# Masteroppgave i matematikkdidaktikk

*Matematisk modellering*
*med moderne teknologi*
*i videregående skole*

Jostein Solheim Trondal

Masteroppgaven er gjennomført som et ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som sådan. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Veileder: Anne Berit Fuglestad

Universitetet i Agder, Kristiansand

19. mai 2008

## Sammendrag

Denne oppgaven forsøker å svare på problemstillingen «Hvordan kan matematisk modellering formidles i videregående skole med hjelp av moderne teknologi?» To utfordringer lærere har i forbindelse med dette er at kompetansemålene (i læreplanen Kunnskapsløftet) som omhandler digital kompetanse og matematisk modellering er vage og at den teknologiske utviklingen stadig går raskere. Forskning på bruk av teknologi i matematikkundervisningen har til nå ikke gitt oss noe teoretisk grunnleggende rammeverk for å kunne si på generelt grunnlag hvordan slik undervisning bør gjennomføres. En konsekvens av dette er at det er opp til lærere som leser denne oppgaven å vurdere hvorvidt metodene som beskrives kan brukes i deres undervisning. Oppgaven presenterer en prosessbeskrivelse av matematisk modellering der stegene i prosessen både kan brukes til å gjennomføre undervisning, samt som en normativ definisjon på elevers delkompetanser i matematisk modellering. Siden denne måten å bruke matematikk på tar mye tid, argumenteres det for en alternativ eksamensform i forhold til tradisjonelle prøver der elevene får anledning til å bruke flere uker i stedet for noen timer. For å håndtere den teknologiske utviklingen i en langsiktig planlegging av matematikkundervisningen, foreslås det å fokusere på teknologiske prinsipper i motsetning til å fokusere på spesifikke systemer som før eller siden blir utdatert. For å forstå hvordan teknologi endrer samfunnets oppfatning av matematikk som begrep er det nyttig å se hvordan dette har skjedd gjennom historien. Oppgaven presenterer hvordan tre teknologiske prinsipper kan nyttes i undervisning av matematisk modellering: CAS (Computer Algebra Systems), regneark og filmkamera. Det vises eksempler på hvordan CAS kan brukes til å løse diverse likninger og differensiallikninger symbolsk og numerisk. Det demonstreres også hvordan regneark kan brukes til å løse differensiallikninger numerisk vha Eulers metode. Rullefelt blir brukt for å tilrettelegge for større grad av interaktivitet i utforsking av matematiske modeller i regneark. Det gjøres greie for hvordan man kan filme eksperimenter og hente ut data om posisjon og tid, med en analyse av hvordan man håndterer målefeil som bl.a. perspektivforskyvning og tønneforvrengning. En kort undervisningsøkt om modellering på fire timer blir presentert. Slutten av oppgaven består av en rekke problemstillinger som kan løses vha metodene beskrevet i oppgaven.

## Summary

This masterthesis tries to answer the following problem: "How can mathematical modelling be taught in upper secondary school with the aid of modern technology?" Two challenges teachers meet in connection with this is that the goals in the current national curriculum (Kunnskapsløftet) that deals with computer competence and mathematical modelling are vaguely defined, and that the technological development goes faster and faster. Research on the use of technology in mathematics education has still not given us a basic framework that can be used to say, on general terms, how such education should be done. A consequence of this is that it is up to the teacher who reads this thesis to consider whether the methods described can be used in their own teaching. The thesis presents a description of mathematical modelling as a process where the steps in the process can be used both as a teaching tool and as a normative definition of subcompetences in mathematical modelling. Because this method of using mathematics takes a lot of time, it is argued that an alternative form of examination should be used instead of the traditional test, where students are allowed to use several weeks instead of a few hours. To handle the technological development in a long term planning of mathematics education, it is proposed to focus on technological principles in opposition to focusing on specific systems that sooner or later become outdated. To understand how technology alters the common conception of mathematics, it is useful to study how this has happened throughout history. The thesis presents how three technological principles can be used in the teaching of mathematical modelling: CAS (Computer Algebra System), spreadsheet and filmcamera. Examples are shown of how to use a CAS to solve various (differential) equations symbolically and numerically. It is also demonstrated how a spreadsheet can be used to solve differential equations numerically with Eulers method. Scrollbars are utilized to support a greater degree of interactivity in the exploration of mathematical models with spreadsheets. Accounts are made of how to film experiments and extract data on position and time, with an analysis of how to deal with measuring errors caused by perspective and barrel distortion. A short lecture about modelling lasting four hours is presented. The end of the thesis consists of a series of problems that can be solved with the methods described in the thesis.

## Forord

Målet mitt med denne oppgaven har vært å kombinere noe av min kompetanse i datateknikk med matematikkdidaktikk. Dette har ført til en litt utradisjonell oppgave, men forhåpentligvis en oppgave som har praktisk nytte i undervisningen.

Jeg vil gjerne rette en stor takk til min veileder Anne Berit Fuglestad. Hennes konstruktive kritikk i veiledningsmøtene har holdt meg på rett kjøl gjennom hele prosessen. Jeg vil også takke Olav Nygaard og Leiv Storesletten for gode råd og tips underveis. Det har tatt lengre tid enn beregnet fra jeg startet arbeidet med oppgaven til jeg ble ferdig. Det er ikke lett å få tid til alt når man foreleser i studiumet man selv tar. Så jeg vil takke instituttleder Veslemøy Johnsen for fleksibilitet og forståelse i den situasjonen.

Jostein Solheim Trondal
Kristiansand, 19. mai 2008

> Computers should be used only where the learning and the handling of mathematical ideas can be organized better. Once, a colleague expressed this very nicely: "If it isn't necessary to use the computer, it is necessary not to use it."
>
> Hans-Wolfgang Henn

# Innhold


**1 Innledning** **1**

1.1 Idé . . . . . 1
1.2 Motivasjon . . . . . 1
1.3 Problemstilling . . . . . 2
1.4 Avgrensning . . . . . 2

**2 Skolen i dag** **4**

2.1 Den teknologiske utviklingen . . . . . 4
2.2 Offentlige føringer for teknologi og modellering i skolen . . . . 4
2.3 Grunnleggende utfordringer . . . . . 6

**3 Teorier om teknologi og modellering** **7**

3.1 Pedagogikk og didaktikk . . . . . 7
3.2 'Teori' . . . . . 7
3.3 Forskning på teknologi i matematikkundervisningen . . . . . 9
3.4 Matematisk modellering . . . . . 10
3.5 Malthus' modell . . . . . 11
3.6 Normative og deskriptive modeller . . . . . 14
3.7 Matematisk modellering som regresjon . . . . . 14
3.8 Matematisk modellering som prosess . . . . . 15
3.9 Vurdering av modelleringskompetanse . . . . . 20

**4 Diskusjon** **22**

4.1 Modellering i Kunnskapsløftet . . . . . 22
4.2 Fysikklab . . . . . 22
4.3 Teknologiske prinsipper . . . . . 23
4.4 Teknologi og matematikk gjennom historien . . . . . 24
4.5 Aktuelle teknologiske prinsipper . . . . . 26
4.6 CAS . . . . . 27
4.7 Regneark . . . . . 29
4.8 Eulers metode med regneark . . . . . 33
4.9 Datalogging med kamera . . . . . 38

**5 Praktisk eksempel på modellering med teknologi** **44**

5.1 Bakgrunn . . . . . 44
5.2 Opplegget . . . . . 44
5.3 Intensjoner og erfaringer . . . . . 46

**6 Problemstillinger** 47
6.1 Fritt fall . . . 47
6.2 Fritt fall med luftmotstand . . . 48
6.3 Fritt fall i variabelt tyngdefelt . . . 49
6.4 Ballongbevegelse . . . 50
6.5 Bremselengde . . . 51
6.6 Befolkningsvekst – Malthus' modell . . . 52
6.7 Befolkningsvekst – Verhulsts modell . . . 52
6.8 Befolkningsvekst – Verhulsts generaliserte modell . . . 53
6.9 Andre differensiallikninger . . . 54

**7 Avslutning** 55

**A Vedlegg om Microsoft Excel 2003** 57

**B Vedlegg om Texas Instruments TI-89** 58

**Referanser** 59

**Register** 62

# 1 Innledning

## 1.1 Idé

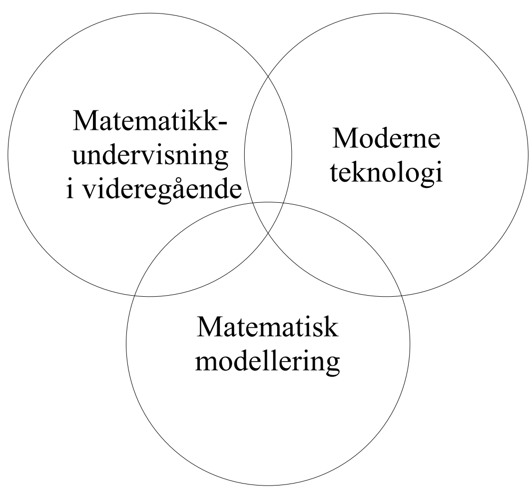
To momenter læreplanen Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006) legger vekt på er digital kompetanse og matematisk modellering. Å bruke digitale verktøy regnes som en av fem grunnleggende ferdigheter, og nevnes eksplisitt i ca en femtedel av kompetansemålene i matematikk. Modelleringsbegrepet er også tydelig tilstede i kompetansemålene, men avhengig av hvordan man definerer begrepet er det vanskelig å si hvor stor del av planen i matematikk som relateres til det.

En del av kompetansemålene er vage. Dette er spesielt tydelig i kompetansemål som eksplisitt er knyttet opp mot digital kompetanse. Målene sier at teknologi skal inn i matematikkfaget, men lite om hvordan dette kan eller bør gjennomføres i praksis. Planen har heller ikke noen entydig definisjon av begrepene «*modell*» og «*modellering*».

Uklarheten rundt momentene digital kompetanse og matematisk modellering i tillegg til den akselererende teknologiske utviklingen, stiller lærere i den videregående skolen overfor en stor utfordring.

## 1.2 Motivasjon

Personlig er jeg motivert til å bidra med nyttig informasjon for å takle denne utfordringen. Det er flere grunner til det: Jeg har dyp kunnskap innenfor datateknologi. Jeg har stelt med data mesteparten av livet på hobbybasis, har en høgskoleingeniørutdanning i datateknikk, og et par års arbeidserfaring




Figur 1: Denne oppgaven analyserer sammenhengen mellom matematikkundervisning i videregående, moderne teknologi og matematisk modellering.

innenfor programmering, databaser, nettverk og datasikkerhet.

Jeg er nå i avslutningen av et masterstudium i matematikkdidaktikk og mener det er nyttig å knytte sammen mine kunnskaper om datateknologi med kunnskaper om formidling av matematikk. De siste åra har jeg også begynt å få litt erfaring i undervisning på videregående og høgskole/universitet, så jeg ser noen av utfordringene lærere i matematikk står overfor. Min målgruppe blir derfor matematikklærere i videregående skole, samt lærere i lærerutdanningen. Det forutsettes at leseren har noe kunnskap om differensiallikninger og kjennskap til numeriske metoder og bruk av regneark.

Et klassisk problem i skolen er hvordan lærere kan motivere elevene til å lære. En tradisjonell måte å gjøre det på er "gulerotmetoden". Når elever spør «*Jammen, lærer, hvorfor i all verden skal vi lære om dette?*», er et vanlig svar at «*Jo, det kommer på prøven!*», og er et lite tilfredsstillende svar. Svaret er kun ment som en ytre motivasjon, og kan føles urettferdig og uforståelig. Å arbeide med matematisk modellering kan elevene selv oppdage hvor viktig og nyttig matematikken er, uavhengig av hva som kommer på neste prøve.

## 1.3 Problemstilling

Med utgangspunkt i figur 1 på forrige side, og plassert i konteksten som er beskrevet til nå, vil problemstillingen til oppgaven være som følger. **Hvordan kan matematisk modellering formidles i videregående skole med hjelp av moderne teknologi?** Siden Kunnskapsløftet definerer teknologi og modellering som en del av matematikkfaget, synes jeg ikke det er særlig nyttig å diskutere *hvorfor* dette er lurt. Hovedfokuset vil derfor ligge på *hvordan* det kan gjøres, men ikke nødvendigvis hvordan det *bør* gjøres.

## 1.4 Avgrensning

Denne masteroppgaven har et omfang på 40 studiepoeng. Gitt den ganske vide problemstilligen, er det derfor nødvendig med en del avgrensninger. Oppgaven forsøker å definere et teoretisk utgangspunkt den praktiske delen kan bygge på. Hoveddelen av det som beskrives som teori i oppgaven er en beskrivelse av hvordan matematisk modellering som prosess kan skreddersys til bruk i skolen, i en teknologisk kontekst. Oppgaven forsøker også å ha praktisk nytteverdi en stund fremover i tid. Dette kan virke som et dilemma da det betyr å gi konkrete, anvendbare, men generelle forslag i en veldig flyktig situasjon.

Jeg vil argumentere for at slike forslag faktisk finnes, og en del av oppgaven i seg selv vil bestå av denne type forslag. Oppgaven har følgende rammer:

**Kunnskapsløftet.** I utgangspunktet var det litt fristende for meg å analysere problemstilligen på det teoretiske nivået over læreplaner. Dette ville blitt for omfattende samtidig som det ville blitt litt for teoretisk i forhold til oppgavens pragmatiske natur. Oppgaven fokuserer på kompetansemål i matematikk som har med modellering og teknologi å gjøre.

**Videregående.** Oppgaven avgrenses til videregående skole. Det er likevel mulig å kunne anvende noe av det som blir beskrevet både i ungdomsskolen, høgskole/universitetsnivå og i lærerutdanningen.

**Matematikk.** Hovedfokuset i oppgaven ligger på matematikk, men det er nødvendigvis viet oppmerksomhet til andre fag. Modellering handler mye om å anvende matematikk på andre fagområder. I skolen vil det mest nærliggende være andre naturvitenskapelige fag som fysikk, kjemi og biologi, men også i økonomi og sammfunnsfag dukker det opp modeller. Differensiallikninger er meget viktige i matematisk modellering. Dette gjenspeiles i oppgaven.

**Modellering.** Det finnes flere definisjoner og oppfatninger av hva en modell er, og hva modellering er. Dette blir diskutert i oppgaven, og det gjøres et spesifikt valg på hva slags definisjon som er nyttig i en didaktisk situasjon.

**Teknologi.** I hoveddelen av oppgaven vil jeg ta utgangspunkt i teknologiske *prinsipper* i motsetning til en eller annen implementasjon av et slikt prinsipp. Eksempelvis er regneark og CAS teknologiske prinsipper, mens Microsoft Excel og TI-89 er implementasjoner av disse prinsippene.

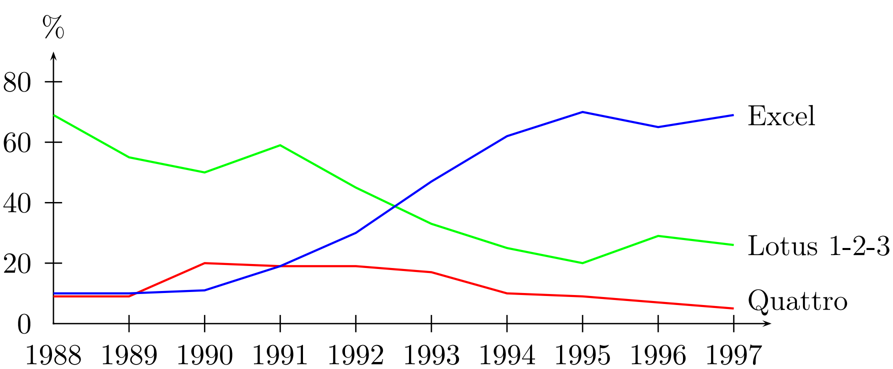
# 2 Skolen i dag

## 2.1 Den teknologiske utviklingen

Mye av den teknologien som omgir oss kjennetegnes av flyktighet. Dette gjelder spesielt datateknologi, som utvikler seg i en voldsom hastighet. Gordon E. Moore observerte tidlig (Moore, 1965) at antallet transistorer per databrikke som gir minimal kostnad per transistor dobler seg omtrent annenhvert år. Dette ble senere populært kalt Moores lov, og har holdt seg gjeldende siden. En konsekvens av dette er at hastigheten på en gjennomsnittlig PC dobles annenhvert år i forhold til prisen. En slik eksponentiell utvikling kan man også se for harddiskstørrelse, minnestørrelse, antall piksler per krone i digitalkameraer, osv.

En annen, mer eller mindre indirekte konsekvens av Moores lov er Bells lov om datamaskinklasser (Bell, 1972) som sier at rundt en gang i tiåret trer det frem en ny, billigere og kraftigere klasse datamaskin som delvis eller helt erstatter tidligere klasser datamaskiner. Et vanlig eksempel er overgangen fra stormaskiner til privateide datamaskiner, eller fra laptoper til små, håndholdte datamaskiner.

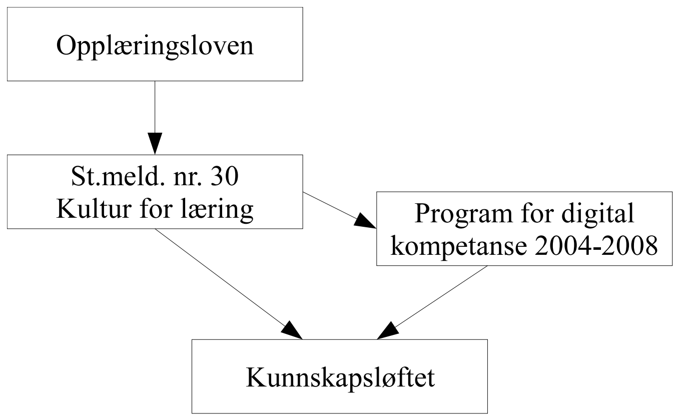
Denne evolusjonen av maskiner, i vekselvirkning med sosiale trender påvirker hvilke maskiner, operativsystemer og programmer som blir brukt, og fører igjen til at kunnskap om disse fort blir utdatert. Som et eksempel kan vi se på trenden for bruk av regneark. Tre av de mest populære regnearksystemene som har kjempet mot hverandre er Quattro, Lotus 1-2-3 og Excel. Se figur 2 (Liebowitz, 2002).




Figur 2: Tre regnearksystemers prosentandel av markedet fra 1988 til 1997 målt i antall solgte enheter.

## 2.2 Offentlige føringer for teknologi og modellering i skolen

En matematikklærer som jakter på offisiell informasjon om hvordan hun eller han skal forholde seg til moderne teknologi og modellering i skolen, begynner neppe med opplæringsloven (Kunnskapsdepartementet, 1998), men kanskje




Figur 3: Noen styrende dokumenter i forhold til nåværende læreplan.

med St.meld. nr. 30 Kultur for læring (Regjeringen Bondevik II, 2004). Der beskrives et rammeverk for læreplaner og skolen. På s. 32 har vi:

> *Departementet mener at de mest sentrale grunnleggende ferdighetene er:*
> - *å kunne uttrykke seg muntlig*
> - *å kunne lese*
> - *å kunne uttrykke seg skriftlig*
> - *å kunne regne*
> - *å kunne bruke digitale verktøy*

Stortingsmeldingen nevner altså «*å kunne bruke digitale verktøy*» som en av de mest sentrale grunnleggende ferdighetene man satser på i en kultur for læring. I Program for digital kompetanse 2004-2008 (Utdannings- og forskningsdepartementet, 2004) beskrives en plan for IKT-utvikling i utdanningen disse dager. Men man må gå til læreplanen Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006) for å få presisert hva hver grunnleggende ferdighet betyr for hvert fag. I læreplanens matematikkdel er det således definert hva som menes med «*å kunne bruke digitale verktøy*» i matematikkfaget:

> *Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handler om å bruke slike verktøy til spill, utforskning, visualisering og publisering. Det handler også om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemidler til problemløsning, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med passende hjelpemidler, og være kritisk til kilder, analyser og resultater.*

Det er først her vi treffer på modelleringsbegrepet i forhold til de styrende dokumentene i figur 3 på forrige side. Begrepet er videre brukt i konkrete kompetansemål. Her finner vi mål som «*bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging*» og «*løse likninger, ulikheter og likningssystemer av første og andre grad, både ved regning og med digitale hjelpemidler*».

Det nærmeste vi kommer en definisjon på modellering er i beskrivelsen av emnet Kultur og Modellering:

> *Modellering er en fundamental prosess i faget, der utgangspunktet er noe som virkelig finnes. Dette blir beskrevet matematisk med en modell som blir bearbeidet, og resultatene av den blir tolket i lys av den opprinnelige situasjonen.*

### 2.3 Grunnleggende utfordringer

Den raske teknologiske utviklingen og den nåværende læreplanen kan hver for seg gi utfordringer til læreren.

Det kan være vanskelig å stadig omstille seg til nye tekniske infrastrukturer, nye maskiner, nye (versjoner av) operativsystemer og programvare, nye kalkulatorer, projektorer og trykkfølsomme tavler. I det man er fortrolig med og stoler på en av disse teknologiene, kan den bli byttet ut med en ny.

Utdanningsforbundet mener at Kunnskapsløftet inneholder vage og upresise kompetansemål (Utdanningsforbundet, 2005). Dette er jeg enig i. Når det f.eks. står «*bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging*», er det opp til læreren å velge hvilke verktøy som skal brukes og hvordan de skal brukes. Jeg vil tippe at det nettopp er den teknologiske utviklingen som er en av årsakene til at læreplanen er så vag som den er. Det er ikke lurt å knytte kompetansemål opp mot spesifikke systemer, ellers måtte læreplanene endres i takt med teknologien. Men læreren sitter altså igjen med ansvaret for å velge verktøy og fremgangsmåte, noe som kan være en utfordring.

Når læreren leser om matematiske modeller og modellering i læreplanen, vil han eller hun sannsynligvis ha en oppfatning av hva disse begrepene betyr på forhånd. Modellering kan gjennomføres på mange forskjellige måter. Gitt den individuelle lærers eller lærebokforfatters oppfatning av hva dette betyr i praksis, resulterer det i at modelleringsprosessen kan ta forskjellige former fra skole til skole.

Det er derfor relevant i denne oppgaven å prøve å si noe om hvordan lærere kan forholde seg den raske utviklingen. I tillegg vil jeg belyse modelleringsbegrepet: Hvordan det kan oppfattes, og hvordan det muligens bør oppfattes og benyttes i skolen.

# 3 Teorier om teknologi og modellering

## 3.1 Pedagogikk og didaktikk

De fleste lærere, håper jeg, er innstilt på å gi en best mulig utdanning til sine elever. En kilde til inspirasjon er generelle læringsteorier fra pedagogikk. I løpet av de siste tiårene ser vi ulike fremtredende teorier. Et perspektiv er å ta utgangspunkt i det som først og fremst skjer inne i hodet på eleven (kognitive teorier). Et annet er å betrakte læring sosiokulturelt, som *fokuserer på læring som en kollektiv deltakende prosess med vekt på kontekst og interaksjon* (Dysthe, 2001). En god oversikt over kognitive og sosiale teorier presenteres i Bråten (2002). I denne oppgaven kommer jeg ikke til å ta tak i disse generelle læringsteoriene.

Utover generelle teorier om læring, har vi kunnskap fra matematikkdidaktikk. Det relevante for denne oppgaven vil være teorier som ser på forholdet mellom teknologi og matematikk, samt mellom modellering og matematikk. Det på nevnes her at disse emnene overlapper en del siden de til dels er gjensidig avhengig av hverandre. Hva finnes det så av resultater fra forskningen på teknologi i matematikkdidaktikk, i form av konkrete, relevante og velbegrunnede råd?

## 3.2 'Teori'

Før jeg går inn på det, vil jeg først si litt om ordet 'teori'. Gjennom forskning håper man å finne kunnskap eller forståelse av et fenomen. Denne forståelsen prøver man så å beskrive med en 'teori'. I dagligtalen kan vi godt si «Jeg har en teori om at Nilsen har urent mel i posen.» Denne bruken av ordet 'teori' trenger ikke bety mer enn varierende grad av spekulasjon. I forskningen forbeholder man ordet 'hypotese' til det å spekulere, mens bruken av ordet 'teori' i forskning har en betydning som avhenger av hva slags forskningsmetode man bruker.

I forskning på naturfag betyr 'teori' en matematisk eller logisk forklaring på sammenhengen mellom naturlige fenomener. I tillegg må teorien tilfredsstille to krav. Det ene er at teorien må være i stand til å forutsi detaljer om fenomenets fremtidige oppførsel gitt fenomenets relevante betingelser i utgangspunktet. Dette kravet fører til at teorien gir oss en viss form for nytteverdi. Det andre kravet er at teorien må kunne testes gjennom eksperimentering. Hvis resultatet av eksperimentet er slik teorien har forutsagt, gir det oss styrket tro på at teorien representerer kunnskap. Hvis resultatet derimot strider mot det teorien spår, må teorien forkastes eller justeres. Dette kravet gjør teorien mer og mer etterrettelig jo lengre den har motstått forsøk på å vise at den er feil gjennom eksperimentering. Til sammen, gir begge kravene oss grunn til å påstå at vi har skaffet oss kunnskap om fenomenet. Denne type teori fungerer svært bra i naturfagene. Nytteverdien har vi utallige eksempler på i form av teknologi vi bruker for å øke vår livskvalitet.

Denne definisjonen av 'teori' er mindre optimal til bruk på "mykere" fagområder som psykologi og samfunnsfag. En grunn til det er at fenomener i disse fagområdene ofte er meget sammensatte, samtidig som det er vanskelig å isolere aspekter av fenomener for å forstå dem bedre. Slike fenomener ofte har mange, sammensatte og tildels uoversiktlige variable. Dette trenger ikke i prinsippet være et problem, men det kan gjøre det vanskelig å avdekke svar med en grad av klarhet vi er vant med fra naturfagene.

Det som skjer i en skole handler veldig mye om hva som skjer mellom mennesker. Det er da relevant å bruke forskningsmetoder som er tilpasset akkurat dette. Mertens (2005, s. 229) gir følgende beskrivelse av kvalitativ forskning:

> *Qualitative research is a situated activity that locates the observer in the world. It consists of a set of interpretive, material practices that make the world visible. These practices transform the world. They turn the world into a series of representations, including field notes, interviews, conversations, photographs, recordings, and memos to the self. At this level, qualitative research involves an interpretive, naturalistic approach to the world. This means that qualitative researchers study things in their natural settings, attempting to make sense of, or to interpret, phenomena in terms of the meanings people bring to them.*

Vi ser at kvalitativ forskning er fundamentalt forskjellig fra naturfagsforskning. Dette betyr at kunnskap som skaffes til veie gjennom kvalitativ forskning er av en annen type. Ordet 'teori' i kvalitativ forskning har derfor en annen betydning enn ordet 'teori' i naturfag. I følge Scheaffer et al. (2007, s. 45) har kvalitativ forskning innenfor matematikkundervisning vært dominerende de siste par tiårene. Resultater fra denne kvalitative forskningen består i følge Mertens (2005, s. 230) av forskjellige typer empirisk materiale: "*case study; personal experience; introspection; life story; interview; artifacts; cultural texts and productions; observational, historical, interactional, and visual texts*". Dette materialet blir analysert og i hovedsak brukt for å beskrive en mer eller mindre unik situasjon. Ser man likhetstrekk mellom mange slike situasjoner, kan man danne en 'teori'. En 'teori' i matematikkdidaktikk trenger ikke bestå av mer enn en samling av definisjoner på hva forskjellige ord betyr, samt hvordan man kan bruke disse ordene for å diskutere et aspekt i læring av matematikk. Hvis overføringsverdien av denne type forskning skal være høy, bør forskeren ha tatt i bruk såkalt 'tykk beskrivelse' og utført mer enn en studie av noenlunde samme situasjon (Mertens, 2005, s. 256). Tykk beskrivelse består i å registrere og presentere alle aspekter i en situasjon som kan være relevant for den som leser om det og prøver å plassere resultatene i en annen kontekst. Om en lærer leser om en undersøkelse på en annen skole, er det altså opp til vedkommende å vurdere hvilke av resultatene som kan overføres til sin egen skole.

En konklusjon av dette er som følger. Forskere har et stort ønske om å finne teorier som er mest mulig generelle. Men, det er vanskelig å finne disse teoriene siden det settes et krav om at mottakeren av kvalitativ forskning må tolke resultater inn i sitt eget virke. Et konkret eksempel på dette beskrives i neste kapittel.

Konklusjonen er meget relevant for denne oppgaven, da den ikke beskriver noen egen uttesting av metoder utover en firetimers økt med høgskolestudenter (se kapittel 5 på side 44). Resultatene fra denne uttestingen kan ikke brukes som noen begrunnelse for at metodene som ble brukt i tilfellet var optimale; Lærere som leser om disse metodene må selv vurdere om disse vil fungere i sine klasser.

Jeg har derfor konsentrert meg i denne oppgaven om å beskrive metoder som potensiellt kan ha nytteverdi i skolen. Mange av idéene er hentet fra annen forskning, noen av idéene er mine egne, og kombinasjonen av dem mener jeg kan være et nyttig bidrag til undervisning av matematisk modellering med teknologi i videregående skole.

Dette arbeidet plasserer seg på denne måten i et pragmatisk forskningsparadigme som beskrevet i Mertens (2005, s. 26-27); Min holdning til forskning i matematikkdidaktikk er farget av følgende sitat:

> *. . . the pragmatist is free to "study what interests you and is of value to you, study it in the different ways that you deem appropriate, and utilize the results in ways that can bring about positive consequences within your value system" (Tashakkori & Teddlie, 1998, s. 30).*

### 3.3 Forskning på teknologi i matematikkundervisningen

Fra forskning på matematikkdidaktikk, har det i de siste tiårene kommet en del teorier som prøver å si noe om forholdet mellom teknologi og matematikkundervisning. Empirisk forskning i dette fagfeltet består av veldig mye lokal uttesting av nye teknikker, men har på grunn av den komplekse situasjonen ofte en uklar overføringsverdi og etterrettelighet (i den grad man ønsker å påstå at teknikkene fører til bedre læring). Forskningen gir derfor et svakt grunnlag for å kunne gi generelle råd til lærere om hvordan teknologi best kan nyttes i matematikkundervisningen. At dette er et vanskelig problem, gjenspeiles i en metastudie (Lagrange, Artigue, Laborde, & Trouche, 2001) på IT i undervisning fra 2001: Fra en analyse av 662 forskningsartikler fra 1994 til 1999, står bl.a. følgende i konklusjonen:

> *Technical presentations and reports on innovative classroom use make the bigger part of this corpus. Because they look at the new applications appearing day after day, these papers are potentially interesting contributions on the use of up to date technology. On*

> *the other hand, the qualitative study of papers in the CAS subcorpus shows that the ideas in these presentations and reports are generally weakly supported by reflection and experimentation and cannot address the complexity of the educational situations. ... the difficult integration can be seen through this picture: innovations present a wealth of ideas and propositions whose diffusion is problematic; research struggles to tackle the complexity of the integration of evolving technologies.*

I denne masteroppgaven har jeg derfor en stor utfordring: Jeg *vil* gjerne prøve å komme med generelle, nyttige forslag til hvordan teknologi kan brukes i matematikkundervisningen. Jeg vil begrunne forslagene med teorier som til nå finnes i matematikkdidaktikk, men jeg mener at mange av disse argumentene har en lav grad av etterrettelighet: Man trenger rett og slett mer empirisk forskning for å eventuellt klargjøre om forslagene er gode. Sitatet fra metastudien sier at flesteparten av artiklene handler om uttesting av nye teknikker. I denne oppgaven kommer jeg til å presentere en del slike teknikker som *spesifikke* forslag, selv om etterretteligheten kan være tildels svak eller manglende: Jeg mener, selv om teknikkene har gitt positive erfaringer i liten skala, i en relativt unik situasjon, kan man ikke nødvendigvis trekke slutningen at teknikken har nytteverdi i en annen situasjon. Det er det opp til den enkelte lærer å vurdere.

Etter dette, noe negative utgangspunktet, mener jeg at forskning og utviklingsarbeid tross alt har kommet fram til mange gode idéer om hvordan matematisk modellering og moderne teknologi kan brukes i skolen.

## 3.4 Matematisk modellering

Hva er matematisk modellering? Og hva er en matematisk modell? Disse begrepene er helt sentrale i denne masteroppgaven, og en kort redegjørelse er derfor viktig. I et forsøk på å forklare hva disse begrepene betyr, vil jeg først starte med en generell, uformell definisjon og forklare hva den betyr vha et konkret eksempel. Jeg vil i etterkant komme med en mer formell redegjørelse.

> *En matematisk modell er et forsøk på å forstå en del av virkeligheten ved hjelp av matematikk.*

Fordelene med denne definisjonen er at den er veldig kort, lett å forstå, og er generell nok til å dekke det aller meste av det vi mener med matematisk modell. Men det er stort sett kun det den er god for. For å få en forståelse av hva som egentlig menes med definisjonen, trenger vi en utvidet forklaring.

'Matematisk modellering' er arbeidet med å utvikle en 'matematisk modell'. I definisjonen ser vi en kobling mellom matematikk og virkeligheten, og dette er helt sentralt. Matematisk modellering har mye å gjøre med anvendt matematikk, og er et redskap som brukes for å grave frem kunnskap i fagfelt som fysikk, kjemi, biologi, datateknikk, økonomi, sosiologi, økologi, medisin og politisk vitenskap. Definisjonen vil jeg belyse ytterligere ved å knytte den til et konkret eksempel:

### 3.5 Malthus' modell

Et kjent, klassisk eksempel på en matematisk modell kommer fra økologi. Thomas Robert Malthus (1766-1834) var opptatt av befolkningsvekst og overpopulasjon. Relatert til den uformelle definisjonen kan vi si at Malthus' modell er et forsøk på å forstå befolkningsvekst ved hjelp av matematikk.

Malthus' utgangspunkt for dette forsøket er en *modellforutsetning.* Forutsetningen er en antagelse om faktiske forhold. Det er naturlig å anta at befolkningsveksten på en eller annen måte er avhengig av befolkningsstørrelsen. I Malthus' tilfelle antar han at *befolkningsveksten er proporsjonal med størrelsen på befolkningen.* Denne forutsetningen kan formuleres matematisk. Hvis vi kaller størrelsen på befolkningen for $N$, kan vi skrive:

$$\text{Befolkningsvekst} = k \cdot \text{Befolkningsstørrelse}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{1}$$

der $t$ står for tid, $k$ er konstant og $N > 0$ er en funksjon av tiden $t$.

Differensiallikninger som denne er veldig vanlige i matematisk modellering, og dukker ofte opp i modellforutsetninger. Grunnen til det er at mange av de delene av virkeligheten vi prøver å forstå er ting som endrer seg over tid. Om vi er i stand til å beskrive endringssammenhenger med ord, er det ofte mulig å sette opp en tilsvarende differensiallikning.

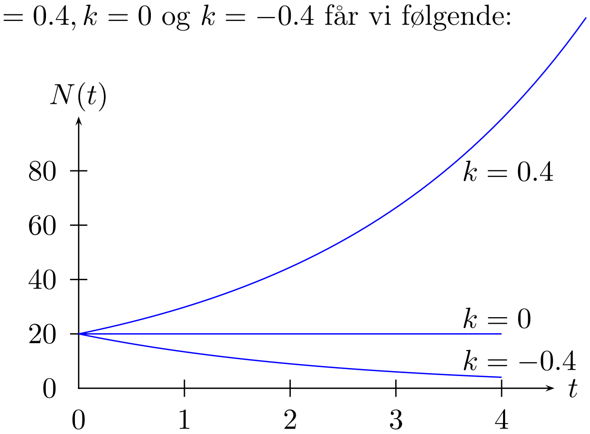
Den klassiske, analytiske måten å løse likning (1) på er som følger:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{N}\, dN &= \int k\, dt \\ \ln N &= kt + c \\ N(t) &= Ce^{kt}\end{aligned}$$

Generelle løsninger som dette gjøres som regel mer spesielle vha *initialverdier.* I modeller som har med tid å gjøre, er det vanlig å definere naturlige nøkkelverdier ved $t = 0$. En naturlig nøkkelverdi her er hvor stor befolkningen er ved $t = 0$. Hvis vi kaller denne for $N_0$ så ser vi at

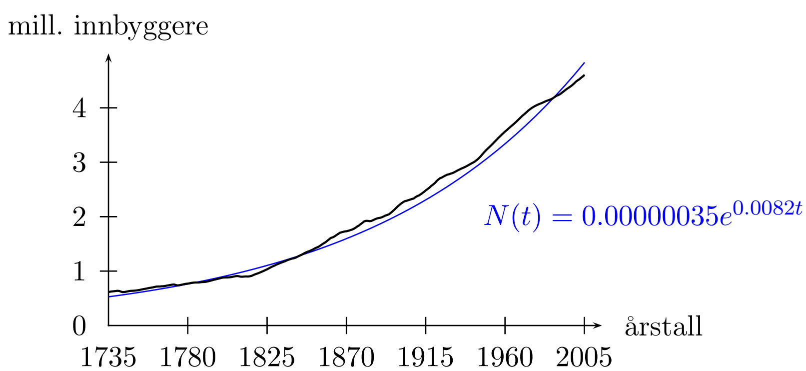
$$N(0) = N_0 \quad \Rightarrow \quad Ce^{k0} = N_0 \quad \Rightarrow \quad C = N_0 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{kt}$$

Det er nå interessant å se grafen til denne funksjonen, men for å gjøre det må vi velge verdier for *parameterne* $N_0$ og $k$. Hvis vi setter $N_0 = 20$ og plotter for $k = 0.4, k = 0$ og $k = -0.4$ får vi følgende:




Dette ser lovende ut. En positiv $k$ gir eksponentiell vekst, en $k = 0$ gir ingen endring i befolkningen og en negativ $k$ fører til at befolkningen dør ut. Vi kaller $k$ for en vekstfaktor. At vekstfaktoren er valgt lik 0.4 eller $-0.4$ her er kun for å visualisere en vilkårlig positiv og negativ verdi. Om modellen skal brukes på reelle data, må den teoretiske modellen plottes samtidig med reelle data, og parameterene tilpasses slik at vi får størst mulig overensstemmelse mellom teori og virkelighet. Analyserer vi $N(t)$ nærmere vil vi se at den vokser uten begrensning når $k > 0$, noe som virker urimelig. Grunnen til at det er urimelig er fordi det som regel finnes fysiske begrensninger på hvor stor en befolkning kan bli, f.eks. matforråd og størrelsen på det geografiske området befolkningen har anledning til å befinne seg i.

Slike begrensninger fører til at en befolkning ikke vokser eksponentiellt i det uendelige, og det pleier også å vise seg når vi ser på statistikk hentet fra forskjellige befolkninger. Grafen under viser størrelsen på norges befolkning fra 1735 til 2005. I tillegg ligger grafen til malthus' modell med $N_0 = 0.00000035$ og $k = 0.0082$.



Vi ser tydelig en eksponentiell tendens her, men hvor lenge vil det holde? Kan vi se en antydning til oppbremsing i utviklingen? Thomas Malthus visste at modellen hans kun var nyttig i en begrenset tidsperiode. En annen vitenskapsmann, Pierre François Verhulst (1804-1849) la til en ekstra modellforutsetning for å ta hensyn til dette, noe som resulterte i en mye bedre modell for befolkningsvekst. Mer om Verhulsts modell blir beskrevet i kapittel 6.7 på side 52. La oss nå gå tilbake til definisjonen og se den i forhold til eksempelet:

$$\text{En matematisk modell er } \overbrace{\text{et forsøk på}}^{\text{(i)}}\ \overbrace{\text{å forstå}}^{\text{(ii)}}\ \overbrace{\text{en del av}}^{\text{(iii)}}$$
$$\underbrace{\text{virkeligheten}}_{\text{(iv)}}\ \underbrace{\text{ved hjelp av matematikk}}_{\text{(v)}}.$$

(i) Modellen er kun et *forsøk* på å forstå virkeligheten, og den har en ulempe med at den oppfører seg urealistisk når $t$ blir stor nok. Matematisk modellering innebærer ofte å gjøre mange slike forsøk der vi stadig endrer modellforutsetningene slik at vi får resultatet vi er ute etter. For å vite når vi har fått resultatet vi er ute etter må modellen testes ved å sammenlikne hva modellen forutsier med data som samles fra virkeligheten.

(ii) Et mål med modellen er å få en bedre forståelse av et eller annet fenomen. Hvis det er veldig stor sammenheng mellom data vi har målt og data som faller ut fra modellen, er det vanlig å si at modellen *forklarer* dataene.

(iii) En matematisk modell gir sjelden en fullstendig forklaring på fenomenet man studerer, og er ofte kun gyldig for et begrenset utvalg av verdier på parametere i modellen; Det gir ingen mening i Malthus' modell å vurdere $N < 0$ siden vi ikke kan ha negativ befolkning. En matematisk modell kan derimot ofte gi gode *kvalitative* resultater; Det er f.eks. mulig å vise at Malthus' modell gir konstant doblingshastighet.

(iv) Det er viktig å være klar over at matematiske modeller ikke er identiske med virkeligheten, men kun et forsøk på å forklare hvordan en del av virkeligheten oppfører seg i større eller mindre grad. Når man hører om «de fysiske lovene» er det i de fleste tilfeller snakk om idealiseringer og approksimasjoner, som ofte er gode nok.

(v) Det må også presiseres at matematisk modellering innebærer mer enn det vi har sett i eksempelet. Differensiallikninger kan også løses numerisk med datakraft, og det er ofte den eneste måten å finne løsningen på. Matematiske modeller er også mer enn differensiallikninger. En matematisk modell trenger ikke være mer avansert enn en vanlig likning, men kan gjerne innebære matriser, stokastiske (tilfeldige) variabler eller integraler.

## 3.6 Normative og deskriptive modeller

Det er vanlig å skille mellom to fundamentalt forskjellige matematiske modeller. Malthus' modell, som beskrevet i forrige kapittel, er et eksempel på en såkalt deskriptiv modell. I deskriptive modeller, tar man utgangspunkt i ett eller annet fenomen man ønsker å forstå ved hjelp av matematikk. Man forsøker gjerne som forsker å holde seg objektiv eller nøytral til fenomenet, og ønsker i første rekke kun å studere hvordan det oppfører seg.

Normative modeller derimot brukes når man vil definere en regel som sier hvordan man skal systematisere eller holde orden på ting ved hjelp av matematikk. Eksempler på slike modeller er utregning av poengsummen i hopprenn eller i friidrett, Richters skala for jordskjelv eller Beauforts skala for vindstyrke. Ingen av disse modellene forteller oss noe vesentlig om virkeligheten, men de er til hjelp med å holde orden. De normative modellene konstruerer vi altså etter eget godt befinnende. Det finnes ikke noe i naturen som sier oss at modellen for utregning av poeng i lengdehopp er den riktige måten å gjøre det på. Vi har bare funnet det praktisk å gjøre det slik. Deskriptive modeller er imidlertid mye mer styrt av fenomenene selv.

Vi kan si at deskriptive modeller utvikles gjennom et detektivarbeid der fenomenet under utforskning styrer hvordan modellen blir konstruert. I normative modeller er det vi selv som velger hvordan modellen som skal systematisere virkeligheten skal se ut. Deskriptive modeller brukes altså for å skaffe kunnskap om virkeligheten, mens normative modeller brukes for å systematisere virkeligheten.

Jeg mener det er mye mer motiverende å arbeide med deskriptive modeller, da de nettopp kan gi kunnskap om virkeligheten som omgir oss. Normative modeller er absolutt nyttige, men de kan ikke gi oss mer kunnskap enn det vi dytter inn i dem. Fokuset i denne oppgaven vil derfor ligge på deskriptive modeller.

## 3.7 Matematisk modellering som regresjon

Moderne kalkulatorer har mange fine innebygde verktøy for behandling av data. Blant dem har vi regresjonsverktøy som enkelt kan tilpasse en rekke forskjellige funksjoner til et sett med koordinatpar. Dette er vel og bra. Det som ikke er vel og bra er at noen lærere og forskere har en holdning der regresjon betraktes som et synonym til modellering. Galbraith (2007) beskriver dette som et stadig mer synlig fenomen. Han refererer til en oppgave som gikk ut på å tilpasse et sett med data av befolkningsvekst til mange forskjellige typer funksjoner med totalt manglende fokus på hva som egentlig foregikk i datasettet. Det var kun regresjon, og ingen diskusjon om hvordan og hvorfor befolkninger øker i antall.

Regresjon er et nyttig verktøy, men å kalle det modellering er å strekke det meget langt. Modellering handler om å prøve å se det store bildet, ikke å henge seg opp i tekniske verktøy som tilfeldigvis er tilgjengelig på kalkulatoren.

### 3.8 Matematisk modellering som prosess

Det er flere måter å definere matematisk modellering på som en stegvis prosess. Et par definisjoner gis i hhv Giordano, Weir, og Fox (2003) og Storesletten og Nygaard (2005). Disse er helst sirkulære, og kan inneholde flere av følgende momenter: Man starter med et fenomen man vil modellere, skaffer data fra fenomenet, forenkler og/eller idealiserer situasjonen, identifiserer relevante sammenhenger, formulerer en matematisk sammenheng, arbeider med, og utleder den matematiske sammenhengen, tolker resultatene og ser om de gir informasjon om det opprinnelige fenomenet, utføre eksperimenter med fenomenet for å sjekke om det oppfører seg som modellen forutsier, akseptere/revurdere/forkaste den matematiske modellen.

En slik prosessbeskrivelse er som regel kun en konseptuell skisse av hvordan man rent teknisk knytter sammen virkelighet og matematikk. Det vil si at ofte, så vil arbeidet i en slik prosess gå på kryss og tvers mellom de forskjellige stegene. Man trenger slett ikke arbeide konsekvent etter "planen".

Morten Blomhøy og Tomas Højgaard Jensen ved Roskilde Universitetscenter har bidratt med mye forskning på matematisk modellering i matematikkundervisning. Blomhøj og Jensen (2003) gir en prosessbeskrivelse av modellering i en matematikkdidaktisk kontekst på universitetsnivå. Den består av stegene (a) til (g) som er visualisert i figur 4 på neste side. Disse er oversatt fra engelsk. Dvs, dette er ikke helt riktig. Jeg fant det nødvendig å utvide deres prosess med ett steg, (b), der man henter data fra fenomenet. Dette steget er plassert mellom de opprinnelige stegene (a) og (b).

**(a) Problemformulering.** Denne er mer eller mindre eksplisitt og brukes som en hjelp til å identifisere aspekter ved fenomenet man ønsker å modellere.

**(b) Datasamling.** Innsamling av relevante data fra fenomenet, om nødvendig.

**(c) Systematisering.** Utvalg av relevante objekter, relasjoner, osv fra interesseområdet, og en idealisering av disse for å muliggjøre en matematisk representasjon.

**(d) Matematisering.** Overføring av objekter og relasjoner til matematikk.

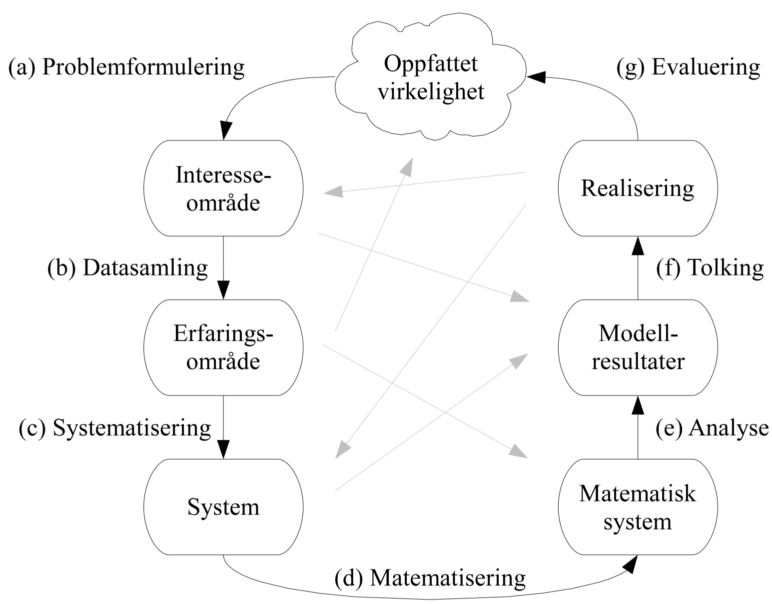
**(e) Analyse.** Bruk av matematiske metoder for å skaffe til veie matematiske resultater og konklusjoner.

**(f) Tolking.** Tolking av resultater og konklusjoner i forhold til interesseområdet.

**(g) Evaluering.** Evaluering av modellens gyldighet ved å sammenlikne den med observerte data.

Denne malen kan benyttes til mer enn kun å ha en "huskelapp" til hvordan man bør gå fram for å lage en modell. Det interessante med arbeidet til Blomhøj og Jensen er at modelleringsstegene også brukes som definisjoner på forskjellige typer delkompetanse i modellering. Modellering kan ikke reduseres kun til disse stegene, men alle er nødvendige for å utvikle matematisk modellering som en endelig ferdighet.

Modellering er tidkrevende, og for mange, en ganske uvant og utfordrende måte å jobbe med matematikk på. For å lettere komme inn i modelleringsprosessen kan man gjøre flere ting. Læreren kan begynne med å gi oppgaver der mye av arbeidet i de første stegene allerede er gjennomført. Graden av åpenhet i oppgaven kan justeres i problemformuleringen. Er man veldig eksplisitt her, vil det være enklere å utføre (c) og (d). Er problemformuleringen




Figur 4: En visuell beskrivelse av en modelleringsprosess. Fremgangsmåten er hovedsaklig å følge punktene steg for steg, men man vil i praksis som regel gå hit og dit mellom punktene, og ofte flere runder.

derimot veldig åpen, kan det være en utfordring å i det hele tatt komme i gang med arbeidet.

La oss gå gjennom modelleringsprosessen steg for steg ved å bruke Malthus' modell, som vi så på side på side 11 som eksempel.

Den vi mener med **oppfattet virkelighet** her, er fenomenet med at antallet individer i en befolkning endres over tid. Dette ser vi i alle typer befolkninger, ikke kun blant mennesker, men alt fra gjærceller i en vindunk, til reinsdyr på Svalbard. Dette er sentralt i økologi, og er viktig i miljø- og samfunnsdebatt. Det kan være vanskelig å forholde seg til fenomenet om man ikke har direkte erfaring med fenomenet, eller vet hva man bør legge merke til mens man erfarer. Erfaring i spørsmålet om befolkningsvekst kan man vanskelig få direkte, men det kan være til stor hjelp å studere statistikk av ulike typer befolkninger.

En relevant **problemformulering** (a) vil være å finne ut noe om hvordan befolkninganstallet endres. En veldig åpen formulering kan være "*Hvordan endrer antall individer i en befolkning seg over tid?*". En mer spesifikk kan være "*I årene 1750 til 1754 bestod norges befolkning av følgende antall innbyggere: 641980, 645838, 650905, 657090, 664320. Hvor mange innbyggere tror du det var i Norge i 1760?*". Dette er et eksempel på en typisk regresjonsoppgave, hvor fokuset ligger på å lære om regresjon. En fordel med regresjon er at det er lett å bruke, og kan være et veldig nyttig verktøy for å beskrive data. En ulempe med regresjon, mener jeg, er at regresjon ikke er et verktøy som er egnet til å *forklare* data. Det at det kan være en korrelasjon i et datasett med to variable, ser man som oftest straks man plotter dataene i et koordinatsystem; Man trenger ofte ikke regresjon for å se det. Det som er mer interessant er nettopp *hvorfor* det finnes en sammenheng.

Hvis læreren vil at elevene skal lære (mer) om et konkret matematisk verktøy, kan det være nyttig å lage en lukket problemformulering. Man fører da eleven inn på en ganske smal sti i modelleringsprosessen. Dette kan være praktisk for læreren, men det kan også være mindre spennende for eleven, og kan skru fokuset bort fra noe av det som er essensielt ved modellering: nemlig å være kreativ.

For å være i stand til å studere fenomenet nøye og kunne analysere det matematisk, trenger man ofte konkrete og reelle data om fenomenet. Data skaffer man seg gjennom steg (b), **datasamling**. Man kan enten skaffe til veie data selv, eller hente de fra andre kilder. Om man velger å skaffe data selv, så kan det man studerer være komplisert eller bevege seg så raskt at det blir vanskelig å måle i farta. Her kan filmkamera være til stor hjelp. Ved å fryse bevegelser, vil man få anledning til å måle mye mer nøyaktig det man har lyst til å studere. Mer om bruk av kamera til datalogging blir beskrevet i kapittel 4.9 på side 38.

Neste steg i prosessen er **systematisering** (c). Hva fører til endring i antallet individer i en befolkning? Hva kan skje med et individ? Hva er en befolkning? Det er vanlig i økologi å definere en befolkning som en gruppe med enkeltindivider av samme art innenfor et geografisk område. Et individ kan bli født eller dø, vandre inn eller ut av området. Det er ikke sikkert alle disse fire faktorene er relevante for problemformuleringen. Det er interessant å legge merke til at alle faktorene vil være relevante i den åpne formuleringen over, mens ingen av dem er relevante i den lukkede. Et annet viktig moment er at ingen av faktorene er spesifisert i problemformuleringene. Man må tenke litt, eller få hint fra læreren for å klare å identifisere dem.

Hvordan bruker vi disse faktorene videre? I definisjonen overfor, skal vi nå gjøre et *utvalg av relevante objekter, relasjoner, osv fra interesseområdet, og en idealisering av disse for å muliggjøre en matematisk representasjon.* Dette er antakelig noe av det mest krevende i modelleringsprosessen. Det vil absolutt være relevant å gå frem og tilbake mellom punkt (c) og (d) en del ganger. Det er rimelig å anta at jo flere individer det finnes, vil flere bli født (og flere vil dø). Hvis vi antar at fødsler ($F$) skjer raskere enn dødsfall ($D$), og innvandringen ($I$) er større enn utvandringen ($U$), så vil $F - D + I - U$ (som representerer befolkningsendringen) være positiv, og befolkningen vil øke. Dette er en måte å gjøre et idealisert utvalg. Hvordan oppfører disse fire faktorene seg? Hvordan foregår formering? Hvor mange individer finnes i et kull? Hvor lang tid tar det før et individ når kjønnsmoden alder? Er individene monogame? Det er en rekke spørsmål man kan stille i denne systematiseringsdelen. For å avdekke slike momenter, kan det være nyttig å kjøre en diskusjon i grupper eller i klassen. Læreren kan godt fungere som ordstyrer her for å lede oppgaven i riktig retning. En vanlig forenkling i problemstillingen er å anta at vi kan samle de fire faktorene ovenfor sammen i en størrelse, befolkningsveksten, og anta at den er proporsjonal med størrelsen på befolkningen. Produktet av systematiseringen er altså et sett med *modellforutsetninger*, som vi i (d) forsøker å beskrive matematisk.

Neste steg er **matematisering** (d). Målet med matematiseringen er å komme frem til en *matematisk modell*. Vi ser allerede i systematiseringen at det har sneket seg inn litt algebra, men uten at man har formulert noe helt eksplisitt. Nå gjenstår det å bruke matematisk verktøy til å gjøre akkurat det. Arbeidet i forrige steg kan fort føre frem til en matematisk modell man ikke klarer å bearbeide med de verktøyene man kjenner til, og da må man kanskje gå tilbake til forrige steg og forenkle mer.

For å gå videre på eksempelet, så ser vi at vi har å gjøre med noe som endrer seg over tid. Det er derfor nærliggende å bruke en differensiallikning som verktøy. Kaller vi antall individer i en befolkning for $N$ og definerer $N$ som en funksjon av tiden, $N(t)$, så blir befolkningsveksten i forhold til tiden $dN/dt$. Denne skulle være proporsjonal med størrelsen på befolkningen, dvs $dN/dt = kN$. Dette er en av de enkleste modellene som finnes for befolkningsvekst. Men det er slett ikke enkelt for en elev å komme frem til denne modellen på egenhånd uten en del trening. Et viktig ankepunkt i denne modellen er at $N$ ser ut til å være en kontinuerlig funksjon. Befolkninger er jo diskrete mengder! Man kan ikke ha 3/4 individ. Et svar på det er at vi har valgt modellen som en *idealisering*, eller en approksimasjon. Så godt som alle matematiske modeller av naturlige fenomener er tilnærminger. Selv om man antar at måleenheten liter er kontinuerlig, så er egentlig 1 liter vann en diskret mengde med ca $3.3 \times 10^{25}$ vannmolekyler. Volumet av disse er vanskelig å definere helt nøyaktig, men som regel er det bra nok å forholde seg til litermålet som $\mathrm{dm}^3$. Det er fint mulig å formulere en diskret matematisk modell av befolkningsvekst som en rentemodell, der antall individer hvert år (eller kanskje hver 9. mnd) øker med en viss prosentandel.

Etter å ha formulert en matematisk modell, bearbeides den gjennom matematisk **analyse** (e). Vi vet fra kapittel 3.5 på side 11 at $N(t) = N_0 e^{kt}$ som vi finner ved å løse differensiallikningen symbolsk ($N_0$ her betyr antall individer ved $t = 0$). Å løse differensiallikninger symbolsk for hånd kan være krevende, men man er slett ikke nødt til å løse dem symbolsk. Vi skal se i kapittel 4.8 på side 33 hvordan de kan løses numerisk vha Eulers metode i regneark. Om hovedfokuset ikke er å lære seg å løse slike oppgaver for hånd, er det mulig å løse differensiallikninger symbolsk med et CAS. Vi ser altså at det er flere måter å foreta analysen på, med varierende grad av bruk av tekniske hjelpemidler.

Etter analysen, kommer en **tolkning** av resultatene (f). I tolkningen forsøker vi å få mest mulig informasjon ut av den matematiske modellen. Hva kan vi finne av informasjon i uttrykket $dN/dt = kN$? Vi vet at funksjonen $N(t)$ ligger inni der et sted, men nå så er den kun definert implisitt. Vi trenger ikke å finne $N(t)$ for å få informasjon fra modellen: $dN/dt$ er jo den deriverte av $N(t)$, og om vi antar at $N(t)$ alltid er positiv, så ser vi at når $k > 0$, så er den deriverte positiv, og befolkningen vil øke. Når $k = 0$, er den deriverte lik 0, og vi har ingen endring i befolkningen over tid. $k < 0$ betyr at befolkningen minker. Så allerede før vi har begynt å arbeide med uttrykket, har vi fått en del kvalitativ informasjon om hva slags situasjoner modellen kan brukes til. Det eksplisitte uttrykket $N(t) = N_0 e^{kt}$ gir oss ytterligere informasjon: Veksten er eksponentiell! Det er det ikke lett å se fra matematiseringen uten erfaring med å løse differentiallikninger. Modellen tar hensyn til et vilkårlig antall individer ved $t = 0$. Om man bruker mer tid i analysen, kan man også vise at $N(t)$ har konstant doblingshastighet lik $\ln 2/k$ når $k > 0$. Ellers er det vanlig å visualisere resultatene fra modellen, slik vi gjorde på side 12.

I det siste steget, **evaluering** (g), ønsker vi å sammenlikne konklusjonene i tolkningen med reelle data for å evaluere om modellen virker rimelig. Vi ser at den eksplisitte funksjonen inneholder to parametere, $N_0$ og $k$. Ved å plotte reelle data sammen med grafen til modellen, kan vi variere på parameterene for å få mest mulig overensstemmelse mellom *teorien* vi har utviklet som matematisk modell, og hva vi har av *empiriske* data. Om vi ikke ser noen god overensstemmelse, kan det være grunn til å gå tilbake til systematiseringen, eller matematiseringen for å se om vi kan justere på betingelsene for modellen. Det er viktig å sammenligne modellen på denne måten med flere empiriske datasett. Det viser seg at Malthus' modell har en stor svakhet:

Alle befolkninger vokser uten begrensning så lenge $k > 0$. Som regel vil befolkninger utvikle seg som en s-kurve. Slike kurver utvikler seg tilsynelatende eksponentiellt i starten, men vil etter en stund få et vendepunkt og utviklingen dabber av mot en grense. I økologi tolkes dette som at befolkningen har en øvre bæreevne. Dette er en modellforutsetning vi kan gå tilbake til systematiseringen og legge til, for å så utvikle en ny modell. En slik generalisering resulterer i Verhulsts modell som vi kommer tilbake til i kapittel 6.7 på side 52.

Det er viktig å presisere at for hvert av stegene i denne prosessen, så finnes det som regel flere spor å følge. Om læreren har en spesiell matematisk teknikk i tankene, må elevene guides mer i "riktig retning". Dette kan være bra i noen tilfeller, og mindre bra i andre.

Modelleringsstegene ovenfor kan brukes til å normativt beskrive hva som forventes av elever for at man skal kunne si at de er flinke til modellering. Kompetanse innenfor matematisk modellering kan defineres som det å være i stand til på egenhånd å gå gjennom alle stegene i den matematiske modelleringsprosessen på en innsiktsfull måte. Graden av kompetanse måles gjennom i hvor bra eleven faktisk klarer å løse et konkret problem ved hjelp av matematisk modellering.

Arbeidsmetoden vil for mange elever være uvant i begynnelsen. I tillegg vil matematiseringen i mange av de relevante problemstillingene være krevende siden de fleste elever har manglende erfaring med fenomenene det er snakk om. Dette betyr at å bli flink i denne kompetansen krever mye tid og arbeid. Det er derfor nødvendig å venne elevene til arbeidsmetoden gjennom problemstillinger med stadig økende vanskelighetsgrad.

Blomhøj og Jensen (2003, s. 30) beskriver et konkret undervisningsopplegg med ca 40 førsteårsstudenter på universitetsnivå. De kjørte to økter på 2.5 timer i uka med totalt 50 økter gjennom to semestre. Studentene ble delt inn i grupper på to eller tre. I løpet av kurset jobbet gruppene med seks miniprosjekter der hovedfokuset lå på arbeid med modelleringsstegene (d), (e) og (f), beskrevet i figur 4 på side 16. Det ble satt av et par uker per miniprosjekt. Mellom disse prosjektene ble det gjennomført mer tradisjonell undervisning av matematiske konsepter og metoder. Det ble lagt opp til økende vanskelighetsgrad gjennom hele kurset.

En viktig erfaring var at de fleste gruppene trengte meget stor oppfølging. Det viste seg også at måten oppfølgingen ble gitt på fungerte best når den ble gjennomført som dialog med studentene, i motsetning til en mer omstendelig formulering av problemstillingen og guiding gjennom ledende spørsmål.

## 3.9 Vurdering av modelleringskompetanse

Det å drive med matematisk modellering er veldig forskjellig fra den tradisjonelle måten å arbeide med matematikk på. Det kan derfor være en utfordring å gi en vurdering av elevenes modelleringskompetanse. Siden denne kompetansen er sammensatt av ulike delkompetanser, kan det være nyttig for eleven å ikke kun få en totalkarakter, men en redegjørelse for hvordan læreren vurderer delkompetansene.

Karaktersetting av miniprosjekter er en måte å vurdere elevenes modelleringskompetanse på, men av forskjellige grunner kan det hende at læreren kun har anledning til å gi en endelig vurdering av kompetansen gjennom vanlige prøver. Dette i seg selv kan være svært vanskelig eller umulig å gjennomføre. Williams og Ahmed (1998) beskriver følgende scenario: *Modellering er viktig* $\Rightarrow$ *Lærere kan ikke vurdere modelleringskompetanse gjennom vanlige prøver* $\Rightarrow$ *Elevene får ikke modelleringsoppgaver på eksamen* $\Rightarrow$ *Modellering er ikke lengre viktig*. Et annet relevant scenario: *Elevene liker å jobbe med modellering* $\Rightarrow$ *Modellering innføres i vanlige prøver* $\Rightarrow$ *Elevene gruer seg til disse prøvene* $\Rightarrow$ *Elevene liker ikke modellering lengre*. For at innføring av åpen modellering som pensum skal fungere i skolen, må disse og relaterte scenarier håndteres på en god måte.

Det kan være vanskelig å endre på tradisjoner i skolen. Antonius (2007) nevner at modellering har hatt en sentral rolle i den Danske læreplanen de siste 15 årene, men sluttvurdering skjer fortsatt gjennom en tradisjonell todelt skriftlig og muntlig prøve. Den skriftlige delen består av et antall uavhengige, standardiserte, prestrukturerte og ganske lukkede oppgaver. Den muntlige delen blir elevene bedt om å definere og forklare diverse konsepter, bevise diverse teoremer, osv. En konklusjon er at denne vurderingsformen absolutt ikke er brukbar til å vurdere kompetanse i åpen modellering, og at det som ikke vurderes har en tendens til å forsvinne fra undervisningen.

Hovedutfordringen ligger altså i at det ofte tar mye lenger tid å utvikle en god matematisk modell enn den tiden man har til rådighet i en prøve som varer i noen timer. Det er viktig å skape en atmosfære for modellering, ikke bare i videregående, men også i tidligere trinn. Prosjektarbeid der man jobber i grupper, lager plakater, presentasjoner eller rapporter over flere uker kan være en måte å skape en slik atmosfære.

Antonius (2007) beskriver en undersøkelse der sluttvurdering for elever i videregående skole ble gjennomført som et prosjektarbeid over 3 uker. Det ble satt av 15 matematikktimer til arbeidet. Elevene hadde anledning til å få guiding fra læreren og kunne diskutere prosjektet med sine medelever. De fikk også lov til å arbeide med prosjektet hjemme. Alle hjelpemidler var tillatt, og hver student skrev sin egen rapport. Etter innlevering må rapporten "forsvares" i en muntlig prøve. Poenget med den muntlige prøven er å sjekke hvor godt eleven forstår innholdet i rapporten og eventuellt fjerne eller redusere faren for juks. I undersøkelsen varte den muntlige prøven i 10 minutter, noe som viste seg å være for lite. Antonius anbefaler derfor å gjennomføre den muntlige prøven på 30 minutter.

# 4 Diskusjon

## 4.1 Modellering i Kunnskapsløftet

Det er tydelig at modellering er sentralt i matematikkdelen i Kunnskapsløftet. Modellbegrepet brukes i kompetansemål fra 2P, 1T, 2T, S1, S2, R1 og R2. Nedenfor følger noen av kompetansemålene fra Kunnskapsløftet som er mest relevante i forhold til matematisk modellering og teknologi:

**2P / Modellering:** Foreta målinger i praktiske forsøk, formulere en enkel matematisk modell på grunnlag av de observerte dataene, bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging og vurdere modellen og dens gyldighet.

**2T / Kultur og modellering:** Formulere en matematisk modell på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen, reflektere over resultat og fremgangsmåte og vurdere modellens gyldighet.

**2T / Kultur og modellering:** Bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging.

**R2 / Funksjoner:** Formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte.

**R2 / Differensiallikninger:** Modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet.

Læreplanen sier lite om hva modellering egentlig går ut på, eller hva slags matematiske eller teknologiske verktøy man kan bruke i modellering. Fordelen med dette er økt fleksibilitet, men ulempen er at det sannsynligvis fører til stort sprik i undervisningen av modellering fra skole til skole. Når i tillegg mange elever vil få tradisjonelle, sentralgitte skriftlige og muntlige prøver som eksamensform, står den åpne modelleringsformen i fare for å bli undergravet som diskutert i kapittel 3.9 på side 20. Første eksamen i mange av disse modelleringsemnene er i vår, og det blir spennende å se hvordan denne eksamen blir.

## 4.2 Fysikklab

En rekke klassiske eksperimenter i fysikken går ut på å bruke Newtons 2. lov til å modellere fritt fall. En vanlig måte å gjøre dette på er å bruke en spesialkonstruert rampe. På toppen av rampen er det montert en sensor som måler avstanden ned til en liten vogn som kan trille opp og ned. Datapar med tidspunkt og avstand måles med ekkolodd og sendes så til en datamaskin for videre analyse.

Det er flere ulemper forbundet med dette: Vi vet at tyngdekraften virker loddrett. Det naturlige er derfor å eksperimentere med ting som faller på vanlig måte. Rampen forvansker dette ved at vi må dekomponere kreftene i forhold til vinkelen mellom rampen og bakken. Ekkoloddet kan virke magisk.

Den oppgir avstand uten at man helt vet hvordan. Det er praktisk, men kanskje ikke så pedagogisk. Rampen er også noe de fleste elever ikke har sett før, og sannsynligvis heller ikke kommer til å se igjen. Den er noe som tilhører fysikkrommet og er en del av fysikkfaget. Den er kunstig. Noe av poenget med anvendt matematikk er å anvende den på noe virkelig, eller i det minste virkelighetsnært. En slik rampe har lite eller ingen ting å gjøre med elevenes virkelighet.

Fordelene med å bruke en slik rampe er stor grad av kontroll, nøyaktighet og muligheten til å gjenta (ganske like) forsøk på kort tid. Om vi er villige til å fire litt på disse kravene kan vi utføre eksperimenter med fritt fall på en mer naturlig måte, veie opp for rampens ulemper, og skaffe til veie nye fordeler.

## 4.3 Teknologiske prinsipper

En idé man kan bruke for å håndtere rask teknologisk utvikling er å se på hva som endrer seg og hva som ikke endrer seg fra ett system til det neste. Det viser seg at selv om et nytt system overtar et gammelt, vil ofte hovedprinsippet i systemet bestå, mens innpakningen endres. Et eksempel finner vi i tabell 1, hentet fra Wester (1999). Her finner vi informasjon om hva man skriver i forskjellige CAS for å referere til ulike konstanter og tall. Mer om CAS blir forklart i kapittel 4.6 på side 27.

Vi ser at innpakningen her er representert ved en spesiell syntaks for å referere til matematiske objekter. Man kunne tenke seg at en skole ville bytte fra Derive til Mathematica. I hvilken grad er dette en utfordring? Ulempen er at man må lære seg det systemets syntaks og spesielle særegenheter, men fordelen er at *prinsippene* er de samme. Om man vil si $\sqrt{2}$ til systemet, bytter man i tilfellet fra `SQRT(2)` til `Sqrt[2]`.

Ofte vil syntaks fra system til system være lik eller liknende; En cellereferanse vil i de aller fleste regneark være på formen <bokstav><tall>, f.eks. `D4` for å referere til kolonne `D`, rad `4`.

| System | $e$ | $\pi$ | $i$ | $+\infty$ | $\sqrt{2}$ | $2^{1/3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Axiom | `%e` | `%pi` | `%i` | `%plusInfinity` | `sqrt(2)` | `2**(1/3)` |
| Derive | `#e` | `pi` | `#i` | `inf` | `SQRT(2)` | `2^(1/3)` |
| Macsyma | `%e` | `%pi` | `%i` | `inf` | `sqrt(2)` | `2^(1/3)` |
| Maxima | `%e` | `%pi` | `%i` | `inf` | `sqrt(2)` | `2^(1/3)` |
| Maple | `exp(1)` | `Pi` | `I` | `infinity` | `sqrt(2)` | `2^(1/3)` |
| Mathematica | `E` | `Pi` | `I` | `Infinity` | `Sqrt[2]` | `2^(1/3)` |
| MuPAD | `E` | `PI` | `I` | `infinity` | `sqrt(2)` | `2^(1/3)` |
| Reduce | `e` | `pi` | `i` | `infinity` | `sqrt(2)` | `2^(1/3)` |

Tabell 1: Skrivemåte for ulike konstanter og tall in noen CAS.

Det er nyttig å skille mellom mellom systemet og prinsippet bak systemet. Om fokuset i denne oppgaven hadde vært på spesifikke systemer, ville den bli mindre interessant når systemene det er snakk om blir utkonkurrert eller foreldet. Generelt bør ikke planleggingen av undervisning knyttes for sterkt til et spesifikt program eller system (Henn, 1998). For å gi forslag som muligens har en litt lengre utløpsdato er det derfor nyttig å fokusere mer på prinsippene, og mindre på konkrete produkter. Det er nødvendig å ta opp noen detaljer knyttet til enkelte systemer, men disse detaljene er plassert i et tillegg på slutten.

## 4.4 Teknologi og matematikk gjennom historien

Moderne teknologi forbinder man som regel med noe nytt, og gjerne noe som ligger inn i fremtiden. Det er lett å glemme at all teknologi en gang i tiden har vært ny, og har i varierende grad ført til en endring i hva 'matematikk' betyr. Det kan derfor være interessant å se litt på hvordan teknologi tidligere har endret matematikkfaget, for å se om det kan hjelpe oss med å avklare vårt forhold til moderne teknologi i dag.

Matematikk stammer fra grunnleggende menneskelige behov for å bedre sine livsvilkår. Drivkraften til utvikling av nye regneteknikker har vært ønsket om å kunne løse stadig mer avanserte problemer, samt å gjøre regnearbeidet raskere. Nyvinning har skjedd på ulike måter, gjennom ny notasjon, nye matematiske teorier og idéer, fremgangsmåter (algoritmer) og maskiner. Baumgart, Deal, Vogeli, og Hallerberg (1969) gir en fin oversikt over denne utviklingen.

Hver gang en ny regneteknikk har fått fotfeste i samfunnet, har den nødvendigvis også endret det allmenne synet på hva 'matematikk' betyr. Det vil også si at undervisning av matematikk har måttet endre seg for å reflektere dette synet. Det finnes ulike holdninger blant lærere til nye teknikker. Noen tar imot med åpne armer, andre har en mer konservativ holdning. Et vanlig argument er av typen: «*Vi kan jo ikke la elevene gjøre det* slik! *Det er jo* juks!», eller, «*Men da blir det jo altfor* lett!».

Slike argumenter har ofte blitt brukt om samtlige typer kalkulatorer (simpel, grafisk, CAS). Tilsvarende har vært brukt om nye regneteknikker i tidligere tider også. Smith og Ginsburg (1956) nevner at moderne siffre var ulovlig å bruke i bankvesenet på 1300-tallet i Europa. Argumentet var at siffrene var enklere å forfalske enn romertall siden man f.eks. enkelt kunne endre 0 til 6 eller 9. Det måtte gå 400 år før det ble vanlig å bruke moderne siffer i kommersiell bokføring. Smith og Ginsburg refererer til illustrasjonen vist i Figur 5 på neste side fra Reisch (1503) som et eksempel på fordelen med aritmetikk i forhold til tellebrett.

Argumentene mot nye regneteknikker er absolutt relevante, men har av ulike grunner begrenset holdbarhet. Om man mener bruk av kalkulator er å betrakte som juks, så har man en annen oppfatning av hva 'matematikk'


Figur 5: Illustrasjonen viser Boetius i kappestrid med Pytagoras. Dette bivånes av gudinnen Aritmetika. Til høyre på Pytagoras' tellebrett står tallet 1241. Til venstre på brettet har han prøvd seg på 1234 delt på 97, men har gitt opp. Boetius klarer regnestykket ved hjelp av moderne teknologi.

betyr enn de som synes det er greit. I starten av skolegangen lærer elevene å legge sammen tall, både med hoderegning og for hånd på et ark. Når elevene har gjort dette lenge nok (og kanskje lært det bra nok), får de en kalkulator de kan legge sammen tall med. De kan så bruke addisjon på en mer konseptuell måte, og overlate selve regnearbeidet til en maskin.

De færreste lærere har problemer med akkurat dette. Problemet som ofte er oppe til diskusjon i dag er om det samme prinsippet bør gjelde for manipulering av algebraiske uttrykk og likninger. Det å kunne gjøre dette for hånd er utvilsomt nyttig. Men det å kunne ha anledning til å overlate denne jobben til en maskin kan være minst like viktig. Forskjellen i disse fremgangsmåtene ligger i å enten lære seg hvordan et verktøy fungerer, og det å bruke et verktøy for å løse et problem.

Dette berører i stor grad matematisk modellering, der kompetansenivået hos elevene måles ut ifra hvor bra de klarer å løse et konkret problem ved hjelp av modellering. Kunnskap om hvordan matematiske verktøy virker er indirekte med på å påvirke nivået, men hvordan eleven bruker verktøyene er ikke relevant i forhold til resultatet.

Når og i hvilken grad elever kan, bør eller skal bruke maskiner i matematikkfaget er en dyp og lang diskusjon uten mange klare svar. Det vi imidlertid ser fra historien er at maskinene kommer, enten den enkelte lærer vil eller ei. Nyvinning innen regnekunsten har som regel kommet frem hos de som bruker matematikk i yrket. Deretter har teknikkene kommet inn i skolen. Men selv om regneteknikker kan være optimale i et yrke, er det ikke sikkert at de samme teknikkene er optimale i undervisningen av matematikk.

En konklusjon er at siden skolen skal skape produktive medlemmer av samfunnet, må også det lærere mener med 'matematikk' få lov til å endre seg i takt med samfunnsutviklingen.

## 4.5 Aktuelle teknologiske prinsipper

Teknologier denne oppgaven vil ta tak i er CAS, ulike typer kalkulatorer, regneark og filmkamera. CAS er en forkortelse for "Computer Algebra System", og er et navn på et datasystem som tilrettelegger for symbolsk manipulasjon på funksjoner og uttrykk. En mer fullstendig redegjørelse for CAS blir beskrevet i kapittel 4.6 på neste side.

Jeg vil skille mellom tre fundamentalt forskjellige typer kalkulatorer: CAS-kalkulator (som beskrevet ovenfor), grafisk kalkulator, og simpel kalkulator. En simpel kalkulator er en regnemaskin uten særlig mer enn $+$, $-$, $\times$, $\div$ og $\sqrt{\ }$. En grafisk kalkulator er en regnemaskin med plottemulighet (men uten CAS).

Dette utvalget av teknologiske prinsipper kan kanskje virke litt snevert. Hvorfor akkurat disse, og ikke noen andre? Jo, noen moderne teknologier har overlevd i skolen en god stund allerede. Det er ikke dermed sagt at disse seiglivede teknologiene er optimale, men de er der. Og når de er der, bør man fokusere på å gjøre det beste ut av situasjonen. Mange lærere og elever har dessuten lang erfaring med for eksempel regneark eller grafisk kalkulator fra før. Det er lettere å ta i bruk teknologi man er vant med, og kanskje bruke den på en litt annen måte, enn å lære seg en helt ny teknologi før man kan bruke denne til matematikk. Det å bruke filmkamera i matematikk er kanskje nytt for de fleste, men en stor fordel er at de alle fleste forstår denne teknologien fra før.

### 4.6 CAS

CAS står for 'Computer Algebra System'. Det er en betegnelse på et system som er bl.a. er laget for å arbeide med symbolske uttrykk. Det er en naturlig utvidelse av det vi kjenner til av tilgjengelige verktøy i en klassisk grafisk kalkulator. Det finnes ikke noen klar og tydelig definisjon av hva et CAS skal ha av funksjonalitet for å kunne kalle det et CAS, men de fleste CAS støtter som regel følgende: Behandling av algebraiske uttrykk, løsing av (systemer av) likninger, radredusering av matriser, delbrøksoppspalting, (primtalls)faktorisering, derivering, antiderivering, utregning av bestemte integraler, grenseverdier, symbolsk og numerisk løsing av differentiallikninger.

Et CAS kan altså brukes til å oppfylle kravet i Kunnskapsløftet om å kunne bruke digitale verktøy til å arbeide med de matematiske begrepene nevnt ovenfor. Det er viktig å presisere at det ikke her er snakk om å erstatte det man skal kunne for hånd med digitale verktøy; I flere kompetansemål står formuleringen «*med og uten digitale hjelpemidler*». Det skal altså fokuseres på begge deler. Det er ikke tvil om at erfaring med å bruke verktøy i listen over for hånd er meget verdifull. Etterhvert, vil man imidlertid komme til et punkt der man kan nok om dette og kan overlate noe av dette rutinearbeidet til kalkulatoren. Dette er helt analogt med overgangen fra å arbeide med de fire regneartene manuellt til å gjøre det på en kalkulator. Jeg tror få lærere nå ville vurdere å slutte totalt med å la elever i ungdomsskolen og videregående bruke enhver kalkulatorvariant. Jeg mener derfor det er naturlig å ha en glidende overgang av delegasjon av matematisk arbeid til kalkulatoren gjennom *hele* skolegangen via stadig mer avanserte kalkulatorer. Det er fullt mulig å lage todelte prøver der man bruker kalkulator kun i den ene delen.

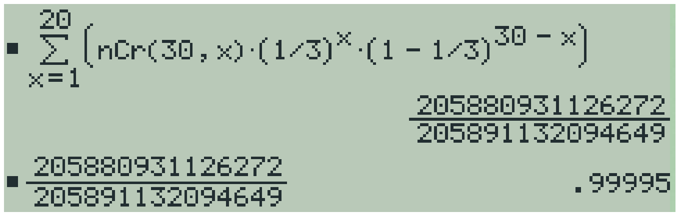
Hvordan bruken av teknologi i skolen bør gjennomføres er omstridt. Som lærere er vi uansett nødt til å følge opp Kunnskapsløftet som krever at elevene skal kunne løse ulike problemstillinger både ved regning og med digitale hjelpemidler. Lærerens problem koker da ned til hvordan han eller hun best mulig kan utnytte digitale hjelpemidler i undervisningen. Et konkret digitalt matematisk verktøy *må* ikke brukes kun fordi det er tilgjengelig.

I dette kapittelet vil jeg presentere noen måter å bruke CAS på i modellering. Dette vil jeg gjøre ved å ta utgangspunkt i kompetansemål i Kunnskapsløftet som er relatert til matematisk modellering. Jeg viser så hvordan CAS kan brukes for å løse problemstillinger som er relevante for disse kompetansemålene. Som konkrete eksempler på hvordan det kan se ut å bruke et CAS, viser jeg skjermbilder fra kalkulatoren TI-89.

I 1T har vi *lage binomiske sannsynlighetsmodeller ut fra praktiske eksempler og beregne binomiske sannsynligheter ved hjelp av formler og digitale hjelpemidler*. Den binomiske sannsynlighetsfordelingen er gitt ved

$$f(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{for} \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Når $n$ er stor, er denne fordelingen upraktisk å jobbe med for hånd. Det er derfor vanlig å approksimere den binomiske sannsynlighetsfordelingen med normalfordelingen når $n$ er stor. Med et CAS trenger man ikke det, og man kan f.eks. regne ut $f(x \leq 20, n = 30, p = \frac{1}{3})$ helt nøyaktig og som tilnærmet desimalbrøk slik:

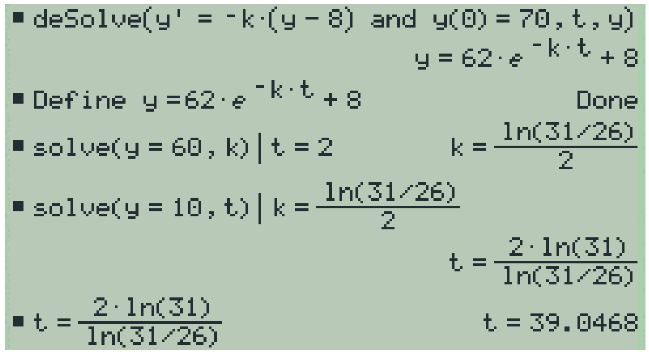



I dette tilfellet trenger man ikke skrive inn brøken på nytt. Det er enkelt å navigere i og manipulere med tidligere utregninger. For å kunne arbeide effektivt slik med et CAS, må man lære seg syntaksen. Tabell 1 på side 23 viser forskjellig syntaks for å referere til det samme matematiske begrepet. Det er ikke bare å lære seg syntaks. For at syntaksen skal ha noen mening, må nemlig elevene ha kjennskap til de delene av matematikken som representeres med den spesielle kalkulatorsyntaksen de skal bruke. Det er således en slags laginndeling av matematisk kunnskap, der kunnskap om notasjon innebærer både notasjon på ark samt den særegne notasjonen i et konkret CAS. Det fører til at bruk av CAS innebærer et større pensum.

Et argument for å lære om at man kan approksimere binomialfordelingen med normalfordelingen, er altså at når $n$ er stor, så tar det for lang tid å arbeide med binomialfordelingen for hånd. Dette argumentet faller delvis bort i det man har anledning til å ta i bruk CAS. Det kan derfor argumenteres for at det da blir mindre viktig å lære om denne approksimasjonen. Argumentet faller kun delvis bort, fordi det i praksis alltid vil være en begrensning på hvor stor $n$ kan være i et gitt CAS. Det er en endelig sum som skal regnes ut, så om $n$ er veldig stor i forhold til CAS'ets hastighet så kan det likevel ta for lang tid å vente på svaret. Selv om det fortsatt er viktig å vite om approksimasjonen som et eksempel på konsekvensen av sentralgrenseteoremet, kan man argumentere for at at pensumet i dette tilfellet kan reduseres noe. Innføring av ny teknologi trenger altså ikke å bety at mer må læres, men at man heller kan lære andre ting, på en annen måte.

I R2 har vi *løse differensiallikninger og tegne retningsdiagrammer og integralkurver, og tolke dem ved å bruke digitale hjelpemidler*.

Et klassisk problem er hvordan temperaturen endres i f.eks. en kopp med varm te når omgivelsene har en lavere temperatur. Hvis teens temperatur i Celcius er en deriverbar funksjon av tiden, $T(t)$, og lufttemperaturen er 8 °C, så sier Newtons kjølelov at det finnes en $k > 0$ slik at $dT/dt = -k(T - 8)$. Vi har $-k$ slik at den deriverte blir negativ når $T > 8$. Denne differensiallikningen er såpass enkel at den kan løses symbolsk. Hvis vi regner tiden i minutter og vet at $T = 70$ ved $t = 0$, $T = 60$ ved $t = 2$ og vil vite hvor lang tid det tar før teens temperatur er nede i 10 grader, så kan vi gå frem slik:



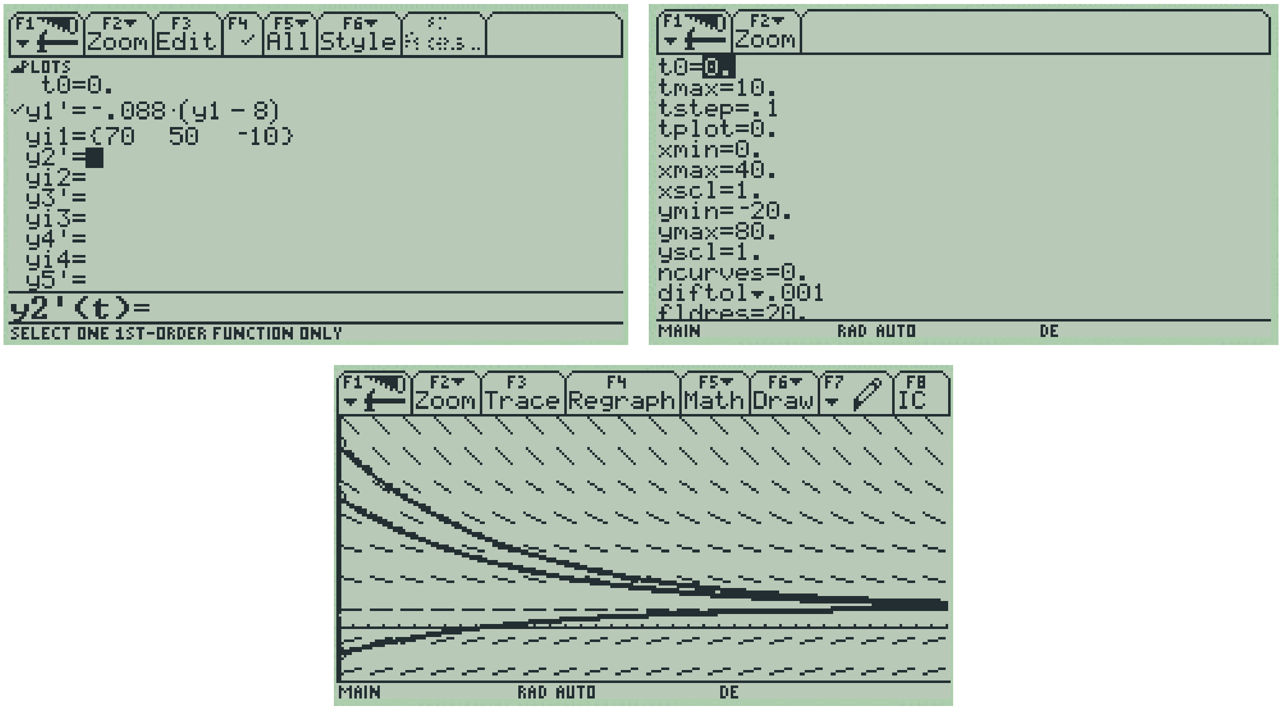

Vi ber altså først om løsing av differensiallikningen med initialkravet $y(0) = 70$. Vi sier også at $t$ er en uavhengig variabel, og at $y$ er en avhengig variabel. Kalkulatoren finner en eksakt løsning, og vi definerer $y$ til å være lik denne. For å finne $k$, ber vi kalkulatoren løse likningen $y = 60$ mhp $k$ gitt at $t = 2$. Vi ber så om å få greie på hvor lang tid det har gått ved å løse likningen $y = 10$ mhp $t$ når $k$ er lik det den ble ved forrige steg. Tiden kommer ut som et eksakt uttrykk, og vi ber derfor om desimalbrøken som sier litt over 39 minutter. Vi kan også analysere situasjonen ved hjelp av et retningsdiagram og opptegning av integralkurver. Vi kan kun gjøre det for gitte verdier av $k$, som viser seg å være $\approx 0.088$ i situasjonen som er beskrevet til nå. Etter å ha valgt modus for differensiallikninger vises skjermbilder i figur 6 på neste side for hhv differensiallikninger, vinduinstillinger og integralkurver i retningsdiagram.

Et CAS lar oss altså arbeide med symbolsk matematikk på en veldig konseptuell måte. Prisen vi må betale er å sette oss inn i et konkret CAS' særegne syntaks og virkemåte. Noen deler av et CAS kan være for tekniske og upraktiske til å brukes i undervisningen. Hvilken del av et CAS som bør brukes i videregående må derfor avveies i forhold kompleksiteten.

## 4.7 Regneark

Når vi hører ordet 'regneark' i dag, tenker vi først og fremst på et dataprogram, men lenge før moderne databehandling ble finansregnskap og budsjetteringssystemer konstruert som manuelle regneark på papir. Mattessich (1961) bidro med noe av det tidligste viktige grunnlaget for dagens digitale regneark. Dette grunnlaget bestod i en oppskrift på hvordan man med datakraft kunne simulere matematiske modeller for å optimalisere langsiktig inntjening i et selskap.

Det at digitale regneark har sitt opphav i økonomi har nok satt sitt preg på hva man først og fremst forbinder med regneark i dag. En indikasjon på dette har jeg erfaring fra egen undervisning der jeg ba 8 grupper studenter




Figur 6: Skjermbilder fra TI-89 som viser integralkurver for tre initialverdier av Newtons kjølelov med $k = 0.088$. Differensiallikningen sammen med de tre initialkravene er definert oppe til venstre som $y(0) = 70$, $y(0) = 50$ og $y(0) = -10$. De respektive løsningene er plottet sammen med retningsdiagrammet nederst med $0 < t < 40$ og $-20 < T < 80$.

lage undervisningsopplegg med bruk av regneark. 5 av de 8 gruppene laget opplegg som handlet om økonomi.

Selv om regneark egner seg svært godt til å sette opp et budsjett, kan det brukes til mye mer. Det er ganske lett å forstå regnearksprinsippet, samtidig som det er et meget generelt verktøy. Det er muligens denne kombinasjonen som gjør regneark så utbredt.

Jeg regner med at de som leser dette har en del kompetanse innen bruk av regneark, så jeg kommer ikke til å si noe om grunnleggende bruk. Det jeg har tenkt å bruke litt plass på er noen teknikker som er relevante i forbindelse med modellering.

Hva man konkret gjør i et regneark for å få til en spesiell teknikk, kan variere i ulike regnearkprogram. I dette kapittelet vil jeg derfor holde diskusjonen av regneark på et generelt plan. Mer detaljert informasjon om teknikker i populære programmer per dags dato ligger som et vedlegg på slutten av oppgaven.

Følgende teknikker er til stor nytte i arbeidet med matematiske modeller:

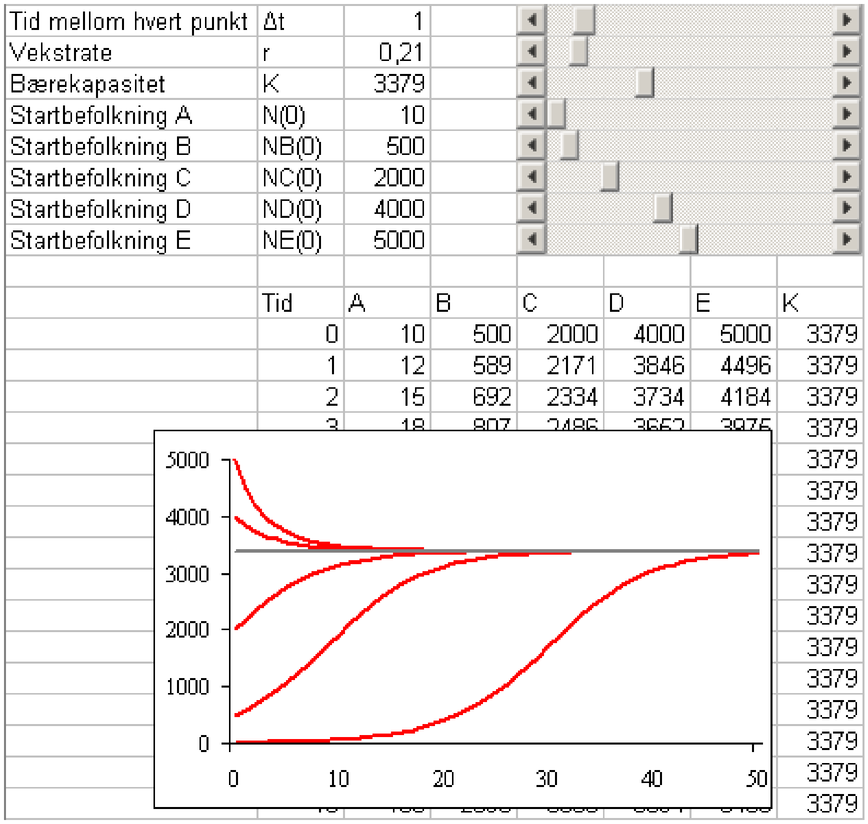
**Referanselåsing:** Når man kopierer celler som inneholder referanser, vil referansene skifte adresse i kopiretningen. Man kan hindre dette ved å låse referansen til kolonnen, raden, eller begge med `$`-tegnet. Referansen `C4` vil endres til `C5` når cellen den finnes i kopieres nedover. Dette kan altså hindres ved å skrive `C$5`.

**Cellenavn:** Man kan gi enkeltceller egennavn. Dette er spesielt nyttig for konstanter eller parametre. Formler i celler som refererer til disse verdiene blir da mye enklere å definere og lese samtidig som eventuelle feil blir lettere å oppdage. Som vi ser i eksempelet på side 36, er det mye lettere å arbeide med uttrykk som `=E5+(g-(k/m)*E5)*Δt` enn `=E5+(C$6-(C$4/C$5)*E5)*C$3`.

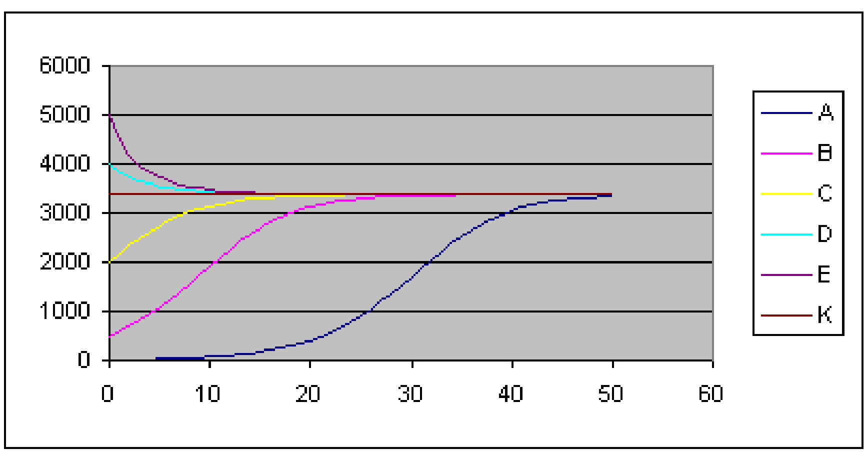
**Rullefelt:** En stor fordel med regneark er dynamikken man kan få til ved å endre på nøkkelverdier. Ved å gå inn i en viktig celle i arket og endre på verdien, ser man umiddelbart effekten dette har. Man kan øke denne graden av dynamikk betraktelig ved å benytte rullefelt. Med et rullefelt kan man lettere og raskere endre en celleverdi. Oppdateringsfrekvensen i regnearket vil være avhengig av hvor komplisert og stort det er, men man kan typisk få testet ut 10-20 verdier i sekundet. Dette åpner for mye større mulighet til utforsking. Et eksempel på slik bruk av rullefelt vises i figur 7 på neste side.

**Plotting:** Plotting av dataene i et regneark kan være meget verdifullt. Men det må gjøres skikkelig. Visualisering og publisering av data får større gjennomslagskraft om man vier litt oppmerksomhet til estetikk og design. Standardgrafene i regnearkprogrammer har en tendens til å ha meget dårlig design. Det blir derfor nødvendig å justere på utseendet slik at de blir så klare og tydelige som mulig. En meget god bok om visualisering av kvantitative data er skrevet av Tufte (2001). Et eksempel på hvordan regnearket Excel 2004 foreslår at grafen over skal se ut vises i figur 8 på neste side.

**Importering:** For å kunne vurdere modellens gyldighet, må man sammenlikne modellens oppførsel med data fra virkeligheten. Hvis man ikke har mulighet til å skaffe data selv, må man hente data fra et annet sted. I stedet for å manuellt skrive inn slik data i et regneark, kan man importere dataene. Dette gjøres som regel fra tekstfiler. Tekstfilene må ha en forutsigbar struktur for at regnearket skal kunne skille de forskjellige verdiene fra hverandre. Om man henter data fra en database, har man ofte mulighet til å eksportere til en tekstfil i såkalt CSV (comma separated values) format. De fleste regneark kan importere slike.




Figur 7: Eksempel på bruk av rullefelt til å styre relevante parametere og initial-krav i visualiseringen av integralkurvene til en differensiallikning.




Figur 8: Eksempel på hvordan regnearkprogrammet Microsoft Excel 2003 gir som standarddesign på en graf.

## 4.8 Eulers metode med regneark

Et av de viktigste verktøyene innen matematisk modellering er differensiallikninger. De er veldig ofte anvendelige til å beskrive ting som endres over tid. Noen differensiallikninger kan løses symbolsk for hånd, dvs at man får ut et eksplisitt uttrykk, og noen få av dem igjen kan løses med de simpleste knepene innen antiderivasjon. I figur 9 på neste side, ser vi hva som skjer når vi utvider modellforutsetningen litt: Det blir straks mye vanskeligere å finne de eksplisitte funksjonene.

Kunnskapen om å løse slike for hånd på denne måten er viktig. Men som regel er desverre de fleste differensiallikninger slik at det ikke finnes noe eksplisitt uttrykk, og man må ty til numeriske metoder for å få noe nytte av likningene (Andreassen, Håvie, Krogstad, Nørsett, & Aasen, 1975).

Den enkleste numeriske metoden for å løse initialverdiproblemer er Eulers metode. Den tar utgangspunkt i at man kjenner den *deriverte* til funksjonen. I et initialverdiproblem kjenner vi minst ett punkt på funksjonen. Siden funksjonens tangent er tilnærmet lik funksjonen på et lite område, kan man følge tangenten et lite stykke fra det kjente punktet for å finne et nytt punkt som forhåpentligvis ikke ligger alt for langt unna funksjonens ekte verdi der. Således vandrer man små skritt med den deriverte som kompass for å tegne frem grafen. Dette visualiseres i figur 10 på side 35 med funksjonen $y(t) = t^2$ som eksempel.

En klassisk problemstilling er hvordan man modellerer fritt fall. Det er enklere å utlede de eksplisitte bevegelsesfunksjonene om man ser bort fra luftmotstanden. Dette er et naturlig utgangspunkt, men for å modellere fritt fall i praksis, så trenger man å ta hensyn til luftmotstanden. Gjør man det, blir det straks vanskeligere å analysere modellen analytisk. Figur 9 på neste side viser forskjellen i regnearbeid man får ved å utvide modellen på denne måten. Dette analytiske arbeidet er relevant i videregående; Et kompetansemål i R2 sier "*modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet*".

Digitale verktøy gir oss imidlertid muligheten til å se konsekvensene av differensiallikninger, uten å måtte utlede dem analytisk. Dette er også relevant; I 2T har vi "*bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging*".

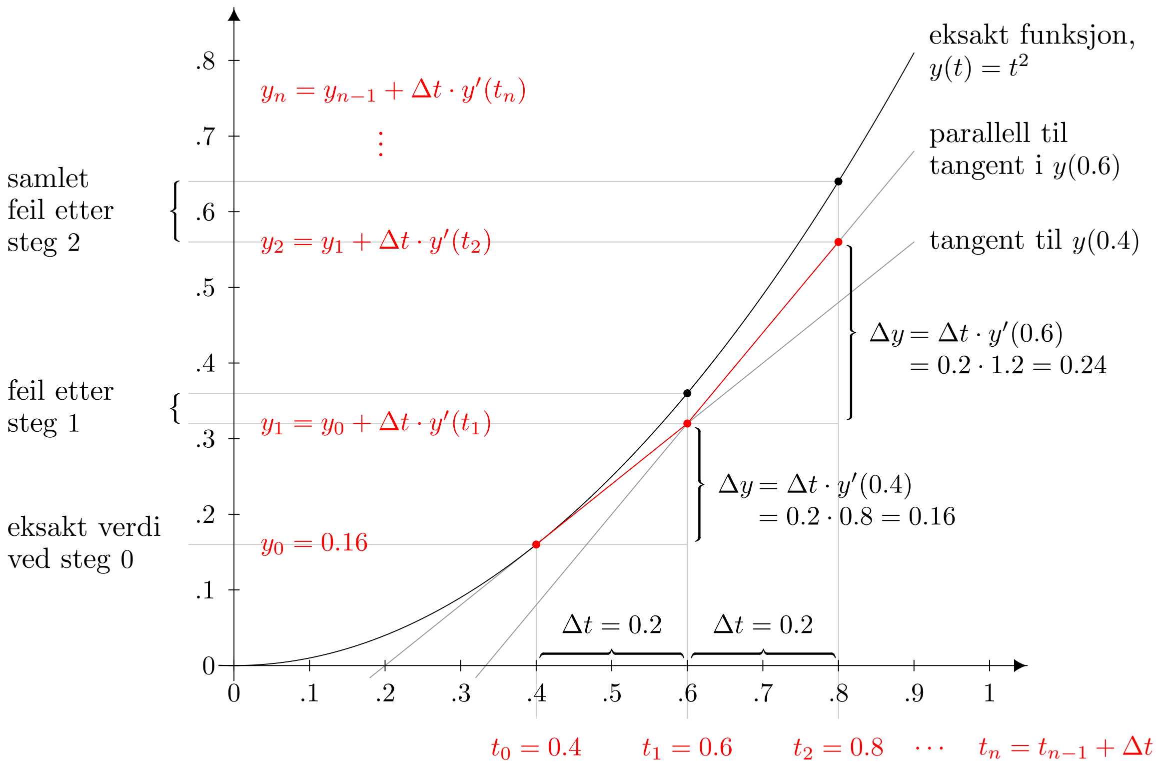
Modell A
Fritt fall uten luftmotstand

$$
\begin{aligned}
\Sigma K = ma &= mg \\
a_A(t) &= g \\
\frac{dv}{dt} &= g \\
\int dv &= g \int dt \\
v &= gt + c_1 \\
v(0) &= v_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0 \\
v_A(t) &= gt + v_0 \\
\frac{dy}{dt} &= gt + v_0 \\
\int dy &= \int (gt + v_0)\, dt \\
y &= \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + c_2 \\
y(0) &= y_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = y_0 \\
y_A(t) &= \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0
\end{aligned}
$$

Modell B
Fritt fall med luftmotstand

$$
\begin{aligned}
\Sigma K = ma &= mg - kv \\
a &= g - \frac{k}{m} v \\
\frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m} v \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right) \\
\int \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} &= -\frac{k}{m} \int dt \\
\ln\left|v - \frac{mg}{k}\right| &= -\frac{k}{m} t + \ln|c_3| \\
\ln\left|\frac{v - \frac{mg}{k}}{c_3}\right| &= -\frac{k}{m} t \\
v - \frac{mg}{k} &= \pm c_3 e^{-\frac{k}{m} t} \\
v &= \frac{mg}{k} + c_4 e^{-\frac{k}{m} t} \\
v(0) &= v_0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = v_0 - \frac{mg}{k} \\
v_B(t) &= \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t} \\
a &= \frac{dv}{dt} \\
a &= \frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t}\right] \\
a &= \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{k}{m}\right) e^{-\frac{k}{m} t} \\
a_B(t) &= \left(g - \frac{v_0 k}{m}\right) e^{-\frac{k}{m} t} \\
\frac{dy}{dt} &= v \\
\int dy &= \int \left[\frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t}\right] dt \\
y &= \frac{mg}{k} t + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t} + c_5 \\
y &= \frac{m}{k}\left[gt - \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m} t}\right] + c_5 \\
y(0) &= y_0 \quad \Rightarrow \quad c_5 = y_0 - \frac{m}{k}\left[-\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\right] \\
y_B(t) &= y_0 + \frac{m}{k}\left[gt + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Figur 9: To forskjellige utledninger av symbolske uttrykk for beskrivelse av posisjon, hastighet og akselerasjon av en ting i fritt fall. Modell A til venstre tar utgangspunkt i Newtons 2. lov i konstant tyngdefelt. Modell B til høyre tar i tillegg hensyn til luftmotstanden og modelleres som proporsjonal med, og motsatt rettet av farten.




Figur 10: Eulers metode anvendt på funksjonen $y(t) = t^2$

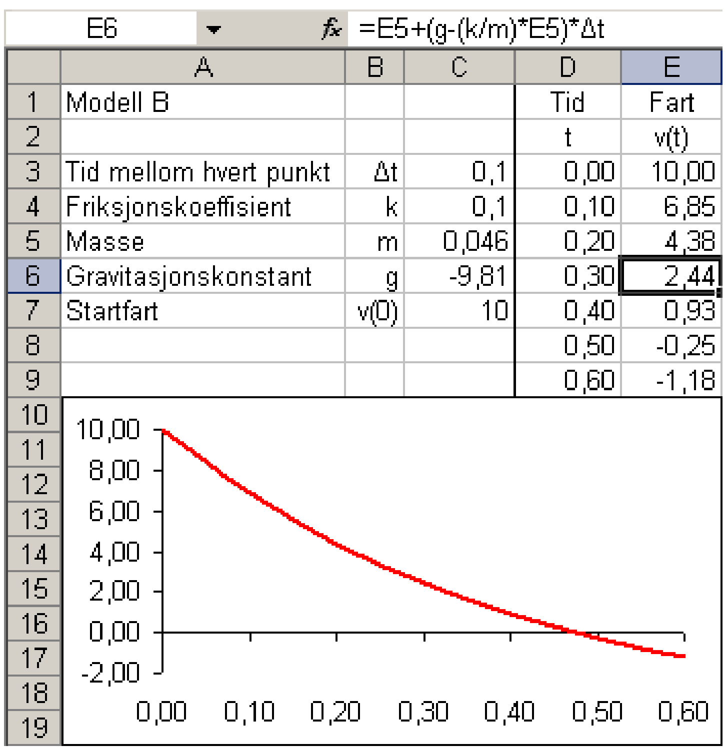
La oss se hvordan Eulers metode kan brukes for å finne en numerisk løsning for farten til et legeme som blir påvirket av tyngdekraft og luftmotstand. Et naturlig utgangspunkt er $dv/dt = g - kv/m$ og omformes på følgende måte:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v \\ \frac{\Delta v}{\Delta t} &\approx g - \frac{k}{m}v \qquad\qquad \text{der } \Delta t > 0 \\ \Delta v &\approx \left(g - \frac{k}{m}v\right)\Delta t \end{aligned}$$

Hvis vi nå kjenner $v(0) = v_0$, kan vi få frem tilnærmede punkter på $v(t)$ ved å bruke rekursjonsformelen:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)\Delta t$$

Denne kan legges inn i regneark slik:

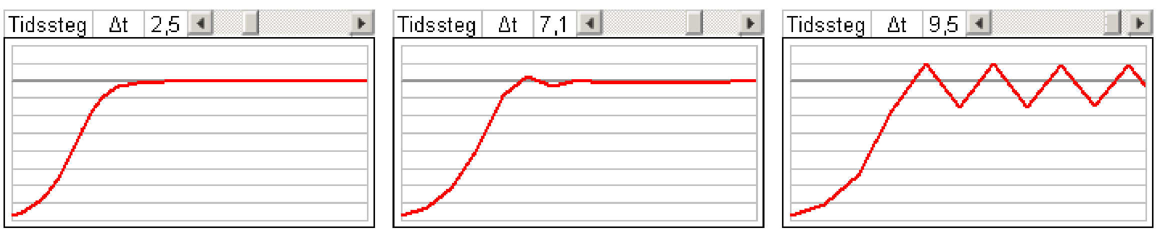

E6 =E5+(g-(k/m)*E5)*Δt

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Modell B | | | Tid | Fart |
| 2 | | | | t | v(t) |
| 3 | Tid mellom hvert punkt | Δt | 0,1 | 0,00 | 10,00 |
| 4 | Friksjonskoeffisient | k | 0,1 | 0,10 | 6,85 |
| 5 | Masse | m | 0,046 | 0,20 | 4,38 |
| 6 | Gravitasjonskonstant | g | -9,81 | 0,30 | 2,44 |
| 7 | Startfart | v(0) | 10 | 0,40 | 0,93 |
| 8 | | | | 0,50 | -0,25 |
| 9 | | | | 0,60 | -1,18 |



Denne måten å arbeide med regneark på beskrives av Bissell (1995). Man kan godt løse differensiallikninger numerisk med generelle matematikkprogrammer, men det kan komme mye bra læring ut av å gjøre det "manuellt" med regneark. Som nevnt tidligere, er det lettere å arbeide med teknologi man er vant med, enn å lære seg et nytt system. Eulers metode er en veldig intuitiv og konseptuell måte å arbeide med matematikk på, samtidig som den gir konkrete løsninger. Det å "diskretifisere" kontinuerlige uttrykk på denne måten kan være en god introduksjon til derivasjon. Terskelen for å lære seg metoden mener jeg er lav, og egner seg godt til at elevene kan sette opp regneark selv. Hele regnearket kommer da under elevens kontroll i et kjent miljø. Gjennom plottemuligheten og rullefeltet som beskrevet i 4.7 på side 29, får elevene umiddelbar feedback fra systemet ved endring av initialkrav og parameterverdier.

Et relevant ankepunkt ved Eulers metode er at den kan gi upresise løsninger om steglengden ikke er kort nok. Den oppsamlede feilen kan til slutt bli så stor at den numeriske løsningen et stykke unna utgangspunktet ikke er nærme nok den egentlige løsningen. Dette er et viktig moment, og må håndteres grundig. Først og fremst må man diskutere steglengden og hva denne betyr med studentene. Det er viktig at studenten forstår hvorfor det skjærer seg om steglengden blir for lang. Et fint eksempel å vise frem er Verhulsts modell for befolkningsvekst med for lang steglengde. Man vil da se en graf som hopper opp og ned omkring bæreevnen:




En måte å få en indikasjon på om man har kort nok steglengde er å justere steglengden til å bli kortere og kortere mens man ser på grafen. Om denne ikke endrer seg fra en steglengde til en vesentlig kortere steglengde, er det grunn til å anta at man har en så kort steglengde at den eventuelle unøyaktigheten er mindre enn grafens oppløsning på skjermen.

Det ikke er så farlig om metoden i utgangspunktet er litt upresis. Maskiner i dag er så raske at man i de fleste tilfeller kan overkomme en god del av unøyaktigheten ved å bruke mange korte steg. Det kan ofte forekomme måleunøyaktigheter i initialverdiene til en differensiallikning. Det kan gjøre det mindre viktig å ha stor nøyaktighet i utviklingen av løsningen. Det er også viktig å huske på at modellen er en idealisering, og at selv om man har meget nøyaktige utviklinger, ikke nødvendigvis kan si at det i virkeligheten vil skje akkurat slik om man bruker modellen til forutsigelser. Det er viktigere å se på *tendensene* i modellen. Får vi f.eks. periodiske verdier, konvergens eller divergens.

Det finnes mengder av numeriske metoder som er mer nøyaktige enn

Eulers metode, men de er mer tekniske og egner seg derfor mindre bra i videregående. Jeg anbefaler at flinke elever kan fordype seg i slike metoder om de vil. Cheney og Kincaid (1994) gir en grei innføring i numeriske metoder.

Generelt så løses initialverdiproblemet til en første ordens differensiallikning numerisk med Eulers metode på følgende måte. Utgangspunktet er følgende initialverdiproblem:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Om $y(t)$ er uendelig mange ganger deriverbar i et område $[a, b]$, så konvergerer Taylorrekka til $y$, og:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot y'(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t)^n y^{(n)}(t)$$

Hvis vi kun tar vare på de to første leddene så kan vi bruke følgende formel for å finne et nytt punkt på $y(t)$:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot f(t, y(t))$$

Dette er altså Eulers metode. Metoden kan generaliseres for å få bedre nøyaktighet ved å ta vare på flere ledd, og derivere $y'(t)$ flere ganger. Systemer av, og høyere ordens differensiallikninger kan fint løses med samme prinsipp, og er like "lett" å implementere i regneark. Et eksempel på høyere orden er Hookes lov. Et eksempel på system av likninger er Lotka-Volterras modell for rovdyr og byttedyr.

## 4.9 Datalogging med kamera

I mange klassiske fysikkeksperiment er man interessert i å studere forskjellige typer bevegelse. Om bevegelsen kan ses, kan den ofte også filmes. For å få data som tidspunkt og posisjon, kan man bruke et filmkamera. Man filmer f.eks. en person som kaster en ting opp i luften, eller slipper den fra en viss høyde. Etterpå studerer man filmen bilde for bilde og henter ut nødvendig informasjon. For å være helt sikker på hvor mange bilder i sekundet man filmer med, kan man filme en klokke som viser sekunder. Ved å studere filmen bilde for bilde, kan man så telle opp antall bilder med samme tidspunkt på klokka.

### Måleusikkerhet pga perspektiv

Når man henter data fra virkeligheten, må man alltid kjempe mot måleusikkerhet. Gitt måten man filmer på (avstand fra kamera til motiv osv), kan perspektivforskyvning føre til måleusikkerhet om man ikke tar hensyn til det. Man må holde rede på og kontrollere vinkler og perspektivforskyvning for å få resultater som er nøyaktige nok. Gjør man en naiv måling av avstander direkte i et bilde kommer man fort på villspor om man ikke tar hensyn til perspektivet. Vanlige kameraer har en synsvinkel på 50°–25° og man risikerer dermed en målefeil på ca 7%. Hvis man har plass, kan man flytte kameraet lengre unna det man har tenkt å filme, og så zoome inn. Perspektivforskyvningen blir da mindre, men det kan bli mindre praktisk å filme bevegelser som strekker seg over større områder, f.eks. en fotballbane. For å få gode data fra en film eller et bilde, må man derfor korrigere for denne perspektivforskyvningen. Man kan derfor utvikle en matematisk modell som kan konvertere den direkte målingen i bildet til den virkelige høyden man er ute etter. Jeg mener det er meget nyttig for elevene å forstå hvorfor perspektivet kan skape problemer, og hvordan man løser det. Utviklingen av denne løsningen blir beskrevet i følgende avsnitt.

Små barn kan få for seg at ting langt borte blir mindre. Etterhvert lærer vi at ting langt borte kun *ser* mindre ut. Om vi ser på to like store biler, en 10m fra oss og den andre 20m fra oss, tolker vi dem automatisk som like store biler uten å tenke oss om. Vi er så vant med å se i perspektiv at vi ofte ikke er klar over denne automatiske tolkningen. Det er nettopp denne ubevisste, automatiske tolkningen av perspektivet vi må gjøre manuellt for å hente ut objektive data om virkeligheten, fra bilder av virkeligheten. Det vi tar tak i er at ting langt borte *opptar mindre plass i synsfeltet* enn ting som er nærme. Når vi studerer filmopptaket av et eksperiment er vi derfor interessert i avstander i bildet.

Figur 11 på neste side viser en person som nettopp har kastet en golfball opp i luften. Hvordan kan vi finne ut av hvor høyt ballen er over bakken? Et raskt anslag vil være 2 ganger høyden til personen. Om personen er 1,8m finner vi ballen 3,6m over bakken. Som anslag er dette fint, men i et eksperiment har det ikke så stor verdi. Vi er interessert i så nøyaktige data som mulig, gitt omstendighetene. Vi kan måle mer nøyaktig med en linjal og få tak i personens egentlige høyde. Man skulle kanskje tro at ballens virkelige høyde var lik forholdet (i bildet) mellom høyden på ballen og høyden på personen ganget med personens virkelige høyde. Om man tror det, har man ikke tatt hensyn til perspektivet, og man vil få et galt resultat.

Veggen langs kanten på bildet ser smalere ut nær toppen av bildet enn nede ved bunnen, selv om kantene på veggen i virkeligheten er parallelle. Dette skyldes at den delen av veggen som er nær toppen av bildet er lengre unna kameraet enn den delen av veggen som er nær bunnen av bildet. Perspektivet påvirker på samme måte ballens antatte høyde, siden også ballen endrer avstand i forhold til kameraet når den beveger seg opp og ned i forhold til bakken. Om personen i bildet hadde blitt heist opp til nær toppen av bildet, ville han også opptatt mindre høyde i bildet av samme grunn.

Hvordan finner vi så ballens egentlige høyde? En nøkkel til dette er idéen ovenfor om å bruke noe i bildet som *målestokk*. I dette tilfellet brukte vi høyden til en person i bildet som referanse for å estimere andre høyder i

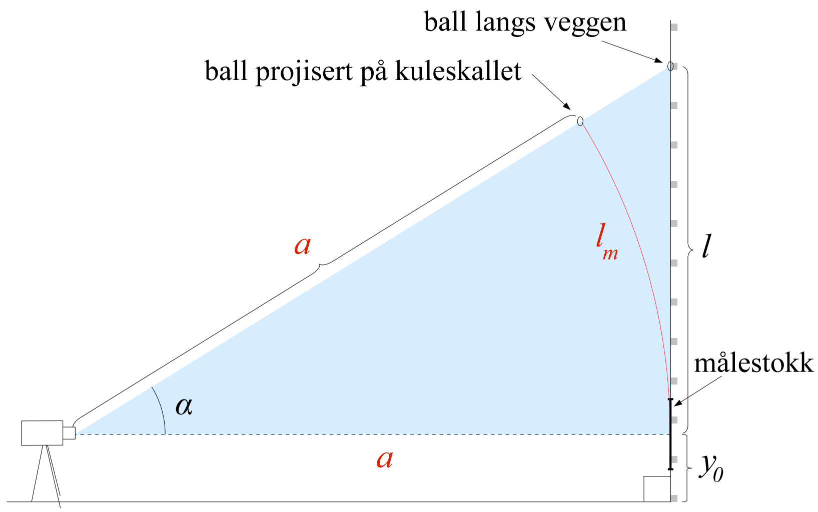
Figur 11: Kast av golfball

bildet. Problemet som oppstår er når vi henter en målestokk i en del av bildet og bruker den samme målestokken et annet sted i bildet. Hvis det andre stedet i bildet har en annen avstand fra kameraet enn avstanden fra kameraet til der vi hentet målestokken, vil målingen bli gal. Da gjør vi på en måte motsatt feil i forhold til det som ble nevnt tidligere; i motsetning til å tro at en ting blir mindre når det er langt borte, tror vi nå at en ting tar like stor plass i synsfeltet uavhengig av hvor nærme tingen er. Relatert til bildet vist i figur 11, tror vi derfor at den målte høyden i bildet fra bakken til ballen er lik den virkelige høyden fra bakken til ballen.

Det viser seg at ballen i bildet befinner seg *høyere* i virkeligheten enn en naiv måling direkte i bildet skulle tilsi. Selv om vi nå vet at vi får gale høyder ved å måle naivt, er det tross alt kun den naive målingen vi har å forholde oss til. Vi må på en eller annen måte ta utgangspunkt i den naive målingen for å regne ut den ekte høyden. For å finne ut av hvordan, kan vi spørre oss selv: Hva betyr det egentlig matematisk når vi bruker den samme målestokken over alt i bildet? La oss kalle avstanden fra kameraet til målestokken for $a$. Alle steder i bildet som er lengre unna kameraet enn $a$ vil da bli målt til å være kortere enn det de er i virkeligheten. Motsatt, vil alle steder i bildet som er nærmere kameraet enn $a$ bli målt til å være lengre enn det de er i virkeligheten. Alle steder i bildet som tilfeldigvis befinner seg akkurat i en lengde $a$ fra kameraet vil bli målt i riktig størrelse. Det er verdt å merke seg hva slags geometrisk sted dette er. Det er nemlig et kuleskall med sentrum i kameralinsa og radius lik $a$.

For å finne ballens virkelige høyde kan vi utføre et tankeeksperiment. Hvis vi sikter kameraet direkte mot en vegg og velger en målestokk på veggen rundt punktet vi sikter på, så kan vi gjøre sikre målinger av små avstander rundt siktepunktet. Jo lenger unna siktepunktet vi måler på veggen i bildet, jo større blir målefeilen. Vi vet også at om vi spenner opp en hul kule som tangerer veggen i siktepunktet og har sentrum i kameralinsa, vil alle målinger i bildet av avstander på kuleskallet være riktige med den valgte målestokken. La så denne oppspente kula bli gjennomsiktig, slik at kameraet kan ta et bilde av veggen gjennom kuleskallet. Kameraet tar nå et bilde av veggen tilsvarende bildet vist i figur 11 på forrige side. Hvis vi nå ser for oss at det går en linje fra sentrum i ballen, gjennom kuleskallet og inn i kameralinsa, så får vi projisert ballen på kuleskallet. Vi ser situasjonen fra siden i figur 12.

Poenget med tankeeksperimentet er å knytte sammen noen viktige opplysninger: At alle målinger langs kuleskallet med radius $a$ er riktige, at kuleskallet tangerer veggen i siktepunktet, at vi har hentet målestokken fra et lite område rundt siktepunktet, at en vegg er loddrett, og at kameralinsa, den projiserte ballen på kuleskallet og den ekte ballen ligger på samme linje. Til sammen gir dette oss en mulighet til å regne ut ballens virkelige høyde.



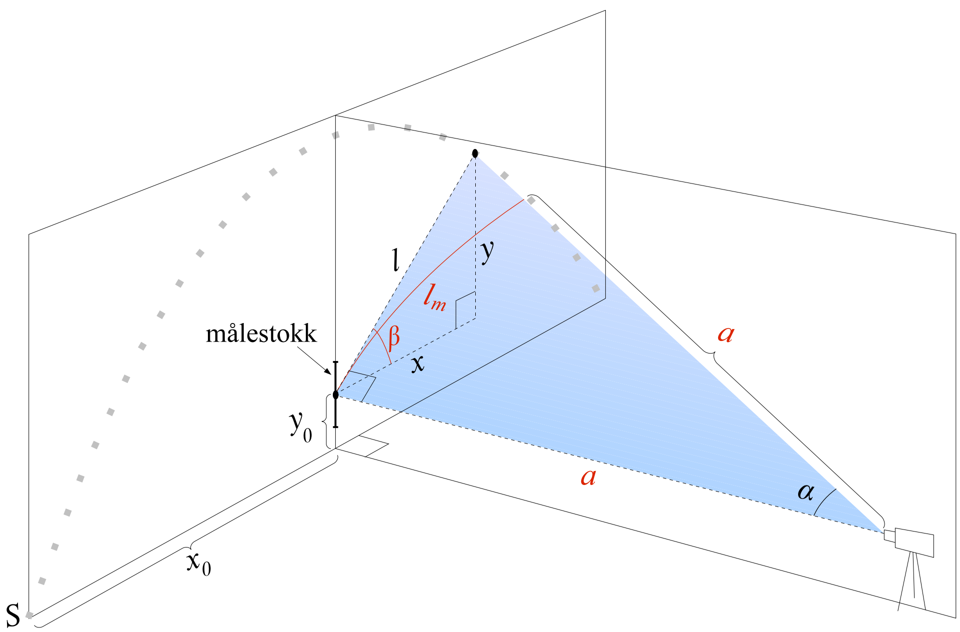

Figur 12: Tankeeksperimentet om perspektiv sett fra siden

Vi måler direkte i bildet avstanden $l_m$ langs et tenkt kuleskall med radius $a$. Dette er en lengde vi er sikker på siden vi vet at målinger langs kuleskallet med en målestokk hentet fra kuleskallet er riktige. Vi må også måle avstanden $a$ fra kameraet til veggen i det vi gjør opptaket. Ballens ekte høyde representeres med størrelsen $l$. Siden vi nå har en geometrisk sammenheng mellom de relevante størrelsene, kan formelen for $l$ utledes på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
l_m &= a\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{l_m}{a} \\
\tan\alpha &= \frac{l}{a} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{l_m}{a} = \frac{l}{a} \\
l &= a\tan\frac{l_m}{a}
\end{aligned}
$$

For at dette eksempelet skal fungere, må ballen bevege seg helt inntil veggen. I praksis måler vi egentlig lengden $a$ fra kameralinsa til planet ballen beveger seg i. Dvs at vi slett ikke trenger å stå foran en vegg å kaste, men dette kan være til hjelp for å kontrollere at ballen holder seg til ett plan gjennom hele bevegelsen.

For å i tillegg kunne hente data fra bevegelser i sideretningen, kan vi generalisere situasjonen som vist i figur 13.




Figur 13: Håndtering av perspektiv i høyde- og sideretning.

Rent praktisk gjennomføres eksperimentet på følgende måte. Kameraet settes opp i en avstand $a$ fra planet man vil utføre eksperimentet i (eksperimentplanet). Så pekes kameraet inn på et siktepunkt slik at siktelinjen står normalt på eksperimentplanet. Avstanden fra bakken til siktepunktet måles opp ($y_0$). Plasser en målestokk slik at siktepunktet kommer nærme midten på målestokken. Som målestokk kan man bruke en planke/person eller noe liknende. Film det som skal filmes, og studér i etterkant filmen bilde for bilde. Mål målestokken og regn ut omregningsfaktoren for skjermlengder til virkelige lengder. Mål avstanden på skjermen fra siktepunktet og ut til tingen som beveger seg ($l_m$). Tingens virkelige avstand fra siktepunktet er $l = a\tan(l_m/a)$. Mål vinkelen $\beta$ på skjermen. Tingens virkelige avstand fra siktepunktet i sideretning og i høyderetning er da hhv $x = l\cos\beta$ og $y = l\sin\beta$. Om man vil, kan man godt velge et punkt $S$ i eksperimentplanet til å være origo, og måle opp $x_0$ som vist i figur 13 på forrige side. Man får da alle virkelige koordinatpar som $(x_0 + x, y_0 + y)$.

### Andre typer måleusikkerhet

Kameraets lukkertid kan være et potensiellt problem. Om det er mørkt der man filmer og/eller det man filmer beveger seg raskt, kan man risikere at lukkertiden blir for stor. Det resulterer i at det man filmer strekker seg utover i bildet. Man kan forsøke å bøte på problemet ved å skaffe mer lys, eller tvinge kameraet manuellt til å korte ned lukkertiden, selv om dette kan resultere i for mørke bilder. Hvis det ikke er mulig å fikse problemet, kan man håndtere det ved å konsekvent lese av koordinatene i midten av det man ser av objektet på filmen.

Filmens oppløsning vil være en begrensning på hvor nøyaktige data man kan klare å logge. Egen erfaring, som forklart i kapittel 5 på neste side, viste at bruk av filmfunksjonen i et vanlig digitalkamera fra 2005 som egentlig var ment for stillbilder knapt var bra nok til å skaffe gode måledata.

I noen kameralinser med stor synsvinkel, kan man få såkalt "tønneforvrengning". Dette fører til at motivet ser ut til å bule mot kameraet. Dette kan man se en tendens til i bildet på side 40. Det finnes programvare som kan fikse denne feilen på enkeltbilder, men per i dag kan man ikke enkelt fikse en film. En metode som likevel så godt som fjerner dette problemet er å flytte kameraet lenger unna motivet, og zoome inn. Man bruker da et mindre område av linsa og får dermed mindre forvrengning av bildet. Hvor mye man trenger å zoome er forskjellig fra kamera til kamera. Man bør ikke zoome mer enn det linsa klarer optisk, da digital zooming vil gå ut over oppløsningen.

Uansett hvor nøyaktige målinger man har tilgang på, vil man alltid ha måleusikkerhet. Poenget er å få tak i gode nok målinger på en enklest mulig måte samtidig som man er klar over fenomenet med måleusikkerhet.

# 5 Praktisk eksempel på modellering med teknologi

## 5.1 Bakgrunn

Høsten 2006 hadde jeg gleden av å undervise i faget MA-411 Moderne Teknologi i Matematikkundervisningen ved Høgskolen i Agder (nå Universitetet i Agder). Dette er et av kursene i mastergradsprogrammet i matematikkdidaktikk. En av ukene tok jeg for meg modellering med teknologi. For å gjøre emnet relevant for alle som tok kurset (enten om de senere skulle undervise i ungdomsskolen eller videregående) bestemte jeg meg for å gjennomføre en ganske åpen arbeidsform. Opplegget inneholdt elementer nok til å kunne brukes på flere årstrinn, evt. differensiert undervisning i samme klasse. På den måten kunne hver av studentene selv vurdere og velge ut elementer av opplegget som var mest aktuelle for dem.

## 5.2 Opplegget

Opplegget bestod hovedsaklig i å modellere kast av en golfball og en papirkule. Dette ble filmet, filmen ble studert og koordinater for høyde og tid lagt inn i et regneark. Der ble dataene analysert på forskjellig måte: Vanlig regresjon og sammenlikning av dataene med hva to typer modeller forutsier vil skje i situasjonen. De to modellene var Newtons 2. lov med og uten luftmotstand.

Jeg hadde fire klassetimer til rådighet. Den første timen ble gjennomført som en forelesning der jeg definerte problemområdet:

> ***Modellering av fallbevegelse.*** *Om vi kaster en ting opp i været, kan vi observere at tingen beveger seg tregere og tregere til den stopper opp og begynner å akselerere mot bakken igjen. Hvordan kan denne bevegelsen beskrives matematisk? Og hvordan kan teknologi hjelpe oss med arbeidet? Først må vi vite nøyaktig hva vi er interessert i å finne ut av. La oss først avgrense problemet til å prøve å finne en sammenheng mellom tiden og tingens høyde over bakken. Matematisk kan en slik sammenheng beskrives som en funksjon $y$ av tiden $t$, dvs $y(t)$.*

Jeg startet altså med å ta utgangspunkt i noe fra virkeligheten – et kjent fenomen, og ville bruke teknologi for å analysere dette matematisk. Jeg gikk så gjennom hva man må ta hensyn til ved datalogging med kamera, som beskrevet i kapittel 4.9 på side 38. På slutten av den første timen, presenterte jeg så følgende oppgave:

> ***Oppgave 1.*** *Film kast av en golfball og et sammenkrøllet A4-ark og legg dataene inn i Excel. Lag diagrammer for hvert av datasettene der høyde i meter plottes i forhold til tid i sekunder.*

*For å gjennomføre en 2. grads regresjon, trykker du i diagrammet og velger fra menyen: Diagram, Legg til trendlinje... Velg 2. grads polynom og "Vis formel i diagrammet" samt "Vis R-kvadrert verdi i diagrammet" i Alternativer menyen. Passer 2. grads regresjon best for golfballen eller for papiret?*

Selve filmingen gjorde vi sammen som klasse den neste timen. Vi brukte et vanlig digitalkamera med filmfunksjon på stativ. Kvaliteten på utstyret var på grensen til det brukbare, da både oppløsningen og lukkertiden førte til en ganske dårlig filmkvalitet.

Etter filmingen fikk studentene utdelt den symbolske utledningen av bevegelsesfunksjonene for fritt fall uten luftmotstand med Newtons 2. lov ($dv/dt = -g$). Siden ikke alle disse studentene var like flinke i fysikk, var dette nødvendig. Resten av tiden ble så brukt i en datalab. Neste oppgave så slik ut:

***Oppgave 2.*** *Hvilken verdi har $g$ på jorda, sånn ca? Kan du estimere $g$ ved å bruke regresjonsformelen du fant tidligere? Hva skjer med $v_A(t)$ når $t \to \infty$? Er det realistisk?*

Modellen uten luftmotstand ble kalt *Modell A*. Gjennom (ledet) diskusjon kom vi frem til en alternativ modell, *Modell B*, som tok hensyn til luftmotstanden. Differensiallikningen var nå blitt til $dv/dt = -g - kv/m$, der luftmotstanden blir modellert som proporsjonal med, og motsatt rettet av farten. Siden denne er vanskeligere å utlede symbolsk, gikk vi gjennom en beskrivelse av Eulers metode, som beskrevet i kapittel 4.8 på side 33. Poenget var nå å løse *Modell B* numerisk i regneark. De siste oppgavene så slik ut:

***Oppgave 3.*** *For hvert av datasettene, gjør følgende. Anslå farten ved $t = 0$. Lag et diagram som tegner opp $v(t)$. En golfball veier ca 46 gram. Hvor mye veier A4-arket? Eksperimenter med forskjellige verdier av $k$ og $\Delta t$. Hvor liten må $\Delta t$ være før du er sikker på at du er rimelig nær den ekte $v(t)$? Du har måledata for $y(t)$. Utled en ny tabell på grunnlag av måledataene som viser $v(t)$ og plott disse punktene i samme diagram som den numeriske løsningen av Modell B. Klarer du å justere $k$ slik at den numeriske løsningen og de utledede hastighetsdataene faller sammen? Hva er $k$ for golfballen og det sammenkrøllede papirarket? I følge grafen til $v$ i Modell B, hva skjer når $t \to \infty$? Virker det rimelig?*

***Oppgave 4.*** *Hva slags funksjon vil dukke opp om man løser Modell B analytisk? TI-92 kan løse slike differensiallikninger. Kan du vha CAS'en i TI-92 finne et uttrykk for v(t) for Modell B? Hva med $a(t)$ eller $y(t)$?*

### 5.3 Intensjoner og erfaringer

Målet mitt var å eksponere studentene for noe av det matematisk modellering dreier seg om. Siden jeg kun hadde fire timer til rådighet, måtte jeg kjøre et ganske styrt opplegg for å rekke over flest mulig aspekter ved det å jobbe med modellering. Selv om jeg skulle ønsket å bruke mer tid, med en mer åpen arbeidsform, virket det som studentene forsto godt på vei poenget med modellering.

Jeg forsøkte å bygge oppgavene på hverandre med økende vanskelighetsgrad, og jeg regnet ikke med at alle ville klare å komme gjennom alt, noe heller ikke alle gjorde. Papirkulen som ble brukt, ble så hardt krøllet sammen at det faktisk ble vanskelig å måle effekten av luftmotstanden. En badeball ville vært et bedre alternativ. Som nevnt, kunne også filmutstyret vært bedre.

Da jeg gjennomførte økten hadde jeg ingen kunnskaper om modelleringsprosessen til Blomhøj og Jensen (som beskrevet i figur 4 på side 16). Et naturlig spørsmål er da hva jeg ville gjort annerledes, med denne kunnskapen, om jeg skulle gjennomført en liknende introduksjon til emnet nå.

Opplegget jeg gjennomførte var bygget opp rundt konseptet å ta utgangspunkt i noe fra virkeligheten, bevege seg over i matematikk, og tilbake til virkeligheten igjen, men litt på kryss og tvers. Selv om jeg hadde et bilde av denne prosessen i mitt hode, og kan ha nevnt dette prinsippet i forbifarten til studentene, var jeg på ingen måte klar og tydelig nok på at det er slik matematisk modellering er bygget opp. Det hadde vært mye bedre å hele tiden hatt med og referert til en konkret prosessbeskrivelse i løpet av de fire timene. Det hadde vært mer nyttig for studentene å vite hvor i prosessen de befant seg til enhver tid, hvilket steg videre som var naturlig, og hvorfor. Et eksempel er når vi hadde hatt en "runde" i prosessen og kommet frem til modellen uten luftmotstand, så kunne det være naturlig å diskutere styrker og svakheter med den modellen, og si at man nå innførte en ny modellforutsetning (luftmotstand), og tatt en ny runde.

# 6 Problemstillinger

I dette kapittelet vil jeg presentere en del forslag til problemstillinger. Jeg vil ikke presentere noen fullstendig analyse av problemstillingene, men først og fremst diskutere de tidligste stegene i modelleringprosessen (a til d) og didaktiske spørsmål knyttet til disse. Det er ulike grunner til det: Mange av modellene er klassiske, og en total utledning av disse vil ikke være noe mer enn en kopi av annen litteratur. I de fleste tilfeller vil det også være mange måter å angripe et problem på, og det ville være alt for omfattende å forsøke å kartlegge alle disse. I noen tilfeller har jeg imidlertid sett det nødvendig og naturlig å komme med noen kommentarer til de andre stegene.

Noen av problemstillingene bygger på hverandre, og disse er plassert etter hverandre. Dette gjøres som en slags simulering av den sirkulære arbeidsmåten i modellering; Ved å ta utgangspunkt i den forrige modellen, og innføre en ny modellforutsetning, diskuteres det så hensikten med dette, og hva slags konsekvenser det har for den nye modellen.

For å kunne bruke disse problemstillingene i undervisningsopplegg, må man plukke ut de elementene man mener er nødvendige. Man må spørre seg: Hvor flinke er elevene nå i modellering? Hvor åpen/lukket bør oppgaven være? Hvilke matematiske verktøy skal være i fokus? Eller bør elevene finne ut av det selv? Det er naturlig å plukke ut de enkleste elementene først, og så justere noe på modellforutsetningene og ta en ny runde i modelleringsprosessen, for å kunne bruke modellen til å svare på flere og mer avanserte spørsmål.

## 6.1 Fritt fall

**Oppfattet virkelighet:** Tyngdekraften er noe vi erfarer hvert våkne øyeblikk. Vi vet at om vi kaster noe opp, så kommer det ned igjen. Mange har såpass god føling med slike bevegelser at de ofte kan forutsi med ganske stor nøyaktighet hvor en ball havner etter å ha sett retning og hastighet en kort stund i luften. De trenger ikke løse likninger for å vite det, men det kan likevel være interessant å analysere slike bevegelser matematisk.

**(a) Problemformuleringer:** Hvis man kaster en golfball opp i luften, hvor lang tid tar det før den treffer bakken? Hva treffer bakken først av et lodd på 1kg og et lodd på 2kg?

**(b) Datasamling:** Disse situasjonene kan filmes som forklart i kapittel 4.9 på side 38.

**(c) Systematisering:** Tyngdefeltet $g$, objektets masse $m$, starthastighet $v_0$, startposisjon $y_0$.

**(d) Matematisering:** Newtons 2. lov gir oss $F = ma = mg \Rightarrow dv/dt = g$.

**(e) Analyse:** Som vist i figur 9 på side 34, får vi følgende bevegelsesfunksjoner: $a(t) = g$, $v(t) = gt + v_0$, $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$. Dette kan man få til med TI-89 med `deSolve(v'=g and v(0)=v0,t,v)` som gir `v=g·t+v0` og `deSolve(y'=g*t+v0 and y(0)=y0,t,y)` som gir $\mathtt{y}=\dfrac{\mathtt{g\cdot t^2}}{2}\mathtt{+v0\cdot t+y0}$.

**Kommentarer:** Et vanskelig moment i utledningen av denne modellen er forståelsen av, og hensikten med Newtons 2. lov. Man kan ikke forvente at elevene selv skal klare å finne på å bruke denne i begynnelsen. Det er viktig at de tidlig blir eksponert for bruken av den så de senere kan ta den i bruk uoppfordret. Å forklare hvorfor loven ser ut som den gjør er ikke enkelt. Det er relevant å gå gjennom følgende: Sammenhengene $a(t) = dv/dt$, $v(t) = dx/dt$. Rent matematisk viser seg å være lurt å definere tyngde*kraften* som produktet av tyngde*feltet* $g$ og massen $m$. Dette produktet har samme benevning som kraft, $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$. Summen av kreftene på en ting er rettet i en spesifikk retning og denne kraften endrer hastigheten på tingen i den samme retningen. En konsekvens av at summen av kreftene er proporsjonal med akselerasjonen er at om man dytter dobbelt så hardt på en bil, akselererer bilen dobbelt så fort. En konsekvens av at akselerasjonen er invers proporsjonal med massen er at om bilens masse dobles, halveres akselerasjonen. Alt dette er ganske intuitivt, og er med på å bygge opp forståelsen av Newtons 2. lov som modellforutsetning.

Når man plotter grafen for $y(t)$ kan det være fort gjort å forveksle denne andregradskurven som ballens bane gjennom luften, som det jo ikke er siden vi har tid langs førsteaksen, ikke avstand.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)
Feynman, Leighton, og Sands (2006)

## 6.2 Fritt fall med luftmotstand

**Oppfattet virkelighet:** Vi ser at badeballer ikke flyr så langt som volleyballer pga luftmotstanden.

**(a) Problemformuleringer:** Hvordan påvirkes to lodd med ulik vekt om loddene utstyres med en fallskjerm? Hvis en målvakt sparker en fotball fra mål, hvor vil den treffe bakken i forhold til hastigheten og vinkelen ballen sparkes med?

**(b) Datasamling:** Disse situasjonene kan filmes som forklart i kapittel 4.9 på side 38.

**(c) Systematisering:** Objektets masse $m$, starthastighet i x-retning og y-retning $v_{0x}$ og $v_{0y}$, startposisjon i x- og y-retning $x_0$ og $y_0$, utgangsvinkel $\alpha$.

**(d) Matematisering:** Når hastighetene er relativt lave, er det vanlig å modelleres luftmotstand som kraften $-kv$ der $k > 0$, altså en kraft som er proporsjonal med og motsatt rettet av farten. Der er interessant å diskutere hvorfor dette er rimelig å anta. Av erfaring vet de fleste at det er tyngre å sykle i motvind enn i medvind. Vi vet også at en seilbåt går raskere jo høyere vindhastigheten er. Om hastigheten er veldig høy, viser det seg at $-kv^2$ gir bedre resultater. Konstant tyngdefelt og lav hastighet gir altså modellen $F = ma = mg - kv \Rightarrow dv/dt = g - kv/m$.

**(e) Analyse:** Se figur 9 på side 34. TI-89 løser denne ved `deSolve(v'=g-k*v/m and v(0)=v0,t,v)` som gir $\texttt{v=}\left(\texttt{v0}-\frac{\texttt{g}\cdot\texttt{m}}{\texttt{k}}\right)\cdot e^{\frac{-\texttt{k}\cdot\texttt{t}}{\texttt{m}}}+\frac{\texttt{g}\cdot\texttt{m}}{\texttt{k}}$, som kan utledes videre med verktøyene $\int($ og $d($. Man kan også studere denne med Eulers metode i regneark.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)

**Kommentarer:** Vi øker vanskelighetsgraden her på to måter: Bevegelsesfriheten øker til to dimensjoner og vi innfører en ekstra kraft. Det at noe kan bevege seg i høyden og langs bakken samtidig er ikke vanskelig å forstå, men det innebærer flere variabler å holde styr på rent matematisk. Tyngdekraften virker kun i y-retning, mens luftmotstanden virker i begge retninger. At kreftene kan dekomponeres langs retningene er ikke gitt uten videre, og er kun en forutsetning (med mindre man har vist dette eksperimentellt). Det at uttrykket $-kv$ kan representere en kraft, kan være vanskelig å akseptere. Poenget her er at parameteren $k$ må ha en benevning som er tilpasset slik at når den ganges med $v$ så får vi Newton ut.

## 6.3 Fritt fall i variabelt tyngdefelt

**Oppfattet virkelighet:** Videoopptak fra månen viser at tyngdekraften der må være lavere enn på jorda.

**(a) Problemformuleringer:** Hvordan oppfører tyngdekraft seg generelt? Hvor stor hastighet trenger et prosjektil for å unnslippe månens tyngdefelt?

**(b) Datasamling:** Det er ikke så enkelt å samle data om dette selv. Noen relevante data finnes på `http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_planets_and_dwarf_planets_in_the_Solar_System`

**(c) Systematisering:** Den generelle gravitasjonskonstanten $G$, prosjektilets masse $m$, klodens masse $M$, klodens radius $R$, høyde fra klodens overflate $x$, starthastighet $v_0$ startposisjon $y_0$.

(d) **Matematisering:** I følge Newtons gravitasjonslov er kraften $K_1$ mellom prosjektilet og en klode gitt ved $K_1 = -G\frac{Mm}{(R+x)^2}$. Newtons 2. lov gir da $\Sigma K = ma = K_1 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -G\frac{M}{(R+x)^2}$, dvs at massen på prosjektilet er irrelevant.

(e) **Analyse:** Dette kan utforskes med regneark, men det er vanskelig å finne et nøyaktig svar på unnslipningshastigheten, som i følge `http://en.wikipedia.org/wiki/Moon` har en teoretisk verdi på 2.38 km/s. TI-89 klarer ikke å finne noen eksplisitte bevegelsesfunksjoner. Storesletten og Nygaard (2005) viser noe analyse av denne: De definerer $g = \frac{GM}{R^2}$ og finner $v$ som en funksjon av $x$: $v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{(R+x)}}$. Maksimal høyde $\xi$ har vi når $v = 0$: $v_0^2 = 2gR - \frac{2gR^2}{(R+\xi)}$. Unnslipningshastigheten $v_e$ har vi når $\xi \to \infty$: $v_e = \lim_{\xi\to\infty} v_0 = \sqrt{2gR}$.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)

**Kommentarer:** Denne problemstillingen har to store ulemper: Det er praktisk talt umulig å skaffe egne data om fenomenet, og Newtons gravitasjonslov kommer frem som fra en flosshatt. Det kan likevel være interessant å arbeide med modellen.

## 6.4 Ballongbevegelse

**Oppfattet virkelighet:** Når man blåser opp en ballong og slipper, fyker den over alt, men det kan se ut som om den beveger seg raskere og raskere.

(a) **Problemformulering:** Det å forsøke å finne funksjoner som beskriver posisjon i forhold til tid gir ingen mening i denne situasjonen, siden retningen på ballongen er ganske tilfeldig. Men hva med akselerasjon og hastighet uavhengig av retning? En hypotese om bevegelsen er at når ballongen er stor, så er det større luftmotstand enn når ballongen er liten. Dvs at luftmotstanden blir mindre og mindre, og hastigheten på ballongen potensiellt blir større og større. En annen hypotese er at når ballongen er stor, er strekket i gummien stor og dermed vil ballongen tømmes raskere for luft enn når ballongen er liten. Vil disse effektene oppheve hverandre slik at farten er konstant hele veien? Vil tyngdekraften påvirke hastigheten slik at ballongen beveger seg synlig raskere når den er på vei mot bakken?

(b) **Datasamling:** Siden ballongen stadig endrer retning i rommet, kan vi bruke to kameraer som filmer ballongen fra to posisjoner. Ved å sette kameraene et stykke unna og slik at siktelinjene står 90° på hverandre, får vi registrert tredimensjonale koordinater. Det er også naturlig å filme en ballong som tømmes for luft mens den ligger stille for å finne ut av sammenhengen mellom tømmehastighet og diameter på ballongen.

**(c) Systematisering:** Ballongmasse $m$, tømmehastighet $h$, ballongdiameter $d$, hastighet $v$, akselerasjon $a$, posisjon $(x_i, y_i, z_i)$.

**(d) Matematisering:** Etter at ballongens tredimensjonale koordinater er lagt inn i et regneark, kan man regne ut gjennomsnittshastigheten mellom to bilder i filmen ved å dele avstanden mellom de to ballongposisjonene på tiden det tar mellom de to bildene.

**Kilder:** Ingen.

### 6.5 Bremselengde

**Oppfattet virkelighet:** Når en bil skal stoppe, så tar det tid å bremse. For å unngå ulykker er det derfor interessant å analysere hvor lang tid det tar før en bil klarer å stoppe.

**(a) Problemformuleringer.** En eller flere av følgende spørsmål er relevante: Hvor langt bremser en bil? Hvordan påvirker kjøreunderlaget eller dekktype bremselengden? Hvor mye hjelper ABS-bremser? Har det noe å si om bilen er full av elever på russetur? Hva er reaksjonstiden til en (trøtt) bilfører? Hvor langt bak bilen foran bør man kjøre ved en gitt hastighet? Hvor stor fart har en bil sannsynligvis hatt ut fra lengden på bremsesporene?

**(b) Datasamling:** Man kan rigge opp et kamera som filmer en bil fra siden. En person et stykke foran bilen kan gi et tegn som sier at føreren skal stoppe. Det er viktig at tegnet er godt synlig, både for bilføreren og for kameraet. Sannsynligvis vil man på denne måten måle en reaksjonstid som er mindre enn den er i en realistisk situasjon, siden føreren er "på hugget" og vet at det straks skal bremses. Andre måter å måle realistisk reaksjonstid på bør diskuteres i klassen.

**(c) Systematisering:** Bilens masse $m$, friksjonskraften $K_f$, farten før oppbremsing $v_0$, posisjonen før oppbremsing $x_0$, reaksjonstiden $t_R$, reaksjonslengden $l_R$, bremsetiden $t_B$, bremselengden $l_B$, total stoppetid $t_T$, total stoppelengde $l_T$, dekktype $D$, underlagstype $U$ og bremsetype $B$.

**(d) Matematisering:** Vi har følgende sammenhenger: $t_T = t_R + t_B$, $l_T = l_R + l_B$. Hvis vi antar at akselerasjonen er konstant under oppbremsing, så kan vi bruke $K_f = ma(t)$, dvs $a(t) = dv(t)/dt = K_f/m$. Husk også på at $\Delta x = v(t)\Delta t$ eller $s = v \cdot t$.

**(e) Analyse:** Dette kan løses numerisk og/eller symbolsk.

**Andre kommentarer:** Reaksjonslengden vokser typisk proporsjonalt med farten, og bremselengden proporsjonalt med kvadratet av farten. Overoppheting av bremsene kan føre til svekket eller manglende bremsekraft. Om skarpe elever vil fordype seg i litt mer avansert statistikk, kan man også angripe denne problemstillingen med multippel lineær regresjon i et statistikkprogram.

**Kilder:** Erfjord (1997)
Liao og Piel (1984)

## 6.6 Befolkningsvekst – Malthus' modell

**Oppfattet virkelighet:** Dette fenomenet ble diskutert i kapittel 3.5 på side 11.

**(b) Datasamling:** I dette tilfellet er det mest realistisk å hente data fra litteratur eller internett, men man kan gjøre forsøk med f.eks. gjærceller i en sukkerløsning der man periodisk teller/estimerer antall gjærceller.

**(c) Systematisering:** Befolkningsstørrelsen $N(t)$, vekstfaktor $k$.

**(d) Matematisering:** I Malthus' modell har vi altså $dN/dt = kN$. Vi har her antatt at befolkningsveksten er proporsjonal med befolkningsstørrelsen, dvs jo flere individer jo større total endring i befolkningen per tidsenhet. Vi kan også komme frem til det samme ved å anta at den *spesifikke vekstraten* er konstant, dvs $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$. Denne fremstillingen understreker at bidraget per individ til befolkningsendringen er den samme for alle individene, og uavhengig av tiden, dvs konstant.

**(e) Analyse:** TI-89 løser den slik: `deSolve(n'=k*n and n(0)=n0,t,n)` som gir $\texttt{n=n0}\cdot e^{\texttt{k}\cdot\texttt{t}}$.

**Kommentarer:** Det er verdt å merke seg at $dN/dt = kN$ også brukes for å modellere halveringstid i radioaktivt materiale. Vekstfaktoren $k$ er da negativ.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)

## 6.7 Befolkningsvekst – Verhulsts modell

**Oppfattet virkelighet:** Alle befolkninger vil nødvendigvis nå en grense på antall individer.

**(a) Problemformulering:** En stor svakhet med Malthus' modell er at den forutsier ubegrenset vekst. Alle populasjoner vil ha begrensninger som bremser utviklingen. Dette kan være plassmangel, matforråd, konkurranse med andre arter osv. Hvordan kan Malthus' modell endres slik at man tar hensyn til slike begrensninger?

**(c) Systematisering:** Befolkningsstørrelsen $N(t)$, vekstfaktor $k$. I tillegg antar vi at det finnes en øvre grense på hvor stor befolkning omgivelsene kan livnære, og at dette er en konstant $K > 0$ som indirekte bestemmes av befolkningens omgivelser. Vi kaller $G$ for befolkningens bæreevne.

**(d) Matematisering:** I Malthus' modell hadde vi altså $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$. For å utvide denne modellen kan vi resonnere slik: Vi vil at den nye modellen skal gi positiv spesifikk befolkningsvekst når $N < G$, og negativ vekst når $N > G$. Det kan vi få til ved å la den spesifikke veksten være proporsjonal med det *ledige livsrommet* $G - N$, som oppfyller disse kravene. Vi får da $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k(G - N)$ eller $\frac{dN}{dt} = kN(G - N)$. Dette kalles Verhulsts lov etter Pierre François Verhulst (1804-1849) som først studerte denne likningen.

**(e) Analyse:** TI-89 løser den slik: `deSolve(n'=k*n*(g-n) and n(0)=n0,t,n)` som gir `n=`$\frac{\mathtt{g \cdot n0 \cdot} e^{\mathtt{g \cdot k \cdot t}}}{\mathtt{n0 \cdot} e^{\mathtt{g \cdot k \cdot t}} + \mathtt{g} - \mathtt{n0}}$. Dette uttrykket kan vi imidlertid gjøre enklere ved å definere $k = \frac{r}{G}$ som gir $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{G})$ og har løsningen $N(t) = \dfrac{GN_0e^{rt}}{N_0e^{rt} + G - N_0}$ og kan forenkles til $\dfrac{G}{1 + (G/N_0 - 1)\, e^{-rt}}$, såkalt *logistisk vekst*. Denne modellen er det også store muligheter for å utforske med regneark.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)

## 6.8 Befolkningsvekst – Verhulsts generaliserte modell

**Oppfattet virkelighet:** Noen befolkninger går til grunne om befolkningsantallet er lavt nok.

**(a) Problemformulering:** I Verhulsts lov vil befolkningen vokse så lenge $0 < N < G$, men i praksis viser det seg at mange befolkninger får problemer når det finnes for få individer. Hvordan kan Verhulsts lov generaliseres for å ta hensyn til dette?

**(c) Systematisering:** Befolkningsstørrelsen $N(t)$, vekstfaktor $k$, bæreevne $G$. I tillegg antar vi at det finnes en nedre grense på hvor liten befolkningen kan være før den går til grunne. Vi antar at dette er en konstant $H > 0$ som indirekte bestemmes av befolkningens beskaffenhet. Vi kaller $H < G$ for befolkningens *minimale levedyktige bestand*.

**(d) Matematisering:** I Verhulsts modell hadde vi altså $\frac{dN}{dt} = kN(G - N)$. For å utvide denne modellen kan vi resonnere slik: Vi vil at den nye modellen skal gi positiv befolkningsvekst når $H < N < G$, og negativ vekst når $N < H < G$. Det kan vi få til ved å la veksten være proporsjonal med faktoren $N - H$, som oppfyller disse kravene. Vi får da $\frac{dN}{dt} = k(N-H)(G-N)$. Eventuelt kan vi definere $k = \frac{r}{GH}$ så vi kan skrive $\frac{dN}{dt} = r(\frac{N}{H} - 1)(1 - \frac{N}{G})$.

**(e) Analyse:** Denne modellen egner seg bra til utforsking i regneark. Den lar seg ikke løse analytisk av TI-89. Storesletten og Nygaard (2005) presenterer løsningen $N(t) = H + \dfrac{G-H}{1 + [(G-N_0)/(N_0-H)]\, e^{-k(G-H)t}}$.

**Kilder:** Storesletten og Nygaard (2005)

## 6.9 Andre differensiallikninger

Flere eksempler på slike dynamiske modeller gis av Giordano et al. (2003). Essensen i disse modellene er idéen om proporsjonalitet. Arbeid med dette begrepet starter i 10. klasse, der et kompetansemål definerer følgende: "*identifisere og utnytte egenskapene til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjoner og gi eksempler på disse funksjonenes tilknytning til praktiske situasjoner*". En differensiallikning er en generalisering av dette, der også endringshastigheten av noe kan oppføre seg proporsjonalt med eller omvendt proporsjonalt med funksjoner av noe.

Det er ikke nødvendig å greie ut om flere av denne typen modeller her. Eksemplene som er gitt bør være dekkende for å vise hvordan slike kan løses med CAS og regneark. Det er imidlertid flere andre modeller som er spennende å jobbe med på denne måten. Jeg vil nevne noen av dem her. **Hookes lov** modellerer svingninger i en fjær der kraften på et objekt som er festet på fjæra er proporsjonal med og motsatt rettet av utslaget fra likevektspunktet, $K = -kx$. **Lotka-Volterra**s modell forsøker å beskrive hvordan en befolkning byttedyr og en befolkning rovdyr påvirker hverandre. Dette er en modell som er utenfor rekkevidde å studere analytisk i videregående, men kan være svært spennende å utforske med regneark. **Newtons kjølelov** sier at endring i temperatur i et legeme er proporsjonal med forskjellen i legemets temperatur og temperaturen til omgivelsene. **Keplers 1. lov** sier at enhver planetbane er en ellipse med sola i et brennpunkt. Det er mulig å sette opp et regneark som visualiserer dette bra. Alle relevante parametre og initialkrav som posisjon og hastighet kan styres interaktivt med rullefelt. Dette systemet kan utvides slik at man kan utforske **n-legeme-problemet** som handler om å regne ut bevegelsene til $n$ legemer gitt start-posisjon, masser og hastigheter. Dette problemet kan ikke løses analytisk med matematikk i videregående, men kan altså løses numerisk med et regneark (med en viss nøyaktighet).

# 7 Avslutning

Matematikk er et verktøy. Det er minst like viktig å lære å bruke dette verktøyet som å lære hvordan verktøyet fungerer; Det er minst like viktig å *vite at man kan derivere* for å finne radius og høyde i en hermetikkboks med gitt volum slik at materialkostnadene blir minst, som å *vite hvordan man deriverer*. La oss her kalle dette for hhv anvendelseskunnskap og verktøykunnskap. Disse representerer to typer kunnskaper om det samme verktøyet. Det er et mål at elevene skal få kompetanse i begge disse typene kunnskap om matematiske verktøy. Digitale hjelpemidler kan brukes som et middel til å nå dette målet med flere matematiske verktøy enn det man kan uten digitale hjelpemidler.

Læreren har anledning til å bestemme at arbeidet med matematisk modellering kun skal brukes som et middel til å lære verktøykunnskap. Dette resulterer i beste fall i en gjettelek der elevene kun trenger å avdekke hvilket verktøy læreren har gjemt i oppgaveteksten, og bruke dette verktøyet til å finne svaret, og i verste fall av oppgaver av typen "Minimér $\int_0^1 (6t^2x + x^2)dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$". Det kan argumenteres for en slik prioritering i noen sammenhenger, men det har lite å gjøre med modellering slik det er beskrevet i denne oppgaven.

I dette kapitlet er det relevant å redegjøre for hva som er nytt i denne oppgaven. Hva finnes her av ny informasjon som ikke fantes fra før? Svaret er todelt. På den ene siden er en del av det som er beskrevet blitt hentet fra andre kilder, og man kunne like godt lest om dette et annet sted. På den andre siden bygger sammenstillingen av mye av denne informasjonen på mine egne idéer, og hva jeg mener er viktig i en pragmatisk tilnærming til problemstillingen.

Problemstillingen er definert som "*Hvordan kan matematisk modellering formidles i videregående skole med hjelp av moderne teknologi?*" Jeg har identifisert to årsaker til at denne problemstillingen representerer en utfordring for lærere. For det første er begrepet 'matematisk modellering' slik det er definert i Kunnskapsløftet så åpent for tolkning at det kan resultere i stor forskjell i undervisningen av emnet fra skole til skole. For det andre fører den akselererende teknologiske utviklingen til at det kan være vanskelig å ha et langsiktig perspektiv på planlegging av undervisning. Jeg har argumentert for en måte å drive med modellering på som jeg mener er nyttig. Jeg tok utgangspunkt i en modelleringsprosess og utvidet denne for å ta hensyn til arbeidet med å samle data om problemet man studerer. For å takle den teknologiske utviklingen har jeg kommet med et par idéer: Definere og forholde seg til teknologiske prinsipper i stedet for å konstruere et pensum rundt et spesifikt system, og se tilbake på historien for å se hvordan teknologi til nå har endret samfunnet og vårt syn på hva 'matematikk' betyr.

Forskning på bruk av teknologi i matematikkundervisningen har til nå ikke har gitt oss noe teoretisk grunnleggende rammeverk for å si på generelt grunnlag hvordan slik undervisning bør gjennomføres. Jeg har en mistanke om at dette ikke er mulig å få til. Selv om andre sikkert har visst om dette problemet lenge, er dette er en konklusjon jeg har kommet frem til selv. Det er også en konklusjon jeg ble overrasket og skuffet over, men en konklusjon det er viktig å være klar over.

De individuelle begrepene Eulers metode, regneark, rullefelt og grafisk design har hver og for seg vært kjent lenge, men kombinasjonen av dem i oppgaven er mitt produkt. Det mest selvstendige arbeidet om teknikk jeg har beskrevet i oppgaven er imidlertid kapittelet om datalogging med kamera der de største kildene til målefeil blir håndtert på en systematisk måte. Rent didaktisk mener jeg det er meget nyttig å la elevene selv samle data på denne måten, for det dreier seg ikke kun om å samle data. I stedet for kun å lese om data andre har funnet, kommer elevene praktisk talt *inn* i problemet. I løpet av filmingen er de direkte i nærheten og i kontakt med problemet de skal undersøke, og får tid til å tenke visuellt og fysisk på fenomenet.

Jeg har brukt tre kilder som beskriver de ulike modellene brukt i oppgaven: Feynman et al. (2006), Giordano et al. (2003) og Storesletten og Nygaard (2005). Disse beskriver noe av tankearbeidet bak hvordan man systematiserer og matematiserer i problemstillingen for å komme fram til en faktisk differensiallikning. Dette har jeg forsøkt å gjøre litt bedre i min fremstilling av disse modellene. Fra et didaktisk synspunkt mener jeg dette er svært viktig. Å kun presentere eleven for likningen $y' = ky$ og si at dette er en modell for befolkningsvekst er ikke å anbefale, da det fratar elevene kunnskap om tankene bak modellen. Det begrenser også elevenes mulighet til å oppdage at de selv kan klare å konstruere tilsvarende modeller på egenhånd.

Oppgaven er tydelig farget av min erfaring med realfag. Den er veldig naturfagsrettet og dreier seg stort sett om differensiallikninger. Modellering er ikke begrenset til dette matematiske verktøyet, men det er kanskje det viktigste verktøyet i arbeid med modellering.

Denne oppgaven er litt utradisjonell i og med at den ikke beskriver spesiellt mye egen uttesting av metoder i skolen. Dette er en prioritering jeg mener har vært nødvendig i denne oppgaven. Det ville likevel vært interessant å gjennomføre mer forskning på bruk av metodene som er beskrevet i denne oppgaven.

# A Vedlegg om Microsoft Excel 2003

Det som beskrives i denne oppgaven om bruk av regneark i kapittel 4.7 på side 29 går ut på bruk av regneark generelt. For å ha noe nytte av dette, er det imidlertid nødvendig å vite *hvordan* dette gjøres i et konkret regnearkprogram. Microsoft Excel 2003 er et av de programmene som er mest utbredt i skolen i dag. Det er derfor relevant å si noe om dette programmets virkemåte og særegenheter.

**Referanselåsing:** Når man redigerer et formeluttrykk og markøren står på kanten av eller inni en cellereferanse, så kan man trykke F4 for å bytte mellom ulike typer referanselåsing på cellereferansen.

**Cellenavn:** En oversikt over cellenavnene som er definert får man opp med menyvalget Sett inn → Navn → Definer.... En ulempe er at cellenavn ikke skiller mellom store og små bokstaver, dvs at programmet ikke aksepterer definisjonen av både `a` og `A`. En annen ulempe er at programmet har reservert noen cellenavn slik at disse ikke kan brukes. Dette gjelder bl.a. bokstavene `c` og `r`. For å kunne bruke spesialtegn som $\Delta$ i cellenavn kan disse kopieres fra symbolmenyen (Sett inn → Symbol...).

**Rullefelt:** For å lage et rullefelt, bør man først aktivere Vis → Verktøylinjer → Kontrollverktøykassen. Med denne verktøylinjen gjør man følgende. Entre Utformingsmodus, velg Rullefelt og tegn opp et rullefelt et passende sted i regnearket. Trykk høyre knapp i rullefeltet og velg Egenskaper. I feltet LinkedCell skrives cellen rullefeltet skal styre verdien til. Min og Max definerer minimums- og maksimumsverdiene cellen kan ha. Desverre er det slik at disse verdiene kun kan være positive heltall $\leq 2147483647 = 2^{31} - 1$. Det betyr at om man trenger å styre en desimalverdi så må det gjøres indirekte via en celle som har heltall. Man ønsker f.eks. å styre cella `C3` med et rullefelt, og cella skal kunne ha verdier i intervallet -5.0 til 5.0 med en oppløsning på 0.1. Det kan gjøres ved å styre f.eks. cella `C4` med Min=0 og Max=100 og legge følgende formel i `C3`: `=(C4-50)/10`. Man må gå ut av Utformingsmodus for å kunne bruke rullefeltet som normalt.

**Andre spesialverktøy:** Mange regneark kan gjøres mer interaktive og utforskningsvennlige med flere av de andre verktøyene tilgjengelig fra Kontrollverktøykassen. Excel støtter også et programmeringsspråk som heter Visual Basic der man har tilgang til å styre praktisk talt alt i et regneark.

**Plotting:** Det er meget nyttig å plotte verdiene av en kolonne mot verdiene av en annen kolonne. Et eksempel er tid mot posisjon eller tid mot hastighet. I Excel gjøres dette med Punktdiagram (XY). Som nevnt tidligere i oppgaven er ikke Excel spesiellt flink til å lage fine grafer, men heldigvis gir programmet store muligheter til å justere på utseendet. Brukergrensesnittet for å gjøre dette er desverre ikke optimalt, og det er lett å gå seg vill i menyvalgene. Det er nyttig å aktivere Vis → Verktøylinjer → Diagram. Dette er en kontekst-sensitiv meny som viser alle relevante valg man kan gjøre med et valgt diagram.

**Sideforhold:** En ulempe med Excel er at det er vanskelig å kontrollere sideforholdet i et diagram (forholdet mellom bredde og høyde). Dette justerer seg vanligvis automatisk i forhold til minste og største verdi i datasettet som plottes. Hvis minimum og maksimum bredde og høyde i grafen settes manuellt, kan sideforholdet også justeres manuellt ved å justere bredde og høyde på grafvinduet.

# B Vedlegg om Texas Instruments TI-89

TI-89 er en kalkulator med CAS. TI-92 har samme funksjonalitet men har en annen fysisk utforming (bl.a. med QWERTY-tastatur). Brukermanualen til disse ligger på følgende webadresse:
`http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/8992p/8992bookeng.pdf`

## Referanser


Andreassen, D., Håvie, T., Krogstad, Nørsett, S. P., & Aasen, J. O. (1975). *Numeriske metoder*. Tapir.

Antonius, S. (2007). Modelling based project examination. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study.* (s. 409-416). Springer.

Baumgart, J. K., Deal, D. E., Vogeli, B. R., & Hallerberg, A. E. (Red.). (1969). *Historical topics for the mathematics classroom*. NCTM.

Bell, C. G. (1972, Mars/April). Effect of technology on near term computer structures. *Computer*, 29-38. Tilgjengelig fra: `http://research.microsoft.com/~GBell/gbvita.htm`.

Bissell, C. (1995). Models of technology - spreadsheets and the language of applicable mathematics. I L. Burton & B. Jaworski (Red.), *Technology in mathematics teaching - A bridge between teaching and learning* (s. 365-386). Chartwell-Bratt.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, *22*, 23-39.

Bråten, I. (Red.). (2002). *Læring: I sosialt, kognitivt og sosial-kognitivt perspektiv*. Cappelen Akademisk Forlag.

Cheney, W., & Kincaid, D. (1994). *Numerical mathematics and computing* (3rd utg.). Brooks/Cole.

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Sosiokulturelle teoriperspektiver på kunnskap og læring*. Abstrakt Forlag.

Erfjord, I. (1997). *Matematisk modellering og bruk av matematikk i videregående skole*. Upublisert masteroppgave, Høgskolen i Agder.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2006). *The feynman lectures on physics*. Pearson Addison Wesley.

Galbraith, P. (2007). Beyond the low hanging fruit. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study.* (s. 79-88). Springer.

Giordano, F. R., Weir, M. D., & Fox, W. P. (2003). *A first course in mathematical modeling*. Thomson Brooks/Cole.

Henn, H.-W. (1998). The impact of computer algebra systems on modelling activities. I P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, & I. D. Huntley (Red.), *Mathematical modelling. teaching and assessment in a technology-rich world*. Chichester: Horwood Publishing.

Kunnskapsdepartementet. (1998). *Lov om grunnskolen og den videregående opplæringen*.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2001). A meta study on IC technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. I M. van den Heuvel-Panhuizen

(Red.), *Proceedings of the 25th conference on the international group for the psychology of mathematics education.* Utrecht: Freudenthal Institute. Hentet 1. mai 2008 fra: http://didmat.dima.unige.it/miur/miur_dima/G/STORIA_DI_UNA_RICERCA/LAGRANGE.PDF.

Liao, T. T., & Piel, E. J. (1984). The yellow-light problem: Computer-based applied mathematics. I V. P. Hansen & M. J. Sweng (Red.), *Computers in mathematics education.* NCTM.

Liebowitz, S. (2002). *Re-thinking the networked economy: The real forces that drive the digital marketplace.* Amacom Press. Hentet 1. mai 2008 fra: http://www.utdallas.edu/~liebowit/book/sheets/sheet.html.

Mattessich, R. (1961). Budgeting models and system simulation. *The Accounting Review*, *36*, 384-397.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology. integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* Sage Publications.

Moore, G. E. (1965). Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, *38*(8). Hentet 1. mai 2008 fra: ftp://download.intel.com/museum/Moores_Law/Articles-Press_Releases/Gordon_Moore_1965_Article.pdf.

Regjeringen Bondevik II. (2004). *St.meld. nr. 30 kultur for læring.* Hentet 1. mai 2008 fra: http://www.regjeringen.no/Rpub/STM/20032004/030/PDFS/STM200320040030000DDDPDFS.pdf.

Reisch, G. (1503). *Margarita philosophica.* Freiburg: Johann Schott.

Scheaffer, R., Aliaga, M., Diener-West, M., Garfield, J., Higgins, T., Hilton, S., et al. (2007). Using statistics effectively in mathematics education research. *A report from a series of workshops organized by the American Statistical Association with funding from the National Science Foundation.*

Smith, D. E., & Ginsburg, J. (1956). From numbers to numerals and from numerals to computation. I J. R. Newman (Red.), *The world of mathematics. A small library of the litterature of mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein.* New York: Simon and Schuster.

Storesletten, L., & Nygaard, O. (2005). *Matematisk modellbygging.* Høgskolen i Agder, Institutt for matematiske fag.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Tufte, E. R. (2001). *The visual display of quantitative information* (2nd utg.). Graphic Press LLC.

Utdannings- og forskningsdepartementet. (2004). *Program for digital kompetanse 2004-2008.* Hentet 1. mai 2008 fra: http://www.regjeringen.no/upload/kilde/ufd/red/2004/0016/ddd/pdfv/201402-program_for_digital_kompetanse.pdf.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Kunnskapsløftet.* Hentet 1. mai 2008 fra: http://www.udir.no/grep.

Utdanningsforbundet. (2005). *Vage og upresise kompetansemål*. Hentet 1. mai 2008 fra: http://www.utdanningsforbundet.no/UdfTemplates/Page____17978.aspx.

Wester, M. J. (Red.). (1999). *Computer algebra systems: A practical guide*. John Wiley & Sons. Tilgjengelig fra: http://www.univ-orleans.fr/EXT/ASTEX/astex/doc/en/rosetta/htmla/roseta.htm.

Williams, H., & Ahmed, A. (1998). Applications, modelling and communication in secondary school mathematics. I P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, & I. D. Huntley (Red.), *Mathematical modelling. Teaching and assessment in a technology-rich world* (s. 11-20). Chichester: Horwood Publishing.

## Tidsskrifter

Følgende tidsskrifter har mer informasjon om datateknologi og modellering i matematikkundervisningen:

*Educational Studies in Mathematics*

*International Journal of Computers for Mathematical Learning*

*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*

*Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*

*Journal of Information Technology for Teacher Education*

*Teaching Mathematics and its Applications*

*Technology, Pedagogy and Education*

*ZDM - The International Journal on Mathematics Education*

# Register

Badeball, **48**
Ballongbevegelse, **50**
Befolkningsvekst, **11**
  Bæreevne, 20, 37, **53**
  Eksponentiell vekst, **12**, 19
  Malthus' modell, 11, **17**, 52
  Verhulsts modell, 37, **52**
  Verhulsts modell generalisert, **53**
Bells lov, **4**
Binomialfordelingen, **28**
Boetius, **25**

CAS, 23, **27**
Cellereferanse, **23**, 57
CSV, **31**

Datalogging, **38**
  Ekkolodd, 22
  Filmkamera, **38**, 45, 50
    Eksperimentplanet, **43**
Derive, **23**
Deskriptiv modell, **14**
Doblingshastighet, 13, **19**

Empirisk forskning, **9**
Endringshastighet, **54**
Estetikk og design, **31**
Eulers metode, **33**
Excel, 4, 31, **57**

Fallskjerm, **48**
Fjær, **54**
Forskningsparadigme, **9**
Fotball, **48**
Friidrett, **14**
Friksjonskraft, **51**
Fritt fall, 22, 33, 34, 44, **47**, 48, 49
Fysikklab, **22**

Gjærceller, **17**
Gofball, **39**, 44
Golfball, 47

Halveringstid, **52**
Hookes lov, 38, **54**

Initialkrav, 29, 30, 32, 37, 54
Integralkurver, **30**

Keplers 1. lov, **54**
Kompetansemål, 1, 3, 6, **22**, 27, 33, 54
Korrelasjon, **17**
Kunnskapsløftet, 1–3, 5, 6, **22**, 27, 55
Kvalitativ forskning, **8**

Læringsteorier, **7**
Logistisk vekst, **53**
Lotka-Volterra, **54**
Lukkertid, **43**

Målestokk, **39**
Måleusikkerhet, **38**, 43
Månen, **49**
Mathematica, **23**
Modelleringsprosessen, 15, **17**
  (a) Problemformulering, 15, **17**
  (b) Datasamling, 15, **17**
  (c) Systematisering, 15, **17**
  (d) Matematisering, 15, **18**
  (e) Analyse, 16, **19**
  (f) Tolking, 16, **19**
  (g) Evaluering, 16, **19**
  Oppfattet virkelighet, **17**
Modellforutsetning, **11**, 18, 33, 46
Moores lov, **4**

N-legeme-problemet, **54**
Newtons 2. lov, 22, 34, 44, 45, **48**
Newtons gravitasjonslov, **50**
Newtons kjølelov, **28**, 54
Normalfordelingen, **28**
Normativ modell, **14**

Opplæringsloven, **4**

Overføringsverdi, **8**, 9

Papirkule, 44, 46
Perspektivforskyvning, **38**
Problemstilling, ii, **2**
Proporsjonal endring, 11, 18, 34, 45, 48, 49, 52, 53, **54**
Pytagoras, **25**

Radioaktivitet, **52**
Reaksjonstid, **51**
Referanselåsing, **30**
Regneark, 4, **29**, 36, 57
Regresjon, **14**, 17, 44, 52
Reinsdyr, **17**
Retningsdiagram, 28, **30**
Richters skala, **14**
Rullefelt, **31**, 37, 54, 56

Sannsynlighetsmodell, **28**
St.meld. nr. 30, **5**
Synsvinkel, **39**, 43

Tønneforvrengning, **43**
TI-89, **58**
    `deSolve`, **29**, 48, 49, 53

Vindunk, **17**
Volleyball, **48**