Masteroppgave

Analyse av testresultater fra KUL-LCM prosjektet i 4. og 7. klasse med vekt på fjerde trinn.

Av Liv Jorunn Bjørkås

Masteroppgaven er gjennomført som et ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som sådan. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Veileder: Hildegunn Espeland

Universitetet i Agder, Kristiansand

3.desember 2009

Forord

Først av alt vil jeg takke veilederen min Hildegunn Espeland for god hjelp og støtte i arbeidet med masteroppgaven. Jeg er veldig takknemlig for at hun har veiledet meg gjennom dette arbeidet. Hun har gitt meg mange gode råd og innspill underveis, og vært veldig oppmuntrende, snill og tålmodig med meg. Spesielt har hun brukt mye tid på deg i slutten av arbeidet.

Jeg vil også takke studieveileder Trine Engeland, for å ha bidratt med god tilrettelegging på alle vis.

Så vil jeg takke familie og venner for deres støtte og oppmuntring. Spesielt vil jeg takke min kjære søster Birgitte som har gitt meg av sin dyrebare tid til korrekturlesning, språkforbedring og mye psykisk støtte. En takk går også til søster Wenche og svoger Dag for god teknologisk hjelp. Til slutt vil jeg takke mamma og pappa for all oppvartning, oppmuntring og omsorg.

Kristiansand, desember 2009

Liv Jorunn Bjørkås

Sammendrag

Prosjektet Læringsfellesskap i matematikk (LCM) foregikk i perioden fra januar 2004 til desember 2007. Norges forskningsråd gav støtte til prosjektet under programmet Kunnskap, Utdanning og Læring (KUL). LCM-prosjektet bestod av flere deler. En av delene var en longitudinell studie, som denne oppgaven er en del av. Målet med studien var å få et bilde av elevers forståelse i matematikk og hvordan den utvikler seg gjennom prosjektet. Det var også ønskelig at testingen skulle gi lærere bedre innsikt i elevers begreper i matematikk (Grevholm, 2007). Elevene som deltok i studien ble gitt en skriftlig test ved begynnelsen og ved slutten av skoleåretåret. Denne oppgaven tar for seg resultatene fra testen i tall og algebra, som ble gjennomført i 4.klasse og 7. klasse høsten 2006 og våren 2007. Når det gjelder 7. trinn, så er resultatene tatt inn bare i forbindelse med fokus på ekvivalens og elevers løsninger av oppgaver som berører dette.

Med utgangspunkt i testresultatene vil jeg prøve å svare på følgende forskningsspørsmål:

-Hva slags oppgavetyper har størst utvikling i løsningsfrekvensen, hva gjør elevene det bra på og hva har de størst problemer med sett i forhold til begrepskunnskap og prosedyrekunnskap?
-Hvordan er elevenes kunnskaper sammenliknet med L97?
-Hvordan er elevenes forståelse av likhetstegnet?

Testresultatene tyder på at det er størst utvikling i oppgaver som krever begrepskunnskap. Når det gjelder oppgaver med høy løsningsfrekvens, er det et overtall av disse som krever begrepskunnskap. Videre krever oppgavene med lav løsningsfrekvens også begrepskunnskap og prosedyrekunnskap.

Oppgavetypene med størst utvikling i løsningsfrekvensen, er oppgaver der elevene skulle bruke mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi, lese av hele tall på ei tallinje, vise brøken ¼ visuelt, foreta subtraksjon av tosifrede tall og enkel multiplikasjon, samt finne et tall til venstre for likhetstegnet. Videre gjør elevene det best på oppgaver der de må kunne ha forståelse for posisjonssystemet, oppdage mønster med subtraksjon og addisjon av samme tall i ei tallrekke, addere med tosifrede tall, gjennomføre enkel multiplikasjon, velge riktig regneuttrykk til en tekstoppgave, se sammenhengen mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon, lese av hele tall på ei tallinje, vise brøken ½ visuelt og sammenligne størrelsen på naturlige tall. Til slutt viser testresultatene at elevene gjør det dårligst på oppgaver der de må oppdage et avansert mønster i ei tallrekke og kunne prioritere regneoperasjoner, samt finne et tall til venstre for likhetstegnet.

Oppgavetypene som hadde størst utvikling i løsningsfrekvensen, samsvarer godt med en del av fellesmålene for småskoletrinnet og hovedmomentene for 4.klasse i L97. Også de oppgavetypene elevene mestrer bra samsvarer med målene i L97. Oppgavene de har problemer med viser likevel at de har noen mangler i forhold L97.

Testresultatene tyder på at en del av KUL-elevene har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Omkring 40 % av elevene i 7.klasse gir feilsvaret 7 på oppgaven $14 : 2 = \square \cdot 14$, noe som helt klart viser at de ikke tolker likhetstegnet relasjonelt. Dette kan understøtte at en årsak til at elevene på 4.trinn har problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet, kan være at også disse har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Siden ingen oppgaver i testene bare hadde til hensikt å teste elevenes forståelse av likhetstegnet, er det umulig å vite hvor mange av KUL-elevene som virkelig har problemer med dette.

Summary

Project Communities in Mathematics (LMC) started in January 2004 and lasted until December 2007. The Research Council of Norway (RCN) contributed with financial support through the program Kunnskap, Utdanning og Læring (Knowledge, Education and Learning (KUL)). The LMC-project was a project containing of many small studies. One of these was a longitudinal study, as this master is a part of. The main goal was to get a firm picture of students understanding of mathematics, and to see how this understanding develops through the project. It was also desirable that the teacher, through this testing, would get a insight into the students conceptual understanding. The pupils who participated in the test were tested with one written test in the fall 2006, and one written test in the spring 2007. The result from the testing in the categories numbers and algebra in 4th and 7th grade fall 2006 and spring 2007, has been the object of this thesis. Regarding 7th grade, these results are only used in connection with tasks that have a focus on equivalence and the students' results on these tasks. Using the test results we will try to answer the following scientific questions:

-Which type of category has the highest solution frequency, what are the students' strengths and what are their weaknesses regarding conceptual knowledge and procedural knowledge?
-Compared to L97, how is the development from the first testing to the second testing?
-How are the students understanding of the equivalence?

The test results show that tasks that require conceptual knowledge have the highest development. In the tasks with a high solution frequency there is a majority of tasks that require conceptual knowledge. Furthermore, the tasks with a low solution frequency also require conceptual knowledge and procedural knowledge. The categories of tasks that had the highest developing in solution frequency, were tasks where the students were to use a pattern as a starting point for a counting- or calculate strategy, point out numbers from a digit line, show the fraction ¼ visually, do a subtraction of a two digit number and simple multiplication, and find a number to the left of the equality sign. Furthermore, the students make a highest score on tasks that require understanding for the system of place value, were they have to discover a pattern combined with either subtraction or addition of a number in the same digit line, addition with two digit numbers, where they have to manage simple multiplication, where they have to choose the right expression of calculation for a text-task, where they have to see the connection between multiplication and repeating addition, where they have to read of a whole number on at digit line, show the fraction ½ visually and compare the sizes of natural numbers. Finally, the results of the tests show that the students have a poor result on tasks where they have to discover an advanced pattern in a digital line, find a right priority in the operations of calculation, and find a number to the left of the equality sign. The categories of tasks where there were the highest development in the solution frequency, correlate well with some of the joint goals for primary school and the main moments regarding 4th grade in L97.Also in the categories of tasks were the students do well, correlate well with the goals for L97. In the tasks were the students have difficulties, show that they still have some lacking's relative to L97. The test results show that some of the KUL-students have an incomplete understanding of the equivalence sign. About 40% of the students in 7th grade gives a wrong answer to the task $14 : 2 = \square \cdot 14$, this show clearly that they interpreter the equivalence sign operationally. This can support the reason why 4th grade students have problems finding a number to the left of the equivalence sign and it is possible that these students interpret the equivalence sign operationally. Not one of the tasks in the tests intended to test the students understanding of the equivalence sign, because of this it is not possible to know how many of the KUL-students who really have a problem with this.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Denne oppgaven bygger på KUL-LCM prosjektet som ble startet i 2004. Prosjektet er offisielt avsluttet, men det er fortsatt datamateriale som ikke er bearbeidet. Oppgaven tar for seg resultatene fra testen i tall og algebra, som ble gjennomført i 4.klasse og 7. klasse høsten 2006 og våren 2007. Når det gjelder 7. trinn, så er resultatene tatt inn bare i forbindelse med fokus på ekvivalens og elevers løsninger av oppgaver som berører dette.

Av forskningsstudier som KIM 1995, V01-undersøkelsen og TIMSS, har jeg forstått at norske elever har en del misoppfatninger i matematikkområdet tall og algebra. TIMSS-undersøkelsen som ble gjennomført i 2007 viser at norske elever på 4.og 8.trinn presterer bedre i matematikk enn i 2003, men at prestasjonen fortsatt ligger godt under det internasjonale gjennomsnittet når det gjelder områdene tall og algebra (Grønmo et al., 2009). Videre viser det seg i TIMSS 2007 (ibid.) at Tall og algebra er de områdene norske elever på 4. og 8.trinn scorer lavest. På bakgrunn av dette blir det interessant å analysere testresultatene til elever på 4. og 7.trinn som deltok i KUL-LCM prosjektet skoleåret 2006/07. Det er vanskelig å måle om dette prosjektet har hatt innvirkning på elevenes kunnskaper i tall og algebra bare ut fra analyse av skriftlige tester. Derimot håper jeg at arbeidet med testresultatene kan gi meg noe innsikt i elevers kunnskaper og misoppfatninger som jeg kan ha nytte av i mitt framtidige yrke som lærer. Jeg er klar over at det også er begrenset hva skriftlige tester kan fortelle meg om dette, men tror likevel dette arbeidet kan gi noe verdifull informasjon.

Gjennom masterstudiet har jeg spesielt blitt oppmerksom på at en del elever har problemer med å forstå likhetstegnet. Dette har jeg skjønt gjelder både unge og eldre elever. For litt tid tilbake hadde jeg privatundervisning med ei jente på videregående som hadde problem med å løse algebraiske likninger. Jeg oppdaget da at hovedgrunnen til at denne jenta ikke klarte å løse likninger, var at hun ikke var klar over at det alltid måtte være lik verdi på begge sider av likhetstegnet. Etter at hun ble oppmerksom på dette, viste det seg at det ble enklere for henne å løse likninger.

Da jeg begynte arbeidet med denne oppgaven hadde jeg ikke tenkt på å rette noe spesielt fokus mot elevenes forståelse av likhetstegnet. Underveis i dataanalysen ble det derimot klart for meg at det ut fra løsningsfrekvensen på noen oppgaver i testen for 4.klasse, kunne tyde på at elevene hadde en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. På bakgrunn av opplevelsen jeg fortalte om ovenfor, samt at jeg var blitt oppmerksom på at en operasjonell tolkning av likhetstegnet kan skape problemer for elevene i videre arbeid med matematikken, bestemte jeg meg da for å analysere testresultatene med et særlig fokus på elevers forståelse av likhetstegnet.

1.2 Forskningsspørsmål

Med utgangspunkt i testresultatene vil jeg prøve å svare på følgende forskningsspørsmål:

-Hva slags oppgavetyper har størst utvikling i løsningsfrekvensen, hva gjør elevene det bra på og hva har de størst problemer med sett i forhold til begrepskunnskap og prosedyrekunnskap?
-Hvordan er elevenes kunnskaper sammenliknet med L97?
-Hvordan er elevenes forståelse av likhetstegnet?

1.3 Oppgavens oppbygging

I kapittel to vil jeg presentere relevant litteratur og teori i forhold til denne oppgaven. Hvordan jeg har arbeidet med oppgaven blir så presentert i kapittel tre om metode. I kapittel fire vil jeg presentere en analyse av testresultater for 4.klasse skoleåret 2006/07 og av utvalgte oppgaver på 7.trinn, samt foreta en sammenligning av testresultatene på 4.trinn høsten 2004 og høsten 2006. Videre vil jeg i kapittel fem diskutere en del av funnene fra analysedelen. En kort oppsummering og konklusjon følger så i kapittel seks. I kapittel sju vil jeg presentere noen pedagogiske implikasjoner og ideer til videre forskning. Til slutt kommer ei litteraturliste i kapittel åtte, etterfulgt av en oversikt over vedlegg.

Selv om det i hovedsak er testresultatene for 4.trinn jeg har skrevet om i oppgaven, vil jeg også ta med en del vedlegg som gjelder 7.trinn. Dette er jeg blitt bedt om å gjøre for å bevare et rikest mulig materiale fra KUL-LCM prosjektet. Vedleggene som følger med oppgaven vil inkludere testene som ble gitt både på 4.og 7.trinn, samt løsningsfrekvens for hver enkelt oppgave på begge trinnene. Når det gjelder løsingsfrekvens for hver enkelt oppgave, vil de oppgavene som hadde lav løsingsfrekvens og de som hadde stor utvikling i løsingsfrekvens, bli presentert med mer detaljerte feilsvar. Siden jeg har analysert testresultatene fra 7.trinn relativt grundig, men ikke brukt så mye av det i denne oppgaven, vil jeg også legge ved en deskriptiv frekvenstabell som gir en oversikt over hele elevgruppas og de enkelte undergruppenes gjennomsnittlige poengsum. I tilegg vil jeg legge ved diagrammer for løsningsfrekvens og poengfordeling for 7.trinn.

2 Teori

2.1 Kognitiv utvikling

Piaget har utviklet en kognitiv modell som forteller hvordan vi mennesker gir verden mening ved å samle og organisere informasjon (Woolfolk, 2006). Han mente at alle mennesker innehar to grunnleggende tendenser til organisering og adapsjon.

- Organisering innebærer en prosess der informasjon og erfaring ordnes i mentale systemer eller kategorier. Piaget kalte disse mentale systemene eller kategoriene for skjemaer. Skjemaene utgjør de grunnleggende steinene for tenkningen vår. Vi kan tenke på objekter og hendelser i verden nettopp på grunn av de organiserte handlings- eller tankesystemene som skjemaene utgjør. Skjemaene kan være enten små og spesifikke, eller store og generelle.
- Adapsjon går ut på tilpasning til omgivelsene. Assimilering og akkomodasjon er viktige komponenter i denne tilpasningsprosessen. Assimilering skjer når en får ny informasjon til å passe inn i allerede eksisterende skjemaer. Dette innebærer at en prøver å forstå den nye informasjonen ved å få den til å passe sammen med det vi allerede vet eller kan. Akkomodasjon skjer når en må endre eksisterende skjemaer eller lage nye for å få de til å stemme overens med ny informasjon som vi får. Tenkningen vår må tilpasses den nye informasjonen, og ikke den nye informasjonen til tenkningen (Woolfolk, 2006).

Likevekt i tenkningen oppstår når det er balanse mellom skjemaene våre og informasjonen fra omgivelsene. Piaget mente at vi alltid prøver å få likevekt i tenkningen vår. Når skjemaene våre ikke passer med en hendelse eller situasjon, vil vi derfor prøve å lete etter løsninger gjennom assimilering eller akkomodasjon. Det er i denne tilpasningsprosessen tenkningen vår forandres og utvikles (Woolfolk, ibid.). Videre utviklet Piaget en kognitiv utviklingsmodell med fire stadier. Denne modellen har jeg ikke anledning til å gå inn på her.

2.2 Overflate- og dybdestrukturer

Skemp (1982) definerer et begrep som en abstrakt ide og begrepsstrukturer som organiserte nettverk av ideer. Han bruker betegnelsen skjemaer om begrepsstrukturer som er lagret i minnet. Ideene som begrepsstrukturene består av, er bare mentale objekter og er dermed usynlige for omverdenen. Å vurdere en persons ideer er dermed umulig for andre mennesker, og til og med vanskelig for personen selv. For at ideene skal bli synlige for omgivelsene må de kommuniseres ved hjelp av et symbolsystem.

Skemp (ibid.) skiller mellom overflatestrukturer til symbolsystemet i matematikk og dybdestukturene til de matematiske skjemaene. Han sier at:

> The meaning of a mathematical communication lies in the deep structures – the mathematical ideas themselves, and their relationships (Skemp, 1982, s.281).

Videre sier han at:

> Symbols are an interface between the inner world of our thoughts, and the outher, physical world (Skemp, 1982, s.281).

Overflatestrukturene er nødvendige for å kommunisere meningen i matematikken. De matematiske skjemaene må altså være knyttet til symboler for at vi skal kunne kommunisere dem. Dette betyr at begrepsstukturene er innholdet i det vi vil kommunisere, mens symbolene gjør oss i stand til å kommunisere dette innholdet.

2.3 Prosedyre- og begrepskunnskap

Hiebert og Lefevre (1986) har foretatt en analyse av 'conceptual knowledge' (her oversatt med begrepskunnskap) og 'procedural knowledge' (her oversatt med prosedyrekunnskap). De ønsker å finne ut hvordan disse to typene av kunnskap står i forhold til hverandre, og mener av denne grunn at det er viktig å skille mellom de to kunnskapstypene. Hovedmålet deres er at vi gjennom dette kan bli bedre rustet til å tolke elevers læringsprosesser og dermed få bedre forståelse for hvorfor de gjør feil og hva som fører til suksess. Samtidig påpeker de at ikke all kunnskap kan sorteres som det ene eller det andre. Noe kunnskap ser ut til å være litt av begge kunnskapstypene, mens det også finnes kunnskap som ikke kan klassifiseres som noen av typene. I tillegg til å se fordeler med å definere et skille mellom kunnskapstypene, legger de også stor vekt på at balansen og sammenhengen mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap er svært viktig for å gi et godt læringsutbytte.

2.3.1 Begrepskunnskap

Hiebert og Lefevre (1986) karakteriserer begrepskunnskap som kunnskap som er rik på relasjoner. Begrepskunnskap er nærmere bestemt et kunnskapsnettverk der relasjoner mellom informasjon er like viktig som hver enkelt informasjonsbit. De sier det slik:

> A unit of conceptual knowledge cannot be an isolated piece of information; by definition it is a part of conceptual knowledge only if the holder recognizes its relationship to other pieces of information (Hiebert & Lefevre, 1986, s.4).

Utvikling av begrepskunnskap skjer ved at det etableres relasjoner mellom informasjonsbiter. Relasjoner kan da etableres mellom informasjonsbiter som allerede er lagret i minnet, eller mellom en eksisterende kunnskapsbit og ny informasjon. Hiebert og Lefevre (ibid.) viser til et eksempel av Ginsburg når det gjelder etablering av kunnskapsrelasjoner mellom informasjonsbiter som allerede er lagret i minnet:

> Jane (age nine) understood multidigit subtraction for the first time when she recognized the connection between the algorithm she had memorized and her knowledge of the positional value of each digit (Hiebert & Lefevre, 1986, s.4).

Når det gjelder etablering av relasjoner mellom eksisterende kunnskap og ny informasjon, mener Hiebert og Lefevre (ibid.) at eksemplet med Jane ville passe, hvis Jane oppdaget linken mellom algoritmen og plassverdisystemet rett etter at hun lærte algoritmen. I forbindelse med dette påpeker de at Piaget sine tanker om assimilering er en svært viktig del når ny kunnskap skal bli en del av eksisterende nettverk.

Videre finnes det to abstraksjonsnivåer, et primært nivå og et refleksjonsnivå. Utvikling av kunnskapsrelasjoner på et primært nivå innebærer at relasjonene mellom informasjonen som finnes ikke er mer abstrakt enn hva informasjonsbitene er. Kunnskapen blir på dette nivået ikke knyttet opp mot informasjon utenfor den konteksten den blir lært i. Dette betyr at utviklingen av kunnskapsrelasjoner på primært nivå kan gi økt begrepskunnskap, men kunnskapen kan ikke overføres til andre kontekster.

Kunnskapsrelasjoner som utvikles på et refleksjonsnivå, er derimot mer abstrakte enn informasjonen de sammenbinder. Slike relasjoner oppstår ofte når en gjenkjenner likhetstrekk mellom forskjellige informasjonsbiter, tar dem ut av konteksten de står i og binder dem sammen. Denne prosessen innebærer at en kan ta et steg tilbake og reflektere over informasjonen en binder sammen. En utvikler da begrepskunnskap på et høyere nivå enn på det primære nivået, fordi kunnskapen blir mindre bundet til en spesiell kontekst og en kan se mer av det 'matematiske terrenget' som Hiebert og Lefevre (ibid.) uttrykker det.

2.3.2 Prosedyrekunnskap

Prosedyrekunnskap inneholder, i følge Hiebert og Lefevre (1986), to ulike deler:

> One part is composed of formal language, or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of algorithms, or rules, for completing mathematical tasks (Hiebert & Lefevre, 1986, s.6).

Den første delen går ut på å kunne bruke symboler til å uttrykke matematikk, samt kjenne de syntaktiske reglene for å kunne skrive symbolene på rett måte. I mer avansert matematikk inkluderer prosedyrekunnskap også det å kunne føre et bevis. Ikke selve logikken i beviset, men hvordan det skal skrives. Formen på det som skrives er altså fokuset, ikke innholdet.
Den andre delen av prosedyrekunnskapen består av å kunne bruke regler, algoritmer og prosedyrer til å løse matematiske oppgaver. Dette er oppskrifter som steg- for steg beskriver hvordan oppgaver skal løses. Sammenhengen i disse oppskriftene er lineær. Det vil si at det ikke eksisterer noen annen forbindelse innenfor prosedyrekunnskapen, enn det at et steg kommer før et annet. Prosedyrer er oppbygd som et hierarki, der noen prosedyrer kan være underprosedyrer i andre prosedyrer. En hel sekvens av underprosedyrer kan karakteriseres som superprosedyrer. En superprosedyre er altså flere forskjellige steg- for steg beskrivelser som igjen skal utføres steg for steg. Fordelen med superprosedyrer er at alle underprosedyrene i en sekvens kan utføres bare ved å gjenkalle denne prosedyren.
Det finnes forskjellige typer prosedyrer. Ved å se på objektene som prosedyrene opererer på, skiller Hiebert og Lefevre (ibid.) mellom to typer objekter: Objekter som er standardsymboler (for eksempel 2, - og +) og konkrete objekter eller mentale bilder. De mener det er viktig å merke seg at på samme måte som for begreper, så er heller ikke alle prosedyrer av samme slag. Noen prosedyrer opererer med skrevne matematiske symboler, mens andre opererer på konkrete objekter eller mentale bilder.

2.3.3 Sammenhengen mellom begreps- og prosedyrekunnskap

Fordeler med å sammenkoble begrepskunnskap og prosedyrekunnskap, kan blant annet være at symboler får mening, prosedyrer huskes bedre og brukes mer effektivt. Videre kan det føre til at begrepskunnskap kan uttrykkes på en formell måte og at den kan brukes i problemløsning. Mangel på sammenheng mellom prosedyre- og begrepskunnskap, fører enten til at elever har en del forståelse for matematikken men ikke kan løse problemer, eller at de klarer å svare på oppgaver uten å forstå det de gjør (Hiebert & Lefevre, 1986). Hiebert og Lefevre (ibid) hevder at fullstendig matematisk kompetanse ikke kan oppnås hvis en av kunnskapstypene mangler eller hvis begge er til stede men er helt adskilte. De mener at:

> Mathematical knowledge, in its fullest sense, includes significant, fundamental relationships between conceptual and procedural knowledge (Hiebert & Lefevre, 1986, s.9).

En må altså kjenne begreper, symboler og prosedyrer, samt sammenhengen mellom dem, for å være matematisk kompetent.

2.3.4 Kunnskapsutvikling

Meningsfull læring og pugg

Hiebert og Lefevre (1986) diskuterer forholdet mellom meningsfull læring og pugg på den ene side og begreps– og prosedyrekunnskp på den annen side. De sier at meningsfull læring innebærer at det foregår læring som utvikler relasjoner mellom ulike kunnskapsbiter:

> Conceptual knowledge, by our definition, must be learned meaningfully. Procedures, on the other hand, may or may not be learned with meaning. We propose that procedures that are learned with meaning are procedures that are linked to conceptual knowledge (Hiebert & Lefevre, 1986, s.8).

Pugging fører ikke til at det oppstår relasjoner mellom kunnskap, og at kunnskapen kan overføres til andre kontekster. Begrepskunnskap kan derfor ikke læres direkte ved pugging. Kunnskap som er pugget, kan derimot på et seinere tidspunkt knyttes sammen med annen kunnskap, slik at begrepskunnskap utvikles. Prosedyrekunnskap derimot, kan læres ved pugg, men også ved meningsfull læring. Prosedyrenes lineære oppskriftsoppbygging gjør at de er godt egnet til å pugges. Læres de derimot med mening, påpeker Hiebert og Lefevre (ibid.) at de lettere vil bli linket til begrepskunnskapen.

Utvikling av begreps- og prosedyrekunnskap

Rittle-Johnson og Alibali (1999) har gjort en studie i USA der de undersøker sammenhengen mellom elevers begrepsforståelse av ekvivalens og prosedyrene de utfører for å løse ekvivalensproblemer. 86 elever i 4. og 5. klasse ble tilfeldig delt i tre grupper. Den ene gruppa fikk en leksjon om prosedyrer, den andre gruppa fikk en leksjon som fokuserte på selve begrepsforståelsen av ekvivalens, mens den siste gruppa var en kontrollgruppe som ikke fikk noen leksjon. Alle elevene ble vurdert i forkant og etterkant av leksjonene som ble gitt til to av gruppene. Det ble testet tre hypoteser i studiet. For det første om begrepsforståelse og prosedyreegenskaper er relaterte, for det andre om økning i elevenes begrepsforståelse fører til at de får bedre prosedyreegenskaper og for det tredje om utvikling av elevenes prosedyrekunnskap fører til økt begrepsforståelse. Leksjonen som fokuserte på ekvivalensbegrepet førte helt klart til økt begrepsforståelse hos elevene. I tillegg ble disse elevene i stand til å generalisere og overføre prosedyrer på en rett måte. Prosedyreleksjonen førte også til økt begrepskunnskap hos en del av elevene, men elevene ble bare i stand til å utføre prosedyrer i en begrenset kontekst. Det så altså ut til at begge kunnskapstypene har vekselvirkende innflytelse på hverandre, men at det kan tyde på at begrepskunnskap har større innvirkning på prosedyrekunnskap enn motsatt.

På grunnlag av undersøkelsen de gjorde, kommer Rittle-Johnson og Alibali (ibid.) med noen forslag til hvordan de to kunnskapstypene innvirker på hverandre. Begrepskunnskap fører til utvikling i prosedyrekunnskap ved at elevene ser at prosedyrene de bruker ikke stemmer med begrepskunnskapen, og at de derfor må finne nye prosedyrer. Videre ved at elevene kan trekke ut viktige deler av riktige prosedyrer, og dermed bli i stand til å vurdere hvilke nye prosedyrer de bør prøve ut. Til slutt ved at elevene ser viktige elementer ved problemer som de kan overføre til andre problem. Prosedyrekunnskap fører til utvikling i begrepskunnskap ved at riktige prosedyrer hjelper til å fjerne misoppfatninger. Videre ved at enkle prosedyrer gjør at elevene får tid til å tenke over hvorfor prosedyrene fungerer. Til slutt ved at elevene forklarer for seg selv hvorfor spesielle prosedyrer er riktige. Dette vil ikke alle elever ta initiativ til selv, men de kan bli klar over det hvis de oppmuntres til det.

Rittle- Johnson, Siegler og Alibali (2001) viser gjennom to eksperimenter, der 5. og 6. klassinger lærer om desimaltall, at begreps- og prosedyrekunnskapen har en vekselvirkende innflytelse på hverandre. Til forskjell fra tidligere forskning, er de her ikke opptatt av å finne ut av hvilken av de to kunnskapstypene som opptrer først når en elev utvikler seg kunnskapsmessig. Målet deres er å vise at kunnskapsutviklingen er en vekselvirkende prosess, der økning i den ene kunnskapstypen fører til økning i den andre, og der dette igjen medvirker til økning av den første osv. De vil også prøve å finne ut hva som er de underliggende mekanismene for kunnskapsendringene. Hypotesen deres i forhold til dette er at en av de underliggende mekanismene for kognitiv utvikling er forbedret problemrepresentasjon. Slik definerer de problemrepresentasjon:

> We define problem representation as the internal depiction or re-creation of a problem in working memory during problem solving (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001, s 348).

Problemrepresentasjon er det indre bilde vi har i minnet av en oppgave mens vi jobber med den. Dette innebærer både hvordan oppgaven ser ut og hvordan vi løser den. I det første eksperimentet undersøkte de individuelle forskjeller i forkunnskaper og i mengden av læring. De uttrykker målet for dette eksperimentet slik:

> The goal was to provide correlational support for each of the links in the iterative model (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001, s 349).

Gjennom dette eksperimentet oppdaget de at begreps- og prosedyrekunnskapen utviklet seg i en gradvis, hånd-i-hånd prosess, som de uttrykker det. Dette mener de er et godt argument for å si at den store debatten som har vært om hvilken kunnskapstype som opptrer først, er misledende. De fant også ut at en riktig problemrepresentasjon medvirket i den vekselvirkende prosessen mellom de to kunnskapstypene. Det andre eksperimentet de gjennomførte forklarer de slik:

> In Experiment 2 we experimentally manipulated support for forming correct problem representation during the intervention; the goal was to evaluate the causal link from formation of correct problem representation to improved procedural knowledge (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001, s 349).

Ut fra dette eksperimentet påviste de at en forbedret problemrepresentasjon førte til utvikling av prosedyrekunnskap. Altså ble funnet i studien at begreps- og prosedyrekunnskap har en vekselvirkende utvikling og at forbedret problemrepresentasjon er en underliggende mekanisme i denne prosessen.

Rittle-Johnson og Koedinger (2008) viste også i en studie i USA med elever i 6.klasse at forkunnskaper i en kunnskapstype kan fremme utviklingen av den andre kunnskapstypen. I tillegg til å vise at begreps- og prosedyrekunnskap har en vekselvirkende utvikling, ville Rittle-Johnson og Koedinger (ibid.) også undersøke om veksling mellom undervisning som fokuserte på begreper og undervisning som fokuserte på prosedyrer, kunne forbedre læring. De foretok to klasseromseksperimenter i USA med elever på 6.trinn. Målet med studiet var å undersøke undervisning som vekslet mellom prosedyrefokuserte leksjoner og leksjoner som fokuserte på begrepsforståelse, sammenlignet med en begrep-før-prosedyre leksjon. Det matematiske emnet var desimaltall og målet var at elevene skulle lære plassverdisystemet. Elevene deltok i seks undervisningsøkter om desimaltall. I undervisningen som skulle fokusere på begreper før prosedyrer, ble alle begrepsleksjonene gjennomført før prosedyreleksjonene ble gjennomført. I den vekslende undervisningen ble det vekslet mellom prosedyreleksjoner og begrepsleksjoner. I begge eksperimentene viste det seg at elevene som fikk den vekslende undervisningen utviklet mer kunnskap om aritmetiske prosedyrer. I tillegg ble de flinkere til å overføre prosedyrer til ukjente problemer. Når det gjaldt utvikling av begrepskunnskap var dette så å si likt for begge undervisningstypene. Resultatene av studien gir støtte til at veksling mellom posedyreleksjoner og begrepsleksjoner, fører til utvikling av prosedyre- og begrepskunnskap. I særlig grad ser denne type undervisning ut til å fremme læring og overføring av prosedyrer.

Alibali sammen med McNeil (McNeil & Alibali, 2000) gjorde en undersøkelse i USA for å finne ut om elever som ble pålagt mål utenfra, oppnådde kunnskap utover ekvivalensprosedyren de ble undervist i. Ekvivalensprosedyren de ble undervist var å løse regnestykker på formen a + b + c = a + _, men med tall i stedet for bokstaver. 53 elever i 3. og 4. klasse deltok i undersøkelsen, og ble tilfeldig delt i tre grupper. Alle gruppene fikk prosedyreleksjonen, men bare to av gruppene ble presentert for det målet de skulle jobbe mot. Det ene målet var læringsmål med fokus på forståelse av ekvivalens. Det andre målet var prestasjonsmål som fokuserte på å få rett svar på oppgaver.

Det viste seg at elevene som fikk enten læringsmål eller prestasjonsmål å jobbe mot, presterte mye bedre enn de som ikke fikk mål. De gjorde det bedre både når det gjaldt fremgang i begrepskunnskap, og i det å kunne bruke kunnskapen i ukjente problemer. Elevene som fikk prestasjonsmål oppnådde ikke like mye begrepskunnskap med en gang, i forhold til de elevene som fikk læringsmål å jobbe etter. Etter 2 uker derimot hadde prestasjonsmål-elevene nådd helt opp på de andre elevenes begrepskunnskapsnivå. Videre viste det seg at elevgruppa som ikke fikk noe mål de skulle arbeide ut fra, hadde lettere for å gå tilbake til det mentale settet de hadde før de fikk prosedyreleksjonen. Et mentalt sett definerer McNeil og Alibali (ibid.) som:

> A familiar, well-practiced approach to solving a problem (McNeil & Alibali, 2000, s.735).

Et eksempel på dette er at elever som har arbeidet mye med den enkle addisjonsprosedyren til problemer som a + b + c + a =_, har lett for å aktivere det mentale settet for denne prosedyren når de møter problemer de har lite kjennskap til, som for eksempel a + b + c = a + _, og dermed adderer alle tallene. Nettopp dette skjedde med elevene som ikke fikk mål å gå etter. Da de ble presentert for ukjente problemer aktiverte de med en gang det mentale settet sitt, som var prosedyren å addere alle leddene sammen. Det viste seg derimot at elevene som fikk læringsmål og prestasjonsmål ikke hadde så lett for å aktivere det ”gamle” mentale settet. McNeil og Alibali (ibid.) antyder at mål som blir pålagt elevene utenfra og som hindrer elevene i å aktivere mentale sett som bare gjelder i enkelte tilfeller, fremmer elevenes evne til å representere problemer riktig.

2.4 Diagnostisk undervisning og diagnostiske oppgaver

Det jeg skriver nedenfor om diagnostisk undervisning og diagnostiske oppgaver bygger på Brekke (2002).

2.4.1 Diagnostisk undervisning

Tradisjonelt har undervisningen fokusert mest på fakta og ferdigheter. De fleste lærebøker har også hatt dette tradisjonelle fokuset opp igjennom. Hovedvekten har vært lagt på eksempel-regel-metoden og øving på fakta og ferdigheter knyttet til denne (Brekke, 2002).

I konstruktivismen er det de handlinger eller refleksjoner en person gjør, som er grunnlaget for læring. Dette synet på læring fører til at det viktigste ved valg av arbeidsmåter er å legge til rette for at elevene kan få erfaringer som de kan bygge kunnskapen på og gi elevene anledning til å reflektere over arbeid de har gjort og det de har funnet ut gjennom dette. Diagnostisk undervisning er en arbeidsmåte som bygger på disse tankene (Brekke, ibid.).

Handling
→ Refleksjon → Læring
Erfaring

Figur 2.4.1.1: Konstruktivisme (Brekke, 2002, s.3)

Målet med denne arbeidsmåten er å bygge opp solide begreper som kan gi grunnlag for langtidslæring. Det skal undervises med forskningsresultater som basis. Vanlige feil og misoppfatninger som elevene har, skal det rettes søkelys mot og arbeides med. Elevenes tanker rundt et bestemt begrep skal diagnostiseres, for å finne ut hva undervisningen bør gi dem av erfaringer for å bygge opp dette begrepet. Videre går diagnostisk undervisning ut fra at de tanker elevene har gjort seg om det kommende lærestoffet, kan identifiseres. I tillegg baserer den seg på hvilke misoppfatninger og hindringer elevene normalt støter på i sin utvikling av ulike matematiske begreper.

Brekke (ibid.) lager følgende skjematiske oppstilling av fasene i diagnostisk undervisning:

1) Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2) Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en kognitiv konflikt.
3) Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4) Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger (Brekke, 2002, s.19).

Diagnostiske oppgaver utgjør grunnlaget for å kunne identifisere elevenes misoppfatninger og delvis utviklede begreper. Måten misoppfatninger og begrepsmessige hindringer kan framheves på, er at en spesiell aktivitet i undervisningen intensivt rettes mot nettopp dette. Siktemålet er da å skape refleksjon rundt det sentrale ved et begrep. En elevs misoppfatninger kan overvinnes ved at en skaper kognitive konflikter for eleven. En kognitiv konflikt kan skapes ved å la eleven møte problemstillinger som avdekker elevens misoppfatninger. Dette er konfliktens destruktive fase. Refleksjoner og diskusjoner rundt konfliktens motsetninger, konfliktdiskusjoner, er løsningsfasen, og skal kunne rydde vekk bestemte misoppfatninger. I tillegg er refleksjon over hvordan utvidede eller nye begreper er forbundet med gamle erfaringer, en viktig del av arbeidet.

Brekke (ibid.) påpeker at det gjennom en rekke studier har vist seg at å bare forklare, ikke er en god nok metode i forhold til utvikling av begreper. Derimot har det vist seg effektivt å hjelpe elevene til å oppdage sine egne misoppfatninger og til å innse det utilstrekkelige i egen tankegang.

2.4.2 Diagnostiske oppgaver

Misoppfatninger er ufullstendige tanker knyttet til et begrep. En feil kan bli gjort tilfeldig, mens konsekvent bruk av en bestemt tenkning ligger bak misoppfatningene. Ofte oppstår misoppfatninger når kunnskaper fra et område automatisk overføres til en sammenheng der de ikke i like stor grad hører hjemme. Grunnen til at elever overfører kunnskap direkte fra et felt til et annet, skyldes at de prøver å skape mening og sammenheng i det de lærer.

Noen misoppfatninger kan skyldes at elevene bare presenteres for deler av et begrep. Dersom elever for eksempel bare jobber med delingsdivisjon, og ikke presenteres for målingsdivisjon, vil de bare kunne utvikle et delvis begrep om divisjon.

En annen årsak kan være at elever ikke skiller mellom et begrep og algoritmen knyttet til det. For eksempel er ikke det å kunne multiplikasjonsalgoritmen det samme som å kunne multiplikasjon.

Misoppfatninger og delvise begreper er en del av barns normale utvikling. Det er ikke unaturlig at et nytt begrep tolkes ut fra eksisterende erfaringer og at generaliseringer blir foretatt litt for fort. Brekke (2002) lister opp noen vanlige misoppfatninger innenfor tall og tallregning som sier at:

- Det lengste tallet har alltid størst verdi.
- En ikke kan dele et lite tall med et stort.
- Multiplikasjon gjør alltid svaret større.
- En bare kan dividere med hele tall.
- 3 : 6 og 6 : 3 gir samme svar.
- Divisjon gjør alltid svaret mindre (Brekke, 2002, s.11).

Brekke (ibid.) peker på at tradisjonell undervisning ikke har vist seg å være tilstrekkelig for å få bukt med slike misoppfatninger. Diagnostiske oppgaver kan derimot være et nyttig verktøy i arbeidet med å redusere misoppfatninger. Til forskjell fra matematikkprøver som skal vurdere elevenes resultater, kan diagnostiske oppgaver gjerne komme i forkant av en undervisningssekvens og brukes til:

- Å oppdage og sette lys på elevenes misoppfatninger i et emne.
- Å gi læreren informasjon om elevenes løsningsstrategier for ulike typer oppgaver.
- Å fokusere undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for så å kunne bli kvitt dem og de delvise begrepene.
- Å utvikle løsingsstrategiene elevene allerede har tilegnet seg.
- Å måle hvordan undervisningen har vært hjulpet til med å rydde misoppfatningen av veien ved å bruke de samme oppgavene før og etter undervisningssekvensen.

Læreren bør gjøre elevene klar over at de diagnostiske oppgavene ikke har som mål å vurdere og rangere dem, men at oppgavene skal fungere som et verktøy for å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper, bli kjent med problemene knyttet til disse begrepene og hjelpe læreren med undervisningsplanleggingen.

En oppgave fungerer diagnostisk når den unngår å stille spørsmål som elevene kan få rett på selv om de har misoppfattninger eller ufullstendige ideer knyttet til begrepet. For eksempel vil elevene kunne få riktig svar på en oppgave der de skal finne ut hvilket tall som er størst av 0,15, 0,33 og 0,27, selv om de har misoppfatningen om at et desimaltall er et par av hale tall. Dette er dermed ikke en god diagnostisk oppgave. Derimot vil det være en god diagnostisk oppgave, dersom elevene blir bedt om å finne det største tallet av 0,1, 0,333 og 0,27.
Ved diagnostiske prøver, en samling av diagnostiske oppgaver, er det viktig at hver diagnostisk oppgave er knyttet til et bestemt problemområde innenfor det aktuelle begrepet.

2.5 Matematisk kompetanse

2.5.1 Matematiske kompetanser i KIM-prosjektet

I følge Brekke (2002) blir matematisk kompetanse utgjort av fem komponenter. Disse komponentene er faktakunnskap, ferdigheter, begrepsstrukturer, generelle strategier og holdninger (Brekke, ibid.).

Faktakunnskap

Deler av informasjon som kan være usammenhengende eller tilfeldig, er faktakunnskap. Eksempler på dette er definisjoner og notasjoner. Meningsinnholdet til det sammensatte tallsymbolet 32, verdien 3 multiplisert med 10 og addert til 2, er eksempel på en notasjon. Navn knyttet til et begrep kan også være faktakunnskap. Et eksempel på dette er at omkretsen av en figur er definert som lengden av randen til figuren. Faktakunnskap er forholdsvis lett å undervise i, men ikke nødvendigvis lett for eleven å huske og å lære.

Ferdigheter

Ferdigheter blir definert som veletablerte prosedyrer i flere steg. Å vite hvordan en skal gå fram for å løse et divisjonsregnestykke, er en ferdighet. Prosedyrene bør være mest mulig automatiserte for at tankekraften og oppmerksomheten kan rettes mot andre sider for å løse et problem. Ferdighetene er ofte lite fleksible og har tydelige avgrensninger. De må brukes innenfor den klassen de hører hjemme, ellers kan det bli en sammenblanding av regler.

Begrepsstrukturer

Matematiske begreper har vokst fram i nettverk av enkelte ideer. Disse nettverkene kalles begrepsstrukturer og støtter opp under ferdighetene. De kan tilpasse prosedyrer som en har brukt i en sammenheng, til nye situasjoner.

Generelle strategier

Generelle strategier er evnen til å velge de ferdighetene som trengs for å løse et problem i en ukjent situasjon. I noen land omtales dette som ”Higher Order Thinking Skills” og innebærer å kunne

- Representere, abstrahere og generalisere.
- Teste hypoteser og bevise.
- Kontrollere
- Stille spørsmål
- Bruke matematisk språk som er passende for å løse et problem.
- Tolke matematiske resultater i den konteksten der problemet har sitt utspring (Brekke, 2002, s.8).

Holdninger

Elever og læreres holdninger innebærer hva slags syn de har på matematikken. Holdningene bestemmer hvordan eleven møter lærestoffet og hvordan læreren underviser.

2.5.2 Kompetanseutvikling og Matematikklæring

Det danske prosjektet ”Kompetanceudvikling Og Matematiklæring” ble startet opp sommeren 2000. Initiativtakerne bak prosjektet, Naturvitenskapeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeret, ønsket å medvirke til at det ble satt i gang en utvikling av matematikkundervisningen. Dette skulle være et spydspiss-prosjekt for en potensiell liknende utvikling innenfor andre fag. En arbeidsgruppe ble satt sammen, med Morgens Niss som leder. I 2002 kom rapporten fra prosjektet skrevet av Niss og Højgaard Jensen.

Å reflektere over og om mulig besvare spørsmålet ”Hva vil det si å mestre matematikk?”, ble en av hovedoppgavene i prosjektarbeidet. Arbeidsgruppa bestemte seg for å arbeide med dette spørsmålet ut fra en kompetansebasert tilnærming (Niss & Højgaard Jensen, 2002). Matematisk kompetanse blir definert på følgende måte:

> Matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematikk og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematikk indgår eller kan komme til at inngå (Niss & Højgaard Jensen, 2002, s.43).

Matematisk kunnskap og konkrete ferdigheter innenfor forskjellige matematiske områder, er en stor del av matematisk kompetanse. Av definisjonen blir det likevel synlig at kompetansen innebærer mer enn dette. En matematisk kompetanse er en selvstendig, avgrenset del av matematisk kompetanse. Åtte kompetanser danner til sammen matematisk kompetanse. De er forbundet med hverandre, men har samtidig hver sin identitet. Videre er kompetansene inndelt i to grupper som kan beskrives som overkompetanser:

- å kunne spørre og svare og
- å kunne håndtere språk og redskaper.

Å kunne spørre og svare innebærer kort sagt:

a) å kunne stille spørsmål i og med matematikk, og se hva slags typer av svar som kan oppnås (tankegangskompetanse)
b) å være i stand til selv å kunne svare på slike spørsmål (problembehandlingskompetanse og modelleringskompetanse)
c) å kunne forstå, vurdere og komme med argumenter for svar på matematiske spørsmål (resonnementskompetanse).

Å kunne håndtere språk og redskaper innebærer:

a) å være i stand til å kunne omgås forskjellige representasjoner i matematikk (representasjonskompetanse)
b) å kunne håndtere de spesielle representasjoner som blir utgjort av matematisk symbolspråk og formalisme (symbol- og formalismekompetanse)
c) å kunne kommunisere i, med og om matematikk (kommunikasjonskompetanse)
d) å kunne bruke og forholde seg til diverse tekniske hjelpemidler for matematisk virksomhet (hjelpemiddelkompetanse).

Oppdelingen av kompetanser i de to gruppene må ikke overfortolkes. To kompetanser fra hver sin gruppe kan ha like stor sammenheng med hverandre, som to kompetanser fra samme gruppe. Alle de åtte kompetansene er nemlig med og bidrar til begge overkompetansene. Alle de åtte kompetansene har en undersøkende side og en produktiv side. Den undersøkende delen av kompetansene består i forståelse, vurdering og analyse av prosesser og resultater som allerede er utført, mens den produktive delen av kompetansene går ut på at en utfører dette selv.

Videre finnes det tre dimensjoner som forteller i hvor stor grad en person innehar en kompetanse. Dimensjonene kalles dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå. Dekningsgraden innebærer i hvor stor grad en innehar de aspekter kompetansen består av. Med andre ord består dette i hvor mange aspekter en kan aktivere i ulike situasjoner og hvor selvstendig en gjør dette. Aksjonsradiusen går ut på bredden av sammenhenger og situasjoner en kan aktivere kompetansen i. Situasjonene og sammenhengene kan være bestemt av matematiske emner eller av problemstillinger og utfordringer. Det tekniske nivået bestemmes ut fra hvor begrepsmessig- og teknisk avansert innholdet og verktøyet er, som en kan aktivere kompetansen i forhold til.

I tillegg pekes det på tre former for dømmekraft og overblikk i forhold til matematikk:

- Anvendelse av matematikk i andre fag- og praksisområder.
- Intern og samfunnsmessig betydning av matematikkens historiske utvikling.
- Karakter og egenskaper ved matematikken som fagområde (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

Jeg vil presisere at når jeg i denne oppgaven snakker om elevenes kunnskaper og utvikling i oppgaven min, betyr ikke dette at jeg mener de er matematisk kompetente. Niss og Højgaard Jensen (2002) peker på at skriftlige tester ikke kan gi fullt innblikk i alle de åtte kompetansene, men at de egner seg godt til å vurdere deler av følgende kompetanser:

- Problembehandling
- Resonnement
- Representasjon
- Symbol og formalisme
- Kommunikasjon
- Hjelpemiddel

Skriftlige tester kan altså ikke vurdere tankegangskompetanse og modelleringskompetanse, samt at de bare kan vurdere deler av de ovenfor nevnte kompetansene (Niss & Højgaard Jensen, 2002). Når jeg snakker om elevenes kunnskaper og utvikling i denne oppgaven, er det bare tale om kunnskaper og utvikling som jeg kan observere gjennom testresultatene. Hvis jeg skulle fått et enda sannere og mer fullstendig bilde av deres kompetanser, burde jeg ha snakket med dem og blitt mer kjent med tankene deres. Niss & Højgaard Jensen (ibid) peker på at muntlige prøver kan brukes til å vurdere tankegangskompetansen. I tillegg mener de blant annet at essay, observasjon av elever og loggbøker, er godt egnet til å vurdere matematiske kompetanser.

2.6 Likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon

En definisjon av ekvivalensrelasjon for matematikk og logikk er slik:

> *(Mathematics & Logic)* a relation between elements of a set which is reflexive, symmetric, and transitive and which defines exclusive classes whose members bear the relation to each other and not to those in other classes ("Equivalence relation," 2005).

For at elevene skal ha en fullstendig forståelse av likhetstegnet innebærer det altså tre momenter. For det første har elevene forståelse for likhetstegnets symmetriske egenskap, dersom de aksepterer at 13 = 7 + 6 like mye som 7 + 6 = 13. For det andre viser det om de har forståelse for likhetstegnets refleksive egenskap, dersom de aksepterer identitetsuttrykk som 8 = 8. Til slutt tyder det på at elevene har forståelse for likhetstegnets transitive egenskap, dersom de for eksempel kjenner godt til at 7 + 6 = 13, aksepterer at 13 = XIII, og i tillegg er i stand til å se at 7 + 6 = XIII (Baroody & Ginsburg, 1983).

Breiteig og Venheim (2005) sier følgende om likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon:

> Som ekvivalenstegn skal likhetstegnet oppfylle disse kravene for alle tall:
> (1) A =a
> (2) Om a = b, så er b = a
> (3) Om a = b og b = c, så er a = c (Breiteig & Venheim, 2005, s.36)

I følge Rittle-Johnson og Alibali (1999) innebærer matematisk ekvivalens minst følgende tre komponenter:

- meningen om at to mengder er like
- meningen om at likhetstegnet er et forholdssymbol
- ideen om at der er to sider i en likning

2.6.1 Problemer i forhold til forståelsen av likhetstegnet

Flere forskningsstudier har vist at elever har problemer med å forstå likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Knuth et al., 2006). Nedenfor vil noen av disse problemene bli presentert.

I tillegg til å undersøke sammenhengen mellom elevenes begreps- og prosedyrekunnskap (se s.14), så Rittle-Johnson og Alibali (1999) også på hva disse elevene i 4.og 5.klasse har lett for å forstå med ekvivalens og hva de har problemer med. Elevene fikk oppgaver som vurderte begreps- og prosedyrekunnskapene deres i forhold til ekvivalens. Begrepskunnskaps-oppgavene gikk ut på at de skulle forklare hva likhetstegnet betydde, rekonstruere ekvivalensproblemer etter å ha sett på dem en kort tid og avgjøre om noen ikke-standard likninger og noen standardlikninger var riktige eller gale. Disse oppgavene skulle gi vurderingsgrunnlag for elevenes forståelse av likhetstegnet, deres representasjon av ekvivalensproblemer og deres forståelse for likningsstrukturen. Elevene fikk også prosedyreoppgaver der de ble presentert for problemer på formen a+ b + c = a +_. I tillegg fikk de noen oppgaver der de skulle overføre prosedyren de hadde lært til variasjoner av dette problemet, som for eksempel a + b + c = _ + a. Resultatene i studien viste at de fleste elevene forstod hva det betyr at to mengder er like. Derimot var det mange av dem som ikke helt ut forstod meningen med likhetstegnet og likningsstrukturen, selv om de fleste var i stand til å utføre en del prosedyrer.

Behr, Erlwanger og Nichols (1980) intervjuet barn mellom seks og tolv år, for å finne ut hvordan de forstod ulike setninger som hadde likhetstegn. Barna ble presentert for setninger på formen

- a + b = □,
- □ = a + b,
- a = a der ikke de skulle ”gjøre noe”
- og til slutt a + b = b + a.

Motivasjonen for studiet deres var å finne ut om barn ser på ekvivalens som en operasjon eller en relasjon. Når det gjelder setningen a + b = □, mener barna at firkanten er svaret og at dette svaret må være tallet a + b blir. Videre er det ikke aktuelt at svaret bare er a + b. Setningen □ = a + b ville de fleste barna ikke akseptere som riktig. I stedet forandret de formen på den til a + b = □ eller □ + a = b. Barna aksepterte heller ikke setningen a = a uten å forandre den til en addisjon eller subtraksjon. Setningen som inneholdt addisjonstegn på begge sider av likhetstegnet, a + b = b + a ville barna heller ikke se på som ekvivalenssetninger bortsett fra om de fant et annet tall som svar ved at de regnet ut venstre side og høyre side hver for seg.. Intervjuene de gjennomførte antyder at barn oppfatter likhetstegnet som et "å gjøre noe-tegn", og at det bare passer inn i ei setning dersom det har et eller flere operasjonstegn foran seg. Det viste seg at til og med elevene i 6. klasse så på likhetstegnet bare som et operasjonstegn.

Flere forskere mener at det ser ut til å være en realitet for mange elever selv om de blir eldre, at de oppfatter likhetstegnet som et "gjøre noe"-tegn istedenfor at det betyr "det samme som" (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983; Knuth et al., 2006).

I Carpenters et al. (1999) studie ble regnestykket 8 + 4 = □ + 5 gitt til 145 elever i 6. klasse. Mange lærere trodde at denne oppgaven ville bli for enkel for elevene. Det viste seg derimot at samtlige av elevene svarte feil, ved å skrive enten 12 eller 17 i firkanten. Resultatene av hele studien viste at det var færre enn 10 % i hver klasse som svarte rett, når elever fra 1.-6. klasse ble spurt om hvilket tall som skulle plasseres i ruta for at setningen 8 + 4 = □ + 5 skulle være sann. Det viste seg til og med at det var enda færre i 5. og 6. klasse som svarte riktig enn på lavere klassetrinn (Carpenter et al, 2003).

I Kierans (1981) studie kommer det klart fram at ikke bare barneskoleelever ser på likhetstegnet som et symbol som skiller problemet fra svaret, men at også elever i ungdomsskole, videregående skole og til og med på høgskolenivå ser til dels ut til å henge fast i denne oppfatningen. Kieran (ibid.) viser til et undervisningseksperiment som hun og noen kolleger utførte, der elever fra 12 – 14 år ble spurt om likhetstegnets betydning for dem, og om de kunne gi et eksempel på hvordan likhetstegnet skulle brukes. Resultatet ble at de fleste beskrev likhetstegnet i forbindelse med svaret, og kom med eksempler som inneholdt en operasjon på venstre side og svaret på høyre side. Kieran (ibid.) mener dette gir klare tegn på at også ungdomsskoleelever tolker likhetstegnet som et operasjonstegn.

Hun viser videre til et eksempel fra Byers og Herscovics arbeid fra 1977, der elever i videregående skole har tatt noen snarveier når de løser ligninger og dermed brukt likhetstegnet på feil måte:

Solve for x: $x + 3 = 7$
$= 7 - 3$
$= 4$

(Kieran, 1981, s.323)

Kieran (ibid.) mener dette kan tyde på at heller ikke elever på videregående skole fullt ut er klar over at likhetstegnet skal uttrykke en ekvivalensrelasjon, og at de fortsatt tolker det som et operasjonstegn. Kieran antyder at det til og med for kalkulusstudenter er mangler i forståelsen av likhetstegnet, siden de ofte bruker det feilaktig som en link mellom steg i derivasjon.

En av grunnene til at elever har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet, er at de svært ofte når de møter likhetstegnet så står det plassert rett før svaret (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Carpenter et al., 2003). Studiet til Carpenter et al. (1999) peker på at mange barn kan modellere en situasjon der de skal gjøre ting like, men at det er en meget krevende og utfordrende prosess å få dem til å forstå at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider av det. De har altså problemer med å knytte ekvivalensbegrepet til likhetstegnet, noe som kan komme av at vanligvis når elevene møter et likhetstegn så kommer det i slutten av et regnestykke med et tall etter seg. McNeil et al. (2006) peker på at når en operasjonell forståelse av likhetstegnet etableres på denne måten i lavere klassetrinn, blir det ikke trivielt for elever på mellomtrinnet å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet.

Knuth et al. (2006) gjennomførte en studie som viste at mange elever også på mellomtrinnet tolker likhetstegnet operasjonelt. De undersøkte relasjonen mellom forståelsen av likhetstegnet til elever i 6., 7. og 8. klasse, og deres prestasjoner i arbeidet med algebraiske uttrykk og likninger. Resultatene fra studien viste at forholdsvis få elever hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Det viste seg at over halvparten av elevene fra 6. og 8. klasse tolket likhetstegnet som et operasjonstegn. I 7.klasse var det flere enn i 6. og 8.klasse som tolket likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, men likevel under halvparten. På hvert klassetrinn hadde de med en relasjonell tolkning av likhetstegnet, oftere riktig løsning på likningen. Resultatene fra studien viser tydelig sammenhengen mellom elevenes forståelse av likhetstegnet og deres ferdigheter når det gjelder å manipulere likninger.

Også på mellomtrinnet er trolig grunnen til at mange elever tolker likhetstegnet operasjonelt, at de vanligvis møter likhetstegnet med operasjoner på den ene siden og svaret på den andre. McNeil et al. (2006) undersøkte hvordan 4 lærebøker presenterte likhetstegnet for elever på mellomtrinnet. Det viste seg at likhetstegnet ofte ble presentert i standardkontekster, med operasjoner på den ene siden av likhetstegnet og svaret på den andre. Likhetstegnet ble sjelden presentert i kontekster med operasjoner på begge sider av det, mens det forekom noe oftere at det ble presentert i andre ikke-standardkontekster som for eksempel $a = a$. I forbindelse med denne undersøkelsen gjennomførte McNeil et al.(2006) to eksperimenter med elever fra 11 år til 14 år for å se om elevenes tolkning av likhetstegnet hadde sammenheng med konteksten det ble presentert i. Begge eksperimentene viste klart at elevenes forståelse av likhetstegnet var avhengig av konteksten det blir presentert i. Det viste seg at standardkonteksten med operasjoner på den ene siden av likhetstegnet og svaret på den andre, i liten grad fremmet en relasjonell forståelse, mens ikke-standardkontekster, som for eksempel $a = a$ eller $a + b = c + d$, i større grad fremmet relasjonell forståelse. Kontekster der likhetstegnet ble presentert med operasjoner på begge sider, fremmet mest relasjonell forståelse. Studien vektlegger betydningen av hvilke oppgavetyper elevene har møtt i skolen.

Goodchild og Grevholm (2009) ser på elevers løsning av oppgavene $14 : 2 = \square \cdot 14$ og $14 : \square = 0{,}25 \cdot 14$, i en studie der de har undersøkt hvilken effekt kjønn har på testresultatene fra KUL-LCM prosjektet på 11.trinn (Goodchild & Grevholm, 2009). De konkluderer med at både gutter og jenter hadde problemer med å se på likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon. Når jeg tar for meg disse to oppgavene i diskusjonen, vil jeg vise til deres tolkning av enkelte feilsvar som elever gav på oppgavene.

2.6.2 Utvikling av forståelse for ekvivalensrelasjonen

En del forskning har vist at elevers forståelse av ekvivalensrelasjonen kan utvikles gjennom undervisning (Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; McNeil & Alibali, 2000; Carpenter et al., 2003).

Baroody og Ginsburg (1983) ville finne ut om elever helt ned i 1., 2. og 3. klasse kunne være i stand til å få forståelse av likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon gjennom undervisning som fokuserte på dette. Resultatet av studien viste at elevenes kognitive utviklingsnivå ikke trengte å være noen hindring for at elevene kunne forstå likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon.

På grunn av at elevene tidlig og ofte møter likhetstegnet som svar i slutten av et regnestykke, kan det faktisk være en fordel at barna møter likhetstegnet som et uttrykk for en ekvivalensrelasjon så tidlig som mulig (Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999).

Videre er det blitt pekt på at Rittle-Johnson og Alibali (1999) fant ut at elever i 4. og 5. klasse kunne utvikle forståelse for ekvivalensrelasjonen både gjennom prosedyreleksjoner og begrepsleksjoner. I tillegg er det blitt påpekt gjennom studien til McNeil og Alibali (2000) at en tydelig presentasjon av læringsmål og prestasjonsmål, kan føre til bedre forståelse av ekvivalensrelasjonen hos elever i 3. og 4. klasse.

I Carpenter et al. (1999) sin studie som er omtalt ovenfor gav de fleste elevene i 1. og 2. klasse feilsvaret 12 på regnestykketat $8 + 4 = \square + 5$, mens noen også føyde til 17 i svaret. I løpet av halvannet år fortsatte elevene i 1. og 2. klasse å bli presentert for lignende oppgaver. Mange elever viste lenge stor skepsis til dette, men etter mange diskusjoner lærte flere og flere elever å se likhetstegnet som et forholdssymbol, og ikke et tegn på at noe skal gjøres. Elevene viste til og med glede og engasjement over den nye kunnskapen de ervervet seg gjennom dette. Carpenter et al. (ibid.) påpeker at det er nødvendig at det foregår et konsentrert arbeid over tid, for at elevene skal få en tilfredsstillende forståelse av ekvivalensbegrepet. De mener også at ekvivalensforståelsen elevene får når de lærer om tall og operasjoner, vil gjøre det mulig for dem å reflektere omkring ligninger, og at dette vil legge et godt grunnlag for senere læring av algebra. Knuth et al. (2006) mener på bakgrunn av deres studie at, for at elevene skal bli flinkere til å løse likninger bør lærere investere mer tid i å lære elevene betydningen av likhetstegnet. Siden det kom fram av studien deres at færre enn 50 % av elevene så på likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, er det viktig å fokusere på en relasjonell tolkning av likhetstegnet ikke bare på de laveste klassetrinnene, men også på mellomtrinnet (Knuth et al., 2006). Flere forskere frykter nemlig som vist at elever som har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet, kan få store problemer når de skal lære algebra (Kieran, 1981; Carpenter et al., 2003). Carpenter et al. (2003) sier følgende:

> A limited conception of what the equal sign means is one of the major stumbling blocks in learning algebra. Virtually all manipulations on equations require understanding that the equal sign represents a relation (Carpenter et al., 2003, s.22).

Undervisningseksperimentet som Kieran (1981) var med på (se ovenfor), gav elevene et enklere møte med algebraiske ligninger ved å fokusere på elevenes ekvivalensforståelse i forkant og under selve algebraintroduksjonen. Undervisningen fokuserte i starten på at elevene skulle utvide bruken av likhetstegnet til å inkludere flere operasjoner på begge sider. Først ble elevene bedt om å konstruere et aritmetisk uttrykk med en operasjon på hver side av likhetstegnet. Deretter ble de bedt om å ha forskjellige operasjoner på hver side, for så å utvide til å ha flere ulike operasjoner på hver side. For å spare navnet ligning til algebraiske ligninger ble innført, kalte de elevenes konstruksjoner for ”aritmetiske identiteter”. Etter hvert viste det seg at elevene ble mer og mer fortrolige med at likhetstegnet skulle utrykke at det måtte være lik verdi på begge sider. Kieran (ibid.) begrunner undervisningen slik:

> The reason for extending the notion of the equal sign to include multiple operations on both sides was to provide a foundation for the later construction of meaning for non-trivial algebraic equations (which have multiple operations on both sides). If this expansion were not done first, the student would be bringing with him into the study of algebraic equations the idea that the result is always on the right side of the equal sign (Kieran, 1981, s.321).

Seinere i undervisningseksperimentet ble elevenes aritmetiske identiteter brukt i introduksjonen av algebraiske ligninger. Først ble et av tallene i de aritmetiske identitetene skjult med en finger, så ble en firkant satt inn istedenfor tallet og til slutt ble tallet erstattet med en bokstav. Ut fra dette ble så en ligning definert som "en aritmetisk identitet med et skjult tall". Kieran (ibid.) sier følgende:

> By following these three modes of representation, the student could acquire an intuitive understanding of the meaning of equation and then gradually transform this understanding of the form of an algebraic equation. Thus, his algebra would be anchored in his arithmetic (Kieran, 1981, s.322).

På denne måten kan algebraisk tenkning bli inkorporert i aritmetikken.

2.7 Relevante forskningsprosjekter

2.7.1 KIM-prosjektet

KIM står for "Kvalitet i Matematikkundervisningen", og ble startet i 1993 (Brekke & Støren, 1995). KIM-prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen. På oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet ble prosjektet utført av Telemarksforskning-Notodden (TFN) og Senter for lærerutdanning og skoletjeneste (SLS) ved Universitetet i Oslo, med følgende formål:

- Utvikle en integrert prøve og etterutdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.
- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan dane utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor ulike deler av faget.
- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og undervisningen i faget.
- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimum kompetanse (Brekke, 2002, forord).

Forskjellige veiledningshefter, diagnostiske oppgaver og et introduksjonshefte til diagnostisk undervisning, er laget i tilknytning til prosjektet. Flere matematikkemner er blitt tatt opp i dette materialet.

Det ble gjennomført diagnostiske tester i de forskjellige matematikkemnene. I analysedelen av denne oppgaven vil jeg sammenligne noen av enkeltresultatene fra KIM-prosjektet med resultatene fra KUL-LCM-studiet. De matematikkemnene som er relevante å sammenligne med, er tall og tallregning samt algebra.

Testen som fokuserte på tall og algebra ble gjennomført i januar og februar 1995. Elevene som var med på denne testingen gikk i 4.klasse, 6.klasse og 8.klasse. Siden dette skjedde før L-97 ble innført, vil alderstrinnet for deltakerne i dag tilsvare alderen til elever som går i 5.klasse, 7.klasse og 9.klasse.

Testen som fokuserte på algebra ble gjennomført i november og desember 1996. På denne testen gikk elevene som deltok i 5. Klasse, 7.klasse og 9.klasse (M87-betegnelser). Etter dagens system vil det si 6., 8. og 10.klasse.

2.7.2 Evaluering av L-97

> Rapporten *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus* presenterer en evaluering av matematikkfaget i Reform 97 innenfor Norges forskningsråd sitt program: Evaluering av Reform 97. Dette er et samarbeidsprosjekt mellom Telemarkforskning-Notodden (TFN) og Høgskolen i Agder (HiA). Rapporten belyser overordnede problemstillinger eksemplifisert ved matematikkfaget (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003, s.9).

Et av hovedmålene med prosjektet var å se på hvilke konsekvenser Reform 97 (L97) har hatt for lærere og elever. For å analysere eventuelle endringer i elevenes matematikkunnskaper etter innføringen av Reform 97, ble det blant annet foretatt en undersøkelse av elever i 4. og 7.klasse i mars 2001. Denne studien vil videre bli omtalt som V01. De matematiske kunnskapene til elever i 4.klasse og elever i 7.klasse ble da testet ved hjelp av ulike oppgavesett. De fleste av oppgavene hadde vært brukt i tidligere undersøkelser. Dette gjorde det mulig å sammenligne resultater på enkeltoppgaver fra V01-undersøkelsen, med resultater på de samme oppgavene fra undersøkelser før reformen. Dataene fra tidligere undersøkelser som ble brukt til sammenligning, var i hovedsak fra TIMSS 1995 og KIM 1995. Problemstillingen i denne komparative studien var følgende:

> Hvordan presterer elever i 4. og 7. klasse, som er blitt undervist etter L97, på disse områdene av faget i forhold til elever som har blitt undervist etter M87? (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003, s.161).

Alseth, Breiteig og Brekke (2003) peker på at L 97 vektlegger begrepskunnskaper og forståelse, samt at planen anbefaler sammenhenger. De påpeker også at L97 ikke anbefaler direkte pugg eller drill av regler, som ikke knyttes sammen med forståelse. I V01-undersøkelsen ble det studert prosedyrekunnskap versus begrepskunnskap. Her baserte forfatterne seg på Hiebert og Lefevres (1986) definisjoner av prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Prosedyrekunnskaper blir beskrevet som å kunne utføre operasjoner etter en skrittvis algoritme, mens begrepskunnskaper innebar innsikt i selve tall- og operasjonsbegrepene (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). I V01-undersøkelsen ble oppgaver som legger hovedfokus på prosedyrekunnskaper, samlet i en gruppe, og stilt komplementært opp mot oppgaver som fokuserer på begrepskunnskap.

I min oppgave vil jeg basere meg på Alseth et al. (2003) sin beskrivelse av prosedyre- og begrepskunnskap, samt deres måte å undersøke elevenes kunnskaper i forhold til prosedyrekunnskaper versus begrepskunnskaper.

Resultatene for 4. klasse viser at V01-elevene presterer dårligere enn KIM-elevene i 4.klasse fra før reformen. Noe av grunnen til dette kan være at elevene fra før reformen er et år eldre. Samtidig viser det seg at V01-elevene i 4.klasse presterer bedre enn TIMSS-elevene i 3.klasse fra før reformen. Dette kan komme av at V01-elevene har gått et år lengre på skolen. Samlet sett ser det likevel ut til at V01-elevene presterer dårligere enn elevene fra før reformen. Videre viser det seg at V01-elevene i 7.klasse samlet sett gjør det dårligere enn elevene fra 1995. Spesielt viser det seg at det har vært nedgang i elevenes prosedyrekunnskaper fra 1995 til 2001. V01-elevene presterer også dårligere når det gjelder regning med desimaltall og avlesning av desimaltall på tallinje. Med tanke på V01-elevenes begrepskunnskaper er det derimot ingen vesentlig nedgang. Det er til og med noe framgang på oppgaver som måler elevenes forståelse av posisjonssystemet og på oppgaver der elevene må velge riktig regneoperasjon.

> L 97 vektlegger begrepskunnskaper og forståelse, og planen anbefaler sammenhenger. Direkte pugg eller drill av regler, som ikke knyttes sammen med forståelse, anbefales ikke. Vi har studert forholdet mellom *prosedyrer*, det å kunne utføre operasjoner etter en skrittvis algoritme, mot *begrepskunnskaper* og innsikt i selve tall- og operasjonsbegrepene. Størstedelen av nedgangen er knyttet til prosedyrekunnskaper. Regneferdighetene har gått ned.(Alseth, Breiteig & Brekke, 2003, s.193)

I analysedelen i oppgaven vil noen av enkeltresultatene fra V01-undersøkelsen bli sammenlignet med resultatene i KUL-LCM prosjektet. På samme måte som forholdet mellom prosedyrekunnskaper og begrepskunnskaper er studert i V01-undersøkelsen, vil jeg også se på dette i forhold til KUL-LCM prosjektet.

2.7.3 TIMSS-prosjektet

TIMSS står for "Trends in International Mathematics and Science Study". Dette er en internasjonal komparativ studie i matematikk og naturfag på 8.trinn og 4.trinn. Med over 60 deltakerland fra samtlige verdensdeler i TIMSS 2007, betyr det at det er det største prosjektet som er blitt gjennomført noensinne innen utdanning (Grønmo et al., 2009).

Den internasjonale organisasjonen for utdanningsforskning, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), står bak gjennomføringen av TIMSS-undersøkelsen. Ved Boston College i USA ligger det internasjonale prosjektsenteret for TIMSS. Nære samarbeidspartnere til det internasjonale prosjektsenteret er IEA Data Processing Center i Hamburg og Statistics Canada i Ottawa. Et nasjonalt senter i hvert deltakerland, har hatt ansvar for tilrettelegging og gjennomføring i eget land. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo har hatt ansvaret for prosjektet i Norge.

Målene for TIMSS er kort oppsummert å

- Undersøke elevenes kunnskaper i matematikk og naturfag på 8.trinn og 4.trinn i grunnskolen.
- Studere hvordan elevenes prestasjoner henger sammen med ulike faktorer som kjønn, faglig selvtillit og holdninger.
- Undersøke lærernes bakgrunn og tilrettelegging av undervisningen.
- Sammenlikne land
- Studere utvikling over tid (trendstudier).
- Prøve å finne fram til faktorer, nasjonalt og internasjonalt, som fremmer god læring og en positiv utvikling innen matematikk og naturfag i skolen (Grønmo et al., 2009, s.10).

Fram til 1990 ble det gjennomført to internasjonale komparative studier i matematikk og to i naturfag. TIMSS ble startet i 1991 under navnet Third International Mathematics and Science Study, og var dermed den første studien som inkluderte både naturfag og matematikk. Den første testen i TIMSS-studien ble gjennomført i 1995. TIMSS Repeat ble så gjennomført i 1999 på 8.trinn.

> Fra og med TIMSS 2003 ble det å se på trender, eller utvikling over tid, en meget sentral del av den komparative studien. Benevnelsen TIMSS ble beholdt, mens skulle nå stå for Trends in International Mathematics and Science Study. Det tas nå sikte på å gjennomføre TIMSS-undersøkelser hvert fjerde år, det vil si i 2011, 2015 osv (Grønmo et al., 2009, s.10).

Norge har deltatt i TIMSS i 1995, 2003 og 2007. Når det gjelder utvikling av norske matematikkprestasjoner i perioden 1995-2007, viser det seg at elever på 4.trinn presterer omtrent likt i 2007 som de gjorde i 1995. De har altså hatt en positiv utvikling igjen fra den tilbakegangen som viste seg i 2003. Norske elever på 8.trinn viser også framgang i prestasjoner fra tilbakegangen i 2003, men det er fortsatt et stykke igjen før norske 14-åringer presterer like bra som i 1995.

> Det har vært en signifikant framgang i matematikkprestasjoner for norske elever på både 8.trinn og 4.trinn i perioden fra 2003 til 2007. Det markerer et klart brudd med tidligere trender i TIMSS og PISA, som har pekt på en generell nedgang i matematikkprestasjoner for norske elever fra 1995 og framover (Grønmo et al., 2009, s.49).

I 2007 presterte norske elever på 4.trinn svakest på området Tall, mens elever på 8.trinn presterte svakest på området Algebra. På disse områdene er prestasjonene tydelig lavere enn det internasjonale gjennomsnittet. Kunnskapene i formell matematikk ser spesielt ut til å være svake for norske elever. Dette gjelder særlig regning med tall på 4.trinn og algebra på 8.trinn. Derimot ligger elevene på 8.trinn omtrent på nivå med det internasjonale gjennomsnittet i området Statistikk. Videre ser det ut til at norske elever gjør det best på resonneringsoppgaver der de ikke trenger å bruke formell matematikk for å komme fram til svaret (Grønmo et al., 2009).

I 2003 presterte norske elever lavere enn det internasjonale gjennomsnittet og langt etter land vi gjerne vil sammenlikne oss med. Matematikkområdene norske elever i 8.klasse og 4.klasse gjorde det dårligst på var tall og algebra/mønstre. Dette innebærer for eksempel at elevene har problemer med å kunne bruke de fire regningsartene på heltall i 4.klasse og desimaltall i 8.klasse. Det viste seg at det var spesielt innen formell matematikk elevene presterte lavt. Matematikkområdet de norske elevene presterte best på i 2003 var datarepresentasjon (Grønmo et al., 2004).

Dette samsvarer med resultatene fra TIMSS 1995, da norske elever scoret spesielt lavt i algebra, geometri og proporsjonalitet, samt scoret over det internasjonale gjennomsnittet på området datarepresentasjon (Brekke et al., 1998).

2.8 L-97

Testene i KUL-LCM prosjektet bygger på L-97. Av denne grunn blir det naturlig å bruke L-97 som sammenligningsgrunnlag i diskusjonskapittelet når det skal vurderes i hvilke emner testene viser positiv. Målene og hovedmomentene fra L-97(Kirke- utdannings- og forskningsdepartementet, 1996, s. 158-165), som er spesielt aktuelle i forhold til testene i Tall og algebra i KUL-LCM prosjektet er sortert og listet opp slik:

4.klasse

- Mål for småskoletrinnet:
  - Skal lære å kjenne og bruke naturlige tall
  - Skal bli kjent med enkle brøker og desimaltall når disse er knyttet til konkrete størrelser
  - Skal utvikle grunnleggende kjennskap til de fire regnearter
  - Skal få trening i å forklare hvordan de tenker
  - Skal få mulighet til å oppdage og oppleve at i tallenes verden kan en finne orden og system

- Hovedmoment for fjerde klasse:
    - Arbeide systematisk med plassverdisystemet
    - Arbeide med enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger
    - Arbeide videre med metoder for å addere og subtrahere flersifrede tall i hodet og på papiret
    - Få erfaringer med multiplikasjon som gjentatt addisjon og divisjon som gjentatt subtraksjon
    - Arbeide mer med multiplikasjonstabellen, multiplisere og dividere tall med 10 direkte, og multiplisere og dividere i hodet eller på papiret når det også inngår tosifrede tall
    - Bruke tall og regning i praktiske situasjoner. Velge og begrunne valg av regneart, metode og redskap, og vurdere svar

7.klasse

- Mål for mellomtrinnet:
    - Elevene skal utvide og utdype sine begrep om tall
    - De skal forstå og kunne bruke de fire regneartene og kunne vurdere hvilke operasjoner som er aktuelle i hver enkelt situasjon
    - Kunne utføre utregninger i hodet og på papiret
- Hovedmoment for sjuende klasse
    - Arbeide videre med hele tall og desimaltall, bruke brøk som ren tallstørrelse, som del av en størrelse og som forhold mellom hele tall
    - Gjøre erfaringer med begrep som prosent, hundredel og del av en helhet
    - Arbeide videre med hoderegning og regning på papiret
    - Trene på å velge og bruke regneoperasjoner
    - Undersøke og formulere hvilke regler som gjelder
    - Arbeide med problemstillinger og løse oppgaver knyttet til økonomi

L97 sier i tillegg at på alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer (Kirke- utdannings- og forskningsdepartementet, 1996).

3 Metode

3.1 KUL-LCM-prosjektet

Prosjektet Læringsfellesskap i matematikk (LCM), som denne oppgaven bygger på, foregikk i perioden fra januar 2004 til desember 2007. Norges forskningsråd gav støtte til prosjektet under programmet Kunnskap, Utdanning og Læring (KUL). Et team av didaktikere fra Universitetet i Agder og lærere fra åtte skoler i Agder, har i denne perioden arbeidet sammen for å utvikle læring og undervisning i matematikk ved skoler i Agder. Hovedmålet for prosjektet var følgende:

> The LCM project, Learning Communities in Mathematics seeks to explore ways in which classrooms can provide better learning environments for pupils in mathematics, through collaboration between teachers in schools and didacticians in University of Agder (Jaworski, 2007, s.13).

Begrepet ’Inquiry community’ var meget sentralt i prosjektet. Dette innebar at læringsfellesskapene mellom lærerne og didaktikerne i prosjektet, skulle preges av en spørrende og undersøkende tilnærming (Jarowski, 2007).

LCM-prosjektet bestod av flere deler. En av delene var en longitudinell studie, som denne oppgaven er en del av. Elevene som deltok i studien ble fulgt gjennom et år ved en skriftlig test ved begynnelsen og ved slutten av året. En del av testresultatene er allerede gjennomarbeidet og analysert, men det finnes fortsatt testmateriale som ikke er ferdigbearbeidet. Målet med studien var å få et bilde av elevers forståelse i matematikk og hvordan den utvikler seg gjennom prosjektet. Det var også ønskelig at testingen skulle gi lærere bedre innsikt i elevers begreper i matematikk (Grevholm, 2007).

3.2 Testene

Testingen ble gjennomført i begynnelsen og slutten av skoleårene 2004/05, 2005/06 og 2006/07. 4.trinn og 7.trinn gjennomførte to tester der den ene gikk ut på ’tall og algebra’ og den andre tok for seg ’geometri og statistikk’. 9.trinn og 1. trinn på i videregående skole ble av tidsmessige hensyn bare testet i området ’tall og algebra’. Denne oppgaven tar for seg resultatene fra testen i tall og algebra, som ble gjennomført i 4.klasse og 7. klasse høsten 2006 og våren 2007. Når det gjelder 7. trinn, så er resultatene tatt inn bare i forbindelse med fokus på ekvivalens og elevers løsninger av oppgaver som berører dette.

Utarbeidelsen og gjennomføringen av testene, samt formalitetene med statistisk sentralbyrå og datatilsynet var allerede ordnet i forkant av min bearbeiding av testene. Oppgavene som er brukt i testene er hentet fra tidligere tester som TIMSS, KIM, Kassel-Exeter-studien og noen andre tidligere internasjonale og norske tester. Det ble tatt med oppgaver som prøver både ferdigheter, kunnskaper og forståelse av begreper. Hensikten med testene var ikke å foreta en individuell vurdering, men å få innsikt i elevers prestasjoner, begrepsforståelse og tenkemåter. Innholdet i læreplanen L97 påvirket utvalget av oppgaver (Grevholm, 2007). I tabell 3.2.1 og 3.2.2 ser vi en oversikt hentet fra Andreassen (2005), som viser hva elevene i 4.og 7.klasse blir testet i når det gjelder tall og algebra:

Tabell 3.2.1: Oversikt som viser hva som ble testet i 4.klasse. (Andreassen, 2005, s. 24-25)

Test	Hva testes
Tall og algebra, 4.trinn	- sammenligne størrelsen på naturlige tall - forståelse av posisjonssystemet - lese av hele tall på en tallinje - addisjon og subtraksjon av ensifrede og tosifrede tall - enkel multiplikasjon - valg av regneuttrykk til en tekstoppgave - lage regnefortelling - se sammenhengen mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon - oppdage mønster i en tallrekke - bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgaver - enkle brøker - bruk av mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi - finne tall representert ved en rute (prealgebra), prioritet av regneoperasjoner

Tabell 3.2.2: Oversikt som viser hva som ble testet i 7.klasse. (Andreassen, 2005, s. 25-26)

Test	Hva testes
Tall og algebra, 7.trinn	- forståelse av desimalnotasjon - sammenligne størrelsen på naturlige tall - sammenligne tall med ulikt antall desimaler - forståelse av posisjonssystemet - lese av desimaltall på en tallinje - multiplikasjon og divisjon med hele tall - regning med desimaltall (de fire regningsartene) - forståelse av brøkbegrepet og likeverdige brøker - regning med brøk (addisjon, subtraksjon og multiplikasjon) - oppdage mønster i en tallrekke - av regneuttrykk til en tekstoppgave - forståelse av regneoperasjoner og inverse tall - bruk av de fire regneartene i tekstoppgaver, valg av løsningsstrategi - regnefortelling, finne en passende realistisk situasjon - finne tall representert ved en rute (prealgebra), prioritet av regneoperasjoner - bruke mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi

Elevene fikk 45 minutter på å gjennomføre en test, og ingen hjelpemidler var tillatt. Første gang testene ble gitt høsten 2004 viste det seg at elevene hadde for lite tid til å gjennomføre hele testen. En oppgave på 4.klasse-testen og noen deloppgaver på begge testene, ble derfor fjernet før testene ble gjennomført våren 2005. Dette resulterete i at den maksimale poengsummen elevene kunne oppnå, gikk ned. Testene som ble gitt de neste to skoleårene, var derimot den samme testen som ble gitt våren 2005. Maksimal poengsum elevene i 4.klasse kunne oppnå i 2006/07 var dermed 38 poeng, mens maksimal poengsum elevene i 7.klasse kunne oppnå dette året var 61 poeng.

Tabell 3.2.3: Antall oppgaver og maksimal poengsum på testen i tall og algebra

Trinn	Høst 2004		Vår 2005		Høst 2006 og vår 2007	
	Antall oppgaver	Maksimal poengsum	Antall oppgaver	Maksimal poengsum	Antall oppgaver	Maksimal poengsum
4.trinn	21	46	20	38	20	38
7.trinn	26	65	26	61	26	61

Der sammenlikning er gjort med resultatene fra høsten 2004, er de oppgavene som bare var tatt med på denne første testen, ikke regnet med.

Jeg har en liten merknad i forhold oppgave 21. På testen som ble gitt på 4.trinn høsten 2006 var det en feil i oppgaveteksten (se nedenfor) som kan ha innvirket noe på løsningsfrekvensen for denne oppgaven. Feilen består i at oppgaveteksten spør hvor gammel Per er, noe det ikke er mulig å finne ut av oppgaveteksten. Våren 2007 var oppgaveteksten derimot riktig. Da blir det spurt etter hvor gammel Petter er.

21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Per? Regn eller forklar her:

3.3 Utvalg

2 barneskoler og en kombinert barne-og ungdomskole deltok på gjennomføringen av testene på 4.trinn og 7.trinn. Våren 2005 glemte en av skolene å gjennomføre testene. På grunn av skeivhet i datamaterialet, vil det derfor ikke bli gjort noen sammenligning med resultatene fra våren 2005 i denne oppgaven. Nedenfor vises antall elever som deltok på testene:

Tabell 3.3.1: Oversikt over antall elever som deltok på de ulike testene

Trinn	Høst 2004	Vår 2005	Høst 2006	Vår 2007	Høst 2006 og vår 2007
4.trinn	106	64	112	109	103
7.trinn	115	64	109	111	105

Når jeg skal se på utviklingen for skoleåret 2006/07, vil jeg bare ta med de 103 elevene som deltok på begge testene. Dette gjør jeg for at ikke det skal bli skeivheter i sammenligningsgrunnlaget. Dessuten var nesten alle elevene med på begge testene.
Når jeg sammenligner resultatene fra høsten 2006 med høsten 2004, vil jeg gå ut fra de 103 elevene som deltok på begge testene 2006/07 og samtlige av de 106 elevene som deltok på testen høsten 2004.

3.4 Analyse

Testene som ble gitt på 4. og 7.trinn skoleåret 2006/07, ble først rettet og alle svarene ble lagt inn i Excel. Deretter ble svarene kodet med 1 for rett svar, 0 for ingen svar, 2 og 3 for delvis rett svar og 11 for feilsvar. Poeng ble gitt for kodene 1, 2 og 3. Kode 2 og 3 ble ikke brukt i alle oppgavene. Dataene ble så lagt inn i SPSS for analysering. Det ble gjennom dette utarbeidet løsningsfrekvens på oppgavene og poengfordelinger. Dataanalysen fra SPSS ble så lagt inn i Excel igjen for å systematiseres og visualiseres gjennom tabeller og diagram. Videre ble feilsvarene som var kodet 11, i spesielt utvalgte oppgaver, delt opp i flere feilkategorier. Dette gjaldt oppgaver der løsningsfrekvensen hadde en utvikling på minst 20 prosentpoeng og der løsningsfrekvensen var på 20 % eller lavere. Kodene 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 ble brukt i denne mer detaljerte feilanalysen. Feilsvar som ikke forekom så hyppig ble kategorisert med koden 20.

Jeg har sortert og analysert både testene for 4.trinn og for 7.trinn skoleåret 2006/07, men vil i analysen i denne oppgaven bare fokusere på 4.trinn bortsett fra når det gjelder oppgaver som omhandler ekvivalens. Likevel legger jeg ved noe materiale som jeg har laget med tanke på analysen av 7.trinn, siden dette kan være av interesse for KUL-prosjektet. Jeg har delt inn elevgruppene både på 4. og 7. trinn i tre grupper, for å se om det er ulik framgang i de ulike gruppene, både når det gjelder enkeltoppgaver og gjennomsnittlig poengsum.

I analysen har jeg sammenlignet noen enkeltoppgaver med testresultater som har kommet fram tidligere år i KUL-LCM prosjektet. Disse testresultatene er hentet fra masteroppgavene til Andreassen (2005), Espeland (2006) og Log (2007). Jeg sammenlignet også noen enkeltoppgaver med testresultater som er hentet fra KIM 1995 og V01-undersøkelsen. Når det gjelder testresultatene fra Andreassen (2005), kommer det ikke fram av hennes arbeid hvilke ulike typer feilsvar elevene gjør. Der jeg har framstilt testresultater fra i tabeller, vil alle feilsvar fra høsten 2004 gå under koden 11.

Oppgavene jeg kommenterer i analysedelen har jeg delt inn i kategorier etter begrep og prosedyre i forhold til hva som kreves for å løse dem. Denne inndelingen baserer seg på Alseths et al. (2003) definisjon av prosedyre- og begrepskunnskap. De beskriver prosedyrekunnskaper som det å kunne utføre operasjoner etter en skrittvis algoritme, mens begrepskunnskaper innebærer innsikt i selve tall- og operasjonsbegrepene.

Videre vil jeg bruke en del av innholdet i tabell 3.2.1 og 3.2.2 i analysen og diskusjonen, for å vise hva som testes i de ulike oppgavene. Dette vil jeg også bruke i diskusjonen til å dele oppgavene som omtales i analysen, inn i ulike oppgavetyper.

4 Analyse

4.1 Elevenes utvikling på 4.trinn fra høst 2006 til vår 2007

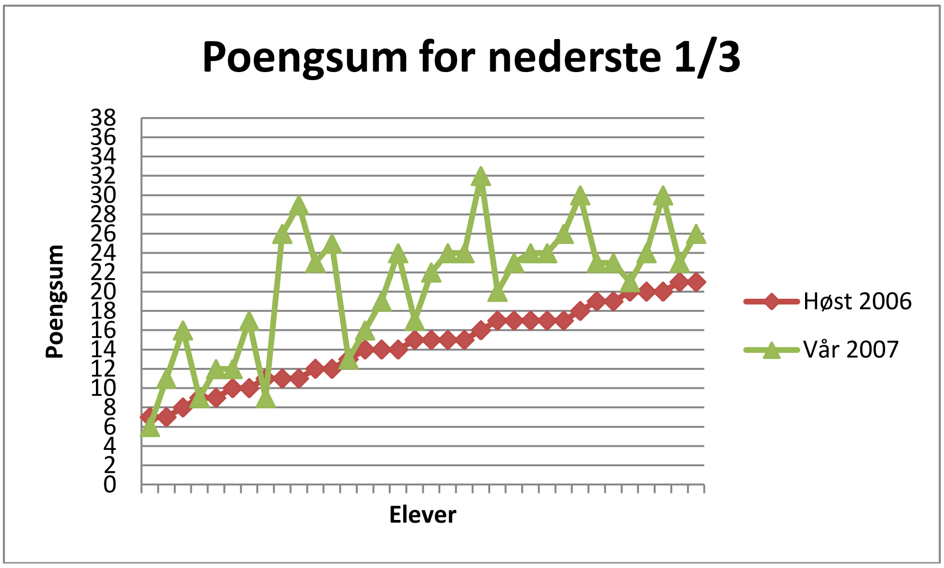
Jeg tar her utgangspunkt i elevene som gjennomførte begge testene. Elevgruppa blir delt i tre undergrupper; nederste, midterste og øverste. Elevene ble delt inn i grupper ut fra hvordan de gjorde det på den første testen.

4.1.1 Poengfordeling 2006-2007

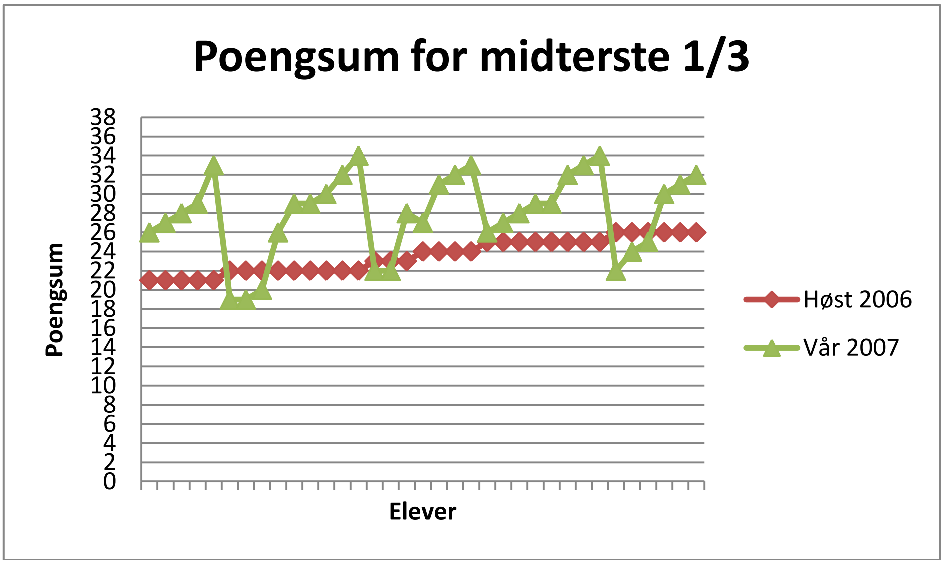
Tabell 4.1.1.1: Deskriptiv statistikk for poeng per elev og for de ulike elevgruppene på begge testene (maksimal poengsum er 38)

Test år	Elevgruppe	N	Minimum	Maksimum	Gjennomsnitt	Standardavvik
Høst 2006	Alle	103	7	37	22,9	7,3
Vår 2007	Alle	103	6	38	26,7	6,6
Høst 2006	Nederste 1/3	34	7	21	14,4	4,2
Vår 2007	Nederste 1/3	34	6	32	20,8	6,7
Høst 2006	Midterste 1/3	35	21	26	23,5	1,8
Vår 2007	Midterste 1/3	35	19	34	27,8	4,3
Høst 2006	Øverste 1/3	34	27	37	30,7	2,8
Vår 2007	Øverste 1/3	34	23	38	31,5	3,4

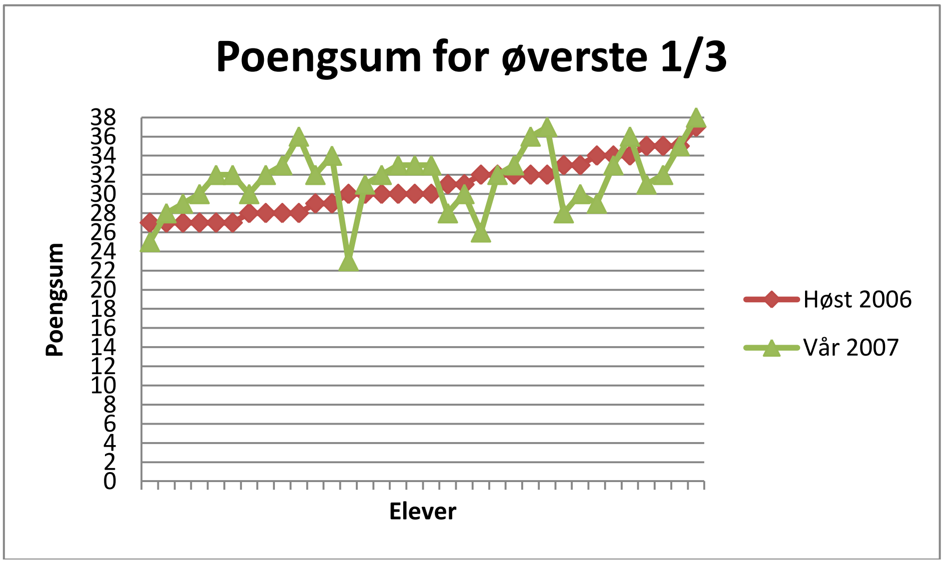
Av tabell 4.1.1.1 kommer det fram at gjennomsnittet økte for hele elevgruppa fra høsten-06 til våren-07 med 3,8 poeng. Dette betyr at hele elevgruppa sett under ett, utviklet seg i positiv retning fra den ene testen til den andre. Spredningen rundt gjennomsnittet varierer ikke så mye fra høst til vår, men det kan tyde på at spredningen ligger litt nærmere gjennomsnittet på våren enn om høsten. Av figur 4.1.1.1 kommer det fram at samme eleven hadde laveste poengsum både høst og vår, og av figur 4.1.1.3 vises det også at det er samme elev som skårer høyest på testen både høst og vår. Denne eleven mangler ett poeng fra å få maksimal poengsum om høsten, mens vårens resultat gir høyest oppnåelig poengsum. Figurene viser også at noen enkeltelever gjør det betydelig bedre på våren enn på høsten. Eleven med størst forskjell har gått opp med 18 poeng, og er en del av den nederste gruppa.



Figur 4.1.1.1: Elevenes poengsum høst og vår. 4.trinn.



Figur 4.1.1.2: Elevenes poengsum høst og vår. 4.trinn.



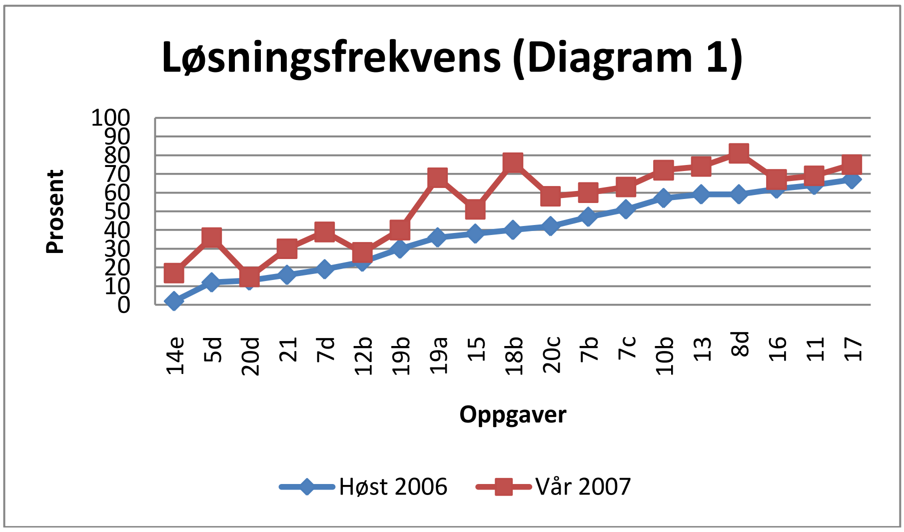
Figur 4.1.1.3: Elevenes poengsum høst og vår. 4.trinn.

Økningen av gjennomsnittet for hele elevgruppa, skyldes nok for en stor del at den nederste elevgruppa har en økning av gjennomsnittet på hele 6,4 poeng. Med en gjennomsnittsøkning på 4,3 poeng bidrar også den midterste elevgruppa til økningen. Den øverste elevgruppa har en gjennomsnittsøkning som er mindre enn ett poeng, og bidrar derfor ikke i særlig grad til økningen.

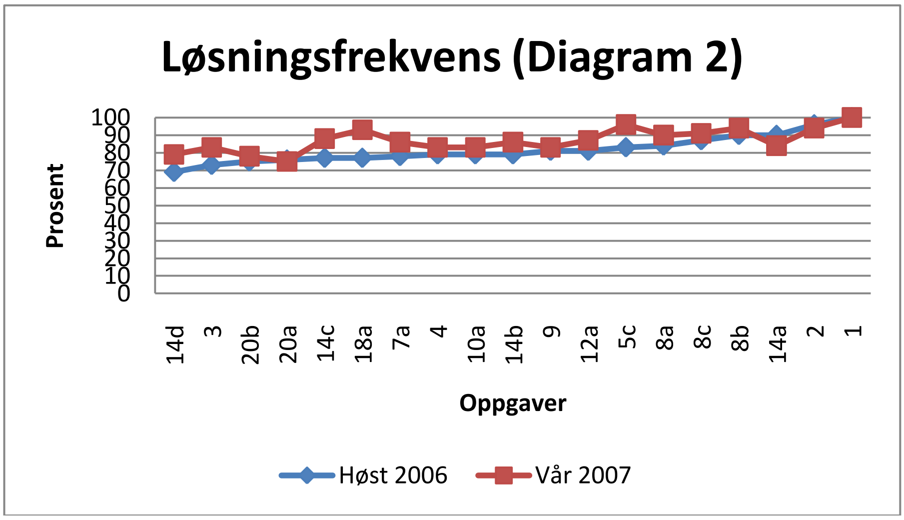
Selv om det ikke finnes data på hva som har foregått i klasserommet, kan det altså tyde på at undervisningen dette året har hatt en positiv innvirkning på kunnskapsutviklingen til elevene på lavest og middels nivå. Mens det ser ut til at testen var for enkel for elevene i den øverste gruppa, siden de fleste av disse hadde høyt score allerede på den første testen og derfor liten mulighet til å gjøre det bedre om våren. Testen gjør det dermed vanskelig å få et godt bilde av den øverste gruppas kunnskapsmessige utvikling fra den første til den andre testen. Det kommer fram at noen av elevene i denne gruppa har litt lavere løsningsfrekvens på den andre testen. Et par av elevene går ned 6-7 poeng. Dette kan nok bare skyldes tilfeldigheter eller dagsform, og er vanskelig å gi noen grunn for.

4.1.2 Løsningsfrekvens på oppgaver 2006-2007

Løsningsfrekvens for elevgruppa bestående av alle elevene



Figur 4.1.2.1: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. 4.trinn.



Figur 4.1.2.2: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. 4.trinn.

Oppgaver løst av mer enn halvpartene av elevene på begge testene

Oppgavene som hadde en løsningsfrekvens på over 50 % på begge testene var 1, 2, 3, 4, 5c, 7a, 7c, 8a, 8b, 8c, 8d, 9, 10a, 10b, 11, 12a, 13, 14a, 14b, 14c, 14d, 16, 17, 18a, 20a og 20b. Dette betyr at over halvparten av elevene klarte å løse over 2/3 av oppgavene på begge testene.

Oppgaver med høy løsningsfrekvens på minst en av testene

Oppgave 1, 2, 5c, 8a, 8c, 8b, 9, 12a og 14a hadde en løsningsfrekvens på over 80 % på begge testene. Samtlige av elevene klarte å løse oppgave 1 på begge testene. Om våren hadde 17 oppgaver en løsningsfrekvens på over 80 %. I tillegg til oppgavene som er nevnt ovenfor, klarte over 80 % av elevene også å løse 3, 4, 7a, 8d, 10a, 14b, 14c og 18a om våren.

Posisjonssystemet og naturlige tall

De to oppgavene med høyest løsningsfrekvens både høst og vår viser at de fleste elevene kan sammenligne størrelsen på naturlige tall.

2	Sett ring rundt det største tallet. 98 130 119

96 % svarer rett på denne oppgaven om høsten og 94 % om våren. 4 % av elevene svarer feil på høsten, mens 5 % svarer feil om våren. Alle elevene som har feil på denne oppgaven har satt ring rundt 119. Grunnen til at de velger dette tallet kan være fordi det har høyest tall på ener-plassen, eller kanskje rett og slett fordi nullen i tallet 130 forvirrer dem.

1	Sett ring rundt det største tallet. 5436 547 56

Denne oppgaven klarer alle elevene på begge testene. Videre kan det kommenteres at 97 % av KIM-elevene og 97 % av V01-elevene klarte å løse oppgaven (Brekke, 1995; Alseth, Breiteig & Brekke, 2003).

Dette kan bety at elever på dette alderstrinnet har god nok begrepskunnskap til å vurdere størrelsen på naturlige tall. Av tabell 4.1.2.1 kan det tyde på at de kjenner posisjonssystemet i den grad at antall siffer sier noe om størrelsen når en bare har naturlige tall.

Tabell 4.1.2.1: Oppgave 3. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

3	Hva betyr sifferet 4 i 426? (Sett ring rundt svaret) 4 40 400	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	400 (Rett)	73	82
11	Feil	16	18
0	Ikke svart	11	0
Total		100	100

Den høye løsningsfrekvensen på oppgaven viser at de fleste elevene har god forståelse av posisjonssystemet. 73 % svarer rett om høsten og 82 % om våren. Det kommer fram at det er flere som svarer feil på den andre testen enn på den første. Dette kan komme av at alle elevene svarer på oppgaven om våren, mens 11 % ikke svarer om høsten. Muligheten er også tilstedet for at noen elever bare tipper på denne oppgaven. På en liknende oppgave som omhandler posisjonssystemet med hele tall, har KIM-elevene en løsningsfrekvens på 66 % og V01-elevene 59 % (Brekke, 1995; Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). Oppgaven var som følger:

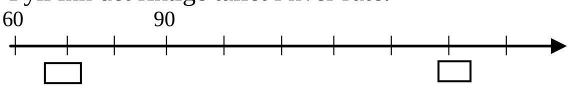
Hva betyr sifferet 4 i 3416?(Sett ring.) A 4 B 40 C 400 D 4000

En årsak til at KUL-elevene gjør det bedre, kan være at oppgaven som ble gitt i KIM og V01 var vanskeligere enn KUL-oppgaven, siden de her skulle forklare et siffer inni tallet. Samtidig er KIM-elevene eldre enn KUL-elevene og V01-elevene, noe som burde hatt betydning. L97 legger vekt på arbeid med posisjonssystemet på småskoletrinnet. Læreplanen sier at det skal arbeides systematisk med plassverdisystemet. Muligens er dette grunnen til at KUL-elevene har såpass bra løsningsfrekvens på denne oppgaven. V01-elevene burde også gjort det bedre enn KIM-elevene, men det kan være at L97 ikke hadde fått så stor innflytelse på undervisningen enda. En annen grunn kan være elevenes alder og dermed deres erfaring med tall fra dagliglivet (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003).

Lese av på tallinje

Tabell 4.1.2.2: Oppgave 5c. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

5c Fyll inn det riktige tallet i hver rute.



Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
		Frekvens i prosent	
1	Rett tall i begge rutene (70 og 140) (Rett)	63	81
2	Rett tall i rute 1 (70), men feil eller ikke svart i rute 2	19	13
3	Rett tall i rute 2 (140), men feil eller ikke svart i rute 1	1	2
11	Feil	9	3
0	Ikke svart	8	1
Total		100	100

Denne oppgaven krever begrepskunnskap, i den grad at elevene må kunne vurdere hvor mye det er mellom hver strek på tallinjen. Tabell 4.1.2.2 viser at 81 % av elevene klarer å lese av begge tallene på tallinjen om våren. Dette er en økning på 18 prosentpoeng fra høsten. 96 % av elevene klarer å lese av minst ett av tallene på tallinjen om våren. Om høsten klarer 20 % av elevene å lese av rett tall i ei av rutene.

Addisjon

Tabell 4.1.2.3: Oppgave 7a. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
7a	Fyll inn tallet som mangler. 15 + 17 = ☐	Frekvens i prosent	
1	32 (Rett)	77	86
11	Feil	17	12
0	Ikke svart	6	2
Total		100	100

Denne oppgaven går ut på å addere tosifrede tall, og kan løses ved hjelp av en addisjonsalgoritme. Av tabell 4.1.2.3 kommer det fram at 77 % gir riktig svar om høsten og 86 % om våren. 22 er det vanligste feilsvaret om høsten. Dette kommenterer Andreassen (2005) at kan komme av at noen av elevene som velger å bruke addisjonsalgoritmen der de får en tierovergang, glemmer selve tierovergangen. Samtidig er det viktig å merke seg at en ikke kan vite om elevene har brukt algoritmen eller om de har brukt det de kan om posisjonssystemet som for eksempel 10+10=20 og 5+7=12. De andre feilene skyldes nok i hovedsak tellefeil. Uansett samsvarer den høye løsningsfrekvensen med det L97 sier om på at elevene skal arbeide videre med metoder for å addere og subtrahere flersifrede tall i hodet og på papiret.

Multiplikasjon

Tabell 4.1.2.4: Oppgave 9. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

9	Hva er 3 ganger 23? (Sett ring rundt svaret) 323 69 26	Frekvens i prosent		
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007	V01 4.klasse
1	69 (rett)	80	83	86
11	Feil	13	14	13
0	Ikke svart	7	3	1
Total		100	100	100

Denne oppgaven er en enkel multiplikasjonsoppgave. Elever som har utviklet en viss begrepsforståelse for multiplikasjon, trenger ikke å bruke multiplikasjonsalgoritmen for å svare rett på oppgaven (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). Siden der er løsningsforslag, er det ikke nødvendig å multiplisere ut. Tabell 4.1.2.5 viser at over 80 % av elevene klarer å løse denne oppgaven både høst og vår. Videre er det verdt å ta med at 86 % av V01-elevene løser denne oppgaven riktig (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). KUL-elevenes løsningsfrekvens ligger altså omtrent på linje med V01-elevene. Dette kan tyde på at generelt så har mange elever god begrepsforståelse for multiplikasjon. Samtidig er det viktig å være oppmerksom på at det kan være noen elever som bare tipper på denne oppgaven. L97 sier at elevene skal få erfaringer med multiplikasjon som gjentatt addisjon. Denne oppgaven er et eksempel på dette.

Tabell 4.1.2.5: Oppgave 12a. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

12a	Regn ut 7 · 3 = ………..	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	21 (Rett)	80	87
11	Feil	10	8
0	Ikke svart	10	5
Total		100	100

Denne oppgaven kan løses ved hjelp av prosedyrekunnskap. Tabell 4.1.2.5 viser her at 80 % om høsten og 87 % om våren mestrer enkel multiplikasjon. Selv om denne oppgaven kan løses ved hjelp av bare prosedyrekunnskap, kan det også være at noen elever har begrep om multiplikasjon som gjentatt addisjon og at de adderer 7+7+7.

Oppgave 8 a, b og c er også enkle multiplikasjonsoppgaver som kan løses ved hjelp av prosedyrekunnskap.

8	Fyll inn tallet som mangler	
	a	4 · 5 = □
	b	5 · 10 = □
	c	12 · 2 = □
	d	6 · □ = 18

90, 94 og 91 % av elevene løser 8a, b og c riktig på den andre testen. Oppgave 8b har også en løsningsfrekvens på hele 90 % om høsten, mens de andre to har 84 % og 87 %. At løsningsfrekvensen er så god på disse oppgavene både høst og vår, tyder på at elevene er vant med å representere et tall med ei rute. Den høye løsningsfrekvensen på disse multiplikasjonsoppgavene samsvarer med hovedmomentet for 4.klasse i L97 som legger vekt på at elevene skal arbeide mer med multiplikasjonstabellen, multiplisere tall med 10 direkte, og multiplisere i hodet eller på papiret når det også inngår tosifrede tall.

Oppgave 8d hadde også en svært god løsningsfrekvens om våren. 80 % klarte da å løse denne oppgaven. Om høsten var det derimot bare 59 % som løste oppgaven riktig. Altså bedret løsningsfrekvensen seg med 21 prosentpoeng fra høst til vår. At 8d hadde lavere løsningsfrekvens om høsten enn de andre oppgavene, skyldes sannsynligvis at elevene her skulle finne tallet til venstre for likhetstegnet. Denne oppgaven vil jeg se nærmere på seinere i analysen når jeg ser på oppgaver med stor utvikling.

Valg av regneoperasjoner

Tabell 4.1.2.6: Oppgave 10a. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

10a	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). Jorunn har 3 bøker. Storesøsteren til Jorunn har 4 bøker. Hvor mange bøker har de til sammen? 3 · 4 4 + 3 4 : 3 4 · 3 4 – 3 3 + 4	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	Ring rundt 4+3 og 3+4 (Rett)	29	38
2	Ring rundt 4+3 eller 3+4	49	44
11	Feil	15	15
0	Ikke svart	7	3
Total		100	100

Denne tekstoppgaven krever at elevene kan vurdere hvilken regneoperasjon som må brukes. At elevene har begrepskunnskap i forhold til addisjon er derfor nødvendig i denne oppgaven. 78 % av elevene om høsten og 82 % om våren får poeng på denne oppgaven. L 97 legger vekt på at elevene skal kunne bruke tall og regning i praktiske situasjoner. Dette innebærer at de skal kunne velge og begrunne valg av regneart. Den høye løsningsfrekvensen kan tyde på at L97 har fått innpass i undervisningen. Likevel bør det påpekes at under halvparten av de som får poeng bare svarer med det ene regnestykket som de mener passer. Dette kan antyde at noen av elevene ikke er klar over at addisjon er kommutativt. Muligens er det også noen av elevene som ikke legger merke til at oppgaveteksten sier at de skal ringe ut *alle* regnestykkene som passer. Det kan også være at en del av elevene følger rekkefølgen i oppgaveteksten der 3-tallet kommer før 4-tallet, og at de dermed mener 3 + 4 er rett svar. Et klart flertall av de som bare svarer med et av de riktige regnestykkene, svarer nemlig 3 + 4.

Mønster i tallrekke

Tabell 4.1.2.7: Oppgave 14a. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

14a	Hva er det neste tallet? 3, 6, 9, 12, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	15 (Rett)	90	84
11	Feil	2	12
0	Ikke svart	8	4
Total		100	100

I denne oppgaven skal elevene oppdage mønster i en tallrekke. Dette krever begrepskunnskap. Mønsteret i denne tallrekken er at elevene skal addere det foregående tallet med 3 for å få neste tall. 90 % av elevene mestrer denne oppgaven om høsten, mens løsningsfrekvensen har gått ned til 84 % om våren.

Tabell 4.1.2.8: Oppgave 14b. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

14b	Hva er det neste tallet? 20, 18, 16, 14, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	12 (Rett)	78	86
11	Feil	10	7
0	Ikke svart	12	7
Total		100	100

Her tyder det også på at store deler av elevgruppa klarer å oppdage mønster i en tallrekke. Tabell 4.1.2.9 viser at om våren klarer 86 % av elevene å se at mønsteret i denne tallrekken er å subtrahere 2 fra det foregående tallet for å få neste tall, mens det er 78 % som klarer det om høsten. I en liknende oppgave der mønsteret var å finne differansen 4 mellom et tall og det foregående, klarte 63 % av V01-elevene å svare riktig (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). Oppgaven var som følger:

Disse tallene er del av et mønster: 50, 46, 42, 38, 34,…. Hva må du gjøre for å finne det neste tallet i mønsteret? (åpen oppgave)

Det ble brukt høyere tall i denne oppgaven, og elevene ble bedt om å forklare hva de måtte gjøre for å finne det neste tallet i mønsteret (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). Dette gjør nok oppgaven vanskeligere enn KUL-oppgaven, og kan være med å forklare hvorfor KUL-elevene gjør det så mye bedre. L97 sier at på alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer. Dette kan være med å forklare den høye løsningsfrekvensen til KUL-elevene. Muligens gjør de det bedre enn V01-elevene også fordi lærerne har lengre erfaring med læreplanen.

Tabell 4.1.2.9: Oppgave 14c. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

14c	Hva er det neste tallet? 2, 6, 10, 14, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	18 (Rett)	77	88
11	Feil	9	2
0	Ikke svart	14	10
Total		100	100

Mønsteret her er å addere 4 til foregående tall for å få neste tall i rekken. 77 % av elevene klarer å se dette mønsteret om høsten og 88 % om våren. Løsningsfrekvensen på denne oppgaven ligger veldig nært løsningsfrekvensen på den forrige oppgaven. Det ser altså ut til at elevene mestrer bra å finne mønster i ei tallrekke både når de må trekke fra med samme tall og når de må legge til.

Brøk

Tabell 4.1.2.10: Oppgave 18a. Løsningsfrekvens for høsten 2006 og våren 2007 i prosent.

18a	Fargelegg 1/2 av sirkelen.	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	Fargelagt 1/2 (Rett)	73	91
2	Ikke fargelagt 1/2	4	2
11	Feil	8	1
0	Ikke svart	15	6
Total		100	100

Denne oppgaven krever begrepskunnskap. Elevene må ha et visuelt bilde av hva brøken ½ er. 77 % av elevene får poeng på høsten, mens hele 93 % får poeng om våren. Elever som bare har delt opp sirkelen, uten å fargelegge en av delene, har også fått poeng. L 97 legger vekt på brøk i målene som er felles for småskoletrinnet, og spesielt i hovedmoment for 4.klasse står det at elevene skal arbeide med enkle brøker. Den høye løsningsfrekvensen samsvarer med dette. Uansett om undervisningen har vært fokusert inn mot læreplanen, er det sannsynlig at ½ er en meget kjent størrelse for elevene og at de er vant med det å halvere noe fra dagliglivet.

Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene

Oppgave 14e og 20d hadde en løsningsfrekvens som var lavere enn 20 % på begge testene. Det var også færre enn 20 % av elevene som klarte å løse oppgave 5d og 21 på den første testen, mens over 30 % klarte å løse disse oppgavene på den andre testen. Nedenfor (tabell 4.1.2.11 og 4.1.2.12) vil jeg kommentere oppgave 14e og 20d som hadde lav løsningsfrekvens på begge testene.

Mønster i tallrekke

Tabell 4.1.2.11: Oppgave 14e. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	18 (Rett)	2	18
12	12	6	10
13	13	6	0
14	14	9	7
15	15	22	21
16	16	8	18
17	17	3	0
20	Andre svar	2	2
0	Ikke svart	42	24
Total		100	100

Ovenfor (tabell 4.1.2.7, 4.1.2.8 og 4.1.2.9) ble det vist at oppgaver der elevene skulle oppdage mønster i ei tallrekke hadde høy løsningsfrekvens, og at det tyder på at elevene har en del begrepskunnskap i forhold til dette. Mønsteret i disse oppgavene var at elevene skulle addere eller subtrahere med like mye, i forhold til det foregående tallet, for å få neste tall i rekken. Oppgave 14e klarer nesten ingen av elevene å løse om høsten, mens 18 % løser den om våren. Mønsteret i denne oppgaven er at de to foregående tallene i rekken må adderes for å få det neste tallet. Å oppdage dette mønsteret krever mer kognitivt av elevene, enn å oppdage mønster der de skal addere eller subtrahere foregående tall med det samme for å få neste tall. At 42 % ikke svarer på oppgaven om høsten og 24 % om våren, tyder på at mange elever synes denne oppgaven er for vanskelig. De to vanligste feilsvarene elevene gir er 15 og 16. Feilsvaret 16 kommer muligens av at elevene har sett at differansen mellom 4 og 7 er én mindre enn differansen mellom 7 og 11, og at de da konkluderer med at differansen mellom 11 og neste tall må være én mer enn den foregående differansen. De som tenker på denne måten tar ikke hensyn til at differansen mellom 3 og 4 ikke stemmer med mønsteret. Feilsvaret 15 er vanskelig å vite hvordan elevene har resonnert seg fram til. Men det er mulig de har lagt til samme differansen som den forrige, selv om det ikke stemmer med de to andre foregående differansene. Ut fra tidligere nevnte fokus på utforskning av mønster i L97, ser det her ut til at elevene mangler noe begrepskunnskap.

Prioritering av regneoperasjoner

Tabell 4.1.2.12: Oppgave 20d. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

20d	Sett rett tall i rutene 3 + 2 · ☐ = 15	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	6 (Rett)	13	15
12	2	0	3
13	3	11	32
14	5	14	12
15	9	9	4
16	10	4	8
20	Andre svar	5	2
0	Ikke svart	44	24
Total		100	100

I denne oppgaven må elevene kunne finne et tall representert ved ei rute til venstre for likhetstegnet, og kunne prioritere regneoperasjoner på en riktig måte. Til dette trenger de både begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. Svært få elever klarer å løse denne oppgaven. Løsningsfrekvensen er på 13 % om høsten og 15 % om våren. På grunn av den høye løsningsfrekvensen på oppgave 8, er det sannsynlig de fleste elevene er kjent med det å bruke ei rute til å representere et tall. Videre er det påpekt tidligere i analysen at oppgave 8d hadde lavere løsningsfrekvens enn de andre oppgavene, muligens fordi de her skulle finne tallet til venstre for likhetstegnet. Dette krever at elevene har forståelse for at likhetstegnet er en relasjon mellom to størrelser, for så tidlig som i 4.klasse har ikke elevene lært noen algoritme for å finne ukjente verdier.

Det hyppigste feilsvaret er 3. Elevene tenker nok da at $3 + 2 = 5$ og at $5 \cdot 3 = 15$. Om våren gjør så mange som 32 % av KUL-elevene denne feilen. Elevene som svarer 3 viser at de ikke klarer å prioritere regneoperasjonene rett. De adderer før de multipliserer. Brekke (2000) påpeker at dette sannsynligvis skyldes vanen med å utføre regneoperasjonene i den rekkefølgen de kommer i regnestykket, fra venstre mot høyre. Dette bekreftes ved det at løsningsfrekvensen er større i oppgave 20c (se tabell 4.1.2.13), der multiplikasjonen er til venstre for addisjonen i regnestykket. Løsningsfrekvensen er da på 42 % om høsten og 58 % om våren, altså en god del høyere enn på oppgave 20d. Selv om elevene ikke klarer å prioritere regneoperasjonene riktig, ser det ut til at de som gir feilsvaret 3 er klar over at det skal være likt på begge sider av likhetstegnet.

Om våren viser det seg at 8 % av elevene svarer 10. En mulig grunn til at de kommer fram til dette, kan være at de adderer i stedet for å multiplisere. I så tilfelle vil de få regnestykket $3 + 2 + 10 = 15$. Hvis elevene tenker slik kan det tyde på at de har en slags forståelse for ekvivalensrelasjonen, men at de adderer i stedet for å multiplisere. Feilsvaret 5 er det 14 % av elevene som gir om høsten og 12 % om våren. Når elevene svarer 5 er det mulig at de bruker 2-tallet to ganger. De adderer 2 med 3 og får 5, for så å multiplisere 2 med 5 og få 10. Så adderer de 5 og 10 og får 15. De elevene som tenker på denne måten har også muligens en forståelse av at det skal være lik verdi på begge sider av likhetstegnet.

En del av feilsvarene kan nok tyde på at noen elever har en slags forståelse for likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, men at de har problemer med å prioritere regneoperasjoner eller at de bruker feil regneoperasjoner.

Feilsvaret 5 kan også komme av at elevene tenker at $3 + 2 = 5$ og at dette ”svaret” skal stå i ruten. Hvis elevene tenker slik tyder det på at de har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Av tabell 4.1.2.12 kommer det fram at 44 % høsten 2006 og 24 % våren 2007 ikke svarer på oppgaven i det hele tatt. Dette kan gi et hint om at en del elever synes oppgaven blir for vanskelig når de må finne ”svaret” til venstre for likhetstegnet, og at de dermed ikke har forståelse for likhetstegnet som symbol på en ekvivalensrelasjon.

Til slutt vil jeg trekke fram at tabell 4.1.2.13 viser at 20b og 20c har høyere løsingsfrekvens enn 20d både høst og vår, selv om elevene også i disse oppgavene må finne et tall til venstre for likhetstegnet.

Tabell 4.1.2.13: Oppgave 20a, b, c og d. Løsningsfrekvens i prosent på oppgavene høst og vår.

		Frekvens i prosent	
	Oppgaver	Høst 2006	Vår 2007
20a	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + 6 = \square$	76	75
20b	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + \square = 12$	75	78
20c	Sett rett tall i rutene $\square \cdot 2 + 4 = 12$	42	58
20d	Sett rett tall i rutene $3 + 2 \cdot \square = 15$	13	15

Oppgave 20b har en løsningsfrekvens på 75 % om høsten og 78 % om våren. Av tabell 4.1.2.13 kommer det fram at dette er så å si likt som oppgave 20a, der elevene skal finne svaret etter likhetstegnet. Grunnen til at det er omtrent lik løsningsfrekvens på disse to oppgavene kan være at elevene overfører tall fra 20a til 20b. Oppgave 20c har lavere løsningsfrekvens enn de to foregående oppgavene, på tross av at strukturen er den samme. Det skyldes nok at elevene her ikke bare kan overføre tall, men at de må forstå ekvivalensrelasjonen. 42 % om høsten og 58 % om våren løser oppgave 25c rett. At denne oppgaven har lavere løsningsfrekvens enn de to foregående, tyder på at en del elever ikke forstår ekvivalensrelasjonen. Ovenfor er det pekt på at oppgave 20c er lettere enn 20d når det gjelder å prioritere regneoperasjoner rett. At bare rundt halvparten av elevene løser denne oppgaven rett på tross av dette, viser tydelig at elevene har problemer med å forstå likhetstegnet. Samtidig må det påpekes at det er usikkert om de som svarer rett på denne oppgaven, virkelig har forståelse for likhetstegnet. Siden strukturen i 20c er lik de foregående oppgavene er det mulig at noen av de som svarer rett bare har fulgt strukturen.

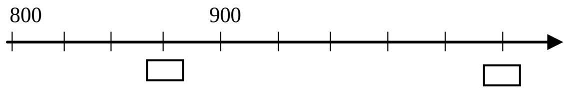
At oppgave 20b og 20c har en høyere løsningsfrekvens enn 20d, selv om de skal finne et tall til venstre for likhetstegnet, trenger altså ikke å bety at en del elever har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. At elevene klarer å finne et tall til venstre for likhetstegnet kan altså skyldes at de bare ser etter strukturen i oppgave 20a, uten å tenke over at det bør være likt på begge sider av likhetstegnet. Denne oppgaven vil bli kommentert videre under punkt 4.2 og 5.3.

Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvensen på minst 20 prosentpoeng

Løsningsfrekvensen økte med over 30 % på oppgave 18b og 19a, mens oppgave 5d, 7d og 8d hadde en økning på minst 20 %. Disse oppgavene hadde en løsningsfrekvens på under 60 prosent på den første testen. Dette betyr at de oppgavene med størst økning i løpet av året, er oppgaver som lå midt på treet eller lavere når det gjelder løsningsfrekvens på den første testen. Grunnen til at det ikke er større utvikling på oppgaver som hadde høy løsningsfrekvens på den første testen, kan nok være at de var for lette allerede da. Nedenfor (tabell 4.1.2.13, 4.1.2.14, 4.1.2.15, 4.1.2.16 og 4.1.2.17) vil jeg se nærmere på oppgave 5d, 7d, 8d, 18b og 19a som hadde spesielt god utvikling.

Lese av på tallinje

Tabell 4.1.2.14: Oppgave 5d. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

5d	Fyll inn det riktige tallet i hver rute. 	Frevens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	Rett tall i begge rutene (875 og 1025) (Rett)	8	27
2	Rett tall i rute 1 (875), men feil eller ikke svart i rute 2	3	7
3	Rett tall i rute 2 (1025), men feil eller ikke svart i rute 1	1	2
12	830 i rute 1 og 950 i rute 2	8	5
20	Andre svar	40	38
0	Ikke svart	40	21
Total		100	100

Denne oppgaven krever at elevene har begrepskunnskap for å kunne lese av tallene på tallinjen. Elevene må selv kunne vurdere hvor mye det er mellom hver strek, for å finne de riktige tallene. Det er mer krevende kognitivt å finne avstanden mellom strekene på tallinjen her, enn i oppgave 5c. Dette fordi avstanden er 10 mellom hver strek i 5c, mens avstanden er 25 i denne oppgaven. Om høsten er det bare 8 % som leser begge tallene riktig av, mens 4 % leser ett av tallene riktig. Om våren klarer 27 % å lese av begge tallene, mens 9 % leser ett av tallene riktig. Elevene får poeng på oppgaven hvis de har minst et av tallene riktige. Om våren er løsningsfrekvensen 24 prosentpoeng bedre enn om høsten.

Elevene gir mange forskjellige feilsvar på denne oppgaven. Det hyppigste feilsvaret er at de skriver 830 i rute 1 og 950 i rute 2. De som svarer dette, tenker sannsynligvis at avstanden mellom hver strek er 10. Det er verdt å merke seg at hele 40 % av elevene ikke svarer på denne oppgaven om høsten, og 21 % om våren. Om høsten ser det altså ut til at oppgaven har vært så vanskelig for elevene, at mange av dem ikke har prøvd å svare en gang.

Utviklingen i løsningsfrekvensen tyder på at en del elever har fått større forståelse for å lese av tall på ei tallinje i løpet av året. Likevel tyder løsningsfrekvensen om våren på at godt over halvparten av elevene ikke har nok begrepskunnskap til å svare riktig på denne oppgaven. Jeg har kommentert at løsningsfrekvensen på oppgave 5c var 94 % om våren, mens den på denne oppgaven er 36 %. Løsningsfrekvensen har utviklet seg på begge oppgavene fra den første testen til den andre testen, men det tyder på at mange av elevene likevel sliter med å forstå plasseringen av tall på tallinjen når ikke enheten på aksen er 10.

Subtraksjon

Tabell 4.1.2.15: Oppgave 7d. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

7d	Fyll inn tallet som mangler. 43 - ☐ = 27	Frevens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	16 (Rett)	19	39
12	15	2	8
13	20	6	6
14	23	6	4
15	24	8	5
16	26	7	4
17	17	1	3
20	Andre svar	13	10
0	Ikke svart	39	22
Total		100	100

Denne oppgaven krever at elevene har kunnskapen som trengs for å finne tallet som må trekkes fra 43 for å få 27. For å finne dette tallet kan elevene følge subtraksjonsalgoritmen, men dette medfører at de må låne fra tierplassen. En annen mulighet er at elevene har begrepskunnskap om naturlige tall og teller seg ned fra 43 eller opp fra 27. Løsningsfrekvensen er 19 % om høsten og 39 % om våren.

For å løse denne oppgaven må elevene også kunne finne et tall representert ved ei rute til venstre for likhetstegnet. Å finne et tall representert ved ei rute, har jeg allerede kommentert at elevene antakeligvis er kjent med på grunn av den høye løsningsfrekvensen på oppgave 8a, b og c. Jeg har også kommentert at det kan være problematisk for noen elever når de ikke skal finne svaret etter likhetstegnet, men før. Dette innebærer at de må ha forståelse for ekvivalensrelasjonen. At dette gjør oppgaven mer komplisert for elevene, kan komme klarere fram dersom løsningsfrekvensen sammenliknes med løsningsfrekvensen på oppgave 7b. Oppgave 7b har en løsningsfrekvens på 47 % om høsten og 60 % om våren. Dette er en subtraksjonsoppgave der elevene må låne en tier dersom de bruker subtraksjonsalgoritmen, men her skal elevene finne svaret etter likhetstegnet som de er vant med. At hele 39 % om høsten og 22 % om våren ikke svarer på oppgave 7d i det hele tatt, kan også være et hint om at noen elever har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. I tillegg kan vi ikke se bort i fra at elevenes problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet, kan komme av at de ikke er vant med denne typen oppgaver. Av utviklingen i løsningsfrekvensen både på oppgave 7b og 7d, kan det tyde på at elevene har fått bedre kunnskaper i forhold til subtraksjon i løpet av året. Dette samsvarer med et av hovedmomentene for 4.klasse i L97, der det vektlegges at elevene skal arbeide videre med metoder for å subtrahere flersifrede tall i hodet og på papiret. Samtidig kommer det fram at 7d har enda større utvikling i løsningsfrekvensen enn 7b, noe som også kan skyldes at noen elever har fått bedre forståelse for ekvivalensrelasjonen.

24 og 26 er de hyppigste feilsvarene om høsten, mens de om våren ikke forekommer like hyppig. Feilsvaret 26 kan komme av at elevene har brukt subtraksjonsalgoritmen, men har glemt at de lånte en tier. Feilsvaret 24 kan komme av at elevene har mest erfaring med å trekke et lite tall fra et stort tall, og derfor får 4 - 2 = 2 og 7 – 3 = 4. Feilsvarene 15 og 17 kan komme av unøyaktig telling ned fra 43 eller opp fra 27. Disse to feilsvarene er hyppigere om våren enn om høsten. Feilsvarene 20 og 23 kan komme av at elevene vet at differansen mellom 43 og 27 skal være noe i nærheten av 20, men at de ikke vet hvordan de skal finne det nøyaktige svaret. Disse to svarene har nokså lik hyppighet både høst og vår.

Multiplikasjon

Tabell 4.1.2.16: Oppgave 8d. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

8d	Fyll inn tallet som mangler. $6 \cdot \square = 18$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	3 (Rett)	59	80
12	2	11	6
13	4	4	3
14	6	4	2
15	12	3	0
16	7	1	2
20	Andre svar	1	1
0	Ikke svart	17	6
Total		100	100

For å løse denne oppgaven må elevene kunne finne et tall representert ved ei rute, kunne foreta enkel multiplikasjon og være i stand til å finne et tall til venstre for likhetstegnet i et regnestykke. 59 % klarer dette om høsten, mens 80 % løser oppgaven om våren. Løsningsfrekvensen øker altså med 21 prosentpoeng fra første test til andre test. De vanligste feilsvarene er 2, 4 og 6.

At oppgave 8d hadde lavere løsningsfrekvens enn oppgave 8a, b og c om høsten, har jeg pekt på at mye trolig skyldes at elevene vanligvis blir bedt om å finne "svaret" til høyre for likhetstegnet, mens de her skal finne et tall til venstre. Sett i sammenheng med oppgave 7d, kan dette virke sannsynlig. At elevene har blitt mer fortrolige med å finne et tall til venstre for likhetstegnet kan altså være en til grunn økningen i løsningsfrekvensen. Dette kan videre være et tegn på at elevene har utviklet sin forståelse for likhetstegnet. Samtidig kan det også bety at elevene har opparbeidet seg mer erfaring med gangetabellen og møtt utsagnet "hva må du gange 6 med for å få 18" oftere i løpet av året. L97 legger jo vekt på at elevene skal arbeide mer med multiplikasjonstabellen i et av hovedmomentene for 4.klasse. Dette kan altså gi en grunn for hvorfor elevene er blitt mer fortrolige med å finne et tall til venstre for likhetstegnet i denne oppgaven, men jeg kan ikke utelukke at elevene samtidig kan ha utviklet en bedre forståelse av likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon i løpet av året.

Brøk

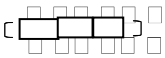
Tabell 4.1.2.17: Oppgave 18b. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

18b	Fargelegg ¼ av sirkelen.	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	Fargelagt 1/4 eller kant 1/4 (Rett)	32	64
2	Ikke fargelagt 1/4	8	11
12	1/2 fargelagt	15	2
13	Liten kant 1/4 fargelagt	4	8
14	Liten 1/4 fargelagt	1	2
15	Hele sirkelen fargelagt	8	1
16	Liten kant 1/4 ikke fargelagt	6	3
20	Andre svar	9	3
0	Ikke svart	17	6
Total		100	100

Denne oppgaven krever at elevene har begrepskunnskap. De må her kunne vurdere hvor stor del brøken ¼ er av en hel sirkel, og gi et visuelt bilde av dette. 40 % av elevene får poeng om høsten og 75 % om våren. Elever som har delt opp sirkelen riktig, uten å ha fargelagt ¼, har også fått poeng. Av tabell 4.1.2.17 kommer det fram at elevene gjør det over 20 prosentpoeng bedre om våren enn om høsten. Om høsten svarer 15 % av elevene med å fargelegge ½. Denne løsningen er det bare 2 % som gir om våren. Det vanligste feilsvaret om våren er at elevene fargelegger en liten kantdel. De som gjør dette deler sirkelen inn i fire horisontale deler, der den øverste delen og den nederste delen er mindre enn de to midterste. De fargelegger så den nederste delen eller den øverste delen. Ved å dele sirkelen på denne måten, har elevene ikke klart å dele sirkelen i fire like deler. Likevel kan jo kanskje si at de har en slags begrepsforståelse av at ¼ deler en hel opp i fire deler. Om høsten er det 8 % av elevene som farelegger hele sirkelen. Dette kan bety at de ikke har noe begrep om hvor stor del ¼ utgjør av en hel. Det er bare 1 % som gjør denne feilen om våren, så denne feilen ser ut til å ha blitt borte i løpet av året. Utviklingen i løsningsfrekvensen på denne oppgaven, kan tyde på at elevenes begrepsforståelse i forhold til brøk utvikler seg i løpet av året. På tross av utviklingen i løsningsfrekvensen på denne oppgaven, ligger den om våren likevel en del under oppgave 18a der brøken elevene skulle arbeide med var ½. Grunnen til denne forskjellen, kan nok være at elevene er godt kjent med det å halvere noe fra dagliglivet, og at de dermed har større forståelse av brøken ½. At L97 fokuserer på at elevene skal arbeide med enkle brøker i et av hovedmomentene for 4.klasse, kan nok være en grunn til den betydelige utviklingen i løsningsfrekvensen.

Tallmønster

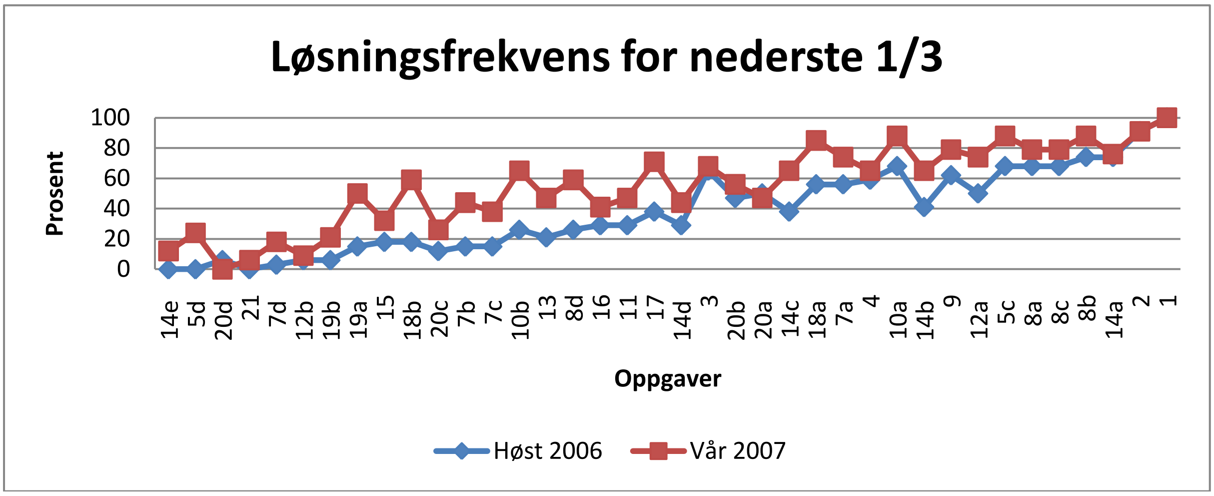
Tabell 4.1.2.18: Oppgave 19a. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene.

19a Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? …………… Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret ……………..		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	18 med forklaring (Rett)	29	57
2	18 uten eller med manglende forklaring	7	11
12	16	20	9
13	19	7	4
14	14	5	0
15	15	1	2
16	20	3	3
17	17	4	2
20	Andre svar	10	4
0	Ikke svart	14	8
Total		100	100

Denne oppgaven krever begrepskunnskap, og at elevene kan bruke et mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi. Løsningsfrekvensen på denne oppgaven øker med 32 prosentpoeng i løpet av året. 36 % av elevene løser oppgaven på den første testen, mens 68 % klarer det på den andre testen. Elevene får poeng på oppgaven viss de svarer 18 med eller uten forklaring. 29 % om høsten og 57 % om våren gir både rett svar og rett forklaring. De fleste riktige forklaringene går ut på at elevene tegner et bord til med fire stoler og teller alle stolene, eller at de teller stolene som er tegnet på figuren og plusser på 4 stoler. Noen elever har også regnet ut svaret ved for eksempel å ta $5 + 4 + 4 + 5$ eller $4 \cdot 4 + 2$.

Løsningsfrekvensen øker altså betraktelig våren 2007 i forhold til høsten 2006. 16 er det vanligste feilsvaret. 20 % svarer dette om høsten og 9 % om våren. Elevene som svarer 16, tar ikke med de to stolene på endene når de teller eller regner. Feilsvarene 17 og 19 kommer nok av at elevene teller stoler unøyaktig. Feilsvaret 14 skyldes mest sannsynlig at elevene bare teller stolene rundt de tre bordene som er avbildet, mens feilsvaret 15 muligens kommer av at de teller stolene som er avbildet unøyaktig. Elevene som svarer 20 har muligens brukt en regnestrategi der de tenker at fem stoler rundt hvert bord til sammen gir 20 stoler. Som tidligere nevnt sier L97 at matematikkopplæringen skal gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer, noe som kan være en grunn til utvikling i løsningsfrekvens. Under mål for småskoletrinnet legger læreplanen også vekt på at elevene skal få trening i å forklare hvordan de tenker. Dette kan også være en medvirkende årsak til utviklingen.

Løsningsfrekvens for elevgruppa bestående av nederste 1/3



Figur 4.1.2.3: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Nederste tredjedel av 4.trinn.

Oppgaver med høy løsningsfrekvens på minst en av testene

Oppgave 1, 2, 3, 4, 5c, 7a, 8a, 8b, 8c, 9, 10a, 12a, 14a og 18a, altså 14 oppgaver, ble løst av mer enn halvparten av elevene på begge testene. På den andre testen hadde 22 oppgaver en løsningsfrekvens på mer enn 50 %, mens 15 oppgaver hadde det på den første. Oppgave 1 og 2 ble løst av mer enn 80 % av elevene på begge testene, noe som gjaldt for hele gruppa. Oppgave 5c, 8b, 10a og 18a hadde også en løsningsfrekvens på over 80 % om våren.

Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene

Oppgaver med en løsningsfrekvens på mindre enn 20 % på begge testene var 7d, 12b, 14e, 20d og 21. Oppgave 14e og 20d har jeg kommentert at gjelder for hele gruppa. Oppgave 7d, 12b og 21 har svært dårlig løsningsfrekvens på begge testene spesielt for den nederste gruppa.

Tabell 4.1.2.19: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Nederste tredjedel av 4.trinn.Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene . Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

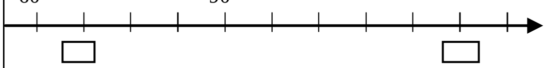
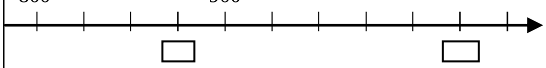
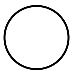
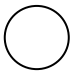
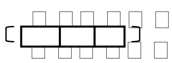
Oppgave		Hva testes:	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
7d	Fyll inn tallet som mangler. $43 - \square = 27$	Subtraksjon av tosifrede tall og finne et tall til venstre for likhetstegnet	3	18
12b	Lag en tegning som passer til regnestykket $7 \cdot 3$ Tegn her:	Forståelse av multiplikasjon	6	9
14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, □	Oppdage avansert mønster i tallrekke	0	12
20d	Sett rett tall i rutene. $3 + 2 \cdot \square = 15$	Prioritering av regneoperasjoner og finne et tall til venstre for likhetstegnet	6	0
21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Per? Regn eller forklar her:	Bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgave	0	6

Den lave løsningsfrekvensen på oppgave 7d og 20d kan tyde på at mange i den nederste gruppa har problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet. Dette innebærer i så fall at de har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Elevene trenger begrepskunnskap for å kunne få bedre forståelse på dette området. Det er også mye som tyder på at disse elevene sliter med å prioritere regneoperasjoner og å subtrahere tosifrede tall. For å mestre dette kan de trenge prosedyrekunnskap. Den lave løsningsfrekvensen på oppgave 14e vitner om på at elevene har problemer med å oppdage et mønster for å finne det neste tallet i ei tallrekke, som er mer avansert enn å addere eller subtrahere det foregående tallet med samme siffer. Det viser seg at elevene i denne gruppa har spesielt lav løsningsfrekvens også på oppgave 12b og 21. De må kunne bruke addisjon og subtraksjon i tekstoppgaver for å kunne løse oppgave 21, og i oppgave 12b kreves det at de har en viss begrepsforståelse for multiplikasjon for å kunne lage en passende tegning til multiplikasjonsstykket. Oppgave12b, 14e og 21 krever begrepskunnskap av elevene. Den lave løsningsfrekvensen om høsten på oppgave 21, kan på grunn av feilen i oppgaveteksten skyldes at elevene ikke har sett hvordan den kan løses. Samtidig er det nok også andre årsaker, siden løsningsfrekvensen fortsatt er lav om våren etter at feilen er rettet opp i oppgaveteksten.

Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng

34 av 38 oppgaver hadde høyere løsningsfrekvens på den andre testen enn på den første. Av disse hadde 15 oppgaver minst 20 prosentpoeng bedre løsningsfrekvens på den andre testen. Oppgave 18b hadde størst økning med hele 41 %. Oppgave 8d, 10b, 17 og 19a hadde alle over 30 % økning. Oppgave 8d, 18b og 19a har stor økning for hele gruppa, mens 10b og 17 har økning spesielt i den nederste gruppa.

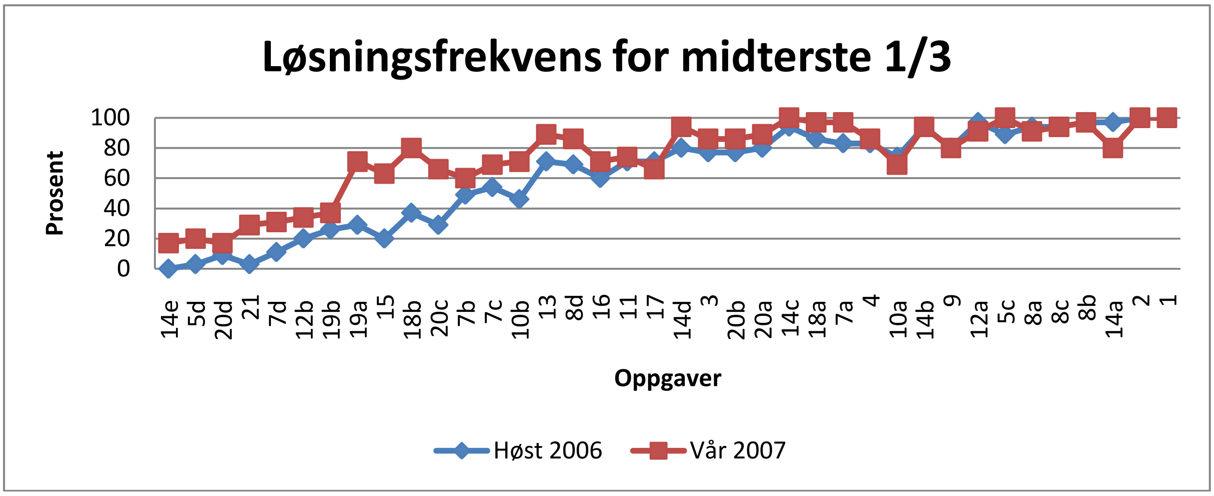
Tabell 4.1.2.20: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Nederste tredjedel av 4.trinn.Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng . Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

	Oppgave	Hva testes:	Frekvens i prosent	
			Høst 2006	Vår 2007
5c	Fyll inn det riktige tallet i hver rute.  	Lese av hele tall på ei tallinje	68	88
5d	Fyll inn det riktige tallet i hver rute.  	Lese av hele tall på ei tallinje	0	24
7b	Fyll inn tallet som mangler. 46 - 18 = □	Subtraksjon av tosifrede tall	15	44
7c	Fyll inn tallet som mangler. 73 + □ = 99	Addisjon av tosifrede tall og finne et tall til venstre for likhetstegnet	15	38
8d	Fyll inn tallet som mangler. 6 · □ = 18	Enkel multiplikasjon og finne et tall til venstre for likhetstegnet	26	59
10a	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). Jorunn har 3 bøker. Storesøsteren til Jorunn har 4 bøker. Hvor mange bøker har de til sammen? 3 · 4 4 + 3 4 : 3 4 · 3 4 – 3 3 + 4	Valg av regneoperasjon i tekstoppgave	68	88
10b	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 1 kg pølser koster 49 kr. Per kjøper 3 kg. Hvor mye koster det? 49 · 3 49 : 3 49 + 3 3 + 49 3 · 49 49 - 3	Valg av regneoperasjon i tekstoppgave	26	65
12a	Regn ut 7 · 3 =……….	Enkel multiplikasjon	50	74
13	Et addisjons-stykke ser slik ut: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 Skriv dette addisjons-stykket som et multiplikasjons-stykke. (Skriv på de stiplede linjene) ……..…. · ……….. = ……….	Forstå multiplikasjon som gjentatt addisjon	21	47
14b	Hva er det neste tallet? 20, 18, 16, 14, □	Oppdage enkelt mønster i tallrekke	41	65
14c	Hva er det neste tallet? 2, 6, 10, 14, □	Oppdage enkelt mønster i tallrekke	38	65
17	Kulene koster 3 kr hver. Hvor mange kan du kjøpe for 10 kr? Regn eller forklar her:	Bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgave	38	71
18a	Fargelegg ½ av sirkelen. 	Enkel brøk	56	85
18b	Fargelegg ¼ av sirkelen. 	Enkel brøk	18	59
19a	Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret	Bruk av telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster	15	50

Den nederste elevgruppa har positiv utvikling fra den første til den andre testen på to oppgaver som kan løses bare ved hjelp av prosedyrekunnskap. Disse oppgavene krever at elevene kan foreta enkel multiplikasjon og subtraksjon av tosifrede tall. I tillegg har de også positiv utvikling i oppgave 7c og 8d, som krever både prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Elevene må her kunne utføre addisjon av tosifrede tall og enkel multiplikasjon, samt ha forståelse for likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon.

Videre kommer det fram at denne elevgruppa har positiv utvikling i 11 oppgaver som krever begrepskunnskap. I disse oppgavene må elevene kunne lese av hele tall på tallinje, velge riktig regneoperasjon i en tekstoppgave, finne enkle mønster i tallrekker, forstå multiplikasjon som gjentatt addisjon, forstå brøkene ½ og ¼, bruke en telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster og bruke addisjon og subtraksjon for å løse en tekstoppgave.

Løsningsfrekvens for elevgruppa bestående av midterste 1/3



Figur 4.1.2.4: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Midterste tredjedel av 4.trinn.

Oppgaver med høy løsningsfrekvens på minst en av testene

25 av 38 oppgaver ble løst av mer enn halvparten av elevene på begge testene, på den andre testen var dette økt til hele 31 oppgaver. 16 oppgaver ble løst av minst 80 % av elevene på begge testene. I flere av disse oppgavene har de nådd "taket" allerede om høsten. Dette kan tyde på at en del elever i den midterste gruppa ikke kunne få vist sin reelle utvikling på en del oppgaver. Om våren var tallet på oppgaver løst av minst 80 % økt til 21 oppgaver. Oppgavene som ble løst av minst 80 % på minst en av testene var 1, 2, 3, 4, 5c, 7a, 8a, 8b, 8c, 8d, 9, 12a, 13, 14a, 14b, 14c, 14d, 18a, 18b, 20a og 20b.

Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene

Oppgave 14e og 20d hadde en løsningsfrekvens på under 20 % på begge testene for den midterste gruppa. Dette har jeg kommentert at også gjelder for hele gruppa.

Tabell 4.1.2.21: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Midterste tredjedel av 4.trinn.Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

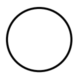
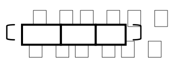
	Oppgave	Hva testes:	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, □	Oppdage avansert mønster i tallrekke	0	17
20d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15	Prioritering av regneoperasjoner og finne et tall til venstre for likhetstegnet	9	17

Elevene i den midterste gruppa ser altså ut til å ha problemer med å oppdage avanserte mønster i ei tallrekke, prioritere regneoperasjoner på rett måte og forstå at likhetstegnet er en relasjon mellom to størrelser. Elevene i den midterste gruppa trenger dermed både mer prosedyrekunnskap og mer begrepskunnskap for å løse disse oppgavene.

Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng

27 av 38 oppgaver hadde bedre løsningsfrekvens på den andre testen enn på den første. 7 oppgaver, 7d, 10b, 15, 18b, 19a, 20c og 21, hadde en økning av løsningsfrekvensen på over 20 prosentpoeng. Alle disse oppgavene hadde en løsningsfrekvens på mindre enn 50 % på den første testen. Oppgave 15, 18b og 19a hadde den største økningen på minst 40 prosentpoeng. Oppgave 18b og 19a hadde stor økning for hele gruppa, mens oppgave 15 hadde stor økning spesielt for den midterste gruppa.

Tabell 4.1.2.22: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Midterste tredjedel av 4.trinn.Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng . Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

	Oppgave	Hva testes:	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
7d	Fyll inn tallet som mangler. 43 - □ = 27	Subtraksjon av tosifrede tall og finne et tall til venstre for likhetstegnet	11	31
10b	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 1 kg pølser koster 49 kr. Per kjøper 3 kg. Hvor mye koster det? 49 · 3 49 : 3 49 + 3 3 + 49 3 · 49 49 - 3	Valg av regneoperasjon i tekstoppgave	46	71
15	Per har 153 frimerker. Eva og Per har 265 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva? Regn her:	Bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgave	20	63
18b	Fargelegg ¼ av sirkelen. 	Enkel brøk	37	80
19a	Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret ..…	Bruk av telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster	29	71
20c	Sett rett tall i rutene. □ · 2 + 4 = 12	Prioritering av regne-operasjoner og finne et tall til venstre for likhetstegnet	29	66
21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Per? Regn eller forklar her: (Om våren: hvor gammel er Petter?)	Bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgave	3	29

To av oppgavene som har positiv utvikling for den midterste gruppa, oppgave 7d og 20c, krever subtraksjon av tosifrede tall, samt forståelse av likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon. Her kreves det både prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Jeg har kommentert tidligere at å gjøre en riktig prioritering av regneoperasjonene i 20c, er enklere enn i oppgave 20d. Dette begrunnet jeg da med at multiplikasjonen kommer først fra venstre i oppgave 20c, mens addisjonen kommer først i 20d.

Det viser seg at den midterste gruppa har utvikling i løsningsfrekvensen på oppgave 15. Det tyder på at disse elevene har utviklet forståelse for hvordan de skal kunne løse en tekstoppgave ved hjelp av subtraksjon og addisjon.

Utviklingen av løsningsfrekvensen i oppgave 21 kan komme av at det var feil i oppgaveteksten på testen som ble gitt om høsten, mens denne var rettet opp på testen som ble gitt om våren. Denne oppgaven krever at elevene kan bruke addisjon og subtraksjon i tekstoppgave.

Denne gruppa har også hatt positiv utvikling i forhold til forståelse av brøken ¼, bruk av telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster og valg av regneoperasjon i tekstoppgave.

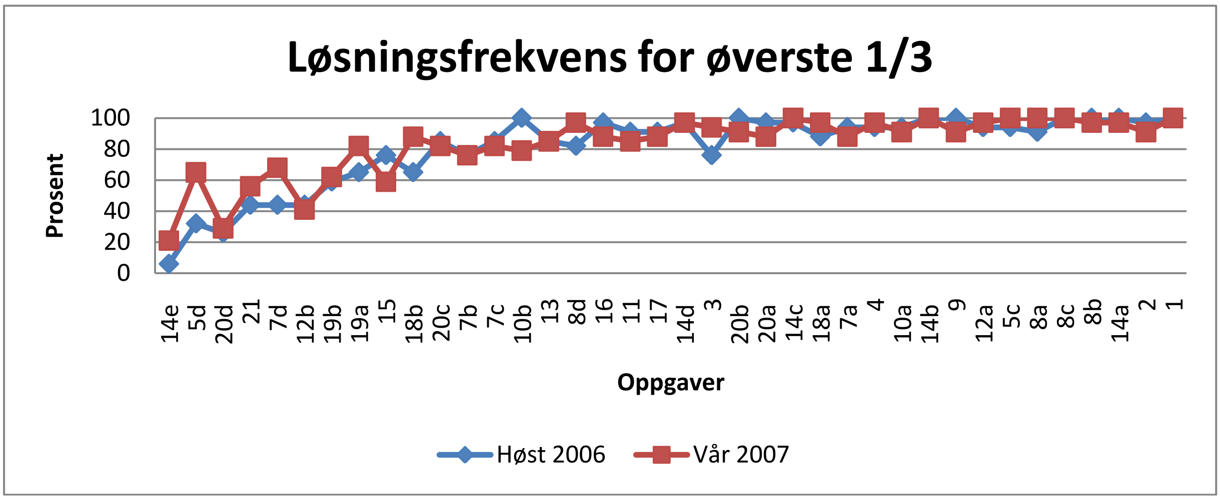
Oppgave med negativ utvikling i løsningsfrekvensen på over 15 prosentpoeng

Oppgave 14a hadde en negativ utvikling i løsningsfrekvensen på 17 prosentpoeng.

14a	Hva er det neste tallet? 3, 6, 9, 12, ☐

I denne oppgaven må elevene kunne oppdage at mønsteret i tallrekken er å addere foregående tall med tre for å få neste tall. Dette krever begrepskunnskap. Det er verdt å merke seg at på tross av nedgangen i løsningsfrekvens, hadde gruppa høy score både høst og vår på denne oppgaven. Løsningsfrekvensen var på 97 % om høsten og 80 % om våren

Løsningsfrekvens for elevgruppa bestående av øverste 1/3



Figur 4.1.2.5: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Øverste tredjedel av 4.trinn.

Oppgaver med høy løsningsfrekvens på minst en av testene

32 av 38 oppgaver ble løst av over halvparten av elevene på begge testene. På den andre testen var det bare 3 oppgaver som hadde en løsningsfrekvens på mindre enn 50 %, mens det på den første var 6 oppgaver. 25 oppgaver ble løst av minst 80 % av elevene på begge testene, og 29 oppgaver på minst en av testene. Dette kan tyde på at testen var for lett for disse elevene, og at de ikke fikk sjanse til å vise sin reelle utvikling på en del matematikkområder.

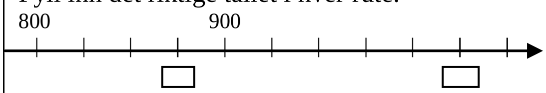
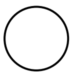
Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene

Ingen oppgaver hadde en løsningsfrekvens på under 20 % på begge testene. Dårligst løsningsfrekvens på begge testene hadde oppgave 14e der elevene skulle oppdage et avansert mønster i ei tallrekke, med 6 % på den første testen og 21 % på den andre.

Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng.

16 oppgaver hadde høyere løsningsfrekvens på den andre testen enn på den første. 3 oppgaver, 5d, 7d og 18b, hadde en økning av løsningsfrekvensen på over 20 prosentpoeng. Oppgave 5d hadde den største økningen på 32 prosentpoeng. Disse oppgavene har stor økning også for hele gruppa. Som nevnt ovenfor hadde nok ikke elevene i den øverste gruppa mulighet til å få vist sin reelle utvikling i en del matematikkområder, fordi de scoret høyt på en del oppgaver allerede på den første testen. Dette gjaldt også for noen elever i den midterste gruppa.

Tabell 4.1.2.23: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Øverste tredjedel av 4.trinn.Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng . Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

			Frekvens i prosent	
Oppgave		Hva testes:	Høst 2006	Vår 2007
5d	Fyll inn det riktige tallet i hver rute. 	Lese av hele tall på ei tallinje	32	65
7d	Fyll inn tallet som mangler. 43 - □ = 27	Subtraksjon av tosifrede tall og finne et tall til venstre for likhetstegnet	44	68
18b	Fargelegg ¼ av sirkelen. 	Enkel brøk	65	88

Elevene i den øverste gruppa har altså positiv utvikling i to oppgaver, 5d og 18b, som krever begrepskunnskap. I oppgave 5d må de kunne lese av tall på ei tallinje og i oppgave 18b må de forstå brøken ¼. De har også positiv utvikling i oppgave 7d som krever at de kan subtrahere tosifrede tall og forstå likhetstegnet som et relasjonstegn.

Oppgaver med negativ utvikling i løsningsfrekvensen på over 15 prosentpoeng

16 oppgaver hadde en dårligere løsningsfrekvens på den andre testen enn på den første. Oppgave 10b og 15 har en nedgang på henholdsvis 21 prosentpoeng og 17 prosentpoeng, men begge oppgavene har en løsningsfrekvens som er forholdsvis høy på den første testen. Begge disse oppgavene krever begrepskunnskap.

10b	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 1 kg pølser koster 49 kr. Per kjøper 3 kg. Hvor mye koster det? 49 · 3 49 : 3 49 + 3 3 + 49 3 · 49 49 - 3

Denne oppgaven krever at elevene kan velge riktig regneoperasjon i en tekstoppgave. Samtlige av elevene i den øverste gruppa løste oppgaven om høsten, mens 79 % løste den om våren.

15	Per har 153 frimerker. Eva og Per har 265 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva? Regn her:

For å løse denne tekstoppgaven trenger elevene å kunne bruke addisjon og subtraksjon i en tekstoppgave. Løsningsfrekvensen var på 76 % om høsten og 59 % om våren. Denne oppgaven hadde stor økning i den midterste gruppa, mens den har nedgang i den øverste gruppa. Grunnen til dette er vanskelig å si, men det kan bare skyldes tilfeldigheter.

4.2 Analyse av utvalgte oppgaver på 7.trinn.

Utvalgte oppgaver fra 7.klasse er tatt med fordi de på en særlig måte kaster lys over elevenes forståelse av likhetstegnet. Her er bare de elevene som deltok på begge testene regnet med. Det vil si 105 elever.

Jeg har allerede sett på detaljene ved oppgave 20d i forhold til 4.klasse. Samme oppgave ble gitt i testen for 7.klasse, da som oppgave 25d. For å kunne si noe sikrere om KUL-elevenes forståelse av ekvivalensrelasjonen, vil jeg også se på testresultatene for 7.klasse i denne oppgaven. På testen for 7.klasse ble det i tillegg gitt to oppgaver, 18a og b, som enda tydeligere kan si oss noe om elevenes forståelse av likhetstegnet. Disse vil også bli analysert.

Tabell 4.2.1: Oppgave 25d. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene. 7.trinn.

25d	Sett rett tall i rutene. $3 + 2 \cdot \square = 15$		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
1	6(Rett)	17	20
12	2	0	1
13	3	49	41
14	5	9	3
15	9	1	4
16	10	8	7
20	Andre svar	2	3
0	Ikke svart	14	21
Total		100	100

Jeg har kommentert denne oppgaven i forhold til 4.klasse, og vil derfor ikke gå så detaljert inn på den her. Jeg har sett at løsningsfrekvensen for 4.klasse var 13 % om høsten og 15 % om våren. Av tabell 4.2.1 kommer det fram at elevene i 7.klasse har en løsningsfrekvens på 17 %

om høsten og 20 % om våren. Løsningsfrekvensen er altså ikke noe særlig bedre på denne oppgaven i 7.klasse.

Videre ser det ut til at feilsvarene er stort sett de samme som for 4.klasse. 49 % av KUL-elevene i 7.klasse gir feilsvaret 3 om høsten, mens 41 % gir dette svaret om våren. Jeg har tidligere kommentert at de som svarer 3 viser at de ikke klarer å prioritere regneoperasjonene rett. Også i 7.klasse bekreftes dette ved at løsningsfrekvensen er større i oppgave 25c, der multiplikasjonen er til venstre for addisjonen i regnestykket. Løsningsfrekvensen for 7.klasse er da på 68 % høsten 2006 og 65 % våren 2007, altså en god del høyere enn for oppgave 25d. Om høsten gir 8 % i 7.klasse feilsvaret 10, mens 7 % gir dette svaret om våren. Jeg har kommentert at en mulig grunn til at de kommer fram til dette, kan være at de adderer i stedet for å multiplisere. Til slutt kommer det fram at det om høsten er 9 % i 7.klasse som gir feilsvaret 5, mens dette bare gjelder 3 % om våren. Se i analysen for 4.klasse når det gjelder kommentar til dette feilsvaret (s. 45).

Jeg har tidligere pekt på at en del av feilsvarene kan tyde på at noen elever har forståelse for likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, men at de har problemer med å prioritere regneoperasjoner eller at de bruker feil regneoperasjoner.

Samtidig har jeg kommentert at feilsvaret 5 kan skyldes at elevene ikke forstår at det må være likt på begge sider av likhetstegnet, men dette svaret var det få av elevene som gav om våren. Videre kommer det fram at 14 % i 7.klasse om høsten og 21 % om våren, ikke svarer på oppgaven i det hele tatt. Som for 4.klasse kan dette være et tegn på at noen elever har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet.

Resultatene fra 7.klasse støtter opp om at den lave løsningsfrekvensen for en stor del skyldes at elevene har problemer med å prioritere regneoperasjoner riktig eller at de bruker feil regneoperasjon, samt at noen elever ikke ser på likhetstegnet som en relasjon mellom to størrelser.

Til slutt kommer det fram av tabell 4.2.2 at oppgave 25b og 25c har en betydelig høyere løsingsfrekvens enn 25d både høst og vår også for 7.klasse, selv om elevene også i disse oppgavene må finne et tall til venstre for likhetstegnet.

Tabell 4.2.2: Oppgave 25a, b, c og d. Løsningsfrekvens i prosent på oppgavene høst og vår. 7.trinn

		Frekvens i prosent	
	Oppgaver	Høst 2006	Vår 2007
25a	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + 6 = \square$	89	90
25b	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + \square = 12$	89	90
25c	Sett rett tall i rutene $\square \cdot 2 + 4 = 12$	68	65
25d	Sett rett tall i rutene $3 + 2 \cdot \square = 15$	17	20

Av tabell 4.2.2. vises det at både oppgave 25a og oppgave 25b har en løsningsfrekvens på 89 % om høsten og 90 % om våren. Mye tyder på at også elevene i 7.klasse overfører tall fra 25a til 25b. Også her tyder det på at oppgave 25c har lavere løsningsfrekvens enn de to foregående oppgavene, på tross av at strukturen er den samme. 68 % om høsten og 65 % om våren løser oppgave 25c rett. Det skyldes nok også her at elevene ikke bare kan overføre tall, men at de må forstå ekvivalensrelasjonen, og vitner om at elevene i 7.klasse har problemer med å forstå likhetstegnet. Samtidig har jeg også pekt på tidligere at siden strukturen i 25c er lik de foregående oppgavene, er det mulig at noen av de som svarer rett bare har fulgt strukturen, og at de dermed ikke forstår ekvivalensrelasjonen. Dette gjelder også oppgave 25a og b. Se under analysen for 4.klasse for grundigere kommentar (s. 46).

Resultatene her taler altså for at noen elever i 4.og 7.klasse sliter med oppgave 25d, fordi de har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet.

Oppgave 18a og 18b har også lav løsningsfrekvens på begge testene. Disse oppgavene krever at elevene kan operere med desimaltall, og at de kan finne et tall representert ved ei rute som er en del av en operasjon og ikke resultatet av en operasjon. Dette inkluderer at de må ha både begreps- og prosedyrekunnskap.

Tabell 4.2.3: Oppgave 18a. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene. 7.trinn.

18a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = ☐ · 14		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
0	Ikke svart	22	26
1	0,5 (Rett)	11	12
12	2	15	16
13	7	42	38
14	- 2	0	3
20	Andre svar	10	5
Total		100	100

I særlig grad krever oppgaven at elevene har forståelse av likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon. Om høsten hadde elevene i 7.klasse en løsningsfrekvens på 11 %, mens den var på 12 % om våren. Det hyppigste feilsvaret er 7. 42 % gir dette svaret om høsten og 38 % om våren. Elevene som svarer dette regner helt klart bare med operasjonen på venstre side av likhetstegnet, som gir at 14 : 2 = 7. Dette viser at de ser på likhetstegnet bare som et operasjonssymbol i denne oppgaven. At likhetstegnet betyr at det må være lik verdi på begge sider, ser ut til å være uvesentlig for dem. 22 % om høsten og 26 % om våren svarer ikke på oppgaven i det hele tatt. Dette gir også et hint om at elevene er ukjent med denne måten å bruke likhetstegnet på.

15 % gir feilsvaret 2 om høsten og 16 % om våren. Disse elevene er muligens klar over at det bør være likt på begge sider av likhetstegnet, men de ser samtidig ut til å ha mangler i sin forståelse av multiplikasjon og divisjon. En annen grunn til at elevene gjør det så dårlig på denne oppgaven kan være at svaret skal være et desimaltall eller en brøk. Resultatene fra testene jeg har analysert i 7.klasse 2006/07 viser at elevene har en del problemer i forhold til å regne med desimaltall. Jeg har ikke anledning til å gå noe nærmere inn på dette, men det samsvarer med testresultater fra både KIM-prosjektet og V01-undersøkelsen, der det kommer

fram at elevene har en del misoppfatninger når det gjelder forståelse av desimaltall og regning med desimaltall. Det kommer også klart fram av V01-undersøkelsen, at V01-elevene presterer dårligere enn hva elevene i 1995 gjorde, når det gjelder regning med desimaltall og avlesning av desimaltall på tallinje (Brekke, 1995; Alseth, Breiteig & Brekke, 2003).

At en del elever har problemer med desimaltall er altså sannsynligvis en grunn til den lave løsningsfrekvensen på denne oppgaven. Samtidig viser det også helt klart av feilsvaret 7, at en del av elevene ikke forstår likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon.

Tabell 4.2.4: Oppgave 18b. Svarfrekvens i prosent for de ulike svartypene. 7.trinn.

18b	Skriv riktig tall i rutene 14 : ☐ = 0,25 · 14		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
0	Ikke svart	47	62
1	4 (Rett)	4	8
12	7	5	5
13	2	9	1
14	0,25	11	10
15	3,5	4	3
16	28	3	1
20	Andre svar	17	10
Total		100	100

Denne oppgaven er muligens enda mer krevende enn den forrige, siden de her skal finne tallet til venstre for likhetstegnet. Prosedyren elevene her kunne fulgt, var først å gjennomføre multiplikasjonsstykket på høyre side av likhetstegnet og deretter dividere svaret de da finner med 14. For å gjennomføre denne prosedyren kreves det helt klart at de har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Det er bare 4 % og 8 % av elevene i 7.klasse som svarer rett på denne oppgaven. Om høsten er det 47 % som ikke svarer på oppgaven, mens det om våren gjelder hele 62 %. Dette gir en klar indikasjon på at mange elever ikke forstår ekvivalensrelasjonen.

0,25 er det vanligste feilsvaret. 11 % gir dette svaret om høsten og 10 % om våren. De som svarer dette gir utrykk for at det ikke betyr noe om hvilken operasjon de velger, samtidig som de muligens har en viss ide om at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider. Feilsvaret 3,5 kommer nok av at elevene bare tar hensyn til operasjonen på den ene siden av likhetstegnet, idet de tenker at 14 · 0,25 = 3,5. 4 % gir dette svaret om høsten og 3 % om våren. Disse elevene viser også at de ser på likhetstegnet som et operasjonstegn i denne oppgaven. I oppgave 18a kom det fram at det var omkring 40 % som tolket likhetstegnet operasjonelt ved å gi feilsvaret 7. At det ikke er flere som svarer 3,5 i oppgave 18b, kan skyldes at elevene ikke kan gjøre det de er mest vant med i denne oppgaven, nemlig å finne svaret etter likhetstegnet. Likevel vil jeg driste meg til å antyde at den lave løsningsfrekvensen og det at så mange ikke svarer på oppgaven, samt at omkring 40 % gir feilsvaret 7 i 18a, viser at elevene samlet sett har problemer med å forstå at likhetstegnet er en ekvivalensrelasjon. Også i denne oppgaven kan en grunn til den lave løsningsfrekvensen i tillegg være at de har problemer med å regne med desimaltall.

Deles hele elevgruppa i 7.klasse for skoleåret 2006/07 i tre, vises følgende:

Tabell 4.2.5: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Nederste tredjedel av 7.trinn.Oppgave 18a, 18b og 25d.

Nederste 1/3		Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
18a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = □ · 14	0	0
18b	Skriv riktig tall i rutene. 14 : □ = 0,25 · 14	0	0
25d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15	6	9

Elevene i den nederste elevgruppa ser ut til å være helt blanke på oppgave 18, mens noen få av dem, 6 % og 9 %, faktisk har klart å løse oppgave 25d riktig.

Tabell 4.2.6: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Midterste tredjedel av 7.trinn.Oppgave 18a, 18b og 25d.

Midterste 1/3		Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
18a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = □ · 14	11	11
18b	Skriv riktig tall i rutene. 14 : □ = 0,25 · 14	0	0
25d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15	17	17

Her kommer det fram at også elevene i den midterste gruppa er helt blanke på oppgave 18b. Oppgave 18a har derimot 11 % av denne gruppa klart å løse. Videre kommer det fram at 17 % av dem har løst oppgave 25d riktig.

Tabell 4.2.7: Løsningsfrekvens i prosent høst og vår. Øverste tredjedel av 7.trinn.Oppgave 18a, 18b og 25d.

Øverste 1/3		Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse
18a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = □ · 14	17	14
18b	Skriv riktig tall i rutene. 14 : □ = 0,25 · 14	9	20
25d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15	29	34

Når det gjelder løsningsfrekvensen for hele gruppa på oppgave 18b, vises det her at det kun er den øverste gruppa som bidrar. 9 % løser den om høsten og 20 % om våren. Dette viser at forståelsen av likhetstegnet muligens har bedret seg noe i denne gruppa, eller at kunnskapen i forhold til desimaltall er forbedret. Videre kommer det fram at oppgave 18a har en løsningsfrekvens på 17 % om høsten og 14 % om våren i denne gruppa. Oppgave 25d klarer omkring 1/3 av elevene i den øverste gruppa å løse riktig.

4.3 Sammenlikning av testresultater for elever på 4.trinn fra høst 2004 med høst 2006

4.3.1 Poengfordeling

Jeg tar her utgangspunkt i alle elevene som tok testene høsten 2004 og elevene som tok begge testene 2006/2007. Jeg har bare tatt med de oppgavene som var med på begge testene.

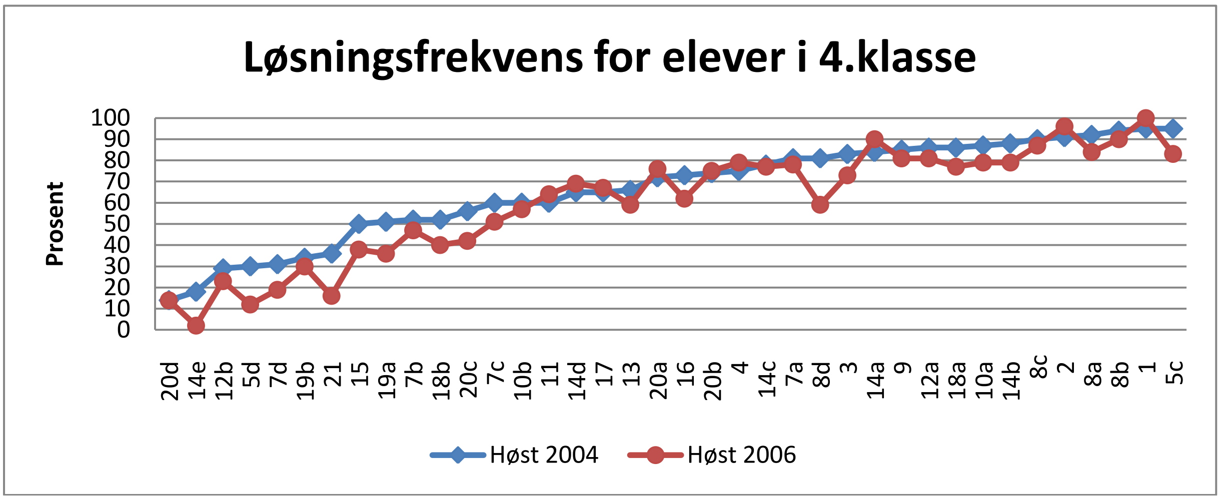
Tabell 4.3.1.1: Deskriptiv statistikk for poeng per elev høsten 2004 og høsten 2006.
Bare felles oppgaver (maksimal poengsum er 38)

Poengsum 4.klasse		
	Høst 2004	Høst 2006
N	106	103
Gj.snitt	25,2	22,9
St.avvik	6,9	7,3
Minimum	5	7
Maximum	36	37

Jeg ser at gjennomsnittlig poengsum høsten 2004 er på 25,2, og 2,3 poeng høyere enn høsten 2006. Videre ser jeg at spredningen ligger sånn omtrent likt rundt gjennomsnittet både i 2004 og 2006. Den laveste poengsummen og den høyeste poengsummen skiller heller ikke så mye fra 2004 til 2006. Det er litt tankevekkende at den gjennomsnittlige poengsummen er lavere i 2006 enn den er i 2004, når en skulle ha ventet en utvikling som følge av KUL-prosjektet. Uansett er det ikke enkelt å vite om den negative utviklingen fra 2004 til 2006 bare skyldes tilfeldigheter og/eller ulike elevkull

4.3.2 Sammenligning med løsningsfrekvens fra høsten 2004

Løsningsfrekvens for felles oppgaver



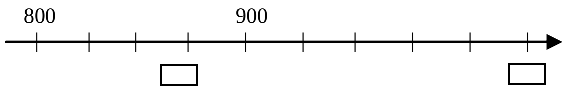
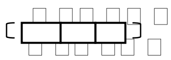
Figur 4.3.2.1: Løsningsfrekvens i prosent høsten 2004og høsten 2006. 4.trinn. Bare felles oppgaver.

Jeg ser av figur 4.3.2.1 at løsningsfrekvensen er forholdsvis lik høsten 2004 og høsten 2006. Oppgaver som hadde lav løsningsfrekvens høsten 2004 ser jeg at også har lav løsningsfrekvens høsten 2006. Samtidig ser jeg at det også er de samme oppgavene elevene gjør det godt på høsten 2006 som høsten 2004.

Oppgave 1, 2, 4, 11, 14a, 14d, 17, 20a og 20b har litt høyere løsningsfrekvens høsten 2006 enn høsten 2004. Disse oppgavene har en forholdsvis høy løsningsfrekvens på begge testene. Oppgave 20d har lik løsningsfrekvens i 2004 og 2006. Ingen av disse oppgavene har mer enn 6 prosentpoeng bedre løsningsfrekvens i 2006 enn i 2004. Dette er så liten forskjell at den kan være tilfeldig.

Over 2/3 av oppgavene har noe høyere løsningsfrekvens i 2004 enn i 2006. Spesielt merker jeg meg oppgave 5d, 8d, 14e, 19a, og 21, som har minst 15 % bedre løsningsfrekvens høsten 2004. De fleste av disse oppgavene har en forholdsvis lav løsningsfrekvens høsten 2006.

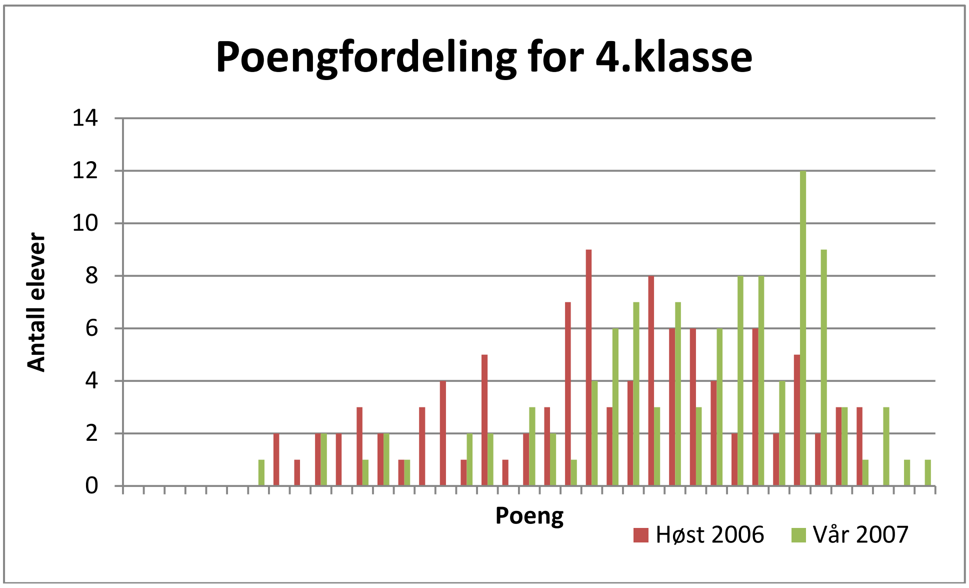
Tabell 4.3.2.1: Oppgaver på 4.trinn med over 15 prosentpoeng bedre løsningsfrekvens høsten 2004 enn høsten 2006. Bare felles oppgaver. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

Oppgave		Frekvens i % høst 2004	Frekvens i % høst 2006	Hva testes:
5d	Fyll inn det riktige tallet i hver rute.  	30	12	Lese av tall på ei tallinje
8d	Fyll inn tallet som mangler. $6 \cdot \square = 18$	81	59	Enkel multiplikasjon og finne et tall til venstre for likhetstegnet
14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, $\square$	18	2	Oppdage avansert mønster i tallrekke
19a	Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret …………………………………………………………	51	36	Bruk av telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster
21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Per? Regn eller forklar her:	36	16	Bruk av addisjon og subtraksjon i tekstoppgave

Høsten 2004 er løsningsfrekvensen minst 15 prosentpoeng bedre enn høsten 2006 på oppgaver der elevene må kunne lese av tall på ei tallinje, foreta enkel multiplikasjon og finne et tall til venstre for likhetstegnet, oppdage et avansert mønster i tallrekke, bruke telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster og bruke subtraksjon og addisjon i en tekstoppgave. Som pekt på i metoden kan feilen i oppgaveteksten på oppgave 21 hatt innvirkning på løsningsfrekvensen. Årsaken til at løsingsfrekvensen er bedre høsten 2004, kan være at dette var første testingen og at det var noen som fortalte elevene om feilen i oppgaveteksten, men dette vet jeg ingen ting sikkert om.

5 Diskusjon

5.1 Testen og poengfordeling



Figur 5.1.1: Poengfordeling på 4.trinn høsten 2006 og våren 2007. Elevene som deltok på begge tester.

Figur 5.1.1 viser at poengfordelingen har forskjøvet seg lenger til høyre våren 2007. Dette vitner om at hele elevgruppa samlet sett har utviklet seg positivt fra første til andre testen. Økningen i gjennomsnittlig poengsum fra 22,9 til 26,7 peker også på at der har vært en positiv utvikling. Samtidig vil jeg påpeke at poengfordelingen er litt høyreskeiv allerede høsten 2006. Dette kan tyde på at testen var litt for lett, og at en del elever kanskje ikke får vist sin reelle utvikling av den grunn. Jeg har kommentert i analysen at det var den nederste elevgruppa som viste størst utvikling fra første til andre test. Denne gruppa hadde en gjennomsnittlig poengsum på 14,4 om høsten, mens den forbedret seg til 20,8 om våren. Den midterste gruppa har jeg også pekt på at har utviklet seg positivt, men på mange oppgaver var situasjonen at løsningsfrekvensen allerede på høsten var svært høy. Den øverste gruppa viste mindre tegn til positiv utvikling. Om testen egner seg til å måle utvikling kan diskuteres, siden den midterste og særlig den øverste gruppa har nådd ”taket” i mange oppgaver allerede om høsten. Andreassen (2005) peker på at testen for 4.klasse nettopp var for lett.

Både Andreassen (2005) og Tonheim (2006) kommenterer i sine oppgaver at poengfordelingen er høyreskeiv. Poengfordelingen for høsten 2004 var enda mer høyreskeiv enn den er høsten 2006. Dette kan tyde på at testen er mer egnet for å måle flere elevers utvikling høsten 2006 enn den var høsten 2004. Likevel er den nok heller ikke god nok til å måle utviklingen for skoleåret 2006/07, siden en del elever skårer høyt på flere oppgaver allerede om høsten. Den nederste gruppa, har i følge testen, størst utvikling, men dette kan komme av at testen hindrer de flinkeste elevene til å få vist sin utvikling. Tonheim (2006) peker på at det samme er tilfellet for skoleåret 2004/05. Han trekker fram at jo dårligere en elev gjør det på den første testen, jo større mulighet har eleven for å vise positiv utvikling. For å kunne teste om elevene i de to øverste gruppene har like stor utvikling som den nederste, burde altså testen vært litt vanskeligere.

5.2 Vurdering av elevenes kunnskaper

I teorien kommer det fram Hiebert og Lefevre (1986) karakteriserer begrepskunnskap som kunnskap som er rik på relasjoner. Begrepskunnskap er nærmere bestemt et kunnskapsnettverk der relasjoner mellom informasjon er like viktig som hver enkelt informasjonsbit. Videre deler de prosedyrekunnskap i to deler. Den første delen går ut på å kunne bruke symboler til å uttrykke matematikk, samt kjenne de syntaktiske reglene for å kunne skrive symbolene på rett måte. Den andre delen av prosedyrekunnskapen består i å kunne bruke regler, algoritmer og prosedyrer til å løse matematiske oppgaver. Prosedyrene er da lineære oppskrifter som steg- for steg beskriver hvordan oppgaver skal løses.

Alseth, Breiteig og Brekke (2003) baserte seg på Hiebert og Lefevres definisjoner av prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, når de i V01-undersøkelsen studerte prosedyrekunnskap versus begrepskunnskap. Ut fra dette beskriver Alseth et al. (2003) prosedyrekunnskaper som det å kunne utføre operasjoner etter en skrittvis algoritme, mens begrepskunnskaper innebærer innsikt i selve tall- og operasjonsbegrepene. I V01-underrsøkelsen ble oppgaver som legger hovedfokus på prosedyrekunnskaper samlet i en gruppe, og stilt komplementært opp mot oppgaver som fokuserer på begrepskunnskap.

I denne oppgaven vil jeg følge oppdelingen til Alseth et al. (ibid.) av oppgaver når det gjelder fokus på prosedyrekunnskap eller begrepskunnskap. Oppgaver som kan løses bare ved hjelp av en skrittvis algoritme vil jeg si fokuserer på prosedyrekunnskap, mens oppgaver som ikke bare kan løses ved en algoritme vil jeg si krever begrepskunnskap. Det er viktig å være oppmerksom på at det ikke blir tatt hensyn til den enkelte elev i denne oppdelingen. Det betyr at en oppgave som jeg mener krever prosedyrekunnskap, likevel kan bli løst ved hjelp av begrepskunnskap. Ut fra en skriftlig test er det umulig å si hva den enkelte elev har tenkt når vedkommende løser en oppgave. Det blir derfor også vanskelig å vite om en elev har løst en oppgave ved å bruke prosedyrekunnskap og/eller begrepskunnskap. Av denne grunn har jeg ikke tatt hensyn til den enkelte elev i oppdelingen, men til hva oppgavene krever når det gjelder begrepskunnskap og prosedyrekunnskap.

Igjen vil jeg bare presisere at når jeg snakker om elevenes kunnskaper og utvikling, betyr ikke dette at jeg mener de er matematisk kompetente. Som Niss & Højgaard Jensen (2002) peker på kan ikke skriftlige tester gi fullt innblikk i alle kompetanser. Når jeg snakker om elevenes kunnskaper og utvikling, er det altså bare tale om kunnskaper og utvikling som jeg kan observere gjennom testresultatene.

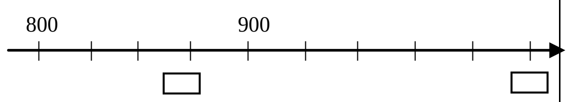
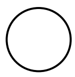
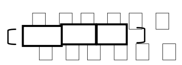
Nedenfor skal jeg se på hvordan elevenes kunnskaper i ulike oppgavetyper på 4.trinn, er på bakgrunn av testresultatene i forhold til prosedyre- og begrepskunnskap og læreplanen L97.

Først vil jeg se på oppgaver der løsningsfrekvens var på minst 80 % på minst en av testene. Fem av oppgavene, 7a, 8a, 8b, 8c og 12a, med en løsningsfrekvens på minst 80 % på minst en av testene, kan elevene løse bare ved hjelp av prosedyrekunnskap. Oppgave 8d kan også løses ved hjelp av prosedyrekunnskap ved at elevene kan gangetabellen utenat, eller ved begrepskunnskap i forhold til likhetstegnet. Elleve oppgaver, 1, 2, 3, 4, 5c, 10a, 14a, 14b, 14c og 18a, trenger elevene begrepskunnskap for å kunne løse.

Det ser ut til å være en god sammenheng mellom L97 og oppgavene med spesielt høy løsningsfrekvens. Elevene gjør det bra på oppgaver der de må kunne addere med tosifrede tall, gjennomføre enkel multiplikasjon og velge riktig regneuttrykk til en tekstoppgave. Dette samsvarer med det L97 sier om at de skal utvikle grunnleggende kjennskap til de fire regnearter, arbeide videre med metoder for å addere og subtrahere flersifrede tall, arbeide mer med multiplikasjonstabellen og kunne velge mellom regnearter. Løsningsfrekvensen er også høy på oppgaven der elevene må kunne se sammenhengen mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon. Dette stemmer overens med hovedmomentet for 4.klasse som sier at elevene skal få erfaringer med multiplikasjon som gjentatt addisjon. Videre samsvarer den høye løsningsfrekvensen på oppgaver der elevene må kunne ha forståelse for posisjonssystemet, med hovedmomentet for 4.klasse som legger vekt på arbeid med plassverdisystemet. Elevene gjør det også bra på oppgaven der de må forstå brøken ½. Dette samsvarer med at L97 legger vekt på arbeide med enkle brøker. At L97 fokuserer på at elevene skal kunne kjenne og bruke naturlige tall, kan være en forklaring på den høye løsningsfrekvensen på oppgaver der elevene skal sammenligne størrelsen på naturlige tall. Det kan også være med å begrunne den høye løsningsfrekvensen på oppgaven der elevene skal lese av hele tall på ei tallinje der avstanden mellom dem er 10. Til slutt samsvarer det også med L97 at elevene gjør det bra på oppgaver der de må kunne oppdage mønster med subtraksjon og addisjon av samme tall i ei tallrekke. Dette kan begrunnes ut fra det L97 sier om at på alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer. Likevel er det i analysedelen vist at det er grunn til å jobbe videre med dette.

Videre vil jeg se på oppgaver der utvikling i løsningsfrekvens er på minst 20 prosentpoeng.

Tabell 5.2.1: Oppgaver med utvikling i løsningsfrekvens på minst 20 prosentpoeng. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

Oppgave:	Utvikling i løsningsfrekvens fra 2006 til 2007 i prosent:	Hva som ble testet:	Prosedyre eller begrep?
5d Fyll inn det riktige tallet i hver rute. 	24	Lese av tall på ei tallinje	Begrep
7d Fyll inn tallet som mangler. $43 - \square = 27$	20	Subtraksjon av tosifra tall, og finne et tall til venstre for likhetstegnet	Prosedyre/ begrep
8d Fyll inn tallet som mangler. $6 \cdot \square = 18$	21	Enkel multiplikasjon og finne et tall til venstre for likhetstegnet	Prosedyre/ begrep
18b Fargelegg ¼ av sirkelen. 	35	Enkel brøk	Begrep
19a Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? …………… Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret………....	32	Bruk av mønster som utgangspunkt for en telle-eller regnestrategi	Begrep

Av tabell 5.2.1 kommer det fram at hele elevgruppa hadde en utvikling i løsningsfrekvens på oppgave 5d, 7d, 8d, 18b og 19a. Elevene har hatt utvikling i tre oppgaver, 5d, 18b og 19a, som krever begrepskunnskap.

I forhold til oppgave 5d har en del elever hatt positiv utvikling når det gjelder å lese av hele tall på ei tallinje. Jeg finner ikke noe læreplanmål som går direkte på dette. Likevel kan det felles målet for småskoletrinnet i L97 som sier at elevene skal kunne kjenne og bruke naturlige tall, nok være med å forklare utviklingen.

Utviklingen i oppgave 18b tyder på at en del elever har hatt en positiv utvikling når det gjelder å forstå enkle brøker. Dette samsvarer med at L 97 legger vekt på brøk i målene som er felles for småskoletrinnet, og spesielt i hovedmoment for 4.klasse står det at elevene skal arbeide med enkle brøker.

Når det gjelder oppgave 19a der elevene må kunne bruke mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi, har også en del elever hatt positiv utvikling. L97 sier at på alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer, noe som kan være en grunn til utvikling i løsningsfrekvens. Under mål for småskoletrinnet legger læreplanen også vekt på at elevene skal få trening i å forklare hvordan de tenker. Dette kan også være en årsak til utviklingen.

Videre kan de to andre oppgavene med positiv utvikling, 7d og 8d, løses ved hjelp av prosedyrekunnskap. I disse oppgavene må elevene kunne foreta subtraksjon av tosifrede tall og enkel multiplikasjon.

I forhold til oppgave 7d og 8d har en del elever hatt positiv utvikling når det gjelder å kunne subtrahere tosifrede tall og foreta enkel multiplikasjon. Utviklingen i subtraksjon samsvarer med at L97 i et av hovedmomentene for 4. klasse, legger vekt på at elevene skal arbeide videre med metoder for å addere og subtrahere flersifrede tall i hodet og på papiret. I tillegg stemmer dette overens med et av de felles målene for småskoletrinnet som sier at elevene skal utvikle grunnleggende kjennskap til de fire regnearter. Dette læreplanmålet, i tillegg til et av hovedmomentene for 4.klasse som sier at elevene skal arbeide mer med multiplikasjonstabellen, kan være med å forklare utviklingen i forhold til enkel multiplikasjon.

Disse to oppgavene krever også begrepskunnskap i det at elevene må ha forståelse for likhetstegnet som et relasjonstegn. Elevene har muligens også utviklet bedre forståelse for ekvivalensrelasjonen. Men dette kan vi ikke vite noe sikkert om ut fra disse oppgavene.

Den nederste elevgruppa har jeg tidligere kommentert hadde utvikling i to oppgaver som krever prosedyrekunnskap, elleve oppgaver som krever begrepskunnskap og to oppgaver som krever både prosedyrekunnsakp og begrepskunnskap. Den midterste elevgruppa har positiv utvikling i fem oppgaver som krever begrepskunnskap og to oppgaver som krever både prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Den øverste elevgruppa har positiv utvikling i to oppgaver som krever begrepskunnskap og en oppgave som krever både prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Her vil jeg igjen påpeke at de to øverste gruppene sannsynligvis ikke hadde mulighet til å vise sin reelle utvikling, siden de hadde høy løsningsfrekvens på mange oppgaver allerede om høsten.

Jeg har også tidligere pekt på at utviklingen i de ulike oppgavetypene samsvarer godt med flere fellesmål og hovedmomenter i L97. Videre tyder det på at KUL-elevene har utviklet seg mest når det gjelder begrepskunnskap. Spesielt den nederste gruppa hadde utvikling i mange oppgaver som krever begrepskunnskap. Dette samsvarer også godt med L97 som spesielt vektlegger begrepskunnskap og forståelse.

Videre stemmer dette overens med testresultatene fra V01, som viste at elevene i 4.klasse hadde utviklet mer begrepskunnskap i forhold til tidligere tester. I tillegg viste det seg at det hadde vært nedgang i V01-elevenes prosedyrekunnskaper fra 1995 til 2001 i 7.klasse, mens det ikke hadde vært noen betydelig endring når det gjaldt begrepskunnskap (Alseth, Breiteig og Brekke, 2003).

I TIMSS 2007 presterte norske elever på 4.trinn mye dårligere enn det internasjonale gjennomsnittet når det gjelder området tall. Disse lave prestasjonene gjaldt spesielt regning med tall (Grønmo et al., 2009). Ovenfor kommer det fram at KUL-elevene 2006/07 også utvikler seg noe når det gjelder regning med tall, men at utviklingen som sagt er større i oppgaver som krever begrepskunnskap. Jeg finner ikke så mange rene prosedyreoppgaver i testen for 4.klasse, noe som gjør det vanskelig å si noe klart om elevenes regneferdigheter ut fra testresultatene. Det er tidligere kommentert at L97 har påvirket utvalget av oppgaver. I tillegg er det kommet fram at et mål for studien var å få et bilde av elevers forståelse i matematikk og hvordan den utvikler seg gjennom prosjektet, samt at det var ønskelig at testingen skulle gi lærere bedre innsikt i elevers begreper i matematikk (Grevholm, 2007). Dette kan være årsaker til at der er et overtall av oppgaver som krever begrepskunnskap i testene.

Til slutt vil jeg se på oppgaver der løsningsfrekvens er på 20 % eller lavere på begge testene.

Tabell 5.2.2: Oppgaver med lav løsningsfrekvens på begge testene. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

Oppgave		Frekvens i % høst 2006	Frekvens i % vår 2007	Hva testes:	Prosedyre eller begrep?
14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, ☐	0	17	Oppdage avansert mønster i tallrekke	Begrep
20d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · ☐ = 15	9	17	Prioritering av regneoperasjoner og finne et tall til venstre for likhetstegnet	Prosedyre/ Begrep

Hele elevgruppa har en løsningsfrekvens som er dårligere enn 20 % på oppgave 14e og 20d. Oppgave 14e krever begrepskunnskap av elevene, mens 20d krever både begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. I forhold til oppgave 14e ser det ut til at elevene har problemer med å oppdage et mønster i ei tallrekke som er mer avansert enn å addere eller subtrahere det foregående tallet med samme siffer for å finne neste tall. Dette viser at de mangler begrepskunnskap på dette området. I tillegg har de mangler i forhold til hva L97 sier om at på alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer.

I forhold til oppgave 20d tyder det på at elevene har problemer med å prioritere regneoperasjoner riktig og finne et tall representert av ei rute til venstre for likhetstegnet. I et hovedmoment for mellomtrinnet står det at elevene skal forstå og kunne bruke de fire regneartene og kunne vurdere hvilke operasjoner som er aktuelle i hver enkelt situasjon. I forhold til dette momentet har elevene fortsatt noe å lære. Til deres forsvar vil jeg påpeke at disse elevene fortsatt bare er på småskoletrinnet og har litt tid igjen på å lære dette.

Den nederste elevgruppa har i tillegg en løsningsfrekvens på 20 % eller dårligere på oppgave 7d, 12b og 21. Oppgave 12b og 21 krever begrepskunnskap, mens oppgave 7d krever både prosedyrekunnskap og begrepskunnskap. Den øverste elevgruppa hadde en løsningsfrekvens som var høyere enn 20 % på alle oppgavene både om høsten og våren.

5.3 Elevers forståelse av likhetstegnet

Nå vil jeg diskutere hvordan KUL-elevene tolker likhetstegnet. I analysen har jeg kommentert at det ut fra oppgave 7d og 8d i 4.klasse, kan tyde på at elevene har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet.

Tabell 5.3.1: Oppgave 7d, 8d og 20d. Løsningsfrekvens i prosent høsten 2006 og våren 2007. 4.trinn. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

Oppgave	Høst 2006	Vår 2007	Hva testes:
7d Fyll inn tallet som mangler. $43 - \square = 27$	19	39	Subtraksjon av tosifra tall og finne et tall til venstre for likhetstegnet
8d Fyll inn tallet som mangler. $6 \cdot \square = 18$	59	80	Enkel multiplikasjon og finne et tall til venstre for likhetstegnet

Jeg har tidligere pekt på at resultatene i disse oppgavene tyder på at noen elever har problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet, noe som for en stor del innebærer at de ikke tolker likhetstegnet som en relasjon mellom to størrelser. Dette begrunnet jeg da ut fra at de gjorde det bedre i lignende oppgaver, der de skulle finne svaret etter likhetstegnet. Dette er i samsvar med hva andre forskere har funnet (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2006). Disse forskerne peker på at oppfatningen om at likhetstegnet betyr "å gjøre noe" istedenfor "det samme som", ser ut til å være en realitet for mange elever. I studiet til Carpenter et al. (1999) kommer det fram at mange barn har problemer med å knytte ekvivalensbegrepet til likhetstegnet. Det å modellere en situasjon der de skal gjøre ting like går bra, men de har problemer med å forstå at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider av det. Rittle-Johnson og Alibali (1999) viste også i sin studie at de fleste elevene forstod hva det betyr at to mengder er like, men at de ikke helt ut forstod meningen med likhetstegnet. Som nevnt har flere forskere pekt på at en årsak til elevers ufullstendige forståelse av likhetstegnet, er at svært ofte når de møter likhetstegnet så står det plassert rett før svaret (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Carpenter et al., 2003).

Videre har jeg pekt på at den positive utviklingen i oppgave 7d og 8d, kan bety at elevene har fått større forståelse for at likhetstegnet er noe mer enn bare et operasjonstegn. Samtidig har jeg kommentert at det også kan være andre årsaker til denne utviklingen som forbedring i subtraksjon og multiplikasjon. Se i analyse for 4.klasse for begrunnelse.

Her er det viktig å ta med at det kommer fram av Behr et al. (1980) sin studie at noen elever virker familiære med setninger på formen $\square + a = b$. Dette kan bety at elever vanligvis ikke har problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet så lenge det er bare ett tall på høyre side. Regnestykket ble vel å merke framstilt på en annen måte da, siden elevene som ble intervjuet i studien ikke ble bedt om å løse dette regneuttrykket. Måten det kom fram på at de aksepterte setningen på formen □ + a = b, var at de forandret setningen □ = a + b som de ikke aksepterte formen på, til setninger på formen a + b = □ eller □ + a = b. Likevel kan det gi et hint om at oppgave 7d og 8d ikke er tilfredsstillende nok, til å vise om elevene har forståelse for likhetstegnet eller ikke. I denne forbindelse må jeg også påpeke at disse oppgavene sannsynligvis ikke ar laget for å teste elevenes ekvivalensforståelse, men subtraksjon og multiplikasjon. Jeg kan derfor ikke si noe sikkert om hvordan elevene forstår likhetstegnet og om de har utviklet sin forståelse, bare ut fra oppgave 7d og 8d.

I analysen har jeg også pekt på at oppgave 20d kan gi informasjon om tolkningen av likhetstegnet blant elever i 4.klasse. I tillegg har jeg sett på denne oppgaven i forhold til elevene i 7.klasse, da som oppgave 25d. I tabell 5.3.2 er det gjort en sammenligning av løsningsfrekvensen for KUL-elever på 4. og 7.trinn høsten 2006, våren 2007 og høsten 2004, samt KIM-elever i 6. og 8.klasse i 1995.

Tabell 5.3.2: Oppgave 20d på 4.trinn og oppgave 25d på 7.trinn i KUL-prosjektet. Sammenligning av løsningsfrekvens i prosent for KUL-elever på 4. og 7.trinn høsten 2006, våren 2007 og høsten 2004, samt KIM-elever i 6. og 8.klasse i 1995. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

25d /20d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15								
		Løsningsfrekvens i prosent							
Kode	Svar	Høst 2006 4.klasse	Vår 2007 4.klasse	Høst 2004 4.klasse*	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse	Høst 2004 7.klasse*	KIM 1995 6.klasse**	KIM 1995 8.klasse**
1	6(Rett)	13	15	14	17	20	23	13	17
11	Feil	-	-	52	-	-	47	-	-
12	2	0	3	-	0	1	-	-	-
13	3	11	32	-	49	41	-	67	73
14	5	14	12	-	9	3	-	8	3
15	9	9	4	-	1	4	-	-	-
16	10	4	8	-	8	7	-	5	2
20	Andre svar	5	2	-	2	3	-	-	-
0	Ikke svart	44	24	34	14	21	30	4	4
Total		100	100	100	100	100	100	-	-

*****har ikke materialet for de enkelte feilsvarene høsten 2004
**har ikke materiale for alle feilsvarene i KIM 1995

Svært få elever klarer å løse denne oppgaven. I analysen kom det fram at KUL-elevene i 4.og 7.klasse skoleåret 2006/07, har en løsningsfrekvens på 20 % eller mindre på denne oppgaven. I 1995 var det 13 % av KIM-elevene i 6.klasse som klarte oppgaven, og 17 % av KIM-elevene i 8.klasse. Høsten 2004 svarte 14 % av KUL-elevene i 4.klasse riktig, mens 23 % svarte riktig i 7.klasse. Løsningsfrekvensen på denne oppgaven har altså ikke endret seg noe særlig gjennom årene, og den har heller ikke blitt noe særlig bedre når elevene blir eldre. Jeg har tidligere kommentert at det at elevene ikke forstår likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, kan være en årsak til at løsningsfrekvensen er så lav på denne oppgaven.

I analysen viste det seg at mange av KUL-elevene i 4. og 7. klasse gir feilsvaret 3. 67 % av KIM-elevene svarer 3 i 1995. Det er altså en større andel av KIM-elevene som gir dette svaret enn KUL-elevene. I KIM-undersøkelsen viste det seg at en stor andel av elevene gav dette feilsvaret selv om de var eldre. 73 % av KIM-elevene i 8.klasse og 63 % av elevene i

10.klasse svarte 3 på oppgaven (Brekke, 2000). Brekke (2000) påpeker at dette tyder på en konsekvent løsningsstrategi blant elevene. Jeg har tidligere pekt at elevene som svarer 3 viser at de ikke klarer å prioritere regneoperasjonene rett. Dette har jeg kommentert bekreftes ved at løsningsfrekvensen både i 4.og 7.klasse er større i oppgave 20/25c, der multiplikasjonen er til venstre for addisjonen i regnestykket. Brekke (2000) påpeker at det store problemet elevene ser ut til å ha med å prioritere regneoperasjonene riktig, vil skape enda større problemer når de blir introdusert for variabler i algebra. Dette begrunner han med at det vil bli vanskeligere for elevene å oppdage at de har kommet fram til feil resultat når regnestykket inneholder variabler (Brekke, 2000).

I analysen kom det fram at det skoleåret 2006/07 er 14 % av KUL-elevene i 4.klasse som gir feilsvaret 5 om høsten, og 12 % om våren. Videre kom det fram at 9 % svarer 5 om høsten i 7.klasse, mens dette svaret forekom sjeldnere om våren. Tabell 5.3.2 viser at 8 % av KIM-elevene i 6.klasse gir dette feilsvaret. Det viste seg derimot i KIM-undersøkelsen at få elever i 8.klasse og 10.klasse gav dette feilsvaret. Løsingsstrategiene som kan ligge bak feilsvaret 5, ser altså ikke ut til å være et like stort problem når elevene blir eldre.

Jeg har tidligere kommentert at en del av feilsvarene kan tyde på at noen elever har forståelse for likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, men at de i stedet har problemer med å prioritere regneoperasjoner eller at de bruker feil regneoperasjoner. Siden svært mange KIM-elever gir feilsvaret 3, kan dette vitne om at en del av disse elevene har en slags forståelse for ekvivalensrelasjonen.

Samtidig har jeg pekt på at feilsvaret 5 kan skyldes at elevene ikke forstår at det må være likt på begge sider av likhetstegnet, men dette svaret har vi sett forekommer sjeldnere når elevene blir eldre. Videre har det kommet fram at det skoleåret 2006/07 er en del elever i 4.og 7.klasse som ikke svarer i det hele tatt. Tabell 5.3.2 viser at det også høsten 2004 er omkring 30 % av KUL-elevene i 4.og 7.klasse som ikke svarer på oppgaven. At noen elever ikke svarer på oppgaven har jeg kommentert kan være et tegn på at de har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Når det gjelder KIM-elevene er det bare 4 % i 6.og 8.klasse som ikke svarer, noe som kan gi et hint om at de har bedre forståelse for likhetstegnet enn KUL-elevene.

Sammenligningen jeg nå har foretatt støtter opp om at den lave løsningsfrekvensen for en stor del skyldes at elevene har problemer med å prioritere regneoperasjoner riktig, men også at noen elever ikke ser på likhetstegnet som en relasjon mellom to størrelser.

Flere forskere peker på at elevene ikke utvikler en videre forståelse av likhetstegnet selv om de blir eldre (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006). Blant annet har det kommet fram av Kierans (1981) undersøkelse, at også ungdomsskoleelever tolker likhetstegnet som et operasjonstegn. Resultatene fra denne oppgaven kan tyde på det samme.

Jeg fortsetter med testresultater fra 7.klasse. Nedenfor kommer det fram at løsningsfrekvensen på oppgave 18a og b (tabell 5.3.3 og 5.3.4), kan være med å forsterke antagelsen om at de har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Disse oppgavene ble gitt på testen for 7.klasse og kan muligens gi oss et klarere bilde av elevenes forståelse av likhetstegnet.

Tabell 5.3.3: Oppgave 18a på 7.trinn og oppgave 22a på 9.trinn i KUL-prosjektet. Sammenligning av løsningsfrekvens i prosent for KUL-elever på 7.trinn høsten 2006, våren 2007 og høsten 2004, samt KUL-elever på 9.trinn høsten 2004, våren 2005, høsten 2005 og våren 2006. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

18a /22a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = ☐ · 14							
Kode	Svar	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse	Høst 2004 7.klasse	Høst 2004 9.klasse	Vår 2005 9.klasse*	Høst 2005 9.klasse**	Vår 2006 9.klasse**
0	Ikke svart	22	26	20	33	36	35	29
1	0,5 (Rett)	11	12	12	24	32	15	29
11	Feil	-	-	68	43	-	-	-
12	2	15	16	-	-	9	5	3
13	7	42	38	-	-	17	36	27
14	- 2	0	3	-	-	0	0	0
20	Andre svar	10	5	-	-	6	9	12
Total		100	100	100	100	100	100	100

*bruker løsningsfrekvens for alle 78 elevene som var med på testen våren 2005 fra Espeland (2006) sin oppgave
**bruker løsningsfrekvens for elevene som var med på begge testene skoleåret 2005/06fra Log (2007) sin oppgave

I analysen kom det fram at skoleåret 2006/07 hadde KUL-elevene svært lav løsningsfrekvens også på denne oppgaven, noe jeg har kommentert kan skyldes ufullstendig forståelse av likhetstegnet eller problemer med desimaltall. Tabell 5.3.3 viser at KUL-elevene ikke gjorde det noe bedre høsten 2004. Videre kommer det fram at løsningsfrekvensen i 9.klasse heller ikke er noe særlig høyere høsten 2005. Derimot er den noe bedre i 9.klasse høsten 2004, våren 2005 og våren 2006, da på 24 %, 32 % og 29 %. Likevel ser det ut til at også en del elever i 9.klasse har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet og/eller problemer med desimaltall.

Jeg har kommentert tidligere at elevene som gir feilsvaret 7, helt klart ikke tolker likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon i det de tenker at 14 : 2 = 7. Goodchild og Grevholm (2009) tolker feilsvaret 7 til at elevene utfører en kalkulasjon og skriver svaret i ruta, fordi de ønsker en avslutning på regneuttrykket. De konkluderer med at dette tyder på at det fortsatt er mye å gjøre for at både gutter og jenter skal utvikle relasjonell forståelse I analysen kom det fram at skoleåret 2006/07 var det 42 % som gav feilsvaret 7 om høsten og 38 % om våren. Tabell 5.3.3 viser at skoleåret 2005/06 er det også så mye som 36 % av elevene i 9.klasse som gir dette svaret om høsten og 27 % om våren. Våren 2005 er det 17 % i 9.klasse som svarer 7, altså ikke fullt så mange som skoleåret 2005/06. Disse resultatene viser at omkring 40 % av elevene i 7.klasse og ca 20-30 % av elevene i 9.klasse har helt klart problemer med å forstå likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon.

I Carpenters et al. (1999) studie ble regnestykket 8 + 4 = □ + 5 gitt til 145 elever i 6. klasse. Det viste seg at samtlige av elevene svarte feil, ved å skrive enten 12 eller 17 i firkanten. Resultatene av hele studien viste at det var færre enn 10 % i hver klasse som svarte rett, da elever fra 1.-6. klasse fikk samme oppgave. Det viste seg til og med at det var enda færre i 5. og 6. klasse som svarte riktig enn på lavere klassetrinn (Carpenter et al., 2003). Regnestykket som ble gitt i denne studien er ganske likt oppgave 14a. Forskjellen er at 14a har andre operasjoner og krever at elevene er kjent med desimaltall. Likevel understøtter studien til Carpenter et al. (1999) at 30-40 % av KUL-elevene tolker likhetstegnet operasjonelt når de svarer 7.

Videre støtter også studien til Behr et al. (1980) og Knuth et. al. (2006) opp om dette. I studien til Behr et al. viste det seg at barna som ble intervjuet ikke ville akseptere at setningen på formen a + b = b + a, var en ekvivalenssetning, bortsett fra om de fant et annet tall som svar. Intervjuene de gjennomførte antyder at barn oppfatter likhetstegnet som et "å gjøre noe-tegn". Heller ikke elevene i 6.klasse gav svar som tydet på at de hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Studien til Knuth et al. (2006) viste at over halvparten av elevene fra 6. og 8. klasse tolket likhetstegnet som et operasjonstegn. I 7.klasse var det flere som tolket likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon, men likevel under halvparten. Resultatene fra studien viser tydelig sammenhengen mellom elevenes forståelse av likhetstegnet og deres ferdigheter når det gjelder å manipulere likninger.

I analysen ble det pekt på at 20-25 % ikke svarer på oppgaven i 7.klasse skoleåret 2006/07, noe jeg har kommentert at kan være tegn på at også disse elevene har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Tabell 5.3.3 viser at det samme gjelder for 7.klasse høsten 2004. I tillegg kommer det fram at dette også gjelder omkring 1/3 av alle elevene i 9.klasse. Regnes det med at en del av disse elevene tolker likhetstegnet operasjonelt, kan det bety at omkring halvparten av KUL-elevene i 7.og 9.klasse tolker likhetstegnet operasjonelt. Dette samsvarer med funnet i studien til Knuth et al.(2006).

Som jeg tidligere har nevnt er det likevel viktig å være oppmerksom på at en tilleggsårsak til den lave løsningsfrekvensen, kan være at svaret skal være et desimaltall eller en brøk. Videre viser tabell 5.3.3 at feilsvaret 2 ikke forekommer like hyppig skoleåret 2005/06 i 9.klasse, som jeg har pekt på at det gjorde i 7.klasse. Tallet to er kommentert av Goodchild og Grevholm (2009) og de tenker at elevene som svarer dette ønsker symmetri om likhetstegnet. Dette innebærer at de har en viss forståelse for likhetstegnet som en ekvivalens relasjon.

Tabell 5.3.4: Oppgave 18b på 7.trinn og oppgave 22b på 9.trinn i KUL-prosjektet. Sammenligning av løsningsfrekvens i prosent for KUL-elever på 7.trinn høsten 2006, våren 2007 og høsten 2004, samt KUL-elever på 9.trinn høsten 2004, våren 2005, høsten 2005 og våren 2006. Hva som ble testet er hentet fra tabell 3.2.1.

18b/22b	Skriv riktig tall i rutene 14 : ☐ = 0,25 · 14							
Kode	Svar	Høst 2006 7.klasse	Vår 2007 7.klasse	Høst 2004 7.klasse	Høst 2004 9.klasse	Vår 2005 9.klasse*	Høst 2005 9.klasse**	Vår 2006 9.klasse**
0	Ikke svart	47	62	50	57	47	52	53
1	4 (Rett)	4	8	5	16	22	8	11
11	Feil	-	-	45	27	-	-	-
12	7	5	5	-	-	5	3	1
13	2	9	1	-	-	0	4	5
14	0,25	11	10	-	-	8	5	4
15	3,5	4	3	-	-	4	3	4
16	28	3	1	-	-	0	0	0
20	Andre svar	17	10	-	-	14	25	23
Total		100	100	100	100	100	100	100

*bruker løsningsfrekvens for alle 78 elevene som var med på testen våren 2005 fra Espeland (2006) sin oppgave
**bruker løsningsfrekvens for elevene som var med på begge testene skoleåret 2005/06fra Log (2007) sin oppgave

Jeg har kommentert at denne oppgaven også krever at elevene har en relasjonell forståelse av likhetstegnet, og at det er under 10 % av elevene i 7.klasse som svarer rett skoleåret 2006/07. Tabell 5.3.4 viser at elevene i 7.klasse ikke gjør det noe bedre høsten 2004. Det kommer også fram at elevene i 9.klasse har lav løsningsfrekvens skoleåret 2005/06. Om høsten har de en løsningsfrekvens på 8 % og om våren 11 %. Som på oppgave 18a gjør noen elever i 9.klasse det bedre skoleåret 2004/05. Løsningsfrekvensen er da 16 % om høsten og 22 % om våren.

Jeg har pekt på tidligere at skoleåret 2006/07 svarer omkring halvparten i 7.klasse ikke på denne oppgaven. Som tabell 5.3.4 viser, gjelder dette også høsten 2004 i 7.klasse, samt skoleåret 2004/2005 i 9.klasse. Som tidligere nevnt tyder feilsvaret 3,5 på, i likhet med feilsvaret 7 i oppgave 18a, at elevene som svarer dette ikke tolker likhetstegnet relasjonelt. Goodchild og Grevholm tolker feilsvaret 3,5 til at elevene vil ha et svar i regneuttrykket, og at de derfor bare utfører kalkulasjonen på den ene siden av likhetstegnet. Siden det bare er 3-4 % i både 7.og 9.klasse som gir feilsvaret 3,5, kommer det ikke så klart fram i denne oppgaven som i 18a, at den lave løsningsfrekvensen for en del skyldes ufullstendig forståelse av likhetstegnet. I analysen har jeg kommentert at skoleåret 2006/07, er det omkring 10 % av elevene som gir feilsvaret 0,25. Tabell 5.3.4 viser at dette svaret ikke er like hyppig i 9.klasse skoleåret 2005/06, men at 8 % svarer 0,25 våren 2005 i 9.klasse. Jeg har tidligere kommentert at elevene som svarer dette har en viss ide om at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider. Goodchild og Grevholm (2009) understøtter dette ved å peke på at elevene som svarer dette sannsynligvis prøver å få en viss form for symmetri om likhetstegnet, men at de likevel har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Verken i 7. eller 9.klasse er der noen andre hyppige feilsvar som tydelig forteller oss om hvordan elevene tolker likhetstegnet.

På bakgrunn av at oppgave 18a viser oss at minst 20-40 % ikke tolker likhetstegnet relasjonelt, samt det at så mange ikke svarer på denne oppgaven, er det stor sannsynlighet for at den lave løsningsfrekvensen for en stor del skyldes ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Også i denne oppgaven kan en grunn til den lave løsningsfrekvensen i tillegg være at de har problemer med å regne med desimaltall.

6 Konklusjon

Målet med den longitudinelle studien i KUL-LCM prosjektet var å få et bilde av elevers forståelse i matematikk og hvordan den utvikler seg gjennom prosjektet. Det var også ønskelig at testingen skulle gi lærere bedre innsikt i elevers begreper i matematikk (Grevholm, 2007). Som pekt på tidligere kan ikke skriftlige tester si alt om elevers kompetanser, kunnskaper og utvikling. Likevel kan slike tester gi oss noe innblikk.

Økningen i gjennomsnittlig poengsum på 4.trinn fra 22,9 høsten 2006 til 26,7 våren 2007, gir en indikasjon av at det har vært en positiv utvikling av elevenes forståelse i matematikk gjennom skoleåret 2006/07. Samtidig er det blitt vist at poengfordelingen for testen på 4.trinn er litt høyreskeiv allerede høsten 2006, noe den også var høsten 2004. Dette kan tyde på at testen var for lett, og at en del elever kanskje ikke får vist sin reelle utvikling av den grunn. Det har blitt kommentert at det var den nederste elevgruppa som viste størst utvikling fra første til andre test. Den midterste gruppa er det også vist at har utviklet seg positivt, mens den øverste gruppa har vist mindre positiv utvikling. Både Andreassen (2005) og Tonheim (2006) kommenterer også i sine oppgaver at poengfordelingen er høyreskeiv, så om testen for 4.klasse egner seg til å måle utvikling for hele elevgruppa er usikkert.

Videre er det blitt vist at gjennomsnittlig poengsum høsten 2004 er på 25,2, og 2,3 prosentpoeng høyere enn høsten 2006. Det er litt tankevekkende at den gjennomsnittlige poengsummen er noe lavere i 2006 enn den er i 2004, når en skulle ha ventet en økning som følge av KUL-prosjektet. Uansett er det ikke enkelt å vite om nedgangen fra 2004 til 2006 bare skyldes tilfeldigheter og/eller ulike elevkull. Det er også blitt vist at det heller ikke er betydelig framgang i løsningsfrekvensen på oppgaver fra høsten 2004 til høsten 2006. Høsten 2004 er derimot løsningsfrekvensen minst 15 prosentpoeng bedre enn høsten 2006 på fem oppgaver. Disse oppgavene krever at elevene må kunne lese av tall på ei tallinje, foreta enkel multiplikasjon, samt finne et tall til venstre for likhetstegnet, oppdage et avansert mønster i tallrekke, bruke telle- eller regnestrategi som utgangspunkt for et mønster og bruke subtraksjon og addisjon i en tekstoppgave.

Med utgangspunkt i testresultatene har jeg i denne oppgaven tatt for meg følgende forskningsspørsmål:

-Hva slags oppgavetyper har størst utvikling i løsningsfrekvensen, hva gjør elevene det bra på og hva har de størst problemer med sett i forhold til begrepskunnskap og prosedyrekunnskap?
-Hvordan er elevenes kunnskaper sammenliknet med L97?
-Hvordan er elevenes forståelse av likhetstegnet?

Testresultatene tyder på at oppgavene med stor utvikling krever mest begrepskunnskap. Dette har jeg funnet at samsvarte med V01-undersøkelsen, og det at L97 særlig vektlegger begrepsforståelse. Når det gjelder oppgaver med høy løsningsfrekvens, er der dobbelt så mange oppgaver som krever begrepskunnskap som oppgaver som krever prosedyrekunnskap. Videre krever oppgavene med lav løsningsfrekvens mest begrepskunnskap, men også noe prosedyrekunnskap.

Oppgavetyper med størst utvikling i løsningsfrekvensen, er oppgaver der elevene skulle bruke mønster som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi, lese av hele tall på ei tallinje, vise brøken ¼ visuelt, foreta subtraksjon av tosifrede tall og enkel multiplikasjon, samt finne et tall til venstre for likhetstegnet. Videre gjør elevene det best på oppgaver der de må kunne ha forståelse for posisjonssystemet, oppdage mønster med subtraksjon og addisjon av samme tall i ei tallrekke, addere med tosifrede tall, gjennomføre enkel multiplikasjon, velge riktig regneuttrykk til en tekstoppgave, se sammenhengen mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon, lese av hele tall på ei tallinje der avstanden mellom dem er 10, vise brøken ½ visuelt og sammenligne størrelsen på naturlige tall. Til slutt viser testresultatene at elevene gjør det dårligst på oppgaver der de må oppdage et mønster i ei tallrekke som er mer avansert enn å addere eller subtrahere det foregående tallet med samme siffer for å finne neste tall og kunne prioritere regneoperasjoner, samt finne et tall til venstre for likhetstegnet.

Oppgavetypene med størst utvikling i løsningsfrekvensen, har vi sett samsvarer godt med en del av fellesmålene for småskoletrinnet og hovedmomentene for 4.klasse i L97. Det gjør også de oppgavetypene elevene mestrer bra. Oppgavene de har problemer med viser at de enda har noe å lære i forhold til det læreplanen sier om å utforske mønster, og å kunne forstå og bruke de fire regnearter, samt kunne vurdere hvilke operasjoner som er aktuelle i hver enkelt situasjon.

Testresultatene tyder på at en del av KUL-elevene har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Det er blitt vist i noen oppgaver på testen for 4.trinn, der elevene må finne et tall til venstre for likhetstegnet, at det kan tyde på at en del elever har problemer med å forstå likhetstegnet som en ekvivalens relasjon. Disse oppgavene er likevel ikke godt nok egnet til å dra noen bastante konklusjoner i forhold til dette. Resultatene i oppgave 18a på testen for 7.trinn, viser derimot tydelig at en del elever har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Omkring 40 % av elevene i 7.klasse gir feilsvaret 7 på oppgaven $14 : 2 = \square \cdot 14$, noe som helt klart viser at de ikke forstår likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon. Dette kan understøtte at en årsak til at elevene på 4.trinn har problemer med å finne et tall til venstre for likhetstegnet, kan være at også disse har en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Videre er det blitt vist i diskusjonen at teorien støtter opp om at elever både på barneskole og ungdomsskole ofte ser på likhetstegnet bare som et operasjonstegn. Siden ingen oppgaver i testene bare hadde til hensikt å teste elevenes forståelse av likhetstegnet, er det umulig å vite hvor mange av KUL-elevene som virkelig har problemer med dette. Helt sikkert er det hvert fall at omkring 40 % på 7.trinn ikke tolker likhetstegnet relasjonelt. Samtidig kan testresultatene gi et hint om at det er enda flere på 7.trinn som har en ufullstendig forståelse for likhetstegnet, og at en del elever også på 4.trinn har samme problemet.

7 Pedagogiske implikasjoner

Her vil jeg ta for meg hvordan resultatene som kommer fram i oppgaven, kan brukes i undervising og gi ideer til videre forskning.

Denne oppgaven tar stort sett utgangspunkt i diagnostiske oppgaver og resultatene i forhold til disse. Informasjonen vi har fått om elevenes kunnskaper og utvikling ut fra disse oppgavene er begrenset, men kan likevel være med danne grunnlag for en slags diagnostisk undervisning. Testresultatene fra 2006/07 gir oss noe innblikk i hva en del elever har problemer med, noe som spesielt kan være nyttig med tanke på undervisning.

Jeg har tidligere pekt på at i TIMSS 2007 var tall og algebra de områdene norske elever på 4.og 8.trinn hadde lavest score (Grønmo et al., 2009). Av testresultatene for 4.trinn skoleåret 2006/07 er det spesielt to oppgavetyper som mange elever har problemer med. Som sagt før gjelder dette å kunne oppdage avanserte mønster i ei tallrekke og å kunne prioritere regneoperasjoner riktig. Brekke (2000) påpeker at det er viktig at elevene kan prioritere regneoperasjoner riktig i forhold til å løse likninger. Dette er altså noe undervisningen bør rette fokus mot for å styrke norske elevers kunnskaper i tall og algebra.

Samtidig har jeg også sett at en del elever har problemer med å forstå likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon. Det kommer fram i teorien at flere forskningsstudier har vist at dette er et utbredt problem (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 1999; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Knuth et al., 2006). Noen forskere mener at om ikke elevene får en relasjonell forståelse for likhetstegnet, vil det skape store problemer for dem når de møter algebra (Kieran, 1981; Carpenter, 2003)

Carpenter et al. (ibid.) påpeker at det er nødvendig at det foregår et konsentrert arbeid over tid, for at elevene skal få en tilfredsstillende forståelse av ekvivalensbegrepet. De mener også at ekvivalensforståelsen elevene får, når de lærer om tall og operasjoner, vil gjøre det mulig for dem å reflektere omkring ligninger og vil legge et godt grunnlag for senere læring av algebra. Knuth et al. (2006) mener på bakgrunn av deres studie at lærere bør investere mer tid i å lære elevene betydningen av likhetstegnet, for at de skal bli flinkere til å løse likninger.

Videre er det mye som tyder på at det er viktig å fokusere på ekvivalensrelasjonen allerede i starten av skolegangen, siden elever ser ut til å utvikle en operasjonell tolkning av likhetstegnet tidlig. McNeil et al. (2006) peker på at når en operasjonell forståelse av likhetstegnet ofte etableres på lavere klassetrinn, blir det heller ikke enkelt for elever på mellomtrinnet å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Resultatene i denne oppgaven, samt resultater fra andre studier (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983; Knuth et al., 2006) som har vist at også eldre elever har problemer med ekvivalensrelasjoenen, vitner om at det er viktig å fokusere på likhetstegnet i undervisningen også på mellomtrinnet.

For at elevene bedre skal forstå likhetstegnet som en ekvivalensrelasjon er det også viktig at lærebøker retter fokus mot dette. Dette ser jeg av studien til McNeil et al. (ibid.) som undersøkte hvordan 4 lærebøker presenterte likhetstegnet for elever på mellomtrinnet i USA. Samlet sett viste denne studien at lærebøker sjelden presenterer likhetstegnet i kontekster som fremmer en relasjonell tolkning av det. En ide til videre forskning er å undersøke hvordan likhetstegnet framstilles i norske lærebøker.

I denne masteroppgaven har jeg analysert elevers forståelse av likhetstegnet på grunnlag av oppgaver som ikke direkte tar sikt på å teste dette. Disse oppgavene hadde til hensikt å teste elevene i forhold til multiplikasjon, subtraksjon, prioritering av regneoperasjoner og desimaltall. For å finne ut mer om norske elevers forståelse for likhetstegnet, vil det være nyttig for videre forskning å bruke oppgaver som er spesielt rettet mot å teste dette. Oppgaven som ble brukt i Carpenter et al. (1999) er for eksempel vist å være godt egnet. Det kan også være interessant for videre forskning å undersøke elevenes kunnskaper når det gjelder prioritering av regneoperasjoner, ut fra oppgaver som kun tester dette.

På bakgrunn av at både forståelse for likhetstegnet og prioritering av regneoperasjoner ser ut til å være viktig med tanke på elevenes tall- og algebrakunnskaper, er det nødvendig at det forskes videre på dette og at det får spesielt fokus i læreplanmål, lærebøker og undervisning allerede tidlig i skolegangen. Men på grunn av at mange elever henger fast i oppfatningen om at likhetstegnet er et operasjonstegn, er det også viktig med fokus på dette på mellomtrinnet og i ungdomsskolen.

Til slutt vil jeg bemerke at testresultatene i denne oppgaven tyder på at det har vært bra med tanke på elevenes begrepskunnskaper, at læreplanen L97 har lagt så stor vekt på dette. Jeg vil av denne grunn påpeke at det er viktig med et fortsatt sterkt fokus på begreper i læreplan, lærebøker og undervisning. Samtidig kan resultatene fra andre studier som V01 og TIMSS, tyde på at det sterke fokuset i L97 på begreper, kan ha gått noe utover utviklingen av prosedyrekunnskap. Muligens den nye læreplanen Kunnskapsløftet 2006 (Kunnskapsdepartementet, 2006), klarer å balansere forholdet mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap enda bedre, siden det fokuseres en del på grunnleggende ferdigheter her. Det vil være interessant for videre forskning å undersøke hvordan Kunnskapsløftet 2006 virker inn på elevenes utvikling av prosedyrekunnskap og begrepskunnskap.

8 Litteraturliste

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering: matematikkfaget som kasus*. (02/2003 red.) Notodden: Telemarkforskning.

Andreassen, I. S. (2005). *Innsikt i elevers kompetanser som vises i skriftlige matematikktester*. Høgskulen i Agder, Kristiansand.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 198-212.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Breiteig, T. & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere 2*. Oslo: Universitetsforlaget.

Brekke, G. (1995). *Veiledning til tall og tallregning: E, G og I*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G, & Støren, H. (1995). Kvalitet i matematikkundervisningen. *Nämnaren, 3*, 10-14.

Brekke, G., Kobberstad, T., Lie, S., & Turmo, A. (1998). *Hva i all verden kan elevene i matematikk? Oppgaver med resultater og kommentarer*. Oslo: Universitetsforlaget.

Brekke, G., Rosén, B., & Grønmo, L. S. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Carpenter, T., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Equivalence relation. (2005). I C. Soanes & A. Stevenso (red.), *The Oxford Dictionary of English*. Oxford: Oxford University Press. Lastet ned 3. desember 2009, fra http://www.oxfordreference.com/views/ENTRY.html?subview=Main&entry=t140.e25338.

Espeland, H. (2006). *Elevers kunnskaper i tall og algebra: Hva har de med seg fra 9. og 11. trinn?* Høgskulen i Agder, Kristiansand.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232-237.

Goodchild, S., & Grevholm, B. (2009). An exploratory study of mathematics test results: What is the gender effect? International *Journal of Science and Mathematics Education*, *7*, 161-182.

Grevholm, B. (2007). Å undersøke forbedret læring i matematikk. I B. Jaworski, A. B. Fuglestad, R. Bjuland, T. Breiteig, S. Goodchild, & B. Grevholm (red.), *Læringsfellesskap i matematikk*. (s. 39-50). Casper Forlag AS.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S., & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Bergem, O. K., & Nyléhn, J. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Unipub Forlag.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert, & P. Lefevre (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ, London Erlbaum.

Jaworski, B. (2007). Introducing LCM – Learning Communities in mathematics. I B. Jaworski, A. B. Fuglestad, R. Bjuland, T. Breiteig, S. Goodchild, & B. Grevholm (red.), *Læringsfellesskap i matematikk*. (s. 13-26). Casper Forlag AS.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kirke- utdannings- og forskningsdepartementet. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37*, (4), 297-312.

Log, E. L. (2007). *Achivement of 9th and 11th grade students in algebra og numbers.* Høgskolen I Agder, Kristiansand.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2000). Learning mathematics from procedural instruction: Externally imposed goals influence what is learned. *Journal of Educational Psychology*, *92*(4), 734-744.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students’ understanding of equal sign: The books they read can’t help. *Cognition and instruction, 24*(3), 367-385.

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematikklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999) Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, *91*(1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and prosedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362.

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2008). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology, 00,* 1-19.

Skemp, R. R. (1982). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. *Visible language, XVI*(3), 281-288.

Tonheim, O. H. M. (2006). *Innsikt i elevar si utvikling i matematikk gjennom eit skuleår: Bruk av skriftlege testar.* Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Woolfolk, A. (2006). *Pedagogisk psykologi*. Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Oversikt over vedlegg

Vedlegg 1: Tall og algebra på 4.trinn

Vedlegg 1.1

TALL OG ALGEBRA 2

En undersøkelse, 4. klasse

Navn: .... Dato: ....

Elev nummer .... (fylles ut av skolen)

Elev nummer: .... (fylles ut av skolen)

TALL OG ALGEBRA 2

En undersøkelse, 4. klasse

Dato: .... ☐ Gutt ☐ Jente

Alder: .... år og .... måneder

Lommeregner skal ikke brukes på denne testen.

---

1 Sett ring rundt det største tallet.

5436 547 56

2 Sett ring rundt det største tallet.

98 130 119

3 Hva betyr sifferet 4 i 426?

(Sett ring rundt svaret)

4 40 400

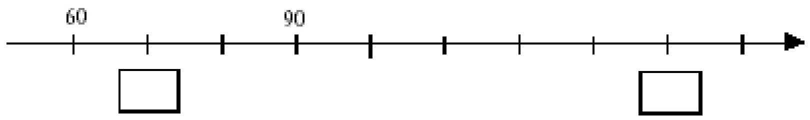
4 Hvilket siffer står på tierplassen i 132?

(Sett ring rundt svaret)

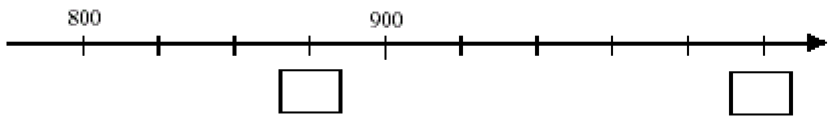
1 3 2

5 Fyll inn det riktige tallet i hver rute.

c



d



7 Fyll inn tallet som mangler.

a $15 + 17 = \square$ **b** $46 – 18 = \square$

c $73 + \square = 99$ **d** $43 – \square 7$

8 Fyll inn tallet som mangler.

a $4 \cdot 5 = \square$

b $5 \cdot 10 = \square$

c $12 \cdot 2 = \square$

d $6 \cdot \square = 18$

9 Hva er 3 ganger 23?

(Sett ring rundt svaret)

323 69 26

10 Sett ring rundt *alle* regnestykkene som passer til regneoppgaven:

(Du skal ikke regne ut svaret).

a Jorunn har 3 bøker. Storesøsteren til Jorunn har 4 bøker. Hvor mange bøker har de til sammen?

$3 \cdot 4$ $4 + 3$ $4 : 3$ $4 \cdot 3$ $4 - 3$ $3 + 4$

b 1 kg pølser koster 49 kr. Per kjøper 3 kg. Hvor mye koster det?

$49 \cdot 3$ $49 : 3$ $49 + 3$ $3 + 49$ $3 \cdot 49$ $49 – 3$

11 Lag din egen fortelling som passer til dette regnestykket:

$\boxed{\mathbf{15 - 8 = 7}}$

Din regnefortelling:

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

12 **a** Regn ut $7 \cdot 3 =$ …………….

b Lag en tegning som passer til regnestykket $7 \cdot 3$

Tegn her:

13 Et addisjons-stykke ser slik ut: $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

Skriv dette addisjons-stykket som et multiplikasjons-stykke.

(Skriv på de stiplede linjene)

………. · ………. = ……….

14 Hva er det neste tallet?

a 3, 6, 9, 12, $\square$

b 20, 18, 16, 14, $\square$

c 2, 6, 10, 14, $\square$

d 31, 37, 43, $\square$

e 3, 4, 7, 11, $\square$

15 Per har 153 frimerker. Eva og Per har 265 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva?

Regn her:

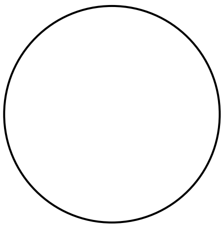
16 Du kjøper to penner som koster 10 kr og 7 kr.
Hva får du tilbake på 20 kroner?

Regn her:

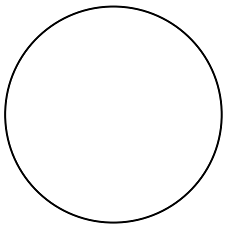
17 Kulene koster 3 kr for hver. Hvor mange kan du kjøpe for 10 kr?

Regn eller forklar her:

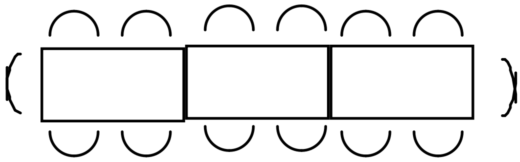
18 **a** Fargelegg $\frac{1}{2}$ av sirkelen.



b Fargelegg $\frac{1}{4}$ av sirkelen.



19 Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:



Her er det tre småbord, og det er stoler rundt.

a Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? ………………………

Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

b Hva om vi har 7 småbord? Hvor mange stoler? …………………..

Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

20 Skriv rett tall i rutene

a $3 \cdot 2 + 6 = \boxed{}$

b $3 \cdot 2 + \boxed{} = 12$

c $\boxed{} \cdot 2 + 4 = 12$

d $3 + 2 \cdot \boxed{} = 15$

21 Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gamel er Ole, og hvor gammel er Per?

Regn eller forklar her:

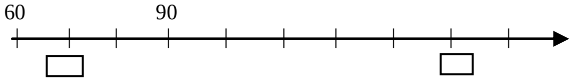
Vedlegg 1.2

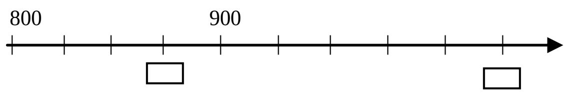
1	Sett ring rundt det største tallet. 5436 547 56	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	5436 (Rett)	100	100
Total		100	100

2	Sett ring rundt det største tallet. 98 130 119	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	0	1
1	130 (Rett)	96	94
11	Feil	4	5
Total		100	100

3	Hva betyr sifferet 4 i 426? (Sett ring rundt svaret) 4 40 400	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	11	0
1	400 (Rett)	73	83
11	Feil	16	17
Total		100	100

4	Hvilket siffer står på tierplassen i 132? (Sett ring rundt svaret) 1 3 2	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	5	1
1	3 (Rett)	79	83
11	Feil	16	17
Total		100	100

5c	Fyll inn det riktige tallet i hver rute.  	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	8	1
1	Rett tall i begge rutene (70 og 140) (Rett)	63	81
2	Rett tall i rute 1 (70), men feil eller ikke svart i rute 2	19	13
3	Rett tall i rute 2 (140), men feil eller ikke svart i rute 1	1	2
11	Feil	9	3
Total		100	100

5d	Fyll inn det riktige tallet i hver rute.	Frevens i prosent	
			
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	40	21
1	Rett tall i begge rutene (875 og 1025) (Rett)	8	27
2	Rett tall i rute 1 (875), men feil eller ikke svart i rute 2	3	7
3	Rett tall i rute 2 (1025), men feil eller ikke svart i rute 1	1	2
12	830 i rute 1 og 950 i rute 2	8	5
20	Andre svar	40	38
Total		100	100

.

7a	Fyll inn tallet som mangler. 15 + 17 = ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	6	2
1	32 (Rett)	77	86
11	Feil	17	12
Total		100	100

7b	Fyll inn tallet som mangler. 46 - 18 = ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	22	13
1	28 (Rett)	47	60
11	Feil	31	27
Total		100	100

7c	Fyll inn tallet som mangler. 73 + ☐ = 99	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	16	7
1	(Rett)	51	63
11	Feil	33	30
Total		100	100

7d	Fyll inn tallet som mangler. 43 - $\square$ = 27	Frevens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	39	22
1	16 (Rett)	19	39
12	15	2	8
13	20	6	6
14	23	6	4
15	24	8	5
16	26	7	4
17	17	1	3
20	Andre svar	13	10
Total		100	100

8a	Fyll inn tallet som mangler 4 · 5 = $\square$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	7	4
1	20 (Rett)	84	90
11	Feil	9	6
Total		100	100

8b	Fyll inn tallet som mangler 5 · 10 = $\square$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	6	3
1	50 (Rett)	90	94
11	Feil	4	3
Total		100	100

8c	Fyll inn tallet som mangler 12 · 2 = $\square$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	7	4
1	24 (Rett)	87	91
11	Feil	6	5
Total		100	100

8d	Fyll inn tallet som mangler. $6 \cdot \square = 18$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	17	6
1	3 (Rett)	59	80
12	2	11	6
13	4	4	3
14	6	4	2
15	12	3	0
16	7	1	2
20	Andre svar	1	1
Total		100	100

9	Hva er 3 ganger 23? (Sett ring rundt svaret) 323 69 26	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	7	3
1	69 (rett)	80	83
11	Feil	13	14
Total		100	100

10a	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). Jorunn har 3 bøker. Storesøsteren til Jorunn har 4 bøker. Hvor mange bøker har de til sammen? $3 \cdot 4$ $4 + 3$ $4 : 3$ $4 \cdot 3$ $4 – 3$ $3 + 4$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	7	3
1	Ring rundt 4+3 og 3+4 (Rett)	29	38
2	Ring rundt 4+3 eller 3+4	49	44
11	Feil	15	15
Total		100	100

10b	Sett ring rundt alle regnestykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 1 kg pølser koster 49 kr. Per kjøper 3 kg. Hvor mye koster det? $49 \cdot 3$ $49 : 3$ $49 + 3$ $3 + 49$ $3 \cdot 49$ $49 - 3$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	19	7
1	$49 \cdot 3$ og $3 \cdot 49$ (Rett)	23	34
2	$49 \cdot 3$ eller $3 \cdot 49$	34	38
11	Feil	24	21
Total		100	100

11	Lag din egen fortelling som passer til dette regnestykket: $\boxed{15 - 8 = 7}$ Din regnefortelling:	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	15	7
1	Riktig regnefortelling (Rett)	64	69
11	Feil	21	24
Total		100	100

12a	Regn ut 7 · 3 = ………..	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	10	5
1	21 (Rett)	80	87
11	Feil	10	8
Total		100	100

12b	Lag en tegning som passer til regnestykket 7 · 3 Tegn her:	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	28	5
1	Rett tegning (Rett)	23	25
2	Rett tegnefortelling	0	3
11	Feil	49	67
Total		100	100

13	Et addisjons-stykke ser slik ut: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 Skriv dette addisjons-stykket som et multiplikasjons-stykke. (Skriv på de stiplede linjene) ……..…. · ……….. = ………..…	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	30	12
1	4 · 5 = 20(Rett)	59	74
11	Feil	11	14
Total		100	100

14a	Hva er det neste tallet? 3, 6, 9, 12, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	8	4
1	15 (Rett)	90	84
11	Feil	2	12
Total		100	100

14b	Hva er det neste tallet? 20, 18, 16, 14, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	12	7
1	12 (Rett)	78	86
11	Feil	10	7
Total		100	100

14c	Hva er det neste tallet? 2, 6, 10, 14, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	14	10
1	18 (Rett)	77	88
11	Feil	9	2
Total		100	100

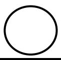
14d	Hva er det neste tallet? 31, 37, 43, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	19	10
1	49 (Rett)	69	79
11	Feil	12	11
Total		100	100

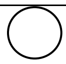
14e	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, ☐	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	42	24
1	18 (Rett)	2	18
12	12	6	10
13	13	6	0
14	14	9	7
15	15	22	21
16	16	8	18
17	17	3	0
20	Andre svar	2	2
Total		100	100

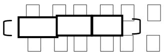
15	Per har 153 frimerker. Eva og Per har 265 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva? Regn her:	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	31	13
1	112 (Rett)	35	46
2	153 + 112 = 265	3	5
11	Feil	31	36
Total		100	100

16	Du kjøper to penner som koster 10 kr og 7 kr. Hva får du tilbake på 20 kr? Regn her:	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	32	17
1	3 kr (Rett)	62	66
2	20 – 3 = 17	0	1
11	Feil	6	16
Total		100	100

17	Kulene koster 3 kr hver. Hvor mange kan du kjøpe for 10 kr? Regn eller forklar her:	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	24	11
1	3 kuler(Rett)	62	68
2	$3 \cdot 3 = 9$	5	7
11	Feil	9	14
Total		100	100

18a	Fargelegg 1/2 av sirkelen. 	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	15	6
1	Fargelagt 1/2 (Rett)	73	91
2	Ikke fargelagt 1/2	4	2
11	Feil	8	1
Total		100	100

18b	Fargelegg ¼ av sirkelen. 	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	17	6
1	Fargelagt 1/4 eller kant 1/4 (Rett)	32	64
2	Ikke fargelagt 1/4	8	11
12	1/2 fargelagt	15	2
13	Liten kant 1/4 fargelagt	4	8
14	Liten 1/4 fargelagt	1	2
15	Hele sirkelen fargelagt	8	1
16	Liten kant 1/4 ikke fargelagt	6	3
20	Andre svar	9	3
Total		100	100

19a	Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:  Her er det tre småbord, og det er stoler rundt. Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret ……	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	14	8
1	18 med forklaring (Rett)	29	57
2	18 uten eller med manglende forklaring	7	11
12	16	20	9
13	19	7	4
14	14	5	0
15	15	1	2
16	20	3	3
17	17	4	2
20	Andre svar	10	4
Total		100	100

19b	Hva om vi har 7 småbord? Hvor mange stoler?........... Forklar – eller vis – hvordan du kom fram til svaret…….	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	27	15
1	Rett svar med forklaring (Rett)	22	35
2	Rett svar uten forklaring	8	5
11	Feil	43	45
Total		100	100

20a	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + 6 = \square$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	19	19
1	12 (Rett)	76	75
11	Feil	5	6
Total		100	100

20b	Sett rett tall i rutene $3 \cdot 2 + \square = 12$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	22	19
1	6 (Rett)	75	78
11	Feil	3	3
Total		100	100

20c	Sett rett tall i rutene. $\square \cdot 2 + 4 = 12$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	36	22
1	4 (Rett)	42	58
11	Feil	22	20
Total		100	100

20d	Sett rett tall i rutene $3 + 2 \cdot \square = 15$	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	44	24
1	6 (Rett)	13	15
12	2	0	3
13	3	11	32
14	5	14	12
15	9	9	4
16	10	4	8
20	Andre svar	5	2
Total		100	100

21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Petter? Regn eller forklar her: (Om høsten: Hvor gammel er Per?)	Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	58	34
1	Rett svar med forklaring (Rett)	16	5
2	Rett svar uten forklaring	0	23
3	Rett svar uten forklaring, men bytter om Petter og Ole	0	2
11	Feil	26	36
Total		100	100

Vedlegg 2: Tall og algebra 7.trinn

Vedlegg 2.1

TALL OG ALGEBRA (v 2)

En undersøkelse, 7. klasse

Navn: .... Dato: ....

Elev nummer .... (fylles ut av skolen)

Elev nummer: .... (fylles ut av skolen)

TALL OG ALGEBRA (v 2)

En undersøkelse, 7. klasse

Dato: .... ☐ Gutt ☐ Jente

Alder: .... år og .... måneder

Lommeregner skal ikke brukes på denne testen.

1 Hva betyr 8,7 ? (Kryss av det beste av følgende svar.)

Åttisju
Åtte sjudeler
Åttehundreogsju
Åtte og en sjudel
Sju åttedeler
Åtte og sju tideler
Ingen av disse, jeg tror 8,7 betyr

....

2 Sett ring rundt det største tallet.

5436 547 56 976

3 **a** Sett ring rundt det største av de tre talla:

0,62 0,236 0,4

b Hvordan vet du at det er det største?

……………………………………………………………………………………….…

……………………………………………………………………………………

4 Sett ring rundt det minste av disse fem talla:

0,625 0,25 0,3753 0,125 0,5

5 Hvilket siffer står på tierplassen i 3142?
(Sett ring rundt svaret)

3 1 4 2

6 Hva betyr sifferet 7 i 0,573?
(Sett ring rundt svaret)

7 tideler 7 hundredeler 7 tusendeler

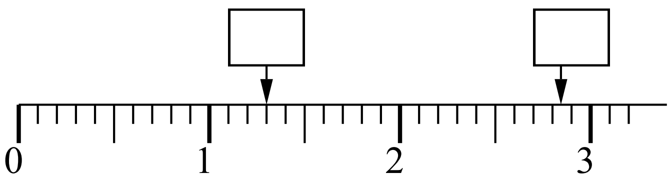
7 Skriv riktig tall i rutene

a $574 = 5 \cdot 100 + \square \cdot 10 + 4 \cdot 1$

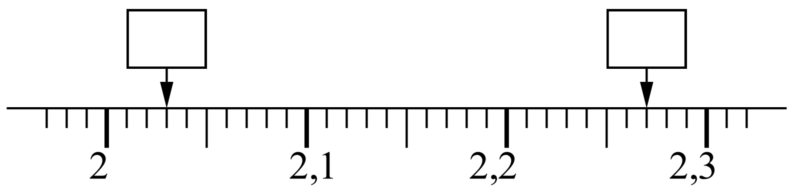
b $5{,}74 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot \square + 4 \cdot \square$

8 Les av på følgende skalaer og skriv det rette tallet i ruta. Gi alle svara som desimaltall.

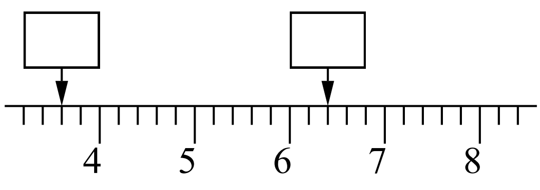
a



b



c



9 Sett riktig tegn i rutene (< eller >).

a $\frac{7}{8}$ $\square$ 1

b -5 $\square$ -6

c 0 $\square$ -0,4

d 0,9 $\square$ 0,30

10 Regn ut :

a $6 \cdot 40 =$ ....

b $60 \cdot 450 =$ ....

c 900 : 30 = …………

11 Skriv svaret:

a 5,1 + 0,46 = …………………………

b 37 – 0,16 = …………………………..

c 4 · 2,4 = ……………………….........

d 0,12 : 2 = ………………………........

12 Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar.

a 8 · 0,5 = ………………………………

b 6 : 12 = ...………………………………

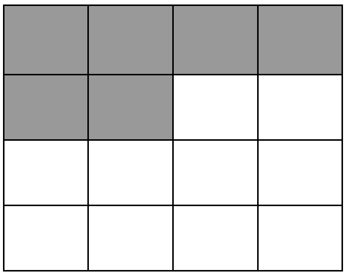
c 4 : 0,5 = ……………………………….

d 12 : 3 = ……………………………….…

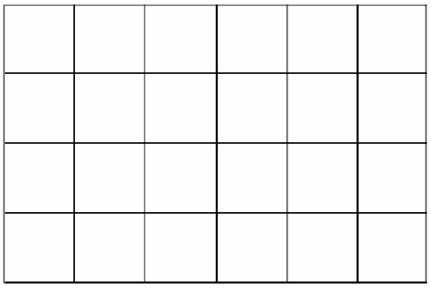
e 0,5 · 8 = ………………………………

f 0,8 : 0,2 = ……………………………

13 **a** Hvor stor del av hele figuren er grå? ……………….



b Skyggelegg (skraver) $\frac{5}{8}$ av figuren.



14 Regn ut:

a $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$

b $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

c $4\cdot\frac{1}{3}=$

15 Hva er det neste tallet?

a 3, 6, 9, 12,

b 20, 18, 16, 14,

c 3, 4, 7, 11,

d 31, 37, 43,

e 3, 9, 27,

16 Sett ring rundt alle regneuttrykkene som passer til regneoppgaven:
(Du skal ikke regne ut svaret).

a *For 7 lodd må du betale 35 kroner. Hvor mye koster ett lodd*?

$35 \cdot 7$ $35 : 7$ $7 : 35$ $7 \cdot 35$ $35 - 7$ $7 + 35$

b *24 halsbånd pakkes i eske. Om 24 halsbånd veier 3 kg, hvor mye veier da ett halsbånd?*

$24 \cdot 3$ $24 : 3$ $3 : 24$ $3 \cdot 24$ $24 - 3$ $3 + 24$

c *1 kg pølser koster 49,50 kr. Per kjøper 1,7 kg. Hvor mye koster det?*

$49{,}50 \cdot 1{,}7$ $49{,}50 : 1{,}7$ $1{,}7 : 49{,}50$ $1{,}7 \cdot 49{,}50$ $49{,}50 - 1{,}7$

17 Skriv et regneuttrykk som passer for å løse oppgaven: (Du skal ikke regne det ut).

a *Fem like flasker solbærsaft inneholder i alt 6,25 liter. Hvor mye saft inneholder hver flaske?*

....

b *1 kg svinekoteletter koster 65,50 kr. Hva koster 0,76 kg?*

....

c *12 meter gardinstoff blir målt opp i lengder på 0,4 meter. Hvor mange lengder får vi?*

....

18 Skriv riktig tall i rutene

a $14 : 2 = \boxed{} \cdot 14$

b $14 : \boxed{} = 0{,}25 \cdot 14$

19 En bestemt type penner koster 15 kr for hver.

a Hvor mange kan du kjøpe for 200 kr?

b Hvor mye vekslepenger får du da tilbake?

20 Når 10 blir lagt til 5 ganger et tall er summen 40. Finn tallet!

21 Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gamle er de?

Vis hvordan du kom fram til svaret ditt:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

22 Lag din egen fortelling som passer til dette regnestykket:

$$\boxed{\mathbf{18 : 4{,}5 = 4}}$$

Din regnefortelling:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

23 Per har 156 frimerker. Eva og Per har 218 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva?

Regn her:

24 3 penner koster 27 kroner. Hvor mye koster 7 penner?

Regn her:

25 Skriv rett tall i rutene

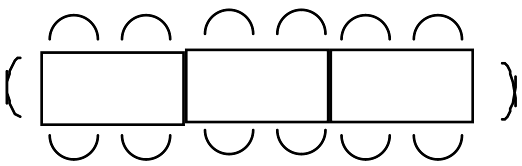
a $3 \cdot 2 + 6 = \boxed{}$

b $3 \cdot 2 + \boxed{} = 12$

c $\boxed{} \cdot 2 + 4 = 12$

d $3 + 2 \cdot \boxed{} = 15$

26 Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:



a Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? ……………………..

b Enn om vi har 7 småbord? ……………………………...

Forklar hvordan du kom fram til svaret i **b**:

…………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………...

c Prøv om du kan lage en regel som forteller hvor mange stoler det blir plass til rundt bordet, når vi vet hvor mange småbord det er.

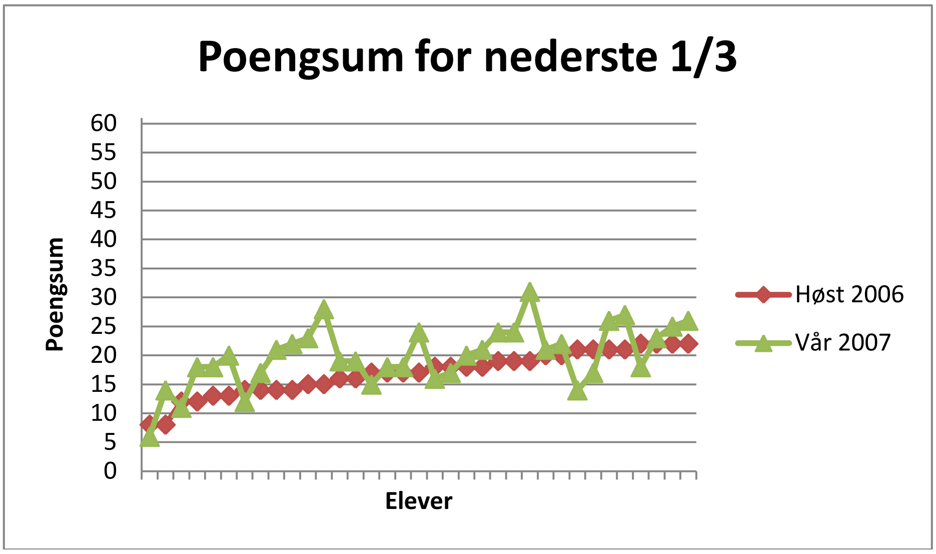
……………………………………………………………………………………

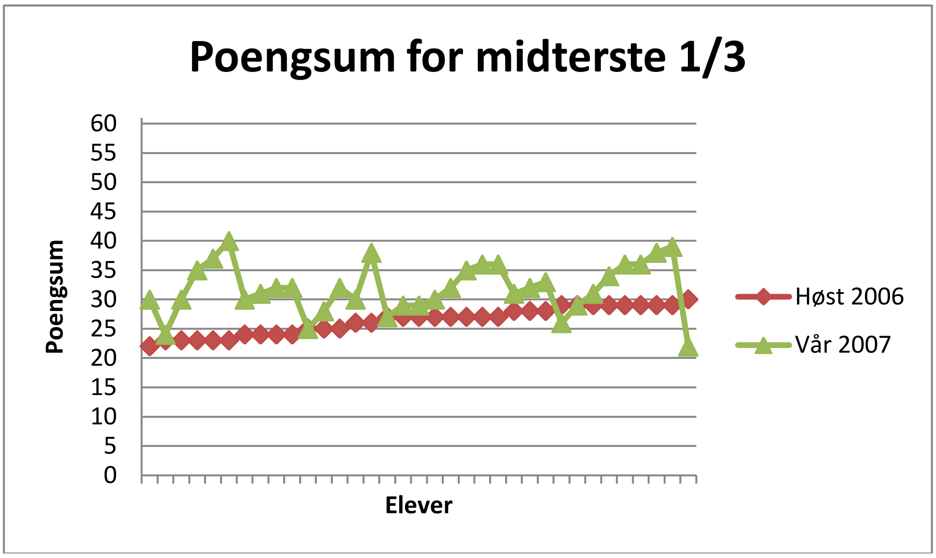
……………………………………………………………………………………

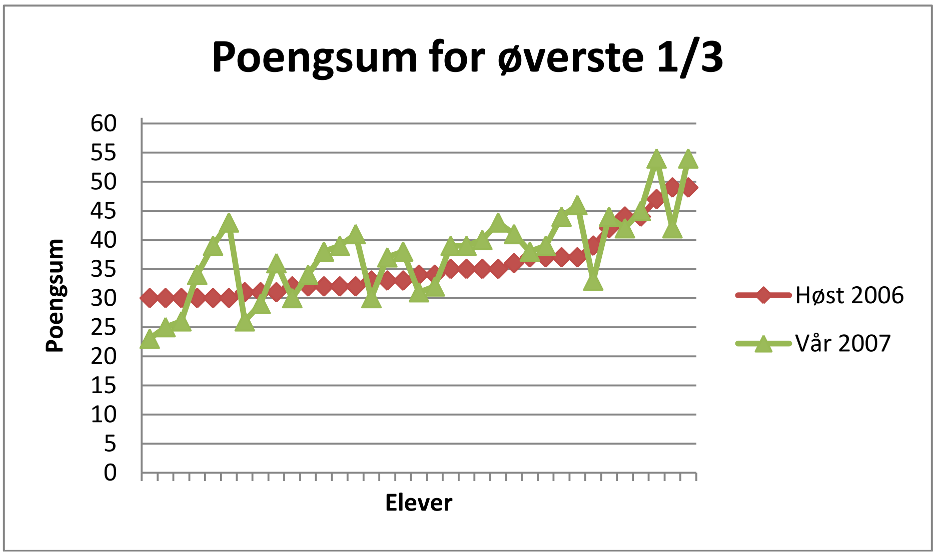
Vedlegg 2.2

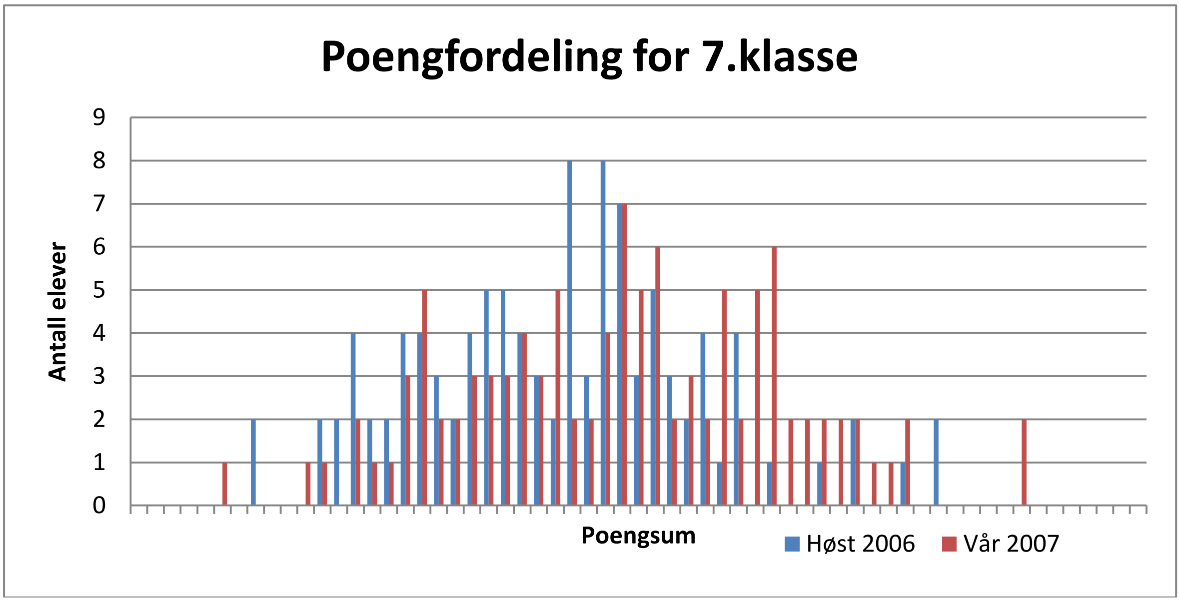
Test år	Elevgruppe	N	Minimum	Maximum	Gjennom-snitt	Standard-avvik
Høst 2006	Alle	105	8	49	26,2	8,6
Vår 2007	Alle	105	6	54	29,8	9,4
Høst 2006	Nederste 1/3	35	8	22	16,9	3,8
Vår 2007	Nederste 1/3	35	6	31	19,9	5,2
Høst 2006	Midterste 1/3	35	22	30	26,3	2,3
Vår 2007	Midterste 1/3	35	22	40	31,9	4,3
Høst 2006	Øverste 1/3	35	30	49	35,4	5,5
Vår 2007	Øverste 1/3	35	23	54	37,5	7,3

Vedlegg 2.3

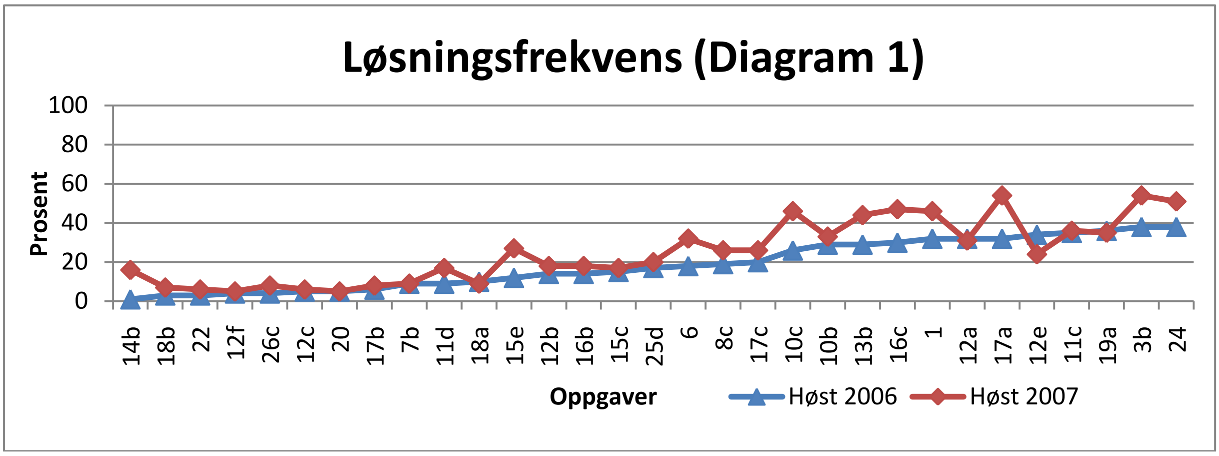

Poengsum for nederste 1/3
Poengsum
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Elever
Høst 2006
Vår 2007

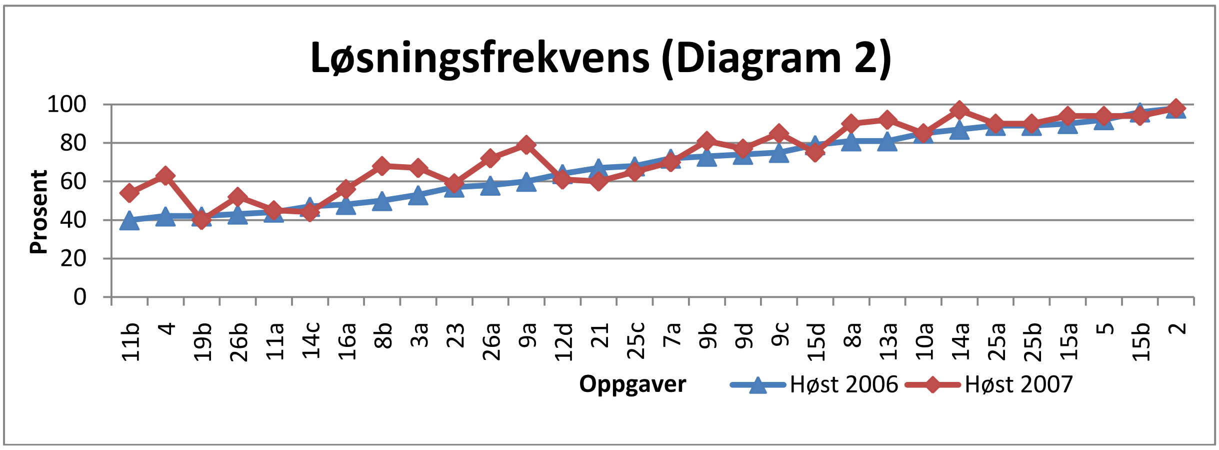

Poengsum for midterste 1/3
Poengsum
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Elever
Høst 2006
Vår 2007


Poengsum for øverste 1/3
Poengsum
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Elever
Høst 2006
Vår 2007


Poengfordeling for 7.klasse
Antall elever
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Poengsum
Høst 2006
Vår 2007

Vedlegg 2.4


Løsningsfrekvens (Diagram 1)
Prosent
100
80
60
40
20
0
14b 18b 22 12f 26c 12c 20 17b 7b 11d 18a 15e 12b 16b 15c 25d 6 8c 17c 10c 10b 13b 16c 1 12a 17a 12e 11c 19a 3b 24
Oppgaver
Høst 2006
Høst 2007


Løsningsfrekvens (Diagram 2)
Prosent
100
80
60
40
20
0
11b 4 19b 26b 11a 14c 16a 8b 3a 23 26a 9a 12d 21 25c 7a 9b 9d 9c 15d 8a 13a 10a 14a 25a 25b 15a 5 15b 2
Oppgaver
Høst 2006
Høst 2007

Vedlegg 2.5

1	Hva betyr 8,7? (Kryss av det beste av følgende svar.) Åttisju Åtte sjudeler Åttehundreogsju Åtte og en sjudel Sju åttedeler Åtte og sju tideler Ingen av disse, jeg tror 8,7 betyr………		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	3	2
1	Åtte og sju tideler (Rett)	32	46
11	Feil	65	52
Total		100	100

2	Sett ring rundt det største tallet. 5436 547 56 976		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	0	1
1	5436 (Rett)	98	98
11	Feil	2	1
Total		100	100

3a	Sett ring rundt det største av de tre tallene: 0,62 0,236 0,4		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	0,62 (Rett)	53	67
11	Feil	47	33
Total		100	100

3b	Hvordan vet du at det er det største? ……………………..		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	31	24
1	Riktig forklaring (Rett)	38	54
11	Feil	31	22
Total		100	100

4	Sett ring rundt det minste av disse fem talla: 0,625 0,25 0,3753 0,125 0,5		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	0	1
1	0,125 (Rett)	42	63
12	0,5	27	19
13	0,25	16	8
14	0,3753	14	9
15	0,625	1	0
Total		100	100

5	Hvilket siffer står på tierplassen i 3142? (Sett ring rundt svaret) 3 1 4 2		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
1	4 (Rett)	92	94
11	Feil	8	6
Total		100	100

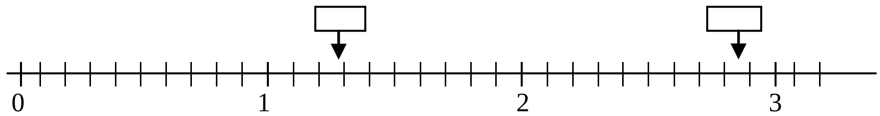
6	Hva betyr sifferet 7 i 0,573? (Sett ring rundt svaret) 7 tideler 7 hundredeler 7 tusendeler		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	2	0
1	7 hundredeler (Rett)	18	32
11	Feil	80	68
Total		100	100

7a	Skriv riktig tall i rutene $574 = 5 \cdot 100 + \square \cdot 10 + 4 \cdot 1$		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	18	15
1	7 (Rett)	72	71
11	Feil	10	14
Total		100	100

7b Skriv riktig tall i rutene
5,74 = 5 · 1 + 7 · □ + 4 · □

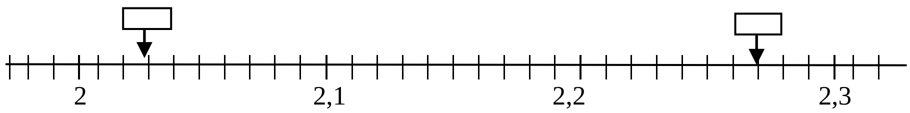
Kode	Svar	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
0	Ikke svart	25	24
1	0,1 og 0,01 (Rett)	3	4
2	Rett i første rute	6	5
12	1 og 1	21	15
13	10 og 1	33	43
14	7 og 1	3	0
20	Andre svar	9	9
Total		100	100

8a Les av på følgende skalaer og skriv det rette tallet i ruten.
Gi alle svarene som desimaltall.



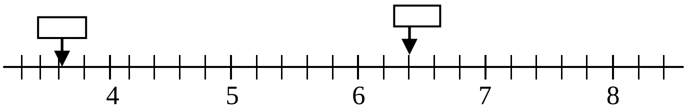
Kode	Svar	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
0	Ikke svart	3	0
1	1,3 og 2,85 (Rett)	19	27
2	Rett i første rute	59	61
3	Rett i andre rute	3	2
11	Feil	16	10
Total		100	100

8b Les av på følgende skalaer og skriv det rette tallet i ruten.
Gi alle svarene som desimaltall.



Kode	Svar	Frekvens i prosent Høst 2006	Frekvens i prosent Vår 2007
0	Ikke svart	5	5
1	2,03 og 2,27 (Rett)	26	42
2	Rett i første rute	6	12
3	Rett i andre rute	18	13
11	Feil	45	28
Total		100	100

8c Les av på følgende skalaer og skriv det rette tallet i ruten.
Gi alle svarene som desimaltall.



Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	4	7
1	3,6 og 6,4 (Rett)	11	19
2	Rett i første rute	2	3
3	Rett i andre rute	6	4
11	Feil	77	67
Total		100	100

9a Sett riktig tegn i rutene (< eller >).
$\frac{7}{8}$ □ 1

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	4	2
1	< (Rett)	60	79
11	Feil	36	19
Total		100	100

9b Sett riktig tegn i rutene (< eller >).
-5 □ -6

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	4	2
1	> (Rett)	73	81
11	Feil	23	17
Total		100	100

9c Sett riktig tegn i rutene (< eller >).
0 □ -0,4

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	4	3
1	> (Rett)	75	85
11	Feil	21	12
Total		100	100

9d	Sett riktig tegn i rutene (< eller >). 0,9 □ 0,30		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	2	2
1	< (Rett)	74	77
11	Feil	24	21
Total		100	100

10a	Regn ut: 6 · 40 = ……………..		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	3	5
1	240 (Rett)	85	85
11	Feil	12	10
Total		100	100

10b	Regn ut: 60 · 450 = …………		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	17	16
1	27000 (Rett)	29	33
11	Feil	54	51
Total		100	100

10c	Regn ut: 900 : 30 =………..		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	27	25
1	30 (Rett)	26	46
12	27000	14	6
13	300	13	8
14	2700	2	8
15	90	3	0
16	270	3	0
20	Andre svar	12	7
Total		100	100

11a	Skriv svaret: 5,1 + 0,46 = ………....		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	7	6
1	5,56 (Rett)	44	45
11	Feil	49	49
Total		100	100

11b	Skriv svaret: 37 – 0,16 = ………....		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	18	16
1	36,84	40	54
11	Feil	42	30
Total		100	100

11c	Skriv svaret: 4 · 2,4 = ………....		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	12	18
1	9,6 (Rett)	35	36
11	Feil	53	46
Total		100.0	100.0

11d	Skriv svaret: 0,12 : 2 =…………..		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	29	29
1	0,06 (Rett)	9	17
12	0,6	47	46
13	6	3	4
14	0,24	3	1
20	Andre svar	9	3
Total		100	100

12a	Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar. 8 · 0,5 =……….		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	13	23
1	4 (Rett)	32	31
11	Feil	55	46
Total		100	100

12b	Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar. 6 : 12 =…………….		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	17	19
1	0,5 (Rett)	14	18
12	2	29	30
13	Nei	29	28
14	6	3	1
20	Andre svar	8	4
Total		100	100

12c	Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar. 4 : 0,5 =…………….		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svar	29	34
1	8 (Rett)	5	6
12	Nei	40	34
13	2	8	5
14	4	1	3
15	0,1	5	2
16	1	3	2
20	Andre svar	9	14
Total		100	100

12d	Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar. 12 : 3 =…………….		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	20	23
1	4 (Rett)	64	60
11	Feil	16	17
Total		100	100

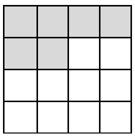
12e Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall. Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar.
0,5 · 8 =…………….

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	18	31
1	4 (Rett)	34	24
11	Feil	48	45
Total		100	100

12f Skriv ned hvert svar. Gi det som desimaltall.
Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar.
0,8 : 0,2 =…………….

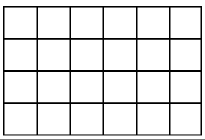
Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svar	25	37
1	4 (Rett)	4	5
12	0,4	45	41
13	0,16	2	2
14	Nei	20	10
20	Andre svar	4	5
Total		100	100

13a Hvor stor del av hele figuren er grå? ……………….



Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	2	2
1	6/16 eller 3/8 (Rett)	81	92
11	Feil	17	6
Total		100	100

13b Skyggelegg (skraver) $\frac{5}{8}$ av figuren.



Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	6	3
1	Skyggelegger 15 ruter (Rett)	29	44
11	Feil	65	53
Total		100	100

14a	Regn ut: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	4	1
1	5/7 (Rett)	87	97
11	Feil	9	2
Total		100	100

14b	Regn ut: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	26	29
1	1/6 (Rett)	1	16
12	0/1	17	8
13	1/1	10	8
14	5/6	0	9
15	2/5	8	2
16	2/3	4	5
17	0/3	7	1
18	0/2	3	4
19	0/5	5	2
20	Andre svar	19	16
Total		100	100

14c	Regn ut: $4\cdot\frac{1}{3}=$		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	22	21
1	$\frac{4}{3}$ (Rett)	47	44
11	Feil	31	35
Total		100	100

15a	Hva er det neste tallet? 3, 6, 9, 12, □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	0	1
1	15 (Rett)	91	94
11	Feil	9	5
Total		100	100

15b	Hva er det neste tallet? 20, 18, 16, 14, □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	1	2
1	12 (Rett)	96	94
11	Feil	3	4
Total		100	100

15c	Hva er det neste tallet? 3, 4, 7, 11, □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	24	14
1	18 (Rett)	15	17
12	12	1	5
13	13	8	9
14	14	6	4
15	15	12	5
16	16	34	42
20	Andre svar	0	4
Total		100	100

15d	Hva er det neste tallet? 31, 37, 43, □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	9	9
1	49 (Rett)	79	75
11	Feil	12	16
Total		100	100

15e	Hva er det neste tallet? 3, 9, 27, □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	37	36
1	81 (Rett)	11	18
2	243 (Rett)	2	9
11	Feil	50	37
Total		100	100

16b	Sett ring rundt alle regneuttrykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). For 7 lodd må du betale 35 kroner. Hvor mye koster ett lodd? 35 · 7 35 : 7 7 : 35 7 · 35 35 – 7 7 + 35		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	5	5
1	35 : 7 (Rett)	48	56
11	Feil	47	39
Total		100	100

16b	Sett ring rundt alle regneuttrykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 24 halsbånd pakkes i eske. Om 24 halsbånd veier 3 kg, hvor mye veier da ett halsbånd? 24 · 3 24 : 3 3 : 24 3 · 24 24 – 3 3 + 24		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	10	6
1	3 : 24 (Rett)	14	18
12	24 : 3	50	51
13	24 : 3 og 3 : 24	10	15
14	24 · 3 eller 3 · 24	7	4
15	24 - 3	2	1
20	Andre svar	7	5
Total		100	100

16c	Sett ring rundt alle regneuttrykkene som passer til regneoppgaven: (Du skal ikke regne ut svaret). 1 kg pølser koster 49,50 kr. Per kjøper 1,7 kg. Hvor mye koster det? 49,50 · 1,7 49,50 : 1,7 1,7 : 49,50 1,7 · 49,50 49,50 – 1,7		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	21	12
1	49,50 · 1,7 og 1,7 · 49,50 (Rett)	8	10
2	49,50 · 1,7 eller 1,7 · 49,50	22	37
11	Feil	49	41
Total		100	100

17a	Skriv et regneuttrykk som passer for å løse oppgaven: (Du skal ikke regne det ut). Fem like flasker solbærsaft inneholder i alt 6,25 liter. Hvor mye saft inneholder hver flaske?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	17	13
1	6,25 : 5 (Rett)	32	54
12	1,25	9	3
13	5 : 6,25	12	11
14	5 * 6,25 og eller 6,25 * 5	7	6
20	Andre svar	23	13
Total		100	100

17b	Skriv et regneuttrykk som passer for å løse oppgaven: (Du skal ikke regne det ut). 1 kg svinekoteletter koster 65,50 kr. Hva koster 0,76 kg?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	39	33
1	65,50 · 0,76 (Rett)	6	8
12	65,50 : 0,76	23	35
13	1 : 0,76	3	1
14	65,50 - 0,76	4	1
15	0,76 : 65,50	2	5
20	Andre svar	23	18
Total		100	100

17c	Skriv et regneuttrykk som passer for å løse oppgaven: (Du skal ikke regne det ut). 12 meter gardinstoff blir målt opp i lengder på 0,4 meter. Hvor mange lengder får vi?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	31	34
1	30 lengder (Rett)	20	26
11	Feil	49	40
Total		100	100

18a	Skriv riktig tall i rutene 14 : 2 = □ · 14		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	22	26
1	0,5 (Rett)	11	12
12	2	15	16
13	7	42	38
14	- 2	0	3
20	Andre svar	10	5
Total		100	100

18b	Skriv riktig tall i rutene 14 : □ = 0,25 · 14		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	47	62
1	4 (Rett)	4	8
12	7	5	5
13	2	9	1
14	0,25	11	10
15	3,5	4	3
16	28	3	1
20	Andre svar	17	10
Total		100	100

19a	En bestemt type penner koster 15 kr for hver. Hvor mange kan du kjøpe for 200 kr?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	11	13
1	13 penner (Rett)	36	35
11	Feil	53	32
Total		100	100

19b	Hvor mye vekslepenger får du da tilbake?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	22	26
1	5 kr (Rett)	31	29
2	Rett i 19b, men galt svar i 19a	11	11
11	Feil	36	34
Total		100	100

20	Når 10 blir lagt til 5 ganger et tall er summen 40. Finn tallet!		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	44	46
1	6 (Rett)	5	5
12	50	16	10
13	- 10	7	3
14	8	7	8
15	4	6	7
16	10	1	3
20	Andre svar	14	18
Total		100	100

21	Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gammel er Ole, og hvor gammel er Petter? Regn eller forklar her:		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	10	16
1	Rett svar med forklaring (Rett)	46	44
2	Rett svar uten forklaring	21	16
11	Feil	23	24
Total		100	100

22	Lag din egen fortelling som passer til dette regnestykket: 18 : 4,5 = 4 Din regnefortelling: …………………………………………………………………		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	39	40
1	Riktig målingsdivisjon (Rett)	3	5
12	Urealistisk tall eller kontekst	10	9
13	Konteksten er et regnestykke på skolen	4	3
14	Deler ”4,5 ganger”	22	17
15	Delingsdivisjon der en person får en halvdel av det de andre får	9	4
16	Subtraksjonsfortelling eller multiplikasjon	0	1
17	Omvendt deling… delingsdivisjon	4	1
20	Andre svar	9	20
Total		100	100

21	Per har 156 frimerker. Eva og Per har 218 frimerker til sammen. Hvor mange har Eva? Regn her:		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	14	14
1	62 frimerker (Rett)	56	59
2	156 + 62 = 218	1	0
11	Feil	29	27
Total		100	100

24	3 penner koster 27 kroner. Hvor mye koster 7 penner?		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	26	23
1	63 kroner (Rett)	38	51
11	Feil	36	26
Total		100	100

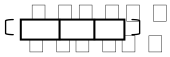
25a	Skriv rett tall i ruten: 3 · 2 + 6 = □		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	8	9
1	12 (Rett)	89	90
11	Feil	3	1
Total		100	100

25b	Skriv rett tall i ruten: 3 · 2 + □ = 12		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	8	9
1	6 (Rett)	89	90
11	Feil	3	1
Total		100	100

25c	Sett rett tall i rutene □ · 2 + 4 = 12		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	15	18
1	4 (Rett)	68	65
11	Feil	17	17
Total		100	100

25d	Sett rett tall i rutene. 3 + 2 · □ = 15		
		Frekvens i prosent	
Kode	Svar	Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	14	21
1	6 (Rett)	17	20
12	2	0	1
13	3	49	41
14	5	9	3
15	9	1	4
16	10	8	7
20	Andre svar	2	3
Total		100	100

26a Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:



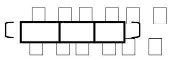
Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord?

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	8	3
1	18 stoler (Rett)	58	72
11	Feil	34	25
Total		100	100

26b Enn om vi har 7 småbord?...........
Forklar hvordan du kom fram til svaret i b: ....

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	12	7
1	Rett svar med forklaring (Rett)	38	46
2	Rett svar uten forklaring	5	6
11	Feil	45	41
Total		100	100

26c Et bord er satt sammen av småbord, og rundt er det satt stoler slik:



Prøv om du kan lage en regel som forteller hvor mange stoler det blir plass til rundt bordet, når vi vet hvor mange småbord det er.

Kode	Svar	Frekvens i prosent	
		Høst 2006	Vår 2007
0	Ikke svart	40	47
1	4*x+2 (Rett)	4	8
11	Feil	56	45
Total		100	100