguide

Intervjuguide **Navn________________________**

Intervjuspørsmål:

- Hva er en ulikhet?
- Hva er forskjellen mellom ulikheter og likninger?
- Er det forskjell på løsningene?
- Kan dette være en løsning på en likning, ulikhet? (for eksempel x>3, x=3)
- **Hva mener du om følgende påstander:**
    - **Det finnes andregradsulikheter som ikke har løsning.**
    - **Fordi $x^2 - 4x + 5 = 0$ ikke har noen løsning, har ulikheten $x^2 - 4x + 5 < 0$ ikke noen løsning**.

Oppgave 2a-2c Lineære ulikheter ved regning oppgave

- Hva fant du i de tre oppgavene? Hvordan vil du forklare svarene dine?
- Kunne du brukt grafer til å løse disse ulikhetene? Hvordan ville det i så fall sett ut?

Oppgave 2d-2g Kvadratiske ulikheter ved regning oppgave 4-7

Oppgave d: Hva gjorde du og hvorfor? Hvorfor bruker vi fortegnsskjema?
Oppgave e: Hva er forskjeller og likheter mellom denne oppgaven og oppgave 4?
Oppgave f-g: Hva skjedde når du brukte ABC-formelen? Hva betyr løsningen din?

Oppgave 3a-3c Lineære ulikheter grafisk

- Hva tenkte du da du så disse oppgavene (Oppgave 3a-g)
- Hva har du gjort her? Hva har du funnet?
- Hvor på grafen er det man finner selve løsningen til ulikhetene?
- Hvilken betydning spiller x- og y-aksen i løsningsmetoden din?

Oppgave 3d-3g Kvadratiske ulikheter grafisk

- Hvordan gikk du frem for å finne riktig løsning her?
- Hva betyr det når grafen ikke skjærer x-aksen?
- Finnes det andregradsulikheter som ikke har løsning?

Oppsummering

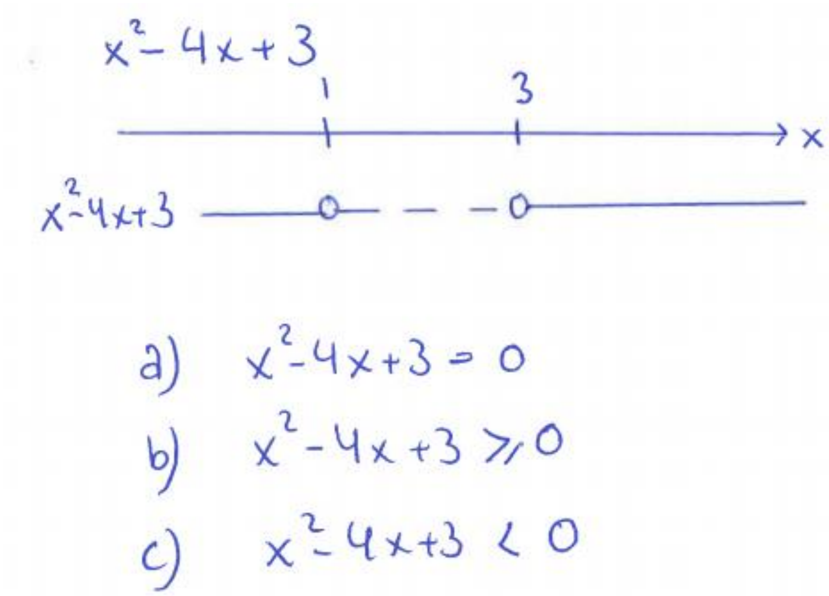
Du har nå måttet løse ulikheter både ved regning og vha grafer. Sammenlikne oppgaver og egne løsninger.

- Hva er positivt med å løse ved regning? Hva er utfordrende?
- Hva er positivt med å bruke grafer? Hva er utfordrende?

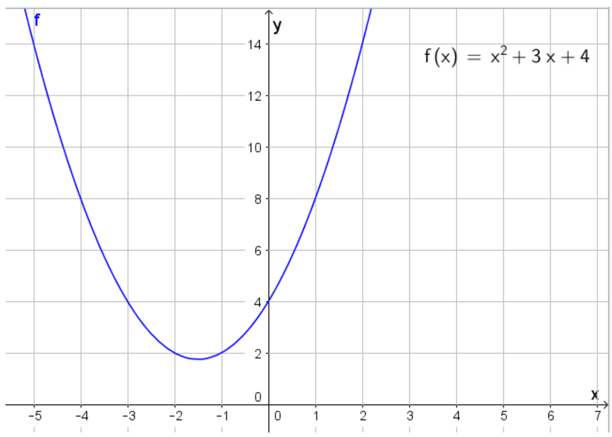
- Oppgave 2 og 3 parvis. Hvilke kommentarer har du?
- Hva ville du nå svart på spørsmålet «Hva er en ulikhet»?

Oppgaver til intervju

Oppgave 1: Løs oppgavene ved hjelp av fortegnsskjemaet



Oppgave 2: Bruke en graf til å løse en andregradsulikhet

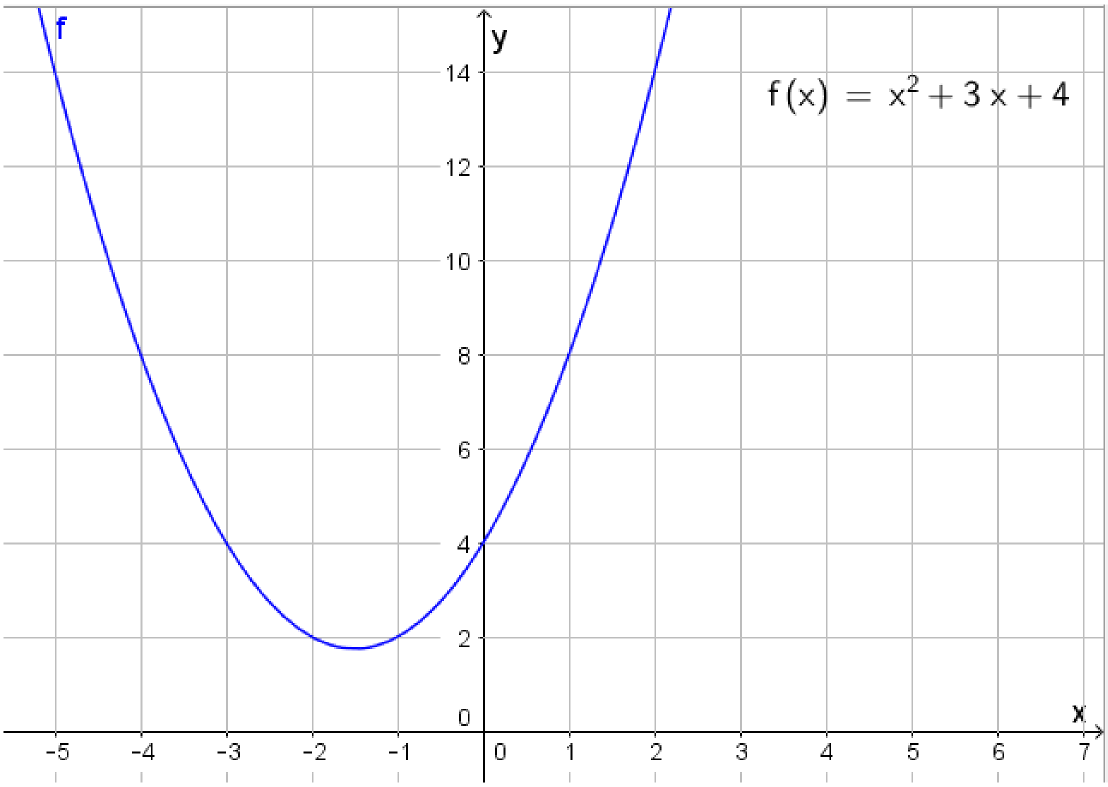


Bruk grafen til å besvare følgende spørsmål:

a) Hva ser du?
b) Når er $x^2 + 3x + 4$ større enn 8?
c) Når er $x^2 + 3x + 4$ større enn 0?
d) Når er $x^2 + 3x + 4$ mindre enn 0?

e) Løs oppgave b-d ved regning.

Oppgave 3 - Løs ulikheten $x^2 > -4$.



Vedlegg C Samtykkeskjema

Kristin Lande Dahlstrøm
Tlf: [xx]
E-mail: [xx]

Lyngdal 12.03.18

Til elever i matematikk S1 på [xx skole] våren 2018

Anmodning om tillatelse til lydopptak i skoletime og under intervju

Jeg heter Kristin Lande Dahlstrøm og er deltidsstudent ved lektorutdanningen på Universitetet i Agder, fakultet for teknologi og realfag. Jeg har startet arbeidet med å skrive masteroppgave. Arbeidstittel for oppgaven min er

Hva karakteriserer S1-elevers algebraiske og grafiske løsninger av matematiske ulikheter? En kvalitativ studie av S1-elevers oppfatninger og løsninger av lineære og kvadratiske ulikheter.

Jeg vil altså forsøke å belyse hvordan elever i S1-klassen oppfatter og løser matematiske ulikheter. I den forbindelse skal jeg gjennomføre en datainnsamling. Elevene vil få utdelt et oppgavehefte som dere skal arbeide med parvis i ca 2 skoletimer. Oppgaveheftet vil bestå av spørsmål om ulikheter, og oppgaver som skal løses. I etterkant ønsker jeg å foreta individuelle intervjuer av enkelte av elevene, basert på det dere har skrevet i oppgaveheftene. Det er fullt mulig å arbeide med oppgavene i timene uten å levere inn eller delta i studien. Deltakelse eller ikke deltakelse i studien har ingen innvirkning på karakteren din i matematikk, og faglærer vil ikke få tilgang til eller innsikt i materialet som samles inn.

Jeg ønsker å foreta lydopptak både når dere løser oppgaver og blir intervjuet. Dersom du vil delta i studien, men ikke ønsker å bli intervjuet kan du krysse av for det i skjemaet. Intervjuene vil vare fra 20-30 minutter og tema for intervjuene vil være oppgavene du har jobbet med. Opptakene vil kun bli behandlet av meg og evt mine veiledere. Hvis dere ønsker mer informasjon, kan dere gjerne kontakte meg (se kontaktinformasjon øverst) eller mine veiledere: Hans Kristian Nilsen hans.k.nilsen@uia.no eller Linda Gurvin Opheim linda.g.opheim@uia.no.

All bruk av data vil bli fullstendig anonymisert slik at det ikke er mulig for andre å vite hvem som har sagt eller gjort hva; det vil altså ikke være mulig å knytte noe av det som blir sagt eller gjort til enkeltindivider. All data som benyttes i oppgaven vil bli tilordnet fiktive navn. Besvarelsene oppbevares i låst skap på mitt kontor, og lydfilene lagres på min PC med passordbeskyttelse. Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.

Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Oppgaven min skal leveres våren 2019. Alle opptak vil bli slettet senest desember 2019.

Vennlig hilsen

Kristin Lande Dahlstrøm

Jeg samtykker i at det kan tas lydopptak av meg i forbindelse med oppgaveheftet, som beskrevet over. JA / NEI
(Stryk det som ikke passer)

Jeg samtykker i at det kan tas lydopptak av meg i forbindelse med intervju som beskrevet over. JA / NEI
(Stryk det som ikke passer)

Signatur/dato (elev)

Vedlegg D Godkjenning fra NSD

NSD

Hans Kristian Nilsen
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 11.04.2018 | Vår ref: 59986 / 3 / HJT | Deres dato: | Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 21.03.2018 for prosjektet:

59986	*Hva karakteriserer S1-elevers algebraiske og grafiske løsninger av matematiske ulikheter? En kvalitativ studie av S1-elevers løsning av lineære og kvadratiske ulikheter.*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Hans Kristian Nilsen*
Student	*Kristin Dahlstrøm*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS | Harald Hårfagres gate 29 | Tel. +47-55 58 21 17 | nsd@nsd.no | Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data | NO-5007 Bergen, NORWAY | Faks: +47-55 58 96 50 | www.nsd.no

Vedlegg E Transkripsjonskoder

..	En liten nøling
…	Pause inntil 10 sekunder
_(understrek)	Avbrytelse. A avbrytes av B:
	A: Når man liksom_
	B: Ganger eller deler med et positivt tall
(..)	Har hoppet over noen utsagn, for eksempel ved lange utregninger
(tekst)	Min kommentar til handlinger elever gjør, for eksempel at de skriver på arket, blir skrevet i parentes etter ytringen.
Kursiv	Ord som elevene betoner spesielt skrives i kursiv
[tekst]	Min forklaring til hva elevene omtaler skrives med lukkede parenteser, for eksempel «Men skulle vi sett det med dette her [grafbildet]»