UNIVERSITETET I AGDER

Læringspotensial i en digital interaktiv matematikkundervisning

En analyse av læringspotensialet i geometriundervisningen på 8. trinn med utstrakt bruk av digitale verktøy

Ingrid Jacobsen Stålesen

Veileder

Anne Berit Fuglestad

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2016

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Etter en femårig utdannelse ved Universitet i Agder er tiden endelig kommet for å avslutte studietiden, og ta fatt på den nye tilværelsen som lektor i norsk grunnskole. I det jeg skal levere inn den avsluttende masteroppgaven reflekterer jeg over alt jeg har lært av arbeidet med denne oppgaven, og av å lese faglitteratur innenfor matematikkdidaktisk forskning. Disse erfaringene vil jeg ta med meg inn i lærerhverdagen, samt viktigheten av å være utholdende og oppdatert i lærergjerningen.

Jeg vil først rette en stor takk til DIM-prosjektet som åpent tok imot meg, og lot meg delta på flere verksteder tilknyttet prosjektet. Her fikk jeg delta i faglige diskusjoner rundt oppgavesettet og bruken av det. En stor takk må også læreren som designet oppgavene og læreren som anvendte oppgavene, som begge sa seg villige til å bli intervjuet av meg. De har gitt meg et nyttig innblikk i deres hverdag som matematikklærere på ungdomsskolen samt nyttige innspill og refleksjoner knyttet til oppgavesettet jeg har studert. Tusen takk.

En helt spesiell takk går til veilederen min, professor Anne Berit Fuglestad! Hun har latt meg finne veien selv samtidig som hun har vært klar til å bidra de gangen jeg har stått fast og ikke sett hvor veien går videre. Dine konstruktive tilbakemeldinger og vennlige ord underveis i arbeidet med oppgaven har motivert meg og hjulpet meg til å holde fokus på «målstreken». Tusen takk!

Til slutt vil jeg også takke min kjære mann, Håkon Stålesen, for korrekturlesning og støtte underveis i skriveprosessen.

Kristiansand, mai 2016

Ingrid Jacobsen Stålesen

Sammendrag

Temaet for denne masteroppgaven er læringspotensialet i matematikkoppgaver designet for en interaktiv geometriundervisning på 8. trinn. Oppgaven er skrevet i tilknytning til prosjektet Digital interaktiv matematikkundervisning (DIM), hvor målsettingen er å skape innovativ matematikkundervisning ved å anvende digitale hjelpemidler i en pedagogisk kontekst. Tidligere forskning har dokumentert at elevenes læringsutbytte av undervisningen i stor grad påvirkes og begrenses av oppgavene som anvendes. I denne sammenhengen blir analyser av læringspotensialet i oppgavesettet spesielt interessant. Dermed er mitt forskningsspørsmål: *Hvilket læringspotensial er det i oppgavesettet i geometri på 8.trinn tilknyttet DIM-prosjektet?*

Metoden for datainnsamling har vært todelt. Jeg har basert meg på semistrukturerte intervjuer med to av lærerne som er tilknyttet DIM-prosjektet. I tillegg har jeg utviklet et analyseverktøy basert på tidligere forskningslitteratur for å analysere læringspotensialet i oppgavesettet. Målsettingen med intervjuene var å belyse områder hvor læringspotensialet i oppgavene ikke kunne fanges opp av analyseverktøyet alene.

Av resultater kan det nevnes at læringspotensialet er størst dersom en inquiry-tilnærming til matematikkundervisningen kombineres med et oppgavesett bestående av oppgaver med høyere nivå av kognitive krav i Dynamic Geometry Environments (DGE). Med utgangspunkt i funn fra analysene av oppgavesettet og intervjuene kan det argumenteres for at dette er tilfellet i en stor andel av oppgavene i DIM-prosjektet.

Abstract

The theme of this master thesis is learning potential in mathematical tasks designed for geometry teaching in GeoGebra in 8th grade. This thesis is written in connection to the project Digital interactive mathematics teaching (DIM), where the goal is to create innovative mathematics teaching by using digital tools in a pedagogic context. Previous research has documented that students learning outcome of the teaching is largely influenced and limited by the tasks that are given. In this context analysis of the tasks learning potential is particular interesting. Therefore, my research question is: *What learning potential is it in the task set in geometry in 8th grade associated with DIM-project?*

The method for the data collection has been two folded. I have relied on semi-structured interviews with two of the teachers who are associated with DIM-project. In addition, I developed a tool based on previous research literature to analyze the learning potential in the task set. The goal of the interviews was to highlight areas where the learning potential of these tasks could not be captured by the analysis tool alone.

Main findings is that learning potential is greatest if an inquiry approach to mathematics teaching is combined with a task set consisting of tasks with higher levels of cognitive demands in Dynamic Geometry Environments (DGE). Based on the findings from analyzes of task set and interviews it can be argued that this is the case for the majority of the tasks in DIM project.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven og valg av tema

Digital interaktiv matematikkundervisning (DIM) er et treårig samarbeidsprosjekt mellom Universitetet i Agder, Ve skole og Samfundets skole. Prosjektet følger tre ungdomsskoleklasser fra de startet i 8. klasse høsten 2015 til de går ut av 10. klasse våren 2018. Målsettingen er å skape innovativ matematikkundervisning ved å anvende digitale hjelpemidler i en pedagogisk kontekst (Digital interaktiv matematikkundervisning 2015 - 2018, 2015). Prosjektet er støttet av Regionale forskningsfond Agder (RFF Agder), og det er i tilknytning til dette prosjektet min masteroppgave er skrevet våren 2016.

Innen forskningslitteraturen eksisterer det en felles forståelse av at oppgavene som anvendes i undervisningen både påvirker og begrenser elevenes læring (Back et al., 2012; Doyle, 1988; Henningsen & Stein, 1997; Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Sullivan, Clarke, & Clarke, 2009, 2013). Ifølge Anthony og Walshaw (2009) er den viktigste forutsetningen for elevens læring oppgaver som engasjerer elevene til selv å tenke over, og ta stilling til de matematiske problemstillingene de møter. Videre hevder de at det er først gjennom oppgavene som anvendes i undervisningen at læringspotensialet blir gjort tilgjengelig for elevene. Samtidig har tidligere Trends In Mathematics and Science Sudy (TIMSS) rapporter dokumentert at matematikkundervisningen i Norge i stor grad bærer preg av en ensidig vektlegging av individuelt arbeid hvor elevene løser oppgaver etter et gitt mønster (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). Disse påstandene underbygges av Programme for International Student Assessment (PISA) rapporten fra 2012 (Kjærnsli & Olsen, 2013) som hevder at matematikkundervisningen i Norge er kjennetegnet av oppgaver som kun øver rutinemessige ferdigheter hos elevene.

I denne sammenhengen blir utviklingen av oppgaver som engasjerer elevene i å utforske og undersøke matematiske problemer avgjørende. Ve skole og Samfundets skole har som oppgave å utvikle interaktive undervisningsopplegg som samsvarer med det forventede læringsutbytte beskrevet i læreplanen (Læreplan i matematikk fellesfag, 2013). Undervisningsoppleggene som utvikles anvendes i de tre åttende klassene som deltar i studien, og tar for seg ulike temaer innenfor matematikkfaget som brøk, prosent, statistikk og algebra. Denne oppgaven studerer og analyser et oppgavesett som er utviklet innenfor geometriemnet, og spesielt med tanke på læringspotensialet som ligger i den interaktive undervisningen. Det er lagt opp til at elevene skal løse alle oppgavene ved å anvende det dynamiske matematikkprogrammet GeoGebra (jf. kapittel 1.3) på iPad. Interaksjon eller interaktivitet defineres i denne oppgaven som samspillet mellom brukeren og DGE. Nærmere bestemt hvordan eleven påvirker og styrer hva som skjer i GeoGebra, samtidig som GeoGebra gir eleven respons og påvirker handlingene til eleven.

Det er alltid en fare ved bruk av IKT i undervisningen at elevene kun utvikler verktøykunnskaper som er direkte knyttet til programmet som anvendes, mens det matematiske fokuset kommer i bakgrunnen. Derfor er det en målsetting at aktivitetene med digitale verktøy skal stimulere utviklingen av elevenes begrepsforståelse som blant annet innebærer en dypere innsikt i matematiske relasjoner og sammenhenger (Hiebert, 1986). Det er dermed viktig at elevene ikke bare utvikler prosedyreforståelse (Hiebert, 1986) hvor GeoGebra blir som en svart boks som utfører operasjoner for dem, men at elevene også får en dypere forståelse og innsikt i matematikken som ligger bak programmet. Meld. St. nr. 22 (2010 - 2011) påpeker viktigheten av at skoleledelsen har god kjennskap til læringspotensialet som ligger i anvendelsen av digitale verktøy, noe denne oppgaven kan gi et innblikk i.

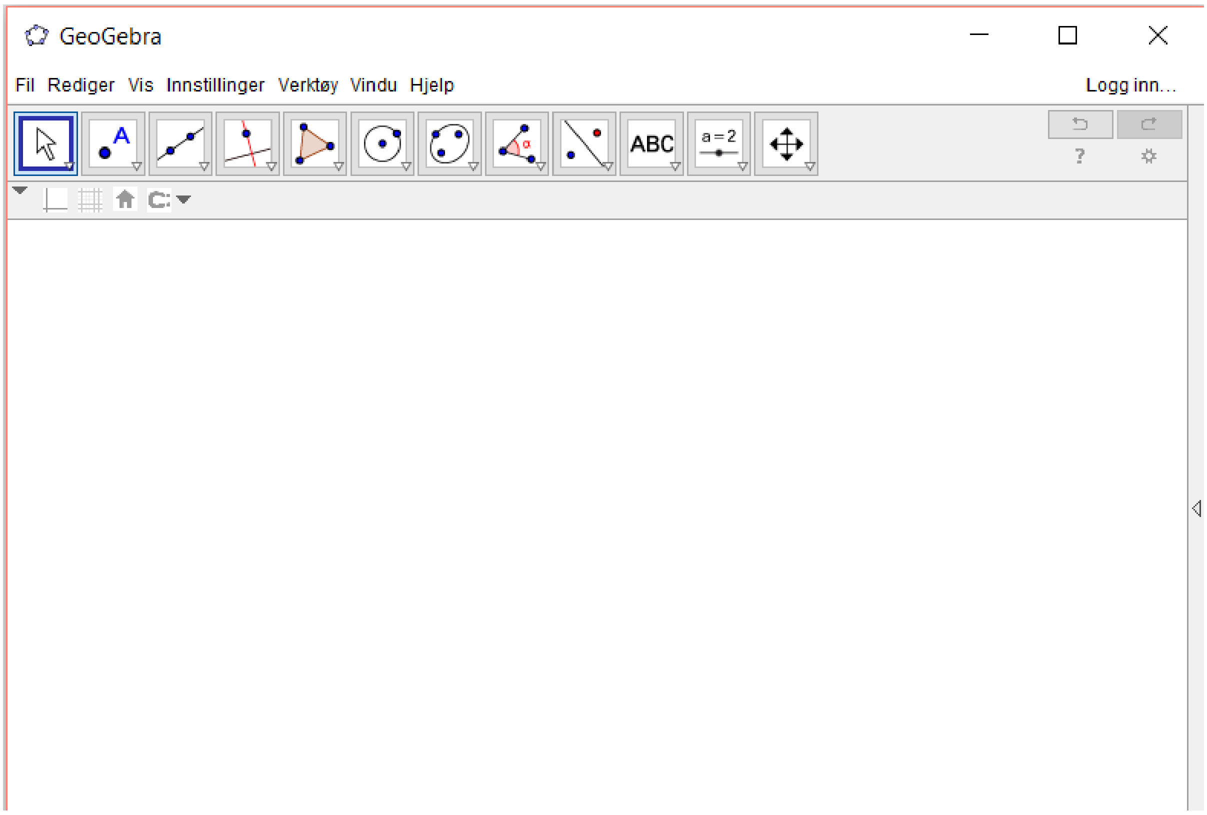
1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å studere læringspotensialet i det utviklede oppgavesettet hvor GeoGebra må anvendes for å løse de gitte oppgavene. Oppgavene er analysert ved hjelp av et nytt analyseverktøy, som har blitt utviklet som en del av dette arbeidet. Studien tar sikte på å belyse følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilket læringspotensial er det i oppgavesettet i geometri på 8.trinn tilknyttet DIM-prosjektet?*

1.3 GeoGebra

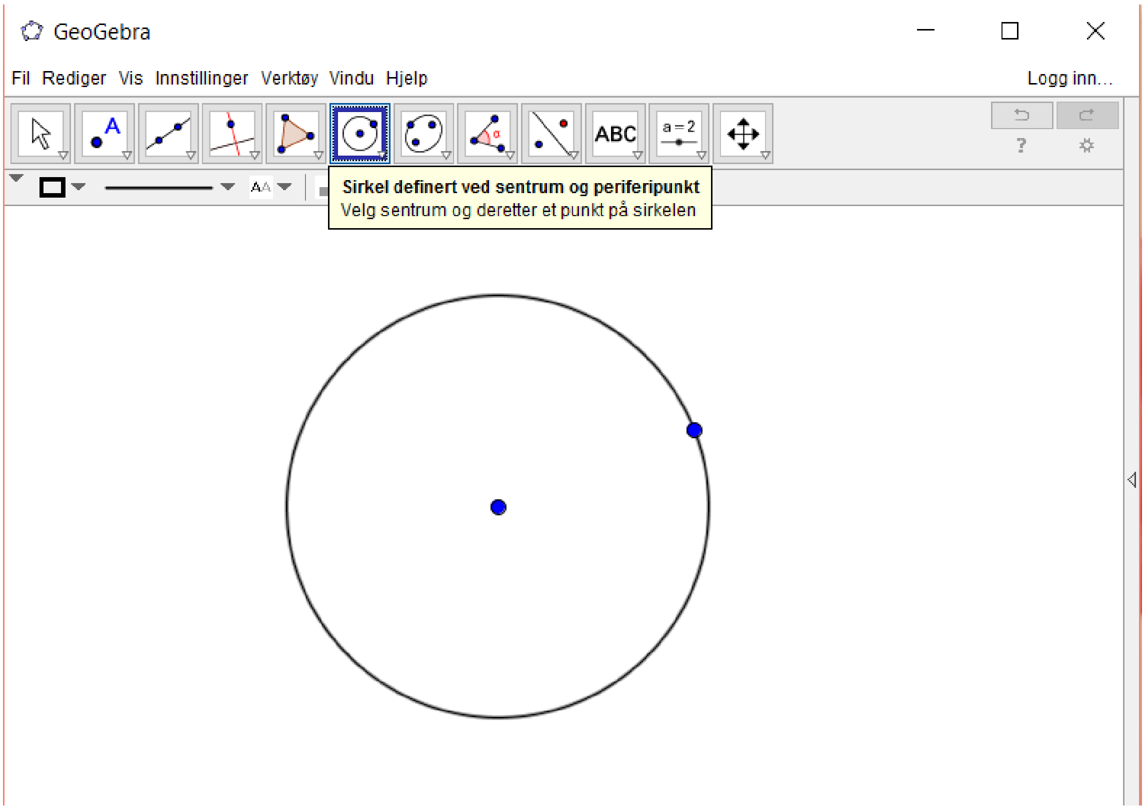
GeoGebra er et gratis dynamisk matematikkprogram utviklet spesielt med pedagogiske hensikter til bruk i skolen. Programmet kombinerer geometri, algebra og numeriske utregninger, og gjør matematikken konkret for elevene ved å visualisere matematikken de arbeider med (GeoGebra, 2016). Når elevene åpner GeoGebra, og velger geometrioppsettet får de opp følgende vindu:



Figur 1.1: Vinduet i GeoGebra med geometrioppsett

Øverst i programmet finnes verktøylinjen som er inndelt i 12 verktøybokser. Verktøyboksene inneholder verktøy som er forbundet med hverandre, og som omhandler samme matematiske objekt som for eksempel *verktøy for mangekanter* eller *verktøy for kjeglesnitt* (GeoGebra, 2016). For å lage konstruksjoner i GeoGebra benyttes ulike verktøy og kommandoer. Disse verktøyene er basert på grunnleggende euklidske konstruksjoner som elevene kjenner fra papir-og-blyant miljøet, og innebærer konstruksjon av for eksempel normal linje, regulær mangekant eller sirkel definert ved sentrum og periferipunkt. Ved å benytte disse verktøyene vil programmet selv utføre konstruksjonene og elevene får opp det ferdige objektet på skjermen sin.

Figur 1.2 illustrerer hvordan verktøyet *sirkel definert ved sentrum og periferipunkt* konstruerer en sirkel. Ved å dra i selve sirkelen kan den flyttes rundt i vinduet, mens ved å ta tak i sentrum eller periferipunktet og så dra pila innover eller utover vil sirkelen henholdsvis ekspandere og trekke seg sammen. Med nye konstruksjonsverktøy i DGE vil bruken av programmet både medierer hvordan elevene lærer geometri, og også implisitt hvordan læreren underviser (Straesser, 2002).



Figur 1.2: Illustrasjon av verktøyet *sirkel definert ved sentrum og periferipunkt*

1.4 Disposisjon

For å gi leseren er oversikt, vil jeg nå beskrive hvordan denne masteroppgaven er strukturert. Først følger et teorikapittel som presenterer de viktigste retningslinjene fra den sosiokulturelle læringsteorien samt en oversikt over norske tendenser knyttet til læring og undervisning av matematikk. Videre omtales temaet dynamisk geometri kontra euklidsk geometri hvor noen hovedforskjeller belyses. Til slutt kommenteres begrepet inquiry som utgjør en viktig bestanddel av DIM-prosjektet.

I kapittel tre omtales ulike aspekter knyttet til bruken av oppgaver i matematikkundervisningen samt tidligere forskning på området. Det nevnes blant annet hvilke oppgaver som benyttes i undervisningen, hvorfor de benyttes, hva som skiller oppgaver anvendt i DGE fra et papir-og-blyant miljø, hvordan en kan analysere oppgavene som anvendes, og ulike typer matematikk. Til slutt belyses læringspotensialet som ligger i oppgavene, og hvilke kriterier som må ligge til grunn i oppgaver med et stort potensiale for læring. Samlet sett skal disse to kapitlene gi leseren et innblikk i «virkeligheten» som denne oppgaven forsøker å belyse og gi et innspill til.

Deretter følger kapittel fire hvor valget av metode samt gjennomføringen av den beskrives. Jeg har designet et analyseverktøy basert på teori og tidligere forskning for å kunne analysere oppgavesettet. I tillegg har jeg gjennomført semistrukturerte intervjuer med to av lærerne som er tilknyttet DIM-prosjektet, hvorav en av dem er designeren av oppgavesettet. Videre beskrives hvordan analyseverktøyet er utformet og eksempler på hvordan det har vært anvendt i analyseprosessen.

I kapittel fem presenteres funn fra analysene av oppgavene og intervjuene inndelt i to delkapitler: *funn fra oppgavene* og *funn fra intervjuene*. Deretter følger et drøftingskapittel (kapittel seks) hvor funnene diskuteres i lys av teori og tidligere forskning. Jeg vil også problematiserer noen av funnene og belyse hvilke videre konsekvenser dette kan føre til. Avslutningsvis inneholder kapittel sju en konklusjon i forhold til oppgavens problemstilling, etterfulgt av pedagogiske implikasjoner og videre forskning innenfor området. Til slutt har jeg skrevet noen avsnitt hvor jeg reflekterer over min egen prosess og utvikling gjennom arbeidet med denne masteroppgaven.

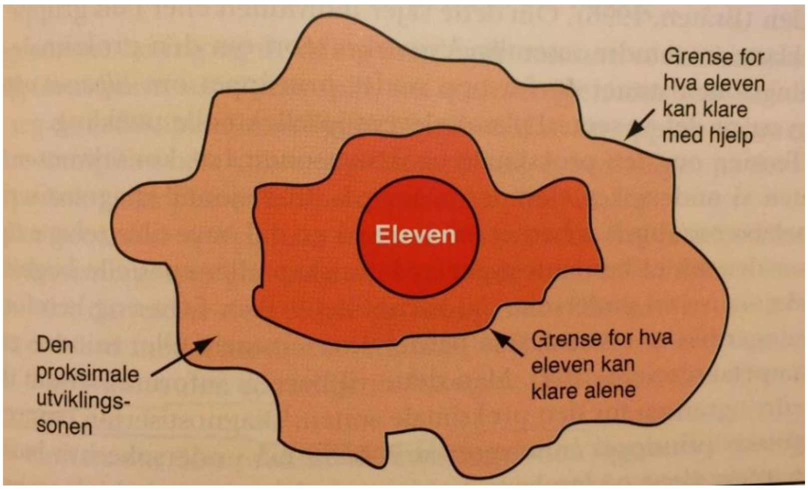
2. Læringspotensial og undervisning

Læringspotensial defineres som mulighetene som skapes for at elevene skal lære (Dysthe, 1995, s. 17). Min forståelse av læringspotensial er basert på en sosiokulturell tilnærming til læring og undervisning, og dermed vil også språket og sosiale samhandlinger betraktes som en del av læringsprosessen. Underliggende en hver oppgave er et sett av læringsmuligheter – potensielle aktiviteter for læring (Crabbe, 2007). I denne oppgaven vil begrepene læringspotensial og potensiale for læring bli brukt synonymt.

2.1 Sosiokulturell læringsteori

DIM-prosjektet legger til grunn et sosiokulturelt perspektiv på læring (Digital interaktiv matematikkundervisning 2015 - 2018, 2015). Dermed er det naturlig at også denne oppgaven tar utgangspunkt i samme teori. Innenfor den sosiokulturelle læringsteorien anses kommunikasjon og læring som to sider av samme sak (Säljö, 2001). Videre betraktes læring som et resultat av interaksjoner mellom mennesker og kulturelle artefakter i miljøet. Sentralt står begrepet *mediering* som antyder at mennesket ikke står i direkte kontakt med omverdenen (Wertsch, 2007). I stedet må vi anvende fysiske, språklige og kulturelle redskaper som gjør verden tilgjengelig for oss, og som er med og påvirker vår virkelighetsoppfatning (Säljö, 2001, 2006). Språket regnes som menneskets viktigste medierende redskap, både muligheten til å hevde seg selv og muligheten til å kommunisere med andre. Eksempler på andre fysiske og kulturelle redskaper er lærebøker, datamaskiner og GeoGebra. Essensielt står dermed tanken om at menneskets læring og utvikling av høyere mentale prosesser må betraktes i lys av begrepet om mediering (Wertsch, 2007). Det vil dermed ikke være hensiktsmessig å studere eleven isolert, men i stedet også ta hensyn til hvilke språklige og intellektuelle redskaper som inngår i læringsprosessen og hvordan eleven mestrer disse.

Vygotsky (1978), som la mye av grunnlaget for den sosiokulturelle læringsteorien, hevder at læring og utvikling forekommer på to plan. Først mellom mennesker på et sosialt plan, såkalte interpersonlige prosesser. Deretter på et individuelt plan hvor en snakker «innover vendt», også omtalt som intrapersonlige prosesser (Wertsch, 2007). Dette gir noen indikasjoner for hvordan undervisningen burde legges opp. Elevene må først få mulighet til å lære i samhandling med andre for deretter å lære på et individuelt plan som et resultat av den sosiale konteksten. Det hevdes at sosiale interaksjoner har potensiale til å utvikle ny kunnskap, som det er lite sannsynlig at elevene ville ha oppnådd på egen hånd. Vygotsky (1978) beskriver disse potensielle kunnskapsområdene som *den proksimale utviklingssone* (jf. figur 2.1).



Figur 2.1: Den proksimale utviklingssonen (Imsen, 2005, s. 259).

Modellen illustrer elevenes aktuelle kunnskapsnivå og potensialet elevene har for å tilegne seg ny kunnskap. Den røde sirkelen illustrerer eleven og hans nåværende kunnskapsnivå. Det første omrisset angir grensen for hva eleven kan klare på egen hånd, uten hjelp. Sentralt står tanken om at eleven i samhandling med *signifikante andre* kan bevege seg over i den proksimale utviklingssonen. Signifikante andre defineres som jevnaldrende eller voksne med mer kompetanse enn eleven selv som kan hjelpe eleven videre i læringsprosessen ved å stille spørsmål, veilede, forklare og eksemplifisere (Vygotsky, 1978). Ved hjelp av litt veiledning eller assistanse fra omgivelsene blir eleven i stand til å prestere mer enn hva han kunne oppnådd på egen hånd og han har dermed beveget seg over i den proksimale utviklingssonen. Den proksimale utviklingssonen defineres som «avstanden» mellom elevens aktuelle utviklingsnivå som er bestemt av hva eleven kan prestere på egen hånd – uten hjelp og støtte, og elevens potensielle utviklingsnivå som er bestemt av hva eleven kan prestere under ledelse av eller i samarbeid med mer kapable andre (Vygotsky, 1978, s. 86). På den måten vil elevene gjennom sine handlinger stadig påvirke og endre læringspotensialet som skapes i undervisningen. Læringspotensialet er med andre ord ikke en statisk størrelse, men noe som endres som en følge av elevens engasjement og deltakelse i undervisningen. For eksempel presenteres det i kapittel 5.1.1 om guidet utforskning en oppgave (figur 5.3) som antas å ha et stort potensiale for læring. Dersom elevene imidlertid ikke synes oppgaven virker interessant eller ønsker å utforske firkantene de presenteres for vil elevenes faktiske læring være begrenset selv om potensialet i oppgaven er stort. Likeledes kan en oppgave som i utgangspunktet har et mindre læringspotensial enn oppgaven i figur 5.3, men som elevene synes virker spennende å utforske føre til mer læring og dermed skape et større potensiale for læring.

2.2 Læring og undervisning av matematikk – norske tendenser

Tidligere TIMSS rapporter har vist at matematikkundervisningen i Norge er preget av en ensidig vektlegging av individuelt arbeid hvor elevene løser oppgaver etter et gitt mønster som enten er illustrert i læreboka eller av læreren (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2010). Rapporten fra PISA undersøkelsen i 2012 bekrefter også at matematikkundervisningen i Norge relativt ofte er preget av oppgaver som øver rutinemessige ferdigheter (Kjærnsli & Olsen, 2013). TIMSS 2011 viser en tydelig profil av norske klasserom hvor 75 % av lærerne svarer at elevene arbeider individuelt eller i små grupper med matematikkoppgaver hver eller nesten hver time (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012). Til sammenligning ligger det internasjonale gjennomsnittet på 55 %. Mellin-Olsen (1996) hevder at lærerens vektlegging av oppgaveløsning i matematikkundervisningen er institusjonalisert, og ikke noe en bare kan klandre den enkelte lærer for. Mange av lærerne Mellin-Olsen (1996) omtaler i sin artikkel uttrykker et ønske om en undervisning som var *annerledes* hvor elevenes undersøkelse og utforskning sto i sentrum, men på grunn av tidspress og et massivt pensum som skal gjennomgås før eksamen ender lærerne opp med å «*kjøre på*» med den ene oppgaven etter den andre.

Hvorvidt lærerne bruker læreboka i undervisningen ble også undersøkt i TIMSS 2011, og da etter kategoriene *bruker ikke, som supplement* eller *som undervisningsgrunnlag*. Resultatene viser at mellom 90 - 100 % av lærerne i Norge svarer at de bruker læreboka som undervisningsgrunnlag i matematikk (sammenlignet med et internasjonalt snitt på 75 %) (Onstad & Grønmo, 2013). Dette illustrer at læreboka og oppgavene som benyttes i matematikkundervisningen har en enorm betydning for hva slags matematikk elevene lærer, og dermed er det viktig at en kritisk vurdering av oppgavene som benyttes i undervisningen blir en naturlig del av lærerens praksis.

TIMSS 2011 peker videre på en mangelfull side ved den norske skolen slik den fremstår i dag. Vi klarer nemlig ikke på tilfredsstillende måte å ivareta tilpasset og utfordrende opplæring for *alle* elever slik både opplæringsloven og kunnskapsløftet pålegger oss (Grønmo et al., 2012). I denne sammenhengen defineres alle elever som det mangfoldet av elever som finnes i norske klasserom, uavhengig av egne forutsetninger og evner, hvor alle har rett på en opplæring som utvikler dem faglig, sosialt og personlig. Det presiseres at dette både gjelder *«elevar med særlege vanskar eller særlege evner og talent på ulike område»* (Prinsipp for opplæringa, 2013, s. 4). TIMSS 2011 peker spesielt på de talentfulle elevene som de som blir forsømt i norsk skole i dag, og ikke får tilstrekkelig nok faglige utfordringer. I tillegg oppfordrer PISA rapporten fra 2012 (Kjærnsli & Olsen, 2013) norske lærere til i større grad å ta hensyn til og gi rom for konsolideringsfasen i undervisningen for å sikre at alle elevene har nådd målene for undervisningen. Dette kan for eksempel imøtekommes ved å ha en oppsummering mot slutten av timen hvor sentrale momenter gjennomgås og understrekes.

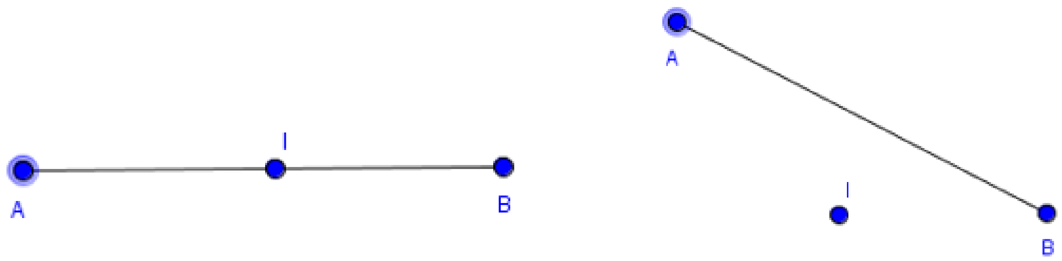
I Norge har det vært og er fremdeles en økende vektlegging av implementering og bruk av IKT i matematikkundervisningen. Dette kommer særlig til syne i Læreplanverket for Kunnskapsløftet (LK06) hvor elevenes evne til å anvende digitale verktøy regnes som en av de fem grunnleggende ferdighetene som skal integreres i alle skolefag. Kjærnsli og Olsen (2013) beskriver datamaskinen som et viktig pedagogisk verktøy for å gi elevene spesifikk støtte og tilbakemelding i undervisningen. I følge Fuglestad (2009) er datamaskinen et hjelpemiddel som muliggjør både eksperimentering med og utforskning av matematiske sammenhenger. Det finnes også dynamisk didaktisk programvare, som blant annet GeoGebra (jf. kapittel 1.3), som er spesielt utviklet for skolebruk og som gir en ny innfallsvinkel til geometriemnet. Likevel er kanskje det mest grunnleggende argumentet for i større grad å implementere IKT i matematikkundervisningen at faget bør gjenspeile den virkeligheten som elevene skal håndtere når de er ferdige med skolegangen (Kjærnsli & Olsen, 2013). Til tross for dette har implementeringen av IKT verktøy i matematikkundervisningen i Norge vært treg og er fremdeles begrenset (Fuglestad, 2011). Senter for IKT i utdanningen kartlegger regelmessig bruken av IKT i norsk grunnopplæring, og rapporten fra 2013 (Hatlevik, Egeberg, Gudmundsdóttir, Loftsgarden, & Loi, 2013) dokumenterer en svak nedgang. I følge undersøkelsen er matematikk det faget hvor IKT brukes minst i undervisningen på alle trinn. Blant de spurte elevene på 7. trinn hevder 84,6 % at de månedlig, sjeldnere eller aldri bruker IKT i matematikkfaget (Hatlevik et al., 2013, s. 88). Samtidig opplever både elever og lærere bruken av IKT i undervisningen som fordelaktig. Det motiverer elevene, gjør det lettere å differensiere og variere undervisningen, og utgjør dermed et verktøy som har et stort potensiale for læring.

2.3 Dynamisk geometri kontra Euklidsk geometri

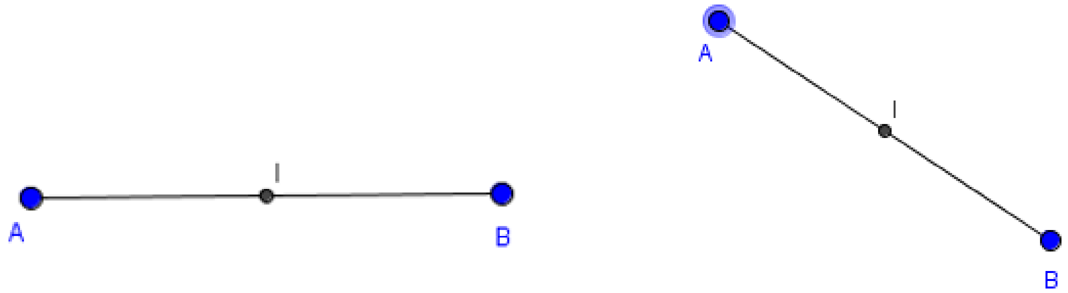
Dynamic Geometry Environments (DGE) betegner programvare som er spesielt designet for undervisning og læring av plangeometri utrustet med verktøy som setter brukeren i stand til å manipulere figurer direkte og dynamisk på datamaskinen (Hölzl, 1996). I forskningslitteraturen benyttes også begrepet *Dynamic Geometry Software* (DGS) om samme fenomen (Erfjord, 2008; Hölzl, 1996; Laborde, 2001; Straesser, 2002). Jeg mener imidlertid at begrepene er overlappende, og har derfor kun valgt å benytte begrepet DGE for å skape kontinuitet i oppgaven.

Til tross for ulik layout, meny og ikoner, har alle disse programmene likevel noen karakteristiske fellestrekk. For det første simulerer de konstruksjon med passer og linjal som er nedfelt i Euklids Elementer for omtrent 2000 år siden. For det andre støtter programmet disse konstruksjonene ved makroer. Noen makroer er definert i programmet som ulike verktøy som trengs i standardkonstruksjoner, for eksempel «nytt punkt», «linjestykke mellom to punkt» og «sirkel definert ved sentrum og periferipunkt». Brukeren har også mulighet til å definere egne makroer som er tilpasset den spesifikke konstruksjonen. Til slutt, og kanskje det mest påfallende, tillater programmet at visse deler av figuren kan flyttes, og i noen tilfeller forandre form uten at de underliggende geometriske relasjonene endres (Hölzl, 1996). Flere studier har dokumentert at DGE sørger for muligheter hvor elevene kan engasjere seg i matematiske aktiviteter som utforskning, formulere hypoteser og teste dem ut, forklaring og generalisering (Fahlgren & Brunström, 2014; Hölzl, 1996). Forskere er enige om at en av de største fordelene ved DGE nettopp er mulighetene som gis for utforskning (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Edwards, 1997; Hanna, 2000; Hoyles & Jones, 1998; Laborde, 2015; Santos-Trigo & Espinosa-Perez, 2002; Öner, 2008). Det er verktøyene DGE tilbyr som muliggjør denne utforskningen, som blant annet kan innebære å identifisere geometriske egenskaper og lette etter relasjoner mellom matematiske objekt (Fahlgren & Brunström, 2014; Laborde, 1991, 2007). I denne sammenhengen er det først og fremst dra-verktøyet som trekkes frem som den definerende egenskapen ved DGE. Dra-verktøyet fører nemlig til nye måter å betrakte og resonnere på, som er særegne for den dynamiske geometrien (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Hölzl, 1996, 2001; Laborde, 2001, 2015; Leung, 2011; Straesser, 2002). For eksempel vil en figur som dras i DGE utvide seg, i kontrast til den euklidske geometrien hvor punktene og avstanden mellom dem står fast.

Når en arbeider med geometri, og spesielt i DGE, er det nødvendig å skille mellom tegning og figur. Laborde (1991, 1995) beskriver *tegning* som det fysiske objektet på papiret eller skjermen, mens en *figur* er det teoretiske objektet som tegningen viser til. Dra-verktøyet i DGE tydeliggjør forskjellen mellom tegning og figur. Dersom en *tegning* dras i DGE vil det generer en uendelighet av forskjellige tegninger på skjermen, og den geometriske figuren elevene har forsøkt å lage faller fra hverandre. Når en *figur* dras i DGE vil imidlertid de geometriske egenskapene bevares, uavhengig av dra-verktøyet (Laborde, 1995). For eksempel dersom et punkt I plasserer på linjestykket AB for å markere midtpunktet, men dette kun gjøres ved å visuelt bestemme hvor punktet skal være (tegning) vil ikke den geometriske egenskapen bevares når linjestykket endres slik figur 2.2 viser. Dersom midtpunktet I derimot er konstruert ved hjelp av verktøyet «midtpunkt» vil den geometriske egenskapen til figuren bevares uansett hvordan linjestykket dras eller endres på (figur 2.3). På den måten tydeliggjør DGE begrepet geometrisk figur, og betydningen av de geometriske egenskapene som figuren består av (Laborde, 1991). Det blir dermed en viktig oppgave for elevene å ikke bare lage tegninger, men også å konstruere dynamiske figurer hvor de geometriske egenskapene bevares til tross for at figurene dras i DGE.



Figur 2.2: Midtpunktet I på linjestykket AB laget ved tegning. Den geometriske egenskapen «midtpunkt» bevares ikke når linjestykket AB dras i DGE



Figur 2.3: Midtpunktet I på linjestykket AB er konstruert ved hjelp av verktøyet *midtpunkt eller sentrum*, og dermed vil den geometriske egenskapen «midtpunkt» bevares når linjestykket AB dras i DGE

Hölzl (2001) skiller mellom to medierende roller til dra-verktøyet i DGE. DGE kan anvendes som et verktøy for å teste og sjekke om for eksempel en gitt konstruksjon har de ønskede egenskapene. Programmet kan også benyttes som et verktøy for å undersøke og oppdage nye geometriske egenskaper og sammenhenger. Flere studier har vist at DGE oftest benyttes på en verifiserende måte for å bekrefte gitte teoremer og algoritmer, men at arbeid i DGE kan utvikle elevenes forståelse av dra-verktøyet slik at de også kan ta det i bruk for å undersøke egne hypoteser og konstruksjoner (Hölzl, 1996, 2001). Den medierende rollen til datamaskiner i DGE, og spesielt forholdet mellom elevens personlige erfaringer på det ene siden og den formelle representasjonen av matematisk kunnskap på den andre siden, har blitt undersøkt av Noss og Hoyles gjennom flere år (Hoyles & Noss, 1992; Noss & Hoyles, 1996). De har gjentatte ganger observert hvordan elevene gjenkjenner matematiske relasjoner og størrelser på egen hånd, ikke på en formell måte, men avhengig av verktøyene som tilbys i omgivelsene. DGE muliggjør dessuten en konfrontasjon mellom elevenes hypoteser og antakelser, og hva de faktisk observerer på skjermen (Laborde, 2001; Marrades & Gutiérrez, 2000).

Laborde (2015) rapporterer fra en studie som undersøkte hvilket læringsmiljø, DGE eller det tradisjonelle, som førte til størst læringsutbytte i et geometrikurs på college. Det ble ikke funnet noen signifikant forskjell mellom resultatene fra de to ulike miljøene, men elever som anvendte teknologi tilegnet seg også andre ferdigheter relatert til teknologien. Forskning har dessuten dokumentert at flere elever våger å teste ut hypotesene sine og prøve seg fram i DGE som en følge av at elevene vet at datamaskinen gir dem nøytrale tilbakemeldinger (Hölzl, 2001). Et annet moment er at tilgangen til matematiske begreper fornyes ved hjelp av digitale verktøy. DGE tilbyr nemlig en interaktiv samhandling mellom ulike representasjoner og objekter, hvor en unngår at enkelte egenskaper isoleres. Forhåpentligvis vil dette hjelpe elevene til å forstå og gjenkjenne betydning av en spesifikk geometrisk størrelse (Hölzl, 2001; Laborde, 1995). DGE muliggjør også å skjule hjelpelinjer og andre objekter som igjen gir gode muligheter for å utforske hvordan de geometriske objektene er konstruert (Laborde, 1991). Alle disse faktorene skaper et stort potensiale for å favorisere en interaktiv og undersøkende tilnærming til matematikkundervisningen.

2.4 Inquiry

Inquiry er et vidt begrep som blant annet betegner å undersøke, å stille spørsmål, å undre seg, å utforske og å søke etter ny kunnskap. Begrepet er ikke kjennetegnet av en bestemt metode eller prosedyre, men kan i stedet beskrives både som *en tilnærming* og *en holdning* til matematikkundervisningen (Fuglestad, 2010; Fuglestad, Goodchild, & Jaworski, 2007). Wells (1999) definerer dialogisk inquiry som *«a willingness to wonder, to ask questions, and to seek to understand by collaborating with others in the attempt to make answers to them»* (s. 121). Samtidig understreker Wells (1999) at formålet med inquiry ikke er å utvikle kunnskap bare for kunnskapens del, men å anvende kunnskapen en har tilegnet seg til å handle bevisst og velbegrunnet i situasjoner som kan oppstå både nå og i fremtiden. Dette gir implikasjoner for hvordan matematikkundervisningen burde organiseres og hva som betraktes som god undervisning.

Åpne oppgaver eller problemer kan skape undervisnings- og læringsmiljøer som tillater elevene å utforske og produsere hypoteser (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Furinghetti & Paola, 2003; Mogetta, Olivero, & Jones, 1999). Boaler (1998) har i løpet av en treårsperiode studert to skoler med ulike tilnærminger til matematikkundervisningen. Den ene skolen anvendte en tradisjonell, læreboktilnærming, mens den andre skolen kun brukte åpne oppgaver. Resultatene viser at elevene som fulgte den tradisjonelle undervisningen utviklet en prosedyreforståelse som var av begrenset hjelp for elevene i møte med alle situasjoner og problemer utenfor læreboka. Elevene som derimot lærte matematikk i et miljø preget av åpne, prosjektbaserte oppgaver utviklet en begrepsforståelse av matematikken som gav dem fordeler i møte med en rekke situasjoner og oppgaver. Disse elevene kunne ikke mer matematikk enn de andre, men de var i stand til å tolke ukjente situasjoner samt tilpasse og anvende prosedyrene de kjente til i nye kontekster. Hun konkluderer med at en tradisjonell læreboktilnærming som vektlegger kalkulasjoner, regler og prosedyrer på bekostning av en dypere forståelse av matematikken vil være ugunstig for elevene. Artikkelen til Boaler (1998) har vært et viktig bidrag for å forsvare en aktivitet-basert tilnærming til matematikkundervisningen preget av elvenes egne undersøkelser og utforskning.

Undersøkelseslandskap er et begrep utviklet av Skovsmose (2001, 2003) som kjennetegnes av en spørrende og undersøkende tilnærming til matematikken. Det er elevenes nysgjerrighet og undring som blir styrende for undervisningen hvor målet er elevenes utforskning og forklaring. Læreren bestemmer klasseromskonteksten mens elevene selv bestemmer hvilke oppgaver de ønsker å arbeide med, og hvordan de vil gå frem for å løse disse (Skovsmose, 2003). Undersøkelseslandskap kontrasteres ofte av oppgaveparadigmet hvor fokuset er på lærerens gjennomgang av nytt stoff og elevens arbeid med tilsvarende oppgaver hvor læreboka er retningsgivende for undervisningen (Skovsmose, 2001). Mellin-Olsen (1996) referer også til samme skolekultur nå han bruker begrepet oppgavediskursen. Oppgaveparadigmet og oppgavediskursen er med andre ord to begrep som omtaler samme fenomen, og ifølge Mellin-Olsen (1996) har dette vært en utbredt kultur i norsk matematikkundervisning i lang tid. Lærerens oppgave er å sørge for at alle elever får et tilbud, uavhengig av om de er faglige sterke eller svake, og dette tilbudet er ifølge oppgavediskursen oppgaver og hjelp til å løse dem. Lærerne i studien til Mellin-Olsen (1996) hevder at det ville vært interessant å se hvordan de svake elevene presterte dersom en gjorde noe annet i undervisningen enn bare oppgaveløsning, men på grunn av tidspress om å komme gjennom hele pensumet før eksamen blir det bare med tanken. Oppgaveparadigmet er en velkjent skolekultur også fra andre land (Alrø & Skovsmose, 2002; Brousseau, 1997).

Cobb og Yackel (1998) referer til *intellektuell autonomi* som et eksplisitt mål i deres arbeid med å etablere en inquirybasert matematikktradisjon i kontrast til den tradisjonelle skolematematikken. Intellektuell autonomi er karakterisert som *«(...) students' awareness of and willingness to draw on their own intellectual capabilities when making mathematical decisions and judgments»* (Cobb & Yackel, 1998, s. 170). Ifølge Cobb og Yackel (1998) vil lærere i et slikt miljø være opptatt av å utvikle en felles forståelse mellom lærer og elev av hva som er matematisk sant og gyldig, og på den måten overføre ansvaret for å ta matematiske valg og beslutninger til eleven. Intellektuell autonomi kan dermed assosieres med aktiviteter som legger til rette for selvstendig utforskning og forklaring, slik blant annet undersøkelseslandskaper gjør (Skovsmose, 2001).

Forsknings- og utviklingsprosjektet *Læringsfellesskap i matematikk (Learning Communities in Mathematics* (LCM)) var et samarbeidsprosjekt mellom didaktikere fra Universitet i Agder og lærere i Agder fra 1. til 11. trinn (2004 – 2007). Målsettingen var å utvikle undervisning og læring i matematikk basert på spørrende og undersøkende fellesskap, såkalte *inquiry communities* (Fuglestad et al., 2007; Jaworski et al., 2007). Studien rapporterer om en gruppe videregående lærere som mente at denne typen utforskning kunne stjele unødig tid av undervisningen og dermed trengte en form for styring. Elevene var ikke vant med å undersøke matematiske problemstillinger på egenhånd, og lærerne ville dermed legge til rette for elevens utforskning gjennom det de kalte for *styrt utforskning* (Skaar & Syvertsen, 2007). Lærerne delte oppgavene som elevene skulle arbeide med inn i nummererte lapper slik at de kunne styre elevens utforskning ved å bare gi elevene en lapp om gangen. Selv om lærerne beskriver arbeidsmåten som tidkrevende, både i planleggingen og i gjennomføringen i klassen bemerker de mot slutten av prosjektet at den undersøkende tilnærmingen til undervisningen hadde en viss gevinst. Lærerne erfarte nemlig at når de senere underviste lignende problemstillinger gikk dette lettere enn hva det hadde gjort tidligere år. Samtidig erfarte lærerne at selv om elevene brukte mye tid på å løse den første oppgaven gikk løsningen av de neste oppgavene betraktelig raskere etter hvert som elevene ble vant med oppgavetypen (Fuglestad et al., 2007). Oppgavene tvang elevene til å ta selvstendige bestemmelser i forhold til oppgavens innhold og hva de ønsket å undersøke.

3. Oppgaver

3.1 Innhold og struktur

En oppgave kan defineres som *«a segment of classroom activity that is devoted to the development of a particular mathematical idea»* (Stein & Smith, 1998, s. 269). Tidligere forskning har en felles oppfatning av at oppgavene som anvendes i undervisningen både påvirker og begrenser elevens læring (Back et al., 2012; Doyle, 1988; Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996; Sullivan et al., 2009, 2013). Samtidig vil læreren, gjennom oppgavene som anvendes i matematikkundervisningen, gi elevene et inntrykk av hva det innebærer å gjøre matematikk (Anthony & Walshaw, 2009). I denne sammenhengen påpeker Back et al. (2012) at oppgavedesign kan betraktes som *metamatematikk* (s. 33) fordi oppgavene både påvirker hva elevene lærer, samt hvordan de opplever og forstår matematikkens natur. Dette bekreftes også av annen forskningslitteratur som hevder at det er den daglige bruken av ulike oppgaver i matematikkundervisningen som til slutt former elevenes oppfatning av faget, hvordan de anvender det og hvorvidt de må anstrenge seg for å lykkes (Anthony & Walshaw, 2009; Stein & Smith, 1998).

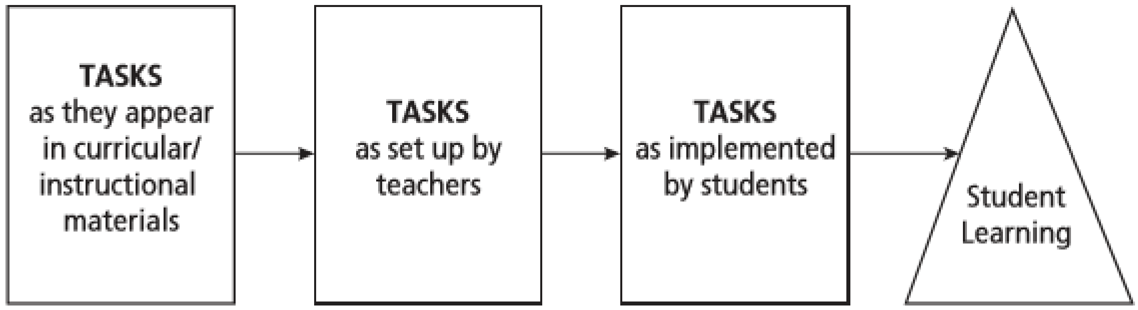
I følge Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, og Houang (2002) er det lærebøkene som i stor grad avgjør hvordan læringsmulighetene i undervisningen struktureres. Tatt i betraktning resultatene fra TIMSS 2011 som ble presentert i kapittel 2.2 hvor 90 – 100 % av de norske lærerne hevder at de anvender læreboka som undervisningsgrunnlag i matematikk må vi kunne argumentere for at situasjonen fremdeles er den samme i dag. Det betyr at dersom man ønsker å forstå hvilke læringsmuligheter elevene gis på skolen, må man først forstå lærebøkene og oppgavene som anvendes i klasserommet (Valverde et al., 2002). Dette er blant annet et av formålene til TIMSS hvor de gjennom spørreskjemaer til elever, foreldre, lærere og rektorer forsøker å kartlegge faktorer som kan ha betydning for læringskonteksten på skolen (Universitetet i Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, 2015). En av disse faktorene er kvaliteten på undervisningen.

3.2 Oppgaver brukt i undervisningssammenheng

Niss (2006) beskriver det å løse matematiske problemer som selve essensen i matematisk aktivitet, og ofte et middel som tas i bruk for å oppnå noe annet – nemlig matematisk kompetanse hos elevene. Den viktigste stimulusen for elevenes læring er ifølge Anthony og Walshaw (2009) oppgaver som engasjerer elevene til selv å tenke over det matematiske problemet som presenteres. I tråd med den sosiokulturelle læringsteorien påpeker Sullivan et al. (2013) at oppgaver brukt i undervisningen bør overskride elevens aktuelle kunnskapsnivå, men samtidig være begrenset til det en kan forvente at elevene vil klare ved hjelp fra andre.

I følge Hiebert et al. (1997) bygger elevene matematisk kunnskap når de reflekterer og kommuniserer, og derfor er det viktig at oppgavene som anvendes i undervisningen nettopp ivaretar og oppfordrer til slike prosesser. I denne sammenhengen peker han på tre viktige kriterier ved oppgaver hvor elevene sitter igjen med noe av matematisk verdi. For det første må oppgaven gi elevene en utfordring, noe det er nødvendig at de tenker over i stedet for å følge en gitt oppskrift. For det andre burde det som er utfordrende ved oppgaven være matematikken, og ikke andre aspekter ved situasjonen. Til slutt, dersom elevene skal være utholdende og lykkes med å finne en løsning på oppgaven, må de få mulighet til å anvende egne strategier og ferdigheter (Hiebert et al., 1997, s. 18). Det må med andre ord være mulig å løse oppgaven på flere ulike måter, uten at det kun finnes *en* riktig løsningsmetode.

Stein et al. (1996) beskriver matematiske oppgaver som viktige verktøy for å bygge elevenes kapasitet til matematisk tenking og resonnering. Flere års forskning har ført til utviklingen av det teoretiske rammeverket *Mathematical Tasks Framework* (MTF; figur 3.1), hvor formålet er å kunne analysere og implementere matematikkoppgaver i forhold til de kognitive kravene som kreves for å løse oppgavene. I denne konteksten defineres en matematisk oppgave som sitert innledningsvis.



Figur 3.1: The Mathematical Tasks Framework (Stein & Smith, 1998, s. 270)

I følge MTF går matematikkoppgaver gjennom tre faser: som skrevet av oppgavedesignere, som anvendt i undervisningen av lærere, som implementert av elevene i løpet av undervisningen. Alle de tre fasene er en del av matematikkundervisningen og påvirker elevenes læringsprosess. I tillegg spesifiserer rammeverket to dimensjoner av matematiske oppgaver: oppgavens egenskaper og kognitive krav. Den første dimensjonen referer til viktige aspekter ved oppgavene identifisert av lærere, som for eksempel flere løsningsstrategier, flere representasjoner og hvordan disse fremstilles. Den andre dimensjonen viser til den kognitive prosessen som kreves for å løse oppgavene og hvordan elevene anvender denne i implementeringsfasen. De kognitive kravene som elevene møter i oppgavene blir videre omtalt i kapittel 3.5. I denne oppgaven er det i hovedsak den første fasen som har vært av interesse, altså oppgavene slik de er formulert av oppgavedesigneren med noen mulige implikasjoner for fase nummer to.

3.3 Utforskende og undersøkende undervisning

I sin doktoravhandling studerte Erfjord (2008) hvordan DGE implementeres av tre lærere i matematikkundervisningen. Begge skolene som deltok i studien anvendte passer og linjal samtidig som de brukte DGE i geometriundervisningen på 8.trinn (Erfjord, 2011). Erfjord (2008) peker på to ulike syn i forhold til hvordan inquiry anvendes i et digitalpreget miljø. Den ene læreren har et sterkt fokus på verktøyene DGE tilbyr, og at elevene skal lære å anvende disse på riktig måte. Dermed blir de teknologiske aspektene i forgrunnen, på bekostning av både inquiry-tilnærmingen og matematikken elevene skal lære. I dette tilfellet betraktes inquiry som et verktøy i undervisningen som kun relateres til oppgavens natur, hvor fokuset er på hva elevene kan prestere *etter* undervisningen er avsluttet. Dette blir blant annet synliggjort gjennom lærerens vektlegging av elevenes evne til å anvende DGE korrekt i konstruksjoner (Erfjord, 2011). Den andre læreren derimot, bruker liten tid på verktøyopplæring, og retter i stedet fokuset på de geometriske problemene og elevenes utforskning av disse. Dermed blir både inquiry og geometrien retningsgivende, og inquiry blir en holdning som får betydning for elevenes utforskning og lærerens undervisning. Her er det elevenes prestasjoner *mens* de arbeider med programmet som vektlegges (Erfjord, 2011). Læreren ønsker at elevene skal bruke sine egne initiativer til å utforske DGE, og dele erfaringene de gjør med hverandre. Erfjord (2011) argumenterer for at en kombinasjon av disse to perspektivene, hvor det også i større grad fokuseres på matematiske relasjoner, vil være hensiktsmessig for å lære matematikk ved hjelp av DGE. Det vil også være en hjelp for å utvikle en tilnærming til matematikkundervisningen som er preget av inquiry.

3.4 Oppgaver designet for Dynamic Geometry Environments

Et viktig prinsipp når en designer oppgaver som skal anvendes i DGE er ifølge Leung (2011) å inkludere oppgaver som gjør elevene kjent med programvaren, og som gir dem muligheter til å utvikle bruksmønstre i interaksjonen med DGE. Det matematiske objektet som undersøkes kan enten være designet på forhånd eller så kan konstruksjonen inngå som en del av oppgaven. Leung (2011) konstaterer at det å konstruere og manipulere virtuelle matematiske objekter er en meningsfull måte å lære og bruke virtuelle verktøy som pedagogiske instrumenter (s. 327). Ruthven (2009) påpeker at ved å la elevene foreta sine egne konstruksjoner vil de bli klar over konstruksjonsprosessen som ligger bak dynamiske figurer, og i studien til Marrades og Gutiérrez (2000) startet de fleste oppgavene med at elevene måtte lage en konstruksjon i DGE. Fahlgren og Brunström (2014) omtaler også samme tematikk, og hevder at elevene ved å foreta egne konstruksjoner i DGE både blir kjent med selve programvaren og den matematiske situasjonen.

Når en konstruksjon er laget kan elevene begynne å utforske den matematiske situasjonen som studeres. Ved at elevene også formulerer hypotesene sine skriftlig kan arbeidet deres bli synlig, og på den måten bli et objekt for refleksjon (Fahlgren & Brunström, 2014). Ulike egenskaper ved DGE kan benyttes for å verifisere sannheten til en hypotese. For eksempel muligheten til å undersøke mange eksempler på kort tid (Fahlgren & Brunström, 2014). Fahlgren og Brunström (2014) påpeker viktigheten av at elevene forsøker å generalisere det matematiske problemet videre, selv etter at den konkrete oppgaven er løst. Dermed kan en snakke om en syklisk prosess hvor elevene undersøker oppgaven gjentatte ganger med stadig nye premisser.

Leung (2011) foreslår tre styrende prinsipper når en skal designe oppgaver for teknologirike miljøer: utforskning, rekonstruering og forklaring. Han beskriver en modell for oppgavedesign bestående av tre nivåer hvor målet er å utnytte læringspotensialet som ligger i dra-verktøyet i DGE. Det første nivået beskrives som en øvingsmodus hvor elevene får utforske mulighetene i DGE. Etter hvert som elevene blir fortrolige med programvaren vil forhåpentligvis fokuset skifte fra å anvende rutineverktøyer til å konstruere mening. På den måten ledes elevene til neste nivå hvor empiriske observasjoner matematiseres – prosessen fra et problem dukker opp, fremstillingen av hypoteser, og til det er formalisert matematisk. På det siste nivået forventes det at elevene uttrykker det de har oppdaget på de to foregående nivåene. Sentralt står elevenes utvikling av induktiv resonnering, og fremstillingen av generelle hypoteser som de både kan begrunne og bevise. I denne prosessen kan dra-verktøyet i DGE være et nyttig redskap for elevene (Leung, 2011).

Laborde (2001) presenterer i sin studie lærere som designer oppgaver og deres intensjoner med oppgavene i et dynamisk geometrisk miljø. Hun foreslår å klassifisere oppgavene i henhold til rollen som designeren av oppgaven tilskriver DGE, og graden av endring som er forventet. Fire roller identifiseres:

1. *Oppgaver hvor DGE legger til rette for de materielle aspektene ved oppgaven:* Å konstruere en trekant i DGE, med tilhørende midtpunkter og midtnormaler krever ikke en annen type kunnskap enn det samme konstruksjon ville gjort i et papir-og-blyant miljø. Løsningsstrategiene i de to miljøene er uforandret, og tilnærmet den samme. Forskjellen ligger i tegne- og konstruksjonsmulighetene som DGE tilbyr ved hjelp av verktøyene i progammet. DGE endrer altså ikke hvordan eleven oppfatter oppgaven

eller de begrepsmessige elementene som oppgaven består av. Det er nettopp hvordan verktøyene i DGE tilrettelegger for tegne- og konstruksjonsprosessen som defineres som de materielle aspektene ved oppgaven. For eksempel kan den overnevnte oppgaven løses ved å benytte GeoGebra-verktøyene *mangekant, midtpunkt eller sentrum* og *midtnormal*.

2. *Oppgaver hvor DGE legger til rette for den matematiske oppgaven:* DGE benyttes som en visuell forsterker for å undersøke og identifisere geometriske egenskaper, for eksempel ved en dra-test. I slike tilfeller legger DGE til rette for elevenes undersøkelse og analyse. Det er for eksempel antatt lettere å observere at tre linjer alltid skjærer hverandre i ett punkt ved en dra-test i DGE enn i et statisk miljø hvor papir og blyant benyttes. Dra-verktøyet hjelper elevene til å lage hypoteser om relasjonene mellom de tre linjene basert på hva de observerer skjer på skjermen når figuren dras.
3. *Oppgaver som modifiseres som en følge av DGE:* Verktøyene i DGE muliggjør effektive og annerledes løsningsstrategier enn det som er tilfellet ved hjelp av papir og blyant. For eksempel vil løsningsstrategien for å konstruere et kvadrat med en gitt sidelengde i stor grad være avhengig av miljøet der løsningen utføres. Ved bruk av papir (med kvadratiske rutenett) og blyant kan løsningen oppnås ved å tegne fire sider med like lengder langs linjene på papiret og telle ruter. Løsningen er i stor grad kontrollert av elevenes persepsjon. Den samme oppgaven i DGE må løses slik at konstruksjonen både tilfredsstiller kravet om at sidene står normalt på hverandre, og at alle sidene er like lange. Kravene kan ikke tilfredsstilles bare ved å bruke øymål og telling, men krever at elevene benytter en sirkel for å sette av den gitte avstanden til hver av sidene. Løsningen av oppgaven i DGE krever dermed noe mer matematisk kunnskap om karakteristiske egenskaper til kvadratet og sirkelen.
4. *Oppgaver som kun eksisterer i DGE:* Dette er oppgaver hvor oppgavens mening og begrunnelse er forankret i DGE, spesielt med tanke på dra-verktøyet og dets egenskap til å bevare geometriske relasjoner. Elevene kan for eksempel bli bedt om å rekonstruere dynamiske figurer som allerede er gitt i DGE, ved å utforske og identifisere karakteristiske egenskaper. I slike tilfeller vil prosessen med å identifisere egenskapene utgjøre selve essensen i oppgaven, og være viktigere enn det faktiske sluttproduktet. Disse oppgavene deles igjen i to:
   a. *Black box oppgaver* – Elevene gis en figur i DGE som de blir stilt spørsmål om eller som de skal undersøke for å lete etter geometriske egenskaper, sammenhenger, osv. En oppgave kan for eksempel være å identifisere hvilke egenskaper en gitt figur har. Konstruksjonen av figuren er skjult for elevene ved hjelp av makrostrukturer slik at de selv må gjennomføre undersøkelser for å identifisere konstruksjonsprosessen og dermed hvilke egenskaper den har.
   b. *Forutsigelsesoppgaver* – Elevene blir bedt om å forutsi hva som kommer til å skje når de drar i ulike deler av figuren. DGE muliggjør en konfrontasjon mellom det elevene har forutsagt og det de observerer på skjermen (Forkortet og oversatt av meg; Laborde, 2001, s. 293-294).

I de to første tilfellene er oppgaver lagt til rette, heller enn endret, av medieringen til miljøet. Mens DGE i rolle nr. 3 og 4 endrer selve oppgaven som en følge av miljøets mediering (Laborde, 2007). Dette skyldes enten at løsningsstrategiene er ulike i de to miljøene (papir-og-blyant og DGE) fordi DGE tilbyr nye verktøy. Eller som en konsekvens av at løsningsstrategiene ikke er mulig å anvende utenfor papir-og-blyant miljøet og derfor må justeres i møte med DGE. Laborde (2001) fant i sin studie at rollen som ble tilskrevet DGE endret seg fra å være en visuell forsterker eller leverandør av data til å bli en essensiell bestanddel av oppgavens mening. Som en konsekvens påvirket det også elevens forståelse og konstruksjon av matematiske objekter.

3.5 Mathematical Tasks Framework

Stein, Smith, Henningsen, og Silver (2000) understreker at det er den type tenkning som oppgaven krever og elevenes engasjement i denne prosessen som avgjør hva elevene lærer. Dette har de kalt for oppgavens kognitive krav, og ved hjelp av MTF har de differensiert matematiske oppgaver i forhold til de kognitive kravene oppgavene stiller elevene ovenfor. I denne sammenhengen understreker Smith og Stein (1998) viktigheten av at lærere velger ut og evaluerer oppgaver som anvendes i undervisningen basert på hans eller hennes mål for elevenes læring.

For å studere hvilke faktorer som har betydning for hvordan elever oppfatter matematikk og hva de til slutt lærer ble et prosjekt startet av en gruppe forskere (Smith & Stein, 1998). Prosjektet Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning (QUASAR) var en femårig studie (1990-1995) av en matematikkdidaktisk reform i urbane ungdomsskoler i USA. Funn fra QUASAR prosjektet underbygger at det er oppgavens natur som avgjør hva elevene lærer (Smith & Stein, 1998). Det at elevene engasjerer seg i tenkning av høyere orden er ikke garantert bare ved å velge oppgaver som har høyere nivå av kognitive krav. Henningsen og Stein (1997) peker blant annet på lærerens rolle som stillas som en viktig faktor for å sikre at oppgaver med høyere nivå av kognitive krav bevarer denne egenskapen etter hvert som elevene arbeider med dem.

Når en oppgave skal klassifiseres som «god», det vil si at den har potensiale til å engasjere elevene i tenkning av høyere orden, må en først ta hensyn til elevenes alder, karakternivå, tidligere kunnskap og erfaring, og forventinger til arbeidet i klasserommet. Som det andre steget i prosessen med å klassifisere gode oppgaver beskriver Smith og Stein (1998) fire nivåer av kognitive krav i matematikkoppgaver:

1. Memorering
2. Prosedyrer uten forbindelse
3. Prosedyrer med forbindelse
4. Å gjøre matematikk

Oppgaver som kan løses ved hjelp av memorering eller prosedyrer uten forbindelse defineres som *lavere nivå av kognitive krav*, eller *tenking av lavere orden*. Tilsvarende kategoriseres oppgaver som må løses ved hjelp av prosedyrer med forbindelse eller å gjøre matematikk som *høyere nivå av kognitive krav*, eller *tenking av høyere orden*. Denne oversikten er ikke ment som en rangering av hvor gode matematikkoppgaver er, men en klassifisering for å studere den type tenking som kreves av elevene – basert på oppgavene. Ulike typer oppgaver vil nødvendigvis føre til ulike nivåer av tenkning som igjen fører til ulik læring og utvikling hos elevene. Tidligere forskning har vist at tenkning og resonnering av høyere orden er relatert til bruk av undervisningsoppgaver som engasjerer elevene i å gjøre matematikk eller å anvende prosedyrer med forbindelse til mening (Stein & Lane, 1996). Det har også blitt dokumentert at oppgaver som er designet for å fremme tenking av høyere i orden i større grad fører til denne typen tenking hos elevene sammenlignet med oppgaver som er designet for å øve rutinemessige ferdigheter (Sullivan et al., 2013).

Smith og Stein (1998) har laget en karakteristikk av matematikkoppgaver som kjennetegner de fire nivåene av kognitive krav. Nedenfor følger en gjengivelse av noen av hovedpunktene:

1. *Memorering:* Innebærer enten å reprodusere tidligere lærte fakta, regler, formler og definisjoner, eller å memorere denne kunnskapen. Oppgavene kan ikke løses ved hjelp av prosedyrer fordi det ikke eksisterer noen eller tidsrammen er for kort. Oppgavene er ikke tvetydige, og har heller ingen forbindelse til matematiske begreper eller noen dypere mening.
2. *Prosedyrer uten forbindelse:* Preget av algoritmer. De kognitive kravene er begrensede og det er liten tvetydighet. Det er ingen kobling mellom begrepet og meningen bak prosedyren som anvendes. Fokuset er på å produsere riktige svar, i stedet for å utvikle matematisk forståelse. Krever ingen forklaring.
3. *Prosedyrer med forbindelse:* Fokuserer elevenes oppmerksomhet på bruk av prosedyrer med det formål å utvikle dypere nivåer av forståelse for matematiske begreper og ideer. Foreslår strategier å følge som er brede og generelle prosedyrer, og som er nært knyttet opp mot underliggende konseptuelle idéer. Er vanligvis representert på flere måter. Krever en viss grad av kognitiv innsats.
4. *Å gjøre matematikk:* Krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Krever at eleven utforsker og forstår naturen til matematiske konsepter, prosesser og relasjoner. Krever overvåkning og selvregulering av sin egen kognitive prosess. Fordrer at elevene innhenter relevante kunnskaper og erfaringer og anvender disse formålstjenlig. Krever at eleven analyserer oppgaven, og en betydelig kognitiv innsats. Kan medføre noe nervøsitet/uro hos eleven på grunn av den uforutsigbare naturen til løsningsprosessen (Forkortet og oversatt av meg; Smith & Stein, 1998, s. 348).

Karakteristikkene er utformet slik at de kan anvendes som en vurderingsmal for å analysere hvilket nivå av kognitive krav oppgavene stiller elevene ovenfor. Selv om punktene ovenfor i utgangspunktet er utformet med tanke på å analysere oppgaver i et papir-og-blyant miljø mener jeg at momentene også er aktuelle for å undersøke interaktive oppgaver. Jeg har dermed basert et av aspektene i analysene mine på tankegodset fra MTF.

3.6 Relasjonell og instrumentell forståelse

I følge Skemp (2006) eksisterer det to begreper innenfor matematikken hvor det forekommer ulike og kontrasterende forklaringer, som igjen fører til misforståelser og usikkerhet i matematikkundervisningen. Det første begrepet er *forståelse*, og Skemp (2006) skiller mellom relasjonell forståelse og instrumentell forståelse. Relasjonell forståelse defineres som å vite hva en skal gjøre og hvorfor. Instrumentell forståelse beskrives som «regler uten grunn» hvor elevene har memorert noen gitte prosedyrer som de kan anvende i spesifikke situasjoner. Problemet med en slik type kunnskap er at den blir vanskelig å anvende i nye kontekster fordi forståelsen av hvorfor en gjør som en gjør uteblir.

Det andre begrepet beskrives som mer alvorlig og er selve begrepet *matematikk*. Skemp (2006) forklarer at han tidligere antok at alle matematikklærere underviste samme stoff, hvor noen var bedre enn andre. Nå har han imidlertid skiftet synspunkt og hevder at det eksisterer to ulike fag som undervises under samme navn «matematikk» - nemlig instrumentell matematikk og relasjonell matematikk.

Undervisning av instrumentell matematikk som igjen fører til en instrumentell forståelse kjennetegnes av at elevene stadig lærer nye prosedyrer som er gyldige for spesifikke situasjoner og kontekster. Prosedyrene hjelper elevene til å komme fra starten av en oppgave til løsningen, og forteller dem hvordan de skal gå frem underveis. Problemer oppstår imidlertid i møte med nye oppgaver. Elevene har ingen forståelse av hvorfor prosedyrene virker eller for relasjonen mellom matematiske begreper, og er dermed helt avhengige av ytre hjelp og veiledning for å lære en ny prosedyre som er gyldig i den nye konteksten. Å lære relasjonell matematikk derimot dreier seg om å forstå begrunnelsen for hvorfor prosedyrene virker, og relasjonene mellom dem. Dette er naturlig nok mer krevende enn å bare løse oppgavene ved hjelp av prosedyrene, men ved hjelp av kunnskapen elevene har tilegnet seg om matematiske begreper og sammenhenger kan de løse nye, ukjente problemstillinger. Etter hvert som elevene føler tilfredshet knyttet til utviklingen av den relasjonelle forståelsen, vil de kanskje ikke bare forsøke å forstå stoffet som presenteres for dem ut fra et relasjonelt perspektiv, men også selv utforske og undersøke nye områder.

3.7 Læringspotensialet i oppgaver

Anthony og Walshaw (2009) argumenterer for at det er først når oppgavene anvendes i undervisningen at læringspotensialet blir gjort tilgjengelig for elevene. Læring oppstår dermed som et produkt av elevenes arbeid med oppgavene. I denne sammenhengen legger Anthony og Walshaw (2009) noen føringen for hvordan undervisningen burde organiseres. Noen ganger trenger elevene å arbeide alene slik at de kan bearbeide matematikken uten noen andre divergerende tolkninger. Andre ganger trenger elevene å arbeide i grupper slik at de kan lære med og av hverandre. I tillegg vil det også være nødvendig å ha diskusjoner i plenum slik at eleven kan klargjøre sin egen matematiske forståelse samtidig som de eksponeres for en videre tolkning av det matematiske temaet som er i fokus. Ifølge Anthony og Walshaw (2009) burde læreren benytte denne anledningen til å synliggjøre ulike tilnærmingsmåter og løsningsstrategier til oppgaven samt utfordre elevene til å argumentere for sine synspunkt. Sullivan et al. (2013) uttrykker en lignende holdning når de argumenterer for at læringspotensialet i undervisningen er nært knyttet til de grunnleggende aspektene ved oppgavene som anvendes. For å kunne diskutere potensialet for læring er det dermed nødvendig å studere hvilke betingelser som må ligge til rette i oppgavedesignet. Forskning har vist at dette dreier seg om flere forhold.

For det første antyder Sullivan et al. (2013) at oppgaver som antas å ha et stort potensiale for læring er oppgaver som:

- Engasjerer elevene i matematiske oppgaver som oppleves som meningsfulle for elevene, og som fostrer meningsskaping og forståelse.
- Utfordrer hele klassen, og hvor det ikke foreslås en gitt fremgangsmåte for å finne løsningen.
- Krever at elevene gjør overveielser, tar beslutninger og kommuniserer med hverandre.
- Fremmer tenkning og refleksjon hos elevene.
- Anvender kontekster og situasjoner som eleven er kjent med eller som de kan relatere seg til (Oversatt av meg; Sullivan et al., 2013, s. 135).

Det kan være vanskelig å finne oppgaver som oppfyller alle disse kriteriene, og Sullivan et al. (2013) fremhever da at lærerens utfordring i undervisningen blir å finne en balansert og sunn «diett» av oppgaver som til sammen dekker disse aspektene.

For det andre beskriver Anthony og Walshaw (2009) effektive oppgaver, uansett format, som oppgaver hvor elevene gis mulighet til å undersøke matematiske strukturerer, generalisere og eksemplifisere. For å sikre et stort læringspotensial i undervisningen blir det dermed viktig å benytte oppgaver som nettopp oppfordrer til slike aktiviteter. Videre hevder Anthony og Walshaw (2009) at matematisk tenking av høyere orden innebærer å anvende formler, algoritmer og prosedyrer på en slik måte at de er forbundet med begreper, forståelse og matematisk mening. Elevene må altså utvikle en forståelse for utledningene og bevisene som ligger bak matematikken de anvender. Oppgaver hvor elevene utfordres til å reflektere selvstendig over matematiske idéer og sammenhenger er viktige for å utvikle elevens autonomi. På den måten kan de utvikle en trygghet i forhold til sine egne matematiske ferdigheter og ikke være avhengige av at læreren «viser vei». En må imidlertid huske på at selv om oppgavene i seg selv er designet for å legge til rette for læring er det kun elevenes aktive utforskning som sikrer at læringspotensialet utnyttes (Crabbe, 2007). I den forbindelse blir det viktig å designe oppgaver hvor elevenes nysgjerrighet pirres, og hvor de faktisk ikke klarer å la være å undersøke og utforske spørsmålene de møter.

4. Metode

4.1 Bakgrunn for valg av metode

I tråd med sosiokulturell læringsteori betrakter jeg mennesket som et sosialt vesen som må være i kontakt med mennesker og kulturelle verktøy i miljøet for å lære (Säljö, 2001). På den måten er mennesket med og konstruerer den sosiale verden det lever i, noe som er grunnleggende innenfor den kvalitative forskningsstrategien (Ringdal, 2013). Jeg hadde også et ønske om å kunne gå i dybden på datamaterialet mitt og da hevder Bryman (2012) at en kvalitativ tilnærming er et naturlig valg. Ved å gjennomføre en kvalitativ studie får jeg spesiell, målrettet informasjon som egnet seg godt for å få et innblikk i lærernes tanker og erfaringer med oppgavesettet. To lærere ved to forskjellige skoler gir heller ikke grunnlag for kvantitative undersøkelser som gir valide resultater.

Mitt forskningsspørsmål er: *Hvilket læringspotensial er det i oppgavesettet i geometri på 8.trinn tilknyttet DIM-prosjektet?* Når jeg i mitt forskningsspørsmål velger å studere læringspotensialet i oppgavene setter dette noen krav i forhold til metoden. For det første var jeg avhengig av å utvikle et analyseverktøy som kunne hjelpe meg å skille oppgaver med et stort læringspotensial fra oppgaver hvor potensialet ikke var fullt så stort. For det andre ønsket jeg som en følge av mitt sosiokulturelle syn på læring å gi noen indikasjoner om hvilket læringspotensial en kan forvente oppstår i undervisningen, men som ikke nødvendigvis kan fanges opp ved å studere det skriftlige materiellet alene. For å kunne belyse dette var jeg avhengig av å gjennomføre intervjuer med to av lærerne som var involvert i prosjektet. Den ene læreren hadde designet alle oppgavene og brukte dem selv i undervisningen, mens den andre læreren kun anvendte oppgavene. Læreren som anvendte oppgavene kunne belyse oppgavene og bruken av dem i undervisningen på en annen måte enn designeren av oppgavene, og omvendt.

Kapittelet begynner med en kort presentasjon av oppgavesettet, hvordan det er tenkt at oppgavene skal anvendes i undervisningen samt en presentasjon av tilhørende kompetansemål og læringsmål. Så følger en generell beskrivelse av metoden hvor jeg deretter spesifiserer hvordan jeg har konstruert og anvendt analyseverktøyet. Til slutt presenteres etiske utfordringer og kvalitetssikringen av forskningsprosjektet.

4.2 Oppgavesettet

I tilknytning til geometriemnet er det utviklet 13 oppgaveark med til sammen 52 oppgaver. Oppgavearkene er delt inn i temaene vinkler (6 oppgaver), polygon (27 oppgaver) og symmetri (19 oppgaver). De fleste oppgavearkene starter med en kort tekst som enten introduserer elevene for emnet og sentrale begreper eller skal vekke engasjement og motivasjon hos elevene før de går i gang med oppgavene. Alle oppgavene skal løses ved hjelp av det dynamiske matematikkprogrammet GeoGebra på iPad. Dette kan føre til at noen av funksjonene i GeoGebra ser litt annerledes ut enn hvordan de fremstår når programmet anvendes på datamaskin, men funksjonene er likevel de samme. I forkant av geometriemnet har elevene vært igjennom et to ukers GeoGebra kurs hvor fokuset var på å bli kjent med programmet og verktøyene det tilbyr. Oppgavesettet ble anvendt i matematikkundervisningen ved Samfundets skole og Ve skole fra og med uke 3 til og med uke 7 våren 2016.

Læreren som designet oppgavene anbefaler å organisere undervisningen etter følgende modell:

1. Først en 10 minutters introduksjonsbolk hvor læreren forsøker å motivere og engasjere elevene til å ta fatt på oppgavene som følger.
2. Deretter starter den eksperimenterende og utforskende delen hvor elevene arbeider med oppgavene i grupper på to eller tre hvor alle har hver sin iPad. Målet er at oppgavene skal ha en lav terskel, men samtidig gi utfordringer nok for de sterkeste elevene. Denne delen anbefales å vare i ca. 30 minutter, alt etter tiden man har til rådighet.
3. Til slutt gjennomføres en felles oppsummering hvor elevene får mulighet til å presentere hva de har gjort og belyse spørsmål som «Hva har vi lært i dag? Hvordan kan vi anvende dette for å løse matematiske problemer og utfordringer?» Samtidig kan læreren også dra paralleller til både tidligere og senere temaer i matematikken. Denne fasen kan også betraktes som en konsolideringsfase, og anbefales å vare i minst 30 minutter.

Ut fra skissen over kan en dermed konkludere at det ideelle er 60 til 90 minutters økter. Designeren av oppgavene presiserer at 45 minutter vil være for liten tid til å gjennomføre opplegget på en tilfredsstillende måte. I tabell 4.1 presenteres aktuelle kompetansemål hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag (2013, s. 8-9) i venstre kolonne, og tilhørende læringsmål for oppgavesettet utformet av læreren i høyre kolonne.

Tabell 4.1: Kompetansemål og læringsmål innenfor geometri

Kompetansemål	**Læringsmål**
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne …	Her skal du lære å …
Måling • *«gjere overslag over og berekne lengd, omkrins, vinkel, areal, overflate, volum, tid, fart og massetettleik, å bruke og endre målestokk»* **Geometri** • *«undersøkje og beskrive eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og bruke eigenskapane i samband med konstruksjonar og berekningar* • *utføre, beskrive og grunngje geometriske konstruksjonar med passar og linjal og dynamisk geometriprogram*	**Geometriske byggesteiner** • beskrive, tegne og kjenne igjen punkter, linjer, stråler og linjestykker • forklare hva som menes med en vinkel • måle og tegne vinkler og anslå størrelsen til vinkler • kjenne igjen og bruke egenskaper til toppvinkler, nabovinkler, komplement vinkler, samsvarende vinkler, rette vinkler, spisse vinkler og stumpe vinkler **Konstruksjon** • konstruere vinkler, normaler, parallelle linjer og geometriske figurer • kjenne igjen og sette navn på geometriske figurer • tegne og konstruere trekanter, firkanter og geometriske figurer som er satt sammen av trekanter og firkanter • beregne vinkler i trekanter og firkanter **Symmetri** • kjenne igjen og beskrive forskjellige former for symmetri • tegne og konstruere speilbilder, rotasjon og parallellforskyvninger av enkle geometriske figurer

• bruke koordinatar til å avbilde figurar og utforske eigenskapar ved geometriske former, med og utan digitale verktøy»	**Koordinatsystemet** • avsette punkter og linjer i koordinatsystemet • bruke koordinater til å parallellforskyve geometriske figurer parallelt med koordinataksene • bruke koordinater til å rotere geometriske figurer om origo

4.3 Beskrivelse av metode

For å kunne besvare forskningsspørsmålet mitt trengte jeg datamateriale som kunne belyse læringspotensialet i oppgavene, fra flere perspektiver. Metoden har dermed vært todelt.

Jeg intervjuet to av lærerne som var involvert i DIM-prosjektet. Læreren som designet oppgavene ble intervjuet både i forkant og etterkant av geometriemnet, mens læreren som anvendte oppgavene kun ble intervjuet i etterkant av emnet, av den enkle grunn at han ikke hadde kjennskap til oppgavene før emnet startet. Læreren som designet oppgavene har arbeidet 35 år i grunnskolen, og har mye erfaring med bruk av Cabri og etter hvert også GeoGebra i matematikkundervisningen. Læreren som anvendte oppgavene har undervist i grunnskolen i10 år, og har i hovedsak anvendt GeoGebra for å fremstille funksjoner i undervisningen i stedet for å tegne dem for hånd. Han beskriver selv at han kjente til programmet fra tidligere, men ikke kunne bruke det slik de har anvendt det i DIM-prosjektet.

Hensikten med intervjuene var å få innsikt i lærernes personlige tanker og erfaringer med oppgavene, og ifølge Postholm og Jacobsen (2011) er det individuelle intervjuet spesielt egnet til nettopp dette. Intervjuene ble organisert som semistrukturerte intervju som kan beskrives som en uformell samtale mellom intervjuer og informant hvor det er intervjuguiden som danner utgangspunktet for hva som diskuteres i løpet av intervjuet (Bryman, 2012). Intervjuguidene bestod av ferdig formulerte, åpne spørsmål som belyste lærerens erfaringer med bruk av oppgavene som for eksempel hvilke oppgaver stimulerte til utforskning, hvilke oppgaver fungerte ikke etter intensjonene og hvilke revideringer ble gjort underveis. Den fullstendige oversikten over spørsmålene som intervjuguidene inneholdt ligger vedlagt bakerst i oppgaven (vedlegg 1, 2 og 3).

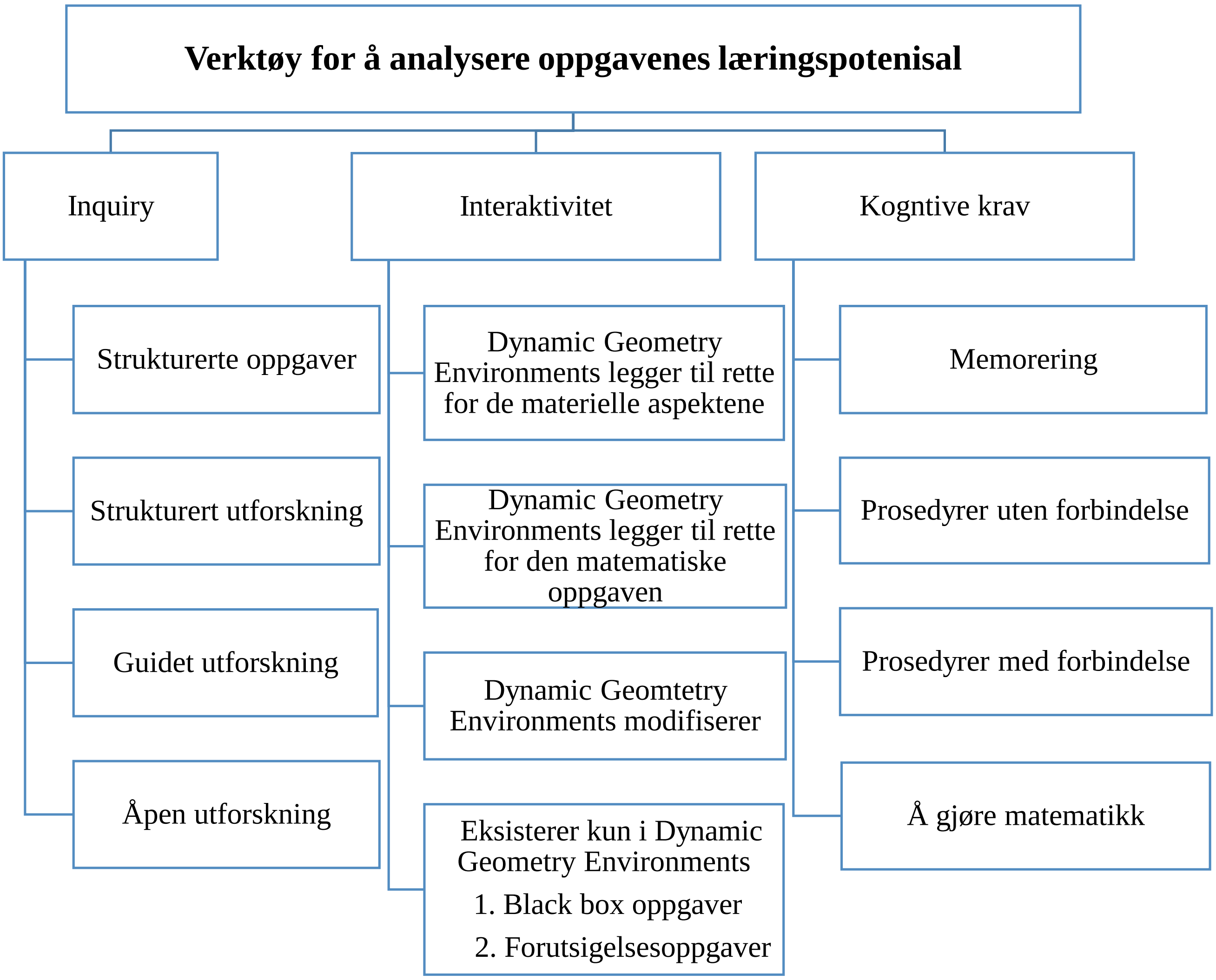
I forkant av intervjuene fikk informantene tilsendt intervjuguiden på mail slik at de allerede da kunne lese gjennom spørsmålene og starte tankeprosessen. Jeg håpet at dette ville føre til mer reflekterte svar fra informantene, noe jeg absolutt fikk bekreftet under intervjuene. Under gjennomføringen av intervjuene brukte jeg intervjuguiden som mal, men endret rekkefølgen på spørsmålene etter hvert som informantene tok opp forskjellige tema og det ble naturlig å belyse dem. Jeg oppfordret også informantene til selv å komme med innspill og tanker som de opplevde som essensielle for å belyse læringspotensialet i oppgavesettet. Denne fleksibiliteten er en av fordelene Bryman (2012) fremhever ved gjennomføringen av semistrukturerte intervju. Alle intervjuene ble tatt opp med lydopptaker og så transkribert i løpet av kort tid etter gjennomføringen av intervjuene for å sikre en mest mulig korrekt gjengivelse av informantenes tanker og synspunkt.

Etter at jeg hadde gjennomført det første intervjuet med oppgavedesigneren begynte jeg prosessen med å utvikle et analyseverktøy basert på tidligere forskningslitteratur. Hvordan jeg gikk frem for å konstruere dette verktøyet, og hvordan det har blitt anvendt i oppgaven presenteres i delkapitlene nedenfor. Oppgavesettet ble først analysert ved hjelp av analyseverktøyet for å kunne si noe om oppgavenes læringspotensial, uavhengig av elever og lærere. I forkant av analysene gjennomførte jeg en grovanalyse av alle oppgavene for å skaffe meg en oversikt og et helhetsinntrykk av oppgavesettet. Denne oversikten brukte jeg for å bestemme hvilke oppgaver jeg skulle studere inngående, og for å sikre at alle oppgavetyper var representert. Deretter ble intervjuene studert og kodet med utgangspunkt i fire kategorier: *oppgavedesign*, *inquiry*, *interaktivitet* og *kognitive krav*. Målsettingen var at intervjuene skulle gi meg innblikk i områder hvor læringspotensialet i oppgavene ikke fanges opp av analyseverktøyet alene. I sum har disse kildene belyst forskningsspørsmålet mitt fra ulike ståsted.

4.3.1 Utforming av analyseverktøyet

Som et ledd i arbeidet med denne oppgaven har jeg konstruert et analyseverktøy for å kunne analysere læringspotensialet i oppgavene. Jeg har ikke klart å finne noe lignende verktøy i forskningslitteraturen, og har derfor basert meg på flere ulike verktøy som er utviklet for å studere læring og undervisning. I prosessen med å konstruere analyseverktøyet har jeg også hentet mye inspirasjon og tips fra studien til Brändstrøm (2005) hvor hun utvikler et analyseverktøy for å studere differensieringen av matematikkoppgaver i svenske lærebøker. Hvordan rammeverket er konstruert og anvendt presenteres nedenfor.

Prosjektet som denne oppgaven er en del av har som målsetting å utvikle interaktive undervisningsopplegg som stimulerer elevenes kreativitet, undersøkelse, utforskning og problemløsning. Det fremheves blant annet at *«Digitale hjelpemidler i matematikkundervisning antas å ha potensiale til å gi bedre forståelse og dyp innsikt i faget og dets anvendelser» (Digital interaktiv matematikkundervisning 2015 - 2018, 2015, s. 2).* Videre regnes inquiry som en av grunnpilarene i prosjektet. Med utgangspunkt i det overnevnte har jeg utviklet tre aspekter som jeg mener både kan belyse problemstillingen min og være forenelige med prosjektets overordnede ideologi: *inquiry*, *interaktivitet* og *kognitive krav* (se figur 4.1). Aspektene er valgt ut fra kriteriet om at de på best mulig måte skal belyse læringspotensialet i oppgavene.



Figur 4.1: Det anvendte analyseverktøyet

Alle de tre aspektene er hierarkisk inndelt hvor de øverste kategoriene betegner oppgaver som er lite krevende for elevene. Dette er oppgaver som elevene enkelt kan løse enten fordi oppgaven forklarer en eksplisitt fremgangsmåte, eller fordi det er rutineoppgaver som kun krever tenking av lavere orden. Tilsvarende beskriver de nederste kategoriene i analyseverktøyet (figur 4.1) aktiviteter som er utforskende og krevende for elevene hvor det blant annet stilles krav til elevenes kreativitet, autonomi og tenking av høyere orden. Selv om det i utgangspunktet ikke eksisterer noen forbindelse mellom de ulike aspektene i analyseverktlyet har jeg i mine analyser sett at dette ofte er tilfellet. Kategoriene innenfor hvert aspekt som ligger omtrent på linje i analyseverktøyet er ofte forbundet med hverandre. I avsnittene under følger en detaljert beskrivelse av hver kategori, med spesiell vekt på potensialet for læring.

Inquiry

Inquiry representerer en eksperimenterende og utforskende undervisning som har et stort potensiale for læring. Både fordi det muliggjør oppgaver fra elevenes kontekst, og fordi elevene selv kan være med å bestemme hva de ønsker å utforske og hvordan de skal gå frem for å løse problemet (Fuglestad, 2010; Skovsmose, 2001). Det er imidlertid et kjent faktum at lærere som følge av en hektisk hverdag ofte velger mer strukturerte oppgaveformer for å sikre en forutsigbar undervisningssituasjon (Alrø & Skovsmose, 2002; Grønmo & Onstad, 2009).

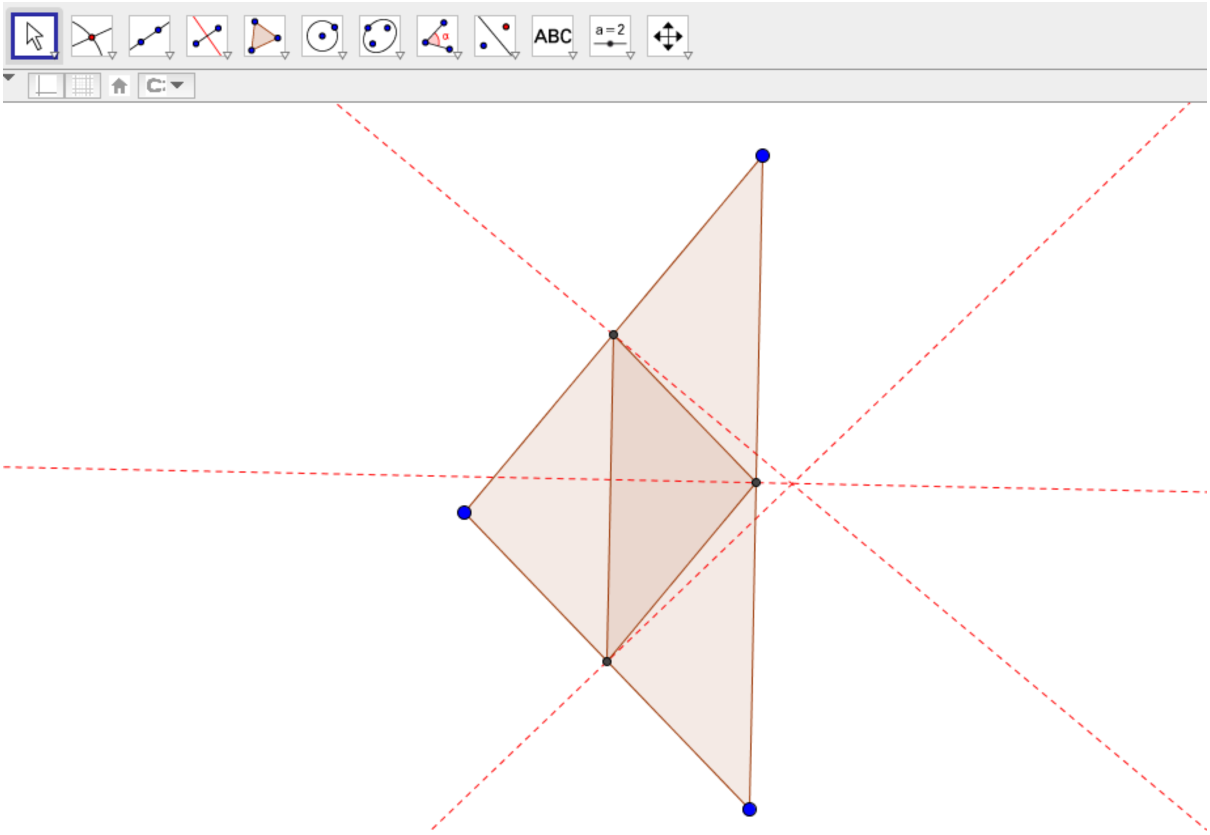
Aspektet beskriver i hvilken grad oppgavene legger til rette for inquiry ved å klassifisere fire ulike oppgavetyper:

- Strukturerte oppgaver
- Strukturert utforskning
- Guidet utforskning
- Åpen utforskning

Strukturerte oppgaver baserer seg på tankegodset fra oppgavediskursen (Alrø & Skovsmose, 2002; Mellin-Olsen, 1996; Skovsmose, 2001, 2003), og henviser til oppgaver som øver rutinemessige ferdigheter. Elevene presenteres først for en definert fremgangsmåte og løsningsstrategi av læreren eller oppgavearket, og skal deretter løse tilsvarende oppgaver som alle følger et bestemt mønster. *Strukturert utforskning* omfatter oppgaver som tilsynelatende kan virke utforskende, men som ved nærmere ettersyn er svært strukturerte og styrer elevens utforskning i stor grad (Skaar & Syvertsen, 2007). Det kan også være at svarene på oppgavene enkelt kan besvares ut fra konstruksjonen som er gjort. Dette kan for eksempel være oppgaver hvor elevene blir bedt om å utforske et emne, og som en støtte for elevenes arbeid introduseres samtidig en tabell som elevene skal fylle ut (Lewis & Hurd, 2011). Selv om hensikten med tabellen er god, vil den i mange tilfeller styre elevenes utforskning i så stor grad at de ender opp med å kun fylle ut tabellen uten noen videre refleksjoner over hva det er de finner ut. Kategorien *guidet utforskning* omfatter oppgaver som gir noen generelle indikasjoner om hvordan elevene kan gå frem for å starte utforskningen av oppgaven. Spørsmålene som undersøkes er generelle og vide slik at det kreves en egeninnsats fra elevene for å løse oppgavene (Erfjord, 2011). Tipset om hvor elevene kan begynne utforskningen er imidlertid ment for å motivere elevene til å ta fatt på oppgaven. Samtidig som det skal skape nysgjerrighet rundt hva som for eksempel vil skje dersom elevene endrer størrelsen på figuren eller drar i noen av punktene. Det inkluderer også oppgaver hvor generelle løsningsstrategier foreslås. I følge Back et al. (2012) vil oppgaven «Undersøk grafer» motivere elevene til å ta fatt på oppgaven og undersøke noe de er interessert i sammenlignet med oppgaven «Undersøk noe matematisk – hvis du vil» som jeg kategoriserer som *åpen utforskning.* Dette er altså svært åpne oppgaver uten noen form for presisering eller motivering. Oppgaven angir ingen hint om hvor elevene kan begynne, noe som kan føre til tafatthet hos enkelte elever dersom oppgavens omfang virker for overveldende for dem. I slike tilfeller har elevene gitt opp allerede før de har begynt på oppgaven.

I begynnelsen hadde jeg litt problemer med å skille kategoriene strukturert utforskning og guidet utforskning, og valgte derfor å ha et klart skille ved at alle oppgavene som inneholdt en tydelig oppskrift eller fremgangsmåte for hvordan det matematiske objektet skulle konstrueres ble klassifisert som strukturert utforskning. Ved en nærmere gjennomgang av forskningslitteraturen oppdaget jeg imidlertid at det er vanlig å la elevene konstruere det matematiske objektet som skal undersøkes i DGE, ofte etter detaljerte beskrivelser, som en del av oppgaven (Leung, 2011; Marrades & Gutiérrez, 2000). På den måten introduseres elevene både for programmet og verktøyene som er tilgjengelige. På bakgrunn av denne informasjonen oppdaget jeg at det ikke ga et riktig bilde av oppgavesettet å klassifisere oppgavene slik jeg hadde gjort. Dermed foretok jeg en ny analyse av oppgavesettet med utgangspunkt i den nye forståelsen min. Alle oppgaver som inneholdt en detaljert beskrivelse av konstruksjonsprosessen i DGE ble nå klassifisert som guidet utforskning, så lenge den resterende delen av oppgaven stimulerte elevenes utforskning og undersøkelse. Figur 4.2 viser et eksempel på en oppgave som først ble kategorisert som strukturert utforskning, men som etter litteraturgjennomgangen regnes som guidet utforskning.

Tegn en tilfeldig stor trekant i GeoGebra. Finn midtpunktet på hver side og tegn en ny trekant med disse tre hjørnene. Fortsett med å finne midtpunktet på den nye trekanten og tegn enda en ny trekant med disse tre hjørnene. Fortsett slik. Sett på navn på punkter, vinkler og linjestykker og undersøk sammenhenger i figurene. Hva kan dere finne ut?



Figur 4.2: Oppgave A fra oppgavearket Polygon 02 – 4

Interaktivitet
Kategorien interaktivitet er basert på Laborde (2001) sin klassifisering av ulike typer oppgaver i henhold til rollen som designeren av oppgavene har tilskrevet DGE. De fire følgende kategoriene er hentet fra hennes arbeid (jf. kapittel 3.4 for en detaljert beskrivelse av hver kategori):

- Oppgaver hvor DGE legger til rette for de materielle aspektene ved oppgaven
- Oppgaver hvor DGE legger til rette for den matematiske oppgaven
- Oppgaver som modifiseres som en følge av DGE
- Oppgaver som kun eksisterer i DGE
    - Black box oppgaver
    - Forutsigelsesoppgaver

Jeg vil argumentere for at læringspotensialet er størst dersom det benyttes oppgaver som faller innenfor de to nederste kategoriene, men DGE i seg selv kan også tilby et stort læringspotensial i matematikkundervisningen. Verktøyene DGE tilbyr kan legge til rette for elevenes utforskning samt tegnings- og konstruksjonsprosessen. *Oppgaver hvor DGE legger til rette for de materielle aspektene ved oppgaven* omfatter oppgaver hvor tegne- og konstruksjonsmulighetene endres som en følge av verktøyene i DGE. Hvordan elevene forstår selve oppgaveteksten og begrepene som omtales er uforandret. Løsningsstrategien vil også være tilnærmet den samme i DGE som i et papir-og-blyant miljø. *Oppgaver hvor DGE legger til rette for den matematiske oppgaven* betegner oppgaver hvor DGE hovedsakelig benyttes som en visuell forsterker for å undersøke og identifisere geometriske egenskaper. Interaktive muligheter utnyttes ved for eksempel å benytte dra-verktøyet i DGE som legger til rette for elevenes undersøkelse, analyse og fremstilling av hypoteser. *Oppgaver som modifiseres som en følge av DGE* innebærer oppgaver som kan løses ved hjelp av papir og blyant, men hvor DGE muliggjør nye, effektive løsningsstrategier som en følge av verktøyene programmet tilbyr. Løsningsstrategiene i DGE vil i noen tilfeller kreve noe mer matematisk kunnskap av elevene enn hva løsningen av samme problem ville gjort i et papir-og-blyant miljø. Til slutt, *oppgaver som kun eksisterer i DGE* beskriver oppgaver hvor oppgavens mening og begrunnelse er forankret i DGE. Disse kan kun løses ved hjelp av DGE, og en skiller videre mellom black box oppgaver og forutsigelsesoppgaver. *Black box oppgaver* presenterer elevene for en figur eller et objekt i DGE, hvor elevene skal undersøke sammenhenger, egenskaper eller hvordan objektet er konstruert. *Forutsigelsesoppgaver* utfordrer elevene til å forutsi hva som kommer til å skje når de drar i et punkt på figuren. På den måten oppstår det en konfrontasjon mellom det elevene har forutsagt, og hva de faktisk observerer skjer på skjermen.

Kognitive krav

For å studere hvilken type tenkning oppgavene stiller elevene ovenfor har jeg basert meg på arbeidet til Smith og Stein (1998), og kategoriene nedenfor er hentet fra deres forskning:

- Memorering
- Prosedyrer uten forbindelse
- Prosedyrer med forbindelse
- Å gjøre matematikk

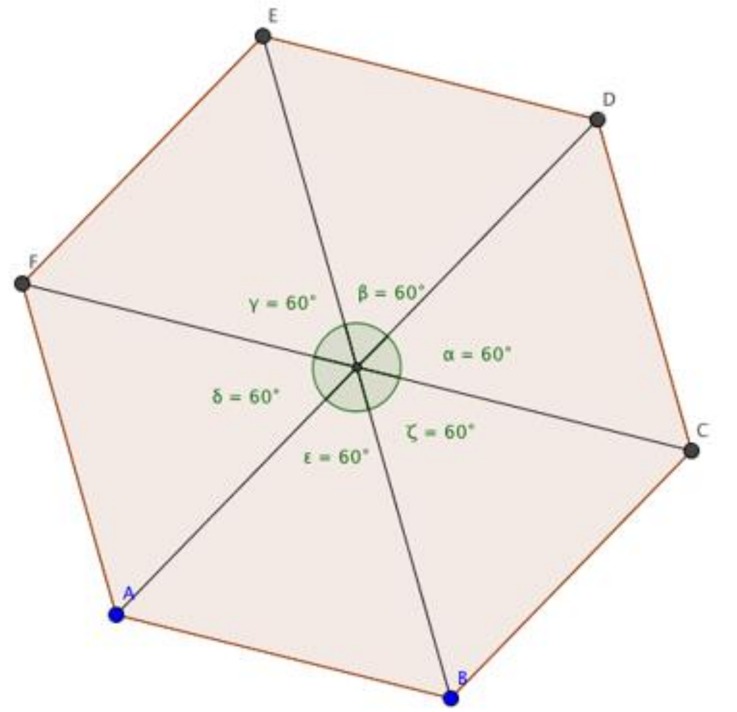
Kategoriene er hierarkisk ordnet og inklusive. De to øverste kategoriene, memorering og prosedyrer uten forbindelse, betegner oppgaver som har lavere nivå av kognitive krav. Disse kategoriene kan betraktes som det Skemp (2006) omtaler som instrumentell matematikkforståelse hvor elevene følger «regler uten grunn», uten noen videre forståelse for hvorfor prosedyrene virker. De resterende kategoriene, prosedyrer med forbindelse og å gjøre matematikk, omfatter oppgaver som involverer elevene i tenkning av høyere orden. Denne typen kunnskap kan sammenlignes med Skemp (2006) sin beskrivelse av relasjonell matematikkforståelse. Relasjonell forståelse innebærer både at elevene vet hvordan de skal gå frem for å løse oppgaven, og hvorfor prosedyren som anvendes gir riktig svar. En elev kan for eksempel ha evne og forståelse til å utlede formelen for areal som tilsier at han behersker prosedyrer med forbindelse. Men dersom oppgaveteksten ber eleven om å beregne arealet av et bord som er 70 cm. bredt og 100 cm. langt kan eleven løse oppgaven ved en enkel kalkulasjon. Dermed vil eleven i løsningen av oppgaven kun anvende formelen, altså memorering, selv om han egentlig har kapasitet til tenking av høyere orden. Oppgaveformuleringen blir dermed avgjørende for hvilken type tenking oppgavene stimulerer til. Tidligere forskning har dokumentert at det største læringspotensialet nettopp ligger i oppgaver som innebærer høyere nivå av kognitive krav, og som blant annet utfordrer elevenes evne til selvstendig, kritisk refleksjon (Anthony & Walshaw, 2009; Stein & Lane, 1996; Sullivan et al., 2013).

Memorering kreves når elevene kun trenger å reprodusere eller memorere tidligere lærte regler, formler eller definisjoner for å løse oppgaven. Oppgaven kan ikke løses ved hjelp av prosedyrer fordi tidsrammen er for kort eller det ikke eksisterer noen. *Prosedyrer uten forbindelser* er preget av algoritmer hvor fokuset er på å produsere riktig svar, mens elevenes utvikling av matematisk forståelse kommer i bakgrunnen. *Prosedyrer med forbindelse* fokuserer elevenes oppmerksomhet på å anvende prosedyrer med det formål å utvikle en dypere forståelse av grunnleggende matematiske begreper og idéer. *Å gjøre matematikk* er det høyeste kognitive kravet. For å løse slike oppgaver kreves kompleks og ikke-algoritmisk tenking hvor elevene analyserer oppgaven, og utforsker matematiske begreper, prosesser og relasjoner (jf. kapittel 3.5 for en detaljert beskrivelse av hver kategori).

4.3.2 Anvendelse av analyseverktøyet

Nedenfor følger to eksempler fra oppgavesettet for å illustrere hvordan rammeverket ble anvendt for å analysere oppgavene. Eksemplene viser både hvordan aspektene kan betraktes hver for seg, og hvordan de samlet sett belyser læringspotensialet i oppgavene. Etter hvert som jeg analyserte oppgavene oppdaget jeg at det også ville være nyttig å kommentere noe i forhold til hvordan oppgavene er designet, og hvilke forkunnskaper som kreves av elevene. Dette bemerkes under hvert eksempel, og mot slutten av kapittelet gis noen generelle betraktninger om prinsipper for oppgavedesign.

Eksempel 1



I sekskanten over, er alle sentralvinklene 60^0. Hvis du legger sammen alle sentralvinklene: alfa + beta + gamma + delta + epsilon = 360^0.

Kan dere gjette hvor mange grader vinkelen er mellom to sidekanter på denne figuren (for eksempel vinkel EDC)? Hvis det er vanskelig å gjette, kan dere lage figuren i GeoGebra og be programmet måle vinkelen.

Figur 4.3: Oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 3

Min kommentar:

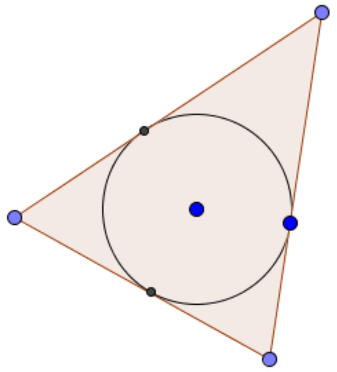
- Oppgaven klassifiseres som **strukturerte oppgaver**. Det eneste en trenger å gjøre for å løse oppgaven er å gjette vinkelen mellom to sidekanter på figuren.
- **DGE legger til rette for de materielle aspektene ved oppgaven** ved at den kun benyttes for å illustrere sekskanten som elevene blir stilt et spørsmål om. Ifølge oppgaveteksten skal elevene gjette eller måle vinkelen for å løse oppgaven.
- Det kognitive kravet er **memorering**. Oppgaven innebærer ingen krav til prosedyrer, men en kvalifisert gjetning basert på tidligere lærte kunnskaper.

Læringspotensialet i denne oppgaven er lavt. Spørsmålet elevene stilles ovenfor kan enkelt besvares ved å gjengi et tall. Elevene utfordres verken til tenkning, refleksjon eller kreativitet som betraktes som viktige kjennetegn ved oppgaver som har et høyt læringspotensial (Sullivan et al., 2013).

Det ligger også noen forutsetninger i oppgavedesignet som bør kommenteres. Tegningen som illustrerer oppgaven gir et inntrykk av at sekskanten består av seks likesidede trekanter og dermed kan betegnes som en regulær sekskant, uten at dette kommenteres eller presiseres i oppgaveteksten. En kan dermed stille spørsmål ved om dette er noe designeren bevisst har utelatt for at elevene selv skal oppdage denne sammenhengen, eller om det er en forglemmelse fra designerens side. Dersom oppgaveteksten hadde presisert at sekskanten består av likesidede trekanter ville elevene forhåpentligvis blitt oppmerksomme på begrepet *likesidede trekanter* og derav karakteristiske egenskaper ved figurene. På den måten kan elevene resonnere, på bakgrunn av egenskapen om at «alle vinklene er like store», og følgelig må vinkel EDC være 120° siden den består av to vinkler som hver er på 60°. Da vil også elevenes tenking kunne klassifiseres som prosedyrer med forbindelse og dermed betraktes som tenkning av høyere orden. Noen elever vil selvfølgelig klare å komme frem til denne slutningen uten en slik form for presisering i oppgaveteksten, men det kan være en viktig påminner for de middelssterke og svake elevene. På den måten blir heller ikke spørsmålet elevene skal svare på isolert fra de geometriske egenskapene til figuren, noe som forhåpentligvis vil føre til at de oppdager en større sammenheng mellom regulære mangekanter og vinklene de består av.

Eksempel 2

Lag en vilkårlig trekant. Denne gangen skal dere lage en sirkel som er innenfor trekanten og som kun berører de tre sidene i ett punkt. Vi sier at sidene i trekanten er tangenter til sirkelen. Pass på at punktene som berører trekanten og ligger på sirkelen, henger sammen. Det sjekker dere ved å endre på figuren. Hvis det er korrekt, vil også den innvendige sirkelen følge med.

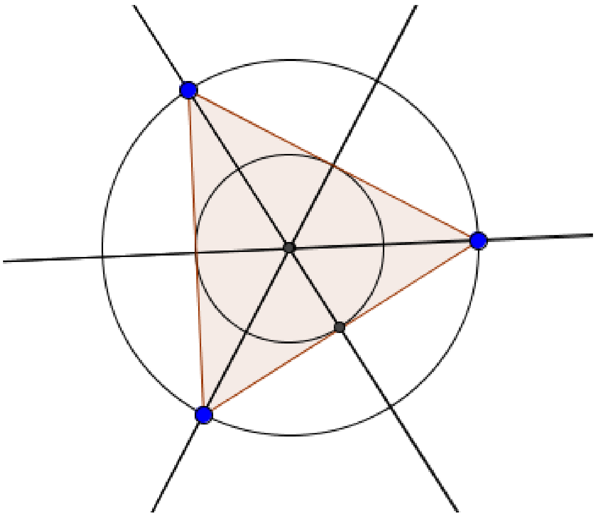


Lag også en sirkel som går gjennom de tre hjørnene på trekanten slik du gjorde i oppgave C. Hvis dere drar i figuren, kan du kanskje klare å få sentrum på disse to sirklene til å ligge i samme punkt. Hva slags trekant får dere da?

Figur 4.4: Oppgave E fra oppgavearket Polygon 02 – 4

Min kommentar:

- Oppgaven starter med å konstruere en vilkårlig trekant. Deretter skal elevene konstruere den innskrevne- og omskrevne sirkelen til trekanten, uten at disse begrepene brukes eksplisitt. Til slutt tipser oppgaven elevene om å utforske dra-verktøyet i GeoGebra, og hvilken type trekant som oppstår når sentrum i de to sirklene ligger i samme punkt. Oppgaven utfordrer elevene til å utforske og forklare fenomenet som undersøkes, og den klassifiseres på bakgrunn av dette som **guidet utforskning**. Trekanten som oppstår når sentrum i de to sirklene ligger i samme punkt er en likesidet trekant, også kalt en regulær trekant (se figur 4.5).



Figur 4.5: Sentrum i den omskrevne- og innskrevne sirkelen til trekanten ligger i samme punkt

- Løsningsstrategien som anvendes for å konstruere den omskrevne- og innskrevne sirkelen til trekanten er lik som i et papir-og-blyant miljø. I neste steg skal imidlertid dra-verktøyet i DGE benyttes for å undersøke sammenhengen mellom de to sirklene og her fungerer DGE som en visuell forsterker i elevenes undersøkelser. Dermed betraktes **DGE som tilrettelegger av den matematiske oppgaven**.
- Elevenes oppmerksomhets rettes mot den omskrevne- og innskrevne sirkelen til trekanten og relasjonen mellom dem, hvor formålet er å utvide elevenes forståelse og kunnskap om begrepene. For å løse oppgaven forutsetter det at elevene vet hvordan disse to sirklene skal konstrueres, og har kunnskap om begrepene midtnormal og halveringslinje. Siden oppgaven i stor grad avhenger av elevens evne til å ta i bruk tidligere lærte kunnskaper, og hvor disse må benyttes på en selvstendig og utforskende måte er oppgavens kognitive krav **å gjøre matematikk**.

Læringspotensialet som oppgaven tilbyr elevene er stort. Elevene gis mulighet til å undersøke underliggende matematiske strukturer noe som er helt i tråd med beskrivelsen til Anthony og Walshaw (2009) av effektive oppgaver. Elevene utfordres videre til å gjøre rede for hvilken trekant som oppstår når sentrum i den innskrevne- og omskrevne sirkelen til en trekant ligger i samme punkt. Samtidig som elevene forsøker å forklare matematiske relasjoner og egenskaper vil de også utvikle en bedre forståelse av fenomenene de studerer (Säljö, 2001, 2006; Vygotsky, 1978).

Noen kommentarer til designforutsetningene i oppgaven: Selv om oppgaven ved første blikk kan virke ganske rett frem ligger det noen forutsetninger til elevenes matematiske kunnskaper dersom de skal være i stand til å løse denne oppgaven. For det første dersom elevene skal klare å konstruere den omskrevne- og den innskrevne sirkelen til trekanten må de vite hvordan de skal gå frem for å konstruere disse. Det forutsetter at elevene har kjennskap til midtnormaler og halveringslinjer, og at de tre midtnormalene og halveringslinjene møtes i hvert sitt skjæringspunkt som henholdsvis er sentrum i den omskrevne- og innskrevne sirkelen. Det finnes nemlig ikke noen snarvei i GeoGebra eller et verktøy som elevene kan anvende som konstruerer disse figurene for elevene. I de foregående oppgavene har elevene blitt presentert for verktøyene *midtpunkt* og *midtnormal*, og de har konstruert den omskrevne sirkelen med sentrum i skjæringspunktet mellom de tre midtnormalene. Det er dermed rimelig å anta at dette nå er kjent kunnskap for elevene. De tidligere oppgavene har derimot ikke introdusert elevene for halveringslinjene til vinklene i en trekant, og at disse skjærer hverandre i sentrum av den innskrevne sirkelen til trekanten. Det er dermed sannsynlig å anta at elevene vil trenge veiledning eller hjelp fra en signifikant andre (jf. kapittel 2.1) for å løse denne delen av oppgaven. For det andre står det i begynnelsen av oppgaven at elevene skal konstruere en vilkårlig trekant. Likevel kan tegningen av trekanten som illustrer oppgaven, se ut som en likebeint trekant. Dersom det virkelig er meningen at trekanten skal være vilkårlig er det uheldig å bruke en slik illustrasjon. Videre stiller jeg spørsmålstegn ved hvorfor de matematiske begrepene omskreven sirkel og innskreven sirkel ikke introduseres for elevene når det er disse fenomenene de undersøker.

Prinsipper for oppgavedesign
Etter å ha analysert eksemplene ovenfor så jeg flere likhetstrekk mellom hvordan oppgavene var designet. Det ble dermed naturlig å trekke frem noen av disse prinsippene som oppgavene er basert på, og en redegjørelse av de viktigste følger nedenfor.

For det første er illustrasjonen som illustrer oppgavene ikke helt i samsvar med oppgaveteksten, og kan dermed skape uklarhet og usikkerhet hos elevene. Den første oppgaven viser et bilde av en sekskant som tilsynelatende ser ut som en regulær sekskant uten at denne informasjonen presiseres. Tilsvarende ser trekanten som illustrer den andre oppgaven ut som en likebeint trekant, mens oppgaveteksten presiserer at elevene skal konstruere en vilkårlig trekant. Dersom bilder benyttes for å illustrere oppgaven bør de være ensbetydende med oppgaveteksten.

For det andre gir oppgavene utilstrekkelig med informasjon til at problemet kan løses. Dette kan skyldes to ting. På den ene siden kan det være et tilsiktet trekk av oppgavedesigneren at han ønsker å utfordre elevene til selv å presisere betingelsene som gjør deres løsning av oppgaven gyldig. I så tilfelle kan oppgavene beskrives som åpne hvor det kreves at elevene selv identifiserer oppgavens premisser. På den andre siden kan det være en forglemmelse fra designeren ved at han rett og slett ikke har vært nøyaktig nok i beskrivelsene av problemsituasjonen.

Et annet moment som det er verdt å bemerke er at oppgavene i stor grad forutsetter matematiske forkunnskaper hos elevene. Dersom svaret på den første oppgaven skal bli noe annet enn en tilfeldig gjetning forutsettes det at elevene gjenkjenner sekskanten som regulær, legger dette som en forutsetning for oppgaven, og så resonnerer seg fram til løsningen med utgangspunkt i denne egenskapen. Tilsvarende vil løsningen av den andre oppgaven kreve at elevene henter frem kunnskap om begrepene median og halveringslinje, og tilhørende karakteristiske egenskaper.

Flere prinsipper for oppgavedesign belyses når datamaterialet fra intervjuene presenteres i kapittel 5.2.1.

Kommentar til analyseverktøyet
Analyseverktøyet belyser aspekter ved oppgavene knyttet til inquiry, interaktivitet og kognitive krav. Til sammen utgjør disse aspektene et helhetsinntrykk av den enkelte oppgaven samtidig som rammeverket også gir et bilde av oppgavesettet som en helhet. Likevel er kanskje det viktigste argumentet for å benytte analyseverktøyet at det belyser potensialet for læring når de ulike aspektene ved oppgavene diskuteres i forhold til hverandre. Da tenker jeg både på læringspotensialet i den enkelte oppgaven, og det samlede læringspotensialet i oppgavesettet.

4.5 Forskningsetiske betraktninger

Det er viktig når man gjennomfører et forskningsprosjekt å ta høyde for de etiske utfordringene som kan oppstå. Siden metoden i denne studien er todelt mellom oppgaveanalyse og semistrukturerte intervjuer er det naturlig nok flere etiske hensyn å ta i forhold til lærerne jeg intervjuet sammenlignet med oppgavene jeg har analysert. Siden designeren av oppgavene også har blitt intervjuet er hans interesser ivaretatt når jeg nedenfor fokuserer på de etiske betraktningene knyttet til informantene.

Siden jeg deltar i et treårig forskningsprosjekt hadde prosjektet allerede sørget for en godkjenning fra Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). Det var dermed unødvendig for meg å melde fra om studien. Oppgaven innebærer imidlertid heller ingen sensitive personopplysninger om lærerne som omfattes av meldeplikten.

Det er mange krav knyttet til beskyttelse av informanter som deltar i forskningsprosjekt, blant annet beskyttelse mot fysiske og psykiske skader, krav om informasjon om studien, samtykke til å delta i studien og anonymitet (Bryman, 2012; Ringdal, 2013). Siden jeg intervjuet to lærere som allerede var tilknyttet DIM-prosjektet var mange av disse utfordringene irrelevante. Lærerne var for eksempel viktige pådrivere i prosjektet og hadde dermed god innsikt i det. De fikk også tidlig innsikt i min studie via et verksted knyttet til DIM-prosjektet i januar 2016. Jeg anser prinsippet om konfidensialitet som det viktigste momentet knyttet til ivaretakelsen av mine informanter. Siden lærerne deltar i et åpent forskningsprosjekt mellom UiA, Ve skole og Samfundets skole har jeg ingen mulighet til å sikre dem fullstendig anonymitet. Jeg har imidlertid unngått å bruke informantenes virkelige navn, og omtaler dem i stedet som *læreren som designet oppgavene* og *læreren som anvendte oppgavene*. På den måten retter jeg fokuset mot *rollen* de har hatt i prosjektet, noe jeg mener kan være en nyttig ting å legge merke til når transkripsjonene fra intervjuene vurderes.

4.6 Kvalitetssikring av prosjektet

All forskning vil i større eller mindre grad være preget av omverdenen og andres synspunkt. I den forbindelse blir det viktig å være åpen om hvilke overveielser som er gjort i løpet av prosjektet, og reflektere over egen praksis (Ringdal, 2013). Selv om jeg i arbeidet med denne oppgaven har basert meg på teori og tidligere forskning har jeg hele tiden måttet ta subjektive valg som både påvirker og begrenser oppgaven. Disse valgene vil naturlig nok bære preg av mine personlige tolkninger og overbevisninger, og jeg har derfor forsøkt å være åpen og detaljert om de avveininger som er gjort for å gjøre arbeidsprosessen transparent for leseren. Derfor ligger både intervjuguidene (vedlegg 1-3), transkripsjonene (vedlegg 4-6) og oppgavearkene (vedlegg 7) vedlagt bakerst i oppgaven slik at leseren selv kan ta stiling til kvaliteten ved arbeidet, og hvorvidt jeg har dekning for betraktningene og konklusjonene som presenteres.

Reliabilitet belyser hvorvidt dataene er pålitelige og nøyaktige, og om forskningsprosessen er gjennomført på en troverdig måte (Christoffersen & Johannessen, 2012; Ringdal, 2013). Et tiltak for å sikre en nøyaktig gjengivelse av datamaterialet var at alle de tre intervjuene ble transkribert i løpet av et par dager etter gjennomføringen. Ved å transkribere intervjuene sikrer jeg at det er informantenes stemmer som blir synliggjort, og ikke mine omformede gjengivelser av deres synspunkter. Jeg mener at dette er et viktig tiltak for å sikre reliabiliteten til studien min.

En del av datamaterialet består av analyser av oppgavesettet som er utviklet av en lærer tilknyttet DIM-prosjektet. Jeg har gitt en detaljert beskrivelse av hvordan jeg har gått frem for å konstruere analyseverktøyet, hvilke kriterier som ligger til grunn for analysene, og eksempler på hvordan jeg anvender det i konkrete oppgaver. Samtidig er oppgavene som er analysert lagt ved i originaltekst (vedlegg 7). Dermed bør alt ligge til rette for at andre forskere kan gjenta analysene av oppgavesettet. Siden jeg i tillegg har basert meg på semistrukturerte intervjuer vil det imidlertid være umulig å gjennomføre en nøyaktig replikasjon av studien, men jeg har gjengitt intervjuguidene som ble anvendt (vedlegg 1, 2 og 3). Jeg vil med utgangspunkt i dette argumentere for at det vil være mulig for andre forskere å gjennomføre tilsvarende intervjuer, og på den måten kan resultatene mine til en viss grad etterprøves.

Validiteten til forskningsprosjektet dreier seg om hvor relevante og gyldige dataene jeg har samlet inn er i forhold til problemstillingen som undersøkes (Christoffersen & Johannessen, 2012). Studien baserer seg på datamateriale fra oppgavene som er analysert ved bruk av analyseverktøyet, og datamateriale fra semistrukturerte intervjuer med to av lærerne som er tilknyttet DIM-prosjektet. Jeg har flere steder funnet sammenfallende resultater mellom analysen av oppgavesettet og lærerens uttalelser i intervjuene. Dette mener jeg er med og styrker den indre validiteten til studien min, altså kvaliteten på analyseverktøyet mitt, og antyder at analyseverktøyet synliggjør læringspotensialet i oppgavesettet til en viss grad. Samlet sett mener jeg at datamaterialet belyser emnet mitt fra ulike perspektiv, og gir meg innsikten jeg trenger for å kunne besvare problemstillingen min. I tillegg har jeg funnet flere likhetstrekk mellom funn fra denne studien og tidligere forskning noe som er med og underbygger grad av generaliserbarhet, og dermed den ytre validiteten til funnene. Jeg vil derfor argumentere for at studien kan være relevant for lærere som ønsker innsikt i en interaktiv måte å drive geometriundervisningen på i 8. klasse – med et stort potensiale for læring.

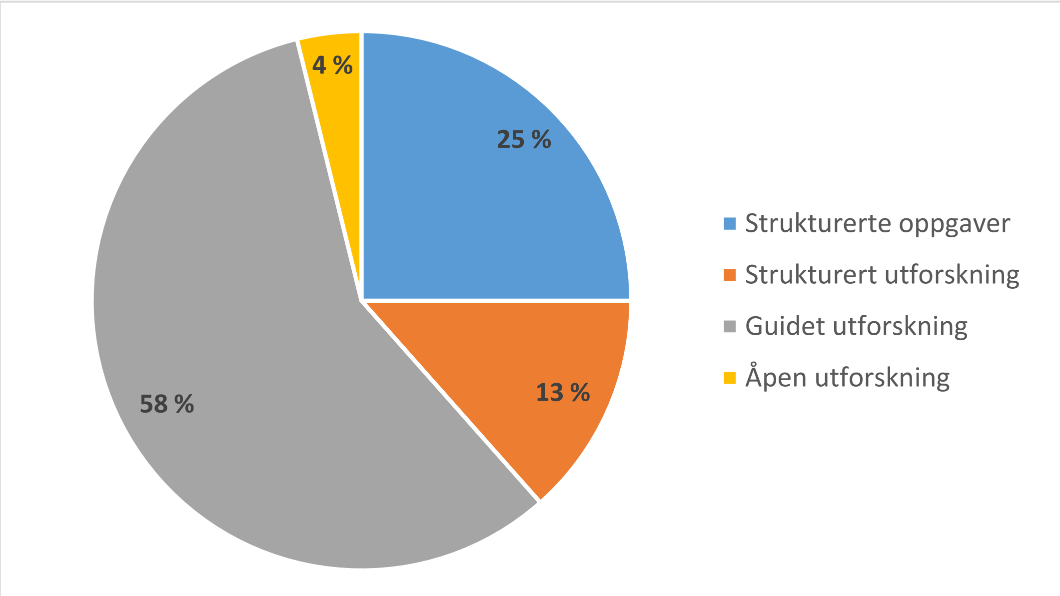
5. Presentasjon og analyse av innsamlede data

5.1 Funn fra oppgavene

I dette kapittelet presenteres funn fra analysene av oppgavesettet inndelt etter aspektene i analyseverktøyet: *inquiry, interaktivitet* og *kognitive krav*. Oppgavene som presenteres fra oppgavesettet er gjengitt i samme ordlyd og form som de fremstår for elevene i undervisningen. Det gis noen kommentarer til oppgavene i dette kapitlet, mens en grundigere diskusjon følger i kapittel seks.

5.1.1 Inquiry

Jeg har studert både enkelt oppgaver og oppgavesettet som en helhet. Tidligere forskning har dokumentert at en av de største fordelene med DGE er mulighetene som gis for utforskning (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Edwards, 1997; Hanna, 2000; Hoyles & Jones, 1998; Laborde, 2015; Santos-Trigo & Espinosa-Perez, 2002; Öner, 2008). Figur 5.1 presenterer oversikten over aspektet inquiry, og fordelingen av oppgavene blant de fire kategoriene.



Figur 5.1: Helhetsvurdering av oppgavene med hensyn til aspektet *inquiry*

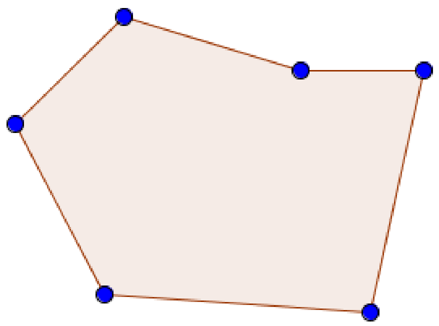
Figuren illustrerer at 25 % av oppgavene defineres som *strukturerte oppgaver* som faller innenfor det tradisjonelle oppgaveparadigmet blant annet beskrevet av Skovsmose (2001, 2003) med flere (Alrø & Skovsmose, 2002; Mellin-Olsen, 1996). I kapittel 2 pekte jeg på noen norske tendenser innenfor læring og undervisning av matematikk som blant annet har blitt dokumentert av de internasjonale storskalaundersøkelsene TIMSS (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2010) og PISA (Kjærnsli & Olsen, 2013). Her pekes det på en tydelig profil av norske klasserom kjennetegnet av elever som arbeider individuelt med oppgaver som øver rutinemessige ferdigheter. Sammenligner vi dette med resultatene fra denne studien hvor 25 % av oppgavene beskrives som strukturerte oppgaver må dette kunne betraktes som relativt lite, og et steg i riktig retning i forhold til prosjekts målsetting om å skape innovativ og utforskende matematikkundervisning. Den resterende andelen av oppgavene faller innenfor kategoriene *strukturert utforskning*, *guidet utforskning* og *åpen utforskning* som alle har et stort potensiale for læring. Nedenfor følge noen konkrete eksempler fra oppgavesettet som eksemplifiserer læringspotensialet som ligger innenfor hver kategori.

Strukturert utforskning

Utforsk polygon-kommandoen og finn ut forskjellen på *mangekant* og *regulær mangekant.* Skriv ned forskjellen med egne ord.

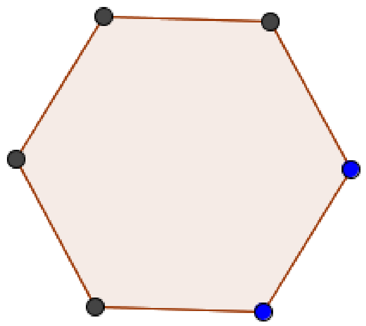
Figur 5.2: Oppgave A fra oppgavearket Polygon 02 – 1

Denne oppgaven har jeg kategorisert som strukturert utforskning fordi elevene får en klar og tydelig beskjed om hva de må gjøre for å komme i mål med oppgaven. De skal utforske verktøyene mangekant og regulær mangekant, og beskrive forskjellen mellom dem. Etter at elevene har konstruert en figur med hvert verktøy kan forskjellen mellom dem beskrives. Når verktøyet mangekant benyttes kan punkter plasseres vilkårlig i grafikkfeltet og med ulik lengde. Deretter konstruerer GeoGebra en mangekant forutsatt at man avslutter med å klikke på samme punkt som man startet. Et eksempel på en slik vilkårlig mangekant presenteres i figur 5.3.



Figur 5.3: En vilkårlig sekskant konstruert ved å anvende verktøyet *mangekant*

Når man derimot benytter det andre verktøyet, regulær mangekant, trenger man kun å angi avstanden mellom to punkter og antallet hjørner mangekanten skal ha. Etter man har trykket «ok» vil GeoGebra konstruere en regulær mangekant med utgangspunkt i de gitte opplysningene. En slik regulær mangekant vises i figur 5.4.



Figur 5.4: En regulær sekskant konstruert ved å anvende verktøyet *regulær mangekant*. De to blå punktene viser avstanden jeg har angitt

Selv om begge disse verktøyene er helt spesifikke for DGE illustrerer de underliggende matematiske sammenhenger og begreper. For eksempel kan elevene ved å utforske verktøyet regulær mangekant oppdage egenskapene til den geometriske figuren, nemlig at alle sider er like lange samtidig som alle vinkler er like store. Til sammenligning betegner begrepet mangekant eller polygon en lukket kurve sammensatt av flere rette linjestykker. Kravet for at en figur skal kunne kalles en regulær mangekant er dermed mye strengere enn det generelle begrepet mangekant. Det er viktig at elevene lærer og forstår konsekvensene av forskjellen mellom disse begrepene, og i denne sammenhengen kan det dynamiske geometriprogrammet være til hjelp. Oppgavens ordlyd er i utgangspunktet ganske streng og lukket i det elevene blir bedt om å beskrive forskjellen mellom mangekant og regulær mangekant. DGE gir imidlertid rom for elevens utforskning fordi elevene kan konstruere en mangekant, og så endre figurens form ved å dra i punktene som figuren består av. På den måten kan elevene observere hvordan figuren endrer seg ettersom punktene flyttes. Dersom samme oppgave skulle vært løst i et papir-og-blyant miljø ville den enkelt kunne besvares ved å gi en definisjon av hvert begrep, uten noen form for videre utforskning av de grunnleggende egenskapene til begrepene.

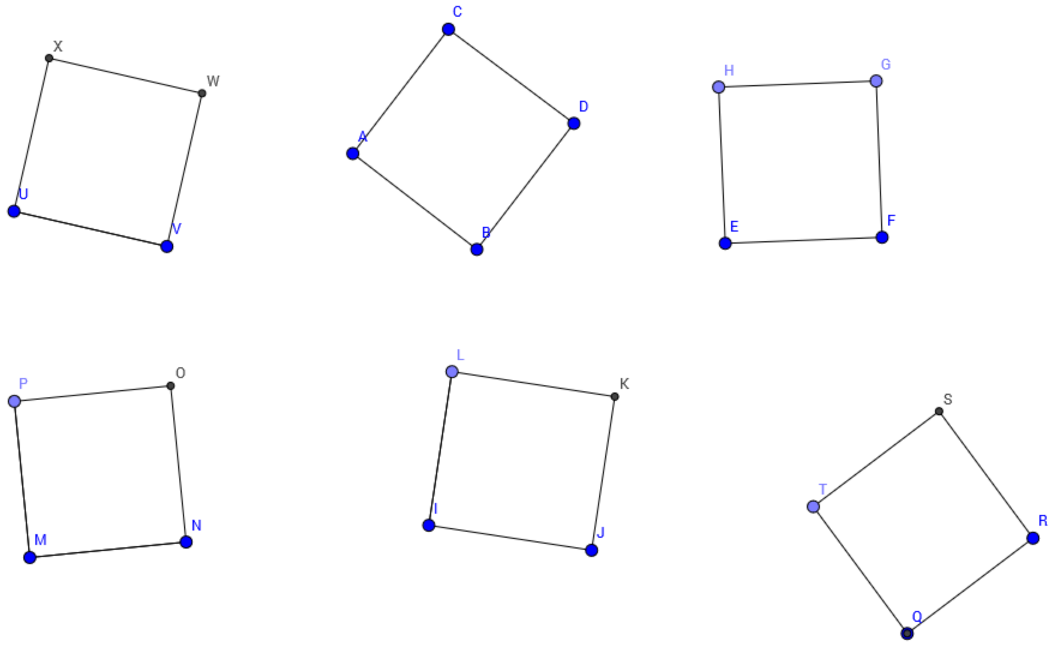
Guidet utforskning

Denne kategorien er absolutt den mest dominerende med hele 58 % av oppgavene. Her presenteres elevene for oppgaver og problemer hvor det ofte foreslås generelle løsningsstrategier som elevene kan anvende. Et slikt eksempel er oppgaven som presenteres under (figur 5.5).

Før elevene presenteres for oppgaven står følgende tekst:

> *Det er et krav at en polygon som kalles en firkant har fire sider og fire hjørner. Hvis også figuren oppfyller dette kravet:*
>
> - *alle sidene er like lange*
> - *alle vinklene er 90 °*
>
> *kalles mangekanten et kvadrat* (hentet fra oppgavearket 02 – 1 polygon).

Gå inn på denne lenken og finn hvem som oppfyller kravene til *et kvadrat.* http://ggbtu.be/mtDdU3iCU Er alle disse firkantene kvadrater eller … Hvilke av disse firkantene er kvadrater? Dra i figurene og finn ut hvilke krav de oppfyller og hvilket navn vi setter på dem.



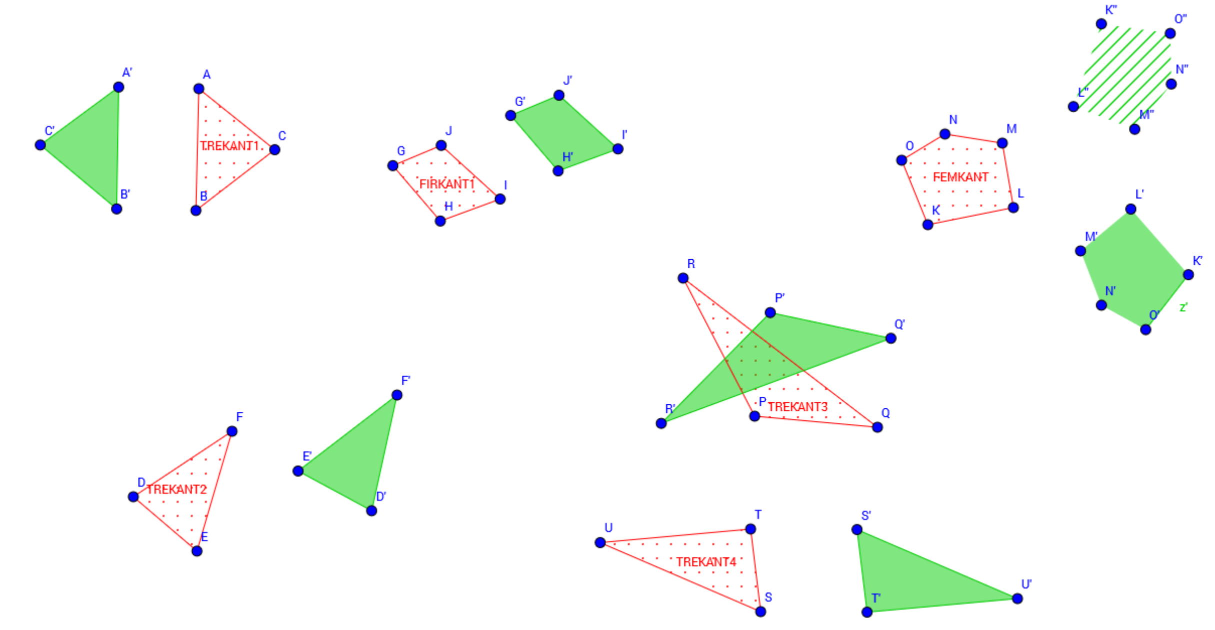
Figur 5.5: Oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1

I denne oppgaven skal elevene utforske seks firkanter og bestemme hvilke av dem som også oppfyller kravet for et kvadrat. Det gis et forslag om en generell løsningsstrategi hvor elevene kan «dra i figurene, og finne ut hvilke krav firkantene oppfyller» for å løse den generelle oppgaven om «Hvilke av disse firkantene er kvadrater?» Det at elevene gis et tips om hvor de kan starte for å komme i gang med oppgaven tror jeg vil fremme engasjement og tekning hos mange, og gjøre dem nysgjerrige på hva som vil skje når de drar i hjørnene til de ulike firkantene. Jeg tror mange vil forsøke å dra i firkantene før de i det hele tatt har rukket å lese ferdig oppgaveteksten.

I oppgavene som er preget av guidet utforskning får elevene mulighet til å undersøke matematiske strukturer og sammenhenger, beskrive hva de observerer og diskutere hvilke implikasjoner dette får for det matematiske objektet som undersøkes. Disse aktivitetene er helt i tråd med forskningen til Anthony og Walshaw (2009) rundt effektive oppgaver, og antas å skape et stort potensiale for læring i matematikkundervisningen.

Åpen utforskning
Figur 5.6 presenterer et eksempel på en oppgave som er preget av åpen utforskning. Ved første øyekast kan den virke veldig lik som den forrige oppgaven, men jeg mener at denne oppgaven er betydelig vanskeligere enn firkantene som ble presentert ovenfor. Denne oppgaven er todelt. For det første skal elevene bestemme hva slags symmetri som er brukt på de ulike mangekantene. For det andre skal elevene finne symmetrilinjer, symmetripunkter, rotasjonspunkter eller vektorlengder som er avgjørende for å få til symmetrien. Det er nettopp denne siste delen av problemet som gjør oppgaven så vanskelig, og krever en målrettet og detaljert utforskning av elevene. Den mest effektive løsningsstrategien vil være å undersøke en mangekant om gangen, men dette må gjøres i to ledd. Først må elevene analysere mangekanten for å finne ut hvilken type symmetri mangekanten representerer. Deretter må spørsmål to undersøkes om hvor eventuelle symmetrilinjer, symmetripunkter, rotasjonspunkter og vektorlengder befinner seg. Til sammenligning skulle elevene i den forrige oppgaven bestemme hvilke firkanter som oppfylte kravet til å være et kvadrat hvor dette kravet på forhånd var gitt. Jeg betrakter også firkanter og kvadrater som innarbeide geometriske begreper som er kjent for elevene fra tidligere emner, sammenlignet med ulike typer symmetrier som for de fleste elevene vil være litt mer ukjente.

Gå inn på denne nettsiden: http://ggbtu.be/mEVPgSBWk Finn ut hva slags symmetri som er brukt her. Finn også ut hvor eventuelle *symmetrilinjer*, *symmetripunkter, rotasjonspunkter* eller *vektorretning/vektorlengder* er. Hva slags symmetri finner du her? Hvor tror du linjer og punkter ligger som er viktige for å få til denne symmetrien?



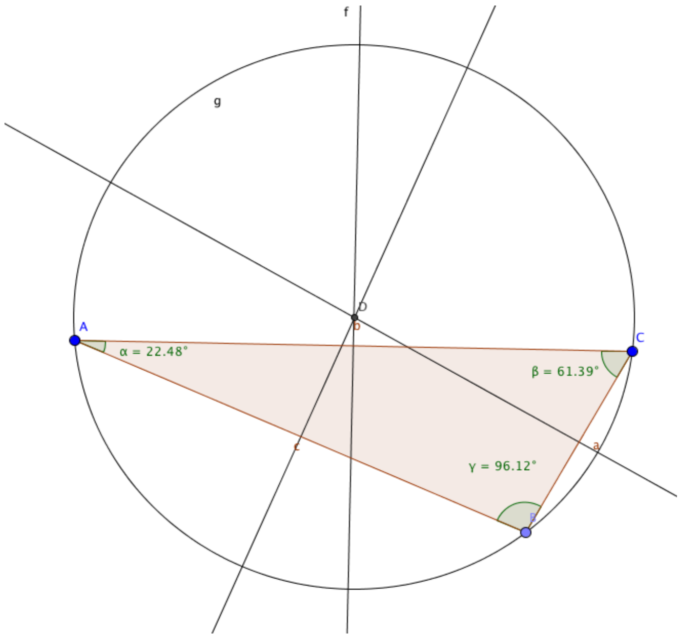
Figur 5.6: Oppgave A fra oppgavearket Symmetri 03 – 4

Jeg stiller meg dermed kritisk til om dette er en litt for krevende oppgave for den gjennomsnittlige åttendeklassingen, og hvor mange elever som vil være utholdende nok til å løse hele oppgaven. Oppgaven foreslår ingen generelle løsningsstrategier eller tips for hvordan elevene skal gå frem for å løse oppgaven, men jeg regner med at elevene nå er så vant med oppgaver i DGE at de skjønner at de må dra i figurene. Jeg synes absolutt at dette er en oppgave som har et stort potensiale for læring. Det hjelper dessverre lite at potensialet er stort hvis ikke oppgaveteksten klarer å fenge elevene, og motivere dem til å undersøke utfordringen. Kanskje dette kan være en mulighet for de sterkeste elevene til å få brynt seg på en oppgave, og virkelig få vist all den kunnskapen de har. Det er imidlertid en relativt liten andel av oppgavene, kun 4 % (figur 5.1), som faller innenfor denne kategorien.

5.1.2 Interaktivitet

Hölzl (2001) peker på to medierende roller dra-verktøyet i DGE kan ha i undervisningen. Denne inndelingen kan være med å belyse datamaterialet mitt innenfor kategorien DGE legger til rette for den matematiske oppgaven. For det første kan dra-verktøyet anvendes for å teste eller sjekke om konstruksjonen som er laget tilfredsstiller alle kravene i oppgaven. Det kan også benyttes for å teste at figuren i GeoGebra faktisk er en konstruksjon og ikke bare en tegning (jf. kapittel 2.3). I slike tilfeller fungerer verktøyet som en visuell forsterker. For det andre kan dra-verktøyet benyttes for å undersøke og oppdage nye geometriske egenskaper og sammenhenger, og på den måten utgjøre selve essensen i oppgaven. I beskrivelsen av kategorien står det blant annet at *«DGE benyttes som en visuell forsterker for å undersøke og identifisere geometriske egenskaper»* (jf. interaktivitet kapittel 4.3.1), som dermed kan betraktes som en kombinasjon av disse rollene. Oppgaver hvor elevene blir bedt om å undersøke og identifisere geometriske egenskaper har vært et gjentakende moment i oppgavesettet. Videre står det i beskrivelsen av kategorien at DGE i slike tilfeller legger til rette for elevenes undersøkelse og analyse. Disse aktivitetene har vært viktige faktorer i en stor andel av oppgavesettet. Til sammen kan disse argumentene være noe av forklaringen på den høye prosentandelen (46 %) av oppgaver hvor DGE benyttes som tilrettelegger for den matematiske oppgaven. Et typisk eksempel fra denne kategorien presenteres i figur 5.7 hvor DGE benyttes for å undersøke og identifisere geometriske egenskaper og relasjoner.

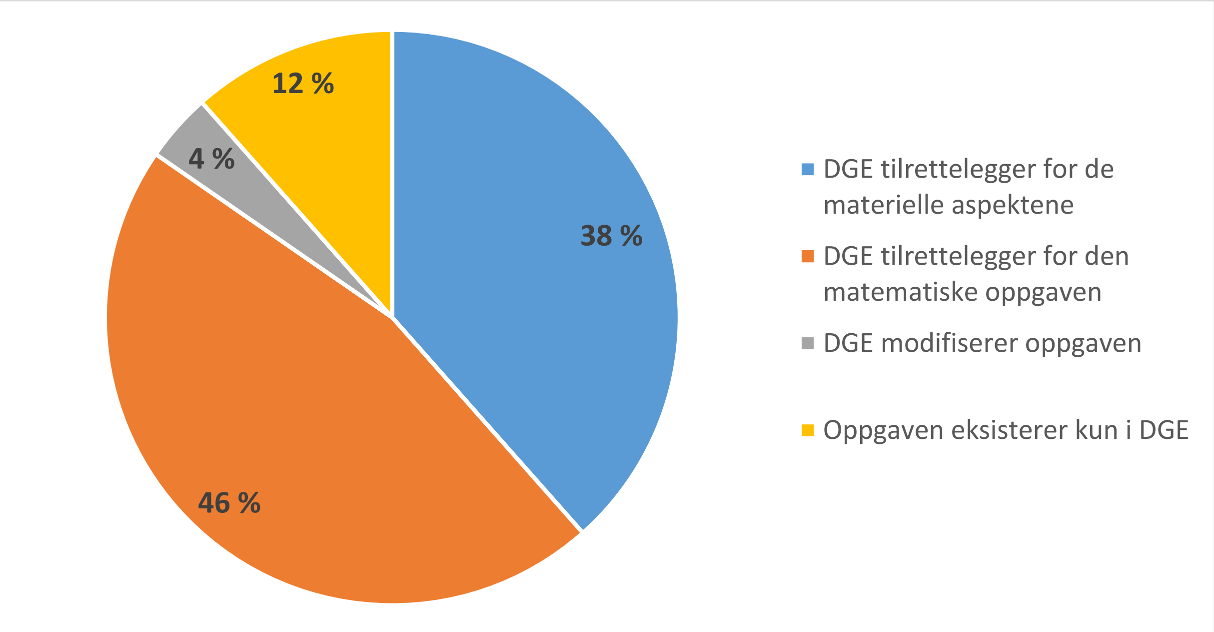
Tegn en vilkårlig trekant. Lag midtnormaler på alle tre sidene og bruk skjæringen mellom disse tre midtnormalene til sentrum i sirkelen. Sett inn vinkler på trekanten og lengde på sidene.



Nå skal dere endre på trekanten og lete etter sammenhenger mellom vinkler og lengde på sidene. Legg merke til hva som skjer når sentrum i sirkelen ligger innenfor eller utenfor trekanten. Hva skjer når sentrum ligger nøyaktig på en av sidene i trekanten?

Figur 5.7: Oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 4

En fullstendig oversikt over oppgavesettet med utgangpunkt i aspektet *interaktivitet* presenteres i figur 5.8. Samlet sett utgjør de to kategoriene *DGE tilrettelegger for de materielle aspektene* og *DGE tilrettelegger for den matematiske oppgaven* 84 % av oppgavesettet. For å forklare denne skjevheten støtter jeg meg på forskningen til Laborde (2001).



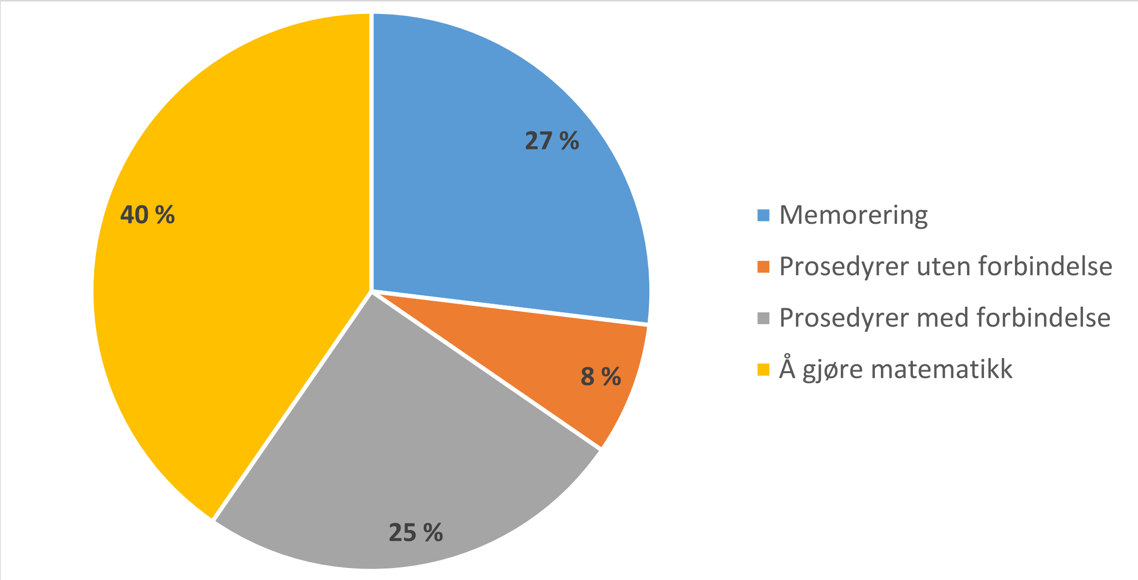
Figur 5.8: Helhetsvurdering av oppgavene med hensyn til aspektet *interaktivitet*

I løpet av en treårsperiode samarbeidet Laborde (2001) med et team bestående av fire lærere for å utvikle interaktive undervisningsopplegg for DGE. Først designet lærerne et undervisningsopplegg som de testet ut i eget klasserom. Noen ganger ble også deler av opplegget diskutert i teamet i forkant av undervisningen, men dette var imidlertid ikke en hovedregel. Etter gjennomføringen ble undervisningsopplegget diskutert ved neste samling, og revideringer gjort på bakgrunn av innspillene. Den andre versjonen ble også utprøvd i klasserommet, og påfølgende revideringer ble gjort i de fleste tilfeller. I løpet av denne prosessen fant Laborde (2001) en endring i lærerens syn på DGE, og dermed også en endring i hvordan DGE ble anvendt i oppgavene som de designet. I starten ble DGE kun betraktet som en visuell forsterker, og tilrettelegger av datamaterialet. Oppgavene la da til rette for at elevene kunne observere geometriske objekter i DGE, og så fremstille og utforske hypoteser på bakgrunn av observasjonene. Mot slutten av perioden ble imidlertid DGE betraktet som en essensiell bestanddel av oppgavens mening, og det ble designet oppgaver hvor selve meningen med oppgaven var forankret i DGE. I min oppgave omfatter dette kategoriene *DGE modifiserer oppgaven* og *Oppgaven eksisterer kun i DGE,* og har et totalt omfang på 16 % av oppgavesettet.

Med utgangspunkt i det overnevnte mener jeg det er grunn til å argumentere for at det samme kan være tilfellet i denne studien. Læreren som designet oppgaven har over 35 års erfaring fra arbeid i skolen og god kjennskap til bruken av DGE i undervisningen. Likevel vil jeg beskrive han som relativt uerfaren når det kommer til å designe oppgaver for DGE, og dermed i samme situasjon som lærerne Laborde (2001) beskriver. Det er sannsynlig at læreren i min studie også ville hatt fordel av å gå igjennom en liknende prosess. Nå befinner læreren seg i starten av prosessen hvor de fleste oppgavene kjennetegnes av å legge til rette for de materielle og matematiske aspektene, uten at miljøets mediering får endre selve oppgaven. Med tid og veiledning er det sannsynlig at rollen til DGE vil endres. Begge eksemplene fra forrige kapittel om guidet utforskning (figur 5.5) og åpen utforskning (figur 5.6) defineres som slike oppgaver hvor miljøet mediering endrer oppgavens mening og innhold. I oppgavene er hjelpelinjene i GeoGebra skjult slik at elevene ikke skal kunne se hvordan figuren er konstruert. De må dermed undersøke og utforske de geometriske egenskapene til figurene ved å benytte dra-verktøyet i DGE.

5.1.3 Kognitive krav

Aspektet *kognitive krav* benyttes for å belyse hva slags type tenkning som kreves av elevene når de skal løse oppgavene (jf. lavere og høyere ordens tenking i kapittel 3.5). En helhetsvurdering av oppgavesettet med utgangspunkt i dette aspektet presenteres i figur 5.9.



Figur 5.9: Helhetsvurdering av oppgavene med hensyn til aspektet *kognitive krav*

Sektordiagrammet viser at 27 % av oppgavene klassifiseres som memorering. Det vil si at oppmerksomheten er rettet mot å finne *et* riktig svar, og elevene kan løse oppgavene ved å reprodusere tidligere lærte fakta, regler eller formler. Denne type tenkning forbindes ofte med oppgaver knyttet til oppgaveparadigmet hvor vi ser sammenfallende resultater mellom kategoriene memorering (27 %) og strukturerte oppgaver (25 %). Sammen med kategorien prosedyrer uten forbindelse regnes memorering som tenkning av lavere orden. Samlet sett er da 35 % av oppgavesettet kjennetegnet av tenking av lavere orden, mens de resterende 65 % av oppgavesettet bærer preg av tenking av høyere orden. Dette er oppgaver som utfordrer elevenes kritiske tenking og vurderingsevne. For å belyse tematikken rundt lavere og høyere nivå av kognitive krav kan Skemp (2006) sine begreper om instrumentell og relasjonell matematikkundervisning anvendes (jf. kapittel 3.6). Kategoriene memorering og prosedyrer uten forbindelse betegner en instrumentell forståelse av matematikken hvor elevene kan anvende memorerte regler eller prosedyrer, men uten at de er i stand til å forklare hvorfor de fører til riktig svar. De to nederste kategoriene derimot, prosedyrer med forbindelse og å gjøre matematikk, samsvarer med det Skemp (2006) beskriver som en relasjonell matematikkforståelse hvor elevene både vet hva de skal gjøre, og hvorfor. Nedenfor presenteres eksempler fra kategoriene prosedyrer med forbindelse og å gjøre matematikk siden det er en slik type tenking denne studien ønsker å skape et potensiale for. Tidligere forskning har dessuten dokumentert at høyere ordens tenking fører til et større potensiale for læring i matematikkundervisningen enn lavere ordens tenking (Anthony & Walshaw, 2009; Skemp, 2006; Sullivan et al., 2013).

Prosedyrer med forbindelse

Konstruer ulike regulære mangekanter. Finn både sentralvinklene, vinklene mellom sidekantene og summen av vinklene. Utforsk sammenhengen mellom figurenes navn og vinklene og vinkelsummene. På Internett finner dere navn på regulære polygoner.

Figur 5.10: Oppgave D fra oppgavearket Polygon 02 – 3

I denne oppgaven må elevene kunne konstruere ulike regulære mangekanter for deretter å finne sentralvinklene, vinklene mellom sidekantene og summen av vinklene. Hvordan elevene velger å sortere denne informasjon står de fritt til å velge selv, og det er nettopp noe av det jeg liker så godt med denne oppgaven. Ofte vil slike oppgaver være etterfulgt av en strukturert tabell som i stor grad påvirker og styrer elevens tenking. Et forslag på en slik tabell som reduserer matematikken til kun å dreie seg om å fylle inn tomme ruter i en tabell presenteres i tabell 5.1. Dersom noen sitter fast og synes det er vanskelig å sortere informasjonen kan selvfølgelig læreren tipse elevene om at en tabell kan være et hjelpemiddel, men jeg tror elevene i større grad får vist sin kreativitet og sine ferdigheter uten.

Tabell 5.1: Eksempel på en tilhørende tabell hvor elevene kun trenger å fylle inn de tomme rutene

Antall vinkler / **Mangekant**	Sentralvinkler	Vinkel mellom sidekantene	Summen av vinklene
Trekant			
Firkant			
Femkant			
N-kant			

Neste skritt er å utforske sammenhengen mellom figurens navn, vinklene og vinkelsummen. Elevene blir også her tipset om at de kan finne navnet på ulike regulære polygoner på internett. Selv om det naturligvis er en målsetting at elevene skal oppdage det generelle teoremet om at vinkelsummen i en vilkårlig n-kant alltid vil være $(n-2) \times 180°$ gis elevene her mulighet til å utforske matematikken på sin egen måte. Det er nettopp denne medierende rollen til DGE, hvor elevene får mulighet til å oppdage og gjenkjenne matematiske relasjoner og størrelser på egenhånd men avhengig av verktøyene i omgivelsene, som Noss og Hoyles har observert som fordelaktig i sine studier (Hoyles & Noss, 1992; Noss & Hoyles, 1996).

Oppgaven retter elevenes oppmerksomhet mot prosedyrer som kan anvendes for å regne ut vinkelsummen i ulike mangekanter. Formålet er å utvikle en dypere forståelse for sammenheng mellom en vilkårlig mangekant og den tilhørende vinkelsummen, og jeg har på bakgrunn av dette kategorisert oppgaven som prosedyrer med forbindelse. Jeg mener slike oppgaver har et stort potensiale for læring nettopp fordi elevene blir gjort oppmerksomme på koblingen mellom prosedyrer og matematikk. Når elevene blir bevisst på hvorfor prosedyrene de anvender for å løse matematikkoppgavene virker, tror jeg også elevenes forståelse av matematikk som fag og hvordan de matematiske begrepene er forbundet med hverandre utvikles.

Å gjøre matematikk

Nedenfor presenteres et typisk eksempel fra kategorien å gjøre matematikk (figur 5.11).

Lag disse figurene i GeoGebra, og de skal kun oppfylle minstekravene til navnene:

- en firkant
- et trapes
- et parallellogram
- ei rombe
- et rektangel
- et kvadrat

Lag ett dokument for hver firkant. Skjul deretter alle hjelpestreker du har brukt. Figuren lagres ved å trykke på de tre strekene oppe til høyre. Trykk *Export* og *ggb* og lagre dokumentet i for eksempel Google Drive. Figuren skal være slik at hvis en annen elev tar tak i ett av hjørnene og endrer på det, beholder likevel firkanten sine minstekrav. En medelev skal finne navnet på de figurene du har laget.

Figur 5.11: Oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 2

Denne oppgaven har jeg klassifisert som den kognitive prosessen å gjøre matematikk av flere grunner. For det første må elevene ha kontroll på de ulike geometriske figurene som presenteres. Når oppgaveteksten omtaler minstekravet til figurene refereres det til de grunnleggende geometriske egenskapene som til sammen danner figurene, og gjør det mulig å skille dem fra hverandre. I den foregående oppgaven (jf. vedlegg 7 Oppgaveark: Polygon 02 – 2) ble elevene presentert for en oversikt som beskrev karakteriske egenskaper til hver figur. Dersom elevene er usikre på hvilke egenskaper som skiller figurene fra hverandre kan de benytte denne oversikten. For det andre blir elevenes evne til utforskning, vurdering og kreativitet utfordret i det de skal konstruere et eksempel på hver figur. Her er oppgaveteksten til dels misvisende. Først står det *«Lag disse figurene»* som tilsier at figurene kan tegnes i DGE. Senere i oppgaveteksten presiseres det imidlertid *«Figuren skal være slik at hvis en annen elev tar tak i ett av hjørnene og endrer på det, beholder likevel firkanten sine minstekrav»*, som implisitt betyr at firkantene må konstrueres (jf. kapittel 2.3). Oppgaven tester altså hvorvidt elevene klarer å konstruere figurer i GeoGebra, og ikke bare tegninger. Samtidig må de ha «tunga rett i munnen» og skille figurene fra hverandre. Til slutt får de en fin øvelse når elevene skal undersøke og navngi hverandres figurer. På den måten kan de oppdage at figurene kan ha ulikt utseende og form, selv om de tilfredsstiller samme krav. Til sammen utfordrer denne oppgaven elevenes evne til å vurdere, tenke kritisk og selvstendig, konstruere, analysere og sammenligne, som alle er verb som kjennetegner tenking av høyere orden.

5.2 Funn fra intervjuene

I det følgende kapittelet presenteres funn fra intervjuene kodet og analysert med utgangspunkt i kategoriene: *oppgavedesign*, *inquiry*, *interaktivitet*, og *kognitive krav*.

5.2.1 Oppgavedesign

Læreren forteller selv at han er preget av det sosiokulturelle læringssynet, og har dermed forsøkt å designe oppgaver som ligger innenfor elevenes proksimale utviklingssone:

> *«Jeg arbeider innenfor, jeg er jo kanskje litt sånn sosiokulturelt i læringssynet, Vygotsky, kanskje litt sånn ledestjerne der i den sammenheng. Og det å legge oppgavene innenfor den proksimale utviklingssonen at elevene klarer det akkurat eller ved hjelp av medelever eller ved hjelp av litt hint, at det ikke er for lett og ikke for vanskelig, det er jo målet mitt»* (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

En naturlig konsekvens av et sosiokulturelt syn på læring blir dermed å la elevene samarbeide når de løser oppgavene. Dette har vært et tydelig prinsipp fra starten av prosjektet hvor det tidlig ble anbefalt å la elevene arbeide med oppgavesettet i grupper på to eller tre elever. Læreren som anvendte oppgavene uttrykker også en lignende holdning i forhold til elvenes behov for en signifikant andre når de arbeider: *«Det er jo fordelen med å være to da (...) prøvde å tenke litt at når de blir satt sammen i grupper, at de kan drifte hverandre fremover»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene).

Den sosiokulturelle læringsteorien uttrykker helt eksplisitt at elevene ved å samarbeide med andre vil oppnå mer enn hva de kan klare alene (Säljö, 2001, 2006; Vygotsky, 1978). Når oppgavedesigneren fremhever at elevene skal arbeide i grupper er det antageligvis dette argumentet han støtter seg på. Han forteller i intervjuet at elevene i løpet av geometriemnet har arbeidet 23 timer i grupper og 1 time alene. Dynamikken i gruppearbeidet fungerer som en fin motor som driver arbeidet fremover. Likevel er han overrasket over hvor mye mer krevende det var for elevene den ene timen de skulle arbeide med oppgavesettet alene, noe følgende sitat illustrerer:

> *«(...) jeg ble litt overrasket når de skulle til helt alene hvor mye større utfordring det var, den såkalte drillfasen altså vi har vært i eksperimenteringsfasen så tenker jeg i drillfasen, konsolideringsfasen så tror jeg kanskje burde lagt inn noe mer der (...) Det var jo en mye mer hektisk time, der de ikke, de skulle ikke søke hjelp hos hverandre men de skulle arbeide individuelt og kun jeg skulle hjelpe de og jeg løp som en strikk altså i den timen. Det var skikkelig mye arbeid. Da var jeg litt tilbake til sånn gammeldags undervisning at jeg, så kanskje jeg burde lagt inn si 2 – 3 timer til med sånn individuell jobbing, tror jeg»* (2. intervju med lærer som designet oppgavene).

Et resultat av at elevene arbeider individuelt er at lærerens jobb som veileder blir mye mer hektisk. I stedet for at elevene kan drive hverandre fremover og diskutere problemstillingene som oppstår underveis, stopper arbeidet med oppgaven opp med en gang elevene er litt usikre, eller ikke vet hvordan de skal gå frem. Et annet moment jeg ønsker å trekke fram fra sitatet er at læreren uttrykker *«Da var jeg litt tilbake til sånn gammeldags undervisning»* når elevene arbeidet individuelt med oppgavesettet. Dette tolker jeg som et utrykk for den tidligere omtalte skolekulturen oppgaveparadigmet eller oppgavediskursen, hvor elevenes individuelle oppgaveløsning står i sentrum. Dessuten kan det at oppgavedesigneren starter setningen med å si *«Da var jeg litt tilbake til»* tyde på at han betrakter denne undervisningen som annerledes enn hva han har praktisert tidligere. Samt at det han nå var *tilbake til* var individuelt arbeid med matematikkoppgaver.

Da læreren ble spurt om hva som var målsettingen når han designet oppgavene svarte han følgende: *«(...) å skape begreper, begreper innen geometri det er overordnet. Det å gi de innsikt i geometrien, og at de får et håndverker [verktøy] å kunne konstruere og lage figurer i forhold til kompetansemålene det er målet»* (1. intervju med lærer som designet oppgavene). Målet for undervisningen er dermed å gi elevene innsikt i de matematiske begrepene som er tilknyttet geometriemnet, og samtidig gjøre elevene i stand til å foreta egne konstruksjoner som er i samsvar med kompetansemålene (jf. kapittel 4.2). Læreren ble senere spurt om å trekke frem noen kjennetegn ved de oppgavene som han erfarte fungerte spesielt bra i undervisningssituasjonen. Da trakk han frem to ting som han har som en «ledestjerne» når han designer oppgaver. Det første prinsippet er rike oppgaver:

> *«(...) rike oppgaver med en lav inngangsterskel så alle får, alle blir motivert til å komme i gang, alle får lyst til å komme i gang. Og så går det når de jobber seg inn i det selv innenfor den samme oppgaven er det muligheter for ganske utfordringer for de begavede i matematikk sånn at ikke de går lei eller sier jeg er ferdige eller sånn. Det er den ene tingen»* (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

Sitatet illustrerer at det har vært en målsetting for oppgavedesigneren å designe rike oppgaver med det han kaller en lav inngangsterskel. Det vil si at alle elever skal møte oppgaver som både engasjerer og utfordrer dem i forhold til deres forutsetninger og evner. Han peker spesielt på de begavede elevene i matematikk som trenger tilstrekkelig med utfordringer for ikke å gå lei eller bare si seg ferdig med oppgavene. Oppgavedesigneren uttaler også i det første intervjuet: *«Men vi har med oss alle sammen (...) prøver å gi de såpass rike oppgaver slik at det skal være noe for alle»* (1. intervju med lærer som designet oppgavene). Når læreren her bruker begrepet alle elever omtaler han det mangfoldet av elevforutsetninger og evner som finnes i klasserommet. Dette er interessante momenter med tanke på å imøtekomme kravet om tilpasset undervisning for alle elever (Prinsipp for opplæringa, 2013). Spesielt interessant er det dersom man tar i betraktning resultatene fra TIMSS 2011 som dokumenterte at de talentfulle elevene i norsk skole ikke får tilstrekkelig med faglige utfordringer i matematikk (Grønmo et al., 2012). Oppgavedesigneren viser med dette at tilpasset undervisningen er noe han har tatt i betraktning når han har designet oppgavesettet, og da spesielt i forhold til de elevene som er faglig sterke i matematikk.

Det andre prinsippet oppgavedesigneren tar utgangspunkt i når han designer oppgaver er inquiry:

> *«(...) det andre oppfatter at hvis jeg tar tak i disse stikkordene for inquiry med utforskende, utprøvende, spørrende, undrende, reflekterende, hvis jeg kan få elevene inn i det moduset, da, men jeg betyr veldig mye oppfatter jeg for hvis jeg kan være spørrende så kan det smitte over på elevene. Veldig kontrast til for eksempel ei lærebok.»* (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

Oppgavedesigneren ønsker altså å fremme en matematikkundervisning preget av inquiry (jf. kapittel 2.4) hvor refleksjon og utforskning står i sentrum. Samtidig påpeker han at lærerens utforskende holdning i undervisningssituasjonen er en viktig forutsetning for elevenes egen utforskning fordi hans holdning «smitter over» på elevene. Dette samsvarer med forskningen til Erfjord (2008) hvor inquiry ble en felles holdning til matematikkundervisningen hos både læreren og elevene. Det er også et interessant moment at læreren kontrasterer seg selv med læreboka. Dette kan antyde at læreren mener at læreboka inneholder rutineoppgaver med korte presise svar, i motsetning til lærerens spørrende holdning til undervisningen. I denne sammenhengen kan det trekkes paralleller til Boaler (1998) sin forskning. Hun dokumenterte at i klasserommet hvor læreboka var retningsgivende for matematikkundervisningen, utviklet elevene en prosedyreforståelse av matematikken som var av begrenset hjelp for dem i møte med alle kontekster utenfor læreboka. Inquiry blir videre omtalt i neste delkapittel (kapittel 5.2.2).

Til slutt fremhever oppgavedesigneren hvor utfordrende det har vært å designe alle oppgavene på egen hånd, og hvor fort det er å være litt upresis i begrepsbruken: *«Det opplever jeg faktisk som litt utfordrende når du sitter alene med det, og skal designe alle tingene hvor fort det er å være litt upresis»* (1. intervju med læreren som designet oppgavene). Dette ble blant annet tydelig når læreren presenterte noen av oppgavene han hadde designet på et verksted tilknyttet DIM-prosjektet i januar. Det var spesielt en oppgave som skilte seg ut:

> *«Det var i utgangspunktet en om pytagoras, og det jeg hadde gjort på den første utgaven som jeg lagde i desember da hadde jeg laget en trekant og så snakket jeg om katet og katet og hypotenus, og det er jo snakk om den der 90 eh rettvinklet. Så det var første utfordring hun [en av deltakerne i prosjektgruppa] gav. Så da sa jo jeg at oi, det var en annen oppgave som sveiv i hodet mitt når jeg laget den (...) Så endret jeg litt på den»* (2. intervju med lærer som designet oppgavene).

I etterkant av verkstedet kunne designeren gjøre endringer basert på tilbakemeldingene han hadde fått. Dette var selvfølgelig ikke noe han ble pålagt, men et ønske han selv hadde om å utvikle oppgavene slik at elevene skulle oppleve dem som utfordrende og engasjerende. Revideringen av oppgaven basert på tilbakemeldingene fra prosjektgruppen kan minne om prosessen som lærerne i Laborde (2001) sin studie gikk igjennom med tanke på oppgavedesign.

5.2.2 Inquiry

Læreren som designet oppgavene beskriver i intervjuene at de ved skolen hans har en modell for å bygge matematisk kompetanse hvor de ønsker å *«(...) utforske ting, eksperimentere med ting som resulterer i at vi oppdager og ser noe»* (1. intervju med læreren som designet oppgavene). Utgangspunktet er dermed å skape oppgaver hvor elevene kan utforske matematiske figurer for å stimulere nysgjerrighet og videre matematisk kompetanse som er det overordnede målet.

Når oppgavedesigneren blir bedt om å gi en kort beskrivelse av oppgavene han har laget trekker han frem stikkordet *guidet utforskning.* Begrunnelsen for dette begrepet henter han fra doktoravhandlingen til Erfjord (2008). Ved å kombinere de to undervisningstilnærmingene som Erfjord omtaler i sin studie ønsker oppgavedesigneren å hjelpe elevene i gang med utforskningen:

> *«Han [Erfjord] hadde to klasser han forsket på, den ene var veldig sånn helt fritt og den andre var veldig strammet, veldig guidet, og hvis jeg skjønner han så tenker han en blanding mellom de to tankegangene. Når vi kalte det for guidet inquiry eller guidet utforskning, på en måte, hjalp de litt i gang med forskninga. Sånn var tanken i alle fall»* (1. intervju med læreren som designet oppgavene).

Det har altså vært et grunnleggende ønske fra oppgavedesignerens side å designe oppgaver som gir elevene faglige utfordringer (jf. kapittel 5.2.1). På samme tid ønsker han at oppgaveteksten skal hjelpe elevene i gang med utforskningen ved å gi dem et tips eller hint om hvordan de kan starte utforskningen av problemet. Læreren kommenterer ikke hvorvidt han har lykkes med denne intensjonen, men det er kanskje ikke så unaturlig i og med at intervjuet ble gjennomført i starten av prosjektet. Læreren som anvendte oppgaven gir uttrykk for en lignende holdning når han hevder at: *«(...) veldig mange av oppgavene er utforskningsoppgaver»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene). Han har altså erfart at mange av oppgavene som han anvendte i undervisningen var utforskningsoppgaver. Dette kan tyde på at oppgavedesigneren intensjon har lykkes.

Læreren som anvendte oppgavene uttrykket også en bekymring over at oppgavene i noen tilfeller var litt *for* utforskende for elevene. Han stiller seg kritisk til om han ved neste gjennomføring ville ha lukket noen av oppgavene eller stoppet utforskningsprosessen tidligere:

> *«Jeg kjente nok kanskje litt på det at jeg kanskje brukte det bitte litt grann mye, det var noen [av elevene] som ble litt frustrerte i forhold til, si det nå bare som det er. Hvorfor skal jeg finne ut av alt dette selv? Så jeg tror jo at hvis jeg skulle gjort det igjen, altså hatt samme tema en gang til, så hadde jeg kanskje lagt opp bitte litt grann annerledes i forhold til det. At jeg hadde kuttet noen ting litt før for å spare noen litt frustrasjon (...) og kanskje lukke noen av de litt mer, noen av oppgavene»* (Intervju med lærer som anvender oppgavene).

Frustrasjonen som læreren beskriver hos elevene kan være et resultat av at denne måten å arbeide på både er ny og ukjent for elevene. Forskningen til både Erfjord (2008) og Fuglestad (2011) har vist at det å praktisere en inquiry-tilnærming til matematikkundervisningen er noe som krever tilvenning både for læreren og elevene. I stedet for å tenke at elevene da trenger enda mer øving på slike oppgavetyper ønsker læreren å lukke noen av dem. Det vil si at det presiseres tydeligere i oppgaveteksten hva elevene skal undersøke, hvordan de kan gå frem, og når de er ferdige eller har nådd målet med utforskningen. Dette kan betraktes som et skritt nærmere oppgavediskursen. Når læreren blir konfrontert med hvorvidt han ønsker å gi elevene mer mengdetrening svarer han følgende:

> *«Ja, trenger ikke være mengdetrening, men klar ordlyd i hva skal du fram til ikke hva finner du ut av, hva kan du se. Men at det blir jo for så vidt mengdetrening men det var et par som kjente på litt frustrasjon i forhold til at, er det det som er poenget»* (Intervju med lærer som anvender oppgavene).

Sitatet illustrer at lærerens reaksjon på elevenes usikkerhet blir å «forenkle» oppgavene slik at de får en klar ordlyd som elevene ikke kan misforstå. Selv om lærerens intensjon er god fordi han ønsker å unngå usikkerhet og frustrasjon hos elevene, vil en ved å lukke oppgavene miste en del av den utforskende biten som nettopp utgjør en så viktig del av åpne oppgaver (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Boaler, 1998; Furinghetti & Paola, 2003; Mogetta et al., 1999).

Læreren som anvendte oppgavene reflekterer over elevenes holdning når de arbeidet med oppgavesettet, og forteller at elevene ofte forventer en bekreftelse fra han på når de er i mål med oppgavene: *«De ville gjerne ha en sånn der, nå er, har [du] funnet fram til det som var poenget her»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene). I den tradisjonelle oppgavediskursen ville dette vært en naturlig tanke i undervisningssituasjonen hvor lærerens oppgave er å vurdere hvorvidt elevene har løst matematikkoppgavene samt gi dem hint om veien videre. I en undervisningssituasjon preget av en spørrende og utforskende holdning vil det derimot stadig være nye sammenhenger og problemer som kan utforskes, og dermed meningsløst å anerkjenne ovenfor elevene at «nå er du ferdig». Lignende funn ble også gjort i LCM studien (Fuglestad et al., 2007) hvor elevene opplevde mye frustrasjon når de strevde med å forstå hva de skulle gjøre eller når læreren ikke ville gi dem «raske svar» på oppgavene.

Da oppgavedesigneren ble spurt om han kunne gi et eksempel på en oppgave som han syntes passet spesielt bra i undervisningen og hvorfor svarte han følgende:

«(…) *de som var bra var kanskje de mest utfordrende oppgavene (...) Den ene oppgaven som jeg syntes var bra den var det med vinkelsummen i polygoner. Oppgave 02 – 3 og det gikk jo på det at jeg oppfattet faktisk at det var litt spennende å se hvordan vinkelsummen endra seg om de hadde firkanter, femkanter, sekskanter som, og så ser du at det tangerer det litt inn på neste spørsmål med litt sånn utforskende. Den syntes jeg var litt sånn bra»* (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

Oppgavedesigneren starter med å trekke en parallell mellom utfordrende oppgaver og de han opplevde som bra, og hevder at de beste oppgavene kanskje nettopp var de mest utfordrende. Oppgaven han henviser til som god er oppgave D fra oppgavearket Polygon 02 – 3 (figur 5.10). Han beskriver prosessen med å lete etter sammenhengen mellom ulike mangekanter og vinkelsummen i mangekantene som spennende. Dessuten antyder han en sammenheng mellom gode oppgaver og utforskende oppgaver.

Funn fra intervjuet med oppgavedesigneren illustrer også at selv om oppgavene i utgangspunktet har et stort potensiale for læring, vil ikke alltid dette potensialet realiseres i undervisningssituasjonen:

«(...) jeg strevde litt med, det var den som heter 03 – 4, spesielt oppgave A. Jeg hadde laget, designet noe på GeoGebra som jeg hadde lagt ut på GeoGebra sin side uten å, tatt vekk, skjult alle hjelpestreker. Så skulle de finne ut hvilken speiling det var, den var ålreit. Men de skulle også, spør etter speilingslinjer eller speilingspunkt og det var for krevende. Altså det var, det ble litt meningsløst når de holdt på ble det for vanskelig for de, hadde jeg lagt inn noen nøtter. Så jeg burde ha laget den litt mer sånn: prøv å finn ut flest mulig av disse, og obs det kan være noen som har to forskjellige symmetriopplegg. Både speiling og parallellforskyvning for eksempel» (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

I forkant av gjennomføringen hadde læreren tenkt at dette ville være en oppgave hvor elevene fikk utforsket symmetrier, og selv oppdage sammenhengen mellom hvordan symmetrien «oppfører seg» og hvor punkter og linjer som er viktige for symmetrien er plassert (jf. oppgaveteksten i figur 5.6). Under gjennomføringen oppdaget læreren imidlertid at det andre spørsmålet ble for vanskelig for elevene. De skjønte ikke hvordan de skulle gå frem for å løse oppgaven, og dermed ble hele utforskningsprosessen også meningsløs. Sammenfallende refleksjoner ble presentert i kapittel 5.1.1 etter at jeg hadde analysert samme oppgave med utgangspunkt i analyseverktøyet.

5.2.3 Interaktivitet

Begrepet *interaksjon* blir ikke eksplisitt brukt av lærerne i DIM-prosjektet for å beskrive samspillet mellom elevene og DGE, men informantene gir flere steder i intervjuene indirekte uttrykk for viktigheten av dette samspillet. Det påpekes blant annet hvordan figurene i GeoGebra endrer seg som en følge av at elevene drar i dem: *«(...) de [elevene] skal dra i denne trekanten og så skal de se litt på vinkler og sider, hva som skjer»* (1. intervju med lærer som designet oppgavene). Samtidig gir programmet elevene respons på handlingene de utfører: *«At du kunne snu på det, trekke og når du da begynte å trekke, og det fortsatte»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene). Det skjer med andre ord ting på skjermen, for eksempel at figurer endrer seg, som en følge av elevenes interaksjon med programmet. Ifølge læreren som anvendte oppgavene fører denne interaktiviteten til at elevene kan se «de store linjene» i matematikken:

«Men det [GeoGebra på iPad] er jo et nydelig verktøy når alle sitter med, på hver sin, og kan måle vinklene og trekke i det. Du kan jo se mye større linjer enn det en har

> *kunnet tidligere, se sammenhengene eller og, det jeg har i alle fall drevet med tidligere. Da har en vist noen ting, men her kan de jo sitte og prøve på tingene selv (...) du har det visuelle foran deg (...) Det gir nye muligheter»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene).

Denne interaksjonen mellom eleven og DGE gir ifølge læreren som anvendte oppgavene *nye* muligheter, både for elevenes utforskning og elevenes læring. DGE kan dermed være et viktig verktøy for elevenes undersøkelse og oppdagelse av matematiske sammenhenger samtidig som den gjør matematikken elevene arbeider med visuell. Oppgavedesigneren påpeker videre at elevene lærer mye matematikk i dette samspillet: *«(...) de fleste arbeider greit, det skjer mye matematikk»* (2. intervju med lærer som designet oppgavene). En mulig forklaring på hvorfor det skjer mye matematikk kan være potensialet for læring som ligger i det elevenes hypoteser og antakelser konfronteres med hva de faktisk observerer på skjermen (Laborde, 2001; Marrades & Gutiérrez, 2000). Selv om dette ikke er den dominerende arbeidsmåten i oppgavesettet synliggjøres det for eksempel i oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.5). Elevene får først spørsmålet *«Hvilke av disse firkantene er kvadrater?»* Ved første øyekast kan det se ut som at alle firkantene er kvadrater. Ved nærmere undersøkelse vil imidlertid elevene oppdage at flere av firkantene endrer form når de drar i dem. På den måten skjer det en konfrontasjon mellom hva elevene trodde (at firkanten var et kvadrat), og hva de faktisk observerer på skjermen når de drar i hjørnene til figuren.

En annen faktor kan være at interaksjonen mellom eleven og DGE driver arbeidet med oppgavene fremover, uten at læreren trenger å involvere seg: *«Jeg oppfatter det som utforskning, de haler og drar, ser om de kan se noen sammenhenger. Så er det det at jeg kan holde meg tilbake og ikke fortelle hva de skal lete etter»* (1. intervju med lærer som designet oppgavene). Videre hevder oppgavedesigneren at dersom elevene ikke får mulighet til å arbeide med oppgaven dynamisk, og dra i figurene, blir hele arbeidsprosessen meningsløs: *«(...) den følte jeg ble veldig meningsløs når de [elevene] ikke kunne kjøre det programmet»* (2. intervju med lærer som designet oppgavene). Jeg vil med utgangspunkt i disse to sitatene argumenterer for at det er interaksjonen mellom eleven og DGE, og da tilbakemeldingene DGE gir elevene når de arbeider, som driver arbeidet med oppgavene fremover. Samtidig er interaktiviteten viktig for at elevene skal oppleve arbeidet med oppgavene som meningsfulle og verdt å undersøke.

Interaksjonen mellom elevene og DGE blir i tillegg synliggjort når lærerne beskriver oppsummeringsfasen: *«Også kan de stå å trekke på det når de kobla på sin iPad eller de lager det kjapt når de er der oppe, så de viser det»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene). Elevene blir altså bedt om å komme frem til tavla og demonstrere hvordan de har løst en bestemt oppgave eller vise hvordan en bestemt figur konstrueres i GeoGebra. På den måten illustreres konstruksjonsprosessen som ligger bak de dynamiske figurene for hele klassen, og de elevene som ikke har løst den aktuelle oppgaven. Oppgavedesigneren gir også uttrykk for en lignende holdning: *«(...) så trekker, kobler de [elevene] inn de forskjellige iPadene som de viser. Kan noen vise hvordan de laget en speilingsfigur? Kan noen vise hvordan de laget, ja»* (2. intervju med lærer som designet oppgavene). Interaksjonen med GeoGebra utgjør dermed en viktig del av oppsummeringsfasen, og fungerer som et utgangspunkt for plenum diskusjonen. Følgelig vil DGE både påvirke elevenes resonnering og de matematiske begrunnelsene som gis fordi elevene nettopp utforsker matematikken ved hjelp av verktøyene som er tilgjengelige i DGE. Dette samsvarer med forskningen til Straesser (2002) som har vist at DGE medierer hvordan elevene lærer geometri, men også indirekte hvordan læreren underviser.

5.2.4 Kognitive krav

Under aspektet *kognitive krav* er det tre gjentakende temaer som skiller seg ut i intervjuene. Det ene er oppsummeringsfasen eller konsolideringsfasen i slutten av hver time:

> *«Og så skal du ha en oppsummering som jeg oppfatter som den viktigste biten som en fort glemmer i norsk skole hvor en skal dra ut, og som faktisk er den mest arbeidsbelastende for meg. Du kan ikke forberede deg veldig på det, og så skal du dra ut matematisk kompetanse av det elevene sier (...) så skal jeg ha hodet kaldt hva er det egentlig vi holder på med ut fra kompetansemålene vi skal lære. Så det opplever jeg som veldig arbeidskrevende, men gull verdt»* (1. intervju med læreren som designet oppgavene).

Her fremhever læreren konsolideringsfasen som den kanskje viktigste delen av undervisningen, og svært arbeidskrevende siden den ikke kan planlegges på forhånd. Målet med oppsummeringen er nemlig å la elevene se sammenhengen mellom oppgavene de har utforsket og det matematiske læringsmålet for timen. Tilsvarende fremhevet PISA-rapporten fra 2012 konsolideringsfasen som en essensiell del av undervisningen, samtidig som det påpekes at norske lærere ikke vektlegger denne prosessen i stor nok grad (Kjærnsli & Olsen, 2013). Læreren antyder også en lignende oppfatning av lærerens prioritering av konsolideringsfasen når han hevder at denne delen av undervisningen ofte har blitt glemt i norsk skole. I denne sammenheng kan det være nyttig å trekke paralleller til oppgavediskursen som har preget norsk matematikkundervisning i en årrekke (Mellin-Olsen, 1996), og som i liten grad legger til rette for felles refleksjon og bearbeidelse av undervisningsstoffet. Læreren som anvendte oppgavene sier seg imidlertid enig med oppgavedesigneren, og betrakter konsolideringsfasen som en viktig del av undervisningen. Samtidig uttrykker han at det er svært utfordrende å beregne hvor mye tid som trengs til denne prosessen:

> *«(...) det [konsolideringsfasen] er jo en av de tingene jeg ikke helt har klart å finne balansegangen på. Hvor mye tid trenger jeg til oppsummering for å klare og få frem de matematiske poengene jeg vil ha frem på slutten. Der har jeg noen timer der jeg sitter, egentlig kan har 10 minutt som du kan finne på, eller trekke inn andre ting, og så bommer jeg helt i noen av timene. Jeg rekker ikke, jeg er ikke kommet frem til poenget mitt for plutselig har de hengt seg opp i noe annet som var gøy, og så må vi jo ta det og, også må en starte på igjen i neste time. Så det er en øvingssak med den typen oppgaver, og jeg er ikke helt i mål enda»* (Intervju med lærer som anvender oppgavene).

Begge lærerne gir i sitatene ovenfor uttrykk for at beregningen av tiden som trengs til oppsummeringsfasen kan være spesielt vanskelig av flere grunner. For det første påpeker oppgavedesigneren at du ikke kan forberede deg på forhånd, og så skal du klare å poengtere de matematiske poengene i det elevene sier. Tilsvarende hevder læreren som anvendte oppgavene at det er vanskelig å beregne hvor mye tid som trengs for å frem de matematiske poengene han ønsker. Det er altså vanskelig å beregne tiden fordi dersom oppsummeringen skal føles relevant og nyttig for elevene må den ta utgangspunkt i den foregående diskusjonen i klasserommet, oppgavene elevene har arbeidet med og innspillene de kommer med. For det andre påpeker læreren som anvendte oppgavene at elevene plutselig kan henge seg opp i noe som han ikke hadde tenkt over på forhånd. Selv om han ønsker å gå videre kreves det noen ganger at en belyser de matematiske momentene elevene trekker frem slik at en ikke ødelegger gleden deres ved matematikken. Jeg tror også det er viktig å ta tak i innspillene fra elevene dersom de skal føle selvsikkerhet i forhold til at deres argumentasjon og refleksjoner er vel så viktige som læreren sine. Til slutt fremhever oppgavedesigneren at selv om dette er svært krevende er det *«gull verdt»*. Dette kan antyde at han har erfart at oppsummeringsfasen er viktig for elevens læring og matematiske forståelse. For eksempel gjennom synliggjøringen av oppgavene elevene har arbeidet med og de underliggende matematiske begrepene.

Det andre momentet som fremheves i intervjuene er at elevene benyttes aktivt i oppsummeringsfasen:

> *«Jeg brukte elevene mye, altså hva fant du ut? Også kobler de på sin iPad også ser vi på det. Av og til forklarer de, av og til stiller de spørsmål ut eller jeg stiller spørsmål og så svarer resten. Ser dere noe? Når det gjelder figurer, egenskaper, hvilken figur [har de] klart, prøvd å lage det? Ja, er det det? Hvordan måtte det ha vært? Også kan de stå å trekke på det når de kobla på sin iPad eller de lager det kjapt når de er der oppe så de viser det»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene).

Læreren anvender med andre ord elevenes løsninger som et felles utgangspunkt for refleksjon og vurdering i klasserommet. I samtalen vektlegger han de geometriske egenskapene til figurene, og hvorvidt en figur er konstruert på riktig måte eller ikke. Læreren nevner også at elevene *«kan stå å trekke på det»* som antyder at klassen felles anvender dra-verktøyet i GeoGebra for å sjekke om konstruksjonen beholder de geometriske egenskapene. På den måten læres elevene opp til å argumentere for konstruksjonene sine med utgangspunkt i figurenes geometriske egenskaper. Tidligere forskning har vist at dette er viktige bestanddeler av undervisningen dersom elevene skal utvikle evnen til å gi gyldige matematiske resonnement, og være med i bestemmelsen av hva som er matematisk gyldig (Cobb & Yackel, 1998).

Til slutt trekkes de svakt presterende elevene i matematikk frem. Begge lærerne påpeker at de svake elevene er mer oppmerksomme og engasjerte i undervisningen, noe følgende sitat illustrerer:

> *«(...) hvis jeg vet at han [en tilfeldig elev i klassen] er svak i matematikk så hvis han har fått til noe så trekker jeg faktisk han fram for du kan se på dem, det lyser litt da. Så det er jo litt gøy for jeg har troa på at hvis de kan komme over det der fobi at jeg er ikke noe flink i matte»* (2. intervju med læreren som designet oppgavene).

Her kan vi se uttrykk for at oppgavedesigneren ønsker at elevene skal føle mestring og glede knyttet til matematikkundervisningen. Samtidig antyder han at mange har fobier knyttet til matematikk, og at dette mange ganger fører til at elevene har gitt opp allerede før de har startet på oppgaven. Derfor leter han bevist etter elever som er faglig svake, men som likevel har fått til den aktuelle oppgaven slik at han kan trekke dem frem i oppsummeringsfasen. På den måten motiverer han elevene samtidig som de får oppleve at matematikk er noe de mestrer, som igjen kan føre til økt selvtillit og glede i møte med nye utfordringer. Læreren som anvendte oppgavene har og gjort en lignende erfaring knyttet til elevene som presterer svakt i matematikk:

> *«(...) det har jo vært gøyere denne perioden enn tidligere for det er ofte de svake elevene som ikke har vært de første til oppe hånda med å ville fram å vise, de har syntes det har vært veldig gøy å kunne komme fram og vise hva de har laget»* (Intervju med lærer som anvendte oppgavene).

Sitatet illustrerer lærerens erfaring i forhold til at det var de faglig svake elevene som var tidligst oppe med hånda, og ønsket å komme frem til tavla å vise hva de hadde gjort. Dette har ifølge læreren ført til at undervisningen med dette oppgavesettet har vært gøyere enn tidligere emner.

6. Diskusjon

Temaet mitt i denne forskningsstudien er læringspotensialet i interaktive undervisningsopplegg i geometri, og i den forbindelse stilte jeg forskningsspørsmålet: *Hvilket læringspotensial er det i oppgavesettet i geometri på 8.trinn tilknyttet DIM-prosjektet?* For å belyse dette spørsmålet har jeg gjennomført analyser av oppgavene samt intervjuer med to av lærerne som er tilknyttet DIM-prosjektet. Den ene læreren er designeren av oppgavene som også har brukt dem i egen undervisning, mens den andre læreren har brukt oppgavene i løpet av prosjektperioden. I det foregående kapittelet presenterte jeg funn fra oppgavesettet og intervjuene med utgangspunkt i analyseverktøyet jeg har utviklet, og jeg vil nå diskutere funnene i lys av aktuell teori fra kapittel 2 og 3.

Først vil jeg presentere noen refleksjoner rundt oppgavedesign i en interaktiv kontekst. Deretter vil diskusjonen presenteres med utgangspunkt i de tre aspektene fra analyseverktøyet. Til slutt vil jeg avrunde diskusjonen med å trekke frem tre ulike oppgaver. En oppgave som oppgavedesigneren mente hadde et stort potensiale for læring. En oppgave jeg mener har et stort læringspotensial basert på analysene av oppgavesettet. Og en oppgave hvor potensialet for læring ikke ble realisert i undervisningen.

6.1 Design av oppgavene

Hvordan oppgavene er designet er avgjørende for hvilket potensiale for læring de inneholder. Målsettingen med oppgavesettet er ifølge informanten at elevene skal utvikle elevenes forståelse av de geometriske begrepene som undersøkes. Samtidig må elevene kunne konstruere og lage figurerer i samsvar med kompetansemålene i LK06 (tabell 4.1). Et typisk eksempel fra oppgavesettet hvor dette synliggjøres er oppgave A fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.2) hvor elevene blir bedt om å utforske verktøyene mangekant og regulær mangekant. Målet med utforskningen er at elevene skal utvikle en dypere forståelse av de geometriske begrepene, og hvilke egenskaper som karakteriserer dem. Dette er forenelig med tidligere forskning som nettopp har påpekt mulighetene som gis til utforskning som en av de største fordelene ved DGE (jf. kapittel 2.3).

Da læreren som designet oppgavene ble spurt om hvilke styrende prinsipper han anvendte når han designet oppgavesettet trakk han frem to ting: rike oppgaver med en lav inngangsterskel og inquiry. De rike oppgavene skulle ifølge oppgavedesigneren sikre at elevene ble motivert til å gå i gang med oppgavene, og ivareta faglige utfordringer for alle elever. Han påpeker viktigheten av at spesielt de faglig sterke elevene får utfordringer tilpasset deres nivå slik at de ikke går lei eller sier seg ferdige med oppgavene før den eksperimenterende delen av undervisningen er avsluttet (jf. kapittel 4.2). Tilsvarende hevder Hiebert et al. (1997) at elevene må møte utfordringer som det er nødvendig at de tenker over, og hvor de kan anvende egne strategier og ferdigheter for å løse oppgavene. Jeg mener at dette er samsvarende med oppgavedesignerens omtalelse av rike oppgaver, og tilfellet i en stor andel av oppgavesettet (jf. figur 5.1; figur 5.9). Prinsippet om inquiry diskuteres i kapittel 6.2.

Et fellestrekk ved oppgavesettet er at de fleste oppgavene starter med å la elevene konstruere en figur, som de etterpå skal undersøke og identifisere egenskaper ved. I forskningslitteraturen er dette godt dokumentert som en effektiv måte å gjøre elevene kjent med DGE samt utvikle bruksmønstre i programmet (Fahlgren & Brunström, 2014; Leung, 2011; Marrades & Gutiérrez, 2000). En annen positiv følge av at oppgaveteksten ber elevene om å konstruere figurene selv er at de får innsikt i konstruksjonsprosessen som ligger bak de dynamiske objektene (Ruthven, 2009). Dette er blant annet tilfellet i oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 2 (figur 5.11) hvor elevene skal konstruere seks ulike mangekanter med utgangspunkt i de geometriske egenskapene til figurene. Deretter skal elevene utforske hverandres figurer, og identifisere dem på bakgrunn av konstruksjonen. Ifølge Ruthven (2009) vil innsikt i konstruksjonsprosessen føre til større innsikt i matematiske relasjoner og sammenhenger. I kapittel 4.3.1 problematisert jeg at oppgaveteksten i flere tilfeller er ufullstendig. Hvorvidt dette var designerens intensjon kunne imidlertid ikke kommenteres. I lys av analysene av intervjuene, hvor oppgavedesigneren selv kommenterte hvor vanskelig det er å være nøyaktig og presis når en designer oppgaver alene, kan det være rimelig å anta at dette i noen tilfeller har vært en glipp fra designerens side. Som for eksempel i oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 3 (figur 4.3) hvor det ikke presiseres at sekskanten er regulær.

Analysene av oppgavene har avdekket at løsningsstrategiene i DGE forutsetter en del matematiske forkunnskaper hos elevene (jf. kapittel 4.3.2). I noen tilfeller ble elevene introdusert for denne kunnskapen i de foregående oppgavene, mens informasjonen andre ganger var utelatt. Da må elevene tilegne seg kunnskapen de trenger for å løse oppgaven på annet vis enten fra medelever, lærer eller interaksjonen med DGE. Dette samsvarer med funn gjort av Laborde (2001) hvor hun beskriver at løsningene i DGE i mange tilfeller stiller større krav til elevens ferdigheter i matematikk enn hva som er tilfellet i et papir-og-blyant miljø. I DGE har ikke elevene mulighet til å for eksempel telle seg fram til et svar eller bruke linjene og rutene på arket til å konstruere en spesifikk figur. I stedet må de resonnere med utgangspunkt i de geometriske egenskapene til figurene. Deretter må elevene anvende disse egenskapene når de skal konstruere figurer i DGE hvor de geometriske egenskapene bevares til tross for at figuren dras i DGE. Oppgavedesigneren belyser ikke denne problemstillingen i intervjuet, men hvordan oppgavesettet er designet kan implisitt gi uttrykk for at dette er noe oppgavedesigneren er opptatt av. For eksempel krever både oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.5) og oppgave A fra oppgavearket Symmetri 03 – 4 (figur 5.6) at elevene argumenterer med utgangspunkt i egenskapene til figurene. Likeledes utfordrer oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 2 elevene til å konstruere mangekanter som bevarer egenskapene når figurene dras i DGE. Figurene vil kun bevare egenskapene dersom de er konstruert ved hjelp av verktøyene i DGE. Læreren som anvendte oppgavene synliggjør også sammenhengen mellom de geometriske egenskapene og konstrueringen av dynamiske figurer når han i oppsummeringsfasen stiller spørsmål som: Ser dere noe? Når det gjelder figurer, egenskaper, hvilken figur har de prøvd å lage? Er det riktig? Hvordan måtte det ha vært? (jf. kapittel 5.2.4). På den måten utfordres elevene til å reflektere over de geometriske egenskapene til figurene som igjen er nært knyttet til konstruksjonsprosessen bak.

Leung (2011) anbefaler tre styrende prinsipper når en skal designe oppgaver for DGE (jf. kapittel 3.4). Læreren som har designet oppgavene gir ikke eksplisitt uttrykk for at han har tatt utgangspunkt i noen av disse prinsippene, men jeg mener likevel at en ut fra oppgavesettet kan argumentere for at de har spilt en rolle i designprosessen. For det første anbefaler Leung (2011) å inkludere oppgaver som gjør elevene kjent med programvaren, hvor de får utforsket mulighetene DGE tilbyr. Dette mener jeg at læreren i min studie i stor grad legger til rette for. Oppgave A fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.2), som ble presentert i kapittel 5, gjør elevene kjent med verktøyene *mangekant* og *regulær mangekant*. Videre er oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.5) et eksempel på en oppgave hvor elevene får utforsket mulighetene i DGE i tilknytning til dra-verktøyet.

For det andre bør elevene etter en periode med utforskning oppfordres til å matematisere funnene sine. Dette blir synlig i oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 4 (figur 5.7). Oppgaven starter med at elevene skal konstruere en trekant og den tilhørende omskrevne sirkelen til trekanten. Første steg er å dra i trekanten for å lete etter sammenhenger. Deretter gjør oppgaven elevene oppmerksomme på hva som skjer når sentrum i sirkelen ligger innenfor eller utenfor trekanten, og hva som skjer når sentrum ligger nøyaktig på en av sidene i trekanten. Jeg tolker dette som et tegn på at læreren ønsker at elevene skal reflektere over observasjonene de gjør, og drive med målrettet utforskning i forhold til plasseringen av sirkelens sentrum.

Det siste steget vektlegger utviklingen av elevenes induktive resonnering, og evnen til å begrunne og bevise sine konstruksjoner og løsninger. Oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.5) utfordrer elevene til å utforske seks gitte firkanter, for deretter å beskrive hvilke krav de oppfyller og hvilke fagbegrep de omtales under. På den måten utfordres elevene til å begrunne hvorfor den aktuelle firkanten for eksempel er et kvadrat, og dette kan bare gjøres med utgangspunkt i figurens egenskaper. Læreren som anvendte oppgavene belyste også denne problemstillingen (jf. kapittel 5.2.4). Han anvendte elevenes presentasjon av sine løsninger i konsolideringsfasen som et felles utgangspunkt for å diskutere konstruksjonsprosessen bak de dynamiske figurene. Dra-verktøyet ble brukt for å sjekke hvorvidt figuren var konstruert på riktig måte, og elevene måtte selv begrunne hvorfor eller hvorfor ikke figuren innfridde kravene til for eksempel et kvadrat. På den måten blir oppsummeringsfasen en viktig arena for å utvikle elevenes evne til matematisk argumentasjon og refleksjon. Dette er sammenfallende med Cobb og Yackel (1998) sin beskrivelse av intellektuell autonomi. Ifølge dem vil miljøet i slike tilfeller være kjennetegnet av en felles forståelse mellom elevene og læreren av hva som er matematisk gyldig, hvor elevene gradvis overtar ansvaret for å bedømme den matematiske gyldigheten til det som presenteres. Jeg mener det er dette vi ser tendenser til i oppsummeringsfasen når elevene blir utfordret til å vurdere figurene i GeoGebra med utgangspunkt i de geometriske egenskapene.

6.2 Inquiry

Når det gjelder inquiry-aspektet har dette gjort seg gjeldende i store deler av oppgavesettet. Læreren som designet oppgavene fortalte i intervjuet at de ved skolen han arbeider har en modell for å bygge matematisk kompetanse. De utforsker og eksperimenterer med ting som resulterer i at de oppdage noe interessant eller spennende, som de igjen kan arbeide videre med og diskutere i undervisningen. Denne måten å arbeide på kan assosieres med hvordan Wells (1999) definerer inquiry som en holdning, hvor en sammen forsøker å finne svar, stille spørsmål og undersøke sammenhenger. Oppgavedesigneren trakk videre frem inquiry som en av totalt to prinsipper han tok utgangspunkt i da han designet oppgavesettet. Oppgavene er designet for å legge til rette for elevenes utforskning. Samtidig har oppgavedesigneren erfart at lærerens modellering av hvordan en kan møte matematikken med en spørrende og utforskende holdning er avgjørende for elevenes egne undersøkelser. En lignende oppdagelse ble gjort i LCM studien hvor lærerens veiledning og spørsmål underveis mens elevene arbeidet med utforskende matematikkoppgaver var betydningsfull for å motivere elevene til å fortsette arbeidet når de sto fast eller kjedet seg.

PISA-rapporten fra 2012 (Kjærnsli & Olsen, 2013) dokumenterte at matematikkundervisningen i Norge relativt ofte bærer preg av oppgaver som øver rutinemessige ferdigheter. Flere TIMSS rapporter (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2010) har også bekreftet at individuelt arbeid med denne typen matematikkoppgaver dominerer i norske klasserom. På bakgrunn av analysene av oppgavesettet, som viste at 25 %

av oppgavene (figur 5.1) kan betraktes som strukturerte oppgaver som øver rutinemessige ferdigheter, vil jeg dermed argumentere for at dette ikke er den dominerende oppgavetypen i DIM-klasserommene. Det kan heller tyde på at oppgavesettet inneholder oppgaver av en mer utforskende karakter noe som må sies å kunne være et positivt tegn sett i lys av forskningen til Boaler (1998). Hun hevder at elevene i møte med åpne oppgaver i matematikkundervisningen vil utvikle en begrepsforståelse av matematikken som både vil være til hjelp for elevene i møte med oppgaver utenfor læreboka, og med problemstillinger fra deres egen hverdag. I tillegg viste funn fra LCM studien at elevene etter en periode med utforskende matematikkundervisning, letter så sammenhenger mellom ulike matematiske temaer (Fuglestad et al., 2007).

Den resterende andelen av oppgavesettet, 75 %, ble ut fra analysen av oppgavesettet klassifisert innenfor kategoriene strukturert utforskning, guidet utforskning og åpen utforskning (figur 5.1). Selv om disse kategoriene er ulike, har de alle til felles at de legger til rette for elevenes utforskning. Kategoriene skilles fra hverandre etter hvor retningsgivende oppgaveteksten er for elevenes utforskning. I intervjuet med læreren som anvendte oppgavene beskriver han at veldig mange av oppgavene i oppgavesettet er utforskningsoppgaver (jf. 5.2.2). Dette er i tråd med tidligere studier som har dokumentert at en inquiry-tilnærming til matematikkundervisningen kombinert med DGE gir gode muligheter for elevens utforskning og eksperimentering (Erfjord, 2008, 2011; Fuglestad, 2009).

Samtidig reflekterer læreren som anvendte oppgavene over om oppgavene til tider var litt for utforskende. Han forteller om episoder fra klasserommet hvor elevene ikke forsto hvorfor «*de måtte finne ut av alt dette selv?*», og i stedet ønsket de at han skulle gi dem svaret. Jeg tror disse elevutsagnene kan ha sammenheng med at dette er en ny måte å arbeide på i matematikkundervisningen som krever tilvenning både for læreren og elevene (jf. kapittel 5.2.2). Samtidig har elevene erfart fra tidligere år på skolen at det er læreren som til slutt avgjør hvorvidt de matematiske utregningene de har gjort er gyldige (Mellin-Olsen, 1996; Skovsmose, 2001, 2003). Utsagnene fra læreren som anvendte oppgavene antyder at han opplevde dette som et dilemma. På den ene siden ønsker han å hjelpe elevene forbi usikkerheten ved å lukke oppgavene slik at det kommer tydelig frem i oppgaveteksten hva elevene skal finne ut av. På den andre siden risikerer han da at elevene opplever det som kjedelig eller mengdetrening dersom oppgaveteksten presiseres for tydelig. Det blir dermed en avveining læreren må ta i forhold til hvilken type tenking og utforskning han ønsker å legge til rette for. Jeg vil imidlertid argumentere for at læreren betrakter dette som et mindre problem ved oppgavesettet, når han uttaler at arbeidet med oppgavene i DGE fører til at elevene kan se mye større linjer og sammenhenger enn det de har kunnet gjort i den tidligere undervisningen hans.

6.3 Interaktivitet

Interaktivitet betegner samspillet mellom eleven og DGE, nærmere bestemt eleven og GeoGebra. Når elevene utforsker figurer og geometriske egenskaper i GeoGebra får de tilbakemeldinger fra programmet på tingene de gjør. Læreren som anvendte oppgavene synliggjør dette samspillet når han forklarer at elevene kan snu på figurene i DGE, og «*når du da begynte å trekke, og det fortsatte*» (jf. kapittel 5.2.3). Elevene får altså en tilbakemelding fra GeoGebra på handlingene de gjør. Oppgavedesigneren belyser også dette samspillet når han forteller at elevene «*haler og drar*» og ser om de kan oppdage noen sammenhenger, mens han kan trekke seg tilbake. Ifølge oppgavedesigneren skjer det mye matematikk i dette samspillet (jf. kapittel 5.2.3).

Analysene av oppgavesettet indikerte at majoriteten av oppgavene, 84% (jf. figur 5.8), kan kategoriseres som oppgaver hvor DGE legger til rette for de materielle aspektene ved oppgavene eller den matematiske oppgaven. Dette kan tyde på at oppgavedesigneren i hovedsak betrakter DGE som et verktøy som kan legge til rette for elevenes utforskning av geometriske egenskaper og relasjoner. Ifølge Laborde (2001) er dette et typisk trekk når lærere designer oppgaver som er tiltenkt DGE for første gang. Oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 4 (figur 5.7) er et eksempel på en slik oppgave. Her skal elevene tegne en vilkårlig trekant, og så lete etter sammenhenger mellom vinklene og lengden på sidene ved å endre trekanten. I denne prosessen må elevene anvende dra-verktøyet, og de får på den måten utforsket mange ulike variasjoner av trekanten i løpet av relativt kort tid. Dersom elevene skulle løst en tilsvarende oppgave i et papir-og-blyant miljø måtte de har konstruert en ny figur for hver enkelt variasjon, noe som ville vært enormt tidkrevende.

Den resterende andelen på 16 % (jf. figur 5.8) betraktet jeg i analysen av oppgavesettet som oppgaver hvor medieringen til DGE fører til at selve oppgaven endres. Dette får konsekvenser for hvordan oppgaven er oppbygd og den matematiske forankringen, samtidig som elevenes løsningsstrategier også endres som en følge av de nye verktøyene. I analyseverktøyet mitt omfattet dette kategoriene oppgaver som modifiseres som en følge av DGE og oppgaver som kun eksisterer i DGE. Både oppgave B fra oppgavearket Polygon 02 – 1 (figur 5.5) og oppgave A fra oppgavearket Symmetri 03 – 4 (figur 5.6) er typiske eksempler på såkalte black box oppgaver hvor oppgavens mening er forankret i GeoGebra. Dette gjenspeiles ved at elevene gis noen figurer i DGE som de ved hjelp av dra-verktøyet og egne undersøkelser skal forsøke å identifisere egenskapene til. Selve konstruksjonsprosessen er skjult for elevene ved hjelp av et verktøy i GeoGebra som lar deg vise eller skjule objekter.

Et annet viktig moment å trekke frem i denne sammenhengen er et utsagn fra læreren som anvendte oppgavene. Han hevder nemlig at interaksjonen mellom eleven og DGE, hvor elevene kan teste ut forskjellige ting samtidig som programmet visualiserer matematikken de arbeider med, fører til nye muligheter i matematikkundervisningen (jf. kapittel 5.2.3). På den måten kan elevene utforske og eksperimentere med oppgavene i sitt eget «tempo». Videre hevder han at elevene ved å benytte dra-verktøyet i GeoGebra kan se mye større linjer og sammenhenger enn i den undervisningen han har drevet med tidligere. Jeg vil med utgangspunkt i dette argumentere for at DGE er et unikt verktøy for å illustrere betydningen av dynamiske begreper som for eksempel sirkel, regulære mangekanter og rotasjonssymmetri. Ved hjelp av dra-verktøyet kan elevene undersøke hvordan de geometriske egenskapene bevares til tross for at figuren endrer form når elevene drar i punktene. Denne påstanden kan underbygges av forskningen til Hölzl (2001) og Laborde (1991) som hevder at DGE fornyer tilgangen til matematiske begreper ved at elevene dynamisk kan undersøke hvordan figurenes egenskaper «oppfører seg» i forhold til hverandre, og på den måten unngå at enkelte egenskaper isoleres.

6.4 Kognitive krav

Oppgavesettet er designet med utgangspunkt i at elevene skal arbeide i grupper på to eller tre når de løser oppgavene. Dette er i tråd med tankesettet til den sosiokulturelle læringsteorien hvor elevene først lærer på et sosialt plan, for deretter å lære på et individuelt plan som en følge av den sosiale konteksten (Wertsch, 2007). Jeg vil argumentere for at oppgavesettet nettopp legger til rette for læring både på et sosialt og et individuelt plan. For det første lærer elevene på et sosialt plan i det de samarbeider i grupper om å løse oppgavene. I denne sammenhengen påpekte begge lærerne viktigheten av å tenke nøye gjennom gruppesammensetningen slik at elevene kunne fungere som hverandres signifikante andre og driver gruppearbeidet fremover. På den måten kan elevene i gruppearbeidet bevege seg over i den proksimale utviklingssonen hvor ny matematisk kunnskap utvikles (Säljö, 2001, 2006; Vygotsky, 1978). Dette bekreftes også av Hiebert et al. (1997) som hevder at elevene utvikler matematisk kunnskap når de reflekterer og kommuniserer med hverandre.

For det andre vil interaksjonen mellom eleven og DGE legge til rette for at eleven kan lære på et individuelt nivå. Dette blir blant annet synliggjort i oppgave E fra oppgavesettet Polygon 02 – 4 (figur 4.4). Her blir elevene bedt om å konstruere en trekant og den tilhørende innskrevne sirkelen til trekant. Elevene skal deretter sjekke konstruksjonen ved å endre på figuren. Når elevene drar i trekanten vil GeoGebra gi dem en tilbakemelding på om konstruksjonen er utført riktig eller ikke. Dersom konstruksjonen er riktig vil den innskrevne sirkelen endre seg i takt med trekant. I motsatt fall, dersom sirkelen ikke følger med har det skjedd et feiltrinn i konstruksjonsprosessen. På den måten gir interaksjonen med GeoGebra elevene tilbakemeldinger som enten kan føre til tilfredshet hvis konstruksjonen er riktig, eller undring og videre undersøkelser dersom konstruksjonen er feil.

Konsolideringsfasen i slutten av timen muliggjør dessuten læring gjennom felles diskusjon og refleksjon. Oppgavedesigneren beskriver denne delen av undervisningen som den mest arbeidsbelastende for han som lærer fordi den ikke kan planlegges på forhånd, og han må *«dra»* matematisk kunnskap ut av elevenes innspill. Samtidig bør det være en tydelig sammenheng mellom temaene som diskuteres og målet for timen. Han avslutter imidlertid setningen med å si *«men gull verdt»* (jf. kapittel 5.2.4) som indikerer at alt arbeidet til slutt er *verdt det*. Dette skyldes antageligvis fordi han opplever at det skjer mye læring i denne fasen. En mulig forklaring kan ifølge Anthony og Walshaw (2009) være at plenum diskusjonen er en god mulighet for elevene til å klargjøre sin egen forståelse av det matematiske begrepet som diskuteres, som dermed fører til at elevene lærer på et individuelt plan også i oppsummeringsfasen

I følge tidligere forskning ligger det største læringspotensialet i oppgaver som involverer høyere nivå av kognitive krav hvor elevene blant annet utfordres til selvstendig, kritisk refleksjon og utforskning (Anthony & Walshaw, 2009; Stein & Lane, 1996; Sullivan et al., 2013). Analysene av oppgavesettet dokumenterte at 65 % av oppgavesettet (figur 5.9) nettopp kjennetegnes av disse karakteristikkene, og klassifiseres som oppgaver som utfordrer elevene til tenkning av høyere orden. I mitt analyseverktøy innebærer dette kategoriene prosedyrer med forbindelse til mening og å gjøre matematikk. Et eksempel på en oppgave som innebærer høyere nivå av kognitive krav er oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 2 (figur 5.11). Her utfordres elevene til utforskning, vurdering og kreativitet når de skal konstruere mangekanter og deretter analysere hverandres konstruksjoner. Oppgavedesigneren fremhever også oppgave D fra oppgavearket Polygon 02 -3. Han hevder at denne oppgaven fungerte bra i undervingen samtidig som den er utfordrende for elevene. Begge disse oppgavene blir videre diskuteres i kapittel 6.5. Samtidig er det verdt å merke seg at lærerens rolle som stillas er en avgjørende faktor for å sikre at oppgaver av høyere orden bevarer denne egenskapen etter hvert som elevene arbeider med dem (Henningsen & Stein, 1997). Ved å benytte gruppearbeid som arbeidsmetode i matematikkundervisningen vil jeg argumentere for at mer kompetente medelever også kan få denne rollen som stillasbygger, og være med å hjelpe hverandre fremover ved blant annet å gi hverandre veiledning og støtte.

Rapporten fra TIMSS 2011 (Grønmo et al., 2012) pekte på manglende tilpasset og differensiert opplæring for alle elever i norsk grunnopplæring. Læreren har et ansvar for å sikre at alle elever får et likeverdig tilbud tilpasset deres ferdigheter og evner, og ifølge Mellin-Olsen (1996) er dette oppgaver og hjelp til å løse dem. Læreren i denne studien trekker spesielt frem de lavt presterende elevene i matematikk. Disse elevene viser nemlig tendenser til å gjøre noe de aldri ellers pleier å gjøre. De melder seg frivillig til å demonstrere på tavla hvordan de har løst den aktuelle oppgaven i oppsummeringsfasen, og synes til og med det er gøy! I studien til Mellin-Olsen (1996) antydet lærerne at det ville være interessant å se hvordan de svakeste elevene presterte dersom en gjorde noe annet i undervisningen enn den tradisjonelle oppgaveløsningen. Jeg vil med utgangspunkt i funnene fra intervjuene argumentere for at oppgavesettet fra DIM-prosjektet nettopp kan være et eksempel på et slikt annerledes undervisningopplegg som lærerne i Mellin-Olsen (1996) sin studie etterspør. Hvor de faglig svake elevene, ifølge læreren som anvendte oppgavene, «*syntes det har vært veldig gøy å kunne komme fram og vise hva de har laget*» (jf. kapittel 5.2.4).

Til slutt vil jeg med utgangspunkt i at 65 % av oppgavesettet defineres som oppgaver med høyere nivå av kognitive krav argumentere for at oppgavesettet også gir de faglig sterke elevene utfordringer som er tilpasset deres ferdighetsnivå. Dette var noe oppgavedesigneren var bevisst på når han designet oppgavesettet. Han påpeker viktigheten av at de *«begavede»* også får faglige utfordringer slik at de ikke går lei eller sier seg ferdige. Dermed kan oppgavesettet fra DIM-prosjektet være en måte å imøtekomme kravet fra TIMSS 2011 (Grønmo et al., 2012) om mer faglige utfordringer i matematikk for de faglig sterke elevene.

6.5 Læringspotensial

Hva er det da som kjennetegner oppgaver med et stort potensiale for læring? Under intervjuet med oppgavedesigneren spurte jeg om han kunne gi et eksempel på en oppgave som fungerte spesielt godt i undervisningen, og forklare hvorfor denne skilte seg ut. Han trakk da frem oppgave D fra oppgavearket Polygon 02 – 3 (figur 5.10). Oppgaveteksten ber elevene om å konstruere ulike regulære mangekanter. Deretter skal elevene finne sentralvinklene, vinklene mellom sidekantene og summen av vinklene for å anvende denne informasjonen til å undersøke sammenhengen mellom de tre begrepene. Når læreren skal begrunne hvorfor denne oppgaven passet spesielt bra i undervisningen trekker han frem tre momenter. For det første opplever oppgavedesigneren dette som en utfordrende oppgave hvor elevene må utforske sammenhengen mellom vinkelsummen i polygoner. Samtidig antyder han en sammenheng mellom de mest utfordrende oppgavene og de oppgavene som fungerte best i undervisningen. For det andre hevder han at det var spennende å se hvordan vinkelsummen endret seg i takt med polygonene. Når elevene har observert en del ulike polygoner kan de forsøke å generalisere det de har funnet for å forklare sammenhengen mellom en vilkårlig regulær polygon og den tilhørende vinkelsummen. Til sist påpeker han at når elevene undersøker polygonene de har konstruert kan dette også betraktes som utforskning. Samlet sett gir altså oppgaven elevene faglige utfordringer hvor de får utforsket grunnleggende matematiske begreper og sammenhenger. Ifølge oppgavedesigneren er dette en oppgave som fører til mye læring noe også forskningen til Sullivan et al. (2013) og Anthony og Walshaw (2009) underbygger.

Et eksempel på en oppgave som burde fungere godt i undervisningssituasjonen ut fra analysen av oppgavens intensjoner er oppgave C fra oppgavearket Polygon 02 – 2 (figur 5.11). Jeg vil argumentere for at denne oppgaven har et stort potensiale for læring av flere grunner. Jeg kommenterte i kapittel 5.1.3 at oppgaveteksten til dels er misvisende fordi det i starten antydes at figurene kan tegnes, mens det lenger nede presiseres at figurene må beholde de geometriske egenskapene når figurene dras i DGE som tilsier at de må konstrueres. Jeg vil til tross for dette argumentere for at oppgaveteksten guider elevene gjennom problemsituasjonen som de skal løse. Elevene får nemlig beskjed om å konstruere seks figurer i GeoGebra. Oppgaveteksten er svært detaljert med tanke på det tekniske aspektet i forhold til hvordan figurene skal lagres, og at alle hjelpestrekene skal skjules. Hvordan elevene skal gå frem for å konstruere figurene presiseres imidlertid ikke, men elevene har en oversikt over de karakteristiske egenskaper til hver figur dersom de trenger hjelp. Jeg har derfor kategorisert oppgaven som *guidet utforskning*.

I forhold til det interaktive aspektet ved oppgaven er den klassifisert som oppgaver som kun eksisterer i DGE, nærmere bestemt *black box oppgaver*. Oppgaven som elevene skal løse er todelt. Først skal de konstruere et eksempel på hver figur, deretter skal de undersøke hverandres figurer og lete etter geometriske egenskaper. Når elevene konstruerer figurene må de anvende dra-verktøyet for å sjekke om figurene er konstruert på riktig måte. Dette samsvarer med hvordan Hölzl (1996, 2001) beskriver en av de medierende rollene til DGE. Nemlig at arbeidet i DGE vil utvikle elevenes forståelse av dra-verktøyet slik at de også kan anvende det for å undersøke egne konstruksjoner. I den andre delen av oppgaven skal elevene undersøke hverandres figurer og lete etter geometriske egenskaper hvor selve konstruksjonsprosessen er skjult for elevene fordi alle hjelpelinjene er skjult i programmet. Dette er helt i overensstemmelse med hvordan jeg definerte kategorien i kapittel 4.3.1.

Til slutt har jeg klassifisert det kognitive kravet i oppgaven som *å gjøre matematikk*. Dette skyldes at dersom elevene skal løse oppgaven må de ha kontroll på hvilke geometriske egenskaper som kjennetegner hver figur, og hvordan figurene må konstrueres for at de skal beholde disse egenskapene når de dras i DGE. Oppgaven inviterer til tenking av høyere orden fordi elevene må utforske og forstå den matematiske sammenhengen bak figurene som skal konstrueres og relasjonene mellom dem. Oppgaven legger med andre ord til rette for inquiry og tenking av høyere orden i DGE som andre studier har vist fører til mye læring (Anthony & Walshaw, 2009; Boaler, 1998; Erfjord, 2008, 2011; Fuglestad et al., 2007; Jaworski et al., 2007; Laborde, 1991, 2001; Skemp, 2006; Sullivan et al., 2013). Dermed vil jeg argumentere for at oppgaven har et stort læringspotensial i matematikkundervisningen.

En interessant problemstilling er imidlertid hvorfor potensialet for læring ikke alltid blir omgjort til læring i undervisningssituasjonen? Siden datamaterialet består av både analyser av oppgavesettet og intervjuer av lærerne i etterkant av geometriemnet fikk jeg et innblikk i denne problemstillingen. I analysene av oppgavesettet ble oppgave A fra oppgavearket Symmetri 03 – 4 (figur 5.6) kategorisert som åpen utforskning. Grunnlaget for denne klassifiseringen var blant annet at oppgaven stiller store krav til elevenes evne og utholdenhet til utforskning siden de skal undersøke to spørsmål hvor spesielt det sistnevnte er ganske krevende. Under det andre intervjuet med læreren som designet oppgavene ble også den samme oppgaven nevnt. Læreren beskriver at arbeidet med oppgavene ble meningsløst fordi oppgaven rett og slett ble for vanskelig for elevene. De skjønte ikke hva de skulle finne ut eller hvordan de skulle gå frem for å undersøke problemet. Det at elevene opplever oppgavene de arbeider med som meningsfulle er et av kjennetegnene når Sullivan et al. (2013) beskriver oppgaver som antas å ha et stort potensiale for læring. Videre hevder de at oppgavene som anvendes i undervisningen bør overskride elevenes aktuelle kunnskapsnivå samtidig som oppgavens vanskelighetsnivå er begrenset til hva eleven kan klare med hjelp, altså må oppgavene befinne seg innenfor elevenes proksimale utviklingssone. Oppgavedesigneren har tidligere uttrykt at dette var en målsetting da han designet oppgavesettet.

Når læreren reflekterer over oppgaven og hva som kunne vært gjort annerledes kommenterer han oppgaveformuleringen. I stedet for det generelle spørsmålet om *«Hvor tror du linjer og punkter ligger som er viktige for å få til denne symmetrien?»* ville han ha spisset formuleringen slik at den i større grad motiverer elevene til å undersøke problemet: *«Prøv å finn ut flest mulig av disse, og obs det kan være noen som har to forskjellige symmetriopplegg. Både speiling og parallellforskyvning for eksempel»,* Denne refleksjonen tolker jeg som et uttrykk for at han i større grad ønsker å hjelpe elevene på «riktig spor» eller guide dem. Problemet er dermed den åpne, upresise oppgaveformuleringen som ikke klarer å presentere oppgaven på en slik måte at den engasjerer elevene. Hvordan oppgaveformuleringen guider elevene gjennom oppgavesituasjonen blir dermed et viktig moment for å sikre at potensialet for læring realiseres i undervisningen. Med utgangspunkt i den sosiokulturelle læringsteorien vil jeg hevde at også medelever eller lærere kan ha denne rollen som stillas eller signifikante andre som guider elevene i undervisningssituasjonen. Det faktum at elevene arbeider med oppgavene i grupper legger til rette for at disse mulighetene kan realiseres.

7. Avslutning

I dette kapittelet oppsummeres resultater og diskusjon med hensyn på å besvare forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil også gi noen indikasjoner om hvilke pedagogiske implikasjoner funnene mine bør føre til i matematikkundervisningen. Videre omtales områder for videre forskning på feltet, før jeg til slutt avrunder med noen refleksjoner rundt min egen prosess med å skrive denne masteroppgaven.

7.1 Konklusjon

Jeg har i denne studien studert læringspotensialet i en digital interaktiv matematikkundervisning, og da nærmere bestemt læringspotensialet i et oppgavesett i geometri som er utviklet i tilknytning til DIM-prosjektet. Derfor har forskningsspørsmålet mitt vært: *Hvilket læringspotensial er det i oppgavesettet i geometri på 8.trinn tilknyttet DIM-prosjektet?* Gjennom prosessen med å analysere oppgavesettet og lærernes utsagn har jeg funnet ut at dette dreier seg om flere forhold.

Et viktig aspekt for å sikre oppgaver med et høyt potensiale for læring er bruk av utforskningsoppgaver hvor elevene selv kan gjennomføre undersøkelser, og så reflektere over hvilke implikasjoner funnene deres har for det matematiske emnet som studeres. I oppgavesettet som har blitt analysert i denne studien er 75 % av oppgavene kategorisert som utforskningsoppgaver, hvor 58 % av disse ligger innenfor kategorien guidet utforskning. Oppgaveteksten i disse oppgavene veileder elevene til å undersøke problemsituasjonen på en konstruktiv måte slik at de ikke bare sitter igjen med verktøykunnskap, men også får et samspill med matematikken. I tillegg legger oppgaveteksten til rette for at elevene guides til å konstruere figurerer hvor de geometriske egenskapene holder, og ikke bare tegninger.

Studien har vist at DGE får ulike roller i matematikkundervisningen, men spesielt som tilrettelegger for elevenes tegne- og konstruksjonsprosess. I tillegg til å være en visuell forsterker for å undersøke og oppdage geometriske egenskaper ved ulike figurer i DGE. Lærerne belyser også hvordan interaksjonen mellom eleven og GeoGebra fører til nye måter å resonnere på i matematikken. Blant annet fordi dette samspillet gir elevene tilbakemeldinger på handlingene de foretar seg i DGE. Samtidig driver interaksjonen arbeidet med oppgavene fremover. Oppgavene i DGE legger også til rette for at elevene kan undersøke variasjoner av figurene de studerer ved å benytte dra-verktøyet. Alt dette synliggjør underliggende matematiske sammenhenger, spesielt ved bruk av dra-verktøyet, og evnen konstruksjonene i DGE har til å bevare de geometriske egenskapene til figuren dersom den er konstruert på riktig måte. Totalt sett peker disse funnene mot en vellykket integrering av DGE hvor teknologien gir mening til matematikken samtidig som matematikken rettferdiggjør bruken av teknologien i undervisningen (Laborde, 2001).

Til slutt har jeg også belyst aspektet kognitive krav som en viktig forutsetning for å skape et stort potensiale for læring. Oppgaveanalysene avdekket at 65 % av oppgavene defineres som oppgaver med høyere nivå av kognitive krav. Dette innebærer kategoriene prosedyrer med forbindelse og å gjøre matematikk som krever tenkning av høyere orden for å løses. Anthony og Walshaw (2009) hevder også at tenking av høyere orden innebærer å anvende algoritmer og formler på en slik måte at de er forbundet med de matematiske begrepene og forståelsen som ligger bak. Dette er sammenfallende med Skemp (2006) sin definisjon av begrepet relasjonell forståelse. Det innebærer nemlig at elevene både vet *hvordan* de skal gå frem for å løse oppgaven og *hvorfor* løsningsstrategiene som anvendes virker.

Læringspotensialet er altså størst dersom en inquiry-tilnærming til matematikkundervisningen kombineres med et oppgavesett bestående av oppgaver med høyere nivå av kognitive krav i DGE. Basert på analysene av oppgavene og intervjuene vil jeg argumentere for at dette er tilfellet i en stor andel av oppgavene som er utviklet i tilknytning til DIM-prosjektet. Oppgavesettet har dermed et stort potensiale for læring hvor anvendelsen av en digital kontekst ikke bare fører til at elevene sitter igjen med spesifikk verktøykunnskap om GeoGebra, men også en større forståelse for matematiske relasjoner og begreper. Samtidig har studien vist at oppgavesettet legger til rette for at både faglig sterke og svake elever får utfordringer hvor de kan utvikle seg i takt med sine evner og forutsetninger, noe som etter min mening utgjør et stort potensiale for læring.

7.2 Implikasjoner for matematikkundervisningen

Hvilke implikasjoner fører dette til for matematikkundervisningen i norsk skole? På hvilken måte kan læreren legge til rette for, og anvende oppgavesettet for å utnytte læringspotensialet? I avsnittene nedenfor har jeg samlet noen momenter som er viktige for læreren å reflektere over og ta hensyn til når læringspotensialet i et oppgavesett skal bli omgjort til faktisk læring i matematikkundervisningen.

For det første må læreren gi elevene anledning til å bli kjent med DGE, og de ulike verktøyene som programmet tilbyr. Dette er nødvendig for at elevene skal utvikle bruksmønstre i programmet slik at de kan undersøke matematiske problemstillinger med selvsikkerhet og effektivitet. Informantene påpekte spesielt læringspotensialet det digitale aspektet har for elevene som presterer lavt faglig i form av økt selvtillit og glede knyttet til arbeidet med matematikkoppgavene.

For det andre hevder lærerne i denne studien at elevenes eksperimentering og utforskning i DGE fører til mye læring. Spesielt i forhold til å oppdage betydningen av et dynamisk begrep som for eksempel mangekant eller trekant, og hvilke geometriske egenskaper som ligger implisitt i disse figurene. Det blir dermed en utfordring for læreren å designe og anvende oppgaver i undervisningen hvor elevene utvikler en kritisk, undersøkende holdning til matematikken. Funn fra studien underbygger at det i denne prosessen er avgjørende at læreren demonstrerer hvordan inquiry kan praktiseres som en kritisk holdning til matematikkundervisningen. Dette bør synliggjøres både i plenumsdiskusjoner og når læreren veileder elevene underveis i arbeidet med oppgavene.

Et annet moment vil være å benytte oppgaver med høyere nivå av kognitive krav slik at elevene ikke bare løser rutineoppgaver som fører til en instrumentell matematikkforståelse. For å finne ut hvilken type tenking oppgavene krever av elevene er det nødvendig at læreren foretar en forhåndsanalyse av oppgavene som skal anvendes i undervisningen. I denne sammenhengen kan rammeverket MTF være nyttig. Denne prosessen vil være tidkrevende i starten, men etter litt trening vil en lære hva som kjennetegner oppgaver på de ulike nivåene. Ved å benytte oppgaver med høyere nivå av kognitive krav vil elevene også utvikle en relasjonell matematikkforståelse.

I samsvar med sosiokulturell tilnærming tyder funn fra denne studien på at det vil være nyttig for læreren å legge til rette for gruppesamarbeid i matematikkundervisningen. På den måten kan elevene støtte og hjelpe hverandre i utforskningsarbeidet, hvor gruppesammensetningen er avgjørende for kvaliteten på arbeidet og støtten som gis. Når elevene arbeider med oppgavene er også læreren en viktig kilde til veiledning, støtte og motivasjon for elevene. Jeg mener imidlertid det viktigste argumentet for hvorfor læreren burde gi elevene veiledning og støtte underveis i arbeidet, er fordi dette er en avgjørende forutsetning, for å sikre at oppgaver av høyere nivå av kognitive krav faktisk fører til tenking og refleksjon av høyere orden hos elevene.

Til slutt anbefaler lærerne i denne studien å både legge til rette for, og ta seg tid til konsolideringsfasen i undervisningen. I oppgavesettet jeg har studert foreslås det å anvende ca. 30 minutter på denne delen av undervisningen. I en hektisk lærerhverdag er dette selvfølgelig ikke alltid mulig å gjennomføre, noe også lærerne i denne studien påpeker. Men med litt øving vil imidlertid læreren bli flinkere til «å styre» denne oppsummerende diskusjonen, slik at det er de matematiske elementene i undervisningen som er i fokus og ikke andre aspekter. Elevene bør også utfordres til å presentere egne løsninger og refleksjoner som deretter kritisk diskuteres i plenum. Det er imidlertid en forutsetning at elevene vet hva en kritisk diskusjon innebærer. På den måten øves elevene opp til å argumentere for at noe er matematisk gyldig samtidig som de tas med i bestemmelsen av hva som regnes som matematisk holdbart. Denne klasseromskulturen danner grunnlaget for at elevene kan utvikle en intellektuell autonomi.

7.3 Videre forskning

Forskningslitteraturen og arbeidet med denne oppgaven har ført til innsikt i andre forskningsområder som det ville vært interessant å undersøke videre. Det hadde for eksempel vært interessant å følge oppgavedesigneren gjennom en lignende designprosess som det Laborde (2001) beskriver i sin studie. Jeg tror dette kunne ført til utviklingen av enda flere oppgaver hvor medieringen til DGE er med og forandrer oppgavens innhold og mening. I mitt tilfelle ville det da vært flere oppgaver som kunne kategoriseres som oppgaver hvor DGE modifiserer oppgaven og oppgaver som kun eksisterer i DGE.

Det ville også vært interessant å sammenligne datamaterialet fra denne studien med funn fra en studie som observerer elevgruppene når de arbeider med oppgavesettet. På den måten kunne en ha sammenlignet resultatene, og studert hvorvidt potensialet for læring faktisk blir omgjort til læring i undervisningssituasjonen slik jeg fikk et innblikk i gjennom intervjuene. En annen mulighet ville vært å studere hvilke faktorer som legger til rette for eller begrenser at læringspotensialet realiseres i undervisningen. Omfanget av denne oppgaven var ikke stort nok til å ta hensyn til dette aspektet, men jeg tror det vil føre til nyttig innsikt i hvordan oppgavene bør designes for å forebygge at læringspotensialet utnyttes i matematikkundervisningen.

En annen studie kunne sammenlignet resultatene fra analysene av oppgavesettet med funn fra analyser av lignende undervisningsopplegg i DGE beregnet for undervisningen av geometri på ungdomsskolen. På den måten ville det vært lettere å si noe om oppgavesettets styrker og svakheter, og eventuelle mangler. I denne sammenhengen vil det også vært spennende å sett på elevenes motivasjon når de arbeider med de ulike oppgavesettene, og prøvd å peke på noen kjennetegn ved de oppgavetypene som raskt engasjerer elevene i matematisk tenking og resonnering.

7.4 Refleksjoner over eget arbeid

I løpet av arbeidet med denne masteroppgaven har jeg lest mye forskningslitteratur og tilegnet meg mye kunnskap om matematikkdidaktisk forskning generelt. Samtidig har jeg også fått et spesielt innblikk i bruken av inquiry og DGE i matematikkundervisningen samt de kognitive kravene som oppgavene stiller elevene ovenfor. Prosessen har vært lang og hard, men utrolig lærerik og spennende!

Da jeg startet arbeidet med masteroppgaven januar 2016 hadde jeg klart for meg at jeg skulle studere læringspotensialet i et oppgavesett i geometri som var utviklet i tilknytning til DIM-prosjektet. Hvordan jeg skulle gå frem for å gjøre dette, og hva som egentlig lå i begrepet læringspotensial var jeg imidlertid mer usikker på. Jeg skjønte at jeg var nødt til å utvikle et analyseverktøy som jeg kunne anvende for å analysere oppgavene, men hvordan jeg skulle gå frem for å designe dette hadde jeg ingen idé om. Jeg ønsket også å intervjue læreren som hadde designet oppgavesettet slik at jeg kunne danne meg et bilde av hans inntrykk av oppgavene og hva som var målsettingen hans da han designet oppgavene. Etter hvert skjønte jeg at det ville være lurt å intervju en lærer som var tilknyttet DIM-prosjektet, men ikke kjente til oppgavene før han tok dem i bruk i egen undervisning. På den måten belyste de ulike aspekter ved bruken av oppgavene, og erfaringene de gjorde seg var naturlig nok forskjellige av den grunn at de hadde ulik kjennskap til oppgavesettet.

Ettersom jeg hadde lagt en plan for metoden og datainnsamlingen begynte jeg å lese mye forskningslitteratur! Jeg saumfarte «google schoolar» på jakt etter en studie som presenterte et analyseverktøy som jeg «*bare*» kunne ta i bruk i min studie. Etter en stund innså jeg imidlertid at denne jakten var nytteløs, og jeg så meg dermed nødt til å utvikle mitt eget rammeverk. Men hvordan i alle dager skulle jeg gå frem i denne prosessen? Jeg hadde jo ingen erfaring fra tidligere år med å analysere oppgaver.

Dermed valgte jeg å gjennomføre det første intervjuet med oppgavedesigneren, og håpet at han kunne gi meg et innblikk i noe som kunne hjelpe meg videre i denne prosessen. Intervjuet belyste flere interessante områder, men ingen som kunne hjelpe meg videre i arbeidet med å konstruere analyseverktøyet.

Da jeg igjen satt foran dataskjermen og letter etter relevant forskningslitteratur kom jeg imidlertid over avhandlingen til Brändstrøm (2005). Selv om jeg ikke kunne anvende hennes analyseverktøy for å besvare mitt forskningsspørsmål, fikk jeg et innblikk i hvordan jeg kunne gå frem for å designe rammeverket. Dette hjalp meg i gang, og etter hvert falt de ulike aspektene og kategoriene på plass. Siden inquiry er en av grunnpilarene i DIM-prosjektet måtte dette aspektet representeres i analyseverktøyet. Videre ble aspektet om interaktivitet et naturlig fokus siden oppgavesettet var beregnet for DGE, og i denne prosessen var forskningen til Laborde (2001) spesielt nyttig. Etter hvert innså jeg også at når jeg tenkte på begrepet læringspotensial så ønsket jeg at det skulle være et potensiale for læring og tenking av høyere orden, og ikke bare oppgaver som utviklet rutineferdigheter hos elevene. Denne vektleggingen av høyere nivå av kognitive krav fikk jeg ivaretatt gjennom aspektet kognitive krav, og disse kategoriene baserer seg på rammeverket MTF. Jeg opplever at de ulike aspektene *til sammen* belyser læringspotensialet i oppgavesettet på en god måte, i alle fall etter min definisjon.

Etter at den siste undervisningstimen hvor oppgavesettet hadde vært brukt var gjennomført tok jeg kontakt med informantene, og avtalte det andre intervjuet med oppgavedesigneren mens læreren som hadde anvendt oppgavene ble intervjuet for første og siste gang. Da intervjuene var gjennomført startet jeg å analysere et utvalg av oppgavene fra oppgavesettet basert på grovanalysen av oppgavene. Deretter fulgte analysene av datamaterialet fra intervjuene. Det utgjorde til sammen store mengder data, og det var til tider vanskelig å få strukturert datamaterialet på en god måte. Jeg innså etter hvert at det ville være mest ryddig å ta utgangspunkt i aspektene fra analyseverktøyet og så eventuelt tilføye noen kategorier der det var behov. Jeg fikk bekreftet antagelsen min underveis i analysene av intervjuene om at lærerne kunne belyse aspekter ved læringspotensialet som ikke ble dekket av analyseverktøyet alene. Jeg fikk blant annet innsikt i den praktiske gjennomføringen av oppgaven, og hvordan læringspotensialet i noen oppgaver ble realisert mens andre ikke. Intervjuene belyste for eksempel hvordan oppgavesettet førte til et stort læringspotensial for de svakt presterende elevene i matematikk fordi disse elevene i større grad enn tidligere engasjerte seg i undervisningen og ønsket å demonstrere sine løsninger i konsolideringsfasen.

Når jeg nå ser tilbake på tidspunktet da jeg gjennomførte og planla intervjuene hadde jeg nok ikke tilstrekkelig kunnskap om hvilke ulike roller DGE kan ha i undervisningen. Dermed er det ingen spørsmål i intervjuguiden som går direkte på interaksjonen mellom elevene og DGE. Dersom jeg hadde vært mer observant på dette fra starten av kunne jeg nok fått enda mer spesifikk informasjon fra lærerne om dette emnet, og hvilke positive og negative effekter de opplever at denne interaksjonen har i undervisningen.

Mitt personlige mål med denne studien var å få et innblikk i en utforskende og eksperimenterende tilnærming til matematikkundervisningen. Til høsten begynner mitt første år som lektor i norsk grunnskole og vi har blitt advart flere ganger i løpet av studieløpet at dette året kommer til å bli hardt! Som en fremtidig matmatematikklærer ønsker jeg imidlertid å drive med en spennende og annerledes undervisning som engasjerer elevene mine. Siden tiden kan bli knapp når jeg kommer ut i arbeid innså jeg at arbeidet med masteroppgaven ville være en ypperlig anledning til å gjøre seg kjent med faglitteratur om en slik type tilnærming til matematikkundervisningen. Jeg sitter igjen med mange tanker om hvilke faktorer som må være tilstede i utforskende oppgaver med høyere nivå av kognitive krav som anvendes i DGE. Denne erfaringen vil jeg ta med meg når jeg skal planlegge og praktisere en utforskende matematikkundervisning, hvor målet er at elevene skal utvikle en relasjonell matematikkforståelse som kan være nyttig for dem både i faget, men også utenfor skolekonteksten.

8. Referanseliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education : intention, reflection, critique* (Vol. v. 29). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics* (Vol. 19): International Academy of Education Belgium.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253.

Back, J., Foster, C., Tomalin, J., Mason, J., Swan, M., & Watson, A. (2012). Tasks and Their Place in Mathematics Teaching and Learning--Part 1. *Mathematics Teaching*(231), 33-37.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for research in mathematics education*, 41-62.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield): Dordrecht: Kluwer.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th ed. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Brändstrøm, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty*. (Liscenciatavhandling. Luleå University of Technology, Sweden.). Lastet ned fra http://pure.ltu.se/portal/files/246167/LTU-LIC-0518-SE.pdf

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. I F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Red.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (s. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.

Crabbe, D. (2007). Learning opportunities: adding learning value to tasks. *ELT Journal, 61*(2), 117-125.

Digital interaktiv matematikkundervisning 2015 - 2018. (2015). Prosjektbeskrivelse: Digital interaktiv matematikkundervisning (DIM). Lastet ned fra http://www.dim2015-18.no/sites/default/files/languages/245499_1_Prosjektbeskri-kopi.pdf

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Dysthe, O. (1995). *Det flerstemmige klasserommet : skriving og samtale for å lære*. Oslo: Ad Notam Gyldendal : I samarbeid med NAVFs program for utdanningsforskning.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student‘s generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*(3), 187-215.

Erfjord, I. (2008). *Teachers' implementation and orchestration of Cabri-use in mathematics teaching*. (10), University of Agder, Faculty of Engineering and Science, Kristiansand.

Erfjord, I. (2011). Teachers’ Initial Orchestration of Students’ Dynamic Geometry Software Use: Consequences for Students’ Opportunities to Learn Mathematics. *Technology, Knowledge and Learning, 16*(1), 35-54.

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. *Learning mathematics, science and the arts in the context of digital technologies, 19*(3), 287-315. doi: 10.1007/s10758-014-9213-9

Fuglestad, A. B. (2009). ICT for inquiry in mathematics: A developmental research approach. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 191-202.
Fuglestad, A. B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry. *Tangenten,* (4), 2,6.
Fuglestad, A. B. (2011). Challenges teachers face with integrating ICT with an inquiry approach in mathematics. I M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Red.), *Proceedings of the seventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2328-2338). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland.
Fuglestad, A. B., Goodchild, S., & Jaworski, B. (2007). Utvikling av inquiry fellesskap for å forbedre undervisning og læring i matematikk: Didaktikere og lærere arbeider sammen. I May Britt Postholm (Red.), *Forsk med! Lærere og forskere i læringsarbeid* (s. 34-73). Oslo: Damm & Søn A/S.
Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To Produce Conjectures and to Prove Them within a Dynamic Geometry Environment: A Case Study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 397-404.
GeoGebra. (2016). Manual. Lastet ned fra http://www.geogebra.org/wiki/nb/Manual
Grønmo, L. S., & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007.* Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2007/hele_timss2007.pdf
Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011* Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2011/timss_2011_web.pdf
Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/rapportmat2008.pdf
Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics, 44*(1-2), 5-23.
Hatlevik, O. E., Egeberg, G., Gudmundsdóttir, G. B., Loftsgarden, M., & Loi, M. (2013). *Monitor skole 2013. Om digital kompetanse og erfaringer med bruk av IKT i skolen.* Hentet fra http://www.iktsenteret.no/sites/iktsenteret.no/files/attachments/monitor_skole_2013_4des.pdf
Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 524-549.
Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murry, H., . . . Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N.H: Heinemann.
Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts.
Hoyles, C., & Noss, R. (1992). *Learning mathematics and logo*: MIT Press.
Hölzl, R. (1996). How does 'dragging'affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(2), 169-187.
Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations–a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(1), 63-86.
Imsen, G. (2005). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget.

Jaworski, B., Fuglestad, A. B., Bjuland, R., Breiteig, T., Goodchild, S., & Grevholm, B. (2007). *Læringsfellesskap i matematikk - Learning Communities in Mathematics*. Bergen: Caspar Forlag AS.
Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/publikasjoner/publikasjoner/fortsatt-en-vei-a-ga.pdf
Laborde, C. (1991). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry. I C. Keitel & Kenneth Ruthven (Red.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (s. 48-67): Springer.
Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer-based environment. I Leone Burton & Barbara Jaworski (Red.), *Technology in mathematics teaching - a bridge between teaching and learning* (s. 35-67): Chartwell-Bratt.
Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry *International Journal of Computers for Mathematical Learning*(6), 283-317.
Laborde, C. (2007). Does the use of ICT help learn mathematics? I Barbara Jaworski, Anne Berit Fuglestad, Raymond Bjuland, Trygve Breiteig, Simon Goodchild & Barbro Grevholm (Red.), *Læringsfellesskap i matematikk - Learning Communities in Mathematics*. Bergen: Caspar forlag AS.
Laborde, C. (2015). Teaching and Learning Geometry. I Je Sung Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (s. 431-436). Cham: Springer International Publishing.
Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM, 43*(3), 325-336.
Lewis, C. C., & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
Læreplan i matematikk fellesfag. (2013). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Læreplan i matematikk fellesfag*. Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=nno.
Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics, 44*(1-2), 87-125.
Meld. St. nr. 22. (2010 - 2011). *Motivasjon - Mestring - Muligheter - Ungdomstrinnet*. Lastet ned fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-22-2010--2011/id641251/?ch=1&q=.
Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten*. http://www.caspar.no/tangenten/1996/oppgavediskurs.html
Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999). Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics, 19*(2), 91-96.
Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics Trends in International Mathamtics and Science study. TIMSS* Hentet fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544554.pdf
Niss, M. (2006). The problem discourse in mathematics education. I *Perspektiv På: Kunskapens Och Lärandets Villkor*: Åbo Akademis förlag.
Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17): Springer Science & Business Media.
Onstad, T., & Grønmo, L. S. (2013). *Opptur og nedtur : analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* Hentet fra http://www.timss.no/timss_2013_materie_web.pdf

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforl.

Prinsipp for opplæringa. (2013). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet - Prinsipp for opplæringa*. Lastet ned fra http://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/fastsatte_lareplaner_for_kunnskapsloeftet/prinspipper_lk06_nn.pdf.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold : samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Ruthven, K. (2009). Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics. *Éducation et didactique, 3*(1), 131-159.

Santos-Trigo, M., & Espinosa-Perez, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33*(1), 37-50.

Skaar, B., & Syvertsen, H. T. (2007). Undersøkende aktiviteter med oppgavekort. I Barbara Jaworski, Anne Berit Fuglestad, Raymond Bjuland, Trygve Breiteig, Simon Goodchild & Barbro Grevholm (Red.), *Læringsfellesskap i matematikk - Learning Communities in Mathematics*. Bergen: Caspar Forlag AS.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(4), 123-132.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I *Kan Det Virkelig Passe? Om matematiklæring* (s. 143-158). København: L&R Uddannelse.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50-80.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*: Teachers College Press.

Straesser, R. (2002). Cabri-Geometre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning? *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 319-333.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 85-105. doi: 10.1007/BF03217539

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning* (Vol. 104). New York, NY: Springer New York, New York, NY.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.

Säljö, R. (2006). *Læring og kulturelle redskaper: om læreprosesser og den kollektive hukommelsen* (Sigrid Moen, Overs.). Oslo: Cappelen akademisk forl.

Universitetet i Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. (2015). Om TIMSS. Lastet ned fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/om-timss/

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Socio-cultural Practice and Theory of Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (2007). Mediation in "The Cambridge Companion to Vygotskij", edited by Daniels, H., Cole, M., Wertsch, J. V. (s. 178-192): New York, NY: Cambridge University Press.

Öner, D. (2008). Supporting students' participation in authentic proof activities in computer supported collaborative learning (CSCL) environments. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 3*(3), 343-359.

Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide til 1. intervju med lærer som designet oppgavesettet

Bakgrunn

1. Hvilken utdanningsbakgrunn har du?
2. Hvor lenge har du arbeidet i skoleverket?
3. Hvilke erfaringer har du med digitale verktøy
    a. i undervisning
    b. til egen bruk
4. Kan du forklare kort hvordan det er tenkt at undervisningen skal organiseres når en bruker oppgavearkene? (Punktene nedenfor er hentet fra lærerens beskrivelse av emnet)
    a. Felles introduksjon
    b. Veksling mellom selvstendig arbeid og samarbeid i små grupper
    c. Felles oppsummering

Oppgavearkene

5. Hva var målsettingen din da du designet oppgavearkene?
6. Kan du gi en kort beskrivelse av oppgavene du har laget?
    a. Hva kjennetegner dem?
        i. Åpne eller lukket?
        ii. Utforskende eller styrende?
7. Hva ved oppgavene mener du stimulerer til inquiry?
    a. Eksempler?
8. Hvilke revideringer eller endringer ble gjort underveis mens du designet og bearbeidet oppgavene?
9. Hvilke uventede utfordringer møtte du på når du skulle designe oppgavene?
10. Noe annet du ønsker å trekke frem i tilknytning til oppgavearkene?

Vedlegg 2: Intervjuguide til 2. intervju med læreren som designet oppgavesettet

Erfaringer fra bruk av oppgavearkene

1. Kan du gi eksempel på en oppgave som passet spesielt bra? Hvorfor?
   a. Flere eksempler?
2. Kan du gi eksempel på en oppgave som inviterte/stimulerte elevene til utforskning?
   a. Flere eksempler?
3. Hvordan fungerte oppgavene for …
   a. Læreren?
   b. Elevene?
4. Kan du gi eksempel på en oppgave som ikke fungerte etter intensjonen? Hvorfor?
   a. Flere eksempler?
5. Hvilke revideringer eller endringer ble gjort underveis etter hvert som du anvendte oppgavearkene?
6. Hvilke uventede utfordringer møtte du på?
   a. Pedagogiske
   b. Tekniske
7. Hvordan har undervisningen vært organisert når du har brukt oppgavearkene?

Vedlegg 3: Intervjuguide til intervju med læreren som anvendte oppgavesettet

Bakgrunn

1. Hvilken utdanningsbakgrunn har du?
2. Hvor lenge har du arbeidet i skoleverket?
3. Hvilke erfaringer har du med digitale verktøy
   a. i undervisning?
   b. til egen bruk?

Oppgavearkene

4. Kan du gi eksempel på en oppgave som passet spesielt bra? Hvorfor?
   a. Flere eksempler?
5. Kan du gi eksempel på en oppgave som inviterte/stimulerte elevene til utforskning?
   a. Flere eksempler?
6. Hvordan fungerte oppgavene for…
   a. Læreren?
   b. Elevene?
7. Kan du gi eksempel på en oppgave som ikke fungerte etter intensjonen? Hvorfor?
   a. Flere eksempler?
8. Hvilke revideringer eller endringer ble gjort underveis etter hvert som du anvendte oppgavearkene?
9. Hvilke uventede utfordringer møtte du på?
   a. Pedagogiske
   b. Tekniske
10. Hvordan har undervisningen vært organisert når du har brukt oppgavearkene?

Vedlegg 4: Transkripsjon av 1. intervju med lærer som designet oppgavesettet

Intervjuet ble gjennomført mandag 1. februar kl. 08.27 – 08.55

I = intervjuer D = lærer som designet oppgavene

Bakgrunn

I: Hvilken utdanningsbakgrunn har du?
D: *Realist i utgangspunktet. Allmennlærerutdanning, treårig. Videreutdanning treårig faglærer eksamen på konservatoriet i musikk, etikk, livssyn og fremmede religioner 14 st.p., 80st.p. i naturfag og mastergrad i matematikk. Til sammen 600 st.p, altså 10 år med skole. Holdt på med videreutdanning hele livet.*

I: Hvor lenge har du arbeidet i skoleverket?
D: *Jeg har arbeidet 35 år i skolen, og vært inspektør 7 av disse.*

I: Hvilke erfaringer har du med digitale verktøy?

a. i undervisning
b. til egen bruk

D: *Før jeg begynte i DIM prosjektet så kunne jeg dette med officepakka, word, powerpoint og excel, brukt det i undervisninga. En god del erfaring fra ca. 2003 på Cabri, og etter hvert GeoGebra så det har jeg brukt veldig mye i skolen. Og windows kulturen, bærbarpc og de tingene der. Så det som er nytt for meg nå det er at jo at jeg har blitt ført inn i apple-kulturen for vi skulle ha iPader, jeg har fått mac, jeg har fått iphone det er nytt nå i forbindelse med DIM prosjektet. Også bruk av google-opplegg, google doc, google sheets, google classroom alle disse tingene har komt i forbindelse med DIM prosjektet. Kjente egentlig windows-kulturen, men har shiftet over på apple-kulturen for å skjønne iPadene.*

I: Kan du forklare kort hvordan det er tenkt at undervisningen skal organiseres når en bruker oppgavearkene?
D: *Da må du vite litt om mitt syn, for det første heller jeg nok mot det sosiokulturelle læringssynet med dette med samarbeid og Vygotsky og de tingene der. Ligger mitt hjerte nær, det må jeg si. I matematikkdiaktikk har vår skole arbeidet litt med en modell for tankegang blant annet for å bygge matematisk kompetanse som er det overordnede så ser vi for oss at vi vil utforske ting, eksperimentere med ting som resulterer i at vi oppdager og ser noe (…) finner ut av noe og så kan øvingsfasen begynne. Kontra den kanskje, om jeg kan bruke ordet normale skole, eller i alle fall forskning viser at veldig mye skole dreier seg om at de får en ferdig fremgangsmåte som står i lærebøkene og så øver de, veldig lite av den andre. Men vi har med oss alle sammen. Så tror jeg nok i DIM prosjektet at vi har, i alle fall når jeg har sagt det til Ve, så er det først og fremst de oppgavene jeg har laget ligger i den eksperimenterende delen og ikke i øvingsdelen, den får læreren ta seg av selv. Så, DIM prosjektet foreløpig er veldig mot den eksperimenterende, utforskende biten er tanken. Om vi får det til er jo noe annet. Det sier kanskje litt om hvordan jeg har tenkt, når det da gjelder gjennomføringen. Når vi holder på i den eksperimenterende delen så prøver vi å ha en struktur på det, en time da, gjerne en dobbel time, at jeg gir en instruksjon til elevene, de går og arbeider i grupper og prøver å gi de såpass rike oppgaver slik at det skal være noe for alle. Og så skal du ha en oppsummering som jeg oppfatter som den viktigste biten som en fort glemmer i norsk skole hvor en skal dra ut, og som faktisk er den mest arbeidsbelastende for*

meg. Du kan ikke forberede deg veldig på det, og så skal du da dra ut matematisk kompetanse av det elevene sier og så skal jeg poengtere å ja det er viktig, det er viktig. Så skal jeg ha hodet kaldt hva er det egentlig vi holder på med ut fra kompetansemålene vi skal lære. Så det opplever jeg som veldig arbeidskrevende, men gull verdt.

Oppgavearkene

I: Hva var målsettingen din da du designet oppgavearkene?
D: *Så er det jo å skape begreper, begreper innen geometri det er overordnet. Det å gi de innsikt i geometrien, og at de får et håndverker å kunne konstruere og lage figurer i forhold til kompetansemålene det er målet. Nå skal de jo også kunne passer og linjal, og det er det faktisk de blir prøvd i på eksamen og ikke det jeg lærer de. Vi har en hyptose Ve og oss at det takler de greit, men det sier jo litt om hvilken verden vi lever i. Vi tror dette er fremtiden, så vi velger heller fremtiden fremfor eksamen.*

I: Kan du gi en kort beskrivelse av oppgavene du har laget?
D: *De fleste elevene har ikke vært borti GeoGebra, de er helt blanke. Flipped teaching elevene skulle selv finne ut av tingene, være lærere og lage instruksjonsvideoer så det oppfatter veldig ekseperimenterende del, veldig inquiry som bygger på at de griper fatt i en knapp, en kommando og så skal de prøve å finne ut hvordan den virker og så skal de da lage, lage en video, mens de tegner og legge ut på youtube. Oppfatter jeg veldig utforskende kontra kanskje som jeg hadde tenkt at jeg ville ha brukt et par timer å vise hvordan GeoGebra virker mens det er de som skal vise meg hvordan GeoGebra virker så da snur jeg på det. Så de neste oppgavene innen geometri kurset eller geogebra kurset blir kalt guidet exploration ikke uten grunn. Da oppfatter vi de innenfor inquiry, men vi har brukt ordet guidet og det har litt med han Ingvald som er med oss på gruppa har skrevet en PhD. Oppfatter at han peker på, han hadde to klasser han forsket på, den ene var veldig sånn helt fritt og den andre var veldig strammet, veldig guidet, og hvis jeg skjønner han så tenker han en blanding mellom de to tankegangene. Når vi kalte det for guidet inquiry eller guidet utforskning, på en måte, hjalp de litt i gang med forskninga. Sånn var tanken i alle fall. Nå har jeg vært med fra 2004 til 2010 med universitet om stikkord inquiry den tankegangen og selv om jeg har arbeidet da i syv år med dette så merker jeg hvor fort det er å glemme det. Så selv og jeg har holdt på med dette så lenge og vil noe annet, så det reflekterer jeg litt over og jeg tror mange ganger vi kan si ja vi driver med inquiry men jeg er ikke sikker på om vi gjør det. Når en møter lærere og sånn så kan en fort si ja jeg driver med utforskning men det er faktisk ikke sånn, og det merker jeg på meg selv også Når det gjelder disse geometrioppgavene så er i alle fall ønsket var at de skulle være en del utforskning.*

I: Hva ved oppgavene mener du stimulerer til inquiry?
D: *Da oppfatter jeg, si oppgave 2-1, du kan se på den etterpå, som jeg har laget en del som de skal dra i og finne ut hvilke er kvadrater det oppfatter jeg en sånn en utforskende oppgave, og noen av de si at en av de var litt vanskelig fordi du måtte dra litt spesielt for å få den bort fra kvadrat du kunne dra i det ene hjørnet og den beholdet kvadratet og den andre fører til et rektangel. Oppgave 2-2 dette med at de har noen krav, veldig åpen oppgave, de får et krav linjene skal være paralllelle men de kan ha mange figurer hvor linjene minst to linjer er paralllelle alt fra et kvadrat til et parallellogram. Den oppgaven vi skal ha i dag som heter 2 – 4 de skal konstruere en trekant så skal de halvere sidene og konstruere en trekant med de tre nye hjørnene da og så begynne å diskutere hva ser de av sammenhenger og de skal også konstruere en trekant inni en sirkel der de skal halvere det og finne ja, de skal dra i denne trekanten og så skal de se litt på vinkler og sider, hva som skjer og for å si for oss da når de*

da for eksempel den ene linja går i gjennom sentrum så blir det periferivinkel være 90° og hvis de opplever at de tre rundt er 60, 60 60 så vil de kanskje se at de tre sidene er like da, likesidet trekant kanskje de oppdager pytagoras, jeg vet ikke. Jeg oppfatter det som utforskning, de haler og drar, ser om de kan se noen sammenhenger. Så er det det at jeg kan holde meg tilbake og ikke fortelle hva de skal lete etter. De svake opplever, og faktisk talt være med på noe en del av dette, og så ser de at oi det var mer å jobbe med.

I: Hvilke revideringer eller endringer ble gjort underveis mens du designet og bearbeidet oppgavene?
D: *Hele tiden. For det første etter det verkstedet etter vi skulle sette i gang hadde jeg en liten uke på å gjøre en nokså stor revisjon av alle sammen ut i fra at jeg så oi her må jeg prøve å endre noe. Klart det jeg klarte, klarte jeg, og så har jeg også hver nesten hver dag når jeg legger ut til elevene, jeg legger ut fortløpende til elevene da endrer jeg litt på okei sånn som i dag hadde jeg lagt inn en oppgave om regulære og ikke regulære figurer men dette kan de som betyr at det blir meningsløst å gi den oppgaven. Men om de gjør det på Ve eller ikke det vet jeg ikke, men jeg går i alle fall igjennom oppgavene å ser er det noe her som så det skjer en endring ut fra tankegangen til nesten hver time.*

I: Da tar du litt hensyn til hva du har gått gjennom og hva som har blitt tatt opp?
D: *Hva som har blitt spurt om, hva de får til, jeg tenker at for eksempel det med at de skal oppgi høyre vinkelbein og så venstre vinkelbein og dette det oppfatter jeg at det kom så tydelig fram at den oppgaven poengterer jeg ikke jeg bare nevner den i en bisetning når vi går igjennom den i dag. Og så har jeg revidert noe som jeg ser er feil, for det er veldig fort å bomme. Nå er jeg kanskje litt også på neste oppgave, ja nye utfordringer og det er selv om jeg har mastergrad i matematikk og vært lærer, lærer i matematikk i 35 år ser jeg hvor fort det er å være upresis. I dag så oppdaget jeg okei sentralvinkler er jo knyttet mot sentrum i en sirkel, så hadde jeg brukt det uten å tegne sirkelen, så den må jeg forklare for elevene jeg gadd ikke å lage en ny illustrasjon men hvis vi tenker oss en sirkel som går i nullpunktene i regulær så blir det sentral, sentralvinkler de som da går ut til hjørnene, så du kan si det å være presis. Så hadde jeg en bommert også med noen jeg hadde tegnet en trekant som ikke vær 90°, ikke en rettvinklet trekant og så hadde jeg begynt å snakke om katet og hypotenus. Når jeg har laget den så blander jeg den med en annen oppgave som jeg har laget før om at du skal dra trekanten og plutselig oppdage at de to kvadratene er lik den tredje så jeg har vær litt upresis der, tenker en ting i hodet og gjør noe annet det ser jeg jo jeg skjønner jo sånn som lærebokforfattere at de må ha noen konsulenter som prøver ut ting og luker ut det i forkant så er det veldig lett å sitte på sidelinjen og si hvordan i all verden kan du finne på så lite og ikke være. Det opplever jeg faktisk som litt utfordrende når du sitter alene med det, og skal designe alle tingene hvor fort det er å være litt upresis sånn ja, komplementære vinkler, fulle, altså alle disse begrepene at du men likevel så bommer jeg litt av og til.*

I: Noe annet du ønsker å trekke frem i tilknytning til oppgavearkene?
D: *Ja, kan jeg trekke frem noe som var veldig dårlig?*

I: ***Ja?***
D: *Den robotoppgaven 01-1 den var veldig dårlig. Det som jeg opplevde når jeg gjennomførte den hvorfor skal vi gjøre dette når vi ikke kan prøve den ut? De burde hatt et eller annet dataprogram som de kunne programmert Nå vet jeg det finnes, men det blir altfor omfattende å bruke tid på det. Så det ser jeg jo i ettertid at det var en dårlig oppgave, det burde vært gjort på en annen måte. Så den ville jeg ikke gjort om igjen.*

Vedlegg 5: Transkripsjon av 2. intervju med lærer som designet oppgavesettet

Intervjuet ble gjennomført mandag 15. februar kl. 08.21 – 08.43

I = intervjuer D = lærer som designet oppgavene

Erfaringer fra bruk av oppgavearkene

I: Kan du gi eksempel på en oppgave som du syntes passet spesielt bra og hvorfor?
D: *Jeg har valgt ut tre stykker for du sier flere eksempler så tar jeg det samtidig. Selv om jeg føler at spørsmål 1 og 2 henger litt sammen for de som var bra var kanskje de mest utfordrende oppgavene men jeg henviser bare til nummer. Den ene oppgaven som jeg syntes var bra den var det med vinkelsummen i polygoner. Oppgave 02 – 3 og det gikk jo på det at jeg oppfattet faktisk at det var litt spennende å se hvordan vinkelsummen endra seg om de hadde firkanter, femkanter, sekskanter som, og så ser du at det tangerer det litt inn på neste spørsmål med litt sånn utforskende. Den syntes jeg var litt sånn bra, og så var det oppgave 02 – 4 den siste oppgaven der de skal vi se oppgave C de skulle tegne en vilkårlig trekant også hente midtnormal på alle sidene og finne skjæringspunktet og lage sirkelen som da gikk gjennom alle tre hjørnene og så skulle de hale og dra og i oppsummeringa der så kom vi inn på Thales setning med 90 graderen der og det, da var jeg litt sånn fornøyd selv jeg hadde ikke trodd jeg ville komme så langt. Men Thales setning er jo pensum for de men jeg hadde tenkt at det var niende eller tiende klasse så da valgte jeg rett og slett å ta Thales setning med en gang sånn der og da. Så var det 03 – 1 symmetri det er den tredje oppgaven jeg vil nevne der når de da skulle begynne å lage speilbilder og speilingslinjer og sånn så opplevde jeg at det glei veldig lett og det tror jeg kanskje hadde noe med det GeoGebra kurset de hadde hatt de første fjorten dagene som gjorde at de ja. Det var ikke mye mas og spørsmål som en kanskje er vant med tidligere når elevene ikke kan GeoGebra de ja. Veldig lite hjelp de trengte på det tekniske.*

I: *Ja, så da var de godt kjent med verktøyene?*
D: *Ja, jeg oppfattet det at det var lurt med de fjorten dagene med opplæring i GeoGebra.*

I: *Kan du gi eksempel på en oppgave som inviterte/stimulerte elevene til utforskning?*
D: *Ja, da oppfatter jeg den ene er den som heter 02 – 2 der de skulle få oppgitt de fikk oppgitt noen forskjellige krav for eksempel 90°, parallelle sider to parallelle sider osv. Og så skulle de lage en polygon som oppfylte et eller to eller tre eller fire av de kravene. Akkurat den timen hadde ikke jeg for da var jeg bortreist men, det var Gunnar som hadde den, men vi jobber jo sammen jeg og Gunnar så det er en oppgave som jeg oppfatter han var veldig godt fornøyd med og at de det ble veldig utforskende for det er ingen rette svar for de kan jo lage for eksempel ta et krav om at den skal være en parallell altså to, en parallell og 90° for eksempel så det de kan jo velge litt. Og så den der i stad 02 – 3 utforsket sammenhengen mellom vinkler og vinkelsummer i forskjellige polygoner, og så en oppgave som jeg endret en god del på. Du bør kanskje gå inn å se på den en gang til for den er ganske mye endret det var vel den oppgaven som Lise kicka litt på, på verkstedet der så endret jeg den litt for og den heter 02 – 6 og. Det var i utgangspunkspunktet en om pytagoras, og det jeg hadde gjort på den første utgaven som jeg lagde i desember da hadde jeg laget en trekant og så snakket jeg om katet og katet og hypotenus, og det er jo snakk om den der 90 eh rettvinklet. Så det var første utfordring hun gav. Så da sa jo jeg at oi, det var en annen oppgave som sveiv i mitt hode når jeg laget den og det var altså en bestemorsoppgave. Så endret jeg litt på den men når jeg skulle til selv så fikk jeg et par timer ekstra som jeg rakk så jeg omarbeidet hele oppgaven.*

Den synes jo jeg er veldig spennende. Du kan jo lese den selv, men i korte trekk så omhandler det ei matematisk bestemor som har vært professor. Veldig glad i to ting: matematikk og bake kake. Og som når hun får besøk av barnebarna sine er hun veldig opptatt av at alle skal få samme mengde kake noen må ta to stykker noen må ta et stykke og hun selv tar alltid midten. Og så starter med en litt enkel oppgave som en likesidet trekant med en trekant i midten, trekant der og så tre trekanter der, klarer du se den for deg? Stor trekant med ja, sånn begynner den. Men neste gang så er de veldig spent på hva bestemor har laget, og hun har laget en trekant i midten og så har hun laget regulære trekanter på siden og så får hun besøk av to av barnebarnene, og så sier hun at den ene må spise to stykker for å få like mye som den siste, og da er du med på at det er begynnelsen på pytagoras, men jeg lurer det inn ved å gi de regulære trekanter og ikke regulære firkanter eller kvadrater som vi alltid har fått. Og det er noe jeg oppdaget som voksen at du kan ha, hvis du bare har formlike figurerer, så kan du ha hva som helst. Så fører jeg inn halvsirkler, og så fører jeg inn kvadrat så den gir veldig form for utforskning ved å hale og dra. Ah, når det er 90 ° da skjer det. Mm, så den oppfatter jeg stimulerer veldig til utforskning.

I: ***Klarer du å si hva som kjennetegner eller hva har du gjort med de oppgavene som fungerer spesielt bra?***
D: *Det er noen ting som jeg har som en ledestjerne, jeg får det ikke alltid, jeg har ikke fått alltid til her, men jeg har det når jeg designer oppgaver det er det som heter rike oppgaver med en lav inngangsterskel så alle får, alle blir motivert til å komme i gang, alle får lyst til å komme i gang. Og så går det når de jobber seg inn i det selv innenfor den samme oppgaven er det muligheter for ganske utfordringer for de begavede i matematikk sånn at ikke de går lei eller sier jeg er ferdige eller sånn. Det er den ene tingen og det andre oppfatter at hvis jeg tar tak i disse stikkordene for inquiry med utforskende, utprøvende, spørrende, undrende, reflekterende, hvis jeg kan få elevene inn i det moduset, da, men jeg betyr veldig mye oppfatter jeg for hvis jeg kan være spørrende så kan det smitte over på elevene. Veldig kontrast til for eksempel ei lærebok.*

I: ***Hvordan synes du oppgavene har fungert for deg?***
D: *Jeg føler meg litt inhabil for det at jeg har designet oppgavene for jeg så bare nå når vi skal til på statistikk, og få det ferdig designet fra noen andre, det var noe helt annet. Så for å si det sånn jeg har laget de så det blir litt sånn, selvfølgelig fungerer de for meg. Jeg har gjort noen små korrigeringer underveis, det har jeg jo, og det du spør om det gjør du ikke det? Jo revidert, og det er jo den jeg nevnte 02 – 6 som jeg kommer til å svare på spørsmål 5. Men jeg har gjort noen småkorrigeringer for å si det sånn dette med regulære figurer tok de veldig kjapt så når jeg senere kom med noen spørsmål la jeg inn det, for jeg kunne jo ikke vite i desember, men når en fikk det på oppsummeringa og okei jeg skjønte at de kunne dette med regulære mangekanter ble det meningsløst å gi de noen utfordringer om regulære så sånn sett tror jeg nok må si fungerte for meg men jeg tror ikke jeg er representativ du måtte stilt det spørsmålet til en av de på Ve skole*

I*: Ja, jeg skal der senere i dag*
D: *Ja, for de vil nok, ja. Når det gjelder elevene så oppfatter jeg jo at sånn at de fleste arbeider greit, det skjer mye matematikk, men selvfølgelig skjer det ting underveis. Elever er elever, og noen ganger flipper de ut, og ja. Så men det er jo en del av hverdagen, en kan jo ikke forvente at de sitter som lys og arbeider 100 % av tiden når de går i ungdomsskolen nei så jeg oppfatter at de fikk de til ja. Jeg arbeider innenfor, jeg er jo kanskje litt sånn sosiokulturet i læringssynet, Vygotsky, kanskje litt sånn ledestjerne der i den sammenheng. Og det å legge oppgavene innenfor den proksimale utviklingssonen at elevene klarer det akkurat*

eller ved hjelp av medelever eller ved hjelp av litt hint, at det ikke er for lett og ikke for vanskelig, det er jo målet mitt.

I: ***Har de arbeidet sammen hele tiden?***
D: *Ja, stort sett. De hadde en time, kommer tilbake til det på det siste spørsmålet du hadde, så siste time valgte jeg at de skulle sitte helt alene. Så de har sånn sett hatt 23 timer i grupper og 1 time alene. Så det er en av de tingene som jeg kanskje burde hatt litt flere timer alene. Hvis du spør om, men det spør du senere om*

I: ***Eksempel på en oppgave som ikke fungerte sånn som du hadde tenkt?***
Den som fungerte dårligst synes jeg var den som heter 01 – 1 vinkler. Og det var jo at de skulle programmerer en robot, og den følte jeg ble veldig meningsløst når de ikke kunne kjøre det programmet. Så jeg burde faktisk ha leitet etter et eller annet dataprogram som de kunne ha kjørt ei pil som hadde gått bortover. Så den var meningsløs egentlig, fikk ikke sport elevene ordentlig inn på det. Hensikten med oppgaven var jo også å kunne forstå dette med å oppgi vinkler spesielt at du tar høyrevinkelben først og venstre. Så den ville jeg aldri gjort om igjen, den var ikke god. Den andre som jeg strevde litt med, det var den som heter 03 – 4, spesielt oppgave A. Jeg hadde laget, designet noe på GeoGebra som jeg hadde lagt ut på GeoGebra sin side uten å, tatt vekk, skjult alle hjelpestreker. Så skulle de finne ut hvilken speiling det var, den var ålreit. Men de skulle også spør etter speilingslinjer eller speilingspunkt og det var for krevende. Altså det var, det ble litt meningsløst når de holdt på ble det for vanskelig for de, hadde jeg lagt inn noen nøtter. Så jeg burde ha laget den litt mer sånn: prøv å finn ut flest mulig av disse, og obs det kan være noen som har to forskjellige symmetriopplegg. Både speiling og parallellforskyvning for eksempel. Så den ville jeg ha gjort annerledes. Den der 02 – 6 med bestemorskake den hadde jeg kraftig revisjon av og så hadde jeg små revisjoner uten at jeg kan huske det i dag. Ja, uventa. Jeg vet egentlig ikke om jeg hadde så veldig mye uventa. Jeg følte ikke jeg mista at jeg ble satt ut av det, men igjen kan det godt være at jeg har designet det selv, kjenner det sånn ut og inn, men hvis jeg følte kanskje at jeg ble litt overrasket når de skulle til helt alene hvor mye større utfordring det var, den såkalte drillfasen altså vi har vært i eksperimenteringsfasen så tenker jeg i drillfasen, konsolideringsfasen så jeg tror at en kanskje burde lagt inn noe mer der.

I: ***Ja, for da merket du stor forskjell på?***
D: *Ja, for de trengte mye mer hjelp. Det var jo en mye mer hektisk time, der de ikke, de skulle ikke søke hjelp hos hverandre men de skulle arbeide individuelt og kun jeg skulle hjelpe de og jeg løp som en strikk altså i den timen. Det var skikkelig mye arbeid. Da var jeg litt tilbake til sånn gammeldags undervisning at jeg, så kanskje jeg burde lagt inn si 2 – 3 timer til med sånn individuell jobbing, tror jeg. Så skal jeg da som sagt ha en prøve til torsdag som de skal jobbe individuelt og da tenker jeg da skal jeg, får jeg litt inntrykk av hva de sitter igjen med.*

I: ***Blir den på GeoGebra?***
D: *Ja jeg har ikke laget den helt, men jeg tror det blir det. Teknisk har jeg litt på, jeg er ikke sikker på om nettbrett er godt nok i ungdomsskolen. Jeg syntes det var knotete på GeoGebra på iPadene. Jeg har brukt mye en mac så, og jeg har brukt veldig mye pc før så jeg synes det var litt nedtur å gå til iPader. Det ser veldig ideelt ut, men liten skjerm ja så jeg vet ikke om de hadde gjort det bedre hvis de hadde brukt pc. Men det er jo også noe som jeg har, går og tenker på, nå prøver vi ut iPader i tre år foreløpig så er jeg ikke helt sikker på om iPader er godt nok for ungdomsskolen. Jeg skal faktisk ha en elev som har ferie denne uka som jeg skal ha undervisning med klokka 10 på fredag fra syden. Da skal vi prøve ut, tanken er jo hvordan den fremtidige skolen skal være og da tenker vi oss kanskje at ikke nødvendigvis er så bundet*

av lokalene men at i fremtiden kanskje vil være mer nettbasert. En kan tenke for eksempel at noen av oss lærere vil undervise per nett, det er ikke utenkelig. Så det er sånne ting vi har lyst å prøve ut. Ja, så hadde du litt med syv med.

I: *Ja*
D: *Så har jeg jo sånn i hovedsak hatt en introduksjon, gruppearbeid, og oppsummering. Variert litt sånn ut fra tida og oppgavens omfang. Noen ganger har jeg ikke valgt oppsummeringa selv om jeg synes jo den er veldig viktig, men valgt å ta det timen etterpå som en slags repetisjon at sist så hadde dere det og det, da blir det ikke så mye at elvene legger frem sitt men mer det jeg har observert de har holdt på med.*

I: ***Ja, for det tenkte jeg litt på hvordan det blir brukt på en måte det de gjør i timen. Bruker, men da er det for eksempel at de av og til presenterer det de har gjort da?***
D: *Ja, absolutt så trekker, kobler de inn de forskjellige iPadene som de viser. Kan noen vise hvordan de laget en speilingsfigur? Kan noen vise hvordan de laget, ja.*

I: *Opplever du at de fleste får det til da, at de har fått til det de skulle i løpet av?*
D: *Eh, både ja og nei. Det er noen elever, men det er sånn som jeg kjenner dem som har dårligere forutsetninger de sliter mer i og da bruker jeg jo de bevisst hvis det har klart å få noe til for jeg vet at det med matematikk er jo fobier i en del tilfeller, at du tror selv at du ikke er flink så det å bli trukket fram da at ja jeg kan godt si et navn til deg. Petter da bare for å ta et navn, hvis jeg vet at han er svak i matematikk så hvis han har fått til noe så trekker jeg faktisk han fram for du kan se på dem, det lyser litt da. Så det er jo litt gøy for jeg har troa på at hvis de kan komme over det der fobi at jeg er ikke noe flink i matte.*

Vedlegg 6: Transkripsjon av intervju med lærer som anvendte oppgavesettet

Intervjuet ble gjennomført mandag 15. februar kl. 12.00 – 12.18.

I = intervjuer A = lærer som anvendte oppgavesettet

Bakgrunn

I: Hvilken utdanningsbakgrunn har du?
A: *Allmennlærer i bunn, og så tok jeg litt mer matte, et halvt år. Tatt litt sånn fag, et årsstudium i samfunnsfag. 5 år +*

I: Hvor lenge har du arbeidet i skoleverket?
A: *Jeg har arbeidet 10 år til sommeren. Halvannet år på mellomtrinnet først, resten på ungdomsskolen på Ve.*

I: ***Før dere begynte med dette prosjektet hadde du noen erfaring med digitale verktøy?***
A: *Ja litt, jeg har brukt GeoGebra men da bare i funksjoner for å lettere å kunne fremstille det kjapt i stedet for å bruke en halvtime på å tegne de. Har brukt, excel har en jo brukt hele tiden men først de siste kanskje fem årene, nå synser jeg litt, at en har begynt å se på GeoGebra, men det er først nå i år at jeg har brukt det så mye inn i undervisningen. Ikke gjort det tidligere.*

I: ***Har du brukt det noe selv, kjente du til programmene fra før av?***
A: *Før nå i år?*

I: ***Ja***
A: *Ja, men da kjenne til. Ikke kunne å bruke det på samme måte.*

Oppgavearkene

I: ***Har du et eksempel på en oppgave som du syntes passet spesielt godt?***
A: *Ja. Det første var sånn gjøre seg kjent med GeoGebra. De fenget våre elever, spesielt når en kommer til der hvor du kan prøve å lage dine egne figurer. Det syntes de var kjempe gøy Og da kanskje spesielt elever som har er litt svake i matte, dette var noe de behersket og syntes var gøy. Skal du spørre om hva som ikke fungerte?*

I: ***Ja***
A: *Ja, for da hopper jeg rett inn på den. Hadde en time som skar seg helt for meg. Da måtte jeg bare stoppe. Og det var når vi så på det her med vinkler vi skulle måle, og så startet vi med de nordiske flaggene og da ble det alt var jo veldig mye av det var gitt på 90° så da kom vi ikke videre. Altså vi kom ikke til de Jamaica flaggene eller Storbritannia, altså det bare det skar seg helt den timen. Ja. Så der stoppet jeg og så tok jeg neste oppgave i stedet for så gikk vi tilbake til den etterpå der vi heller valgte å måle altså lag din egen vinkel, ta bilde, og så sette det lime inn også så på det. Da funket det igjen. Så der tror jeg nok egentlig mest det var at jeg var ikke tydelig nok på i utgangspunktet når vi startet oppgaven. At de skjønte ikke helt poenget med det for det ser jo ut som 90° hele biten hva er det du vil fram til? Ja. Så da toppet det seg litt så da måtte vi hoppe videre til noe annet. Men de har jo vært mange som har syntes at oppgavene er gøye, de siste, når de gjelder at du skulle begynne å sette inn*

rutenett og du skulle begynne å alt med speiling var det klart gøyeste for veldig mange av dem. At du kunne snu på det, trekke og når du da begynte å trekke, og det fortsatte. De var gøye, nå husker jeg ikke hvilket nummer (…) Symmetribiten syntes de var gøyest, og da ble jeg litt overrasket på noen av de hvor mye altså de klarte å skille mellom de ulike symmetriene og at de så hvor hvilken speilet akse speilet jeg det rundt, eller speilet jeg det om et punkt og kunne definere okei her roteres det bare. Så, den ja, den syntes det var gøy, ja.

I: ***Har du noen oppgaver som stimulerte til utforskning, det blir jo litt av det samme men?***
A: *Mange av de stimulerte til utfordring på. Det første arket når du begynner å trekke de, og det med å sette navn på alle, bare det å definere egenskaper kan det være det eller kan det være det, kan det være begge deler. Så det, det er jo utforskning det også. Jeg syntes veldig mange av oppgavene er utforskningsoppgaver, ja. Jeg kjente nok kanskje litt på det at jeg kanskje brukte det bitte litte granne mye, det var noen som ble litt frustrerte i forhold til, si det nå bare som det er. Hvorfor skal jeg finne ut av alt dette selv? Så jeg tror jo at hvis jeg skulle gjort det igjen, altså hatt samme tema en gang til, så hadde jeg kanskje lagt opp bitte litt grann annerledes i forhold til det. At jeg hadde kuttet noen ting litt før for å spare noen litt frustrasjon.*

I: ***Har de arbeidet i grupper nesten hele tiden?***
A: *Ja, nesten hele tiden har de arbeidet i grupper.*

I: ***Hvordan synes du oppgavene fungerte for deg som lærer og hvordan fungerte de for elevene?***
A: *Elevene er jo nå like flinke på det tekniske som det jeg er. De tar ting stort sett kjappere, og det er nytt for meg og å holde på med iPaden på det her. Så jeg tenker nok at jeg og delvis like frustrert som de underveis på noen av tingene. Ja*

I: ***Da tenker du de tekniske?***
A: *Ja, tenkte du innholdet? Mange lekte mer med det. Altså og det er jo en av de tingene jeg ikke helt har klart å finne balansegangen på. Hvor mye tid trenger jeg til oppsummering for å klare og få frem de matematiske poengene jeg vil ha frem på slutten. Der har jeg noen timer der jeg sitter, egentlig kan har 10 minutt som du kan finne på, eller trekke inn andre ting, og så bommer jeg helt i noen av timene. Jeg rekker ikke, jeg er ikke kommet fram til poenget mitt for plutselig har de hengt seg opp i noe annet som var gøy, og så må vi jo ta det og, også må en starte på igjen i neste time. Så det er en øvingssak med den typen oppgaver, og jeg er ikke helt i mål enda, jeg treffer jo ikke alle timene på det der enda. Da prøver jeg jo når jeg da har en enkelttime også kan jeg gi dem en oppgave til, men det er jo sånn håpløst når du har enkelttimer. Der og bommet det seg skar det seg helt et par ganger. Ja, jeg har jo og kjent på den frustrasjonen i forhold til at oppleggstypen eller oppgavetypen gjør at jeg må rett og slett trene litt jeg må ha flere av disse oppgavetypene for å bli bedre på det.*

I: ***Men da har du merket noen framgang hos deg selv fra du startet?***
A: *Ja, og det håper jeg jo er synlig på filmen og ellers er det jo trist å sitte å si ja. Men jo, så plutselig ser de et eller annet som ikke jeg har fått med meg at de har diskutert på gruppa eller så plutselig ser de det når vi har det oppe på smartboarden. Og da er det ikke like lett, når de da blir engasjerte og kutte de på det fordi jeg vil faktisk vil ha fram et annet poeng her. Så noen ganger har det fungert greit, og andre ganger har det skjært seg igjen selv om jeg har planlagt halvtime til oppsummering eller at jeg kutter de så tidlig. Men jeg har ikke tatt alle, vi har ikke rukket alle så jeg har gjort et utvalg. Det er himla mange.*

I: ***Når du har gitt de oppgavene har du gjort noen endringer underveis eller justert de noe?***
A; *Nei, jeg har, jeg har endret ordlyden på ikke mange men noen. Og det har et par fremmedspråklige så jeg endret noe på ordlyden der jeg syntes ordlyden var litt vanskelig at det var mange ting som du må skjønne før du på en måte kan komme der til. Og noen av de startet med, det var kanskje et par av de, der en startet felles for å repetere de begrepene igjen. Med spesielt med tanke på de. Ja, og det er men det er jo så enkelt som noen av ordlyden var så vanskelig at hvis ikke du husker hva er trekant og hva er firkant så er det veldig vanskelig å skulle starte på noen av de ordlydene som var der.*

I: ***Ja, og da nytter det ikke hvis alle sitter men ingen skjønner hva de skal gjøre.***
A: *Nei, men igjen det er jo fordelen med å være to da. Når det at du at en av de prøvde å matche de litt, prøvde å tenke litt at når de blir satt sammen i grupper, at de kan drifte hverandre fremover. Gruppene har stort sett fungert okei syntes jeg.*

I: ***Har dere hatt de samme gruppene siden i høst?***
A: *Ny gruppe når det er nytt tema. Så det har vært sammen på geometri biten og så starter jeg med nye grupper nå når vi begynner på statistikk.*

I: ***Var det noen uventa utfordringer du møtte enten pedagogiske eller tekniske?***
A: *Ja, det var det jo. For jeg kunne jo ikke GeoGebra godt nok så der er det jo noen utfordringer i seg selv og det er jo og tidkrevende å rekke å skulle finne ut av alt. Men vi har hatt litt sånn der jeg har jo mange elever som er veldig flinke på det, og så har jeg nok brukt elever mer enn det jeg har pleid, altså kom opp å vis hvordan fikk du til det her, i stedet for at jeg starter timen med å stå å vise at en bruker de. Og da, det har jo vært gøyere denne perioden en tidligere for det er ofte de svake elevene som ikke har vært de første til oppe hånda med å ville fram å vise, de har syntes det har vært veldig gøy å kunne komme fram og vise hva de har laget.*

I: Så bra*, vet du om de hadde hatt GeoGebra før de begynte med dette?*
A: *Ja, de har hatt noe på speiling. Ja, men ikke mye, nei. Men de har vært innom det på mellomtrinnet, ja.*

I: ***Okei***
A: *Men ikke på iPad da, da har de sittet på pc.*

I: ***Ja selvfølgelig, hvordan synes du det har fungert med iPad?***
A: *Når en bare blir vant med det så er det veldig greit men det er jo jeg har jo og bare arbeidet på pc på det før så det er litt overgang for min del og. Men det er jo et nydelig verktøy når alle sitter med, på hver sin, og kan måle vinklene og trekke i det. Du kan jo se mye større linjer enn det en har kunnet tidligere, se sammenhengene eller og, det jeg har i alle fall drevet med tidligere. Da har en vist noen ting, men her kan de jo sitte å prøve på tingene selv.*

I: ***Ja, jeg føler det hjelper enormt på den forståelsen når du har det dynamisk***
A: *Ja, og du har det visuelle foran deg*

I: ***Det blir liksom noe helt annet enn når du har strekene på papiret, prøv å se for deg at denne går rundt og så skjønner du det ikke helt***
A: *Det gir nye muligheter*

I: ***Hvordan har du når du bruker oppgavearkene hvordan har undervisningen organisert? Har du liksom en introduksjon først?***
A: *Ja, en starter jo som regel med det unntaksvis når det at jeg egentlig bare ikke har rukket å avslutte forrige time så starte, men ja starter som regel med instruksjon først også av og til ser vi på første biten selv slik at vi eller sammen har kontroll på begrepene, hva spør de egentlig om, hva er vi ute etter og at de prøver. Eller, det kommer litt an på oppgaven og. Men stort sett en introduksjon først på det, og så felles arbeider de, og så felles oppsummering. Og da går en også rundt å hører hvordan de ligger an og veilede.*

I: ***Ja, og da når du har den oppsummeringa, hvordan ser den ut?***
A: *Jeg brukte elevene mye, altså hva fant du ut? Også kobler de på sin iPad også ser vi på det. Av og til forklarer de, av og til stiller de spørsmål ut eller jeg stiller spørsmål og så svarer resten. Ser dere noe? Når det gjelder figurer, egenskaper, hvilken figur klart, prøvd å lage det? Ja, er det det? Hvordan måtte det ha vært? Også kan de stå å trekke på det når de kobla på sin iPad eller de lager det kjapt når de er der oppe, så de viser det. Det varierte litt alt etter hvor stor figur en hadde.*

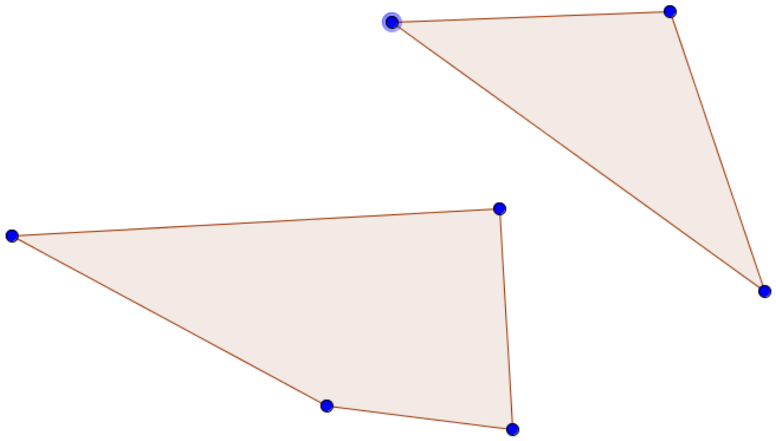
I: ***Til slutt noe annet du vil trekke fram av ditt helhetsinntrykk av geometri-opplegget?***
A: *Det er første gang jeg har hatt en åttende klasse og ikke brukt tid på passer og linjal så det synes jo jeg blir spennende å se videre hvor, om de har mer utbytte av eller sånn. Og om en må ta det i tiende, ja. Men nei, noe annet jeg vil trekke fram, tror ikke det. Jeg tenker nok kanskje at jeg kommer til å justere litt hvis jeg skal ha det igjen, altså har vi iPad tilgjengelig så tror jeg kommer til å balansere til mer i forhold til utforskende oppgaver. Noen kjente på et frustasjonsnivå i forhold til at det var mye utforskende, og kanskje lukke noen av de litt mer, noen av oppgavene. Tror jeg nok kanskje er det eneste.*

I: ***Ja, så de får litt mer mengdetrening?***
A: *Ja, trenger ikke være mengdetrening, men klar ordlyd i hva skal du fram til ikke hva finner du ut av, hva kan du se. Men at det blir jo for så vidt mengdetrening men det var et par som kjente på litt frustrasjon i forhold til at, er det det som er poenget. Altså gi meg, altså skal jeg går det an å finne ut noe mer? De ville gjerne ha en sånn der, nå er, har funnet fram til det som var poenget her. Litt sånn, litt den, så jeg tror nok kanskje at jeg burde ha vært flinkere til å møtt de på det underveis men det var jeg ikke. Så jeg tenker skal en gjøre det igjen så tror jeg nok jeg skal møte noen litt mer på det hvis en har samme elevmassetype og det har en jo som regel. Det er vel det eneste.*

Vedlegg 7: Oppgavene som er analysert og presentert i denne studien

Oppgaveark: Polygon 02 – 1

En *polygon* eller *mangekant* er en lukket kurve sammensatt av flere rette linjestykker eller linjesegmenter. Trekanter og firkanter er eksempler på polygoner.



Oppgave A:
Utforsk polygon-kommandoen og finn ut forskjellen på *mangekant* og *regulær mangekant.* Skriv ned forskjellen med egne ord.

Det er et krav at en polygon som kalles *en firkant,* har fire sider og fire hjørner. Hvis også figuren oppfyller dette kravet:

- alle sidene er like lange
- alle vinklene er 90^0

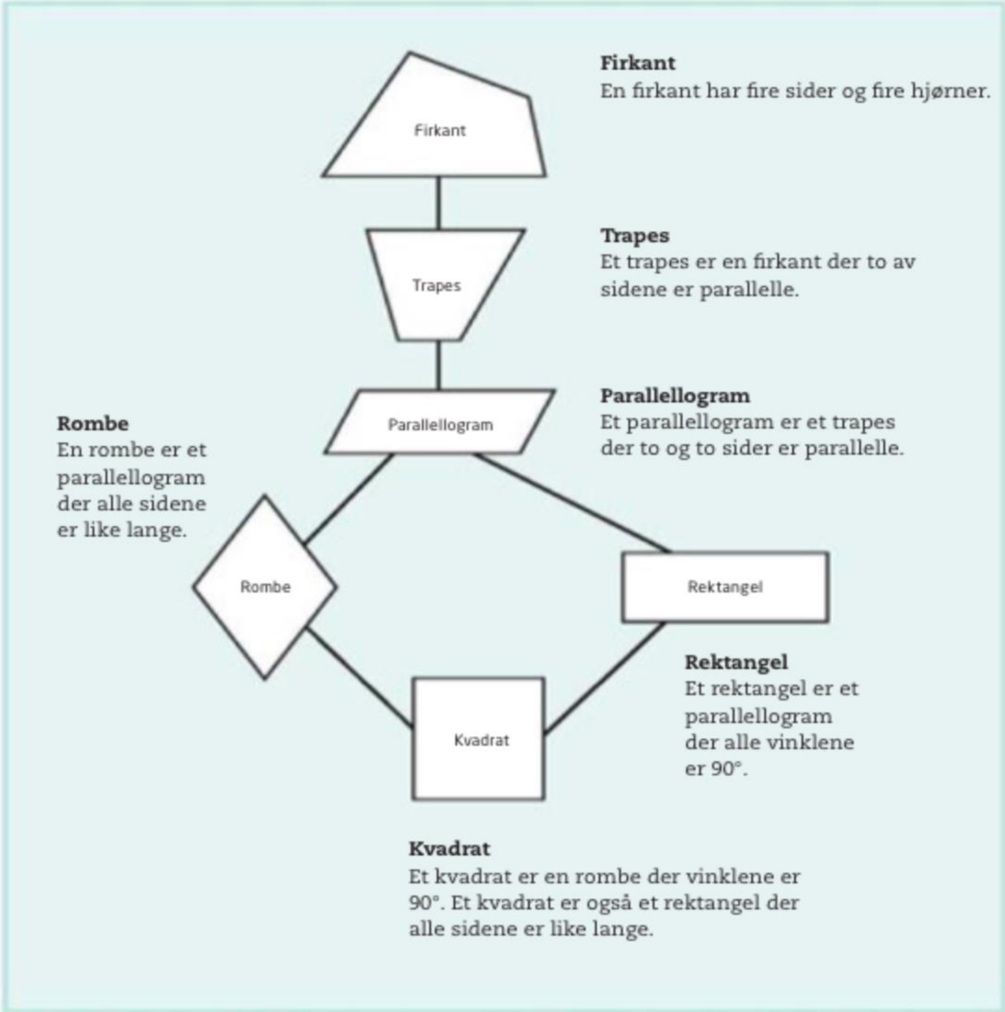
kalles mangekanten *et kvadrat.*

Oppgave B:
Gå inn på denne lenken og finn hvem som oppfyller kravene til *et kvadrat.*

http://ggbtu.be/mtDdU3iCU

Oppgaveark: Polygon 02 – 2

Oppgave B:
Drøft hvilke figurer dere laget i oppgave A i forhold til oversikten fra læreboka.



Kilde: Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013): *Maximum 8. Matematikk for ungdomstrinnet,* (1. utg, 2.oppl.), side 113. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

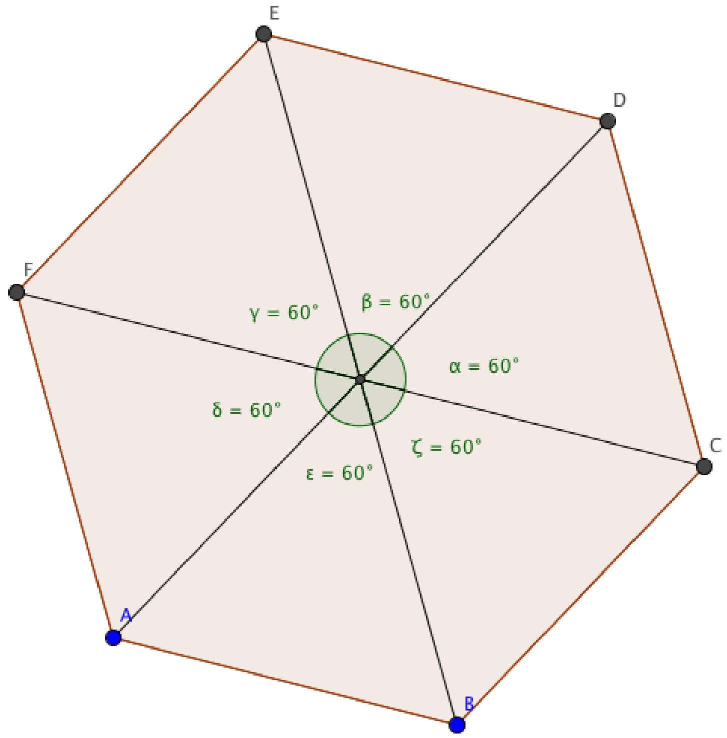
Oppgave C:
Lag disse figurene i GeoGebra, og de skal kun oppfylle minstekravene til navnene:

- en firkant
- et trapes
- et parallellogram
- ei rombe
- et rektangel
- et kvadrat

Lag ett dokument for hver firkant. Skjul deretter alle hjelpestreker du har brukt. Figuren lagres ved å trykke på de tre strekene oppe til høyre. Trykk *Export* og *ggb* og lagre dokumentet i for eksempel Google Drive.

Figuren skal være slik at hvis en annen elev tar tak i ett av hjørnene og endrer på det, beholder likevel firkanten sine minstekrav. En medelev skal finne navnet på de figurene du har laget.

Oppgaveark: Polygon 02 – 3



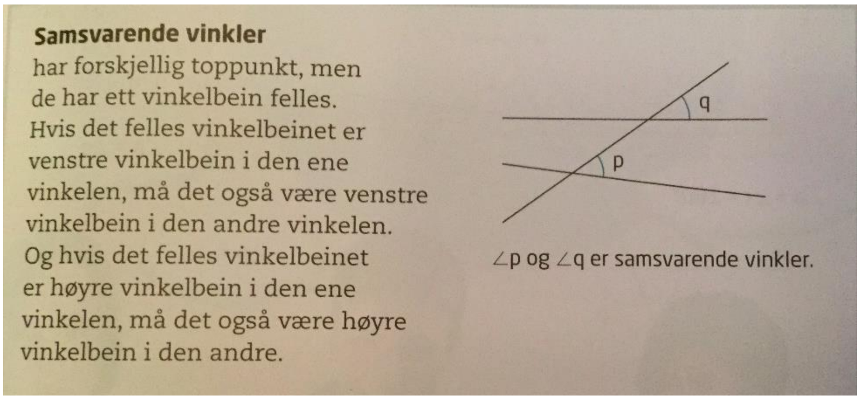
Oppgave B:
I sekskanten over, er alle sentralvinklene 60^0. Hvis du legger sammen alle sentralvinklene: alfa + beta + gamma + delta + epsilon = 360^0.

Kan dere gjette hvor mange grader vinkelen er mellom to sidekanter på denne figuren (f eks vinkel EDC)? Hvis det er vanskelig å gjette, kan dere lage figuren i GeoGebra og be programmet måle vinkelen.

Oppgave D:
Konstruer ulike regulære mangekanter. Finn både sentralvinklene, vinklene mellom sidekantene og summen av vinklene. Utforsk sammenhengen mellom figurenes navn og vinklene og vinkelsummene. På Internett finner dere navn på regulære polygoner.

Oppgaveark: Polygon 02 – 4

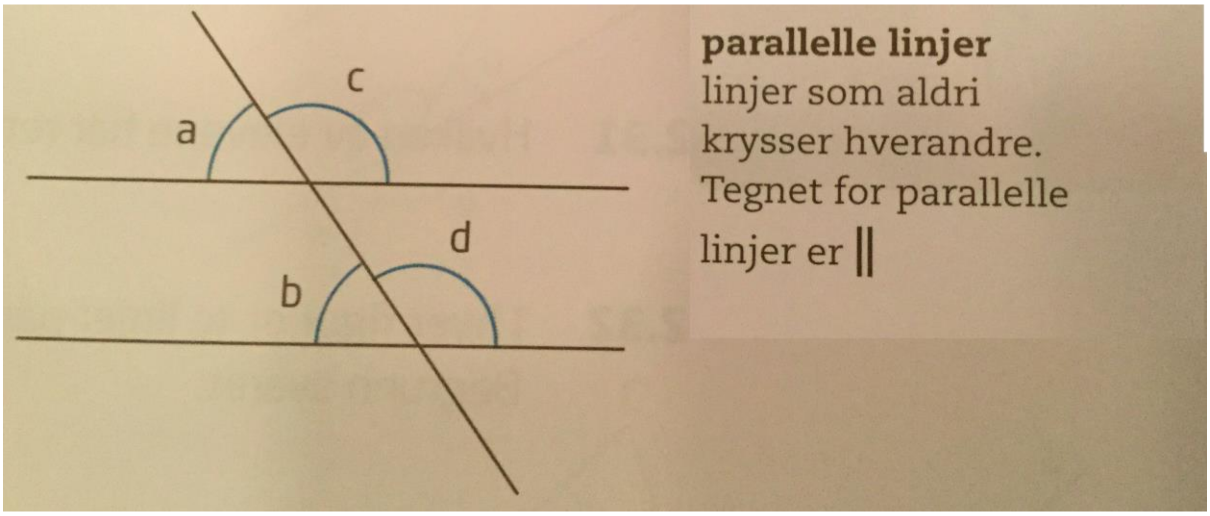
I disse oppgavene skal dere bruke kommandoer for å finne *midtpunkt* på et linjestykke og lage *ei parallell linje.* Når vi skal forklare noe om vinkler, kan det være nyttig å kunne noen navn og begreper. Dere har tidligere hatt noe om *nabovinkler*, *toppvinkler* og *komplementvinkler.* Nå skal dere også lære om *samsvarende vinkler.* Det er to vinkler som har forskjellige toppunkt, men ett av vinkelbeinene er felles. Se illustrasjonen og forklaring her:


Samsvarende vinkler
har forskjellig toppunkt, men de har ett vinkelbein felles. Hvis det felles vinkelbeinet er venstre vinkelbein i den ene vinkelen, må det også være venstre vinkelbein i den andre vinkelen. Og hvis det felles vinkelbeinet er høyre vinkelbein i den ene vinkelen, må det også være høyre vinkelbein i den andre.

∠p og ∠q er samsvarende vinkler.

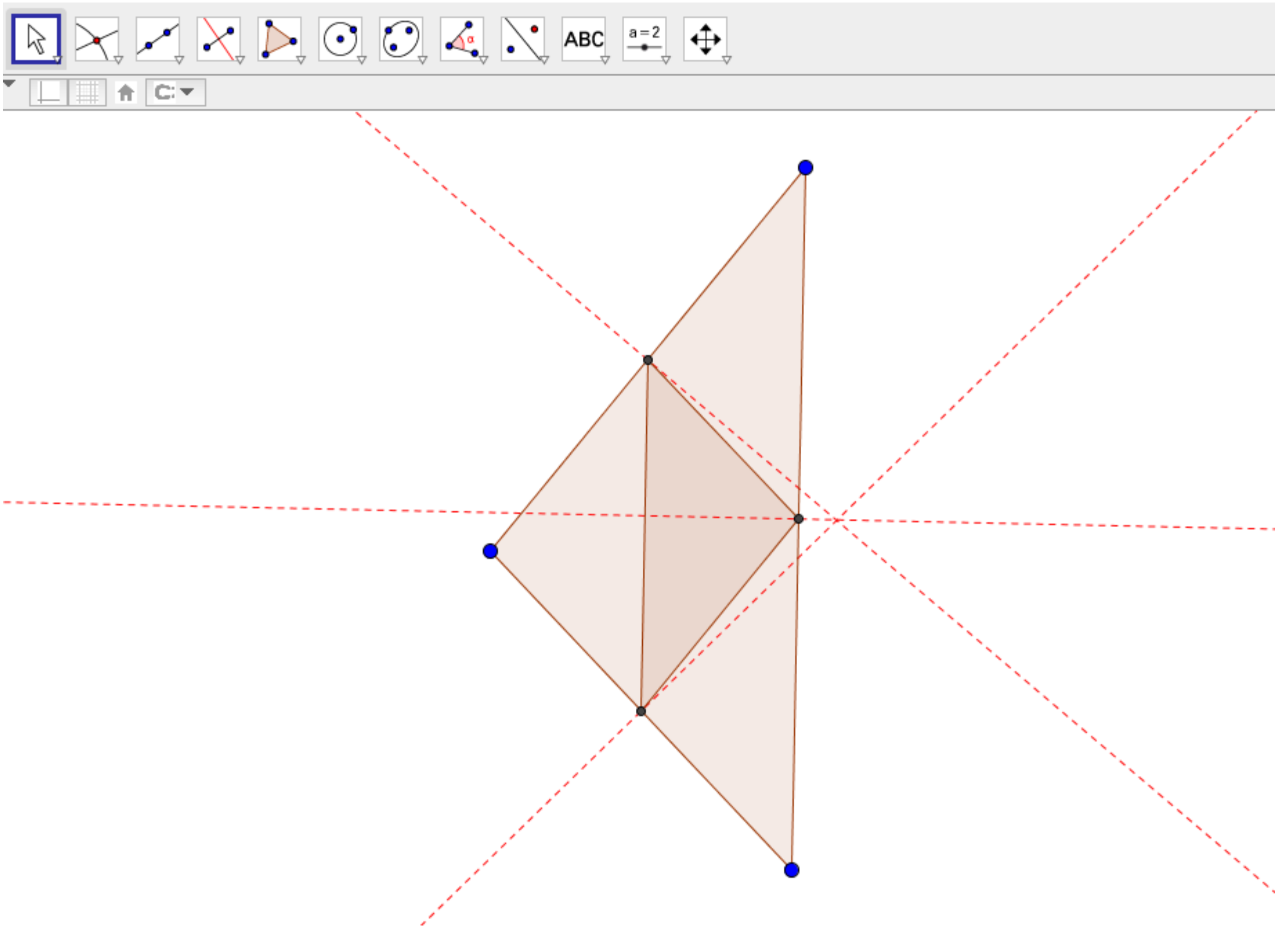
Kilde: Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013): *Maximum 8. Matematikk for ungdomstrinnet,* (1. utg, 2.oppl.), side 91. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Dere får bruk for å kunne noe om parallelle linjer. Det er linjer som aldri krysser hverandre. Se på illustrasjonen og forklaringen under. Her møter dere også *samsvarende vinkler.* Kan dere finne de samsvarende vinklene? Hva kan dere se på tegningen når det gjelder vinklene?

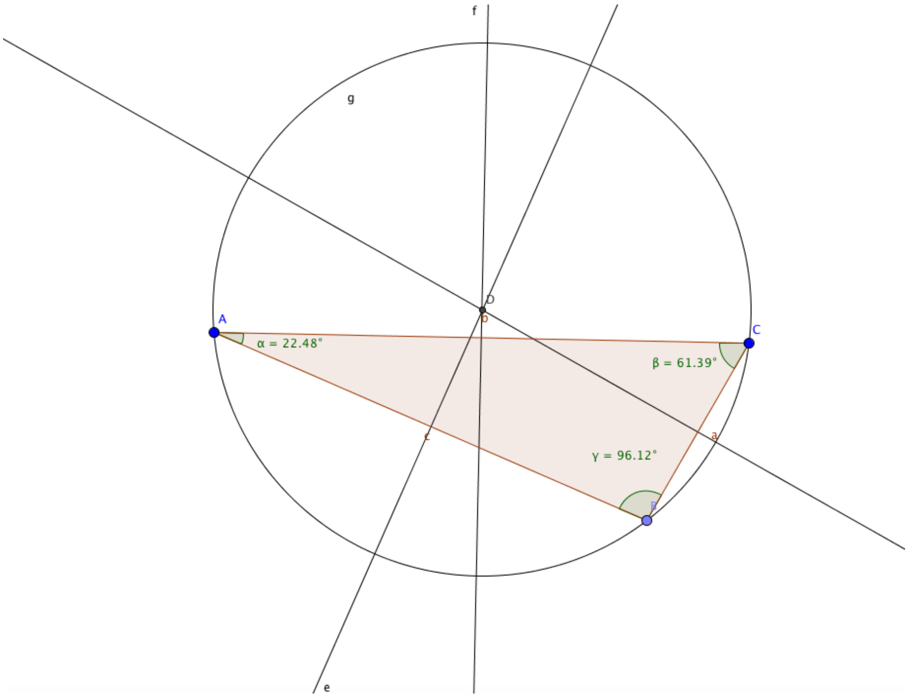


Kilde: Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013): *Maximum 8. Matematikk for ungdomstrinnet,* (1. utg, 2.oppl.), side 91. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Oppgave A:
Tegn en tilfeldig stor trekant i GeoGebra. Finn midtpunktet på hver side og tegn en ny trekant med disse tre hjørnene. Fortsett med å finne midtpunktet på den nye trekanten og tegn enda en ny trekant med disse tre hjørnene. Fortsett slik. Sett på navn på punkter, vinkler og linjestykker og undersøk sammenhenger i figurene. Hva kan dere finne ut?

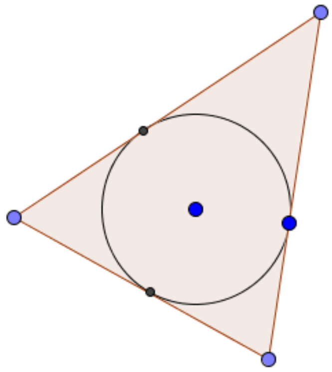


Oppgave C:
Tegn en vilkårlig trekant. Lag midtnormaler på alle tre sidene og bruk skjæringen mellom disse tre midtnormalene til sentrum i sirkelen. Sett inn vinkler på trekanten og lengde på sidene.



Nå skal dere endre på trekanten og lete etter sammenhenger mellom vinkler og lengde på sidene. Legg merke til hva som skjer når sentrum i sirkelen ligger innenfor eller utenfor trekanten. Hva skjer når sentrum ligger nøyaktig på en av sidene i trekanten?

Oppgave E:
Lag en vilkårlig trekant. Denne gangen skal dere lage en sirkel som er innenfor trekanten og som kun berører de tre sidene i ett punkt. Vi sier at sidene i trekanten er tangenter til sirkelen. Pass på at punktene som berører trekanten og ligger på sirkelen, henger sammen. Det sjekker dere ved å endre på figuren. Hvis det er korrekt, vil også den innvendige sirkelen følge med.



Lag også en sirkel som går gjennom de tre hjørnene på trekanten slik du gjorde i oppgave C.

Hvis dere drar i figuren, kan du kanskje klare å få sentrum på disse to sirklene til å ligge i samme punkt. Hva slags trekant får dere da?

Oppgaveark: Symmetri 03 – 4

Bruk fortsatt GeoGebra og hukk av for både *Akser* og *Rutenett*.

Oppgave A:
Gå inn på denne nettsiden: http://ggbtu.be/mEVPgSBWk Finn ut hva slags symmetri som er brukt her. Finn også ut hvor eventuelle *symmetrilinjer, symmetripunkter, rotasjonspunkter* eller *vektorretning/vektorlengder* er.