EIRIK FALK

Nasjonal prøve i 1MX våren 2005

– et lærerperspektiv

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Høgskolen i Agder

Fakultet for realfag
Institutt for matematiske fag

2006

Forord

”Eh, javel… Matte og tysk?!” Det spørsmålet har jeg fått mange ganger. Fagkombinasjonen er visstnok uvanlig. I løpet av matematikkdidaktikkstudiene ved HiA og årene ved kateteret har jeg gradvis blitt i bedre stand til å besvare spørsmålet. Matematikk og tysk har mange likhetstrekk. Konvensjoner, regler, nyanser, systematikk og grammatiske spissfindigheter karakteriserer begge fagene. ”Vent litt, grammatikkbegrepet har da ingenting med matematikk å gjøre?” Jo, det er nettopp det det har. Matematikken har sin egen effektive grammatikk. Og ikke nok med det. I begge fagene kan jeg uttrykke konsise meninger, ideer og komplekse historier kun med utgangspunkt i en endelig mengde meningsbærende enheter. Utfordringen er å sette sammen disse enhetene i samsvar med spillereglene slik at de uttrykker det jeg ønsker. Likheten mellom fagene er opplagt. Samtidig er de svært forskjellige.

Mine 1MX-elever hadde nasjonal prøve den 15. april 2005. Mot slutten av et hektisk skole- og studieår skulle jeg plutselig sette meg inn i tankegodset bak en ny prøvetype. Fra kurset i forkant husker jeg vagt at det ble listet opp en rekke matematiske delkompetanser. Dette kom brått på, og jeg skal være den første til å innrømme at de såkalte kompetanseområdene ikke ga meg veldig mye. I hvert fall ikke der og da.

Min MERG-artikkel (*Mathematics Education Research Group*) i kurset *læring og undervisning av matematikk* hadde tittelen ”elevens hverdagsspråk møter algebraens symbolspråk – en klasseromsgransking”. Det var under arbeidet med denne oppgaven at min interesse for det matematiske symbolspråket – og dermed *representasjoner, symbolisme og formalisme* – virkelig våknet til liv. Med den nasjonale prøven friskt i minne var det derfor ikke spesielt vanskelig å velge emne for dette masterarbeidet.

I et forord skal man gjerne takke dem som har vært til hjelp og støtte underveis. Naturlig nok faller det meste av takken til min dyktige veileder Otto B. Bekken. Han har alltid vært tilgjengelig og imøtekommende, og underveis har han kommet med mange viktige innspill og fruktbare ideer. Han er svært nøyaktig og stiller høye krav. Jeg har også alltid stilt høye krav til meg selv. *Ordnung muss sein*. Kanskje nettopp derfor har vi hatt et utmerket samarbeid!

Jeg vil også rette en stor takk til lærerne ved Soltoppen videregående skole som velvillig stilte opp til intervjuer både en og to ganger. Avdelingsleder for realfag skal også ha takk for å ha skaffet til veie og latt meg bruke elevenes besvarelser. Videre vil jeg takke mine medstudenter ved HiA for et godt faglig og sosialt samarbeid disse årene. Bård Vinje ved Matematikk-senteret og Peter Gustafsson ved opplysningstjenesten til Skolverket i Sverige har vært behjelpelige med dokumenter og øvrig informasjon via e-post.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke familie og venner for den støtten som ikke har vært av faglig art, men som likevel har vært så utrolig viktig. Spesielt vil jeg takke Lene som i over tre år har måttet godta at samboerens bestevenn heter Acer og er en bærbar datamaskin.

Kristiansand, 10. november 2006

Eirik Falk

Eirik Falk

Sammendrag

Oppgaven dreier seg om den nasjonale prøven i matematikk 1MX som ble gjennomført den 15. april 2005. Fokus er rettet mot de oppgavene i prøvesettet som hadde til hensikt å måle elevens kompetanse innenfor *representasjoner, symbolbruk og formalisme* (RSF). Seksti besvarelser fra en allmennfaglig videregående skole utgjør det empiriske materialet. I tillegg er elevenes lærere intervjuet.

Jeg legger vekt på å belyse det *faglige* tankegodset som ligger til grunn for de nasjonale prøvene. Det overordnede målet er å studere, vurdere og synliggjøre den didaktiske informasjonen som prøven genererer for den praktiserende læreren. Videre ser jeg nærmere på hvordan lærerne opplevde og nyttiggjorde seg prøven.

Kapittel 2 tar for seg den politiske og ikke minst didaktiske bakgrunnen for prøvene. Inspirert av det teoretiske grunnlaget for KOM og PISA har man delt matematisk kompetanse inn i delkompetanser. Denne kompetansetenkningen er essensiell i både utvikling, gjennomføring og vurdering av prøvene. Hensikten med å peke ut og fokusere på delkompetanser er at prosessdimensjonen i elevens læring skal bli mer framtredende. I denne sammenheng ser jeg nærmere på noen oppfatninger av kompetansebegrepet i matematikken generelt og i de nasjonale prøvene spesielt. Noe av kritikken mot selve prøvene og gjennomføringen av disse tas også med for å sette de nødvendige rammene for fortsettelsen av oppgaven. I kapitlet kommer det blant annet fram at prøvene opprinnelig var tenkt å ha et betydelig større omfang enn det som det til slutt endte opp med.

I kapittel 3 og 4 går jeg nærmere inn på henholdsvis konteksten og de anvendte metodene i arbeidet. Skolen har i underkant av 600 elever, ligger sentrumsnært i en større by i Norge og har lange tradisjoner som byens realskole og gymnas, noe som også gjenspeiles i dagens elevmasse. Arbeidet er utført innenfor den etnografiske tradisjonen av kvalitativ forskning, og det er tatt sikte på å få innsikt i elevenes forståelse av ulike matematiske begreper.

Kapittel 5 utgjør et overordnet teoretisk grunnlag for resten av oppgaven. Her kastes lys over ulike sider ved det matematiske symbolspråket. Jeg ser nærmere på den historiske utviklingen fra numerisk til symbolsk algebra og relaterer denne til elevenes kognitive utvikling. Videre går jeg inn på noen av bokstavenes mange roller i matematikken og elevenes oppfatninger av disse ulike rollene.

I kapittel 6 foretar jeg en systematisk og spesifikk gjennomgang av de åtte RSF-oppgavene i prøvesettet. Ledsaget av didaktisk teori og forskning går jeg nærmere inn på de konkrete matematiske utfordringene og dermed de typiske misoppfatningene som disse kan avdekke. Sentralt her er blant annet Sfards prosess-objekt-teori, Janviers representasjon av ulike oversettelsesprosesser i funksjonslæren og Pimms tredeling av skriftlige uttrykksformer i matematikk.

Alt dette danner basis for kapittel 7 der analysen av elevenes besvarelser presenteres og relateres til teorien i de to foregående kapitlene. Her foreslår jeg også noen undervisnings-aktiviteter som kan bidra til å overvinne noen av de påviste misoppfatningene. I dette kapitlet trekkes også de viktigste aspektene fra lærerintervjuene fram.

Deretter trekkes konklusjoner fra arbeidet i kapittel 8, før det avslutningsvis vises til noen pedagogiske implikasjoner i kapittel 9.

Summary

The thesis is based on the National Test in Mathematics 1MX which took place on April 15th 2005. The main focus is on the tasks in the test paper which tested the pupils' ability with respect to *representations, symbols and formalism* (RSF). The empirical material consists of sixty answer papers from an upper secondary school. In addition, the pupils' teachers have been interviewed.

I am concerned to highlight the subject-related conceptions on which the National Tests were based. The prime aim is to study, evaluate and highlight the didactic information which the tests provide for the practising teacher. Furthermore I discuss how the teachers experienced the test and to what extent it proved useful to them.

Chapter 2 explores the political and above all the didactic background for the tests. The theoretical basis for KOM and PISA has provided the impetus for the division of mathematical competence into sub-categories. This conception of competence is essential to the development, execution and evaluation of the tests. The focus on sub-categories of competence is intended to facilitate a better understanding of the pupils' learning processes. In this respect I examine several understandings of the term *competence* in mathematics in general and in the National Tests in particular. In order to provide the necessary framework for the rest of the thesis, some of the criticism of the National Tests and the way in which they were executed has also been included. In this chapter it emerges, for example, that the National Tests were originally intended to have a considerably greater scope than that of the tests that were finally given.

In Chapters 3 and 4 I present the context and the research methods employed in this thesis. The school has almost 600 pupils, is situated in a large town in Norway and has a long tradition as the town's most prestigious secondary school. The present body of pupils at the school reflects this fact. The research has been carried out within the ethnographic tradition of qualitative research and aims to gain insight into the pupils' understanding of various mathematical concepts.

Chapter 5 explores the wider theoretical basis for the rest of the thesis. In this chapter various aspects of the symbolic language of mathematics are focused on. I look more closely at the historical development from numerical to symbolical algebra and relate this to the pupils' cognitive development. Moreover I look into some of the letters' many roles in mathematics and the pupils' conception of these.

In Chapter 6 I undertake a systematic and specific study of the eight RSF-tasks in the test paper. I examine the various mathematical challenges, and therefore also the typical misconceptions that can occur, in light of didactic theory and practice. Sfard's process-object-theory, Janvier's representation of various translation processes within functions and Pimm's threefold division of written forms of expression in mathematics are central to this discussion.

The above form a basis for Chapter 7, where the analysis of the pupils' answer papers is presented and related to the theory of the two previous chapters. I also suggest various classroom activities which can help overcome some of the proven misconceptions. This chapter also includes the most important conclusions from the interviews with the teachers.

Subsequently conclusions are drawn from the work in Chapter 8 and finally several pedagogical implications are discussed in Chapter 9.

INNHOLD

1 Innledning

Innføringen av nasjonale prøver i Norge våren 2005 skapte til dels heftig debatt. Det meste av oppmerksomheten fra media dreide seg om hvorvidt resultatene fra prøvene skulle offentliggjøres eller ei. Man fryktet hvilke følger en nasjonal skolerangering kunne få. Dette resulterte i høylytte protester og mer eller mindre omfattende boikott av flere av prøvene. Faglige innspill og didaktiske vurderinger av selve prøvene var sjeldnere å finne i nyhetsoppslagene.

I dette masterarbeidet vil vi derfor belyse det *faglige* tankegodset som ligger til grunn for de nasjonale prøvene i matematikk. Det overordnede målet er å studere, vurdere og synliggjøre den didaktiske informasjonen som prøven genererer for læreren. Slik ønsker vi å få økt innsyn i den enkelte elevens tenkning, noe som bidrar til å styrke mulighetene for individuelt tilpasset og meningsfull læring.

1.1 Tematisk avgrensning

På grunnlag av rapporten *Kompetencer og matematiklæring* (Niss & Jensen 2002) valgte man å utvikle de nasjonale prøvene i matematikk på basis av fire såkalte kompetanseområder. Til sammen hadde disse til hensikt å måle elevens *helhetlige kompetanse*. I dette arbeidet er fokus rettet mot det ene av disse; *representasjonskompetanse og kompetanse i symbolbruk og formalisme* (RSF). Vi ønsker å få svar på (noen av) følgende spørsmål:

- Hva er den fagdidaktiske bakgrunnen for de nasjonale prøvene?
- Hvilke typiske (mis)oppfatninger avdekker prøven innenfor kompetanseområdet RSF? Hva kan disse skyldes?
- Hvilken tilbakemelding får eleven om sin kompetanse i matematikk?
- Hvordan oppleves den nasjonale prøven for den praktiserende læreren?
- Hvordan bruker læreren den informasjonen som den nasjonale prøven framskaffer?

Seksti besvarelser fra grunnkursnivå ved en allmennfaglig videregående skole utgjør hoveddelen av det empiriske materialet. Disse besvarelsene er vurdert i henhold til retningslinjene for nasjonale prøver, og de faller innenfor tre nivåer (tjue på nivå 3, tjue på nivå 4 og tjue på nivå 5) i kompetanseområdet RSF. Det er også gjennomført intervjuer med elevenes lærere.

I arbeidet har vi brukt kvalitative metoder. Det er den enkelte elevens besvarelse og tankegang som er av størst interesse. I oppgaveanalysen har vi likevel tatt med kvantifiserende søylediagrammer. Dette er primært gjort for å skape orden og struktur i framstillingen før fokus rettes mot den enkelte elevens konkrete besvarelse. Samtidig er disse diagrammene velegnede for å presentere tendenser i de seksti besvarelsene. I et større perspektiv derimot finnes det analyserapporter som er bedre egnet dersom det er rent kvantitative opplysninger man er på utkikk etter (se for eksempel Lie et al. 2005).

I et arbeid som dette er det ikke rom for alltid å gå like detaljert til verks. Underveis må man gjøre mange valg. Det vil for eksempel ikke foreslås undervisningsaktiviteter i etterkant av alle oppgavene. Videre er det ikke muligheter for å kommentere alle elevsvarene. Det er derfor lagt vekt på å trekke fram de forholdene som har størst didaktisk nytteverdi for læreren.

Det er ikke et artikulert mål å vurdere selve oppgaveteksten i seg selv. Ved enkelte anledninger er det likevel på sin plass med noen kommentarer i denne sammenhengen. Hensikten er primært å se hvilke typiske oppfatninger de vedtatte oppgavene er i stand til å avdekke.

1.2 Hvorfor akkurat dette emnet?

Jeg har selv undervist matematikk 1MX på grunnkurs i videregående skole hvert år siden 2003/2004. Parallelt med dette har jeg studert matematikkdidaktikk. Denne kombinasjonen av teori og praksis har vært meget lærerik, og mange didaktiske spørsmål har fanget min interesse. Som tysklærer er jeg opptatt og fascinert av språk og grammatikk. Summen av dette har vekket en spesiell interesse for det matematiske symbolspråket og dets grammatikk.

I kurset *læring og undervisning av matematikk* fikk jeg anledning til å studere åttendeklassingers første møte med bokstaver i matematikken. Dette resulterte i MERG-artikkelen (*Mathematics Education Research Group*) "elevens hverdagsspråk møter algebraens symbolspråk – en klasseromsgransking". Denne studien kastet lys over mange interessante aspekter ved elevens oppfatning av og forståelse for matematisk språk og grammatikk. Samtidig reiste den mange nye spørsmål. Denne masteroppgaven er et forsøk på å få svar på noen av disse.

Den 15. april 2005 hadde mine egne grunnkurselever nasjonal prøve i matematikk. Slik var jeg med gjennom hele prosessen: opplæring fra en "ekspertvurderer" etterfulgt av selve vurderingen av besvarelsene, tilbakemelding til elevene samt den omstridte innrapporteringen av resultater.

Innføringen av nasjonale prøver markerte noe nytt i skole-Norge. Målet er at de skal bli en læringsstøttende og naturlig del av den framtidige skolen i Kunnskapsløftet. For en praktiserende lærer er det derfor essensielt å sette seg inn i det didaktiske tankegodset som ligger til grunn for prøvene. Samtidig er det viktig å være kjent med utbredelsen av og innholdet i ulike misoppfatninger for å kunne forbedre undervisningen.

Det er kort fortalt min interesse for det didaktiske emnet, studiens nytteverdi og prøvenes aktualitet som ligger til grunn for valget.

1.3 Oppgavens oppbygning

Kapittel 2 tar for seg den politiske og ikke minst didaktiske bakgrunnen for de nasjonale prøvene. I denne sammenheng ser vi nærmere på noen oppfatninger av kompetansebegrepet i matematikken generelt og i de nasjonale prøvene spesielt. Noe av kritikken mot selve prøvene og gjennomføringen av disse tas også med for å sette de nødvendige rammene for fortsettelsen av oppgaven.

Deretter presenteres konteksten og anvendte metoder i forskningsarbeidet, før vi i kapittel 5 kaster lys over ulike sider ved det matematiske symbolspråket. Dette utgjør et slags overordnet teoretisk grunnlag for resten av oppgaven.

I kapittel 6 foretas en spesifikk gjennomgang av de åtte RSF-oppgavene i prøvesettet. Ledsaget av didaktisk teori og øvrig forskning ser vi nærmere på de konkrete matematiske utfordringene som elevene stod ovenfor den 15. april 2005.

Alt dette danner basis for kapittel 7 der analysen av elevenes besvarelser presenteres og relateres til teorien i de to foregående kapitlene. Her trekkes også de viktigste aspektene fra lærerintervjuene fram. Deretter trekker vi konklusjoner fra arbeidet i kapittel 8, før vi avslutningsvis viser til noen pedagogiske implikasjoner i kapittel 9.

For at teksten skal være mest mulig leservennlig, vil det ved flere anledninger underveis vises til andre steder og avsnitt i oppgaven. Dette er eksempelvis gjort på følgende måte: (se avsnitt 6.1.4 på s. 47ff.). Slike henvisninger er altså *ikke* å oppfatte som referanse til artikler eller bøker i litteraturlista.

2 Bakgrunn for nasjonale prøver

2.1 Veien fram mot nasjonale prøver

Den 5. oktober 2001 ble Kvalitetsutvalget utnevnt ved kongelig resolusjon. Dette utvalget hadde som oppgave å vurdere innhold, kvalitet og organisering av grunnopplæringen i den norske skolen. Den 14. juni 2002 avga utvalget sin delinnstilling, *førsteklasses fra første klasse*, til Utdannings- og forskningsdepartementet (UFD). Her (UFD 2002a) foreslås et rammeverk for et nasjonalt kvalitetsvurderingssystem av norsk grunnopplæring, herunder rapportering og oppfølging.

> *Å kunne dokumentere endring og framgang er helt sentralt i arbeidet med kvalitet i opplæringen. Opplæring handler om utvikling av elevens og lærlingens helhetlige læringsutbytte* (UFD 2002a:24).

Med det *helhetlige læringsutbyttet* mener man både både kunnskaper, ferdigheter og holdninger. Dette er nærmere beskrevet i læreplanens generelle del, innført av Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (KUF) i september 1993 og videreført av Kunnskapsdepartementet (KD) i Kunnskapsløftet. Her gir man en karakteristikk av det meningssøkende, det skapende, det arbeidende, det allmenndannede, det samarbeidende, det miljøbevisste og det integrerte mennesket (KUF 1993, 1996:9-51 og KD 2006a:11-30).

I delinnstillingen kommer utvalget fram til følgende konklusjoner (UFD 2002a:17):

- *Det mangler systematiserte data på resultater i opplæringen i en slik form at lærested er og skoleeiere kan nyttiggjøre seg disse.*
- *Læresteder og skoleeiere tar ikke systematisk i bruk kartleggings- og læringsstøttende prøver.*
- *Det mangler redskaper som kan gi skoleeierne bedre muligheter for å vurdere resultater og prosesser i opplæringen.*
- *Det mangler oppfølging fra mange skoleeiere på den skolebaserte og lærebedriftsbaserte vurderingen.*
- *Norge er ett av få land i Vest-Europa som mangler et nasjonalt system for kvalitetsvurdering i grunnopplæringen.*

På bakgrunn av disse konklusjonene foreslår utvalget blant annet at det skal gjennomføres nasjonale prøver i henholdsvis norsk, engelsk og matematikk. For grunnskolens vedkommende foreslås disse prøvene gjennomført av alle elever på 2., 4. og 9. klassetrinn (s. 27). I den videregående opplæringen ønsker man å ta hensyn til at elevene har avsluttende eksamen i eksempelvis matematikk etter første årstrinn. Derfor vil utvalget at de nasjonale prøvene på videregående nivå gjennomføres året etter, altså i 2. årstrinn (s. 29). På dette tidspunktet vil elevene, i følge Kvalitetsutvalget, i større grad oppleve prøven som viktig, noe som er av betydning for resultatenes gyldighet (s. 29). Det påpekes videre at prøvene skal tilrettelegges på en slik måte at de ses i sammenheng med de internasjonale prosjekter Norge til enhver tid deltar i. Slik kan en internasjonal undersøkelse i et fag erstatte den nasjonale prøven (s. 29). Prøvene skal primært kunne dekke to hovedformål. De skal tjene som redskap for skolevurdering, og de skal gi eleven tilbakemelding på faglig nivå og læringsutbytte (s. 24f.).

I Stortingsproposisjon nummer 1, tillegg nummer 3 (2002-2003), *nasjonalt system for kvalitetsvurdering i grunnopplæringen*, slutter UFD seg til forslaget i Kvalitetsutvalgets delinnstilling om å utvikle nasjonale prøver. Her (UFD 2002b:4) grunngis dette blant annet med at *tradisjonelle eksamensresultater ikke gir et godt nok mål for læringsutbytte*. Dessuten gir ikke denne avsluttende vurderingen grunnlag for å iverksette kvalitetsforbedrende tiltak underveis. De nasjonale prøvene skal derfor kartlegge *elevenes helhetlige læringsutbytte* og *ikke bare elevers kunnskaper og ferdigheter i snever forstand* (s. 4). Dette inkluderer eksempelvis kartlegging av *læringsstrategier, motivasjon for og holdninger til fagene* (s. 4). Departementet stadfester videre at det er et tidkrevende arbeid å utvikle nasjonale prøver som fungerer etter hensikten. På grunnlag av erfaringer fra Sverige og England og vurderinger fra fagmiljøer i Norge, antydes våren 2004 som et realistisk og hensiktsmessig starttidspunkt for pilotering.

Den 16. januar 2003 kom Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO) med en prosjektbeskrivelse om utvikling og utprøving av nasjonale prøver i matematikk. I denne ser man for seg et prøveverktøy som består av tre komponenter (NSMO 2003:5):

i. *Delprøve basert på bruk av datamaskiner, med flervalgsoppgaver og enkeltsvar, samt holdningskartlegging*
ii. *Muntlig delprøve, gjerne i grupper, utført av faglærer*
iii. *Manuell skriftlig delprøve*

En slik tredeling er nødvendig for i best mulig grad å måle elevens matematiske kompetanse. De muntlige prøvene kan teste elevens evne til kommunikasjon, resonnement og tankegang på en måte som ikke er mulig i skriftlige prøver. I tillegg ønsker man altså å kartlegge elevens holdninger til matematikkfaget. Det understrekes igjen at det er elevens helhetlige læringsutbytte som skal vurderes. I metodebeskrivelsen (NSMO 2004a) gjentas dette slik:

> *Det er derfor et stort poeng at den nasjonale prøven i matematikk ikke skal være en ren skriftlig prøve, men en flerdelt prøve som inneholder en skriftlig del, en nettbasert del og en praktisk-muntlig prøve* (s. 1).

Den 5. juni 2003 avga Kvalitetsutvalget sin endelige innstilling, *i første rekke – forsterket kvalitet i en grunnopplæring for alle*, til UFD. Utredningen er på 304 sider og inneholder over hundre konkrete forslag om opplæringens innhold og organisering og berører både grunnskolen, videregående skole og opplæring i arbeidslivet. I innstillingen vises det blant annet til den varierende bruken av allerede eksisterende diagnostiseringsmateriale i matematikk (UFD 2003:227). For å sikre omfanget og graden av systematikk i kartleggingen vil Kvalitetsutvalget at diagnostiske og nasjonale kartleggingsundersøkelser skal erstattes av nasjonale prøver. Disse gjennomføres *for vurdering av det helhetlige læringsutbyttet med vekt på kunnskaper, ferdigheter og holdninger* (s. 227). Samtidig slås det fast at gjennomføringen av nasjonale prøver i videregående skole *skal skje på grunnkurs* – ikke i 2. årstrinn som man foreslo i delinnstillingen *førsteklasses fra første klasse*. For likevel å ivareta hensynet til avgangsfagene må prøvene finne sted *i høstsemesteret* (s. 227).

Vi vet i dag at alle prøvene på grunnkurs fant sted i vårsemesteret, 15. april for matematikkprøven sitt vedkommende. Eksamen i 1MX/1MY ble avholdt 2. juni. Tankene om å unngå "konflikt" med avsluttende eksamen ble altså ikke tatt hensyn til.

Videre vil, med den grunnopplæringsmodellen som skisseres i innstillingen, ungdomstrinnet og den videregående opplæringen i større grad være knyttet sammen. I denne forbindelse er majoriteten av utvalget av den oppfatning at behovet for den tradisjonelle avgangsprøven i basisfagene norsk, engelsk og matematikk på ungdomstrinnet er dempet:

> *Utvalget vil ellers understreke at de nasjonale prøvene langt på vei erstatter deler av hensikten med avgangsprøven. Utvalget ser det som viktig at vurderingssystemet ikke bare utvides med nye ordninger som innføring av nasjonale prøver uten at det kan få konsekvenser for andre vurderingstiltak* (s. 230).

De nasjonale prøvene er altså tiltenkt en bærende rolle i både kartlegging, vurdering og kvalitetsutvikling.

I tråd med antydningen i Stortingsproposisjon nummer 1, tillegg nummer 3 (UFD 2002b), gjennomførte skole-Norge et første forsøk med nasjonale prøver våren 2004. I matematikk hadde elevene på 4. og 10. trinn en prøve av to timers varighet. Både selve prøvene og organiseringen av disse var deretter gjenstand for evaluering. Rapporten *nasjonale prøver på prøve* (Lie et al. 2004) konkluderer med at

> *…årets nasjonale prøver på flere måter har fungert lite tilfredsstillende, og vi har av den grunn advart mot å rapportere resultatene slik det var planlagt* (s. 42).

Vi ser nærmere på denne rapporten i avsnitt 2.4.1 på s. 20f. I etterkant av pilotprøvene og evalueringen av disse kom NSMO med en revidert prosjektplan. I denne ser man seg nødt til å redusere omfanget av prøvene (NSMO 2004b:3):

> *På grunn av at det ble sett på som umulig med mange delprøver i hvert enkelt fag, har vi måttet stoppe arbeidet med de muntlig/praktiske prøvene. Prøveverktøyet vil ha disse komponentene:*
>
> *i.* *Delprøve basert på bruk av datamaskiner, med flervalgsoppgaver og enkeltsvar, samt holdningskartlegging*
> *ii.* *Manuell skriftlig delprøve*

Våren 2005 ble for første gang de nasjonale prøvene gjennomført i full skala av elever på 4., 7., 10. og 11. trinn, men *prøvene på alle trinn bestod kun av den manuelle skriftlige delprøven*. Prøveverktøyet som opprinnelig var tenkt å være tredelt, var altså blitt redusert til én del – stikk i strid med den opprinnelige intensjonen. Det ble likevel tatt sikte på at alle elever på de aktuelle klassetrinnene fra og med våren 2006 skulle gjennomføre to delprøver, en skriftlig prøve og en nettbasert prøve.

Innføringen skjedde ikke uten debatt og møtte til dels meget kraftig kritikk. Den 12. oktober 2005 forelå evalueringsrapporten *nasjonale prøver på ny prøve* (Lie et al. 2005). Rapporten konkluderer med at prøvene fremdeles ikke fungerer tilfredsstillende, og at en videreføring av nasjonale prøver med dagens retningslinjer ikke er til det beste for norsk skole (Lie et al. 2005:26). Vi kommer tilbake til denne rapporten i avsnitt 2.4.3 på s. 22f. Først er det hensiktsmessig å se nærmere på oppfatninger av hva det vil si å kunne matematikk. Dette danner en essensiell basis for det matematikkdidaktiske idégrunnlaget for de nasjonale prøvene.

Det er Utdanningsdirektoratet som har det bærende ansvaret for de nasjonale prøvene. Utvikling og utprøving av prøvene i matematikk er det NSMO ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i samarbeid med Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo og Telemarksforsking-Notodden (TFN) som står for.

2.2 *Kompetansebegrepet*

Hva vil det si å kunne matematikk? Dette spørsmålet vil kunne gi mange forskjellige svar. En skoleelev vil kanskje mene at man kan matematikk når man oppnår toppkarakter på en prøve, mens en håndverker eller en pedagog sannsynligvis vil ha en videre oppfatning. Det finnes ingen entydig og utfyllende definisjon av matematisk kompetanse. Vi vil likevel gjøre et forsøk på begrepsforklaring og -avklaring.

2.2.1 Kompetanse i MiSS-prosjektet

MiSS-utvalget (Matematikk i skole og samfunn) ble oppnevnt av KUF i februar 1995. Oppgaven var å gjennomgå matematikkundervisningen i Norge fra skolestart til universitetsnivå. Målet for arbeidet var å avdekke grunnleggende problemer og å foreslå tiltak.

I sluttrapporten fra utvalget (KUF 1997) slår man fast at ulike matematiske komponenter må knyttes sammen på en fornuftig måte for å styrke elevens og studentens matematikkunnskaper. Det er hensiktsmessig å gå videre fra den mekaniske måten faget ofte har blitt presentert på i skolen, og læreplanene må balansere ulike hensyn (s. 5):

> *Vi arbeider i dag med fem komponenter i det utvidede matematikkbegrep:*
>
> *1. problemløsning, anvendelser og modeller*
> *2. ferdigheter – med og uten hjelpemidler*
> *3. begrepsforståelse, begrunnelser og bevis*
> *4. kommunikasjon, språk og symbolbruk – notasjon og etymologi*
> *5. historie og kultur - epistemologi*

Et hovedmoment for å forbedre matematikkundervisningen er å arbeide med dette utvidede kunnskapsbegrepet for matematikkfaget, slår utvalget fast (s. 7). Dybdeforståelse for et emne er avhengig av at de fem ovennevnte komponentene virker sammen. Vi skal se at denne tankegangen også ligger til grunn for rammeverket i de nasjonale prøvene.

2.2.2 Kompetanse i KIM-prosjektet

KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen) utføres av TFN og ILS ved Universitetet i Oslo på oppdrag fra UFD. Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen.

I KIM-prosjektet (Brekke 2002a:4-9) foreslår man å betrakte matematisk kompetanse som et begrep bestående av fem komponenter: *faktakunnskap*, *ferdigheter*, *begrepsstrukturer*, *generelle strategier* og *holdninger*. Dette er den samme inndelingen som er benyttet i den engelske Cockcroft-rapporten (Cockcroft 1982:70f.).

Med *faktakunnskap* mener man definisjoner, konvensjoner og notasjoner som ikke følger av noe annet. For eksempel er 1000 kg definert som et tonn, og med det sammensatte tallsymbolet 47 mener man $4 \cdot 10 + 7$. Såkalt "tallfakta", for eksempel at $4 + 6 = 10$, hører ikke til i denne kompetansekomponenten siden dette følger logisk av forståelse for tallsystemet. Slike tallfakta hører derimot til komponenten *ferdigheter* som kan forstås som veletablerte og gjerne automatiserte prosedyrer. I tidlig skolealder driver man gjerne mengdetrening for å arbeide inn effektive framgangsmåter for eksempelvis divisjon og multiplikasjon av flersifrede tall. Med et velutviklet sett av slike og liknende ferdigheter frigjøres kapasitet til arbeid med andre og gjerne mer overordnede sider ved matematiske problemer.

Matematiske begreper eksisterer ikke isolert, men i nettverk av andre forestillinger og ideer. Disse nettverkene er i stadig utvikling. Slike *begrepsstrukturer* utgjør en viktig del av en persons matematiske kompetanse:

> *It is these which make up the substance of mathematical knowledge stored in the long term memory. They underpin the performance of skills and their presence is shown by the ability to remedy a memory failure or to adapt a procedure to a new situation* (Cockcroft 1982:71).

Spesielt i problemløsning er det essensielt å ha evne til å velge passende ferdigheter i løsningsprosessen. Brekke kaller denne evnen for *generelle strategier* (Brekke 2002a:8). Med velutviklede strategier tar eleven fatt på et problem med selvtillit og forventning om at en løsning er mulig (Cockcroft 1982:71). Den femte og siste komponenten i matematisk kompetanse er *holdninger*, i vid forstand. Med dette menes elevens og lærerens oppfatning av matematikk, undervisning og fagets rolle og egenart. I undervisningen må man ta hensyn til alle aspekter ved den matematiske kompetansen:

> *Research shows that these three elements – facts and skills, conceptual structures, general strategies and appreciation – involve distinct aspects of teaching and require separate attention. It follows that effective mathematics teaching must pay attention to all three* (Cockcroft 1982:71).

2.2.3 Kompetanseklasser i PISA

Programme for International Student Assessment (PISA) er et omfattende internasjonalt prosjekt i regi av *Organisation for Economic Cooperation and Development* (OECD). Prosjektet har til hensikt å teste kunnskapene og ferdighetene til grunnskolens avgangselever i lesing, matematikk og naturfag. I 2003 ble elever fra hele førti land testet i matematikk. Utgangspunktet for slike PISA-tester er ikke landenes konkrete læreplaner og skolefagenes pensum. På internasjonalt politisk nivå er det derimot utarbeidet et sett av kunnskaper og ferdigheter som man anser som viktige å besitte og beherske i framtiden. Det er disse politiske og matematikkfaglige vurderingene som ligger til grunn for rammeverket. PISA oppsummerer det slik:

> *Hovedmålsetningen er å fokusere på et langt bredere og mer integrert spektrum av kunnskaper, ferdigheter og holdninger enn det som har vært vanlig gjennom slike tester til nå. Derfor vil det bli lagt vekt på elevenes evne til å tolke informasjon og*

trekke slutninger på basis av allerede ervervede kunnskaper og på hvordan elevene bruker sine kunnskaper og ferdigheter i en sammenheng (PISA 2006).

Testene i PISA er altså ikke direkte knyttet opp til læreplanene i det enkelte land. Det er dette som utgjør det mest fundamentale kjennetegnet ved rammeverket, og det er på dette området PISA tydeligst skiller seg fra andre internasjonale komparative tester (OECD 2003:13f.). TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), som er et internasjonalt forskningsprosjekt om matematikk og naturfag i skolen, kan derimot karakteriseres som en læreplanbasert undersøkelse. Her står analyse av de forskjellige nivåene i læreplanen sentralt, og et av de viktigste kriteriene for utvelgelse av oppgaver er at de er relevante i forhold til hva som undervises i majoriteten av deltakerlandene (International Association for the Evaluation of Educational Achievement 2001:5). TIMSS har derfor til hensikt å teste det som kan betegnes som "skolekunnskap".

I rammeverket for PISA lister man opp åtte typer av matematisk kompetanse (OECD 1999:45) som en ønsker at elevene skal utvikle. Disse svarer alle til forskjellige mentale prosesser. Listen er relevant og ment å være passende for alle nivåer i utdanningen:

- matematisk tenkning
- matematisk argumentasjon
- matematisk modellbygging
- formulering og løsning av problemer
- bruk av ulike representasjoner i matematikk
- bruk av symboler og formelt språk
- kommunikasjon
- bruk av verktøy, for eksempel IKT i matematikk

For blant annet lettere å utvikle prøver og hensiktsmessige vurderingskriterier har man i PISA valgt å organisere testoppgavene i tre såkalte kompetanseklasser:

1. Reproduksjon, definisjoner og beregninger.
   Klassen dekker elevers bruk av faktakunnskaper, gjenkjenning av matematiske objekter og egenskaper og utføring av rutinemessige prosedyrer og standardalgoritmer.

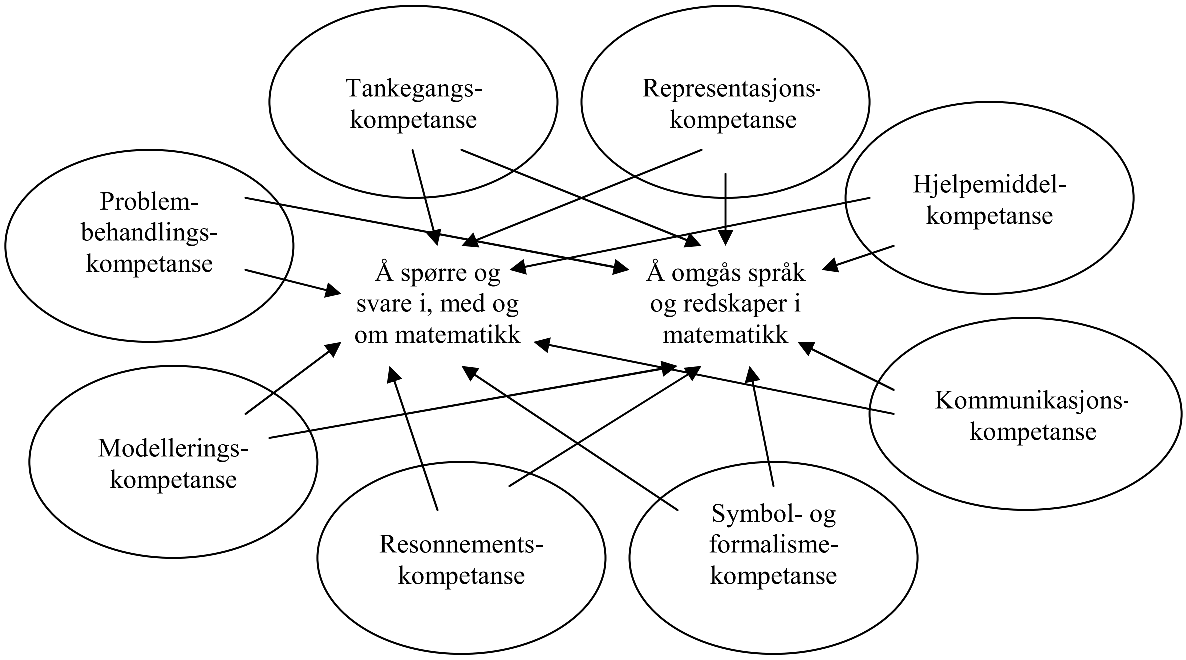
2. Se forbindelser og kunne integrere informasjon som grunnlag for problemløsning.
   Elevene skal kunne se sammenhenger mellom ulike områder av matematikken, kunne bruke ulike representasjoner, se sammenhenger mellom definisjoner, bevis, eksempler og påstander. Elevene må kunne bruke et formelt språk. Her er problemene ofte gitt i en sammenheng.

3. Matematisering, matematisk tenkning og generalisering.
   Dette er den mest omfattende klassen. Elevene stilles overfor kravet om å kunne matematisere situasjoner, det vil si komme fram til matematikken som finnes i ulike situasjoner, og å bruke det matematiske verktøyet til å løse problemer, for så å tolke svaret inn i den opprinnelige situasjonen. Slike prosesser inneholder kritisk tenkning, analyse og refleksjon.

Det er viktig å merke seg at alle åtte delkompetansene spiller en rolle i hver av disse tre kompetanseklassene. For OECD/PISA er matematisk kyndighet beherskelse av utfordringer som krever kompetanse innenfor alle tre klassene. Bredde og oversikt er derfor essensielle faktorer i matematisk kompetanse, og i prinsippet er ikke de tre kompetanseklassene å forstå som hierarkisk oppbygd. Fokus er i stor grad rettet mot prosessdimensjonen – hvordan eleven bruker sin kompetanse. Strategivalg og begrepsforståelse tillegges derfor større vekt enn det som tidligere har vært vanlig i rent svarfokuserte prøver og tester. Vi skal se at dette tankegodset også ligger til grunn for rammeverket i de nasjonale prøvene.

2.2.4 Kompetanseområdene i de nasjonale prøvene

De nasjonale prøvene har i likhet med PISA til hensikt å vurdere elevenes helhetlige matematiske kompetanse, og den enkelte elev skal få tilbakemelding på sin besvarelse blant annet i form av en såkalt kompetanseprofil. I utprøvingsåret 2004 bestod denne profilen av seks delkompetanser. Ved innføringen av nasjonale prøver i full skala i 2005 var dette antallet redusert til fire. Grunnlaget for inndelingen i delkompetanser er rapporten *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* av Niss & Jensen (2002). Rapporten var et resultat av prosjektet *Kompetenceudvikling og Matematiklæring* (KOM) som ble iverksatt av det danske Undervisningsministeriet i 2000. Arbeidet ble ledet av Mogens Niss, professor ved Roskilde Universitetssenter, og målet var å skape en felles dansk forståelse for hva det vil si å beherske matematikk. Niss er samtidig medlem av PISA/OECD-prosjektets ekspertgruppe for matematikk, og rapporten er i stor grad inspirert av kompetansetenkningen i PISA/OECD. Man opererer da også med en tilsvarende åttedeling av den matematiske kompetansen i det danske KOM-prosjektet (Niss & Jensen 2002:46, min oversettelse):



Figur 2.1: Matematisk kompetanse i KOM-prosjektet.

Niss & Jensen definerer en matematisk kompetanse som *indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer* (s. 43). Figur 2.1 synliggjør de åtte delkompetansene og viser hvordan disse direkte eller indirekte bidrar til besittelse av to overordnede kompetanser (s. 45f., min oversettelse):

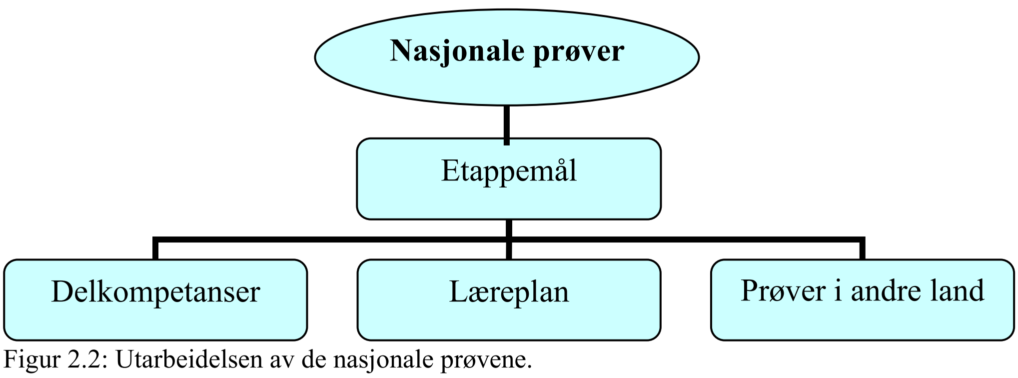
(1) å spørre og svare i, med og om matematikk
(a) å kunne stille spørsmål og ha blikk for typen av svar som kan oppnås (tankegangskompetanse)
(b) å selv være i stand til å besvare spørsmål, både i og med matematikk (henholdsvis problembehandlingskompetanse og modelleringskompetanse)
(c) å kunne forstå, bedømme og frambringe argumenter for svar på matematiske spørsmål (resonnementskompetanse)

(2) å omgås språk og redskaper i matematikk
(a) å være i stand til å omgås forskjellige representasjoner av matematiske saksforhold (representasjonskompetanse)
(b) å kunne håndtere de spesielle representasjoner som utgjøres av matematisk symbolspråk og formalisme (symbol- og formalismekompetanse)
(c) å kunne kommunisere i, med og om matematikk (kommunikasjonskompetanse)
(d) å kunne nyttiggjøre seg og forholde seg til diverse tekniske hjelpemidler for matematisk virksomhet (hjelpemiddelkompetanse)

I utviklingen av nasjonale prøver i Norge utgjorde kompetanseinndelingen i henholdsvis PISA/OECD og KOM en svært sentral del av idé- og arbeidsgrunnlaget. I prosjektbeskrivelsen for nasjonale prøver i matematikk framhever man spesielt det overordnende og læreplanuavhengige aspektet ved en slik kompetansetenkning:

> *Dette ses på som en meget interessant innfallsvinkel når det skal formuleres etappemål for elevene og bygge opp de nasjonale prøvene. Etappemålene skal formuleres med detaljerte beskrivelser av de kompetanse- og kunnskapsmål som skal undersøkes. Rapporten fra Danmark vil være spesielt interessant med tanke på å kunne benytte de samme prøvene selv når lærerplaner forandres* (NSMO 2003:2).

Med betegnelsen ”etappemål” menes de fagmålene som elevene skal ha nådd på de ulike stadier i skolegangen. Disse er en sammenfatning og konkretisering av de gjeldende læreplanmålene, og de viser konkret hva man ønsker å måle med de nasjonale prøvene (se avsnitt 11.3 på s. 142ff.). Målformuleringene i læreplanene i seg selv er i følge prosjektgruppen *for upresise og vage* (NSMO 2003:3) til dette formålet. Samtidig legges det altså vekt på å koordinere prøvene i forhold til nivået i og oppbygningen av tilsvarende internasjonale prøver og nasjonale prøver fra andre land. Man kan skissere utarbeidelsen av prøvene på følgende vis:



Figur 2.2: Utarbeidelsen av de nasjonale prøvene.

I utprøvingsåret 2004 valgte man å slå sammen representasjonskompetanse med symbol- og formalismekompetanse, og man gjorde det samme med resonnementskompetanse og tankegangskompetanse. Oppgavene var derfor klassifisert i henhold til seks kategorier i stedet for åtte. I evalueringsrapporten *nasjonale prøver på prøve* (Lie et al. 2004) konkluderer man med at vurdering av besvarelsene også i henhold til disse seks delkompetansene er for ambisiøs:

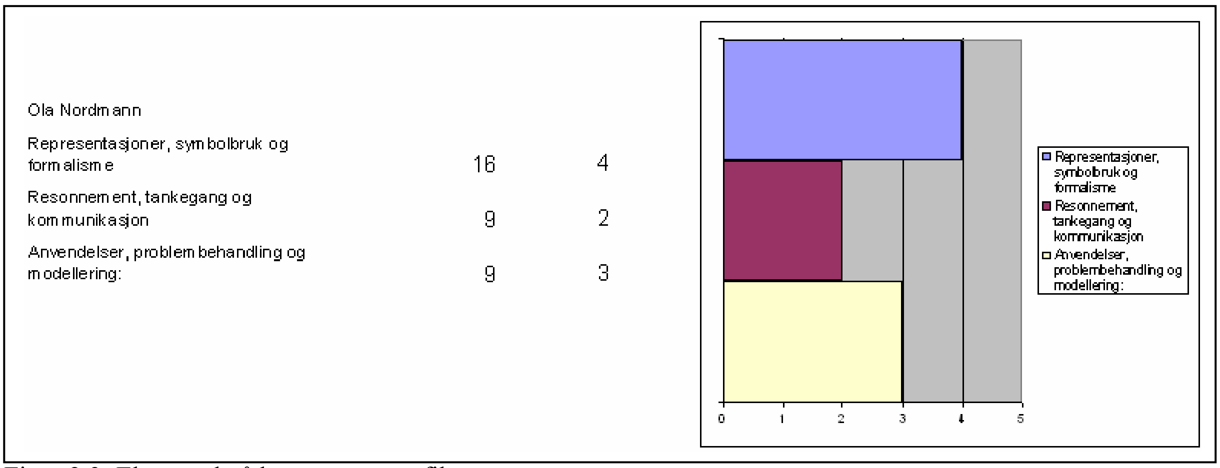
> *Alle disse kategoriene har ikke god nok reliabilitet til å kunne rapporteres, og de er heller ikke tilstrekkelig forskjellige til at de hver for seg innehar verdifull informasjon* (s. 42).

Dette er det forsøkt tatt hensyn til i 2005, og antall kompetanseområder er redusert til fire:

- RSF. Representasjonskompetanse og kompetanse i symbolbruk og formalisme.
- RTK. Resonnement-, tankegang- og kommunikasjonskompetanse.
- APM. Anvendelse, problembehandlings- og modelleringskompetanse.
- H. Hjelpemiddelkompetanse.

OECD/PISA slår fast at det ikke er mulig å isolere kompetansene helt fra hverandre. Hver testoppgave må derfor klassifiseres i mer enn én kategori. PISA klassifiserer derfor ikke etter dette systemet direkte. I Norge har man derimot valgt å gjøre nettopp dette. Hver enkelt oppgave var i 2005 plassert innenfor ett kompetanseområde og poengene ble følgelig gitt innenfor dette ene området. Slik ble vurderingsarbeidet enkelt og oversiktlig. Her har man altså en praksis som bryter med vurderingene i OECD/PISA. Vi skal se at ordningen i Norge også skiller seg fra den svenske. I vår studie her vil det derfor være interessant å sette fokus på det norske systemet og hvordan dette er egnet til å vurdere elevens *helhetlige matematiske kompetanse*.

Vurderingen av den enkelte elevs prøve resulterte i en kompetanseprofil. I denne fikk eleven tilbakemelding om oppnådd nivå på en skala fra 1 til 5 i de tre første av kompetanseområdene som er listet opp ovenfor. Prøven i 2005 tok ikke sikte på å måle hjelpemiddelkompetanse. Under ser man hvordan en slik kompetanseprofil kunne se ut:



Figur 2.3: Eksempel på kompetanseprofil.

Ola Nordmann har altså fått 16 (av 25 mulige) poeng innenfor kompetanseområdet representasjoner, symbolbruk og formalisme. Med denne poengsummen er han vurdert til å være på nivå fire av fem, noe som også vises i det liggende histogrammet. Tilsvarende kan vi se resultatene i de to andre kompetanseområdene, henholdsvis resonnement, tankegang og kommunikasjon og anvendelser, problembehandling og modellering.

I dette masterarbeidet er fokus rettet spesielt mot testingen av RSF, representasjons-kompetanse og kompetanse i symbolbruk og formalisme. Begge disse delkompetansene bidrar direkte til den overordnede kompetansen *å omgås språk og redskaper i matematikk*. I de nasjonale prøvene er disse to delkompetansene slått sammen til ett kompetanseområde. Dette er gjort etter faglige vurderinger av hvilke kompetanser som oftest opptrer sammen når elevene løser ulike oppgaver. Den nære sammenhengen mellom disse to delkompetansene tydeliggjøres i beskrivelsen under.

2.2.4.1 Representasjonskompetanse

I matematikk nytter man seg av ulike representasjoner i arbeidet. En figur bidrar ofte til å rydde tankene, se nye mønstre og sammenhenger. Slik blir man gjerne i bedre stand til å gjøre det abstrakte mer konkret og omvendt. Som eksempler kan man nevne bruk av konkrete fysiske objekter, symboler (også algebraiske), diagrammer, tabeller, verbale, visuelle og geometriske representasjoner. Representasjonskompetanse består i å kunne forstå, avkode, tolke, skille mellom og bruke slike representasjoner på hensiktsmessig vis i ulike situasjoner (Niss & Jensen 2002:56-58). Å ha kjennskap til og forstå innbyrdes forbindelser mellom de ulike representasjonene, være klar over styrker og svakheter og å kunne velge blant og oversette mellom forskjellige representasjonsformer, er også inneholdt i denne delkompetansen.

Eksempelvis vil evnen til å representere et naturlig tall med prikker eller klosser, ved hjelp av kulerammer eller liknende være inkludert i denne kompetansen. Videre er henholdsvis analog og digital tidsangivelse likestilte, men helt forskjellige representasjoner av det samme klokkeslettet. Tilsvarende kan begrepet lineære sammenhenger representeres på mange ulike vis:

19:08:57

Figur 2.4

- som en regneforskrift, for eksempel $f(x) = 2x + 3$
- algebraisk, som løsningsmengde til en likning, for eksempel $3y - 6x = 9$
- som en parameterframstilt punktmengde i et koordinatsystem, for eksempel $\{(x, y) \mid x = t, y = 2t + 3, t \in R\}$
- ved en tegnet graf i et koordinatsystem
- ved et geometrisk objekt, for eksempel den rette linjen i planet som går gjennom punktene $(-2,-1)$ og $(1,5)$
- ved en tabell av samhørende verdier av x og y

2.2.4.2 Symbol- og formalismekompetanse

Symbolske representasjoner er av særlig betydning i matematikk. Det er derfor en nær forbindelse mellom representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. For å synliggjøre sider ved matematikkens vesen, kan den ofte og med fordel betraktes som et språk med tilhørende grammatikk, syntaks og semantikk. I omgangen med matematiske symboler må man beherske et knippe vedtatte ”spilleregler” eller grammatiske konvensjoner. En elev som på regnestykket $4+6\cdot 3$ oppgir svaret 30, har for så vidt regnet riktig, men mistolket den matematiske grammatikken. Eleven har her jobbet i leseretningen fra venstre mot høyre, uten å ta hensyn til eller ha kjennskap til de spillereglene som gjelder i det matematiske språket. Beherskelse av blant annet slike forhold er inneholdt i delkompetansen som tar for seg symboler og formalisme. Videre består den i å kunne avkode og bruke symbol- og formelspråk og i å kunne oversette mellom matematisk symbolspråk og dagligtale (Niss & Jensen 2002:58-60). Kompetansen inneholder ikke bare bokstavregning, kalkulus og liknende, men også de mer formelle sider ved elementær regning og regneoperasjoner. Deler av det Brekke (2002a:4) kaller *faktakunnskap* er dermed også inkludert i denne kompetansen. Som eksempel kan man nevne forståelsen av at det sammensatte tallsymbolet 47 står for $4\cdot 10+7$ (se nærmere omtale i avsnitt 2.2.2 på s. 8f.).

Håndtering av symbolspråk og formler kan eksempelvis være evnen til å foreta omskrivninger som $4x^3+2x^2-2x=2x(2x^2+x-1)=2x(x+1)(2x-1)$ eller å omforme formelen for arealet av et trapes $A=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$ til $b=\dfrac{2A}{h}-a$ der dette er hensiktsmessig.

Det er altså en sterk forbindelse mellom denne symbol- og formalismekompetansen og representasjonskompetansen. I den førstnevnte er det symbolenes karakter, status og betydning og selve håndteringen av dem som er i hovedfokus, mens det er selve forståelsen og bruken av ulike representasjonsformer som står i sentrum for den sistnevnte.

2.3 Matematikkdidaktisk bakgrunn for de nasjonale prøvene

Vi har sett at vurderingen i de norske nasjonale prøvene i stor grad er inspirert av det teoretiske grunnlaget i KOM og PISA der utgangspunktet er et sett av kompetanseområder. Denne kompetansetenkningen utgjør en viktig del av de matematikkdidaktiske vurderingene og tankene som ligger til grunn for prøvene. I det følgende vil det bli gitt et innblikk i dette og ytterligere teoretisk og empirisk materiale som har tjent som inspirasjonskilde. Prosjektledelsen i Norge er opptatt av at prøvene skal gjenspeile den nordiske tradisjonen og det nordiske verdigrunnlaget, og påpeker derfor at det er spesielt gunstig å kunne bygge på erfaringer og tenkning fra eksempelvis Danmark og Sverige (NSMO 2003:2f.). Man har selvsagt også samlet informasjon innenlands om relevante prøver, eksamensoppgaver og kartleggingsoppgaver, herunder KIM-prosjektet (se avsnitt 2.2.2 på s. 8f.).

2.3.1 Matematikk som beherskelse av kompetanser

Niss (1999) kritiserer den tradisjonelle, pensumbaserte beskrivelsen av et fag. Han viser til at man gjerne lar en konkret pensumliste sette dagsorden for undervisningen. I matematikk lister man opp emner, begreper, teorier og resultater som eleven skal tilegne seg. Ved hjelp av et begrenset antall metoder og teknikker skal eleven oppnå nødvendige ferdigheter for å besvare og bestå prøver. Faget kan i ytterste konsekvens reduseres til en slags sjekkliste over de enkeltelementer som undervisningen skal omfatte. Faren er, hevder Niss, at man med en slik tilnærming reduserer matematisk faglighet til riktige og gale svar, noe som igjen fører til et for lavt ambisjonsnivå for undervisningen. Stoffets oppbygning, indre sammenhenger og overordnede struktur kommer i andre rekke. Jensen (1995) oppfatter denne reduksjonen av faglighet som en ”sykdom”. Han kaller den *pensumitis*:

> *Den består i, at pensum forveksles med faglighed (indsigt, forståelse og kunnen) og i, at undervisning forveksles med tilegnelse med den konsekvens, at tilrettelæggelse af undervisning indskrænkes til fastlæggelse af pensum* (Jensen 1995:464).

Niss (1999) er av den oppfatning at denne "sykdommen" kan helbredes ved å peke ut de kompetanser som faget sikter mot. Hensikten med og utbyttet av undervisningen bør altså heller karakteriseres ved hjelp av kompetansene som man ønsker at elevene skal utvikle. En slik kompetansebeskrivelse går langt mer direkte på selve undervisningen, og med dette utgangspunktet vil en i større grad sette fokus på prosessdimensjonen i elevens læring. Derfor bør også læreren sette større krav til sin undervisning, og elevene bør utfordres til å forklare hvordan de tenker og forstår. Norsklærere bør kreve mer av sine elever enn beherskelse av et visst ordforråd og grammatiske regler. De ønsker at de lærende skal være i stand til å skape, trekke større linjer, analysere og forstå stoffets oppbygning og indre sammenhenger. I mangfoldet av stilarter skal eleven kritisk foreta sine språklige valg og vurderinger og kunne begrunne disse. Tilsvarende bør matematikklæreren kreve mer enn beherskelse av symboler, regler og faste algoritmer. Eleven må i tillegg utfordres til å bruke og ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i et mangfold av situasjoner. I løsning av problemer må eleven kunne forklare, argumentere, resonnere og gjøre bruk av hensiktsmessige hjelpemidler og modeller.

Niss (1999) foreslår altså en kompetansebasert karakterisering av matematikkfaget. Denne er ment å gjelde for all matematikkundervisning på alle nivåer. Med et slikt fundament

> *…ville en næste udfordring være at søge evalueringsformer, som tillader detektering og evaluering af kompetencernes tilstedeværelse hos den enkelte modtager af undervisningen* (Niss 1999:29).

De nasjonale prøvene og utarbeidelsen av den enkelte elevs kompetanseprofil er et forsøk nettopp på dette.

De nasjonale prøvene skulle forsøke å følge opp Niss´ tanker. Oppbygningen skulle virke forebyggende mot "pensumitis" og samtidig styrkende for den matematiske fagligheten. Oppgavene er derfor laget spesielt med utgangspunkt i de åtte matematiske delkompetansene. Dermed spiller eksempelvis elevens kommunikasjon, tankegang, resonnement og begrepsforståelse en vesentlig rolle i vurderingen. Slik har prøvene til hensikt å måle et langt bredere spektrum av kunnskaper, ferdigheter og holdninger enn det som har vært vanlig praksis i tradisjonelle matematikkprøver. Den nære og direkte tilknytningen til de åtte delkompetansene understreker at beherskelse av nettopp disse er grunnleggende mål for matematikkopplæringen i skolen. For at de nasjonale prøvene skal bli et naturlig element og hjelpemiddel i norsk skole, må derfor kompetansetenkningen få praktiske konsekvenser i klasserommet (Røsseland 2005a og 2005b). I så måte bidrar de nasjonale prøvene til å framkalle en viss kursendring i oppfatningen av matematikkfaget.

2.3.2 Nasjonale prøver i Sverige

I Sverige har man lang erfaring med "nationella prov". I matematikk på grunnkursnivå er det den såkalte PRIM-gruppen ved Lärarhögskolan i Stockholm som utvikler prøvene i samarbeid med og på oppdrag fra Skolverket, som for øvrig har hatt ansvaret for prøvene siden 1994. Prøvene har tilnærmet samme hensikt som i Norge og gis også i tilsvarende fag, det vil si i svensk, engelsk og matematikk. Prøvene skal, på samme måte som man ønsker det i Norge, reflektere og konkretisere læreplanens kunnskaps- og emnesyn.

Det gis én prøve i hvert fag mot slutten av hver termin. Prøvene i det som tilsvarer vår grunnkursmatematikk (”matematikk A”) ble obligatoriske fra og med høsten 2000, og de har en varighet på tre klokketimer. De består av to deler. Del en skal løses uten bruk av kalkulator, og det er kun selve svaret som skal vurderes. Den andre delen inneholder mer omfattende oppgaver der elevene skal vise framgangsmåte og begrunne sine svar. Skolverket lager også et formelark som elevene får bruke på begge delprøvene. Omfanget og hyppigheten av prøver er altså større i Sverige, men vi ser ellers at de svenske og norske prøvene har mange likheter.

Til slutt i de svenske prøvene finnes en større oppgave av mer undersøkende, omfattende og åpen karakter. Her må metode velges, resultater analyseres og generelle løsninger presenteres ved hjelp av et korrekt matematisk språk (jamfør RSF). Resonnementene skal dessuten være tydelige og lette å følge. Skolverket anbefaler at elevene bruker minst 30 minutter på denne siste oppgaven. Følgende oppgave ble gitt til slutt i oppgavesettet i vårterminen 2005 (Skolverket 2005a:7):

11. Följder av heltal

Välj tre heltal som kommer direkt efter varandra, t ex 6, 7, 8
Addera talen: 6 + 7 + 8 = 21
Multiplicera antalet tal med det mellersta talet: 3 · 7 = 21

- Gör motsvarande beräkning för några olika talföljder med tre andra tal som kommer direkt efter varandra. Beskriv resultatet av din undersökning. Förklara sambandet med ord eller formel.
- Undersök på liknande sätt summan av fem eller sju tal som följer på varandra. Beskriv dina undersökningar och förklara sambandet med ord eller formler.
- Undersök vad som gäller för summan av fyra eller sex tal som följer på varandra. Beskriv dina undersökningar och förklara sambandet med ord *och* formler.
- Vilket samband gäller då antalet tal är n?

(5/6) ¤

Vid bedömning av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till
- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur du har motiverat dina slutsatser
- hur du har redovisat ditt arbete.

Figur 2.5: Den siste oppgaven i den svenske nasjonale prøven, våren 2005.

En slik oppgave utfordrer eleven til å undersøke og tenke selvstendig, og den inviterer og legger opp til bruk av flere matematiske delkompetanser. Med det vurderingssystemet som brukes i de norske prøvene, der altså hver oppgave kun skal måle én av de fire kompetanseområdene, vil oppgaver av denne art naturligvis ikke kunne tas i bruk. Følgelig må rammeverket for vurdering være forskjellig i Sverige i forhold til i Norge.

Man har i Sverige etter hvert bygd opp solid kompetanse i utarbeiding av detaljerte vurderingsveiledninger (jamfør de norske kodebøkene) av de enkelte prøvene. Dette evalueringsverktøyet (se for eksempel Skolverket 2005b) er et erklært ideal i utviklingen av nasjonale prøver i Norge (NSMO 2004b:3). På grunnlag av disse vurderingsdokumentene får eleven én karakter på den nasjonale prøven i matematikk. Denne er basert på et fastlagt poengsystem og reflekterer graden av måloppnåelse i henhold til Skolverkets vurderingskriterier. Evalueringsverktøyet skal ideelt sett være utformet slik at det sikrer likeverdig vurdering og karaktersetting uavhengig av sted, skole og lærer.

Vi ser her flere fellestrekk mellom de svenske nasjonale prøvene og den tradisjonelle skriftlige eksamenen i Norge. Mens eleven i den videregående skolen i Norge kan oppnå karakterene 6, 5, 4, 3, 2 eller 1 (karakteren null er fjernet i Kunnskapsløftet), er det svenske karaktersystemet firdelt og spenner fra ”inte godkänd” (IG), via ”godkänd” (G) og ”väl godkänd” (VG) til ”mycket väl godkänd” (MVG). For eksempelvis å være kvalifisert til karakteren ”väl godkänd” i kurset matematikk A må eleven blant annet bruke

> *…matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt* (Skolverket 2000a).

I Sverige blir hver enkelt oppgave ved hjelp av utstrakt bruk av pilotprøver kategorisert og analysert med hensyn til løsninger. De potensielle svarene blir så poengsatt i henhold til såkalte G- og/eller VG-poeng. Kodene henviser her til karakterene ”godkänd” og ”väl godkänd” henholdsvis. Vektingen baserer seg på vurderingskriteriene i læreplanene. Dersom en oppgave eksempelvis er merket med (2/1) kan eleven oppnå maksimalt to G-poeng og ett VG-poeng. Videre er enkelte oppgaver merket med ¤. På slike oppgaver kan eleven vise såkalte MVG-kvaliteter (mycket väl godkänd). Det innebærer for eksempel at eleven bruker generelle metoder, modeller og resonnement, at eleven analyserer resultatene sine og framviser en klar tankegang med korrekt matematisk språk. Vi ser at den åpne oppgaven ovenfor (”följder av heltal” i figur 2.5) er merket med (5/6)¤. Denne er altså en avgjørende oppgave for å kunne vise reflekterende og analyserende evner og for å gjøre seg fortjent til karakteren MVG. Vurderingen av denne oppgaven skjer i tre aspekter med ulike fokus på kvaliteter i elevprestasjonen (Skolverket 2000b):

- *Metodval och genomförande. Här bedöms elevens arbete utifrån om eleven genomför problemlösningen och hur relevant metoden är.*
- *Matematiska resonemang. Det eleven gjort ska här bedömas utifrån förekomsten av och kvaliteten i olika former av matematiska resonemang som värdering, reflektion, bevis etc.*
- *Redovisning och matematiskt språk. Här bedöms elevens arbete i hur väl lösningar, strategier och resonemang kommuniceras. Dessutom bedöms användningen av matematikens eget språk med tecken och symboler.*

(For konkret vurderingsanvisning for "följder av heltal", vårterminen 2005, se Skolverket 2005b:12-20).

I Norge får eleven tilbakemelding i form av en kompetanseprofil. Denne har til hensikt å dekke tre atskilte kompetanseområder. Svenske elever får altså tilbakemelding i form av én karakter basert på antall oppnådde G- og VG-poeng. Den beste karakteren, MVG, kan oppnås dersom eleven i tillegg til bredde viser dybde og innsikt. Det er her oppgavene som er merket med ¤ kommer inn i bildet. Læreren vurderer da besvarelsen av disse oppgavene spesielt og avgjør om tilstrekkelig dybde er tilstede.

Skolverket gjennomfører kontinuerlig systematisk oppfølging og vurdering av prøvesystemet. I 2003 var fokus rettet mot grunnskolen (det vil si de frivillige prøvene på 5. trinn og de obligatoriske prøvene på 9. trinn), mens det i 2004 var de obligatoriske prøvene på videregående nivå som ble belyst. I følge undersøkelsen *Lärare och elever om gymnasieskolans nationella prov – en enkätstudie* (Skolverket 2005d:12) anser ni av ti lærere at prøvene i "matematikk A" i høy eller ganske høy grad gir god støtte for vurdering av elevenes kunnskaper. På den annen side, i *Nationella prov i gymnasieskolan – ett stöd för likvärdig betygsättning?* (Skolverket 2005c:50f.), uttrykker enkelte lærere sin skepsis til uskarpe kriterier for MVG-kvaliteter. Eksempelvis vil vurderingen av oppgaven "följder av heltal" kunne variere fra lærer til lærer, hevdes det. Videre er flere av den mening at man legger opp til et for lavt ambisjonsnivå idet karakteren G er for lett å oppnå.

Den sterkeste kritikken av matematikkprøvene på gymnasnivå er av en mer overordnet karakter. Hele 76 % av lærerne i matematikk A mener at de nasjonale prøvene går ut over elever med et annet morsmål enn svensk (Skolverket 2005d:25). Som eksempel nevnes det at det tidvis ikke er kunnskapen om matematikk som testes på matematikkprøven, men elevenes evne til å forstå lange og resonnerende tekster (s. 25f.). Skolverket har gått kritikken i møte og ønsker i framtidige prøver å redusere mengden tekst og det språklig nivået på denne.

2.3.3 Erfaringer fra andre land

I utviklingen av de nasjonale prøvene i Norge har man ikke bare hentet inspirasjon fra Danmark og Sverige. Ressurspersoner fra England, Finland, Island og Nederland har også deltatt med råd og i seminarvirksomhet. Erfaringer gjort i TIMSS og PISA utgjør også en viktig ressurs (NSMO 2003:2).

Freudenthalinstituttet ved universitetet i Utrecht, Nederland, har siden 1971 utviklet et teorigrunnlag for læring og undervisning av matematikk kjent som *Realistic Mathematics Education*. Prinsippene for en slik tilnærming er sterkt påvirket av Freudenthals oppfatning av *matematikk som en menneskelig aktivitet* (Freudenthal 1991:14f.). Han påpeker at eleven ikke bør oppfattes som en passiv mottaker av ferdig "oppfunnet" matematikk, men snarere at undervisningen bør lede og oppmuntre eleven mot å bruke anledninger til å "gjenoppfinne" matematikk ved å utføre den på egen hånd (*guided reinvention*, s. 46). Med denne forståelsen av matematikk som grunnlag utvikler Freudenthalinstituttet prøver for vurdering av elevers matematikkforståelse. I disse prøvene vektlegges elevens evne til problemløsning og evne til å bruke det de har lært på nye og realistiske problemstillinger. Disse prøvene har tjent som inspirasjonskilde i utarbeidelsen av de norske nasjonale prøvene i matematikk. For øvrig er Nederlands nasjonale institutt for utdanningsforskning (CITO) representert i den faglige ledelsen i PISA/OECD (Lie et al. 2001:10). CITO har bred erfaring med å utforme og gjennomføre testsystemer i matematikk. I prosjektbeskrivelsen for nasjonale prøver i matematikk i Norge slår man fast at disse erfaringene fra Nederland skal utnyttes når prøvene bygges opp (NSMO 2003:3).

I England kan skolene selv bestemme innholdet i undervisningen, så lenge overordnede krav er tilfredsstilt (UFD 2003:109). De nasjonale prøvene har derfor et annet formål og fokus enn i Norge. Hensikten med de engelske prøvene er nemlig først og fremst å kontrollere om den enkelte skole holder et akseptabelt nivå i henhold til de nasjonalt anerkjente kravene til kvalifikasjoner. Det er *The Qualifications and Curriculum Authority* (QCA) som har ansvaret for å måle dette nivået. Til tross for at de engelske prøvene altså ikke direkte kan sammenliknes med de norske, understreker prosjektgruppen viktigheten og nødvendigheten av å bli kjent med erfaringene som er gjort her. Slik ønsker man å få gode ideer til utvikling av prøver, samtidig som man ønsker å få innsyn i sider ved de engelske prøvene som ikke har fungert så bra (NSMO 2003:3). Som et ledd i utviklingen av prøvene, deltok derfor en forsker fra QCA på seminar i Trondheim i desember 2002.

I Finland, der man har oppnådd gode resultater spesielt i PISA-undersøkelser, ser man på den nasjonalt utarbeidede eksamen som et viktig kvalitetssikringselement i skolen (UFD 2003:228). I tillegg gjennomfører man regelmessig nasjonale prøver i basisfag (UFD 2002a:22). Disse gjennomføres i regi av Utbildningsstyrelsen og er ikke obligatoriske. Samtidig gjør skoler bruk av verktøy for kvalitetsvurdering som minner om de læringsstøttende og diagnostiske prøvene som finnes i Norge (s. 22).

2.4 Kritikk av nasjonale prøver

Det har vært tett mellom presseoppslagene og debattene i forbindelse med innføringen av de nasjonale prøvene. Majoriteten av disse har vært opptatt av og kritiske til planen om å offentliggjøre resultatene – en diskusjon som ikke vil være tema i dette arbeidet. Tusenvis av elever boikottet prøvene, og Utdanningsforbundet protesterte mot selve gjennomføringen. Mange skoler klaget dessuten over ekstraarbeidet som prøvene medførte. I disse debattene har selve oppgavetekstene og de matematikkfaglige vurderingene i stor grad blitt stående i skyggen. Nettopp dette vil være vårt hovedfokus.

Prøvene har også vært under kontinuerlig vurdering av universitetsmiljøene som utvikler dem. Fageksperter fra Island og Sverige har også bidratt med råd. Utdanningsdirektoratet har både i 2004 og 2005 bedt om evaluering av prøvenes kvalitet og pålitelighet. Evalueringsrapportene, henholdsvis *Nasjonale prøver på prøve* (Lie et al. 2004) og *Nasjonale prøver på ny prøve* (Lie et al. 2005), er utarbeidet av ILS ved Universitetet i Oslo og viser begge til flere svakheter ved prøvene. I 2004 samarbeidet dessuten Utdanningsdirektoratet og Utdanningsforbundet om en spørreundersøkelse om erfaringene med prøvene (TNS Gallup 2004), mens Utdanningsforbundet i 2005 ved hjelp av TNS Gallup gjennomførte en egen undersøkelse blant et utvalg lærere og skoleledere (TNS Gallup 2005). Denne undersøkelsen kom i tillegg til Utdanningsdirektoratets MMI-undersøkelse (MMI 2005).

2.4.1 Nasjonale prøver på prøve i 2004

I 2004 ble det gjennomført nasjonale prøver som en forsøksordning på 4. og 10. trinn. Disse skulle være et første steg fram mot en permanent ordning. I denne forbindelse ble det gjennomført en utvalgsundersøkelse for å studere prøvenes kvalitet ut fra testteoretiske og pedagogiske kriterier. Rapporten fra denne undersøkelsen, *nasjonale prøver på prøve* (Lie et al. 2004:19), konkluderer med at prøvesettene i matematikk inneholder mange gode oppgaver, men at vurderingskriteriene er svært kompliserte. Dette fører til at det har tatt all for lang tid å vurdere besvarelsene. Det anvendte rammeverket har dermed ikke fungert etter hensikten, og man konkluderer med at prøven fungerer dårlig for å måle elevens kompetanse.

> *Vi finner at de fem foreslåtte kategoriene har dårlig validitet, rett og slett fordi de er for like empirisk sett og også begrepsmessig er vanskelig å skille. Vi vil derfor sterkt fraråde at resultater blir publisert som opprinnelig planlagt* (s. 19).

I prøvene er det ikke brukt en eneste flervalgsoppgave, noe forfatterne stiller seg uforstående til. Slike oppgaver vil gjøre vurderingsarbeidet mindre tidkrevende samtidig som reliabiliteten vil øke. Rapporten anbefaler derfor at man både for 4. og 10. trinn i det videre arbeidet

> *...forlater det ambisiøse systemet det hittil er lagt opp til. Vi mener det bør lages prøver som er mye enklere å vurdere, blant annet ved å inkludere et betydelig antall flervalgsoppgaver, og som i større grad ivaretar grunnleggende testteoretiske prinsipper. Vi anbefaler en grunnleggende nytenkning når det gjelder matematikkprøvens mål og mening* (s. 42).

Prosjektgruppa i matematikk kom i etterkant av denne rapporten med sin reaksjon (UFD 2004). Her (s. 2) understrekes det at prøvene skulle sees på som pilotprøver, og at de derfor ikke bør brukes som grunnlag for sammenlikning med senere års prøver. I forhold til målsetningen er det flere sider ved prøvene som ikke er gode nok. Dette kan blant annet forklares med at kun én av de planlagte tre delprøvene ble gjennomført (se avsnitt 2.1 på s. 5ff.). Videre kommenterer prosjektgruppa (UFD 2004:2):

> *Dette er likevel ikke hele forklaringen på at prøvene ikke er gode nok. Vi ser at*
>
> - *det er problematisk med seks kompetanser og fem nivåer på hver kompetanse*
> - *det er vanskelig å lage oppgaver som måler bare en av kompetansene*
> - *det er problematisk at skåren på de ulike kompetansene er relativt lik*
> - *det er ikke heldig at både lette og vanskelige oppgaver kan gi høyeste skåre på kompetansene*
> - *det er problematisk at vurderingen av besvarelsene er så tidkrevende for lærerne*
> - *oppgavene må testes ut bedre for å sikre at de måler det vi ønsker å måle*
>
> *Dette vil vi arbeide videre med for å gjøre prøvene bedre i 2005. Blant annet vil vi legge vekt på å videreutvikle rammeverket.*

2.4.2 TNS Gallup for Utdanningsdirektoratet og Utdanningsforbundet 2004

I tillegg til utvalgsundersøkelsen til Lie et al. (2004) gikk Utdanningsdirektoratet og Utdanningsforbundet i etterkant av prøvene sammen om en undersøkelse blant skoleledere og lærere (TNS Gallup 2004). Hovedkonklusjonen var også her at de nasjonale prøvene må forbedres for at de skal kunne bli et nyttig hjelpemiddel i undervisningen. Det kom fram at vurderingen av elevbesvarelsene tok mer tid enn man hadde tenkt. Videre var det ikke tydelig nok hvordan prøvene kunne brukes til å styrke undervisningen og oppfølgingen av den enkelte eleven. Undersøkelsen viser for øvrig at kompetansebeskrivelsene i ”noen grad” er relevante for undervisningen, dog uten at dette er utdypet i særlig grad.

2.4.3 Nasjonale prøver på ny prøve i 2005

Det kom altså betydelig kritikk etter prøvene i 2004. I *nasjonale prøver på ny prøve* slår man fast at prøvene i 2005 ikke representerer en vesentlig forbedring – snarere tvert imot:

> *Samlet sett mener vi kvaliteten på årets prøver framstår som dårligere enn fjorårets, så det dreier seg om noen fundamentale grep som bør gjøres, og som ikke bare ”går seg til” med tiden til hjelp* (Lie et al. 2005:25).

Rapporten konkluderer med en anbefaling om ikke å gjennomføre noen nasjonale prøver i 2006. Tid og krefter foreslås heller brukt til utredninger og debatt om primære formål og retningslinjer. Kvaliteten på rammeverket må forbedres vesentlig for å kunne overbevise skeptikere og motstandere.

> *Etter vårt beste skjønn vil en videreføring av de nasjonale prøvene etter de retningslinjene som er brukt de to første årene, ikke være til beste for norsk skole* (s. 26).

I likhet med utprøvingsåret 2004 inneholdt prøvene hovedsakelig svært gode oppgaver (s. 16) – også i et diagnostisk perspektiv – men det er altså flere andre forhold som ikke er gode nok. Spesielt må systemet med tilbakemelding i form av oppnådd nivå i tre kompetanseområder tåle kraftig kritikk. Elevens kompetanseprofil er ment å ha diagnostisk verdi i seg selv, men utvalgsundersøkelsen slår fast at de aller fleste delskalaene verken er særlig gyldige eller pålitelige. Dermed frykter man at de innrapporterte resultatene senere kan gi opphav til alvorlige feiltolkninger av elevens framgang (s. 23). Ønsket om tilbakemelding i form av mange profiler har resultert i at alle er blitt lite pålitelige (s. 25). Videre er Lie et al. av den oppfatning at kompetansebetegnelsene rett og slett er for kompliserte til å kunne formidle noen pedagogisk mening (s. 18). Rapportforfatterne stiller seg i det hele tatt svært undrende til dette kompetansesystemet:

> *Det burde etter vår mening være innlysende at når elevene ved skriftlige eksamener i vårt land sitter i fem timer og får et resultat (etter svært omstendelige prosedyrer) i form av* ett *tall, så kan man ikke regne med at det skal være naturlig å få tre eller flere resultater av høy kvalitet fra en liknende prøve på en time eller to* (s. 25).

Rapporten etterlyser en avklaring av forholdet mellom skriftlig eksamen og nasjonale prøver. Man viser til at det er uklart om de nasjonale prøvene skal ha *et mer begrenset faglig siktemål* enn det de skriftlige eksamenene har (s. 16). Dersom de nasjonale prøvene i hovedsak skal teste grunnleggende ferdigheter, vil man kunne gi alle grunnkurselever – uavhengig av linjevalg – samme prøve. De kursspesifikke kravene i eksempelvis 1MX kan naturlig dekkes gjennom skriftlig eksamen (s. 16). Det vises også til Kvalitetsutvalgets vurderinger omkring tidspunkt for nasjonale prøver og eksamen i avsnitt 2.1 på s. 5ff.

Det påpekes videre at særlig prøvene på allmennfaglig studieretning har mange oppgaver med lav diskriminering. Mange oppgaver viser seg å enten være så enkle at de fleste elevene får poeng eller så vanskelige at kun få elever skårer (s. 19). Likevel inneholdt altså prøven mange gode diagnostiske oppgaver, men det etterlyses veiledning om hvordan vurderingen av disse konkret kan brukes i det pedagogiske arbeidet (s. 22f.). Lie et al. anbefaler at man i framtiden heller legger vekt på å utarbeide veiledningsmateriale for hver oppgave. Slik kan læreren få faglig støtte og konkret informasjon til bruk i det pedagogiske arbeidet (s. 24). Rapportforfatterne minner i denne sammenheng om at diagnostiske prøver allerede finnes, og de mener at man heller bør videreutvikle disse og gjøre dem lett tilgjengelige for skolene (s. 23). Kvalitetsutvalget, som også rapportforfatter Lie var medlem av, foreslo i innstillingen *i første rekke* (UFD 2003) å erstatte både diagnostiske og nasjonale kartleggingsundersøkelser med nasjonale prøver (se avsnitt 2.1 på s. 5ff.). To år senere, etter at de nasjonale prøvene har blitt realisert, ser det for meg ut til at Lie er av en annen oppfatning. I MMI-undersøkelsen finner vi ytterligere informasjon om gjennomføringen og den pedagogiske nytteverdien av prøvene.

2.4.4 MMI-undersøkelse om gjennomføringen av prøvene 2005

I august 2005 offentliggjorde Utdanningsdirektoratet en analyserapport som dekker ulike tema med relevans for vurdering av de nasjonale prøvene (MMI 2005). Rapporten tar for seg både informasjonen i forkant av prøvene, selve prøvene, skoleringen, den praktiske gjennomføringen, bruken av resultatene og innvirkningen på skolens pedagogiske praksis.

Elevene på 10. og 11. trinn har vurdert utbyttet av oppfølgingen av prøveresultatene. Generelt har elever på 11. trinn fått mindre utbytte av oppfølgingen enn elever på 10. trinn (s. 41). Vurdering sammen med læreren gir det beste utbyttet for eleven, mens utdeling av kompetanseprofilene (se figur 2.3 på s. 13) i klasserommet ikke har innvirkning på elevens utbytte av oppfølgningen i det hele tatt. Halvparten av elevene oppgir at oppfølgningen av resultatene i matematikk "ikke i det hele tatt" viser hvordan de kan forbedre innsatsen (s. 42).

> *For elevenes del må graden av tilbakemelding styrkes og eventuelt formen på tilbakemeldingen endres, dersom det er et mål at de nasjonale prøvene skal kunne vise elevene hvordan de kan bli bedre i faget* (s. 43).

Hovedinntrykket er at de nasjonale prøvene har hatt liten innvirkning på skolenes pedagogiske praksis. Faktisk mener tilnærmet halvdelen av de spurte lærerne, 49 %, at prøvene i "ingen grad" gir informasjon om elevene som de ikke visste på forhånd (s. 45). Det er særlig lærere i matematikk, og spesielt på 11. trinn, som er skeptiske til dette (s. 47). Man slår også fast at interessen for kompetanseheving innen vurdering virker minst blant de samme lærerne, altså matematikklærere på 11. trinn (s. 34). På spørsmål til lærerne om i hvor stor grad den nasjonale prøven vil påvirke deres fagdidaktiske tenkning, svarer 21 % "ikke i det hele tatt" og 55 % "i noen grad" (s. 46). Lærere på 10. og 11. trinn vil dessuten i mindre grad la den nasjonale prøven påvirke sin fagdidaktiske tenkning enn lærere på 4. og 7. trinn.

> *Oppsummert vil nok de nasjonale prøvene føre med seg noe endring i pedagogisk praksis i skolen. Skole-Norge er ikke upåvirket av innføringen av de nasjonale prøvene i så måte. Men prøvenes påvirkning av pedagogisk praksis i skolen er foreløpig begrenset, og i forhold til å lære noe nytt om elevene virker de nasjonale prøvene nesten overflødige* (s. 47).

De refererte resultatene fra MMI-undersøkelsen peker på flere svake sider ved de nasjonale prøvene. Vi legger merke til at gjennomføringen på 11. trinn gjennomgående framstår som minst vellykket. I mange tilfeller gjelder dette spesielt for prøven i matematikk.

2.4.5 TNS Gallup for Utdanningsforbundet 2005

Rapporten fra TNS Gallup (TNS Gallup 2005) presenterer en mengde kvantitative data om lærere og rektorers oppfatning av ulike sider ved de nasjonale prøvene. Disse er i stor grad knyttet opp mot det enkelte trinn og det enkelte fag. Slik får man for eksempel tilgang til opplysninger som utelukkende gjelder matematikkprøven på grunnkurs. Vi skal se at hovedtrekkene i denne undersøkelsen i stor grad samsvarer med analyserapporten fra MMI.

Rapporten viser at de færreste skolene har felles rutiner for bruk av prøveresultatene. Faktisk oppgir tre av fire rektorer at deres skole ikke har slike rutiner (s. 24). Samtidig svarer halvparten av rektorene at prøveresultatene i liten grad ble trukket inn i det pedagogiske arbeidet i det inneværende året (s. 31). Grunner til dette kan være mangel på avsatt tid i lærernes arbeidsplaner (s. 21), utilstrekkelig skolering med tanke på bruk av prøveresultatene (s. 12), negative konsekvenser for lærernes øvrige arbeidsoppgaver (s. 19) og liknende forhold. Tallene viser også at gjennomsnittlæreren i matematikk på grunnkurs kun har avsatt *tre minutter* til å vurdere resultatene fra prøven sammen med eleven, noe som er lavest blant samtlige trinn og fag (s. 20). Dette bidrar til å forklare de dårlige resultatene angående elevens utbytte av oppfølgingen i MMI-undersøkelsen.

Om kompetansebeskrivelsene kommer det fram at 26,9 % av matematikklærerne på grunnkurs vurderer disse til "i stor grad" å være relevante for sin undervisning (s. 40). På den annen side oppleves disse som lite relevante av over halvdelen (53,8 %) av lærerne (s. 40). Videre viser undersøkelsen at nesten alle lærere (88,1 %) ble skolert i vurdering i forkant av prøvene (s. 11). Disse deler seg på midten i spørsmålet om hvorvidt denne skoleringen ga kompetanse i vurderingsarbeid generelt og innsikt i kompetanseprofilene og bruken av disse (s. 12).

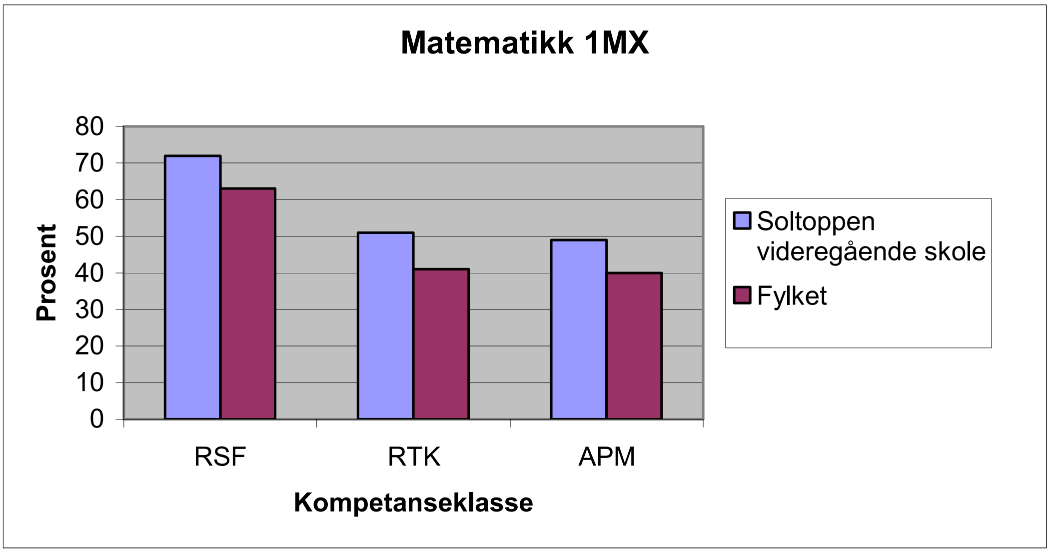
Lærerne ble også bedt om å vurdere selve prøvesettet. Blant matematikklærerne på grunnkurs mener 57,8 % at prøven totalt sett er av god kvalitet (s. 29), og 64,2 % synes at vanskelighetsgraden stod i passelig forhold til egen undervisning. De øvrige mener alle at prøvene var for vanskelige (s. 26). Samtidig er det delte meninger om hvorvidt elevene fikk vist sine kunnskaper og ferdigheter gjennom prøven (s. 28). 48,1 % av lærerne på grunnkurs mener at matematikkprøven "i liten grad" gir ny informasjon om elevenes kunnskaper og ferdigheter (s. 35), mens det tilsvarende tallet for "i stor grad" er 17,3 %. Om lag en tredjedel av lærerne oppgir at resultatene av prøvene "i stor grad" gir informasjon om hva som bør styrkes i undervisningen i forhold til den enkelte elev (s. 37).

Flere av disse prosentsatsene mer enn antyder at den nasjonale prøven i matematikk på grunnkurs ikke har fungert etter hensikten. Det er blandede erfaringer både med skoleringen, gjennomføringen og ikke minst med det pedagogiske opplegget og arbeidet i etterkant av prøven. Strukturelle endringer må til for at prøvene skal få bedre innpass i skolehverdagen.

3 Konteksten

3.1 Skolen, elevene og undervisningen

Soltoppen videregående skole (oppdiktet navn) ligger sentrumsnært i en større by i Norge. I skoleåret 2004/2005 hadde den i underkant av 600 elever i sju paralleller. Skolen tilbyr studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag og har lange tradisjoner som byens realskole og gymnas, noe som også gjenspeiles i dagens elevmasse. Omkring 80 % av skolens elever fortsetter med matematikk som studieretningsfag etter grunnkurs (2MZ eller 2MX). Skolen har et godt renommé i distriktet og opptakskravene er forholdsvis høye. Den sist inntatte eleven pleier å ha et karaktersnitt på like i overkant av fire fra ungdomsskolen. Elevene ved Soltoppen videregående skole gjorde det også generelt bedre på den nasjonale prøven i matematikk enn gjennomsnittet for fylket:



Figur 3.1: Skåre på Soltoppen videregående skole og i fylket.

Figur 3.1 viser at elevene gjennomsnittlig skåret cirka 9-10 prosentpoeng høyere enn fylkesgjennomsnittet innenfor hvert av de tre kompetanseområdene. Innenfor RSF oppnådde gjennomsnittseleven ved Soltoppen videregående skole 72 % av maksimalt oppnåelig poengsum, mens det samme tallet var 63 % for fylket sett under ett.

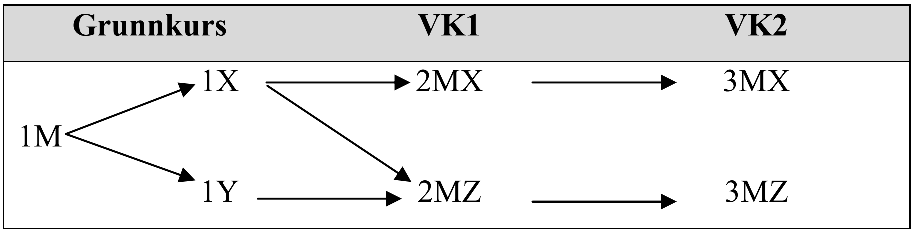
Undervisningen ved skolen kan karakteriseres som tradisjonell og klasseromsbasert. Timene er i all hovedsak organisert slik at læreren innleder med gjennomgang av nytt stoff, mens den resterende tiden er viet oppgaveregning. Elevene sitter vanligvis parvis og pultene er uten unntak rettet mot kateteret og tavlen. En grunnkursklasse har normalt 28 elever.

3.2 Faget

Læreplanen gir elevene på grunnkurs valget mellom to 5-timersfag i matematikk:

- 1MY, som består av grunnenheten 1M og påbyggingsenheten 1Y
- 1MX, som består av grunnenheten 1M og påbyggingsenheten 1X

Mens 1MX-løpet ikke vil legge noen direkte begrensninger på elevens senere valgmuligheter, vil en elev som bestemmer seg for 1MY, i utgangspunktet ikke kunne fortsette med 2MX og 3MX på henholdsvis videregående kurs en (VK1) og to (VK2). Skjematisk kan man framstille de ulike matematikkvariantene slik:



Figur 3.2: De ulike matematikkvariantene i videregående opplæring.
Foruten 2MZ som er et 3-timersfag, er alle kursene på fem uketimer.

Som en følge av at det på grunnkurs finnes to matematikkvarianter, ble det ved Soltoppen videregående skole i januar 2005 opprettet to nye grupper for 1MY-elever. Dermed var det totalt sju X-grupper og to Y-grupper den siste halvdelen av skoleåret. Hver av disse gruppene hadde i gjennomsnitt 22 elever. Slik fikk lærerne økt mulighet til å følge opp den enkelte elev.

Forskjellen mellom 1MX og 1MY er ikke veldig stor. Det tematiske skillet kommer først til syne mot slutten av skoleåret. Da jobber 1MY-elevene mer med geometri (fraktaler, tesselering, det gylne snitt), mens det er mer algebra og en forsmak på derivasjon og integrasjon som står i fokus for 1MX-elevene. I læreplanen gjelder målene 6 og 7 kun for påbyggingsenheten 1Y, mens målene 8 og 9 er for 1X (KUF 1999, se avsnitt 11.4 på s. 145ff.). X-varianten betegnes som den mest teoretiske og "vanskeligste". Mange studier krever at eleven har gjennomført 3MX. Det skal samtidig nevnes at elevene oppnår det samme antallet tilleggspoeng ved opptak til høyere studier for 2MZ/3MZ som for 2MX/3MX. Delprøve 1 av den nasjonale prøven var felles for 1MY og 1MX, mens de to matematikkvariantene hadde forskjellige utgaver av delprøve 2.

3.3 Læreverket og kalkulatoren

Samtlige klasser ved Soltoppen videregående skole brukte dette skoleåret læreverket *Matematikk 1MX/1MY* (Erstad et al. 2000). Verket er sammensatt av en lærebok og en oppgavesamling. Læreboken består av ti kapitler, hvorav ni dekker læreplanmålene for 1MX (se avsnitt 11.4 på s. 145ff.). Hvert kapittel er delt inn i avsnitt som alle består av vanlig lærestoff, eksempler og oppgaver. Mer varierte, differensierte og sammensatte oppgaver finnes i oppgavesamlingen. I læreverket er det også lagt vekt på å forklare bruken av grafiske kalkulatorer.

Slike kalkulatorer ble innført som obligatorisk hjelpemiddel i matematikk på studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag i forbindelse med Reform 94. I dagens læreplaner er bruk av grafisk kalkulator en naturlig og prioritert del. Bruken av digitale hjelpemidler, herunder grafisk kalkulator, er vektlagt i enda større grad i læreplanene for det kommende Kunnskapsløftet (KD 2006a:65, se avsnitt 11.5 på s. 151). Det er i dag to kalkulatorprodusenter som er tilnærmet enerådende i Norge: Casio og Texas Instruments. Ved Soltoppen videregående skole har man benyttet kalkulatorer fra Texas Instruments (TI-81, TI-82, TI-83 og nå TI-84) helt siden innføringen i skoleåret 1994/1995.

Grafiske kalkulatorer er altså et obligatorisk og nødvendig hjelpemiddel i både det daglige arbeidet med matematikk, på kapittelprøver, heldagsprøver og eksamener. På den nasjonale prøven derimot, skulle delprøve 1 gjennomføres uten bruk av kalkulator. Slik kan signalene fra overordnede skolemyndigheter oppleves som sprikende og inkonsekvente:

> *Ferdig oppstilte oppgaver med de fire regningsarter som altså over tid nesten hadde forsvunnet fra avgangsprøven, slo imot elevene med full tyngde straks de åpnet heftet Nasjonale prøver. (...) Hvordan forventer man at elever som gjennom flere år er forberedt på andre oppgavetyper, skal håndtere en slik uvant prøvesituasjon?* (Torkildsen 2005:23)

Det er et viktig og dyptgripende spørsmål som stilles her. Det vises for øvrig til lærerintervjuene i avsnitt 7.2 på s. 104ff.

Denne problematikken er det tatt hensyn til i Kunnskapsløftet. Samtidig som det skal satses på bruk av digitale hjelpemidler, ønsker man å fokusere på de manuelle og grunnleggende regneferdighetene. Eksamen skal derfor være todelt:

> *Den første delen av eksamen vil foregå med få eller ingen hjelpemidler. Det vil ikke være tillatt å ha med egne notater eller å bruke digitale hjelpemidler. Ved den andre delen av eksamen vil det være tillatt å bruke symbolbehandlende programmer på datamaskin eller lommeregner* (KD 2006b).

Den nasjonale prøven våren 2005 var i så henseende utformet i henhold til retningslinjene i Kunnskapsløftet og ikke Reform 94.

4 Metode

4.1 Metodisk tilnærming

4.1.1 Kvalitativ forskning

I litteraturen er det mange ulike forståelser av hva kvalitativ forskning er. Ofte karakteriseres slik forskning som en samling av bestemte databehandlingsmetoder. I andre sammenhenger forstås kvalitativ forskning som alt det som ikke er kvantitativ forskning. Vi tar med en definisjon fra Denzin & Lincoln som samsvarer med den forståelsen som ligger til grunn for dette arbeidet:

> *Qualitative research is multimethod in focus, involving an interpretive, naturalistic approach to its subject matter. This means that qualitative research study things in their natural setting, attempting to make sense of, or interpret, phenomena in terms of the meanings people bring to them* (Denzin & Lincoln 1994:200).

Det empiriske materialet i dette arbeidet er hentet fra det daglige skole-Norge. Med dette utgangspunktet innhenter vi kvalitativ informasjon om elevens oppfatning av ulike matematiske begreper. Denne informasjonen muliggjør en dypere forståelse for og innsikt i elevens matematikklæring.

4.1.2 Kvalitative metoder i dette arbeidet

Hensikten med dette arbeidet er primært å kartlegge hvilke oppfatninger elevene ved Soltoppen videregående skole har innenfor representasjoner, symbolbruk og formalisme (RSF) som kompetanseområde. Arbeidet vårt utføres innenfor den etnografiske tradisjonen av kvalitativ forskning:

> *Ethnography can be defined as a research method designed to describe and analyze practices and beliefs of cultures and communities* (Mertens 1998:164f.).

Ved å analysere besvarelsene av den nasjonale prøven søker vi å få bedre innsikt i hvilke tanker elevene har om ulike matematiske begreper. Samtidig vil analysen gjøre oss bedre kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene.

> *The focus of ethnography is to understand the culture from an emic (insider) and etic (outsider) perspective. Culture can be defined as the behavior, ideas, beliefs, and knowledge of a particular group of people* (s. 165).

Med denne innsikten vil vi være i bedre stand til å legge til rette for effektiv og langsiktig læring.

4.2 Prosedyrer i datainnsamlingen

4.2.1 Besvarelsene av den nasjonale prøven

Den 15. april 2005 gjennomførte totalt 150 elever ved Soltoppen videregående skole den nasjonale prøven i 1MX. Av disse var 67 jenter og 83 gutter. Elevene var fordelt i sju ulike grupper med sju ulike lærere. Mot slutten av skoleåret ble de 150 besvarelsene vurdert av lærerne med utgangspunkt i kodeboka (se avsnitt 11.1 på s. 123ff.). Den enkelte lærer rapporterte så inn tre poengsummer for hver elev, oppnådd poengsum innenfor henholdsvis RSF, RTK og APM (se avsnitt 2.2.4 på s. 11ff.). Elevene fikk tilbakemelding om resultatet av prøven i det minste i form av en kompetanseprofil (se figur 2.3 på s. 13). Prøvene ble så oppbevart i en safe.

I forbindelse med dette masterarbeidet ble prøvene hentet fram igjen i september 2005. Alle de 150 besvarelsene av prøvesettets åtte RSF-oppgaver ble vurdert og kategorisert på ny i henhold til kodene i kodeboka. Opplysningene ble systematisert i regneark. I etterkant av dette arbeidet ble tjue besvarelser på nivå 3, tjue på nivå 4 og tjue på nivå 5 valgt tilfeldig ut. Det er disse seksti besvarelsene som utgjør det empiriske materialet for dette masterarbeidet.

4.2.2 Intervjuer med lærerne

I neste omgang ble det gjennomført "semi-strukturerte" intervjuer (Mertens 1998:322) med fem lærere. I et slikt intervju setter man på forhånd opp noen punkter som samtalen skal dreie seg om, dog uten at disse skal være for styrende. Disse intervjuene ble foretatt etter at analysen var avsluttet slik at spørsmålene i intervjuguiden (se avsnitt 11.2.1 på s. 129) i størst mulig grad var gjennomtenkte og relevante i forhold til det øvrige materialet.

Det er utvilsomt mange fordeler med et personlig intervju i forskningssammenheng. Man samler inn informasjon på en åpen måte, og det er ikke begrensninger i hva respondenten kan svare. Detaljer og nyanser kan vektlegges, eventuelle misforståelser oppklares og man kan være fleksibel og gå i dybden. Nettopp dette var målet med intervjuene – å ta del i lærernes tanker omkring de nasjonale prøvene.

Det ble altså opprinnelig gjennomført fem intervjuer. I ettertid viste det seg at mikrofonen hadde sluttet å virke kort tid inn i det tredje intervjuet. Som følge av dette måtte tre intervjuer foretas på ny. Dette er tilfelle for intervjuene med lærer 3 (se avsnitt 11.2.4 på s. 134f.), lærer 4 (se avsnitt 11.2.5 på s. 136ff.) og lærer 5 (se avsnitt 11.2.6 på s. 140f.). Dermed hadde disse lærerne allerede besvart spørsmålene ved en tidligere anledning, noe som nødvendigvis vil kunne ha en viss effekt på de svarene som er gitt.

4.3 Prosedyrer i dataanalysen

4.3.1 Besvarelsene av den nasjonale prøven

Etter å ha samlet inn og kodet besvarelsene startet arbeidet med den detaljerte analysen av det empiriske materialet. Først ble samtlige besvarelser i kategorien "andre svar" (kode 99) studert oppgave for oppgave. Den enkelte besvarelse ble analysert og beskrevet med tanke på strategier, framgangsmåter og oppfatninger. Didaktisk spesielt interessante elevsvar ble markert og samlet i en egen oversikt. For hver enkelt RSF-oppgave i prøvesettet ble så oppmerksomheten rettet mot eventuelle fellestrekk og tendenser i elevenes feilsvar. For i størst mulig grad å kunne oppdage hvilke oppfatninger, tanker og ideer den enkelte elev har om ulike begreper, ble denne analysen fulgt opp av inngående leting etter konsekvente misoppfatninger i den enkelte elevs besvarelse. I dette arbeidet var kryssjekking av kodene i regnearkene et godt hjelpemiddel. Disse ulike innfallsvinklene til analysearbeidet avdekket flere interessante forhold; både ved selve besvarelsene, men også ved de foreslåtte kodene.

Goldin (2000:527) påpeker at forskning av høy kvalitet i tydelig grad må skille det som er observert fra det som er dedusert. Man må med andre ord holde seg til de informasjonene som faktisk er observert og hentet inn, og ikke tolke disse for langt og i neste omgang stå i fare for å trekke feilaktige konklusjoner. Dette har vært et gjennomgående hovedprinsipp i arbeidet, og analysen inneholder derfor et stort antall autentiske elevsvar. Videre er det lagt vekt på også å presentere elevsvar som ikke er eksplisitt analysert. Dette er gjort for at leseren selv skal kunne ta del i mest mulig av det empiriske materialet.

4.3.2 Intervjuer med lærerne

Lærerintervjuene ble først transkribert i sin helhet. Av hensyn til anonymitet ble det i dette arbeidet brukt bokmål i stedet for dialekt. Transkripsjonene ble så lest flere ganger og interessante uttalelser ble markert. I analysen er det spesielt lagt vekt på forhold som dukker opp i to eller flere av intervjuene. Det er bevisst lagt opp til bruk av mange sitater slik at mistolkninger i størst mulig grad unngås (jf. Goldin ovenfor).

5 Det matematiske symbolspråket

Matematikk er et effektivt språk når det gjelder å beskrive og analysere mange sider av våre omgivelser. Brekke (1994) trekker paralleller mellom innlæringen av dette språket og den prosessen man går igjennom når man lærer andre språk. Nye symbolske notasjoner og nye regler for hvordan man manipulerer disse symbolene, setter den "språkkyndige" matematikeren i stand til å uttrykke konsise meninger og ideer. I motsetning til læring av andre språk er det i matematikken mulig, og nokså vanlig hevder Brekke, å lære disse reglene uten å forstå de underliggende begrepene som reglene refererer til. Dette resulterer ofte i at matematikk blir et formelt og lite interessant fag som man ikke ser nytten av (s. 4). Samtidig er den symbolske algebraen semantisk veldig svak. *By suiting all contexts, the language appears to belong to none* (Kieran 1990:97). Dette er utfordringer som kan gjøre innføringen og forståelsen av "bokstavregning" problematisk.

Pea (1987) definerer en "cognitive technology" som *any medium that helps transcend the limitations of the mind (e.g., attention to goals, short-term memory span) in thinking, learning, and problem-solving activities* (s. 91). Spesielt nevner han at skriftspråket og systemer for matematisk notasjon, herunder algebra, har fått mye oppmerksomhet som kognitive verktøy. Disse kognitive teknologiene er viktige for vår intelligens idet de gjør resultater av tenkning eksterne. Dette er et viktig aspekt ved matematikkens symbolspråk – det bidrar til at vi kan bruke vår kapasitet til mer overordnede oppgaver som oppdaging og planlegging.

5.1 Litt historikk

Kunnskap om den historiske framveksten av det algebraiske symbolsystem kan bidra til en mer årvåken analyse av elevarbeid idet eleven selv ofte går gjennom en liknende utvikling.

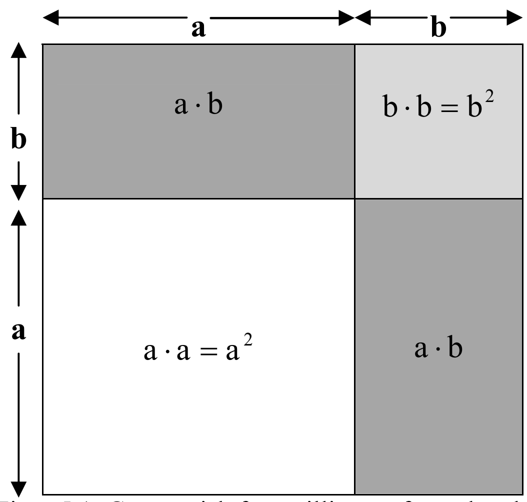
> *History can give us a balanced sense of how really difficult some issues are, and how much struggle sometimes precedes understanding or the formation of the appropriate concepts* (Arcavi 1995:146).

Inspirert av den tyske historikeren Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1842) kan vi betrakte denne utviklingen i fem faser (Bekken 2000):

a) Numerisk algebra
b) Geometrisk algebra
c) Retorisk algebra
d) Synkopert algebra
e) Symbolsk algebra

Numerisk algebra inneholder rekker av talleksempler som følger en standardisert oppskrift. Den inneholder ingen symbolisering og heller ingen generell retorisk formulering av regneoppskriften. Eksempler på numerisk algebra finner vi på babylonske leirtavler så tidlig som ca. 1700 f. Kr. og i den egyptiske Ahmes-papyrusen fra ca. 1500 f. Kr.

Den geometriske algebraen forbindes med Euklid (ca. 300 f. Kr.) og hans "Elementer". Enkelte geometriske setninger i hans bok II, som for eksempel setning II.4, kan tolkes som utledning av sammenhengen $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ved hjelp av arealberegninger. Setningen er illustrert ved figur 5.1 nedenfor, et eksempel som vi fremdeles gjør bruk av i undervisningen i dag:



Figur 5.1: Geometrisk framstilling av første kvadratsetning.

Retorisk algebra er karakterisert ved at man bruker vanlig språk med ord og setninger for å uttrykke matematiske sammenhenger og for å løse problemer. Det anvendes ikke symboler og spesielle tegn for verken gitte tall eller ukjente. De arabiske og indiske tekstene fra Al-Khwarizmi (ca. 825) og Bhaskara (ca. 1150) presenterer problemløsning i denne stilen. I de første skoleårene arbeider elevene mye med å uttrykke seg matematisk ved for eksempel å lage regnefortellinger (KUF 1996:158ff.). Sammenhenger artikuleres og formuleres ved hjelp av det daglige språket. Elevene jobber altså med retorisk algebra.

Med Cardanos ”Ars Magna” fra 1545 introduseres bruk av forkortelser for *ukjente* størrelser, og også p for pluss, m for minus og R for Radix (rota av). Med dette innledes den synkoperte algebraen, men det blir vanskelig å uttrykke generelle prosedyrer:

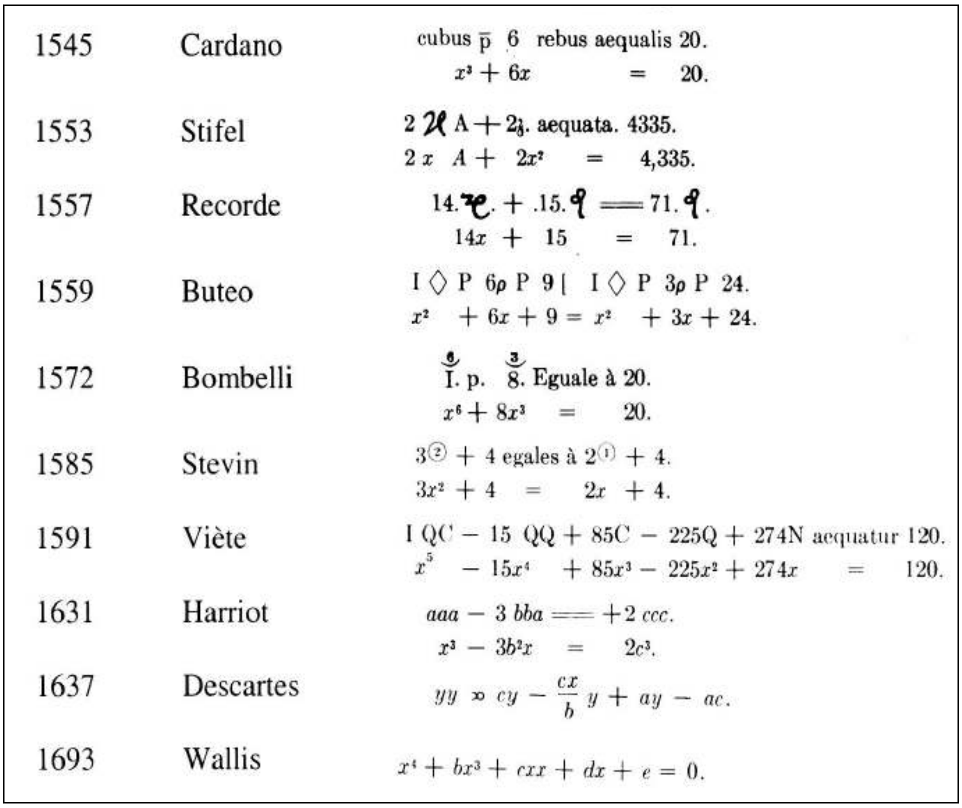
> *Syncopated notation did not (yet) enable mathematicians to take algebra to a higher level: the level of generality. It is important that students experience this limitation themselves in order to appreciate the value and power of modern mathematical notation* (Amerom 2002:40f.).

Synkopert algebra brukes i stor utstrekning i skolen. For eksempel vil mange elever gjerne uttrykke Pytagoras´ setning som $h^2 = k^2 + k^2$.

Symbolsk algebra ble innledet av den franske juristen Viète (1540-1603) som tok i bruk bokstaver for å representere størrelser. Han brukte konsonanter (B, C, D,...) for kjente og vokaler (A, E, I,...) for ukjente størrelser. Dette gjorde det mulig å uttrykke generelle løsninger og å bruke algebra som et verktøy for å bevise generelle numeriske relasjoner. I denne perioden utvikler symbolspråket seg gradvis fram mot våre ”moderne” notasjoner. I 1637 innførte Descartes de første bokstavene i alfabetet (a, b, c,...) som tegn for de kjente størrelsene og de siste bokstavene (…,x, y, z) som tegn for de ukjente. Denne symboliseringen bruker vi fremdeles i dag.

Selv om den moderne symbolske algebraen er både effektiv og plassbesparende, vil ikke elever nødvendigvis bruke denne i alle sammenhenger. Undersøkelser viser at både yngre og eldre elever gjerne bruker retoriske metoder dersom de ikke er nødt til å bruke symbolsk algebra (se for eksempel Harper 1987). De matematiske problemene synes å måtte ha en viss vanskelighetsgrad før elevene vurderer det som hensiktsmessig med fullstendig symbolisme. Ulike elever vil foretrekke ulike tilnærminger til det samme problemet. Som lærer bør man i størst mulig grad åpne og legge til rette for flest mulig av disse.

I et arbeid som dette er det ikke rom for å utforske algebraens historie ytterligere. Vi tar avslutningsvis med følgende samling av likninger for å synliggjøre den symbolske algebraens gradvise utvikling (Amerom 2002:39):



1545	Cardano	cubus p̄ 6 rebus aequalis 20. $x^3 + 6x = 20.$
1553	Stifel	2 𝔛 A + 2ʓ. aequata. 4335. $2x\ A + 2x^2 = 4{,}335.$
1557	Recorde	14.ϰ. + .15.ϙ ═══ 71.ϙ. $14x + 15 = 71.$
1559	Buteo	I ◊ P 6ρ P 9 [I ◊ P 3ρ P 24. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24.$
1572	Bombelli	$\overset{6}{\text{I}}$. p. $\overset{3}{8}$. Eguale à 20. $x^6 + 8x^3 = 20.$
1585	Stevin	3② + 4 egales à 2① + 4. $3x^2 + 4 = 2x + 4.$
1591	Viète	1 QC − 15 QQ + 85C − 225Q + 274N aequatur 120. $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120.$
1631	Harriot	$aaa - 3\,bba === +2\,ccc.$ $x^3 - 3b^2x = 2c^3.$
1637	Descartes	$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$
1693	Wallis	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Figur 5.2: Progresjon i symboliseringen av likninger.
Hvert eksempel er ledsaget av moderne notasjon i linjen under.

Disse historiske glimtene viser at utviklingen fra numerisk til symbolsk algebra tok lang tid. Flere forskningsarbeider antyder at eleven gjennomgår de samme stadiene i sin utvikling av et matematisk symbolspråk. Slik vil det i klasserommet kunne lønne seg å arbeide i et langsiktig perspektiv og å la elevens møte med algebra følge den samme historiske utviklingslinjen. Amerom (2003) oppfordrer til det samme og viser til at kompetanse i formell symbolbruk og resonnementskompetanse ikke nødvendigvis utvikles i samme tempo – verken nå eller i et historisk perspektiv. Eleven må derfor få rikelig anledning til å bli kjent med de ulike rollene bokstavene har i matematikken.

5.2 Bokstavenes mange roller i matematikken

I matematikken møter eleven bokstaver i mange ulike forbindelser. Tidlig i skoleløpet lærer man om lengde og måling. I denne sammenhengen vil oftest *12m* stå for *12 meter*, det vil si 12 ganger 1 meter. Senere og i andre sammenhenger vil denne *m*-en gjerne ha en annen betydning. I algebra kan den for eksempel representere et ukjent *antall* meter – hele lengden *m* – altså som et variabelnavn. *12m* kan også i visse forbindelser være en forkortet skrivemåte for eksempelvis *12 melkekartonger*. Her er *m*-en brukt som en slags vilkårlig merkelapp for et konkret objekt. Bokstavenes betydning er altså i høyeste grad avhengig av kontekst (Kieran 1990:98).

På barneskolen brukes bokstaver i matematikken stort sett som merkelapper eller forkortinger for ord: *m* står for *meter*, *l* for *lengde, A* for *areal*, *V* for *volum* og *t* for *tid* er eksempler på dette. Slik er det en nær og logisk sammenheng mellom det daglige språket og matematikkens symbolspråk. Formelen for volum av et rett prisme, $V = l \cdot b \cdot h$, er i så måte bare en forkortet versjon av *volum = lengde · bredde · høyde*. Denne bruken av bokstaver er problematisk når eleven for eksempel skal lære bokstavens betydning som variabel. Vi kommer tilbake til dette i avsnittene 5.3 og 5.4 nedenfor.

> *It is likely that this use of letters reinforces the belief that letters in mathematical expressions and formulas stand for words or objects rather than for numbers* (MacGregor & Stacey 1997:16).

I sammenheng med funksjoner spiller bokstavene flere roller. Brekke (1994:12 og 2000:9f.) illustrerer dette med utgangspunkt i det generelle uttrykket for en lineær funksjon, $y = ax + b$. I dette funksjonsuttrykket viser bokstavene seg på tre ulike måter. Stigningstallet *a* og konstantleddet *b* er parametere. Begge disse er vilkårlige, men faste tall. Ved å variere disse verdiene vil man få ulike linjer. De to øvrige bokstavene, *x* og *y*, er begge variable, men de har ulik mening i uttrykket. For den uavhengige variabelen, *x*, kan man sette inn vilkårlige tall, og slik regne ut de tilsvarende verdiene til den avhengige variabelen, *y*.

En fjerde betydning finner man i arbeidet med likninger og ulikheter. I denne konteksten er ikke bokstavene lenger variable, men ukjente tall som en skal finne verdien til. Dette gjelder også eksempelvis for et likningssett med to ukjente der man heller ikke skiller mellom de ukjente *x* og *y*. Brekke legger avslutningsvis til at verdiene til *x* i uttrykket $2x + 1 \leq 7$ vil kunne stå for uendelig mange tall i et intervall (Brekke 2000:10). Det er mange konvensjoner og ulike betydninger å holde styr på.

Denne gjennomgangen av bokstavenes mange roller i matematikken er på ingen måte uttømmende, noe som heller ikke er hensikten. Det viktigste er at man er klar over at det matematiske språket brukes og tolkes ulikt i ulike sammenhenger. For en mindre erfaren språkbruker vil det derfor være mange utfordringer knyttet til bokstavrepresentasjoner i matematikken.

5.3 Elevers oppfatninger av bokstaver i matematikk

I følge kognitiv psykologi oppfatter vi verden gjennom vår kognitive struktur. Ny informasjon tar plass ved at nye forbindelseslinjer oppstår og at strukturen reorganiseres. Når eleven møter bokstaver for første gang, forsøker han derfor å tillegge disse mening med utgangspunkt i tidligere erfaringer. I denne fasen oppstår ofte misoppfatninger og kognitive konflikter. Begrepsstrukturene som er utviklet i arbeidet med aritmetikk, må bygges ut og gjerne til og med endres for å imøtekomme algebraens krav. Dette er en langsom og omfattende prosess der generalisering av tidligere ervervet kunnskap står sentralt.

> *Algebraic concepts represent abstractions and generalizations of certain aspects of numbers, not objects, and thus signify a new departure – a new, higher plane of thought* (Vygotsky 1962:114f.).

Det er ikke problemfritt å nå dette høyere nivået av matematisk tenkning.

MacGregor & Stacey (1997) viser at elever ofte baserer sine tolkninger av bokstaver og algebraiske uttrykk på intuisjon og gjetting. Andre tegn- og symbolsystemer fra både skole- og fritidssammenheng vil også kunne danne grunnlag for feiltolkninger. For eksempel registrerte MacGregor & Stacey eksempler på en slags ”alfabetisk” tolkning av bokstaver, altså at $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ og så videre (s. 5). Dette kan for eksempel resultere i at uttrykket $H + 10$ likestilles med R siden den tiende bokstaven etter H er R. En slik forståelse for bokstaver kan komme fra erfaringer med kodespråk og gåter.

Küchemann (1981) har gjort en større studie av hvilke ulike oppfatninger elever har av bokstaver i matematikken. 3000 britiske elever i aldersgruppen 13 til 15 år deltok i prosjektet *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS). Han beskriver seks ulike måter som bokstaver kan bli brukt eller tolket på (Küchemann 1981:104ff.):

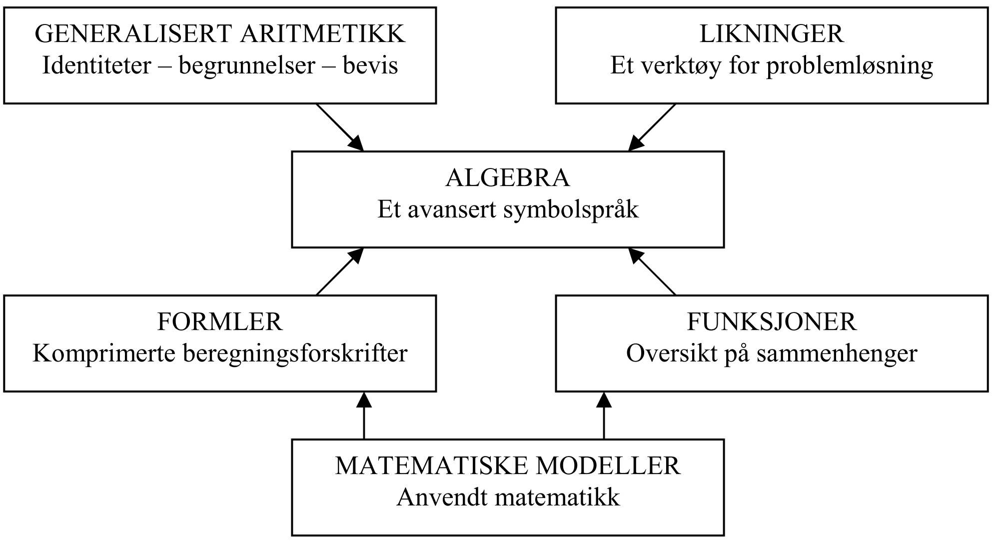
Eleven unngår å bruke generalisert aritmetikk	***Letter evaluated*** Denne kategorien anvendes når eleven skal finne numeriske verdier. Et eksempel kan være: $a + 5 = 8$, hva er a?
	Letter not used Enten ignorerer eleven bokstaven eller så brukes bokstaven uten mening. I det følgende eksemplet vil denne tilnærmingsmåten gi riktig svar: $a + b = 43$, hva er $a + b + 2$? Eleven kan altså løse oppgaven uten å vite noe om verdien til a og b.
	Letter used as an object Her brukes bokstaven som navn på et objekt eller som objektet i seg selv. Uttrykket $2a + 5b + a$ kan trekkes sammen ved for eksempel å oppfatte *a* som appelsiner og *b* som bananer. Se egen omtale av fruktsalatalgebra i avsnitt 5.4 nedenfor.
Eleven bruker algebra som generalisert aritmetikk	***Letter used as a specific unknown*** Elever som har denne tolkningen av bokstaver, er i stand til å godta mangel på avslutning av uttrykk. De er villige til å akseptere at en bokstav er et spesifikt ukjent tall og til å utføre regneoperasjoner på dette. For eksempel vil uttrykket $8 + g$ aksepteres som svaret på følgende oppgave: Dersom $e + f = 8$, hva er da $e + f + g$? Elever som bruker denne tilnærmingen, vil generelt ikke være i stand til å finne flere verdier som svar på et problem.
	Letter used as generalised number I denne kategorien vil eleven være i stand til å bruke en bokstav til å representere et generelt tall. I motsetning til den forrige kategorien kan bokstaven her stå for flere eller uendelig mange ulike verdier. Eksempel: Hva kan du si om c hvis $c + d = 10$ og c er mindre enn d?
	Letter used as variable Å oppfatte bokstaver som variable innebærer å ha forståelse for hvordan en tallmengde forandres i forhold til en annen. Vi tar med et eksempel som til en viss grad måler dette: Hva er størst av $2n$ og $n + 2$? Forklar hvordan du tenker.

Figur 5.3: Küchemanns seks kategorier av oppfatning av bokstaver i matematikk.

Küchemann legger vekt på det vesentlige skillet mellom de tre første og de tre siste kategoriene. De tre første er nært knyttet til den konkrete virkeligheten, mens de tre siste har en abstrakt karakter som i betydelig større grad krever formell algebraisk tenkning. I arbeidet med å kunne tilby opplæring i algebra som er tilpasset den enkelte elevens forutsetninger, vil Küchemanns kategorier kunne være nyttige idet de viser ulike måter å tilnærme seg det algebraiske symbolspråket på.

I sitt forskningsarbeid fant for øvrig Küchemann at flertallet av elevene (73 % av 13-åringene, 59 % av 14-åringene og 53 % av 15-åringene) behandlet bokstaver i uttrykk og likninger som konkrete objekter. Få var i stand til å oppfatte dem som spesifikke ukjente størrelser, og enda færre elever hadde en forståelse av bokstaver som generaliserte tall eller variable.

Mange elever har altså problemer med å knytte mening til og gjøre bruk av det abstrakte symbolspråket. Breiteig & Venheim (1999:17) foreslår at man som lærer derfor må legge til rette for en flersidig tilnærming til algebra:



Figur 5.4: Innfallsvinkler til algebra (Breiteig & Venheim 1999:17).

5.4 Fruktsalatalgebra

Den tredje av Küchemanns seks kategorier, *letter used as an object*, omfatter en mye omtalt og brukt tilnærming i innledende algebra. Denne omtales derfor i et eget avsnitt.

Med gode intensjoner om å hjelpe elevene i arbeidet med algebraiske uttrykk, gjør mange lærere bruk av såkalt "fruktsalatalgebra" (se for eksempel Pimm 1987:131f.). Her skal eksempelvis $5a + 2b$ oppfattes som fem appelsiner og to bananer, altså som ulike enheter i seg selv. Slik kan man bygge videre på den oppfatningen eleven allerede har av bokstaver. Pimms kritikk av denne tilnærmingen går hovedsakelig ut på at eksempelvis *a* er å oppfatte som appelsiner og at samme *a* samtidig kan oppfattes som *antall* appelsiner. Det er altså ingen forskjell mellom objektet i seg selv og antallet objekter. Fruktsalatmetoden for læring av algebra kan også føre til at for eksempel $5a + 2b$ forenkles til 7ab, altså som "sju appelsiner og bananer". Dette har også sammenheng med at *og* og *pluss* semantisk sett brukes nokså likt i det daglige språket (Tall & Thomas 1991:126).

Tall (1993:38) argumenterer på samme måte som Pimm og stiller spørsmål om hvordan man skal gi mening til $a^2 - b^2$ med utgangspunkt i appelsiner og bananer. Som lærer presenterer man ofte matematikken i en forenklet kontekst når man møter vanskeligheter. Dermed innfører vi forenklede regelmessigheter som i sin tur blir del av elevens begrepsbilde eller *concept image*: *the total cognitive structure that is associated with the concept* (Tall & Vinner 1981:152). Senere kan disse rotfestede forenklingene forårsake alvorlige kognitive konflikter og opptre som hinder for læring (se for eksempel Tirosh et al. 1998:55f. i forbindelse med fruktsalatalgebra).

Fruktsalatalgebra vil innledningsvis kunne gi en viss suksess, spesielt når oppgavene er begrenset til addisjon. For eksempel vil denne tilnærmingen gjerne føre fram i uttrykk som $2a + 3a + 4b$: ”to appelsiner pluss tre appelsiner pluss fire bananer gir fem appelsiner og fire bananer.” Straks uttrykket inneholder subtraksjon vil en slik tankegang oftest volde større problemer: $2a + 3a - 4b$ gir ”fem appelsiner minus fire bananer”. Her skal man altså fjerne fire bananer fra en ”fruktskål” som ikke inneholder en eneste banan. Forståelsen av bokstaver som konkrete objekter har med andre ord et svært begrenset bruksområde.

6 Diagnostisk verdi i RSF-oppgavene

Det vil her bli foretatt en gjennomgang av de åtte oppgavene som hadde til hensikt å måle elevens kompetanse innenfor RSF. Prøvesettet bestod for øvrig av totalt 22 oppgaver. I det følgende settes den diagnostiske verdien i fokus.

6.1 Delprøve 1

Hovedtyngden av RSF-oppgaver finner man i delprøve 1. Disse oppgavene skulle løses uten bruk av elevbok, formelsamling og kalkulator. Ved ikke å tillate bruk av kalkulator kan man teste elevene i grunnleggende algoritmiske ferdigheter. Elevene hadde 30 minutter til rådighet i arbeidet med denne delprøven som totalt bestod av ti oppgaver.

6.1.1 Oppgave 1

Regn ut:

a) $15{,}1 + 0{,}44 =$ ________

b) $4{,}3 - 0{,}38 =$ ________

c) $3{,}4 \cdot 6{,}22 =$ ________

Figur 6.1: Oppgave 1.

Prøvesettet starter med å teste elevene i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av desimaltall. I alle tre deloppgavene har de to involverte tallene et ulikt antall desimaler. Slik ønsker man å teste elevens forståelse av posisjonsprinsippet i tallsystemet. Innenfor tall og tallregning er det en velkjent misoppfatning at eleven ser på et desimaltall som et par av hele tall (Brekke 1995:29f.). Denne misoppfatningen kan forstås som en overgeneralisering av regler som kun er gyldige innenfor området av hele tall (Greer 1992:293). Med en slik oppfatning vil man kunne få 15,45 (15 + 0 og 1 + 44) som svar i oppgave 1a. Tilsvarende vil oppgave 1c kunne gi svaret 18,88 ($3 \cdot 6$ og $4 \cdot 22$). I vurderingen av subtraksjonsoppgaven vil man kunne se om eleven forstår og kan gjøre bruk av det faktum at 4,3 = 4,30. Mange elever, og spesielt yngre enn ”våre”, oppfatter gjerne det korteste desimaltallet som minst siden $3 < 30$ (Brekke 1995:30). Også dette kan forklares med oppfatningen av et desimaltall som par av hele tall. Samtidig vil denne oppgaven teste om eleven behersker rutinene ved tierovergang.

I denne sammenhengen trekker Brousseau inn et interessant aspekt fra skolehverdagen. Han viser til at elevene oftest møter tall med like mange desimaler, og at disse gjerne representerer størrelser som penger (kroner og øre) eller lengdemål (meter, desimeter og centimeter). Dette kan bidra til å utvikle og forsterke misoppfatningene som er omtalt ovenfor:

> *But in fact, these school decimal numbers are really just whole natural numbers. In every measure there exists an indivisible submultiple, an atom, below which no further distinctions are made. Even if the definition claims that all units of size can be divided by ten, these divisions are never – in elementary teaching – pursued with impunity*

> *beyond what is useful or reasonable, even through the convenient fiction of the calculation of a division. (...) Under these conditions, decimal numbers retain a discrete order, that of the natural numbers; many students using this definition will have difficulty in imagining a number between 10,849 and 10,850* (Brousseau 1997:125).

En slik tilnærming kan altså føre til at eleven kun utvikler begrenset forståelse for desimaltall. Dette bidrar også til å forklare at mange elever gjerne har større suksess med desimaltall i oppgaver som dreier seg om penger. Brekke antyder at dette ikke beror på at elevene i denne sammenhengen *forstår* desimaltall, men snarere at de ikke trenger å bruke dem:

> *De kan fortsette med å regne som om det var hele tall, og veksle hundre øre til en krone. De kan altså regne riktig med penger uten at det er nødvendig å bruke meningsinnholdet i desimaltall* (Brekke 2002a:3).

Som lærer bør man derfor sørge for at elevene får utfordringer som involverer desimaltall med ulik lengde i desimaldelen og som ikke utelukkende dreier seg om penger og andre diskrete størrelser. Dette er et komplekst og interessant emne som det ikke er rom for å diskutere videre her.

Det er viktig å poengtere at oppgave 1c skiller seg fra de to andre ved at den vanskelig lar seg løse ved hoderegning. Slik *forutsetter* denne oppgaven, i motsetning til de to andre, bruk av innlærte algoritmer. Jahr (2000) slår fast at hoderegning ikke har fått tilstrekkelig oppmerksomhet i vår tid (se også McIntosh 1995).

> *Hoderegning vil, med sine fleksible strategier, bidra til å øke kunnskapene om tall og regnelover, og det trener evnen til problemløsing* (s. 88).

Også Cockcroft-rapporten understreker gjentatte ganger viktigheten av at eleven er i stand til å utføre enkle beregninger i hodet. Det vises til at eleven gjerne utvikler andre algoritmer for hoderegning enn det som er vanlig med papir og blyant. Rapporten oppfordrer læreren til å stimulere elevens bruk av slike prosedyrer:

> *However, no attempt should be made to force a single ′proper method′ of performing mental calculations; pupils should be encouraged to make use of whatever method suits them best* (Cockcroft 1982:75f.).

Det er avsatt en *frivillig* kladderute i forbindelse med oppgave 1. Eleven står dermed fritt til selv å velge framgangsmåte, formell eller ei.

Oppgave 1 er som helhet velegnet for å teste elevens grunnleggende ferdigheter (Brekke 2002a:4f.) i tre av de fire regneartene. Det skal understrekes at disse testede prosedyrene brukes i svært liten grad i videregående skole. Man har i lengre tid latt kalkulatoren overta slike beregninger, noe som naturligvis svekker elevens evne til å regne både manuelt og mentalt (Verschaffel & De Corte 1996:120). Derfor er det interessant å teste i hvor stor grad slike prosedyrer, som i utgangspunktet bør være automatiserte fra tidligere skolegang, faktisk beherskes av elever på grunnkurs i videregående skole.

6.1.2 Oppgave 2

Regn ut:

a) $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} =$ ________

b) $\frac{14}{15} : \frac{5}{2} =$ ________

c) $5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} =$ ________

d) $4 : \frac{2}{5} =$ ________

Und merk dir ein für allemal
den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,
allein ein großes in den Brüchen.

(Johann Wolfgang von Goethe, *Faust*.)

Og merk deg en gang for alle det viktigste av alle ordtak: Det ligger ingen hemmelighet i tallet, men en stor en i brøkene.

Figur 6.2: Oppgave 2.

I den norske skolen gjør eleven sine første erfaringer med brøk i tredje klasse når de skal *bruke enkle brøker som en halv og en kvart i praktiske sammenhenger* (KUF 1996:160). Gjennom barneskolen utvides brøkbegrepet gradvis, og i åttende klasse skal elevene *arbeide med alle regneartene på hele tall, desimaltall og brøk og regne med prosent og promille* (s. 167). På grunnkursnivå vies ferdigheter i grunnleggende brøkregning bare i mindre grad eksplisitt oppmerksomhet. Man går som oftest ut fra at disse prosedyrene er automatisert i tidligere skolegang, noe som også er nødvendig i arbeidet med for eksempel rasjonale bokstavuttrykk.

Med utgangspunkt i formuleringene ovenfor fra læreplanen skulle man kunne forvente at oppgave 2 i den nasjonale prøven ville være grei for en grunnkurselev i den videregående skolen. Erfaringsmessig er det ikke slik:

> *Fractions are without doubt the most problematic area in elementary mathematics education* (Streefland 1991:6).

Streefland mener at vanskelighetene hovedsakelig skyldes to forhold (s. 11):

- *extreme underestimation of the complexity of this area of learning for children;*
- *the mechanistic approach to fractions, detaching it from reality and focusing on rigid application of rules.*

Kompleksiteten viser seg spesielt om en ikke bare ser på regneoperasjonene som matematiske beregninger, men også på hvordan de er modeller for ulike praktiske situasjoner (Greer 1992:276). Den nasjonale prøven inneholder flere tekstoppgaver innenfor kompetanseområdet RTK (resonnement, tankegang og kommunikasjon) der bruken av brøkregning i praktiske situasjoner blir testet. I denne RSF-oppgaven, og i dette arbeidet, er fokus utelukkende rettet mot selve den matematiske beregningen av de ferdig oppstilte brøkoppgavene.

Streefland er av den oppfatning at vanskelighetene med brøkregning kan løses ved økt fokus på og bevissthet rundt *Realistic Mathematics Education*, altså en tilnærming der eleven ledes og oppmuntres til å ”gjenoppfinne” matematikk ved å utføre den på egen hånd (se også avsnitt 2.3.3 på s. 19f.). Dette står i kontrast til den regelfokuserte instruksjonen som ikke tilstrekkelig tar hensyn til den ufullstendige og uformelle kunnskapsbasen som eleven allerede har bygd opp.

Som følge av en slik tradisjonell regelfokusert tilnærming til faget, har mange elever en oppfatning av matematikk som en samling av regler, formler og algoritmer (Brekke 2002a:5). Eleven lærer seg én regel eller oppskrift for addisjon av brøker, én for multiplikasjon, én for divisjon og kanskje andre regler og prosedyrer dersom et helt tall er involvert i regnestykket. Reglene og prosedyrene har begrenset fleksibilitet og kan kun brukes på den spesielle typen av oppgaver. Slik opplever man gjerne en sammenblanding av regler og prosedyrer fordi eleven etter hvert ikke evner å huske gyldighetsområdet til hver enkelt regel (Brekke 2002a:5). I denne oppgaven testes nettopp elevens regelbeherskelse innenfor brøkregning.

Som et resultat av sammenblanding av regler, vil man eksempelvis i oppgave 2a kunne oppleve at prosedyrer for addisjon tas i bruk i stedet for prosedyrer for multiplikasjon. I oppgave 2b har gjerne eleven en vag forestilling om at en brøk skal snus og at divisjonen skal bli til multiplikasjon. Manglende forståelse av hva divisjon av to brøker faktisk innebærer kombinert med sammenblanding av regler utviklet for andre spesialtilfeller, vil kunne resultere i flere ulike framgangsmåter og svar på denne oppgaven. I den siste deloppgaven, 2d, har man et helt tall som dividend. Også her kan man forvente løsningsstrategier der prosedyrer fra andre tilfeller blandes inn.

I oppgave 2c er tallene representert på såkalt blandet form, det vil si en kombinasjon av hele tall og brøk. I tillegg til problemer med sammenblanding av regler vil man her kunne forvente at noen elever i tillegg blir forvirret av selve notasjonen. Brekke (2002a:4) gir et tankevekkende eksempel som kan bidra til å forstå elevers symbolforvirring. Det har tatt lang tid å utvikle konvensjonen om at det sammensatte tallsymbolet 32 skal bety $3 \cdot 10 + 2$. Han minner om at det finnes flere andre konvensjoner om hvordan man skal forstå to sammensatte symboler. For eksempel er $3a$ definert som $3 \cdot a$ og ikke $3 \cdot 10 + a$, mens 3 ½ betyr 3 + ½ (usynlig addisjonstegn) og verken $3 \cdot 10$ + ½ eller $3 \cdot$½. Disse forskjellene er verken naturgitt eller selvinnlysende og vil kunne bidra til å gjøre innlæringsfasen av symboliseringen forvirrende og strevsom. Sett i lys av dette vil en mulig misoppfatning i denne oppgaven være at det hele tallet multipliseres med telleren før brøkene trekkes sammen:
$5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2}{5} - \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{10}{5} - \frac{2}{2} = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$. Til sammenlikning vet man at $5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 2}{5} = 2$ er en korrekt utført beregning. Når man altså i tillegg lærer elevene at det matematiske språket er fullt av ”usynlige” multiplikasjonstegn, kan man lett se hvordan denne representasjonsformen kan skape forvirring og misoppfatninger.

6.1.3 Oppgave 3

Hva er summen av

a) $6n$ og $3n$ Svar: ____________________

b) 2 og $n+5$ Svar: ____________________

c) $3a+a^2$ og $2a-2a^2$ Svar: ____________________

Figur 6.3: Oppgave 3.

Etter å ha testet eleven i regning med desimaltall og brøker, rettes fokus mot addisjon av algebraiske uttrykk. Oppgaven er spesiell og uvant for elevene på den måten at den presenteres med en blanding av verbal og symbolsk stil. Her er det også en forutsetning at eleven vet hva en sum er. Pimm (1987) synliggjør og diskuterer relasjonene mellom språk og matematikk. Han undersøker mange av elevenes vanskeligheter i klasserommet og viser til hvordan disse har sitt utspring i lingvistiske aspekter ved matematikken. For den skriftlige matematikkens vedkommende poengterer han at eleven kan uttrykke sine matematiske ideer ved hjelp av en stor bredde av uttrykksformer. Den glidende overgangen mot et formelt algebraisk språk deler han i tre (s. 118, mine eksempler):

Stil	Eksempel
Verbal stil	Arealet av en trekant er grunnlinjen gange høyden delt på to
Blandet stil	Arealet av en trekant er ½ × grunnlinjen × høyden
Fullstendig symbolsk stil	$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2}$

Figur 6.4: Pimms tredeling av skriftlige uttrykksformer i matematikk.

Pimm hevder at lærere suser av gårde mot den fullstendig symbolske stilen som om det er symbolisme som er *virkelig* matematikk. Han foreslår å ta det rolig og ikke ile mot symbolisme for enhver pris:

> *Premature symbolization is a common feature of mathematics in schools, and has as much to do with questions of status as with those of need or advantage* (Pimm 1987:129).

Arcavi er av en liknende oppfatning som Pimm. Han sammenlikner matematiske redskaper med redskaper i en jernvarehandel. Man ser verktøyet og lurer på hva det kan brukes til. Han stiller spørsmål ved at man i matematikkundervisning ofte utstyrer elevene med redskaper på et for tidlig tidspunkt:

> *Algebra, as it is often taught, presents tools too soon, before the questions these tools help to answer are meaningfully understood* (Arcavi 1995:152).

Vi skal se at deloppgave 3c dukker opp i fullstendig symbolsk stil senere i oppgavesettet (oppgave 6e, se avnitt 6.1.4 på s. 47ff.). Slik har man i vurderingsarbeidet en verdifull mulighet til å sammenlikne den enkelte elevens svar på den samme oppgaven i henholdsvis blandet og fullstendig symbolsk stil.

Oppgave 3b kan avdekke en rekke misoppfatninger. Tirosh et al. (1998:52) viser til Booth (1988), Collis (1975) & Davis (1975) som fokuserer på elevenes kognitive vanskeligheter med å godta mangel på "avslutning" av algebraiske uttrykk. Eleven oppfatter gjerne et uttrykk som $n + 7$ som åpent og uferdig og forsøker feilaktig å ytterligere trekke sammen, noe som kan gi typiske feilsvar som $7n$, $n7$ eller bare 7 (ignorerer variabelen). Dette kan skyldes en forventning om at atferden til algebraiske uttrykk skal være lik som for aritmetiske uttrykk, og følgelig forventer også eleven et liknende enleddet svar (Tall & Thomas 1991:126). Brekke (2000:27) omtaler dette som å *legge inntil hverandre*. Tirosh et al. (1998:53) bemerker videre at også $7n$ er et åpent uttrykk siden det inneholder en multiplikasjonsoperasjon, men at elevene oftest godtar dette og ikke føler behov for ytterligere forenkling. Dette kan forklares med at multiplikasjonstegnet her er *usynlig* og underforstått i tråd med reglene for den matematiske grammatikken (se også omtale av oppgave 2c i avsnitt 6.1.2 på s. 43f.).

Sfard (1991:4) viser til et bredere og mer omfattende aspekt ved denne misoppfatningen. Hun deler abstrakt matematisk forestilling inn i to fundamentalt ulike grupper:

(1) operasjonelt, som prosesser
(2) strukturelt, som objekter

Eksempelvis kan $n + 7$ *både* oppfattes som prosessen å legge sammen *og* selve objektet, altså selve det generelle uttrykket som ikke kan og skal forenkles ytterligere. Symbolet ´+´ indikerer handlingen å addere, noe som gjerne fører til et forsøk på å forenkle $n + 7$ ytterligere. Sfard påpeker at den operasjonelle oppfatningen, for de fleste, er det første steget. Overgangen fra en prosessidé til en objektidé går langsomt og ofte med store vansker (s. 16). Også Tall & Thomas (1991) er opptatt av de matematiske vanskelighetene som denne dualiteten i den matematiske notasjonen kan skape. Teorien er tilsvarende, men de opererer med begrepet *produkt* der Sfard bruker *objekt* (s. 126). Vi vil i fortsettelsen bruke Sfard sine begreper.

Kieran (1990:99) understreker at dersom en elev skal kunne oppfatte et uttrykk som $a + b$ som et objekt i algebra, så må han eller hun være i stand til å se på summen $5 + 8$ som et objekt i aritmetikk, og ikke bare som en prosess som fører til resultatet 13 (se også Booth 1984:89ff.). Slik er det viktig å legge til rette for aktiviteter som berører og utfordrer den strukturelle forestillingen i arbeidet med aritmetikk.

Oppgave 3a består av to relativt like ledd, 6n og 3n. Flere strategier vil her kunne gi det riktige svaret. Eleven kan for eksempel betrakte *n* som et konkret objekt, eksempelvis en *nøtt*. Addisjonen av 6 nøtter og 3 nøtter gir til sammen 9 nøtter. Et slikt resonnement vil altså gi det korrekte svaret 9n. Den anvendte strategien kan derimot være problematisk når oppgavene blir mer sammensatte. En mulig misoppfatning i oppgave 3a kan være at de to n-ene til sammen blir n^2. En slik potensnotasjon kan typisk ha sitt utspring i sammenblanding av regler for addisjon og multiplikasjon. Brekke (2000:26) viser i denne sammenhengen til at lærestoff som ikke er forankret i forståelse, ofte blir brukt ukritisk. I forbindelse med oppgave 3c, vises det for øvrig til omtale av oppgave 6e i det kommende avsnittet.

6.1.4 Oppgave 6

Regn ut og skriv så enkelt som mulig:

a) $x^3 \cdot x^4 =$ ________________

b) $t^2 + 2t^2 =$ ________________

c) $3y^6 : y^2 =$ ________________

d) $4a - (2b + 3a) =$ ________________

e) $3a + a^2 + 2a - 2a^2 =$ ________________

f) $\dfrac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} =$ ________________

Figur 6.5: Oppgave 6.

I oppgave 6 er samtlige seks deloppgaver skrevet i fullstendig symbolsk stil (se figur 6.4 på s. 45). Her testes blant annet elevens beherskelse av en rekke regneregler for potenser.

I en grunnkursklasse på videregående skole kan man regne med at mange elever har lært å forenkle algebraiske uttrykk ved hjelp av den såkalte fruktsalatmetoden (se avsnitt 5.4 på s. 38f.). Innledningsvis vil en slik tilnærming ofte kunne gi en god effekt, men så snart regnestykkene blir mer komplekse og inneholder potenser vil en slik tenkemåte ikke føre fram. I oppgave 6d vil derimot denne tankegangen kunne gi det riktige svaret, forutsatt at det andre leddet, 2b + 3a, betraktes som *ett* ledd og at fortegnet foran 3a derfor skiftes når parentesen løses opp.

Fruktsalatmetoden viser seg derimot utilstrekkelig i for eksempel oppgave 6b der variabelen er kvadrert. Her vil sammenblanding av regler kunne gi feilsvar som $2t^4$ (addisjon eller multiplikasjon av eksponenter) eller $3t^4$ (addisjon av både koeffisienter og eksponenter). I denne oppgaven legger vi for øvrig merke til at koeffisienten 1, i tråd med konvensjonene, ikke eksplisitt er skrevet foran t^2. Dette er et forhold som gjør oppgaven vanskeligere for mange elever. Skrivemåten $1t^2 + 2t^2$ vil nok kunne oppfattes som enklere da det algebraiske språket framstår som mer konsekvent og logisk.

Parenteser er et viktig redskap for prioriteringer mellom ulike regneoperasjoner. Noen ganger får ikke en parentes direkte innvirkning på regnerekkefølgen, mens det i andre tilfeller er helt avgjørende at parentesen er tilstede. Det siste er tilfelle i oppgave 6d der et subtraksjonstegn står foran parentesen. I undervisningen legges det ofte vekt på å beskrive den prosedyren man følger ved omforminger av slike uttrykk. ”Hvis tegnet foran parentesen er minus, så må du skifte tegn inni parentesen” er et typisk eksempel på dette. I likhet med fruktsalatalgebra er dette en tilnærmingsmåte som er ment å være til elevens beste, og som på kort sikt gjerne bærer frukter. I det lange løp derimot kommer gjerne mangelen av fokus på begrepsforståelse til syne, og eleven får problemer med å skille mellom de ulike reglene og gyldighetsområdene til disse.

At man i matematikken ofte lar være å eksplisitt skrive ett-tall, kan også være en forvirrende faktor i oppgave 6f. Addisjon av de eksplisitte eksponentene i telleren gir $2+6=8$. En slik tolkning vil dermed kunne være opphav til feilsvaret x^5. I den andre divisjonsoppgaven, oppgave 6c, angis divisjonen med ":" i stedet for med brøkstrek. Slik er disse oppgavene visuelt sett svært ulike. Vi legger merke til at divisoren y^2 har den "skjulte" koeffisienten 1. I oppgave 6a er dette tilfelle for begge faktorene. Her vil nok multiplikasjonstegnet kunne være opphav til feilsvaret x^{12}, altså multiplikasjon av eksponentene i stedet for addisjon.

Oppgave 6e, som altså tilsvarer oppgave 3c i fullstendig symbolsk stil, inneholder både første- og andregradsledd. Dessuten er det også her et ledd der koeffisienten 1 er underforstått ($a^2 = 1a^2$). Addisjon av eksponentene slik at man eksempelvis får varianter med a^4, vil være en mulig misoppfatning. Et annet mulig feilsvar, som ved første øyekast kan virke merkelig, er $5a-2$. Man kan tenke seg at eleven først beregner $3a+2a=5a$. Fra a^2 skal man trekke fra $2a^2$. Med en språklig innfallsvinkel kan dette tolkes som å fjerne 2 og a^2, og man står dermed kun igjen med -2. Det endelige svaret blir dermed $5a-2$. *Trekke fra* og *fjerne* er semantisk tilnærmet likestilte begreper, noe som kan legge grunnlag for misforståelser av denne typen.

Linchevski & Herscovics (1996) viser til en annen misoppfatning. De har funnet at blandede ledd i et algebraisk uttrykk gjerne løsrives fra operasjonene: $3x-5x+7x$ tolkes som $3x-12x$ og $3x+2-8x$ som $11x+2$. I oppgave 3c og 6e vil en slik oppfatning eksempelvis kunne resultere i svar som $5a+3a^2$. Slik vil minustegn i algebraiske uttrykk og likninger kunne forårsake problemer.

Tall & Thomas (1991:126) er opptatt av det faktum at både algebra og det naturlige språket uttales, skrives og leses fra venstre mot høyre, mens beregningen ofte skjer motsatt vei. Eksempelvis både leses og beregnes uttrykket $2x+3$ i "logisk" retning, mens $3+2x$ tilsvarende leses som "tre pluss to x", men beregnes fra høyre mot venstre. Det er derfor en typisk misoppfatning at for eksempel $3+2x$ oppfattes som $5x$. Dette er en betydelig kognitiv konflikt mellom det naturlige språket og symboliseringen i algebra. I denne sammenhengen er det verdt å merke seg at det hersker en tro blant elever om at regnerekkefølgen ikke påvirker resultatet av en beregning (Booth 1984:86; Pimm 1987:125). Dessverre er det ingen oppgaver i den nasjonale prøven som direkte er egnet til å kartlegge denne misoppfatningen. Vi ser likevel en variant av dette i oppgave 17a (se avsnitt 7.1.7 på s. 95ff.).

Demby (1997) undersøker de algebraiske prosedyrene som brukes av elever i 13-15-årsalderen når de forenkler algebraiske uttrykk. Skriftlige oppgaver med påfølgende muntlige intervjuer av 108 elever over en toårsperiode resulterte i identifikasjon av sju typer av slike prosedyrer (s. 50-56):

- ***Automatization***: Eleven har automatiserte prosedyrer i forenklingen og har problemer med å forklare hvorfor disse er som de er. "It is obvious" (s. 51).
- ***Formulas***: Eleven begrunner prosedyren ved hjelp av en formel. Demby eksemplifiserer med en elevs forklaring av utvidelsen av $(8x-2x)^2$: "I used the formula $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; a is $8x$, b is $-2x$" (s. 51).
- ***Guessing-Substituting***: Eleven har en formening om hvordan resultatet av forenklingen skal se ut og sjekker dette ved å sette inn tall i det opprinnelige og det forenklede uttrykket for å kontrollere om dette gir samme tallverdi.

- ***Preparatory Modification of the expression***: Eleven søker å endre uttrykkets ytre struktur slik at det blir mer elementært eller lettere å forstå. Som eksempel nevner Demby blant annet at en elev startet med å omforme uttrykket $-2x^2+8-8x-4x^2$ til $-2x^2+8+(-8x)+(-4x^2)$ ("I´ll change it to addition", s. 52).
- ***Concretization***: Denne prosedyretypen kan sammenliknes med fruktsalatalgebra. Eleven forestiller seg en slags modell av den abstrakte operasjonen: "$3x$ and $6x$ make together $9x$ in much the same way as 3 apples and 6 apples make together 9 apples" (s. 54).
- ***Rules***: Eleven refererer til en regel som beskriver en måte å forenkle uttrykket på. Slike regler brukes konsekvent. Et eksempel på en regel som gir riktig beregning av $6x+3x$: "In addition, you add coefficients and copy x" (s. 55). En tilsynelatende lik regel, brukt på $6x \cdot 3x$, gir derimot et feilaktig svar: "I must multiply these numbers [showed the coefficients] and then write x" (s. 55).
- ***Quasi-rules***: Eleven oppgir og bruker en regel, men på inkonsekvent vis. Noen av forenklingene i denne kategorien ga riktig resultat, men mange gjorde ikke det. Som eksempel nevner Demby blant annet at en elev først erstattet x^2 med x, så med $2x$ og en annen gang med $2+x$.

Spesielt konkluderer Demby med viktigheten av å skille mellom prosedyrer av *quasi-rules* på den ene siden, og ukorrekte prosedyrer av *rules* på den andre siden. Disse to prosedyretypene vil kunne resultere i den samme feilen på en skriftlig test, men i intervjusammenheng ble det mulig for Demby å identifisere hvilken type prosedyre den enkelte elev hadde brukt. Slike muligheter for inngående diagnostisering av den enkelte elevens oppfatninger var mye av motivasjonen for at man opprinnelig ønsket en tredelt nasjonal prøve i matematikk (se avsnitt 2.1 på s. 5ff.).

Den kritiske forskjellen mellom disse to kategoriene av prosedyrer er at prosedyrer av *rules* er konsekvente (eleven bruker den samme prosedyren i fortsettelsen og er overbevist om den er riktig), mens *quasi-rules* er inkonsekvente (eleven endrer prosedyren på en tilfeldig måte). Studiene hennes viser at de fleste elevene som bruker *rules*, selv om disse altså er gale, på sikt vil gjøre framgang, mens elevene som bruker *quasi-rules*, med mye større sannsynlighet blir værende på et faglig lavt nivå.

> *It was found that many students used procedures that had never been shown during any lesson and were absent in their textbooks. Somehow these spontaneous procedures were natural for them. Moreover, students frequently referred to rules (often of their own invention), usually expressed in the form of actions to be performed; formulas were rarely used* (Demby 1997:61).

Elever i det samme klasserommet vil utvikle ulike prosedyrer og regler. Besvarelsene av oppgave 6 vil kunne bidra til økt innsikt i den enkelte elevens oppfatninger knyttet til forenkling av algebraiske uttrykk. I dette analysearbeidet bidrar Dembys identifisering av sju ulike typer av prosedyrer til økt bevissthet.

6.1.5 Oppgave 8

Løs likningene:

a) $4x - 2 = 2x + 8$

$x =$ ____________

b) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 4x - 4$

Figur 6.6: Oppgave 8.

Mens oppgave 3 og 6 tar for seg algebraiske uttrykk, tester oppgave 8 elevenes beherskelse av likningsløsning. I oppgave 8a er det kun avsatt plass til selve svaret (i tillegg til en frivillig kladderute), mens det i oppgave 8b kreves at løsningsprosessen vises. Erfaringsmessig har mange elever problemer med å skille mellom regneregler for uttrykk og likninger.

Elevens tilnærming til likningsløsning kan klassifiseres i tre kategorier (Kieran 1990:105):

a) intuitiv tilnærming
b) prøving og feiling
c) formell tilnærming

I undervisningen fokuserer man oftest på den formelle tilnærmingen. De aller fleste elevene har likevel gjort erfaringer med de to første kategoriene i tidligere skolegang (*prealgebra*) der man gjerne representerte det ukjente tallet med med en tom rute (for eksempel $2 + \square = 5$). En slik likning kan enkelt og raskt løses ved hjelp av telling, altså ved å telle 2, 3, 4, 5 og merke seg at tre tall nevnes etter 2. Dette er eksempel på en *intuitiv tilnærming* til likningsløsning. Denne og liknende intuitive tilnærminger vil vanskelig kunne føre fram i deloppgavene ovenfor. Til det er likningene for komplekse. Så snart den ukjente er å finne både på venstre og høyre side i likningen, vil nemlig slike aritmetiske metoder i det generelle tilfellet ikke lenger strekke til. Dette er et viktig punkt i elevens utvikling av algebraiske begreper:

> *The gap that exists between, on the one hand, problems that can be represented by equations with one unknown and that can be solved by arithmetic methods and, on the other hand, problems that are represented by equations with an unknown on each side of the equal sign and that usually must be solved by algebraic methods has been characterized by Filloy and Rojano as a ′didactical cut′. They claim that this gap must be bridged if students are to move from an arithmetical mode of functioning to an algebraic one* (Kieran 1990:100).

For generelt å være i stand til å løse slike likninger må derfor eleven lære seg formell likningsløsning. Dette kan være en tidkrevende og vanskelig prosess. Også Herscovics & Linchevski (1994) viser til dette avgjørende punktet i overgangen fra aritmetikk til algebra, men de opererer med begrepet *cognitive gap* (s. 59) der Filloy & Rojano (1984; 1989) bruker *didactical cut*.

Likningene i oppgave 8 har begge positive heltallssvar $(x = 5 \text{ og } x = 4)$. Slik vil *prøving og feiling* (man forsøker seg fram med ulike verdier som 1, 2, 3 og så videre) relativt raskt kunne gi det riktige svaret. Dette må likevel generelt karakteriseres som en usikker metode som oftest krever både mye tid og anstrengelser. I likningen $4(x + 3) - (x + 5) = -5(x + 10)$ for eksempel, der løsningen er $x = -7{,}125$, ville en slik tilnærming være i overkant tidkrevende og tungvint.

I oppgave 8a vil vurderingsarbeidet ikke direkte kunne avdekke hvilken strategi eleven har brukt. Poengene fordeles uavhengig av framgangsmåte. Likevel vil man eksempelvis med det feilaktige svaret $x = 1$ kunne anta at en formell strategi er forsøkt benyttet, dog uten at eleven har skiftet fortegn ved sideskift i likningen. Tilsvarende vil svarene $x = 3$ eller $x = \frac{5}{3}$ kunne gi en pekepinn om at eleven kun har skiftet fortegn ved én av to anledninger.

I den andre likningen derimot må eleven ha *korrekt svar med utregning* (se avsnitt 11.1, s. 127) for å få den maksimale uttellingen på to poeng. *Korrekt svar uten utregning* belønnes med ett poeng. Her vil det kanskje være ulike oppfatninger om hva som skal betraktes som *utregning*. Utfra de øvrige kodene til denne oppgaven er det tydelig at det er den formelle tilnærmingen man har i tankene. Likevel bør dokumentert prøving og feiling eller en regnetabell også oppfattes som utregning.

I en formell tilnærming vil det være fort gjort at eleven gjør fortegnsfeil, løser opp eller multipliserer ut parenteser på ufullstendigvis vis. I vurderingsarbeidet vil det være verdifullt å studere hvor i løsningsprosessen den enkelte eleven eventuelt gjør en glipp.

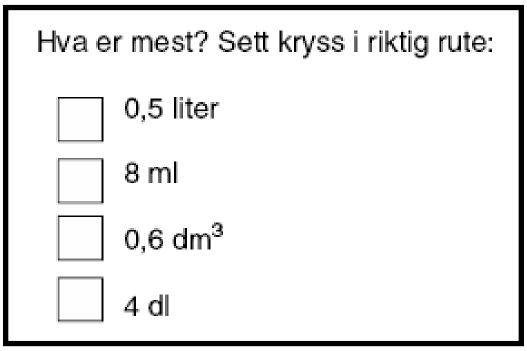
Når eleven har lært seg den formelle metoden for å løse likninger, virker det som om de glemmer å sette prøve på svaret (Lewis 1980, gjengitt etter Kieran 1990:106). Svar der $x \neq 4$ kan derfor tyde på at eleven ikke har forsøkt å kontrollere riktigheten av sitt eget svar. Dette er også viktig informasjon å ta med seg i bedømmelsen av elevens helhetlige matematiske kompetanse.

I begge deloppgavene er det tilstrekkelig å beherske *rules without reasons* (Skemp 1987:86). Eleven oppnår altså full skåre dersom hun husker reglene, det vil hovedsakelig si å skifte fortegn ved sideskift. Slik er ikke disse oppgavene egnet til å teste hvorvidt eleven har utviklet relasjonsforståelse for emnet eller om hun kun besitter instrumentell forståelse (Solvang 1992:96f.). Relasjonsforståelse kommer først til syne dersom eleven i tillegg blir bedt om å forklare hvordan hun faktisk løser likningen og hvorfor man skifter fortegn ved sideskift i en likning. Tall & Thomas (1991:127) understreker viktigheten av å utvikle og fokusere på relasjonsforståelse av variabelbegrepet i innledende algebra (se også omtalen av oppgave 2 i avsnitt 6.1.2 på s. 43f.):

> *We hypothesise that as soon as children are unable to give meaning to concepts, they hide their difficulties by resorting to routine activities to obtain correct answers and gain approval. Once committed to such a course, it easily degenerates into a never ending downward spiral of instrumental activity: learning the "trick of the week" to survive, soon leading to a collection of disconnected activities that become more and more difficult to coordinate, even at a purely mechanistic level* (Tall & Thomas 1991:127).

Som et resultat av dette vil eleven gjerne ha store problemer med å skille algebraiske uttrykk (se oppgave 3 og 6) fra likninger. Eksempelvis vil man kunne se elever forenkle et algebraisk uttrykk på følgende måte: $\frac{2a}{5}+\frac{6a}{5}=\frac{2a\cdot 5}{5}+\frac{6a\cdot 5}{5}=2a+6a=\underline{\underline{8a}}$. Her multipliseres brøkene med 5, på samme måte som i en likning. En slik sammenblanding av regler ser man ofte hos elever som har bygget mye av sin matematikk på instrumentell forståelse alene. I denne sammenheng viser blant andre Booth (1984:91) og Kieran (1990:100f.) til at likhetstegnet i aritmetikken gjerne indikerer at *nå kommer svaret*, mens det i algebra mer er å oppfatte som et symbol for likhet mellom venstre og høyre side i en likning. Utfordringen er å få eleven til å se på likhetstegnet mer som et relasjonssymbol enn et *gjør-noe*-signal. Med en relasjonsoppfatning vil man lettere unngå feil av den typen som er beskrevet ovenfor.

6.1.6 Oppgave 10


Hva er mest? Sett kryss i riktig rute:

- ☐ 0,5 liter
- ☐ 8 ml
- ☐ 0,6 dm^3
- ☐ 4 dl

Figur 6.7: Oppgave 10.

Avslutningsvis i delprøve 1 inngår en oppgave om relasjonen mellom ulike volumenheter. Oppgaven tester elevens beherskelse av faktakunnskaper (se avsnitt 2.2.2 på s. 8f.) om disse ulike representasjonene av rominnhold. Slik vil denne oppgaven vise om eleven har lært, husker og evner å sammenlikne de fire enhetene. Denne er for øvrig den eneste flervalgsoppgaven blant de som tester elevens kompetanse i RSF.

6.2 Delprøve 2

I delprøve 2 var det tillatt å bruke kalkulator. Elevene hadde 90 minutter til rådighet i arbeidet med denne delprøven. Av delprøvens tolv oppgaver var det kun to som hadde til hensikt å måle kompetanse innenfor RSF.

6.2.1 Oppgave 17a

Løs denne likningen:

$250 \cdot 1{,}05^x = 450$

Svar: ______________________

Figur 6.8: Oppgave 17a.

Alle de omtalte oppgavene til nå ligger tematisk innenfor grunnskolepensum. Slik sett markerer oppgave 17a et sprang over til ferskere lærestoff. Elevens første møte med eksponentiallikninger og –funksjoner er nemlig på grunnkursnivå.

Eksponentiallikningen presenteres på det som kan forventes å være en velkjent form for eleven, nemlig $a \cdot b^x = c$ der $a, b, c \in \mathbb{R}$. Det er kun satt av en frivillig kladderute. Slik er det i utgangspunktet bare selve svaret som kan fortelle noe om elevens løsningsprosess. Dermed vil det ikke alltid være mulig å avgjøre hvilken tilnærming eleven har brukt i likningsløsningen (se avsnitt 6.1.5 på s. 50ff.).

Eleven kan oppnå full skåre ved hjelp av prøving og feiling på kalkulatoren. Siden man i kodeboka godkjenner tilnærmingen $x \approx 12$ som fullgodt svar (se avsnitt 11.1, s. 127), vil dette være en framgangsmåte som relativt raskt vil kunne føre fram. En annen mulighet er å finne skjæringspunktet mellom $y_1 = 250 \cdot 1{,}05^x$ og $y_2 = 450$ ved hjelp av innebygd funksjon på den grafiske kalkulatoren (*intersect*). Slik kan eleven unngå den formelle bruken av logaritmer i løsningsprosessen. Hvis eleven likevel velger en formell tilnærming til likningen, er det nødvendig å bruke logaritmer i utregningen. Man kan med utgangspunkt i læreplanens formuleringer forvente at de aller fleste elevene gjør dette uten å ha utviklet den helt store begrepsforståelsen:

> *Elevene skal kunne bruke Briggske logaritmer og n-te røtter til å løse enkle ligninger knyttet til eksponential- og potensfunksjoner i praktiske eksempler* (se avsnitt 11.4 på s. 145ff., mål 8e).

Vi ser at fokus ligger på algoritmene eller regneferdighetene – og ikke på forståelsen for begrepene. Forfatterne av læreboka som brukes ved Soltoppen videregående skole, formulerer det slik innledningsvis i avsnitt 7.3, *løsning av eksponentiallikninger ved regning*:

> *I dette kurset skal du lære å bruke logaritmer til å løse likninger uten å kjenne definisjonen av begrepet. I de videregående kursene blir logaritmer behandlet mer grundig* (Erstad et al. 2000:207).

I den etterfølgende læreboksteksten verifiseres sammenhengen $\log a^x = x \cdot \log a$ før algoritmen for å løse likninger på formen $a^x = b$ presenteres. Med dette utgangspunktet vil man kunne anta at elevens begrepsstrukturer bare er delvis og mangelfullt utviklet. I en slik situasjon vil man kunne forvente at noen elever forsøker å overføre eller tilpasse kunnskap og prosedyrer fra en liknende sammenheng til denne. Analysen av oppgave 17a må utføres og leses i lys av dette.

For eksempel vil elever gjerne ignorere at det er eksponenten som er den ukjente og løse likningen $250 \cdot 1{,}05x = 450$ i stedet. For å få ”x-en alene på venstre side av likhetstegnet” vil eleven gjerne dividere med 1,05, som altså er grunntallet i potensen, og ende opp med svaret $x = \dfrac{450}{250 \cdot 1{,}05} \approx \underline{\underline{1{,}714}}.$

Vi har tidligere (se avsnitt 6.1.4 på s. 47ff.) vist til at det hersker en tro blant elever om at regnerekkefølgen ikke påvirker resultatet av en beregning (Booth 1984:86; Pimm 1987:125). Ved å prosessere i leseretningen (Tall & Thomas 1991:126) vil man med denne oppfatningen gjerne sette venstresiden $250 \cdot 1{,}05^x$ lik $262{,}5^x$ siden $250 \cdot 1{,}05 = 262{,}5$. En slik framgangsmåte vil gi det feilaktige svaret $x = \dfrac{\log 450}{\log 262{,}5} \approx \underline{\underline{1{,}097}}.$

6.2.2 Oppgave 22

a) Lag en skisse av grafen til funksjonen

$y = -x^3 + 2x^2 + 1$

b) Finn koordinatene til toppunkt og bunnpunkt og eventuelle nullpunkter for grafen til denne funksjonen.

Toppunkt: ______________________________

Bunnpunkt: ______________________________

Nullpunkt(er): ____________________________

Figur 6.9: Oppgave 22.

Med utgangspunkt i funksjonsuttrykket $y = -x^3 + 2x^2 + 1$ skal eleven oversette til en grafisk representasjonsform. Janvier mener at slike *oversettelsesprosesser* ikke vies tilstrekkelig oppmerksomhet i utviklingen av matematisk tenkning:

> *However, particular uses of symbolism appear generally to be overlooked, namely, the translation process. By a translation process, we mean the psychological process involved in going from one mode of representation to another, for example, from an equation to a graph* (Janvier 1987a:27).

For å illustrere ulike aspekter ved oversettelsesprosessene og dermed styrke lærerens bevissthet om funksjonslærens kompleksitet, opererer Janvier med følgende skjematiske oversikt (s. 28):

To / From	**Situations, Verbal description**	**Tables**	**Graphs**	**Formula**
Situations, Verbal description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		**Plotting**	Fitting
Graphs	Interpretation	**Reading off**		Curve fitting
Formula	Parameter Recognition	**Computing**	Sketching	

Figur 6.10: Janviers representasjon av ulike oversettelsesprosesser i funksjonslæren (mine uthevinger).

Tabellen viser mangfoldet av mentale prosesser som er involvert i elevenes arbeid med funksjoner. I skolehverdagen er dette arbeidet oftest sentrert rundt prosessene *plotting*, *reading off* og *computing* (uthevet i figur 6.10) – så også i oppgave 22 i den nasjonale prøven. Disse oversettelsesprosessene blir ofte kalt ”punktvise ferdigheter”, og de forteller ikke nødvendigvis mye om elevens forståelse for selve funksjonsbegrepet (Brekke 1994:4f.). Brekke viser derfor til viktigheten av at eleven på et tidlig tidspunkt i skoleløpet får utføre aktiviteter som berører så mange celler som mulig i Janviers tabell (s. 30).

Janvier viser til at flere av oversettelsesprosessene gjerne foregår på indirekte vis. Som eksempel nevner han *formula → table → graph*, altså at man går omveien via verditabell når en funksjonsgraf skal tegnes. Han understreker at det er nødvendig å arbeide bevisst med direkte oversettelser mellom representasjoner (Janvier 1987b:69).

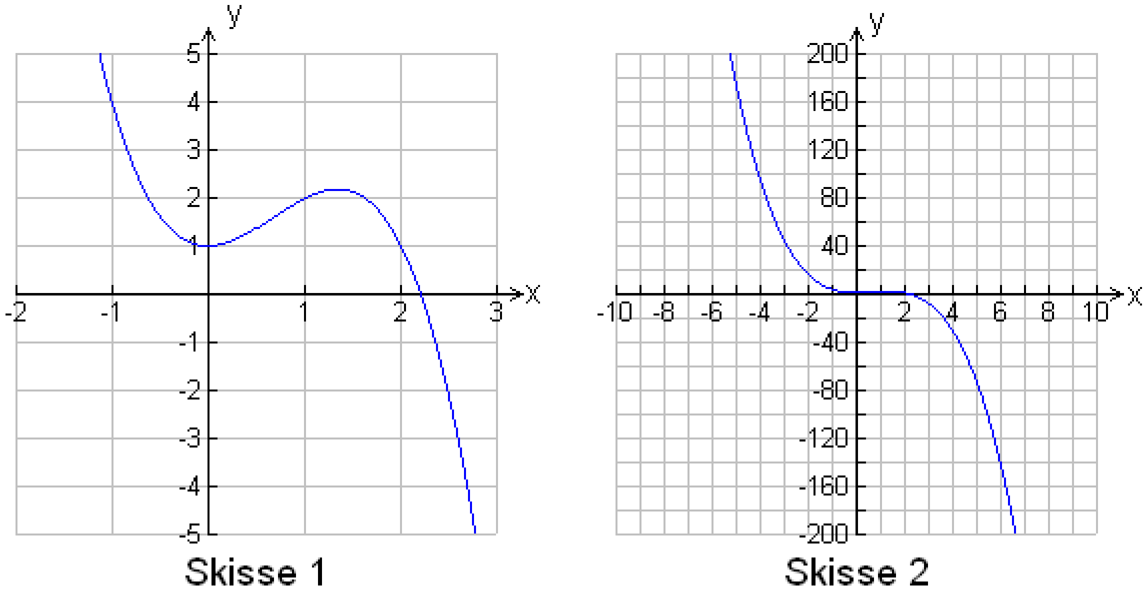
> *We believe that the study of generalization, abstraction, proof, symbolization . . . could be made more meaningful if they were considered as made out of basic translation processes* (Janvier 1987a:31).

Janvier framhever videre viktigheten av å fokusere på par av prosesser i undervisningen. Det er med andre ord essensielt at eleven også gjør erfaringer med den ”motsatte” prosessen, *graph → formula*, for i størst mulig grad å utvikle forståelse for funksjonsbegrepet. Han sammenlikner dette med læring av et fremmedspråk der lytting og snakking må utvides side om side.

Enhver oversettelsesprosess involverer derfor i det minste en kilde (*source*) og et mål (*target*) (s. 29). Det er disse som legger føringer for elevens tenkning, og det er disse som definerer mulige angrepsvinkler for den enkelte oversettelsesprosessen:

> *To achieve directly (and correctly) a given translation, one has to transform the source ”target-wise” or, in other words, to look at it from a ”target point of view” and derive the results* (s. 29).

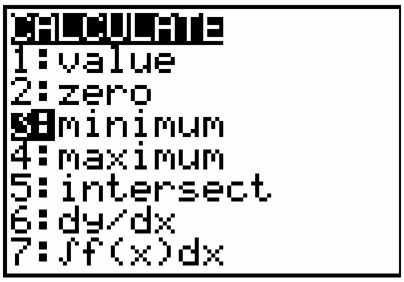
I oppgave 22a står eleven ovenfor oversettelsesprosessen *formula* (kilde) → *graph* (mål). Her er det naturlig å ta i bruk den grafiske kalkulatoren i prosessen fram mot målet. Skissen kan naturligvis også lages manuelt ved hjelp av verditabell, men dette er mye mer tid- og arbeidskrevende. Eleven må selv lage et passende koordinatsystem, noe som ofte viser seg å være en utfordring. En fullgod skisse må vise et *fornuftig* utsnitt av grafen, ha korrekt form og samtidig riktig plassering av både toppunkt, bunnpunkt og nullpunkt. Slik må eleven ta en avgjørelse om nedre og øvre grense på x- og y-aksen og ikke stole blindt på at kalkulatoren viser et hensiktsmessig grafutsnitt for så å kopiere dette. Funksjonen $y = -x^3 + 2x^2 + 1$ kan eksempelvis skisseres på følgende to måter:



Figur 6.11: To ulike skisser av den samme tredjegradsfunksjonen.

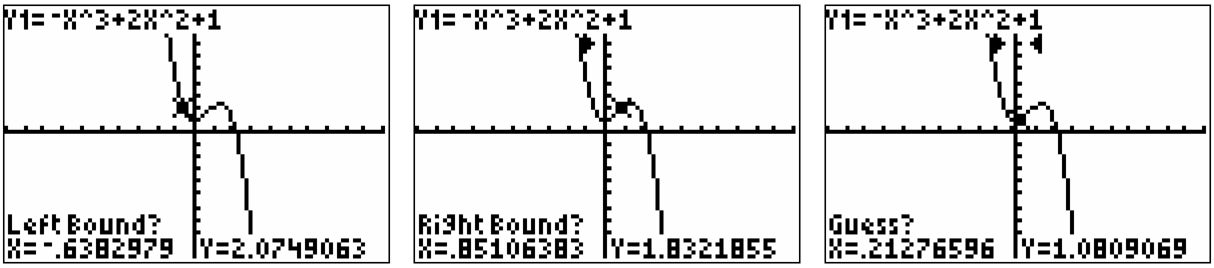
Begge skissene er for så vidt korrekte, men skisse 1 gir helt klart det mest hensiktsmessige bildet av grafens essensielle deler – bunnpunkt, toppunkt og nullpunkt. Alle disse tre punktene er umulige å lokalisere i skisse 2. Slik tester oppgave 22a spesielt elevens evne til å representere informasjon på en oversiktlig og formålstjenlig måte ved hjelp av kalkulator. Det vises for øvrig til 2.2.4.1 på s. 14 om representasjonskompetanse.

Etter å ha skissert grafen skal eleven finne koordinatene til toppunkt, bunnpunkt og eventuelle nullpunkt(er). Det kreves ingen bestemt framgangsmåte i dette arbeidet, men det er også her naturlig at eleven tar i bruk den grafiske kalkulatorens innebygde funksjoner:



Figur 6.12: CALC-menyen på TI-83 Plus.

Toppunktet finner man ved å bruke *maximum*-funksjonen, bunnpunktet ved å bruke *minimum*-funksjonen og nullpunktet ved å bruke *zero*-funksjonen. I alle tilfellene må eleven selv velge en passende definisjonsmengde. Dette gjøres ved å bevege markøren henholdsvis til venstre (*left bound*) og høyre (*right bound*) for det søkte punktet og bekrefte disse grensene med *enter*-tasten. Innenfor det definerte intervallet må eleven så antyde eller ”gjette” (*guess*) hvor punktet ligger:



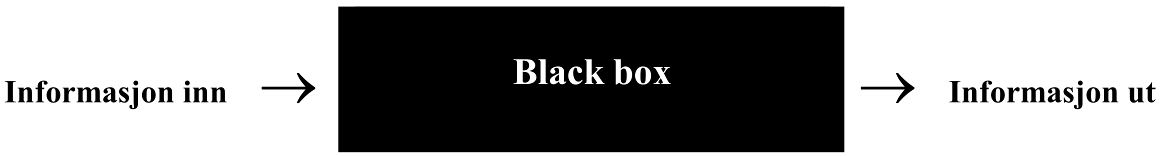
Steg 1 Steg 2 Steg 3

Figur 6.13: Å finne koordinatene til et bunnpunkt på TI-83 Plus.

På figuren har vi i steg 1 og 2 definert at $x \in [-0.6382979, 0.85106383]$ og i steg 3 antatt at bunnpunktet har førstekoordinaten $x = 0{,}21276596$. Beregningen av de faktiske koordinatene tar så kalkulatoren seg av.

Punktene kan eventuelt også leses direkte av fra skissen i oppgave 22a, dog uten tilstrekkelig nøyaktighet. Å finne bunnpunktet og toppunktet til tredjegradsfunksjonen ved regning er neppe aktuelt da derivasjon først introduseres for fullt på det andre årstrinnet i videregående skole.

Dermed er hensikten med oppgaven at eleven skal foreta de riktige tastetrykkene på kalkulatoren. I tillegg må eleven selvsagt vite hva et toppunkt, et bunnpunkt og et nullpunkt er. Slik måler denne oppgaven i stor grad hjelpemiddelkompetanse i tillegg til RSF (den nasjonale prøven har ikke direkte til hensikt å måle hjelpemiddelkompetanse, se avsnitt 2.2.4 på s. 11ff.). Det er de færreste elever (og lærere) som er kjent med de metodene kalkulatoren bruker for å finne punktenes koordinater. Man kan derfor si at lommeregneren her forutsettes brukt som en ”black box” (Drijvers 2000:194):



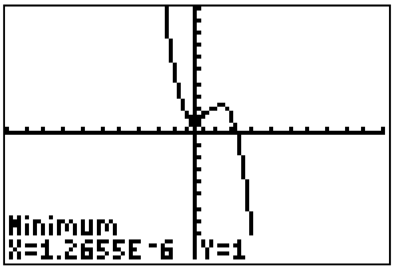
Figur 6.14: ”Black box”.

Eleven har ikke innsikt i de metodene programvaren bruker i beregningen av for eksempel bunnpunktet. Slik kan man oppfatte kalkulatoren som en slags svart boks.

Det er et problem at eleven ofte har ubegrenset tillit til informasjonen som kommer ut fra kalkulatoren (Tall 1989:40). For å kunne forstå og tolke denne informasjonen på fornuftig vis, er det nødvendig med en viss innsikt i de underliggende algoritmene og prosedyrene som kalkulatoren bruker. Tall & Winkelmann (1988:113ff.) deler graden av innsikt inn i tre:

- Ekstern innsikt: Brukeren har ingen idé om hva som foregår inni kalkulatoren, men han eller hun har innsikt som gjør det mulig å kontrollere om resultatene er fornuftige.
- Analog innsikt: Brukeren har en idé om hvilken algoritme som er i bruk, men han eller hun vet ikke nøyaktig hvordan denne implementeres.
- Spesifikk innsikt: Brukeren er fullt klar over hvordan kalkulatoren er programmert.

Få elever og få lærere har spesifikk innsikt. Dette er heller ikke nødvendig. For eleven er det i det minste nyttig å ha ekstern innsikt i kalkulatorens arbeidsmetoder. Etter at eleven har gitt kalkulatoren instruks om å finne bunnpunktet til $y = -x^3 + 2x^2 + 1$ (se figur 6.12 på s. 56 og 6.13 på s. 57), kommer eksempelvis følgende informasjon ut fra den svarte boksen:



Figur 6.15: *Minimum* på TI-83 Plus.

Kalkulatorens algoritme gir ikke alltid det eksakt riktige resultatet. I beregningen av bunnpunktet gir kalkulatoren en ny verdi for x nesten hver gang. Alle disse er selvsagt tilnærmet lik null. Figur 6.15 viser i dette tilfellet at x-koordinaten til bunnpunktet er 1.2655E⁻6. Dette er kalkulatorens representasjon av standardform, altså $1{,}2655 \cdot 10^{-6}$ som tilsvarer $0{,}0000012655$. Med ekstern innsikt vil eleven være i stand til å vurdere hvorvidt dette svaret er fornuftig eller ei, og følgelig vil han eller hun konkludere med at bunnpunktet har koordinatene $x = 0$ og $y = 1$. At punktet (0,1) faktisk ligger på grafen kontrolleres raskt ved å regne ut $y(0) = -0^3 + 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$. Uten denne innsikten derimot kan man forvente at kalkulatorens representasjonsform direkte og ukritisk aksepteres som den endelige svaret.

Det skal legges til at tierpotensen (E⁻6) i farten lett kan overses. I så fall vil eleven gjerne oppgi (1.3, 1) som bunnpunktets koordinater. En rask vurdering av svaret, spesielt etter at skissen er tegnet i oppgave 22a like før, vil likevel forhindre at slike feil blir gjort. Samtidig må man være klar over at ikke alle elever nødvendigvis er fortrolig med kalkulatorens representasjon av standardform. Bokstaven *E* i **X=1.2655E⁻6** vil for eksempel kunne oppfattes som en slags feilmelding (*error*).

Det er videre interessant å se om elevens svar i oppgave 22b faktisk samsvarer med den skissen som ble laget i oppgave 22a. Slik kan man se om eleven er i stand til å vurdere gyldigheten av den informasjonen som kommer ut av ”den svarte boksen”. Videre vil oppgaven kunne avdekke om eleven har en riktig oppfatning av hva et punkt i planet er. Et punkt har som kjent både x- og y-verdi. Man kan forvente at mange nøyer seg med å oppgi x-verdien. Dette er akseptabelt i forbindelse med nullpunktet, da dette per definisjon har y-verdi lik null.

I oppgave 22b kreves det altså ingen matematiske begrunnelser for at (1.33, 2.19) og (0, 1) virkelig *er* henholdsvis toppunkt og bunnpunkt til tredjegradsfunksjonen. Dette er ikke pensum i 1MX (se læreplanen i avsnitt 11.4 på s. 145ff.). Det er derfor tilstrekkelig for eleven å bruke kalkulatoren slik vi skisserte i figurene 6.13 (se s. 57) og 6.15 (se s. 58) uten videre begrunnelser. Fra og med skoleåret 2006/2007 vil dette til en viss grad endres. I Kunnskapsløftet vil elevene nemlig møte innledende derivasjon og funksjonsdrøfting allerede i kurset Vg1T, arvtakeren til 1MX:

> *Mål for opplæringen er at eleven skal kunne*
>
> - *gjøre rede for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner og anvende denne regelen til funksjonsdrøfting* (KD 2006a:65, gjengitt i avsnitt 11.5 på s. 151).

Avslutningsvis legger vi til at verken læreplanene eller læreboka til elevene (Erstad et al. 2000) skiller mellom *lokale* og *globale* ekstremalpunkter. I oppgave 22b er det derfor underforstått at det er det *lokale* toppunktet (1.33, 2.19) og det *lokale* bunnpunktet (0, 1) eleven skal finne. Senere i utdanningen vil det være essensielt for elevene å være fortrolig med de to typene ekstremalpunkter.

Det ville for øvrig her være enkelt å begrunne disse ekstremalpunktene. Vi har nemlig
$y = -x^3 + 2x^2 + 1 = 1 + \underbrace{x^2(2-x)}_{\geq 0} \geq 1$ når $x \approx 0$ og
$y' = -3x^2 + 4x = x(4-3x) = 0$ for $x = 0$ og for $x = \frac{4}{3}$.

7 Analyse og noen forslag til undervisningsaktiviteter

7.1 Oppgaver

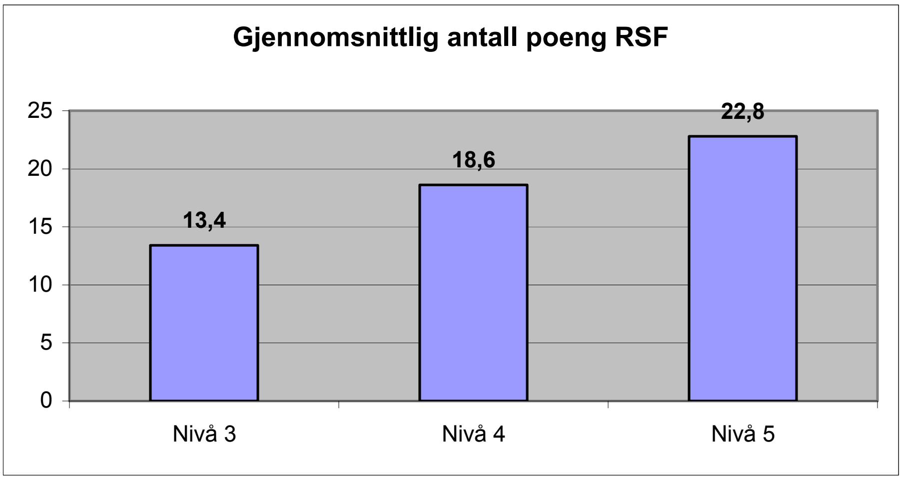
Den nasjonale prøven i 1MX inneholdt åtte oppgaver som var relatert til kompetanseområdet RSF. De fleste av disse bestod av flere spørsmål slik at det totalt var 24 deloppgaver. Bortsett fra oppgave 8b, som var vektet til to poeng, kunne eleven oppnå maksimalt ett poeng på hver av disse. Slik var den maksimale poengsummen innenfor RSF 25 poeng. I vurderingen var det ikke mulig å gi halve poeng. På bakgrunn av den oppnådde poengsummen ble elevens kompetansenivå innenfor RSF bestemt ut fra følgende skala:

Nivå	1	2	3	4	5
Intervall	0 – 4	5 – 9	10 – 15	16 – 21	22 – 25

Figur 7.1: Poengskala innenfor kompetanseområdet RSF.

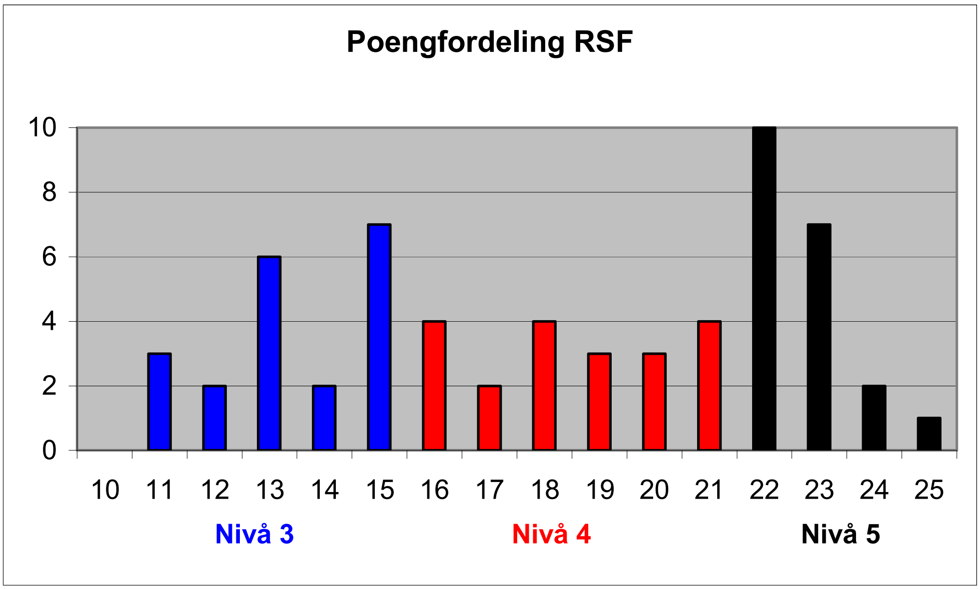
I dette arbeidet vil 60 besvarelser på nivå 3, 4 og 5 bli analysert, nærmere bestemt 20 besvarelser på hvert nivå. Det tas først og fremst sikte på å gi en kvalitativ beskrivelse av typiske oppfatninger og misoppfatninger som prøvesettet avdekker innen representasjoner, symbolbruk og formalisme (RSF). Slik vil fokus i stor grad være rettet mot de ulike feilsvar, da det er disse som gir oss den mest verdifulle informasjonen om elevenes tenkning. I etterkant av de fleste oppgavene vil det bli skissert undervisningsaktiviteter som kan brukes til å styrke elevenes begrepsforståelse.

Figuren nedenfor viser gjennomsnittlig poengsum i de 20 besvarelsen på de tre ulike nivåene:



Figur 7.2: Gjennomsnittlig antall poeng innenfor kompetanseområdet RSF.

Den detaljerte poengfordelingen til de 60 besvarelsene ser slik ut:



Figur 7.3: Antall besvarelser med de ulike poengsummene og nivåfordeling.

Det er disse besvarelsene som danner grunnlaget for den kvalitative analysen. For å gjøre analysen mest mulig leservennlig, vil oppgaveteksten bli presentert på ny i forkant av hver deloppgave.

7.1.1 Oppgave 1

a) 15,1 + 0,44 = ________ b) 4,3 – 0,38 = ________

Figur 7.4: Oppgave 1a og oppgave 1b.

Både oppgave 1a og oppgave 1b lar seg løse ved hjelp av hoderegning. Begge er løst riktig av de aller fleste elevene. Blant de gale svarene, fire og fem henholdsvis, er faktisk ingen like:

Oppgave 1a	
Nivå	**Svar**
3	14,64
3	15,55
4	15,44
4	15,45

Oppgave 1b	
Nivå	**Svar**
3	3,02
3	3,52
4	4,08
4	4,12
5	3,82

Figur 7.5: Andre svar (kode 99) oppgave 1a og 1b.

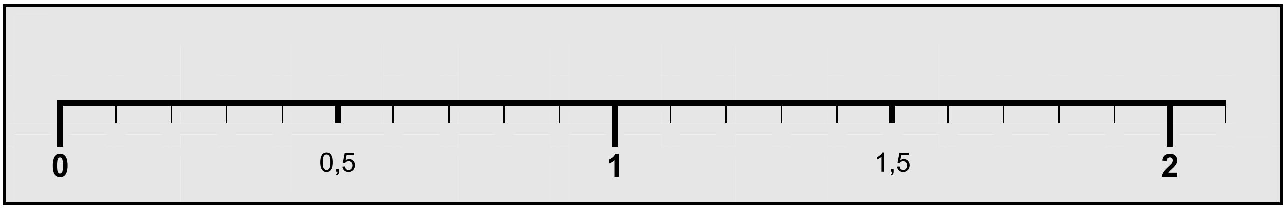
Svaret 15,45 i oppgave 1a *kan* komme av en oppfatning av desimaltall som par av hele tall (se avsnitt 6.1.1 på s. 41f.). En gjennomgang av elevens øvrige besvarelser i den nasjonale prøven viser at dette ikke er en konsekvent misoppfatning. Slik *kan* dette svaret og mange av de andre skyldes uoppmerksomhet eller slurv. Det er erfaringsmessig mange elever som av og til gjør slike mer eller mindre tilfeldige feil – spesielt innledningsvis i et prøvesett. Dette kan skyldes at det tar litt tid for eleven å bli ”varm” og mentalt klar for matematisk tenkning. Som lærer er det likevel viktig å undersøke om det kan ligge dypere forankrede misoppfatninger til grunn for det enkelte feilsvar. Her vil det være naturlig å gi eleven flere diagnostiske oppgaver som fokuserer på posisjonssystemet i matematikken. Brekke (2002b:56ff.) foreslår flere undervisningsaktiviteter som vil utfordre elevens tenkning og framkalle kognitiv konflikt:

Tallrekker
Skriv de neste tallene i disse tallrekkene:

0,2	0,4	0,6	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,2
0,3	0,6	0,9	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,3
0,4	0,8	……..	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,4
0,5	……..	……..	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,5
0,25	……..	……..	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,25
0,05	……..	……..	……..	……..	……..	……..	Legg til 0,05

Figur 7.6: Forslag til undervisningsaktivitet fra Brekke 2002b, desimaltall som par av heltall.

Med en oppfatning av desimaltall som par av heltall, vil eleven fortsette den første tallrekken med 0,8   0,10   0,12   0,14 og tilsvarende i de øvrige fem rekkene. I etterkant av aktiviteten ovenfor er det fristende for læreren å korrigere eleven og forklare misoppfatningen med det samme. Dette er ikke den mest effektive metoden i dannelsen av begreper (Brekke 2002a:21). Læreren bør heller legge til rette for en ny aktivitet som er slik at eleven selv kan erfare at han tenkte feil i den første aktiviteten. For eksempel kan læreren la eleven gjøre de samme oppgavene ved å benytte seg av en tallinje og addere langs denne:



Figur 7.7: Hopp på tallinje. Undervisningsaktivitet i etterkant av tallrekkene i figur 7.6.

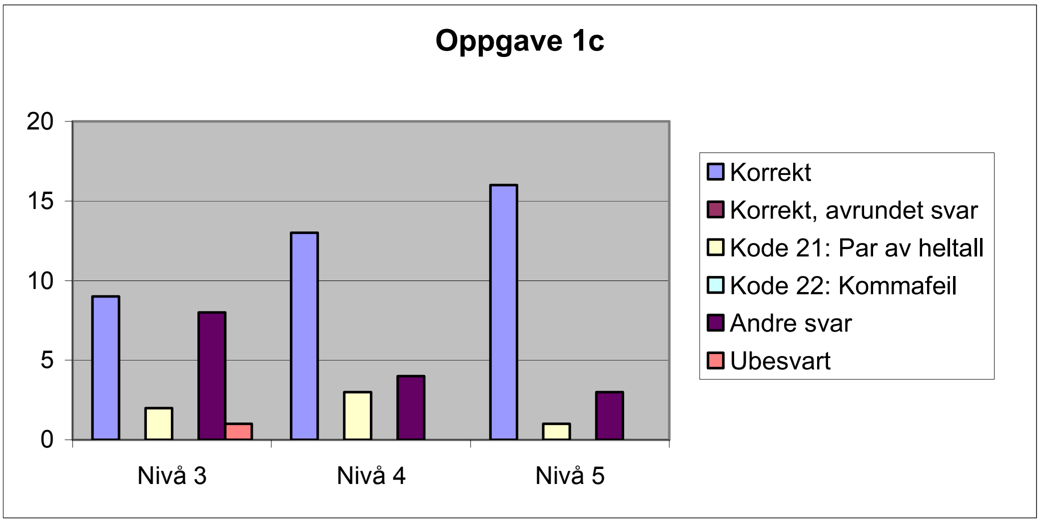
Med denne framgangsmåten vil eleven se at han etter 0,8 kommer til 1,0 – og ikke til 0,10. Denne og liknende oppgaver legger grunnlag for refleksjoner som i neste omgang er med på å rydde misoppfatninger av veien. Det essensielle med slik diagnostisk undervisning er at man *inviterer elevene til selv å innse det utilstrekkelige i egen tenkning* (Brekke 2002a:21). I etterkant av en slik tilnærming bør elevene få anledning til å bruke det utvidede begrepet på flere oppgaver. Slik forsterkes de korrekte ideene, og det legges et bedre grunnlag for langtidslæring.

Analysen av oppgave 1a og 1b viser at det ikke er mulig å fastslå generelle vanskeligheter med disse oppgavene. Det er heller ingen betydelige forskjeller mellom besvarelser på de tre ulike nivåene. Da er det av betydelig større didaktisk interesse å studere besvarelsene av oppgave 1c.

c) $3{,}4 \cdot 6{,}22 =$ ________

Figur 7.8: Oppgave 1c.

Svarfordelingen viser at en stor andel av elevene har manglende regneferdigheter i multiplikasjonsalgoritmen. Oppgaven avdekker også vesentlige forskjeller mellom de tre kompetansenivåene:



Figur 7.9: Svarfordeling oppgave 1c.

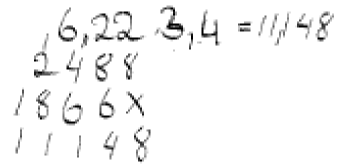
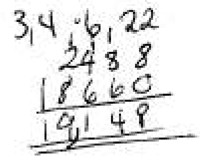
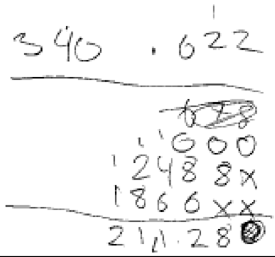
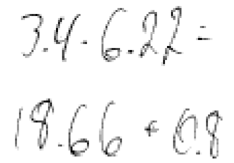
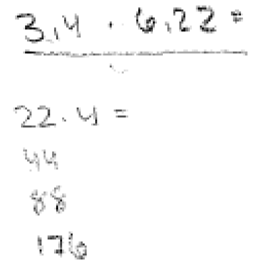
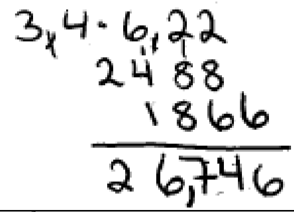
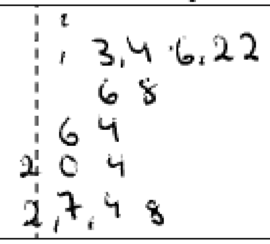
Under halvparten av elevene på nivå 3 har gitt korrekt svar på $3{,}4 \cdot 6{,}22$. Det er også bemerkelsesverdig at fire elever på det øverste kompetansenivået har bommet på denne oppgaven. Vi ser at hele seks elever – to på nivå 3, tre på nivå 4 og én på nivå 5 – har multiplisert som om det var par av heltall (kode 21), og dermed fått svaret 18,88 ($3 \cdot 6 = 18$ og $4 \cdot 22 = 88$). Med en andel på 10 % av besvarelsene er denne misoppfatningen sterkt representert. Vi skal se at også andre feilsvar kan forstås som varianter av denne oppfatningen.

Når man studerer de femten besvarelsene i kategorien ”andre svar”, ser man med all mulig tydelighet at multiplikasjonsprosedyrene ikke er tilstrekkelig automatiserte:

Nivå 3		Nivå 4	Nivå 5
9,88*	19,148*	19,4*	21,146
11,148*	19,548	19,76*	22,54
17,88	21,128*	26,746*	27,48*
18,82*	21,45	26,746*	

Figur 7.10: Andre svar (kode 99) oppgave 1c.
Svarene merket med * er kommentert nedenfor.

Bortsett fra to elever, som begge har fått $26{,}746$, er samtlige svar forskjellige! Dette kan tolkes som et resultat av den omfattende bruken av kalkulator i skolen (se avsnitt 3.3 på s. 26f.). Elevene er ikke lenger vant med å måtte regne manuelt, noe som kommer til syne i form av mange forskjellige og feilaktige prosedyrer. Vi ser nærmere på noen av feilsvarene og forsøker å gi en forklaring av de prosedyrene som er brukt:

Svar	Utregning	Forklaring
11,148		Eleven har endret rekkefølgen på faktorene og brukt en korrekt multiplikasjonsprosedyre. Feilen skyldes at eleven har glemt å sette 1 i minne over kolonnen helt til venstre. Her er det derfor ikke snakk om en misoppfatning. Eleven burde uansett vurdere om svaret faktisk *kan* være riktig.
19,148		Her gjøres en tilsvarende feil som i besvarelsen ovenfor. I kolonnen nest lengst til venstre er $1+2+8$ beregnet til 9. Heller ikke her er det snakk om en misoppfatning, men snarere mangelfull konsentrasjon.
21,128		Denne eleven har først multiplisert de to faktorene med 100 for å unngå komma i regnestykket. I likhet med de to elevene ovenfor er det ikke selve multiplikasjonsprosedyren som skaper problemer, men heller addisjonen av kolonnene. I kolonne nummer fire fra venstre er $8+6$ summert til 12.
19,4		Denne eleven har forsøkt å dele multiplikasjonen opp i to deler. Først har vedkommende multiplisert heltallet 3 med faktoren 6,22 og fått 18,66. Deretter beregnes trolig $4\cdot 0{,}22$ som avrundes til 0,8. Summen av disse to bidragene rundes i det endelige svaret av til 19,4. Slik kan dette oppfattes som en slags variant av kode 21 (par av heltall).
19,76		Forståelsen av desimaltall som par av hele tall er også årsaken til feilsvaret 19,76. Eleven har forsøkt å beregne $22\cdot 4$ med gjentatt addisjon, men har tatt et steg for mye og endt opp med 176. Dette kan skyldes at 44 oppfattes som $22\cdot 2$, 88 som $22\cdot 3$ og dermed 176 som $22\cdot 4$. I neste omgang er heltallene multiplisert $(3\cdot 6=18)$ og 1,76 lagt til dette: $18+1{,}76=19{,}76$.
26,746		To elever har altså fått svaret 26,746. Utregningen viser at den andre raden, 1866, er plassert en *plass* til høyre i stedet for venstre for den første raden, 2488. Dette viser mangelfull forståelse for posisjonssystemet i matematikken.
27,48		Vi ser med første øyekast at den tredje raden, 204, skulle vært plassert et *hakk* lenger mot venstre. Denne feilen *kan* skyldes at multiplikasjonen $6\cdot 4$ gir et tosifret svar i motsetning til de foregående. Eleven har også gjort en feil i den andre raden (64 versus 68).

Figur 7.11: Elevsvar oppgave 1c, kode 99.

Noen av elevene har ikke benyttet seg av kladderuta, men vi kan likevel anta hvordan svarene har framkommet. Spesielt ser vi varianter av oppfatningen av desimaltall som par av heltall (se avsnitt 6.1.1 på s. 41f.). 9,88 er sannsynligvis et resultat av addisjon av heltall $(3+6=9)$ og multiplikasjon av desimaltall $(4 \cdot 22 = 88)$. En liknende oppfatning kan ligge til grunn for svaret 18,82 som etter alt å dømme også er en variant av kode 21 (par av heltall). Tallene foran og bak komma er multiplisert hver for seg, men $4 \cdot 22$ bak komma er beregnet til 82 (4 er kun multiplisert med tallet på tierplass). Vi merker oss videre at ikke alle de gale svarene skyldes misoppfatninger. Elevene som har oppgitt 21,146 og 21,45 som endelig svar, har begge regnet helt korrekt i kladderuta, men skrevet galt av i svarrubrikken.

Analysen viser at flere elever kunne unngått galt svar i oppgave 1c ved å bruke noen sekunder på å vurdere gyldigheten av svaret de har avgitt. Dette gjelder de elevene som har gjort mindre feil som følge av uoppmerksomhet eller slurv. Mer alvorlig er det for den store andelen elever som oppfatter desimaltall som par av heltall. Som lærer vil det være naturlig å legge opp til en undervisning der disse elevene møter denne misoppfatningen. Aktivitetene som ble skissert i forbindelse med oppgavene 1a og 1b ovenfor (se figur 7.6 og 7.7 på s. 63), ville i så måte være en aktuell innfallsvinkel.

I en hektisk skolehverdag er det oftest ikke anledning til å dvele lenge med repetisjon av grunnleggende algoritmiske ferdigheter. Man kan likevel gi elevene hjemmearbeid der de skal utføre multiplikasjon av ulike desimaltall uten bruk av kalkulator. De fleste grunnkurselevene vil nok etter en slik oppfrisking oppdage at de har de nødvendige ferdighetene. Det er naturligvis et annet spørsmål om elevene faktisk har *forståelse* for det komplekse multiplikasjonsbegrepet. Oppgave 1 er ikke egnet for å kartlegge dette. Et annet mulig tiltak er å utfordre elevene til å artikulere og forklare prosedyrene i multiplikasjonsalgoritmen. Eksempelvis vil dette kunne være fruktbart for de to elevene som oppga svaret 26,746 (se figur 7.11 på s. 65). Hvorfor er den andre raden i utregningen plassert et hakk mot *høyre* og ikke mot venstre? Slik får eleven anledning til å tenke gjennom hva prosedyrene faktisk innebærer. Forholdene bør da ligge til rette for at eleven skal se relasjonen mellom selve algoritmen og plassverdisystemet i matematikken.

7.1.2 Oppgave 2

Brøkregningen i oppgave 2 er i stor grad egnet til å skille mellom elever på de ulike kompetansenivåene. Dette er spesielt tilfelle for oppgave 2b og 2d.

a) $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} =$ ________

Figur 7.12: Oppgave 2a.

Samtlige elever på nivå 5 har svart riktig på oppgave 2a. På nivå 3 er det fire elever som blander inn regler for addisjon ved at de først finner fellesnevner for så å *summere* tellerne (kode 21). Vi ser på besvarelsen til to av disse:

	Elev 1	**Elev 2**
Kladderute	$\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{35}{20} \cdot \frac{32}{20}$	$\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{35}{20} + \frac{32}{20} = \frac{67}{20}$
Svarrubrikk	$\frac{67}{20}$	$\frac{67}{20}$
Forklaring	Eleven finner fellesnevner og *adderer* tellerne til tross for multiplikasjons-tegnet.	Eleven finner fellesnevner og bytter samtidig ut multiplikasjonstegnet med et addisjonstegn.

Figur 7.13: To elevsvar oppgave 2a, nivå 3, kode 21.

Det er naturligvis ikke noe i veien med å finne fellesnevner i slike multiplikasjonsoppgaver, men det er heller ikke nødvendig. Det interessante er *hvorfor* elevene velger å utvide brøkene til fellesnevner. Vi ser av besvarelsene at elevene tenker og agerer som om det faktisk er en *addisjonsoppgave* – og ikke en *multiplikasjonsoppgave*. Elev 2 har til og med erstattet multiplikasjonstegnet med et addisjonstegn etter å ha utvidet brøkene. Vi kommer tilbake til disse to elevene i analysen av oppgave 2b.

Fem besvarelser (2-3-0, det vil si to på nivå tre, tre på nivå 4 og ingen på nivå 5) havner i kategorien ”andre svar”. Blant disse har hele fire multiplisert korrekt, men gjort feil i forenklingen av svaret:

Nivå 3	**Nivå 4**
$\frac{56}{20} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ Telleren er delt på fire, mens nevneren er delt på fem i den første forkortingen.	$\frac{56}{20} = 2\frac{1}{5}$ Omgjøringen er vanskelig å forklare. Det legges til at eleven besvarer alle andre brøkoppgaver korrekt.
$\frac{56}{20} = \frac{7}{10}$ Man kan anta at $\frac{16}{20}$ er omgjort til $\frac{7}{10}$.	$\frac{56}{20}$ $2\frac{16}{20}$ $2\frac{3}{4}$ Den første overgangen er korrekt, men eleven setter $\frac{16}{20} = \frac{3}{4}$.

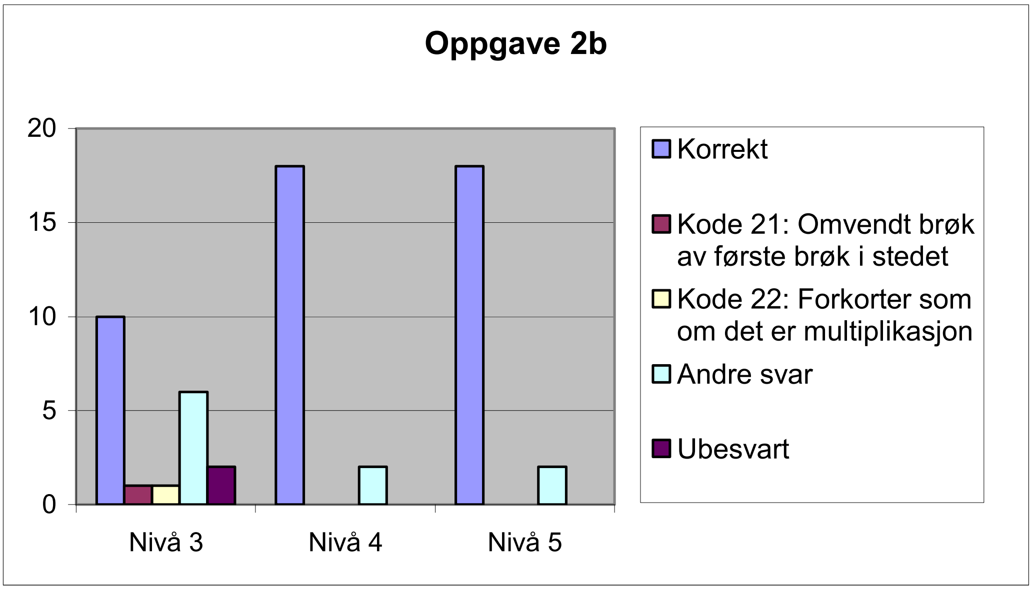
Figur 7.14: Korrekt multiplikasjon, gal forenkling, oppgave 2a, kode 99.

Vi ser at disse fire elevene har gjort fire ulike feilaktige forenklinger av brøken. Det er ellers interessant å merke seg at tre av elevene oppgir svaret som blandet tall i stedet for såkalt *uekte brøk* (en brøk der telleren er større enn nevneren). En gjennomgang av de seksti besvarelsene viser at til sammen tretten elever (4-3-6) bruker denne representasjonsformen (blandet tall) i svarrubrikken (jamfør oppgave 2c).

b) $\dfrac{14}{15} : \dfrac{5}{2} =$ ________

Figur 7.15: Oppgave 2b.

I oppgave 2b skal en brøk divideres med en annen. Svarfordelingen for denne oppgaven viser en markert forskjell mellom nivå 3 på den ene siden, og nivåene 4 og 5 på den andre siden:



Figur 7.16: Svarfordeling oppgave 2b.

Halvparten av nivå-3-besvarelsene har her det korrekte svaret. De foreslåtte feilkodene, kode 21 og 22, er kun representert med en besvarelse hver. Kategorien "andre svar" derimot, er også her godt representert med ti *ulike* svar. Vi ser på besvarelsene til de to elevene som fant fellesnevner for så å addere tellerne i oppgave 2a (se figur 7.13 på s. 67):

	Elev 1	**Elev 2**
Kladderute	$\frac{14}{15} : \frac{5}{2} = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{15}$	$\frac{14}{15} : \frac{5}{2} = \frac{28}{30} : \frac{75}{30} = \frac{-47}{30}$
Svarrubrikk	$\frac{20}{15}$	$\frac{-47}{30}$
Forklaring	Eleven snur den andre brøken og skifter til multiplikasjon, utvider til fellesnevner og *adderer* tellerne til tross for multiplikasjonstegnet.	Eleven snur ikke den andre brøken, utvider til fellesnevner og *subtraherer* tellerne til tross for divisjonstegnet.

Figur 7.17: To elevsvar oppgave 2b, nivå 3, kode 99.

De samme to elevene startet altså med å finne fellesnevner også i oppgave 2a. Slik kan besvarelsene tyde på at elevene har en forståelse om at fellesnevner er en nødvendighet i brøkregning, også i multiplikasjon og divisjon. Dette kan oppfattes som et resultat av at autoritetene, eksempelvis læreren og læreboken, stadig betoner viktigheten av fellesnevner i sammenheng med brøkregning. I mengden av regler blir det problematisk å begrense denne oppfatningen til de tilfellene der fellesnevner faktisk er en nødvendighet.

Det er ikke noe i veien med dette i seg selv, da en slik framgangsmåte vil gi det riktige svaret. Det er elevens *motivasjon* for å utvide til fellesnevner som er problemet. Elev 1 har gjort dette for å være i stand til å *addere* tellerne (tilsvarende som i oppgave 2a) etter korrekt å ha snudd den andre brøken og skiftet regneoperasjon, mens elev 2 har funnet fellesnevner for å kunne *subtrahere* tellerne.

I realiteten utfører begge elevene brøk*multiplikasjon* ved bruk av prosedyrer for brøk*addisjon*. Elev 2 bruker dessuten prosedyrer for brøk*subtraksjon* i brøk*divisjon*. Det hadde derfor vært didaktisk meget interessant og fruktbart å be disse to elevene løse følgende fire oppgaver:

a $\frac{7}{4}+\frac{8}{5}$ **c** $\frac{14}{15}:\frac{5}{2}$

b $\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}$ **d** $\frac{14}{15}-\frac{5}{2}$

Figur 7.18: Oppgaver til elev 1 og elev 2.

Slik kunne man direkte observere hvilke løsningsprosedyrer de tar i bruk i henholdsvis addisjon, multiplikasjon, divisjon og subtraksjon av brøker. Med utgangspunkt i analysen ovenfor skulle man tro at de ville bruke de samme prosedyrene i a og b på den ene siden, og i c og d på den andre siden (i alle fall elev 2). Slik ville arbeidet med disse fire oppgavene framheve de omtalte misoppfatningene og delvise begrepene. Dette kaller man å skape en *kognitiv konflikt* (Brekke 2002a:19). Slike konflikter kan løses gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen (diagnostisk undervisning). På den måten inviterer man elevene til selv å innse det utilstrekkelige i egen tenkning. Forhåpentligvis ville en slik tilnærming kunne bidra til at elev 1 og elev 2 styrker sine begrepsstrukturer og får en mer solid forståelse for brøkregning.

En slik oppfatning av relasjoner mellom de ulike regneartene *kan* muligens ha sitt utspring i potensregning, der eksponentene adderes i multiplikasjon ($2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5}$) og subtraheres i divisjon $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3}$. Begge elevene bruker for øvrig disse potensreglene i oppgave 6.

Vi tar med en oversikt over de øvrige åtte feilsvarene i kategorien ”andre svar”. Det enkelte svaret er forsøkt forklart, også når utregning ikke er å finne i elevens besvarelse:

Nivå	Svar	Forklaring
3	$\frac{16}{20}$	Vi kan tenke oss at eleven snur den andre brøken og adderer tellere og nevnere: $\frac{14}{15}:\frac{5}{2}=\frac{14}{15}\cdot\frac{2}{5}=\frac{14+2}{15+5}=\underline{\underline{\frac{16}{20}}}$.
3	0,37	Svaret er tilnærmet riktig. Eleven viser ingen utregning.
3	$\frac{42}{30}$	Det er mulig at eleven har oppfattet telleren i den andre brøken som et 3-tall og så multiplisert teller med teller og nevner med nevner: $\frac{14}{15}:\frac{3}{2}=\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{2}=\frac{14\cdot 3}{15\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{42}{30}}}$.
3	$\frac{24}{85}$	Det kan være en mulighet at eleven har utført feilaktig multiplikasjon i både teller og nevner: $\frac{14}{15}:\frac{5}{2}=\frac{14}{15}\cdot\frac{2}{5}=\frac{14\cdot 2}{15\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{24}{85}}}$.
4	$\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$	Eleven har sannsynligvis multiplisert både telleren og nevneren i den første brøken med nevneren i den andre: $\frac{14}{15}:\frac{5}{2}=\frac{14\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{28}{30}=\underline{\underline{\frac{14}{15}}}$.
4	$\frac{24}{75}$	Eleven regner at $14\cdot 2=24$ (2 multipliseres kun med tallet på tierplass) og får dermed gal teller.
5	$\frac{4}{5}$	Eleven regner at $15\cdot 5=35$ og får dermed gal nevner: $\frac{14}{15}\cdot\frac{2}{5}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$
5	$\frac{28}{25}$	Nevneren 15 i den første brøken blir til 5 i utregningen: $\frac{14}{15}:\frac{5}{2}=\frac{14}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{28}{25}$

Figur 7.19: Øvrige feilsvar oppgave 2b, kode 99.

Noen av forklaringene har preg av (kvalifisert) gjetning og må derfor leses med dette i bakhodet. Ellers er det viktig å merke seg at feilsvarene til de tre siste elevene (en på nivå 4 og to på nivå 5) ikke skyldes feil i selve prosedyren, men snarere slurv, manglende oppmerksomhet eller konsentrasjon. Slike feil er naturligvis langt mindre "alvorlige" for eleven enn konsekvente mistolkninger og misoppfatninger, men de fanges ikke opp i den nasjonale prøven som sådan.

c) $5\frac{2}{5}-2\frac{1}{2}=$ ________

Figur 7.20: Oppgave 2c.

Mens oppgave 2b først og fremst avdekker sammenblanding av regneprosesser, er det andre forhold som er av didaktisk interesse i oppgave 2c. Her er det sider ved selve det matematiske språket som danner grunnlag for forvirring. Fire elever på nivå 4 og en elev på nivå 5 får det gale svaret 1 som resultat av feilaktig oppfatning av notasjonen for blandede tall. Vi ser her først nærmere på løsningen til en av elevene på kompetansenivå 4:

$$5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{1}\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\frac{10\cdot 2}{5\cdot 2} - \frac{2\cdot 5}{2\cdot 5}$$
$$\frac{20}{10} - \frac{10}{10} = \frac{10}{10}$$

Eleven oppfatter $5\frac{2}{5}$ som $5\cdot\frac{2}{5}$ og dermed $2\frac{1}{2}$ som $2\cdot\frac{1}{2}$.
Denne oppfatningen resulterer i den endelige svaret

$$\frac{10}{10} = 1$$

Vi legger for øvrig merke til at eleven ikke forkorter brøkene ($\frac{\cancel{5}}{1}\cdot\frac{2}{\cancel{5}} = 2$), men multipliserer ut og finner fellesnevner.

Figur 7.21: Elevsvar oppgave 2c, kode 99.

Det er ikke vanskelig å forstå hvordan eleven har mistolket notasjonen. I tillegg til de fem elevene som har fått svaret 1, har en elev på nivå 3 en variant av denne tankegangen:

$$5\frac{2}{5} = \frac{5\cdot 2}{5} = \frac{7}{5}$$
$$2\frac{1}{2} = \frac{2\cdot 1}{2} = \frac{2}{2}$$
$$\frac{7}{5} - \frac{2}{2} = \frac{7-2}{5-2} = \frac{5}{3}$$

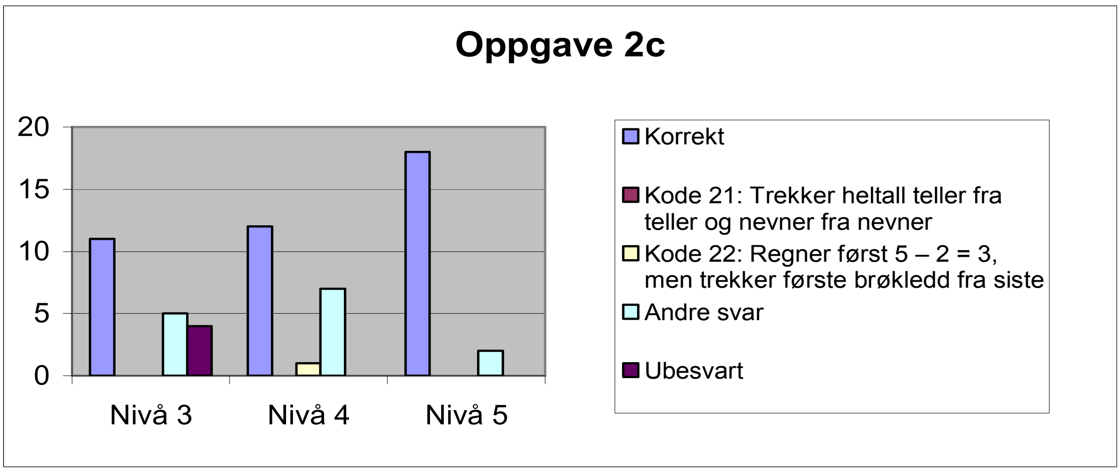
Også denne eleven oppfatter $5\frac{2}{5}$ som $\frac{5\cdot 2}{5}$. Men til tross for *multiplikasjonstegnet* i telleren utfører eleven *addisjon*. Når brøkene til slutt skal subtraheres, trekker eleven teller fra teller og nevner fra nevner. I kladderuten brukte eleven en tilsvarende framgangsmåte i oppgave 2b:

$$\frac{14}{15} : \frac{5}{2} = \frac{14-5}{15-2} = \frac{11}{13}$$

Eleven bruker altså de samme feilaktige prosedyrene i *subtraksjon* og *divisjon* av brøker. Vi skal se at denne oppfatningen også gjør seg gjeldende i oppgave 2d (se svar nummer 5 i figur 7.30 på s. 74).

Figur 7.22: Elevsvar oppgave 2c, kode 99.

Vi legger til at alle disse seks elevene oppga svaret i oppgave 2a som uekte brøk – og ikke som blandet tall. Samlet viser dette med tydelighet at de ikke er fortrolige eller kjent med denne representasjonsformen. I denne sammenhengen skal det også legges til at det ikke på noe sted er brukt blandet tall i elevenes læreverk.



Figur 7.23: Svarfordeling oppgave 2c.

Vi ser av svarfordelingen at det ikke er laget en egen kode for feiltolkningen som ble omtalt ovenfor. Dette er forbausende. De seks besvarelsene har altså alle havnet i den store sekken av ”andre svar” (kode 99), noe som nødvendigvis reduserer kvaliteten på den didaktiske informasjonen som kodeboka genererer for læreren. Riktignok kan man ikke ha en kode for alt, men analysen av de seksti besvarelsene viser at det er nettopp dette feilsvaret som er vanligst. Når man i tillegg ser at de to foreslåtte kodene til sammen fanger én elev (kode 22), så kan man stille seg spørrende til piloteringen av prøvene. Evalueringsrapporten *nasjonal prøve på ny prøve* (Lie et al. 2005) underbygger disse funnene. Forskergruppens analyse av 108 besvarelser viser at kode 21 fanger om lag 3 % av elevene, mens kode 22 også i dette utvalget kun fanger en eneste elev (s. 149).

Det kan derfor se ut som om hovedformålet med oppgaven ikke har vært å undersøke elevenes forståelse av det matematiske språket i denne representasjonformen. Denne formodningen forsterkes ved at de blandede tallene faktisk er representert på en noe annen måte i kodeboka enn i oppgavesettet:

Oppgavesett	Kodebok
$5\frac{2}{5}-2\frac{1}{2}$	$5\,{}^{2}\!/_{5}-2\,{}^{1}\!/_{2}$

Figur 7.24: Ulike representasjonsformer oppgave 2c.

Man kan, uten å ha belegg for det i det empiriske materialet, anta at representasjonsformen som er brukt i kodeboka, ville gitt færre mistolkinger av det matematiske språket. Dette kan begrunnes med at skrivemåten ${}^{a}\!/_{b}$ i større grad markerer et brudd med ”vanlig” matematisk språkføring enn det $\frac{a}{b}$ gjør. Dermed vil skrivemåten i kodeboka trolig bidra til at eleven er mer oppmerksom på at ”her er noe annerledes enn vanlig”.

I tillegg til de seks omtalte besvarelsene inneholder kategorien ”andre svar” følgende åtte løsninger:

Nivå	Svarrubrikk	Kladderute / kommentar
3	$7\frac{1}{3}$	Eleven har muligens addert de hele tallene $(5+2=7)$ og trukket teller fra teller $(2-1=1)$ og nevner fra nevner $(5-2=3)$ i brøkene.
3	$4\frac{9}{10}$	Brøkdelen i det blandede tallet er korrekt, mens det hele tallet 4 lar seg vanskelig forklare uten elevens notater.
3	$\frac{27}{10}$	$5\cdot5=$ $\frac{26\cdot2}{5\cdot2}-\frac{5\cdot5}{2\cdot5}\quad\frac{52}{10}-\frac{25}{10}$ Eleven opererer med 26 i telleren i den første brøken i stedet for 27, ellers er besvarelsen korrekt.
3	$\frac{27}{5}-\frac{5}{2}=\frac{22}{3}$	Eleven subtraherer ved å trekke teller fra teller og nevner fra nevner. Dette er altså en variant av kode 21, men denne eleven gjør først korrekt om blandet tall til uekte brøk. Vi merker oss at eleven ellers løser både brøkoppgave 2a og 2b korrekt.

4	$\underline{2\frac{7}{10}}$	$5\frac{2}{5} = \frac{27}{5}$ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ $\frac{54}{10} - \frac{25}{10} = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$ Eleven har gjort en liten regnefeil idet $54-25$ er beregnet til 27.
4	$\underline{\frac{44}{10}} = 4\frac{4}{10}$	$\frac{27}{5} - \frac{5}{2}$ $\frac{54-10}{10}$ Eleven gjør korrekt om til uekte brøk, men utvider i neste omgang den andre brøken feilaktig.
4	$\underline{1\frac{15}{10}}$	Brøkdelen i det blandede tallet er uekte. Telleren i brøken er heller ikke korrekt, noe som vanskelig lar seg forklare uten elevens notater.
5	$\frac{19}{10}$	$\frac{272}{55} - \frac{58}{25}$ $\frac{54}{10} - \frac{25}{10}$ Eleven har gjort en liten regnefeil idet $54-25$ er beregnet til 19 i stedet for 29.

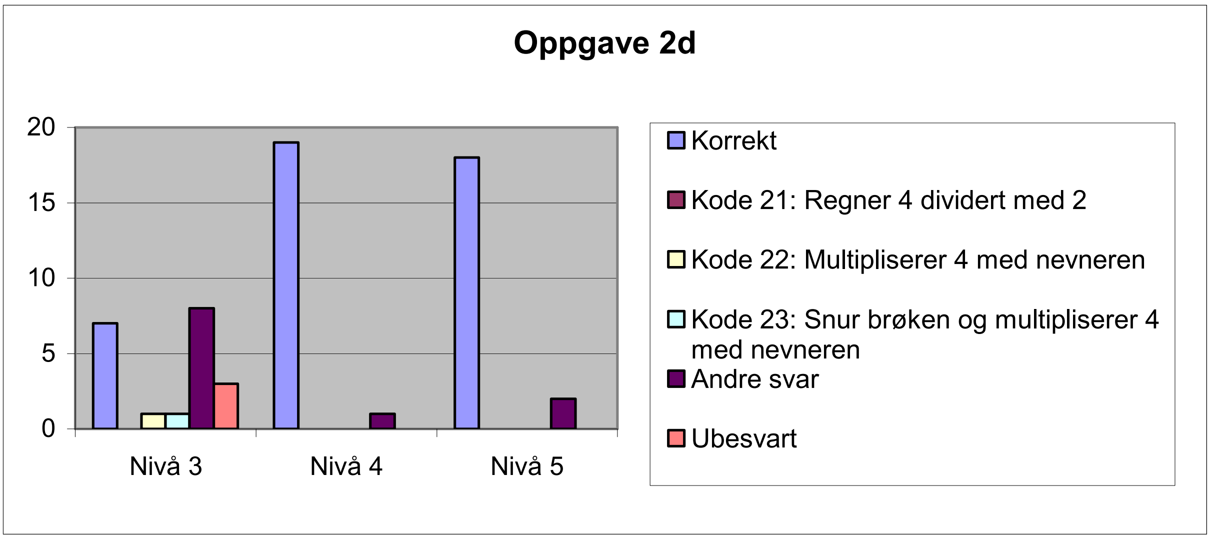
Figur 7.25: Elevsvar oppgave 2c, kode 99.

Vi ser av figur 7.23 at fire elever på nivå 3 ikke har svart på oppgaven. Dette *kan* skyldes at de ikke er kjent med representasjonsformen. Denne antydningen styrkes ved at de samme elevene oppgir svaret i oppgave 2a som uekte brøk – og ikke på blandet form.

d) $4 : \frac{2}{5} =$ ________

Figur 7.26: Oppgave 2d.

Vi har sett at divisjonsoppgaven 2b i stor grad var egnet til å skille mellom elever på de ulike kompetansenivåene. Dette er også tilfelle for den andre divisjonsoppgaven, oppgave 2d:



Figur 7.27: Svarfordeling oppgave 2d.

Svarfordelingen viser det tydelige skillet mellom elevene på nivå 3 og elevene på de to høyere nivåene. Vi legger videre merke til at de tre foreslåtte kategoriene – kode 21, kode 22 og kode 23 – kun opptrer i to av seksti besvarelser ved Soltoppen videregående skole. I kategorien ”andre svar”, som altså rommer elleve besvarelser, er det spesielt interessant å merke seg at tre elever har fått svaret 2:

$$\frac{20}{5} : \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Figur 7.28: Elevsvar oppgave 2d.

Eleven har først gjort om heltallet 4 til brøken $\frac{20}{5}$ slik at de to brøkene har lik nevner. Deretter er teller dividert på teller $(20:2=10)$ slik at det endelige svaret er 2. Man kan tenke seg at eleven har tenkt på følgende måte: *20 av noe skal deles på 2 av det samme. Svaret bør dermed være 10 av det samme, altså* $\frac{10}{5}=2$. En slik framgangsmåte vil lykkes når brøker skal adderes eller subtraheres, men ikke i divisjon og multiplikasjon. Slik ser vi også i denne oppgaven at det kan være problematisk å begrense regler til de respektive gyldighetsområdene.

To elever har multiplisert i stedet for å dividere:

Nivå	Kladderute	Svarrubrikk	Kommentar
4	$4:\frac{2}{5}$ $\quad 0.4 \quad 1.6$	$1\frac{3}{5}$	Vi merker oss at eleven først gjør $\frac{2}{5}$ om til desimaltall for så å *multiplisere* med 4 $(4\cdot 0{,}4=1{,}6)$. Dette gjøres så om til brøkform igjen (blandet tall).
5	$\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$	$1\frac{3}{5}$	Eleven har omgjort 4 til $\frac{4}{1}$ for så å gjennomføre vanlig brøk*multiplikasjon*. Det endelige svaret oppgis som blandet tall.

Figur 7.29: Elevsvar oppgave 2d, kode 99.

Enten har disse to elevene lest oppgaven feil og oppfattet divisjonstegnet som et multiplikasjonstegn, eller så har de glemt å snu den andre brøken. Vi legger til at begge elevene brukte korrekte prosedyrer i oppgave 2b.

Vi tar også med en oversikt over de seks (5-0-1) øvrige svarene i kategorien ”andre svar”:

1) $7\frac{4}{7}$	**4)** $\frac{6}{1}$
2) $\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{2}=\frac{5}{1}$	**5)** $4:\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$
3) $\cancel{4:\frac{2}{5}=\frac{20}{5}\cdot\frac{2}{5}=}$ $4:\frac{2}{5}=4:\frac{5}{2}=\frac{8}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{40}{2}$	**6)** $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{2}\ \frac{25}{10}=\frac{5}{2}$ (Nivå 5)

Figur 7.30: Elevsvar oppgave 2d, kode 99.

I svar nummer 3 har eleven utvidet til fellesnevner for så å multiplisere teller med teller. Fellesnevneren 2 beholdes i svaret. At nevneren forblir uendret skyldes mest sannsynlig at dette er regelen i addisjon og subtraksjon. Svar nummer 5 er for så vidt en variant av kode 21, men denne eleven har *subtrahert* $(4-2=2)$, og ikke *dividert* $(4:2=2)$. Det vises til figur 7.22 på side 71 der den samme eleven har vist liknende oppfatning også i oppgave 2b og 2c.

Analysen av oppgave 2 viser at mange elever har problemer med brøkregning. Brøkbegrepet og -forståelsen virker hos mange elever bare å være delvis utviklet. Feilsvarene skyldes ofte at spesifikke regneregler forsøkes brukt innenfor områder der de ikke uten videre er gyldige. Spesielt ser vi en tendens til bruk av addisjonsprosedyrer i multiplikasjonsoppgaver (og subtraksjonsprosedyrer i divisjon). Samtidig har vi sett hvordan det matematiske språket kan være grunnlag for forvirring og feilsvar.

Hva kan læreren gjøre i etterkant av en slik analyse for å styrke elevens ferdigheter og begrepsstrukturer i brøkregning? I skolehverdagen setter tidspress mange begrensninger for dette etterarbeidet, og dessverre finnes det ingen trylleformel som rydder alle misoppfatninger av veien. Man har oftest ikke anledning til å sette i gang et omfattende undervisningsopplegg som tar for seg de ulike oppfatningene blant elevene. Likevel gir den didaktiske informasjonen læreren muligheter til å legge til rette for styrking av elevens matematiske kompetanse.

Et viktig poeng er at læreren etter en slik analyse generelt er mer bevisst og klar over hvilke misoppfatninger og feilaktige prosedyrer elevene kan ha innenfor blant annet brøkregning. Dette kan bidra til undervisning og veiledning som i større grad er tilpasset den enkelte elevens behov. I figur 7.18 på side 69 satte vi opp fire regnestykker som framhever misoppfatningene til elev 1 og elev 2. Tilsvarende kan læreren gi oppgaver til elever med liknende problemer. For elevene som mistolket notasjonen i oppgave 2c, kan det for eksempel være oppklarende å løse følgende oppgaver:

a $3\frac{1}{4}+2\frac{2}{3}$ **b** $3\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{2}{3}$ **c** $3\,{}^{1}\!/_{4}+2\,{}^{2}\!/_{3}$

Figur 7.31: Oppgaver i etterkant av oppgave 2c.

I etterkant ville en diskusjon eller samtale med utgangspunkt i disse representasjonsformene kunne bidra til økt innsikt i det matematiske språket. Samtidig vil dette kunne være en passende innledning til en mer omfattende behandling av den matematiske grammatikken. Dette er et emne som gjerne ikke behandles eksplisitt i undervisningen, men som viser seg å skape problemer for mange elever. Som lærer og erfaren "språkbruker" tar man det for gitt at $x=x^1=1x^1=1\cdot x^1$ og $2+3\cdot5=2+15=17$ (og *ikke* $2+3\cdot5=5\cdot5=25$), mens dette slett ikke er opplagt for mindre erfarne brukere av det matematiske språket.

Oppgave 2 i den nasjonale prøven inneholder fire ferdig oppstilte regnestykker. Dermed er fokus rettet mot ferdighetsaspektet ved brøkregning. Å undervise slike brøkregnings-prosedyrer er isolert sett en relativt enkel oppgave for læreren. Eleven lærer seg algoritmer som innarbeides og automatiseres ved å løse mange oppgaver. Å utvikle dypere forståelse for brøker og brøkregning krever mer tid og innsats:

> *(...) the ability to carry out a particular numerical operation and the ability to know when to make use of it are not the same; both are needed. The mathematics of employment and of everyday life is always mathematics in context and is based largely on measurements of many kinds made in many different situations. (...) An excessive*

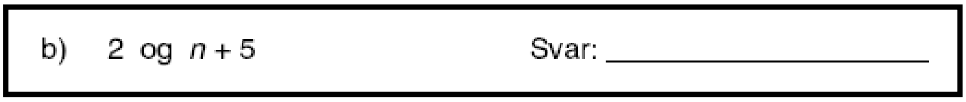
> *concentration on the purely mechanical skills of arithmetic for their own sake will not assist the development of understanding in these other areas* (Cockcroft 1982:80).

I den nasjonale prøven er det først og fremst oppgaver innenfor kompetanseområdet RTK (resonnement-, tankegang- og kommunikasjonskompetanse, se avsnitt 2.2.4 på s. 11ff.) som tar for seg dette andre aspektet.

7.1.3 Oppgave 3

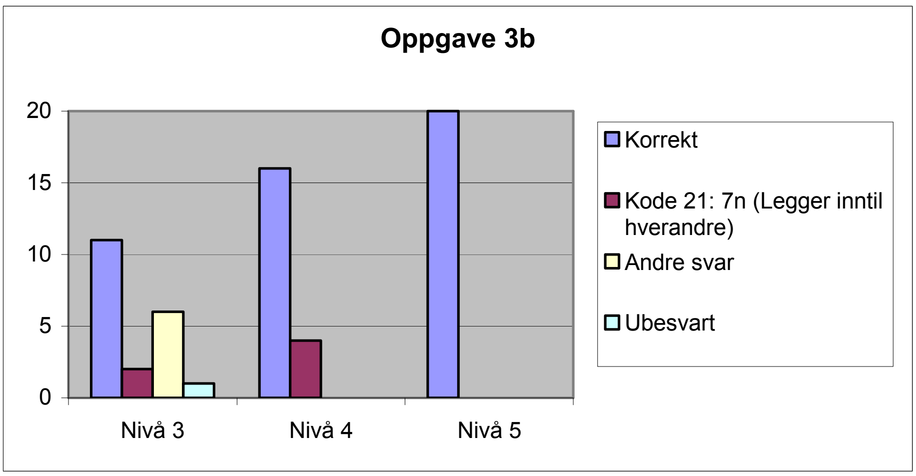
Figur 7.32: Oppgave 3c.

I oppgave 3a har hele 58 av 60 elever beregnet ”summen av 6n og 3n” korrekt. Feilsvarene er henholdsvis $9n^2$ (kvadrert variabel, kode 21, nivå 3) og 3n (subtraksjon, kode 99, nivå 5). Eleven som svarer $9n^2$ har *multiplisert* i stedet for *addert* i både 3b og 3c, og det er nærliggende å tolke dette svaret som et forsøk på multiplikasjon av 6n og 3n. Den høye andelen korrekte svar behøver ikke nødvendigvis bety at elevene har god forståelse av variabelbegrepet. Flere strategier vil nemlig kunne gi det riktige svaret på denne oppgaven, se for eksempel omtalen av fruktsalatalgebra i avsnitt 5.4 på s. 38f.



Figur 7.33: Oppgave 3b.

Da er oppgave 3b atskillig bedre egnet til å avdekke typiske misoppfatninger. Her skal elevene addere tallstørrelser sammen med variabelen n. Svaret $n + 7$ inneholder dermed en regneoperasjon, noe elever ofte har problemer med å godta (se avsnitt 6.1.3 på s. 45f.):



Figur 7.34: Svarfordeling oppgave 3b.

Vi merker oss at seks elever (2-4-0) har addert tallene (2 + 5 = 7) for så å legge variabelen n inntil denne summen (kode 21). Slik har disse endt opp med 7n, et svar som for mange elever i større grad framstår som ”ferdig” og ”endelig” enn $n + 7$ (selv om 7n inneholder et *usynlig* multiplikasjonstegn). Det siste inneholder en *synlig* regneoperasjon og kan derfor oppfattes som en uferdig prosess snarere enn et endelig objekt (se omtale av Sfard sin teori i avsnitt 6.1.3 på s. 45f.).

I kategorien "andre svar" finner vi ytterligere tre besvarelser der den variable størrelsen n er lagt inntil, riktignok av en litt annen art:

Svar: 2n+5 Svar: 2+5n Svar: 2+5n

Figur 7.35: Elevsvar oppgave 3b, nivå 3, kode 99.

Begge disse variantene kan oppfattes som et resultat av en liknende oppfatning som i kode 21. Den første eleven har kombinert tallet 2 med variabelen n og deretter lagt til leddet 5. Tilsvarende har de to andre elevene lagt n og 5 inntil hverandre og erstattet ´og´ med det semantisk likestilte ´+´. Slik kan man fastslå vesentlige likhetstrekk mellom disse to variantene og besvarelsene tilhørende kode 21. Det er likevel en sentral forskjell: svarene $2n + 5$ og $2 + 5n$ antyder en sterkere utviklet objektidé enn det 7n gjør. De to førstnevnte svarene inneholder en *synlig* regneoperasjon, noe som gjerne vekker trangen til å prosessere ytterligere for en elev med en svakt utviklet objektidé. En mangelfullt utviklet objektidé vil kunne være et hinder for ytterligere faglig framgang (Sfard 1991:29). Ren prosesstilnærming vil oftest ikke gi mer enn *instrumentell* forståelse, og ikke *operasjonell* forståelse (Solvang 1992:96f., Cockcroft 1982:68, se også avsnitt 6.1.3 på s. 45f.).

Overgangen fra en prosessidé til en objektidé går i det generelle tilfellet langsomt for eleven (Sfard 1991:16). Dessuten vil det være store individuelle forskjeller mellom elevene i en gruppe. Analysen ovenfor kan gi læreren inntrykk av i hvor stor grad den enkelte elev er fortrolig med denne omfattende dualiteten i variabelbegrepet. Derfor er dette informasjon av stor didaktisk nytteverdi for læreren som dermed er i bedre stand til å tilby eleven passende undervisning og veiledning. For å kartlegge disse elevenes oppfatninger ytterligere og for å styrke deres variabelbegrep, kunne eksempelvis følgende oppgaver være et fint utgangspunkt for faglig samtale og diskusjon mellom elevene:

Oppgave 1	**Oppgave 2**
Adder tallet *x* til…	*n* er et tall. Skriv et tall som er…
a $4x$	**a** fire større enn *n*
b $x + 3y$	**b** fem mindre enn *n*
c 7	**c** dobbelt så stort som *n*

Figur 7.36: Oppgaver til elever i etterkant av oppgave 3b.

I etterkant kunne elevene blitt utfordret til å kontrollere svarene ved å tilordne en bestemt verdi til *x*, *y* og *n*. Man vil med et slikt kortvarig opplegg i det minste sette fokus på essensielle sider ved variabelbegrepet. I introduksjonsfasen av variabelbegrepet vil man ha større muligheter for mer omfattende og dermed tidkrevende undervisningsopplegg.

Tall & Thomas (1991) hadde gode erfaringer med å la elevene utforske algebra på PC. De brukte blant annet programvare som gjorde det mulig for eleven å manipulere eksempler, gjette svar og teste riktigheten av disse. For eksempel kunne de la datamaskinen beregne uttrykk som $2 + 3a$ og $5a$ for ulike verdier av *a*. Dette opplegget bidro til at eleven kunne "heve blikket" og konsentrere seg om det mer overordnede aspektet ved de algebraiske uttrykkene:

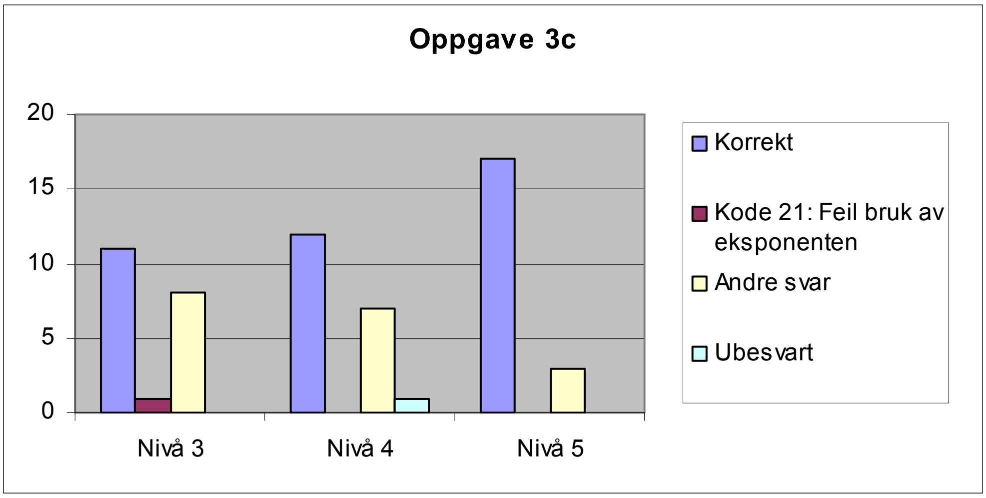
> *Thus the pupil is relieved of the burden of the evaluation process and simply, by not having to carry it out, is able to focus on the product of the evaluations and to predict and test why different looking expressions may always give the same value* (Tall & Thomas 1991:33).

I forhold til kontrollgruppen, som fulgte et standard undervisningsopplegg, var elevene i eksperimentgruppen i bedre stand til å oppfatte uttrykk som objekter. Som et resultat av dette, gjorde elevene blant annet færre feil av typen $2+3a=5a$ og $3+m=3m$. I dag vil det være naturlig å la elevene bruke kalkulator i slike og liknende utforskingsarbeider.


c) $3a + a^2$ og $2a - 2a^2$ Svar: ____________________

Figur 7.37: Oppgave 3c.

Oppgave 3 avsluttes med en deloppgave som i utgangspunktet har høyere vanskelighetsgrad enn de to foregående. Med en blanding av første- og andregradsledd kan man forvente problemer i omgangen med de ulike eksponentene:



Figur 7.38: Svarfordeling oppgave 3c.

Nedgangen i antall korrekte svar fra oppgave 3b, vanskelighetsgraden tatt i betraktning, er ikke større enn man kunne forvente, men vi legger merke til den store andelen ”andre svar”. Mens kun én av seksti besvarelser er kategorisert som kode 21 (omfatter svarene $4a$, $4a^2$, $4a^3$ og $4a^4$), er altså hele atten – nærmere hver tredje besvarelse i utvalget – samlet under paraplyen ”andre svar”. Hos halvdelen av disse skyldes det gale svaret en sammenblanding av regneoperasjonene addisjon og subtraksjon:

Svar	Nivå 3	Nivå 4	Nivå 5	Totalt
$5a-3a^2$	2	1	0	3
$a-a^2$	1	1	1	3
$a+a^2$	1	0	0	1
$5a+3a^2$	0	0	1	1
$5a+a^2$	0	0	1	1
Sum	4	2	5	9

Figur 7.39: Elevsvar oppgave 3c, kode 99.

For disse ni elevene er det altså ikke potensnotasjonen som byr på problemer, men selve sammentrekkingen av ledd. I oppgaven er tre av leddene positive: $3a$, a^2 og $2a$ – mens ett ledd er negativt: $-2a^2$. Figur 7.39 viser fem svar som alle er resultat av at ett eller flere av disse leddene har blitt behandlet med galt fortegn. Vi kan tenke oss at feilsvaret $5a-3a^2$ kommer av en tankegang der eleven adderer a^2 og $2a^2$ som gir $3a^2$, hvorpå et minustegn settes foran som følge av at "pluss og minus gir minus". Feilsvaret $a-a^2$ kan skyldes at også leddet $2a$ er subtrahert i stedet for addert. De tre øvrige variantene i figur 7.39 kan tilskrives tilsvarende forhold.

For å illustrere det store antallet ulike svar og framgangsmåter i denne oppgaven, tar vi også med svarfordelingen for de øvrige ni elevene i kategorien "andre svar":

Svar	Nivå 3	Nivå 4	Nivå 5	Totalt
$3a$ *	2	0	0	2
$5a-2a$ *	1	0	0	1
$6a^2-6a^3+2a^3-2a^4$ *	1	0	0	1
$-a^2+6a$	0	1	0	1
$5a-2a^4$	0	1	0	1
$5a+a^2-2a^2$ *	0	1	0	1
$5-a^2$	0	1	0	1
$5a+2$	0	1	0	1
Sum	4	5	0	9

Figur 7.40: Elevsvar oppgave 3c, kode 99. Svar merket med * er behandlet nedenfor.

Vi merker oss at to elever har fått $3a$ og én elev $5a-2a$ $(=3a)$ som svar. Man kan anta at disse oppfatter a^2 som likestilt med $2a$, altså at eksponenten angir antallet a-er. En kikk på disse elevenes besvarelser i oppgave 6 kan til en viss grad bekrefte denne antakelsen. Med denne misoppfatningen vil regneprosessen se slik ut:
$3a+a^2+2a-2a^2=3a+2a+2a-4a=\underline{\underline{3a}}$. Dette viser en tydelig mangel på forståelse for potensnotasjonen. En slik oppfatning er forholdsvis utbredt blant elever i ungdomsskolealder (Brekke 2000:38), og vi ser at den også gjør seg gjeldende blant "våre" grunnkurselever.

Svaret $6a^2-6a^3+2a^3-2a^4$ er et resultat av multiplikasjon. Denne eleven har også multiplisert i de to foregående deloppgavene. Om dette skyldes en misoppfatning av begrepet *sum*, eller om det kan tilskrives uoppmerksomhet, kan vi ikke uttale oss om.

Vi legger merke til at svaret $5a+a^2-2a^2$ for så vidt er korrekt, men ikke tilstrekkelig sammentrukket. Det usynlige ett-tallet foran a^2 kan være grunnen til at prosessen ikke er avsluttet. Representasjonsformen $5a+1a^2-2a^2$ framstår som mer konsekvent og regelrett og ville kanskje ha ført til at eleven hadde fullført utregningen.

I analysen av oppgave 6e (se avsnitt 7.1.4 på s. 80ff.) skal vi se om funnene er tilsvarende når oppgaven er skrevet i fullstendig symbolsk stil. Der skal vi også se om den enkelte elev bruker den samme strategien i de to tilfellene, eller om framgangsmåten er ulik i henholdsvis blandet og fullstendig symbolsk stil.

7.1.4 Oppgave 6

Oppgave 6 handler om å skrive algebraiske uttrykk på en enklere eller mer kompakt form. Det er hovedsakelig elevenes begreper innenfor potensregning som testes. Svarfordelingen i oppgave 3c antydet at flere elever i utvalget har problemer på dette området. Oppgave 6 er velegnet til å utforske denne indikasjonen nærmere.

Regn ut og skriv så enkelt som mulig:

a) $x^3 \cdot x^4 =$ ____________________

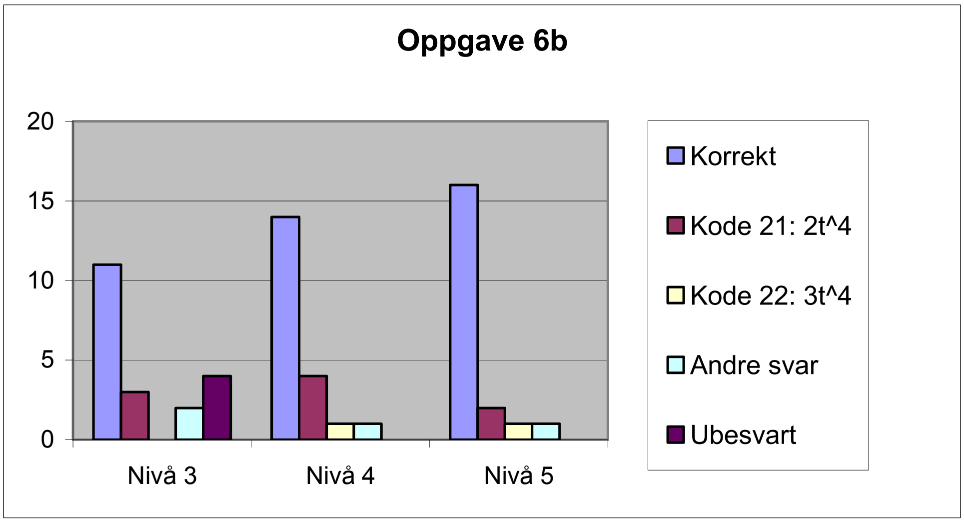
Figur 7.41: Oppgave 6a.

Multiplikasjonen i oppgave 6a er gjennomført korrekt av 55 elever. Av de fem gale besvarelsene er det fire elever på nivå 3 som har multiplisert eksponentene og fått x^{12} (kode 21). Man kan tenke seg at det er det eksplisitte multiplikasjonstegnet i oppgaven som gjør at elevene velger denne framgangsmåten. Det siste feilsvaret finner vi hos en elev på nivå 4. Vedkommende har addert både eksponentene og grunntallene og fått $2x^7$. Det er rimelig å tenke seg at denne eleven oppfatter x som et objekt, og at de to eksplisitte x-ene i oppgaven dermed trekkes sammen til 2x (se Küchemann sin teori i avsnitt 5.3 på s. 36ff. og omtalen av fruktsalatalgebra i avsnitt 5.4 på s. 38f.).

b) $t^2 + 2t^2 =$ ____________________

Figur 7.42: Oppgave 6b.

Vi finner liknende misoppfatninger i oppgave 6b. Her skal man trekke sammen ulike potenser av t. Denne oppgaven viser seg å være vanskeligere enn den foregående, og den avdekker problemer blant elever på alle tre nivåer:



Figur 7.43: Svarfordeling oppgave 6b.

Hele ni elever (3-4-2) har endt opp med $2t^4$ (kode 21). Dette feilsvaret kan komme av at det multipliseres i stedet for adderes, men også andre oppfatninger kan ligge til grunn. Eleven kan ha summert de eksplisitte tallene/koeffisientene og eksponentene hver for seg for så å legge tallet inntil variabelen (se avsnitt 6.1.3 på s. 45f.). Vi legger i denne sammenhengen merke til at den ”manglende” koeffisienten foran t^2 i praksis behandles som null.

Blant de ni kode-21-besvarelsene er det kun tre som inneholder noe mer enn selve svaret:

Nivå	Besvarelse
4	$t^2 + 2t^2 = t^{2+2} + 2 = 2t^4$
4	$t^2 + 2t^2 = t^2 + 2t^2 = 2t^{2+2} = 2t^4$
5	$t^2 + 2t^2 = 2t^{2+2} = 2t^4$

Figur 7.44: Elevsvar oppgave 6b, kode 21.

I de seks andre besvarelsene har vi kun selve svaret å gå ut fra i analysen. Dette er ikke tilstrekkelig for å kunne uttale seg om hvilken tankegang den enkelte eleven har brukt. For de tre besvarelsene i figur 7.44 derimot kan man i hvert fall antyde hvilken oppfatning som ligger til grunn for svaret. Den første eleven har summert eksponentene og beholdt addisjonstegnet i mellomregningen. Deretter er addisjonstegnet fjernet og tallet 2 lagt inntil variabelen slik at svaret i større grad framstår som et endelig *objekt* (se Sfard sin teori i avsnitt 6.1.3 på s. 45f.), noe eleven også gjorde i oppgave 3b (se avsnitt 7.1.3 på s. 76ff.). Slik kan denne besvarelsen tyde på en strategi der symbolene og tallene legges inntil hverandre. *De bruker på en måte addisjon i betydningen ”legge sammen” eller ”å samle”* (Brekke 2000:24).

De to siste feilsvarene er helt like og synes å komme av at elevene har brukt multiplikasjon i stedet for addisjon. Grunnen til dette kan være så enkel at eleven i farten har lest oppgaveteksten feil. At det var snakk om multiplikasjon i den forrige oppgaven (oppgave 6a) kan styrke sannsynligheten for denne forklaringen. Sammenblanding av regneregler for addisjon og multiplikasjon er også en mulighet. Dette kan gjerne opptre dersom lærestoffet ikke er forankret i forståelse, men ren ”pugging” av enkeltstående regler.

To elever (0-1-1) har beregnet $t^2 + 2t^2 = 3t^4$ (kode 22). Dette kan forklares tilsvarende som det første svaret i figur 7.44. Forskjellen er at elevene her har regnet med den implisitte koeffisienten 1 foran t^2. Samlingen av tall og koeffisienter gir dermed $3t^4$ når disse legges inntil hverandre.

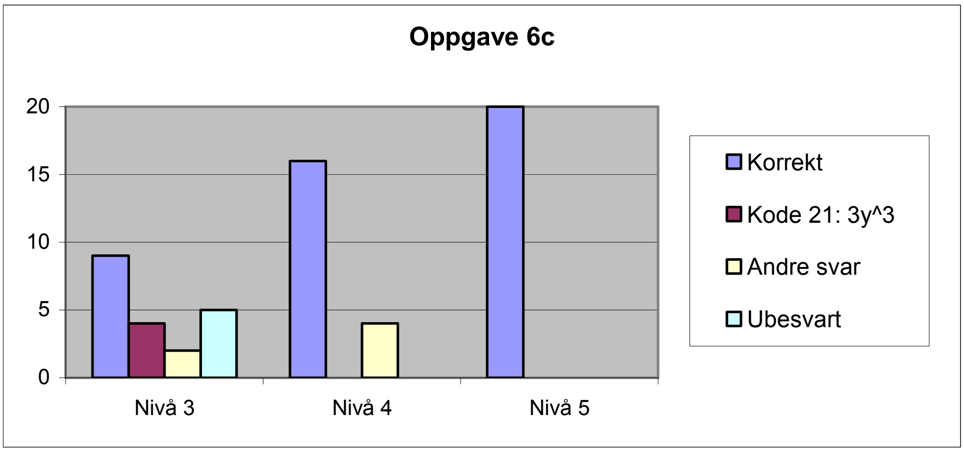
Blant de fire besvarelsen i kategorien ”andre svar” har to elever brukt en framgangsmåte som på mange måter kan sies å være beslektet med kode 21 i oppgave 6a (se s. 80). $2t^2$ er objektet t^2 to ganger, altså $t^2 + t^2$. Med en oppfatning om at også eksponentene skal adderes når leddene adderes, kan altså oppgaven beregnes som $t^2 + 2t^2 = t^2 + t^2 + t^2 = t^{2+2+2} = \underline{\underline{t^6}}$. Det er av didaktisk stor betydning at begge disse elevene brukte tilsvarende strategi i oppgave 6a. Der multipliserte de altså eksponentene som en følge av at regneoperasjonen var multiplikasjon.

Begge de to siste elevene i denne kategorien (0-1-1) opererer med svaret $2t^2 + t^2$. De har altså ikke trukket de to leddene sammen, men kun endret på rekkefølgen. Nok en gang er det mulig at det er det manglende ett-tallet foran t^2 som skaper problemer. Det hadde derfor vært interessant å be disse to elevene løse den samme oppgaven presentert på et mer ”konsekvent” matematisk språk: $1t^2 + 2t^2 =$ ______________ .

c) $3y^6 : y^2 =$ ____________________________

Figur 7.45: Oppgave 6c.

Svarfordelingen for oppgave 6c viser et meget klart skille mellom nivå 3 og de andre nivåene:



Figur 7.46: Svarfordeling oppgave 6c.

Vi ser at fire elever på nivå 3 har fått $3y^3$ som svar (kode 21). Dette kan forklares ved at de har dividert eksponenten i dividenden med eksponenten i divisoren, $6 : 2 = 3$. Det er de samme fire elevene som multipliserte eksponentene i oppgave 6a (se side 80, kode 21). Dette tyder på at disse elevene har en konsekvent strategi som de benytter i slike oppgaver. De bruker altså den samme regneoperasjonen på eksponentene som i oppgaven for øvrig:
$x^3 \cdot x^4 = x^{3\cdot 4} = \underline{\underline{x^{12}}}$ og $3y^6 : y^2 = 3y^{6:2} = \underline{\underline{3y^3}}$.

De seks besvarelsene i kategorien ”andre svar” fordeler seg slik:

Svar	Nivå 3	Nivå 4	Totalt
y^{16}	1	1	2
y^9	1	0	1
$2y^6 + y^4$	0	2	2
$\frac{y^2}{y^{-18}}$	0	1	1
Sum	2	4	6

Figur 7.47: Elevsvar oppgave 6c, kode 99.

I analysen av svarene finner vi flere eksempler på konsekvent bruk av feilaktige strategier:

$3y^6 : y^2 = 3y^6 : y^2 = y^{18-2} = y^{16}$

Figur 7.48: Elevsvar oppgave 6c, nivå 3, kode 99.

Telleren i brøken er først omgjort til $y^{6\cdot 3} = y^{18}$ hvorpå korrekt potensregel er brukt i fortsettelsen. Denne eleven brukte tilsvarende ”regel” for å omgjøre $2t^2$ til t^4 (*$2t^2$ = 2 ganger t^2 = ta t^2 to ganger = $t^2 \cdot t^2$ = t^4*) i oppgave 6b. De foreslåtte kodene får ikke fram denne konsekvente misoppfatningen (kategori ”andre svar” i både 6a og 6b), men en mer inngående analyse frambringer verdifull informasjon for læreren om elevens oppfatning av potenser. Vi ser av figur 7.47 at ytterligere en elev har avgitt svaret y^{16}.

Svaret y^9 skyldes en liknende misoppfatning. Eleven på nivå 3 gjør også om $3y^6$ til y^{18} ($y^6 + y^6 + y^6 = y^{18}$) for så å dividere eksponenten i dividenden med eksponenten i divisoren. Vedkommende ender dermed opp med svaret $y^{18} : y^2 = y^{18:2} = \underline{\underline{y^9}}$. Hos denne eleven er ikke tendensen til å gjøre om ab^p til $b^{a\cdot p}$ konsekvent. Dette kan man fastslå ettersom $t^2 + 2t^2$ ble beregnet på korrekt vis i oppgave 6b, altså uten å sette $2t^2$ lik t^4. Det kan eksempelvis være oppgavens ytre form som er det avgjørende for hvilken framgangsmåte som blir benyttet.

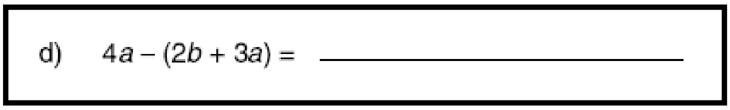
Det kan virke rart at to elever har fått svaret $2y^6 + y^4$. En mulig ”forklaring” er at de har subtrahert koeffisientene $(3 - 1 = 2)$, lagt variabelen i telleren inntil for så å legge til kvotienten $y^6 : y^2 = y^{6-2} = y^4$.

Svaret $\frac{y^2}{y^{-18}}$ virker ikke mindre rart:

Svarrubrikk	Kladderute	Kommentar
$\frac{y^2}{y^{-18}}$	$\left(3\,\frac{1}{y^{-6}}\right) \cdot \frac{y^2}{1}$ $\frac{1}{y^{18}} \cdot \frac{y^2}{1}$	Eleven gjør om y^6 til brøken $\frac{1}{y^{-6}}$ som for så vidt er korrekt. Siden det er tale om divisjon tar eleven sikte på å multiplisere med den omvendte brøken. I utregningen derimot er ikke brøken snudd. Koeffisienten 3 brukes som faktor i eksponenten (jamfør kommentar ovenfor).

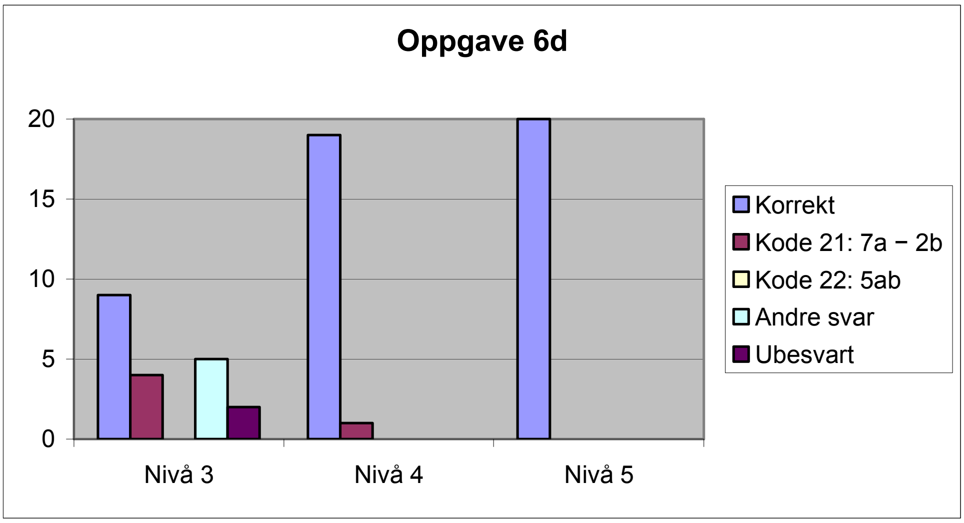
Figur 7.49: Elevsvar oppgave 6c, nivå 4, kode 99.

Vi merker oss at hele fem elever (alle disse er på nivå 3) har latt oppgave 6c stå ubesvart. Dette er det høyeste antallet blant RSF-oppgavene i delprøve 1. Den noe uvante representasjonen av divisjon med kolon kan være en medvirkende årsak til dette. Elevenes lærebok bruker nesten utelukkende brøkstrek for å angi divisjon, og ikke kolon.


d) $4a - (2b + 3a) =$ ______

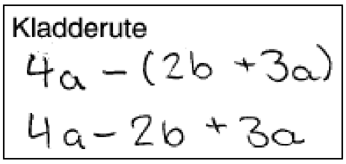
Figur 7.50: Oppgave 6d.

I oppgave 6d vil en forståelse av a og b som konkrete objekter, for eksempel appelsiner og bananer, kunne gi det riktige svaret $a - 2b$. Slik vil ikke et riktig svar nødvendigvis fortelle hvorvidt eleven har et velutviklet variabelbegrep eller ei (se omtale av fruktsalatalgebra i avsnitt 5.4 på s. 38f.). Oppgaven fungerer likevel diagnostisk ettersom den ”avslører” elever som ikke kjenner konvensjonene for oppløsning av parenteser:



Figur 7.51: Svarfordeling oppgave 6d.

Vi ser at fem elever i utvalget (4-1-0) ikke skifter fortegn når parentesen løses opp (kode 21):



Figur 7.52: Elevsvar oppgave 6d, kode 21, nivå 4.

Det kan hende at disse elevene ikke er klar over at regnerekkefølgen i mange tilfeller er av avgjørende betydning for resultatet. For å sette søkelyset på dette, kan læreren for eksempel be dem om å beregne $4-(2+3)$ på to ulike måter. Med misoppfatningen som elevene viser i oppgave 6d, vil dette resultere i to ulike svar: $4-(2+3) = 4-2+3 = \underline{\underline{5}}$ når parentesen først løses opp, og $4-(2+3) = 4-5 = \underline{\underline{-1}}$ når tallene i parentesen summeres først. De to forskjellige svarene på én og samme oppgave vil skape en kognitiv konflikt. Læreren kan også utfordre elevene til å lage en regnefortelling som passer til regnestykket. I neste omgang kan man ta steget videre og legge fram diagnostiske likninger av typen $x \cdot 2 + 4 = 12$ og $x \cdot (2+4) = 12$. Diskusjoner med utgangspunkt i disse oppgavene vil kunne bidra til å rydde misoppfatninger om parentesbruk av veien.

Blant de fem besvarelsene i kategorien ”andre svar” figurerer $a + 2b$ to ganger:

$4a - (2b + 3a) = 1a + 2b$

Figur 7.53: Elevsvar oppgave 6d, nivå 3.

Det synlige fortegnet inni parentesen er korrekt skiftet, men i tillegg er også minustegnet foran parentesen endret til et plusstegn: $4a - (2b + 3a) = 4a + 2b - 3a = \underline{\underline{a + 2b}}$. En legger for øvrig merke til at eleven her opererer med koeffisienten 1 foran variabelen a. Vi har tidligere kommentert den hyppige utelatelsen av ett-tallet i det matematiske språket, og vi har sett hvilke problemer dette kan skape for elever som ikke er helt fortrolige med den matematiske grammatikken.

Vi registerer også med interesse at to elever multipliserer 4a med parentesen:

$4a - (2b + 3a) = 8ab - 12a^2$

Figur 7.54: Elevsvar oppgave 6d, kode 99, nivå 3.

Det er rimelig å tro at de gjør dette som følge av at arbeidet med algebra og parenteser på grunnkurs i stor grad dreier seg om multiplikasjon, kvadratsetningene inkludert. Figurativt er det ikke mye som skiller oppgaven ovenfor fra $4a \cdot (2b + 3a)$. Vi merker oss bruken av fortegn i svaret. $4a \cdot 3a$ er beregnet til $-12a^2$, trolig som følge av minustegnet foran parentesen.

Også det siste feilsvaret i kategorien "andre svar" inneholder en kvadrert variabel:

$4a - (2b + 3a) = 4a-(2b+3a) = 4a-2b + 4a - 3a = \underline{\underline{a^2-2b}}$

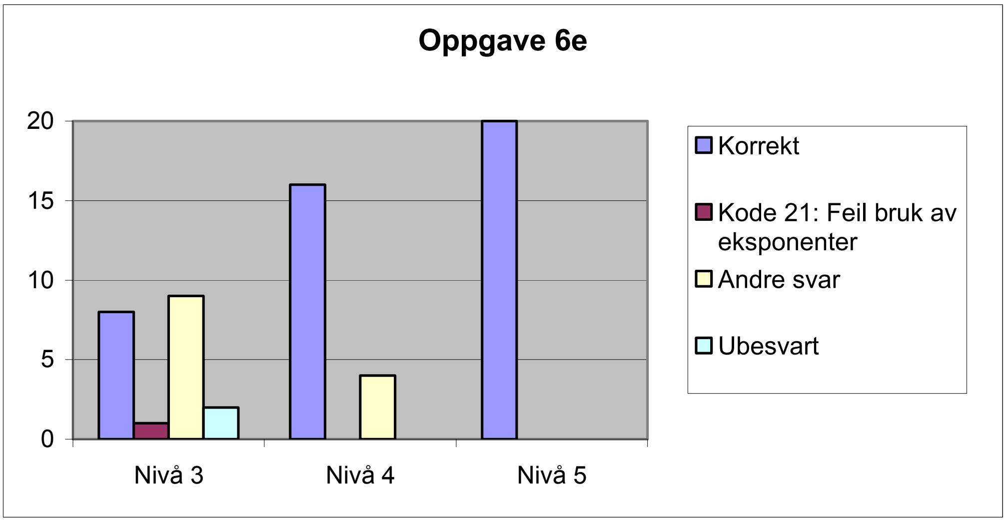
Figur 7.55: Elevsvar oppgave 6d, kode 99, nivå 3.

Mellomregningen kan tyde på at også denne eleven har brukt prosedyrer for multiplikasjon med en parentes. Denne prosedyren innebærer at $4a$ først skal multipliseres med det første leddet i parentesen, så med det andre leddet: $4a \cdot (2b + 3a) = (4a \cdot 2b) + (4a \cdot 3a)$. Men siden regnetegnet foran parentesen i dette tilfellet er et subtraksjonstegn, har eleven trukket fra i stedet for multiplisert: $4a - (2b + 3a) = (4a - 2b) + (4a - 3a)$. Det er vanskelig å finne en rimelig forklaring på hvordan dette i neste omgang er trukket sammen til $a^2 - 2b$.

e) $3a + a^2 + 2a - 2a^2 =$ ____________________

Figur 7.56: Oppgave 6e.

Oppgave 6e er matematisk sett identisk med oppgave 3c. Det er kun graden av formalisme som skiller dem fra hverandre. Analysen av oppgave 3c avdekket først og fremst et meget stort antall ulike svar. Mange av disse var et resultat av sammenblanding av addisjon og subtraksjon. Mens den fullstendig symbolske stilen i oppgave 6e gjorde at betraktelig flere elever på nivå 4 og 5 svarte korrekt, var trenden for elevene på nivå 3 den motsatte:



Figur 7.57: Svarfordeling oppgave 6e.

Tre nivå-5-elever gjorde fortegnsfeil i oppgave 3c. Dette er ikke et problem når oppgaven presenteres i fullstendig symbolsk stil. Dermed har alle 20 elevene på nivå 5 riktig svar på oppgave 6e.Vi ser en tilsvarende tendens i besvarelsene til elevene på nivå 4. Seks av de sju elevene som gjorde feil i oppgave 3c, svarer korrekt når oppgaven består utelukkende av matematiske symboler. Den siste eleven kom fram til $5a + 2$ i oppgave 3c og $5a - 2$ her. At det likevel er fire besvarelser i kategorien "andre svar" på nivå 4 skyldes at to elever svarte riktig i oppgave 3c, men galt i 6e $(5a - a$ og $-a^2 + 6a)$. Samtidig har den ene som lot være å svare i oppgave 3c, oppgitt det gale svaret $4a$ her (kode 21). En mulig forklaring her er at koeffisientene først er regnet ut for seg $(3 + 1 + 2 - 2 = 4)$ hvorpå variabelen a er lagt inntil dette tallet.

Blant de elevene i utvalget som har lavest skåre innenfor RSF, er altså trenden den motsatte. Mens elleve elever gjorde riktig i oppgave 3c, er antallet riktige svar redusert til åtte når utelukkende matematiske symboler er brukt. Fem elever gjorde riktig i oppgave 3c, men galt i oppgave 6e. Disse fordeler seg slik:

Svar	Antall
$5a + 3a^2$	2
$5a + a^2$	2
Ubesvart	1

Figur 7.58: Riktig i oppgave 3c, galt svar i oppgave 6e, nivå 3.

I likhet med oppgave 3c ser vi at feilsvarene ikke skyldes problemer med eksponentene. Det er sammentrekking av leddene som volder størst problemer. Noen elever har en oppfatning om at det er regnetegnet *etter* det enkelte ledd som avgjør om en skal trekke fra eller legge sammen, uavhengig av leddets plassering i regnestykket. Med en slik tankegang gir addisjonen av andregradsleddene $a^2 + 2a^2 = 3a^2$ siden a^2 i oppgaven er *etterfulgt* av et addisjonstegn. Dette tegnet fantes altså ikke i oppgave 3c, noe som kan forklare hvorfor disse elevene unngikk å gjøre feil der. Samtidig vises det omtale av funnene til Linchevski & Herscovics (1996) i avsnitt 6.1.4 på s. 48.

Blant de øvrige feilsvarene er det spesielt interessant å merke seg at tre (2-1-0) elever ender opp med $5a - 2$. Dette svaret kan ha sitt utspring i språklige forhold. Å *subtrahere* eller *trekke fra* er i det daglige språket det samme som å *fjerne*, og med en slik tilnærming vil $a^2 - 2a^2$ kunne oppfattes som likestilt med -2 (se avsnitt 6.1.4 på s. 47ff. for nærmere forklaring).

Avslutningsvis tar vi med en oversikt over samtlige svar i kategorien "andre svar":

Svar	**Nivå 3**	**Nivå 4**	**Totalt**
$5a + 3a^2$	3	0	3
$5a - 2$	2	1	3
$a^2 + 5a$	2	0	2
$8a^4$	1	0	1
$5a - 2a^4$	1	0	1
$4a$	0	1	1
$-a^2 + 6a$	0	1	1
$5a - a$	0	1	1
Sum	9	4	13

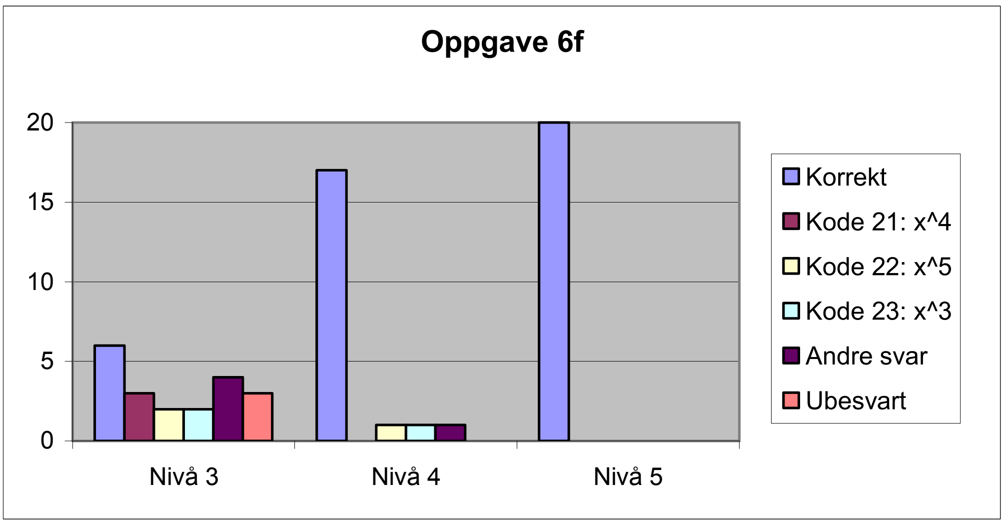
Figur 7.59: Elevsvar oppgave 6e, kode 99.

Det er interessant at elevene med høyest poengsum innen RSF gjør det best når oppgaven er presentert i fullstendig symbolsk stil, mens de svakeste elevene skårer best når oppgaven gis med blandet stil. Pimms forslag om å ta det rolig og ikke ile mot symbolisme for enhver pris (se avsnitt 6.1.3 på s. 45f.), kunne kanskje vært nøkkelen til økt suksess.

f) $\dfrac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} =$ ____________________

Figur 7.60: Oppgave 6f.

Vi har sett hvordan oppgave 6c-6e i spesielt stor grad skiller ut elevene på nivå 3 fra de øvrige elevene. Det samme er tilfelle for oppgave 6f:



Figur 7.61: Svarfordeling oppgave 6f.

Vi har tidligere i oppgave 6 sett at flere elever lar det eksplisitte regnetegnet i oppgaven bestemme behandlingen av eksponentene. Denne misoppfatningen kommer også til uttrykk i oppgave 6f (kode 21):

$$\frac{x^{12}}{x^3} = x^4$$

Figur 7.62: Elevsvar oppgave 6f, kode 21.

Tre elever har fått dette svaret. De har først, som følge av multiplikasjonstegnene, multiplisert eksponentene i telleren og fått 12. Deretter er eksponenten i telleren delt på eksponenten i nevneren, $12 : 3 = 4$. Disse tre elevene har også fulgt tilsvarende framgangsmåte i både oppgave 6a og 6c:

Oppgave	Elev 1	Elev 2	Elev 3
6a) $x^3 \cdot x^4$	x^{12}	x^{12}	x^{12}
6c) $3y^6 : y^2$	$3y^3$	$3y^3$	$3y^3$
6f) $\dfrac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3}$	$\dfrac{x^{12}}{x^3} = x^4$	x^4	$\dfrac{x^{12}}{x^3}$ x^4

Figur 7.63: Elevsvar oppgave 6a, 6c og 6f for tre elever på nivå 3.

Vi har ved flere anledninger pekt på noen av de vanskelighetene som "usynlige" ett-tall kan skape i matematikken. For en erfaren bruker av det matematiske språket er det innarbeidet og godtatt at $x = x^1$. I innlæringsfasen derimot volder slike språklige "forkortinger" problemer for mange elever:

$$\frac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} = x^2 \cdot x^6 \cdot x \cdot x^{-3} = x^{8-3} = x^5$$

Figur 7.64: Elevsvar oppgave 6f, kode 22.

Eleven har brukt regnereglene for potenser på korrekt vis, men vi ser at eksponenten 1 ikke har kommet med i beregningen. Vi legger merke til at denne eleven har oppgitt svaret i oppgave 3c og 6e som $5a - 1a^2$, noe som understreker at vedkommende ikke er vant til eller komfortabel med å bruke det "enkleste" matematiske språket.

I likhet med kode 21 og kode 22, fanger kode 23 besvarelsen til tre elever. Ingen av disse viser noen form for utregning. Likevel kan vi anta at feilsvaret skyldes en "mildere" variant av misoppfatningen til elev 1, 2 og 3 i figur 7.63. Multiplikasjonen av faktorene i telleren gir x^9, som er riktig. I neste omgang lar gjerne elevene regnetegnet i oppgaven bestemme regneoperasjonen mellom eksponentene: $\dfrac{x^9}{x^3} = x^{9:3} = \underline{\underline{x^3}}$.

I kategorien ”andre svar” finner vi en interessant besvarelse som viser sammenblanding av regler mellom forenkling av uttrykk og løsning av likninger:

$\frac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} \;\Big\vert\; \cdot x^3$ $x^5 \cdot x^9 \cdot x^3 = x^{17}$	For å kvitte seg med den forstyrrende nevneren har eleven multiplisert brøken med x^3, noe som er lovlig og vanlig i løsning av likninger. I neste omgang er alle faktorene i telleren multiplisert med x^3, og samtidig er nevneren forkortet bort. Slik er det endelige svaret x^{17}. Besvarelsen er et godt eksempel på hvordan sammenblanding av regler fra flere områder kan gjøre seg gjeldende.

Figur 7.65: Elevsvar oppgave 6f, kode 99.

Et blikk på de resterende fire besvarelsene i kategorien ”andre svar” avdekker nok en interessant oppfatning:

Nivå	Kladderute / svarrubrikk	Kommentar
3	$\frac{x^9}{x^3} = \frac{x^3}{x}$	Eleven multipliserer korrekt ut i telleren. Det kan virke som om eleven etter dette har dividert eksponentene på hverandre og beholdt x i nevneren.
3	$\frac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} = \frac{x^{2+6+1}}{x^3} = \frac{x^9}{x^3} = \frac{x^6}{x}$	Svaret er egentlig korrekt, men ikke fullstendig forenklet. I likhet med eleven ovenfor beholder også denne eleven x i nevneren.
3	$\frac{x^{\cancel{9}6}}{x^3} \quad \frac{x^6}{x}$	Også denne eleven beholder x i nevneren etter divisjonen. Se ytterligere kommentarer i teksten nedenfor.
4	$\underline{2x^6}$	Koeffisienten 2 foran x^6 kan være et resultat av at telleren inneholder tre x-er og nevneren én x. I forkortingen står dermed $3-1=2$ x-er igjen. Vi legger til at denne eleven svarte $2x^7$ i oppgave 6a (se s. 80).

Figur 7.66: Elevsvar oppgave 6f, kode 99.

I tre av de fire besvarelsene ovenfor er x beholdt i nevneren i det endelige svaret. Det kan virke som om også dette kan tilskrives forhold ved det matematiske språket. I den tredje besvarelsen kan man se at eleven har ”forkortet” eksponentene slik at $9-3=6$ gjenstår i telleren. Dermed er det ”ingenting” som gjenstår i nevnerens eksponent. Dette oppfattes som at x skal stå ”alene” – altså uten eksponent da denne er forkortet bort. De tre første besvarelsene ovenfor tyder på en forståelse av x som ekvivalent med $x^{\text{ingenting}}$ eller x^0. I det matematiske språket skal som kjent x forstås og behandles som x^1. Slik er dette nok et eksempel for hvordan det usynlige ett-tallet i den matematiske grammatikken volder problemer for mindre erfarne språkbrukere.

Analysen av oppgave 6 viser at flere elever bruker ukorrekte prosedyrer i forenklingen av algebraiske uttrykk. Noen av disse er konsekvente, mens andre virker å være av mer tilfeldig art. Vi så i avsnitt 6.1.4 på s. 47ff. at Demby (1997) understreker viktigheten av å skille mellom disse to typene av feilaktige prosedyrer som hun kaller for henholdsvis *rules* og *quasi-rules*. De fleste elevene som bruker ukorrekte *rules* (konsekvente prosedyrer) vil på sikt oppleve framgang i emnet, mens elevene som bruker *quasi-rules* (inkonsekvente prosedyrer), sannsynligvis vil ha større problemer med progresjonen. I arbeidet med å legge til rette for individuelt tilpasset opplæring er dette svært verdifull informasjon for læreren.

Dersom den nasjonale prøven viser at en elev bruker forenklingsregler på inkonsekvent vis, bør dette sjekkes ytterligere opp for eksempel i senere vurderingssituasjoner eller i en faglig samtale. Det kan kanskje vise seg nødvendig med spesielle opplegg for disse elevene. For elever som bruker konsekvente ukorrekte prosedyrer derimot, vil det kanskje ikke være like mye som skal til. For de tre elevene i figur 7.63 på s. 88 for eksempel, vil det i første omgang kunne virke oppklarende å be dem løse følgende oppgaver sammen:

Oppgave 1

Bruk potensreglene og skriv så enkelt som mulig. Kontroll svaret på kalkulatoren.

a $2^3 \cdot 2^4$ **b** $2 \cdot 2^3$ **c** $\frac{3^8}{3^4}$ **d** $\frac{2^4 \cdot 2}{2^2}$

Oppgave 2

Bruk potensreglene og skriv så enkelt som mulig. Sammenligne svarene med dem i oppgave 1.

a $x^3 \cdot x^4$ **b** $x \cdot x^3$ **c** $\frac{y^8}{y^4}$ **d** $\frac{x^4 \cdot x}{x^2}$

Figur 7.67: Mulige oppgaver til elevene i figur 7.63.

Med i utgangspunkt i analysen vil det være å forvente at elevene i første omgang ender opp med potensene 2^{12}, 2^3, 3^2 og 2^2 i oppgave 1. Ved å kontrollere dette på kalkulatoren vil elevene se at svarene ikke kan være riktige. De kommer i en kognitiv konflikt. Dermed vil det være nødvendig å løse denne konflikten, noe som krever at prosedyrene for potensregning endres. Oppgaven inviterer altså elevene til å innse det utilstrekkelige i sin egen tenkning. I oppgave 2 må de nye prosedyrene brukes i algebraiske uttrykk. Forhåpentligvis vil elevene være i stand til å overføre den nye lærdommen og dermed se parallellen mellom de to oppgavene. Læreren bør også be elevene skrive potensene "helt ut" ved hjelp av definisjonen: $x^3 \cdot x^4 = \overbrace{x \cdot x \cdot x}^{x^3} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}^{x^4} = \underline{\underline{x^7}}$. Det er selvsagt ingen garanti for at oppgavene i figur 7.67 vil fungere som tenkt. Misoppfatningene kan stikke dypere og kreve mer utførlig og systematisk fordypning.

7.1.5 Oppgave 8

Oppgave 8 består av to førstegradslikninger av forholdsvis ulik vanskelighetsgrad. I tillegg til at den andre likningen er faglig mer krevende i seg selv, stilles det også krav til utregning og formell framgangsmåte for maksimal poenguttelling. Som en følge av dette er oppgave 8b den eneste av RSF-oppgavene i hele prøvesettet som er vektet til to poeng.

a) $4x - 2 = 2x + 8$

$x =$ ______________

Figur 7.68: Oppgave 8a.

Nesten alle elevene i utvalget har korrekt svar på oppgave 8a. Kode 21 (skifter ikke tegn ved sideskift) fanger ikke en eneste av de seksti elevene. De fire elevene med galt svar (3-1-0) har alle brukt kladderuten til en formell løsningsstrategi. To elever på nivå 3 har skiftet tegn ved ett sideskift, men ikke begge (kode 22):

$4x - 2x = 8 - 2$ $\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \dfrac{6}{2}$ $x = 3$	$4x - 2 = 2x + 8$ $4x - 2x = 8 - 2$ $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{6}{2}$ $x = 3$

Figur 7.69: Elevsvar oppgave 8a, kode 22, nivå 3.

Begge feilsvarene skyldes at et negativt ledd forblir negativt også etter sideskift. Vi legger med interesse merke til at den ene av disse to elevene (den til venstre) løser den mer krevende andre likningen helt korrekt. Den andre eleven (den til høyre) er også meget nær, men skifter ikke fortegn ved ett av totalt tre sideskift. Dette kan tyde på at feilene heller skyldes slurv og hastverk enn en konsekvent misoppfatning. Det samme er tilfelle for de to andre feilsvarene i oppgave 8a:

$4x - 2 = 2x + 8$ $4x - 2x = 8 + 2$ $\dfrac{6x}{6} = \dfrac{10}{6}$ $x = 1,666$	$4x - 2x = 8 + 2$ $2x = 6$ $x = \dfrac{6}{3} = 3$

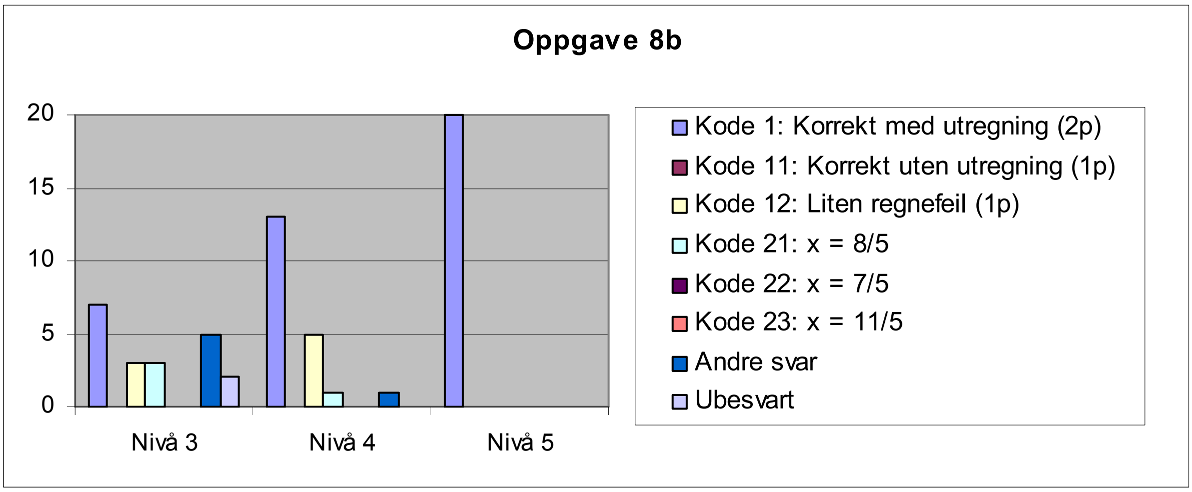
Figur 7.70: Elevsvar oppgave 8a, kode 99, nivå 3 og nivå 4.

I besvarelsen til venstre (nivå 3) har $4x - 2x$ i farten blitt til $6x$, mens eleven til høyre (nivå 4) har beregnet $8 + 2 = 6$. I oppgave 8b gjør eleven til venstre fortegnsfeil når den siste parentesen åpnes (kode 21), mens eleven til høyre løser oppgaven helt korrekt. Disse fire besvarelsene av oppgave 8a viser derfor med tydelighet at man må skille mellom de feil elevene gjør og de misoppfatningene de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, for eksempel dersom man ikke er oppmerksom nok. Misoppfatninger derimot er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning som en bruker nokså konsekvent (Brekke 2002a:10).

b) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 4x - 4$

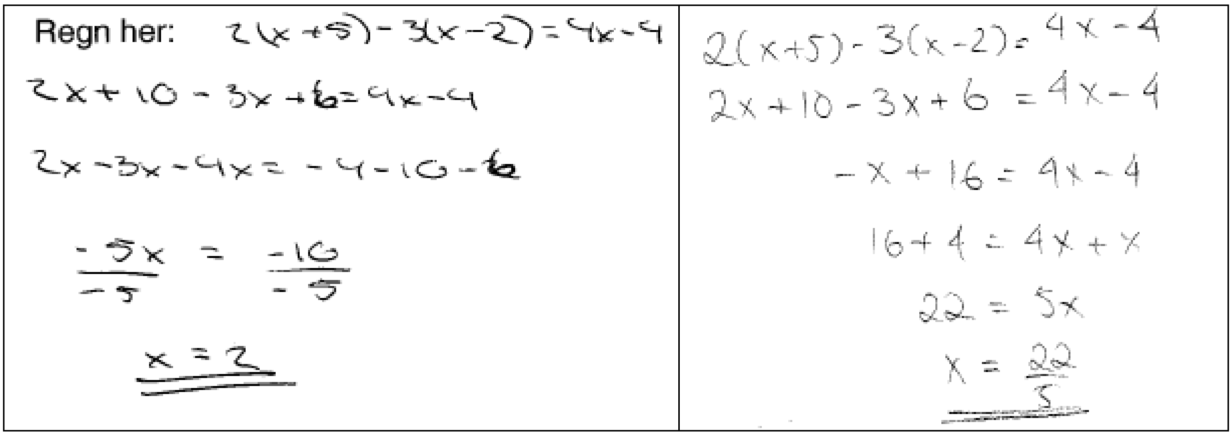
Figur 7.71: Oppgave 8b.

Slike ”tilfeldige” feil har fått sin egen kode i oppgave 8b (kode 12). Selv om det endelige svaret ikke er korrekt, åpner altså kodeboken for å gi uttelling i form av ett poeng:



Figur 7.72: Svarfordeling oppgave 8b.

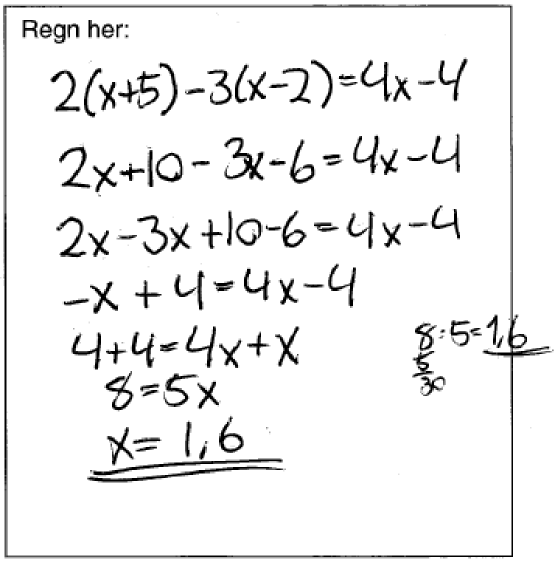
Åtte elever (3-5-0) faller innenfor kode 12. I disse tilfellene er det altså ikke snakk om misoppfatninger. Nedenfor ser en to eksempler på besvarelser i denne kategorien:



Figur 7.73: Elevsvar oppgave 8b, kode 12, nivå 3 og nivå 4.

I besvarelsen til venstre (nivå 3) har eleven beregnet $-4-10-6=-10$ i overgangen fra den tredje til den fjerde linjen, mens besvarelsen til høyre (nivå 4) blir feilaktig som følge av at eleven har beregnet $16+4=22$.

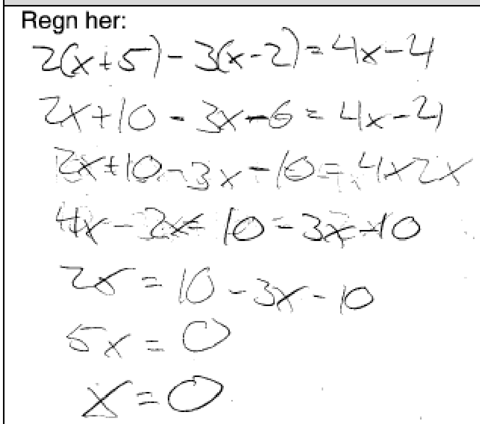
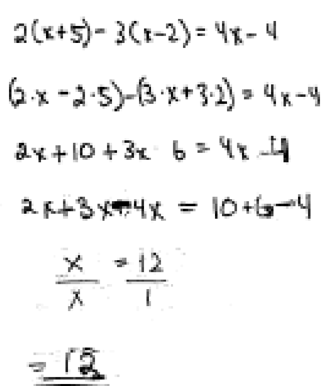
Da er de fire kode-21-besvarelsene (3-1-0) av en annen karakter. Svaret $x=\frac{8}{5}$ skyldes at eleven gjør fortegnsfeil når den andre parentesen løses opp:



Figur 7.74: Elevsvar oppgave 8b, kode 21, nivå 3.

Vi merker oss at ingen av disse fire elevene hadde problemer med å løse opp parentesen i oppgave 6d, selv om også denne hadde subtraksjonstegn foran seg. Mye tyder derfor på at det er 3-tallet foran parentesen i dette andre tilfellet som skaper problemer. Dette gjør at prosessen blir todelt ved at man *først* skal multiplisere 3-tallet med parentesen, og *så* løse opp parentesen. I oppgave 6d var kun det andre steget nødvendig.

Vi har sett at kode 21 $(x = \frac{8}{5})$ fanger fire besvarelser. Det er viktig å merke seg at hele fem (alle på nivå 3) av seks (5-1-0) besvarelser i kategorien "andre svar" også inneholder denne misoppfatningen. Grunnen til at disse registereres under kode 99 og ikke 21, er at de i tillegg inneholder andre feil:

Nivå 3	
	
Kode 21, men i tillegg gjøres feil ved sideskift.	Kode 21, men eleven gjør i tillegg flere fortegnsfeil.

<table>
<tr>
<td>

$2(x+5)-3(x-2)=4x-4$
$2x+10-3x-6=4x-4$
$2x-4x-3x=6-4-10$
$\frac{-5x}{-5x}=\frac{-12}{5}$

Kode 21. I tillegg gjøres en regnefeil i den nest siste linjen, og eleven dividerer til slutt med 5 i stedet for -5.
</td>
<td>

$2(x+5)-3(x-2)=4x-4$
$2x+10+3x-6=4x-4$
$5x+4=4x-4$
$5x-4x=-4-4$
$x=-8$

Variant av kode 21. Eleven gjør om fortegnet *foran* den andre parentesen i stedet for fortegnet *inni*.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Regn her:
$x^2+10-x^3-6=4x-4$

Eleven setter $2x = x^2$ og $3x = x^3$. Derimot ser vi at $4x$ ikke gjøres om til x^4. Dessuten gjør eleven feilen som spesifiseres av kode 21.
</td>
<td>

Nivå 4

$2x+5+3x+6=4x-4$
$2x+3x-4x=-4+5+6$
$x=7$

Eleven på nivå 4 multipliserer ikke 2-tallet med det andre leddet i den første parentesen. Fortegnet til $3x$ er feilaktig skiftet fra minus til pluss. Leddene som flyttes over på høyre side skifter ikke fortegn.
</td>
</tr>
</table>

Figur 7.75: Elevsvar oppgave 8b, kode 99.

Vi ser at alle disse svarene er ulike, men det er likevel mange av de samme vanskene som går igjen. Spesielt ser vi at alle de fem besvarelsene på nivå 3 inneholder misoppfatningen som spesifiseres av kode 21. De øvrige problemene kan ikke uventet relateres til fortegnsfeil ved sideskift. I tillegg har to elever kun multiplisert med det første leddet i én av to parenteser.

Vi legger ellers merke til at verken kode 11, kode 22 eller kode 23 er representert i vårt utvalg på seksti besvarelser. Dette er helt i tråd med funnene i evalueringsrapporten *nasjonal prøve på ny prøve* (Lie et al. 2005:149). Blant annet med utgangspunkt i denne oppgaven stiller Lie et al. spørsmål ved piloteringen av prøvene. De viser til at mange av kodene tydelig er laget ut fra hva man teoretisk kan tenke seg det er mulig å svare, og de råder derfor til å redusere antallet koder betydelig i eventuelle framtidige nasjonale prøver (s. 138). Våre funn underbygger denne kommentaren fra utvalgsundersøkelsen.

7.1.6 Oppgave 10

Hva er mest? Sett kryss i riktig rute:

☐ 0,5 liter

☐ 8 ml

☐ 0,6 dm^3

☐ 4 dl

Figur 7.76: Oppgave 10.

Oppgave 10 tar for seg relasjoner mellom volumenheter. Majoriteten av elevene i utvalget kan sies å ha gode faktakunnskaper på dette området. Tre elever (1-2-0) har krysset av i gal rute i denne flervalgsoppgaven. Disse mener at 0,5 liter er mest. At det er nettopp dette feilsvaret som opptrer, kan skyldes at liter er den volumenheten de aller fleste elever har best kjennskap til. Oppgaven er ubesvart hos én elev på nivå 3.

7.1.7 Oppgave 17a

a) Løs denne likningen:

$250 \cdot 1{,}05^x = 450$

Svar: ______________________

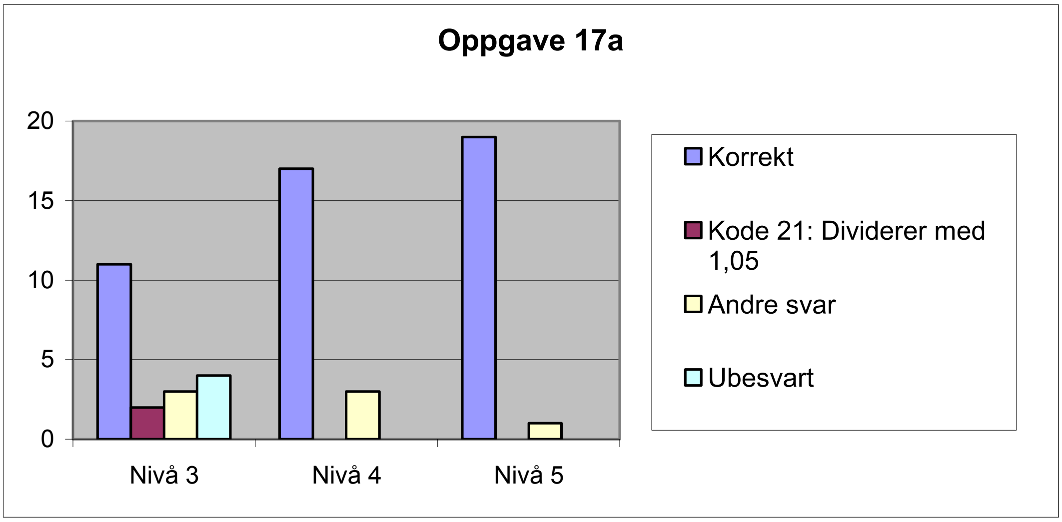
Figur 7.77: Oppgave 17a.

Med denne oppgaveformuleringen kan eleven selv velge løsningsmetode. Likningen kan løses ved regning, prøving og feiling og grafisk på kalkulatoren. De aller fleste elevene har løst eller forsøkt å løse oppgaven ved hjelp av regning:

Tilnærming	Nivå 3	Nivå 4	Nivå 5
Ved regning	12	14	17
Prøving og feiling	1	2	0
Tom kladderute	3	4	3
Ubesvart	4	0	0

Figur 7.78: Løsningsmetode oppgave 17a.

En eventuell grafisk løsning vil bli gjennomført på kalkulatoren og ikke i kladderuten. Figur 7.78 sier derfor ikke noe om hvor mange elever som eventuelt har brukt denne tilnærmingen. Dersom noen har brukt denne metoden, antas det at disse er blant elevene med tom kladderute.



Figur 7.79: Svarfordeling oppgave 17a.

Vi ser at to elever på nivå 3 har dividert med grunntallet 1,05 for å "frigjøre" x-en (kode 21):

$\frac{250\cdot 1{,}05^x}{1{,}05} = \frac{450}{1{,}05}$ $\frac{250\cdot x}{250} = \frac{450}{250}$ $x = 1{,}8$	$\frac{262{,}5^x}{262{,}5} = \frac{450}{262{,}5}$ $\quad x = 1{,}714$

Figur 7.80: Elevsvar oppgave 17a, kode 21, nivå 3.

Denne misoppfatningen kommer tydeligst til uttrykk i besvarelsen til venstre. Det "forstyrrende" tallet 1,05 er fjernet ved å dividere med 1,05 på begge sider av likhetstegnet. I neste omgang er x-en, som opprinnelig var på eksponentplass, flyttet "ned på linja" som et vanlig tall. Vi legger for øvrig merke til at eleven ikke har utført divisjonen på høyre side i likningen. I besvarelsen til høyre er først 250 multiplisert med grunntallet 1,05 før x-en "frigjøres" ved å dele på produktet 262,5. Det er altså den samme tankegangen som ligger til grunn for disse to besvarelsene. Elevene har forsøkt å løse oppgaven ved hjelp av prosedyrer som har gitt suksess i liknende tilfeller. Den lille *visuelle* forskjellen mellom $250\cdot 1{,}05^x = 450$ og $250\cdot 1{,}05x = 450$ har altså ingen innvirkning på løsningsprosessen.

De fleste elevene i kategorien "andre svar" (3-3-1) tar i bruk logaritmer i utregningen:

Nivå	Besvarelse	Kommentar
3	$\cancel{1{,}05^x = 450+250}$ $\log 1{,}05^x = \log 700$ $x \log 1{,}05 = \log 700$ $x = \frac{\log 700}{\log 1{,}05}$ $x = 134{,}27$	Eleven behersker for så vidt selve bruken av logaritmer, men vedkommende har innledningvis addert 450 og 250 i stedet for å dividere 450 på 250.

3	Kladderute $250\cdot 1{,}05^x = 450$ $\dfrac{x\,\cancel{\log(250\cdot 1{,}05)}}{\cancel{\log(250\cdot 1{,}05)}} = \dfrac{\log 450}{\log(250\cdot 1{,}05)}$ $x = 1{,}0968$	Eleven har prosessert som om også 250 er opphøyd i x, altså som om likningen på venstre side inneholdt en parentes: $(250\cdot 1{,}05)^x = 450$.
3	$250\cdot 1{,}05^x = 450$ $x\cdot \log 150 = \log 450$ $x = \dfrac{\log 450}{\log 150}$ $x = 1{,}22$	Eleven har slått sammen 250 og grunntallet 1,05 til 150 på venstre side i likningen. Det er ikke opplagt hvordan dette har gått til.
4	$1.05^x = \sqrt{450-250}$ $1.05^x = \sqrt{200}$ $1.05 = 1.43$ $1.43 : 105\cdot 100 = 1.36$ Svar: 1.38	Eleven tar ikke i bruk logaritmer og forsøker i stedet med kvadratrot. Dette kan skyldes at de aller fleste likninger som inneholder potenser, tidligere er løst ved bruk av kvadratrot. Vi legger merke til at 250 *trekkes fra* på høyre side i likningen.
4	$250\cdot 1{,}05^x = 450$ $250^x \cdot \log 1{,}05 = \log 450 \quad \vert : \log 1{,}05$ $\dfrac{250\cdot x\cdot \cancel{\log 1{,}05}}{\cancel{\log 1{,}05}} = \dfrac{\log 450}{\log 1{,}05}$ $250\cdot x = 125{,}2 \quad \vert : 250$ $\dfrac{\cancel{250}\cdot x}{\cancel{250}} = \dfrac{125{,}2}{250}$ Svar: 0,5008	Eleven tar i bruk logaritmer uten først å dividere med 250 på begge sider av likhetstegnet. Dette vil gi det riktige svaret, men vi ser at eleven kun tar logaritmen til potensen – og ikke til faktoren 250. Det skal legges til at regelen $\log(a\cdot b) = \log a + \log b$ først innføres på det andre årstrinnet i videregående skole.
4	Svar: 105,6	Eleven oppgir kun svaret.
5	$250\cdot 1{,}05^x = 450$ $1{,}05^x = \dfrac{450}{250}$ $x\cdot 1{,}05 = 1{,}8$ $x = \dfrac{\log 1{,}05}{\log 1{,}8}$ $x = 0{,}08$	Dette feilsvaret skyldes at teller og nevner er byttet om i den siste brøken. Vi legger også merke til at eleven ikke har skrevet *log* foran 1,05 og 1,8 i den tredje linjen.

Figur 7.81: Elevsvar oppgave 17a, kode 99.

Vi har tidligere påpekt at logaritmer på grunnkurs oftest blir innført og tatt i bruk uten særlig vekt på forståelse (se avsnitt 6.2.1 på s. 53f.). Det er derfor ikke uventet at en del elever i gjennomgangen ovenfor tar i bruk ”selvkonstruerte” algoritmer. Det viser seg igjen at beregningsrekkefølgen og små nyanser i det matematiske symbolspråket volder problemer.

For mange av disse elevene kan det være oppklarende å jobbe med følgende fire likninger:

a $3x = 64$ **b** $x^3 = 64$ **c** $3^x = 64$ **d** $4 \cdot 3^x = 64$

Figur 7.82: Oppgaver til elever i etterkant av oppgave 17a.

Lærebøker i matematikk er ofte lagt opp slik at nesten utelukkende én bestemt type oppgaver etterfølger en bestemt teoretisk framstilling. For eksempel vil innføringen i eksponentiallikninger gjerne bli fulgt av oppgaver som alle skal løses ved å bruke logaritmer. Dette kan føre til at elevens oppmerksomhet og bevissthet ”sløves”. Oppgavene i figur 7.82 vil alle utfordre eleven til å betrakte den enkelte likningens struktur. Slik må eleven være på vakt, og han eller hun vil bli minnet om de ulike løsningsprosessene som må tas i bruk i det enkelte tilfellet. Det kan derfor virke oppklarende og systematiserende å løse disse likningene ved siden av hverandre, og ikke bare i etterkant av det enkelte teoriavsnittet i læreboka. I dette arbeidet vil forholdene ligge til rette for at eleven i større grad blir bevisst på *meningsinnholdet* i ulike matematiske representasjoner ($3x$ vs. x^3 vs. 3^x).

7.1.8 Oppgave 22

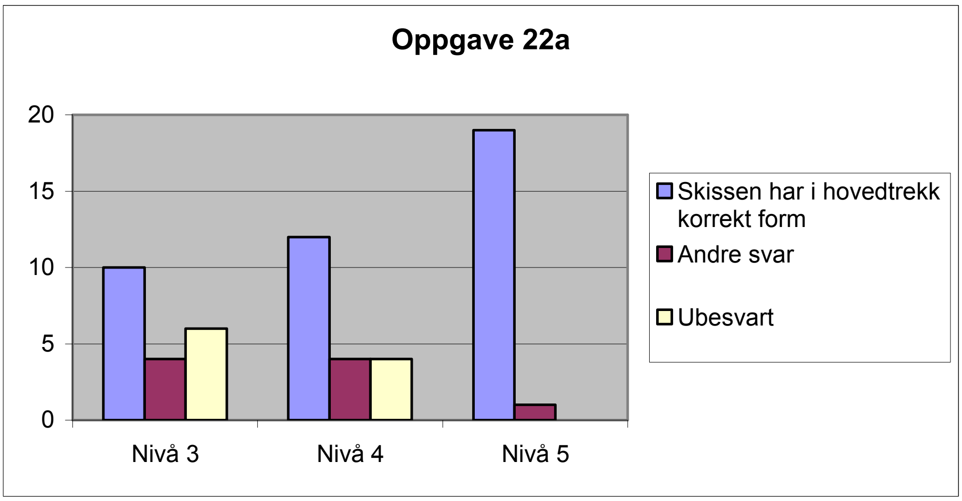
Analysen av oppgave 22, som er den aller siste i prøvesettet, viser en stor andel ubesvarte oppgaver. Dette kan til dels skyldes at oppgaven ble opplevd som vanskelig. Det er også forhold som tyder på at mange av elevene etter hvert var i ferd med å slippe opp for tid. Spesielt er dette tilfelle for de tre spørsmålene i oppgave 22b.

a) Lag en skisse av grafen til funksjonen

$y = -x^3 + 2x^2 + 1$

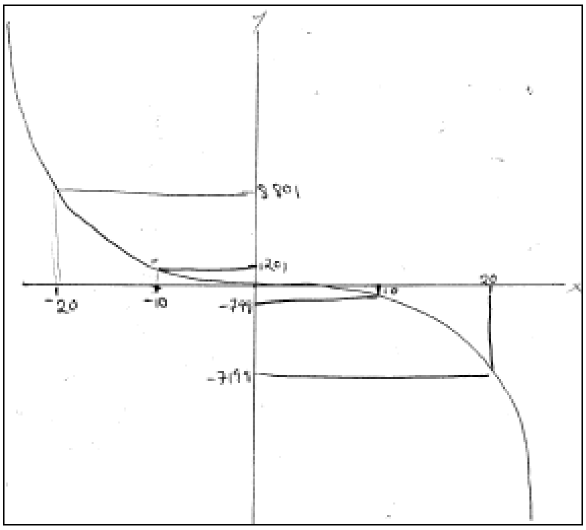
Figur 7.83: Oppgave 22a.

Ti (6-4-0) av de seksti elevene har latt oppgaven stå ubesvart:



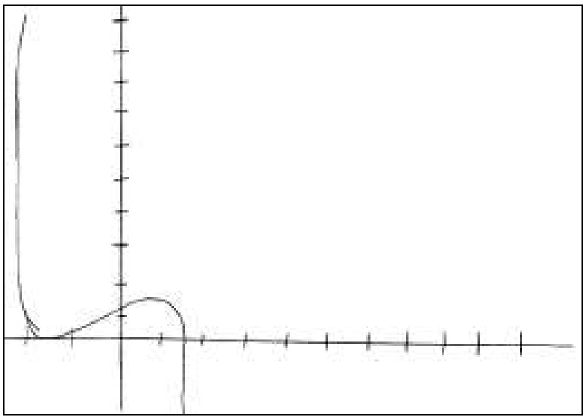
Figur 7.84: Svarfordeling oppgave 22a.

Til sammen havner ni (4-4-1) besvarelser i kategorien ”andre svar”. Blant disse har tre elever, en på hvert nivå, tegnet skisse for grafen med positivt tredjegradsledd, $y = x^3 + 2x^2 + 1$. Videre har tre elever (2-1-0) kun skissert grafen i første kvadrant. Dette kan henge sammen med at en stor del av de grafiske framstillingene som elevene møter i skolen og i samfunnet for øvrig, er begrenset til denne delen av koordinatsystemet. Samtidig skal det legges til at disse tre elevenes skisser i tillegg har andre vesentlige mangler. To elever (1-1-0) får ikke med seg essensielle deler ved grafen som følge av at verdiene på aksene er for høye:



Figur 7.85: Elevsvar oppgave 22a, kode 99, nivå 4.

Den siste besvarelsen i denne kategorien er feilaktig på grunn av manglende enheter og unøyaktighet ved sentrale punkter, spesielt bunnpunktet:


Figur 7.86: Elevsvar oppgave 22a, kode 99, nivå 4.

Dette kan skyldes flere forhold, men det er rimelig å anta at eleven uten tilstrekkelig nøyaktighet har forsøkt å kopiere kalkulatorens skjermbilde direkte over til svarrubrikken.

Vi legger for øvrig merke til at koordinatsystemet i begge besvarelsene ovenfor er uten piler i positiv x- og y-retning. Kalkulatorens representasjon mangler slike piler (se for eksempel figur 7.91 på s. 101), noe som kan virke inn på elevenes besvarelser.

b) Finn koordinatene til toppunkt og bunnpunkt og eventuelle nullpunkter for grafen til denne funksjonen.

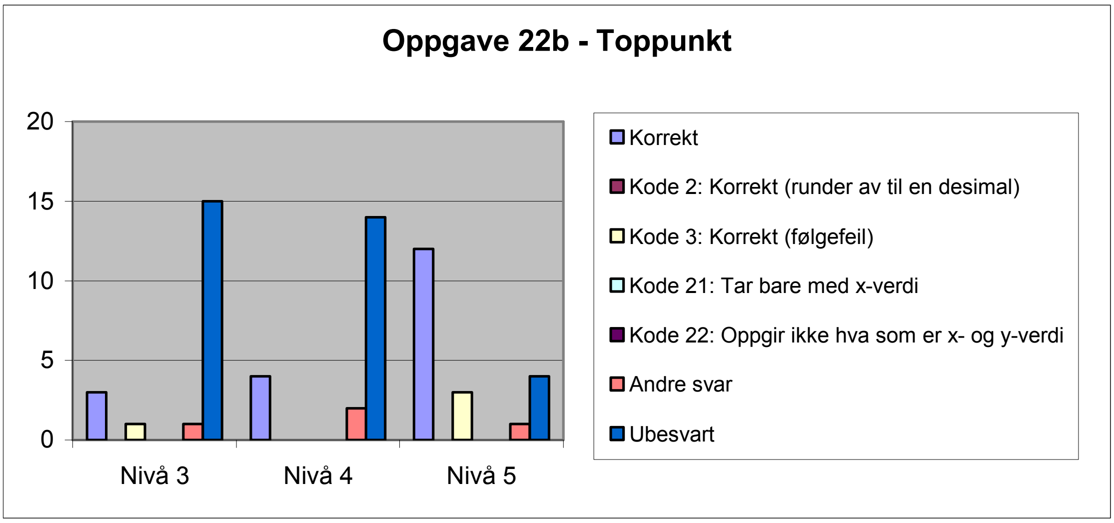
Toppunkt: ____________________________

Bunnpunkt: ____________________________

Nullpunkt(er): ____________________________

Figur 7.87: Oppgave 22b.

Svarfordelingene i oppgave 22b avdekker først og fremst et stort antall ubesvarte oppgaver. Dessuten favner mange av kodene i kodeboka kun om få eller ingen elever:

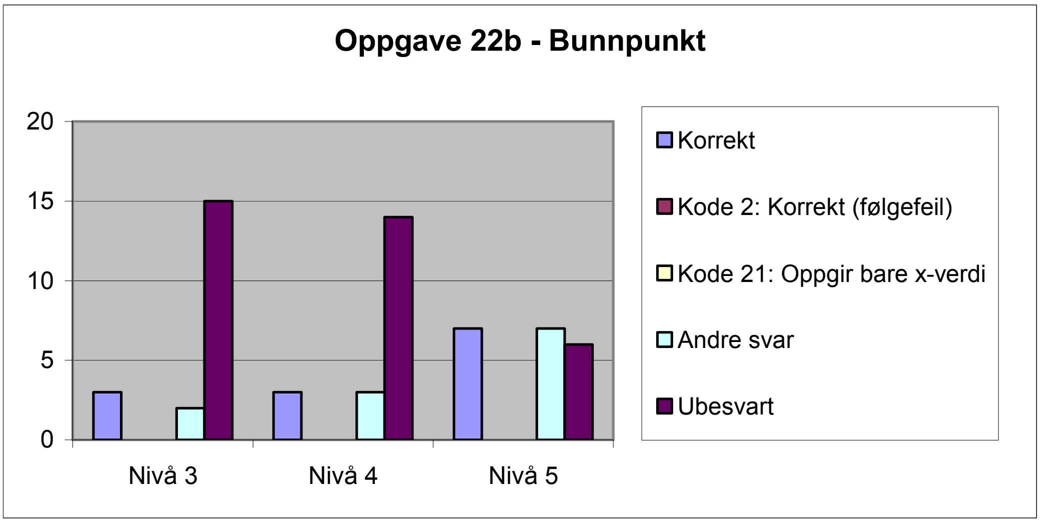


Figur 7.88: Svarfordeling oppgave 22b – toppunkt.

Kun 23 elever (4-4-15) har avgitt et riktig svar i denne oppgaven. Av disse har fire (1-0-3) lest korrekt av fra feil skisse i oppgave 22a (kode 3, følgefeil). Det er oppsiktsvekkende at hele 33 elever (15-14-4), altså over halvparten, ikke har svart på oppgaven.

Blant de fire ”andre svarene” (1-2-1) har én elev (nivå 3) rundet for grovt av $(x = 1 \text{ og } y = 2)$. En annen elev oppgir at det verken finnes topp- eller bunnpunkt på grafen til tross for korrekt skisse i oppgave 22a. Man kan anta at denne eleven ikke aksepterer eller oppfatter de to punktene som topp- og bunnpunkt siden grafen tross alt har både høyere og lavere verdier. I denne sammenheng vises det til kommentaren om lokale og globale ekstremalpunkter i avsnitt 6.2.2 på s. 54ff. En annen elev oppgir toppunktet til å være (0.8, 2.09), et punkt som heller ikke er i samsvar med elevens skisse av grafen (se figur 7.86 på s. 99). Den siste besvarelsen i denne kategorien (nivå 5) inneholder den riktige y-verdien, men x-verdien er ikke oppgitt.

Svarfordelingen i figur 7.88 viser at verken kode 2, kode 21 eller kode 22 er representert i utvalget. Dette reiser spørsmål om hvorvidt disse kodene er hensiktsmessige eller ei. Dette gjelder også den neste oppgaven, der verken kode 2 eller kode 21 fanger en eneste besvarelse:



Figur 7.89: Svarfordeling oppgave 22b – bunnpunkt.

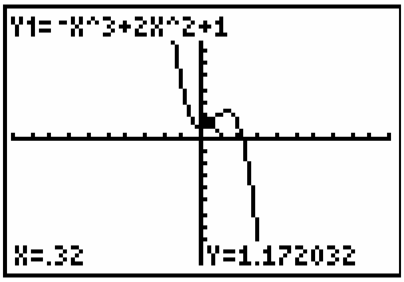
Med kun 13 (3-3-7) korrekte svar er denne oppgaven den dårligst besvarte av samtlige RSF-oppgaver i prøvesettet. Om dette skyldes høy vanskelighetsgrad eller tidsmangel skal være usagt. Det er nemlig hele 35 elever (15-14-6) som ikke har besvart oppgaven.

Mens analysen av toppunktoppgaven kun inneholdt fire "andre svar", havner hele tolv (2-3-7) besvarelser i denne kategorien når koordinatene til bunnpunktet skal finnes:

Nivå	Besvarelse	Nivå	Besvarelse
3	x= -7,5 y= 535,84	5	x= $-1,36 \cdot 10^{-6}$ y=1
3	0,32, 1,17	5	X= $-1,497E^{-6}$ Y=1
4	-0,816 y= -0,0886	5	(-1,3, 1)
4	Ingen	5	4,96 1
4	(1,2 , 1)	5	4,97, 1
5	2,2, 0	5	(3, -20)

Figur 7.90: Elevsvar oppgave 22b – bunnpunkt, kode 99.

Det andre svaret på nivå 3 skyldes etter alt å dømme at eleven har brukt den såkalt *trace*-funksjonen på kalkulatoren:



Figur 7.91: *Trace* på TI-83 Plus.

Med denne funksjonen kan man "bevege seg" langs grafen og få oppgitt koordinatene fortløpende. Bevegelsen kan ikke skje trinnløst, og dermed gir dette bare et omtrentlig svar basert på øyemål. Eleven viser likevel forståelse for hva som er grafens bunnpunkt.

Dette er ikke tilfelle for eleven som oppgir *bunnpunktet* til å være (2.2, 0), som altså er grafens *nullpunkt*. Et blikk på svarrubrikken for nullpunktet viser at eleven har blandet de to begrepene. Her er nemlig de korrekte koordinatene for bunnpunktet oppgitt. Dette kan naturligvis også skyldes uoppmerksomhet. Videre merker vi at eleven på nivå 4 som oppfatter det slik at det ikke finnes bunnpunkt på grafen, oppga det samme i forbindelse med toppunktet.

Det knytter seg likevel mest interesse til at minst to elever på nivå 5 ikke har oppfattet kalkulatorens representasjon av svaret på riktig måte:

Elev 1	**Elev 2**
Bunnpunkt: $x = -1{,}36 \cdot 10^{-6}$ $y = 1$	Bunnpunkt: $X = -1{,}497E^{-6}$ $Y = 1$

Figur 7.92: Elevsvar oppgave 22b – bunnpunkt, kode 99, nivå 5.

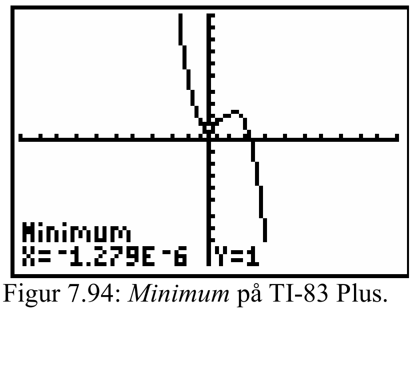
Kalkulatoren beregner for eksempel topp- og bunnpunkter ved hjelp av tilnærmingsmetoder. Informasjonen som kommer ut av *den svarte boksen* må derfor vurderes og i visse tilfeller "avrundes" (se avsnitt 6.2.2 på s. 54ff.). I besvarelsen til venstre har kalkulatoren gitt x-verdien $^{-}1.36E^{-}6$ (se figur 6.15 på s. 58), som altså er kalkulatorens representasjonsform for $-1{,}36 \cdot 10^{-6}$. Elev 1 har ukritisk oppgitt dette som det endelige svaret. Besvarelsen til høyre er et enda tydeligere eksempel på dette. Her er svaret i svarrubrikken en direkte avskrift av kalkulatorens representasjon. Svar som disse kan komme av at elever gjerne har en ubegrenset tillit til kalkulatoren som en slags autoritet. Samtidig kan man anta at elevene ikke har tilstrekkelig innsikt i kalkulatorens arbeidsmåte og representasjonsform.

Liknende forhold er mulig forklaring til ytterligere fire av svarene (0-1-3):

(1,2 , 1)	(-1,3, 1)	4,96 1	4,97, 1

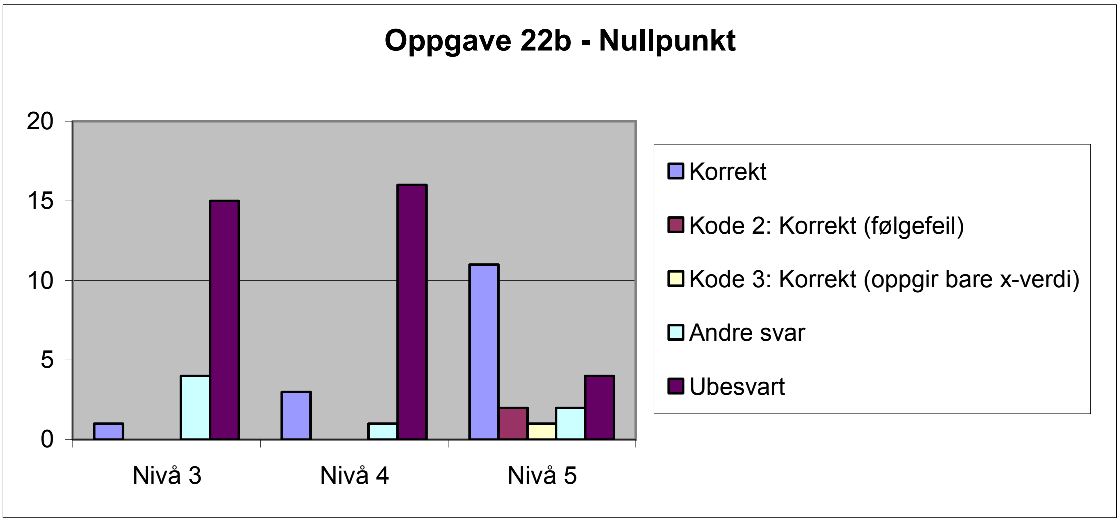
Figur 7.93: Elevsvar oppgave 22b – bunnpunkt, kode 99.

Alle disse fire elevene har tegnet fullgode skisser med bunnpunkt i (0, 1). Videre har alle oppgitt riktig y-koordinat. De gale x-verdiene kan skyldes feilaktig oppfatning av den måten kalkulatoren presenterer resultatet av beregningen på. For eksempel kan det andre svaret ovenfor være et resultat av følgende kalkulatorbilde:



Figur 7.94: *Minimum* på TI-83 Plus.

Eleven har muligens ikke oppfattet eller forstått at x-verdien er et tall på standardform, og vedkommende har dermed kun oppgitt det avrundede $-1{,}3$ som x-verdi. Vi kan anta at de tre øvrige svarene skyldes det samme. Kalkulatoren gir nemlig ulik x-verdi $(x \approx 0)$ nesten hver gang i beregningen av bunnpunktet.



Figur 7.95: Svarfordeling oppgave 22b – nullpunkt.

I likhet med bunnpunktoppgaven er antallet blanke besvarelser hele 35 (15-16-4). Av de 25 øvrige svarene er 18 (1-3-14) korrekte og sju faller i kategorien "andre svar":

Nivå	Besvarelse	Nivå	Besvarelse
3	(0,1)	4	x = -0,62 y = 0
3	0,64,1,55	5	(0,2)
3	x=0 y=1	5	$4{,}97^{-9}$, 1
3	x=2 og y=0		

Figur 7.96: Elevsvar oppgave 22b – nullpunkt, kode 99.

Vi merker at tre elever (2-0-1) oppgir koordinatene for bunnpunktet, (0, 1). Dette inkluderer svaret $4{,}97^{-9}$, 1 som mest sannsynlig er et resultat av kalkulatorrepresentasjonen x = 4.97E⁻9. Den ene av de to elevene på nivå 3 oppga for øvrig (0, 1) *både* som bunnpunkt *og* nullpunkt. Eleven var kanskje ikke sikker på om dette punktet blir kalt for det ene eller det andre. Slik kan dette muligens tolkes som en slags "helgardering". Svaret $"x = 2 \text{ og } y = 0"$ er ikke tilstrekkelig nøyaktig, mens svaret (0, 2) sannsynligvis er den samme varianten, men med ombyttede koordinater.

Erfaringsmessig har ikke 1MX-elever spesielt store problemer med å finne topp-, bunn- og nullpunkter ved hjelp av kalkulatoren. Derfor er det oppsiktsvekkende at så mange har latt spørsmålene i oppgave 22b stå ubesvart. Vi skal se at lærerne forklarer dette med at arbeidsmengden var for stor (se avsnitt 7.2 på de neste sidene). Mange elever hadde rett og slett sluppet opp for tid.

Videre er det spesielt interessant å se hvor mange av feilsvarene som kan tilskrives kalkulatorens arbeidsmåte og dermed dens representasjon av tallet null. Spesielt kom dette fram i oppgaven der bunnpunktet skulle bestemmes. Det er tydelig at mange av elevene i utvalget ikke har tilstrekkelig erfaring med representasjoner av typen X=-1.279E-6. For lærerne er dette på mange måter verdifull informasjon. Ikke minst vil det være en ideell anledning til å sette i gang en klasseromsdiskusjon om kalkulatorens begrensninger og muligheter (se også Gjone 1997:39f.). Riktignok bør eleven utfra grafen se at førstekoordinaten slett ikke kan være $-1{,}28$ i bunnpunktet, men en felles bevisstgjøring, for eksempel i form av en slik diskusjon, vil kunne forebygge feil av denne typen. På den annen side kan man spørre seg om ikke Texas Instruments i framtidige kalkulatorer burde finne en bedre løsning slik at dette problemet unngås.

7.2 Lærerintervjuer

Lærerintervjuene bekrefter flere av de forholdene som kom fram i analysen av elevsvarene. For eksempel understreker tre av fem lærere, uten å ha fått direkte spørsmål om det, at arbeidsmengden på prøven var for stor:

> *De flinke som skulle gjøre alt, man så liksom at de hadde gjort alt fram til et visst punkt, så var det tomt etterpå. Og da føler jeg at det ikke er riktig å bruke det på noen som helst måte egentlig* (se avsnitt 11.2.4: utsagn nr. 24).

Dette har spesielt gått ut over elevenes besvarelser mot slutten av oppgavesettet:

> *Altså de tok det jo kronologisk. Så det var jo mange av de oppgavene på slutten som de ikke hadde sett på i det hele tatt* (se avsnitt 11.2.2: utsagn nr. 8).

Nettopp dette kom tydelig fram spesielt i analysen av oppgave 22 ovenfor. I tillegg viser to av lærerne til at prøven av flere grunner ble oppfattet som uvant av elevene. At det ikke var tillatt å bruke kalkulator på delprøve 1 og regelbok verken på delprøve 1 eller 2, opprører en av lærerne spesielt. På spørsmål om vedkommende hadde andre kommentarer i forbindelse med prøven, fikk vi følgende svar:

> *Ja, jeg var forbannet over… over plutselig å ikke bruke regelboka uten å ha sagt noe. Vi har jo lært elevene opp i å bruke regelboka, og så kommer de plutselig med nasjonal prøve uten regelbok. Det var mange elever som ga opp mange oppgaver fordi de ikke hadde regelbok. (...) Så at de ikke fikk lov til å bruke kalkulatoren var akkurat like dumt* (se avsnitt 11.2.3: utsagn nr. 30-34).

Det vises i denne sammenheng til avsnitt 3.3 på s. 26f. om læreverket og kalkulatoren der nettopp denne praksisen blir omtalt som sprikende signaler fra utdanningsmyndighetene.

Samtalene med lærerne ved Soltoppen videregående skole viser med tydelighet at prøvene ikke har fungert etter hensikten. Fire av fem oppgir at kompetansetenkningen i den nasjonale prøven ikke har hatt noen praktiske konsekvenser i klasserommet:

> *Altså hvis det var et mål med nasjonale prøver, så synes jeg ikke at de har fått det godt nok fram. Verken gjennom… Nei, ikke noe for- eller etterarbeid som tyder på at vi… Som har vært med på å hjelpe oss på hvordan vi skal bruke dette aktivt i undervisningen* (se avsnitt 11.2.4: utsagn nr. 16).

Dette kan også skyldes grunnleggende skepsis og manglende tro på hele opplegget:

> *Det kan vel være at jeg var motstander av hele opplegget og ikke ville følge opp de greiene der* [kompetanseområdene]. *Og det viser seg jo at det egentlig var lite mening å begynne med det. Det var jo helt på slutten av skoleåret. Det var så liten tid til å få gjort noe med det* (se avsnitt 11.2.6: utsagn nr. 16).

At inndelingen i kompetanseområder med tilbakemelding i form av tre tall fra en til fem ikke hadde den tiltenkte virkningen, understrekes av det faktum at man heller regnet om til *én* "vanlig" karakter:

> *Ja, hvorfor ikke fra null til seks da slik vi er vant med? Men jeg gjorde om til karakter. (...) De som hadde toer de fikk rundt en toer, og de som hadde femmer, de fikk sånn rundt en femmer* (se avsnitt 11.2.3: utsagn nr. 48-54).

Blant annet dette førte til diskusjoner om hvorvidt prøvene i det hele tatt skulle eller kunne brukes som en del av karaktergrunnlaget eller ikke:

> *Tror det endte opp med, eller jeg endte i hvert fall opp med å si at hvis det talte positivt, så skulle det telle. Hvis ikke så dreit vi i det. (...) Og i praksis så dreit vi i det* (se avsnitt 11.2.4: utsagn nr. 6-10).

Lærerne nevner flere grunner til at prøvene ikke fikk særlig innvirkning på undervisningen og det daglige arbeidet med matematikken. Tidspunktet for prøven var slett ikke gunstig (se for øvrig avsnitt 2.1 på s. 5ff.):

> *Men generelt, det som gikk på egentlig bruk i egen klasse, så var det jo altfor seint på året. Det var jo helt meningsløst der på slutten. Vi var jo nesten ferdige med undervisningen, og sånn sett så fungerte jo ikke det* (se avsnitt 11.2.5: utsagn nr. 60).

I forbindelse med kodingen av elevsvarene kommer det fram mange ulike synspunkter. For én av lærerne framstod ikke dette kodesystemet som formålstjenlig i det hele tatt:

> *For vanskelig å administrere og nei. Jeg jobber ikke sånn. Rett og slett. Jeg har mitt helhetsinntrykk om en elev, om han er flink i det og litt mindre flink i det, så jevner det seg ut i karakter og i måten som jeg tenker om eleven på* (se avsnitt 11.2.3: utsagn nr. 22).

Det framheves at det var *greit å se hvilke feil som tydeligvis var vanlige å gjøre* (se avsnitt 11.2.4: utsagn nr. 20), men samtidig legger vi merke til at ikke alle lærerne oppfattet kodesystemet som tilstrekkelig finmasket eller pilotert:

> *Det var kanskje ikke alle steder der de hadde tenkt gjennom alle mulige, tenkelige, hva skal man si, standardsvar som er vanlige feil blant elevene. Det var noen som bare ble sekkebetegnelser i stedet for å ha en mer detaljert…*(se avsnitt 11.2.5: utsagn nr. 18).
>
> *Eller det var et par ganger at det ikke var noen… at vanlige feil ikke tydeligvis var kodet* (se avsnitt 11.2.4: utsagn nr. 20).

Vi har sett eksempler på dette i analysen av elevsvarene i kapittel 7, spesielt i forbindelse med oppgave 2c (se avsnitt 7.1.2 på s. 66ff.).

Lærerne etterlyser ressurser og mer omfattende satsing på bearbeiding av prøveresultatene dersom de skal ha noen verdi:

> *Det negative er jo at det ikke blir gitt ressurser til å bearbeide dem, og dermed så blir de nokså verdiløse* (se avsnitt 11.2.2: utsagn nr. 2).

Dette etterarbeidet involverer ikke nødvendigvis kun den enkelte læreren, men det kan i tillegg omfatte statistikere og skoleforskere fra andre institusjoner. Den læreren som i intervjusammenheng i størst grad uttaler seg varmt om de nasjonale prøvene, opplevde å bli skuffet da det detaljerte vurderingsarbeidet skulle rapporteres inn:

> *Ja ja, men det som jeg stusset mest på ved hele… som gjorde meg veldig skuffet på slutten, det var jo da det gikk opp for meg at de egentlig ikke brukte denne graderte informasjonen videre. Altså her sitter man med masse kompetanse på hvert enkeltspørsmål som kunne vært brukt og analysert i ettertid av seriøse skoleforskere ville jo jeg tenke i mitt naive hode. (...) Altså all den informasjonen forkastet man jo, og så gikk man jo over til å bruke bare disse her litt pseudokategoriene der all informasjonen på en måte var konsentrert ned i tre grupper. Dette gjorde jo… det senket jo kvaliteten for hva den eventuelt kunne brukes til* (se avsnitt 11.2.5: utsagn nr. 20-22).

For vedkommende har de nasjonale prøvene likevel tjent som en slags inspirasjonskilde for det videre arbeidet i klasserommet. Læreren har riktignok ikke adoptert systemet med kompetanseområder fra de nasjonale prøvene, men han har gjort sine egne fortolkninger og kommet fram til et system som muliggjør en mer individuelt tilpasset opplæring. For enkelhets skyld opererer han med emner i stedet for kompetanser (se avsnitt 11.2.5: utsagn nr. 37-61). Slik har de nasjonale prøvene hatt en viss konsekvens for vedkommendes undervisning. Han nevner konkret et tilfelle der vurderingen av den nasjonale prøven avslørte at ei jente ikke behersket multiplikasjonstabellen. For øvrig framhever også læreren systemet med tilbakemelding i tre kompetanseområder:

> *Men det var noen som vanligvis ikke pleier å være helt i toppen på alle prøvene som plutselig hadde liksom da, som skårte best på en av kategoriene (...) og da kunne jeg jo trekke fram dem i klassen og gi dem ros for å være best i klassen selv om de som helhet ikke var det* (se avsnitt 11.2.5: utsagn nr. 32-36).

Slik kan en tilbakemelding i ulike kompetanseområder kunne virke motiverende, og den kan få fram mer eller mindre ukjente sider ved elevene.

Samlet sett har likevel ikke de nasjonale prøvene fungert etter hensikten for lærerne ved Soltoppen videregående skole. Samtalene reflekterer i stor grad konklusjonene fra undersøkelsene til MMI og TNS Gallup (se henholdsvis avsnitt 2.4.4 på s. 23 og avsnitt 2.4.5 på s. 24).

Prøvene har jevnt over hatt få eller ingen konsekvenser for undervisningen. Vi har sett at det er flere grunner til dette. Den ene læreren oppsummerer sine erfaringer med nasjonale prøver slik:

> *Nei altså, mine ankepunkter er at det var en dårlig prøve fordi at det var altfor stor arbeidsmengde. Det var liksom... Det var ikke ressurser som ble avsatt til å bearbeide materialet. Og de tingene som kom fram, de burde vært ting som ble trukket fram i ungdomsskolen, og ikke på vårt nivå. Det er liksom de tre hoved… hovedtingene* (se avsnitt 11.2.2: utsagn nr. 28).

Den nye og annerledes tenkningen i kompetanser og flere andre forhold ved prøvene har kommet overraskende på lærerne. Når prøven i tillegg var plassert tett opp mot undervisningsårets slutt, så var ikke forholdene lagt til rette for å gjøre de store endringene i det pedagogiske arbeidet. Mange lærere føler nok at prøvene ble "tredd nedover hodet på dem", og at dette ikke var noe de hadde behov for i en travel skolehverdag. Det stilles også spørsmål ved hensikten med prøvene:

> *Med den politiske ledelsen som var da, jeg tror rett og slett at hensikten var å finne ut hvordan skolene var i forhold til hverandre. Det tror jeg det var. Jeg tror ikke det var å finne ut hvordan elevmassen var. Tror rett og slett det var for å rangere skolene* (se avsnitt 11.2.6: utsagn 36).

Man skal nok heller ikke se bort fra at all den negative omtalen av prøvene i media har hatt en viss innvirkning på lærernes motivasjon og tro på konseptet. Uansett er det liten tvil om at vesentlige endringer må til for at prøvene skal fungere etter hensikten i Kunnskapsløftet.

8 Konklusjoner

I innledningen stilte jeg noen spørsmål som jeg ønsket å få svar på. Disse spørsmålene har vært motivasjonen og ledesnoren for hele arbeidet. Avslutningsvis faller det derfor naturlig å konkludere med utgangspunkt i disse.

Hva er den fagdidaktiske bakgrunnen for de nasjonale prøvene?

Inspirert av det teoretiske grunnlaget for KOM og PISA har man i de nasjonale prøvene delt matematisk kompetanse inn i åtte delkompetanser. Denne kompetansetenkningen er essensiell i de matematikkdidaktiske vurderingene som ligger til grunn for prøveverktøyet. Hensikten med å peke ut og fokusere på delkompetanser, er at prosessdimensjonen i elevens læring skal bli mer framtredende. Det er ikke bare selve svaret som skal vurderes. Man ønsker blant annet også å måle og fokusere på elevens evne til å forklare, argumentere, resonnere og gjøre bruk av hensiktsmessige hjelpemidler og modeller. Prøveverktøyet tar derfor sikte på å måle et bredere spektrum av kunnskaper, ferdigheter og holdninger enn det som har vært vanlig i tradisjonelle matematikkprøver. Ved å ta utgangspunkt i de kompetanser som man ønsker at elevene skal utvikle, vil man kunne forebygge *pensumitis* (se avsnitt 2.3.1 på s. 15f.) og dermed ha større fokus på fagstoffets oppbygning, indre sammenhenger og overordnende struktur.

For å nå disse målene så man opprinnelig for seg et prøveverktøy bestående av tre komponenter. I tillegg til den skriftlige prøven skulle eleven besvare en nettbasert delprøve med blant annet holdningskartlegging, samt en praktisk muntlig prøve. Da de nasjonale prøvene ble innført i full skala våren 2005, stod kun den manuelle skriftlige prøven igjen – stikk i strid med den opprinnelige intensjonen. Underveis i prosessen hadde man av ressurshensyn sett seg nødt til å redusere prøveverktøyets omfang betydelig. Til tross for dette beholdt man det ambisiøse vurderingssystemet med tilbakemelding om oppnådd poengsum og dertilhørende nivå innenfor tre atskilte kompetanseområder. Denne praksisen ble utsatt for massiv kritikk, blant annet fra Lie et al. i analyserapporten *nasjonal prøve på ny prøve*:

> *Det burde etter vår mening være innlysende at når elevene ved skriftlige eksamener i vårt land sitter i fem timer og får et resultat (etter svært omstendelige prosedyrer) i form av* ett *tall, så kan man ikke regne med at det skal være naturlig å få tre eller flere resultater av høy kvalitet fra en liknende prøve på en time eller to* (Lie et al. 2005:25).

Vi har sett at man i PISA slår fast at det ikke er mulig å isolere delkompetansene helt fra hverandre, og at hver testoppgave derfor må klassifiseres i mer enn én kategori. PISA klassifiserer derfor ikke etter dette systemet direkte. I Norge har man derimot valgt å gjøre nettopp det. Elevene i Sverige får én karakter basert på en skriftlig prøve som varer i tre klokketimer. Man har hentet mye inspirasjon fra svenske ”nationella prov”, men det norske klassifiserings- og tilbakemeldingssystemet er altså mye mer ambisiøst. Dette har definitivt ikke vært vellykket.

Hvordan oppleves den nasjonale prøven for den praktiserende læreren?

For at nasjonale prøver skal bli et naturlig element og hjelpemiddel i norsk skole, er det nødvendig at kompetansetenkningen også får praktiske konsekvenser i klasserommet. Vi har sett at dette ikke har vært tilfelle blant lærerne ved Soltoppen videregående skole. Det kom fram flere grunner til dette. Lærerne etterlyser tid og ressurser og fokus på den praktiske bruken av prøveresultatene. Prøven var dessuten plassert for sent på skoleåret til at større pedagogiske forandringer var hensiktsmessige. Det vises også til at man ikke hadde noe behov for disse prøvene. En lærer er av den oppfatning at prøvene var et påskudd for å kunne rangere skolene innbyrdes, og at de ikke ble innført for å tjene som et pedagogisk verktøy i klasserommet. Det antydes altså en grunnleggende skepsis til hele konseptet. Men det viktigste av alt var at inndelingen i ulike kompetanseområder ikke har hatt særlige konsekvenser verken for undervisningen eller vurderingen. Dette understrekes spesielt av det faktum at lærere faktisk regnet om fra de tre kompetansenivåene til én vanlig karakter. I en slik situasjon kan man ikke forvente at prøveverktøyet skal kunne fungere etter hensikten. Lærerne viser også til svakheter ved selve prøvesettet. Først og fremst ble arbeidsmengden opplevd som altfor stor. Dessuten var tilgangen til hjelpemidler radikalt annerledes på denne prøven i forhold til det som elevene var vant til. Dette oppleves som sprikende signaler fra utdanningsmyndighetene, og opprører én lærer spesielt. Prøvene og de didaktiske ideene kom i det hele tatt brått på lærerne, og de var på mange måter dømt til å mislykkes.

Hvilken tilbakemelding får eleven om sin kompetanse i matematikk?
Hvordan bruker læreren den informasjonen som den nasjonale prøven framskaffer?

Elevene fikk tilbakemelding om sin kompetanse i matematikk i form av en kompetanseprofil. Denne profilen viser oppnådd poengsum og kompetansenivå i de tre kompetanseområdene RSF (representasjoner, symbolbruk og formalisme), RTK (resonnement, tankegang og kommunikasjon) og APM (anvendelser, problembehandling og modellering). Noen lærere valgte altså å slå sammen disse summene til én karakter. Andre delte ut kompetanseprofilen og lot det være med det. I det hele tatt var det i stor grad opp til den enkelte læreren hvor mye man skulle gjøre ut av etterarbeidet i forbindelse med prøvene. Vi har videre sett at analyserapporter mer enn antyder at kompetanseprofilen ikke er av tilstrekkelig kvalitet. Den er ment å ha diagnostisk verdi i seg selv, men delskalaene er verken særlig gyldige eller pålitelige. Ønsket om tilbakemelding i form av mange profiler har altså resultert i at alle har blitt lite pålitelige. Vi har ikke hentet inn informasjon fra elevene angående tilbakemeldingen, men vi har sett at gjennomsnittslæreren i matematikk på grunnkurs kun brukte *tre minutter* til å vurdere resultatene fra prøven sammen med eleven. På bakgrunn av dette er det derfor nærliggende å anta at de fleste elevene ikke har fått den tilbakemeldingen og oppfølgingen som man så for seg under utviklingen av prøveverktøyet.

Hvilke typiske (mis)oppfatninger avdekker prøven innenfor kompetanseområdet RSF?
Hva kan disse skyldes?

Vårt hovedfokus har vært de åtte oppgavene i prøvesettet som hadde til hensikt å måle elevenes kompetanse innenfor RSF. Generelt er disse oppgavene godt egnet til formålet idet de er i stand til å avdekke og belyse en hel rekke misoppfatninger. I enkelte oppgaver var det koder som favnet om få eller ingen elever, mens det i andre oppgaver var påfallende at koder ikke var laget for typiske misoppfatninger. Likevel fungerer kodeboka greit, og de fleste av de mest utbredte misoppfatningene har sin egen kode. Slik har vurderingen av den enkelte elevens besvarelse skaffet til veie en mengde didaktisk verdifull informasjon for læreren. Vi tar for oss noen av de viktigste resultatene fra analysen.

Analysen av oppgave 1 viser tydelig at mange elever har manglende ferdigheter i multiplikasjonsalgoritmen. Noen har også problemer med å addere og subtrahere desimaltall. Dette kan tyde på at den utstrakte bruken av kalkulator har svekket de grunnleggende manuelle regneferdighetene. Vi ser liknende forhold i oppgave 2. Brøkbegrepet virker hos mange elever bare å være delvis utviklet. En stor andel av feilsvarene her skyldes at spesifikke regneregler forsøkes brukt innenfor områder der de ikke uten videre er gyldige. Spesielt ser vi en tendens til bruk av addisjonsprosedyrer i multiplikasjonsoppgaver.

Med det matematiske symbolspråket kan man uttrykke sammenhenger, meninger og ideer kortfattet og konsist. Dette er språkets store styrke. Samtidig har vi sett hvordan dette også kan være symbolspråkets svakhet. I innlæringsfasen er det mange konvensjoner og forskjellige betydninger å holde styr på. Elevene møter stadig representasjoner i matematikken der tall eller regnetegn er underforstått og dermed ”usynlige”. For eksempel er $x = 1x = 1 \cdot x = 1 \cdot x^1$, $3\tfrac{1}{2} = 3 + \tfrac{1}{2}$ og $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2}$. Det kan være problematisk. Spesielt tydelig kommer dette fram i oppgave 2c der blandede tall er involvert. Hver tiende elev i utvalget oppfatter det slik at $5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2}{5} - \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{10}{5} - \frac{2}{2} = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$, altså at det finnes et usynlig multiplikasjonstegn mellom heltallet og brøken. Det er underlig at kodeboken ikke inneholder en egen kode for denne oppfatningen. I oppgave 3c og 6e skaper usynlige ett-tall liknende problemer. For noen elever vil representasjonen $1a^2$ være enklere å forholde seg til enn a^2. Tilsvarende behandlet tre elever faktoren x som $x^{\text{ingenting}} = x^0$ i oppgave 6f. Disse observasjonene viser med tydelighet at den mest konsise versjonen av det algebraiske symbolspråket ikke nødvendig er den enkleste å forholde seg til for mange elever.

I vurderingen av elevarbeid er det essensielt å forstå forskjellen mellom de *feil* som elevene gjør, og de *misoppfatningene* som de har. En feil kan opptre mer eller mindre tilfeldig, for eksempel dersom eleven ikke er oppmerksom nok. Misoppfatninger derimot er ikke tilfeldige. Bak dem ligger en bestemt og nokså konsekvent tenkning. Det er viktig for læreren å være klar over at slike misoppfatninger ikke signaliserer manglende evne til å lære, og at det finnes undervisningsaktiviteter som kan bidra til å overvinne eller kontrollere misoppfatninger og systematiske feil. Prøvesettet inneholder oppgaver som til sammen er godt egnede til å avdekke noen slike misoppfatninger. For eksempel viser analysen av potensoppgavene 6a, 6c og 6f at tre elever konsekvent lar det eksplisitte regnetegnet bestemme behandlingen av eksponentene. Slik beregner de derfor henholdsvis $x^3 \cdot x^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$, $3y^6 : y^2 = 3y^{6:2} = 3y^3$ og $\frac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} = \frac{x^{2 \cdot 6}}{x^3} = \frac{x^{12}}{x^3} = x^{\frac{12}{3}} = x^4$. I analysen av andre oppgaver er det ikke like sikkert om feilsvarene skyldes misoppfatninger eller feil. Eksempelvis så vi i oppgave 1c at hele 10 % av elevene i utvalget beregnet $3{,}4 \cdot 6{,}22$ til å være $18{,}88$. Dette *kan* skyldes at de har en oppfatning av desimaltall som par av heltall ($3 \cdot 6 = 18$ og $4 \cdot 22 = 88$). Denne oppfatningen gjorde seg derimot ikke gjeldende i addisjons- og subtraksjonsoppgavene 1a og 1b, noe som kan tyde på at denne tenkningen ikke er konsekvent. For læreren er ikke opplysningene mindre viktige av den grunn.

Oppgave 3c og 6e er matematisk sett identiske, men de er presentert med ulik grad av formalisme. Elevene med høyest poengsum innen RSF gjør det best når oppgaven er presentert i fullstendig symbolsk stil, mens de svakeste elevene skårer best når oppgaven gis i blandet stil. I denne sammenheng er det verdt å minne om at utviklingen fra retorisk til symbolsk algebra tok lang tid i algebraens historie. I skoleårene går eleven ofte gjennom en liknende utvikling, og det er naturligvis ikke slik at kompetanse i formell symbolbruk utvikles i samme tempo hos alle elevene. Generelt kan kunnskap om den historiske framveksten av det algebraiske symbolsystem bidra til en mer årvåken analyse av elevarbeid.

I vestlig kultur både skriver og leser vi fra venstre mot høyre. Dette er dypt rotfestet i forståelsen av språkets natur. Når elevene skal beregne algebraiske uttrykk derimot, kan de ikke støtte seg til et tilsvarende regelverk. En elev som på regnestykket $4 + 6 \cdot 3$ oppgir svaret 30, har for så vidt regnet riktig, men mistolket den matematiske grammatikken. Eleven har her jobbet i leseretningen fra venstre mot høyre, uten å ta hensyn til eller ha kjennskap til de spillereglene som gjelder for regnerekkefølge i det matematiske språket. Blant de åtte RSF-oppgavene er det etter mitt syn for få muligheter til å fokusere på og avdekke slike misoppfatninger. Riktignok er eksponentiallikningen i oppgave 17a til en viss grad egnet til å teste dette, men oppgavesettet kunne med fordel inneholdt oppgaver av typen $2+3a-1$ (som *ikke* blir $5a-1$) og $3+4\cdot 2^3$ (som *ikke* blir $7\cdot 8=56$).

Det er ikke bare rigide spilleregler og grammatiske konvensjoner i det matematiske symbolspråket som volder problemer. I prøvesettets siste oppgave kom det tydelig fram at også kalkulatoren og dens arbeidsmåte og representasjonsform kan være opphav til feilsvar. Når man i oppgave 22b bruker *minimum*-funksjonen på kalkulatoren til å finne koordinatene til bunnpunktet (0, 1), vil man få ulik ut-informasjon nesten hver gang. Dette skyldes at kalkulatoren bruker tilnærmingsmetoder. Slik vil x-verdien eksempelvis bli oppgitt på formen X=⁻1.279E⁻6, altså kalkulatorens representasjon av $-1{,}279\cdot 10^{-6}$. Siden elever gjerne har ubegrenset tillit til kalkulatoren som en slags ufeilbarlig autoritet, har denne verdien og varianter av denne ukritisk bli akseptert og oppgitt som x-verdi i en stor andel besvarelser.

Det er vanskelig å være uenig i de grunnleggende tankene og ideene som ligger til grunn for de nasjonale prøvene. Samtidig er det ikke vanskelig å se at prøveverktøyet ikke har fungert etter hensikten. Gjennomgangen av de konkrete oppgavene viser at disse stort sett er velegnede til formålet. Det samme er tilfelle for klassifiseringen av elevsvar ved hjelp av kodene i kodeboka. Det er flere andre forhold det har skortet på. Spesielt har vi sett at det vidløftige tilbakemeldingssystemet ikke har fungert. Mye kan tyde på at skole-Norge ikke i tilstrekkelig grad var forberedt på eller klargjort for den nye kompetansetenkningen som hele prøveverktøyet er tuftet på. Det kan være flere grunner til det. Viktige rammefaktorer var ikke tilstede. Samtidig viser det seg at det hersker en viss skepsis mot nasjonale prøver, noe som naturligvis kan tilskrives stor grad av negativ oppmerksomhet fra media.

9 Pedagogiske implikasjoner

Den nasjonale prøven i 1MX den 15. april 2005 inneholder gode diagnostiske oppgaver innenfor kompetanseområdet RSF (representasjoner, symbolisme og formalisme). Derimot er ikke forholdene tilstrekkelig lagt til rette for systematisk og fornuftig anvendelse av den didaktiske informasjon som analysen av disse oppgavene genererer.

Lærerne må derfor i større grad få opplæring og innsikt i de didaktiske tankene og ideene som ligger til grunn for prøveverktøyet. Man må satse på å gi lærerne et eierforhold til konseptet. Prøvene må tilføre noe nytt og ikke minst nyttig. Dersom man i fortsettelsen tar sikte på å bygge videre på det samme rammeverket, er det behov for økt fokus på kompetansebegrepet generelt og hensikten med kompetanseområdene spesielt. I denne sammenheng er det en forutsetning at det settes av tid og ressurser. Samtidig må det utarbeides konkret veilednings-materiale som tar for seg de misoppfatningene som den enkelte oppgaven avdekker. Det må naturligvis være opp til den enkelte læreren hvorvidt dette materialet skal tas i bruk i det pedagogiske etterarbeidet eller ei. Videre bør man revurdere tidspunktet for prøven. Det er altfor sent å avholde prøven i midten av april.

Det er hevet over enhver tvil at prøveverktøyet må forbedres på systemnivå. Skole-Norge kan vanskelig trykke nasjonale prøver til sitt bryst når kvantitative analyserapporter og øvrige undersøkelser nesten utelukkende har negative konklusjoner.

I analysen av elevenes besvarelser har vi spesielt sett hvordan utelatelsen av ett-tall og multiplikasjonstegn i matematiske uttrykk skaper problemer for flere elever. Man kan ikke forvente at eleven skal kunne ta i bruk et feilfritt algebraisk symbolspråk fra dag én. Som en følge av dette bør eleven få jobbe med et "uferdig" symbolspråk over lengre tid enn det som gjerne er vanlig.

Analysen avdekker videre at flere elever i utvalget har problemer med å bruke de fire regneartene på både desimaltall og brøker. Man bør derfor forsikre seg om at disse grunnleggende ferdighetene holdes vedlike, og at elevene innimellom utfører beregninger uten bruk av kalkulator. At eksamen i Kunnskapsløftet skal være todelt, understreker viktigheten av dette. Samtidig er bruk av digitale hjelpemidler et erklært mål, noe som innebærer at elevene må læres opp til å være kritiske til den informasjonen som kommer ut fra "svarte bokser" som kalkulator og PC.

Det vises for øvrig til kommentarene underveis i analysedelen i kapittel 7. Her er det foreslått flere undervisningsaktiviteter som har til hensikt å skape kognitiv konflikt hos eleven.

I dette arbeidet har kompetanseområdet RSF vært i fokus, og konklusjonene må i hovedsak leses med dette i minne. Det ville derfor være interessant å se tilsvarende arbeider knyttet opp mot de to øvrige kompetanseområdene, RTK (resonnement, tankegang og kommunikasjon) og APM (anvendelse, problembehandling og modellering). Slik ville man bli i bedre stand til å vurdere den nasjonale prøven som helhet, og hvorvidt den er egnet til å vurdere elevens *helhetlige* matematiske kompetanse.

10 Referanser og annen relevant litteratur

Amerom, B. A. van (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrecht: CD-β Press.

Amerom, B. A. van (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54* (1), 63-75.

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 145-162.

Bekken, O. (2000). Algebraens utvikling i kultur- og skoleperspektiv – fra det numeriske, geometriske og retoriske mot det symbolske. In B. K. Selvik, C. Kirfel & M. Johnsen Høines (Eds.), *Matematikk i samfunnsmessig, historisk og kulturelt perspektiv* (85-104). Skriftserien, rapport nr. 2/2000. Høgskolen i Bergen.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, Berks: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children´s difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K-12, NCTM Yearbook* (20-32). Reston, VA: NCTM. (Gjengitt etter Tirosh et al. 1998).

Breiteig, T., & Venheim, R. (1999). *Matematikk for lærere 2*. Oslo: Tano Aschehoug.

Brekke, G. (1994). *Funksjonar i skulematematikken. Ein gjennomgang av problemområdet*. KIM-seminar, Notodden: Telemarksforsking.

Brekke, G. (1995). Oppfatninger av desimaltall. *Nämnaren*, *4*, 27-34.

Brekke, G. (1996). Regning med desimaltall. *Nämnaren*, *1*, 16-20.

Brekke, G. (2000). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til algebra*. Oslo: Læringssenteret.

Brekke, G. (2002a). *Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Brekke, G. (2002b). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til tall og tallregning*. Oslo: Læringssenteret.

Brousseau, G. (1997). Problems with Teaching Decimal Numbers, Didactical Problems with Decimals. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (117-224). Dordrecht: Kluwer Academic.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts: Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools.* London: Her Majesty´s Stationery Office.

Collis, K. F. (1975). *The Development of Formal Reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle. (Gjengitt etter Tirosh et al. 1998).

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equation. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, *1* (3), 7-35. (Gjengitt etter Tirosh et al. 1998).

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (1), 45-70.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Strategies of inquiry. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (199-208). Thousand Oaks, CA: Sage.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1993). *Children learning mathematics. A teacher´s guide to recent research*. London: Cassel Educational.

Drijvers, P. (2000). Students encontering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 189-209.

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård I., Borgan, Ø., & Pålsgård, J. (2000). *Matematikk 1MX/1MY*. Oslo: Aschehoug.

Filloy, E., & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. In *Proceedings: VI Annual Meeting of PME, North American Chapter*. Montreal, Canada. (Gjengitt etter Kieran, C. 1990)

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9 (2)*, 19-25.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Gjone, G. (1997). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til funksjoner.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics and science education. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (517-545). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (276-295). New York: Macmillan.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 75-90.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59-78.

Imsen, G. (1998). *Elevens verden – innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Tano Aschehoug.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2001). *TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003.* Boston: International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Jahr, E. (2000). Matematikk på mellomtrinnet. In G. Gjone & T. Onstad (Eds.), *Mathema 2000. Festskrift til Ragnar Solvang* (81-95). Oslo: NKS-forlaget.

Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (27-32). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (67-71). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Jensen, J. H. (1995). Faglighed og pensumitis. *Uddannelse*, *9*, 464-468.

Katz, V. J. (2004). *A history of mathematics*. Pearson Addison-Wesley.

KD (2006a). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Midlertidig utgave juni 2006. Oslo: Kunnskapsdepartementet.

KD (2006b). Brev om eksamen. *Kunnskapsløftet: Eksamen og hjelpemidler i matematikk og engelsk - videregående skole*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
Lokalisert 11.10.2006 på World Wide Web:
http://www.utdanningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=2007

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In *ICMI Study Series: Mathematics and cognition* (96-112). London: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (133-158). East Sussex: Psychology Press.

KUF (1993). *Læreplan for grunnskole, videregående opplæring og voksenopplæring – generell del*. Oslo: Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

KUF (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Nasjonalt læremiddelsenter. Oslo: Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

KUF (1997). *Matematikkundervisningen i Norge. Grunnleggende problemer, og tiltak for en bedre matematikk for alle. Sluttrapport fra arbeidsgruppe nedsatt av Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet*. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

KUF (1999). *Læreplan for videregående opplæring. Matematikk. Felles allment fag i alle studieretninger*. Oslo: Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16* (102-119). London: John Murray.

Lewis, C. (1980, april). *Kinds of knowledge in algebra*. Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, Boston. (Gjengitt etter Kieran, C. 1990).

Lie, S., Kjærnsli, M., Roe, A., & Turmo, A. (2001). Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv. *Acta Didactica*, *4*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling. Oslo: Universitetet i Oslo.

Lie, S., Caspersen, M., & Björnsson, J. K. (2004). *Nasjonale prøver på prøve. Rapport fra en utvalgsundersøkelse for å analysere og vurdere kvaliteten på oppgaver og resultater til nasjonale prøver våren 2004*. Lokalisert 26.10.2006 på World Wide Web: http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/Forskning/ nasjonale_prover_pa_prove.pdf

Lie, S., Hopfenbeck, T. N., Ibsen, E., & Turmo, A. (2005). *Nasjonale prøver på ny prøve*. R*apport fra en utvalgsundersøkelse for å analysere og vurdere kvaliteten på oppgaver og resultater til nasjonale prøver våren 2005*. Lokalisert 26.10.2006 på World Wide Web: http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/nasjonale%20prøver/ nasjonale_prover_pa_ny_prove_rapport_ILS.pdf

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, *30* (1), 39-65.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Student´s understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (1), 1-19.

McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnaren*, *3*, 23-25.

Mertens, D. M. (1998). *Research methods in education and psychology: Integrating diversity with quantitative & qualitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

MMI (2005). *Analyserapport – Evaluering av gjennomføringen av de nasjonale prøver*. Oslo: MMI. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/Rapporter/Evaluering_av_ nasjonale_prover_2005.pdf

Nesselmann, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra*. Berlin: G. Reimer.

Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse*, *9*, 21-29.

Niss, M., & Jensen, J. H. (Eds.) (2002). Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, *18*, 1-334. København: Undervisningsministeriets forlag.

NSMO (2003). *Utvikling og utprøving av nasjonale prøver i matematikk. Prosjektbeskrivelse*. Trondheim: Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.

NSMO (2004a). *Nasjonale prøver i matematikk: Metode og utvikling*. Trondheim: Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.

NSMO (2004b). *Utvikling og utprøving av nasjonale kartleggingsprøver. Prosjektplan for Nasjonale Prøver i Matematikk, revidert*. Trondheim: Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.

OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills – A new Framework for Assessment*. OECD, Programme for International Student Assessment (PISA). Paris: OECD Publications.

OECD (2003). *The PISA 2003 Asssessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* OECD, Programme for International Student Assessment (PISA). Paris: OECD Publications.

Orton, A. (2004). *Learning Mathematics. Issues, theory and classroom practice*. London: Continuum.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (89-122). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*: *Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

PISA (2006, 1. februar). *Mål for prosjektet*. Programme for International Student Assessment. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.pisa.no/s_maal.html

Røsseland, M. (2005a). Hva er matematisk kompetanse? *Tangenten*, *1*, 12-18.

Røsseland, M. (2005b). Hva er matematisk kompetanse? – del 2. *Tangenten*, *2*, 48-53.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum.

Skolverket (2000a). *Matematik A – Kursplan*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0506&infotyp=5&skolform=21&id=3202&extraId=

Skolverket (2000b, 25. oktober). *Information till lärare*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://provbanken.skolverket.se/matematik/exempel/info_larare.html

Skolverket (2003). *Det nationella provsystemet - vad, varför och varthän?* Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1215

Skolverket (2004). *Det nationella provsystemet i den målstyrda skolan - omfattning, användning och dilemman*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1379

Skolverket (2005a). *Nationellt kursprov i matematik kurs A, våren 2005, del II*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 22.10.2006 på World Wide Web: http://www1.lhs.se/prim/matematik/kurs_a/2005/del_II_v1_%20vt05%20.pdf

Skolverket (2005b). *Bedömningsanvisningar vårterminen 2005*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.lhs.se/prim/matematik/kurs_a/2005/bedanv_v1_%20vt05.pdf

Skolverket (2005c). *Nationella prov i gymnasieskolan – ett stöd för likvärdig betygsättning? En studie på fyra skolor*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1496

Skolverket (2005d). *Lärare och elever om gymnasieskolans nationella prov – en enkätstudie*. Stockholm: Skolverket. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1499

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk*. Oslo: NKI-forlaget.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics*, *54* (1), 37-62.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tall, D. O., & Winkelmann, B. (1988). Hidden algorithms in the drawing of discontinous functions. *Bulletin of the IMA*, *24*, 111-115.

Tall, D. O. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, *9 (3)*, 37-42.

Tall, D. O., & Thomas, M. O. J. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (2), 125-147.

Tall, D. O. (1993). School algebra and the computer. *Micromath*, *9*, 38-41.

Tirosh, D., Ruhama, E., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, *35* (1), 51-64.

TNS Gallup (2004). *Rektorers og læreres erfaringer med de nasjonale prøvene 2004*. Oslo: TNS Gallup. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://odin.dep.no/filarkiv/224582/Rapport_rektorer_og_larere.ppt

TNS Gallup (2005). *Undersøkelse blant rektorer og lærere om gjennomføring av de nasjonale prøvene våren 2005*. Oslo: TNS Gallup. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://finnmark.utdanningsforbundet.no/upload/Power-point%20filer/Unders%C3%B8kelser/Rapport%20%20NP2005.ppt

Torkildsen, S. H. (2005). Nasjonale og internasjonale prøver – drivkraft eller bremsekloss? In: I. M. Stedøy (Ed.), *Vurdering i matematikk – Hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplæring. Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU, Trondheim, 15. og 16. november 2004* (17-28). Trondheim: Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://www.matematikksenteret.no/attachment.ap?id=301

UFD (2002a). Norges offentlige utredninger 10. *Førsteklasses fra første klasse*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet.

UFD (2002b). Stortingsproposisjon nr. 1, tillegg nummer 3. *Nasjonalt system for kvalitetsvurdering i grunnopplæringen*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet.

UFD (2003). Norges offentlige utredninger 16. *I første rekke – forsterket kvalitet i en grunnopplæring for alle*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet.

UFD (2004). Pressemelding 075-04. Vedlegg til Nasjonale prøver publiseres og videreutvikles. *Kommentar fra matematikkgruppa til rapporten "Nasjonale prøver på prøve"*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet. Lokalisert 07.08.2006 på World Wide Web: http://odin.dep.no/ufd/norsk/aktuelt/pressesenter/pressem/045071-990386/dok-bn.html

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (99-137). Dordrecht: Kluwer Academic.

Vygotskij, L. S. (2001). *Tenkning og tale*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Vygotsky, L. S. (1986/1962). *Thought and language*. Cambridge: The MIT Press.

11 Vedlegg

11.1 Kodebok for oppgavene innenfor RSF

Oppgave 1a
15,1 + 0,44

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
15,54	Korrekt svar	1	1	
19,5 eller 1,95	Stiller opp så tallene er under hverandre bakfra, ikke ut fra plassverdi	21	0	
15,45	Legger sammen som om det var par av heltall (15 + 0 og 1 + 44)	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 1b
4,3 – 0,38

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
3,92	Korrekt svar	1	1	
4,08	Fører ned hundredel uten å trekke den fra	21	0	
4,02 eller 4,92, 3,02	Gjør feil ved tierovergang	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 1c
3,4 · 6,22

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
21,148	Korrekt svar	1	1	
21,15 eller 21,1	Avrundet svar. Godkjennes hvis både multiplikasjonen og avrundingen er korrekte	2	1	
18,88	Multipliserer ener med ener og desimaler med desimaler – opererer som om det var par av heltall	21	0	
Kommafeil	Multipliserer korrekt, men setter kommaet på feil plass	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 2a
7/4 · 8/5

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
14/5	Korrekt svar, også andre korrekte svar på brøk eller desimalform	1	1	
67/20	Gjør om til ” fellesnevner” og summerer tellerne	21	0	
15/9	Summerer teller med teller og nevner med nevner	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 2b
14/15 : 5/2

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
28/75	Korrekt svar	1	1	
75/28	Regner med omvendt brøk av første brøk i stedet	21	0	
7/3	Forkorter som om det er multiplikasjon i oppgaven	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 2c
$5\,^2/_5 - 2\,½$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
29/10	Korrekt svar, også andre korrekte svar på brøk eller desimalform	1	1	
3 1/3	Trekker teller fra teller og nevner fra nevner	21	0	
3 1/10	Regner først 5 – 2 = 3, gjør om brøkleddene, men trekker første brøkledd fra siste	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 2d
4 : 2/5

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
10	Korrekt svar, også andre korrekte svar på brøk eller desimalform	1	1	
2/5	Regner 4 dividert med 2	21	0	
1/10 eller 2/20	Multipliserer 4 med nevneren	22	0	
5/8		23	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 3a
Summen av $6n$ og $3n$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$9n$	Korrekt svar	1	1	
$9n^2$		21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 3b
Summen av 2 og $n + 5$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$7 + n$	Korrekt svar	1	1	
$7n$		21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 3c
Summen av $3a + a^2$ og $2a – 2a^2$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$5a – a^2$	Korrekt svar (jf. oppgave 6e)	1	1	
$4a$, $4a^2$, $4a^3$, $4a^4$	Feil bruk av eksponenten	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6a
$x^3 \cdot x^4$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
x^7	Korrekt svar	1	1	
x^{12}	Multipliserer eksponentene	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6b
$t^2 + 2t^2$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$3t^2$	Korrekt svar	1	1	
$2t^4$	Multiplikasjon i stedet for addisjon	21	0	
$3t^4$	Addisjon av både koeffisienter og eksponenter	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6c
$3y^6 : y^2$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$3y^4$	Korrekt svar	1	1	
$3y^3$	Dividerer eksponentene	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6d
$4a - (2b + 3a)$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$a - 2b$	Korrekt svar	1	1	
$7a - 2b$	Parentesfeil	21	0	
$5ab$	Trekker sammen tall, føyer til bokstavene	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6e
$3a + a^2 + 2a - 2a^2$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$5a - a^2$	Korrekt svar (jf. oppgave 3c)	1	1	
$4a$, $4a^2$, $4a^3$, $4a^4$	Feil bruk av eksponenter	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 6f
Brøk

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
x^6	Korrekt svar	1	1	
x^4		21	0	
x^5		22	0	
x^3		23	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 8a
$4x - 2 = 2x + 8$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$x = 5$	Korrekt svar	1	1	
$x = 1$	Skifter ikke tegn ved sideskift	21	0	
$x = 3$	Skifter tegn ved ett sideskift, men ikke begge	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 8b
$2(x + 5) - 3(x - 2) = 4x - 4$

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
$x = 4$	Korrekt svar med utregning	1	2	
$x = 4$	Korrekt svar uten utregning	11	1	
Liten regnefeil	Liten regnefeil	12	1	
$x = 8/5$	Fortegnsfeil når den siste parentesen åpnes	21	0	
$x = 7/5$	Multipliserer bare med første ledd i hver av parentesene. Fortegnsfeil når siste parentes åpnes	22	0	
$x = 11/5$	Multipliserer bare med første ledd i hver av parentesene	23	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 10
Volum

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
0,6 dm^3	Korrekt svar	1	1	
0,5 liter		21	0	
8 ml		22	0	
4 dl		23	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 17a
Løs likningen

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
12	Korrekt svar	1	1	
1,7	Dividerer med 1,05	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 22a

Skisse av grafen

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
Korrekt svar	Skissen har i hovedtrekk korrekt form	1	1	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Oppgave 22b

Toppunkt

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
(1,33, 2,19)	Korrekt svar, også hvis det er eksaktverdier (4/3, 59/27)	1	1	
(1,3, 2,2)	Runder av til en desimal	2	1	
Følgefeil	Leser korrekt av fra feil graf i oppgave a	3	1	
$X = 1{,}33$	Tar bare med x-verdi av toppunktet	21	0	
1,33 og 2,19	Oppgir ikke hva som er x- og y-verdi	22	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Bunnpunkt

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
(0, 1)	Korrekt svar	1	1	
Følgefeil	Leser korrekt av fra feil graf i oppgave a	2	1	
$x = 0$	Oppgir bare x-verdi	21	0	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

Nullpunkt

Svar	Kommentar	Kode	Poeng	RSF
(2,21 , 0)	Korrekt svar	1	1	
Følgefeil	Leser korrekt av fra feil graf i oppgave a	2	1	
$x = 2{,}21$		3	1	
Andre svar		99	0	
Ubesvart		0	0	

11.2 Lærerintervjuer

11.2.1 Intervjuguide – aktuelle spørsmål til lærerne

- ”Nasjonal prøve i matematikk.” Hvilke umiddelbare tanker gjør du deg?

- Den nasjonale prøven hadde til hensikt å måle elevens kompetanse innenfor tre såkalte kompetanseområder. Fikk denne kompetansetenkningen praktiske konsekvenser i klasserommet? Bidro prøvene til endringer i undervisningen? Hvorfor (ikke)?

- Var kodene i kodeboka (kategorisering av elevsvar) til hjelp for deg som lærer?

- Ga prøven informasjon om eleven som du ikke hadde fra før?

- Har du andre kommentarer i forbindelse med prøvene?

11.2.2 Transkripsjon av intervju med lærer 1

L1: Lærer 1
F: Eirik Falk

Nr.	Navn	Utsagn
1	F	”Nasjonal prøve i matematikk”, hvilke umiddelbare tanker gjør du deg?
2	L1	Eh, både positive og negative. De kan, hvis opplysningene blir systematisert, så kan de brukes til kanskje å bedre grunnopplæringen på ungdomsskolen. Det negative er jo at det ikke blir gitt ressurser til å bearbeide dem, og dermed så blir de nokså verdiløse. Jeg synes de er nokså verdiløse dersom man ikke legger store ressurser i å bearbeide materialet.
3	F	Var det tilfelle nå synes du?
4	L1	Ja, jeg synes at de hadde bommet, i tillegg til at det ble… altså det ble ikke gitt noen ressurser. Vi ble bedt om å rette det, og rette det etter et skjema så vi fikk systematisert opplysningene. Men utover det så var det jo helt individuelt hva en ville bruke det til. Jeg tror ikke at det var så mange som brukte det så veldig mye.
5	F	Nei. Hva tror du det skyldes først og fremst?
6	L1	Nei, fordi det at… Jeg føler at kanskje de opplysningene som en fikk ut av en slik prøve burde vært brukt av av de som dreiv grunnopplæringen i ungdomsskolen, ikke av oss i videregående. Dessuten så synes jeg jo at det var veldig uheldig at det var så mye arbeid på den prøven. Dermed så får du ikke vurdert om det skyldes at de ikke kan det eller om de ikke har fått tid til det.
7	F	Ja. Var det først og fremst oppgavene mot slutten, kan du huske det?
8	L1	Ja, altså det var jo oppg… Altså de tok det jo kronologisk. Så det var jo mange av de oppgavene på slutten som de ikke hadde sett på i det hele tatt.
9	F	Prøvene skulle jo måle elevens kompetanse innenfor tre områder, tre kompetanseklasser.
10	L1	Ja.
11	F	Var dette en tenkning som fikk praktiske konsekvenser for deg eller var det en inndeling som du ikke brydde deg noe videre om?
12	L1	Nei, jeg tror ikke det fikk nevneverdige konsekvenser for meg. Eh, jeg tror det var lurt å vurdere på den måten, men som sagt, da måtte resultatene vært brukt av andre enn oss. For vi driver jo i.. det var jo først og fremst ting som gikk på forståelse og regneteknikk, og det er mer eller mindre bare repetisjonsstoff hos oss. Så jeg… det er det jeg synes var feilen, at de som skulle lære av det, det var jo de som skulle hatt opplysningene, og ikke vi.
13	F	Ja. Og hvordan brukte du opplysningene da, altså disse kodene?
14	L1	Nei, eh, jeg brukte de ikke i undervisningen noe systematisk. Jeg kunne jo si at den eleven hadde problemer med det og hjelpe han fra oppgave til oppgave med den type problemer. Men ikke, jeg systematiserte ikke den undervisningen på noen måte.
15	F	Nei. Eh, hva kan det skyldes?
16	L1	At?
17	F	At du ikke tok det i bruk?
18	L1	Nei, for de.. hva skal jeg si.. de klassene som det ble delt opp i, eller de tingene som kom fram ut fra rettingene, det er jo.. mye av det er jo ting som vi forutsetter at eleven kan når de kommer hit. Og da er det lite tid til å terpe på de tingene der. Eh, det blir bare en del av undervisningen. Vi kan ikke.. Det er

		jo grunnleggende ting som det krever veldig mye regnetrening for å få inn.
19	F	Fikk du informasjon om eleven som du ikke hadde fra før?
20	L1	Ja eh, mener du ut fra resultatene til eleven?
21	F	Ja, for eksempel.
22	L1	Ja, det gjorde jeg jo for så vidt. Fordi at når elevene kommer hit, så kan nok jeg få greie på hva de har prestert på ungdomsskolen tidligere, men… Men i utgangspunktet så stiller alle med blanke ark når de kommer. Så jeg pleier ikke sjekke hva de har fra før.
23	F	Nei, men denne prøven da, den var jo i april.
24	L1	Javel.
25	F	Så da var det veldig lite tid til det også.
26	L1	Ja.
27	F	Andre kommentarer i forbindelse med prøven, som ikke har kommet fram til nå?
28	L1	Nei altså, mine ankepunkter er at det var en dårlig prøve fordi at det var altfor stor arbeidsmengde. Det var liksom... Det var ikke ressurser som ble avsatt til å bearbeide materialet. Og de tingene som kom fram, de burde vært ting som ble trukket fram i ungdomsskolen, og ikke på vårt nivå. Det er liksom de tre hoved… hovedtingene.
29	F	Ja, flott.

11.2.3 Transkripsjon av intervju med lærer 2

L2: Lærer 2
F: Eirik Falk

Nr.	Navn	Utsagn
1	F	Hvilke tanker gjør du deg umiddelbart om nasjonale prøver?
2	L2	Jeg er for dem. Veldig bra, men jeg ville helst ha nasjonale eksamener på samme måte. Så ikke noen lokale eksamener, men nasjonal eksamen.
3	F	Ja. I alle fag eller hvordan?
4	L2	Ja, selvfølgelig. Jeg er nederlender og der har vi det sånn. Det sikrer jo kvalitet mye bedre.
5	F	Har dere nasjonal eksamen etter hvert år?
6	L2	Nei, det er etter endt utdannelse, etter tre år videregående. Men vi har ikke tre år ungdomsskole, vi har seks år videregående. Ungdomsskole og videregående skole er i ett i Nederland.
7	F	OK.
8	L2	Og etter seks år er det eksamen.
9	F	Det er jo for så vidt slik her også, men ikke på samme måten.
10	L2	Nei. Her har man eksamen i ungdomsskolen. Egentlig har de eksamen allerede etter åttende, niende og tiende klasse. Og så har du eksamen etter første klasse.
11	F	Det er sant det.
12	L2	Det er så mange eksamener. Det kan man godt ta med standpunktkarakteren og så.. Men det er også sånn at elevene fortsetter på den skolen i Nederland, og her kan elevene… etter hvert år kan de velge en annen skole. Så derfor.
13	F	Husker du at de nasjonale prøvene skulle måle tre ulike kompetanser?
14	L2	Ja.
15	F	Fikk denne kompetansetenkningen noen konsekvenser for deg som lærer?
16	L2	Nei. Egentlig ikke. Jeg fikk et helhetsinntrykk, og den nasjonale prøven ga meg ikke mer helhetsinntrykk enn jeg allerede hadde fra før.
17	F	Nei, så det ga ikke noen ny informasjon om elevene?
18	L2	Nei.
19	F	Disse kodene i kodeboka da, altså de ulike svarene fikk en egen kode. Var det noe du brukte?
20	L2	Nei.
21	F	Nei. Hvorfor ikke, tror du?
22	L2	For vanskelig å administrere og nei. Jeg jobber ikke sånn. Rett og slett. Jeg har mitt helhetsinntrykk om en elev, om han er flink i det og litt mindre flink i det, så jevner det seg ut i karakter og i måten som jeg tenker om eleven på.
23	F	Brukte du denne prøven som karaktergrunnlag?
24	L2	Jeg hadde den med.
25	F	Du hadde den med ja.
26	L2	Ja, men som sagt, den sa ikke mye mer enn jeg allerede hadde bestemt meg for.
27	F	Nei.
28	L2	Nei.
29	F	Eh, har du andre kommentarer i forbindelse med prøven?
30	L2	Ja, jeg var forbannet over… over plutselig å ikke bruke regelboka uten å ha sagt noe. Vi har jo lært elevene opp i å bruke regelboka, og så kommer de

		plutselig med nasjonal prøve uten regelbok. Det var mange elever som ga opp mange oppgaver fordi de ikke hadde regelbok. Og da er det ikke rart at norske elever skårer lavt, ikke sant?
31	F	Nei...
32	L2	Hvis de da først hadde sagt, OK regelbok, men neste år så skal man ha uten regelbok. Da er det for meg som lærer beskjed, OK, vi skal ikke ha regelbok, nå skal vi være uten regelbok. Nå må du lære mer utenat og… så det synes jeg var veldig dumt.
33	F	Eh, de hadde vel heller ikke lov til å bruke kalkulator?
34	L2	Nei, det er også sånn et.. Vi trener dem i å bruke kalkulator, man gjør jo ikke annet enn å bruke den kalkulatoren. Så at de ikke fikk lov til å bruke kalkulatoren var akkurat like dumt.
35	F	Så du hadde klart deg veldig godt uten prøven?
36	L2	Ja.
37	F	Hvis de skulle fortsette med…
38	L2	… sånne prøver hadde jeg klart meg uten. Det var bare en test.
39	F	Hvis de skal fortsette da?
40	L2	Jo, da… jeg synes at de må gjøre det som en eksamen i eksamenstiden. Hvorfor ikke? Vi skal ikke prøve oss lærere, vi skal jo prøve de elevene (ler).
41	F	Ja. Dette oppfatter du kanskje som et forsøk på å prøve læreren?
42	L2	Ja. Jeg lærer dem det som står i pensum og det som står i boka. Jeg lærer dem det. Jeg går gjennom alt og forteller alt. Ti ganger hvis jeg må. Men hvis elevene ikke oppfatter det, hva kan jeg gjøre? Er jeg da en dårlig lærer?
43	F	Elevene da, hadde de… hvordan reagerte de på prøven?
44	L2	Nei, for en elev er det bare gjort, ferdig med det. Tror du en femtenåring ser på; "åh, nå skal jeg forbedre meg"? Nei, sånn virker det ikke.
45	F	Så den tilbakemeldningen eleven fikk på prøven, var det noe de hadde bruk for?
46	L2	Nei.
47	F	Noe de kastet bort med en gang?
48	L2	Jeg ga tilbakemelding og ingen reaksjon. Men de fikk vel en helhetskarakter også, fikk de ikke det?
49	F	De fikk vel egentlig bare tre summer, altså en i den kompetansen, en i den kompetansen.. Ja, de fikk på en skala fra en til fem, tre tall.
50	L2	Ja, tre tall fikk de ja.
51	F	Fra en til fem.
52	L2	Ja, hvorfor ikke fra null til seks da slik vi er vant med? Men jeg gjorde om til karakter.
53	F	Ja?
54	L2	Ja, som sagt: De som hadde toer de fikk rundt en toer, og de som hadde femmer, de fikk sånn rundt en femmer.
55	F	Så de fikk omtrent det samme på denne som det de fikk til vanlig?
56	L2	Ja, jeg tror ikke at de gjorde mye med, der skåret jeg dårlig… Meningen er jo bra, men jeg tror ikke at det hjelper.

11.2.4 Transkripsjon av intervju med lærer 3

L3: Lærer 3
F: Eirik Falk

Nr.	Navn	Utsagn
1	F	"Nasjonal prøve i matematikk." Hvilke tanker gjør du deg umiddelbart?
2	L3	Eh… Det var alt oppstyret rundt. Det er vel det jeg husker best. Alle disse diskusjonene om hva de skulle brukes til og hvordan de skulle offentliggjøres og hvem som ville ha det og hvem som ikke ville ha det og sånn. Oppstyr husker jeg best.
3	F	Ikke det faglige altså?
4	L3	Veldig, veldig lite faglig.
5	F	OK.
6	L3	Ja, og så diskusjonen om hvorvidt det skulle brukes som en del av karaktergrunnlaget eller ikke.
7	F	Ja, ble det brukt som en del av karaktergrunnlaget?
8	L3	Tror det endte opp med, eller jeg endte i hvert fall opp med å si at hvis det talte positivt, så skulle det telle. Hvis ikke så dreit vi i det.
9	F	Nettopp.
10	L3	Og i praksis så dreit vi i det.
11	F	Det nasjonale prøvene hadde til hensikt å måle elevens kompetanse innenfor tre kompetanseområder. Fikk denne kompetansetenkningen konsekvenser i klasserommet?
12	L3	Nei.
13	F	Nei?
14	L3	Nei. Nei, ikke som jeg har bevisst gjort noe med.
15	F	Hvorfor ikke tror du?
16	L3	Altså hvis det var et mål med nasjonale prøver, så synes jeg ikke at de har fått det godt nok fram. Verken gjennom… Nei, ikke noe for- eller etterarbeid som tyder på at vi… Som har vært med på å hjelpe oss på hvordan vi skal bruke dette aktivt i undervisningen.
17	F	Litt dårlig opplæring kanskje?
18	L3	Jeg må først rope på motivasjonen før jeg roper på mer opplæring når det gjelder slike ting, men ja, det var… jeg vil påstå det.
19	F	Kodene i kodeboka, var de til hjelp for deg som lærer på noe vis?
20	L3	Eh… Ja, det var greit å se hvilke feil som tydeligvis var vanlige å gjøre, men det har ikke… Og det var ikke alle som var like gode. Eller det var et par ganger at det ikke var noen… at vanlige feil ikke tydeligvis var kodet. Men det har ikke egentlig hjulpet meg noe sånn, eller jeg har ikke hatt bruk for det i ettertid, utenom at jeg synes det var interessant å se hva som var vanlige feil.
21	F	Ja. Ga prøvene informasjon om eleven som du ikke hadde fra før?
22	L3	Egentlig ikke. Nei.
23	F	Andre kommentarer i forbindelse med prøvene?
24	L3	Ja, det var det at det var en veldig uvant type prøve for elevene. Den var kanskje, jeg vet ikke om den var vanskelig, men det var mye å gjøre for de som skulle gjøre alt. De flinke som skulle gjøre alt, man så liksom at de hadde gjort alt fram til et visst punkt, så var det tomt etterpå. Og da føler jeg at det ikke er riktig å bruke det på noen som helst måte egentlig. For det virket som

		om mesteparten av greien med nasjonale prøver er akkurat det, at de skal offentliggjøre en eller annen statistikk for noen skoler. For det vi diskuterte umiddelbart etterpå var jo timingen med prøvene, at når de går i tiende skal de ha i slutten av tiende liksom når… Det blir veldig sånn bommert, vi fikk jo ikke tilsendt det her. Jeg har aldri sett noe… Så aldri noen nasjonale prøver for de folkene som gikk her i første. For eksempel.
25	F	Nei.
26	L3	Og da mister de litt av poenget. I hvert fall et av de poengene som jeg oppfattet skulle være greien her.
27	F	Hva gjorde du med resultatene da?
28	L3	Eh… Så på dem og lagret dem. Og så tenkte jeg ikke mer på dem.
29	F	Nei. Elevene da? Husker du noe av det?
30	L3	Nei, jeg tror ikke de… De spurte vel litt om de skulle få dem tilbake og slike ting. Det var ikke noe, jeg kan ikke huske noe stort "fuss" der heller. Men det har jo selvfølgelig med at det skulle jo bare telle positivt hvis det skulle telle noen vei, så da… Da er de jo fornøyd uansett.

11.2.5 Transkripsjon av intervju med lærer 4

L4: Lærer 4
F: Eirik Falk

Nr.	Navn	Utsagn
1	F	”Nasjonal prøve i matematikk.” Hvilke tanker gjør du deg umiddelbart?
2	L4	Ja eh.. Jeg tenker mest egentlig på det med selve skjemaet da, altså men det.. Det er kanskje det at jeg er visuell selv, men det er jo kanskje det at jeg har rettet dem, da er det liksom det som er min umiddelbare knagg. Sånn i utgangspunktet.
3	F	Er det positive tanker du gjør deg eller er det negative?
4	L4	I utgangspunktet positive.
5	F	Hvorfor?
6	L4	Hm… Ja nei, altså jeg er jo positiv til prøvene i seg selv, eller i hvert fall intensjonen om å finne ut egentlig hvor elevene står, teste dem. For så vidt.. Og også det med å drive en faglig vurdering av elevene synes jeg er veldig viktig i den grad man driver skoleevaluering, så er jo da en faglig vurdering veldig sentral.
7	F	Var denne prøven i stand til å måle disse tingene som du snakker om nå?
8	L4	Hmm..
9	F	Synes du at den fungerte etter hensikten?
10	L4	Ja, hva skal man si, i hvert fall sånn overordnet så er det jo en evaluering eller en slags, det gir en grov pekepinn selvsagt, så… Men når du går på de enkelte delkategoriene som man skulle dele inn i, så vet jeg ikke om det var like vellykket akkurat den oppdelingen. Det slo meg kanskje ja, at det ikke var hundre prosent.
11	F	Hva tror du det kan skyldes? Var det selve oppgavene eller var det kunstig inndeling eller hva?
12	L4	Eh ja… Det som jeg kanskje la merke til selv, eller mistenkte, det var at det kanskje var litt for… det virket som om det var for knapp tid og spesielt den andre og tredje kategorien var altfor… at de var… det ble for knapp tid på dem rett og slett, at de ikke var detaljerte nok eller, på en måte, ja. For jeg så mange… hadde de fått tidsmangel, så var det nok litt tilfeldig hvilke oppgaver de grep fatt i på slutten. Det ville jo gi store utslag i skåren i de ulike kategoriene.
13	F	Ja. Disse kompetansene som du nevner, de tre ulike, var det en måte du var vant med å tenke på? Fikk disse rett og slett noen konsekvenser for deg som lærer? Altså på måten som du underviser på.
14	L4	Ja, altså jeg tenker jo... Ja, det å bruke sånn taksonomi, og at du tenker at det er, kognitiv taksonomi, det er jo en måte som jeg tenker på til vanlig, men jeg tror nok at inndelingen her var kanskje litt… jeg vet ikke om den var hundre prosent akkurat slik som jeg tenker selv, men jeg bruker jo den måten i prinsippet å tenke på selv.
15	F	Oppgavespesifikt da så var det jo slike koder der du skulle gi alle elevsvarene koder, elleve tolv...
16	L4	Ja.
17	F	Var dette noe som du hadde bruk for?
18	L4	Ja, at jeg hadde bruk for, det vet jeg ikke, men jeg reagerte på at det kanskje

		var litt for lite… Det var kanskje ikke alle steder der de hadde tenkt gjennom alle mulige, tenkelige, hva skal man si, standardsvar som er vanlige feil blant elevene. Det var noen som bare ble sekkebetegnelser i stedet for å ha en mer detaljert… Men for min del så spilte ikke det en så stor rolle, men nå tenker jeg mer på seriøsiteten til undersøkelsen blant dem som rettet den nasjonalt.
19	F	Det var for mange som havnet i den store sekken blant ”andre svar”?
20	L4	Ja ja, men det som jeg stusset mest på ved hele… som gjorde meg veldig skuffet på slutten, det var jo da det gikk opp for meg at de egentlig ikke brukte denne graderte informasjonen videre. Altså her sitter man med masse kompetanse på hvert enkeltspørsmål som kunne vært brukt og analysert i ettertid av seriøse skoleforskere ville jo jeg tenke i mitt naive hode.
21	F	Mhm, ja.
22	L4	Altså all den informasjonen forkastet man jo, og så gikk man jo over til å bruke bare disse her litt pseudokategoriene der all informasjonen på en måte var konsentrert ned i tre grupper. Dette gjorde jo… det senket jo kvaliteten for hva den eventuelt kunne brukes til.
23	F	Ja, i et stort perspektiv?
24	L4	I et stort perspektiv hvis det virkelig skulle brukes på en slags... Det som kunne vært interessant var jo nettopp som lærer å kunne gå inn senere og se i en database, sånn og sånn og sånn ligger vi an når det gjelder for eksempel funksjoner. Hvordan... hvordan er mine elever akkurat på funksjoner i forhold til landsgjennomsnittet og så videre og så videre.
25	F	Nettopp.
26	L4	Det kunne jo vært brukt til noe fornuftig hvis alt var samlet i en database, men mye av det som da jeg kunne brukt i min undervisning for å vurdere min egen klasse sin kompetanse på sånn helt spesifikke delmål, det falt jo fullstendig bort.
27	F	Så du brukte egentlig ikke disse kodene sånn spesifikt og så at ”i min klasse er det fire stykker som har gjort den spesifikke feilen”?
28	L4	Ja, det var noen få, det var ei som jeg satte i gang med noen krasjkurs med… med for eksempel... jeg avdekte at hun ikke kunne gangetabellen i det hele tatt. Egentlig smart elev, men det var liksom det hun ikke kunne, så jeg satte henne i gang med for eksempel… Og da ble jo det en konkret ting som jeg avdekte i… eller som prøven avdekte.
29	F	Så det var ny informasjon om en elev som du ikke hadde fra før?
30	L4	Ja.
31	F	Var det flere slike eksempler?
32	L4	Hvor jeg brukte sånn konkret? Altså det var litt der med at det var enkelte som på en måte skårte, hva skal man si, at det var plutselig noen som fikk nesten full skåre på for eksempel kategori to eller... jeg husker ikke hundre prosent akkurat hvordan det var. Men det var noen som vanligvis ikke pleier å være helt i toppen på alle prøvene som plutselig hadde liksom da, som skårte best på en av kategoriene.
33	F	Resonnement og slike ting eller?
34	L4	Ja, jeg tror at den gikk mer på resonnement og hvordan du... presentasjon og... eller ja, presentasjon og… den siste var vel om resonnement, eller var resonnement med i den?
35	F	Resonnement, tankegang og kommunikasjon er det en som heter.
36	L4	Ja, den midterste der var det to tre stykker som... og da kunne jeg jo trekke fram dem i klassen og gi dem ros for å være best i klassen selv om de som

		helhet ikke var det. For når du så helheten så var det de vanlige fem pluss og sekserne som stakk av med kaka (ler).
37	F	Ja. Har du andre kommentarer i forbindelse med prøvene som ikke har kommet fram?
38	L4	Ja, jeg har brukt det litt videre i 1MX, men da bruker jeg det på min måte og min egen fortolkning og alt sammen. Så faktisk i år så har jeg brukt, for å differensiere mine egne 1MX-elever, altså året etter med helt andre elever, at jeg har hatt en systematisk gjennomgang av alle prøvene som jeg har rettet i løpet av høstsemesteret, slik at jeg har…
39	F	Der du da tenker i kompetanser?
40	L4	Tenker i kompetanser, men da har jeg kanskje gradert det inn, og her er jeg jo i samme problemet som nesten alle vil (ler) rent faglig møte på. Det er jo nettopp da, hva er hva slags kompetanse? Og da har jeg bare gjort det på en veldig enkel måte. Jeg har sagt at denne oppgaven er for eksempel algebra, og da har det gått mye på *a* og *b* og så videre. Og så har jeg hatt en annen og sagt at dette her er sannsynlighet. Men da har jeg egentlig ikke gått helt sånn på kompetanser.
41	F	Gått på emner?
42	L4	Jeg har gått mer på emner ja. Men det er en del ting du finner ut der likevel egentlig. Jeg har gradert det ganske… eller ikke for grovt for da blir det jo meningsløst, eller ikke for fininndelt, da blir det jo meningsløst. Plutselig så ser jeg da at det er enkelte elever som... og da har jeg da brukt noen timer der jeg har sagt at de jobber i grupper, da har jeg liksom da at gruppe én jobber bare med algebra, gruppe to jobber bare med sannsynlighet og gruppe tre den jobber bare med tallteori.
43	F	På grunnlag av?
44	L4	På grunnlag av de prøvene de gjorde stort sett i høstsemesteret. Da samlet jeg sammen alle sammen slik at jeg fikk mye større empirisk grunnlag ut fra måten jeg rettet prøver på.
45	F	Det var akkurat det du savnet ble gjort i et større perspektiv med de nasjonale prøvene?
46	L4	Ja, for jeg har jo ingen sammenlikning. Hva er det, hva burde vært normalt. Hadde jeg fått ut, liksom, dette er den normale prøven, eller dette er den normale, eh landsgjennomsnittet, over eller under eller sånn. Men her ser jeg jo, jeg klarte jo å plukke ut hva er… hvis jeg tar en enkelt elev så klarer jo jeg å finne ut; er han over eller under sitt eget gjennomsnitt?
47	F	Ja.
48	L4	Ikke sant? Hva er det svake punktet til hver enkelt? Det var liksom der, plukket ut de svakeste punktene, og så satte jeg noen til å jobbe for eksempel bare med brøker. Prosent en annen, ja.
49	F	Var det først og fremst disse grunnleggende ferdighetene?
50	L4	Det gikk mye på grunnleggende ferdigheter hvor det var veldig klart sånn, men ja.. Så sånn sett så, det er jo selvsagt veldig begrenset hva jeg klarer ut fra de tilfeldige matematikkprøvene.
51	F	Ja, for den nasjonale prøven innledet med addisjon, subtraksjon og multiplikasjon og litt brøkregning, uten bruk av kalkulator, sånn som normalt ikke blir testet i videregående skole.
52	L4	Ja.
53	F	Så det ble egentlig nyttig da?
54	L4	Ja, det er klart at det går an å sette i gang med, du trenger kanskje ikke en så

		stor mengde prøver, men jeg har gjort det i hvert fall på prøvene for å se om det var en utvikling over tid faktisk, om jeg fikk en... Til flere prøver jeg samlet opp, til flere spørsmål jeg fikk på elevene, dess mer detaljinformasjon fikk jeg og..
55	F	Har på en måte en logg da?
56	L4	Ja, og dessuten får jeg jo et bedre statistisk materiale for å kunne konkludere med at her er det en svakhet i for eksempel brøkregning. At det er systematisk. Bare en oppgave hvor du eventuelt gir bare to eller ett eller null poeng det er jo nesten en, sånn rent matematisk, er jo det nesten ubrukelig informasjon.
57	F	Så sånn sett så var med andre ord den nasjonale prøven litt, at den åpnet sinnet litt?
58	L4	Ja, det var nok ikke at jeg kopierte det, men at jeg åpnet tanke… eh.. sinnet ja.
59	F	Ja, en inspirasjonskilde til…
60	L4	Ja, en inspirasjonskilde. Men generelt, det som gikk på egentlig bruk i egen klasse, så var det jo altfor seint på året. Det var jo helt meningsløst der på slutten. Vi var jo nesten ferdige med undervisningen, og sånn sett så fungerte jo ikke det.
61	F	Nei.

11.2.6 Transkripsjon av intervju med lærer 5

L5: Lærer 5
F: Eirik Falk

Nr.	Navn	Utsagn
1	F	Nasjonale prøve i matematikk, hvilke umiddelbare tanker gjør du deg?
2	L5	Ja, jeg mener at de minner om de gamle… De der normerte prøvene. Det synes jeg ikke var noe.
3	F	Hvorfor ikke?
4	L5	Nei, det virket som… I hvert fall før i tiden var det slik at de kjørte like prøver hvert eneste år. Da var det en del lærere som rett og slett hadde trimmet elevene i de der greiene på forhånd for at de skulle skåre godt. Sånn opplevde i hvert fall jeg det.
5	F	Ja, så hvis de fortsetter med nasjonale prøver, så er du redd for at dette kommer til å skje igjen?
6	L5	Ja, jeg er redd for at de ikke lager nye hver gang.
7	F	Ja, og at lærere kommer til å spisse elevenes kompetanse fram mot disse?
8	L5	Ja, jeg er redd for det rett og slett. I hvert fall hvis det er slik at de… Hvis de skal offentliggjøres. Men det er jo snakk om nå at de ikke skal offentliggjøres. Da er det kanskje bedre, vet du.
9	F	Ja, hvis vi går tilbake til den nasjonale prøven som var nå. Den hadde til hensikt å måle elevens kompetanse innenfor tre kompetanseområder. Husker du disse?
10	L5	Ja, jeg vet, men jeg husker ikke hvilke klasser det var.
11	F	Fikk denne tenkningen noen praktiske konsekvenser for deg i klasserommet?
12	L5	Ingenting. Jeg gjorde ikke noe spesielt.
13	F	Hvorfor ikke?
14	L5	Nei, jeg mente at det der de testet ikke var noe særlig. Jeg husker ikke hvilke mål det var.
15	F	Hvorfor tror du at de ikke ble tatt i bruk, disse kompetanseområdene?
16	L5	Nei… Det kan vel være at jeg var motstander av hele opplegget og ikke ville følge opp de greiene der. Og det viser seg jo at det egentlig var lite mening å begynne med det. Det var jo helt på slutten av skoleåret. Det var så liten tid til å få gjort noe med det.
17	F	Ja.
18	L5	Jeg mener at man ikke kunne… Skoleåret var jo stort sett ferdig.
19	F	Du husker sikkert også at du ga koder på de enkelte svarene. Var disse på noen måte til hjelp for deg som lærer?
20	L5	Ja, jeg vil si… Altså å klassifisere de greiene der?
21	F	Ja.
22	L5	Ja, det var greit nok altså. Det var ikke noe særlig jeg lurte på. Men jeg synes at i begynnelsen, da vi skulle instrueres… Vi ble jo kurset. Det så mystisk ut altså, men det gikk greit.
23	F	Ja, hvordan var dette kurset? Hva lærte du?
24	L5	Det var rett og slett hvordan vi skulle rette prøven. Slik oppfattet i hvert fall jeg det.
25	F	Fokus på hvordan du kunne bruke prøven da?
26	L5	Det er mulig, men jeg tror ikke at jeg var så interessert.

27	F	Ga prøven deg informasjon om eleven som du ikke hadde fra før?
28	L5	Nei.
29	F	Nei?
30	L5	Nei, jeg vil si at en del skåret dårligere enn før også. Og det tror jeg rett og slett kom av at de ikke var interessert i å ha den prøven.
31	F	Hvorfor tror du ikke at elevene var interessert i å ha prøven?
32	L5	Det er sikkert lei av å bli kontrollert på alle måter. Og det viste seg vel at de hadde hatt noen lignende prøver på grunnskolen også.
33	F	Brukte du prøven i vurderingen? Altså, fikk den tellende… Telte den i vurderingen av eleven?
34	L5	Det tror jeg var lite. Kanskje dersom vi var i tvil om noe. Nei, jeg tror ikke at de ble tellende i det hele tatt.
35	F	Nei. Hva tror du hensikten er med prøvene?
36	L5	Nei… Med den politiske ledelsen som var da, jeg tror rett og slett at hensikten var å finne ut hvordan skolene var i forhold til hverandre. Det tror jeg det var. Jeg tror ikke det var å finne ut hvordan elevmassen var. Tror rett og slett det var for å rangere skolene.
37	F	Det var kanskje derfor du valgte å ikke bruke prøven så mye også?
38	L5	Ja, jeg tror muligens det. Nei, jeg vet ikke jeg altså.
39	F	Var det en type prøve du følte du hadde behov for?
40	L5	Nei, kunne godt unnvære den for meg altså.
41	F	Hvorfor hadde du ikke behov for den da?
42	L5	Nei… Den ga meg ikke noe nytt rett og slett.

11.3 Etappemål nasjonale prøver for matematikk grunnkurs 1MX

KULTUR, SPRÅK OG KOMMUNIKASJON

Sammendrag av målene:

Elevene skal kunne bruke og forstå et matematisk språk, notasjon og terminologi som er relevant for kurset, både skriftlig og muntlig.

Presisering:

Elevene skal:

- kunne bruke matematisk notasjon og terminologi som er relevant for innholdet i grunnkurset på en presis måte
- kunne presentere og begrunne egne oppgaveløsninger og undersøkelser
- kunne føre et matematisk resonnement
- kunne lese og forstå en enkel matematisk tekst, kunne gjøre rede for innholdet og kunne bruke det i oppgaveløsing
- kunne forstå enkle matematiske bevis, som f.eks. klassiske bevis for Pytagoras´ setning

MODELLERING, EKSPERIMENTERING OG UTFORSKNING

Sammendrag av målene:

Elevene skal kunne matematisere en praktisk situasjon ved å sette opp en matematisk modell, med eller uten tekniske hjelpemidler, behandle modellen matematisk og vurdere gyldighet og begrensning av modellen.

Presisering:

Elevene skal:

- kunne bruke den grafiske lommeregneren til eksperimentering og undersøkelser
- kunne bruke matematisk modellering til å løse problemer fra virkeligheten; dvs undersøke en praktisk situasjon, ”oversette” den til matematisk språk og form, foreta beregninger, og undersøke gyldigheten av resultatene i den praktiske situasjonen.
- kunne bruke IKT-verktøy for matematikk i utforsking og problemløsing

TALLBEHANDLING OG PRAKTISK REGNING

Sammendrag av målene:

Elevene skal med sikkerhet kunne behandle tall og tallmateriale, gjøre overslag, regne med og uten lommeregner. De skal kunne tolke, bearbeide og vurdere matematikkholdige framstillinger fra dagliglivet skriftlig og muntlig.

Presisering:

Elevene skal:

- kunne bruke enkel hoderegning til overslag og vurdering av svar
- kunne regne med papir og blyant med flersifrede tall, desimaltall og enkle brøker
- kjenne tallenes plassering på tallinjen og kunne gjøre rede for hvordan både rasjonale og irrasjonale tall ligger uendelig tett på tallinjen
- kunne regne med potenser og tall på standardform
- kunne anskueliggjøre store og små tall i konkrete eller praktiske sammenhenger
- forstå begrepene prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og kunne regne med disse størrelsene
- kunne bruke lommeregneren på en hensiktsmessig måte
- kunne relatere proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser til praktiske eksempler
- kunne velge passende enheter i oppgaver fra dagligliv og yrkesliv
- kunne tolke, bearbeide og vurdere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske framstillinger i massemedia, bøker, bruksanvisninger o.l. tilpasset det matematiske nivået i læreplanen

Etappemål for modul MX

ALGEBRA

Sammendrag av målene:

Elevene skal kunne regne med bokstavuttrykk og løse annengradslikninger.

Presisering:

Elevene skal:

- kunne regne med rasjonale bokstavuttrykk
- kunne regne med potensreglene for generelle eksponenter
- kunne faktorisere annengradsuttrykk
- kunne finne røttene i en annengradslikning ved å bruke sammenhengen mellom røttene og koeffisientene i annengradslikningen

FUNKSJONSLÆRE

Sammendrag av målene:

Elevene skal kunne drøfte enkle funksjoner, bruke regresjon på lommeregner for å finne gode matematiske modeller. De skal forstå og kunne beregne gjennomsnittlig og momentan vekst, kunne tolke det i praktiske situasjoner. De skal kunne beregne areal under grafer og tolke dem i praktiske situasjoner.

Presisering:

Elevene skal:

- kunne finne funksjonsuttrykket for rette linjer gjennom to gitte punkter ved regning
- kunne beskrive lineære og eksponentielle vekstforløp matematisk og kunne redegjøre for noen vanlige eksempler
- kunne bruke regresjon på lommeregneren til å finne funksjonsuttrykk som tilnærmet beskriver praktiske sammenhenger
- kunne bruke lommeregneren til å studere funksjoner bygd opp ved hjelp av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og de fire regningsartene
- forstå begrepene gjennomsnittlig og momentan vekst
- kunne finne tilnærmede verdier for den momentane veksten ved regning
- kunne bruke lommeregneren til å finne momentan vekst
- kunne tolke momentan vekst i praktiske situasjoner
- forstå hvordan arealet under en funksjonsgraf kan tilnærmes med rektangler, kunne bruke lommeregneren til å beregne slike arealer og kunne tolke disse arealene i praktiske situasjoner

11.4 Læreplan for matematikk på grunnkurs – Reform 94

Læreplanen har ni mål. Mål 1 og 2 angir ferdigheter, holdninger og perspektiver som er felles for alle enhetene 1M, 1X og 1Y, og som skal integreres gjennom hele faget. Målene 3, 4 og 5 inngår i grunnenheten 1M, målene 6 og 7 inngår i påbyggingsenheten 1Y, og målene 8 og 9 inngår i påbyggingsenheten 1X.

Hovedmomenter som er merket med *, kan sløyfes på yrkesfaglige studieretninger dersom man trenger tid til å tilrettelegge stoff som er mer relevant for yrkesfagene.

Mål 1: Kultur, språk og kommunikasjon

Elevene skal kunne tolke og formidle matematisk informasjon på muntlig, skriftlig og grafisk form. De skal ha et innblikk i matematikkens historie og ha noe kjennskap til fagets betydning for samfunns- og kulturliv

Hovedmomenter:

Elevene skal

1a kunne samtale og samarbeide om matematiske spørsmål

1b kunne presentere og begrunne egne oppgaveløsninger og undersøkelser, kunne føre et matematisk resonnement og kunne bruke matematisk notasjon og terminologi

1c kunne lese og forstå en enkel matematisk tekst, kunne gjøre rede for innholdet og kunne bruke det i oppgaveløsing

1d kjenne til matematikkens flerkulturelle historie og ha innblikk i matematikkens betydning for naturvitenskap, teknologi, samfunnsliv og kultur

Mål 2: Modellering, eksperimentering og utforsking

Elevene skal ha innsikt i samspillet mellom matematikk og virkelighet og kunne arbeide med oppgaver som krever fantasi og innsikt. De skal kunne benytte teknologiske verktøy på en hensiktsmessig måte i modellering, utforsking og problemløsing

Hovedmomenter:

Elevene skal

2a kunne omforme et problem fra virkeligheten til matematisk form, kunne løse det og kunne vurdere gyldigheten til løsningen

2b kunne reflektere over egne metoder og resultater og kunne diskutere dem med andre

2c kunne bruke teknologiske verktøy i utforsking og problemløsing

2d kunne oppdage og eksperimentere med mønstre, systemer og sammenhenger og kunne undersøke om resultatene de kommer fram til, har generell gyldighet

2e kunne formulere og løse problemer der de må kombinere sine matematiske kunnskaper og ferdigheter med initiativ, fantasi og innsikt

Mål 3: Tallbehandling og praktisk regning

Elevene skal utdype sin tallforståelse, oppøve sine regneferdigheter og kunne bruke algebraiske formler til å forstå sammenhengen mellom ulike størrelser

Hovedmomenter:

Elevene skal

3a kunne velge passende enheter i oppgaver fra dagligliv og yrkesliv, kunne bruke lommeregneren på en hensiktsmessig måte og kunne runde av svarene med fornuft

3b kunne tolke, bearbeide og vurdere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske fremstillinger i massemedia, bøker, bruksanvisninger o.l.

3c kunne tolke og håndtere formler og algoritmer knyttet til dagligliv, yrkesliv og studieretning, kunne regne med tall og bokstavuttrykk og kunne løse algebraiske formler med hensyn på de forskjellige variablene

3d* kjenne tallenes plassering på tallinjen, ha kjennskap til irrasjonale tall og kjenne til at ethvert intervall på tallinjen inneholder uendelig mange tall

3e kunne behandle potenser og tall på standardform, og kunne anskueliggjøre store og små tall

3f kjenne begrepene prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og kunne regne med disse størrelsene

3g kunne behandle proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser grafisk og algebraisk

Mål 4: Geometri

Elevene skal utvide sin kjennskap til grunnleggende begreper og resultater i geometri og kunne bruke dem til å løse geometriske problemer i praktiske situasjoner

Hovedmomenter:

Elevene skal

4a kunne påvise at figurer er formlike og kunne utnytte formlikhet og Pythagoras' setning i beregninger

4b kunne bruke geometri til å løse praktiske problemer knyttet til lengder, arealer og volumer

4c* kunne regne med sinus, cosinus og tangens til vinkler mellom 0° og 90° og kunne bruke trigonometri i praktiske situasjoner

4d* kjenne til kjeglesnittene og deres rolle i utviklingen av vårt verdensbilde og kunne redegjøre for noen praktiske anvendelser av kjeglesnittene

Mål 5: Sannsynlighetsregning

Elevene skal kjenne grunnbegrepene i sannsynlighetsregningen og kunne bruke dem til å utføre enkle beregninger

Hovedmomenter:

Elevene skal

5a kjenne til begrepet sannsynlighetsmodell og kunne formulere og eksperimentere med enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller

5b kunne regne ut sannsynligheter ved å telle opp alle gunstige og alle mulige utfall i enkle eksempler

5c kunne regne ut sannsynligheter ved hjelp av valgtrær, Venn-diagrammer og andre systematiske oppstillinger

5d* ha en intuitiv forståelse av uavhengighet og betinget sannsynlighet

5e* kunne bruke addisjonssetningen og produktsetningen

Mål 6: Geometri 2

Elevene skal gjennom konstruksjon, tegning og eksperimenter med og uten teknologiske hjelpemidler oppleve visuelle og estetiske sider ved geometrien

Hovedmomenter:

Elevene skal

6a kunne konstruere eller tegne regulære mangekanter og kunne beregne når mønstre av like eller ulike regulære mangekanter kan fylle hele planet

6b kunne konstruere eller tegne ulike spiralformer og fraktaler og kjenne eksempler på slike former i kunst og natur

6c kjenne det gylne snitt, kunne konstruere eller tegne pentagrammer og gylne rektangler og kjenne eksempler på hvordan det gylne snitt er brukt i kunst, formgivning og arkitektur

Mål 7: Praktisk bruk av funksjoner og algebra

Elevene skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer. De skal kunne bruke algebra og funksjoner i praktiske situasjoner

Hovedmomenter:

Elevene skal

7a kjenne funksjonsbegrepet, være kjent med noen praktiske eksempler på funksjoner og kunne tegne funksjonsgrafer med og uten tekniske hjelpemidler

7b kunne finne nullpunkter til funksjoner og skjæringspunkter mellom kurver ved hjelp av lommeregner

7c kunne bruke lommeregneren til å finne topp- og bunnpunkter og kunne tolke resultatet i praktiske situasjoner

7d kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne funksjonsuttrykket når linjen er gitt, kjenne begrepet stigningstall og kunne tolke det i praktiske situasjoner

7e kunne løse to lineære likninger med to ukjente grafisk og ved regning

7f kunne løse annengradsligninger grafisk og ved regning

7g kunne bruke lommeregneren til å studere praktiske problemer knyttet til funksjoner bygd opp ved hjelp av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og de fire regningsartene

7h kjenne begrepene lineær og eksponentiell vekst, vite om noen vanlige eksempler, og kunne bruke regresjon på lommeregneren til å finne lineære og eksponentielle sammenhenger i praktiske situasjoner

7i kunne bruke Briggske logaritmer og n-te røtter til å løse enkle likninger knyttet til eksponential- og potensfunksjoner i praktiske eksempler

7j vite hvordan matematikk kan brukes til å datere historiske funn

Mål 8: Algebra

Elevene skal regne med algebraiske uttrykk og kunne tolke og bruke algebraiske formler i praktiske sammenhenger. De skal kunne bruke likninger til å løse praktiske og teoretiske problemer

Hovedmomenter:

Elevene skal

8a vite hvordan algebraiske uttrykk kan brukes til å beskrive sammenhengen mellom ulike størrelser og selv kunne formulere slike sammenhenger

8b kunne regne med rasjonale bokstavuttrykk, bruke kvadratsetningene begge veier og regne med potensreglene for generelle eksponenter

8c kunne løse annengradslikninger, faktorisere annengradsuttrykk og kjenne sammenhengen mellom røttene og koeffisientene i en annengradslikning

8d kunne løse to likninger med to ukjente ved regning

8e kunne bruke Briggske logaritmer og n-te røtter til å løse enkle ligninger knyttet til eksponential- og potensfunksjoner i praktiske eksempler

8f vite hvordan matematikk kan brukes til å datere historiske funn

Mål 9: Funksjonslære

Elevene skal forstå funksjonsbegrepet. De skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer og kunne bruke funksjoner i praktiske situasjoner. De skal ha kjennskap til ideene som ligger til grunn for derivasjon og integrasjon

Hovedmomenter:

Elevene skal

9a forstå funksjonsbegrepet med definisjonsmengde og verdimengde og kunne tegne funksjonsgrafer med og uten tekniske hjelpemidler

9b kunne finne nullpunkter til funksjoner og skjæringspunkter mellom kurver grafisk og ved regning

9c kunne bruke lommeregneren til å finne topp- og bunnpunkter og kunne tolke resultatet i praktiske situasjoner

9d kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne funksjonsuttrykket for en linje ved regning, kunne beregne stigningstallet og tolke det i praktiske situasjoner

9e kunne bruke lommeregneren til å studere funksjoner bygd opp ved hjelp av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og de fire regningsartene

9f kjenne begrepene lineær og eksponentiell vekst, kunne beskrive slike vekstforløp matematisk og vite om noen vanlige eksempler

9g kunne bruke regresjon på lommeregneren til å finne funksjonsuttrykk som tilnærmet beskriver praktiske sammenhenger

9h kjenne begrepene gjennomsnittlig og momentan vekst, kunne finne tilnærmede verdier for den momentane veksten ved regning, kunne bruke lommeregneren til å finne momentan vekst og kunne tolke momentan vekst i praktiske situasjoner

9i kjenne til hvordan arealet under en funksjonsgraf kan tilnærmes med rektangler, kunne bruke lommeregneren til å beregne slike arealer og kunne tolke disse arealene i praktiske situasjoner

11.5 Kompetansemål etter Vg1T – Kunnskapsløftet

Tall og algebra

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- tolke, bearbeide og vurdere det matematiske innholdet i ulike tekster
- bruke matematiske metoder og hjelpemidler til å løse problemer fra ulike fag og samfunnsområder
- regne med potenser med rasjonal eksponent og tall på standardform, bokstavuttrykk, formler, parentesuttrykk, rasjonale og kvadratiske uttrykk med tall og bokstaver og bruke kvadratsetningene til å faktorisere algebraiske uttrykk
- løse likninger, ulikheter og likningssystemer av første og andre grad og enkle likninger med eksponential- og logaritmefunksjoner både ved regning og med digitale hjelpemidler
- omforme en praktisk problemstilling til en likning, ulikhet eller et likningssystem, løse dette og vurdere gyldigheten av løsningen

Geometri

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre rede for definisjonene av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å beregne lengder, vinkler og areal i vilkårlige trekanter
- bruke geometri i planet til å analysere og løse sammensatte teoretiske og praktiske problemer knyttet til lengder, vinkler og areal

Sannsynlighet

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- formulere, eksperimentere med og drøfte enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller
- beregne sannsynligheter ved hjelp av systematiske oppstillinger og bruke addisjonssetningen og produktsetningen
- bruke begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet i enkle situasjoner
- lage binomiske sannsynlighetsmodeller ut fra praktiske eksempler og beregne binomiske sannsynligheter ved hjelp av formler og digitale hjelpemidler

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre rede for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet
- beregne nullpunkter, skjæringspunkter og gjennomsnittlig veksthastighet, finne tilnærmede verdier for momentan veksthastighet og gi noen praktiske tolkninger ved disse aspektene
- gjøre rede for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner og anvende denne regelen til funksjonsdrøfting
- lage og tolke funksjoner som beskriver praktiske problemstillinger, analysere empiriske funksjoner og finne uttrykk for en tilnærmet, lineær funksjon
- bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner

11.6 *Den nasjonale prøven i sin helhet*

11.6.1 Delprøve 1

Utdanningsdirektoratet

Nasjonale prøver 2005

1M, 1MX og 1MY

Matematikk | Grunnkurs | Delprøve 1

Skolenr. .... | Elevnr. .... | Gutt ☐ Jente ☐

Bokmål | 15. april 2005

Du skal prøve så godt du kan å svare på alle oppgavene i dette heftet, selv om noen kan være vanskeligere eller annerledes enn du er vant til. Noen svar skal du regne ut, noen ganger skal du krysse i en rute. Andre ganger skal du skrive eller tegne. Alt du gjør, skal skrives i dette heftet. Når det står ”Kladderute” (rute med stiplede linjer), kan du velge om du vil skrive noe i ruta. Alle andre ruter skal du skrive i.

Du får ikke bruke elevbok eller formelsamling på denne prøven.

LYKKE TIL!

Oppgavene i dette heftet skal løses uten kalkulator

Tid: 30 minutter

2

Oppgave 1

Regn ut:

a) $15{,}1 + 0{,}44 =$ ________

b) $4{,}3 - 0{,}38 =$ ________

c) $3{,}4 \cdot 6{,}22 =$ ________

Kladderute

Oppgave 2

Regn ut:

a) $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} =$ ________

b) $\frac{14}{15} : \frac{5}{2} =$ ________

c) $5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} =$ ________

d) $4 : \frac{2}{5} =$ ________

Oppgave 3

Hva er summen av

a) $6n$ og $3n$ Svar: ________________

b) 2 og $n + 5$ Svar: ________________

c) $3a + a^2$ og $2a - 2a^2$ Svar: ________________

3

Oppgave 4

Skriv et *regneuttrykk* som passer til hver av oppgavene under. Du skal bare skrive selve regneuttrykket, *ikke* sette opp en likning.
Du trenger ikke å regne ut svarene, og heller ikke å sette på benevning.

Eksempel:
Prisen for pærer er 12,90 kr per kg.
Hva koster 2,6 kg?

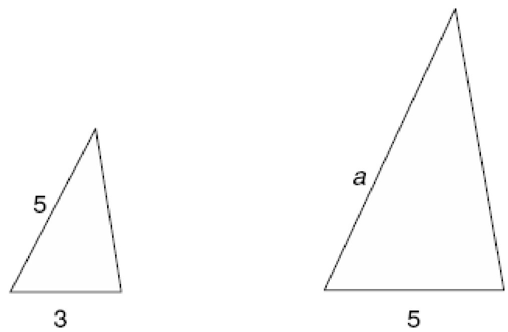
$2{,}6 \cdot 12{,}90$

a) Morten kjøper smågodt til 7,60 kr per hg.
Hvor mye får han for 36 kr?

b) 1 kg pølser koster 79,90 kr.
Hva koster 0,68 kg?

Oppgave 5

Nedenfor er det tegnet to formlike trekanter med mål.



Hvor lang er siden *a*?

Svar: ____________________

Kladderute

4

Oppgave 6

Regn ut og skriv så enkelt som mulig:

a) $x^3 \cdot x^4 =$ ____________________

b) $t^2 + 2t^2 =$ ____________________

c) $3y^6 : y^2 =$ ____________________

d) $4a - (2b + 3a) =$ ____________________

e) $3a + a^2 + 2a - 2a^2 =$ ____________________

f) $\dfrac{x^2 \cdot x^6 \cdot x}{x^3} =$ ____________________

Kladderute

5

Oppgave 7

En maler skal blande grønn og gul maling i forholdet 4 til 7 for å få den fargen hun vil ha. Hun bruker 28 liter grønn maling.
Hvor mange liter gul maling må hun bruke?

- ☐ 11
- ☐ 16
- ☐ 28
- ☐ 49
- ☐ 196

Kladderute

Oppgave 8

Løs likningene:

a) $4x - 2 = 2x + 8$

$x =$ ____________

Kladderute

b) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 4x - 4$

Regn her:

Oppgave 9

a) Skriv en enkel brøk (hele tall i teller og nevner) som er større enn $\frac{5}{6}$ men mindre enn 1.

Svar: ______________________________

b) Skriv et tall som ligger mellom $3 \cdot 10^{-4}$ og $3 \cdot 10^{-3}$.

Svar: ______________________________

Oppgave 10

Hva er mest? Sett kryss i riktig rute:

- ☐ 0,5 liter
- ☐ 8 ml
- ☐ 0,6 dm^3
- ☐ 4 dl

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet

11.6.2 Delprøve 2

Utdanningsdirektoratet

Nasjonale prøver 2005

Matematikk | Grunnkurs | Delprøve 2 **1MX**

Skolenr. .... | Elevnr. .... | Gutt ☐ Jente ☐ Bokmål | 15. april 2005

Du skal prøve så godt du kan å svare på alle oppgavene i dette heftet, selv om noen kan være vanskeligere eller annerledes enn du er vant til. Noen svar skal du regne ut, noen ganger skal du krysse i en rute. Andre ganger skal du skrive eller tegne. Alt du gjør, skal skrives i dette heftet. Når det står ”Kladderute” (rute med stiplede linjer), kan du velge om du vil skrive noe i ruta. Alle andre ruter skal du skrive i.

Du får ikke bruke elevbok eller formelsamling på denne prøven.

LYKKE TIL!

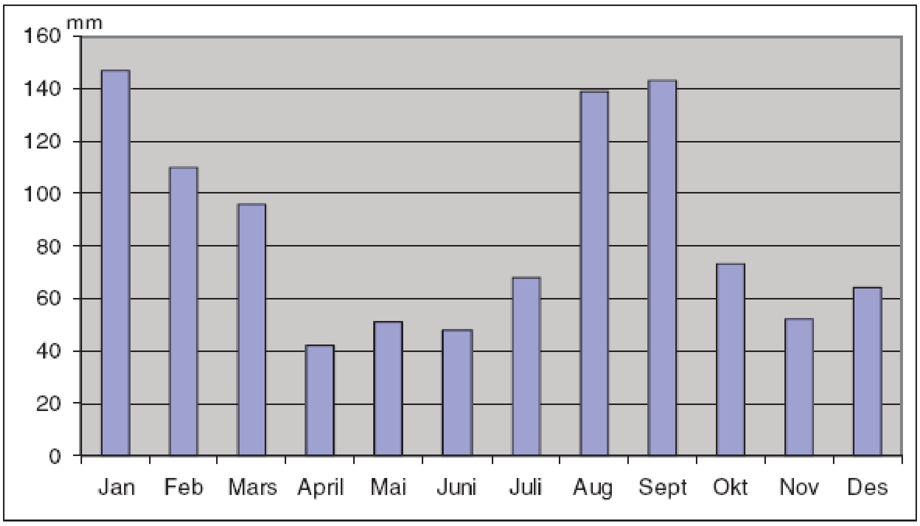
Tillatt hjelpemiddel: Kalkulator

Tid: 90 minutter

2

Oppgave 11

Nedbør i Tromsø i 2002



Bruk diagrammet ovenfor til å finne ut dette:

a) I hvilken måned falt det mest nedbør i Tromsø i 2002?

Svar: ____________________

b) Omtrent hvor mye nedbør ble det målt i mars?

Svar: ____________________

c) Gi et overslag over hvor stor prosentandel av årsnedbøren som falt i juli og august til sammen.

Svar: ____________________

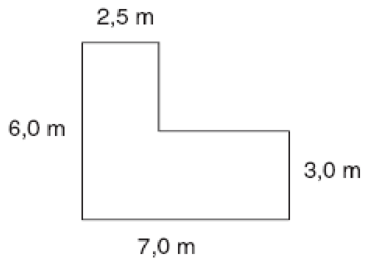
Kladderute

3

Oppgave 12

Else har en L-formet terrasse, se figuren:

Hun ønsker å legge fliser på terrassen.
Flisene skal ligge helt inntil hverandre.
Flisene er kvadratiske med side 25 cm.
Hvor mange fliser trenger hun?



Regn her:

Oppgave 13

På Hardås skole skal 24 elever deles inn i grupper på enten 3, 4 eller 5 elever.
Det skal være minst én gruppe av hver størrelse.

Hvilke ulike kombinasjoner av gruppestørrelser er det er mulig å lage med disse 24 elevene?

Vis de mulige kombinasjonene her:

4

Oppgave 14

Et sylinderformet malingsspann har disse innvendige målene:
Høyde: 17,5 cm
Diameter: 27,0 cm

a) Hvor mange liter maling inneholder et fullt spann?

Regn her:

Et annet spann har halvparten så stor diameter som spannet i oppgave a. Spannene har samme høyde.

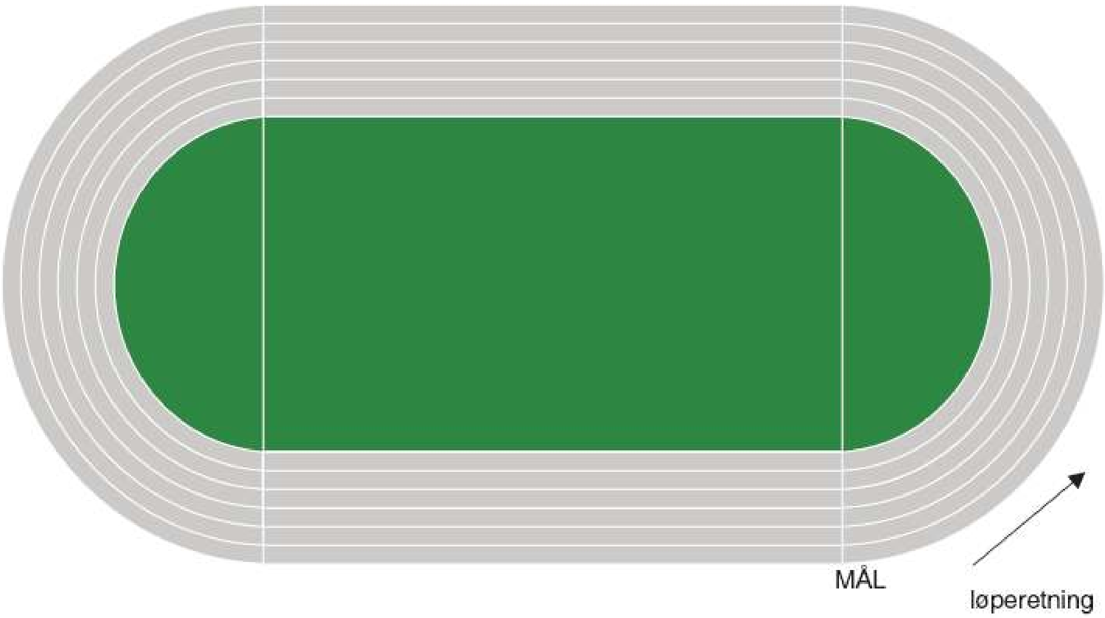
b) Hva er forholdet mellom volumene til de to spannene?

Regn eller forklar her:

5

Oppgave 15

En friidrettsbane har seks løpebaner, som hver er 1,22 m bred.
Banen er satt sammen av to langsider og to svinger (halvsirkler).
Hver langside er 100 m.
Svingen er 100 m lang målt ved lista (innerste linje) langs den innerste løpebanen.
For løperen i indre bane er start og mål på samme sted.



Seks løpere skal løpe 400 meter. De løper i hver sin bane gjennom hele løpet.

a) Regn ut hvor løperen i ytterste bane skal starte.

Regn her:

6

b) Trekk en linje fra sentrum i høyre halvsirkel til startpunktet i den ytre banen. Hvor stor er vinkelen mellom denne linja og mållinja?

Regn og forklar her:

Oppgave 16

En skole i et nytt boligområde hadde følgende utvikling i elevtallet i 1990-åra:

År	1990	1992	1994	1996	1998	2000
Antall elever	102	110	114	119	137	150

a) La 1990 være år 0, og bruk lineær regresjon til å lage en funksjon som er en tilnærmet modell for elevtallet.

Skriv funksjonsuttrykket her: ________________________________

b) Hvor mange elever vil skolen ha i år 2010 etter denne modellen?

Regn eller forklar her:

7

c) Drøft modellens gyldighet, og begrunn påstandene dine.

Drøft og begrunn her:

Oppgave 17

a) Løs denne likningen:

$250 \cdot 1{,}05^{x} = 450$

Svar: ______________________

Kladderute

8

b) Formuler en tekstoppgave som kan løses ved hjelp av likningen ovenfor.

Skriv oppgaven her:

Oppgave 18

Løs denne likningen på *enkleste* måte ved regning:

$(3x + 2)(2x - 1) = 0$

Regn eller forklar her:

9

Oppgave 19

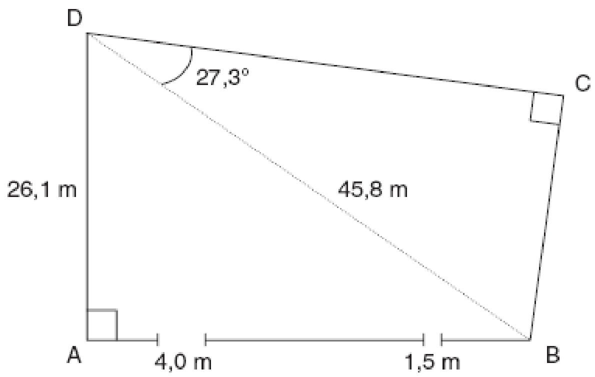
Forklar hvorfor tan v kan ha verdier større enn 1, mens sin v ikke kan være større enn 1.

Forklar her:

10

Oppgave 20

Figuren viser en tomt ABCD som skal gjerdes inn. På siden AB skal det være en 4,0 m bred innkjørsel og en 1,5 m bred port.



a) Hvilken målestokk er figuren tegnet i?

Regn her:

b) Regn ut ved hjelp av trigonometri hvor langt gjerdet blir.

Regn her:

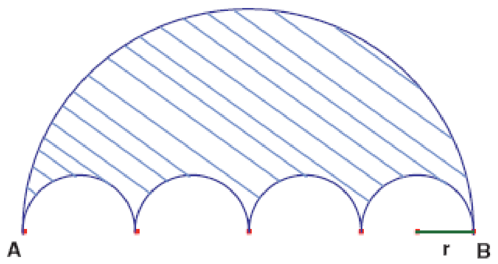
c) Finn vinkel B.

Regn her:

12

Oppgave 21

På figuren nedenfor er de buede kurvene halvsirkler. De små halvsirklene er like store og har radius *r*.



Figuren viser to mulige veier fra A til B: den ene veien langs den store halvsirkelen, den andre veien langs de små sirkelbuene.

a) Hvilken av disse veiene er kortest?

- ☐ Langs den store halvsirkelen
- ☐ Langs de fire små halvsirklene
- ☐ De to veiene er like lange

Regn eller forklar her:

13

b) Regn ut arealet av det skraverte området uttrykt ved *r*.

Regn her:

14

Oppgave 22

a) Lag en skisse av grafen til funksjonen

$y = -x^3 + 2x^2 + 1$

Skisser grafen her:

15

b) Finn koordinatene til toppunkt og bunnpunkt og eventuelle nullpunkter for grafen til denne funksjonen.

Toppunkt: ____________________________

Bunnpunkt: ____________________________

Nullpunkt(er): ____________________________

Kladderute

16