Konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk

Hedda Johanne Lundstadsveen

Veileder

Hans Kristian Nilsen

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2016

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Arbeidet med masteroppgaven startet senhøsten 2015 og har deretter pågått i en periode på seks måneder. Min tid som student startet høsten 2010 da jeg begynte min utdanning på lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo, for å bli lærer på videregående skole. Et år senere fant jeg veien til Kristiansand og Universitetet i Agder, og begynte heller å studere på Grunnskolelærerutdanningen 5-10, som skulle vise seg å bli mitt endelige utdanningsvalg. Her valgte jeg fagene matematikk og musikk, og før jeg visste ordet av det var jeg kommet til mitt femte år og var klar til å ta fatt på min hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk. Med den setter jeg nå et punktum for min studenttilværelse som har utgjort seks viktige år av livet mitt. Jeg ser nå frem til en spennende tid der jeg nå endelig kan tre inn i læreryrket.

Det er en mengde personer som har vært svært viktige for meg i mitt arbeid med masteroppgaven, og jeg vil her anerkjenne deres bidrag til å hjelpe meg i mål. Først og fremst vil jeg rette en stor takk til veileder Hans Kristian Nilsen, som har bidratt med en glimrende veiledning som har vært tilpasset meg. Jeg er utrolig takknemlig! Dette har bidratt til å motivere og utfordre meg på en måte som gjorde meg mest mulig produktiv i mitt arbeid. Jeg vil også takke rektor og kontaktlærer ved skolen hvor jeg utførte min forskning, og ikke minst ønsker jeg å rette en stor takk til elevene som bidro til at denne forskningen var mulig å gjennomføre.

Jeg vil rette en stor takk til mine medstudenter på masterprogrammet som har vært gode støttespillere gjennom hele utdanningen. Maria Wasmuth, Maria Kaiktzoglou, Linn Flaten, Anette Nebdal og Katarina Myrlønn - en spesiell takk til dere for utallige timer på mastersalen med diskusjoner, latter og gråt. Familie og venner har også vært svært viktige. Min mor, Ann Kristin Skarnes, må takkes for veiledende og støttende råd underveis, og korrekturlesing når det nærmet seg slutten. Janne Andås og Anette Kittelsen, min gode venninner og turrådgivere. Takk for deres gode råd, oppmuntringer, forståelse og tålmodighet i utallige kilometer i skogen. Til sist vil jeg rette en stor takk til min fantastiske kjæreste Martin Daling. Takk for din urokkelige tro på at jeg klarer alt jeg bestemmer meg for, din evne til å støtte meg i både datainnsamling, skrivingen, men også i den mentale prosessen for å holde det gående og holde humøret oppe når det ble som mest utfordrende.

Hedda J. Lundstadsveen

Kristiansand, mai 2016

Sammendrag

Brøk er et komplekst fenomen, og mange elever strever i sitt første møte med dette matematiske temaet. I lys av et sosiokulturelt syn på læring, har jeg i denne studien vurdert 8.klassingers bruk av konkretiseringsmateriell i deres arbeid med brøk, med utgangspunkt i forskningsspørsmålet:

Hvordan oppfatter elevene på 8.trinn brøkbegrepet gjennom bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med oppgaveløsning?

For å besvare forskningsspørsmålet ble bruken av konkretiseringsmateriell vurdert i forhold til hvordan dette bidro til elevenes oppfatning av brøkbegrepets ulike aspekt: Brøk som del av det hele, brøk som måling, brøk som divisjon, brøk som operator og brøk som forholdstall. For å besvare forskningsspørsmålet ble en kvalitativ tilnærming lagt til grunn for innsamlingen av data. I fire skoletimer ble elevenes arbeid med oppgaver i brøk observert gjennom deres bruk av konkretiseringsmateriell. I tillegg til at det forelå ti minutters intervju avslutningsvis i hver time.

For å gi en mer helhetlig fremstilling av bruken av konkretiseringsmateriell i arbeidet med brøk er de fem aspektene av brøkbegrepet beskrevet, i tillegg til at studiens teoretiske innramning består av tidligere studier gjort på bruken av konkretiseringsmateriell. I denne innramningen inngår også en beskrivelse av det sosiokulturelle perspektivet for læring da analysen baserer seg på dette gjennom elevenes samarbeid om oppgavene.

Konkretiseringsmateriellet bidro til å visualisere abstrakte sammenhenger ved brøkbegrepets ulike oppfatninger, og oppgavene påvirket i stor grad hvilken oppfatning av brøkbegrepet elevene fikk. Studiens hovedfunn var hvilken oppfatning elevene fikk ved bruk av ulike konkretiseringsmateriell. Elevenes oppfatning kunne deles opp i tre hovedkategorier:

1. Oppfatningen av brøk som del av det hele
2. Oppfatningen av brøk som måling
3. Oppfatningen av brøk som divisjon og operator

Det visste seg at flere oppfatninger ofte oppsto i en og samme oppgave, og at oppgaveutformingen hadde stor betydning for hvilken oppfatning elevene fikk. Bruken av konkretiseringsmateriellet i elevenes samarbeid bidro til å avdekke at elevene enten hadde en oppfatning av brøkbegrepet, lærte seg en ny oppfatning av brøkbegrepet, eller oppdaget en mangel eller misoppfatning i sin oppfatning av brøkbegrepet. Til sist var det også et viktig funn at det konkretiseringsmateriellet måtte ha et tydelig mål og hensikt for at elevene skulle klare å nyttiggjøre seg dem i oppgaveløsningen.

Abstract

Fractions are a complex concept, and many students struggle in their first approach with it. In this study I have considered how 8th grade students used concrete materials in relation to their work with fractions, in light of the socio-cultural perspective of learning. This study was based on this research question:

How do students in 8th grade perceive the concept of fraction through the use of concrete materials when solving tasks?

To answer this research question, the use of concrete materials was considered with respect to how this contributed to the students' perception of the different aspects related to fractions: fraction as a part of a whole, fraction as measurement, fraction as division, fraction as operator, fraction as ratios. To answer the research question I used a qualitative approach in the datacollection. Four sessions were observed where the students worked with fractions through the use of concrete materials when solving tasks. In addition, a ten-minute interview was conducted in the end of each session.

To provide a more comprehensive representation of the use of concrete materials when working with fractions, I will describe the five aspects of the fraction concept. In addition, the theoretical framework consists of previous research on concrete materials, and it also includes a description of the sociocultural perspective of learning. The analysis is based on this perspective through the student's cooperation in tasks.

The concrete materials contributed to visualize abstract relations about the different perceptions of the fraction concept, but the way that the tasks were designed also affected what perception the students got. The main finding of the study was what perception the students perceived through the use of different concrete materials. The student's perception could be divided into three main categories:

1. The perception of fraction as part of a whole
2. The perception of fraction as measurement
3. The perception of a fraction as a division and as an operator

In several cases different perceptions occurred in the same task, and this was related to the way the tasks were designed. They affected which perception the students got. The use of concrete materials in working in groups revealed that the students either had a perception of a fraction, or got a perception of a fraction, or discovered that they lacked or had a misapprehension in their perception of a fraction. Finally, it was also an important finding that the concrete materials needed a clear goal and a direct purpose when using them, so that the students would be able to utilize them in solving tasks.

Innholdsfortegnelse

1 Introduksjon og forskningsspørsmål

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Allerede på barneskolen ønsket jeg å forstå hvorfor matematikken var som den var. Jeg nøyde meg ikke med en oppskrift, men stilte alltid spørsmål til hvorfor vi gjorde sånn eller sånn. Det skulle vise seg å bli svært viktig for min matematiske utdanning. Spesielt var det et tema på barneskolen som jeg slet med; brøk. Jeg kunne ikke forstå hvorfor vi skulle gjøre matematikken enda mer komplisert, spesielt når vi allerede kunne skrive brøken som et desimaltall? Hvorfor skulle det plutselig introduseres to tall som skulle være både over og under en strek? Kunne vi ikke i stedet forholde oss til de svært så konkrete desimaltallene, som uansett betydde det samme? Og var ikke brøk i så fall bare det samme som divisjon. Disse spørsmålene og mange flere dukket opp i introduksjonen til dette nye temaet, og var typiske spørsmål for ei jente som ønsket å forstå *hvorfor* vi gjorde som vi gjorde. Min mor var matematikklærer på ungdomsskolen, og forklarte meg tålmodig svaret på alle spørsmålene, med de hjelpemidlene hun kunne finne for å hjelpe meg å forstå. Til slutt trodde jeg at jeg hadde forstått konseptet, der telleren var en del av det hele i nevneren, og at dette kunne gjelde eksempler som at $\frac{1}{2}$ betydde at man hadde spist en halv pizza. Så lett var det derimot ikke. Sannheten om brøk skulle vise seg å bli mye mer kompleks. Brøkbegrepet inneholdt mange flere meninger og betydninger. Ikke nok med at telleren var en del av det «hele» i nevneren, men det kunne også være en divisjon, for å ikke snakke om at det dessuten var et tall på tallinja. Stadig ble brøkbegrepet mer omfattende og komplekst.
Min lærer i matematikk på videregående skole evnet å forklare meg matematikk på en måte som gjorde at jeg forsto. Han pleide å si at jeg skulle forklare ham hva jeg hadde gjort, og ut ifra dette oppdaget han hvor min feil lå. Han ba meg alltid om å starte igjen like foran der feilen lå i mattestykket, slik at jeg kunne ta utgangspunkt i noe jeg forsto. Deretter veiledet han meg videre mens hans stilte oppklarende spørsmål til meg for at jeg selv kunne oppdage feilen. På denne måten klarte han å gjøre det som tilsynelatende kunne virke som ubegripelige tall og symboler, helt konkret. Ved å knytte ny kunnskap til noe jeg allerede forsto, kunne han gjøre den abstrakte matematikken helt forståelig. Han valgte dette fremfor den andre metoden som jeg så ofte hadde blitt møtt med, der læreren forklarer hele oppgaven på nytt, slik vedkommende mente den skulle løses og uten å ta særlig hensyn til mine forsøk. Dette ville forsterket min følelse av det abstrakte med matematikken, og jeg hadde sannsynligvis ikke klart å relatere meg til det nye jeg skulle lære. Denne læreren valgte isteden å ta utgangspunkt i min løsning, slik at resultatet ble at jeg stadig kunne utvikle meg og lære på bakgrunn av allerede eksisterende kunnskap. Problemet oppstår når dette ikke er utgangspunktet i læring av matematikk. Ofte har jeg hørt medstudenter eller venner si at: «Matematikk var mitt verste fag på skolen.» Og når jeg spør hvorfor, svarer de som regel at de aldri forsto det. «Matematikk formidles ofte unødvendig abstrakt(…) Det er fort å glemme at all matematikk som utføres på grunnskolen, representerer noe som egentlig er helt konkret. » (Bunting, Skogen, Røeggen, & Tjora, 2009). Som lærere må vi dermed evne å se det konkrete i matematikken vi ønsker å formidle, slik at elevene våre kan tilegne seg dette først, før vi deretter kan gjøre matematikken gradvis mer abstrakt.

På bakgrunn av disse erfaringene, og med et håp om å hjelpe mine elever til å bli glad i matematikk, ønsket jeg å studere hvordan matematikken kan konkretiseres for elever i grunnskolen. Jeg bestemte meg for å utforske bruken av konkretiseringsmateriell i arbeidet med brøk, der de ulike aspektene ved brøkbegrepet i var sentrum for mine undersøkelser. Jeg ønsket å se hvordan elevene ved hjelp av helt konkrete hjelpemidler kunne visualisere abstrakt matematikk, og hvordan dette kunne si noe om deres oppfatning av kompleksiteten i brøk som begrep.

1.2 Forskningsspørsmål

Ønsket om å studere elevenes bruk av konkretiseringsmateriell, sammen med fokuset på hvordan elevene oppfatter brøkbegrepet, bidro til formuleringen av følgende forskningsspørsmål.

Hvordan oppfatter elevene på 8.trinn brøkbegrepet gjennom bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med oppgaveløsning?

I forskningsspørsmålet skal *oppfatningen av brøkbegrepet betraktes*. Fem ulike aspekt med brøkbegrepet presentes i kap. 2.6. I datainnsamlingen skal det derfor redegjøres for hvordan elevenes oppgaveløsning kunne kategoriseres innenfor disse fem ulike aspektene. Videre er formålet med forskningsspørsmålet å avdekke hvordan *bruken av konkretiseringsmateriell* kan bidra til at elevene oppfatter brøkbegrepet, noe som vil gjøres med utgangspunkt i disse kategoriene. Under gjennomføringen av opplegget ble interaksjonen mellom elevene sentral, noe som kan relateres til Lev Vygotskys syn på sammenhengen mellom sosiale og individuelle aspekt ved læring. Jeg vil altså gjennom et sosiokulturelt perspektiv diskutere elevenes oppfatninger av brøkbegrepet gjennom deres samspill i oppgaveløsning. Studiet tok utgangspunkt i elever fra 8. trinn.

1.3 Innsnevring og avgrensning

Med utgangpunkt i forskningsspørsmålet har jeg utarbeidet noen tanker i forhold til spesifiseringer og avgrensinger av temaet. Både i forkant, underveis og etter utførelsen av studiet ble det gjort en rekke valg for å avgrense oppgaven. Bruk av konkretiseringsmateriell er et stort og omfattende tema, og et av valgene som ble benyttet for å avgrense oppgaven vises i form av hvilken teori som utgjør oppgavens teoretiske bakteppe.

I kapittel 2, om det matematiske temaet brøk, er det gjort en del begrensninger. I delkapittel 2.4 ble temaet avgrenset til å gjelde de matematiske begrepene knyttet til brøk som jeg finner relevante for denne studien. Videre kunne de ulike aspektene ved brøkbegrepet blitt beskrevet i mye større omfang, men måtte begrenses til å sentrerte seg rundt studiens funn.

Det teoretiske rammeverket måtte også innsnevres til å beskrive teorier og forskning som var relevante for mitt studium. I Vygotskys teori om læring og utvikling fokuserte jeg på det som karakteriserte funnene i observasjonene, og da spesielt mediering ved bruk av artefakter. I tillegg blir viktige fenomener som språkets betydning og den proksimale utviklingssone omtalt, da disse i stor grad lå til grunn for elevenes samarbeid og deres bruk av konkretiseringsmateriell.

Innsamlingen av data ble avgrenset til observasjon i fire matematikktimer, samt at det ble gjennomført fire intervjuer avslutningsvis i hver av disse timene. Da de mest innholdsrike funnene fremkom av observasjonene, ble funnene i intervjuene begrenset til kun å supplere funnene fra observasjonene. Da datamengden ble svært stor, måtte jeg naturligvis også begrense fokuset med tanke på hva jeg valgte å anvende i analysen. Jeg har derfor inkludert et kapittel 5, der jeg viser alle funnene i en tabell, også de jeg ikke har valgt å gå nærmere i dybden på. Utvalget av funn som ble valgt til analysen vil beskrives mer grundig i delkapittel 4.7 som omhandler dataanalyseringsstrategiene.

1.4 Valg av strukturering for oppgaven

Det var en rekke hensyn å ta, med tanke på oppgavens oppbygning. Det matematiske temaet brøk ble plassert før det teoretiske rammeverket, i et eget kapittel. Dette skyldes at det matematiske temaet ligger til grunn for alle delene av studien, og er også utgangspunktet for mine funn og videre diskusjon. I denne delen om brøk som matematisk tema blir som nevnt brøkbegrepets ulike aspekt presentert. Disse var spesielt viktige for å besvare studiens forskningsspørsmål. I denne sammenheng vil jeg nevne at det her inkluderes relevant litteratur i forhold til elevers oppfatning av disse aspektene, da det var mer hensiktsmessig å plassere dette her heller enn å ha det i en isolert del senere.

Undersøkelsen har et sosiokulturelt læringsperspektiv i bunnen. Dermed ble en presentasjon av det sosiokulturelle læringssynet plassert som første delkapittel i teorikapittelet (kapittel 3). Hensikten er at dette skal kaste lys over det andre delkapittelet om konkretiseringsmateriell. Det tredje og siste delkapittelet, inneholder en klargjøring av begrepet forståelse, da det er sentralt videre i oppgaven.

Jeg vil også kommentere at jeg har inkludert et kapittel 5 der jeg presenterer en tabell over samlede funn fra datainnsamlingen. Disse funnene beskrives også i korthet i dette kapittelet. Analyse og diskusjon blir presentert i to påfølgende kapitler, der funnene fra analysen diskuteres i diskusjonen i lys av teorien som er lagt til grunn i studien.

I det påfølgende kapitlet skal det matematiske temaet brøk presenteres, der det legges særlig vekt på å fremstille brøkbegrepets ulike aspekt.

2 Brøk

I dette kapittelet der det matematiske temaet brøk skal presenteres, vil det innledningsvis legges vekt på hvilken plass temaet har i skolen. Dette gjøres med utgangspunkt i hva Utdanningsdirektoratet har satt av rammer gjennom Kunnskapsløftet. I forlengelsen av dette vil det diskuteres hvorfor brøk er en viktig del av elevenes grunnleggende tallforståelse. Deretter vil brøk som begrep defineres og omtales, samt relevante matematiske begreper innen dette temaet. Brøkbegrepets ulike aspekt vil så presenteres, på bakgrunn av at disse var sentrale for studiens fokus. Her vil det også inkluderes relevant litteratur i forhold til elevenes oppfatning av de ulike aspektene.

2.1 Introduksjon

Ifølge Streefland (1997) kan brøk som tema sees på som et resultat av behovet for fordeling av mengder: «Fractions evovle from everyday experience of fair sharing» (s. 347). En konsekvens av dette er at brøk i dagens skole blir introdusert tidlig som en del av elevenes læring i matematikk.

I læreplanen for matematikkfaget faller brøk inn under hovedområdet tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2006). Brøk skal komme inn i elevenes tallbegrep allerede etter 2.trinn: «Hovedområdet tall og algebra handler om å utvikle tallforståelse og innsikt i hvordan tall og tallbehandling inngår i system og mønster. Med tall kan vi kvantifisere mengder og størrelser. Området tall omfatter både hele tall, brøk, desimaltall og prosent». Etter 4. trinn skal elevene kunne «bruke enkle brøker i praktiske sammenhenger. Etter 7.trinn skal elevene kunne finne fellesnevner og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøker (Utdanningsdirektoratet, 2006). I denne studien var det imidlertid mest interessant hvilke mål for opplæringen som var nedfelt i «Tal og algebra» for 8., 9. og 10. klasse (Utdanningsdirektoratet, 2006):

> *Mål for opplæringa er at eleven skal kunne*
> - *samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege*
> - *rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk*

Ifølge Bondø (2010) opplever elever brøk som vanskelig, og de husker ikke hvordan de skal utføre regneoperasjonene. Cramer og Wyberg (2009) hevder at undervisning av brøk fortsetter å være en stor utfordring for lærere på grunnskolen, og gjennom en betydelig mengde forskning på undervisning og læring av brøk har det blitt identifisert en rekke utfordringer elever har med disse tallene og strategiene knyttet til dem. Som en følge av de mange utfordringene som følger i kjølvannet av dette matematiske temaet, blir brøk etterspurt som demonstrasjonsundervisning i ulike etterutdanningsforløp. Behovet for god metodikk innen dette matematiske temaet er utvilsomt stor. Hvorfor brøk som matematisk tema er så viktig for elevenes matematiske utdanning kan sees i sammenheng med hvordan dette skiller seg ut, i form av å basere seg på en allerede eksisterende tallforståelse. Noe av det mest nødvendige for matematikkopplæringen til elever i ungdomsskolen er den grunnleggende tallforståelsen.

2.2 Brøk som del av den grunnleggende tallforståelsen

Både forståelsen for addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon og evnen til å gjøre utregninger med disse fire regneartene, bør ligge til grunn for videre utvikling og læring i matematikk (Bunting et al., 2009). Dette er en del av den grunnleggende tallforståelsen, og selv om en kalkulator kan regne ut svaret på alle oppgaver innenfor de fire regneartene, så er elevenes opplæring innen dette emnet svært viktig, da all videre matematikkopplæring er fundamentert på dette. I denne sammenheng påpeker Lamon (2012) følgende: «As one encounters fractions, mathematical content takes a qualitative leap in sophistication. Suddenly meanings and models and symbols that worked when adding, subtracting, multiplying, and dividing whole numbers are not as useful» (s. 21). Da møtet med brøk introduserer elevene for mer komplekse sammenhenger, er det en fordel at den grunnleggende tallforståelsen er på plass. Mangelfull tallforståelse vil fremkomme tydelig i elevenes møte med brøk. Dette skyldes også at det i brøkregning arbeides mye med tall som er mindre enn én, og som dermed er mye mer abstrakt enn å arbeide med hele tall (Bunting et al., 2009). Elevene må da være klar over brøkstrekens funksjon som deletegn, de må kunne multiplisere for å finne fellesnevner, og addisjon og subtraksjon dukker opp i de fleste oppgaver med brøk. Viktigheten av å forstå likhetstegnets muligheter og begrensninger er også viktig for elevenes arbeid med brøk. I likninger med brøk er man ofte nødt til å utføre flere operasjoner på hver side av likhetstegnet.

På bakgrunn av dette tydeliggjøres poenget om at hvis en av grunnsteinene mangler i den grunnleggende tallforståelsen, kan dette by på problemer i det videre arbeidet med brøk, og «forståelsen for hva man driver med, vil før eller siden stoppe opp» (Bunting et al., 2009, s. 139). Det at forståelse av brøk fordrer at disse «grunnsteinene» er på plass, støtter argumentasjonen for å velge dette temaet i studien, da et bakenforliggende mål er å utforske hvordan konkretiseringsmateriell bidrar til en mer helhetlig oppfatning av brøkbegrepet. Da vil man ikke bare inkludere deres bruk av konkretiseringsmateriell inn mot temaet brøk, men også deres forståelse av de fire regnearter og likhetstegnets funksjon.

2.3 Brøk som begrep

For å forstå hva som ligger i det matematiske temaet brøk, vil dette betraktes i lys av tre ulike definisjoner, som beskriver begrepet fra litt ulike vinklinger. Den første kilden er fra Matematikk.net (2016) der brøk blir definert slik: «En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek er det samme som deletegn. En brøk er en del av noe» (Matematikk.net, 2016). I denne definisjonen omtaler de altså brøkstreken som det samme som deletegn, mens Birkeland, Breiteig, og Venheim (2011) på sin side hevder at disse bør skilles fra hverandre, og redegjør videre for forholdet mellom divisjon og brøktegn gjennom følgende definisjon: «Vi arbeider oss fram til en god forbindelse mellom begrepene divisjon og brøk. Brøken 3/8 er svaret på divisjonen 3:8. Generelt: En brøk a/b er svaret på divisjonsoppgaven a:b»(Birkeland et al., 2011, s. 189). Med dette fremgår det eksplisitt at brøk og divisjon ikke er det samme, men at brøken er svaret på divisjonen. I en tredje formulering heter det at: «En brøk er et uttrykk som kan representere en operasjon eller et objekt. Eksempel: Uttrykket 24/3 kan representere en operasjon, dvs. tjuefire dividert med tre, eller et objekt, nemlig brøken eller det rasjonale tallet tjuefire tredeler» (Bergsten, Häggström, Lindberg, & Emanuelsson, 1997, s. 35). I denne siste formuleringen fremkommer det at brøk og divisjon forenes ved at brøk defineres som en operasjon, men samtidig også som et objekt.

Slutningen som kan trekkes ut i fra disse tre relativt ulike vinklingene på definisjonen av brøk er at det fremgår tydelig at brøkbegrepet innehar en kompleksitet i dets betydning. Birkeland et al. (2011) fremmer at en av utfordringene med brøk er dens kompleksitet og mangfold av betydninger i ulike sammenhenger. Da elevene i tillegg støter på disse ulike betydningene av brøk både i skolehverdag og i dagliglivet, kan det virke forvirrende og oppleves som et vanskelig tema å tilnærme seg. Spesielt med tanke på den relative tenkningen som elevene møter i arbeid med brøk. Før jeg går nærmere inn på relativ og absolutt tenkning i forbindelse med brøk, vil først noen matematiske begrep relevant for studien nevnes.

2.4 Matematiske begreper knyttet til brøk

«Fraction symbolism represent a fairly complex convention that is often misleading to children» (Van de Walle, 2004, s. 247). Det forstås av sitatet at brøksymbolikk kan bidra til å villede barns oppfatninger. I det følgende skal det omtales noen matematiske begreper som er knyttet til elevenes arbeid med brøk, også i denne studien. Først og fremst vil de rasjonale tallene defineres, før begreper som teller, nevner, uekte brøk og blanda tall blir omtalt.

Rasjonale tall

Tall som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er hele tall, kalles rasjonale tall (Bue, Engeseth, & Solvik, 2000). I følge Birkeland et al. (2011) er opphavet til betegnelsen rasjonale tall det at brøk brukes til å sammenligne mengder: forhold mellom størrelser. Det latinske ordet ratio betyr nemlig forhold. Likevel er det viktig å påpeke at rasjonale tall og brøk ikke kan omtales som synonyme ord. Rasjonale tall kan skrives som brøk, men de kan også skrives på andre former (Lamon, 2012) Eksempler her kan være:

$$0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ og } 0{,}123123123123\ldots = \frac{123}{999}$$

Teller, nevner og brøkstrek

Den bestemte representasjonen for å beskrive en brøk er med en 'topp', som kalles teller, og en 'bunn', som kalles nevner, og en strek i mellom disse to, som kalles brøkstrek (Van de Walle, 2004). En brøkstrek har i utgangspunktet samme funksjon som et divisjonstegn. Brøken kan gjøres om til desimaltall ved å dividere telleren med nevneren (Bue et al., 2000). Teller og nevner blir oversatt med «Numerator» og «Denominator» på engelsk. Van de Walle (2004) fremmer at i en introduksjon til brøk bør det legges opp til en forståelse for hva bunnen og toppen står for. Teller og nevner kan forklares slik (Van de Walle, 2004, s. 248, egen oversettelse):

- Topp-tallet: Dette er telle-tallet. Den forteller oss hvor mange deler vi har. Det forteller oss hvor mange som har blitt talt. Det forteller oss hvor mange deler vi snakker om. Det teller delene.
- Bunn-tallet: Dette forteller oss hva som blir telt. Det forteller oss hvilke brøkdeler som telles. Hvis det er en 4, så betyr dette at vi teller fjerdedeler; hvis det er en 6, så betyr dette at vi teller sjettedeler; og så videre.

Ekte brøker, uekte brøker og blandede tall

I «Tall i arbeid» skriver Bue et al. (2000) at det i brøkregning skilles mellom ekte brøker, uekte brøker og blandede tall. $\frac{2}{3}$ er en ekte brøk, $\frac{23}{5}$ er en uekte brøk og $1\frac{2}{5}$ er et blandet tall. En ekte brøk er brøker mellom null og en. Blanda tall har en heltallsdel, og en brøkdel som er en ekte brøk. En uekte brøk kan gjøres om til et blandet tall, og et blandet tall kan gjøres om til en uekte brøk. Eksempelvis:

$$\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5} \quad \text{og} \quad 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Van de Walle (2004) hevder at barns forståelse av forskjellen på blandede tall og uekte brøk er nært knyttet til deres forståelse av toppen og bunnen i brøken. Hvis barna forstår at topp-tallet teller, og bunn-tallet forteller hva som telles, kan de videre ha forutsetning til å finne et blandet tall ut ifra en uekte brøk og motsatt. Han mener videre at det ikke er noen grunn til å gi elevene regler for å multiplisere det hele tallet i blandede tall med bunn-tallet, for deretter å addere toppen. Det samme gjelder motsatt, fra uekte tall til blandede tall. Han hevder at disse reglene lett utvikles hos elevene, men med egne ord og dermed en mer fullstendig forståelse.

Det er mange nye begreper som elevene introduseres for i arbeidet med brøk. Forskjellen på relativ og absolutt tenking omkring matematikk skal i det videre betraktes, da dette er fenomen som vi kan observere i elevenes arbeid med brøk.

2.5 Absolutt og relativ tenkning i henhold til brøk

Før de fem ulike aspektene av brøkbegrepet skal omtales, er det i første omgang viktig å fremme den overordnede forskjellen i det å ha en relativ og absolutt tenking (Markovits & Hershkovitz, 1997). For å gi elevene en forståelse for brøk som noe mer enn selve brøknotasjonen, må elevene introduseres for den relative tenkningen og ikke bare den absolutte. Hvis ikke kan man risikere at elever som hører ordet brøk, kan være tilbøyelige til å kun se for seg en brøknotasjon slik som $\frac{1}{2}$, eller at de kan skravere en halv sirkel for å beskrive denne brøken. I regning med heltall har nemlig tallene en absolutt verdi. Hvis man har 8 boller eller 13 tulipaner vil antall gjenstander være heltall. I brøk derimot vil heltallene ha en relativ verdi. Tallet i telleren og tallet i nevneren gis ikke verdi før de står i forhold til hverandre, og det er forholdet mellom telleren og nevneren som gir en verdi. Det er selve brøken som er selve verdien. Denne sammenhengen mellom tallene og plasseringen i brøkuttrykket viser en tydelig forskjell mellom det absolutte og det relative. Brøk fremstår som noe av det første elevene møter på av relativ tenkning i matematikk. I denne sammenheng hevder Lamon (2005) at relativ tenking er en kritisk del av en innledende instruksjon av brøk. Hun beskriver videre at dette skyldes at: «Relativ tenking innen brøk er kritisk fordi en ikke kan se på sifrene i teller og nevner som absolutte verdier» (s. 32). I forlengelsen av dette påstår Lamon (2005) at møtet elevene har med den relative tenkingen innenfor brøk kan være utfordrende fordi de er vant til å tenke absolutt: «the children´s responses (…) demonstrates how difficult it is for children to move away from the additativ (absolute red.) thinking with which they are so familiar and to begin to think relatively» (s. 32). Når dette er sagt, er det viktig å merke seg at den relative tenkingen vil åpne for nye muligheter i matematikken for elevene. Den relative tenkingen innebærer blant annet muligheten til å betrakte et forhold der enheten er ukjent. Til tross for at man ikke kjenner den absolutte verdien kan man altså angi den relative verdien. Man kan for eksempel beskrive at 1/3 av bollene er spist, til tross for at man ikke vet den absolutte verdien av bollene som er spist.

2.6 Ulike aspekt ved brøkbegrepet

I det videre skal ulike aspekt ved brøkbegrepet presenteres, da flere aspekt kan bli berørt i arbeidet med en brøkoppgave. Brøk har et stort anvendelsesområde, og det er derfor viktig at elevene får varierte erfaringer. «Når elever blir introdusert for begrepet brøk, blir brøk ofte forklart som en del av en helhet med bare ett element, for eksempel en pizzadel eller en kakedel (Bjerke & Pettersen, 2012, s. 26). I utgangspunktet er det ikke noe problem at elevene starter der, men det viser seg at denne begrensede forståelsen fortsetter oppover trinnene (Bjerke & Pettersen, 2012). Cramer og Wyberg (2009) hevder at kompleksiteten i brøkbegrepet undervurderes, og at lærere må bruke nok tid for å utvikle de ulike aspektene ved brøk hos elevene:

> *Perhaps as educators we continue to underestimate the complexity involved in understanding fractions. Perhaps in our effort to move toward proficiency at the symbolic level, we do not spend the needed amount of time developing meaning for fractions concretely resulting in too many students operating on fractions in a rote manner (s.* 227)

Dette er i tråd med det Bjerke og Pettersen (2012) hevder om at: «Ensidig fokus på kun et av aspektene ved brøk gir mangelfull forståelse» (s. 1). Et eksempel kan være at ved å kun betrakte brøk som tallstørrelse vil det være umulig å forstå brøk som et relativt begrep.

Studiens forskningsspørsmål legger opp til å utforske elevenes oppfatninger av brøk som et sammensatt begrep, bestående av flere aspekt. I elevenes første møte med dette matematiske temaet er det en rekke utfordringer og misoppfatninger som kan forekomme hevder Lamon (2012): «Several very large conceptual jumps contribute to the children's difficulty in learning fractions» (s. 21). Det å studere elevenes oppfatning av brøkbegrepet, vil dermed avdekke i hvilken grad elevene har en delvis eller helhetlig oppfatning av brøk. Birkeland et al. (2011) fremmer at utfordringen med brøk er dens kompleksitet og mangfold av betydninger, og da elevene støter på disse ulike betydningene med brøk både i skolehverdag og i dagliglivet, kan de virke forvirrende og oppleves som et vanskelig tema å tilnærme seg.

På bakgrunn av dette vil de ulike aspektene ved brøkbegrepet betraktes i følgende fem delkapitler: «Brøk som del av det hele» (2.6.1), «Brøk som måling»(2.6.2), «Brøk som divisjon»(2.6.3), «Brøk som operator»(2.6.4) og «Brøk som forholdstall»(2.6.5). Selv om «brøk som forholdstall» er inkludert i denne delen, vil dette aspektet bare omtales i korthet, da det ble tydelig i analysen at det ikke fremkom noen betydningsfulle funn relatert til dette.

2.6.1 Brøk som del av det hele

Det første målet i møtet med brøk bør være å hjelpe barn til forstå meningen med brøk som del av det hele(Van de Walle, 2004, s. 243). Denne oppfatningen av brøk vil dermed beskrive hvordan brøk er en del av en enhet, der denne enheten er den totale mengden av det som skal beskrives. I denne sammenheng er det viktig at elevene oppfatter selve nøkkelkonseptet med brøk, skriver Van de Walle (2004): «a fraction does not say anything about the size of the of the whole or the size of the parts. A fraction tells us only about the relationship between the part and the whole» (s. 254). Elevene må derfor forstå at brøk handler om å finne et forhold mellom delen og det hele, heller enn å finne en størrelse. Van de Walle (2004) beskriver dette forholdet slik:

> *Fractional parts are equal shares or equal-sized portions of a whole or unit. A unit can be an object or a collection of things. More abstractly, the unit is counted as one. On the number line, the distance from 0 to 1 is the unit.* (s. 242)

I oppgavene som elevene løste, der intensjonen var å betrakte brøk som del av en helhet, ble de mange ganger forvirret på hva som var enheten. I tidlig skolegang har elevene lært å telle ved å koble et tall til hvert objekt i en bestemt setting, mens elevene i brøk introduseres for tankegangen om at enheten også kan bestå av mer enn et objekt (Lamon, 2012): «The unit 'one' allways reffered to a single object. In fractions, however, the unit may consist of more than one object or it might be a composite unit, that is, it may consist of several objects packaged as one» (s. 21). I datainnsamlingen kunne dette observeres da elevene mange ganger slet med å definere hva som var enheten i oppgaven. For eksempel kunne elevene bli forvirret hvis de først hadde en hel pizza til disposisjon, mens delen som var spist opp kunne være $\frac{1}{2}$. Da enheten deretter ble 2 pizzaer, hadde delen som hadde vært spist opp vært 1 pizza. «[I]t is important to identify the unit and to make sure that each fraction is interpreted in terms of that unit. You can not compare fractions based on different units» (Lamon, 2012, s. 145). Hvis elevene kan avgjøre hva som er enheten i oppgaven kan de dermed finne en brøk basert på denne enheten. Denne måten å forstå brøk på viser seg å ha en nytteeffekt i dagliglivet da denne meningen finnes i mange hverdagslige sammenhenger, for eksempel i oppskrifter eller ved mål av lengder.

Lamon (2012) hevder at behovet for en enhet først blir synliggjort da elever blir gitt konkrete objekter å arbeide med: «When we are doing abstract caluculations (adding or subtracting fractions, for excample, that do not refer to any spesific material object) we do not worry about units. However, in instruction, when giving children concrete objects to think about, we will do nothing but confuse the issue if we do not know what the unit is» (s. 145). Dette innebærer, slik jeg ser det, at bruken av konkretiseringsmateriell i mye større grad nødvendiggjør en forståelse for hva som er enheten i oppgaven, og som ikke blir like synlig i arbeidet med abstrakte utregninger.

I dette aspektet er det dessuten viktig at elevene ved hjelp av relativ tenking forstår relasjonen mellom ekvivalente brøker (Lamon, 2012). Van de Walle (2004) redegjør for dette begrepet ved å uttrykke at to ekvivalente brøker er to måter å beskrive samme mengde på, ved å bruke ulik størrelse på brøkdelene (different-sized fractional parts). Dette innebærer at elevene må forstå at brøken $\frac{1}{2}$ er det samme som $\frac{2}{4}$. Hvis elevene da uttrykker at den samme mengde pizza er spist, uansett om $\frac{1}{2}$ eller $\frac{2}{4}$ er spist så kan dette tyde på at elevene har en relativ forståelse for denne meningen ved brøkbegrepet. En nøkkelforståelse av brøk baserer seg nemlig på at en brøk ikke sier noe om størrelsen på det hele, eller størrelsen på deler, men derimot forteller brøk om forholdet mellom delen og det hele (Van de Walle, 2004). Slik at det er først når to eller flere brøker blir diskutert i samme kontekst, med samme enhet som utgangspunkt, at en kan anta at alle brøkene er en del av den samme hele mengde.

I en tidligere studie av Cramer og Wyberg (2009) beskrives det at bruken av konkreter for oppfatningen av brøk som del av det hele har ulik virkning for elevenes læring. De fremmer at denne fokuseringen fordrer en lærerbevissthet rundt hvordan man bruker konkretene i forklaringen av «brøk som del av det hele» slik at elevene utvikler en relativ forståelse for brøk. Til tross for at denne relative forståelsen kommer enda tydeligere frem i elevenes arbeid med brøk som måling.

Fokuset på å forstå brøk som del av det hele er en viktig begynnelse for elevene, men brøk som måling krever mer, da elevene må ha en mer intuitiv følelse for brøk. Da må de være i stand til å si noe om hvor stor en bestemt brøk er, og dessuten kunne avgjøre hvilken av to brøker som er størst.

2.6.2 Brøk som måling

Denne måten å forstå brøk på skiller seg fra del-hel meningen fordi det her handler om å bestemme mengden som blir beskrevet gjennom brøken, heller enn å finne antall deler av en hel (Van de Walle, 2004). Lamon (2012) hevder at elevene gjennom oppfatning av brøk som måling vil utvikle det hun beskriver som «rational number sense», eller en følelse for rasjonale tall (egen oversettelse). Forståelsen elevene har eller ikke har for de rasjonale tallene kan visualiseres da elevene plasserer tallene på en tallinje.

En måte å la barn erfare størrelsen på brøkene på er å la dem begynne med å finne en del, en «unit fractions», som så blir utgangspunktet for mengden som skal beskrives (Van de Walle, 2004). I datainnsamlingen kunne dette observeres da elevene skulle finne for eksempel $\frac{9}{12}$. Da fant de først brøken $\frac{1}{12}$, for deretter å måle seg frem til $\frac{9}{12}$ ved hjelp av addisjon.

Noe annet som kan avdekke elevenes forståelse av brøk som måling er om de klarer å se brøken i forhold til såkalte «benchmarks», eller knagger. For brøker som er mindre enn 1, er de viktigste knaggene 0,$\frac{1}{2}$ og 1 (Van de Walle, 2004). Hvis elevene sammenligner brøkene med en av disse knaggene, vil det gi dem ganske mye informasjon, slik som at $\frac{1}{8}$ er liten, og nærme 0, mens $\frac{3}{4}$ er større og mellom $\frac{1}{2}$ og 1, og til sist $\frac{8}{9}$ er stor og nærme 1. Da enhver brøk større enn 1 er et helt tall i tillegg til en mengde mindre enn 1, så gjelder det samme her. Eksempelvis er $7\frac{2}{5}$ nesten $7\frac{1}{2}$ (Van de Walle, 2004).

For å undersøke elevenes forståelse av brøk som måling samt deres forståelse for de rasjonale tallene, kan en ifølge Van de Walle (2004) også undersøke evnen elevene har til å avgjøre hvilken av to eller flere brøker som er størst. I utgangspunktet er barns tanke om at større tall betyr 'mer' grunnfestet i dem, og i utviklingen for å forstå de rasjonale tallene blir dette ofte et problem: «Children have a tremendously strong mind-set about numbers that causes them diffeculties with the relative size of fractions. In their experience, larger numbers mean 'more'» (Van de Walle, 2004, s. 252). Hvis elevene kan avgjøre hvilke av to brøker som er størst kandette videre skape en forståelse for at det finnes brøker som ligger eksempelvis mellom $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{3}$, og spesielt blir dette tydelig hvis man utvider brøkene til $\frac{3}{15}$ og $\frac{5}{15}$. Da vil man kunne argumentere for at brøken $\frac{4}{15}$ ligger mellom $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{3}$. Gjennom dette kan elevene erfare at det alltid finnes en brøk mellom to andre brøker. Denne oppdagelsen vil igjen bidra til å gi elevene en dypere forståelse for nøyaktighet innen matematisk måling (Lamon, 2012).

2.6.3 Brøk som divisjon

I dette tredje aspektet med brøk vil elevene oppdage hvordan brøk kan skrives som et divisjonsstykke. Denne sammenhengen mellom to begreper vil hjelpe elevene til å øke den relasjonelle forståelsen. Birkeland et al. (2011) påpeker at: «Når brøkene er tilgjengelige som tall, kan vi alltid dividere to hele tall med hverandre, bortsett fra å dividere med null» (s. 189). Eksempelvis kan $\frac{2}{3}$ skrives på formen «2:3». Å mestre dette gir elevene en evne til å bestemme hvilken notasjon som er mest nyttig i en bestemt matematisk sammenheng og de blir i stand til å tolke brøk som divisjon for å avdekke størrelser på mengder. Ved å gi elevene denne følelsen av hva en brøk som mengde tilsvarer, så kan denne måten å forstå brøk på hjelpe dem.

De fleste forskere er enige om at elever har vansker med å tilnærme seg de rasjonale tallene. På bakgrunn av matematiske analyser av rasjonale tall har Kieran (1988) anslått at brøk er tall produsert av divisjoner. Nunes (2008) har i relasjon til dette studert elevenes forståelse av divisjon, for å kunne utforske elevenes forståelse av rasjonale tall. Han hevder at selv om det er flere aspekt ved de rasjonale tallene, er det rimelig å anta, i likhet med Kieren (1971), at opprinnelsen til barns forståelse av rasjonale tall kommer fra deres forståelse for divisjon (Nunes, 2008; Nunes & Bryant, 1996).

Små barn ser ut til å forstå hvordan de kan dele opp en mengde i to eller flere like deler ved å benytte seg av «en til meg» og «en til deg» metoden, og ofte uten å gjøre feil (Nunes & Bryant, 1996; Van de Walle, 2004). Det er imidlertid viktig at en skiller mellom barns evne til å dele noe mellom seg og deres forståelse for divisjon: «But one must make a distinction between sharing and division» (Nunes & Bryant, 1996, s. 206). Da barn holder på med deling, «sharing», så er deres fokus på å gi lik mengde til hver person. I dividering, «dividing», er det mer komplekst da en må ta stilling til forholdet mellom dividenden (tallet som blir dividert), divisoren (tallet som dividenden deles på) og kvotienten (resultatet på divisjonen). I divisjonen $24 \div 4 = 8$, så er 24 dividenden, 4 er divisoren og 8 er kvotienten. I en situasjon der barn skal dele noe, så vil et fokus på divisjon komme frem hvis barnene ser en sammenheng mellom for eksempel mengde drops som skal deles ut, hvor mange personer som det skal deles på og til sist hvor mye hver person får (Nunes & Bryant, 1996). Nunes og Bryant (1996) hevdet videre at hvis en virkelig vil avdekke elevenes forståelse mellom disse ulike delene av en divisjon, så må en også undersøke om elevene er klar over den inverse sammenhengen mellom tallet på mottakerne og størrelsen på den totale mengde. Van de Walle (2004) fremmer at barnene etter hvert ser sammenhenger mellom det å dele noe likt i mellom seg, og brøk.

I en studie gjort av Doug (2006) hevder han at brøk som divisjon ikke alltid er en vanlig oppfatning blant folk. I min studie kunne jeg imidlertid observere at elevene så denne sammenhengen mellom brøk og divisjon i flere sammenhenger. For eksempel kunne de dele 120 gram på 4, for å finne det som tilsvarer $\frac{1}{4}$ av et kakestykke på 120 gram.

2.6.4 Brøk som operator

Gjennom denne oppfatningen av brøkbegrepet vil selve brøken beskrive en operasjon som må gjennomføres, og kan dermed beskrives med at brøkene er funksjoner (Lamon, 2012). «Estimation of fraction computations is tied almost entirely to concepts of the operations of fractions» (Van de Walle, 2004, s. 264). Dette tyder på at brøkene som regel alltid representerer en instruksjon for å utføre en handling. Han hevder at dette innebærer operasjoner innen tre kategorier (Van de Walle, 2004). For det første for addisjon og subtraksjon av brøker. Her er det essensielt å forstå at nevneren betegner antall deler, og telleren type deler. Dette er viktig da elevene senere skal addere eller subtrahere brøker med felles nevner. For det andre er det i operasjonen multiplikasjon av en brøk nyttig å huske at nevneren også er en divisor, da dette åpner for muligheten til å finne en del av den andre faktoren (Van de Walle, 2004). I mitt studie skulle eksempelvis elevene i rødt oppgavesett kaste en terning, som utgjorde nevneren i en brøk, for eksempel $\frac{1}{6}$. Deretter skulle de finne mengden dette tilsvarte i en haug med 30 brikker. Her ville en multiplisert $\frac{1}{6}$ med 30, og slik funnet en sjettedel av faktoren 30. En tredje operasjonen er divisjon av en brøk. Dette synliggjør hvorfor brøk som operator og brøk som divisjon var vanskelige å skille. I divisjon av en brøk er det to ulike måter å utføre operasjonen på, målingsdivisjon eller delingsdivisjon. Jeg skal ikke utdype disse i denne studien, men bare nevne at delingsdivisjon vil gi en annerledes divisjonsprosedyre enn det målingsdivisjon gir (Van de Walle, 2004).

Om mengden det skal utføres en handling på er en enhet, vil det bli tydelig hvilken likhet det er mellom «brøk som operator» og «brøk som del av det hele». Derfor er det viktig å merke seg at for å forstå meningen med brøk som operator må vi også forstå hva som til enhver tid er enheten(Van de Walle, 2004). Et viktig poeng å merke seg med brøk som operator er at det i denne sammenheng indikerer en handling på et annet tall, og dermed er det også viktig med tekniske regneferdigheter. Elevene vil trenge å lære seg å drive symbolmanipulasjon på brøk og å lære algoritmen for multiplikasjon av brøk(Van de Walle, 2004).

2.6.5 Brøk som forholdstall

Lamon (2012) beskriver at: «A ratio is a comparison of any two quantities» (s. 225). Gjennom denne oppfatningen beskrives altså et forhold mellom to mengder. Forholdet i seg selv er en størrelse som kan sammenlignes med størrelser i tilsvarende forhold (Lamon, 2012). Ifølge Leinhart og Smith (1984), kan ikke forholdstall plasseres på en tallinje. Sammenligning av forholdstall må i så fall gjøres ved hjelp av relativ tenking, der det ikke er de absolutte mengdene som sammenlignes, men det relative forholdet mellom to mengder. Forholdstall har slik en viktig bruksverdi i kontekster der det skal sammenlignes mellom to mengder med svært ulike størrelser. Det ville eksempelvis vært unaturlig å sammenligne bilparken i storbyen Oslo og i tettstedet Alsvåg etter antall biler. Det man derimot kunne ha sammenlignet var antall biler per person eller per husstand, da dette gir et gyldig sammenligningsgrunnlag som kan si noe om tettheten av biler blant dem som bor i byen og dem som bor på landet.

3 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet vil tidligere forskning som kan relateres til bruk av objekter i matematikkundervisningen bli belyst. Studiens teoretiske rammeverk vil bestå av tre delkapitler. Delkapittel 3.1 omhandler elevers læring, med en tilhørende begrunnelse for valg av læringsteoretisk bakteppe. Deretter vil det sosiokulturelle perspektivet redegjøres for, der temaer som proksimal utviklingssone, språk, mediering og artefakter presenteres. Studiens syn på elevenes læring, kunnskap og kunnskapsutvikling avklares i dette delkapitlet. I det teoretiske rammeverkets andre del (3.2) vil jeg ta for meg konkretiseringsmateriell og tidligere forskning rundt dette. I delkapittel 3.3 vil jeg avslutningsvis komme med noen avklaringer knyttet til begrepet forståelse.

3.1 Læringsteoretisk ståsted

Denne studien tar utgangspunkt i det sosiokulturelle perspektivet på læring, med utgangspunkt i Vygotskij et al. (1978) og Säljö (2000). Et sosiokulturelt perspektiv på læring var et naturlig valg av perspektiv da fokus var å betrakte hvordan elever ved samhandling løste oppgaver om brøk i grupper på tre elever, i tillegg til konkretiseringsmateriellets rolle som verktøy i læringen. Perspektivets utgangspunkt er nemlig samspillet mellom kollektive ressurser for tenking og handling på den ene siden og individers læring på den andre (Säljö, 2000).

Det sosiokulturelle perspektivet på læring vil kort presenteres, før jeg omtaler ulike teorier av Vygotsky om den proksimale utviklingssone, språk, mediering og artefakter. Dette er sentralt for studiens fokus på hvordan elevene hjelper hverandre til å forstå nye sammenhenger knyttet til brøk, elevenes språklige samarbeid, men også i forhold til deres bruk av konkretiseringsmateriell som «medierende redskap» i arbeid med brøk.

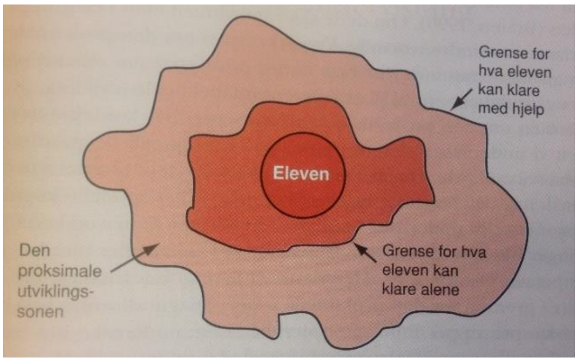
3.1.1 Et sosiokulturelt perspektiv

Menneskets utvikling er sentralt som tema i psykologien, og det var det også for Vygotsky. Vygotskij et al. (1978) skiller ikke mellom det sosiale og det individuelle aspektet ved læring i sine teorier, men fremhever derimot at dette er to fenomener som sammen kjennetegner dette perspektivet på læring: «In fact, a dialectic focus between the social and individual aspect is what characterises the socio-cultural epistemology». I spørsmålet om hvordan mennesker lærer og utvikler seg må en knytte dette til hvordan mennesker tenker og handler i sosiale settinger (Säljö, 2000). Dermed vil den individuelle, selvstendige tenkningen være sosialt betinget, og fremkomme som et resultat av et sosialt samspill mellom barnet og andre mennesker.

Säljö (2000) hevder med utgangspunkt i Vygotsky sitt syn på læring at helt fra start av gjør vi oss erfaringer sammen med andre. Mennesker fødes inn i og utvikles innenfor rammene av og nødvendigheten for et samspill med andre mennesker. Det er ikke slik at individuell utvikling skaper sosial aktivitet, men derimot at utvikling løper fra en tilstand der barnet kan gjøre ting sammen med andre, over til en tilstand der de kan gjøre ting alene (Imsen, 2012, s. 255). Vygotsky poengterte at for å lære måtte barn få utfordringer, og undervisningen var bare god når den løp foran utviklingen, for da kunne den vekke til live de funksjoner i den proksimale sonen som var i ferd med å modnes (Wertsch, 1985).

3.1.2 Den proksimale utviklingssone

Den proksimale utviklingssone var en annen viktig del av Vygotskys teori. Vygotskij et al. (1978) hevdet at: «A well known and empirically established fact is that learning should be matched in some manner with the child's developmental level» (s. 85). I tråd med hans teorier går utviklingen fra det sosiale til det individuelle, slik at eleven først må være i stand til å utføre en handling i samspill med andre, før det er i stand til å utføre den alene: «It is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determind through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers» (Vygotskij et al., 1978, s. 85). I sitatet forstår vi hvordan den proksimale utviklingsonen er i rommet mellom de to nivåene, det faktiske utviklingsnivået («the actual developmental level») og det potensielle utviklingsnivået («the level of potential development»).



Bilde 1: Den proksimale utviklingssonen (Imsen, 2012, s. 259)

Figur 2 beskriver denne proksimale utviklingssonen og er hentet ut fra Imsen (2012, s. 259). Imsen (2012) hevder at den pedagogiske utfordringen ligger i å utnytte utviklingssonen ved å stimulere barnet til å arbeide aktivt sammen med andre, og gi hjelp og støtte for å bistå barnet på veien mot å klare oppgaven alene. I diskusjonskapittel 7.4.3 vil elevenes samarbeid vurderes i forhold til hvordan de hjalp hverandre fremover i sin problemløsning.

3.1.3 Språket som redskap i utvikling

Mennesker utmerker seg fra andre arter i deres evne til å utvikle og benytte seg av fysiske og språklige verktøy (Vygotskij et al., 1978). Før de fysiske redskapene omtales, skal jeg gå litt mer inn på Vygotskys forståelse av språk. Dette er sentralt i mitt studie da elevenes oppgaveløsning baserer seg på deres språklige samhandling.

I forbindelse med barn og deres utvikling av kunnskap er følgende sitat fra Vygotsky (1978) sentral:

> *[T]he most significant moment in the course of intellectual development, which gives birth to the purely human forms of practical and abstract intelligence, occours when speech and practical activity, two previosly completely independent lines in development, converge.* (s. 24)

Med dette forstår vi at både det å snakke og selve språket utvikles ut ifra sosiale settinger og er i direkte sammenheng med individets utvikling av høyere mentale prosesser. Vygotskij et al. (1978) fremhever to viktige moment i barns bruk av språk for å handle. For det første at barns språk utgjør en viktig rolle i handlingen for å oppnå et mål. Barna snakker med andre ord ikke bare om hva de gjør, men språket og handlingen går hånd i hånd i barnets mål om å finne løsningen på et problem. Det andre poenget i barns bruk av språk for å handle handler om at jo mer kompleks handlingen som skal utføres er, jo større rolle spiller språket i operasjonen i sin helhet. Imsen (2012) påpeker i denne sammenheng hvordan Vygotsky fremmer at den egosentriske talen utvikles på det indre plan slik at barnet kan bruke språket ovenfor seg selv til å legge planer, styre og tenke for seg selv. Barnet bruker da språket som en del av det å utføre en aktivitet, ved å dele aktiviteten opp i to deler:

> *[T]he child who uses speech divides the activity into two consecutive parts. She plans how to solve the problem through speech and then carries out the prepared solution through overt activity.* (Vygotskij et al., 1978, s. 26).

Denne egosentriske talen er basisen for den indre talen, kalt «inner speech», mens i den eksterne formen, kalt «external form» inngår den kommuniserende talen (Vygotskij et al., 1978, s. 27). Språket bidrar slik til å gjøre handlingene mer uavhengige av de konkrete forholdene, slik at det blir mulig å finne på ting som ikke byr seg direkte fra situasjonen (Vygotskij et al., 1978). Gradvis utvikler språket seg fra den egosentriske talen til en taus indre tale, og barnet utvikler selvrefleksjon og bevissthet (Imsen, 2012). Til slutt må det nevnes at denne indre egosentriske talen forsvinner da barnet forstår at det er forskjell på det å snakke med seg selv og det å snakke med andre. Den indre talen erstattes da med tenkning i stedet.

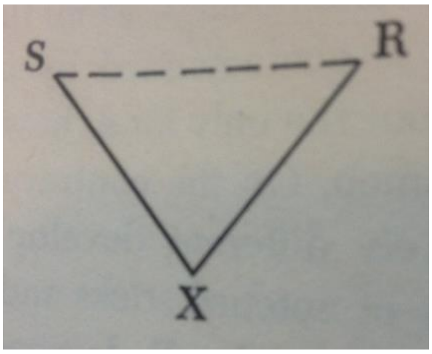
En forstår at språket er viktig for den intellektuelle utviklingen, hvordan en tenker og hvordan en oppfatter verden. Det forutsetter likevel at språket sees i en sammenheng med stimulus og respons.

3.1.4 Medierende tegn

Vygotskij et al. (1978) setter inn et kognitivt redskap mellom stimulus og respons, og kaller dette redskapet for tegn, (‘sign’):

> *The structure of sign operations requires an intermediate link between the stimulus and the response. This intermediate link is a second order stimulus (sign), that is drawn into the operation where it fulfills a special function; it creates a new relation between S and R. The term «drawn into» indicates that an individual must be actively engaged in establishing such a link.*(s. 39)

Det at språklige tegn trekkes inn i forholdet mellom stimulering og handling, kalles mediering. Vygotsky hevder at mediering er grunnleggende for alle høyere psykologiske prosesser. Mediering, som kommer fra det tyske ordet Vermittlung (formidle), antyder at mennesker ikke står i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen. Tvert imot håndterer vi den ved hjelp av ulike fysiske og intellektuelle redskaper som utgjør integrerte deler av våre sosiale praksiser (Säljö, 2000). Og tegnet mellom stimulus og respons har slik en større rolle enn å utelukkende forberede en læringssekvens, det er også nøkkelen til å forstå hvordan mennesker bryter med den biologiske utviklingen og skaper nye former for kulturelt baserte psykologiske prosesser. I figur nr. 1 representerer ‘X’ dette tegnet mellom stimuli og respons. Vygotsky la stor vekt på miljøets og kulturens betydning for individet og dens intellektuelle utvikling, men likevel fremmet han hvordan individet kunne heve seg over den ytre omverdenen og omskape den. Slik bidrar medieringen gjennom språket til at individet kontrollerer



Bilde 2: Medierende tegn ‘X’ mellom stimuli og respons(Vygotskij, Cole, John-Steiner, Scribner, & Souberman, 1978, s. 40)

sine egne handlinger, slik at språket blir et viktig hjelpemiddel for den selvstendige tenkningen.

Til tross for at Vygotsky hevder at vårt viktigste medierende verktøy er språket, så er også de fysiske verktøyene sentrale. (Säljö, 2000) påpeker hvordan stadig flere menneskelige funksjoner og kompetanser er blitt flyttet ut i fysiske redskaper – artefakter.

3.1.5 Artefakter

Säljö (2000, s. 78) hevder at hvis en fullt ut skal forstå hvordan mennesker benytter kognitive ressurser, hvordan de lærer og mestrer situasjoner, kan det ikke ses bort ifra at vi fungerer i samspill med artefakter, at vi håndterer situasjoner gjennom å ta i bruk fysiske og intellektuelle redskaper. I min studie var konkretiseringsmateriellet et slikt medierende verktøy, som elevene tok i bruk for å løse oppgaver. Disse redskapene kan hjelpe oss til å løse problemer og beherske sosiale praksiser på en måte som ellers ville være umulig (Säljö, 2000). Dahlbom (1993) påpeker at hvis en begrenser forståelsen av tenkningen og læring til det som skjer i individet, mister en perspektivet om samspillet med artefakter og andre mennesker, som innebærer alle de ressurser som den kulturelle utviklingen gir oss rådighet til. En må slik se mulighetene for læring i de ressursene som er tilgjengelige for oss, som for eksempel konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk.

Säljö (2000) påpeker at et viktig poeng i menneskelige handlinger er at det ofte er en kombinasjon mellom det intellektuelle og det manuelle. Knyttet opp mot min studie kunne for eksempel ikke elevene løse oppgaver ved hjelp av konkretiseringsmateriellet ved å bare plukke opp en brøkstolpe. De måtte bruke det i sammenheng med informasjonen som var gitt, oppgaveteksten og gjennom samhandling i gruppa. Dette er det intellektuelle redskapet. Hele tiden mens handlingen pågår må en tenke igjennom hva en gjør, endre planer og diskutere for å løse problemer av ulikt slag. Imidlertid er bruken av intellektuelle og manuelle redskaper integrert i hverandre som to sider av samme sak (Säljö, 2000). Han hevder at et tydelig trekk i utviklingen av menneskelige kunnskaper er en økende grad av abstraksjon, der de fysiske redskapene som ble utviklet for å håndtere praktiske problemer, har overgått menneskets naturlige styrke eller evne. Eksempelvis kan en kalkulator drastisk øke vår evne til å håndtere en rekke tankeproblemer. «I et sosiokulturelt perspektiv er det altså grunnleggende at fysiske, liksom intellektuelle/språklige, redskaper *medierer* virkeligheten for mennesker i konkrete virksomheter» (Säljö, 2000, s. 83). Mennesker står da som nevnt ikke i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen, men håndterer den ved hjelp av ulike fysiske og intellektuelle redskaper som utgjør integrerte deler av våre sosiale praksiser (Säljö, 2000).

Avslutningsvis må det poengteres at hvis læring skal forstås som en del av sosiale praksiser, der mennesker benytter seg av ulike redskaper, kan ikke disse apparatene analyseres for seg selv, for deretter å studere den rene menneskelige tenkningen. Säljö (2000) hevder nemlig at vi må se og forstå hvordan tenkingen utøves av mennesker som handler i sosiale praksiser ved hjelp av artefakter, slik som elevene i mitt studie løste oppgaver ved hjelp av konkretiseringsmateriell.

3.2 Konkretiseringsmateriell

Da elevene skulle benytte seg av konkretiseringsmateriell for å løse oppgavene knyttet til brøk, er hensikten i dette kapittelet å redegjøre for begrepet konkretiseringsmateriell og dets bruk i matematikkundervisning, med referanse til den allerede etablerte litteraturen på dette området. Her vil først begrepet konkretisering omtales, før konkretiseringsmateriellet belyses, med særlig vekt på dets bruk og hensikt i lys av tidligere forskning.

3.2.1 Hva ligger i begrepet konkretisering?

For å studere bruken av konkretiseringsmateriell kan det ikke utelukkende fokuseres på bruken av materielle konkreter, men en større betydning av ordet konkretisering må omtales. Kirfel (2010) hevder at konkretisering kan betraktes gjennom underkategoriene materialisering, eksemplifisering, kontekstualisering og visualisering. I utforskingen av hvordan elevene oppfattet brøkbegrepet ved hjelp av materialisering eller en visualisering, kan det dermed være relevant å se på hva som ligger i disse ulike underkategoriene av konkretisering.

Materialisering

En materialisering er i likhet med konkretiseringsmateriellet en prosess der en gjør det abstrakte konkret, ved å benytte seg av materiell eller ting en kan ta på. Da kan elevene tilnærme seg noe nytt, ved hjelp av noe de allerede kjenner. Dette materialet skal være lett å manipulere, flytte rundt på, eller ordne på en annen måte. Kirfel (2010) fremmer at: «Slik får hjernen et bilde av prosesser som senere skal gjentas uten noe konkret å holde seg til. Mange lærere opplever denne overgangsfasen, fra materiellet til tenkte objekter som utfordrende» (s. 1). Spørsmålet blir dermed hvordan vi på best mulig måte kan bevege oss mellom konkrete og abstrakte representasjoner.

Eksemplifisering

I forlengelsen av materialiseringen er eksemplifisering en måte for å skape en overgang mellom materialet og de tenkte objektene i eksemplene på (Kirfel, 2010). Det er ikke nødvendigvis slik at konkretene alltid er utgangspunktet. Hvis vi for eksempel tar i betraktning en formelsamling, som elevene skal bruke og beherske, forstår vi raskt at hvis elevene ikke har sett eksempler på hva disse formlene er eller skal brukes til, blir det vanskelig å nyttiggjøre seg dem. Formelen trenger en konkretisering ved hjelp av ulike eksempler.

Kontekstualisering

Mange ganger er det viktig å skape en kontekst rundt matematikken, slik at vi kan gjøre matematikken og regningen mer forståelig for elevene (Kirfel, 2000). I brøkregning kan det være vanskelig å forstå forskjellen på målingsdivisjon og delingsdivisjon. Hvis det derimot blir knyttet en tekstoppgave til hvert av utrykkene, der det kommer tydelig frem at det ene blir en målingsdivisjon og det andre blir en delingsdivisjon, så blir det mer forståelig. «Klarer vi å finne meningsfulle situasjoner der disse regneartene er aktuelle og der situasjonene skiller mellom dem, har vi muligens gitt elevene et verktøy til å løse liknende oppgaver» (Kirfel, 2010, s. 1). Han fremmer at å kjenne igjen konteksten er sentralt for at elevene skal skape mening, opprettholde motivasjon, og for å kunne gjennomføre selve oppgaven (Kirfel, 2010).

Visualisering

Ved hjelp av visualisering kan vi få hjelp til å fange inn en lang tankerekke. Kirfel (2010) viser til hvordan en telleprosess, en komplisert oppstilling av figurer og deres slektskap, kan avbildes i en eneste tegning. Hvis vi skulle ha beskrevet de samme fenomenene med ord, kunne det raskt blitt omfattende og komplisert å forstå for mottakeren.

Bare fordeler med konkretisering?

Basert på litteraturen som er presentert frem til nå omkring konkretisering, kan det virke som bruken av konkretisering i undervisning og læring bare innehar positive effekter. Det er derfor viktig å påpeke at dette nødvendigvis ikke alltid er tilfelle. Noen ganger kan materialet, eksempelet eller konteksten, forstyrre den ønskede abstraksjonen. De kan være misledende, overdøve det egentlige poenget, gi feil assosiasjoner enn det som var hensikten, eller gi et for snevert bilde av det matematiske begrepet. Kirfel (2010) hevder at konkretiseringen har til hensikt at «elevene skal føres inn i en matematisk tenkning og skal forstå hva materialet kan brukes til med hensyn til matematikklæring. Konkretisering er i seg selv ikke nok, men redskap som kan gi læringseffekter ved god bruk» (s. 1). I delkapittel 3.2.3 og 3.2.4 skal det i forlengelsen av dette diskuteres både bruk av konkretiseringsmateriellet, men også hvilken hensikt en slik bruk har.

3.2.2 Hva er konkretiseringsmateriell?

Konkretiseringsmateriell er i denne studien en form for de verktøy og artefakter som er blitt omtalt i forestående kapittel om sosiokulturell læringsteori. I lys av denne teorien skal nå konkretiseringsmateriellet omtales, med fokus på hvilket verktøy dette er for elever i matematikk.

Da dette studiet sentrerer seg rundt et praktisk arbeid med konkreter i matematikkopplæringen, er det klargjørende å betrakte hva utdanningsdirektoratet sier om et slikt arbeid. Et overgripende mål for grunnskolens matematikkundervisning er at: «[M]atematikkfaget i skolen medverkar til å utvikle den matematiske kompetansen som samfunnet og den einskilde treng. For å oppnå dette må elevane få høve til å arbeide både praktisk og teoretisk»(Utdanningsdirektoratet, 2006). I kunnskapsløftet blir slik viktigheten av å arbeide praktisk med matematikk understreket.

Når litteraturen omkring emnet konkretiseringsmateriell betraktes, fremkommer det raskt en rekke definisjoner som beskriver begrepet. Hynes (1986, s. 11) beskriver konkretiseringsmateriellet slik: «Manipulative materials are concrete models that incorporate mathematical consepts, appeal to several senses, and can be touched and moved around by students». Av dette forstår vi at konkretiseringsmateriellet fungerer som noe fysisk som benyttes for å visualisere bestemte matematiske ideer. Swan og Marshall (2010) oppfatter denne definisjonen som noe mangelfull, da de hevder at den kun tar høyde for at elevenes «hands on-experiences» med materiellet, uten at den nødvendigvis omfatter en stimulering av elevenes tenkning rundt bruken av materiellet. De så derfor nødvendigheten av å tilføye en ny definisjon som ville inkludere dette aspektet: «A mathematics manipulative material is an object that can be handled by an individual in a sensory manner during which conscious and unconscious mathematical thinking will be fostered»(Swan & Marshall, 2010, s. 14). Med denne definisjonen ønsker de å tydeliggjøre at det matematiske materiellet bør inneha et potensial for å lede elevene til en bevisstgjøring, og slik kunne fremme en utvikling av konsepter og ideer knyttet til matematikken. De hevder at ethvert konkretiseringsmateriell bør konstrueres med dette siktemålet. Et siste poeng med denne definisjonen er dens spesifisering av den bevisste og ubevisste tenkningen ved arbeid med konkretiseringsmateriell, som tilfører materiellet en ekstra verdi i dets evne til å gi elevene en forståelse de selv ikke er bevisst. Moyers (2001) definisjon må også inkluderes da den på mange måter skiller seg fra de andre to: «Manipulative materials are objects designed to represent explicitly and concreatly mathematical ideas that are abstract. They have both visual and tactile appeal and can be manipulated by learners through hands-on experiences» (s. 176). Her forstås det at materiellet kan oppfattes av elevene som objekter som de kan manipulere og slik tilføre en matematisk mening. Da kan elevene i neste omgang forstå de matematiske ideene som ligger bak disse objektene. Et annet poeng i denne definisjonen er hvordan konkretene kan ha både en visuell og en taktil tilnærming, der elevene henholdsvis benytter sansene å se og å røre, til å manipulere objektene.

Videre vil de ulike definisjonene samlet være utgangspunkt for denne studiens forståelse av ordet. Det engelske uttrykket for konkretiseringsmateriell, manipulatives, bidrar med betydningen av at elevene aktivt må manipulere konkretiseringsmateriellet for at det skal føre til forståelse, men når det er nevnt, vil likevel begrepet konkretiseringsmateriell benyttes i den videre teksten.

3.2.3 Bruk av konkretiseringsmateriell i matematikk

«Manipulatives by themselves cannot bring about understanding» (Ball, 1992; Baroody, 1989; Kamii, Lewis, & Kirkland, 2001; Viadero, 2007). Dette er blitt understreket som et sentralt poeng av flere forskere. Det utdypes videre at det sentrale i bruken av konkretiseringsmateriell heller bør være kvaliteten på elevenes tenkning fostret av en bruk av materiellet(Kamii et al., 2001). Selv om konkretiseringsmateriell blir betraktet som et nyttig verktøy for å hjelpe elever å opparbeide seg matematisk forståelse, så er måtene det brukes på varierende med hensyn til hvilke mål og hvilken hensikt lærerne har når de benytter seg av dem (Uribe-Florez & Wilkins, 2010). Den mest vanlige, og samtidig feilaktige, bruken av konkretiseringsmateriell i matematikkundervisning, kjennetegnes ved at lærere viser elevene nøyaktig hvordan materiellet skal brukes. Dette kan føre til at elevene blindt følger lærerens veiledning. Når denne bruken utspilles kan det virke som elevene har forstått, fordi de følger en oppskrift, uten at forståelse ligger til grunn for elevenes handlinger. Et resultat av at lærere overfører måten konkretiseringsmateriellet skal brukes på, er at elevene da ser på materiellet som objekter for å komme frem til et svar, fremfor en hjelp til å visualisere matematikken (Van de Walle et al., 2007).

Lærere kommenterer ofte at det å benytte seg av konkretiseringsmateriell for å undervise i matematikk er ‘gøy!’. I denne sammenheng stiller Moyer (2001) spørsmål til i hvilken grad lærere benyttet seg av dette for å representere de matematiske konseptene. Da konkrete handlinger står i sentrum i læringsaktivitetene i mange praktiske opplæringer, blir refleksjon over en slik bruk viktig, der en setter ord på hva en gjør og hvorfor (Dysthe, 2001). I denne sammenheng peker Löwing (2006) på hvordan lærere ofte setter likhetstegn mellom aktivitet og konkretisering, der man tror at elever bare lærer gjennom å se, høre og kjenne. Löwing (2006) oppdaget at mange av de aktivitetene som lærerne i hennes studie betraktet som konkretisering, ikke ledet frem til noen generell kunnskap for elevene: «Man lär inte matematik enbart genom att vara aktiv och göra saker utan genom att reflektera över vad man gör» (s. 117). Hun hevdet dessuten at man i stedet for å stadig søke etter nye løsningsmetoder heller kan benytte seg av de matematiske modellene man allerede har abstrahert, for å kunne løse nye problemer i nye studier. Van de Walle (2004) fremmer imidlertid at det kan være nyttig å gjøre samme aktivitet med to ulike modeller. Fra elevenes synspunkt vil dette bidra til at aktiviteten kan fremstå ganske ulik med de to ulike modellene.

Knyttet til bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk hevder både Birkeland et al. (2011) og Van de Walle (2004) at bruk av praktiske tilnærminger er nødvendig: «Elevene bør ha adgang til varierte konkretiseringer, slik at de aktuelle egenskapene ved brøkbegrepet og brøkregningen etter hvert meisler seg ut» (Birkeland et al., 2011, s. 187). Van de Walle (2004) hevder i likhet med dette at det er en betydelig mengde bevis på at bruken av modeller i brøkoppgaver er viktig. Han påpeker likevel at mange lærere bruker modellene på en feilaktig måte for å fremme brøkforståelse, og hevder at disse heller må hjelpe elevene til å få klarhet i sammenhenger som ofte vil vært forvirrende i en rent symbolsk form.

Det er lett å forstå hvordan konkretiseringsmateriell i matematikk kan benyttes for å gjøre undervisningen 'gøy', eller i et forsøk på å variere. I så måte kan det være nyttig å se på matematikkfagets siktemål i forhold til hvordan konkretiseringsmaterialene skal og bør benyttes.

3.2.4 Hensikt med bruk av konkretiseringsmateriell

Matematikk handler ikke utelukkende om å løse enkelte problemer, men å kunne se det generelle i problemene man løser. Nettopp de generelle formlene eller beskrivelsene gir faget matematikk sin karakter:

> *Matematikk er en abstrakt og generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling… Matematikken är abstrakt: den har frigjort sig från det konkrete ursprunget hos problemen, vilket er en forutsättning för att den skall kunne vara generell, dvs. tillämpbar i en mångfald .situationer,…* (Löwing, 2006, s. 116).

Formlene og beskrivelsene skal ikke bare kunne benyttes i en konkret situasjon, men i en tenkt hypotetisk situasjon. Dette kravet leder ofte til et problem i matematikkundervisningen, og da spesielt i grunnskolens senere år og i videregående. Derfor er det svært viktig at konkretiseringen ikke stopper opp ved en manipulering av materialet eller for å belyse bare et enkelt fenomen (Löwing, 2006). Man må som nevnt ikke sette likhetstegn mellom aktivitet og konkretisering. I stedet må man ta sikte på at målet med konkretiseringen skal lede frem til en abstraksjon og forståelse av den matematikken som skal konkretiseres (Löwing, 2006).

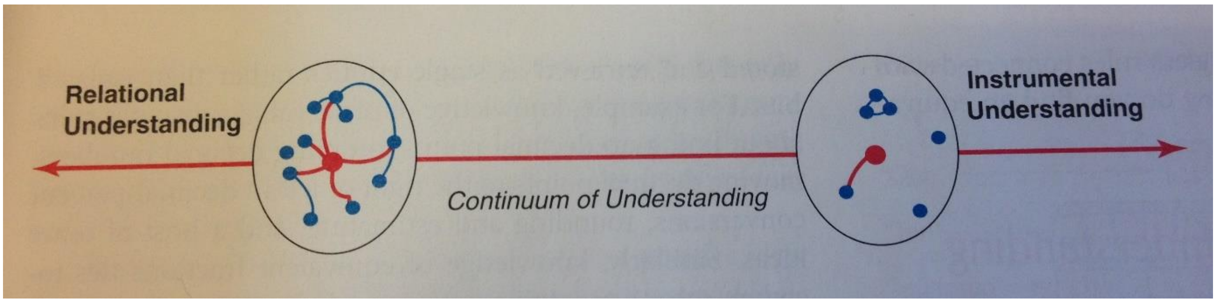
Laski, Jor'dan, Daoust, og Marray (2015) hevder at den vidstrakte bruken av konkretiseringsmateriell er grunnfestet i ideen om at små barn trenger å tenke og resonnere konkret før de kan resonnere abstrakt. Dette støttes også av Uribe-Florez og Wilkins (2010) som hevder at et av kjennetegnene ved undervisning med konkretiseringsmateriell som fører til forståelse, er at elever får mulighet til å forstå abstrakte sammenhenger ved å koble emner til mer konkrete ideer. For selv om konkretiseringsmateriell er konkrete objekter, så må man forstå hvordan disse objektene representerer konsepter som krever og nødvendiggjør abstrakt tenking. Et konkretiseringsmateriell er bare en fysisk representasjon av et konsept, men ikke selve konseptet i seg selv (Laski et al., 2015; Uribe-Florez & Wilkins, 2010).

Det er med andre ord viktig å ha klare mål for undervisningen, og gjennomtenkte begrunnelser for hvilke konkretiseringsmateriell en som lærer benytter for å hjelpe elevene til å forstå et abstrakt og matematisk konsept.

3.3 Begrepet forståelse

Det er vanskelig å måle elevenes grad av forståelse, og i denne studien er dette heller ikke målet. Imidlertid er det nødvendig med en klargjøring av begrepet forståelse, da det er sentralt videre i oppgaven.

Kunnskap er noe vi har eller ikke har, og det er mulig å si hva vi vet og ikke vet. Forståelse er derimot noe annet. Van de Walle (2004) definerer begrepet slik: «Understanding can be defined as a measure of the quality and quantity of connections that an idea has with existing ideas. The greater the number of connections to a network of ideas, the better the understanding» (s. 25). I sitatet ovenfor vektlegges både mengde koblinger til en ide, men også kvaliteten på disse koblingene. Jo bedre disse er, jo bedre er forståelsen. Det presiseres likevel at forståelse aldri vil handle om alt eller ingenting, og Van de Walle (2004) påpeker at den enkeltes forståelse heller må sees på som en kontinuerlig utviklingsprosess. Hiebert og Carpenter (1992) hevder at denne utviklingsprosessen har to ender, der den ene enden kalles relasjonell forståelse og den andre enden kalles instrumentell forståelse. Den relasjonelle forståelsen innebærer et rikt sett av koblinger til en ide, mens den instrumentelle forståelsen innebærer at ideene er fullstendig eller nesten isolerte (Se bilde 3).



Bilde 3: Relasjonell og instrumentell forståelse (Van de Walle, 2004, s. 25)

4 Metode

I denne studien har jeg utforsket 8.klassingers bruk av konkretiseringsmateriell i en skole på Sørlandet. I dette kapittelet vil jeg presentere metoden jeg har benyttet for å besvare mitt forskningsspørsmål. I det videre vil det fremgå en redegjørelse for forskningsstrategier, før jeg presenterer designet for forskningen, med en beskrivelse av de ulike oppgavesettene brukt i elevenes oppgaveløsning. Informantene i studien vil omtales i et eget delkapittel, før jeg presenterer metodene jeg benyttet for datainnsamlingen. Deretter vil jeg vurdere kvaliteten i studien, før jeg redegjør for etiske betraktninger. Avslutningsvis i metoden vil jeg presentere dataanalyseringsstrategier og håndtering av datamaterialet.

4.1 Forskningsstrategi

I denne forskningen var en kvalitativ tilnærming et naturlig valg på bakgrunn av forskningens åpenbare fokus på dybde, der spørsmålsformen hva og hvordan bidrar til å utforske et bestemt fenomen. Dette hevder Silverman (2013) er et sentralt kjennetegn ved den kvalitative forskningen. Min forskning har dessuten form som et «case»-studie eller en saksstudie, der Bryman (2012) påpeker hvordan dette innebærer en detaljert og intensiv studie av en enkelt sak, og da gjerne i en bestemt organisasjon. Jeg ønsket derfor å skaffe meg innsikt i hvordan elever på åttende trinn oppfattet ulike aspekt ved brøkbegrepet gjennom arbeid med konkretiseringsmateriell. Studien kunne slik ta sikte på å gi innsikt i den kompleksiteten og den bestemte naturen av dette fenomenet (Stake, 1995). Ved å velge den fortolkningsbaserte tilnærmingen i et epistemologisk perspektiv kunne jeg analysere mine funn ved å sette meg inn i hvordan mennesker fortolker og legger mening i spesielle sosiale fenomener (Jacobsen, 2005).

4.2 Forskningsdesign

Målet var at studien skulle bidra til å utforske hvordan bruken av konkretiseringsmateriellet bidro til elevenes oppfatning av brøkbegrepet. Tilnærmingen for å studere dette fenomenet måtte derfor utelukke andre påvirkende faktorer, for slik å kunne fokusere på konkretiseringsmateriellets betydning. Noen grep som ble gjort for å oppnå et slikt fokus, var blant annet å lage tre relativt homogene grupper med elever når det gjaldt faglig prestasjoner. De stilte med forholdsvis like forutsetninger for å løse oppgavene. Det var tre elever i hver gruppe. De ulike oppgavesettenes tema og vanskelighetsgrad skulle også være lik fra time til time, og fra gruppe til gruppe slik at denne faktoren heller ikke varierte. På bakgrunn av dette ble det utformet en matrise for hvordan opplegget skulle være, der konkretiseringsmateriellet ble den varierende faktoren som skulle undersøkes.

Ut ifra matrisen under (Se tabell 1) fremgår det fra oppsett-kolonnen at elevene gjennom fire skoletimer skulle gjennom gult, blått, rødt og grønt oppgavesett, med tilhørende konkretiseringsmateriell. Etter hver time, ble det brukt ti minutter avslutningsvis til et kort intervju der jeg stilte spørsmål til bruken av materiellet.

Gruppe / Oppsett	Elevgruppe 1	Elevgruppe 2	Elevgruppe 3
Konkretiseringsmateriell nr. 1 Oppgavesett nr. 1	Brøkstolper Gult oppgavesett	Brøkstolper Gult oppgavesett	Brøkstolper Gult oppgavesett
Intervju om bruken av konkretiseringsmateriell nr. 1	10 min intervju om bruken av brøkstolpene.	10 min intervju om bruken av brøkstolpene.	10 min intervju om bruken av brøkstolpene.
Konkretiseringsmateriell nr. 2 Oppgavesett nr. 2	Brøksirkler/Pizzabrøk Blått oppgavesett	Brøksirkler/Pizzabrøk Blått oppgavesett	Brøksirkler/Pizzabrøk Blått oppgavesett
Intervju om bruken av konkretiseringsmateriell nr. 2	10 min intervju om bruken av brøksirkler/pizzabrøk.	10 min intervju om bruken av brøksirkler/pizzabrøk.	10 min intervju om bruken av brøksirkler/pizzabrøk.
Konkretiseringsmateriell nr. 3 Oppgavesett nr. 3	Terninger, brikker og papirbrøker Rødt oppgavesett	Terninger, brikker og papirbrøker Rødt oppgavesett	Terninger, brikker og papirbrøker Rødt oppgavesett
Intervju om bruken av konkretiseringsmateriell nr. 3	10 min intervju om bruken av terninger, brikker og papirbrøker	10 min intervju om bruken av terninger, brikker og papirbrøker	10 min intervju om bruken av terninger, brikker og papirbrøker
Konkretiseringsmateriell nr. 4 Oppgavesett nr. 4	Frivillig valg av alle tidligere brukte konkretiseringsmateriell Grønt oppgavesett	Frivillig valg av alle tidligere brukte konkretiseringsmateriell Grønt oppgavesett	Frivillig valg av alle tidligere brukte konkretiseringsmateriell Grønt oppgavesett
Intervju om selvvalgt bruk av konkretiseringsmateriell	10 min intervju om selvvalgt bruk av konkretiseringsmateriell	10 min intervju om selvvalgt bruk av konkretiseringsmateriell	10 min intervju om selvvalgt bruk av konkretiseringsmateriell

Tabell 1: Matrise for forskning.

4.2.1 Anvendt konkretiseringsmateriell

Det ble valgt ut fire ulike konkretiseringsmateriell, der hensikten var at ulike konkretiseringsmateriell skulle stimulere til ulik oppfatning av brøkbegrepet. I valget og utformingen av de ulike konkretiseringsmateriellene var det en rekke hensyn som ble tatt med i betraktningen. Man bør i første omgang prøve å unngå en feilaktig bruk av konkretiseringsmateriellet, der elevene følger en gitt oppskrift, og dermed oppfatter materiellet som objekter for å komme frem til et svar heller enn som en hjelp til å visualisere matematikken (Van de Walle et al., 2007). Dette ble sikret gjennom å gi elevene oppgaver der de selv måtte utforske bruken av konkretiseringsmateriellet, med forbehold om at de kunne stille spørsmål underveis for å ikke stagnere eller stoppe opp, men derimot aktivt kunne ta i bruk konkretiseringsmateriellet. Hele tiden med det siktemål at konkretiseringsmateriellet skulle kunne lede frem til en abstraksjon og forståelse av den matematikken som skulle konkretiseres (Löwing, 2006). Dette ble spesielt viktig i oppgaver som fremsto som underholdende, slik at hensikten med å lære det matematiske konseptet ble første prioritering.

Kunnskapsløftets mål for læring etter 10.trinn ble brukt som utgangspunkt for å uforme oppgavesettene. I det første oppgavesettet ble konkretiseringsmateriellet valgt til å være brøkstolper, i det andre til å være pizzabrøker og brøksirker og i det tredje var det diverse terninger, brikker og papirbrøker, som skulle benyttes i «Spill, lek og kreative oppgaver». I den første hovedoppdelingen var det som sagt fire konkretiseringsmateriell, men egentlig forelå det bare tre oppdelinger av konkretiseringsmateriell, der det siste konkretiseringsmateriellet tok form som et valgfritt konkretiseringsmateriell. Elevene kunne her selv velge hvilket av de tidligere konkretiseringsmateriellene de ønsket å benytte seg av. Dette vil omtales i en mer omfattende beskrivelse av hvert konkretiseringsmateriell.

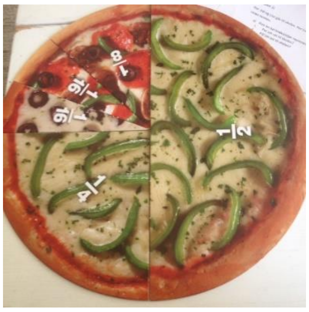
Gult oppgavesett med bruk av første type konkretiseringsmateriell: Brøkstolper

I første time ble brøkstolper brukt som konkretiseringsmateriell sammen med det gule oppgavesettet (Se vedlegg 4). Brøkstolper er klosser som lett kan settes sammen til staver og brekkes opp. Her var poenget at elevene skulle oppleve brøkene og konkretiseringsmateriellet i nær relasjon til hverandre, og det skulle være enkelt å se sammenhenger mellom oppgaven som var gitt og hvordan dette kunne knyttes til stolpene som var delt ut. Hver gruppe fikk tre sett med brøkstolper, og hvert sett inneholdt 1 hel stolpe i tillegg til stolper delt i brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{12}$ (Se bilde 4). Den hele stolpen var rød, mens de andre stolpene var henholdsvis rosa for halve, oransje for en tredjedel, gule for en fjerdedel, grønne for en femtedel, lyseblå for en sjettedel, mørkeblå for en åttendel, lilla for en tiendel og svart for en tolvdel. Grunnen til at elevene fikk flere sett, skyldtes at de lettere skulle kunne se sammenhenger mellom de ulike brøkene. I noen oppgaver kunne brøkene være store, men likevel hadde elevene nok stolper til å representere svaret på to måter. Eksempelvis fant elevene frem til at $2\frac{1}{2}$ stolpe var det samme som femten stykker av $\frac{1}{6}$ stolpen, altså $\frac{15}{6}$. Oppgavesettet inneholdt 4 oppgaver, med totalt 9 deloppgaver. Oppgavene var utformet for å passe til ulike temaer i brøk, der elevene blant annet skulle rangere brøker, addere brøker, samt løse oppgaver med multiplikasjon og divisjon av brøk.

Bilde 4: Brøkstolper

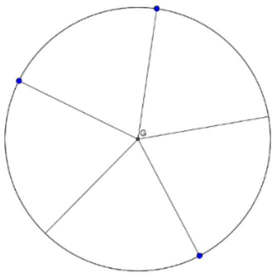
Blått oppgavesett med bruk av andre type konkretiseringsmateriell: Brøksirkler og pizzaspillet

I andre time var pizzaspillet og brøksirkler brukt som konkretiseringsmateriell, med tilhørende blått oppgavesett (Se vedlegg 5). Pizzaspillet inneholdt en mengde brøker som var delt opp som deler av en hel pizza. I bilde 5 ser man et utvalg av brøkene fra pizzaspillet, og i bilde 6 ser man brøksirklene jeg hadde lagd i forkant. Jeg lagde sirkler delt opp i den brøken som ikke pizzaspillet inkluderte, $\frac{1}{5}$. Dette konkretiseringsmateriellet ble gitt elevene i andre time. Det ble lagt vekt på at elevene selv skulle kunne avgjøre hvordan materiellet skulle benyttes for å løse oppgavene.



Bilde 5: Pizzaspillbrøker

Da konkretiseringsmateriellet i denne timen tok utgangspunkt i et pizzaspill, ble også oppgavene i stor grad utformet til å handle om mat, og mengder spist av den fulle mengde. I analysen kommer det frem hvilken effekt dette hadde på elevenes oppfatning av brøkbegrepet i disse oppgavene. I dette oppgavesettet var det fire oppgaver, med totalt 9 deloppgaver. I likhet med det første oppgavesettet ble elevene først møtt med lettere oppgaver, før de ble gradvis vanskeligere.



Bilde 6: Brøksirkel delt opp i $\frac{1}{5}$ sektorer.

Rødt oppgavesett med bruk av tredje type konkretiseringsmateriell: Spill, lek og kreative oppgaver

Tredje time var utformet på bakgrunn av at elevene skulle benytte konkretiseringsmateriellet til spill, lek og kreative oppgaver, med tilhørende rødt oppgavesett (Se vedlegg 6). I denne sammenheng ble dermed materiellet valgt på bakgrunn av hva som ville være hensiktsmessig til hvert spill. Det var bruk av brikker/linser (Bilde 7), centikuber (Bilde 8), brøkterninger (Bilde 9), og egenlagde papirbrøker (Bilde 10). Centiuber er, på samme måte som brøkstolper, klosser som lett kan settes sammen til staver og brekkes opp.

Bilde 7: Linser/Brikker

Bilde 8: Centikuber

Hvorfor velge spill og lek som en innfallsvinkel til arbeidet med konkretiseringsmateriell og brøk? Til tross for at brøk fremstår som svært vanskelig i elevenes møte med det på grunnskolen (Nunes, 2008), så finner vi dette temaet i mange sammenhenger i det virkelige liv. Det er derfor viktig å se brøk i en lystbetont sammenheng, der det oppleves relevant og nyttig for elevene. Dette skaper en drivkraft i seg selv i det at elevene opplever oppgavene som morsomme, underholdende og som en lek. I utarbeidelsen av denne timen var det viktig å sørge for at i tillegg til å lage slike 'underholdende' oppgaver, måtte siktemålet først og fremst være å lage oppgaver som skulle representerer det matematiske om brøk (Moyer, 2001).

Bilde 9: Brøkterninger

Bilde 10: Selvlagde papirbrøker

I dette oppgavesettet fikk elevene kun tre oppgaver der den første oppgaven var mer tidkrevende enn de andre to. Til forskjell fra de to tidligere oppgavesettene hadde dette oppgavesettet oppgaver som krevde en større evne til å resonnere og tenke kreativt, til tross for at det faglige nivået faglig var det samme.

Grønt oppgavesett med valgfritt konkretiseringsmateriell

I fjerde time, med tilhørende grønt oppgavesett (Se vedlegg 7), skulle elevene selv velge og vurdere hvilket konkretiseringsmateriell de ønsket å benytte seg av. I denne timen fikk elevene utdelt alle de tidligere konkretiseringsmateriellene. Elevene på hver gruppe skulle sammen bestemme hvilket konkretiseringsmateriell de ønsket å bruke i hver oppgave. De kunne bytte konkretiseringsmateriell underveis hvis de ønsket.
Formålet med å la elevene selv velge hvilket konkretiseringsmateriell de ønsket å benytte, var å skape en bevisstgjøring for hvilket konkretiseringsmateriell som best kunne visualisere matematikken som lå bak. I tillegg kunne elevenes valg av konkretiseringsmateriell si noe om hvilke materiell som ble foretrukket både for å forklare til andre, men også for ens egen del. Et valgfritt konkretiseringsmateriell kunne også bidra til innsikt i om elevene brukte materiellet på samme måte i dette oppgavesettet som i de andre, om materiellet da opplevdes mindre 'nødvendig' eller ble brukt feilaktig.

Oppgavesettet besto av 14 oppgaver, og totalt sett 20 deloppgaver. Hensikten var imidlertid ikke at elevene skulle komme igjennom alle disse oppgavene, men at ulike grupper kunne arbeide med ulike oppgaver i forhold til å variere bruken av konkretiseringsmateriell. I dette oppgavesettet ga jeg elevene oppgaver som var hentet fra en tidligere tentamen i matematikk på 8. trinn. Dermed ble bruken av konkretiseringsmateriell knyttet opp imot oppgaver fra en reell kontekst i elevenes skolehverdag. Dette kunne også bidra til å vise elevene hvordan konkretiseringsmateriellet kunne benyttes i vanlige oppgaver som de møter i matematikktimene.

4.3 Informanter

Informantene inkludert i denne studien, er i hovedsak ni elever fra en 8.klasse. For å sikre en representativ forskning ble elevene som skulle delta, valgt ut på bakgrunn av bestemte kriterier. Gjennom sin deltagelse i arbeid med de utdelte oppgavene, samt gjennom intervjuene i slutten av hver time, regnes elevene som min hovedkilde til datamaterialet. De har bidratt til å gi meg de funnene jeg trengte, gjennom sin deltagelse, sitt samarbeid med andre elever og gjennom å besvare mine spørsmål både under gjennomføringen av oppgavene og i intervjuene.

Da elevene skulle arbeide i grupper på tre, valgte jeg å inkludere ni elever i studien. Jeg ønsket en blanding av jenter og gutter samt at de gjerne kunne fordele seg på ulike nivåer i faglig prestasjon, da dette ville gi et mer representativt utvalg. Likevel var første prioritet å sikre meg elever som var flinke til å reflektere og ordlegge seg, da dette ville gi meg et bedre grunnlag til å avdekke funn knyttet til elevenes oppfatning av brøkbegrepet. Jeg bemerket likevel ovenfor faglærer at jeg forsto konsekvensen av at det gjerne kunne være en sammenheng mellom høyt- og middels presterende elever, og deres evne til å reflektere og ordlegge seg. Jeg ble tildelt ni elever, der de fleste, også de som var lavt presterende, skulle vise seg å inneha denne evnen til refleksjon og det å ordlegge seg. Jeg valgte å ikke inkludere funnene fra gruppe 3, da de ikke kunne tilføre noe særlig utover de funnene jeg fant i gruppe 1 og 2.

For å sikre en anonymitet til hver enkelte av de ni elevene, er alle navnene anonymisert, både personnavn og stedsnavn. I oppstarten av prosjektet ble det søkt godkjenning for forskningen fra NSD, og da denne var i orden kunne informasjonsskriv og «Forespørsel om deltagelse» (se vedlegg nr. 1) sendes ut til elever og foresatte. Med tanke på elevenes samtykke, ble det lagt vekt på deres medbestemmelse til å delta i studien, i tillegg til foreldre eller foresattes godkjenning.

Etableringen av kontakt med informanter ble gjort gjennom tidlig å ta kontakt med den aktuelle skolen per mail, og etterspørre et møte der jeg kunne fremlegge prosjektets rammer og informere om oppgaven. Læreren og rektor ved skolen samtykket, med visshet om at de når som helst kunne trekke seg fra studien. Jeg forsikret også faglærer om at min forskning ikke skulle føre til merarbeid for de involverte, men heller tvert om, da jeg håpet studien og mine funn kunne bidra til en berikelse av undervisningen.

4.4 Metoder for datainnsamling

Min datainnsamling består i hovedsak av observasjon av elevenes arbeid i grupper i fire matematikktimer. I tillegg hadde jeg ti minutters intervju i slutten av hver av de fire timene. Jeg skaffet meg oversikt over hvilke emner innen brøk elevene hadde vært innom i læreverket, men med unntak av dette, forelå det ingen analyse av tekster eller visuelle uttrykksformer. Imidlertid ble det foretatt en analyse av lyd og videoopptakene fra observasjonen.

Videre vil jeg beskrive hvordan de ulike innsamlingsmetodene ble gjennomført basert på mine valg, forskningsetiske refleksjoner og i lys av relevant teori.

4.4.1 Observasjon

Gruppearbeidet ble observert i fire skoletimer over en tidsperiode på tre uker. De fire timene var satt sammen til dobbelttimer, slik at de to første oppgavesettene ble observert en uke, mens de to siste oppgavesettene ble observert to uker etter.

For å få innsikt i hvordan elevenes bruk av konkretiseringsmateriell bidro til ulike oppfatninger av brøkbegrepet, var det nødvendig med observasjon som metode. Jeg valgte å ha åpen observasjon, slik at elevene var kjent med at jeg forsket på dem (Jacobsen, 2005). Et annet spørsmål som dukket opp tidlig i planleggingsfasen var hvilken rolle jeg ønsket å ha i observasjonsarbeidet. Deltagende observasjon ble valgt som tilnærming i denne studien, som Bryman (2012) beskriver slik: «The participant observer immerses him- or herself in a group (…) observing behavior, listening to what is said in conversations both between others and with the fieldworker, and asking questions» (s. 432). Denne beskrivelsen oppsummerer min hensikt av å ta denne rollen som observatør, der jeg hadde muligheten til å observere elevene på nært hold, hjelpe dem videre hvis de stoppet helt opp og observere deres samtale som utgjorde hovedmaterialet for min studie. Deltakende observasjon bidrar til at forskeren lettere kan bli akseptert i det miljøet som studeres (Thagaard, 2013). For å bidra til dette hadde jeg i forkant av datainnsamlingen lært meg navnene på alle elevene, og sikret meg at alle hadde gått med på at jeg skulle observere dem i deres arbeid med oppgaver i matematikk.

4.4.2 Gruppeintervju

For å supplere min observasjon med elevenes bruk av konkretiseringsmateriell, foretok jeg fire intervjuer i etterkant av hver time. Jacobsen (2005) påpeker at intervjuer har ulik grad av åpenhet, og at vanligvis er det åpne intervjuet til en viss grad strukturert. I mine intervjuer hadde jeg i forkant inkludert noen spørsmål som jeg mente ville være relevante for studiens forskningsspørsmål. Disse ble likevel endret på og nye spørsmål ble utformet underveis i takt med hva jeg observerte at elevene gjorde i oppgaveløsningen. I tillegg måtte noen av spørsmålene ta hensyn til hvilke svar elevene ga på de allerede utarbeidede spørsmålene i intervjuet. Slik oppnådde jeg at spørsmålene sentrerte seg rundt problemer som dukket opp underveis i elevenes oppgaveløsning.

Mitt mål med å plassere elevene i grupper på tre var at dette skulle bidra til en produktiv oppgaveløsning, der elevene kunne bygge opp kunnskap ved hjelp av hverandre. Tilsvarende valgte jeg et gruppeintervju der jeg som forsker kunne få tak på hvordan elevene responderer på hverandres synspunkter og hvordan de bygger opp eller blir klar over nye synspunkt basert på samtalen som skjer under et gruppeintervju (Bryman, 2012). Bryman (2012) hevder at man gjennom gruppeintervjuer kan få tak på mer realistiske fremstillinger av virkeligheten: «This process of arguing means that the researcher may stand a chance of ending up with more realistic accounts of what people think» (s. 503). Elevene nikket anerkjennende til hverandres synspunkter under gruppeintervjuet, som kunne bidra til å bekrefte at mange stilte seg bak samme mening. Det var også tendenser til at elevene ansvarliggjorde hverandre for meninger og synspunkter under gruppeintervjuet. Det å velge gruppeintervju ga meg slik muligheten til å få frem mer innholdsrike svar.

4.4.3 Bruk av instrumenter

Lyd- og videoopptak ble brukt som instrumenter for å dokumentere observasjonen og intervjuene i denne studien. Jacobsen (2005) fremmer at i observasjon har videoopptak noen fordeler fremfor lydopptak, da observasjonen som regel dreier seg om å studere situasjoner og hendelser, som var tilfelle i mitt studie. Dessuten var det slik lettere å ivareta de inntrykk jeg fikk underveis, da jeg kunne spille av opptakene i etterkant. Hovedargumentet for å velge disse instrumentene var at det i datainnsamlingen skulle observeres tre grupper, som alle skulle håndtere de samme oppgavene på samme tid. Som deltagende observatør var det dermed hensiktsmessig å la funnene dokumenteres på lyd- og videoopptak, mens jeg kunne gå til og fra de ulike gruppene etter behov.

Tilknyttet valget om å benytte meg av disse instrumentene i datainnsamlingen dukket det opp en del etiske og praktiske overveielser i forhold til gjennomføring. Det avgjørende kriteriet for meg var å velge en dokumentasjonsform som ivaretok interaksjonen mellom elevene på en mest mulig autentisk måte (Kvale & Brinkmann, 2012). Jeg ønsket å påvirke informantene i minst mulig grad, og påpekte ovenfor elevene at alle navn ville bli anonymisert. Likevel kom jeg frem til at for å bevare mest mulig av informasjonen var både lyd- og videoopptak nødvendig.

En praktisk overveielse som dukket opp underveis var de ulike gruppenes plassering i rommet i forhold til at det ikke skulle bli for tett mellom kameraene og lydopptakernes plassering. Dette var avtalt med kontaktlæreren på skolen i forkant, slik at han sikret meg et klasserom der elevene kunne sitte spredt. For å skaffe et best mulig opptak fra de tre gruppene måtte jeg også vurdere hvordan kameraene og lydopptakerne kunne plasseres for å virke minst mulig forstyrrende på gruppens arbeid. Til tross for at dette var planlagt i forkant av observasjonen, måtte jeg foreta endringer underveis på kameraets plassering, da jeg oppdaget at nabopulten ble for langt unna, og at det var mer formålstjenlig å sette kameraet på samme pult som elevene satt på. Med denne endringen mistet jeg muligheten til å se ansiktsuttrykkene til elevene i deres arbeid, men fikk fordelen av å se en mer detaljert bruk av konkretiseringsmateriellet.

4.4.4 Begrensninger i datainnsamling

Det var en rekke begrensninger som oppsto i min datainnsamling. En kvalitativ metode for innsamling er ressurskrevende, og da jeg i denne studien hadde begrenset varighet og omfang, måtte jeg nøye meg med få elever. Og jeg måtte dermed prioritere mange varianter foran mange enheter (Jacobsen, 2005).

Jeg hadde åpen observasjon, der elevene visste at de ble undersøkt av meg som observatør, men også gjennom lyd- og videoopptak. Dette kunne medføre at elevene endret adferd, blant annet ved at de prøver å tilfredsstille meg som undersøker eller at de prøver å unngå å gjøre ting som er dumt (Jacobsen, 2005). Det kan være mulighet for at elevene i min studie kunne unngå å snakke, eventuelt snakke veldig mye, fordi de for eksempel fryktet at dette skulle gå ut over deres karakter i matematikk.

En annen begrensning, som også er knyttet til observasjon, handler om i hvilken grad en som forsker får tak på virkeligheten. Observasjon ved hjelp av lyd- og videoopptak får i stor grad vist hvordan elevene handler, samtaler og hvordan deres kroppsspråk er. En kan imidlertid ikke vet noe om hva elevene tenker eller føler. Eksempelvis var det en av elevene som ikke sa stort i datainnsamlingen, og som forsker er det vanskelig å avgjøre hva dette kan skyldes.

4.5 Kvalitet i studien

I dette delkapittelet vil jeg diskutere kvaliteten i mitt studie. Da mitt forskningsarbeid ble gjennomført ved hjelp av lyd- og videoopptak på en skole med et lite utvalg elever, er det særlig viktig å være bevisst hva som styrker og svekker forskningen. Jeg vil først begrunne bruken av metodetriangulering i dette studiet, før jeg omtaler studiens validitet og reliabilitet, før jeg avslutningsvis fremmer noen etiske betraktninger.

4.5.1 Metodetriangulering

For å kunne gå mer i dybden på hvordan bruken av konkretiseringsmateriellet bidro til elevenes oppfatninger av brøkbegrepet, var det nødvendig med en metodetriangulering innenfor kvalitative metoder. Denzin (1970) fremhever at triangulering som tilnærming innebærer å benytte seg av flere observatører, teoretiske perspektiver, kilder til data og metodologier. I min studie innebar dette å la intervjuet supplere funnene i observasjonen. Denne trianguleringen bidro slik til å sikre meg en større innsikt og sikkerhet i de funn som ble utarbeidet. Bryman (2012) hevder at etnografer ofte sjekker deres observasjoner med intervju, der de kan avdekke om de har misforstått hva de har sett i observasjonsdelen. Dette var også hensikten i min studie, da jeg i slutten av hvert oppgavesett brukte ti minutter til å stille spørsmål som kunne støtte opp om mine funn i observasjonen.

4.5.2 Validitet og reliabilitet

I dette kapittelet vil jeg først ha som mål å redegjøre for hva som kan bidra til å gjøre min forskning valid eller gyldig, før jeg i korthet vil omtale studiens reliabilitet.

Det opereres ofte med to hovedformer for validitet, den interne gyldigheten og den eksterne gyldigheten. Den interne validiteten (eller gyldigheten) forteller oss om de data vi har samlet inn og de konklusjoner vi har trukket, er riktige (Jacobsen, 2005). Dette knyttes altså til studiens gyldighet, der det er en rekke faktorer som må betraktes.

«Alle kvalitative undersøkelser er kun så gode som de dataene de klarer å samle inn i de første fasene» (Jacobsen, 2005, s. 216). Derfor bør man som forskere alltid stille kritiske spørsmål til om en har fått tak i de riktige kildene. Et av de første valgene jeg gjorde, som kan bidra til en slik intern gyldighet, var utvalg av informanter. Jeg måtte betrakte hvor mange elever jeg trengte for å gi forskningen validitet, sammen med en vurdering av hvordan jeg ønsket at utvalget skulle se ut, se delkapittel 4.3 om informanter.

Jacobsen (2005) hevder at metoden observasjon egner seg godt når vi er interessert i å registrere hva mennesker faktisk gjør (atferd), ikke hva de sier de gjør. Den sikreste metoden for å analysere det som virkelig skjedde i denne studien var dermed observasjon, da elevenes handlinger blir uttrykt gjennom det de sier. Når jeg i tillegg benyttet meg av videoopptak, kunne jeg danne meg et helhetlig bilde av både verbale og non-verbale uttrykk. Og det var en stor fordel med tanke på studiens sosiokulturelle tilnærming, der det ble tatt sikte på å undersøke elevenes bruk av verktøy sammen med deres samhandling. Noe som imidlertid kunne bidra til å svekke gyldigheten i mine funn er videokameraets påvirkning på oppførselen til de jeg filmet. «Selv om vi har fått tak i de riktige kildene, er det ikke sikkert at kildene gir fra seg den riktige informasjonen. Dette betyr at vi må foreta en kritisk drøfting av kildens evne til å gi riktig informasjon» (Jacobsen, 2005, s. 217). Som nevnt i delkapittel 4.4.3 ble valg av plassering på videokameraet dermed viktig, for å sikre en så liten påvirkning på elevenes oppførsel som mulig. Bruk av videokamera medførte dessuten store mengder materiale, og det ble viktig for meg å tidlig gjøre et utvalg basert på videoopptakene. Da husket jeg hva som hadde skjedd i observasjonen, og kunne foreta et mer representativt utvalg basert på dette. Jeg hadde også tatt lydopptak av funnene, for å sikre meg en bedre lydkilde hvis det ble vanskelig å oppfatte lyden på videokameraet. Da gruppene ble plassert med god spredning i rommet, ble imidlertid ikke dette noe problem.

Valgene jeg foretok i observasjonsdelen, kan i stor grad påvirke hva som blir funnene i mine resultater. For å sikre meg en mer gyldig forskning her, benyttet jeg meg av metodetriangulering, som er beskrevet i delkapittel 4.5.1, slik at intervjuet kunne benyttes til å bekrefte noen av funnene i observasjonen. Imidlertid bidro ikke intervjuene med så mye supplerende informasjon.

I henhold til den eksterne validiteten eller gyldigheten dreier det seg om i hvilken grad funnene fra en undersøkelse kan generaliseres, eller hvilken overførbarhet de har. Som nevnt i den kvalitative metodens begrensninger i kap 4.4.4, så var denne studien begrenset av hvor mange personer som ble inkludert i forskningen. Spørsmålet blir da om elevene i denne sammenheng er representative for andre enn seg selv. Kvalitative tilnærminger vil alltid møte denne type generaliseringsproblemer, hevder Jacobsen (2005) og derfor vil slike undersøkelser også ha problemer med den eksterne gyldigheten. Det er viktig å påpeke at jeg ikke vil benytte mine funn til å trekke bastante slutninger eller i den hensikt å generalisere i særlig grad. Andre forskere kan imidlertid lese om mine funn som et bidrag inn i dette temaet: nemlig å betrakte et utvalg 8.klassingers bruk av konkretiseringsmateriell inn mot temaet brøk.

Reliabilitet i en studie knyttes til spørsmålet om forskningen ville fått samme resultat dersom den ble gjennomført av en annen forsker som benyttet seg av de samme metodene (Thagaard, 2013). I en kvalitativ studie kan det imidlertid stilles spørsmål til om det er mulig å måle reliabiliteten på en slik måte, da det forskes på mennesker og av mennesker. Reliabiliteten i min studie kan i noen grad vurderes ut ifra om det er trekk ved undersøkelsen som har skapt de resultatene jeg har kommet frem til (Jacobsen, 2005). Valg jeg har tatt for å oppnå dette er omtalt tidligere i dette kapitlet, og handler om gjøre funnene mest mulig autentiske ved å velge ut et representativt utvalg, påvirke informantene minst mulig, prøve å bli godtatt i forskningsmiljøet og presentere funn på en objektiv og korrekt måte.

4.6 Etikk

«All vitenskapelig virksomhet krever at forskeren forholder seg til etiske prinsipper som gjelder internt i forskningsmiljøer, så vel som i relasjon til omgivelsene» (Thagaard, 2013, s. 24). Slike etiske overveielser må så langt som mulig klargjøres i forkant av en undersøkelse, samtidig som man hele tiden vurderer de valg man tar underveis, hevder Jacobsen (Jacobsen, 2005).

All forskning i Norge skal skje i henhold til regelverk som er utarbeidet av Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD) og Forskningsetikkloven. Før jeg satte i gang med forskningen, hadde jeg dermed søkt om godkjenning av prosjektet fra NSD (Se vedlegg 1). I følge Jacobsen (2005) er det dessuten et vanlig forskningsetisk krav at datainnsamlingen kun bør skje når undersøkelsesobjektet har gitt sin samtykke til dette. I min studie var dette noe av det første jeg tok stilling til, da jeg sendte ut et skjema i forkant av datainnsamlingen, «Forespørsel om deltagelse til forskning» (Se vedlegg 2), som var utarbeidet på bakgrunn av malen som var lagt ut på NSD sine sider. Her fremgikk det at både foreldre/foresatte skulle godkjenne deltagelse i undersøkelsen, men også eleven selv. Det ble i dette skrivet også påpekt at elevene ville anonymiseres, og at de når som helst kunne trekke seg fra studien.

Elevene visste i noen grad hva undersøkelsen gikk ut på, da de visste at jeg skulle undersøke deres bruk av konkretiseringsmateriell. Da det var elevenes oppgaveløsning og deres oppfatning av brøkbegrepet, som dannet grunnlaget for kategoriseringen i analysen, visste elevene imidlertid ikke hva som var den fulle hensikt med undersøkelsen. Hvis elevene hadde visst hva undersøkelsen skulle brukes til, ville de kanskje handlet på en annen måte og kanskje ville deres oppgaveløsning vært formet av at elevene forsøkte å plassere seg i en av disse kategoriene. Jeg syns dermed balansegangen mellom å presentere for elevene hva jeg skulle observere, uten å avsløre hva som var hensikten, kunne fungere formålstjenlig. Jacobsen (2005) påpeker at en som forsker må basere seg på en gyllen middelvei, der vi forsøker å gi elevene det vi kan kalle tilstrekkelig informasjon.

Når det gjelder kravet til privatliv, så måtte det vurderes hvor stor mulighet det var for at personene i undersøkelsen kunne identifiseres ut ifra data. Som nevnt ble det foretatt en anonymisering av enkeltpersoner i undersøkelsen, der jeg tok i bruk fiktive navn. I tillegg ble navn på skole og sted for undersøkelsen ikke spesifisert mer enn at det var på Sørlandet. Dette gir en tilstrekkelig lav detaljgrad på data (Jacobsen, 2005).

4.7 Dataanalyseringsstrategier og håndtering av datamaterialet

Jacobsen (2005) hevder at det første spørsmålet alle må stille seg etter å ha samlet inn data er: «Hvordan skal vi trekke ut noe fornuftig av denne informasjonsmengden?» I denne delen vil jeg etterstrebe å besvare nettopp dette spørsmålet. Jeg vil først presentere de valg som er foretatt for å redusere råmaterialet, før jeg beskriver hvordan transkribering og koding foregikk, og til slutt hvordan jeg valgte ut mine kategorier for analyse.

4.7.1 Datareduksjon

Det var en rekke valg som ble gjort underveis i analyseringen av datamaterialet, som handler om hvordan jeg har behandlet materialet mitt. Jacobsen (2005) hevder at all kvalitativ analyse starter med en samling av rådata, som i denne studien var notater, lydopptak og videopptak. Deretter måtte jeg strukturere denne mengden data, og valgte å basere mine funn på to av gruppene i datainnsamlingen. Jacobsen (2005) påpeker at delene må forsøkes å sees i lys av helheten. I min studie sammenlignet jeg de ulike gruppene ut ifra observasjonen og så på hva de hadde til felles og hva som skilte dem. På bakgrunn av dette valgte jeg som nevnt i delkapittel 4.3, å ikke inkludere gruppe 3, da de ikke kunne tilføre noe særlig utover de funnene jeg fant i gruppe 1 og 2.

4.7.2 Transkribering og koding

I transkriberingsprosessen ble det på et tidlig tidspunkt klart at jeg måtte velge ut deler av funnene, for å benytte dette i analyse og diskusjon. Transkriberingen ble dermed gjennomført ved å først se igjennom videoopptakene, for deretter å velge ut de delene som jeg mente ville belyse ulike funn på best måte. Da videoopptakene ga meg en tydelig og god gjengivelse av det som skjedde i datainnsamlingen, var det ikke nødvendig å supplere med lydopptakene.

Jacobsen (2005) fremmer at i denne første fasen av analysen er hovedoppgaven å beskrive det materialet som vi har fått gjennom intervju og observasjon. Ved å begynne med å høre igjennom alle videoopptakene bidro dette til at jeg kunne plukke ut de mest informative eksemplene som forsynte studien med de mest innholdsrike funnene. Det å foreta en slik meningsfull utvelgelse kaller Bryman (2012) en «purposive sampling», og hevder at målet i denne sammenheng er samle funn på en strategisk måte for å besvare forskningsspørsmålet:

«The goal of purposive sampling is to sample cases/participants in a strategic way, so that those sampled are relevant to the research question that are being posed» (s. 418).

4.7.3 Kategorisering

Det var gjennom elevenes ulike oppfatninger av brøkbegrepet gjennom deres oppgaveløsning, at kategoriene ble utarbeidet. Disse oppfatningene plasserte seg nemlig i de ulike aspektene av brøkbegrepet, som er presentert i delkapittel 2.6. Dette er dermed blitt lagt til grunn for overskriftene som er utformet: «Elevenes oppfatning av brøk som del av det hele» (kap 5.1), «Elevenes oppfatning av brøk som måling» (kap 5.2) og «Elevenes oppfatning av brøk som operator og brøk som divisjon» (kap 5.3). «Brøk som divisjon» og «brøk som operator» ble slått sammen til en kategori i analysen. Dette var på bakgrunn av at elevenes oppfatning ofte kunne kategoriseres i begge disse to i en og samme oppgave, og jeg så ved flere anledninger at det var vanskelig å lage et skille her. «Brøk som forholdstall» ble ikke inkludert som en kategori, da jeg ikke kunne finne oppfatninger av brøkbegrepet innen denne kategorien.

Eksemplene eller funnene som ble valgt ut skulle sørge for en bredde i hver kategori i analysen. På bakgrunn av dette ble målet å velge ut de funnene som på best mulig måte kunne få frem elevenes ulike oppfatninger av brøkbegrepet. Av dette følger det i noen sammenhenger at en av kategoriene har færre eksempler enn andre. Dette skyldtes at noen av oppfatningene var mer representerte i oppgaveløsningen, men også at noen av eksemplene presentert i analysen inneholdt flere funn, og slik skapte bredde i et og samme eksempel. Imidlertid vil det bli tydelig gjennom diskusjon og drøfting at elevenes oppfatning fordelte seg oftere i noen av kategoriene enn i andre, og som tidligere nevnt kunne jeg ikke finne oppfatninger på «brøk som forholdstall» i det hele tatt i datamaterialet. Forholdstall ble dermed heller ikke inkludert som en del av analysen, og har bare blitt presentert i korthet i delkapittel 2.6.5. Til tross for at jeg ikke fant funn i datamaterialet som kunne plasseres i denne kategorien, var det viktig for meg å opplyse om at denne kategorien også fantes.

Det ble også foretatt en rekke valg for å fremstille en ryddig og strukturert presentasjon av funnene i analysen. For eksempel ble oppgave 3 ble plassert før oppgave 2, da dette var hensiktsmessig for å skape en naturlig oppbygning av for kategorien «brøk som del av det hele».

Basert på disse beskrivelsene forstår en altså at de ulike kategoriene i analysen kunne inneholde eksempler fra forskjellige oppgavesett, med ulike konkretiseringsmateriell. Imidlertid måtte det gjøres et utvalg av alle de funnene jeg observerte i datainnsamlingen som grunnlag for analysen. Funnene som ikke ble inkludert i analysen ønsket jeg likevel å dokumentere. Jeg utarbeidet derfor en tabell som nå vil presenteres i kapittel 5.

5 En oversikt over elevenes oppfatning av brøkbegrepet

Dette kapittelet har til hensikt å presentere en oversikt over hvordan elevene oppfattet brøkbegrepet i de ulike oppgavene. I analyse og diskusjon vil de funnene som synliggjorde elevenes oppfatning av brøkbegrepet redegjøres for. Imidlertid kunne jeg ikke i denne studien betrakte alle disse funnene innenfor oppgavens begrensede omfang. Likevel har jeg kunnet fremstille denne tabellen over hvilken oppfatning elevene i gruppe 1 og 2 hadde av brøkbegrepet i de fire ulike oppgavesettene. Denne oversikten bidrar til å se mine funn i analysen i en større sammenheng.

Rosa farge representerer gruppe 1 og oransje farge representerer gruppe 2, slik at disse fargene har blitt plassert i de rutene der jeg ut ifra datamaterialet kunne plassere elevenes oppfatning. Gul, blå, rød og grønn farge viser til de ulike oppgavesettene, se vedlegg 4-7.

Oppgavesett	Del av det hele		Måling		Divisjon		Operator		Forholdstall[i]	
Oppgave 1 a										
Oppgave 1 b										
Oppgave 2 a										
Oppgave 2 b										
Oppgave 3 a										
Oppgave 3 b										
Oppgave 4 a										
Oppgave 4 b										
Oppgave 4 c										
Oppgave 1 a										
Oppgave 1 b										
Oppgave 2 a										
Oppgave 2 b										
Oppgave 2 c										
Oppgave 3 a										
Oppgave 3 b										
Oppgave 4 a										
Oppgave 4 b										
Oppgave 1										
Oppgave 2										
Oppgave 3										
Oppgave 1										
Oppgave 2										
Oppgave 3										
Oppgave 4										
Oppgave 5 a										
Oppgave 5 b										
Oppgave 6 a										
Oppgave 6 b										
Oppgave 7										
Oppgave 11										
Oppgave 12										

Tabell 2: En oversikt over elevenes oppfatning av brøkbegrepet i de ulike oppgavesettene.

5.1 Beskrivelse av tabellen

Elevenes oppgaveløsning plasserte seg inn i kategoriene «brøk som del av et hele», «brøk som måling», «brøk som operator» og «brøk som divisjon». I analysedelen er «brøk som divisjon» og «brøk som operator» blitt slått sammen til en kategori. I denne tabellen ble imidlertid disse to oppfatningene fordelt i to kolonner, da dette gir et mer detaljert og helhetlig bilde av hvordan oppfatningen av brøkbegrepet fordelte seg. I tillegg er «brøk som forholdstall» inkludert som en kolonne i tabellen, til tross for at det ikke er noen funn i denne kategorien.

Basert på datamaterialet vil analysen presentere de mest sentrale funnene knyttet til bruken av konkretiseringsmateriell for elevenes ulike oppfatninger av brøkbegrepet, men først skal jeg i korthet presentere tabellens utforming, og hvordan elevenes oppgaveløsning i de ulike oppgavesettene fordelte seg i de ulike kategoriene.

5.1.1 Gult oppgavesett: Brøkstolper

I gult oppgavesett, der brøkstolper er lagt til grunn for elevenes oppgaveløsning, var det mest påfallende funnet at elevenes oppfatning av brøkbegrepet spredte seg ut over mange av kategoriene, i større grad enn i de andre oppgavesettene. Den eneste kategorien jeg ikke kunne observere noen funn fra i dette oppgavesettet var fra oppfatningen av «brøk som forholdstall». Fordelingen kunne slik indikere at både oppgavene og konkretiseringsmateriellet ga rom for at elevene kunne arbeide innen mange ulike oppfatninger av brøkbegrepet. Da dette konkretiseringsmateriellet ga en slik spredning, var det også naturlig å benytte mange av disse funnene i analysen, spesielt når det var mangel på funn innen noen av kategoriene i de andre oppgavesettene.

5.1.2 Blått oppgavesett: Brøksirkler og pizzasirkler

I dette oppgavesettet kan det leses av tabellen at nesten samtlige av oppgaveløsningene kan plasseres i oppfatningen av brøk som del av det hele, med unntak av oppgave 4b som plasseres i både brøk som divisjon og brøk som operator. Dette er også et viktig funn, da dette kan indikere at oppgavene var utformet på en slik måte at det var naturlig å oppfatte brøk som «del av det hele». Konkretiseringsmateriellets form kan også ha bidratt til dette da det i arbeid med brøk relatert til mat ofte handler om hvor mye som er spist av total mengde mat. I blått oppgavesett kunne jeg ikke finne noen oppgaver der elevene hadde oppfatningen av brøk som måling.

5.1.3 Rødt oppgavesett: Brøkterninger, brikker/linser, centikuber og egenlagde papirbrøker

I dette oppgavesettet, der det var en mengde ulike konkretiseringsmateriell som skulle benyttes i arbeidet med «lek, spill og kreative oppgaver», kunne jeg også observere en jevn fordeling av hvilken oppfatning oppgaveløsningen fordelte seg i. Da det er så få oppgaver i dette oppgavesettet vil jeg kommentere fordeling litt mer i detalj. Elevenes oppfatning fordelte seg i alle kategoriene, med unntak av brøk som forholdstall. Den første oppgaven er litt spesiell, for her fordelte begge gruppenes oppfatning seg i de tre ulike kategoriene «brøk som del av det hele», «brøk som divisjon» og «brøk som operator». Basert på observasjonen kunne jeg se at begge gruppene slet med å løse denne første oppgaven om dropsblandingen. Som det senere vil fremkomme av analyse og diskusjon, var det en tendens at elevenes oppgaveløsning kunne plasseres under flere ulike oppfatninger av brøkbegrepet når elevene ikke klarte å løse en oppgave eller ikke visste hvordan de skulle benytte seg av konkretiseringsmateriellet.

I oppgave 2 og 3 kunne jeg derimot observere hvordan elevene raskt fant frem til hvordan de skulle benytte konkretiseringsmateriellet, og dermed kategoriserte også funnene seg i henholdsvis «brøk som del av det hele» for oppgave 2, og «brøk som måling» i oppgave 3.

5.1.4 Grønt oppgavesett: Valgfritt konkretiseringsmateriell

I dette siste oppgavesettet fremkom det en mengde spennende funn, da konkretiseringsmateriellene her var valgfritt, slik at elevene selv kunne velge blant konkretiseringsmateriellene de hadde benyttet i de tidligere oppgavesettene. Tabellen gir her det samme inntrykket som jeg fikk gjennom observasjonen. Elevene visste ikke hvilket konkretiseringsmateriell de skulle benytte seg av, og slik havnet deres oppgaveløsning i flere ulike kategorier, som noen ganger kunne fremstå litt tilfeldig. I oppgave 1 og 2 ble dette veldig tydelig der elevenes løsninger kunne plasseres i fire ulike kategorier. Derfor er ikke oppgavene fra grønt oppgavesett inkludert i særlig grad i analysen, mens dette er tatt i betraktning i diskusjonen, da det er et interessant funn at elevene ikke klarte å avdekke hvilket konkretiseringsmateriell de skulle benytte. Når dette er sagt må det nevnes at dette siste oppgavesettet hadde en stor mengde oppgaver, men der hver oppgave var kortere enn i tidligere oppgavesett. Det var likevel noen oppgaver elevene ikke rakk å gjøre, slik at oppgave 8, 9 og 10 og 13 ble ekskludert fra tabellen. Jeg ba nemlig elevene hoppe til oppgave 11 når det var lite tid igjen.

5.1.5 Generell slutninger på bakgrunn av tabellens utforming

Gjennomgående viser tabellen et mønster der de to ulike gruppene har en forholdsvis lik oppfatning av de ulike oppgavene. Det er bare noen få ganger at de oppfatter en oppgave på ulik måte, og gjennom transkriberingen kunne det i disse oppgavene antas at en av gruppene slet med disse oppgavene. I sin helhet kan derfor antagelsen trekkes om at oppgavenes utforming i stor grad påvirker elevenes oppfatning av brøkbegrepet. Dette vil jeg komme videre inn på i didaktiske implikasjoner i kapittel 7.5.

Med dette som bakteppe, følger en analyse av funn, der disse velges ut med hensyn på ulike oppgaver hentet fra de ulike oppgavesettene.

6 Analyse

Analysens kategorier er «Elevenes oppfatning av brøk som del av det hele», «Elevenes oppfatning av brøk som måling» og «Elevenes oppfatning av brøk som divisjon og som operator». Utformingen av disse kategoriene er beskrevet i metodens kapittel om kategorisering (4.7.3), der det er lagt særlig vekt på brøkbegrepets ulike aspekter som grunnlag for kategoriseringen. «Brøk som operator» og «Brøk som divisjon» er som nevnt slått sammen til en kategori, da det ikke var naturlig å skille disse funnene fra hverandre i analysen, mens «Brøk som forholdstall» ikke ble inkludert som en kategori i analysen, da det ikke ble observert funn vedrørende dette.

Innledningsvis må det også nevnes at elevene i gruppene fordelte seg i ulike kategorier i noen av oppgavene, og dermed forsto brøkbegrepet ulikt. Elevene synes også å skifte fra ulike måter å forstå oppgavene på, og dermed ble gjerne flere kategorier gjeldende for den samme oppgaven, eller del-oppgaven, som en også kan se eksempler på i tabell 2. I det videre vil imidlertid oppgavene plasseres under den kategorien som preger løsningen av oppgaven mest, men det vil kommenteres hvis flere oppfatninger inngår i en og samme oppgave.

Gjennom denne studien har jeg samlet inn en mengde datamateriale, gjennom observasjon av fire undervisningstimer, bestående av to dobbelttimer, i tillegg til fire 10 minutters intervjuer i slutten av hver økt. I tabell 2 i forrige kapittel fremstilles det en oversikt over alle oppfatningene elevene hadde i arbeidet med de ulike oppgavesettene. Jeg vil presisere at analysen ikke tar sikte på å presentere denne tabellen i sin helhet, men der jeg vil etterstrebe å redegjøre for de funn som kunne bidra til en innsikt i hvordan bruken av konkretiseringsmateriellet bidro til elevenes oppfatning av brøkbegrepet.

6.1 Elevenes oppfatning av «brøk som del av det hele»

I denne analysekategorien vil det presenteres funn fra kategorien «brøk som del av det hele». Det kunne observeres flere eksempler på dette i elevenes oppgaveløsning gjennom alle de ulike oppgavesettene, og jeg vil i det videre presentere de mest sentrale funnene.

Eksempel nr.1

Oppgave 3 i gult oppgavesett, Vedlegg 4

Oppgave 3)

Per, Pål og Lise går til skolen. Per har $\frac{1}{3}$ av veien til Lise, mens Pål har lenger vei enn Lise og har $\frac{5}{3}$ av veien hennes.

a) Hvis en hel brøkstolpe representerer Lises vei til skolen, hvilke brøkstolper trenger du da til:
   i. Per sin vei til skolen?
   ii. Pål sin vei til skolen?
b) Lise bruker 15 min. Hvor mye tid tilsvarer da hver av brøkstolpene til Per og Pål? (Alle går like fort).

«Brøk som del av det hele» handler om hvordan en brøk er en del av en enhet, der denne enheten er den totale mengden av det som skal beskrives. Et fenomen som jeg gjentatte ganger observerte var at elevene strevde med å bestemme hva som var enheten de skulle ta utgangspunkt i, for å finne en delmengden. Da elevene i gruppe 1 skulle finne lengden på Per og Pål sine veier i forhold til Lise sin vei, slet de med å avgjøre hva Lise sin vei representerte med brøkstolper:

1. Bjarte: Lise bruker femten minutter. Hvor mye tid tilsvarer da hver av brøkstolene til Per og Pål.
2. Mette: Men hvor mye er femten minutter?
3. Bjarte: Åja, det er en fjerdedels tid.

Bjarte omtaler et kvarter som en fjerdedel av en tid, og det kan tolkes som at han i denne sammenheng mener en fjerdedel av en time. Bjarte, som hevder at 15 minutter er en fjerdedel av en hel time, benytter likevel den hele røde stolpen til å representere 15 minutter like etterpå. Dette kan tyde på at han samtidig mener at 15 minutter er enheten som er utgangspunktet for å finne de resterende størrelsene. Dette gjør jentene forvirret:

4. Bjarte: Hvis dette her er Lises vei til skolen … (Holder opp den rød stolpen)
5. Mette: Nei, det kan det ikke være.
6. Bjarte: Joda, det kan vi gjøre. For hvis det her er hele tida, så kan det her være Pers vei. (legger en tredjedelskloss ved siden av Lises hele kloss).
7. Mette: Så den røde klossen er liksom en time den da?
8. Bjarte: Nei, det er et kvarter. Per bruker et tredjedels kvarter. Og så er det her fem tredjedels kvarter. Det er Pål sin vei.
9. Mette: Hæ …
10. Emilie: Så det der er et kvarter? (peker på en tredjedelsklossen).
11. Bjarte: Nei, den røde klossen er et kvarter.

Bjartes kommentar i linje nr. 3 om at femten minutter kunne være en fjerdedel av en time, stemmer ikke overens med at han litt senere påpeker at femten minutter også kunne være enheten, altså den hele røde stolpen. Bjarte snakker om to ulike enheter her. Først beskriver han at 15 minutter er en fjerdedel av en hel time, der en time ville vært den hele brøkstolpen. Deretter hevder han at 15 minutter representerer den hele stolpen, og er enheten for de delmengdene de skulle finne i oppgaven, som vi ser i linje 6, 8 og 11. Det kan virke som han tilsynelatende ikke er klar over denne feilen selv, og mye kan tyde på at Mette og Emilie tror at den røde stolpen dermed representerer en hel time, i linje 5, 7 og 9. I linje 10 stiller Emilie spørsmål til hva kvarteret representerer i brøk, og selv om Bjarte påpeker at den røde klossen er et kvarter, virker det ikke som jentene forstår hva han mener:

12. Emilie: Så denne $\frac{1}{3}$ klossen er et kvarter, og to sånne klosser ville blitt en halvtime?
13. Mette: Åjaa. Sånn er det.
14. Bjarte: Nei nei nei! Den her er et kvarter (holder opp den røde klossen). To sånne ville vært en halvtime.
15. Mette: Hvordan kan det der være en halvtime?
16. Bjarte: For hvis denne røde er et kvarter, så blir to røde en halvtime.
17. Mette: Åja, men da skjønner jeg ikke hva $\frac{1}{3}$ klossen er.

Jentene synes å ikke ha forstått hva som er enheten i brøk, og bekrefter dette i linje nr. 12, 13, 15 og 17, da de hevder at en tredjedel er et kvarter, og at to tredjedeler vil tilsvare en halvtime. Dette funnet står i forhold til Lamons (2012, s. 145) påstand om at: «[I]t is important to identify the unit and to make sure that each fraction is interpreted in terms of that unit. You can not compare fractions based on different units.» Da jentene ikke forstår hva som er den egentlige enheten kan de heller ikke løse oppgaven der de skal finne frem til hvor stor del av denne hele enheten som er tilbakelagt. Ut ifra transkriberingen kan det likevel antas at jentene oppdaget sin begrensning i forståelse på bakgrunn av bruken av konkretiseringsmateriellet da de stoppet opp og stilte spørsmål til hvordan de kunne representere 15 minutter. Dette kan sees i parallell til det Lamon (2012) hevder om at konkrete objekter ofte nødvendiggjør en forståelse av hva som er enheten i oppgaven. Selv om jentene er forvirret, har de ved hjelp av konkretiseringsmateriellet oppdaget noe de ikke forstår og som de ønsker å komme til bunns i ved å stille spørsmål. Kamii et al. (2001) peker på at dette burde være det sentrale i bruken av konkretiseringsmateriell, nemlig kvaliteten på elevenes tenkning fostret av bruken av materiellet.

Eksempel nr.2

Oppgave 2 i gult oppgavesett, Vedlegg 4
Oppgave 2)
Trine drikker en kartong med $\frac{1}{4}$ liter melk hver dag på skolen. Gi svaret med flest mulig hele brøkstolper i disse oppgavene.
a) Hvor mye melk drikker hun i løpet av en skoleuke?
b) Hvor mye melk drikker hun i løpet av tre skoleuker?

Brøkstolper er klosser som lett kan settes sammen til staver og brekkes opp igjen, og i denne oppgaven brukte elevene i gruppe 1 brøkstolpene til å sette sammen flere mindre deler, for å finne det som tilsvarte en hel stolpe. Da svaret skulle oppgis i flest mulig hele stolper, benyttet elevene seg av flere deler til å finne hele stolper. Jeg går nå over til å presentere utdrag fra oppgaveløsningen i oppgave b, der elevene skulle prøve å komme frem til hvor mye melk Trine drakk i løpet av tre skoleuker. Elevene virket usikre på om de skulle representere svaret som en uekte brøk, der telleren var større enn nevnere:

18. Tiril: Er det greit å gi svaret som en uekte brøk, for det blir jo en uekte brøk.
19. Oliver: Det vil jo ikke bli nok gule klosser da.

I linje 18 vil Tiril gi svaret som en uekte brøk, slik som de hadde gjort i oppgave a. I oppgave b møter elevene imidlertid på et problem, da Oliver i linje 19 påpeker at de ikke har nok klosser til å representere dette svaret. Jeg kunne observere på videoopptaket at elevene hadde stablet sammen alle $\frac{1}{4}$ klossene de hadde, for så å forsøke å oppgi svaret $\frac{15}{4}$. Da de til sammen bare hadde fått utdelt 12 stykker av $\frac{1}{4}$ klossene, var det som nevnt ikke nok klosser. Dette åpner for nye spørsmål knyttet til elevenes brøkforståelse. Elevene ønsker heller å telle opp hvor mange ganger Trine drikker $\frac{1}{4}$ liter melk, ved hjelp av disse små delene, enn å betrakte hvordan denne brøken kan representeres ved hjelp av hele klosser. Dette kan indikere elevenes ønske og forestilling om at de skal finne en absolutt verdi, se delkapittel 2.5. Lamon (2005, s. 32) fremmer at elevenes møte med den relative tenkingen innenfor matematikk kan være utfordrende fordi de er vant til å tenke absolutt: «the children´s responses (…) demonstrates how difficult it is for children to move away from the additativ (absolute red.) thinking with which they are so familiar and to begin to think relatively.» I det videre brøt jeg inn med en veiledende kommentar i elevenes oppgaveløsning:

20. Jeg: Det kan kanskje være lurt å se hvor mange hele har dere, så slipper dere å ha så veldig mange klosser.
21. Oliver: Okei, okei okei okei.. Ja, det gir jo mye mer mening.

Elevene forstår ikke helt hvordan de skal representere svaret før de får et hint om å undersøke hvor mange hele stolper det er til sammen. Da elevene forsto at de kunne bruke den hele brøkstolpen til å oppgi fire av $\frac{1}{4}$ klossene, ble det i linje 21 klart for Oliver at de kunne representere klossene ved hjelp av det hele.

I den etterfølgende samtalen tok elevenes resonnement en annen retning, der det det kunne observeres flere funn angående elevenes oppfatning av brøk som del av et hele.

22. Oline: Ja, nå ser jeg hvor mange klosser som er lik en hel kloss. Nemlig fire sånne her (Peker på $\frac{1}{4}$ klossen). Og det er det hun drikker 1 dag, 2 dag, 3 dag og 4 dag.
23. Oliver: Vi skal ha $\frac{15}{4}$. Da er jo tre hele stolper det samme som $\frac{12}{4}$.
24. Tiril: (legger til en hel stolpe til)
25. Oliver: Nei, da har vi $\frac{16}{4}$ og det kan vi ikke ha.
26. Oline: Ja, fordi at vi mangler en?

Først fremmer Oline at fire stykker av $\frac{1}{4}$ klossen er det samme som en hel stolpe, og hun teller opp hvor mange dager med $\frac{1}{4}$ liter melk som får plass på denne ene stolpen. Oliver påpeker at $\frac{12}{4}$ er tre hele stolper i linje nr.16, men at $\frac{16}{4}$ som tilsvarer fire stolper, ville blitt feil. Oline uttaler i denne sammenheng at det da «vil mangle en», siden det helt korrekt mangler $\frac{1}{4}$ - kloss for å ha fire hele stolper.

27. Oliver: Okei, vi trenger $\frac{15}{4}$. Så da trenger vi 3 hele, men vi kan ikke ta en hel til, for da blir det $\frac{16}{4}$. Så for å få 15, så må vi ta de derre $\frac{1}{4}$ klossene. Så da har vi en til, da får vi 13, og så 14, og så 15.
28. Jeg: Bra, da kan dere begynne på neste oppgave.

I linje nr. 27 kunne en se hvordan Oliver begrunnet hvor mange hele og hvor mange deler som trengtes for å representere svaret. På bakgrunn av disse funnene kan mye tyde på at elevene forsto at de kunne representere en bestemt brøk på flere måter, og i denne sammenheng hvordan $\frac{15}{4}$ kunne skrives som tre hele stolper i tillegg til tre $\frac{1}{4}$ klosser. Når elevene mestrer denne evnen til å se likhet mellom ulike brøker er dette i parallell til det Lamon (2012) beskriver om forståelsen av ekvivalente brøker: «Many different fractional names designate the same amount. Two different fractions that represent the same amount are called equivalent» (s. 145). For det andre klarer elevene å uttrykke uekte brøk som blandede tall, ved å tenke seg frem til det ved hjelp av konkretiseringsmateriellet. Noe som Van de Walle (2004) beskriver som svært fordelaktig fremfor å følge en regel på denne overgangen, se kapittel 2.4. Han hevder at elevene da utvikler samme regel, men med deres egne ord og med en fullstendig forståelse.

Eksempel nr.3

Oppgave 2 i blått oppgavesett, Vedlegg 5

Oppgave 2)

Nina og Stine spiser pizza på Peppes. Pizzaen blir servert i 6 like store deler. Nina spiser 2 deler, mens Stine spiser 3 deler. (Hvis alle svar med konkretiseringsmateriellet)

a) Hvor stor del av hele pizzaen spiser Nina?
b) Hvor stor del av hele pizzaen spiser Stine?
c) Hvor stor del av pizzaen er igjen?

I denne oppgaven i blått oppgavesett skulle elevene i gruppe 2 benytte seg av pizzabrøker og brøksirkler for å løse oppgaven, kunne det virke som Mette ikke nødvendigvis tolket oppgaveteksten til å omhandle brøk. Ut ifra spørsmålene hennes kunne det stilles spørsmål til hennes oppfatning av «brøk som del av det hele»:

29. Emilie: Jeg aner ikke hva vi gjør?
30. Bjarte: Vi er her. Hvor stor del av pizzaen spiser Nina. Hun spiser $\frac{2}{6}$.
31. Mette: Hæ, men det står jo to deler.
32. Bjarte: Ja, to deler av seks deler.
33. Mette: Åja, for de har seks totalt?
34. Bjarte: Ja.

Mette gir uttrykk for at hun ikke forstår hvordan Bjarte kan si at Nina spiser $\frac{2}{6}$, da hun påpeker at det står at Nina spiser to deler. Bjarte må i linje nr. 32 understreke oppgavetekstens betydning i denne sammenheng, og påpeker at Nina spiser to deler av 6 deler, slik at dette tilsvarer brøken $\frac{2}{6}$. Dette er også i sammenheng med det Lamon (2005) fremmer om elevenes møte med den relative tenkingen innenfor matematikk, se kapittel 2.5, der det kan være utfordrende å tenke relativt da elevene er vant til å tenke absolutt. Mettes uttalelse i linje nr. 31 kan indikere en slik holdning der hun poengterer at Nina har spist to biter pizza. Da Bjarte påpeker for henne at det Nina spiser tilsvarer to deler av seks deler, kan kroppsspråket til Mette vitne om at hun fortsatt er forvirret i uttalelsen i linje 33, da hun spør: «Åja, for de har seks totalt?».

35. Bjarte: Og hvis vi forenkler $\frac{2}{6}$ får vi $\frac{1}{3}$ fordi vi deler det på 2.
36. Mette: Deler på to? Hva mener du?
37. Bjarte: Ja. 2:2 er 1, og 6:2 er 3. Da blir det $\frac{1}{3}$. Det spiser Nina.

I elevenes videre diskusjon kan det observeres at Mette blir ytterligere forvirret da Bjarte skal forkorte den brøken hun allerede har problemer med å forstå. Mette sier ved flere anledninger at hun ikke forstår brøk og at hun ikke er noe god i brøk. Bjarte utfordrer henne på at hun skal forsøke å forklare oppgaven. Selv om hun prøver, stopper det tidlig opp, og hun klarer ikke forklare det relative forholdet mellom pizzastykkene og den hele pizzaen. Basert på hennes misnøye med temaet brøk, sammen med hennes forvirring rundt den relative tenkningen i møte med brøkbegrepet, kan det stilles spørsmål til om Mette har en mer absolutt tenkning enn en relativ tenkning (se delkapittel 2.5). Både Mette og Emilie ber Bjarte forklare oppgaven en gang til. Han går da bort i fra forkorting og divisjon med teller og nevner, og gir en innholdsrik forklaring der han utelukkende bruker konkretiseringsmateriellet til å forklare hvordan pizzabitene er en del av det hele. Dette gjør han for å hjelpe jentene til å materialisere det matematiske konseptet.

38. Bjarte: Okei, det er seks stykker i hele pizzaen. Seks stykker, seks sjettedeler. Du har seks …
39. Mette: Og seks biter det er en hel pizza.
40. Bjarte: Ja. Så spiser Nina to sånne, og da har hun spist …
41. Emilie: Da er det $\frac{1}{3}$.
42. Bjarte: Ja, $\frac{1}{3}$. Du skjønner det! Og så spiser Stine $\frac{3}{6}$.
43. Emilie: Altså $\frac{1}{2}$.

I Linje nr. 38 holder Bjarte opp et pizzastykke med størrelsen $\frac{1}{6}$, for å vise jentene hvor store hver av pizzastykkene er. Mette bekrefter dette i linje 39. I linje nr.40 ønsker Bjarte å få frem hvor mye Nina har spist til sammen, men røper ikke svaret i brøk, bare prøver å vise det ved å legge $\frac{1}{6}$ - pizzastykket oppå $\frac{1}{3}$, slik at jentene skal se at det ville vært plass til to stykker på størrelsen $\frac{1}{6}$. Da forstår Emilie hvor mye det må være i linje nr. 41, og det kan virke som en materialiseringen hjelper henne til å oppfatte brøken som del av det hele i pizzaen, da hun igjen forstår hvor mye Stine må ha spist i linje nr. 43. Bjarte trekker det derfor litt lenger, der han vil prøve å forklare jentene hvor mye pizza Nina og Stine har spist til sammen (se bilde 11).

Bilde 11: Mengden pizza spist totalt av Nina, som spiste $\frac{1}{3}$, og Stine, som spiste $\frac{1}{2}$.

44. Bjarte: Ja, $\frac{1}{2}$. Og til sammen spiser de dette (Legger sammen pizzastykkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$,. Og da er det bare denne igjen, ikke sant. Da er det bare et pizzastykke igjen med størrelsen $\frac{1}{6}$. For da er det liksom spist ett, to, tre, fire og fem pizzabiter.

Mens Bjarte teller opp disse pizzabitene flytter han henholdsvis det ene pizzastykket, med størrelsen $\frac{1}{6}$, rundt på materialiseringen av den totale mengden pizza spist av Nina og Stine. Se bilde 12. Til slutt i linje nr. 45 konkluderer han med at hvis 6 biter er spist, så kan det bare gjenstå et pizzastykke, som passer perfekt inn i det siste hulrommet.

45. Og hvis det er $\frac{5}{6}$ som er spist, så må det være $\frac{1}{6}$ igjen. Og det passer perfekt inn der.

Bilde 12: Bjarte flytter pizzastykket $\frac{1}{6}$ rundt 5 ganger.

I en absolutt tenkning ville denne oppgaven handlet om at Nina og Stine hadde spist 5 biter pizza totalt. Utfordringen blir åpenbar da elevene skal forholde seg til en relativ tenking i denne oppgaven. Bjarte ga pizzastykkene en relativ verdi da han forklarte hvor mye Nina og Stine hadde spist hver av den fulle mengde. Imidlertid kunne kroppsspråk og uttalelser i siste del av denne transkriberingen tyde på at Mette og Emilie kunne forstå disse relative størrelsene, da Bjarte forklarte ved hjelp av konkretiseringsmateriellet, se linje nr. 33, 35 og 37. Det kan ikke gjøres ytterligere påstander om deres oppfatning av brøk som del av det hele, men det kan trekkes antagelser om at konkretiseringsmateriellet bidro til å både visualisere og materialisere den matematiske konteksten som lå bak.

Denne bruken av brøk som del av det hele gikk igjen i store deler av blått oppgavesett, og det var stort sett denne oppfatningen av brøk som ble benyttet her. Dette kan i stor grad skyldes oppgavenes form, da de tok utgangspunkt i mengder som var spist av den fulle mengde.

6.2 Elevenes oppfatning av «brøk som måling»

Ved flere anledninger kunne også elevenes oppfatning av brøk kategoriseres som måling. Angående «brøk som måling» prøvde elevene ofte å finne en del som skulle være utgangspunktet for mengden de skulle beskrive. Før jeg går i gang med analysepresentasjonen i dette kapittelet er det viktig å presisere, som beskrevet i delkapittel 2.6.2, at betydningen i denne sammenheng skiller seg fra oppfatningen av «brøk som del av det hele» fordi det handler om å bestemme mengden som blir beskrevet gjennom brøken, heller enn å finne antall deler av en hel (Van de Walle, 2004).

Eksempel nr. 4

Oppgave 1 i blått oppgavesett, Vedlegg 5

Oppgave 1)
Bruk brøkstolpene til å rangere disse brøkene fra størst til minst.

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$

b) $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{8}$

Spesielt i oppgave 1 i gult oppgavesett kunne jeg observere indikasjoner på elevenes oppfatning av «brøk som måling». I denne oppgaven skulle elevene rangere brøkene fra størst til minst.

Først vil jeg kommentere et funn som ikke kommer frem gjennom den muntlige talen, nemlig hvordan elevene fant størrelsen på brøkene, heller enn å vurdere hvor stor del de utgjorde av det hele. Dette ble synliggjort i videoopptaket da elevene brukte den minste delen av brøkstolpen, for å finne mengden som skulle beskrives. I det videre skal jeg gå inn i utdrag fra transkriberingen for å kommentere ulike funn som kan kategoriseres under en oppfatning av brøk som måling.

Da elevene i gruppe 2 skulle rangere brøkene fra størst til minst, diskuterte de hvordan de kunne bruke brøkstolpene til å avgjøre størrelsesforholdet mellom brøkene:

46. Mette: Så det skal være størst, og så skal det bare bli mindre og mindre og mindre?
47. Bjarte: Ja, fra størst til minst. Hvordan finner man $\frac{3}{4}$? [Stillhet] Åja, her. Det her er $\frac{3}{4}$.
48. Emilie: Skal vi ikke skrive? Skal vi bare bruke klossene?
49. Bjarte: Hvis vi skal rangere de fra størst til minst så er det jo bare å se på størrelsen på klossene. Vi kan sette sammen $\frac{1}{4}$ tre ganger, og så legge til 1/8, da får vi 7/8 til sammen.

Da dette var første oppgave i første oppgavesett, var det også her elevene ble introdusert for bruken av konkretiseringsmateriellet for å løse oppgavene. Som en følge av dette virker både Mette og Emilie forvirret på hvordan de skal gå frem for å løse oppgaven. I linje nr. 46 og 48 blir det klart at de ikke helt forstår hvordan konkretiseringsmateriellet skal hjelpe dem til å løse oppgavene. Som nevnt i delkapittel 4.2 var det viktig for meg at elevene selv skulle utforske bruken av konkretiseringsmateriellet, med forbehold om at de kunne stille spørsmål underveis for å ikke stagnere eller stoppe opp. Van de Walle et al. (2007) hevder at den mest vanlige og samtidig feilaktige bruken av konkretiseringsmateriell i matematikkundervisning kjennetegnes ved at lærere viser elevene nøyaktig hvordan materiellet skal brukes. Bjarte er i denne sammenheng gruppens pådriver, og kommer med et forslag til hvordan de kan benytte seg av brøkstolpene til å løse oppgavene i linje nr. 49. Han foreslår at de ved å sette sammen de stolpene som vil representere hver brøk, bare kan rangere brøkene etter størrelsen på de forskjellige. Med dette kan en anta at Bjarte forstår mengden til brøkene ved å plassere dem på en «tallinje» i forhold til hverandre, som igjen kunne tyde på hans oppfatning av brøk måling (Lamon, 2012). Denne bruken av å plassere brøkene i forhold til hverandre indikerer dessuten Bjartes forståelse av brøk som rasjonale tall (Lamon, 2012). Da jeg litt senere kom bort til denne gruppa, viste han meg løsningen på oppgaven.

50. Jeg: Okei, hvilken brøk er størst?
51. Bjarte: 7/8 deler. Og nummer to er $\frac{3}{4}$ deler.
52. Jeg: Bra, og der har dere $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ og til slutt $\frac{1}{8}$.

I dette utdraget kommer det ikke så tydelig frem hvordan elevene kom frem til hver enkelt kloss, men dette kommer tydelig frem gjennom videoopptaket. Her viser elevene hverandre hvordan de brukte konkretiseringsmateriellet aktivt for å avgjøre hvilke brøker som var større og mindre i forhold til hverandre. De avklarte også ovenfor hverandre at de kunne rangere klossene fra størst til minst bare ved å se på størrelsen på klossene. Det var dermed ikke alt som kom frem gjennom muntlig tale, men når jeg observerte filmopptaket i ettertid kunne jeg se hvordan de for eksempel sammenlignet $\frac{2}{5}$ med $\frac{4}{10}$, og argumenterte for at det ikke spilte noen rolle hvilken av disse klossene de benyttet.

53. Mette: Men hvor er $\frac{2}{5}$?
54. Bjarte: Her. (Peker på $\frac{4}{10}$ – klossen.) Det er mye gøyere å ha den.
55. Emilie: Åh, du gjør det så avansert. (Emilie bytter tilbake til klossen med $\frac{2}{5}$)

Elevene bruker her ulike klosser for å representere samme brøk, tidligere omtalt som ekvivalente brøker (Lamon, 2012). Mette kunne ikke finne brøken $\frac{2}{5}$ i linje nr.53, men oppdaget snart at Bjarte hadde representert denne på en annen måte. I utgangspunktet ville en kanskje tenke at ved å forkorte mest mulig vil en komme frem til det beste svaret, men i denne sammenheng viste Bjarte, i linje 54, at han kunne representere brøken på andre måter.

Konkretiseringsmateriellet bidro i denne oppgaven til at elevene først kunne sette sammen deler av klossene for å finne brøken gitt i oppgaven. Dette gjorde de ved å ta utgangspunkt i den minste delen av en kloss. Videre benyttet de konkretiseringsmateriellet til å avgjøre størrelsesforholdet mellom brøkene. Da elevene rangerer tallene $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{3}{8}$ med klosser som viste nøyaktig disse tallene, viste de slik en rasjonal forståelse for brøk. Det blir deretter enda større grunn til å anta at elevene forstår mengden som ligger i hver enkelt brøk da de benytter seg av flere ulike brøker for å representere den gitte mengden. Dette beskriver Lamon (2012) som at elevene utvikler en «rational number sense», altså en følelse for de rasjonale tallene (egen oversettelse), der disse tallene er punkter på en tallinje. Dette kan være en indikasjon på at konkretiseringsmateriellet fungerte slik det var ment, da elevene så på materiellet som en hjelp til å visualisere matematikken, heller enn objekter for å komme frem til et svar (Van de Walle et al., 2007).

Eksempel nr. 5

Oppgave 3 i rødt oppgavesett, Vedlegg 6

Oppgave 3)
Terning-kamp
Dere får utdelt tre terninger hver, og et sett med brøkstolper.

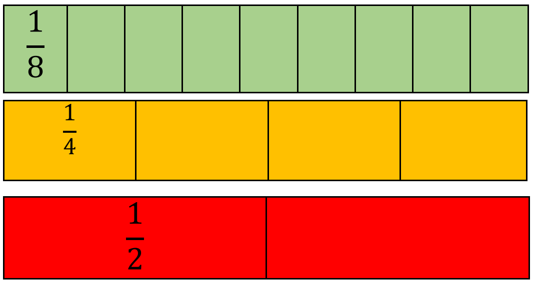
1. Alle tre spillerne kaster hver sin terning samtidig.
2. Hver enkelt spiller skal kaste sine terninger til sammen 12 ganger. Hver farge må kastes fire ganger hver.
3. Gruppen finner sammen ut hvilken brøk som er den høyeste, ved hjelp av brøkstolpene. Den spilleren som har fått den høyeste verdien på terningen, vinner omgangen, og skriver et poeng på sitt navn.
4. Den spilleren som har høyest poengsum etter 12 runder vinner.

Det var flere oppgaver som kategoriserte seg under oppfatningen av «brøk som måling», i denne sammenheng er oppgaven hentet ut fra rødt oppgavesett. I videoopptaket var det imidlertid vanskelig å transkribere elevenes samtale, da de brukte mye kroppsspråk, som for eksempel peking og nikk. I dette utdraget fra transkriberingen vil dermed elevenes oppgaveløsning beskrives.

I denne oppgaven skulle elevene benytte seg av såkalte 'brøkterninger'(Se bilde nr.13) i den hensikt å spille en terningkamp. Dette for å både kunne more seg med brøk, men også lære noe av det. Oppgaven gikk ut på at elevene skulle kaste hver sin terning for å deretter avgjøre hvilken terning som ga høyest verdi i brøk ved hjelp av brøkpapir, som dermed utgjorde oppgavens konkretiseringsmateriell. Elevene tok da tre terninger hver, med ulik farge, før de satte i gang å spille.

Bilde 13: Brøkterninger

Mette begynte den første runden, og kastet terningen som landet på brøken $\frac{3}{8}$. Bjarte fortsatte, og fikk brøken $\frac{3}{4}$. Deretter kastet Emilie sin terning, og fikk brøken $\frac{1}{2}$. Når de var ferdig med å kaste lot jentene seg raskt avlede av hverandre til å snakke om andre ting. Det kan stilles spørsmål til om Mette og Emilie vet hvordan de skal avgjøre hvilken brøk som er størst i denne oppgaven, da brøkpapiret som konkretiseringsmateriell ikke hadde blitt benyttet tidligere. Dette materiellet er imidlertid enkelt i sin form, og har mange likhetstrekk med brøkstolpene, som elevne hadde benyttet tidligere i gult oppgavesett. Likevel er det først da Bjarte viser dem hvordan de skal nyttiggjøre seg dette materiellet, at de ser hvordan det fungerer, og dermed forstår hvem som vant første omgang. Ved hjelp av dette brøkpapiret viste Bjarte jentene hvordan de ulike brøkpapirene kunne illustrere de ulike terningene. På bildet nr.14 fremkommer det hvilke tre brøkpapir elevene sammenlignet i første runde av spillet.



Bilde 14: Brøkpapir som elevene brukte i første runde for å sammenligne brøker

Bjarte fant selv ut av hvordan han ønsket å benytte brøkpapiret for å illustrere størrelsen på brøkene for jentene. Det kan dermed antas at han ser på materiellet som en hjelp til å visualisere matematikken, heller enn som et objekt for å komme frem til et svar. Van de Walle et al. (2007) påpeker hvor viktig det er at elevene ikke blir vist nøyaktig hvordan materiellet skal brukes, men benytter det slik at forståelse ligger til grunn for deres handlinger. Da Bjarte forklarte jentene hvordan brøkpapiret kunne benyttes til å løse oppgavene, kunne begge jentene ta i bruk brøkpapiret etterpå. Samtalen mellom elevene videre i oppgaven indikerte imidlertid at jentene forsto hvordan brøkpapiret fungerte som en visualisering.

Bjarte brukte papiret til å illustrere mengdene, ved å holde over den delen av brøkpapiret som ikke var en del av brøken på terningen. I brøken $\frac{3}{4}$, som var brøken han selv fikk, holdt han over $\frac{1}{4}$, for å vise hvor stor hans del var. Det samme gjorde han med de andre to brøkene som jentene hadde fått på sine terninger, slik at de kunne sammenligne hvilken brøk som var størst. De kom frem til at Bjarte sin brøk var den største. Det fremkommer slik at elevenes fokus ikke er å avgjøre hvor stor del telleren utgjør av det hele i nevneren, men derimot at størrelsen på brøkene skal bestemmes. Gjennom denne oppfatningen av brøk vil man ut ifra brøken finne en del som blir utgangspunkt for mengden som skal beskrives, hevder Van de Walle (2004). I oppgave 1 i gult oppgavesett fant elevene $\frac{1}{12}$, for å ta utgangspunkt i denne for å finne mengden $\frac{7}{12}$ som skulle beskrives. I denne oppgaven tar elevene også utgangspunkt i en del som blir utgangspunkt for mengden de skal beskrive. Her tar de imidlertid utgangspunkt i en hel stolpe, for deretter å holde over den delen av brøkpapiret som 'var for mye' i forhold til brøken de skulle finne.

Det er viktig å nevne at jo lenger elevene arbeidet med disse terningene, jo mindre benyttet de seg av brøkpapiret. Etter hvert så de umiddelbart hvilken brøk som var størst, og dermed hvem som vant omgangen. Jentene etterspurte oftere enn Bjarte at de skulle sammenligne brøkene ved hjelp av brøkpapiret. Bjarte avgjorde imidlertid raskere hvilken brøk som var størst ved å si at hans brøk nesten var en hel, mens Mette sin brøk var mye mindre, da den landet på $\frac{3}{8}$ og dermed var under en halv. Dette indikerer at elevene benyttet knagger eller «benchmarks» for å avgjøre hvor store brøkene var, som blir omtalt i delkapittel 2.6.2 om måling (Van de Walle, 2004).

Oppgaven i sin helhet handler om hvordan elevene kan plassere brøkene og da også de rasjonale tallene på en «tallinje», da de for hvert nye terningkast skulle avgjøre størrelsen på brøkene i forhold til hverandre, slik at de kunne avgjøre hvilken terning som ga den største verdien. Dette er i tråd med det Lamon (2012) hevder om at brøk som måling utvikler en «rational number sense» hos elevene.

6.3 Elevenes oppfatning av «brøk som divisjon og som operator»

Som nevnt i delkapittelet om dataanalyse, i 4.7.3, ble oppfatningen av «brøk som operator» og «brøk som divisjon» slått sammen i analysedelen. Dette skyldtes at funnene fra disse ulike oppfatningene ofte inngikk i samme oppgave, og de var dermed vanskelig å skille. I begynnelsen av hvert eksempel vil det spesifiseres hvilken av disse to oppfatningene som var mest fremtredende.

Eksempel nr.6

Oppgave 4 i gult oppgavesett, Vedlegg 4

Oppgave 4)
Bruk brøkstavene og se om det er noen likheter når du løser de to oppgavene under.

a) Du får en tredjedel av to og en halv liter brus. Hvor mye brus får du?
b) To og en halv liter brus skal deles på tre personer. Hvor mye får hver person?
c) I brøk er multiplikasjon og divisjon nært knyttet sammen. Snakk i gruppa om hva som er forskjellen i disse to oppgavene og hvordan de også ligner.

Først og fremst er brøk som divisjon fremtredende i dette utdraget av transkriberingen, der elevene oppfatter brøken som et divisjonsstykke. Da oppgaven spesifikt handler om divisjon og multiplikasjon av brøk, vil dette eksempelet bli presentert først, da dette er en mer overordnet oppfatning av brøk som divisjon. Det er bare utdraget fra oppgave b som er inkludert i dette eksempelet.

56. Oliver: Okei, vi har to og en halv liter brus, da må vi jo måle opp det først da. Okei, da legger vi opp det her. 1 hel og tre halve i tillegg (legger opp tre halve, og en hel kloss).
57. Oline: Skal vi finne $\frac{1}{3}$ av det?
58. Oliver: Ja. Vi gjør det til en uekte brøk da?

Oliver begynte med å legge opp en hel og tre halve brøkstolper. Hvorfor han ikke heller valgte to hele og en halv, sier han ikke noe om. I observasjonen antok jeg først at dette skyldes at Oliver velger tre halve, for at han da allerede har funnet en tredjedel av en og en halv stolpe, slik at det bare gjensto å finne en tredjedel av den siste hele stolpen. Imidlertid var hans kommentar i linje nr.58 ikke i tråd med dette, da han foreslår, slik som tidligere (se eksempel 2) at de skal gjøre om dette blandede tallet til uekte brøk. Med denne kommentaren er det nærliggende å anta at han ønsker å gjøre dette for å få brøken som én mengde som skal divideres på tre, heller enn et blandet tall der elevene må håndtere tre verdier som skal divideres på tre. Som observert tidligere var ikke elevene så tilbøyelige til å arbeide med blandede tall. I det videre vil elevenes løsning presenteres, der de benytter seg av blandede tall og uekte brøk om hverandre, i sin oppgaveløsning. Oline er nemlig uenig med Oliver, og hevder at de burde bruke det blandede tallet til å dele mengden på tre:

59. Oline: Nei, da får de en sånn hver (peker på de halve klossene), og en tredjedel. Eller.. Hvis vi skal dele den i tre.. Eller hvor mye var det vi skulle dele den på?
60. Oliver: $\frac{1}{3}$ av $2\frac{1}{2}$ liter brus.
61. Oline: Ekke det.. Det er jo ..

I linje 59 sier Oline at «da får de en sånn hver», mens hun peker på de halve stolpene. Deretter påpeker hun at de i tillegg får en tredjedel. Til tross for at de arbeider med oppgave a, der oppgaveteksten lyder: «Du får en tredjedel av to og en halv liter brus. Hvor mye brus får du?», gir Oline uttrykk for at mengden skal divideres på tre personer. Det kunne ikke observeres indikasjoner på at elevene ser denne oppgaven i sammenheng med multiplikasjon, selv om denne oppgaven i abstrakt regning kunne bli utført ved å multiplisere uttrykket $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Selv om måten Oline vil løse oppgaven på er helt riktig, virker hun likevel litt usikker på sitt forslag. Spesielt da Oliver bryter inn med en annen idé.

62. Oliver: (Avbryter) Se nå. Hvis vi først lager en uekte brøk. Så teller vi hvor mange halve det er. En todeler, to todeler, tre todeler, fire todeler og fem todeler. Så fem todeler på en måte.
63. Oline: Ja, men da er det jo en halv og 0,3.
64. Tiril: Blir det for lite da?
65. Oliver: Ja, fem todeler. Hvordan skal dette gå ann?

Oliver ønsker å lage en uekte brøk i linje 62, og jeg fikk bekreftet min antagelse om at Oliver ønsker dette slik at han kunne dividere én mengde på tre. Han teller opp hvor mange halve det er, men oppdager i linje 62 at dette blir fem halve. Videre kan det antas at han forstår at dette ikke er delelig på tre i linje 65. Oline prøver å bryte inn med sin tankegang fra tidligere og påpeker at de da får en halv i tillegg til 0,3. Både Oliver og Tiril synes ikke å være med på Oline sin tankegang, da de ikke kommenterer hennes forslag. Tiril spør derimot Oliver om det blir en for lite til å dele på tre personer. Straks etter kommer jeg inn i situasjonen, samtidig som Oline igjen prøver å illustrere sin argumentasjon ved å benytte seg av brøkstolpene til å vise resten av gruppa sin tankegang.

66. Oline: Skal vi se, kan vi ikke gjøre sånn her. Vi deler en hel i tre stykker av $\frac{1}{3}$, og så tar vi den bort(Tar vekk en hel stolpe.)
67. Jeg: Ja, det var lurt. Kan dere gjøre det med en til?
68. Oliver: Ja, det kan vi.

I linje nr. 66 tar Oline over styringen, og viser de to andre på gruppa hvordan den ene hele stolpen kan erstattes av tre stykker av $\frac{1}{3}$ stolpene. Når jeg kommenterer til gruppa at dette var en lur løsning er Oliver med på denne tankegangen. Da jeg i linje nr.67 spør elevene om de kunne gjøre dette med en hel stolpe til, tar Oliver vekk to halve som til sammen tilsvarer en hel stolpe, og bytter tilsvarende ut disse to med tre stykker av $\frac{1}{3}$ stolpen, slik at dette blir en hel stolpe representert som $\frac{3}{3}$. Jeg utfordrer elevene på om de kan gjøre dette med den siste halve stolpen også.

69. Jeg: Kan vi gjøre noe tilsvarende med den siste dere har igjen av $\frac{1}{2}$?

Selv om Oliver ikke kommenterer dette, prøver han seg frem med ulike stolper for å se om den hele stolpen kan erstattes av noen andre stolper. Imidlertid vurderer han ikke tre like stolper, men prøver seg heller med å sette sammen $\frac{1}{3}$ stolpen med $\frac{1}{8}$ stolpen. Dette ga ham heller ikke den samme størrelsen som den halve stolpen. I det videre foreslår jeg for elevene å dele også denne halve stolpen i tre like deler:

70. Jeg: Det beste hadde jo vært hvis du kunne delt opp den i tre (peker på den halve).
71. Oline: (legger frem tre stykker av $\frac{1}{6}$).
72. Oliver: Ja den tar vi. Ja, de er like store for det er $\frac{1}{6}$.
73. Jeg: Da er det kanskje lettere å finne ut hva du får hvis du får $\frac{1}{3}$.
74. Oliver: (Bruker lang tid på å tenke) Ja, da skjønner jeg. Man får to sånne, og en sånn hver (Peker på to stykker av $\frac{1}{3}$ klossene og en av $\frac{1}{6}$)

Ved elevenes tolkning av brøk som divisjon kunne de avdekke størrelsen på disse mengdene, og i dette utsnittet av transkriberingen kommer elevene til slutt frem til hvordan de kan dele opp både en hel stolpe og en halv stolpe i tre deler ved hjelp av brøkstolpene. Til slutt kunne elevene resonnere seg frem til hvor mye man fikk sammenlagt, når man hadde to stykker av $\frac{1}{3}$ klossene og en av $\frac{1}{6}$ klossen. De satte disse tre klossene sammen, for å avgjøre hvor stor denne klossen ble totalt, og ved å sammenligne med andre klosser fant de at dette totalt ble $\frac{5}{6}$.

75. Oline: Blir ikke det $\frac{5}{6}$?
76. Oliver: (bruker lang tid på å tenke.)
77. Oline: Siden den er like stor som den. (Peker på en kloss med $\frac{5}{6}$)
78. Lærer: Men kan dere ikke bare sjekke, hvis dere tar av en kloss fra $\frac{6}{6}$.
79. Oliver: JA, det blir $\frac{5}{6}$.

Gjennom transkriberingen av neste gruppe, gruppe 2, gir ikke transkripsjonene et fullstendig bilde av elevenes oppgaveløsning, da de i stor grad brukte konkretiseringsmateriellet direkte til å løse oppgaven. Dermed har jeg her valgt å presentere det jeg så i videoopptaket.

Ut ifra observasjonen kunne jeg se at de løste oppgaven på en litt annen måte, og de var ikke så systematiske i sin oppgaveløsning. De prøvde seg frem med brøkstolpene for å finne noe som var like langt som brøken de hadde satt sammen til å være to hele og en halv. Ved å sette sammen en tilfeldig kombinasjon av brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{12}$, og deretter lage tre stykker av denne kombinasjonen, kunne elevene til sin overraskelse se at dette tilsvarte den hele lengden av to og en halv brøkstolpe. Når de deretter resonnerte for å finne ut hva dette tilsvarte i èn brøk med felles nevner, der disse tre brøkene var addert sammen, fikk de samme svar som forrige gruppe, nemlig $\frac{5}{6}$. I denne sammenheng er det viktig å stille seg spørsmålet om hvilken bruksverdi konkretiseringsmateriellet hadde. Som Hynes (1986) påpeker i sin definisjon av konkretiseringsmateriell så må det fungere som noe fysisk som benyttes for å visualisere bestemte matematiske ideer. Elevene gjettet seg frem for å finne likhet mellom brøkstolpene og man kan stille spørsmål til om visualisering av den matematiske ideen var til stede. Elevene benyttet konkretiseringsmateriellet som et objekt for å komme frem til et svar ved å gjette seg frem til tre deler som kunne erstatte den hele mengden på to og en halv stolpe.

I dette eksempelet kunne elevenes oppfatning av brøk observeres ved at de utførte en divisjon på den fulle mengde, slik at de fant en tredjedel av to og en halv liter brus. Med dette kan parallellen til «brøk som operator» trekkes, da det gjennom denne oppfatningen av brøkbegrepet beskriver en operasjon som må gjennomføres på den fulle mengde (Lamon, 2012).

Eksempel nr.7

> Oppgave 4 i blått oppgavesett, Vedlegg 5
>
> Oppgave 4)
> Mor Åse har lagd en bursdagskake til sine trillinger Jan, Fillip og Susann. Susann sitt kakestykke veier $\frac{1}{3}$ av Jan sitt kakestykke. Fillip sitt kakestykke veier $\frac{5}{4}$ av Jan sitt kakestykke.
>
> a) Vis med brøksirklene hvor store de ulike kakestykkene er.
>
> Jan sitt kakestykke veier 120 g.
>
> b) Hva veier Fillip sitt kakestykke og hva veier Susann sitt kakestykke?

Gjennom dette eksempelet vil brøken beskrive en operasjon som må gjennomføres, i denne sammenheng på en kake som mor Åse har laget. Dette tyder på at brøkene representerer en instruksjon for å utføre en handling.

I dette eksempelet hentet ut fra transkriberingen i deloppgave 4b i blått oppgavesett, kan elevenes oppfatning kategoriseres i både 'brøk som divisjon' og 'brøk som operator'. Elevene skulle finne vekten på hvert enkelt kakestykke, og i det videre skal transkribering presenteres for å vise hvordan elevene fant frem til dette.

80. Oliver: Okei, b. Hva veier Fillip sitt kakestykke og hva veier Susann sitt kakestykke. Jan sitt kakestykke veier 120, så hele sirkelen er 120 g. Alt dette her.
81. Oline: Okei, Fillip sitt, var det..
82. Oliver: Okei, 120 g. $\frac{4}{4}$ er 120 gram. Så hvis de får $\frac{1}{4}$, da må vi dele 120 på fire. Og da blir det 30 gram. Så $\frac{1}{4}$ av dette kakestykket er 30 gram.

Til å begynne med i linje 80-82 prøver Oliver å finne svaret på neste oppgave mens han tenker høyt. I linje nr.82 påpeker han at Jan sitt kakestykke er 120 gram, slik at $\frac{1}{4}$ av dette må være 30 gram. Her deler han 120 gram, som er dividenden, på 4, som er divisoren, for å finne det som tilsvarer $\frac{1}{4}$, som er kvotienten. En kan slik anta at Oliver slik ser brøken som en divisjon (Nunes & Bryant, 1996), og fant med dette frem til den mengden $\frac{1}{4}$ av kaken ville veie. I forlengelsen av dette kom Oline med forslaget om at brøken de fant ved hjelp av divisjonen, kunne benyttes for å finne ut hvor mye kakestykket til Fillip ville veie. Denne kommentaren i linje nr. 83 kategoriseres inn i oppfatningen av «brøk som operator»:

83. Oline: og så for å finne Fillip sitt kakestykke, så tar vi $30 \cdot 5$. Fordi det blir jo en mere enn en hel.

Her viser Oline at hun bruker brøken $\frac{5}{4}$ for å utføre en handling på kakestykket til Jan. Hun vet at vekten av $\frac{1}{4}$ kakestykke veier 30 gram, og Jan sitt kakestykke er $\frac{4}{4}$ og veier 120 gram. Hun vil multiplisere 30 g med 5 for å finne størrelsen på kakestykket til Fillip, da hun kommenterer at hans kakestykke er «en mere enn en hel». Hun multipliserer slik 30 gram med 5, som er antall $\frac{1}{4}$ - stykker som inngår i Fillip sitt stykke. Som Van de Walle et al. (2007) fremmer er det viktig med tekniske regneferdigheter i denne kategorien av brøk som operator, da brøken indikerer en multiplikasjon på et annet tall.

Oliver foreslår en annen måte å finne størrelsen på kakestykket til Fillip på, som også kan plasseres under oppfatningen av «brøk som operator». Han benytter seg her av addisjon av ledd for å representere de ulike brøkene.

84. Oliver: Ja, eller så kan vi ta $120 + 30$ bare. Det er kanskje litt lettere. Så Fillip sitt kakestykke veier 150 gram.

«Brøk som operator» kjennetegnes av at brøkene representerer en instruksjon for å utføre en handling (Van de Walle et al., 2007). Dermed kan denne oppfatningen også sees i linje nr. 84 der Oliver påpeker at Fillip sitt kakestykke er satt sammen av $\frac{4}{4}$ – kakestykket på 120 gram og adderer dette med $\frac{1}{4}$ – kakestykket på 30 gram. Dette er basert på at elevene har funnet at $\frac{4}{4}$ tilsvarer 120 gram, mens $\frac{1}{4}$ tilsvarer 30 gram, slik at når de da skal finne $\frac{5}{4}$ –kakestykket til Fillip hevder Oliver at de bare kan addere disse to. Slik finner han $\frac{5}{4}$ –kakestykket til å være 150 gram. Han kommenterer i sitat 84 at dette er lettere.

Til slutt skal elevene prøve å finne størrelsen på Susann sitt kakestykke, og oppfatningen av brøk beveger seg igjen over til «brøk som divisjon»:

85. Oliver: og Susann sitt kakestykke veier ..
86. Oline: 30?
87. Oliver: Nei, $120\!:3$ blir det da, siden det er $\frac{1}{3}$, ikke sant?
88. Oline: Så da blir det 40 gram.
89. Oliver: Ja. Så Fillip sitt veier 150 gram. Susann sitt veier 40 gram. Er du med?
90. Tiril: Ja, men ikke helt.

I siste del av denne transkripsjonen kan vi se hvordan Oliver likestiller brøk og divisjon i linje nr.87. Han påpeker at 120 gram delt på 3 vil gi størrelsen på Susann sitt kakestykke, da oppgaven opplyser om at hennes kakestykke er $\frac{1}{3}$ av størrelsen til Jan sitt kakestykke. Han uttaler at de må dele 120 på 3, fordi de skal finne $\frac{1}{3}$, som tydelig indikerer hans forståelse av brøk som divisjon. Også i denne delen kan dette sees i sammenheng med det Nunes og Bryant (1996) påpeker om at elevene ser brøken som en divisjon, heller en som en måte å dele på (Se delkapittel 2.6.3). Oline påpeker i linje nr.88 at kakestykket til Susann da blir på 40 gram. Når Oliver til sist spør Tiril om hun er med på denne tankegangen, sier hun: «Ja, men ikke helt.» En kan stille spørsmålet om Tiril ikke oppfatter brøk som divisjon, i tråd med det Doug (2006) hevder om at brøk som divisjon ikke alltid er en vanlig oppfatning blant enkelte. Imidlertid har Tiril sagt for lite til at man i denne sammenheng kan trekke denne slutningen.

Eksempel nr.8

Oppgave 4 i grønt oppgavesett, Vedlegg 7

Oppgave 4)

Mohammed har 6 gjester i bursdagen sin. Til sammen spiser de $5\ \frac{1}{4}$ pizza. Hvor mye pizza spiser hver av personene i bursdagen hvis de spiser like mye.

I grønt oppgavesett kunne elevene som nevnt selv velge hvilket konkretiseringsmateriell de ønsket å benytte, mens oppgavene ellers lignet oppgavene i tidligere oppgavesett. Oppgaven valgt ut fra dette oppgavesettet inkluderte derfor interessant funn i henhold til hvordan elevene tok i bruk konkretiseringsmateriell når dette ikke var spesifisert i forkant. Funnene i denne sammenheng ble kategorisert inn i oppfatningen av brøk som divisjon.

91. Oliver: Til sammen spiser de fem pizzaer og en fjerdedel. De har altså spist fem pizzaer og litt mer enn det.
92. Tiril: Ja, men da må vi jo dele det på seks.
93. Oline: Hvis vi sier at hver pizza er på 100 gram, så da blir det jo 25 gange med fire i hver pizza.

Det første jeg oppdager i dette utdraget fra transkriberingen er Tirils forslag om at de må dele total mengde pizza på seks personer. Med andre ord har ikke elevene oppdaget at de har glemt å inkludere selve bursdagsbarnet, Mohammed i antall personer som skulle dele pizzaene. Det er viktig å ta med seg dette poenget i den videre analysen da dette kan ha påvirket elevenes oppgaveløsning. Elevene kunne kanskje ha oppdaget andre sammenhenger om de visste de skulle dele total mengde pizza på sju personer.

Det at elevene foreslår å dele pizzaen på seks personer indikerer dessuten at de betrakter brøk som divisjon i denne sammenheng. Som vi har sett tidligere syns elevene det var vanskelig å arbeide med blandede tall, og i møtet denne oppgaven prøvde de å erstatte brøken med et konkret eksempel. Oline foreslo dermed å sette vekta på pizzaene til å være 100 gram i linje nr. 93, slik at de videre kunne finne vekta hver gjest ville fått. Imidlertid stopper det med forslaget, uten at det følges opp videre, i stedet betrakter Oline desimaltallet som brøken tilsvarer:

94. Oline: 5,25 delt på seks. Det går jo ikke.
95. Oliver: Men hva hvis vi ganger det med 100 da, slik at det blir fem gange med hundre er lik femhundre.
96. Oline: Da kan vi kanskje bruke pizzaen. Nei, det er ikke nok plater.
97. Tiril: Men en fjerdedel kan jo tilsvare to sånne åttendeler.
98. Oline: Skal vi gi svaret i brøk eller prosent?

I linje nr. 94 til linje nr.98 står elevene fast i sin oppgaveløsning. Samarbeidet fungerer ikke som tidligere og elevene på gruppa kommer med ulike tilnærminger til løsninger. Elevene valgte dessuten å benytte seg mer av hoderegning enn konkretiseringsmateriell når de skulle løse oppgavene, se linje nr. 93, 94 og 95. De klarte heller ikke å nyttiggjøre seg konkretiseringsmateriellet på egen hånd i denne oppgaven. Basert på dette utdraget virker det som samtalen mellom elevene ikke henger sammen, og at de tenker i ulike baner for å finne en løsning. Gruppe 1 etterspurte derfor hjelp til å komme videre:

99. Oliver: Vi skjønte ikke helt den nummer fire.
100. Jeg: Okei. Har dere prøvd med pizzasirklene?
101. Oliver: Nei, vi begynte akkurat med den her.
102. Jeg: Jeg sa til den andre gruppa at hvis dere tenker at en hel pizza er delt opp i fire, så har dere plass til en, to, tre og fire biter. Og hvis dere har fem pizzaer som er delt opp i fire biter, så er det … (Jeg viser elevene med pizzabrøkene)
103. Oline: 20 biter?

Mens jeg forklarer benytter jeg konkretiseringsmateriellet til å visualisere oppgaven for elevene. Jeg legger opp en pizzasirkel og teller opp antall biter som får plass på en pizza hvis en hadde delt pizzaen opp i fire deler. Da jeg forklarer dette for elevene, kan det fortsatt virke som de er forvirret. I den videre forklaringen skal det betraktes hva som skjer når elevene innser at det er sju personer som skal dele på pizzaen og ikke seks:

104. Jeg: Ja, og dere har i tillegg til fem pizzaer en fjerdedel ekstra, og da blir det?
105. Oliver: 21.

106. Jeg: Ja, 21. Og hvor mange er det i bursdagen.
107. Elevene: seks.
108. Jeg: Er det det?
109. Oliver: (studerer oppgaveteksten en gang til og oppdager Muhammed) Åja, det er syv.
110. Jeg: Hvor mye får de hver da.
111. Tiril: Da spiser de 3 hver.

I det videre er brått alle på gruppa med på tankegangen og snakker i munnen på hverandre for å gi uttrykk for at de forstår. Til tross det Van det Walle et al. (2007) hevder om at lærere ikke må overføre måten konkretiseringsmateriellet skal brukes på slik at elevene ser på materiellet som objekter for å komme frem til et svar, fremfor en hjelp til å visualisere matematikken, så virker det ikke i denne sammenheng som at elevene ikke har forstått.

112. Jeg: Og det er i brøk?
113. Tiril: $\frac{3}{4}$?
114. Jeg: Ja, riktig!
115. Tiril: Ja, de spiser tre pizzastykker hver.

Når elevene i linje nr.109 oppdaget hvordan de kunne dividere total mengde pizzabiter på sju personer, kom de frem til den mengden pizza hver av personene fikk. Mye tyder på at når elevene bare forsto hvordan de skulle benytte seg av konkretiseringsmateriellet, så forsto de også hvordan de kunne løse oppgaven. I denne settingen der de skulle velge konkretiseringsmateriell selv, måtte jeg likevel gå inn å veilede ganske mye, for at elevene skulle klare å komme videre i oppgaveløsningen.

I dette eksempelet presenteres det en mengde transkribering, som viser hvordan elevene slet når de ikke klarte å benytte seg av materiellet. Oppgaveløsningen ble dessuten oppdelt og usystematisk. Dette er i tråd med det Säljö (2000) hevder om at en må se og forstå hvordan tenkingen utøves av mennesker som handler i sosiale praksiser ved hjelp av artefakter. Dette ble vanskelig da elevene ikke klarte å handle ved hjelp av redskapet de hadde tilgjengelig.

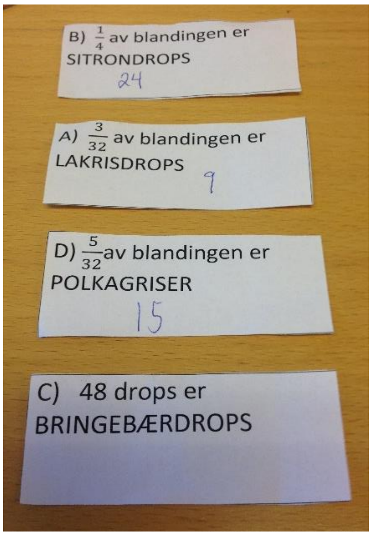
Eksempel nr.9

Oppgave 1 i rødt oppgavesett, Vedlegg 6

Oppgave 1)
Dropsblandingen
I mors godterilager til lørdagskvelden er det en stor samling av fire ulike drops. I denne oppgaven vil hver av dere få tildelt hvert deres drops som dere har ansvar for. Det er i tillegg et drops som vil være felles ansvar i gruppa. Oppgaven blir da:

- Det er 4 lapper
- Hver elev leser sin opplysning og presenterer denne for gruppa si.
- Gruppa lager sin løsning på dropsblandingen ved hjelp av tellebrikker.
- Hver elev må ut fra brikkene kunne forklare at sin opplysning stemmer.

I første oppgave i rødt oppgavesettet viser transkripsjonen at det er en gjennomgående bruk av brøk som operator. I oppgaven der elevene skal samarbeide om å finne mengden av ulike drops i mors godterilager, bruker elevene brøkene til å finne frem til ulike dropsmengder (Se bilde 15). I denne oppgaven vil transkriberingen begynne da elevene har oppdaget at halvparten av dropsene i oppgaven er bringebærdrops:



Bilde 15: Lappene elevene fikk utdelt i oppgave 1 i rødt oppgavesett.

116. Oline: Åja, hvis bringebærdropsene er på 48 drops, og de er halvparten av dropsene, da må jo de tre andre dropsene være andre halvparten til sammen?
117. Jeg: Nå har jeg gitt dere 48 linser, prøv nå å finn ut hvor mange linser det er på hvert drops.
118. Oliver: Åja, det er jo 48 delt på tre.

Elevene finner ut at halvparten av dropsene må utgjøre bringebærdropsene, og dermed ble det en naturlig konsekvens at den andre halvdelen måtte bestå av de tre gjenværende dropstypene som Oline påpeker i linje nr.117. Oliver hevder imidlertid at de da bare kan dele 48 drops på tre, slik at hvert drops utgjør en tredjedel hver. Jeg rettleder ham og minner ham på hva som står i oppgaven:

119. Jeg: Er det egentlig det? Det er jo $\frac{5}{32}$ av polkagriser, $\frac{1}{4}$ er sitrondrops og $\frac{3}{32}$ er lakrisdrops.

I det videre vil transkriberingen vise utdrag fra de ulike tilnærmingene elevene hadde for å finne frem til mengden på de tre dropstypene. I dette blir det snart tydelig at elevene bruker tre ulike tilnærminger for å finne frem til mengden. Oliver begynner først med å prøve å finne frem til mengden sitrondrops:

120. Oliver: Så da må vi finne $\frac{1}{4}$ av 48. Eller nei, for det er jo ikke hele blandinga. Alt, hele blandinga er jo 96. Så da må det bli $\frac{1}{4}$ av 96. Så da må vi ta 96 delt på fire.
121. Oline: Ja, da er det jo 24 sitrondrops.

Dette utdraget av transkriberingen gir mye innsikt i hvordan Oliver tenker for å finne frem til dette første sitrondropset. For det første benytter han seg av brøk som operator da han hevder at de må finne $\frac{1}{4}$ av 48 drops. Operasjonen er riktig, men enheten som han bruker som utgangspunkt for utregningen er feil. Imidlertid oppdager han raskt denne feilen og retter det opp i linje nr.120 til å være totalt 96 drops, før han så utfører operasjonen $\frac{1}{4}$ på denne mengden. Han påpeker samtidig hvordan dette er en operasjon som også innebærer oppfatningen av brøk som divisjon da han sier: «Så da må vi ta 96 delt på fire». Det kommer her tydelig frem den nære sammenhengen mellom brøk som operator og brøk som divisjon, da en operasjon elevene gjør på mengden kan være divisjon. Oline regner avslutningsvis ut at dette blir 24 sitrondrops før de tar fatt på polkagrisene:

122. Oliver: Okei, neste er på $\frac{5}{32}$
123. Oline: Vi må forkorte det da?
124. Oliver: Ja, men det er jo ikke så lett å forkorte det siden fem er et primtall. Men 32 ganget med tre, det er jo 96. Så hvis vi utvider den til $\frac{15}{96}$.
125. Oline: Ja, $\frac{15}{96}$!

126. Oliver: Ja, siden 96 er jo alt. Ja, da blir det jo 15. Det ga jo veldig mye mening.
127. Oline: Og da er jo resten det siste. Og det er 48 minus 24, som er 24, og 24 minus15 som er 9.

Da elevene sammen prøver å finne ut av hvor mye brøken $\frac{5}{32}$ tilsvarer i drops, foreslår Oline i linje nr.123 å forkorte denne brøken. Oliver hevder imidlertid i linje nr.124 at dette ikke vil bli så lett da fem er et primtall, og dermed ikke kan forkortes. I samme linje foreslår Oliver å heller multiplisere nevneren i denne brøken med tre. Han påpeker at dette vil bli 96. Oppdagelsen elevene da gjorde kunne virke som å komme overraskende på dem, da de på denne måten plutselig endte opp med å finne antallet polkagriser. De fant i linje nr. 125 og 126 at brøken $\frac{15}{96}$ tilsvarte at det var 15 polkagriser av den hele mengde på 96 drops totalt. Dette kan kategoriseres under oppfatningen av «brøk som del av det hele». Oline påpeker så at resten må være det siste dropset, og ved å subtrahere de to andre dropsene fra 48 drops, kommer hun frem til at lakrisdropsene må utgjøre 9 drops. Her brukes ikke brøk i det hele tatt for å finne det siste dropset, men derimot regning med absolutte verdier.

7 Diskusjon

I kapittel 5 satt jeg opp en matrise der jeg kunne betrakte hvordan elevenes oppfatning av brøkbegrepet fordelte seg i ulike kategorier (tabell nr.2). I dette kapittelet vil jeg rette meg mer spesifikt inn mot mitt forskningsspørsmålet som var utgangspunktet for min analyse av datamateriale, i tråd med det Jacobsen (2005) påpeker om at: «Tolkning av data er å legge mening i resultater, eller å sette resultater inn i en større sammenheng, enten gjennom sammenligning eller gjennom bruk av teori» (s. 374). Med dette som utgangspunkt skal de ulike delene fra analysen syntetiseres til et mer helhetlig svar på forskningsspørsmålet i lys av aktuell teori. Det kan dermed være formålstjenlig med en repetisjon av forskningsspørsmålet: «Hvordan oppfatter elevene på 8.trinn brøkbegrepet gjennom bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med oppgaveløsning?»

I henhold til den beskrivelsen som er gitt av brøkbegrepets ulike aspekter, vil jeg videre diskutere hvordan konkretiseringsmateriellet bidro til å få frem elevenes oppfatning innen disse aspektene. Dette vil legges frem i tre kategorier. Deretter vil jeg peke på noen ytterligere funn som ikke kommer frem gjennom de tre første kategoriene, men som også gir meg grunn til å anta at bruk av konkretiseringsmateriell er hensiktsmessig med tanke på elevers arbeid med brøk. Da det som nevnt ikke bare var et bestemt konkretiseringsmateriell som bidro til en bestemt oppfatning, valgte jeg dermed heller ikke å dele opp kategoriene i forhold til type konkretiseringsmateriell. Diskusjonen vil inneholde disse kategoriene:

- Konkretiseringsmateriellets bidrag til elevenes oppfatning av «brøk som del av det hele»
- Konkretiseringsmateriellets bidrag til elevenes oppfatning av «brøk som måling»
- Konkretiseringsmateriellets bidrag til å se «brøk som divisjon og operator»
- Andre funn knyttet til konkretiseringsmateriell og oppfatning av brøkbegrepet

7.1 Konkretiseringsmateriellets bidrag til elevenes oppfatning av «brøk som del av det hele»

I det følgende skal det vurderes hvordan ulike konkretiseringsmateriell bidro til oppfatningen av «brøk som del av det hele». Denne delen ble delt opp i to funn; Brøkstolpenes bidrag til å identifisere enheten i oppgaven og brøkstolpenes og pizzasirklenes bidrag til en relativ forståelse.

7.1.1 Brøkstolpenes bidrag til å identifisere enheten i oppgaven

Det første jeg vil kommentere i denne sammenheng var brøkstolpenes bidrag til at elevene identifiserte enheten i oppgavene. Gjennom oppfatningen av «brøk som del av det hele» vil brøk være en del av en enhet, der denne enheten er den totale mengden av det som skal beskrives (Van de Walle, 2004). I eksempel 1 sto elevene fast i sin oppgaveløsning da de ikke klarte å identifisere enheten i oppgaven. Dette funnet står i forhold til Lamons (2012) påstand om at: «[I]t is important to identify the unit and to make sure that each fraction is interpreted in terms of that unit. You can not compare fractions based on different units» (s. 145).
I denne sammenheng kan man straks tenke at brøkstolpene ikke har hatt noen effekt da jentene opplevde å bli forvirret på hva som var enheten i oppgaven. Imidlertid hevder Lamon (2012) at de abstrakte kalkuleringene ikke ville gjort det nødvendig md en forståelse av enheten på samme måte, som når barn gis konkrete objekter å arbeide med: «When we are doing abstract caluculations (adding or subtracting fractions, for excample, that do not refer to

any spesific material object) we do not worry about units. However, in instruction, when giving children concrete objects to think about, we will do nothing but confuse the issue if we do not know what the unit is» (Lamon, 2012, s. 145). I forlengelsen av dette kan en anta at bruken av konkretene fordret et behov for å forstå hva enheten i oppgaven var, slik jeg kunne observere da elevene stilte flere spørsmål i henhold til hva som var enheten i oppgaven. Ut ifra transkriberingen i eksempel 1 kan det antas at jentene oppdaget sin begrensning på bakgrunn av bruken av konkretiseringsmateriellet, som de kanskje ikke ville oppdaget i abstrakte kalkuleringer. Kamii et al. (2001) peker også på at dette burde være det sentrale i bruken av konkretiseringsmateriell, nemlig kvaliteten på elevenes tenkning fostret av bruk av materiellet. For selv om jentene er forvirret, har de ved hjelp av konkretiseringsmateriellet oppdaget noe de ikke forstår og som de ønsker å komme til bunns i ved å stille spørsmål. På sikt vil dette kanskje bidra til at elevene forstår at en er nødt til å ta utgangspunkt i en enhet, hvis en skal finne delen i forhold til det hele.

7.1.2 Brøkstolpenes og pizzasirklenes bidrag til en relativ forståelse

Den relative forståelsen er viktig for at elevene skal forstå selve nøkkelkonseptet med brøk, nemlig at brøken ikke sier noe om størrelsen på det hele, eller på en del av det hele, men at en brøk bare forteller oss om forholdet eller relasjonen mellom delen og det hele (Van de Walle, 2004).

Tidlig i elevenes oppgaveløsning hadde jeg flere ganger sett eksempler på hvordan elevene foretrakk å gjøre om brøkene fra blandede tall til uekte brøk. I eksempel 2 fra gult oppgavesett ønsket elevene i gruppe 2 heller å telle opp antall ganger Trine drakk $\frac{1}{4}$ liter melk, ved hjelp av disse små delene, enn å betrakte hvordan fire av disse delene kunne representeres ved hjelp av en hel. Min antagelse i denne sammenheng er i tråd med det Lamon (2005, s. 32) hevder om at elevenes møte med den relative tenkingen innen matematikk kan være utfordrende fordi de er vant til å tenke absolutt: «the children´s responses (…) demonstrates how difficult it is for children to move away from the additativ (absolute red.) thinking with which they are so familiar and to begin to think relatively» (s. 32). I min observasjon kunne det virke som elevene hadde et ønske og en forestilling om at de skulle finne en absolutt verdi, heller enn å finne en relativ verdi. Da elevene likevel ble konfrontert med den relative tenkningen fordi de ikke hadde nok brøkstolper til å representere brøken som en uekte brøk, kunne jeg se hvordan elevene visualiserte den relative tenkningen ved hjelp av brøkstolpene. De kommenterte i linje nr. 22 at dette ga mye mer mening, før de erstattet den hele stolpen med de delene som til sammen utgjorde en hel stolpe. I oppfatningen av «brøk som del av det hele» påpeker Lamon (2012) at det er viktig at elevene ved hjelp av relativ tenking forstår relasjonen mellom brøker, slik at de kan se sammenhengen mellom ekvivalente brøker (Van de Walle, 2004).

I gult oppgavesett kunne jeg flere ganger observere at elevene tilsynelatende forsto det relative med brøkene, da de fortsatte å erstatte brøkstolper som utgjorde samme mengde, og som hadde lik størrelse. Et oppsiktsvekkende funn oppsto imidlertid da gruppe 2 begynte å arbeide med oppgavene i blått oppgavesett, se eksempel 3. I disse pizzaoppgavene støtte de på mer kontekstualiserte oppgaver, der de skulle løse oppgavene ved hjelp av pizzasirkler. Jeg kunne da observere indikasjoner på at noen av elevene ikke hadde forstått det relative med brøkene likevel, i alle fall ikke fullstendig. For eksempel uttalte de at 2 pizzastykker var spist, uten at de så dette i relasjon til den totale mengde på 6 biter (se linje 31). Gruppen holdt lenge på med denne oppgaven for at alle medlemmene av gruppen skulle forstå «brøk som del av det hele». Dermed kom det mye tydeligere frem her at elevene ikke forsto forholdet mellom del og hel, selv om de tidligere hadde vist med klossene at to ulike stolper representerte samme mengde. En kan dermed stille spørsmål til om elevenes mangel på en slik forståelse først fremkom i arbeidet med oppgavene i blått oppgavesett. Som Van de Walle (2004) hevder må elevene forstå at en brøk ikke sier noe om størrelsen på det hele eller en del, men derimot om forholdet mellom disse to. I oppgavene med brøkstolpene i gult oppgavesett kunne elevene vise at ulike klosser representere samme størrelse, men på noe vis unngå å forklare det relative forholdet mellom brøkene. I eksempel 3, fra blått oppgavesett bruker Bjarte lang tid på å forklare jentene sammenhengen, og han benytter pizzabrøkene aktivt, for å få frem hvordan ett pizzastykke utgjorde $\frac{1}{6}$ av den hele mengde på 6 biter. Som Cramer og Wyberg (2009) beskriver må bruken av konkretene for en del-hel mening ha som mål å utvikle en relativ forståelse for brøk. De fremmer at denne fokuseringen fordrer en lærerbevissthet rundt hvordan man bruker konkretene i forklaringen av «brøk som del av det hele». Dette er i parallell til det som er beskrevet i delkapittel 3.2.3, Bruk av konkretiseringsmateriell. Her stiller flere forskere seg bak det faktum at «Manipulatives by themselves cannot bring about understanding» (Ball, 1992; Baroody, 1989; Kamii et al., 2001; Viadero, 2007). Det sentrale i bruken av konkretiseringsmateriell må være kvaliteten på elevenes tenkning fostret av en bruk av materiellet(Kamii et al., 2001).

Basert på mine funn kan det antydes at elevene ikke hadde en fullstendig relativ forståelse av brøk, men at konkretiseringsmateriellet bidro til å hjelpe elevene til å utvikle sin forståelse for dette. Som Van de Walle (2004) hevder kan konkretiseringsmateriell hjelpe elever å klargjøre sammenhenger eller ideer som ellers er forvirrende i en ren symbolsk form. Han fremmer dessuten fordelen med å benytte seg av flere ulike modeller til å gjøre samme aktivitet. Da vil den samme aktiviteten kunne oppleves svært ulik for elevene i de to modellene. Det var dermed nyttig at jeg hadde valgt å benytte meg av 'like' oppgaver i de ulike oppgavesettene, i betydningen at de skulle representere det samme matematiske fenomenet, slik at elevene kunne oppdage ulike sammenhenger ved å arbeide med to ulike materiell. Som tidligere nevnt ble også elevenes manglende forståelse oppdaget ved bruken av konkretiseringsmateriell, spesielt da elevene skulle forklare hverandre løsningen på tur der alle hadde et felles ansvar for at alle på gruppa hadde forstått. Både det å oppdage en mangel på forståelse, men også det å oppdage nye sammenhenger ved hjelp av konkretiseringsmateriellet kan sees i sammenheng med det Säljö (2000) fremhever, at vi må se og forstå hvordan tenkingen utøves av mennesker som handler i sosiale praksiser ved hjelp av artefakter.

Denne relative tenkningen inngikk også i andre oppfatninger av brøkbegrepet, gjennom elevenes oppgaveløsning, men da på en litt annen måte. I delkapittel 7.3.2 vil denne relative forståelsen knyttet til «brøk som divisjon» betraktes. Men først vil jeg diskutere i hvilken grad ulike konkretiseringsmateriell bidro til elevenes oppfatning av «brøk som måling».

7.2 Konkretiseringsmateriellets bidrag til elevenes oppfatning av «brøk som måling»

I denne oppfatningen av brøkbegrepet vil jeg ikke lage noen underkategorier, da det var for få funn i datainnsamlingen til å gi grunnlag for det. Imidlertid vil jeg diskutere de funnene jeg fant i lys av teori.

Oppfatningen av «brøk som måling» kjennetegnes først og fremst av at det handler om å bestemme mengden som blir beskrevet gjennom brøken, heller enn å finne antall deler av en hel (Van de Walle, 2004). Det første jeg vil påpeke i denne sammenheng er hvordan elevene i eksempel 4 benyttet seg av en enkelt del av en stolpe for å finne total mengde av det som skulle beskrives. Dette er første skritt i det å tilnærme seg forståelsen av størrelsen på en brøk, nemlig å bruke det Van de Walle (2004) kaller «unit fraction», altså en enkelt brøkdel. Elevene kunne dermed ved hjelp av denne delen sette sammen flere av den samme delen, til å beskrive den mengden som oppgaven ba dem beskrive. Et lignende funn kunne observeres i eksempel 5, bortsett fra at her tok elevene utgangspunkt i et helt brøkpapir, for deretter å holde over den delen som ikke var del av brøken som skulle beskrives. I begge tilfeller finner elevene en del som ble utgangspunktet for mengden de skulle beskrive. I dette kunne jeg observere likheten mellom «brøk som del av det hele»-oppfatningen og «brøk som måling»-oppfatningen.

Denne måten å finne størrelsen på brøkene brukte elevene gjennomgående i gult oppgavesett. Imidlertid kan en ikke anta at elevene innehar det Lamon (2012) kaller en følelse for rasjonale tall gjennom dette resonnementet for finne en mengde. Dette ble først synliggjort gjennom elevenes videre oppgaveløsning, der elevene i både eksempel 4 og 5 hevdet at de kunne benytte seg av brøkpapir eller brøkstolpene til å avgjøre hvor store brøkene var i forhold til hverandre. De mente i eksempel 4 at hvis de kunne finne størrelsen på hver stolpe, kunne de deretter rangere tallene $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{3}{8}$ ved hjelp av brøkstolpene, basert på hvor store disse stolpene var i forhold til hverandre. Tilsvarende kunne elevene avgjøre ved hjelp av brøkpapir hvilken brøkterning som ga størst verdi. Ved hjelp av konkretiseringsmateriell kunne elevene altså utforske tettheten mellom brøkene. Lamon (2012) hevder at elevene slik utvikler en forståelse for de rasjonale tallene, der de ser for seg brøkene som mengder med ulike størrelser, slik at disse kunne plasseres i forhold til hverandre. Löwing (2006) påpeker at det er viktig at konkretiseringen ikke stopper opp ved en manipulering av materialet eller for å belyse bare et enkelt fenomen. Hun påpeker at målet med en konkretiseringen skal lede frem til en abstraksjon og forståelse av den matematikken som skal konkretiseres (Löwing, 2006). Da vil elevene utvikle en større og større forståelse for de rasjonale tallene.

Da noen av elevene videre i eksempel 5 benyttet såkalte «benchmarks» til å avgjøre hvilken av brøkterningene som ga høyest verdi, kan dette indikere at de innehar en større forståelse for de rasjonale tallene. Elevene kunne da umiddelbart se at $\frac{3}{4}$ var nærmere en hel, enn det $\frac{3}{8}$ var, og de trengte ikke dobbeltsjekke med brøkpapir at dette stemte.

Totalt kan disse funnene være en indikasjon på at konkretiseringsmateriellet fungerte slik det var ment, da elevene så på materiellet som en hjelp til å visualisere matematikken, heller enn objekter for å komme frem til et svar (Van de Walle et al., 2007).

7.3 Konkretiseringsmateriellets bidrag til å se brøk som «divisjon og operator»

For å strukturere denne delen av diskusjonen er det i første omgang viktig å kommentere at oppfatningen av brøk som operator og divisjon som kjent ofte oppsto i samme oppgave, og da også i samme eksempel i analysen. I diskusjonsdelen er det imidlertid ryddig å skille disse, da de ulike funnene knyttes til ulik teori. Imidlertid vil diskusjonen av brøk som operator bli kortere enn brøk som divisjon, da en stor del av elevenes bruk av brøk som operator handlet om at de utførte en operasjon på mengden som nemlig handlet om det å dividere. En kan da forstå hvorfor disse to kategoriene går inn i hverandre.

7.3.1 Konkretiseringsmateriellets bidrag til å se «brøk som operator»

I utvalget av transkriberingen var det to av mine funn som kunne kategoriseres i oppfatningen av brøk som operator, eksempel 7 og 9. Som nevnt kunne en likevel kategorisere flere av funnene i denne kategorien, da også divisjon handler om å utføre en operasjon på en mengde. Likevel er det i denne oppfatning et mer spesifikt fokus på at selve brøken beskriver en operasjon som må gjennomføres, slik at brøkene kan beskrives som funksjoner (Lamon, 2012).

Da elevene i eksempel 7 skulle finne hvor stort kakestykket til Fillip var, hadde de to fremgangsmåter på dette, som begge kunne kategoriseres i oppfatningen av brøk som operator. Van de Walle (2004) hevder at beregninger med brøk nesten alltid er knyttet til oppfatningen av «brøk som operator», der dette innebærer operasjoner innen tre kategorier, se delkapittel 2.6.4. For eksempel da Oline hevdet at de kunne multiplisere vekten på $\frac{1}{4}$ kakestykke med 5, da kakestykket til Fillip hadde størrelsen $\frac{5}{4}$. I denne operasjonen med multiplikasjon av en brøk kunne elevene se hvordan også nevneren i brøken er en divisor, da dette åpner for muligheten til å finne en del av den andre faktoren. Oliver på sin side mener at de heller kunne ta 120 gram, som var vekten på Jan sitt $\frac{4}{4}$ kakestykke, og deretter addere 30 gram som var vekten på et $\frac{1}{4}$ kakestykke. Her benytter elevene addisjon av brøker, og i denne sammenheng var det essensielt at elevene forsto at nevneren betegner antall deler, og telleren type deler. Dette kommer frem da elevene forstår at de bare kan addere eller subtrahere brøker med felles nevner. Begge disse fremgangsmåtene visualiserer en operasjon som må gjennomføres for å finne størrelsen på kakestykket til Fillip.

I eksempel 9 kunne jeg se at divisjonen ble oppfattet som brøk som operator da elevene ønsket å finne en mengde drops, ved å utføre en handling på den totale mengde drops. Da mengden det skulle utføres en handling på var en enhet, ble likheten tydelig mellom brøk som operator og brøk som del av det hele. «[I]t is important to identify the unit and to make sure that each fraction is interpreted in terms of that unit. You can not compare fractions based on different units» (Lamon, 2012, s. 145). På bakgrunn at dette forstår vi hvorfor det er viktig at en også i oppfatningen av brøk som operator forstår hva som til enhver tid er enheten. I denne oppgaven ble det veldig viktig for elevene å ha nok linser for å løse oppgaven, da de telte og resonnerte for å komme frem til løsningen. De kunne slik materialisere de forestilte dropsene i oppgaven, og det ble dermed lettere å finne frem til mengde drops. Kirfel (2010) hevder at elevene lettere kan tilnærme seg noe nytt, ved hjelp av noe de allerede kjenner. Linsene var lette å manipulere, telle, og prøve seg frem med ved å ordne dem på en annen måte. Det tok nemlig litt tid før elevene oppdaget hvilken mengde de skulle ta utgangspunkt i for å finne det første dropset, men når de først gjennomskuet hva som var den hele mengden, kunne de utføre operasjonen divisjon på denne mengden. Da ble det også lettere for dem å finne drops nummer to, ved at de i denne sammenheng utvidet brøken, slik at de fikk en nevner som representerte den fulle mengde drops. De kunne da med enkelthet se at telleren måtte være mengden av drops nummer to. Det siste dropset fant elevene ved å subtrahere. Da de visste størrelsen på de andre dropsene, kunne de bare subtrahere for å finne den resterende mengden drops. Som Van de Walle et al. (2007) fremmer er det viktig med tekniske regneferdigheter i denne kategorien av brøk som operator, da brøken ofte fordret en handling på et annet tall.

7.3.2 Brøkstolpenes bidrag til å se brøk som divisjon

I denne delen vil jeg diskutere funnene som indikerte at elevene oppfattet brøk som en divisjon, men også hva som kunne begrense dem i en slik oppfatning. Her kunne jeg nemlig også observere hvordan elevenes begrensning i den relative tenkningen hindret dem i å løse noen av oppgavene om divisjon. Jeg vil omtale disse funnene først, før jeg tar utgangspunkt i det Nunes og Bryant (1996) hevder om at en må se forskjellen på deling og divisjon når en skal avdekke om elevene har en oppfatning av brøk som divisjon.

Det første jeg vil kommentere er noe som kom tydelig frem i eksempel 6, nemlig elevenes møte med den relative tenkningen i henhold til divisjon av brøk. Noen av funnene i dette eksempelet kunne indikere at elevene ønsket å jobbe med brøken på en måte som kunne sammenlignes med absolutte verdier. Oliver ønsket blant annet å arbeide med uekte brøk heller enn blanda tall, og mente at det ville være mye lettere å dele én mengde på tre, enn å dele 2 hele og en halv på tre. Da han i tillegg benyttet brøkstolpene til å representere denne uekte brøken, kom det frem i enda større grad at dette var et forsøk på å jobbe med noe som kan ligne mer på absolutte mengder, heller enn de relative. Dette er i likhet med det Nunes og Bryant (1996) hevder om at: «when children are concerned with sharing, they concentrate on giving equal amounts to each recipient». Fremfor en relativ tenkning foretrekker Oliver å finne en absolutt mengde gjennom klossene, som deretter kan deles opp. Tilsvarende funn kunne også observeres i eksempel 8, der elevene prøvde å eksemplifisere mengden pizza ved å late som en pizza veide 100 gram. Som tidligere nevnt holder barn ofte fast på det de er mest kjent med: «the children´s responses (…) demonstrates how difficult it is for children to move away from the additativ (absolute red.) thinking with which they are so familiar and to begin to think relatively (Lamon, 2005, s. 32).

I lys av forskningen til Nunes og Bryant (1996) må en skille mellom at barn kan dele en mengde i to eller flere deler, og at barn kan dividere, og forstå forholdet mellom en dividend, en divisor og en kvotient, se delkapittel 2.6.3. I observasjonen kunne jeg observere begge deler. I eksempel 6 så jeg hvordan elevene til slutt delte opp brøkstolpene sine i tre like deler, ved å bytte ut en hel stolpe, med $\frac{3}{3}$. Tilsvarende byttet de ut en halv stolpe med $\frac{3}{6}$. Slik kunne de til slutt konkludere med hvor mye man fikk hvis man fikk $\frac{1}{3}$ av to og en halv liter brus. Til tross for at elevene kom frem til riktig svar og løste divisjonen, kan jeg likevel ikke se indikasjoner på at elevene forsto denne oppgaven som en divisjon, men heller som at de delte en mengde i tre like deler. Tilsvarende antagelse kan trekkes om gruppe 2 sin løsning på denne oppgaven, da de gjettet seg frem til hvordan de kan dele to og en halv brøkstolpe på tre. Ved hjelp av brøkstolpene satte de nemlig sammen alle stolpene i oppgaven, for å prøve seg frem til hvordan dette kunne representeres av en lik sammensetning av tre andre brøkstolper. Hensikten med bruken av konkretiseringsmateriellet var at elevene skulle bruke det for å se abstrakte sammenhenger, slik at brøk som divisjon kunne bli synliggjort. I denne oppgaven fungerte imidlertid ikke konkretiseringsmateriellet i den hensikt. Elevene brukte det som et objekt for å komme seg frem til et svar, ved å dele opp brøkklossene i tre deler, og «gjette» seg frem til hvordan de kunne representere klossene på en annen måte. Van de Walle (2004) påpeker hvordan mange lærere bruker materiell på en feilaktig måte for å fremme brøkforståelse, og hevder at modeller må hjelpe elevene til å få klarhet i sammenhenger som ofte vil vært forvirrende i en rent symbolsk form.

Til tross for disse funnene, kunne jeg ved flere anledninger observere indikasjoner på at elevene forsto hvordan en brøk kunne oppfattes som en divisjon ved hjelp av konkretiseringsmateriellet. Et eksempel fremkom i eksempel 7 da elevene skulle finne $\frac{1}{4}$ av 120 gram og påpeker de at de må dele 120 gram på fire for å finne det som tilsvarer $\frac{1}{4}$. Her viser elevene at de ser at dividenden er 120 gram, at divisoren er 4, og at kvotienten er 30 gram. Dette gir igjen indikasjoner på at de oppfatter brøken som divisjon (Nunes & Bryant, 1996). Det var dessuten mye som tydet på at elevene også kunne se den inverse sammenhengen da de videre påpekte hvordan de kunne finne størrelsen på Fillip sitt kakestykke, som var representert ved brøken $\frac{5}{4}$. De gikk da andre veien ved å multiplisere 30 gram med 5. Slik som Nunes og Bryant (1996) hevder kan en virkelig avdekke elevenes forståelse av forholdet mellom disse ulike delene av en divisjon, da elevene også er klar over den inverse sammenhengen mellom tallet på mottakerne og størrelsen på den totale mengden.

7.4 Andre funn knyttet til konkretiseringsmateriell og oppfatning av brøkbegrepet

Fokus for oppgaven er å belyse hvordan bruken av konkretiseringsmateriellet bidro til elevenes oppfatning av brøkbegrepet. Ovenfor har jeg kommentert hvordan dette kom til syne direkte i oppgaveløsningen. Imidlertid hadde også bruken av konkretiseringsmateriellet en mer indirekte påvirkning på elevenes oppfatning. I det videre skal det presenteres noen funn som gir meg grunn til å anta at bruk av konkretiseringsmateriell er hensiktsmessig i arbeid med oppfatningen av brøk, slik som Birkeland et.al hevder: «Elevene bør ha adgang til varierte konkretiseringer, slik at de aktuelle egenskapene ved brøkbegrepet og brøkregningen etter hvert meisler seg ut» (s. 187).

7.4.1 Elevers oppfatning av brøk og bruk av konkretiseringsmateriell

I denne studien tyder mye på at det er oppgavenes utforming og fokus som avgjør hvilken oppfatning elevene får av brøkbegrepet, og dermed hvordan de løser oppgaven, som også ble påpekt i delkapittel 5.1.5. Likevel tror jeg dette må sees i sammenheng med bruk av ulike konkretiseringsmateriell. Som Van de Walle (2004) påpeker kan ulike modeller få frem ulike syn hos eleven på en aktivitet. I mitt studie kunne bruken av de ulike konkretiseringsmateriellene slik få frem ulike syn på eksempelvis «brøk som del av det hele», ved at elevene møtte fire ulike «modeller», eller i denne sammenheng materiell, som kunne visualisere den abstrakte matematikken for dem. Under intervjuet etter gult oppgavesett stilte jeg elevene et spørsmål om hvorfor de trodde jeg hadde latt dem arbeide med konkretiseringsmateriell. Et av svarene var at: «Man forstår mer hva man holder på med og ikke bare regner det ut, man ser liksom verdien av ting og forstår mer hva man gjør.» Löwing (2006) hevder at man ikke utelukkende lærer matematikk ved å være aktiv og gjøre ulike ting, men først når en refleksjon ligger til grunn for det en gjør. Basert på funnene fra analysen, sammen med uttalelsen fra denne eleven, opplevde jeg at elevene benyttet seg av konkretiseringsmateriellet på en måte som bidro til å visualisere matematikken for dem (Van de Walle et al., 2007). Materiellet kan slik hjelpe elevene å få klarhet i sammenhenger som ellers ville oppleves forvirrende i en rent symbolsk form (Van de Walle, 2004). Oppgavene mine ble valgt ut på bakgrunn av nøye planlegging og med en hensikt for at dette skulle bidra til at elevene skulle oppdage matematiske sammenhenger ved hjelp av konkretiseringsmateriellet. Eksempelvis er det nærliggende for elevene å tenke at i arbeid med pizzabrøker skal de finne hvor mye som er spist av total mengde pizza, altså «brøk som del av det hele»-kategorien eller «brøk som operator». Dette kunne jeg også se var en svært vanlig tendens i min studie, se tabell 2.

7.4.2 Konkreter som bidrag til fremdrift

Lærere kommenterer ofte at det å benytte seg av konkretiseringsmateriell for å undervise i matematikk er gøyere for elevene (Moyer, 2001). Det er blitt snakket mye om at fokuset likevel må være på at målet må være at elevene lærer det abstrakte med matematikken. I min studie kunne mange av oppgavene oppleves som lek og spill, heller enn som en type klassisk arbeidsøkt med oppgaver. Til tross for at oppgavene var utformet med en hensikt om å gi elevene en matematisk forståelse ved hjelp av konkretiseringsmateriellet, må effekten disse oppgavene hadde på elevenes fremdrift kommenteres. De bidro til at elevene arbeidet effektivt og grundig. Imidlertid var ikke dette for å utelukkende komme seg i mål med alle oppgavene. I neste delkapittel skal det betraktes hvordan bruken av konkretiseringsmateriellet dessuten bidro til fruktbare samarbeid. Da jeg stile spørsmålet i intervjuet om hvorfor elevene trodde jeg hadde bedt dem bruke konkretiseringsmateriell i oppgavene, fikk jeg også svaret: «For at vi skal skjønne mer, og at vi skal syns det er gøyere.» Når begge disse momentene er på plass så bidrar dette til både en drivkraft i oppgaveløsningen, og en visualisering av matematikken. Da elevene i tillegg kommenterte at de forsto hva de holdt på med, så verdien av ting, og forsto mer av hva de gjorde, så kan dette tyde på at konkretiseringsmateriellet ble brukt på en riktig måte, se delkapittel 7.4.1.

7.4.3 Konkreter som bidrag til fruktbare samarbeid

I datainnsamlingen var det en tendens at elevene ikke sa seg ferdig med en oppgave før alle på gruppa hadde forstått. Slik at selv om noen av gruppemedlemmene forsto oppgaven brukte de konkretiseringsmateriellet enda en gang og på varierte måter for å forklare til de som ikke forsto (Se eksempel 3 i linje 38-45). I denne sammenheng må et påfallende funn kommenteres i elevenes arbeid med konkretiseringsmateriellet, nemlig elevenes standhaftighet i at de ønsket å forstå oppgaven, og at de som nevnt ikke var redde for å stille hverandre spørsmål helt til alle hadde forstått. I transkribering fra denne sammenheng påpekte en elev i gruppeintervjuet at: «Når læreren står på tavla og skal forklare noe, så er det ikke alltid man skjønner det med en gang, men hvis man da lærer det av hverandre, så er det lettere å skjønne det, for vi lærer det på en annen måte». I Vygotskys bruk av den proksimale utviklingssone forklarer han hvordan det er en forskjell mellom det eleven kan klare på egen hånd, og det han eller hun kan klare ved hjelp av mer kompetente andre (Vygotskij et al., 1978). Det er dermed ikke gitt at denne mer kompetente andre skal være en lærer eller en voksen. I mitt studie kunne jeg se hvordan elevene var komfortable ovenfor hverandre, og hvordan de turte å stille hverandre spørsmål i oppgaveløsningen. Med konkretiseringsmateriellet som et medierende redskap prøvde de å hjelpe hverandre så godt det lot seg gjøre. Imsen (2012, s. 255) påpeker med utgangspunkt i Vygotskys syn på læring at utvikling løper fra en tilstand der barnet kan gjøre ting sammen med andre, over til en tilstand der de kan gjøre ting alene. Elevene utfordret hverandre ofte på dette, da Bjarte eksempelvis kunne utfordre Mette på at hun skulle prøve å forklare løsningen på oppgaven i eksempel 3. Imidlertid vil det også være en grense for hva eleven kan klare med hjelp, slik at her slutter den proksimale utviklingssonen (Imsen, 2012). Mette klarte nemlig ikke å forklare oppgaven på nytt, da mye kunne indikere at hun ikke helt mestret den relative tenkningen. Selv om hun fikk hjelp av Bjarte kunne hun ikke bevege seg utenfor grensen for den proksimale utviklingssonen. Imidlertid kunne Bjarte hjelpe Mette til å utfordre og utnytte utviklingssonen sin da hun ble stimulert til å arbeide aktivt sammen med andre, og fikk hjelp og støtte på veien mot å klare oppgaven alene. Elevene kommenterte også dette i intervjuet da de påpekte at det var godt å kunne snakke med medelever om hvordan de skulle løse oppgavene: «I begynnelsen så skjønte ikke jeg og Mette noe, men så forklarte Bjarte oss det, og da begynte jeg å skjønne det. Også forklarte jeg det videre til Mette, også skjønte vi mer og mer, og da ble alle inkludert på en måte.

7.4.4 Valgfritt konkretiseringsmateriell

Det var hensiktsfullt å ha med denne delen der elevene selv kunne velge hvilket konkretiseringsmateriell de ønsket å benytte seg av. Tidligere hadde jeg observert hvordan oppgaver knyttet til spesifikke materiell påvirket elevenes oppfatning av materiellet. Da elevene imidlertid kunne velge konkretiseringsmateriell selv i denne delen, så var alle de tidligere konkretiseringsmateriellene tilgjengelig i det grønne oppgavesettet. Det fremkom mange konsekvenser av den valgmuligheten, og det mest påfallende funnet var at elevene ikke syntes å forstå hvordan de skulle bruke konkretiseringsmateriellet når dette ikke var klargjort i forkant. I påfølgende tekst skal det presenteres noen funn ved dette valgfrie oppgavesettet.

For det første oppdaget jeg at det kunne virke som noen av elevene kunne tenke at oppgavene var for lette, og at de ikke trengte konkretiseringsmateriellet for å løse en bestemt oppgave. Da oppgavene likevel ble løst på feil måte, var det tydelig at dette ikke var tilfelle. Som en konsekvens av at elevene trodde oppgavene var for lette, var det en tendens at elevene heller valgte å benytte seg av hoderegning i stedet for konkretiseringsmateriell når de skulle løse oppgavene, og at de rett og slett droppet å benytte seg av konkretiseringsmateriellet. Dette førte i neste omgang til at gruppesamarbeidet og samtalen ble mindre produktiv, og der jeg ofte kunne observere at en elev løste oppgave alene og de to andre hang seg på og sa seg enig. Da en elev beskrev disse sammenhengene med ord heller enn å visualisere det ved hjelp av et materiell, ble det raskt omfattende og komplisert å forstå for de resterende elevene i gruppa (Kirfel, 2010). Ved bruk av konkretiseringsmateriellene i tidligere oppgavesett hadde jeg dessuten sett hvordan elevene ble mer ansvarliggjort da de skulle vise hverandre funnene i konkrete klosser, pizzaspill eller andre konkreter. Säljö (2000) påpeker at et viktig poeng i menneskelige handlinger er at det ofte er en kombinasjon mellom det intellektuelle og det manuelle. Når elevene ikke klarte å benytte seg av konkretiseringsmateriellet ble også deres oppgaveløsning som var ment for å løses med konkretiseringsmateriell, oppdelt og usystematisk. Säljö (2000) hevder at vi må se og forstå hvordan tenkingen utøves av mennesker som handler i sosiale praksiser ved hjelp av artefakter. Dette ble vanskelig da elevene ikke klarte å handle ved hjelp av redskapet de hadde tilgjengelig.

Det mest påfallende funnet var imidlertid at elevene syntes å ha en svært spredt oppfatning av brøkbegrepet i denne delen der de selv kunne velge hvilket konkretiseringsmateriell de ville benytte. Ut ifra tabellen ble dette veldig tydelig, da elevenes oppfatning i oppgave 1 og 2 i grønt oppgavesett kunne plasseres i fire ulike kategorier. Det er et interessant funn at elevene ikke klarte å avdekke hvilket konkretiseringsmateriell de skulle benytte. Dette er imidlertid i sammenheng med det flere forskere har uttalt om bruken av konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk: «Manipulatives by themselves cannot bring about understanding» (Ball, 1992; Baroody, 1989; Kamii et al., 2001; Viadero, 2007). Det utdypes videre at det sentrale i bruken av konkretiseringsmateriell heller bør være kvaliteten på elevenes tenkning fostret av en bruk av materiellet(Kamii et al., 2001). En kan ut ifra funnene i grønt oppgavesett anta at konkretiseringsmateriellet ikke fostret en slik kvalitet i elevenes tenkning. Dette oppgavesettet virket slik som en motvekt til de andre oppgavesettene, der hensikten og mål kom tydelig frem. Når dette ikke fremkommer tydelig for elevene må en vurdere om konkretiseringsmateriellene kan benyttes til å visualisere matematikken for elevene. Uribe-Florez og Wilkins (2010) understreker at: «Selv om konkretiseringsmateriell blir betraktet som et nyttig verktøy for å hjelpe elever å opparbeide seg matematisk forståelse, så er måtene det brukes på varierende med hensyn til hvilke mål og hensikt lærerne har når de benytter seg av dem.» Mine funn kan slik antyde at bruken av disse konkretiseringsmateriellene må være gjennomtenkte og målrettede.

8 Konklusjon

I denne studien har målet vært å få mer innsikt i hvordan elever oppfatter brøkbegrepet. Ved å studere deres oppgaveløsning gjennom et sosiokulturelt perspektiv på læring ble følgende forskningsspørsmål utformet:

Hvordan oppfatter elevene på 8.trinn brøkbegrepet gjennom bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med oppgaveløsning?

Gjennom elevenes arbeid med å løse brøkoppgaver ved hjelp av konkretiseringsmateriell, ble det snart klart for meg at oppfatningen av brøkbegrepet var et sammensatt fenomen. Jeg hadde en forventning om at det kom til å vises en tydelig oppdeling av elevenes oppfatning innen de ulike kategoriene. Jeg oppdaget snart at løsningen ikke var så enkel. Brøkbegrepet er et komplekst fenomen. Gjennom observasjon av samtalen mellom elevene, kom det frem hvilken oppfatning de hadde i ulike oppgaver. Imidlertid kunne mange av oppgavene ofte plasseres inn i flere av kategoriene, og i analysen var det ikke lett å gjøre seg opp en klar formening av hvor funnene skulle plasseres. Noen av funnene kunne med enkelhet plasseres inn i «brøk som del av det hele» og «brøk som måling», men verre var det med oppfatningene av «brøk som divisjon» og «brøk som operator». Disse to aspektene gikk over i hverandre, og også over i de to første aspektene. Jeg vil presentere funnene fra de ulike oppfatningene av brøkbegrepet i korthet.

I "brøk som del av det hele" var det spesielt to måter elevene brukte konkretiserings-materiellet på, som kunne plasseres inn i denne kategorien. Elevenes evne til å identifisere enheten, og elevenes evne til å forstå det relative med brøkene. Da elevene skulle identifisere enheten i oppgaven, resonnerte de seg ofte fram til hva den hele klossen representerte eller hva den hele brøksirkelen var. Elevene fant slik frem til svaret, og bonusen var at de visualiserte det for hverandre gjennom konkretiseringsmateriellet. Elevenes oppfatning av brøk som relative størrelser kom frem på ulike måter, og noen av elevene forsto ikke denne sammenhengen. De oppdaget likevel en mangel i sin forståelse da de skulle løse oppgavene ved hjelp av konkretiseringsmateriell.

Innen kategorien «brøk som måling» var hovedfunnet at elevene forsto at de ulike brøkene hadde ulike størrelser, og dermed kunne plasseres i forhold til hverandre ved hjelp av brøkstolper eller brøkpapir. Det var ikke bare elevenes forståelse av forholdet mellom størrelsen på de ulike brøkene som kom fram i arbeidet med konkretiseringsmateriellet, men også elevenes oppfatning av brøkene som rasjonale tall med bestemte størrelser. Det ble dessuten avdekket hvilke metoder elevene brukte for å avgjøre størrelsen på brøkene, ved å nyttiggjøre seg såkalte «fraction units» eller «benchmarks» (Van de Walle, 2004), se delkapittel 7.2. Elevenes evne til å benytte seg av «benchmarks» var kanskje et av de tydeligste funnene på at elevene hadde en følelse for de rasjonale tallene.

Når det kom til elevenes oppfatning av «brøk som divisjon» og «brøk som operator», ble det imidlertid vanskeligere å skille oppfatningene, da en av operasjonene i «brøk som operator», er divisjon. I diskusjonen valgte jeg likevel å skille disse to delene for å betrakte hvordan konkretiseringsmateriellet kunne bidra til å visualisere brøk som operator og divisjon, hver for seg. Jeg oppdaget raskt hvordan «brøk som operator» var relatert til alle oppgaver der det handlet om å utføre en handling på den totale mengde. Likheten med de andre aspektene ble påfallende. Selv om jeg hovedsakelig plukket ut to eksempler til å visualisere disse funnene, så var det tydelig hvordan denne oppfatningen av brøk gikk igjen i alle oppgavesettene. Det viktigste funnet i denne sammenhengen var hvordan elevene ved hjelp av brøken kunne veksle mellom å benytte seg av ulike operasjoner for å finne frem til en mengde. Det kunne slik virke som om det viktigste i denne oppfatningen av brøk, var at elevene hadde de tekniske regneferdighetene som skulle til for å utføre operasjonene knyttet til brøk.

I «brøk som divisjon» ble elevenes oppfatning av dette visualisert da de gjennom sin oppgaveløsning viste at de forsto forskjellen på dividend, divisor og kvotient, og benyttet brøkstolpene til å vise hva hver av disse delene representerte. Et annet funn var likevel at noen av elevene ikke løste oppgaven slik, og heller benyttet seg av deling («sharing») for å finne frem til svaret. Ifølge Nunes og Bryant (1996) må en se forskjellen på deling og divisjon når en skal avdekke om elevene har en oppfatning av brøk som divisjon. I dette kunne jeg også observere elevenes møte med den relative tenkningen. Noen av funnene i dette eksempelet kunne nemlig indikere at elevene ønsket å jobbe med brøken på en måte som kunne sammenlignes med absolutte verdier, slik at de kunne benytte seg av deling heller enn divisjon.

I diskusjonen ble det klart at det ofte var vanskelig å skille elevenes ulike oppfatninger av brøkbegrepet fra hverandre. Det var påfallende hvordan elevene stadig kom tilbake til den relative tenkningen og oppfatningen av «brøk som del av det hele». Van de Walle (2004, s. 254) hevder at dette er nøkkelkonseptet med brøk: «A key idea about fractions that students must come to understand is that a fraction does not say anything about the size of the whole or the size of the parts. A fraction tells us only about the relationship between the part and the whole». Hvis elevene forstår at brøk handler om å finne et forhold mellom delen og det hele, heller enn det å finne en størrelse, kan en anta at elevene har forstått noe av det viktigste av hva brøk handler om.

Det kunne heller ikke trekkes bastante slutninger om hvilke konkretiseringsmateriell som bidro til de ulike oppfatningene av brøkbegrepet. Det kunne likevel sees en tendens til at elevene kunne tydeliggjøre brøk som del av det hele og brøk som måling ved hjelp av brøkstolpene. Her var det åpenbart mye lettere for elevene å ha stolpene til hjelp. Imidlertid beskrives det i diskusjonen hvordan elevenes oppfatning utvilsomt avhenger av lærerens bruk av konkretiseringsmateriellet på en hensiktsmessig måte. I de tre første oppgavesettene kom det tydelig frem hvilke konkretiseringsmateriell elevene skulle bruke for å løse oppgavene. En kan ut ifra funnene i grønt oppgavesett anta at konkretiseringsmateriellet ikke fostret den samme kvaliteten i elevenes tenkning. Det grønne oppgavesettet der elevene selv kunne velge hvilket konkretiseringsmateriell de ville bruke, var slik en motvekt til de andre oppgavesettene. Elevene strevde med å løse disse oppgavene ved hjelp av konkretiseringsmateriell, og benyttet seg heller av hoderegning. En kunne også se at når elevene ikke benyttet seg av konkretiseringsmateriellet, ble svaret ofte feil og samarbeidet i gruppa ble dårligere. Moyer (2001) stiller spørsmål til om oppgavene er utarbeidet for å representere de matematiske konseptene eller om de skal brukes sammen med konkretiseringsmateriell for at elevene skal ha det 'gøy'. Det første er uten tvil å foretrekke, men enda bedre hadde det vært om en kombinasjon kunne funnet sted, der innlæringen er både gøy og lærerik. Uansett må fokuset først og fremst være elevenes bruk av konkretiseringsmateriell for å oppdage abstrakte sammenhenger ved hjelp av det konkrete.

Avslutningsvis må også oppgavens utforming betraktes, da dette var avgjørende for elevenes oppfatning av brøkbegrepet. Før datainnsamlingen satte i gang var det vanskelig å avgjøre hvilke oppgaver som skulle plukkes ut, men når jeg nå i ettertid ser funnene basert på de oppgavene som faktisk ble plukket ut, kan jeg også se fordelen med at jeg for eksempel hadde mangel på oppgaver som synliggjorde brøk som forholdstall. I min studie var dette et av funnene, at elevene oppfattet oppgavene stort sett som «brøk som del av det hele», «brøk som divisjon» og «brøk som operator». Jeg fant ingen tilfeller der jeg så at elevene oppfattet brøk som forholdstall, og jeg oppdaget at «brøk som måling» heller ikke var representert i særlig grad. Dermed fant jeg ut hvor viktig det er å være bevisst hvilke aspekt ved brøkbegrepet som fokuseres på i elevenes innlæring, da det raskt kan bli en tendens at noen av aspektene fokuseres på, mens andre forsvinner i en ubevisst prioritering av de mest ‘vanlige’ aspektene.

9 Avsluttende betraktninger

I dette kapittelet vil de didaktiske implikasjonene av forskningen betraktes, samt en vurdering av videre forskning.

9.1 Didaktiske implikasjoner

I den innledende fasen av dette studiet sto et fokus frem som viktigere enn de andre. Jeg ønsket å skrive om noe som jeg kunne dra nytte av i min undervisning som fremtidig lærer. Jeg ønsket slik at dette studiet skulle hjelpe meg å utvikle mine ferdigheter som lærer, i den hensikt å kunne gjøre matematikken meningsfull for mine kommende elever. Studiet har påvirket en mengde faktorer ved meg som matematikklærer, hovedsakelig mine ferdigheter innen bruken av konkretiseringsmateriell, oppgaveutforming knyttet til dette, og mine refleksjoner om hvordan elever oppfatter brøkbegrepet.

I flere anledninger i arbeidet med dette masterprosjektet har det slått meg hvilken effekt konkretiseringsmateriellet har hatt, ikke bare på elevenes oppfatning av brøk, men i elevenes måte å arbeide med matematikk på. I oppgaver der elevene benyttet seg av konkretiseringsmateriellet var det en tendens at dette enten bidro til å *gi dem en bestemt oppfatning*, eller at elevene *oppdaget en mangel* eller misoppfatning i sin forståelse av brøkbegrepet nettopp gjennom bruken av konkretiseringsmateriellet. I eksempel 3 kunne jeg blant annet se hvordan Mette og Emilie forsto de relative størrelsene, etter at Bjarte hadde brukt mye tid på å forklare dem dette ved hjelp av konkretiseringsmateriellet. Selv om jeg ikke kan gjøre ytterligere påstander om elevenes oppfatning av «brøk som del av det hele», så kan dette likevel indikere at konkretiseringsmateriellet bidro til å visualisere og materialisere matematikken for jentene. Som Hynes (1986) påpeker i sin definisjon av konkretiseringsmateriell så må det fungere som noe fysisk som benyttes for å visualisere bestemte matematiske ideer. Også i oppgaver der elevene *oppdaget en mangel* i sin forståelse kunne jeg observere hvordan fruktbare samarbeid sammen med bruken av konkretiseringsmateriellet bidro til at elevene visualiserte matematikken for hverandre. Da elevene også hadde blitt bedt om å bytte på hvem som kom med løsningen på oppgaven, eller i det minste sørge for at alle elevene på gruppa forsto oppgaven før de gikk videre, kunne dette kanskje også bidra til at elevene var så opptatt av at alle skulle ha forstått løsningen på oppgaven før de gikk videre. Jeg kunne nemlig observere hvordan elevene stilte hverandre spørsmål for å få det forklart igjen, og noen elever var svært bestemte på at de ikke kunne gå videre før de hadde forstått det. Som nevnt under delkapittel 7.4.3 er dette i tråd med det sosiokulturelle perspektivet på læring, der det er en forskjell mellom det eleven kan klare på egen hånd, og det han eller hun kan klare ved hjelp av mer kompetente andre(Vygotskij et al., 1978). I dette tilfellet var det en annen elev på gruppa som var denne mer kompetente andre, som samtidig kunne forklare matematikken for sin medelev på en måte som hun kunne forstå. Da kunne hun også komme videre i sin proksimale utviklingssone. Elevene kommenterte dette i intervjuet: «men hvis man da lærer det av hverandre, så er det lettere å skjønne det, for vi lærer det på en annen måte.» Disse funnene impliserer at ved å bruke konkretiseringsmateriell som fremstår meningsfulle for eleven, kan dette hjelpe dem å tilegne seg ny kunnskap. Denne nye kunnskapen kan simpelthen være å rette opp i en misoppfatning, men dette er også et skritt i riktig retning. Hvor langt de ulike elevene kom i sin forståelse og oppfatning av brøkbegrepet kan jeg ikke si med sikkerhet, men det som er sikkert er at materiellet bidro til å gjøre at elevene måtte tenke på nye måter og handle annerledes.

Det var først i oppgaver der hensikt og mål ikke var knyttet sammen med bruken av konkretiseringsmateriellet, at jeg opplevde at det ikke fungerte etter sin hensikt, nemlig å visualisere matematikken for elevene. Både gjennom teori og funn i denne studien har jeg oppdaget hvor viktig det er å ha en hensikt med hvordan konkretiseringsmateriell benyttes. I de oppgavene der elevene ikke hadde et spesifikt konkretiseringsmateriell de skulle benytte, ble ofte bruken feil. Hvis konkretiseringsmateriellet derimot benyttes riktig, kan en som lærer kanskje oppnå at visualiseringen av ulike matematiske sammenhenger kommer frem. Det som i neste omgang blir viktig er da å utforme oppgaver som belyser ulike oppfatninger innen brøkbegrepet, i tråd med det Bjerke og Pettersen (2012) hevder om at: «Ensidig fokus på kun et av aspektene ved brøk gir mangelfull forståelse» (s. 1). Dette krever også en bevisstgjøring blant lærere, om at brøk trenger en ryddig oppdeling, da det er et komplekst og sammensatt tema. Ved å ha kompetanse innen området, ikke bare på hva det innebærer, men hvordan bruken av konkretiseringsmateriell inn mot dette kan støtte elevene i deres ulike oppfatninger, vil dette kanskje hjelpe meg som lærer ved en senere anledning til å være enda mer bevisst på oppdelingene, og slik kunne strukturere undervisningen på en ryddig måte. Jeg vil avslutte med et sitat av Cramer og Wyberg (2009) om hvordan kompleksiteten i brøkbegrepet lett kan undervurderes, men at vi som lærere må prøve å unngå en slik tendens:

> *Perhaps as educators we continue to underestimate the complexity involved in understanding fractions. Perhaps in our effort to move toward proficiency at the symbolic level, we do not spend the needed amount of time developing meaning for fractions concretely resulting in too many students operating on fractions in a rote manner (s. 227).*

9.2 Videre forskning

Det må vurderes i hvilken grad min studie kunne ha blitt utviklet med tanke på videre forskning. Det er blitt klart for meg at hver av kategoriene er svært omfattende områder, som allerede har omfattende forskning, i henhold til hvordan elevene arbeider med brøk innen hver kategori. Spesielt forsto jeg at «brøk som operator» er et stort tema slik Van de Walle (2004, s. 264) uttrykker det: «Estimation of fraction computations is tied almost entirely to concepts of the operations of fractions»(s. 264). En forstår da hvordan min studie bare kan bidra til å gi innsikt i en liten del av den forskningen som allerede foreligger på dette området.

I forlengelsen av min forskning kunne det vært interessant å studere sammenhengen mellom disse ulike oppfatningene, og hvordan elevenes forståelse av brøk blir bygd opp basert på de ulike aspektene. Basert på mine funn kan det trekkes antagelser om at elevenes forståelse av «brøk som del av det hele» og den relasjonelle forståelse ligger til grunn i mange av oppfatningene av brøkbegrepet. Men det hadde vært interessant å se om man kunne avdekke noen flere sammenhenger ved å utforske bruken av konkretiseringsmateriellet i arbeidet med brøk over en lengre periode. Det er utvilsomt en stor fordel å benytte seg av konkretiseringsmateriell i dette arbeidet da elevenes samspill gir oss innblikk i deres oppfatning av brøkbegrepet, og gir oss verdifulle funn som kunne vært vanskeligere å avdekke ved hjelp av intervju eller utforsking av den enkelte elevs arbeid. I samarbeidet mellom elevene får en nemlig også tak på hvilke mangler elevene har i sin oppfatning av brøk, da de ulike elevene arbeider på ulike nivåer og slik drar hverandre fremover.

Avslutningsvis kunne det også vært interessant å se hvordan en tydeligere oppdeling og synliggjøring av de fem ulike aspektene ved brøkbegrepet hadde påvirket elevenes brøkforståelse eller deres oppfatning av brøk. Kanskje kunne elevene fått en mer helhetlig forståelse hvis de tidlig var klar over at brøkbegrepet inneholdt mange ulike aspekt? Spørsmålet som må stilles i den sammenheng er om dette ville bidratt til at elevene ikke så de ulike aspektene i sammenheng med hverandre, men at deres oppfatning ble fragmentert. Kanskje denne oppdelingen derfor burde gjøres først når elevene har arbeidet med brøk en periode, for deretter å se de ulike aspektene ved det de faktisk allerede kan. Det beste ville kanskje vært om elevene slik kunne sett alle disse ulike oppfatningene av brøk som en helhet, mens de samtidig er klar over dets kompleksitet og mangfold av betydninger.

10 Prosjektets betydning for meg

Når jeg retter blikket bakover og betrakter mitt prosjekt i sin helhet, er det en rekke fenomener jeg ønsker å belyse. Noen av disse er knyttet til utarbeidelsen av dokumentet. Dette studiet har vart et halvt år, og underveis i prosessen har det vært vanskelig å se helheten i arbeidet, og hvordan jeg skulle nå det endelige målet. Dette har lært meg mye om hvorfor det er viktig å arbeide seg planmessig fremover, for å stadig oppdage nye sammenhenger, og stadig ta skritt i retning av målet. Like viktig har det vært å fokusere på langsiktige mål, fremfor detaljer underveis. For min del ble det viktig å merke seg viktige momenter, notere meg disse, for deretter arbeide med dette når jeg så at det var naturlig at dette ble en del av oppgaven.

Når det er sagt, er det mye jeg har lært gjennom denne forskningsprosessen. Før mitt arbeid med denne studien satte i gang, var jeg ikke klar over hvilken betydning konkretiseringsmateriellet kunne ha på elevenes oppfatninger knyttet til brøk. Jeg har slik fått større innsikt i hvordan jeg kan oppdage manglende kunnskap hos elever i forhold til brøkbegrepet. På bakgrunn av min forskning kan jeg benytte meg av mine funn til å forbedre min pedagogiske praksis som lærer, se delkapittel 9.2, og mer overordnet har jeg oppdaget verdien av å knytte forskning til det vi som lærere og elever gjør i vår skolehverdag. Det er mange sammenhenger som ved første øyekast kan virke ubetydelige, men som ved en nærmere betraktning kan avdekke betydningsfulle funn knyttet til elevenes læring. Jeg tror det er viktig å ikke undervurdere de funn som forskere før meg har utarbeidet, og som lærere må vi ha en åpen holdning til hva denne forskningen kan bety for oss.

Denne studien har hjulpet meg å utvikle min pedagogiske kompetanse og mine ferdigheter som lærer, i tillegg til å gi meg innsikt i temaet konkretiseringsmateriell i elevenes arbeid med brøkbegrepet. Det er likevel mye igjen å lære. Elevene er jo utgangspunktet for det vi som lærere skal gjøre, og derfor vil min læringsprosess aldri ende. Det vil alltid være noe nytt å oppdage og utforske.

Barn er noen enestående skapninger,

og det er vi som skal forsøke å etterligne dem,

ikke omvendt.

Lone Dybkjær[1]

[1] Sitatet av Lone Dybkjær er hentet ut fra Siterte sitater (Udatert).

11 Litteraturliste

Ball, D., L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator: The Professional Jounal of the American Federation of Teachers, 16*(2), 14-18.

Baroody, A. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 4-5.

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L., & Emanuelsson, G. (1997). *Algebra för alla*. Göteborg: Nämnaren.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere 1* (5 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., & Pettersen, N. (2012). Brøk med brikker. *Tangenten, 23*(3), 26-32.

Bondø, A. (2010). Brøk - Er det noe problem da? *Tangenten, 21*(1), 35-38.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4 utg.). New York: Oxford University Press Inc.

Bue, O., Engeseth, J., & Solvik, J. I. (2000). *Tall i arbeid* (3 utg.): H. Aschehoug & Co.

Bunting, M., Skogen, K., Røeggen, E., & Tjora, H. (2009). *Råd og tips for foreldre med barn i skolen - Praktisk leksehjelp, læringsstrategier og elevers rettigheter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 226-257.

Dahlbom, B. (1993). En vetenskap om artefakter. *VEST: Tidskrift för vetenskapsstudier, 6*(4), 53-78.

Denzin, N. K. (1970). *The Research Act in Sociology*. Chicago: Aldine.

Doug, C. (2006). Fraction as Division: The Forgotten Notion? *Australian Primary Mathematics Classrom, 11*(3), 4-10.

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Dialog, samspel og læring* Oslo: Abstrakt forlag.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 65-97). Old Tappan, NY: Macmillan.

Hynes, M. C. (1986). Selection Criteria. *The Arithmetic Teacher, 33*(6), 11-13.

Imsen, G. (2012). *Elevenes verden - Innføring i pedagogisk psykologi* (4 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? - Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (2 utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful? *Journal of Mathematical Behavior, 20*(1), 21-31.

Kieran, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. I J. Hiebert & M. Behr (Red.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Kieren, T. E. (1971). Manipulative Activity in Mathematics Learning. *Research in Mathematics Education, 2*(3), 228-234.

Kirfel, C. (2010). Introduksjon. *Tangenten, 21*(1), 1.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2012). *Det kvalitative forskningsintervju* (2 utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk forlag.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding : Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2 utg.). Mahwah, N.J: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2012). *Teching Fractions and Ratios for understanding: Essential content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3 utg.). New York: Routledge.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Marray, A. K. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science And Montessori Education. *Department of Applied Developmental and Educational Psychology, 5*(2), 1-8.

Leinhart, G., & Smith, D. A. (1984). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *American Educational Research Association meeting, 77*(3), 247-271.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman : hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur.

Markovits, Z., & Hershkovitz, R. (1997). Relative and Absolute Thinking in Visual Estimation Prosesses. *Educational Studies in Mathematics, 32*(1), 29-47.
Matematikk.net. (2016). Brøkregning. 2016, fra http://matematikk.net/side/Br%C3%B8k
Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives To Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 175-197.
Nunes, T. (2008). *Understanding rational numbers.* Paper presentert på Att erövra världen: Dokumentation av konferensen Grundläggande färdigheter i läsning, skrivning och matematik, Linköpings universitet.
Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Cambridge, Mass: Blackwell.
Silverman, D. (2013). *Doing Qualitative Research: A Practical Handbook* (4 utg.). London: Sage.
Siterte sitater. (Udatert). Lone Dybkjær. 2016, fra http://www.ordtak.no/index.php?fn=Lone&en=Dybkj%E6r
Stake, R. E. (1995). *The art of Case Study Research* Thousand Oaks, CA: Sage.
Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed? I T. Nunes & P. E. Bryant (Red.), *Learning and Teaching Mathematics: an international perspective*. East Sussex: Psychology Press.
Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Association of Mathematics Teachers, 15*(2), 13-19.
Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken - Ett sociokulturellt perpektiv* (1 utg.). Stockholm: Prisma.
Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4 utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
Uribe-Florez, L. J., & Wilkins, J. L. M. (2010). Elementary School Teachers' Manipulative Use. *School Science and Mathematics, 110*(7), 363-371. doi: 10.1111/j.1949-8594.2010.00046.x
Utdanningsdirektoratet. (2006). Læreplan i matematikk [Kunnskapsløftet]. 2016, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/
Van de Walle. (2004). *Elemantary and middle school mathematics - Teaching developmentally* (5 utg.). Virginia Commonwealth University: Person Education, Inc.
Van de Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M., & Wray, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally* (6 utg.). Boston: Allyn and Bacon.
Viadero, D. (2007). Studies find that use of learning toys can backfire. *Education Week, 26*(34), 12-13.
Vygotskij, L. S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. (1978). *Mind in Society, The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Massachusetts, London, England: Harvard University Press.
Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Vedlegg

1. Godkjenning fra NSD
2. Forespørsel om deltagelse til elever og foreldre/foresatte
3. Transkripsjonsnøkkel
4. Oppgavesett gult
5. Oppgavesett blått
6. Oppgavesett rødt
7. Oppgavesett grønt

Vedlegg 1

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Hans Kristian Nilsen
Institutt for matematiske fag Universitetet i Agder
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 11.02.2016	Vår ref: 46385 / 3 / AGL	Deres dato:	Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 03.01.2016. All nødvendig informasjon om prosjektet forelå i sin helhet 10.02.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

46385	*Konkretisering og tallforståelse*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Hans Kristian Nilsen*
Student	*Hedda Johanne Lundstadsveen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 18.05.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / District Offices:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Vedlegg 2

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

" Konkretisering og brøkforståelse"

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å undersøke hvordan vi som lærere kan gjøre matematikk mer konkret, med et ønske om å bidra til utvikling av tallforståelse og i dette tilfellet brøkregning. Dette vil gjøres ved å benytte konkretiseringsmateriell som elevene skal arbeide med gjennom problemløsningsrelaterte oppgaver. Problemstillingen er;"På hvilken måte kan bruk av konkretiseringsmateriell bidra til elevenes utvikling av brøkforståelse, gjennom problemløsningsrelaterte oppgaver?

Masteroppgaven skrives ved Universitetet i Agder og gjennomføres som en del av Grunnskolelærerutdanningen, på bakgrunn av personlige interesser. Det er ingen ekstern oppdragsgiver.

Personene som er valgt ut til undersøkelsen vil velges ut tilfeldig, da det vil være hensiktsmessig med bredde for å skape et gunstig utvalg for forskningen.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Å delta i studien vil innebære at elevene i stor grad arbeider slik de har gjort tidligere, men der jeg vil observere deres arbeid når de arbeider med problemløsningsrelaterte oppgaver, knyttet til brøkforståelse. De vil bli observert, og det vil også bli utført noen intervjuer med noen av elevene. Opplysningene som skal innhentes vil inneholde spørsmål som omhandler opplevelser og erfaringer elevene gjør i forhold til oppgavene, for eksempel hvordan elevene opplevde en bestemt oppgave, før og etter de har arbeidet med et konkretiseringsmateriell. Datamaterialet vil samles inn ved hjelp av notater, lydopptak og filmopptak. Ved ønske kan selvfølgelig foreldre få tilgang til intervjuguiden.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Disse opplysningene vil kun student og veileder ha tilgang til, og de vil bli lagret på data med brukernavn og passord på et arbeidsrom som krever spesiell tilgang.

Elevene som deltar i undersøkelsen vil ikke kunne gjenkjennes i den endelige publikasjonen, og det vil benyttes fiktive navn på både skole og elever samt lærere.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 18.mai 2016. Personopplysninger på datamaskin eller på lydopptak vil i etterkant bli slettet og notater vil bil makulert.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke deg fra studien uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Hedda J. Lundstadsveen på (heddal11@student.uia.no) telefon 99545621. Veileder:, mail: , tlf:

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å la mitt barn

----

delta,

(Signert av foreldre/foresatte til prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3

Transkripsjonsnøkkel

…	Pause som ikke overskrider 3 sekunder
[Stillhet]	Pause som varer i minst 3 sekunder
(Tekst i parentes)	Beskrivelse av ikke-verbale utsagn
[…]	Utelatte ord

Vedlegg 4

Gult oppgavesett

Konkretiseringsmateriell nr.1: Brøkstolper

<u>Tid:</u> 25-30 min til oppgaver og ti min til gruppeintervju.

Før du begynner:

I disse oppgavene skal du bruke brøkstolper til å oppgi svaret. Diskuter og samarbeid om å finne svaret. Dere har et felles ansvar om at alle på gruppa skal forstå hvorfor det blir det svaret det blir før dere går videre. Gå gjerne på omgang hvem som foreslår et svar først.

Oppgave 1)

Bruk brøkstolpene til å rangere disse brøkene fra størst til minst.

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$

b) $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{8}$

Oppgave 2)

Trine drikker en kartong med $\frac{1}{4}$ liter melk hver dag på skolen. (Svar med flest mulig hele brøkstolper)

a) Hvor mye melk drikker hun i løpet av en skoleuke?

b) Hvor mye melk drikker hun i løpet av tre skoleuker?

Oppgave 3)

Per, Pål og Lise går til skolen. Per har $\frac{1}{3}$ av veien til Lise, mens Pål har lenger vei enn Lise og har $\frac{5}{3}$ av veien hennes.

a) Hvis en hel brøkstolpe representerer Lises vei til skolen, hvilke brøkstolper trenger du da til:
   i. Per sin vei til skolen?
   ii. Pål sin vei til skolen?

b) Lise bruker 15 min. Hvor mye tid tilsvarer da hver av brøkstolpene til Per og Pål? (Alle går like fort).

Oppgave 4)

Bruk brøkstavene og se om det er noen likheter når du løser de to oppgavene under.

a) Du får en tredjedel av to og en halv liter brus. Hvor mye brus får du?
b) To og en halv liter brus skal deles på tre personer. Hvor mye får hver person?
c) I brøk er multiplikasjon og divisjon nært knyttet sammen. Snakk i gruppa om hva som er forskjellen i disse to oppgavene og hvordan de også ligner.

Vedlegg 5

Blått oppgavesett

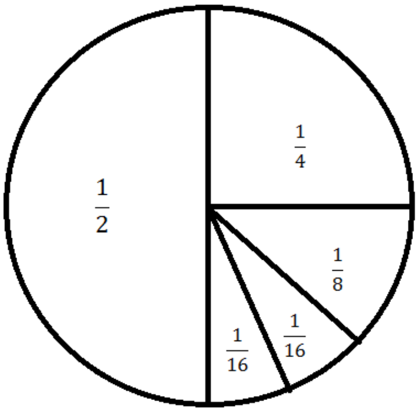
Konkretiseringsmateriell nr. 2

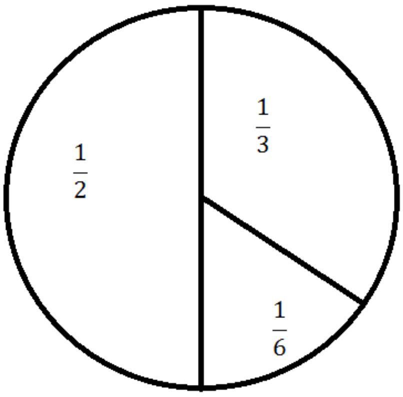
Brøksirkler og Pizzaspill

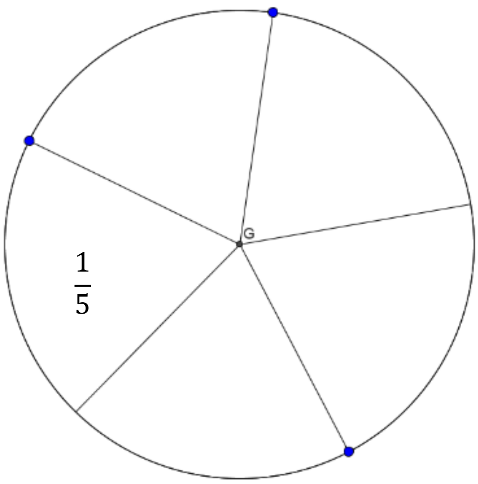
Tid: 25-30 min oppgaveløsning og 10 min gruppeintervju

Før du begynner:

I dette oppgave settet skal du bare bruke brøksirklene når du løser oppgavene. Nedenfor kan du se tre eksempler på hvordan disse «Brøksirklene» er delt opp i ulike deler. Dere har et felles ansvar om at alle på gruppa skal forstå hvorfor det blir det svaret det blir før dere går videre. Gå gjerne på omgang hvem som foreslår et svar først.







Oppgave 1)

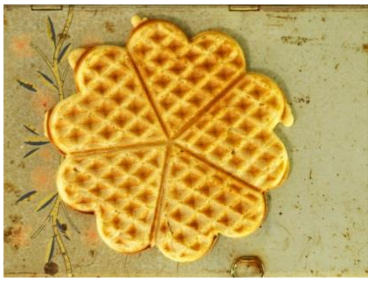
Per og Pål er to brødre som har kjøpt en pizza. Per ønsker seg $\frac{1}{4}$ av pizzaen, mens Pål ønsker seg $\frac{2}{16}$ av pizzaen.

a) Vis med brøksirklene hvor mye pizza Per og Pål får.
b) Vis med brøksirklene hvor mye pizza som er igjen når de har fått hver sin del.

Oppgave 2)

Nina og Stine spiser pizza på Peppes. Pizzaen blir servert i 6 like store deler. Nina spiser 2 deler, mens Stine spiser 3 deler. (Hvis alle svar med konkretiseringsmateriellet)

a) Hvor stor del av hele pizzaen spiser Nina?
b) Hvor stor del av hele pizzaen spiser Stine?
c) Hvor stor del av pizzaen er igjen?



Oppgave 3)

Det er stekt 15 vaffelhjerter til sammen, altså 3 plater. Donald, Dolly og Mikke er klare til å spise. (Til denne oppgaven må dere bruke brøksirklene, IKKE pizzaspillet)

Mikke spiser $\frac{4}{5}$ av vaffelhjertene, mens Donald spiser hele $\frac{16}{10}$ av alle vaffelhjertene. Dolly må nøye seg med det som er igjen.

a) Hvor mange vaffelhjerter får hver av disneyfigurene hvis alt blir spist opp. Svar med papirvafler.

b) Hva hvis Donald bestemmer seg for å gi bort tre vaffelhjerter til Dolly. Hvor mange vaffelhjerter får hver av de tre nå. Hvem får da færrest vaffelhjerter.

Oppgave 4)

Mor Åse har lagd en bursdagskake til sine trillinger Jan, Fillip og Susann. Susann sitt kakestykke veier $\frac{1}{3}$ av Jan sitt kakestykke. Fillip sitt kakestykke veier $\frac{5}{4}$ av Jan sitt kakestykke.

a) Vis med brøksirklene hvor store de ulike kakestykkene er.

Jan sitt kakestykke veier 120 g.

b) Hva veier Fillip sitt kakestykke og hva veier Susann sitt kakestykke?

Oppgavesett rødt

Konkretiseringsmateriell nr. 3

Lek, spill og kreative oppgaver

Konkretiseringsmateriellet i dette oppgavesettet er basert på lek og spill og kreative oppgaver der elevene skal benytte seg av ulikt konkretiseringsmateriell for å fullføre alle oppgavene.

Oppgave 1)

Dropsblandingen

I mors godterilager til lørdagskvelden er det en stor samling av fire ulike drops. I denne oppgaven vil hver av dere få tildelt hvert deres drops som dere har ansvar for. Det er i tillegg et drops som vil være felles ansvar i gruppa. Oppgaven blir da:

- Det er 4 lapper
- Hver elev leser sin opplysning og presenterer denne for gruppa si.
- Gruppa lager sin løsning på dropsblandingen ved hjelp av tellebrikker.
- Hver elev må ut fra brikkene kunne forklare at sin opplysning stemmer.

A) $\frac{3}{32}$ av blandingen er LAKRISDROPS	B) $\frac{1}{4}$ av blandingen er SITRONDROPS
C) 48 drops er BRINGEBÆRDROPS	D) $\frac{5}{32}$ av blandingen er POLKAGRISER

Oppgave 2)

Brøkspillet

Hvordan spilles brøk spillet.

Fang brikker

Hvert par trenger én terning og 30 brikker.

- Antall øyne utgjør nevneren i en brøk, slik at hvis dere slår 5, blir brøken 1/5, hvis dere slår 3 blir brøken 1/3. Hvis de slår 1 mister spilleren denne runden.
- Elevene tar så mange brikker fra brikkehaugen som brøken angir. Hvis første elev slår 5, skal han ta 1/5 av de 30 brikkene i haugen, altså 6 brikker.
- Da er det 25 brikker igjen i haugen. Hvis neste elev nå slår 3, skal han ta 1/3 av brikkene. Det går ikke nøyaktig, så eleven runder av nedover og tar 1/3 av 24 brikker, altså 8.
- Mot slutten, når haugen blir liten, vil ikke elevene alltid kunne ta brikker. Hvis det for eksempel er fire brikker igjen og en spiller slår 5, skal han ta 1/5 av brikkene. Det går ikke, og dermed mister eleven runden sin. Hvis neste elev heller ikke kan ta noen brikker, er spillet ferdig.

Oppgave 3)

Terning-kamp

Dere får utdelt tre terninger hver, og et sett med brøkstolper.

1. Alle tre spillerne kaster hver sin terning samtidig.
2. Hver enkelt spiller skal kaste sine terninger til sammen 12 ganger. Hver farge må kastes fire ganger hver.
3. Gruppen finner sammen ut hvilken brøk som er den høyeste, ved hjelp av brøkstolpene. Den spilleren som har fått den høyeste verdien på terningen, vinner omgangen, og skriver et poeng på sitt navn.
4. Den spilleren som har høyest poengsum etter 12 runder vinner.

Elev 1:	Elev 2:	Elev 3:

Oppgavesett grønt

Konkretiseringsmateriell: Valgfritt konkretiseringsmateriell

Hver gruppe bruker det konkretiseringsmateriellet de ønsker i disse oppgavene. Samarbeid om å velge ut et konkretiseringsmateriell til hver oppgave, og hvis dere samlet blir enige om at dette materiellet ikke fungerte slik dere hadde tenkt, kan dere bytte til et annet konkretiseringsmateriell.

Du skal bruke konkretiseringsmateriell til å oppgi svaret. Begrunn svaret til hverandre.

Oppgave 1)

Hunden Harald løper en tur på 2 km hver dag.

Etter $\frac{3}{5}$ av turen stopper han ved sitt faste tre. Hvor mange meter har Harald løpt når han stopper ved treet?

Oppgave 2)

Hanna kjøper $\frac{4}{5}$ meter duk til 40 kr. Hva er meterprisen for duken?

Oppgave 3)

Stian drikker $\frac{3}{4}$ liter brus, mens Harald drikker $\frac{2}{3}$ liter brus. Hvor mye brus drikker de til sammen?

Oppgave 4)

Mohammed har 6 gjester i bursdagen sin. Til sammen spiser de $5\ \frac{1}{4}$ pizza. Hvor mye pizza spiser hver av personene i bursdagen hvis de spiser like mye.

Oppgave 5)

I ordet TEKSTSTYKKER er det 12 bokstaver.

a) Vis med brøk hvor stor del av bokstavene som er konsonanter?
b) Vis med brøk hvor stor del av bokstavene som er vokaler?

Oppgave 6)

I klasse 5d er det 21 elever. 12 av elevene er gutter.

a) Hvor stor brøk av hele klassen er utgjør gutter?
b) Hvor stor brøk av hele klassen utgjør jentene?

Oppgave 7)

Ivar spiser $\frac{1}{2}$ liter is, mens Amir spiser $\frac{2}{3}$ liter is. Hvor mye spiser de til sammen?

Oppgave 8)

Hanne og Heidi får et like stort eple hver. Hanne deler sitt eple i 4 deler, og spiser 3. Heidi deler sitt eple i 6 deler og spiser 5.

a) Hvem av jentene spiser mest eple?
b) Hvor mye mer eple spiser den ene i forhold til den andre?

Oppgave 9)

Turid plukker jordbær. Hun «rører» jordbærene og får $9\ \frac{1}{3}$. Bærene blir fylt på $\frac{1}{3}$ liter plastbeger.

a) Hvor mange plastbeger får hun.

Turid spiser et beger med syltetøy i løpet av 3 dager.

b) Hvor mye syltetøy spiser Turid i gjennomsnitt per dag?

Oppgave 10)

Ved valget av ny tillitselev er det tre kandidater. 1/8 av elevene stemmer på den første kandidaten, 3/5 stemmer på den andre kandidaten, hvor stor del av elevene stemmer på den tredje kandidaten? Klarer du å finne ut hvem av kandidatene som vinner?

Oppgave11)

Herman har spart 6000 kr etter sommerferien. Han bruker 1/8 av pengene til ny skoleveske, 2/3 av pengene til ny telefon og resten til fornøyelser. Hvor mye bruker Herman til fornøyelser?

Tips: Velg centikuber og tenk deg at en centikube representerer 250 kr.

Oppgave 12)

a) Hva er $\frac{3}{4}$ av 480kg?

b) Hva er $\frac{5}{9}$ av 27 mil?

Oppgave 13)

Om bord i en båt er det 450 passasjerer. Av disse er $\frac{4}{9}$ menn og av mennene har $\frac{1}{5}$ bart. Hvor mange menn med bart er det om bord i båten?

Oppgave 14)

Regn ut. Skriv svaret på enklest mulig form.

a) $\frac{7}{10} - 1 + \frac{11}{15} =$

b) $2\frac{1}{3} - \frac{5}{12} + 1\frac{5}{6} =$