Matematisk modellering i matematikk 1P på videregående skole

En kvalitativ studie om læreres forståelse og elevers kompetanse

KAROLINE ENGESTØL HAGEN

VEILEDER
Pauline Vos

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematikk

FORORD

Denne masteroppgaven markerer slutten på min studietid på masterstudie i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder. Studiet, i likhet med arbeidet med denne oppgaven, har vært både lærerikt, spennende, utfordrende og krevende. Som et resultat går jeg ut av studiet med gode minner, samt nyttig kunnskap og erfaring for mitt videre læreryrke.

Det siste året har vært spesielt innholdsrikt. Jeg har jobbet, planlagt bryllup og giftet meg, og venter nå mitt første barn. Derfor er jeg spesielt stolt over at jeg nå har klart å levere masteroppgaven min. Jeg hadde imidlertid ikke klart det uten all den gode hjelpen jeg har fått på veien, og det er derfor på sin plass å rette en takk til samtlige.

Først og fremst ønsker jeg å takke min kjære Aslak, som er det mest tålmodige og støttende mennesket jeg kjenner. Takk for all trøst og hjelp du har gitt meg gjennom perioder med svekket motivasjon, svangerskapskvalme og sykdom. Tusen takk for at du har heiet meg frem og hatt troen på at jeg klarte å levere denne oppgaven, til tross for de utfordringene som har oppstått. Jeg må også takke for at du har tatt deg tid til å korrekturlese teksten, selv om du synes dette var noe kjedelig.

Jeg ønsker videre å takke min fine heiagjeng med familie og venner. Takk for all støtte og hjelp. En spesiell takk til mamma som har lest gjennom deler av oppgaven min og gitt meg tilbakemeldinger. Takk til Karine, min favoritt norsklærer, for at du tok deg tid til å lese og rette deler av teksten helt i innspurten. Jeg må også takke min svigerinne Ida for oppmuntrende og støttende ord gjennom hele prosessen.

Så vil jeg rette en stor takk til veilederen min, Pauline Vos, for inspirerende og motiverende veiledningssamtaler. Dine nyttige, ærlige og konstruktive tilbakemeldinger på veien har vært til enorm hjelp. Jeg vil også takke alle deltakerne i studien, både lærere og elever. Takk for at dere tok dere tid til å bli intervjuet i en stressende hverdag.

Til slutt ønsker jeg å takke for noen fine år på Universitetet i Agder. Jeg er så takknemlig for å ha blitt kjent med så mange flotte mennesker, både blant studenter og ansatte. I den forbindelse vil jeg takke Norges hyggeligste studiekonsulent, Trine Engeland, som har vært tålmodig og hjelpsom i tilrettelegging og omrokkeringer på studieplanene mine, slik at jeg kunne levere masteren min i dette semesteret.

Kristiansand, november 2023

Karoline Engestøl Hagen

SAMMENDRAG

Dette er en kvalitativ casestudie som utforsker matematisk modellering i matematikk 1P på en videregående skole. Studien undersøker tre lærere og seks elever for å belyse lærernes forståelse av modellering og elevenes modelleringskompetanse. På den måten presenteres matematisk modellering i matematikk 1P fra to ulike perspektiver. Samlet sett søker denne studien å besvare følgende tre forskningsspørsmål:

I. *Hvordan forstår lærere i 1P modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger de i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?*

II. *På hvilken måte viser elevgrupper i 1P modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?*

III. *Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom gruppens modelleringsprosess og deres lærers uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering?*

Det empiriske materialet som danner grunnlaget for analysen i denne studien, er hentet fra lydopptak av totalt fem intervjuer. Tre av disse intervjuene er individuelle semistrukturerte intervjuer med lærerne, mens de resterende to er oppgavebaserte gruppeintervjuer med elevgrupper bestående av tre elever i hver gruppe. Analysen er forankret i et teoretisk rammeverk, med hovedvekt på forskning fra Blum, Leiß, Borromeo Ferri og Niss. Studien har også et sosiokulturelt læreperspektiv.

Resultater fra analysen av datamaterialet indikerer at lærerne forstår modellering som en prosess med tilknytning til virkeligheten. De er imidlertid usikre på om modellering kan anses som relevant for alle elevenes hverdagsliv. Lærerne forstår også modellering og modelleringskompetanse i lys av funksjoner og regresjon. I sin forståelse anser de spesielt steg 1 (konstruere), steg 3 (matematisere) og steg 6 (validere) i modelleringssyklusen for å være viktige. Steg 2 blir ikke særlig vektlagt i forståelse av modelleringskompetanse, og heller ikke i undervisning og vurdering. I vurdering av modelleringskompetanse og i undervisning av modellering fokuserer lærerne på funksjoner, regresjon og bruk av GeoGebra. Videre tilsier oppgavene de velger til undervisning og vurdering at de fokuserer på steg 4 (jobbe med matematikk), steg 5 (tolke) og deler av steg 6 (validere) i modelleringssyklusen.

Elevgruppene viser modelleringskompetanse ved å gå gjennom alle stegene i modelleringssyklusen når de løser oppgavene i gruppeintervjuet. Generelt viser de spesielt kompetanse på steg 1, 4 og 5. Noe manglende kompetanse fremkommer primært i elevenes arbeid innenfor steg 2 og 6. Begge gruppene samarbeider, diskuterer og bruker digitale verktøy som internett og GeoGebra når de løser oppgavene. Det kommer her til syne både sammenhenger og forskjeller mellom lærernes uttalelser og hva elevene viser når de løser oppgaver. Elevene viser god kompetanse på steg 1, 4 og 5, noe manglende kompetanse på steg 2, og bruker GeoGebra i oppgaveløsningen. Dette samstemmer blant annet med det som lærerne vektlegger. En synlig forskjell er at

elevene viser manglende kompetanse på steg 6, selv om lærerne sier de vektlegger dette steget.

ABSTRACT

This is a qualitative case study exploring mathematical modelling in Mathematics 1P at a secondary school. The study investigates three teachers and six students to shed light on the teachers' understanding of modelling and the students' modelling competence. In this way, mathematical modelling in Mathematics 1P is presented from two different perspectives. Overall, this study seeks to answer the following three research questions:

I. *How do teachers in Mathematics 1P understand modelling and modelling competence, and what do they emphasize in teaching modelling and assessing pupils' modelling competence?*

II. *In what way do pupil groups in Mathematics 1P demonstrate modelling competence when solving mathematical modelling tasks?*

III. *What potential differences or connections emerge between the group's modelling process and their teacher's statements related to modelling, modelling competence, teaching, and assessment?*

The empirical material forming the basis for the analysis in this study is derived from audio recordings of a total of five interviews. Three of these interviews are individual semi-structured interviews with the teachers, while the remaining two are task-based group interviews with pupil groups consisting of three pupils in each group. The analysis is grounded in a theoretical framework, with a primary focus on research by Blum, Leiß, Borromeo Ferri, and Niss. The study also adopts a sociocultural learning perspective.

Results from the analysis of the data material indicate that teachers perceive modelling as a process connected to real-world situations. However, they express uncertainty about whether modelling can be considered relevant to all pupils' everyday lives. Teachers also comprehend modelling and modelling competence in the context of functions and regression analysis. In their understanding, they particularly consider steps 1 (constructing), 3 (mathematising), and 6 (validating) in the modelling cycle to be crucial. Step 2 is not emphasized significantly in their understanding of modelling competence, nor in their teaching and assessment practices. In the assessment of modelling competence and in the teaching of modelling, teachers concentrate on functions, regression, and the use of GeoGebra. Furthermore, the tasks they choose for teaching and assessment suggest a focus on step 4 (working mathematically), step 5 (interpreting), and parts of step 6 (validating) in the modelling cycle.

The pupil groups demonstrate modelling competence by going through all the steps in the modelling cycle when solving the tasks in the group interview. Overall, they show competence, especially in steps 1, 4, and 5. Some lack of competence is evident in the pupils' work in steps 2 and 6. Both groups collaborate, discuss, and use digital tools such as the internet and GeoGebra when solving the tasks. There are both connections and differences between the teachers' statements and what the pupils demonstrate when solving the tasks. The pupils exhibit good competence in steps 1, 4, and 5, some lack of competence in step 2, and they use GeoGebra in task-solving. This aligns with what the

teachers emphasize. A visible difference is that the pupils show some lack of competence in step 6, even though the teachers say they emphasize this step.

INNHOLD

1 INNLEDNING

Denne studien utforsker matematisk modellering i matematikk 1P, et fellesfag i første klasse på videregående skole. Gjennom å undersøke perspektivene til både lærere og elever, håper denne studien å bidra til bedre innsikt i hvordan matematisk modellering forstås og undervises, samt elevenes kompetanse innen emne. Dette innledende kapittelet er delt inn i tre deler. Den første delen tar for seg bakgrunn for valg av emnet til denne studien, mens kapittel 1.2 handler om prosjektets formål og fokus. Her presenteres forskningsspørsmålene som utgjør rammeverket for studien. I kapittel 1.3 fremlegges til slutt en oversikt over oppbygningen i denne oppgaven.

1.1 BAGRUNN FOR VALG AV EMNE

Både som lærervikar og som tidligere elev har jeg fått høre og selv stilt spørsmål om skolematematikkens tilknytning til det virkelige liv. Spørsmål som «hvorfor må vi lære dette?» og «hva kan dette brukes til?» dukket stadig opp i klasserommet. Dette har gjort at jeg, som kommende lærer, har reflektert over grunnene som ligger bak hvorfor vi underviser elevene våre i matematikk. Underviser vi i matematikk fordi vi må, ifølge læreplanen? Er det fordi elevene trenger det hvis de skal bli mattelærere, ingeniører eller siviløkonomer? Eller er det fordi matematikk er noe elevene generelt trenger i hverdagslivet? Det er trolig en blanding av flere årsaker, men jeg mener det sistnevnte spørsmålet bør være utgangspunktet. Vektlegging av virkelighetsnær undervisning og fokus på matematikkens bruk i «det vanlige liv» er dermed tema jeg synes er både viktige og engasjerende. I lys av dette, blir modellering som en del av matematikkundervisningen svært aktuelt. Modellering handler nettopp om å bruke matematikken i den virkelige verden, og i arbeidet med modellering kan elevene se matematikkens sammenheng med hverdagslivet (Blum 2015; Blum & Niss, 2020).

Matematisk modellering har i de siste tiårene fått økt betydning i læreplanen i flere land, inkludert i Norge (Blum & Pollak, 2018; Berget & Bolstad, 2019). Emnet har eksplisitt vært en del av norsk læreplan siden 1994, men har fått større fokus etter fagfornyelsen i 2020, hvor «Modellering og anvendelser» er angitt som ett av kjerneelementene (Berget, 2023). Til tross for en økende vektlegging av matematisk modellering i utdanning, viser det seg likevel at tilstedeværelsen av modelleringsaktiviteter i den daglige matematikkundervisningen er begrenset (Blum & Pollak, 2018). Det viser seg også å være en uoverensstemmelse mellom idealene i pedagogiske forskningsrelaterte debatter om matematisk modellering på den ene siden, og praksisen som gjennomføres i dagens klasserom på den andre siden (Blum, 2002; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Berget, 2023).

Som vikarlærer i matematikk 1P ble jeg selv vitne til, og en del av denne uoverensstemmelsen. Jeg hadde i løpet av utdanningen min ved Universitetet i Agder fått innsikt i grunnleggende forskning på matematisk modellering, blant annet gjennom emnet «Arbeidsmåter i matematikk» (MA-424). I dette emnet lærte jeg hva modellering var og fikk øvelse i å jobbe med, og utvikle modelleringsoppgaver. I møte med modellering i matematikk 1P opplevde jeg så en konflikt mellom hvordan læreverket og de andre 1P-lærerne fremstilte og vektla modellering, og hva jeg selv hadde lært. Dette synes jeg var både utfordrende, oppsiktsvekkende og interessant, og det dannet grunnlaget for interessen min til å utforske modellering i matematikk 1P nærmere. Derav ble utgangspunktet for denne studien dannet: matematisk modellering i matematikk 1P. Videre ønsket jeg å se på modellering i dette fellesfaget fra ulike synsvinkler, både fra læreres og fra elevers perspektiv. Ved å se på tema fra begge perspektiver var håpet å kunne få et mer nyansert bilde av modellering i matematikk 1P.

Samtidig ser jeg på denne studien som en mulighet til å kunne bidra med ytterligere innsikt i forskningen på matematisk modellering i den norske skolen. Jeg håper å kunne forbedre min egen didaktiske kompetanse i matematisk modellering, og på den måten føle meg bedre rustet til å levere kvalitetsundervisning i dette emne for mine kommende elever. I tillegg til kompetanse innen undervisning av matematisk modellering, ønsker jeg at denne studien kan gi meg, og andre lærere, bedre og bredere kunnskap og forståelse knyttet til modellering og modelleringskompetanse, samt vurdering av elevers modelleringskompetanse. Målet er at også at studien kan trygge lærere til å utvikle gode modelleringsoppgaver, og få innsikt i hvordan elever arbeider med slike oppgaver.

1.2 FORSKNINGSSPØRSMÅL

Denne studiens fokus kan oppsummeres som i de tre følgende forskningsspørsmålene:

I. *Hvordan forstår lærere i 1P modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger de i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?*

II. *På hvilken måte viser elevgrupper i 1P modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?*

III. *Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom gruppens modelleringsprosess og deres lærers uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering?*

Formålet med denne studien er å gi svar på disse tre spørsmålene, avgrenset til tre lærere og seks elever på en videregående skole. For å besvare det første forskningsspørsmålet vil jeg gjennomføre intervjuer av lærerne. Her vil jeg se på deres uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering, og analysere dette i lys av det teoretiske rammeverket i denne studien. I besvarelse av det andre forskningsspørsmålet vil jeg se på hvordan elevene løser tre modelleringsoppgaver i et oppgavebasert gruppeintervju. Deres løsningsprosess vil ses i sammenheng med definisjonen av modelleringskompetanse og hva det innebærer. Til slutt, for å besvare forskningsspørsmål III, vil jeg sammenligne lærernes uttalelser i intervjuet med hva elevene viser når de løser oppgaver.

1.3 STUDIETS OPPBYGNING

Denne studien består av seks deler. Først et innledende kapittel (kapittel 1), deretter et kapittel med det teoretiske rammeverket for denne studien (kapittel 2), så en del som presenterer forskningsmetoder og hvordan disse ble gjennomført (kapittel 3), før resultatene fra studien presenteres (kapittel 4) og deretter diskuteres (kapittel 5). Det siste kapittelet (kapittel 6) fremlegger til slutt en konklusjon på forskningsspørsmålene, samt implikasjoner relatert til undervisning og videre forskning.

Kapittel 2 består av fem hoveddeler og tar for seg det teoretiske rammeverket som denne studien bygger på. Den første delen (kapittel 2.1) handler om begrepene modellering og modelleringskompetanse. Her vil jeg redegjøre for definisjoner og syn på begrepene som jeg har valgt skal danne grunnlaget for den videre analysen av datamateriale. I kapittel 2.2 blir modellering relatert til en skolekontekst presentert. Dette inkluderer målet med modellering i skolen og rollen til modellering i den norske læreplanen, samt perspektiver relatert til undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse. Det tredje delkapittelet handler om modelleringsoppgaver, mens kapittel 2.4 tar for seg sentrale begreper og forskning relatert til læreres forståelse av matematikk generelt, og modellering spesielt. Til slutt vil jeg i kapittel 2.5 presentere sosiokulturell teori og kort se på dette i lys av modellering.

I kapittel 3 skal jeg gjøre rede for valg av forskningstilnærming og design, samt metoder for datainnsamling og analysemetode. Kapittelet består i alt av åtte deler hvorav de tre første delene tar for seg en oversikt over studien, forskningstilnærming og design, og metoder for datainnsamling. Deretter, i kapittel 3.5, vil jeg begrunne valg av oppgaver til elevintervjuene, før jeg i den femte delen presenterer utvalget og hvordan jeg gikk frem i valg av forskningsdeltakere. Kapittel 3.6 er viet til redegjørelse av analysemetode, mens de to siste delkapitlene tar for seg etiske vurderinger og metodiske betraktninger.

I de to neste kapitelene, kapittel 4 og 5, vil resultatet fra datainnsamlingen presenteres og diskuteres med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket for denne studien. Kapittel 4 vil ta for seg resultater fra analyse av datamaterialet og er delt inn i tre deler, en del for hvert forskningsspørsmål. Deretter vil resultatene sammenfattes og diskuteres videre i kapittel 5. Dette kapittelet er også inndelt etter forskningsspørsmålene i studien. Til slutt vil en konklusjon på forskningsspørsmålene presenteres i kapittel 6, sammen med avsluttende refleksjoner relatert til denne studiens begrensinger, samt implikasjoner for undervisning og videre forskning.

2 TEORETISK RAMMEVERK

I dette kapittelet presenteres det teoretiske rammeverket for denne studien. Det som legges frem her danner grunnlaget for den teoretiske forankringen i analysen av datamaterialet. Det inkluderer definisjoner av sentrale begreper, presentasjon av viktige konsepter, samt grunnleggende perspektiver i studien. I tillegg vil tidligere forskning relatert til tema også belyses.

I kapittel 2.1 blir det redegjort for denne studiens syn på begrepene modellering og modelleringskompetanse. Dette inkluderer hva som betraktes som en matematisk modell og hva som menes med modelleringssyklusen. Hva en legger i begrepet matematisk modellering avhenger også av hva en anser som målet med modellering i skolen. Modellering sett i lys av en skolekontekst presenteres i kapittel 2.2. Her blir ulike mål med modellering belyst, i tillegg til ulike tilnærminger og tidligere forskning innen undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse. I den norske skolen har modellering fått en sentral plass i LK20, og i 1P er det flere læreplanmål som tar for seg modellering. Dette presenteres i slutten av kapittel 2.2.

Deretter, i kapittel 2.3, belyses grunnleggende teori og tidligere forskning relatert til modelleringsoppgaver. Dette innebærer klassifisering av, kjennetegn på og kriterier for modelleringsoppgaver. Kapittel 2.4 tar for seg sentrale prinsipper bak læreres forståelse og kunnskap i matematikk generelt og i modellering spesielt. Begrepet pedagogisk innholdskunnskap er her vesentlig. Samtidig vil det også bli lagt frem noen funn fra tidligere studier relatert til læreres forståelse. Det siste delkapittelet, kapittel 2.5, presenterer den sosiokulturelle læringsteorien, som er det det læringsteoretiske perspektivet som denne studien bygger på. Her blir begreper som mediering og medierende verktøy definert, og teori knyttet til matematisk modellering blir plassert i denne sammenhengen.

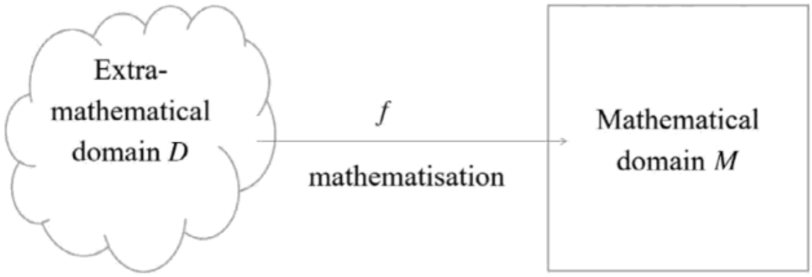
2.1 MODELLERING OG MODELLERINGSKOMPETANSE

I dette kapittelet blir begrepene matematisk modellering og modelleringskompetanse definert og forklart. For å få innsikt i hva matematisk modellering innebærer, er først nødvending å forstå hva som menes med en matematisk modell, og denne forklaringen blir derfor presentert først. I tillegg blir modelleringssyklusen redegjort for i dette kapittelet, da den er viktig for konseptualisering og reflekterer viktige aspekter ved modellering. Syklusen er også sentral i forståelsen av modelleringskompetanse.

2.1.1 Matematisk modell

En modell er en konstruksjon som har som hensikt å representere noe annet. Modellen fanger spesifikke aspekter ved enheten den representer og utgjør derfor en forenklet fremstilling av denne enheten (Blum & Niss, 2020). Et kart er for eksempel en geometrisk modell av et område, en arkitekturmodell er en fysisk modell av et byggeprosjekt, mens skallmodellen er en modell for atomets struktur.

En matematisk modell er en forenklet representasjon av virkeligheten ved hjelp av matematatikk. Med virkeligheten menes «resten av verden» eller «verden utenfor matematikken», som inkluderer naturen, samfunnet, hverdagslivet og andre vitenskapelige disipliner (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Niss og Blum (2020) beskriver «den virkelige verden» som alt som er utenfor den matematiske verden og kaller det for «den ekstra-matematiske verden», D, slik som vist i figuren under. En matematisk modell er på slik måte en matematisk representasjon av deler av den ekstra-matematiske verden og befinner seg i «den matematiske verden», M. Overgangen fra D til M skjer ved en matematisering, f. Med andre ord, å konstruere en matematisk modell innebærer en overgang fra den virkelige verden til matematikk.



Figur 1: «The minimal modelling diagram» (Blum & Niss, 2020, s. 7)

En matematisk modell må nødvendigvis forstås med hensyn på alle tre deler, både D, f og M. Dette utelukker at en matematisk modell kun er en samling av matematiske enheter som eksempelvis en gitt funksjon, et sett med likninger eller et geometrisk objekt. For at det skal kalles en matematisk modell må de matematiske enhetene representere *noe* fra den ekstra-matematiske verden (Blum & Niss, 2020).

En kan skille mellom deskriptive og normative modeller (Blum, 2015; Maaß, 2010). En deskriptiv modell har som formål å forklare og beskrive virkeligheten så nøyaktig som mulig. En slik modell skal fange deler av en situasjon som allerede eksisterer (Blum & Niss, 2020). Det kan for eksempel være å lage en modell for beregning av overflateareal til en menneskekropp (Maaß, 2010). Normative modeller derimot, har som hensikt å forutsi, organisere eller skape deler av den virkelige verden (Blum & Niss, 2020). Skjema eller plan for aktiviteter, operasjoner eller prosesser som skal gjennomføres, som eksempelvis vaksinasjonsplan eller produksjonsplan, er normative modeller. Det samme gjelder modeller som har som formål å for eksempel finne den mest gjennomførbare eller optimale lokasjonen til et objekt eller et anlegg, som en sendermast eller et sykehus. (Blum & Niss, 2020).

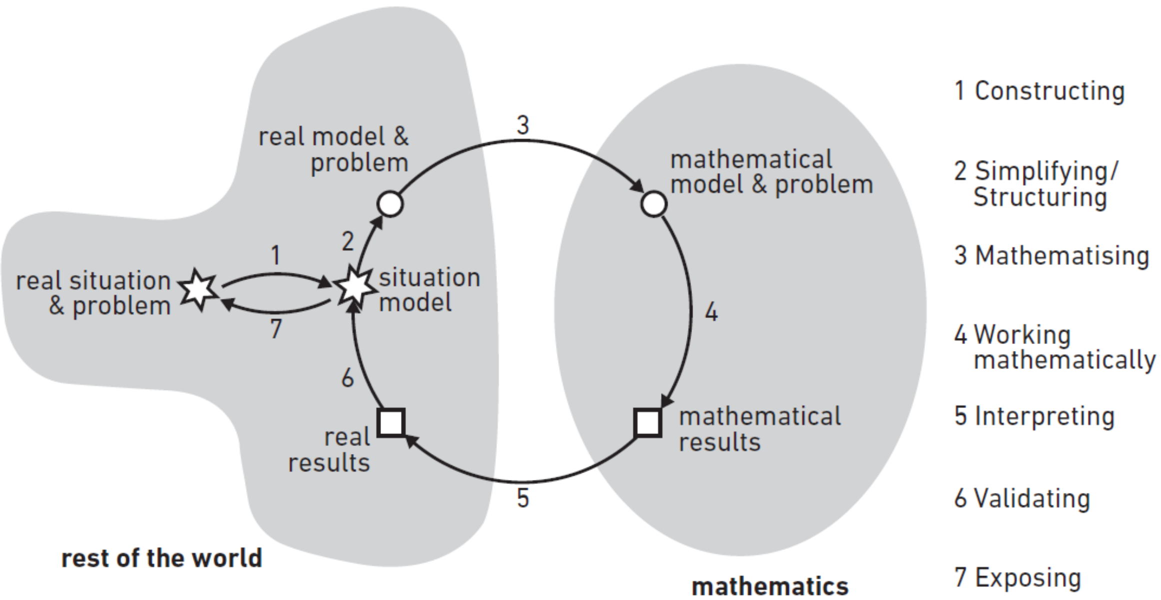
2.1.2 Matematisk modellering

Modellering er ikke entydig definert innenfor matematikkdidaktikken (Kaiser & Sriraman, 2006). Ulike perspektiver på modellering knyttet til målet med aktiviteten blir belyst i kapittel 2.2.1. I denne studien benyttes definisjonen basert på Borromeo Ferri (2018), samt Blum (2002, 2015) og Blum og Niss (2020). Borromeo Ferri (2018) skriver at modellering kan beskrives som en aktivitet som innebærer overgang frem og tilbake mellom virkeligheten og matematikken. Blum og Pollak (2018) forklarer at overgangen fra virkelighet til matematikk innebærer å konstruere en modell, mens overgangen fra matematikk til virkelighet innebærer å tolke og validere resultatene i lys av den reelle konteksten. Overordnet handler modellering om å bruke matematikk til å løse problemer fra den virkelige verden. Borromeo Ferri (2018) vektlegger at matematisk modellering ikke handler om å løse pseudorealistiske problemer, der all data er gitt på forhånd, og en kun trenger å utføre gitte algoritmer.

Når modellering knyttes opp mot å løse problemer fra den virkelige verden, beskrives modellering som en syklisk prosess. Blum (2002) gir inngående beskrivelse av denne prosessen og forklarer at utgangspunktet er en viss situasjon i den virkelige verden. Fra denne virkelige situasjonen er det nødvending for problemløseren å forenkle, strukturere, presisere og formulere et problem. Dette fører til en «reell modell» av situasjonen. Dersom det er hensiktsmessig, kan problemløseren videre samle inn empiriske data for å gi mer informasjon til den reelle modellen. Den neste fasen i prosessen involverer en matematisering av den reelle modellen og dermed konstruksjonen av en matematisk modell av den opprinnelige situasjonen. På den måten beveger en seg inn i den matematiske verden der matematiske metoder brukes til å utlede matematiske resultater. Disse resultatene må deretter oversettes til den virkelige verden og tolkes i forhold til det opprinnelige problemet og situasjonen. Samtidig validerer problemløseren modellen ved å sjekke om løsningen som er oppnådd gir mening. Om nødvending, må hele prosessen gjentas med en modifisert eller en helt ny modell.

2.1.3 Modelleringssyklusen

I forskningslitteraturen finnes flere modeller av modelleringsprosessen. Blum og Leiß (2007) presenterer en modelleringssyklus som inkluderer syv steg knyttet til både den virkelige verden og den matematiske verden (Figur 2). Denne figuren omtales som syvstegsmodellen (Blum, 2015) og ble opprinnelig introdusert i forbindelse med DISUM prosjektet (Didactical intervention modes for mathematics teaching oriented towards self-regulation and directed by tasks) (Blum, 2011, s. 16). Senere har den blitt gjengitt og anvendt i en rekke forskningsstudier om matematisk modellering. Modelleringssyklusen er et teoretisk konstrukt som presenterer viktige aspekter med modellering og er derav sentralt for konseptualisering. Samtidig er syklusen også et nyttig verktøy i forbindelse med analyse av elevarbeid, samt kognitiv analyse av modelleringsoppgaver (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Vos & Frejd, 2022).



Figur 2: Modelleringssyklusen (Blum & Leiß, 2007, s. 225)

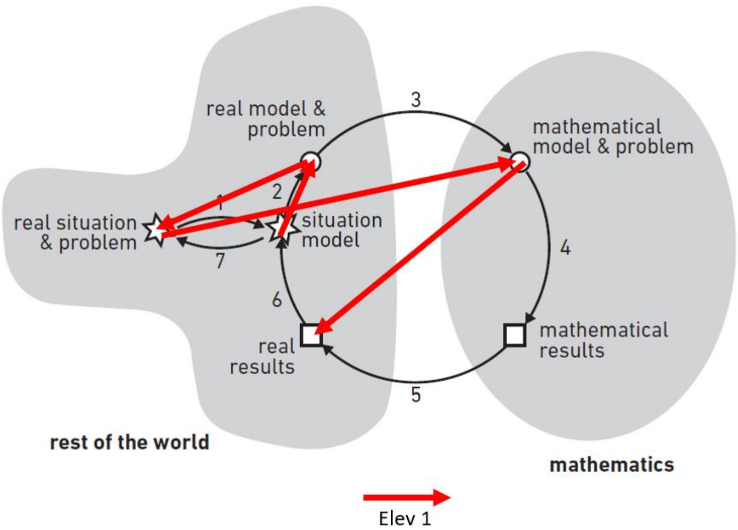
Syklusen vektlegger overgangene mellom «matematikk» og «resten av verden», da disse er tydelig adskilt. De syv stegene illustreres med piler og representerer skifte fra en fase til en ny. Navnet på stegene ses til høyre i figuren. En norsk oversettelse av stegene kan være (1) konstruere, (2) forenkle/strukturere, (3) matematisere, (4) jobbe med matematikk, (5) tolke, (6) validere og (7) eksponere/vise (Gjøvik, 2019).

De første to stegene er kognitive prosesser som foregår i «resten av verden» eller «den virkelige verden». Steg 1, «konstruere», handler å konstruere en situasjonsmodell av problemet. En situasjonsmodell er et mentalt bilde av de grunnleggende kjennetegnene ved situasjonen og dens vesentlige elementer (Blum & Niss, 2020). For at en situasjonsmodell kan konstrueres, er det nødvendig at problemløseren forstår problemet (Blum & Leiß, 2007). Dette er den første kognitive barrieren for elevene når de løser modelleringsoppgaver (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Steg 2 innebærer å forenkle, strukturere og presisere situasjonen for å skape en «reell modell» av situasjonen (Blum & Leiß, 2007). Dette inkluderer som regel å lete etter relevant informasjon, sortere ut irrelevant informasjon og gjøre antakelser. Å gjøre antakelser kan være spesielt utfordrende for elever (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Videre krever ofte dette steget kunnskap fra den «ekstra-matematiske verden» (Blum & Niss, 2020).

Overgangen fra resten av verden til matematikk skjer ved steg 3, «matematisere». Matematiseringen inkluderer å oversette dataene, sammenhengene, betingelsene og objektene som er involvert i den reelle modellen, til matematikk (Blum, 2002). Dette krever som regel ekstra-matematisk kunnskap, som eksempelvis allmennkunnskap, og fører til en matematisk modell basert på den reelle modellen allerede konstruert (Blum & Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2006). Fra den matematiske modellen utvikles etter hvert matematiske resultater. De matematiske resultatene dannes gjennom å «jobbe med matematikk», steg 4. Å jobbe med matematikk innebærer å ta i bruk matematiske metoder og verktøy. Her handler det om å bruke matematisk kompetanse, og kan eksempelvis inkludere beregninger og løsning av likningssett (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Det vil selvfølgelig være stor variasjon i både omfang og vanskelighetsgrad av de matematiske kravene som stilles i dette steget, da det avhenger av oppgaven eller situasjonen.

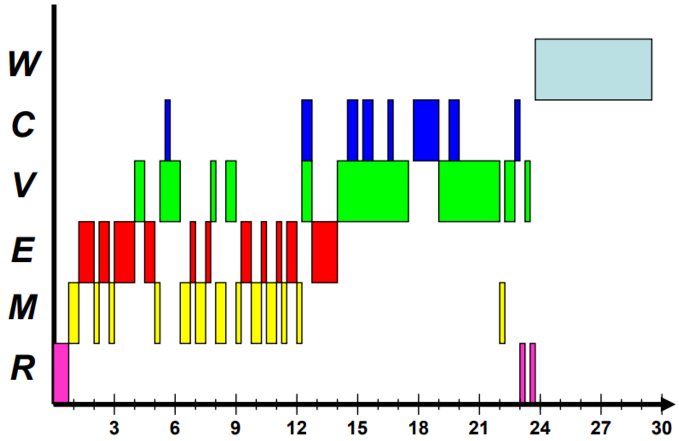
Steg 5, «tolke», representerer overgangen fra «matematikk» til «resten av verden». De matematiske resultatene generert av steg 4 tolkes da i «resten av verden» som et virkelig eller reelt resultat (Blum & Leiß, 2007). Denne overgangen er sentral, men skjer som regel ubevisst. Det reelle resultatet blir videre validert og sjekket opp mot situasjonsmodellen. Valideringen, steg 6, har vist seg å være spesielt problematisk for elever (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Steget innebærer å sjekke om de reelle resultatene er rimelige og hensiktsmessige. Dersom ikke dette er tilfellet, er det nødvending å gå gjennom stegene i sirkelen på nytt (Blum & Leiß, 2007). Modelleringsprosessen ender uansett til slutt med steg 7, «validere/vise». Dette siste steget handler om å presentere løsningen og gi et endelig svar på problemet (Blum & Leiß, 2007).

Etter forklaring av modelleringssyklusen og dens 7 steg, er det samtidig nødvending å poengtere at syklusen gir en idealisert beskrivelse av modelleringsprosessen. Den representerer ikke faktiske individers modelleringsprosess. Flere studier har vist at elevers «modelleringsruter» («modelling route» (Borromeo Ferri, 2007)), deres veier gjennom modelleringsprosessen, kan se veldig annerledes ut (Borromeo Ferri, 2018). Det er ikke slik at deres prosess følger stegene i den rekkefølgen som modelleringssyklusen presenterer. For å illustrere elevers modelleringsrute når de løser oppgaver kan en bruke modelleringssyklusen og markere med piler mellom fasene, slik som vist i Figur 3 (Borromeo Ferri, 2007).



Figur 3: Illustrasjon av en modelleringsrute (inspirert av Borromeo Ferri (2007))

En alternativ måte å illustrere en modelleringsrute på, er gjennom et «Modelling activitiy diagram» (MAD), se Figur 4 (Ärlebäck, 2009). MAD er en todimensjonal graf som illustrerer modelleringsaktiviteter med hensyn på tid. Ärlebäck (2009) deler inn i seks ulike aktiviteter, basert på de syv stegene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Disse er henholdvis «reading» (R), «making model» (M), «estemating» (E), «calculating» (C), «validating» (V) og «writing» (W). «Reading» tilsvarer steg 1, konstruere, mens «making a model» inkorroporerer både deler av steg 2, forenkle/strukturere, og steg 3, matematisere. Det samme gjelder også for «estemating». «Calculating» refererer til steg 4, jobbe med matematikk. Videre er «validating» både steg 5, tolke, og steg 6, validere, mens «writing» er knyttet til steg 7, eksponere/vise. Grunnen til at Ärlebäck har valgt å dele det inn på denne måten har sammenheng med at han mener det er vanskelig å skille steg 2 fra steg 3 og omvent, samt at steg 5 og steg 6 til en viss grad overlapper hverandre.

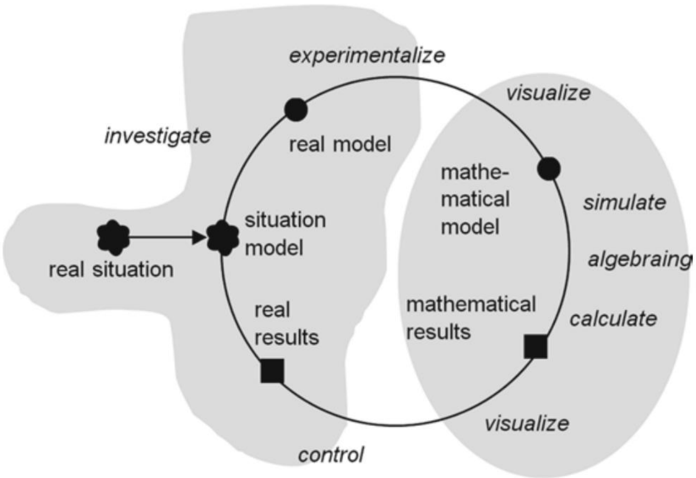


Figur 4: MAD av en elevgruppes arbeid med en modelleringsoppgave (Ärlebäck, 2009, s. 345)

2.1.4 Utvidelse av modelleringssyklusen

Modelleringssyklusen er et viktig verktøy for konseptualisering og utgjør et analytisk rammeverk i mange studier (Vos & Frejd, 2022). Dersom modelleringssyklusen benyttes som analytisk verktøy vil selvfølgelig resultatene bli påvirket av denne. Siden syklusen vektlegger kognitive aktiviteter, vil resultatene følgelig primært være av kognitiv karakter. Dette kan føre til at andre aspekter som spiller en viktig rolle i matematisk modellering ikke blir fanget opp. Vos og Frejd (2022) påpeker at matematisk modellering er en kompleks og dynamisk aktivitet og at den derav fortjener å bli studert fra ulike perspektiver. Derfor foreslår de å utvide modelleringssyklusen med tre andre dimensjoner, da henholdsvis «metakognitive strategier», «verktøybruk» og «sosiale normer». De tre dimensjonene, i tillegg til den kognitive dimensjonen, påvirker hverandre. Metakognitive strategier trengs for å gjennomgå en vellykket modelleringsprosess. Verktøybruk, som digitale verktøy, penn og papir eller andre konkreter spiller også en viktig rolle. Sosiale normer knyttes til et sosiokulturelt perspektiv der samspillet i gruppa, konkurransen blant elever, samt normer knyttet til «eieren» av oppgaven og hva som «tillates» er avgjørende for elevenes løsningsprosess (mer om dette i kapittel 2.5).

Når det gjelder verktøybruk i modelleringsprosessen har det ved flere anledninger blitt vektlagt og diskutert bruk av digitale verktøy. Digitale verktøy som kalkulator, pc, nettbrett og smarttelefoner med kraftige programvarer, kan være viktige redskaper i håndtering av modelleringsoppgaver (Blum & Niss, 2020). Disse kan benyttes som sterke hjelpemidler i alle faser i modelleringsprosessen. En utvidelse av modelleringssyklusen knyttet til digitale verktøy kan ses i Figur 5. I tillegg til stegne til Blum og Leiß (2007), er det presentert digitale aktiviteter som å undersøke, å eksperimentere, å visualisere, å simulere, å beregne og å kontrollere (Greefrath, 2011). Å undersøke kan bety å lete etter informasjon på internett, å eksperimentere kan innebære å bruke tegneverktøy eller regneark til å lage modeller og visualisering kan eksempelvis gjøres ved geobra eller regneark (Blum & Niss, 2020). Simuleringer kan også gjøres ved ligningene programvarer, mens beregninger kan for eksempel skje gjennom bruk CAS eller kalkulator (Greefrath, 2011). Å kontrollere ved bruk av digitale verktøy kan innebære å søke på internett eller sammenligne med allerede digitale modeller (Greefrath, 2011).

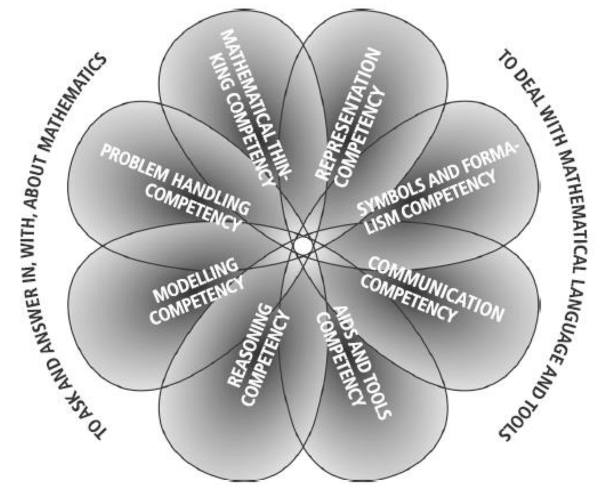


Figur 5: Modelleringssyklus med digitale verktøy (Greefrath, 2011)

2.1.5 Modelleringskompetanse

For å forstå hva som menes med modelleringskompetanse, er det nødvending å først definere kompetanse. I Kunnskapsløftet 2020 defineres kompetanse som «å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11). Niss og Højgaard (2019) har en mer generell definisjon av kompetanse, og definerer det som en persons evne til å bevisst handle hensiktsmessig i møte med utfordringer i gitte situasjoner. Ordet «evne» brukes her i kognitiv forstand, mens verbet «handle» brukes i vid forstand da det inkluderer både fysiske og mentale handlinger. «Evne til å handle» kan også innebære en bevisst beslutning om å avstå fra å foreta visse handlinger i en gitt situasjon. Mennesker kan handle ubevist, men dette regnes da ikke som kompetanse. Begrepet «utfordring» er også en sentral del av definisjonen. Utfordringer varierer sterkt i karakter avhengig av situasjon og kontekst, og kan inkludere intellektuelle, vitenskapelige, moralske, faglige og praktiske utfordringer. Hva som oppleves som utfordringer og hvordan man møter dem varierer fra person til person. Dette reflekterer en iboende dualitet mellom subjektive og sosiokulturelle aspekter knyttet til «utfordringer» og også «kompetanse», da det alltid avhenger av hvem som tildeler mening til handlingene.

Matematisk kompetanse kan defineres som en persons evne til å bevisst handle hensiktsmessig i møte med all slags matematiske utfordringer i gitte situasjoner (Niss & Højgaard, 2019). Her er det viktig å påpeke at situasjonene ikke trenger å være matematiske i seg selv, så lenge de kan frembringe matematiske utfordringer. Niss og Højgaard (2019) vektlegger at matematisk kompetanse som helhet bygger på åtte ulike typer matematisk kompetanse, slik som vist i Figur 6, hvorav en av disse er modelleringskompetanse. De åtte ulike matematiske kompetansene overlapper og støtter hverandre, og bør med fordel utvikles parallelt. Samtidig vil hvilke kompetanser som aktiveres i en gitt situasjon avhenge av situasjonen. En aktivering av modelleringskompetanse involverer som regel også problemhåndteringskompetanse, representasjonskompetanse, kommunikasjonskompetanse, resoneringskompetanse, symbolbruk og formalismekompetanse, og kompetanse knyttet til verktøy og hjelpemidler (Blum & Niss, 2020). Når det gjelder bruk av verktøy, spesielt digitale verktøy, viser flere empiriske studier at kompetanse til å kunne bruke disse kan forbedre tilegnelsen av modelleringskompetanse (Blum & Niss, 2020). Dette vektlegges dessuten av Vos og Frejd (2022) og Greefrath (2011) i deres utvidelse av modelleringssyklusen. Det er også klart at metakognitiv kompetanse og sosial kompetanse er viktige komponenter i modelleringskompetansen (Niss et al., 2007; Stillman et al., 2017; Vos & Frejd, 2022).



Figur 6: Kompetanseblomsten (Niss & Højgaard, 2019)

Modelleringskompetanse kan defineres som en persons evne til å konstruere modeller i gitte situasjoner ved å utføre ulike modelleringssteg på en hensiktsmessig måte, samt evnen til å kritisk analysere og sammenligne modeller (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018; Niss et al., 2007; Niss & Højgaard, 2019). Med «modelleringssteg» menes deler av modelleringsprosessen som beskrives av modelleringssyklusen. Med andre ord inneholder modelleringskompetanse evnen til å utføre hele modelleringssyklusen i varierte kontekster og situasjoner (Blum & Niss, 2020).

Den definisjonen av modelleringskompetanse brukt i denne studien er en såkalt ovenfra-ned definisjon (Blum & Niss, 2020). En ovenfra-ned definisjon ser på modelleringskompetanse som en bestående av ulike delkompetanser og komponenter. En nedenfra-opp definisjon derimot, fokuserer på delkompetansene og betrakter dem som de grunnleggende byggesteinene som til slutt utgjør modelleringskompetansene. Ovenfra-ned definisjonen anerkjenner at modellering innebærer mer enn bare delkompetansene, tilsvarende stegene i modelleringssyklusen. Nedenfra-opp definisjonen tar imidlertid ikke hensyn til dette, ettersom modelleringskompetansen ikke kan være mer omfattende enn summen av dens deler, delkompetansene.

2.2 MATEMATISK MODELLERING I SKOLEN

I dette kapittelet utforskes matematisk modellering i skolen ved å se på undervisning av modellering (kap. 2.2.2) og vurdering av modellering (kap. 2.2.3), samt vektlegging og fremstilling av modellering i den norske læreplanen (kap. 2.2.4). I tillegg belyses først målet med modellering i skolen (kap. 2.2.1). Det er ulike tilnærminger til hva som anses som grunnen og målet med modellering i skolen og undervisning. Dette har stor innvirkning på forståelsen av begrepet modellering og hva som vektlegges i undervisning av modellering og vurdering av elevers modelleringskompetanse.

2.2.1 Målet med modellering i skolen

Matematisk modellering er en del av pensum i mange land i verden. Blum (2015) peker på fire ulike grunner til å inkludere matematisk modellering i læreplaner og undervisning. Disse er henholdsvis (1) pragmatisk, (2) formativ, (3) kulturell og (4) psykologisk (Berget & Bolstad, 2019). Den pragmatiske grunnen handler om at matematisk modellering bidrar til at elever bedre kan forstå og mestre hverdagssituasjoner eller reelle situasjoner (Blum, 2015). Elever lærer ikke dette på egenhånd, men trenger å jobbe med matematikk relatert til reelle kontekster. Den formative grunnen knyttes til at modelleringskompetanse trengs for å utvikle andre viktige matematiske kompetanser, som eksempelvis resoneringskompetanse. Grunn nummer 3, den kulturelle grunnen, viser til at elever nødvendigvis må se matematikkens sammenheng med den ekstra-matematiske verden for å et korrekt bilde av hva matematikk som vitenskap innebærer. Den psykologiske grunnen dreier seg om at elever kan få økt interesse for matematikk dersom det blir vektlagt eksempler fra den virkelige verden. Disse eksemplene kan også motivere elevene, hjelpe dem med å organisere matematisk innhold på en mer forståelig måte, samt øke muligheten for at de husker matematikken bedre over tid (Blum, 2015).

Grunnene til Blum (2015) kan også ses på som ulike mål for undervisningen av modellering. Andre perspektiver knyttet til målet med modelleringsaktiviteten kan også knyttes til Blum og Niss (2020) sine to overordnende grunner for å ha matematisk modellering i skolen. Disse grunnene kaller de for (1) «modellering for matematikken skyld» («modelling for the sake of mathematics», s. 28) og (2) «matematikk for modelleringens skyld» («mathematics for the sake of modelling, s. 28). «Modellering for matematikkens skyld» handler om at modellering brukes som et middel for å lære matematikkfaglig innhold. Når det gjelder «matematikk for modelleringen skyld», er fokuset å bruke matematikk for å utforske og forstå virkelige situasjoner gjennom modellering. Disse to perspektivene er ikke motstridene, men fører til ulike tilnærminger i undervisningen.

Julie (2002) peker også på to sider relatert til målet med modellering i matematikkundervisningen. Disse ligner på Blum og Niss (2020) sine to overordnede grunner, men Julie kaller dem for (1) modellering som innhold og (2) modellering som fartøy. Modellering som innhold handler om at målet med undervisningen er modelleringen selv. Målet er at elevene skal utvikle modelleringskompetanse og derav se sammenhengen mellom matematikken og hverdagslivet. Dette samsvarer med «matematikk for modelleringens skyld» til Blum og Niss (2020), samt de to første grunnene til Blum (2015), pragmatisk og formativ (Berget & Bolstad, 2019). Modellering som fartøy kan relateres til «modellering for matematikkens skyld» og handler om at modellering blir brukt med mål om å lære noe annet enn modelleringen i seg selv. Målet kan være å lære matematiske tema, men også å motivere elevene, samt lære dem å strukturere og forstå matematisk innhold. Her synes det å være en sammenheng med den psykologiske grunnen til Blum (2015) (Berget & Bolstad, 2019). Julie (2002) påpeker at modellering som fartøy ofte er den tilnærmingen som lærere velger å bruke i undervisningen.

Et tredje perspektiv på målet med modellering kan kalles «modellering som kritikk» (Barbosa, 2006). Modellering som kritikk handler om at undervisningen skal utdanne elever til å være kritiske og engasjerte samfunnsborgere. Dette handler om å kritisk vurdere modeller fra virkeligheten, noe som er en viktig del av modelleringskompetansen (Barbosa, 2006; Blum & Niss, 2020). Dette kan relateres til den kulturelle grunnen til Blum (2015).

2.2.2 Undervisning av modellering

Det er som sett flere perspektiver på målet med modellering. Hvilket perspektiv en har vil selvfølgelig ha innvirkning for hvordan en anser at undervisning av modellering bør foregå. Empiriske studier har likevel gitt noen generelle implikasjoner for undervisningen. Overordnende funn om kvalitetsundervisning («quality teaching») i matematikk, er også gjeldene for undervisning av modellering (Blum & Niss, 2020). Kvalitetsundervisning i matematikk kan deles inn tre viktige komponenter som kan formuleres slik: (1) klasseromsledelse og elevorientering, (2) kognitiv aktivering og utfordring, og (3) metakognitiv aktivering (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018). En forutsetning for å kunne ha kvalitetsundervisning av modellering er imidlertid at læreren har den nødvendige kompetansen og forståelsen innenfor modellering (Borromeo Ferri, 2018). Dette vil bli belyst i kapittel 2.4.

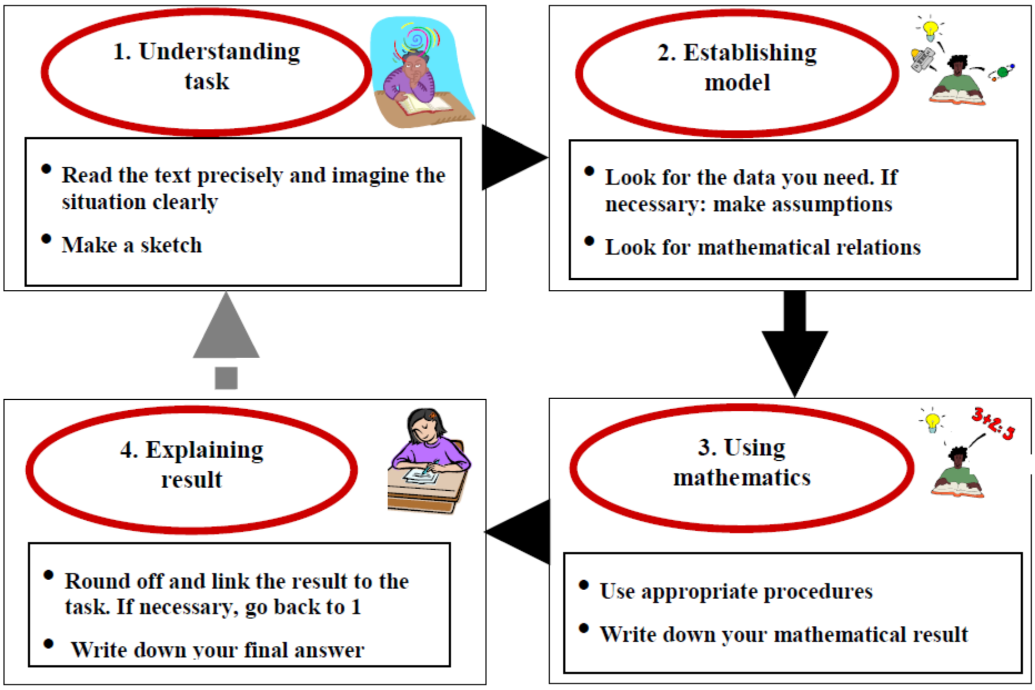
Klasseromsledelse og elevorientering handler om hvordan læreren organiserer og strukturerer undervisningen, samt hvordan hen tilrettelegger og tilpasser undervisningen til elevene. En undervisningsøkt med god klasseromsledelse og elevorientering legger til rette for at elevene skal få det beste kognitive resultatet (Borromeo Ferri, 2018). Det handler blant annet om at læreren har klare mål, bruker tiden godt, sammenkobler ny informasjon med elevenes eksisterende kunnskap, samt skiller læringsaktiviteter og vurderingsaktiviteter (Blum & Niss, 2020).

Knyttet til undervisning av modellering viser empirisk forskning at gruppeaktiviteter er spesielt passende (Blum & Niss, 2020). En typisk struktur på en god undervisningsøkt i modellering kan være: (a) læreren presenterer et problem, (b) elever jobber i grupper, med hjelp av lærer dersom nødvendig, (c) noen grupper presenter sin løsning i fellesskap, (d) løsningene sammenlignes og diskuteres i felleskap (Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018). Slik vektlegges tid på oppgaver og oppgaveløsning i undervisningen av modellering. Borromeo Ferri (2018) påpeker også at bruk av digitale verktøy bør være en del av undervisningen av modellering, spesielt på videregående. Dette gjelder programvarer som CAS, Excel, Matlab og lignende. Når det kommer til bruk av digitale verktøy for å lete etter informasjon, for eksempel ved å bruke internett på PC eller smarttelefon, er det opp til læreren å avgjøre om dette er hensiktsmessig. Videre er et viktig aspekt knyttet til elevorientering i undervisning av modellering, å tilrettelegge for og oppfordre til flere løsninger og løsningsmetoder. Med andre ord, legge til rette for varierte individuelle modelleringsruter (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018).

Blomhøj og Jensen (2003) peker i tillegg på to hovedtilnærminger til undervisning av modellering der målet er at elevene skal utvikle modelleringskompetanse. Disse tilnærmingene kalles for «den holistiske tilnærmingen» og «den atomiske tilnærmingen». Den holistiske tilnærmingen til undervisningen handler om å legge til rette for at elevene jobber med alle deler av modelleringsprosessen. Siden modelleringskompetanse innebærer alle syv stegene i modelleringssyklusen, bør elevene få mulighet til å jobbe med oppgaver som fremmer alle disse. I den atomistiske tilnærmingen rettes oppmerksomheten mot enkelte steg i modelleringssyklusen og elevene jobber med oppgaver som fokuserer på noen få steg av gangen. Vanligvis har en da flere ulike oppgaver som fokuserer på forskjellige steg (Blum & Niss, 2020). Denne tilnærmingen begrunnes med at å gjennomføre hele modelleringsprosessen ofte er veldig tidkrevende. Resultatet av en full modelleringsprosess er ofte at mye av tiden blir brukt på å konstruere og forenkle/strukturere, men det blir brukt lite tid på matematisering og å jobbe med matematikk (Blomhøj & Jensen, 2003). Berget (2022) sin analyse av lærebøker og eksamen i 2P viser at oppgavene her er atomistiske, da de primært fokuserer på steg 4 og 5 i modelleringssyklusen mer om dette i kapittel 2.3.3.

Kognitiv aktivering og utfordring handler om å opprettholde høy grad av mental aktivitet og tankeprosesser hos elevene (Borromeo Ferri, 2018). Målet med kognitiv aktivering er å oppmuntre elevenes selvstendighet i læringen (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Når det kommer til arbeid med modelleringsoppgaver, er nettopp selvstendighet et nøkkelord. Jobbing med modelleringsoppgaver bør foregår selvstendig, men ikke alene (Blum & Niss, 2020). Det som menes med dette, er at elevene bør få støtte fra læreren under jobbingen hvis hensiktsmessig. Modellering er kognitivt krevende for elever og alle stegne i modelleringsporsessen er potensielle kognitive barrierer. Hvordan læreren hjelper elevene er avgjørende, og her er det viktig å finne en balanse med fokus på å «hjelpe elevene til å gjøre det på egenhånd» (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Empirisk forskning har vist at strategiske intervensjoner fra læreren ofte er mest passende i slike sammenhenger (Blum & Niss, 2020). Strategiske intervensjoner er for eksempel: «les teksten nøye», «lag en skisse», «hva er det som mangler?», «har du tatt hensyn til alt?» og så videre (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020). Når det kommer til utfordring, handler det om at elevene får mulighet til å jobbe med varierte modelleringsoppgaver, med varierende ekstra-matematisk og matematisk innhold (Blum & Niss, 2020). Utviklingen av modelleringskompetanse tar tid, og elevene må møte stigende utfordringer i et passende tempo.

Den siste komponenten knyttet til kvalitetsundervisning er metakognitiv aktivering. Borromeo Ferri (2018) sier dette må være en avgjørende del i undervisning av modellering. Elevene bør lære metakognitive strategier, strategier de kan bruke for å løse modelleringsoppgaver og som kan hjelpe dem i modelleringsprosessen. Blum og Borromeo Ferri (2009) viser til at en 4-stegs løsningsplan (Figur 7) kan være hensiktsmessig for elevene å bruke. Empirisk forskning viser at bruk av denne kan forbedre læringsutbytte hos elevene (Blum & Niss, 2020).



Figur 7: 4-stegs løsningsplan for modelleringsoppgaver (Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 54)

2.2.3 Vurdering av elevers modelleringskompetanse

De to tilnærmingene til undervisning av modellering som beskrives av Blomhøj og Jensen (2003), kan også knyttes til vurdering av modelleringskompetanse (Blum & Niss, 2020). En holistisk tilnærming til vurdering handler om å ha vurderingsomformer som vil fange alle stegne i modelleringssyklusen på en gang. En atomistisk tilnærming derimot, søker å vurdere deler av modelleringsprosessen og ikke ha «alle steg på en gang». I en atomistisk tilnærming til vurdering er det nødvending å kombinere oppgaver som dekker ulike steg, for å få en tilfredsstillende vurdering av elevers modelleringskompetanse (Blum & Niss, 2020). Frejd (2013) fant i sin litteraturgjennomgang av 76 artikler at det er primært fem vurderingsmetoder som gjør seg gjeldene i vurdering av modelleringskompetanse. Disse er henholdsvis skriftlige prøver, prosjekter, praktiske prøver, mappevurdering og konkurranse. Skriftlige prøver kan knyttes til den atomistiske tilnærmingen til vurdering, mens prosjekter, mappevurdering og av og til konkurranse foretrekkes i en holistisk tilnærming (Blum & Niss, 2020).

Borromeo Ferri (2018) sier at et av de mest stilte spørsmålene på hennes kurs for lærere verden over, er spørsmålet om hvordan en kan vurdere og karaktersette elever innenfor matematisk modellering. For å konkret besvare dette, presenterer hun eksempler på typiske vurderingsskjema som kan brukes og hvordan en vurdering kan se ut, Tabell 1. Denne tabellen kan indikere at Borromeo Ferri vektlegger en holistisk tilnærming til vurdering, da hun har alle stegene til modelleringssyklusen som utgangspunkt for vurderingen av én oppgave.

Solution steps	Comment
Simplifying/assumptions (4 Points)	• The problem is a little simplified by starting with estimating the size of a container and the area of a container was calculated. ⇨ Further assumptions are missing: Paths for the cranes, storage period. **2 Points**
Mathematizing (3 Points)	• Mathematizing is partly done by dividing the 9.9 Million containers by 2. It is not clear why and it is not correct, but then the result was again divided by the area of the container in order to get the transshipping area. ⇨ Many aspects are not included in the mathematical model, because the assumptions were incomplete. **1, 5 Point**
Working mathematically (3 Points)	• The existing calculations are correct, but not according an adequate mathematical model. **1, 5 Point**
Interpreting/validating (2 Points)	• The result is not interpreted or validated. **0 Point**
Stating the result (2 Points)	• The result is very briefly stated, although it is not correct. **1 Point**
Your overall rating	**6/14**

Tabell 1: Vurderingsskjema til oppgaven «Port of Hamburg» (Borromeo Ferri, 2018, s. 116)

2.2.4 Modellering i LK20 og 1P

Matematisk modellering har eksplisitt vært en del av læreplanen i den norske videregående skolen siden 1994 (Berget, 2023). Under målet «modellering, eksperimentering og utforskning» var det formulert fem hovedmomenter som elevene skulle kunne. Disse handlet om at elevene skulle kunne gjennomføre en hel modelleringsprosess, fra å formulere et problem og omforme problemet fra virkelighet til matematikk, til å vurdere gyldigheten og reflektere over resultater og egne metoder (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1994, s. 5-6).

I Kunnskapsløftet 2020 (LK20) er «modellering og anvendelser» en del av de såkalte kjerneelementene. «Kjerneelementer er det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Under kjerneelementer i læreplanen for matematikk 1P blir modellering forklart på følgende måte:

> «En modell i matematikk P er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk P handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2-3).

Berget og Bolstad (2019) sier i sin studie at denne definisjonen peker mot forståelsen av modellering som «modellering som innhold» og «modellering som kritikk». Dette begrunnes med at definisjonen vektlegger at elevene skal lage modeller fra den virkelige verden, samt vurdere modeller.

I læreplanen for 1P er det tre kompetansemål som eksplisitt handler om modellering. Det står at elevene skal kunne «modellere situasjoner knyttet til temaer fra samfunnsliv og arbeidsliv, presentere og argumentere for resultatene og for når modellene er gyldige», «tolke og bruke funksjoner i matematisk modellering og problemløsing», samt «planlegge, utføre og presentere selvstendig arbeid knyttet til modellering og funksjoner innenfor samfunnsfaglige temaer» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5). I de to sistnevnte er det tydelig at modellering blir ansett som nært knyttet til funksjoner, mens i det første kompetansemålet blir det vektlagt situasjoner fra den virkelige verden.

Læreboken har en sentral rolle i undervisningen og kan anses som et bindeledd mellom kompetansemålene i læreplanen og den pedagogiske praksisen (Blum & Niss, 2020; Kongleif, 2019). Dessuten er det også rimelig å anta at læreboken spiller en sentral rolle i elevenes utvikling av matematisk kompetanse (Kongleif, 2019). Det er tre lærebokforlag som dominerer i den norske skolen, nemlig Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug. I denne studien har deltakerne benyttet læreboken i matematikk 1P fra Aschehoug. Denne boken har et eget kapittel kalt «Modellering» som er etterfulgt av kapittelet «Funksjoner». Modelleringskapittelet består av fire delkapitler. Det første delkapitlet er et slags introduksjonskapittel. Her defineres en matematisk modell som «en forenklet beskrivelse av noe ved hjelp av matematikk. Det vi beskriver er ofte en sammenheng mellom to (eller flere) variabler» (Borge et al., 2020, s. 154). De tre neste delkapitlene handler om modellering knyttet til regresjon. Regresjon defineres som «en metode vi kan bruke for å lage modeller. Vi finner da en funksjon som passer best mulig til en gitt mengde data» (Borge et al., 2020, s. 159).

2.3 MODELLERINGSOPPGAVER

I dette kapittelet presenteres denne studiens perspektiv på hva som kjennetegner modelleringsoppgaver, hvordan de kan klassifiseres og hvilke kriterier en bør ta hensyn til i valg og utvikling av modelleringsoppgaver. I tillegg vil det kort bli lagt frem funn fra studien til Berget (2022) relatert til typer modelleringsoppgaver en finner i lærebøker og eksamen i 2P.

2.3.1 Kriterier for og kjennetegn på modelleringsoppgaver

Borromeo Ferri (2018) påpeker at det er viktig at både lærere og elever har kjennskap til modelleringsoppgaver og hva som skiller dem fra «vanlige» matematikkoppgaver. Modelleringsoppgaver bør være en fundamental del i undervisningen av matematisk modellering og har dermed en sentral posisjon knyttet til utviklingen av elevers modelleringskompetanse. Flere har fremstilt kriterier for hva som kjennetegner en modelleringsoppgave. Wess et al. (2021) beskriver fem kriterier som er oppsummert i Tabell 2.

Kriterier	Forklaring
Relasjon til virkeligheten	Problemet har en referanse til den virkelige verden.
Relevant	Elever anser problemet som interessant, nært relatert eller relevant til deres hverdagsliv.
Autentisk	Problemet er autentisk med hensyn til både den ekstra-matematiske delen og den matematiske delen.
Åpen	Problemet tillater flere løsninger og ulike tilnærminger på flere nivåer.
Fremmer delkompetanser	Problemet fremmer kognitive elementer relatert til del-prosessene/ stegene i modelleringssyklusen.

Tabell 2: Kriterier for modelleringsoppgave, oversatt fra Wess et al. (2021, s. 14)

Borromeo Ferri (2018) beskriver også kriterier for modelleringsoppgaver, men disse er basert på Maaß (2007). Hun legger frem seks kriterier som ligner på dem i Tabell 2, men ifølge henne er modelleringsoppgaver: (1) åpne, (2) komplekse, (3) realistiske, (4) autentiske, (5) problemer og (6) løselige gjennom modelleringsprosessen. En åpen oppgave tilsier at oppgaven har flere svar og løsningsveier. At en modelleringsoppgave er kompleks betyr at den krever at elevene må gjøre undersøkelser for å forstå den reelle situasjonen. Videre er en realistisk oppgave knyttet til den virkelige verden. Nært relatert til realistisk er kriteriet om autentisitet, men en oppgave som er realistisk er ikke nødvendigvis autentisk. En autentisk oppgave referer ikke til en pseudo-virkelighet, men har autentiske elementer fra den virkelige verden, som eksempelvis autentiske data, steder og spørsmål. Det kan være vanskelig å lage autentiske oppgaver til pedagogiske formål. Vos (2011) argumenterer for at oppgaver med pedagogiske formål kun imiterer eller simulerer virkelige situasjoner og dermed ikke er helt autentiske. Det femte kriteriet, problemer, viser til at modelleringsoppgaver ikke lar seg løse ved å kun følge gitte algoritmer, men krever bruk av strategier for å nå frem til løsningen. Det siste kriteriet, som handler om at oppgaven skal være løselig gjennom modelleringsprosessen, viser til at oppgaven skal legge til rette for alle stegene i modelleringssyklusen. Dersom en reell modell allerede er gitt i oppgaven er det da, ifølge Borromeo Ferri, ikke en modelleringsoppgave.

Borromeo Ferri (2018) legger også til at gode modelleringsoppgave i tillegg bør tilfredsstille noen flere kriterier. Disse kriteriene er oppsummert i Tabell 3.

Tilleggskriterier	Forklaring
Meningsfull	Elevene må kunne håndtere oppgaven og det må gi mening for dem å jobbe med den.
Alders-basert realistisk kontekst	En må ta hensyn til aldersgruppen som oppgaven skal gis til og vurdere hva som er en interessant og realistisk konetest for den gitte gruppen.
Provokasjon av ytterligere spørsmål	Oppgaven bør åpne for muligheter til at elevene kan stille nye spørsmål. For eksempel matematisk spørsmål eller spørsmål relatert til konteksten eller den reelle situasjonen.

Simulerer en holistisk læremåte	Oppgaven legger til rette for at elevene kan «lære med alle sanser». Dette gjelder spesielt de komplekse oppgavene som hovedsakelig kan løses utenfor klasserommet.
Passende språk	Oppgaven bør være formulert slik at elevene kan forstå den.

Tabell 3: Tilleggskriterier for en modelleringsoppgave, basert på Borromeo Ferri (2018, s. 47)

Som et eksempel på en modelleringsoppgave kan en trekke frem oppgaven «Filling up», gjengitt i Figur 8, som blant annet er brukt i DISUM-prosjektet (Blum & Leiß, 2006).

Filling up
Mister Stone lives in Trier which is close to the border of Luxemburg.
To fill up his VW Golf he drives to Luxemburg where immediately behind the border, 20 km away from Trier, there is a petrol station.
There you have to pay 0.85 Euro for one litre of petrol whereas in Trier you have to pay 1.1 Euro.
Is it worthwhile for Mister Stone to drive to Luxemburg?

Figur 8: Oppgaven «Filling up» fra Blum og Leiß (2006, s. 1625)

Denne oppgaven tilfredsstiller kriteriene gitt fra Wess et al. (2021) og Borromeo Ferri (2018). Den har klart en relasjon til virkeligheten, er realistisk og har autentiske data. Videre er den åpen og krever at en gjør antakelser. Oppgaven legger også til rette for alle stegne i modelleringssyklusen. Først må en forstå situasjonen og konstruere en situasjonsmodell. Deretter må situasjonen forenkles, struktureres og presiseres. Da må problemløseren i dette tilfelle definere hva som menes med «verdt det» («worthwhile»), samt gjøre antakelser knyttet til for eksempel bilens drivstofftank. Det neste steget handler om å matematiskere problemet, og etterpå jobbe matematisk for å komme frem til et matematisk resultat. Resultatet tolkes så i den virkelige verden og problemløseren kommer frem til en anbefaling til Mister Stone. Valideringen kan videre føre til en ny gjennomgang av syklusen, da en for eksempel innser at det er flere faktorer en burde tatt høyde for, som eksempelvis tid eller forurensing.

I tillegg til de kriteriene til en modelleringsoppgave nevnt over, fant Jankvist og Niss (2020) i sin studie at en typisk modelleringsoppgave ofte kjennetegnes ved at den bryter den didaktiske kontrakt. Den didaktiske kontrakt er implisitt og beskriver gjensidige forventninger og arbeidsfordelinger mellom elev og lærer. Disse forventningene formes over lang tid gjennom erfaringer, praksis og rutiner. I sammenheng med oppgaver, handler det da om hva slags oppgaver elevene forventer at læreren gir dem, samt hva slags hjelp og tilbakemeldinger de forventer å få i oppgaveløsningen. Dersom elever kun har erfaring med lukkede matematikkoppgaver, som innebærer bare ett riktig svar, og der det forventes at de skal bruke nylig lærte prosedyrer, metoder og kunnskaper, vil sannsynligvis en modelleringsoppgave blir oppfattet som et brudd på den didaktiske kontrakten.

2.3.2 Klassifisering av modelleringsoppgaver

På samme måte som tilnærming til undervisning og vurdering kan en også klassifisere modelleringsoppgaver som holistiske eller atomistiske. I en holistisk modelleringsoppgave trengs alle steg i modelleringssyklusen, mens i en atomistisk oppgave kreves kun noen få steg (Berget, 2022). Borromeo Ferri (2018) har dermed en holistisk tilnærming til modelleringsoppgaver i sine kriterier fremstilt i forrige delkapittel. Dersom målet er at elevene skal utvikle modelleringskompetanse, er holistiske oppgaver vanligvis å foretrekke, men atomistiske kan være hensiktsmessige å bruke i både undervisning og vurdering (Hankeln et al., 2019). Blum og Borromeo Ferri (2009) og Blum (2015) påpeker at steg 1, 2 og 6 ofte er utfordrende for elever, og det kan dermed argumenteres for at atomistiske oppgaver bør fokusere på nettopp disse stegene.

En mer inngående klassifisering av modelleringsoppgaver er gjort av Maaß (2010). Hennes klassifisering tar for seg ni kategorier, hvorav de seks første referer spesifit til modelleringsoppgaver, mens de tre siste gjelder for oppgaver generelt. De seks første kategoriene er presentert i Tabell 4. Også Maaß vektlegger at modelleringsoppgaver nødvendigvis er holistisike, men oppgavene kan likevel fokusere på enkelte steg i modelleringssyklusen.

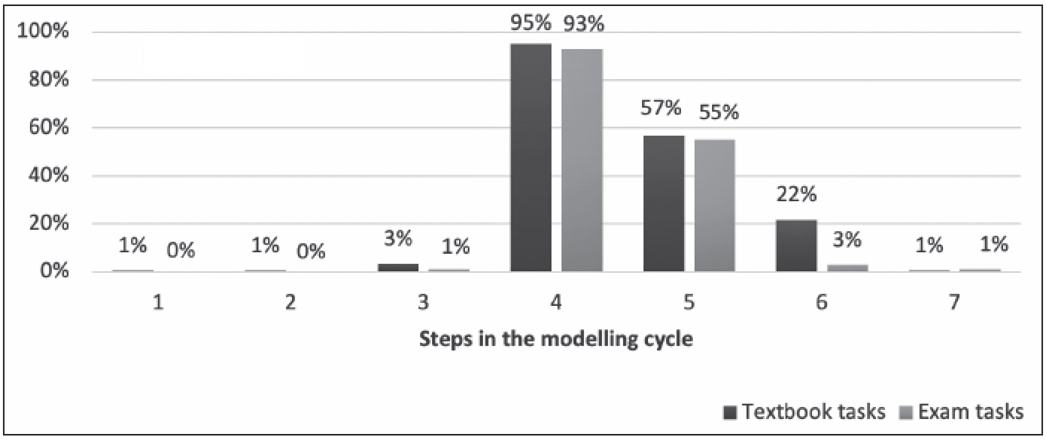
Name of the classification[a]	Categories of the classification					
I Focus of modelling activity[a]	Whole process (no/yes)	Understanding the situation (no/yes)	Setting up the real model (no/yes)	Mathematizing (no/yes)	Working within mathematics (no/yes)	Interpreting (no/yes)	Validating (no/yes)
II Data[a]	Superfluous (no/yes)	Missing (no/yes)	Superfluous and missing (no/yes)	Inconsistent (no/yes)	Matching (no/yes)		
III Nature of relationship to reality[a]	Authentic (no/yes)	Close to reality (no/yes)	Embedded (no/yes)	Intentionally artificial (no/yes)	Fantasy (no/yes)		
IV Situation[a]	Personal situation (no/yes)	Occupational situation (no/yes)	Public situation	Scientific situation (no/yes)			
V Type of model used[a]	Descriptive (no/yes)	Normative (no/yes)					
VI Type of representation[a]	Text (no/yes)	Picture (no/yes)	Text and picture (no/yes)	Material (no/yes)	Situation (no/yes)		

[a]Choose one category in each classification

Tabell 4: Klassifiseringsskjema for modelleringsoppgaver, utdrag fra Maaß (2010, s. 296)

2.3.3 Modelleringsoppgaver i skolen

Det er veldig varierende hva slags modelleringsoppgaver en finner i skoler og læreverk verden over (Blum & Niss, 2020). Berget (2022) analyserte lærebøker og eksamen i matematikk 2P og fant at de primært bestod at atomistiske modelleringsoppgaver. Siden matematikk 2P anes som en videreføring av matematikk 1P, kan det også være rimelig å anta at det samme gjelder for lærebøker og eksamen i 1P. Figur 9 oppsummerer resultatene i Berget sin studie ved å presentere prosentandel av oppgaver som krever gitte steg i modelleringssyklusen.



Figur 9: Oppgaver i lærebøker og eksamen i 2P (Berget, 2022, s. 62)

For å forklare hvordan hun kategoriserte oppgavene legger hun frem et oversatt oppgaveeksempel fra boken «Matematikk 2P» fra Aschehoug (Heir et al., 2014). Denne oppgaven ses i Figur 10. Til høyre i figuren ses stegene til modelleringssyklusen med tilhørende analyse av oppgaven realtert til de gitte stegene.

The table shows driving length and tire tread depth for 7 summer tires.

Driving length in 1000 km	14	17	24	35	37	38	39
Tire tread depth in mm	5.7	6.5	4.0	1.9	2.7	1.9	2.3

a) Make a linear model for the tread depth $f(x)$ in mm as a function of driving length x in 1000 km
b) Use the model to calculate what the tread depth can be for new tires
c) The minimum legal tread depth for summer tires is 1,6 mm. How long can you legally drive before changing tires, according to this model?
d) What is the domain of the model, for legal car drivers?
e) Recommended tread depth is 3.0 mm. How many per cent shorter than legal driving length is the driving length if you follow this advice?

1) NO
2) NO
3) NO
4) YES = 1
5) YES = 1
6) NO
7) NO

Figur 10: Eksempel på en oppgave i analysen til Berget (2022, s. 60)

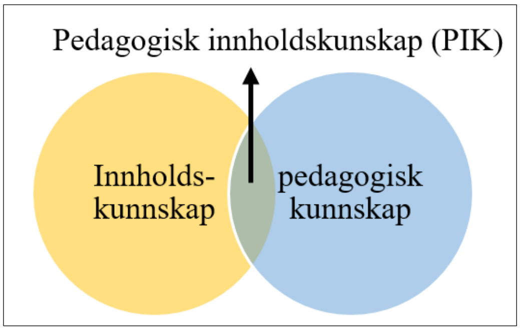
Berget anser denne oppgaven for å kun legge til rette for steg 4 og steg 5 i modelleringssyklusen. Oppgaven kan kalles en regresjonsoppgave eller en kurvetilpasningsoppgave. Borromeo Ferri (2018) argumenterer for at slike oppgaver ikke er modelleringsoppgaver, ettersom verdier og fremgangsmåte er gitt på forhånd. Galbraith (2012) mener på sin side at slike oppgaver kan ses i sammenheng med modellering som fartøy. Han advarer imidlertid om problematikken som kan oppstå når slike oppgaver brukes. Oppgavene kan gi et feil bilde av modellering og skape et avvik fra modelleringskonseptet. Kurvetilpasningsoppgaver bør derfor brukes med forsiktighet.

2.4 LÆRERES FORSTÅELSE OG KUNNSKAP I MATEMATISK MODELLERING

For å kunne formidle noe, er det viktig å faktisk ha en dyp forståelse av det en formidler (Shulman, 1986). Derfor avhenger kvaliteten på undervisning av lærerens kunnskap og forståelse innenfor temaet de underviser. Kvaliteten på undervisningen har videre stor innvirkning på elevenes læringsutbytte og prestasjoner (Borromeo Ferri, 2018). Dette kapittelet vil derfor ta for seg viktige begreper og konsepter innenfor læreres kunnskap og forståelse. Først vil dette bli presentert generelt (kapittel 2.4.1), deretter for modellering (kapittel 2.4.2). Resultater fra tidligere studier som har undersøkt læreres kunnskap og forståelse i matematikk og matematisk modellering, vil også bli kort belyst i de to delkapitlene.

2.4.1 Pedagogisk innholdskunnskap

Når en snakker om læreres forståelse og kunnskap, er begrepet pedagogisk innholdskunnskap (PIK, «pedagogical content knowledge») vesentlig. Begrepet ble introdusert av Shulman (1986, 1987), og er en type kunnskap som lærere må ha for å være kvalifisert til å undervise et bestemt fag eller emne. PIK er en kombinasjon av innholdskunnskap («content knowledge») og pedagogisk kunnskap («pedagogical knowledge»), og representerer læreres evne til å kombinere disse (Shulman, 1987). Dette kan illustreres som et venndiagram, slik som i Figur 11.



Figur 11: Pedagogisk innholdskunnskap (Koehler & Mishra, 2006, s. 1022)

Innholdskunnksap er kunnskap om selve innholdet i et gitt fag. At lærere innehar god kunnskap og en dyp forståelse av innholdet i et fag er av avgjørende betydning, ettersom de er å anse som hovedkilden til elevenes forståelse av fagkunnskapen (Shulman, 1986).

Shulman (1986) påpeker imidlertid at innholdskunnskap er mer enn bare å ha en dyp forståelse av emnet i seg selv, men omhandler også overordnet kunnskap om faget som helhet. Innholdskunnskapen inkluderer kunnskap om konsepter, fakta, teorier, prosedyrer, ideer og prinsipper, men også kunnskap om hvordan faget og fagstoffet er organisert og strukturert. Kunnskap om fagets struktur og organisasjon innebærer å forstå hvordan ulike deler av innholdet forholder seg til hverandre og bygger på hverandre, samt hvordan forskjellige tema er organisert hierarkisk. Å ha en fleksibel og mangfoldig forståelse av innholdet, slik at en kan forklare gitte konsepter på ulike måter, er også å anse om den del av innholdskunnskapen. I tillegg handler det også om kunnskap relatert til etablerte og fungerende praksiser og tilnærminger til stoffet, samt kunnskap om typiske misoppfatninger og tilgjengelige ressurser.

I matematikk inkluderer dermed innholdskunnskap blant annet kunnskap om matematiske tema, konsepter og ideer, som eksempelvis teoremer og bevis. Det handler også om kunnskap knyttet til matematiske strategier og løsningsmetoder. Samtidig består det i tillegg av kunnskap relatert til vitenskapelig metode, kjente matematikere, matematisk historie og matematikkens rolle i samfunnet og i skolen (Koehler & Mishra, 2009).

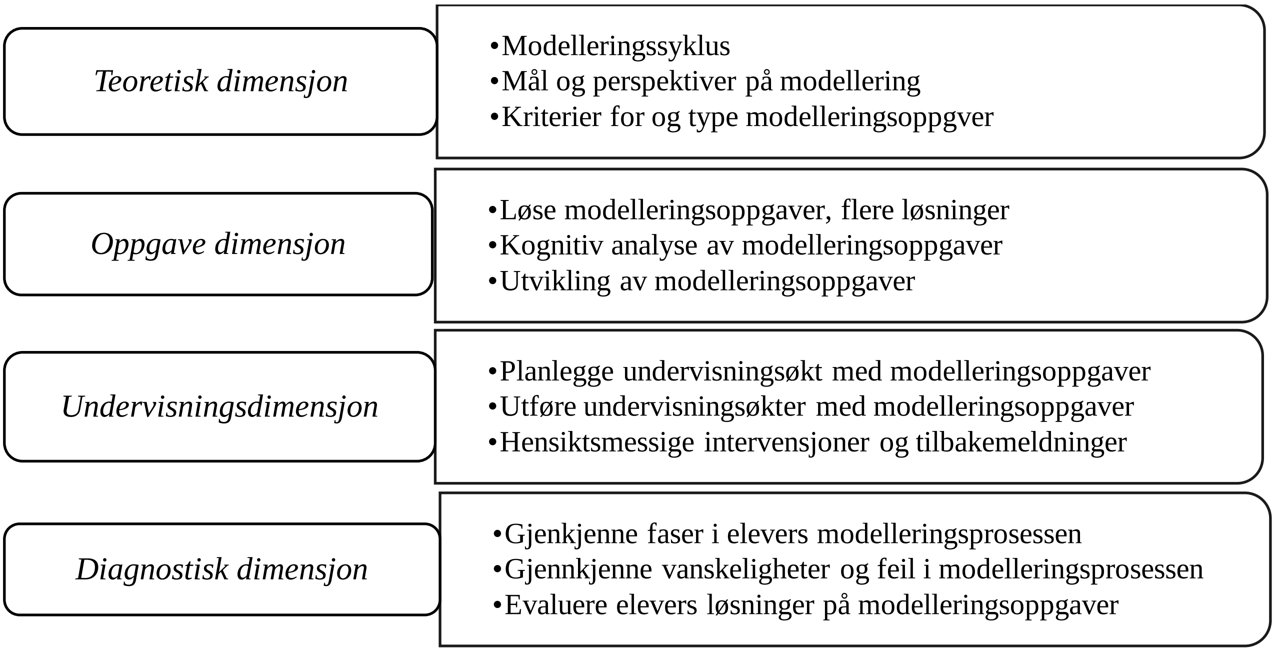
Den andre delen av PIK er pedagogisk kunnskap. Pedagogisk kunnskap handler om kunnskap relatert til hvordan elever best mulig kan tilegne seg fagstoff. Dette krever dyp forståelse for teorier om utvikling, samt kognitive og sosiale teorier relatert til læring og elever. Samtidig innebærer det også kunnskap om praksiser, teknikker eller metoder for undervisning, samt overordne pedagogiske formål, verdier og mål. Videre inkluderer det kunnskap og ferdigheter om generell klasseromsledelse, undervisningsplanlegging og elevvurdering (Koehler & Mishra, 2009). Pedagogisk innholdskunnskap (PIK) handler dermed om kunnskap om hva som skal læres (innholdskunnskap) og hvordan det skal læres bort (pedagogisk kunnskap). Det handler om læreres evne til å oversette sin dype forståelse av faget til en form som er meningsfull og tilgjengelig for elevene (Shulman, 1986).

Omfattende studier har blitt gjort relatert til PIK i matematikk. COACTIV og TEDS var to studier som undersøkte innholdskunnskap og PIK for matematikklærere på videregående skole (Borromeo Ferri, 2018). COACTIV-prosjektet tok for seg et representativt utvalg av tyske lærere og deres elever som deltok i PISA-studien, mens TEDS var en internasjonal studie (Blömeke & Kaiser, 2014; Kunter & Baumert, 2013). Den sentrale konklusjonen i studiene var at matematikklæreres PIK er avgjørende for elevers prestasjoner i matematikk (Borromeo Ferri, 2018). For å forbedre matematikkundervisningen i skolen, er der dermed av stor betydning å vektlegge forbedring av læreres kunnskap i matematikk og pedagogikk. Videre viste også studiene at læreres kunnskap om matematiske oppgaver er en viktig del av PIK. Borromeo Ferri (2018) illustrerer sammenhengen mellom læreres kompetanse, kvaliteten på undervisningen og elevers læring i figuren nedenfor.

Figur 12: Fra lærerens kompetanse til elevenes læring (Borromeo Ferri, 2018, s. 3)

2.4.2 Læreres forståelse i matematisk modellering

Hva skal til for å være kvalifisert for å undervise i matematisk modellering? Borromeo Ferri og Blum (2010) presenterer fire dimensjoner som det er nødvendig at lærere har en dyp forståelse og kunnskap innenfor, dersom de skal undervise modellering i matematikk. Disse dimensjonene er oppsummert i Figur 13. Sett i relasjon til Shulman og PIK, inngår disse i den pedagogiske innholdskunnskapen i matematisk modellering.



Figur 13: Modell av kompetanser som trengs for å undervise matematisk modellering, basert på Borromeo Ferri (2018, s.5) og Borromeo Ferri & Blum (2010, s. 2047)

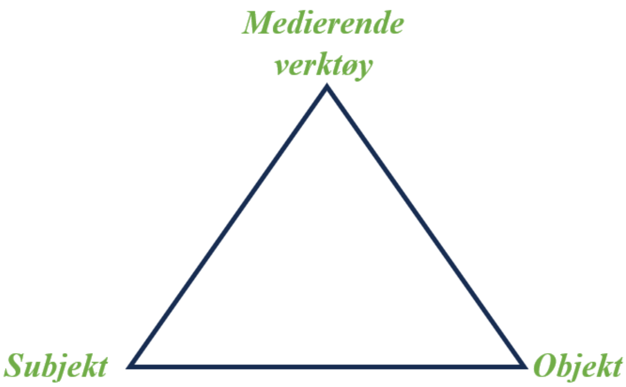
Å være kvalifisert til å undervise i matematisk modellering innebærer dermed at lærere har en forståelse for ulike elementer innenfor teori, modelleringsoppgaver, undervisning og diagnostikk. Borromeo Ferri og Blum (2010) legger også til at en annen viktig dimensjon er vurderingskompetanse, som handler om å utvikle egnede prøver til vurdering, samt lage og vurdere modelleringsoppgaver. Et av målene til denne studien er å undersøke deler av disse dimensjonene, med spesielt fokus på den teoretiske dimensjonen. Den teoretiske dimensjonen handler om forståelse av modellering og modelleringskompetanse, som inkluderer kunnskap om modelleringssyklusen, tanker rundt målet med modellering og ulike typer modelleringsoppgaver. Kunnskap om forskning relatert til undervisning av modellering inngår også i den teoretiske dimensjonen. Læreres vektlegging i undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse kan relateres til hva de anser som målet med modellering, og går derav også innenfor den teoretiske dimensjonen. Samtidig vil undervisning og vurdering også omfavne deler av undervisningsdimensjonen og den diagnostiske dimensjonen.

Når det gjelder den teoretiske dimensjonen fremstilt av Borromeo Ferri (2018), har Berget (2023) undersøkt hvordan fire lærere i 2P forstår modellering. Hun fant at lærerne manglet grunnleggende teoretisk kunnskap om modellering, selv om modellering har vært en del av pensum i rundt 30 år. Den første delen av modelleringsprosessen, å ta avgjørelser og gjøre antakelser, ble ansett som mindre viktig hos lærerne enn andre deler av prosessen. Samtidig knyttet de modellering opp mot funksjoner og regresjon, og så ikke på modellering som relevant for elevens hverdagsliv.

2.5 ET SOSIOKULTURELT LÆRINGSPERSPEKTIV PÅ MODELLERING

Den sosiokulturelle læringsteorien har sitt opphav hos den russiske psykologen Lev Vygotsky (1896-1934), men har senere blitt videreutviklet av andre (Imsen, 2020). Teorien belyser viktige aspekter ved menneskets utvikling og læring, og har hatt stor innflytelse i både pedagogisk og psykologisk sammenheng (Säljö, 2001). Essensen i teorien er at «… læring rives løs fra det individualistiske perspektivet, og vi trekker frem i lyset hvordan det sosiale felleskapet, kulturen og språket danner grunnmuren i barnets utvikling og læring» (Imsen, 2020, s. 191). Det er det sosiale samspillet mellom individer, som dialog og samarbeid, som danner utgangspunktet for læring, og i samhandling med andre har språket en vesentlig betydning (Dysthe, 2001).

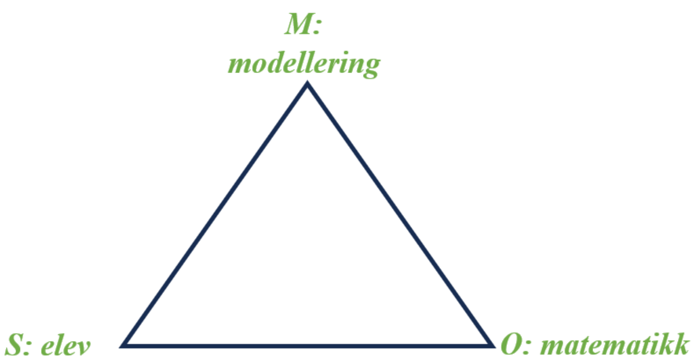
Vygotsky vektlegger at språket er det viktigste medierende verktøyet i utvikling og læring (Dysthe, 2001). Denne teorien «… står som et av de eminente mesterverkene i psykologens historie» (Imsen, 2020, s. 208). Begrepet medierende verktøy refererer til verktøy som fungerer som hjelp i en læringsprosess. Et medierende verktøy kan også kalles for et formidlingsverktøy. I tillegg til språk, kan for eksempel personer, som lærere og medelever, samt fysiske materiell og digitale verktøy, anses som medierende verktøy (Dysthe, 2001). Funksjonen til medierende verktøy kan illustreres med en trekant som i Figur 14. Figuren assosieres med kulturhistorisk aktivitetsteori, som betraktes som en videreføring av Vygotsky sitt arbeid, og kan kalles for formidlingstrekanten (Taber, 2020). Den fremhever at læring skjer gjennom samspill mellom det medierende verktøyet, subjektet og objektet. I en undervisningssammenheng er eleven subjektet, mens objektet er den aktiviteten som skal gjennomføres, som eksempelvis en oppgave eller et tema.



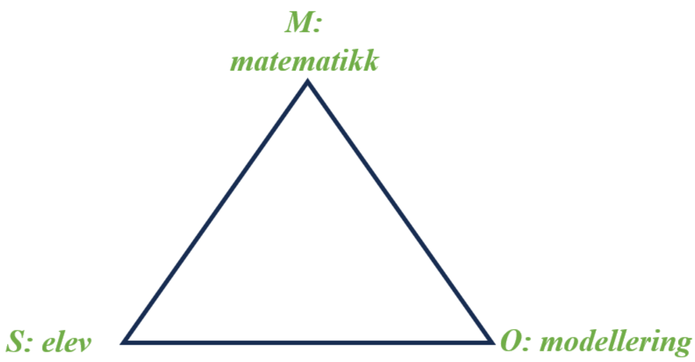
Figur 14: Sammenhengen mellom medierende verktøy, subjekt og objekt i et sosiokulturelt læringsperspektiv (Imsen, 2020; Taber, 2020)

Et annet viktig element i sosiokulturelt læringsperspektiv er at mennesker må forsås i sammenheng med sine omgivelser. Det sosiale og det individuelle er sammenvevd og kan ikke skilles fra hverandre i analyse av menneskers handlinger (Imsen, 2020). Sett i sammenheng med modelleringsaktiviteter er det derav nødvending å ta hensyn til sosiale aspekter i analyse av elevarbeid, slik som Vos & Frejd (2022) påpeker i sin utvidelse av modelleringssyklusen. Utvikling av modelleringskompetanse er noe som skjer i samhandling med andre, og forståelse av modellering er et resultat av sosiale prosesser. Samtidig tilsier et sosiokulturelt perspektiv på læring at arbeid i grupper kan være en god arena for læring, noe som vektlegges i utvikling av modelleringskompetanse og i undervisning av modellering.

Perspektiver på modellering kan også ses i sammenheng med sosiokulturell teori. Modellering for matematikkens skyld (Blum & Niss, 2020), eller modellering som fartøy (Julie, 2002), kan illustreres med formidlingstrekanten som vist i figur 15. Da er modellering å anse som det medierende verktøyet i arbeidet med matematikk. Det andre perspektivet, matematikk for modelleringens skyld (Blum & Niss, 2020), eller modellering som innhold (Julie, 2002), kan ses på som presentert i figur 16. Her er det matematikk som er det medierende verktøyet, mens modellering er objektet.



Figur 15: Modellering som fartøy



Figur 16: Modellering som innhold

3 METODE

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for mine valg relatert til forskningstilnærming og design, samt metoder for datainnsamling og analysemetode. Jeg vil begrunne valgene jeg har tatt og forklare hvordan jeg gjennomførte både datainnsamling og analyse av datamateriale. Først presenteres en oversikt over studien (kapittel 3.1), deretter valg av forskningstilnærming og design (kapittel 3.2). Så beskrives metoder for datainnsamling (kapittel 3.3), som innebærer intervju av lærere og elever. I kapittel 3.4 redegjør jeg for valg av oppgaver til intervjuer av elever, og i kapittel 3.5 presenteres utvalg av deltakere. Hvordan jeg analyserte data fra intervjuene blir presentert i kapittel 3.6. Til sutt vil jeg diskutere forskningsetiske betraktninger, samt refleksjoner rundt studiens validitet og relabilitet.

3.1 OVERSIKT OG PLAN FOR STUDIEN

I denne studien har jeg valgt å se på matematisk modellering i 1P. Jeg ønsket å danne et bilde av matematikk modellering i 1P sett fra ulike perspektiver, og derfor valgte jeg å undersøke både lærere og elever fra tre 1P-klasser. Hensikten var å få et innblikk i hvordan modellering forstås, undervises og vektlegges av lærere, men også elevenes utbytte av og tilnærming til modellering og modelleringsoppgaver. På grunnlag av dette ble tre forskningsspørsmål formulert. Før jeg samlet inn data, utarbeidet jeg en oversikt og plan for innsamling og analyse av data knyttet til forskningsspørsmålene. Dette er oppsummert i Tabell 5.

Forskningsspørsmål	**Datainnsamling**	**Dataanalyse**
I. Hvordan forstår lærere i 1p modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger de i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?	Lydopptak av tre individuelle semistrukturerte intervju med tre lærere som underviser i 1P.	Se på lærerens utsagn relatert til: 1. Forståelse av begrepet modellering 2. Modelleringskompetanse, deres forståelse av hva det innebærer og hva de vektlegger når de vurderer elevenes modelleringskompetanse 3. Undervisningspraksis og vektlegging i undervisningen med hensyn til matematisk modellering → Analysere i lys av teori.
II. På hvilken måte viser elevgrupper i 1p modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?	Oppgavebasert semistrukturert gruppeintervju av tre elevgrupper på tre elever, der de løser oppgaver som legger til rette for alle stegene i modelleringssyklusen. Lydopptak av intervju og innsamling av elevenes notater.	Analysere elevenes modelleringsprosess når de jobber med de tre oppgavene ved å bruke modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Steg i modelleringssyklusen identifiseres gjennom det elevene sier og skriver. Deres løsningsprosess illustreres i diagrammer lignende MAD-rammeverket til Ärlebäck (2009). Tolke resultatene fra elevenes modelleringsprosess i lys av teori for å avgjøre

	Elevene jobber nesten uavbrutt med minst mulig innblanding fra forsker.	på hvilken måte de viser modelleringskompetanse.
III. Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom gruppens modelleringsprosess og deres lærers uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering?	Semistrukturert individuelt intervju av lærere, samt oppgavebasert semistrukturert gruppeintervju av deres elever.	Sammenligne data fra de to ulike intervjuene. Se på lærerens forståelse og vektlegging av modelleringsbegrepet og modelleringskompetanse, inkludert undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse. Se også på deres utsagn knyttet til modelleringsoppgaver, spesielt “Fylle drivstoff”. Sammenlign dette med elevenes løsningsprosess, inkludert hvilke steg de går gjennom i modelleringssyklusen og hvordan de viser modelleringskompetanse.

Tabell 5: Oversikt over forskningsspørsmål, datainnsamling og dataanalyse

3.2 FORSKNINGSTILNÆRMING OG DESIGN

Intensjonen i denne studien har vært å ha en dyptgående undersøkelse av matematisk modellering i faget matematikk 1P ved en videregående skole, ved å se på en liten gruppe med lærere og deres elever. Deltakerens forståelse, meninger, holdninger og tankeprosesser sett fra et sosiokulturelt perspektiv, har her vært sentrale elementer. Derfor ble det hensiktsmessig å velge en kvalitativ forskningstilnærming. Jacobsen (2021) skriver at en kvalitativ tilnærming kjennetegnes med få deltakere der ønsket er å belyse hvordan individer forstår og tolker en gitt situasjon. Videre er tilnærmingen åpen og godt egnet for å fremheve deltakernes perspektiv og dens kontekst. Bryman (2012) peker også på at en fordel med kvalitative studier er at de gir mulighet for å utforske tanker og meninger som ligger bak handlinger og uttalelser.

En kvalitativ tilnærming innebærer som regel et fortolkningsbasert perspektiv, som også er tilfellet for denne studien (Jacobsen, 2021). I et fortolkningsbasert perspektiv anses vår forståelse av virkeligheten som en sosial konstruksjon. Videre betraktes ikke forskerens rolle som ubetydelig, men det vektlegges at forskere fortolker virkeligheten (Bryman, 2012). Dette impliserer at jeg som forsker ikke har en nøytral rolle, men at mine erfaringer, opplevelser og forståelse av teori vil legge føringer for hvordan mening blir gitt til datamateriale. Et slik perspektiv på denne studien var nødvending ettersom det er umulig for meg å være fullstendig objektiv, da jeg selv har oppfatninger om eksempelvis modellering, matematikkundervisning og faget matematikk 1P. Jeg har også en tilknytning til skolen og kjennskap til lærerne. For å sikre validiteten og relabiliteten til studien (mer om dette i kapittel 3.8), kreves derfor en kritisk tilnærming til datainnsamling og analyse av datamateriale. Å ha et fortolkningsbasert perspektiv innebærer i tillegg at en som forsker må se på hendelser og uttalelser i lys av personens sosiale situasjon eller kontekst. Dette passer godt med sosiokulturell læringsteori, som er det læringsteoretiske perspektivet for denne studien.

Ved valg av en kvalitativ tilnærming, er det flere forskningsdesign som kan være hensiktsmessige. Ettersom jeg i denne studien ønsket å forske på en gruppe med lærere og deres elever, for å få bedre innsikt i matematisk modellering i 1P ved en skole, var en casestudie passende (Bryman, 2012). Bryman (2012) skriver at en casestudie vektlegger kompleksiteten og konteksten rundt en case, og at slike studier generelt kjennetegnes ved en inngående og grundig undersøkelse av en spesifikk case eller et begrenset antall caser. Casestudier kan omfatte ulike caser, som eksempelvis et samfunn, en organisasjon, en skole, en klasse, familier, enkeltpersoner og grupper. Det overordnede målet med en casestudie er å forstå i dybden den gitte casen som skal studeres. Casen i denne studien er matematisk modellering i matematikk 1P ved en videregående skole.

I lys av formålet til en studie, kan casestudier ha en kvalitativ eller en kvantitativ tilnærming (Bryman, 2012). De kan også være forklarende eller beskrivende (Bryman, 2012). Denne studien er en beskrivende casestudie. Målet med en beskrivende casestudie er ikke å forklare hvorfor en situasjon er som den er, slik som i en forklarende casestudie, men heller å gi en grundig beskrivelse av ulike aspekter knyttet til det forskeren ønsker å undersøke (Bryman, 2012). En beskrivende casestudie gir dyp innsikt i en enkelt case, noe som kan være både en fordel og en ulempe. Å komme nær på det en ønsker å undersøke kan medføre at en lettere klarer å plukke opp aspekter ved casen som ellers kunne gått ubemerket. Dette er en fordel med en beskrivende casestudie. En ulempe er at resultatene fra studien kan være vanskelige å generalisere (Bryman, 2012).

3.3 METODER FOR DATAINNSAMLING

I en kvalitativ casestudie er det flere hensiktsmessige metoder for datainnsamling. Bryman (2012) skriver at metoder som observasjon, semistrukturerte intervjuer og dokumentinnsamling er godt egnet i en intensiv og detaljert undersøkelse av en case. For å besvare forskningsspørsmålene i denne studien har jeg valgt å samle inn empiriske data gjennom lydopptak av semistrukturerte intervjuer, samt innsamling av elevers notater. En grundig beskrivelse av disse metodene, samt en redegjørelse for hvorfor de ble valgt og hvordan de ble gjennomført, vil bli belyst i dette kapittelet. Av lærere hadde jeg individuelle semistrukturert intervjuer, mens av elever hadde jeg semistrukturerte oppgavebaserte gruppeintervjuer. Før jeg begynte datainnsamlingen mottok jeg en tillatelse fra SIKT (Vedlegg 1) og innhentet samtykke fra deltakerne (Vedlegg 4 og Vedlegg 5).

3.3.1 Intervju av lærere

Det ble gjennomført tre semistrukturerte individuelle intervjuer av tre lærere som underviser i matematikk 1P. Dette ble gjort for å kunne besvare forskningsspørsmål I og

III (se Tabell 5). Disse hadde en varighet på omtrent 45 minutter hver, og det ble gjort lydopptak av hele intervjuet som senere ble transkribert. Før gjennomføring av intervjuene hadde jeg et pilotintervju med en annen matematikklærer ved en annen skole.

Jeg valgte å ha et semistrukturert intervju fordi det egner seg godt i kvalitative studier der målet er å få en dyp innsikt i deltakernes perspektiver og tanker (Kvale & Brinkmann, 2015). Bryman (2012) skriver også at denne type intervju er hensiktsmessige når en ønsker en åpen tilnærming til datainnsamlingen. Intervjuformen gir dessuten rom for fleksibilitet, da rekkefølgen på spørsmålene kan endres på og jeg kan stille spontane oppfølgingsspørsmål underveis. Oppfølgingsspørsmål kan for eksempel være nyttige dersom noe er uklart og det trengs en utdyping, eller dersom uforutsette, interessante aspekter dukker opp underveis i intervjuet. Et semistrukturert intervju kan føre til mer variert og rikere informasjon, enn hva som er tilfellet i mer lukkede intervjuformer. Siden jeg ønsket å utforske hver lærers synspunkter og gi lik vekt til hvert enkelt sitt perspektiv, bestemte jeg meg for å gjennomføre individuelle intervjuer. Et gruppeintervju av lærere kunne ført til at færre perspektiver kom frem, da én lærer eksempelvis kunne dominert diskusjonen. Dette kunne i tillegg resultert i en ubalansert vektlegging av lærernes synspunkter (Jacobsen, 2021).

For at intervjuene skulle gi meg data til å besvare de relevante forskingsspørsmålene i studien, utarbeidet jeg en intervjuguide i forkant (se Vedlegg 2). Siden Berget (2023) i sin studie hadde gjort en lignende undersøkelse, der hun så på læreres forståelse av modellering i 2P, tok jeg inspirasjon fra hennes intervjuguide. Målet i min studie har imidlertid vært noe mer omfattende, da jeg også ønsket å se på lærers forståelse av modelleringskompetanse, samt deres vektlegging i undervisning og vurdering. Av den grunn ble det lagt til flere spørsmål og gjort andre justeringer på Berget (2023) sin versjon. Oppsummert bestod intervjuguiden av seks hoveddeler, hvorav de to første delene var en slags innledning og den siste delen var refleksjon rundt valgte oppgaver. Disse hoveddelene er gjengitt i tabellen under.

1. Bakgrunn	4. Definisjon av modellering
2. Faget 1P	5. Modelleringskompetanse
3. Undervisning av modellering	6. Om spesifikke oppgaver

Tabell 6: Hoveddeler i intervjuguide

Den siste delen av intervjuet, om spesifikke oppgaver, var ment for å trigge refleksjon hos den enkelte lærer (Berget, 2023). Refleksjonene kunne videre gi mer innsikt i deres forståelse av modellering og modelleringskompetanse, samt hva de vektlegger i vurdering og undervisning. Her ble de valgt fire, ganske ulike oppgaver, og lærerne ble blant annet spurt om hvilke av disse de anså som modelleringsoppgaver. De to første oppgavene er hentet fra lærerboken i 1P (Borge, et al., 2020). Oppgave 1 (Borge, et al., 2020, s. 189) er fra kapittelet kalt «Modellering» og er en regresjonsoppgave som vektlegger steg 4, 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. Borromeo Ferri (2018) er tydelig på at slike oppgaver ikke er modelleringsoppgaver, da fremgangsmåten er gitt på forhånd. Oppgave 2 (Borge, et al., 2020, s. 135) er hentet fra kapittelet kalt «Funksjoner» og delkapittelet «Funksjoner som modeller». Denne oppgaven vektegger steg 4 og 5 i modelleringssyklusen. Borromeo Ferri (2018) anser heller ikke denne oppgaven for å være en modelleringsoppgave, da modellen og fremgangsmåten er gitt på forhånd. De to siste oppgavene er å anse som modelleringsoppgaver, da de oppfyller kriteriene angitt i kapittel 2.3.1. Oppgave 3 er hentet fra et oppgavehefte med modelleringsoppgaver som vi fikk i kurset MA-424, Arbeidsmåter i matematikk, og kan kategoriseres som et Fermi-problem (Ärlebäck & Bergsten, 2010). Den siste oppgaven, oppgave 4, er en tilpasset versjon av «Filling up» til Blum og Leiß (2006, s. 1625). Denne oppgaven ble også benyttet i elevintervjuene.

3.3.2 Intervju av elever

For å samle inn data til å besvare forskningsspørsmål II og III, ble det gjennomført to oppgavebaserte semistrukturerte gruppeintervjuer av elever (se Tabell 5). Gruppene bestod av tre elever i hver gruppe, og i løpet av intervjuet løste de tre oppgaver. I tillegg ble elevene stilt noen oppfølgingsspørsmål underveis og etter oppgaveløsningen. Jeg noterte observasjoner og det ble tatt lydopptak av hele intervjuet, som varte i overkant av én time. Gjennom oppgaveløsningen noterte elevene på ark, og disse ble samlet inn etter intervjuet var ferdig.

Under intervjuet fikk elevene utdelt oppgavene, notatark, skrivesaker og kalkulator. De fikk også lov til å bruke både pc og mobil. Jeg anså dette som mest hensiktsmessig, da dette er hjelpemidler elever har tilgang på i hverdagen ellers. På den måten kunne oppgaveløsningen og situasjonen muligens oppleves som mer autentisk for elevene. Samtidig ønsket jeg at elevene skulle få mulighet til å ta i bruk digitale verktøy, da dette kan bidra til at de får vist mer av sin modelleringskompetanse (Blum & Niss, 2020; Greefrath, 2011; Niss & Højgaard, 2019; Vos & Frejd, 2022).

Oppgavebasert intervju er en mye brukt metode i kvalitativ forskning innen matematikkdidaktikk (Maher & Sigley, 2020). Intervjuet sentrerer seg rundt oppgaveløsning, men intervjuer kan også stille spørsmål underveis. En kan ha både sterkt strukturerte, semistrukturerte og helt åpne oppgavebaserte intervjuer. Jo mer åpnet intervjuet er, desto mindre innblanding er det fra forsker. Når deltakerne løser oppgaver, kan forsker observere handlingene deres og for eksempel ta lydopptak eller filmopptak. Maher og Sigley (2020) skriver at opptakene, observatørens notater og materiale fra deltakerne utgjør grunnlaget for den senere analysen av det oppgavebaserte intervjuet. Metoden er godt egnet for å få innsikt i elevers matematiske kunnskap og problemløsningsadferd, inkludert deres måter å resonere på, samt hvordan de ser sammenhenger og strukturerer kunnskapen sin.

Samlet sett gjorde dette at jeg anså oppgavebasert intervju som en passende metode for å få innsikt i elevenes modelleringskompetanse. Jeg valgte å ha en semistruktur på intervjuet, der jeg ved behov kunne stille spørsmål eller komme med intervensjoner. Dette for å kunne assistere elevene hvis de skulle stå fast, oppmuntre dem til å reflektere over sine løsninger, og i tillegg få en bedre forståelse av deres tanke- og løsningsprosess, og derav deres modelleringskompetanse. Samtidig ønsket jeg å vektlegge lite innblanding og kom kun med intervensjoner der jeg anså det som nødvendig. Slik kunne elevene jobbe uavbrutt og selvstendig, og jeg kunne minimere min påvirkning av hva de viste av modelleringskompetanse.

Jeg valgte å ha et gruppeintervju da jeg anså det som mest passende til studien. Et sosiokulturelt læreperspektiv, samt tidligere forskning på undervisning av modellering, tilsier at arbeid med modelleringsoppgaver i grupper er mest hensiktsmessig (Blum & Niss, 2020; Imsen, 2020). I tillegg er det flere fordeler ved et slikt intervju. For det første kan det skape en trygg atmosfære for elevene, da mange føler seg mer komfortable i en gruppesetting (Bell & Waters, 2014). For det andre kan et slik intervju skape mulighet til å samle individuelle perspektiver samtidig som en kan observere hvordan deltakerne i gruppen diskuterer ulike ideer (Jacobsen, 2021). Dette kan gi rikere data enn hva som hadde vært tilfellet ved et individuelt oppgavebasert intervju. På den andre siden kan et gruppeintervju også ha ulemper. En ulempe er at gruppedynamikken kan føre til en skjev vektlegging av den enkeltes perspektiver, da noen kan være mer fremtredende og utadvendt enn andre (Bell & Waters, 2014; Jacobsen, 2021). Jeg var imidlertid bevisst på dette, og prøvde å balansere dynamikken dersom jeg anså det som hensiktsmessig. Samtidig var det heller ikke nødvendigvis et poeng å vektlegge likt den enkeltes synspunkter, da jeg ønsket å se på hva gruppen som helhet viste av modelleringskompetanse.

Før gjennomføring av intervjuene ble det utarbeidet en intervjuguide (Vedlegg 3) og utført et pilotintervju. Intervjuguiden bestod blant annet av mulige hjelpespørsmål jeg kunne stille elevene på oppgavene. Jeg ønsket å ha disse klare på forhånd slik at jeg unngikk å hjelpe dem for mye. Pilotintervjuet ble gjennomført av en gruppe 1P-elever på samme skole, og som resultat av dette ble det gjort noen små justeringer på formuleringene i oppgavene. Jeg brukte også mye tid på å velge ut oppgaver til intervjuet. Valg av oppgaver presenteres og begrunnes i neste delkapittel.

3.4 VALG AV OPPGAVER TIL ELEVINTERVJU

Sentralt i oppgavebaserte intervjuer er oppgavene som deltakerne skal løse. Det er derfor viktig at oppgavene passer til det som skal undersøkes, og at de velges på grunnlag av en nøye vurdering (Maher & Sigley, 2020). I dette kapittelet vil jeg redegjøre for mine valg av oppgaver. Først presenteres de overordene kriteriene jeg har tatt utgangpunkt i ved valg og design av oppgavene. Deretter presenteres, forklares og kategoriseres de tre oppgavene jeg endte opp med å bruke.

3.4.1 Kriterier

Kriterier for oppgavene ble formulert med hensyn på tidligere forskning og relevant teori. Jeg utarbeidet en tabell som er å anse om en sammenfatning av kriteriene angitt i Tabell 2 og Tabell 3, samt Borromeo Ferri (2018) sine seks kriterier (se kapittel 2.3.1). Tabellen dannet utgangspunkt for utvelgelse og design av oppgavene til elevintervjuene.

Kriterier	**Forklaring**
1. Realistisk	Problemet har en referanse til den virkelige verden og er realistisk.
2. Relevant og meningsfull	Elever kan anse problemet som interessant, nært relatert eller relevant til deres hverdagsliv.
3. Virkelighetsnær	Problemet er virkelighetsnært med hensyn til både den ekstra-matematiske delen og den matematiske delen.
4. Åpen	Problemet tillater flere løsninger og ulike tilnærminger på flere nivåer.
5. Løselig gjennom modelleringssyklusen	Problemet fremmer kognitive elementer relatert til stegene i modelleringssyklusen.
6. Provokasjon av ytterligere spørsmål	Oppgaven bør åpne for muligheter til at elevene kan stille nye spørsmål. For eksempel matematisk spørsmål eller spørsmål relatert til konteksten eller den reelle situasjonen.
7. Passende språk	Oppgaven bør være formulert slik at elevene kan forstå den.

Tabell 7: Kriterier for valg av oppgaver til elevintervju (Borromeo Ferri, 2018; Wess et al., 2021)

I tillegg ble oppgavene designet med hensyn på at empirisk forskning viser at steg 1, 2 og 6 i modelleringssyklusen ofte er utfordrende for elever, samt at oppgavene som elever generelt ser ut til å ha erfaring med primært legger til rette for steg 4 og 5 (Berget, 2022; Blum, 2015; Blum & Borromeo Ferri, 2009). Jeg ønsket derfor at oppgavene ga mulighet for at elevene kunne vise kompetanse på spesielt steg 1, 2 og 6, og at hovedfokuset ikke skulle ligge på steg 4 og 5. Samtidig var det viktig at oppgavene var holistiske (kriterium 5 i Tabell 7). Oppgavene som ble valgt og hvilke steg som var i fokus i hver oppgave, er oppsummert i tabellen under.

Oppgave	**Steg i modelleringssyklusen**
1 Reisekostnader	1 er i hovedfokus
2 Fylle drivstoff	6 er hovedfokus, men også fokus på 2
3 Hvilken leilighet	6 er i hovedfokus, men også fokus på 2

Tabell 8: Valgte oppgaver og hvilke steg i modelleringssyklusen som er i fokus

Videre antok jeg at elevene hadde lite erfaring med åpne modelleringsoppgaver. Denne antakelsen var basert på egen erfaring fra undervisning i matematikk 1P, samt intervjuene med lærerne og tidligere forskning. Av den grunn ble rekkefølgen på oppgavene lagt opp slik at graden av åpenhet økte for hver oppgave. Dette for at elevene skulle bli mer komfortable med slike oppgaver underveis, og at inngangsterskelen skulle være lav til å begynne med. Jeg valgte også oppgaver som søkte deskriptive modeller, da jeg anså det som mest passende både med hensyn på tidsbruk og relevant data for forskningsspørsmålene mine.

3.4.2 Oppgave 1: Reisekostnader

> **Oppgave: Reisekostnader**
>
> Hannah er 16 år og bor sammen med familien i Vågsbygd. I helgen skal hun besøke sine besteforeldre på Kjelsås i Oslo, og hun reiser da alene. Hun ser på priser på nettet, og ser at togreisen tar 4 timer og 24 minutter. Ungdom under 18 år må betale 200 kr for en tur-retur-billett, mens voksne må betale 555 kr. For å komme seg til Kristiansand rutebilstasjon der toget går, må Hannah ta bussen. En enkeltbillett koster 20 kr, en tur-retur billett koster 30kr og en dagsbillett koster 60kr. Fremme på Oslos S må Hanna ta bussen til Kjelsås. Der er prisen på enkeltbillett 15 kr, mens dagsbillett er 30kr. Hvor mye må Hannah betale for hele reisen?

«Reisekostnader» ble valgt som første oppgave, fordi den ble ansett som minst åpen, hadde en lav inngangsterskel og lave kognitive krav. Dette er også en type oppgave som ligner på oppgaver elevene kan ha vært borti før, og deres «redsel for å mislykkes» kan dermed reduseres, og intervjuet kan få en god start med tanke på elevenes mestring (Maaß, 2010). I forhold til kriteriene angitt i Tabell 7, anså jeg oppgaven som både realistisk og virkelighetsnær fordi den presenterer data fra den virkelige verden. Videre beskriver den en hverdagslig situasjon som kan være relevant og meningsfull for elevene. Den har et enkelt og forståelig språk, er løselig gjennom modelleringsprosessen og kan stimulere til ytterligere spørsmål. Oppgaven har noen muligheter for ulike løsninger eller løsningsveier, og er derav i så forstand å anse som åpen.

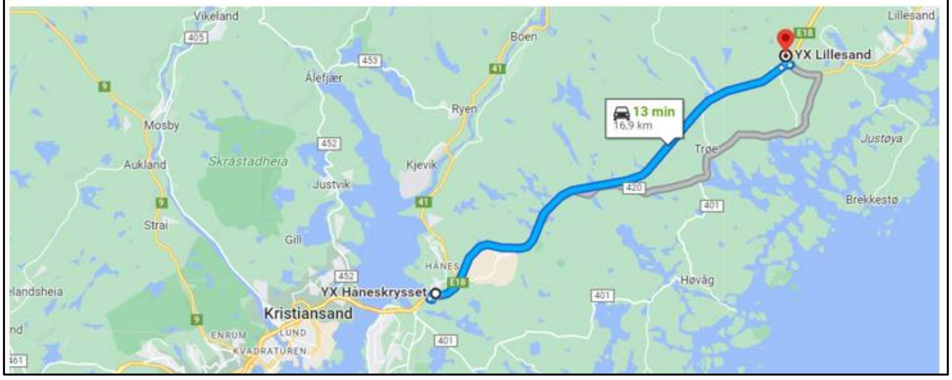
«Reisekostnader» er inspirert av en oppgave designet av Maaß (2010, s. 306), men jeg har endret på stedsnavn og priser for å gjøre oppgaven mer meningsfull for elevene. Oppgaven har blitt testet og utprøvd tidligere, noe som jeg anså som en fordel. Maaß (2010) kategoriserer oppgaven i henhold til sitt klassifiseringsskjema (Tabell 4). Hovedfokuset til oppgaven er steg 1, konstruere, da elevene må bruke mesteparten av tiden på å sortere ut relevant informasjon (kategori I). Samtidig er det også nødvending å blant annet matematisere, jobbe med matematikk, tolke, validere og eksponere, men dette er kun på et lavt nivå. Jobbingen med matematikk er eksempelvis bare et addisjonsstykke. Videre har oppgaven overflødige data (kategori II), er nær tilknyttet til virkeligheten (kategori III), beskriver en personlig situasjon (kategori IV), har en deskriptiv modell (kategori V) og inneholder tekst (kategori VI).

3.4.3 Oppgave 2: Fylle drivstoff

Oppgave: Fylle drivstoff

Cecilie bor på Hånes. For å fylle drivstoff på hennes VW golf kjører hun til YX Lillesand. Der betaler hun i gjennomsnitt 19 kr per liter, men på Hånes må hun betale 21,50 kr per liter.

Lønner det seg for Cecilie å fylle drivstoff i Lillesand? Begrunn svaret



Den andre oppgaven som ble valgt er en tilpasning av oppgaven «Filling up» fra Blum og Leiß (2006, s. 1625) (Figur 8). «Filling up» er en godt utprøvd oppgave som har blitt brukt til å kartlegge elevers modelleringsprosess ved flere anledninger. Av den grunn antok jeg at denne oppgaven ville kunne gi meg mye relevant data. Dermed vektla jeg at elevene skulle bruke mest tid på denne oppgaven, og dette ble også sagt eksplisitt til dem før intervjuet startet. Jeg valgte å redigere både stedsnavn og priser til «Filling up», for å gjøre konteksten mer gjenkjennbar for elevene. Samtidig valgte jeg å legge ved et bilde av et kart, fordi jeg ønsket at elevene skulle bruke litt mindre tid på å forstå situasjonen (steg 1). I tillegg anså jeg det som hensiktsmessig å inkludere et kart, spesielt med tanke på at lavpresterende elever og elever med språkutfordringer kunne dra nytte av det for å forstå situasjonen.

Som beskrevet i kapittel 2.3.1, legger oppgaven til rette for alle stegene i modelleringssyklusen. Fokuset ligger på steg 6, validere, der elevene må vurdere resultatet og sjekke om de har tatt hensyn til alt i sine beregninger (Wess et al., 2021). Å gjøre antakelser og finne informasjon vil også være et viktig steg, da oppgaven har manglende data. Oppgaven er åpen, realistisk, virkelighetsnær og stimulerer til videre spørsmål og refleksjoner. Ettersom elevene er i den alderen der mange kjører moped og er på vei til å ta førerkort for bil, er oppgaven nært knyttet til elevenes hverdagsliv. Dessuten var drivstoffpriser et meget aktuelt tema i tiden før og under intervjuene, da prisene hadde økt mye den siste tiden, noe som også ble dekket av media. Det er dermed klart at oppgaven tilfredsstiller kriteriene angitt i Tabell 7.

I henhold til klassifiseringen til Maaß (2010) (Tabell 4), kan oppgaven dermed klassifiseres på følgende måte: I: Validere, II: manglende data, III: virkelighetsnær, IV: personlig situasjon, V: deskriptiv modell og VI: tekst og bilde.

3.4.4 Oppgave 3: Hvilken leilighet?

Oppgave: Hvilken leilighet?

Chris skal studere bachelor i Oslo, og begynner til høsten. Han må da flytte fra Kristiansand til Oslo, og har funnet to greie kollektiver. Det ene kollektivet er 400m fra skolen og leien er 8000kr per måned med strøm inkludert. Det andre kollektivet ligger 6,5 km fra skolen og leien er på 6000kr per måned uten strøm inkludert. Chris har ikke bil, og er avhengig av offentlig transport. Chris ønsker hjelp fra deg som er god i matematikk til å avgjøre hvilken av de to kollektivene som er billigst for han å leie. Hvilket kollektiv vil du anbefale?

Den siste oppgaven som ble brukt i intervjuet av elevgruppene var oppgaven «Hvilken leilighet?». Denne er inspirert av en oppgave konstruert av Obed Opoku Afram (2021), men jeg har endret både sted, priser og situasjon. Jeg endret situasjonen til å omhandle en student i stedet for en arbeidstaker, slik som var tilfellet i den opprinnelige oppgaven. Dette med hensikt om at situasjonen da muligens kunne oppleves som mer relevant for elevenes hverdagsliv. Elevene går studiespesialiserende og skal mest sannsynlig studere om 2 års tid, og i den forbindelse er det nok flere som skal lete etter et sted å bo utenfor Kristiansand. For mange studenter er et kollektiv det beste alternativet.

Dette er en oppgave som er løselig gjennom hele modelleringssyklusen. Først krever den at elevene forstår situasjonen. Deretter må elevene lete etter informasjon, strukturere og gjøre antakelser. Her så jeg for meg at elevene ville bruke en del tid, og at de eksempelvis ville søke opp strømpriser og priser på kollektivtransport på internett. Jeg så også for meg at det ville bli disjunksjoner rundt den enkeltes personlige preferanser. Videre krever oppgaven at en matematiserer problemet og deretter jobber med matematikk. Matematikken involvert vil i de fleste tilfeller være ganske enkel, da eksempelvis kun noen addisjonsstykker. Deretter må elevene tolke resultatene i den virkelige verden, samt validere dem i lys av situasjonen. Dette vil innebære refleksjoner rundt antakelsene tatt, og mulige andre faktorer de har glemt å ta hensyn til. Her så jeg for meg elevene ville bruke litt tid, og at de kanskje ville innse at modellen de hadde laget måtte tilpasses. Jeg så også for meg at det dette steget ville trigge noen diskusjoner blant elevene. Siste del av løsningsprosessen vil være å presentere løsningen og gi et endelig svar. For elevene kunne det innebære å skrive ned løsningen eller formidle den til meg. Det endelige svaret så jeg for meg ville være litt utydelig på denne oppgaven og at elevene kanskje ville presentere argumenter for og imot de gitte kollektivene.

Ettersom jeg valgte å ta i bruk denne oppgaven i intervjuene mine, anså jeg den selvsagt for å oppfylle kriteriene i Tabell 7. Oppgaven er å anse som relevant, realistisk, virkelighetsnær og åpen. Den har et passende språk, kan løses gjennom modelleringssyklusen og kan provosere ytterligere spørsmål hos elevene. I tillegg kan oppgaven klassifiseres ganske likt som forrige oppgave, «Filling up», den eneste forskjellen ligger i kategori VI, da «Hvilken leilighet?» kun har tekst, ikke tekst og bilde.

3.5 UTVALG

En kvalitativ forskning tar vanligvis for seg en liten gruppe deltakere. I denne studien har jeg undersøkt totalt ni deltakere, da tre lærere og seks elever, der elevene var fordelt på to grupper. Alle lærerne hadde undervisningskompetanse i matematikk og underviste i faget matematikk 1P. De var kolleger på samme videregående skole, men hadde varierende erfaring og utdanning. For å finne lærere som kunne tenke seg å delta i studien, sendte jeg e-post til alle lærere som underviste 1P det gjeldende skoleåret på den aktuelle skolen, som til sammen var seks lærere. Dette var en skole hvor jeg selv var vikar, så jeg hadde tilgang på kontaktinformasjon og kunne ha en uformell og vennlig samtale med alle lærerne. Jeg ga dem et informasjonsskriv og svarte på eventuelle spørsmål de hadde. Til slutt var det tre lærere som ønsket å delta og ga samtykke til å bli intervjuet (se samtykkeskjema, Vedlegg 4).

Deltakere	Kjønn	Alder	Ansiennitet
Lærer 1 (L1)	Kvinne	+55	15-25
Lærer 2 (L2)	Kvinne	20-29	1-5
Lærer 3 (L3)	Mann	30-39	10-15

Tabell 9: Oversikt over lærere som deltok i studien

De tre lærerne som deltok i studien, ble spurt om å velge ut tre elever fra sin klasse til å delta i gruppeintervju. Det ble vektlagt at de skulle velge elever som kunne samarbeide fint sammen, og som hadde varierende måloppnåelse. Ettersom jeg ikke hadde kjennskap til elevene, ønsket jeg at læreren selv skulle velge ut gruppene slik at gruppesammensetningen kunne bli best mulig med tanke på trygghet, samarbeid og dialog. Jeg ga lærerne informasjonsskriv som de formidlet videre til elevene (Vedlegg 5), og fikk innhentet samtykke på den måten. Tre elever til lærer 2 og tre elever til lærer 3 ønsket å være med på studien. Elever til lærer 1 ble ikke med i studien fordi lærer 1 vurderte dette som ikke hensiktsmessig, da hun mente det kunne være til skade for elevenes motivasjon og selvfølelse. Lærer 1 underviste en klasse bestående av elever som trengte ekstra hjelp i matematikk. Denne vurderingen fra lærerens side ble selvfølgelig respektert. Derfor ble det to gruppe med elever, og ikke tre, som opprinnelig tenkt.

Elevgruppe	**Deltakere (**pseudonymer)	**Deres lærer**
Gruppe 1	Arne (A), Berit (B), Clara (C)	Lærer 2
Gruppe 2	Dina (D), Eline (E), Frida (F)	Lærer 3

Tabell 10: Oversikt over elever som deltok i studien

3.6 ANALYSEMETODE

En kvalitativ tilnærming innebærer ofte en analyse som består av strukturering og kategorisering (Jacobsen, 2021). I dette kapittelet vil jeg redegjøre for analysemetoden i denne studien. Dette inkluderer min generelle analytiske tilnærming til datamaterialet (kapittel 3.6.1), samt min analyse av lærerintervjuene (kapittel 3.6.2) og elevintervjuene (kapittel 3.6.3).

3.6.1 Generell analytisk tilnærming

Denne studien har et sosiokulturelt perspektiv og ved analyse av datamaterialet har jeg derfor vært bevisst på å ta hensyn til generelle sosiokulturelle tilnærminger. Både læreres og elevers utsagn og handlinger har jeg sett på som en del av de sosiale samspillet, omgivelsene og konteksten (Imsen, 2020). Den språklige kommunikasjonen kan analyseres, men den er samtidig å anse som en sosial handling som formes av situasjonen. Videre har jeg vært bevisst på å at jeg ikke utfra datamaterialet kan påstå å identifisere en persons tanker. Det er nødvending å skille mellom det som blir sagt og det som tenkes, da det ikke alltid er samsvar mellom dem (Säljö, 2001).

I tillegg transkriberte jeg alle intervjuene i sin helhet før de senere ble analysert. Ved transkripsjon av intervjuene brukte jeg transkripsjonsnøkkelen angitt i Vedlegg 6. I resultatkapittelet brukte jeg dessuten « (…) » i utdrag av transkripsjonen for å indikere at utdraget ikke var et utsagn gjengitt i sin helhet, men der noe var utelatt. Med hensyn til transkripsjonens lesbarhet og deltakernes anonymitet, valgte jeg å transkribere lærernes og elevenes uttalelser ordrett og på bokmål. Jeg brukte også pseudonymer på både lærere og elever, som vist i Tabell 9 og Tabell 10. Å transkribere intervjuene har flere fordeler. Transskripsjonen kan blant annet gi innsikt i viktige detaljer fra samtalene, som hukommelsen ofte utelater (Bryman, 2012). Samtidig lar det meg studere utsagnene og dialogene flere ganger. Videre gjør det studien mer transparent, da andre forskere kan få tilgang til de samme dataene som jeg har tolket.

I analyse av både lærerintervjuene og elevintervjuene har jeg antatt at det som sies og observeres i intervjuet kan reduseres til et sett med kategorier. På den måten har jeg brukt innholdsanalyse som tilnærming, som er en passende metode for subjektiv tolkning av transkripsjoner (Jacobsen, 2021). Kategoriene tok utgangspunkt i det teoretiske rammeverket og forskningsspørsmålene i denne studien, og analysen er på slik vis deduktiv.

3.6.2 Analyse av lærerintervju

Ved innholdsanalyse av lærerintervjuene dannet jeg tre kategorier som vist i tabellen under. Siden jeg ønsket å finne ut av hvordan lærerne forstod begrepene modellering og modelleringskompetanse, samt deres vektlegging i undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse, ble kategoriene inndelt på grunnlag av dette. Alle kategoriene er nært relatert til hverandre og derfor ble noen utsagn ansett for å falle inn under flere kategorier, men dette var et fåtall.

Kategorier	Innhold
1. Modellering	1. Alle typer utsagn som kan knyttes til forståelse av begrepet modellering. Inkludert målet med modellering, perspektiver på modellering og refleksjoner rundt modelleringsoppgaver.
2. Modellerings-kompetanse og vurdering	2. Alle typer utsagn som kan knyttes til forståelse og vurdering av modelleringskompetanse. Inkludert definisjon av modelleringskompetanse, hva som anses som god eller dårlig modelleringskompetanse, hva som vektlegges i vurdering og utvikling av modelleringskompetanse, samt refleksjoner rundt oppgaver knyttet til dette. Også utsagn som går på vurderingsformer.
3. Undervisning	3. Alle typer utsagn som kan knyttes til undervisning av modellering. Dette inkluderer blant annet undervisningsaktiviteter, vektlegging i undervisningen, hva de har gjort i undervisningen, ønske med undervisningen og oppgaver brukt i undervisningen.

Tabell 11: Analyseverktøy lærerintervju

Transkripsjonene ble fargekodet slik som fargene presenteres i tabellen over. Dersom et utsagn handlet om forståelse av modellering, ble det for eksempel markert med gult. Utsagnene i samme farge ble deretter sortert og analysert.

3.6.3 Analyse av elevintervju

Ved analyse av elevintervjuene så jeg på gruppen som helhet. Jeg tok utgangspunkt i elevenes dialog og så på den enkelte elevs utsagn som en del av denne dialogen (Säljö, 2001). Jeg tilnærmet meg transkripsjonen av intervjuene ved å danne kategorier ut fra stegene i modelleringssyklusen. Siden jeg ønsket å finne ut hvordan elevene viste modelleringskompetanse var dette passende, ettersom modelleringskompetanse handler om evne til å utføre steg i modelleringssyklusen på en hensiktsmessig måte. Jeg formet så et analyseverktøy basert på disse kategoriene. Denne er gjengitt i tabellen nedenfor.

Steg	Kjennetegn
Konstruere	Elevene søker å forstå problemet og konstruerer en situasjonsmodell. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene leser oppgaven. • Elevene repeterer, kommenterer eller diskuterer oppgaveteksten.

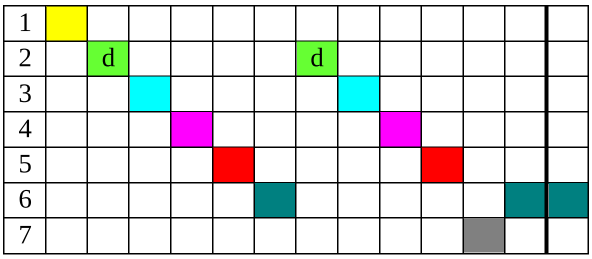
	• Elevene sammenfatter eller organiserer innholdet i oppgaven. • «Jeg tror de spør etter …» • «Vi må gjøre …»
Forenkle/ strukturere	Elevene lager en reell modell av situasjonen. De forenkler og strukturerer situasjonen. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene gjør antakelser. • Elevene leter etter manglende informasjon. • Elevene søker på internett. • Elevene forenkler verdier. • Elevene gjør problemet om til et enklere problem. • «Vi sier bare at …» • «Vi antar at …» • «Vi bestemmer bare at …» • «Jeg fant at …»
Matematisere	Elevene overfører problemet eller deler av problemet til den matematiske verden ved å oversette det til matematikk og lage en matematisk modell. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene bruker matematiske begreper. • Elevene setter opp en matematisk modell, for eksempel en likning eller et regnestykke.
Jobbe med matematikk	Elevene jobber med matematikk der de tar i bruk matematiske metoder og verktøy, og får et matematisk resultat. Typiske handlinger eller utsagn: • Eleven gjør utregninger. • Elevene bruker kalkulator. • Elevene arbeider med tall og symboler. • Elevene bruker sin matematiske kompetanse.
Tolke	Elevene overfører det matematiske resultatet til den virkelige verden og tolker det. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene forklarer eller diskuterer hva resultatet betyr. • «Det betyr at …» • «Dette vil si at …»
Validere	Elevene validerer det reelle resultatet og sjekker det opp mot situasjonsmodellen. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene vurderer resultatet. • Elevene anslår om resultatet er rimelig. • Elevene reflekterer rundt løsningen og hva som kan ha påvirket resultatet. • Elevene ser tilbake på det de har gjort. • Elevene vurderer andre faktorer som kan påvirke svaret og/eller modellen de har laget. • «Dette var dyrt/billig/mye/lite» • «Har vi gjort det riktig?» • «Det gir ikke mening», «Det gir mening»

	• «Her er det noe som ikke stemmer» • «Jeg ville ikke valgt det …», «Jeg ville valgt det …»
Eksponere/ vise	Eleven presenterer et svar eller en endelig løsning eller en anbefaling til løsning på problemet. Typiske handlinger eller utsagn: • Elevene formulerer og skriver ned ett svar. • Elevene forteller om løsningen de har kommet frem til. • «Så svaret er …»

Tabell 12: Analyseverktøy elevintervju

Kjennetegnene angitt på hvert steg tok utgangspunkt i det teoretiske rammeverket i denne studien. Disse gjorde det mulig for meg å identifisere hvilke steg i modelleringssyklusen gruppen befant seg i gjennom oppgaveløsningene. Jeg fargekodet transkripsjonene slik som fargene fremkommer i analyseverktøyet.

Deretter valgte jeg å illustrere gruppenes modelleringsruter slik som vist i Figur 17. Jeg tok utgangspunkt i MAD-rammeverket (Ärlebäck, 2009), der de ulike stegene som gruppa går igjennom markeres med farge i kronologiske rekkefølge fra venstre mot høyre. I stedet for bokstavene R, M, E, C, V og W brukte jeg tallene 1 til 7 for å indikere stegene i modelleringssyklusen. Dette valgte jeg å gjøre på grunnlag av hvordan jeg hadde utformet analyseverktøyet. Videre valgte jeg i illustrasjonen av modelleringsruten å ikke ta hensyn til hvor mye tid elevene brukte på hvert steg ved alle anledninger. Dette fordi jeg anså det som lite hensiktsmessig bruk av tid, i lys av hva jeg ønsket å finne ut av i denne studien. Jeg valgte imidlertid å illustrere tidsbruk på de ulike stegene i modelleringssyklusen i analyse av oppgave 3, ettersom det her var betydelig store forskjeller. Videre markerte jeg en «d» i modelleringsruten der hvor elevene tok i bruk digitale verktøy, og jeg valgte å markere med en tykk strek der jeg hadde stilt elevene spørsmål.



Figur 17: Eksempel på illustrasjon av modelleringsrute
(Modelleringsrute til gruppe 2 på oppgave 3)

3.7 ETISKE BETRAKTNINGER

For å sikre at denne studien ble utført i tråd med etiske retningslinjer gjorde jeg flere tiltak. Jeg sendte inn søknad til Sikt (Kunnskapssektorens tjenesteleverandør) og denne søknaden ble godkjent før jeg startet datainnsamlingen (Vedlegg 1). Ved å bruke mal for informasjonsskriv gitt av Sikt, utformet jeg informasjonsskriv med samtykke til både lærere og elever (Vedlegg 4 og Vedlegg 5). Skrivet inneholdt informasjon om formålet med studien og det kom tydelig frem hvordan personopplysninger skulle håndteres og hvilke rettigheter deltakerne hadde. I skrivet ble det også fremlagt at det var frivillig å delta i undersøkelsen og at deltakerne når som helst kunne velge å trekke seg uten at dette skulle ha noen konsekvenser (Bryman, 2012). Både lærere og elever ble i tillegg muntlig informert om retten til å trekke seg i forkant av intervjuene. Jeg innhentet samtykke fra alle deltakerne, og siden elevene var 16 år eller eldre kunne de selv signere samtykkeskjema.

Et viktig etisk prinsipp er at det skal være umulig for enhver som leser denne oppgaven å identifisere deltakerne i studien (Bryman, 2012). At all data skulle bli fullstendig anonymisert, ble tydelig formidlet til både lærere og elever. For å sikre anonymitet har jeg brukt fiktive navn på alle deltakerne og den aktuelle skolen blir aldri på noe tidspunkt nevnt. Samtidig har det kun blitt fremlagt opplysninger om deltakerne som er å anse som relevante for studien. Videre ble all data lagret på sikre servere og alle lydopptak vil bli slettet ved prosjektslutt. Dessuten har jeg som forsker taushetsplikt.

For at intervjuene skulle ha minimal belastning for lærerne og elevene ble det også tatt hensyn til flere faktorer. Jeg hadde samtale med hver lærer der jeg avtalte et tidspunkt for intervju som passet inn i deres timeplan. Slik unngikk jeg at intervjuet stjal viktig forberedelsestid eller undervisningstid fra dem. Alle intervjuene ble gjennomført innenfor arbeidstid og på arbeidsstedet. Elevenes intervju ble gjennomført i en dobbelttime da de egentlig hadde undervisning i 1P. Jeg avtalte med læreren hvilke timer som passet best, slik at elevene ikke gikk glipp av verdifull og viktig undervisning.

3.8 VALIDITET OG RELABILITET

For å sikre studiens kvalitet, er det nødvending for meg å ta stilling til begrepene validitet og relabilitet. Validitet er knyttet til studiets empiri og om den er gyldig og relevant (Jacobsen, 2021). Gyldighet og relevans handler om i hvilken grad empirien reflekterer formålet med studien, samt hvorvidt mine konklusjoner har dekning i empirien samlet inn (Bryman, 2012; Jacobsen, 2021). Begrepet validitet knyttes også til i hvilken grad funnene i studien kan generaliseres. Dette kalles gjerne for «overførbarhet» eller «ekstern gyldighet» (Jacobsen, 2021). Generaliseringsutfordringer er uunngåelige i kvalitative studier, men resultatenes kan likevel bidra til økt kunnskap og innsikt (Jacobsen, 2021). For å begrunne at forskningens resultater gir økt kunnskap og innsikt, er det nødvending at funnene i studien blir forankret i teorier og tidligere empirisk forskning.

For å ivareta denne studiens validitet tok jeg hensyn til flere faktorer. Jeg utarbeidet en gjennomtenkt intervjuguide for lærerintervjuene basert på Berget (2023) sin intervjuguide brukt i hennes studie. Dette ble gjort med hensikt om at intervjuene skulle gi meg svar på de aktuelle forskningsspørsmålene. Det ble også gjennomført en pilotering for å videre sikre intervjuguidens kvalitet. I tillegg ble det lagt ned mye arbeid i utvelgelse av oppgaver til elevintervjuene, da det var viktig at disse la til rette for at elevene kunne vise modelleringskompetanse. I denne forbindelse ble det derfor også gjennomført et pilotintervju av en gruppe med elever i 1P, og små justeringer ble gjort som konsekvens av dette. Dessuten har spesielt oppgaven «Filling up» blitt godt utprøvd tidligere og har vist seg å være effektiv for å kartlegge elevers modelleringskompetanse (Blum & Leiß, 2006). Analyseverktøyene er videre fundert i det teoretiske rammeverket, og bruk av modelleringssyklusen som analyseverktøy er en godt utprøvd analysemetode (Vos & Frejd, 2022). Da min studie var en casestudie der jeg gikk i dybden på få deltakere, kan ikke mine funn generaliseres, med de kan likevel være et viktig bidrag i utviklingen i forskning på matematisk modellering i skolen.

Selv om validitet og relabilitet er analytisk adskilte, er de nært relatert ettersom validitet forutsetter relabilitet (Bryman, 2012). Begrepet relabilitet viser til studiets pålitelighet og troverdighet, at undersøkelsen er utført på en måte som vekker tillitt (Jacobsen, 2021). Et sentralt spørsmål her er om resultatene ville kunne blitt gjenskapt om studien ble gjennomført en gang til. Dernest er det viktig at målinger er korrekt og nøyaktig utført, samt at funnene ikke er et resultat av tilfeldigheter. For å gjøre denne studien mer reliabel har jeg forsøkt å være transparent i min forskningsprosess og redegjørelse for metode, inkludert analysemetode. I tillegg har jeg vært bevisst på å være nøyaktig i mitt arbeid for å minimere tilfeldigheter. Alle intervjuene ble tatt opp med god diktafon slik at jeg fikk registrert alle utsagn som lærerne og elevene kom med, og jeg transkriberte alle intervjuene i sin helhet.

Samtidig er det nødvending å ha et kritisk blikk på egen påvirkning av resultatene i denne studien. Denne studien har et fortolkningsbasert perspektiv, der jeg anerkjenner at min tolkning av data er farget av mine oppfatninger, erfaringer og kompetanser. Dette kommer spesielt til syne i diskusjonen av funnene, men gjenspeiles også i valg av utdrag fra intervjuene som jeg anså som viktige. Risikoen for at jeg kan ha feiltolket utsagn er dermed til stede. Jeg har forsøkt å være så nøytral som mulig, men jeg kommer ikke utenom denne subjektiviteten i studien.

Videre har også såkalt «undersøkelseseffekt» hatt en betydning for det som fremkommer i intervjuene (Jacobsen, 2021). Undersøkelseseffekten ble forsøkt minimert, men impliserer at jeg som forsker har påvirket deltakerne til en viss grad. Å bli intervjuet var en ukjent situasjon for både lærere og elever. Det kan være at de ved enkelte anledninger svarte det de trodde jeg ville høre, eller at jeg som delvis deltakende part i elevintervjuene påvirket elevenes løsningsprosess. Det ble imidlertid vektlagt at elevene skulle jobbe uavbrutt med lite innblanding fra meg, nettopp for å minimere min påvirkning og stryke relabiliteten. Videre hadde jeg en relasjon til lærerne fra før av, noe som også kan ha hatt en innvirkning på både deres utsagn og mine tolkninger av dem. Jeg hadde derimot ingen kjennskap til elevene og eventuell forutinntatthet her ble redusert.

Til slutt er det viktig å nevne at transkripsjon av intervjuer aldri kan gi et fullstendig bilde av hva deltakerne mener eller hvordan de forstår konsepter. Lærerne og elevene velger selv omfanget av svarene de gir, og hva de vektlegger. Derfor kan jeg ikke med sikkerhet påstå at resultatene kan gjenskapes ettersom både jeg, lærerne og elevene er i stadig utvikling (Jacobsen, 2021).

4 RESULTATER

I dette kapittelet presenteres resultater fra analyse av datamaterialet. For å besvare forskningsspørsmålene i denne studien er kapittelet inndelt i tre delkapitler, tilsvarende de tre forskningsspørsmålene. Kapittel 4.1 tar for seg lærernes forståelse og vektlegging, mens i kapittel 4.2 er formålet å presentere på hvilken måte elevgruppene viser modelleringskompetanse. Dette innebærer en analyse av hver elevgruppe sitt arbeid med modelleringsoppgaver i de oppgavebaserte intervjuene. Det siste delkapittelet, kapittel 4.3, inneholder sammenligninger av lærernes utsagn og hva deres elever viser når de løser oppgaver. Her blir hver elevgruppe og deres lærer sammenlignet hver for seg.

4.1 LÆRERNES FORSTÅELSE

I dette kapittelet presenteres resultater knyttet til lærernes forståelse. Kapittelet er inndelt i tre, med den hensikt å belyse lærernes forståelse av modellering (kapittel 4.1.1), samt deres forståelse og vektlegging i vurdering av modelleringskompetanse (kapittel 4.1.2), og deres vektlegging i undervisning av modellering (kapittel 4.1.3). Alle tre delkapitlene, kapittel 4.1.1, 4.1.2 og 4.1.3, er tett forbundet med hverandre og vil dermed kunne overlappe hverandre noe. Forståelsen av modellering vil eksempelvis har stor innvirkning på lærernes forståelse av modelleringskompetanse og vektlegging i undervisningen. Forskjellene mellom lærerne vil også bli kort belyst, men vil ikke være hovedfokuset grunnet denne studiens omfang og fokus.

4.1.1 Modellering

Forståelse av begrepet modellering inkluderer blant annet hva en anser som målet med modellering, perspektiver på modellering og refleksjoner rundt modelleringsoppgaver. Hovedresultatene knyttet til hvordan lærerne forstår modellering, presenteres og evalueres i dette delkapittelet under tre overskrifter. Disse er henholdsvis «Modellering og virkeligheten», «Modellering og funksjoner» og «Modellering som prosess». Overskriftene ble dannet på grunnlag av mønstre funnet i de tre transkripsjonene.

Modellering og virkeligheten

Felles for alle lærerne er at de eksplisitt eller implisitt uttaler at det er en forbindelse mellom modellering og virkeligheten. Lærer 1 og lærer 3 sier følgende:

> L1: (…) Så er det jo sånn med modellering at det går jo på å ta virkeligheten og prøve å beskrive den med matte. Så det er jo egentlig ganske sånn sentralt. I fysikk er det jo alt det vi holder på med. Det er jo liksom å prøve og beskrive naturen.

> L3: For at det skal kalles modellering så må det være at matematikk brukes som et verktøy på en reell problemstilling, løse en reell problemstilling.

I disse utdragene er det tydelig at både lærer 1 og lærer 3 anser modellering for være nært relatert til den virkelige verden. At modellering knyttes til den virkelige verden, eller den ekstra-matematiske verden, er grunnleggende i forståelsen av hva modellering er (Blum, 2002, 2015; Blum & Niss, 2020; Blum & Pollak, 2018; Borromeo Ferri, 2018). Det er likevel noen forskjeller i lærernes uttalelser. Lærer 3 refererer eksplisitt til virkelige «problemer» eller «problemstillinger», mens lærer 1 vektlegger at modellering brukes til å beskrive den virkelige verden og ikke nødvendigvis løse problemer. I tillegg kan utsagnet til lærer 1 tilsi at hun vektlegger selve matematiseringen, da overgangen fra virkelighet til matematikk, i sin forståelse av modellering. Dette kommer også til syne ved senere anledninger. Videre sier lærer 3 at modellering handler om at «matematikk brukes som et verktøy» for å løse et virkelig problem. Bruken av ordet «verktøy» fremkommer ved flere utsagn hos lærer 3 og hos lærer 1.

> L3: (…) Jeg tenker egentlig at det [*modellering*] burde være viktig. Sånn i forhold til den målsetningen om at de [*elevene*] skal kunne bruke matematikk som et verktøy, så er det akkurat det modellering er.

> L1: Også er jo modellering .. Jeg tror jo det er derfor det er sentralt i 1p også, at det er jo en fin måte å .. Når det skal være praktisk, så er modellering et sånt verktøy at du kan gjør praktiske ting om til matte. Så jeg tenker jo at det er derfor det har blitt sentralt.

Bruken av ordet «verktøy» er her felles. I lærer 3 sin tilnærming handler modellering om å bruke matematikken som et verktøy. På den måten kan lærer 3 sin forståelse av modellering relateres til at matematikk er det medierende verktøyet i læreprosessen, mens modellering eller virkelige problemer er objektet. Dette har igjen sammenheng med «modellering som innhold» (Julie, 2002) og «matematikk for modelleringen skyld» (Blum & Niss, 2020), der fokuset er å bruke matematikk for å forstå den virkelige verden gjennom modellering.

Lærer 1 sin bruk av ordet «verktøy» er imidlertid litt annerledes. Også hun vektlegger «praktiske ting» eller virkelige situasjoner, men utsagnet kan tilsi at hun anser modellering for å være «verktøyet» en bruker i overgangen fra virkeligheten til matematikken. Dette kan forsterke den tidligere nevnte antakelsen om at hun vektlegger matematisering i sin forståelse av modelleringsbegrepet. Samtidig kan denne forståelse også ses i sammenheng med modellering som fartøy (Julie, 2002), men der modellering er det medierende verktøyet for å lære å matematisere en virkelig situasjon. I lys av modelleringssyklusen, innebærer dette altså å gå fra den virkelige verden til matematikk uten å løse et virkelighetsnært problem.

Lærer 2 tar ikke i bruk ordet «verktøy», men også hun referer til at modellering kan ses i sammenheng med virkelige, hverdagslige situasjoner. På spørsmål om hva som er viktig at elevene lærer når de har om modellering, svarer hun følgende:

> L2: Det er jo det å kunne ta med matematikken i hverdagen, for det er så mye som er matematikk som du ikke tenker over og jo bedre forståelse du har, jo lettere kan du gjerne klare deg.

Dette utdraget synliggjør at lærer 2 vektlegger at modellering kan vise elevene hvordan matematikken kan brukes i hverdagen. Samtidig fremhever hun også at modellering kan vise elevene at matematikken innebærer elementer fra den virkelige verden. Hennes forståelse av modellering kan dermed relateres til den pragmatiske grunnen og den kulturelle grunnen knyttet til hvorfor modellering bør være en del av undervisningen (Blum, 2015). Sett i lys av konteksten rundt uttalelsen kan «jo bedre forståelse du har» relateres til forståelse av matematikk, men det kan også være hun mener forståelse av den virkelige verden. «Jo lettere kan du gjerne klare deg» er på den ene siden muligens en referanse til at en da kan klare seg bedre i den virkelige verden. På den andre siden kan det også være hun mener at en lettere kan klare seg i matematikk. Sistnevnte kan synes å være sannsynlig ettersom hun senere sier følgende:

> L2: For noen kan modelleringskompetanse være viktig, men ikke for alle. (…)

Her sier lærer 2 at kompetanse i modellering ikke er noe alle elevene nødvendigvis får bruk for i den virkelige verden. Hun begrunner blant annet dette med at det kun er noen deler av arbeidslivet som vil kreve denne kompetansen. Lærer 1 uttaler også at ikke alle elever kommer til å få bruk for modellering idet hun sier:

> L1: (…), for som sagt så kommer de [*elevene*] jo ikke til å sitte modellere så mye de fleste.

Så til tross for at både lærer 1 og lærer 2 relaterer modellering til virkelige eller hverdagslige situasjoner, tilsier deres uttalelser at de ikke anser modellering som relevant for alle elevenes hverdagsliv. Dette synspunktet er trolig betydelig påvirket av deres tolkning av begrepene modellering og modelleringskompetanse. Basert på deres uttalelser kan det se ut til at begge lærerne knytter begrepet modellering til matematisering, og at de fokuserer spesielt på temaet funksjoner.

Modellering og funksjoner

På spørsmål om hva som skiller modellering fra andre deler av matematikk, svarer lærer 2 følgende:

> L2: Det er jo noe du kan se. Altså du får en funksjon, og du kan få en graf ut av den og kan liksom se hva endringen er. Mens med algebra, likninger, så er det rene operasjoner der du regner noe og får et svar som du gjerne tenker er mer matematikk eller mer sånn ja.

Dette utdraget illustrerer at lærer 2 knytter modellering til funksjoner. Hun beskriver at det som karakteriserer modellering er at «det er noe du kan se» og referer til grafen til en funksjon. Samtidig setter hun modellering i kontrast med algebra og likninger, og utrykker på denne måten at disse matematiske områdene ikke kan inngå i en modellering.

Lærer 1 viser også at hun forstår modellering i lys av funksjoner. På spørsmål om hun selv lærte noe om modellering i egen utdanning svarer hun følgende:

L1: Nei, ikke noe sånn veldig spesifikt om modellering og regresjon og sånt, men en har jo hatt mye om, holdt jeg på å si, resultater av en regresjon. Om funksjoner og tolkning og bruk og i det hele tatt.

I dette utsagnet referer hun til regresjon og tolkning av funksjoner i et spørsmål om modellering. Hun setter på slik måte modellering og regresjon ved siden av hverandre, og det gir inntrykk av at hun betrakter modellering og regresjon som nært relaterte begreper. Lignende svar gir hun også flere steder i intervjuet, da hun utelukkende referer til regresjon på spørsmål om modellering. Dette blir hun etter hvert i intervjuet selv bevisst på. Da hun reflekterer over om oppgave 3 kan anses som en modelleringsoppgave sier hun følgende:

L1: (…) Men det blir jo fort sånn at man bare regner et gjennomsnitt og da er du jo ikke oppe på noe modellering igjen. Nei, du er ikke det. Men det er jo helt opplagt en utforskende oppgave, men jeg tenker at du kan ikke si at … Det er vanskelig å lage en ren modell ut av det .. Eller en modellering oppgave … Eller? .. Ja … Nå blir jeg litt sånn .. Det er klart når vi … Jeg tenker jo modelleringsoppgave i forhold til regresjon, men du lager på et vis en modell her også …

(…)

L1: Hvis modellering går på at en skal lage en ny modell, ikke bare en ny funksjon, så kan jo dette også være.. (…) Men akkurat i forhold til det tradisjonelle modelleringsbilde som en har … Hmm …

I disse utdragene sier lærer 1 eksplisitt at hun tenker «modelleringsoppgaver i forhold til regresjon». Hun setter imidlertid spørsmålstegn til egen forståelse, og påpeker at hun ser på modellering som å lage en ny funksjon, slik som «det tradisjonelle modelleringsbilde», men at dette ikke nødvendigvis er riktig. Samtidig kan det se ut til at hun er usikker ettersom hun mye frem og tilbake og tenkende i sin formulering.

Når det kommer til de andre oppgavene, er alle lærerne enige om at oppgave 1 er «en typisk modelleringsoppgave». Denne oppgaven er å anse som en regresjonsoppgave. Både lærer 1 og lærer 2 er også usikre om oppgave 3 og oppgave 4 er modelleringsoppgaver. De utelukker imidlertid oppgave 2, da dette «er en ren funksjonsoppgave». Lærer 3 har en annen en oppfatning av oppgave 2 og betrakter det som en modelleringsoppgave. Han begrunner dette med at det er «fordi vi skal lage en funksjon, altså en matematisk modell for situasjonen». Dette tilsier at han anser atomistiske oppgaver for å være modelleringsoppgaver.

Samtidig er lærer 3 den eneste av lærerne som er tydelig på at modellering ikke utelukkende handler om funksjoner. Han sier følgende:

L3: Så kan man jo bruke modellering på andre områder enn bare funksjoner. Jeg oppfatter jo litt at det blir tolket veldig inn mot bare funksjoner i boken.

Modellering som en prosess

Alle lærerne referer til modellering som en prosess bestående av flere elementer, men det er kun lærer 3 som nevner begrepet «modelleringssyklus». Han beskriver modelleringssyklusen på følgende måte:

> L3: (…), liksom det med at man har et praktisk problem, oversetter det til matematikk, løser problemet innenfor matematikken og så oversetter tilbake.

Denne beskrivelsen er kort, men forklarer hovedtrekkene i modelleringsprosessen til Blum og Leiß, (2007). Samtidig unnlater lærer 3 å presentere modelleringsprosessen som en syklisk prosess. De andre lærerne skildrer heller ikke prosessen som syklisk. Lærer 1 fremstiller modellering på følgende måte:

> L1: Jeg tenker at modellering .. Altså gjennom modelleringa .. Det er liksom flere steg. Det første er jo hvis de [*elevene*] skal gjør noe praktisk selv, så har du liksom en litt sånn utforskende greie på å finne ut hva de ønsker, hva de er interessert i. Du kan jo også koble det opp mot de kompetansemålene som går på litt sånn samfunnsmessige problemstillinger eller ting som de erfarer i dagliglivet … Også har du den koblinga mot det matematiske, som de gjør i regresjon .. Også får du en modell som du kan bruke til noe annet og gå inn å sjekke: okei hvis det går ti år, hva, hvordan ser ting ut da? (…)

I dette utdraget sier lærer 1 at modellering er en prosess bestående av flere steg. Det første steget innebærer at en utforsker og undersøker, samt finner et problem. Dette samsvarer med steg 1 i modelleringssyklusen. Deretter forklarer hun at neste del innebærer å knytte situasjonen «opp mot det matematiske» og eksemplifiserer dette med regresjon. Resultatet av dette steget er at en ender opp med en modell, og denne modellen kan videre utforskes. Her er det klare sammenhenger med steg 3, matematisere, og steg 4, jobbe med matematikk, i modelleringssyklusen. På den måten nyanserer lærer 1 sitt bilde av modellering til å inkludere mer enn bare «matematisere».

Ved flere senere anledninger, kommer det samtidig frem at hun også anser vurdering av modellen for å være en del av modelleringsprosessen. På spørsmål om hva hun anser som viktigst i modelleringsprosessen, svarer hun følgende:

> L1: (…) Jeg tenker egentlig det viktigste er hvordan de [*elevene*] vurderer resultatet sitt etterpå. Den kritiske vurderingen der.

Lærer 2 er enig med lærer 1 og mener også at vurdering av modellen er viktig i modelleringsprosessen. På den måten vektlegger de begge steg 6, validere, i sin forståelse av modellering. Dette kan også relateres til perspektivet «modellering som kritikk».

Lærer 2 sier videre at modelleringsprosessen kan handle om å gjøre antakelser. Når hun argumenterer for at oppgave 3 muligens kan anes som en modelleringsoppgave, viser hun til at dette er fordi at oppgaven krever at elevene gjør antakelser. Lærer 3 er på sin side tydelig på at oppgave 3 er en modelleringsoppgave, og sier:

> L3: Hvor langt kan man gå i løpet av et år? Ja, det er jo en veldig åpen oppgave og det er ikke oppgitt noe særlig informasjon. Så det tenker jeg absolutt er en modelleringsoppgave. Den

vil jo ta med hele modelleringsprosessen. Den er såpass åpen at man må gjøre noen avklaringer. Gjøre noen antakelser og sånt.

I dette utdraget argumenterer lærer 3 med at oppgave 3 er en modelleringsoppgave fordi «den vil jo ta med hele modelleringsprosessen» og inkluderer at elevene må gjøre antakelser. Noe som igjen viser at han anser modellering som en prosess, samt at han anser steg 2, forenkle/strukturere, for å være en del av denne prosessen. I en overordnet og avsluttende refleksjon rundt alle oppgavene sier han dessuten:

L3: Alle disse oppgavene er modelleringsoppgaver, men de to første er mer avgrenset. De er mer lukket, og det er informasjons som er oppgitt. Det er et bestemt svar, og de fokuserer på mindre deler av modelleringssyklusen.

Her bruker han på nytt begrepet «modelleringssyklus», og konkluderer med at alle oppgavene er modelleringsoppgaver selv om ikke alle legger til rette for hele syklusen. Dette er igjen en indikasjon på at han anser også atomistiske oppgaver for å være modelleringsoppgaver.

4.1.2 Modelleringskompetanse og vurdering

I dette kapittelet presenteres resultater relatert lærernes forståelse av modelleringskompetanse og hva de vektlegger i vurdering av elevers modelleringskompetanse. Siden forståelsen av modelleringskompetanse og vurdering av denne kompetansen er nært sammenvevd, blir disse aspektene behandlet under samme delkapittel. Kapittelet er strukturert i fire overskrifter. Først presenteres hvordan lærerne definerer modelleringskompetanse, deretter deres tanker om digitale verktøy knyttet til modelleringskompetanse, så hvilke elementer de vektlegger i sin forståelse og vurdering, og til slutt deres refleksjoner rundt oppgaver relatert til dette.

Definisjon av modelleringskompetanse

Da lærer 2 blir spurt om å definere modelleringskompetanse, svarer hun følgende:

L2: Det er vel det å kunne anvende kunnskap og matematisk kunnskap inn og trekke det sammen og sette det inn i en situasjon. Og å bruke det du kan, både matematisk og fra erfaring, Og ja, kunne løse noe.

Denne definisjonen kan anes som veldig generell sett i sammenheng med andre definisjoner av modelleringskompetanse, og kan minne om kunnskapsløftet sin definisjon av kompetanse. Samtidig viser lærer 2 til at modelleringskompetanse innebærer å bruke både matematisk og ekstra-matematisk kunnskap, som også vektlegges av Borromeo Ferri (2007). Hun nevner imidlertid ikke utrykk som «modellere» eller «lage en modell» i sin definisjon, selv om hennes andre uttalelser tilsier at hun anser dette for å være en del av modelleringsprosessen.

Samtidig konkretiserer lærer1 sin definisjon av modelleringskompetanse senere i intervjuet. Hun uttaler blant annet at god modelleringskompetanse innebærer «å finne en modell som vil passe til oppgaven», samt å vurdere modellen som en har laget. Dette har klare sammenhenger med steg 3 og steg 6 i modelleringssyklusen. Samme tilnærming har også lærer 1, da hun beskriver modelleringskompetanse som det som «å lage en modell», men også «å vurdere modellen etterpå». Lærer 3 har imidlertid en mer detaljert forklaring enn sine kolleger og sier:

> L3: Det [*modelleringskompetanse*] er jo i hvilken grad elevene kan modellere. Også tenker jeg det består av flere deler. Å oversette til matematikk fra den praktiske situasjonen. Det er også å løse problemet innenfor matematikk. Sånn sett er ikke det en del av modelleringskompetanse, som jeg ser det, men mer øvrig matematiske kompetanse. Men når man får et svar og sjekker og overfører det igjen til den praktiske situasjonen.. Hva betyr svarene vi har fått? Og også å se igjen på oppgaven. Er det realistisk i forhold til det vi kunne forvente?

Denne definisjonen har klare sammenhenger med modelleringssyklusen, da han forklarer at modelleringskompetanse innebærer å gjennomføre en prosess som går fra virkeligheten eller den «praktiske situasjonen» til matematikk, og motsatt. Han starter med å si at den første delen er å oversette til matematikk, altså matematisere. Her nevner han ikke noe som kan knyttes til steg 1 eller steg 2 i modelleringssyklusen, men går i stedet direkte til steg 3. Deretter må en «løse problemet innenfor matematikk», som kan tilsvare steg 4, «jobbe med matematikk». Han sier imidlertid at å jobbe med matematikk ikke nødvendigvis er en del av modelleringskompetanse, slik han anser det. Neste steg er å kunne sjekke svaret ved å overføre det til den virkelige situasjonen igjen, og her er det klare paralleller til steg 5 og 6. Samlet sett tilsier lærer 3 sine utsagn at han ser ut til å forstå modelleringskompetanse i lys av steg 3, 5 og 6 i modelleringssyklusen.

Som vist i tidligere utdrag er lærer 1 og lærer 2 usikre på om modelleringskompetanse er å anse som viktig for alle elevene. De er imidlertid klar på at modelleringskompetanse er en vesentlig del av det å kunne matematikk. Dette er også lærer 3 tydelig på, da han svarer følgende på spørsmål om han mener modelleringskompetanse er en viktig del av matematikk:

> L3: Ja, det mener jeg, fordi uten den, ja da har vi jo bare ren på en måte matematisk kompetanse. Da kan man ikke bruke det til noe.

Digital kompetanse

I intervjuene nevner alle lærerne at å arbeide med modellering innebærer bruk av digitale verktøy. At elevene bruker tid på digitale verktøy, vektlegges derfor i undervisningen (mer om dette i kapittel 4.1.3). Lærer 1 sier at i arbeidet med modellering er det viktig «at de [*elevene*] blir gode på digitale verktøy, det er utrolig gode hjelpemidler». Dette kan tolkes som at hun anser kompetanse i digitale verktøy for å være viktig i utviklingen av modelleringskompetanse.

På spørsmål om hvordan elever kan vise god modelleringskompetanse, svarer lærer 2 følgende:

> L2: Det er å finne en modell som vil passe til oppgaven. Det er å kunne avgjøre det og ta bildet av dette og føre det inn i Word og forklare .. Så og ta det over til grafikkfeltet for å finne ulike verdier … Men gjerne det å se sammenhengen også. At på den første oppgaven fungerer det å bruke regresjon, men så vil kanskje den neste oppgaven være lettere å løse i CAS. At det klarer å se litt sammenheng med disse hjelpemidlene de kan ha. (…)

Selv om hun tidligere uttalte en relativt generell definisjon av modelleringskompetanse, velger hun i dette utsagnet å ordlegge seg på en helt annen måte. I svaret hennes referer hun nesten utelukkende til bruk av digitale verktøy og å ha kompetanse i disse. Hun peker på å bruke Word og GeoGebra, og å kunne bruke grafikkfelt og CAS. Samtidig sier hun også at god modelleringskompetanse innebærer å se sammenhenger mellom disse digitale hjelpemidlene og vite hvilke som er hensiktsmessige å bruke når. Denne beskrivelsen har klare sammenhenger med kompetanse i hjelpemidler og verktøy, som er en del av kompetanseblomsten til Niss og Højgaard (2019).

Til forskjell fra lærer 2, sier lærer 3 eksplisitt at å jobbe i GeoGebra og utføre regresjon egentlig kun er en teknisk ferdighet.

> L3: Det å bruke regresjon, det er egentlig sånn.. Det er jo egentlig bare en teknisk greie som man kan lære seg å gjøre. Det er en teknisk ferdighet.

I lys av dette utsagnet ser det ut til at lærer 3 ikke nødvendigvis anser ferdigheter i digitale verktøy for å være en vesentlig del av modelleringskompetanse.

Vektlegging

Alle lærerne ble spurt om hva de vektlegger i vurdering av modelleringskompetanse. Lærer 1 svarte følgende:

> LI: (…) Det er jo ofte det som er litt av dilemmaet når vi vurderer, og det er jo vi obs på når vi lager prøver og vurdering og alt sånn. At det skal ikke være sånn at hvis du da ikke husker hvordan du gjorde dette her i GeoGebra, eller ikke klarte å lage den modellen, så må du også kunne få vist at du kan tolke et resultat eller sånn. Men det er nok litt tradisjonelt at en egentlig … Det er hele prosessen. En kan ta at noen setter feil opp, altså med hva du skal putte inn [*i GeoGebra*], fordi du har kanskje ikke forstått helt de tallene som står i oppgaven og sånt, men du kan på et vis gjør alt det andre riktig, og få god uttelling for det. Hvis bare ikke tallene blir helt at «her burde alle lamper ha lyst». Mhm … Så er det noen som kan gjøre en sånn større eller mindre feil under selve regresjonen, men løser alt det andre riktig. Også kan det være de som gjør regresjonen matematisk riktig, men som i etterkant egentlig ikke kan klare å bruke det. Ja … Men du får jo litt uttelling for at du kan klare å gjennomføre en regresjon, fordi det er jo liksom en kompetanse i det også.

Utdraget illustrerer at lærer 1 vektlegger flere deler av modelleringsprosessen i sin vurdering. Vurderingen blir en helhet av hvordan elevene forstår det matematiske innholdet, hvordan de setter opp modellen og arbeider i GeoGebra, og til slutt hvordan de tolker og vurderer resultatene. Dette er elementer som samsvarer med steg 3, 4, 5 og 6 i modelleringssyklusen. Ettersom lærer 1 vektlegger disse stegene i sin vurdering, kan dette videre tilsi at hennes forståelse av modelleringskompetanse også er relatert til disse stegen. I tillegg viser siste del av utsagnet at lærer 1 anser det å gjennomføre en regresjon som en del av modelleringskompetansen, i motsetning til lærer 3. Samtidig synes utdraget å forsterke antakelsen om at lærer 1 forstår modellering som arbeid med regresjon, som nevnt i kapittel 4.1.1, ettersom hun uoppfordret snakker om regresjon på et spørsmål om modelleringskompetanse.

Alle lærerne peker videre på at vurdering av modellen er en viktig del av modellering og modelleringskompetansen. Lærer 1 sier, som tidligere nevnt, at vurdering av modellen er det viktigste i modelleringsprosessen. Dette vektlegges også av lærer 2 og lærer 3 i deres refleksjoner rundt oppgave 1.

> L3: Jeg tenker det som krever størst forståelse er jo å vurdere gyldighetsområdet.

> L2: Det er jo egentlig den når du må vurdere, den c)'en, som viser høyest modelleringskompetanse, når du må vurdere hva som er gyldige verdier og hva det gir oss for noe.

Disse utsagnene tilsier at de vektlegger modellering som kritikk i sin vurdering av modelleringskompetanse. Samtidig er vurdering av modellen å anse som en del av steg 6 i modelleringssyklusen, altså validere. I tillegg til steg 6, mener lærer 2 at også steg 5 en viktig del av modelleringskompetansen. På spørsmål om hva hun mener er den viktigste delen av modelleringskompetansen sier hun følgende:

> L2: Ja, det blir vel gjerne det å kunne se litt sammenheng og se om det kan passe til noe .. Se at hvis noe .. Ja, hvis en bil synker i verdi, at de forstår at da går en graf ned. At de kan liksom skjønne hva det betyr, ikke bare at det er tall og en strek på en måte. At de får en forståelse om at de kan bety noe.

Dette utdraget viser at hun legger vekt på overgangen fra matematikk til den virkelige verden, da steg 5 i modelleringssyklusen. Hun knytter igjen modellering opp mot grafer, men synes å mene at høy modelleringskompetanse innebærer å forstå hva grafen egentlig viser og betyr i den ekstra-matematiske verden. Det samme ser også ut til å være viktig for lærer 3. På spørsmål om hva som viser høyest modelleringskompetanse sier han følgende:

> L3: Jeg ville vurdert det til høy modelleringskompetanse hvis de [*elevene*] klarer å skape en forbindelse mellom matematikken og situasjonen som de jobber med.

Her vektlegger han ikke nødvendigvis en enveis overgang fra matematikk til situasjonen, men han fremlegger at elevene bør skape en forbindelse mellom disse. Han sier videre:

> L3: Ja, i vurdering så vil jeg jo vektlegge at eleven klarer å se sammenheng mellom en reell situasjon og det matematiske verktøyet man bruker, for eksempel da en funksjon, og at de klarer å oversette mellom virkelighet og matematikk. At de kan se koblinger mellom det egentlig.

Dette utdraget viser at lærer 3 anser oversettelsen mellom matematikk og virkelighet, i begge retninger, for å være viktig i vurdering av modelleringskompetanse. Selve oversettelsen mellom disse kan relateres til steg 3 og steg 5 i modelleringssyklusen. Samtidig vektlegger lærer 3 også andre steg i syklusen da videre han sier:

> L3: Det viktigste er jo egentlig det å komme i gang tenker jeg. Å gå fra et praktisk problem til å formulere ned. Så den oversettelsen til matematikk. For hvis man klarer det bra så tenker jeg at de andre fasene vil gå lettere, for da har man oversatt til matematikk, og da tror jeg det blir lettere å oversette tilbake igjen. (…)

Her viser han først til steg 1 i modelleringssyklusen, da han refererer til å forstå problemet og situasjonen. Deretter viser han til matematiseringen, steg 3, og sier dette steget kan anses som viktigere enn steg 5, ettersom det er lettere med en overgang fra matematikk til virkelighet dersom en først har oversatt fra virkelighet til matematikk. Lærer 2 vektlegger også den første delen av modelleringssyklusen, da hun sier følgende er det viktigste i modelleringsprosessen når elevene jobber med modelleringsoppgaver:

> L2: Mange ser bare tallene og gjør etter det, men de ser jo ikke helheten i oppgaven. Så de svarer jo ofte på feil eller de ser ikke hva de lurer på, for de har ikke sett helheten i det. Så det å på en måte kunne lese oppgaven nøye og se hva det er de spør om. Og også forstå hva er denne funksjonen gir oss. Tror jeg er det viktigste.

Det virker som lærer 2 her anser steg 1 for å være en viktig del av modelleringskompetansen. Hun viser til at mange elever har problemer med å forstå oppgaven, eller å se helheten, og at dette dermed er vesentlig å mestre når de løser modelleringsoppgaver. Samtidig sier hun også at det er viktig å forstå hva det matematiske «gir oss», som kan tilsi at hun vektlegger overgang fra matematikk til virkelighet, steg 5, som hun også vektla i sin tidligere uttalelse.

Oppgaver og vurderingsformer

Alle lærerne gjennomførte en skriftlig vurdering i modellering i sin klasse, noe som er en typisk atomistisk vurderingsform. Denne prøven bestod av lukkede oppgaver med ett riktig svar, og store deler av prøven handlet om funksjoner og regresjon. Alle lærerne sier at spesielt oppgave 1, men også varianter av oppgave 2, er typiske oppgaver som ble brukt på prøven og som elevene har jobbet med i undervisningen. Dette er oppgaver som til sammen legger til rette for steg 4, steg 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen.

> L1: Ja, altså jeg tenker at oppgave 1 er jo den som er den tradisjonelle. Den som lærerbøkene legger opp til og i det hele tatt. Det er en typisk modelleringsoppgave.

> L2: De 2 første er jo sånn typisk egentlig vi har i 1P, der vi får enten en tabell eller en funksjon som vi skal modellere og fortelle litt om.

> L3: Oppgave 1 og 2 ligner mer på de oppgavene vi har brukt ja.

I tillegg til å vurdere selve modellen og svaret elevene kommer frem til på oppgavene på prøven, sier både lærer 1 og lærer 2 at også ser på hvordan elevene kommuniserer arbeidet sitt når de skal sette karakter.

L2: Ja, vi ser jo hvordan de [*elevene*] fører, hvordan de kommuniserer arbeidet (…) Så er det jo det å kunne forklare det de har gjort og vise god tegning og de har et godt bilde med forklaring. Det er jo noe av sånn vi vurderer det.

På den måten referer de til kommunikasjonskompetanse, som ofte er aktivert i arbeidet med modelleringsoppgaver (Blum & Niss, 2020).

Lærer 2 sier videre at hun tenker at oppgave 1 er den oppgaven som legger mest til rette for at elevene utvikler modelleringskompetanse, og forteller at hun ville brukt oppgave 1 og oppgave 2 for å vurdere elevenes modelleringskompetanse. Samtidig påpeker hun at det hadde vært gøy å prøve oppgave 3 fordi «den hadde nok utfordret de [*elevene*] på en annen måte». Lærer 1 ville imidlertid ikke brukt oppgave 3, fordi den er for åpen og krever lite matematisk kompetanse. Lærer 3 er uenig med både lærer 1 og lærer 2. På spørsmål om hvilken oppgave han mener legger mest til rette for å utvikle modelleringskompetanse, svarer han følgende:

L3: Oppgave 3 tenker jeg, fordi den har nokså lav inngangsterskel, men det er en krevende oppgave fordi det er jo oppgitt så lite informasjon. Men det er en oppgave som legger til rette for å gå en fullstendig modelleringssyklus. (…) Man kan gjerne bruke alle oppgavene, men jeg tror at hvis man ikke har den oppgave 3 så er det vanskelig for elevene å skaffe seg full modelleringskompetanse, fordi hvis ikke får de liksom ikke gjennomføre en hel prosess.

Han sier dermed at oppgaver lignende oppgave 3 er nødvendige for at elevene utvikler modelleringskompetanse. I kontrast til lærer 1, mener han også at det matematiske innholdet i oppgaven ikke trenger å være så vanskelig. Dette kommer frem da han sier følgende:

L3: Hvis man skal vurdere modelleringskompetansen så kunne man kanskje skrudd ned litt hvor krevende det matematiske temaet er for å kunne fokusere på hvordan de kan ja oversette mellom representasjon og vurdere svarene sine i etterkant.

Samtidig anerkjenner lærer 3 at han selv ikke har brukt slike åpne oppgaver i hverken vurdering eller undervisning. Hovedsakelig har han brukt mest tid på oppgaver som ligner på oppgave 1 og oppgave 2. Han kunne imidlertid tenke seg å bruke mer tid på oppgaver som oppgave 3 og oppgave 4. Dersom elevene skulle arbeide med slike åpne oppgaver sier han at «det ville vært nyttig at de samarbeider litt og at de kunne delt litt ideer».

4.1.3 Undervisning av modellering

Lærernes vektlegging i undervisning av modellering presenteres i dette delkapittelet under fire overskrifter. Først introduseres lærernes generelle tilnærming til progresjonen i undervisningen og typer undervisningsaktiviteter. Deretter presenteres lærernes vektlegging av funksjoner og digitale verktøy, samt deres utsagn om undervisning av modellering knyttet til relevante og virkelighetsnære kontekster. Til slutt fremlegges lærernes synspunkter på bruk av oppgaver i undervisningen.

Generell progresjon og undervisningsaktiviteter

Alle lærerne bruker aktivt lærerboken i undervisningen, og forteller at de underviser om modellering når de har om kapittelet i boka. Dette kapittelet følger etter kapittelet om funksjoner. Dermed følger undervisningen slik at de først har om funksjoner, deretter modellering. Lærer 3 og lærer 1 sier følgende:

> L3: Det [*modelleringskapittelet*] er mer knyttet opp mot en slags utvidelse av temaet funksjoner, bare at vi nå bruker det på reelle situasjoner. (…)

> L1: Det som jeg tenker .. Men det kan godt være at vi bare har gjort sånn fordi det er sånn vi har pleid og gjort det, men at vi ofte har hatt funksjoner først, sånn at de [*elevene*] må bli liksom litt trygge digitalt, og så kan de begynne egentlig med regresjon.

Lærerne forteller videre at en vanlig undervisningstime i modellering består av litt tavleundervisning, samt mye oppgavejobbing og bruk av digitale verktøy. Det samme sier også lærer 2. Dette er viktige elementer i undervisning av modellering ifølge Borromeo Ferri (2018). Lærer 1 beskriver deretter følgende om hva hun generelt vektlegger i undervisningen av modellering og hva hun har gjort:

> L1: Det er egentlig mye forskjellig. Det kommer litt an på gruppa. Veldig ofte når en begynner med modellering, så begynner en egentlig med ... Vi har ofte gjort det for hånd først, at de sitter og kanskje får noen kurver og skal prøve å plassere inn noen grafer i dette. (…) Også gjør vi en bit, da har de ofte lært seg litt om GeoGebra, så da går egentlig den regresjonsbiten ganske greit. Og da jobber de jo ofte litt selvstendig, og jeg plukker gjerne en god del eksamensoppgaver. (…) Og så etter hvert, så har vi kjørt et sånn strikkhopp. (…) Og det blir en sånn lineær sammenheng. Så da får de gjort det i praksis.

Lærer 1 forteller her at hun gjør mye forskjellig i undervisningen. Ofte starter hun med at elevene jobber litt for hånd med kurver og funksjoner, uten digitale verktøy. Deretter begynner de med regresjon og elevene jobber selvstendig med eksamensoppgaver. Etter hvert, når elevene har jobbet en del med regresjon, har de fått en praktisk oppgave som gir en lineær sammenheng mellom variabler. Samlet sett viser også dette utdraget at lærer 1 vektlegger funksjoner i sin undervisning av modellering. Dette diskuteres videre under neste overskrift.

Funksjoner som modeller og bruk av GeoGebra

Slik som forståelsen av modellering, vektlegger også lærerne funksjoner og regresjon i undervisningen av modellering. Mye av arbeidet med regresjon foregår i GeoGebra, og dermed brukes det mye tid på digitale verktøy i undervisningen. Uttalelsene til lærer 1 under forrige overskrift viser til denne vektlegningen. Når hun beskriver hva hun har gjort i undervisningen, snakker hun utelukkende om referanser til kurver, grafer og funksjoner. Lærer 1 sier videre følgende om funksjoner og modellering:

> L1: (…) Si at man har hatt om funksjoner og sånt, så er jo liksom den modelleringsbiten naturlig å gå. Nå skal vi se på hvordan vi kan få, altså lage funksjoner selv. (…)

Hun sier at det er en naturlig sammenheng mellom funksjoner og modellering, og begrunner på den måten hvorfor hun vektlegger det i undervisningen. Samtidig tilsier dette utsagnet at lærer 1 muligens anser modellering for å handle om å «lage funksjoner selv». Lærer 2 forteller også at hun i undervisningen vektlegger regresjon og bruk av GeoGebra, og forteller at dette er fordi hun følger lærerboken. I tillegg til lærerboken sier hun eksamen legger føringer for hva hun vektlegger i undervisningen. Det samme sier også lærer 1 og lærer 3.

> L2: (…) Så er det vanskelig å vite hva eksamen fokuserer på, og det ser ut som det er mer mot regresjon. At det er liksom det som er fokus i modellering.

Lærer 2 forteller her at eksamen ser ut til å fokusere på regresjon. Av den grunn blir det derfor naturlig å nettopp prioritere regresjon i undervisningen. Da lærer 2 først skulle undervise modellering i matematikk IP, ble hun imidlertid litt overrasket over lærerbokens fokus på regresjon.

> L2: Den [*lærerboken*] bruker mye tid på regresjon, og når jeg så det i boka når jeg først skulle undervise i fjor, så er det sånn ja, de vektet det litt annerledes i forhold til det jeg lærte på universitetet, men så ser jeg jo at det passer. (…)

Hun forteller her at erfaringer knyttet til modellering i sin egen utdanning ikke samstemte med lærerbokens vektlegging. Likevel innså hun at regresjons så ut til å passe inn i modellering, og har valgt å vektlegge lærerboken sin oppfatning i sin undervisning. Videre beskriver hun hvordan hun går frem for å lære elevene å utføre regresjon i GeoGebra:

> L2: Vi går gjennom steg for steg sånn at de henger med og får gjøre det selv første timen. Da går jeg skikkelig sakte gjennom.

Lærer 2 foreller her at hun går nøye gjennom fremgangsmåten i GeoGebra. Det samme sier også lærer 1 og lærer 3. På den måten vektlegges det dermed at elevene skal lære en rett fremgangsmåte for å løse oppgavene. Lærer 1 sier videre det er avgjørende å bruke mye tid med digitale verktøy. Samtidig uttaler både lærer 1 og lærer 2 at elevene tvilsomt kommer til å få bruk for GeoGebra senere i livet.

> L1 (…) Jeg tenker det er jo, hvis vi skal gi de noe i forhold til modellering, jeg tror jo det er de færreste av disse elevene som setter seg ned og kjører GeoGebra og lager seg en modell senere. Så jeg tenker det man lærer dem, det er.. Jeg tenker i forhold til det å få interesse for modellering, så er det jo litt .. Hva er det som ligger bak alle disse grafene vi ser? Hva er det ... Og så er det jo dette med at de får en sånn kritisk … klarer å se på grafer som de ser rundt omkring med et litt kritisk blikk. At de har liksom gyldighetsområde i bak i hode og kan tenke: Okey, når tid er denne gyldig? Når ser dette ikke …

I tillegg til å vurdere GeoGebra som ikke relevant for elevenes hverdagsliv, viser dette utdraget at lærer 1 anser evaluering av den grafiske modellen med et kritisk blikk som noe elevene kan få bruk senere. Lærer 3 og lærer 2 vektlegger også dette i undervisningen. Lærer 3 forteller at han har «fokus på å forstå hva slags modell man kan bruke og når den er gyldig» når han underviser i regresjon. Lærer 2 sier at hun, etter elevene har lært å lage modeller i GeoGebra, bruker mye tid på å «få de til å forstå og bruke dette med gyldighetsområde». Samme som i vektlegging i vurdering av modelleringskompetanse, kommer det dermed frem at alle lærerne anser det som viktig å vektlegge steg 6 i modelleringssyklusen og modellering som kritikk i undervisningen. Modellering som kritikk blir imidlertid primært knyttet mot en kritisk vurdering av funksjoner.

Relevante og virkelighetsnære kontekster

Alle lærerne vektlegger funksjoner og regresjon i sin undervisning av modellering, men de er også ved enkelte anledninger bevisst på å knytte dette opp mot kontekster som kan anes som virkelighetsnære eller relevante for elevenes hverdagsliv. Lærer 1 og lærer 3 sier for eksempel følgende om undervisningen av modellering:

> L1: Men det er klart i forhold til at de [*elevene*] skal få bruk for dette senere, så velger en jo kanskje de eksemplene som en tenker er relevant for dem. Det kan gå både på emner, men det er også hva i en regresjon .. Hva slags type målinger skal de gjøre hvis de skal gjør det selv og sånt. At det er noe som gir mening for dem.

> L3: (...) Jeg synes kontekst er veldig viktig, i hvert fall i et fag som 1P, og at man knytter det til hva det kan brukes til.

I disse utdragene kommer det frem at lærer 1 kan velge relevante eksempler når elevene jobber med regresjon, mens lærer 3 vektlegger kontekst og å se sammenheng med hva modellering kan brukes til. «Hva det kan brukes til» kan anses som en referanse til reelle eller hverdagslige kontekster. Lærer 3 kritiserer lærerbokens tilnærming til dette og sier:

> L3: Så ja, jeg kunne godt ønske at det var mer praktisk rettet i læreboka. Jeg synes ting blir litt løsrevet fra konteksten det skal brukes i, og det synes jeg er dumt. (…)

Han forteller videre at han «snakker mye om hva ting kan bety» når han underviser om modellering. Han gir følgende eksempel:

> L3: Det å forstå hva skal x bety og hva betyr det i denne situasjonen. Hvilke tall kan det være, og hva kan påvirke? Hvordan påvirker det de andre variablene?

Her viser han til undervisning av funksjoner og regresjon, og sier han vektlegger å forklare hva elementene kan bety i en mer virkelighetnær kontekst. Dette med hensikt om at elevene skal kunne se at funksjoner ikke bare er matematikk, men har en sammenheng med virkeligheten. Lærer 1 og lærer 2 sier også at de har valgt å ha et praktisk eksempel som en del av undervisningen for å fremme nettopp dette. Lærer 1 hadde «strikkhopp», mens lærer 2 sine elever jobbet med å finne sammenheng mellom menneskers skostørrelse og høyde. Lærer 2 forteller at i arbeid med dette så fikk mange av elevene en aha-opplevelse angående gyldighetsområde.

> L2: (…) Da så var jo plutselig en person på tre meter høy, og de så at det var en avgrensning på hva som stemte.

Samtidig er både lærer 1 og lærer 2 tydelig på at praktiske og virkelighetsnære eksempler ikke er noe de vektlegger gjennom hele undervisningen. Hva de vektlegger i undervisningen har stor sammenheng med hva elevene trenger å kunne til eksamen. Derfor velges eksempler og oppgaver ut fra det som er relevant for eksamen og kompetansemålene. Mer om oppgaver blir presentert under neste overskrift.

Oppgaver

Alle lærerne sier de vektlegger å bruke mye tid på oppgaveløsning i undervisningen. På spørsmål om hvilke vurderinger lærer 1 gjør i utvelgelse av oppgaver som elevene skal jobbe med, sier hun følgende:

> L1: Det er kompetansemålene og eksamen. (…) Og da går vi egentlig gjennom og ser på selvfølgelig kompetansemålene. Har vi dekket alt? Men vi går også gjennom og ser: hva har blitt gitt på eksamen de siste årene? Okei, da kommer ofte sånn og sånn type oppgaver, sånn at en vektlegger litt i forhold til det. (…)

Her forteller hun at utgangspunktet for valg av oppgaver er kompetansemålene og eksamen. Hun sier videre at hun velger oppgaver fra både lærerbøker og tidligere eksamener. De samme kriteriene nevnes også av lærer 2 og lærer 3. Videre, som tidligere nevnt, sier alle lærerne i refleksjoner rundt de fire gitte oppgavene i slutten av intervjuet, at de typisk har brukt oppgaver lignende oppgave 1 i undervisningen. På den måten vektlegger de oppgaver som legger til rette for steg 4, steg 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. Dette tilsier at de har en atomistisk tilnærming til undervisningen av modellering. Lærer 2 og lærer 3 utrykker imidlertid at det kunne vært spennende å bruke oppgaver lignende oppgave 3. Lærer 2 reflekterer rundt bruk av oppgave 3 i undervisningen og sier:

> L2: Det hadde vært gøy å teste de [*elevene*] på oppgave 3 og sett hva de hadde funnet ut. Og da hadde de måtte finnet verdier selv og funnet ting, så det hadde nok utfordret de på en annen måte. Men ja, jeg føler ikke at det er lagt opp til at vi skal gjøre sånn. Nei… Men det kan jo bare være at vi er litt låst til lærerboka.

Her uttrykker lærer 2 at hun ikke opplever at lærerboken legger opp til at de skal bruke oppgaver lignende oppgave 3. Hun begrunner på den måten hvorfor hun ikke har vektlagt slike typer åpne oppgaver i undervisningen. Lærer2 har imidlertid, gjennom sin utdannelse, hatt kjennskap til at modelleringsoppgaver ofte er å anse som åpne. Hun sier følgende:

> L2: Når jeg var på universitetet så var jeg litt negativ til det [*modellering*] … For det var liksom. Du er vant til at matematikkoppgaver skal ha et svar, og så ble det sånn at: nei, det trenger ikke være det. Også tolket vi det på en måte, også mente andre det ikke var riktig. Altså det var litt sånn at det ikke var noe riktig og galt, og det ble mye synsing med det. Og det ble liksom litt frustrasjon med det. Mens nå, når jeg har undervist i 1p, så er det en løsning og en måte å gjøre det på likevel. Så ja, det blir litt trekket i begge ender på en måte ved at det var litt forskjellig

I dette utsagnet reflekterer lærer 2 over sitt syn på modellering fra tiden ved universitetet, og frem til nå når underviser i matematikk 1P. Hennes refleksjoner avslører at hun har endret sin oppfatning etter hun begynte som lærer, men at hun fremdeles opplever en dualitet mellom de ulike tilnærmingene. Dette peker på en av utfordringene knyttet til undervisning i modellering, nemlig å endre tradisjonelle synspunkter.

Lærer 3 kommer også med refleksjoner rundt oppgave 3 relatert til dette. På spørsmål om han tror oppgaver lignende oppgave 3 blir brukt i dagens klasserom, svarer han følgende:

> L3: Ikke i så veldig stor grad tror jeg, nei. Det tror jeg grunnen holdt jeg på å si .. Det tror jeg er tradisjon, lærerboka og eksamen. Ja, de tre tingene.

Lærer 3 forteller her at han tror en sammensetning av tradisjon, lærerboken og eksamen har innvirkning på hvorfor oppgaver som oppgave 3 ikke blir brukt i undervisningen. Selv om han sier han kunne tenke seg å bruke slike oppgaver, har han ikke vektlagt det i undervisningen frem til nå. Han har imidlertid prøvd å fokusere på oppgaver som har tilknytning til en reell kontekst.

> L3: (…) Hvis vi ser de temaene funksjoner og modellering under ett, så har jeg gitt en del oppgaver der de får for eksempel en kontekst og da skal oversette det til matematikk.

Videre forteller han at store deler av undervisningen har gått til at elevene jobber med oppgaver. Dette sier også lærer 1 og lærer 2, og poengterer at flertallet av oppgavene krever bruk av digitale verktøy. På spørsmål om hvordan elevene jobber med oppgaver, svarer lærer 3 og lærer 2 følgende:

> L3: Det er mye samarbeid. Ja, at de sitter og diskuterer et par stykker og gjerne at de løser oppgavene. Så at alle skriver ned, men at de samarbeider om hvordan de løser den ja.

> L2: Mye sitting sammen, gjerne to og to ja.

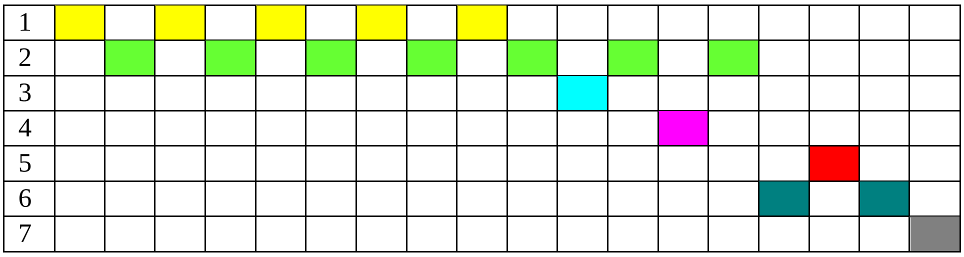
Lærerne forteller her at de vektlegger at elevene jobber i grupper. Gruppeaktivitet fremheves av empirisk forskning som passende i undervisning av modellering (Blum & Niss, 2020). Lærer 1 forteller også at hennes elever samarbeider, men det kan virke som at hun i større grad vektlegger selvstendig arbeid.

4.2 ELEVGRUPPENES ARBEID MED MODELLERINGSOPPGAVER

I dette kapittelet presenteres resultater fra de oppgavebaserte intervjuene av elevgruppene. Gruppenes modelleringsprosess blir presentert og analysert i lys av modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Dette gjøres for å besvare på hvilken måte elevene viser modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver. For å identifisere stegene i modelleringssyklusen som elevene går gjennom når de løser oppgaver, har jeg benyttet analyseverktøyet presentert i kapittel 3.6.3. Hvilke steg elevene går gjennom i modelleringssyklusen, og slik på hvilken måte de viser modelleringskompetanse, blir presentert først for den ene gruppen, så for den andre gruppen. Elevenes modelleringsrute i alle tre oppgavene vil bli presentert og illustrert. I tillegg vil utdrag fra intervju blir inkludert der dette er relevant. Jeg har valgt å ta for meg hvordan begge gruppene jobbet med hver oppgave, fra oppgave 1 til oppgave 3. Etter hver oppgave fremlegges en oppsummerende tabell. Gruppe 1 bestod av elevene Arne, Berit og Clara, og disse var elever til lærer 2. Gruppe 2 var elever til lærer 3 og bestod av Dina, Eline og Frida.

4.2.1 Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 1: Reisekostnader

I arbeidet med denne oppgaven jobbet elevene i omtrent 5 minutter. De kom raskt i gang og samarbeidet fint muntlig. Dette kan indikere at oppgaven hadde lav inngangsterskel og var gjenkjennbar for elevene, noe de selv påpekte. Gjennom oppgaveløsningen var elevene innom alle stegene modelleringssyklusen, men de tok ikke i bruk noen digitale verktøy. Mesteparten av tiden befant de seg i steg 1 og 2 i modelleringssyklusen, der de brukte tid på å forstå oppgavens innhold, samt strukturere informasjonen i oppgaven og diskutere hvilke billetter som var relevante for Hannah. En oversikt over deres modelleringsrute er angitt i figuren under.



Figur 18: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 1

Berit starter med å lese oppgaven for de andre. Arne og Clara gjentar noe av det som blir sagt, og spesifiserer gitte elementer. På denne måten befinner de seg først i steg 1 i modelleringssyklusen. Videre sier Berit følgende:

B: Vi kan jo skrive opp all informasjon først.

C: Ja.

B: Om de forskjellige stedene, eller hva de forskjellige reisekostnadene er .. Fra buss i Vågsbygda til tog til …

C: (*Skriver på papir*) Så … Vågsbygd til Kristiansand …

Berit foreslår her å strukturere informasjonen angitt i oppgaven ved å notere en oversikt, og Clara gjør dette. På denne måten beveger de seg videre til steg 2 i modelleringssyklusen, forenkle/strukturere. I prosessen ved å skrive ned informasjonen går de igjen tilbake til oppgaveteksten og prøver å forstå denne og sortere informasjonen. Slik går de frem og tilbake mellom steg 1 og steg 2 noen ganger inntil de til slutt setter opp en oversikt med de ulike reisekostnadene. I arbeid med denne oversikten diskuterer de blant annet følgende:

A: Men er dagsbilletten bare for Agder eller er den for hele Norge?

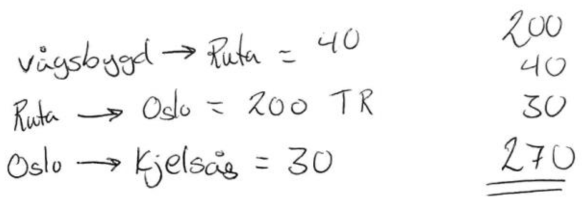
B: Jeg vil jo tippe det er Agder.

A: Ja ..

(...)

B = Og siden det ikke er samme dag, så går det ikke an med tur-retur vil jeg jo tippe da.

I utdraget bruker elevene litt ekstra-matematisk kunnskap til å anta hvilke billetter som er relevante for Hannah. Først antar de at hun må kjøpe både billett i Agder og i Oslo. De antar også at en tur-retur billett må brukes samme dag. I tillegg forstår elevene det slik at reisen til Hannah inkluderer at hun reiser til Oslo en dag, for så å reise hjem igjen en annen dag. Disse antakelsene indikerer at elevene i denne oppgaven viser god kompetanse på steg 2 i modelleringssyklusen. Videre skriver elevene ned prisene i oversikten sin, og setter opp et addisjonstykke. På den måten beveger de seg videre til steg 3, matematisere. Elevene jobber så med matematikk, steg 4, ved at de regner ut dette addisjonstykke. Oversikten til elevene, samt addisjonsstykke ses i figuren nedenfor.



Figur 19: Gruppe 1 sine notater til oppgave 1, del 1

Etter elevene har regnet ut addisjonstykke, sier de følgende:

B: Jeg tror det vil jo bil riktig, fordi det går jo ikke an å ta tur-retur fordi det er ikke samme dag, dagsbillett det har jo ingenting å si ..

A: Nei .. Det er jo bare bortkasta penger ..

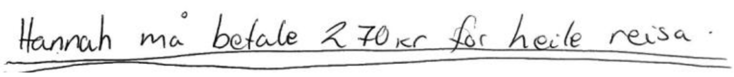
C: Så da blir det 270 til sammen for hele reisa?

A: Ja.

B: Det var billig!

C: Ja det var det ..

Her vurderer elevene svaret sitt ved å se tilbake på antakelsene de hadde tatt. Samtidig tolker de svaret i den virkelige verden, for så å vurdere svaret ved å påpeke at reisen var billig. De reflekterer imidlertid ikke mer over den billige prisen. På den måten går de igjennom steg 5, tolke, og steg 6, validere. Valideringen fører ikke til at elevene går gjennom modelleringssyklusen på nytt, men de fremstiller en løsning på oppgaven ved å skrive det ned på arket, slik som vist i figuren under:



Figur 20: Gruppe 1 sine notater til oppgave 1, del 2

Oppsummering

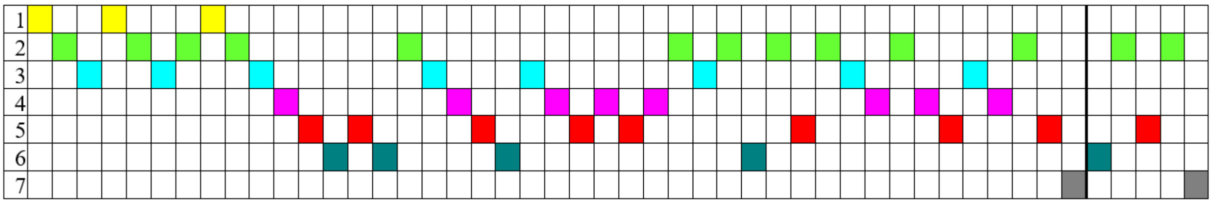
Oppsummert kan elevenes arbeid med oppgave 1 og på hvilken måte de viser modelleringskompetanse presenteres som i tabellen under. Tabellen oppsummerer hvordan elevene viser kompetanse på de ulike stegene i modelleringssyklusen. «+» indikerer handlinger som viser at god kompetanse, mens «-» indikerer noe som kan tyde på manglende kompetanse innenfor steget. Generelt sett viser elevene en god modelleringskompetanse i arbeidet med denne oppgaven.

Steg	Kommentar
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og diskuterer dens innhold ved flere anledninger. + De forstår oppgaven og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**
2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene strukturerer informasjonen i oppgaven ved å lage en passende oversikt over reiserute og priser. + De gjør hensiktsmessige og fornuftige antakelser om billettene Hannah trenger. **Viser god kompetanse på steg 2**
3 – Matematisere	+ Elevene matematiserer problemet på en hensiktsmessig måte ved å sette opp et addisjonstykke. **Viser god kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene regner ut addisjonstykke riktig. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene tolker de matematiske resultatene på en hensiktsmessig måte **Viser god kompetanse på steg 5**
6 – Validere	+ Elevene validerer resultatet sitt ved å se tilbake på antakelsene de har tatt. - De vurderer resultatet som billig, men reflekterer ikke noe mer rundt dette. **Viser kompetanse på steg 6**
7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et fornuftig og hensiktsmessig svar på problemet. **Vider god kompetanse på steg 7**

Tabell 13: Oppsummering av gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 1

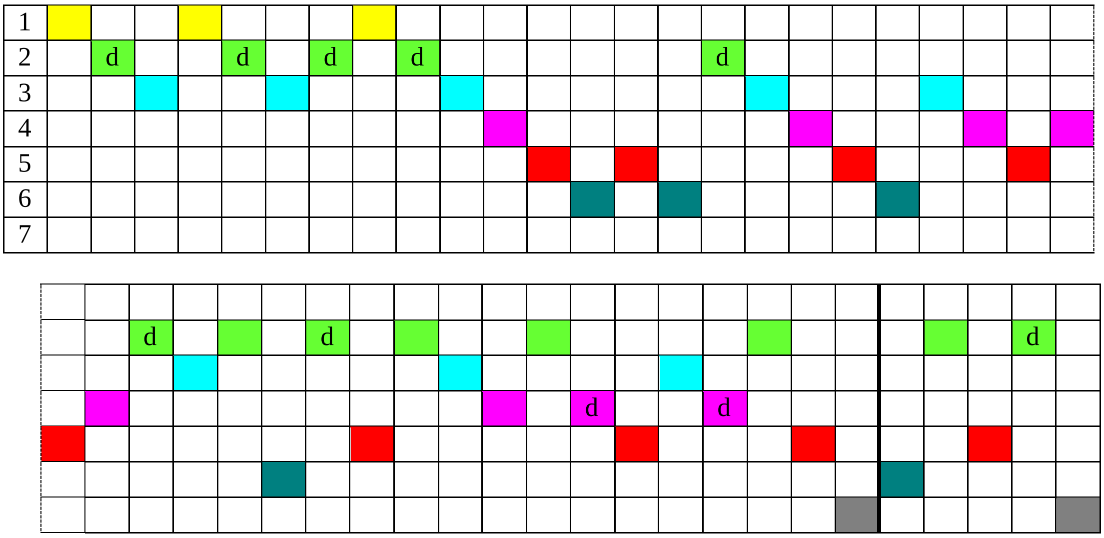
4.2.2 Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 2: Fylle drivstoff

På oppgave 2 arbeidet elevene sammenhengende i omtrent 30 minutter. De brukte mesteparten av tiden på steg 2 i modelleringssyklusen, der de lette etter informasjon og gjorde antakelser. Elevenes modelleringsrute bestod imidlertid av alle stegne i modelleringssyklusen, og de beveget seg gjennom syklusen opptil flere ganger. Da elevene anså seg som ferdige med oppgaven, ble det stilt et spørsmål som førte til litt videre arbeid. Når i løsningsprosessen spørsmålet ble stilt er indikert med tykk strek i figuren nedenfor.



Figur 21: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 2

Elevene tok i bruk digitale verktøy på denne oppgaven, da de brukte både pc og smarttelefon. Dette ble gjort ved flere anledninger, men mest tid ble brukt på å søke på internett etter manglende informasjon. Å lete etter relevant informasjon ved å bruke digitale verktøy knyttes til den digitale aktiviteten «undersøke», som beskrevet av Greefrath (2011) og illustrert i Figur 5. Elevenes bruk av digitale verktøy i deres modelleringsrute er markert med «d» i figuren nedenfor, som er en forstørret gjengivelse av figur 21.



Figur 22: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 2, inkludert bruk av digitale verktøy

Elevene befinner seg først i steg 1 da Clara starter med å lese oppgaven og elevene etterpå diskuterer hva oppgaven spør om, og hva de må finne ut av. Etter bekreftelse fra meg om at de har lov til å bruke pc, tar de den frem og begynner å undersøke hvor mye drivstoff den gitte bilen bruker. Mens Berit søker på internett, kommer Arne med et forslag til hvordan de kan matematisere problemet:

> A: Mens ho gjør det kan jo vi fortsette .. Eller for ja … det kommer an på.. Åå, vi kan jo være litt sånn kule å gjør dette i excel. Nei Excel, jeg mener GeoGebra! Fordi da blir det grafer
>
> B= Det blir grafer …

Her foreslår Arne helt i begynnelsen av oppgaveløsningen at de kan ta i bruk GeoGebra for å finne løsningen. På denne måten beveger han seg over i steg 3 i modelleringssyklusen. Videre går elevene tilbake til oppgaveteksten for å forstå hva de trenger å finne. Deretter fortsetter de å undersøke på internett, og Arne forklarer igjen hva slags grafer de kan forvente å få i GeoGebra. Han sier:

A: (…) hvis vi har disse her grafene så kan vi jo si: ja, det lønner seg helt til hun skal ha så så mange liter i bilen ..

Clara sier seg deretter enig med Arne. Slik beveger elevene seg gjennom de tre stegene en gang til. Etter dette finner Berit til slutt noe informasjon på internett som kan være relevant og sier:

B: Her står det. (*Leser fra PC*) Volkswagen Golf .. Men der står det bare testforbruk 0,48. Hva skal det bety?

C: Vet ikke

A: Hmm .. Testforbruk .. Er det 0,48 per.

B= 0,48 liter per kilometer, per mil?

Her har de funnet relevant informasjon til oppgaven, da antakelse om bilens forbruk er viktig for å lage en matematisk modell. Elevene mangler imidlertid avgjørende ekstra-matematisk kunnskap, da de ikke forstår at et forbruk på 0,48 liter tilsvarer 0,48 liter per mil. De leter videre på internett, er mye frem og tilbake, og Clara utrykker frustrasjon over at hun ikke forstår oppgaven. Berit antar til slutt at 0,48 angir liter per kilometer, så skjer følgende dialog:

B: Brukt … (*Setter opp et multiplikasjonsstykke og regner ut 0,48 ganger 169 på kalkulator*) 81 kr. Men det betyr jo .. Det høres veldig mye ut!

C: 81 kroner?

B: Nei, 81 liter brukt … (*Regner ut 81 ganger 19*) Og reisekostnader 1500. Det går jo ikke.

A= Nei.

B= Det er jo for mye.

A= Ja, det er jo feil .. Altså jeg vet at økonomien i dag er litt sånn .. *Men altså såpass.

C: Det koster så mye for å kjøre mellom de to? (*Peker på kartet på oppgaven*)

A: *Nei, det koster ikke 1000 kr å kjøre til.

B= *Å kjøre til Lillesand

I dette utdraget bruker Berit hennes antakelse om forbruket til å regne ut reisekostnader. Hun matematiserer dette først, for så å det regne ut. På den måten beveger hun seg gjennom steg 3 og steg 4 i modelleringssyklusen. Multiplikasjonsstykket hun setter opp og regner ut er imidlertid ikke riktig i forhold til hennes antakelse. I hennes tilfellet ville det riktige vært å ta 0,48 ganger 16,9, noe som hun trolig vet, men har ikke tilfredsstillende nok klart å strukturere denne informasjonen. Det matematiske resultatet blir dermed 81 liter forbruk og en kostnad på omtrent 1500 kroner for å kjøre fra Hånes til Lillesand. Elevene går så gjennom steg 5 og 6 i modelleringssyklusen, da de tolker kostnaden i den virkelige verden, for så å vurdere og validere den i lys av egen ekstra-matematisk kunnskap. På grunnlag av dette konkluderer de med at resultatet er urimelig. Dette fører til at de starter på nytt i modelleringssyklusen, og forsøker igjen å gjøre nye antakelser. De ser ikke tilbake på utregningen som Berit gjorde.

C: Men betyr det da .. Hvis det er 0,48 så er jo det.

A= Kan det være liter per mil?

B: Da blir kostnaden sånn 150.

A: Det er for mye!

B: Mhm …

A: Ja …

B: Vi kan sette opp en likning da, også fylle ut etterpå .. Så hvis vi tar .. På den første så er det 19 kroner per liter.

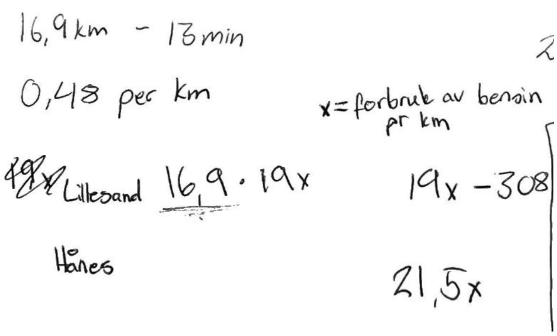
Denne dialogen viser at gruppen går gjennom modelleringssyklusen, fra steg 2 til steg 6, da med en ny antakelse om at 0,48 angir liter per mil. Med utgangspunkt i den forrige utregningen, ser Berit at dette vil tilsi en reisekostnad på 150 kroner. Dette vurderer både Arne og Berit som for mye, og de forkaster dermed den riktige antakelsen om at 0,48 er liter per mil. Berit foreslår deretter å sette opp en likning for å matematisere problemet. Hun skriver på papir mens hun snakker høyt med sine medelever:

B: Så da er det 16,9 gange … (*skriver på papir)* Ja, vi må ta minus også hvor mye det .. Okei .. 19x minus også kostnaden for å kjøre frem og tilbake, det må vi regne ut. Også den andre er jo 21,50 x. (*skriver ned på papir*).

Deretter regner Berit på kalkulatoren og beveger seg videre til steg 4 i modelleringssyklusen. Hun tar 16,9 ganger 2 for å finne total reiseavstand, for deretter å gange dette med 0,48. Da antar hun igjen at 0,48 er liter per kilometer, men denne gangen setter hun opp og regner ut en korrekt modell basert på denne antakelsen. Samtidig som Berit taster inn på kalkulatoren, påpeker Clara at det kanskje kunne vært lurt å skrive opp de regnestykkene hun tar. Berit avviser dette og sier følgende:

B: Nei, vi trenger ikke det. Sånn, da er det 16,224 liter de bruker, og det er 19 per liter. Da koster det 308 til sammen frem og tilbake. Bare skriv minus 308 …

Clara skriver ned det som Berit sier, og gruppen ender da opp med to likninger, 19x-308 og 21,5x, som vises til høyre i elevenes notater i figuren nedenfor.



Figur 23: Gruppe 1 sine notater til oppgave 2, del 1

På denne måten arbeider gruppen innenfor steg 4 i modelleringssyklusen. De er imidlertid lite kritiske til modellen de har laget, og da de tolker den i den virkelige verden, setter de ikke spørsmåltegn til hvorvidt en kostnad på 308 kroner er mye. Dette til tross for at de tidligere anså 150 kroner for å være en urimelig kostnad for en vei. Gruppen går i stedet tilbake til å jobbe med matematikk, og plotter funksjonene inn i GeoGebra. Da Berit skriver inn i GeoGebra, skjer følgende dialog:

A: Men altså. Hvorfor er det minus 308?

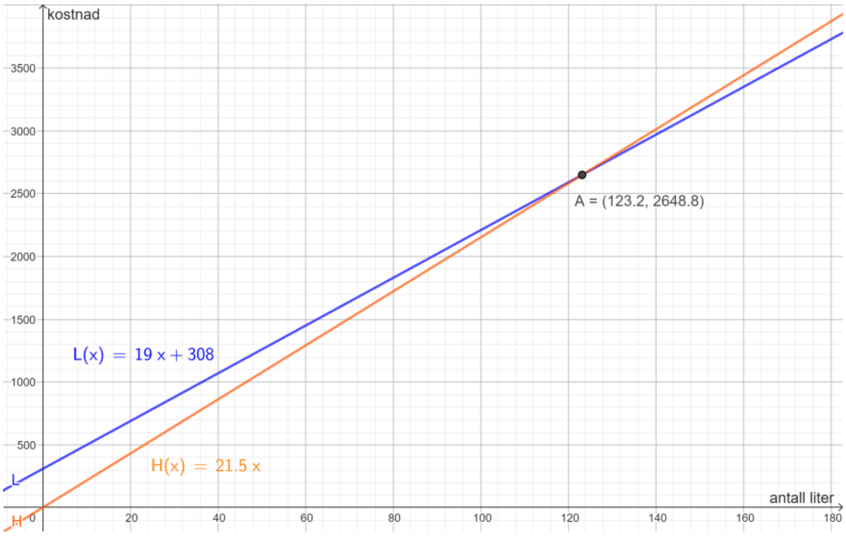
B: Fordi det er jo kostnaden frem og tilbake.

A: Ja .. Men.

B = Nei, det er jo pluss 308, fordi det er jo kostnadene!

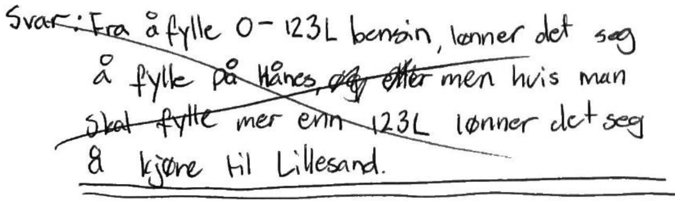
A: Ja.

Her overfører Arne modellen til den virkelige verden, steg 5, og vurderer den. Han stiller et kritisk spørsmål, og Berit innser derav at den matematiske modellen de har laget inneholder feil. Dermed matematiserer hun på nytt da hun forandrer fortegn foran 308 og på den måten ender opp med en ny modell. Funksjonene plottes så inn i GeoGebra og elevene finner skjæringspunktet mellom grafene. Her bruker de slik det digitale verktøyet for å jobbe i steg 4 i modelleringssyklusen. Clara foreslår at de bør sjekke hvor stor drivstofftanken til bilen er, men blir avvist av de andre. Deretter tolker gruppen grafen til funksjonene i den virkelige verden og de diskuterer hva de ulike aksene og skjæringspunktet betyr. De kaller x-aksen for antall liter, og y-aksen for kostnad. Gruppens arbeid i GeoGebra er gjengitt i figuren under.



Figur 24: Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 2 i GeoGebra

De overfører så resultatet til den virkelige verden og konkluderer med at svaret på oppgaven er at det lønner seg for Cecilie å fylle på Hånes dersom hun skal fylle mindre enn 123 liter. De skriver slik som vist i notatene deres under og beveger seg med dette innenfor steg 7 i modelleringssyklusen.



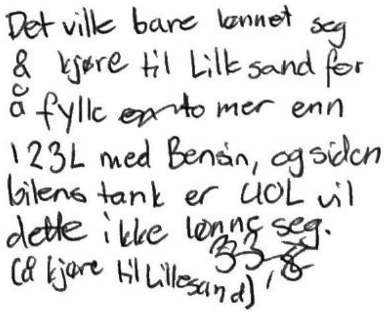
Svar: Fra å fylle 0 – 123L bensin, lønner det seg
å fylle på Hånes, ~~og etter~~ men hvis man
~~skal fylle~~ mer enn 123L lønner det seg
å kjøre til Lillesand.

Figur 25: Gruppe 1 sine notater til oppgave 2, del 2

Gruppen fremstiller her et svar uten å validere det og reflektere over om en 123 liter tank er fornuftig. Da de ønsker å gå videre på neste oppgave, spør jeg dem om de føler at de er ferdige med oppgaven, og om de mener de har tatt hensyn til alt. Elevene blir da litt undrende og forsøker å validere resultatet sitt. Clara sier deretter følgende:

C: Hvis tanken ikke er større enn så, så er det jo ikke vits uansett å fylle i Lillesand..

Arne og Berit sier seg enige, og de søker på internett for å finne ut av hvor stor drivstofftanken til en Golf er. På den måten er de igjen tilbake på steg 2 i modelleringssyklusen. De finner ut at tanken er 40 liter, og de velger å omformulere svaret på oppgaven som vist i figuren under. Elevene anser deretter oppgaven som besvart og går videre til oppgave 3.



Det ville bare lønnet seg
å kjøre til Lillesand for
å fylle ~~en~~ to mer enn
123L med Bensin, og siden
bilens tank er 40L vil
dette ikke lønne seg.
(å kjøre til Lillesand)

Figur 26: Gruppe 1 sine notater til oppgave 2, del 3

Oppsummering

Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 2 og på hvilken måte de viser modelleringskompetanse i deres lønningsprosess kan til slutt oppsummeres som i Tabell 14. Generelt sett viser elevene modelleringskompetanse når de løser denne oppgaven, men det er vesentlige mangler i enkelte steg.

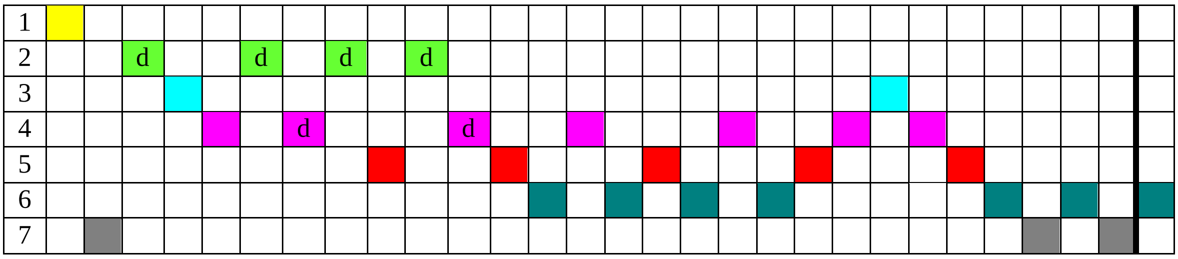
Steg	Kommentar
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og diskuterer dens innhold ved flere anledninger. + De forstår oppgaven og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**

2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene leter etter relevant informasjon, som bensinforbruk. - De tar ikke hensyn til ytterligere faktorer som bompenger, tid, slitasje på bil, CO_2-utslipp eller lignende. - De gjør en ufornuftig antakelse om at 0,48 angir liter per kilometer. - De strukturerer ikke informasjon på en tilfredsstillende måte, og mister på den måten oversikt over hva de har gjort før og hva de har funnet ut. Bruker derfor også unødvendig mye tid på dette steget. **Viser kompetanse på steg 2, men er noen vesentlige mangler**
3 – Matematisere	+ Elevene matematiserer til slutt korrekt basert på deres antakelser og setter opp to likninger. - På grunn av uriktige antakelser blir den matematiske modellen ikke riktig. - I løpet av løsningsprosessen har de på et tidspunkt riktig antakelse om at 0,48 er L/mil, men setter opp en uriktig matematisk modell basert på dette. **Viser kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene jobber hensiktsmessig med den endelige modellen i GeoGebra og finner skjæringspunktet. + De jobber også med modellene som dannes underveis riktig, selv om modellene i seg selv er urimelige. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene tolker deler av den matematiske modellen, samt den endelige modellen, i den virkelige verden på en hensiktsmessig måte. De tenker riktig rundt betydningen til verdier og variabler. **Viser god kompetanse på steg 5**
6 – Validere	+ Elevene validerer ved flere anledninger reisekostnadene ved å bruke deres ekstra-matematiske kunnskap. + De validerer det endelige resultatet. - De validerer ikke det endelige resultatet sitt før etter de blir stilt spørsmål. - De glemmer sine tidligere vurderinger og validerer ikke sitt endelige resultat på en hensiktsmessig måte, da de eksempelvis ikke setter spørsmålstegn til en kostand på 308 kroner. **Viser kompetanse på steg 6 til en viss grad**
7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et svar på problemet på en god måte, selv om svaret er feil. **Viser god kompetanse på steg 7**

Tabell 14: Oppsummering av gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 2

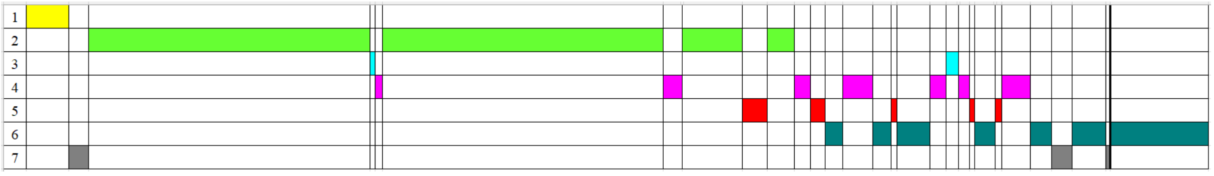
4.2.3 Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 3: Hvilken leilighet?

På oppgave 3 arbeidet gruppen sammenhengende i omtrent 30 minutter. De brukte PC i store deler av oppgaveløsningen, markert med «d» i figuren under. Elevene var gjennom alle stegene i modelleringssyklusen, men brukte mest tid på å lete etter informasjon på internett, steg 2. Avslutningsvis ble gruppen stilt et spørsmål som førte til en videre validering av resultatet de hadde kommet frem til, samt kritisk vurdering av modellen de hadde laget.



Figur 27: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 3

Figur 27 forteller ikke hvor mye tid gruppen brukte på de enkelte stegene. Ettersom elevene på denne oppgaven brukte vesentlig mye tid på gitte steg, sammenlignet med andre, kan figuren under gi et mer korrekt bilde av deres løsningsprosess. Her sammenlignes tidsbruken på de ulike stegene gjennom bredden på kolonnene. Som figuren viser, brukte elevene omtrent halvparten av tiden på steg 2.



Figur 28: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 3, inkludert tidsbruk

Gruppen starter med å lese oppgaven, men rett etter Berit har lest, utbryter Arne følgende:

> A: Han vil jo kanskje ha den som koster minst? Fordi altså rent praktisk så ville jeg jo anbefalt den til 8000 …

Arne stiller først et spørsmål som går på å forstå oppgaven, og gruppen er på slik vis fremdeles innenfor steg 1 i modelleringssyklusen. Deretter fremstiller han et svar på oppgaven og hopper dermed rett til det siste steget. Berit og Clara påpeker at de først bør finne ut at strømpriser og pris på kollektivtransport, før de avgjør hva de vil anbefale. Arne sier seg enig, og gruppen går i gang med å søke etter informasjon på internett. På den måten starter de med å jobbe på steg 2 i modelleringssyklusen. De leter først etter strømpriser, men innser at dette ikke er så lett å finne ut uten ytterligere antakelser.

> B: (*Leser fra pc*) Gjennomsnittsbruken for en studenthybel på 15 kvadratmeter. Man vet jo ikke det!
>
> A: Søk på hva er gjennomsnittsstørrelsen på en leilighet i Oslo eller studentleilighet.

Gruppen forstår her at de må undersøke størrelsen på kollektivet for å finne ut av strømprisen. Berit utrykker videre frustrasjon over alt de må finne ut av, og synes det er mange faktorer og lite informasjon i oppgaven. Elevene diskuterer deretter hvor mange personer som vanligvis bor sammen i et kollektiv, og antar at det er rundt 4-5 personer. Clara sier så følgende:

C: Men hvis man betaler 6000 per måned .. Vil det si kun for han eller delt på alle i kollektivet?

A: Nei, det er bare han.

C: Okei .. Hvis det er ikke inkludert strøm, så må de jo ta all strømmen også dele det likt.

Her befinner elevene seg fremdeles i steg 2 i modelleringssyklusen, der de strukturerer og gjør antakelser. Trolig basert på sin ekstra-matematematiske kunnskap sier Arne at 6000 kroner er det Chris skal betale alene. Clara påpeker videre at strømkostandene må nødvendigvis deles likt mellom de som bor i kollektivet. Gruppen fortsetter å undersøke på internett, men finner ingen informasjon de anser som relevant. De blir noe motløse, men Arne foreslår at de heller skal sjekke pris på kollektivtransport først. Da finner de at en pris på månedsbillett er 511 kroner. De adderer dette sammen med 6000, og går så tilbake til å undersøke strømpriser og gjennomsnittlig strømforbruk. På den måten beveger de seg fort gjennom steg 3 og 4 i modelleringssyklusen, for så gå tilbake til steg 2. På dette steget bruker de igjen mye tid, men de finner til slutt en nettbasert kalkulator som beregner strømforbruk basert på størrelsen på boligen. Arne foreslår da å søke opp kollektiver til leie i Oslo på Finn.no. Når han leter på Finn.no sier han følgende:

A: (…) Her er det en på 65, her er et en på 52, og det vil jeg jo tippe er hele leiligheten.

C: Skal vi si at gjennomsnittet er cirka 60 da?

A: Ja .. 60 .. 60 .. Ja, det er mye med 60. Skal vi bare si 60 er gjennomsnittet?

Gruppen antar at et gjennomsnittlig kollektiv i Oslo er 60 kvadratmeter, og de skriver dette inn i kalkulatoren. På slik måte jobber de med matematikk, steg 4, ved å bruke digitale verktøy. Et bilde av pc-skjermen vises i figuren under.

Figur 29: Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 3, nettbasert strømkalkulator del 1

Elevene klarer ikke å tolke svaret de får på 7320 kWh. Derfor begynner de på nytt å arbeide i steg 2, og søker enda litt mer på internett. Etter lite hell, forslår Arne at de skal se litt på den nettbaserte kalkulatoren på nytt. Da skjer følgende dialog:

C: Også står det 7320.

B: Mhm

C: Hva betyr det?

A: Det er vel cirka gjennomsnittet på kilowatten.

I denne dialogen beveger elevene seg til steg 5 i modelleringssyklusen, da de tolker tallet 7320 i den virkelige verden. Uttalelsen til Arne kan imidlertid tyde på en feilaktig tolkning, men de bestemmer seg for å klikke seg videre på «neste» på kalkulatoren. Til slutt får de frem slik som vist i figuren under:

Figur 30: Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 3, nettbasert strømkalkulator del 2

Gruppen har vanskeligheter med å tolke det som står der, men prøver å komme med en forklaring. Berit sier hun tidligere fant en side hvor det stod at gjennomsnittsprisen for kilowatt var omtrent 0,75 kroner i 2022. Arne bestemmer seg da for å validere resultatet fra den nettbaserte kalkulatoren ved å sjekke om antakelsen på 0,75 kr kilowatt stemmer med tallene som vises i figur 30. Gruppen befinner seg dermed i steg 6 i modelleringssyklusen. De regner så ut 0,75 ganger 7320, samt adderer tallene fra figur 30. Dette tilsier at de jobber i steg 4 i modelleringssyklusen. Resultatet fra de to regnestykkene er ganske like hverandre, og gruppen konkluderer dermed at kalkulatoren viser et riktig anslag av strømkostnad på 5654 kroner. Deretter sier de følgende:

B: Det gir mening!

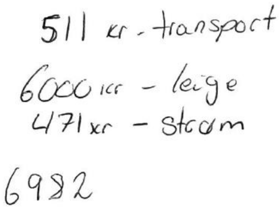
A: Ja, men er dette årlig?

B: Ja, det er nok årlig det! Så da deler du det på.

A=Delt på 12 .. 471.

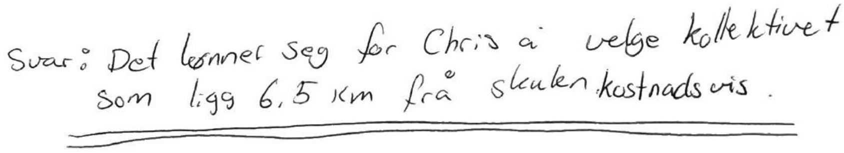
B: Hvis du skriver det der.

Her har gruppen beveget seg over i den virkelige verden igjen. De tolker svaret og Berit validerer resultatet. Videre innser de at 5654 kroner er årlig strømkostnad, og de jobber med matematikk idet de tar denne prisen og deler på 12. Deretter skriver Clara ned en oversikt over kostandene de nå ha funnet ut, som blir et addisjonstykke som de regner ut (figur 31).



Figur 31: Gruppe 1 sine notater til oppgave 3, del 1

På den måten beveger gruppen seg gjennom steg 3 og steg 4 igjen, da de setter opp en matematisk modell og regner den ut. De kommer frem til at den ene leiligheten trolig vil ha en pris på 6982 kroner i måneden, men tar ikke hensyn til det som de tidligere har antatt angående at strømkonstaden skal deles på alle i kollektivet. Videre tolker de strømkostnaden i den virkelige verden og påpeker at kostnadene blir mindre enn for den andre leiligheten. De validerer resultatet da Berit stiller seg tvilende på om de har gjort det riktig. Arne er imidlertid selvsikker på at 6982 kroner gir mening, og gruppen fremstiller derav et svar som vist i deres notater i figuren under.


Svar: Det lønner seg for Chris å velge kollektivet
som ligg 6,5 km frå skulen.kostnadsvis.

Figur 32: Gruppe 1 sine notater til oppgave 3, del 2

De påpeker i svaret sitt at det lønner seg for Chris «kostnadsvis», fordi de også anser andre faktorer som viktige. Dette kommer blant annet frem i den påfølgende dialogen mellom elevene. Da sier alle elevene seg enige om at det er mer praktisk med den leiligheten som ligger nærmere universitetet, og Clara sier det er «mindre stressende» med den til 8000kr. Samtidig er de enige om at over 1000 kroner forskjell er en del penger for en student, og sier det kommer an på hvor god råd Chris føler han har. På denne måten vurderer gruppen svaret de har lagt frem og hvordan andre faktorer kan påvirke det. De befinner seg slik i steg 6 i modelleringssyklusen.

De avslutter oppgaveløsningen, men jeg velger å stille dem et spørsmål. Jeg spør dem om de kan si noe om hvor nøyaktig de tror modellen deres er. Da svarer Clara følgende:

C: Den er kjempe lite nøyaktig.

I : Hvorfor det?

C: Fordi vi vet ikke hvor mange personer som kommer til å bo i kollektivet, hvor stort kollektivet er. Nå har vi kun gått ut ifra vi har funnet er cirka gjennomsnittet, og det finnes jo forskjellige svar på hva gjennomsnittet er på nettet. Så vi har jo på en måte nesten bare funnet det første vi har funnet. Ja, også .. Vi har bare synsa tid gjennomsnittet gjaldt.

Her reflekterer Clara over modellen de har laget og hvilke antakelser som har hatt innvirkning på resultatet. Hun er slik i steg 6, validere, i modelleringssyklusen. Gruppen forsetter å validere resultatet og Berit sier følgende:

B: Jeg kom jo på også. Siden han bor i Oslo, og bor der når han studerer, så kommer han jo uansett til å kjøpe månedskort fordi han kommer til å bruke buss mye hvis ikke han har bli da selvfølgelig. Så da kommer jo de kostandene med der også.

Hun innser at antakelsen om at Chris kun trenger månedskort dersom han velger den leiligheten lengst borte fra skolen, er lite sannsynlig. Arne og Clara er enige i den vurderingen, og påpeker da at det gjør kollektivet til 6000 mer attraktivt med tanke på kostand. Samtidig avslutter elevene med å reflektere over hva de selv hadde valgt. Alle tenker de mest sannsynlig hadde gått for kollektivet til 8000 kroner, fordi det er mest praktisk. Arne påpeker imidlertid at han også ville tatt hensyn til ytterligere faktorer, som eksempelvis hvor fin leiligheten var og hvor stor den var.

Oppsummering

Gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 3 og på hvilken måte de viser modelleringskompetanse i deres løsningsprosess kan til slutt oppsummeres som i tabellen under.

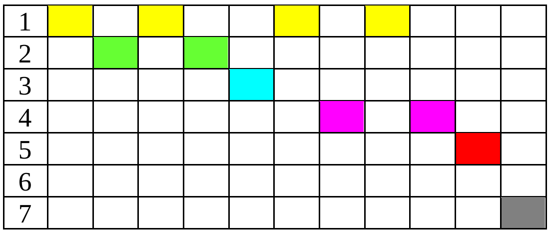
Steg	**Kommentar**
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**
2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene leter etter relevant informasjon som strømpriser, størrelse på kollektiv og priser på kollektivtransport. + De antar antall personer i kollektivet og gjør et anslag av størrelse på kollektivet basert på informasjon funnet på Finn.no. Disse antakelsene er rimelige. + De vurderer oppgaven til å handle om mer enn bare kostnad, da de også tar hensyn til andre faktorer. Eksempelvis hva som er mest praktisk. - Elevene har problemer med å ta egne antakelser, og bruker derfor mye tid på å søke ukritisk på internett. - Elevene strukturerer ikke informasjonen de finner, og antakelsen de tar på en tilfredsstillende måte. Derfor blir viktig informasjon mistet på veien. **Viser kompetanse på steg 2, men mangler noen elementer**
3 – Matematisere	+ Det som elevene matematiserer, gjør de på en hensiktsmessig måte, da de setter opp enkle multiplikasjonsstykker og addisjonsstykker. **Viser god kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene jobber hensiktsmessig med matematikk da de regner ut multiplikasjonstykker og addisjonsstykker. Også når de bruker den nettbaserte kalkulatoren. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene sitt endelige resultat på en hensiktsmessig måte. - De sliter ved enkelte anledninger med å tolke det matematiske resultatet på grunn av manglende ekstra-matematisk kunnskap. Eksempelvis resultatet de får ut av den nettbaserte kalkulatoren. **Viser kompetanse på steg 5**
6 – Validere	+ Elevene validerer hensiktsmessig ved flere anledninger, inkludert validering av det endelige resultatet. + De validerer med hensyn på andre faktorer enn bare kostnad. + De reflekterer godt over modellen de til slutt har laget og hvor nøyaktig den er. **Viser god kompetanse på steg 6**

7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et svar på problemet og forklarer det på en god måte **Viser god kompetanse på steg 7**

Tabell 15: Oppsummering av gruppe 1 sitt arbeid med oppgave 3

4.2.4 Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 1: Reisekostnader

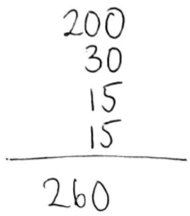
Dina, Eline og Frida jobbet med oppgave 1 i underkant 5 minutter. Gjennom oppgaveløsningen var de innom seks steg i modelleringssyklusen, og de tok ikke i bruk digitale verktøy. Mesteparten av tiden befant de seg i steg 1 i modelleringssyklusen, der de brukte tid på å forstå og sortere informasjon gitt i oppgaven. En oversikt over deres modelleringsrute er angitt i figuren under.



Figur 33: Modelleringsrute til gruppe 2 på oppgave 1

Dina starter med å lese oppgaven for de andre og gruppen diskuterer det som står. Videre gjentar de elementer fra oppgaven og prisene som er angitt. Slik befinner de seg i steg 1 i modelleringssyklusen, konstruere. Deretter beveger til seg videre til steg 2 der de antar at Hannah skal tilbake igjen til Vågsbygd. Videre går de igjen tilbake til oppgaveteksten og prøver å sortere prisene som står der. De antar så at en tur-retur i billett i Agder ikke trengs å brukes samme dag. Slik beveger de seg igjen gjennom steg 1 og steg 2.

Elevene skriver så opp informasjonen de har, og setter opp et addisjonsstykke. Samtidig går de tilbake til oppgaveteksten for å sjekke om de har forstått og fått med seg alt, og regner så ut 15 ganger 2 for billettene frem og tilbake mellom Oslo S og Kjelsås. På den måten går de gjennom steg 3, steg 1 og steg 4 i modelleringssyklusen. Deretter leser Eline oppgaven høyt en gang til for de andre, så regner de til slutt ut addisjonsstykke. Modellen og utregningen til gruppe 1 vises i figuren under.



Figur 34: Gruppe 2 sine notater til oppgave 1

Gruppen tolker så svaret i den virkelige verden og presenterer muntlig en løsning på oppgaven:

D: (…) 260 kroner blir det. For hele reisen.

De anser seg deretter som ferdige med oppgaven, og går videre til oppgave 2.

Oppsummering

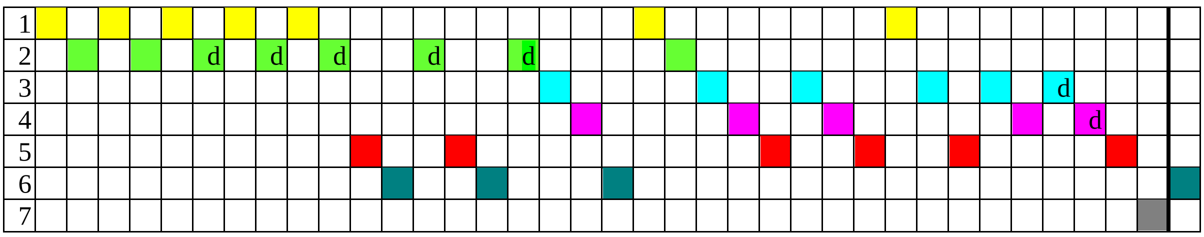
På hvilken måte gruppe 2 viser modelleringskompetanse i deres arbeid med oppgave 1, kan oppsummeres som i følgende tabell:

Steg	Kommentar
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og diskuterer dens innhold. De forstår oppgaven og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**
2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene strukturerer informasjonen i oppgaven ved å lage en passende oversikt over priser. + De gjør hensiktsmessige og fornuftige antakelser om billettene Hannah trenger. **Viser god kompetanse på steg 2**
3 – Matematisere	+ Elevene matimatiserer problemet på en hensiktsmessig måte ved å sette opp et addisjonstykke. **Viser god kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene regner ut addisjonstykke riktig. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene tolker de matematiske resultatene på en hensiktsmessig måte. **Viser god kompetanse på steg 5**
6 – Validere	- Elevene validerer ikke resultatet sitt. **Viser ikke kompetanse på steg 6**
7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et svar på problemet. **Viser god kompetanse på steg 7**

Tabell 16: Oppsummering av gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 1

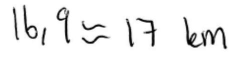
4.2.5 Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2: Fylle drivstoff

På denne oppgaven arbeidet gruppe 2 sammenhengende i omtrent 20 minutter. De gikk gjennom alle stegene i modelleringssyklusen og tok i bruk digitale verktøy underveis. Mest tid ble brukt på steg 2, forenkle/strukturere, da de undersøkte på internett, strukturerte informasjon og gjorde antakelser. På slutten av oppgaveløsningen ble elevene spurt et spørsmål. Deres modelleringsrute ses i figuren under.



Figur 35: Modelleringsrute til gruppe 1 på oppgave 2

Dina starter med å lese oppgaven og gruppen studerer kartet sammen. Før de går videre foreslår Dina å forenkle avstanden på 16,9 kilometer til 17 kilometer. Eline går tilbake til oppgaveteksten og leser den på nytt. Gruppa blir så enige om å forenkle avstanden og skriver dette ned som vist i deres notater under. Deretter går de igjen tilbake til oppgaveteksten og gjentar elementer fra den. På den måten beveger gruppen seg mellom steg 1 og steg 2 i modelleringssyklusen noen ganger.



Figur 36: Gruppe 2 sine notater til oppgave 2, del 1

Elevene forstår så at de må finne ut hvor mye drivstoff bilen bruker på avstanden fra Hånes til Lillesand. De går i gang med å søke på internett, og finner etter hvert et angitt forbruk på 0,84. Elevene tolker dette tallet i den virkelige verden og sier:

D: Det ga ikke mening, vent da.

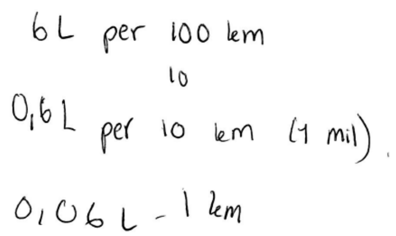
F: Hvorfor ikke?

D: Jeg vet ikke, vent da .. La meg bare se gjennom ei gang til … Ja! Det står bare 0,84.

E: Oppgitt forbruk .. 0,84.

D: 0,84 hva da? De gir jo mening hvis det står her at det er 0,84 liter pr mil? Det må være pr mil,10 kilometer.

I denne dialogen validerer elevene tallet 0,84 og befinner seg slik i steg 6 i modelleringssyklusen. Dina sier avslutningsvis at hun tror 0,84 må være liter per mil, og bruker på den måten sin ekstra-matematiske kunnskap for å gjør en antakelse. Gruppen går imidlertid tilbake til å søke litt mer på internett, da de andre i gruppen ikke er like sikre som Dina. De finner etter hvert en annen side som angir at en Golf bruker 5-7 liter per 100 kilometer. Dina foreslår da å benytte 6 liter per 100 kilometer videre i oppgaveløsningen. Dette tallet tolker elevene også i den virkelige verden og validerer det. De er noe usikre, og fortsetter derfor å gjøre noen flere undersøkelser på internett. Til slutt konkluderer de med at 6 liter per 100 kilometer er en fornuftig antakelse. Dina foreslår å gjøre dette om til liter per kilometer, og Eline skriver ned og omgjør verdiene som vist i notatene deres under. Dermed beveger gruppen seg fra steg 2 til steg 3 og videre til steg 4 i modelleringssyklusen.



Figur 37: Gruppe 2 sine notater til oppgave 2, del 2

Gruppen blir så usikre på omgjøringen sin, og Frida spør om det gir mening. Slik validerer hun resultatet på 0,06 liter per kilometer. Eline sier hun tror omgjøringen er riktig, men må se tilbake på oppgaven igjen for å se hvilken betydning denne verdien har. Hun leser igjennom oppgaven på nytt og Frida spesifiserer deler fra oppgaveteksten. På den måte starter gruppen på steg 1, konstruere, igjen. Dina påpeker at de må finne ut av hvor mye liter Cecilie bruker på turen til Lillesand. De forenkler igjen verdien på 16,9 kilometer til å være 17 kilometer, setter opp et regnestykke og regner deretter ut 0,06 ganger 17. Dermed går de igjennom steg 2, steg 3 og steg 4 modelleringssyklusen. De får da svaret 1,02, og tolker dette i den virkelige verden da de påpeker at det angir antall liter Cecilie bruker på strekningen. Eline sier deretter at de må gange dette tallet med 2. Hun skriver ned og regner ut slik som vist i figuren under, og gruppen går på den måten gjennom steg 3 og 4 en gang til.

$$1{,}02 \cdot 2 = 2{,}04$$

Figur 38: Gruppe 2 sine notater til oppgave 2, del 3

Gruppen tolker så svaret 2,04 for å angi antall liter forbruk frem og tilbake til Lillesand. De diskuterer videre hva de nå bør gjøre, og bruker tid på å studere oppgaven på nytt og hva som er målet med den.

E: Målet er jo om det lønner seg hvor det lønner seg.

D: Ja, for greia er at hvis hun fyller 10 liter her [*Hånes*] også fyller 10 liter der [*Lillesand*] på reisen så kommer hun fortsatt bare til å ha 8 liter når hun kommer hjem.

E: Men det vi kan sjekke kanskje .. At fordi ho bruker jo det der (*peker på 2,04*) fram og tilbake og det koster ... En av de må vi jo sjekke med da (*peker på bensinprisene*). Hvis vi ganger det (*peker på 19*) med det der (*peker på 2,04*).

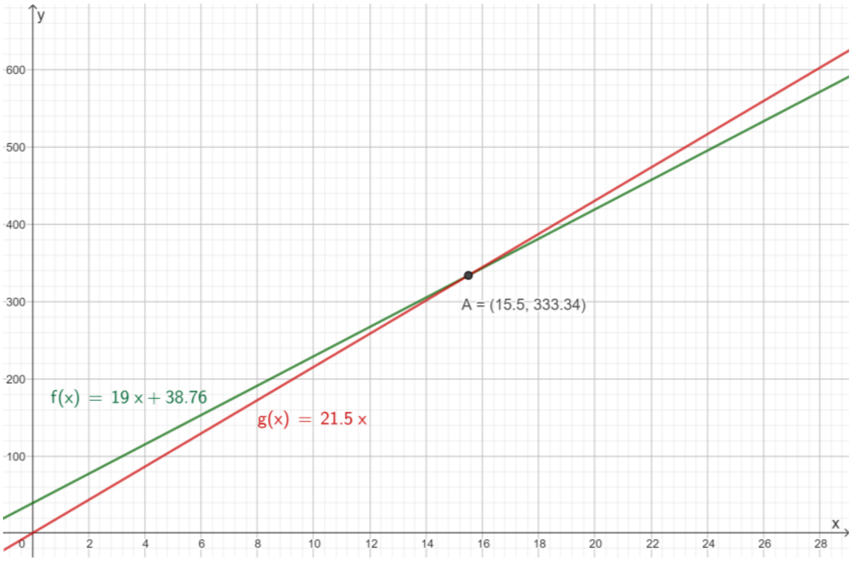
D: Ja.

E: For da får vi jo hvor mye det koster for den strekninga .. for vi skal jo finne ut om det lønner seg altså om det er billigere enn å … Da må vi jo kanskje finne ut hvor mye det koster for hun å kjøre den strekninga.

I denne dialogen beveger gruppen seg først fra steg 1, videre til steg 3, så til steg 5 i modelleringssyklusen. Eline gjentar og forstår målet med oppgaven, deretter matematiserer hun ved å foreslå å ta 2,04 ganger 19, for så å tolke hva dette svaret vil gi dem. Deretter foreslår Dina å gjøre dette på GeoGebra og sier:

D: Jo, men kan du skrive det som en graf, at det koster 19 kroner x pluss det det koster for de 2,04 literne, mens der (*peker på Hånes*) koster det bare 21,5x.

Dina matematiserer her problemet som to likninger. Gruppa regner så ut 19 ganger 2,04 for å finne kostanden frem og tilbake til Lillesand, og de beveger seg fra steg 3 til steg 4 i modelleringssyklusen. Deretter skriver Dina inn de to likningene i GeoGebra, og elevene finner skjæringspunktet mellom grafene. Slik jobber gruppen med digitale verktøy i steg 3 og steg 4 i modelleringssyklusen. Deres arbeid i GeoGebra er gjengitt i figuren under.



Figur 39: Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2 i GeoGebra

Etter de har jobbet i GeoGebra, sier elevene følgende:

D: For det er jo grafen for hvor mye hvis hun kjøper bensin på hånes, mens det er grafen for hvis hun kjøper bensin i Lillesand. Så hvis du ser her, er det mest lønnsomt å kjøpe bensin på hånes fram til hvis med mindre ho skal fylle over ..

E: 15, 5 liter.

Her tolker Dina og Eline grafene i den virkelige verden og beveger seg dermed videre til steg 5 i modelleringssyklusen. De sier seg deretter forøyd med resultatet og fremstiller en løsning på oppgaven:

E: Ja, så er det.

D= Det er mest lønnsomt å kjøpe bensin hvis hun skal under 15,5 liter på hånes, men skal hun ha over 15,5 liter er det mest lønnsomt å kjøpe bensin i Lillesand.

E: Ja.

Dermed går elevene over til steg 7 i modelleringssyklusen. De validerer ikke resultatene sine, og jeg velger derfor å stille et spørsmål. Jeg spør om de mener de har tatt hensyn til alt, og da svarer de følgende:

D: Vi har funnet ut hvor mange liter ho bruke pr kilometer …

F: Ja …

D: Hvor mange … Ja, jeg vil si meg fornøyd. Jeg er litt den personen som når jeg har gått gjennom en oppgave så gidder jeg ikke å gå gjennom den. *Da er jeg ferdig.

De validerer her resultatene sine et lite øyeblikk, da de ser tilbake på hva de har funnet ut og antatt under oppgaveløsningen. Valideringen er imidlertid kort og ufullstendig, og de sier seg fort fornøyde med svaret de har kommet frem til.

Oppsummering

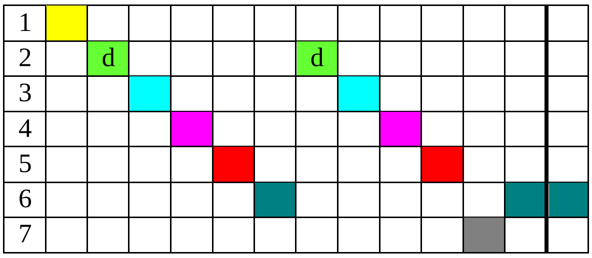
Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2 kan oppsummeres som i tabellen under.

Steg	Kommentar
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og diskuterer dens innhold ved flere anledninger. + De forstår oppgaven og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**
2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene leter etter relevant informasjon, som bensinforbruk. De finner en riktig og fornuftig verdi, 0,06 L/km. + De strukturerer informasjonen på en tilfredsstillende måte, og gjør noen hensiktsmessige forenklinger og avrundinger underveis. - De tar ikke hensyn til ytterligere faktorer som bompenger, tid, slitasje på bil, CO_2-utslipp eller lignende. **Viser kompetanse på steg 2**
3 – Matematisere	+ Elevene matematiserer hensiktsmessig ved flere anledninger, inkludert matematiseringen for den endelige matematiske modellen da de setter opp to likninger. **Viser god kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene jobber hensiktsmessig med den endelige modellen i GeoGebra og finner skjæringspunktet. + De jobber også riktig med modellene som dannes underveis i oppgaveløsningen. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene tolker deler av den matematiske modellen, samt den endelige modellen, i den virkelige verden på en hensiktsmessig måte. De tenker riktig rundt betydningen til verdier og variabler. Eksempelvis grafenes betydning og tallet 2,04. **Viser god kompetanse på steg 5**
6 – Validere	+ Elevene validerer ved flere anledninger bensinens forbruk ved å bruke deres ekstra-matematiske kunnskap. - De validerer ikke det endelige resultatet sitt på en hensiktsmessig måte. **Viser kompetanse på steg 6 til en viss grad, men mangler vesentlige elementer**
7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et fornuftig svar på problemet på en god måte. **Viser god kompetanse på steg 7**

Tabell 17: Oppsummering av gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 2

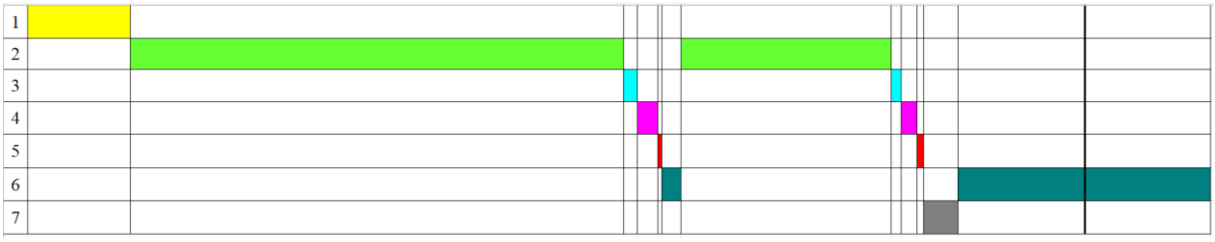
4.2.6 Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 3: Hvilken leilighet?

I arbeid med denne oppgaven gikk gruppe 2 gjennom alle steg i modelleringssyklusen. De beveger seg imidlertid lite frem og tilbake, og derfor ble deres modelleringsrute kort, slik som vist i figuren under.



Figur 40: Modelleringsrute til gruppe 2 på oppgave 3

Elevene brukte mest tid på steg 2, da de undersøkte på internett og gjorde antakelser. De brukte litt over 20 minutter på hele oppgaveløsningen, og godt over halvparten av tiden befant de seg i steg 2. Da elevene anså seg ferdig med oppgaven stilte jeg dem et spørsmål. En sammenligning av hvor mye tid elevene brukte på stegene i modelleringssyklusen er angitt i figuren under.



Figur 41: Modelleringsrute til gruppe 2, inkludert tidsbruk

Gruppen starter med å lese og studere oppgaven sammen. De diskuterer hva de trenger å finne ut, og kommer frem til at de må undersøke strømforbruk og priser på kollektivtransport. Dina påpeker at en student nok kanskje bruker mindre strøm enn andre, og bruker slik sin ekstra-matematiske kunnskap for å gjøre en antakelse om hva de må søke etter. Slik beveger de seg fra steg 1 til steg 2 i modelleringssyklusen. Elevene søker litt frem og tilbake og finner diverse verdier, men bestemmer seg for å velge en av dem. Elevene sier da:

> D: Kan vi ikke ta den der gjennomsnittet er 1600 pr måned, kan vi ikke ta det litt ned si 1000 kWh per måned?
>
> E: Jo.
>
> D: For studenter må jo og være mer bevisst ..
>
> (…)
>
> D: Ja. Så bruker man gjerne mer på vinteren, men dette er jo .. Skal vi si 1000 kiloWatt?
>
> E: Ja, det er lett å regne med.

Gruppen befinner seg her fortsatt i steg 2 i modelleringssyklusen, da de gjør en forenkling og antakelse. De finner at gjennomsnittet for en person er 1600 kWh i måneden, men basert på at studenter trolig bruker mindre, velger de å ta utgangspunkt i 1000 kWh. De tenker også at 1000 er et enkelt tall til å jobbe videre med. Dette er ikke en urimelig antakelse for en leilighet, men synes å være ganske mye forbruk for en person. Deretter går gruppen i gang med å søke videre for å finne strømpriser.

D: Pris.. De har jo klokkeslett og greier.. Å herremin hatt.

E: Men skal vi gidde å tenke på det?

D: Nei … (*søker på PC)* hvor høy er strømregningen til en student.

(…)

D: Okei. (*søker på PC*) gjennomsnittlig strømpris i Oslo.

F: Kan du ikke bare søke strømpris i Oslo nå?

D: Hva koster en kilowatt i Oslo.. (*Leser fra PC*) 92 øre pr kilowatt.

Elevene jobber her fremdeles i steg 2 i modelleringssyklusen. Dina finner en oversikt over spotpriser, men Eline foreslår at de ikke skal ta hensyn til det. De søker i stedet på gjennomsnittspris og finner til slutt en pris på 92 øre/kWh. Frida foreslår å bruke spotprisen som angis i Oslo på det aktuelle tidspunktet, men blir oversett. Deretter skjer følgende dialog:

E: 1000, da ganger vi det.

D= Ganger det med 92.

E= Ganger med 92.

D= Øre… Er det ikke litt lettere å bare gjør det om til kroner med en gang? 0,92 kroner.

F: 1000 ganger 0,92 .. 920 kroner. Så det koster 920 kroner for strøm.

D: Jeg følte det var billig jeg.

E: Jeg vet ikke.

D: Men det er jo fortsatt dyrt for en student.

Her beveger elevene seg gjennom flere steg i modelleringssyklusen. Først matematiserer de ved å sette opp et multiplikasjonsstykke. Deretter jobber de med matematikk, da de regner ut strømkostnadene til å være 920 kr. Elevene tolker denne verdien i den virkelige verden, og validerer så kort resultatet ved å vurdere og reflektere over verdien. De skriver opp 920kr i notatene sine, og går deretter i gang med å undersøke mer på internett.

D: Så må vi finne kollektivtransport.

F: Tenker vi sånn busskort?

D: Er jo bare å ta ruter. Gå på ruter.no.

Her er de tilbake i steg 2 i modelleringssyklusen. De leter etter priser på kollektivtransport og bruker sin ekstra-matematiske kunnskap til å avgjøre hvor de bør søke. Videre sjekker de også om det er en sjanse for at leiligheten som ligger 6,5 km unna er utenfor sone 1. De konkluderer med at dette er lite sannsynlig, og finner derfor at prisen på månedskort er 511 kroner.

D: Ja, da blir det 511. (*skriver notater*)

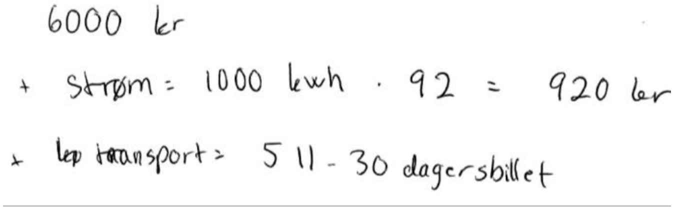
E: Ja. 6000 pluss 920 pluss 511.

D: Ja, det ser vi jo allerede er under 8000 .. Jeg kan ta det på kalkulatoren… 7431kr.

E: Ja. Så det vil si at den [*leiligheten til 6000kr*] er billigere.

D: Altså hvis han er bevisst på strømbruken sin så er det billigere å velge leiligheten til 6000, men hvis han har lyst til å bruke så mye strøm han vil, dusje i flere timer og smelle på med varme så er det billigere å ha leiligheten til 8000.

Her beveger de seg gjennom modelleringssyklusen på nytt. Etter de finner verdien på 511 kroner, setter de opp en matematisk modell og regner ut addisjonsstykket med leiepris, strømkostnad og kollektivtransport. På den måten går de gjennom steg 3 og steg 4 i modelleringssyklusen. Resultatet de får på 7431 kroner, tolker de så i den virkelige verden, før Dina presenterer et svar på oppgaven. Slik går de gjennom steg 5 og steg 7 i modelleringssyklusen. Elevene strukturerer informasjon og skriver ned underveis. Notatene deres er angitt i figuren nedenfor.



Figur 42: Gruppe 2 sine notater til oppgave 3

Deretter beveger gruppen seg til steg 6 i modelleringssyklusen idet Dina så sier:

D: Så kommer det også an på hva de andre bruker, altså det kommer jo også an på kollektivet. Det er jo mye tryggere å ha 8000 inkludert strøm, for da kan alle bruke så mye de vil og det kommer aldri til å bli noen diskusjon om hvor mye de forskjellige skal betale, for i ett kollektiv så kanskje han ene dusjer i 4 timer mens han andre tar 2 minutters dusjer, da må jo han som dusjer lengst i teorien betale mer.

E: Ja.

D: Så da kan det jo overskride prisen, så det kommer litt an på kollektivet og litt sånn variabel.

(…)

D: Ja i prinsippet er den med leie på 6000kr billigere, hvis man er bevisst på strømbruken og at de i kollektivet og på en måte og tar ansvaret for sitt strømbruk, mens hvis de ikke gjør det så er det billigere med leiligheten til 8000kr da kan du og bruke …

Her vurderer Dina resultatet de har kommet frem til ved å reflektere over ytterligere faktorer som kan ha innvirkning på hvilken leilighet de vil anbefale. Hun påpeker at det er tryggere og mer forutsigbart med den til 8000 kroner. Samtidig sier hun at de andre i kollektivet også vil ha en betydning for strømkostnadene. Elevene har imidlertid ikke tatt hensyn til dette i deres utregning, da de har antatt at Chris bruker 1000 kWh alene, og har sett bort ifra at strømregningen skal deles likt på alle i kollektivet.

Gruppen sier seg deretter fornøyde med svaret de har kommet frem til. Jeg velger å stille dem spørsmål om det er flere faktorer de ville undersøkt om det var de selv som skulle velge mellom leilighetene. Dette spør jeg med hensikt om å få dem til å reflektere mer over svaret de har kommer frem til. Elevene sier da følgende:

D: Det virker også veldig mye deiligere å bare kunne gå til skolen ja. Kollektivtransport er litt kjipt i Oslo, så jeg hadde nok valgt den til 8000 kroner. Også føler jeg det er mye tryggere, for du trenger ikke konstant å tenke: bruker jeg for mye strøm nå? Så jeg hadde valgt den til 8000.

E: Jeg tror jeg hadde sett på liksom hvordan det hadde vært da, sett ute også, hva som er i nærheten også, det er greit hvis det er mange butikker og du har en matbutikk rett ved.

(…)

D: Men det kommer jo og an på kollektivet du bor med, i hvilket område, hva som er rundt, hvilke tilbud. For det er liksom mange som hadde tatt den til 8000, måtte gjerne kjøpt noe kollektivtransport uansett, men hvis det hadde vært at du hadde kunnet gått til alt rundt omkring så trenger du jo ikke det .. Da er jo det billig.

Her nevner både Dina og Eline opptil flere aspekter de ville tatt hensyn til. På den måten vurderer og reflekterer de over resultatet de har kommet frem til i den virkelige verden. Samtidig nevner Dina avslutningsvis at studenter sannsynligvis ville måtte kjøpt kollektivtransport uansett. Deres refleksjoner fører imidlertid ikke til at de går tilbake og justerer modellen.

Oppsummering

Gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 3 og på hvilken måte de viser modelleringskompetanse kan oppsummeres som i tabellen under.

Steg	**Kommentar**
1 – Konstruere	+ Elevene leser oppgaven nøye og konstruerer en tilfredsstillende situasjonsmodell. **Viser god kompetanse på steg 1**
2 – Forenkle/ strukturere	+ Elevene leter etter relevant informasjon som strømforbruk, strømpriser og priser på kollektivtransport. + De strukturerer informasjonen de finner på en hensiktsmessig måte ved å notere ned verdier underveis. + De tar egne avgjørelser, antakelser og forenklinger. De bestemmer seg for å bruke 1000 kWh, samt en verdi gjennomsnittlig strømpris i Oslo. - De tar ikke hensyn til at strømregning deles på alle i kollektivet, samt at Chris nok uansett må ha månedskort på kollektivtransport. - De tar ikke hensyn til andre faktorer enn kostand i deres modell. **Viser kompetanse på steg 2, men kunne tatt hensyn til flere aspekter**
3 – Matematisere	+ Det som elevene matematiserer, gjør de på en hensiktsmessig måte, da de setter opp enkle multiplikasjonsstykker og addisjonsstykker. **Viser god kompetanse på steg 3**
4 – Jobbe med matematikk	+ Elevene jobber hensiktsmessig med matematikk da de regner ut multiplikasjonstykker og addisjonsstykker. **Viser god kompetanse på steg 4**
5 – Tolke	+ Elevene tolker resultatene i den virkelige verden på en hensiktsmessig måte. De forstår betydningen av verdier de har regnet ut.

	Viser god kompetanse på steg 5
6 – Validere	+ Elevene validerer hensiktsmessig ved flere anledninger, inkludert validering av det endelige resultatet. + De validerer med hensyn på andre faktorer enn bare kostnad. - Valideringen de gjør fører ikke til nye justeringer av modellen. **Viser kompetanse på steg 6**
7 – Eksponere/ vise	+ Elevene presenterer et svar på problemet og forklarer det på en god måte **Viser god kompetanse på steg 7**

Tabell 18: Oppsummering av gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 3

4.3 SAMMENLIGNING AV LÆRER OG ELEVER

I dette kapittelet fremlegges resultater relatert til forskningsspørsmål III der målet er å identifisere eventuelle forskjeller og sammenhenger som kommer til syne mellom resultater fra elevene og resultater fra lærerne. Først presenteres sammenligning av gruppe 1 og lærer 2, og deretter av gruppe 2 og lærer 3. Sammenligningen innebærer å se på lærerens forståelse og vektlegging av modellering, modelleringskompetanse, vurdering og undervisning, og sammenligne dette med hva elevene viser når de løser modelleringsoppgaver.

4.3.1 Gruppe 1 og lærer 2

Sentralt i presentasjon av resultater knyttet til elevenes løsningsprosess er modelleringssyklusen og hvilke steg gruppen går igjennom. I intervju av lærer 2 kommer det også frem hvilke steg i modelleringssyklusen hun vektlegger. Generelt har hun, som sine kolleger, en atomistisk tilnærming til modelleringsoppgaver og undervisning av modellering, der fokuset er på enkelte steg i modelleringssyklusen. Likevel viser elevene hennes kompetanse innenfor alle stegene i modelleringssyklusen når de løser oppgaver.

Lærer 2 kommer med flere utsagn som tilsier at hun vektlegger ulike steg i modelleringssyklusen. I undervisning og vurdering har lærer 2 primært brukt oppgaver lignende oppgave 1 (regresjonsoppgaven) og oppgave 2 (funksjonsoppgaven). Disse oppgavene legger til rette for steg 4, steg 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. Lærer 2 uttaler i tillegg at hun anser god modelleringskompetanse for å handle om god kompetanse i steg 5. Steg 4 og 5 i modelleringssyklusen er også steg som gruppe 1 generelt ser ut til å vise god kompetanse i. Slik kommer det her til syne en sammenheng. Videre sier hun at noe av det viktigste i modelleringsprosessen er å «kunne lese oppgaven nøye og se hva det er de spør om», og vektlegger på den måten steg 1, forstå.

Dette samsvarer også med hva gruppe 1 viste, da de i arbeid med alle oppgavene viste god kompetanse på steg 1.

I arbeid med de tre oppgavene viser elevene noen steder manglende kompetanse på enkelte steg i modelleringssyklusen. Som det fremkommer av Tabell 13, Tabell 14 og Tabell 15, gjelder dette spesielt steg 2, forenkle/strukturere og steg 6, validere. Lærer 2 sier likevel at hun vektlegger vurdering av modellen, som inngår i steg 6, i undervisning og vurdering, samt i sin forståelse av modellering og modelleringskompetanse. Samtidig knytter hun dette først og fremst til vurdering av gyldighetsområde til grafiske modeller, og vektlegger på den måten kun deler av steg 6.

Videre kommer det frem gjennom intervjuet av lærer 2 at hun ikke vektlegger steg 2, forenkle/strukturere, i særlig stor grad. Hun nevner det i refleksjoner rundt oppgave 3 i slutten av intervjuet, men anser det ikke som viktig i hverken undervisning eller vurdering, og heller ikke i sin forståelse av modelleringskompetanse. Elevene ser også ut til å ha manglende erfaring her, og utrykker til tider frustrasjon over at de selv må gjøre antakelser. På steg 2 sliter de dessuten noen steder med å ta i bruk hensiktsmessig ekstra-matematisk kunnskap eller mangler denne kunnskapen. Lærer 2 sine utsagn relatert til definisjonen av modelleringskompetanse tilsier imidlertid at hun anser bruk av ekstra-matematisk kunnskap for å være viktig.

Samtidig viser gruppen noe kompetanse på steg 2 da strukturerer elementer og bruker internett til å lete etter relevant informasjon. Å lete etter manglende informasjon er noe elevene selv sier de har lite erfaring med fra undervisning. Dette kommer blant annet frem da Berit sier følgende om oppgaver de har hatt i undervisningen:

> B: Man trenger ikke å søke rundt, finne ut .. Sånn at man er usikker på svaret.. Man får all den informasjonen man trenger for å finne ut av svaret konkret, og da er det liksom ett svar.

Utsagnet fra Berit tilsier samtidig at elevene i undervisningen har hatt lukkede oppgaver der det bare er «ett svar». Dette kommer også frem i intervju av lærer 2 da hun snakker om undervisning og vurdering, selv om hun samtidig nevner at bruk av lukkede oppgaver er en kontrast til hva hun selv lærte på universitet. Elevene har dermed lite erfaring med åpne oppgaver, men til tross for dette, klarer de å løse de åpne oppgavene de får i intervjuet.

Lærer 2 bruker, som sine kolleger, også mye tid på oppgaver som involverer digitale verktøy. Hun forklarer at hun «går gjennom steg for steg» hvordan elevene skal gjøre oppgaver i GeoGebra. Samtidig knytter hun modellering til grafer og funksjoner i sin undervisning og forståelse av modellering. I oppgaveløsningen er det tydelig at elevene på gruppe 1 har en del erfaring med bruk av GeoGebra. I arbeid med «Fylle drivstoff» foreslår blant annet elevene helt i begynnelsen av løsningsprosessen at de kan bruke GeoGebra for å lage grafer og finne løsningen på problemet. At elevene så tidlig i oppgaveløsningene klarer å se sammenheng med digitale verktøy de kan bruke, kan tyde på at de har brukt mye tid på dette i tidligere. Lærer 2 sier dessuten også at hun anser det å ha kompetanse til å avgjøre hvilke digitale hjelpemidler som er hensiktsmessige å bruke når, er en viktig del av å vise god modelleringskompetanse.

Lærer 2 reflekterer rundt oppgaven «Fylle drivstoff» i siste del av intervjuet. Hun er usikker på om denne oppgaven kan anes som en modelleringsoppgave, men sier følgende om hvordan hennes elever trolig ville løst oppgaven:

> L2: (…) Jeg tror mange bare har sett at: ok, 19 kroner .. Så er det billigere. De tenker ikke på den kostnaden det er til og fra, og slitasje på bil og altså se den store sammenhengen i det. Så det tror jeg generelt. (…)

I dette utsagnet sier lærer 2 at hennes elever trolig ikke ville tatt hensyn til flere aspekter enn prisen på drivstoff. Dette står i kontrast til hva elevene faktisk viser når de løser oppgaven. Samtidig sier lærer 2 videre i sine refleksjoner at mange av hennes elever er gode på å diskutere, og det kan være at de likevel kunne kommet frem til et fornuftig svar etter hvert dersom de jobbet i grupper. Hun er imidlertid usikker på om de ville «tatt hensyn til alt og sett helheten i oppgaven». Hun har delvis rett i det hun sier, da elevene med fordel kunne tatt hensyn til flere aspekter. Elevene kommer også frem til et svar til slutt, selv om svaret ikke er å anse som riktig.

4.3.2 Gruppe 2 og lærer 3

Lærer 3 er den eneste av lærerne som eksplisitt nevner modelleringssyklusen. Han sier imidlertid at han ikke har undervist elevene sine spesifikt om den. Samtidig er han tydelig på at han vektlegger flere steg i modelleringssyklusen i sin forståelse av modellering og modelleringskompetanse, spesielt stegene 3 og 5 som representerer overgangen mellom den virkelige verden og matematikken i begge retninger. Elevene hans viser også generelt god modelleringskompetanse på disse stegene når de løser oppgaver. Videre viser uttalelser at lærer 3 også vektlegger steg 1 i modelleringssyklusen at elevene kommer i gang og klarer å formulere et problem. Dette er også et steg som elevene hans viser god kompetanse i når de løser alle oppgavene i intervjuet.

Lærer 3 sine uttalelser tilsier også at han anser andre steg i modelleringssyklusen for å være viktige. Ved samtale om oppgavene i slutten av intervjuet, sier lærer 3 at han i undervisningen har brukt mest tid på oppgaver lignende oppgave 1 og oppgave 2, selv om han kunne tenke seg å bruke oppgaver som oppgave 3 og 4. Dette tilsier at han har vektlagt atomistiske oppgaver i undervisningen som legger til rette for steg 4, 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. I tillegg nevner han i sin definisjon av modelleringskompetanse flere elementer relatert til flere steg i modelleringssyklusen, blant annet steg 3 og steg 6. Steg 3, 4 og 5 er steg som gruppe 2 viser god kompetanse innenfor. På steg 6 mangler imidlertid hans elever å vise kompetanse ved enkelte anledninger, spesielt når de løser oppgave 1 og 2. Det kommer slik til syne både sammenhenger og forskjeller mellom lærer 3 og hans elever i gruppe 2.

Elevene i gruppe 2 viser også kompetanse på steg 2 i modelleringssyklusen, da de på alle oppgave både gjør forenklinger, samt strukturerer og leter etter manglende informasjon. Noen steder er det imidlertid rom for at de kunne vist enda mer kompetanse på dette steget, for eksempel i arbeid med oppgave 3. Lærer 3 sine utsagn tilsier at han ikke legger særlig stor vekt på dette steget i hverken undervisning eller vurdering. Dette kommer også frem da han reflekterer over oppgaven «Fylle drivstoff». Han sier følgende da han nevner hva oppgaven krever av elevene:

> L3: (…) Og så må de vite at biler bruker en viss antall liter per mil .. Og at det tallet kan variere. Så de må skjønne at her må man gjøre noen antagelser og bare bestemme et tall. Og det er de kanskje ikke så vandt til, at de bare skal bestemme noe. De er vandt til å få oppgitt all informasjonen i større grad. (…)

Elevene sier også i den avsluttende samtalen at de ikke har erfaringer med oppgaver der de selv må lete etter informasjon og gjøre antakelser. Til tross for dette, viser de altså kompetanse innenfor dette steget. Elevene bruker imidlertid digitale verktøy for å lete etter informasjon, og gjør på slik vis ikke antakelser kun basert på egen ekstra-matematisk kunnskap. De utrykker i tillegg at de synes det var morsomt med oppgaver som har manglende informasjon. Dina sier blant annet:

> D: (...) jeg synes den andre og tredje [*oppgaven*] var gøyere for da måtte man finne ut av ting.
>
> (…)
>
> D: Det er liksom, for der [*på oppgave 3*] er det jo så mange variabler så da er det jo litt gøy syns jeg.

Elevene sier videre at de har brukt mye tid på å jobbe med funksjoner og GeoGebra i undervisningen. Lærer 3 sier også at GeoGebra vektlegges i undervisningen, men han er klar på at han anser bruk av GeoGebra og det å utføre en regresjon som å bare være «en teknisk ferdighet» og på slik vis ikke en del av modelleringskompetansen. På oppgave 2 velger elevene hans uoppfordret å bruke GeoGebra for å komme frem til en løsning på oppgaven. De anser dette steget som å være avgjørende for at de kom frem til et svar. Eline sier følgende:

> E: Det her [*oppgave 2*] var jo litt sånn, det var GeoGebra som fiksa det holdt jeg på å si.

I sine refleksjoner rundt «Fylle drivstoff», nevner ikke lærer 3 at oppgaven kan løses med å bruke digitale verktøy. Han sier i tillegg at han tror flere av hans elever ville hatt problemer med å løse denne oppgaven. Samtidig fremhever han at det trolig ville vært forskjell på elevene og at noen ville kommet frem til et svar, og at andre ville klart å løse kun deler av oppgaven. Gruppe 2 viser imidlertid generelt relativt god modelleringskompetanse på denne oppgaven og kommer frem til et fornuftig svar. Lærer 3 sier også eksplisitt at oppgaven legger til rette for alle steg i modelleringssyklusen, noe som løsningsprosessen til hans elever demonstrerer.

5 DISKUSJON

I dette kapittelet vil jeg sammenfatte, oppsummere og diskutere resultatene mine videre. Resultatene vil diskuteres i sammenheng med teori og tidligere forskning, og jeg vil systematisk drøfte funn i lys av forskningsspørsmålene i denne studien. I kapittel 5.1 sammenfattes og diskuteres funn relatert til forskningsspørsmål I, som handler om lærernes forståelse av modellering og modelleringskompetanse, samt deres vektlegging i undervisning av modellering og i vurdering av elevers modelleringskompetanse. Neste kapittel, kapittel 5.2, tar for seg forskningsspørsmål II som dreier seg om hvordan elevene viser modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver. I kapittel 5.3 drøftes og oppsummeres til slutt funn knyttet til forskningsspørsmål III, da hvilke forskjeller eller sammenhenger som kommer til syne mellom elevenes modelleringsprosess og deres lærers uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering.

5.1 LÆRERNES FORSÅELSE

Resultatene fikk frem noen generelle tendenser relatert til lærernes forståelse av modellering og modelleringskompetanse, samt deres vektlegging i undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse. I kapittel 5.1.1 vil jeg oppsummere og diskutere disse tendensene. Jeg vil også kort belyse hvordan kulturen i skolen og den sosiale konteksten kan gi et innblikk i hvorfor lærerne uttaler seg slik de gjør. Videre vil jeg i kapittel 5.1.2 presentere og diskutere de mest synlige spenningene mellom hva lærerne forstår og vektlegger, og hva denne studiens teoretiske rammeverk fremlegger om dette.

5.1.1 Generelle funn

Sentralt i definisjonen av modellering er at modellering er en aktivitet som handler om å løse problemer fra den virkelige verden, samt at det er en syklisk prosess som består av flere steg (Blum, 2002, 2015; Blum & Leiß, 2007; Blum & Niss, 2020; Blum & Pollak, 2018; Borromeo Ferri, 2018). Når det gjelder lærernes forståelse av modellering, fremkommer det i intervjuet at de anser modellering for å ha en sammenheng med virkeligheten. De er likevel noe usikre på om modellering er å anse som relevant for alle av elevene sitt hverdagsliv. Lærerne forstår også modellering som en prosess bestående av flere elementer, noe som har klare sammenhenger med modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Det er imidlertid kun lærer 3 som nevner modelleringssyklusen eksplisitt, og ingen av lærerne beskriver alle de syv stegene som inngår modelleringssyklusen. De nevner heller ikke at modelleringsprosessen er å anse som en syklisk prosess. Samtidig vektlegger lærerne enkelte steg i modelleringssyklusen i sin forståelse av modellering. Generelt knytter spesielt lærer 1 og lærer 2 steg 3, matematisere, og steg 6, validere, til sin forståelse av modellering. Videre knytter lærerne modellering til funksjoner, regresjon og bruk av GeoGebra, og modellering forstås på den måten som å lage og arbeide med funksjoner. Lærer 3 er imidlertid tydelig på at modellering ikke utelukkende handler om dette.

Når det gjelder hvordan lærerne forstår modelleringskompetanse har dette, som en kan forvente, sammenheng med hvordan de forstår modellering. Lærerne forstår modelleringskompetanse generelt som en kompetanse sammensatt av flere elementer, noe som samsvarer med ovenfra-ned definisjonen som denne studien har tatt utgangspunkt i. De forstår imidlertid ikke modelleringskompetanse i lys av alle stegene angitt i modelleringssyklusen. Spesielt lærer 1, men også lærer 2, legger vekt på at modelleringskompetanse handler om kompetanse i steg 3 og 6, da de fokuserer på at modelleringskompetanse innebærer å lage en matematisk modell og vurdere den etterpå. Samtlige sier videre at steg 1 er viktig, da de uttaler nødvendigheten med at elevene forstår og kommer i gang med oppgaven. Sammenlignet med sine kolleger, forstår lærer 3 modelleringskompetanse i lys av flere steg i modelleringssyklusen, men ingen av lærerne legger vekt på steg 2 i sin forståelse.

Lærerne forstår også modelleringskompetanse i lys av kompetanse i digitale verktøy. De vektlegger at det er viktig at elevene mestrer å bruke digitale verktøy når de arbeider med modellering. Å utvikle kompetanse i digitale verktøy samtidig som en utvikler modelleringskompetanse er å anse som hensiktsmessig i lys av tidligere empirisk forskning (Blum & Niss, 2020; Greefrath, 2011; Niss & Højgaard, 2019; Vos & Frejd, 2022). Lærer 1 og lærer 3 mener imidlertid at å bruke GeoGebra kun kan betraktes som en teknisk ferdighet. Samtidig vektlegger alle lærerne elevenes ferdighet i GeoGebra når de skal vurdere elevens modelleringskompetanse. Dette kommer blant annet frem da alle lærerne gjennomførte en skriftlig prøve i sin klasse som primært inneholdt oppgaver som krevde bruk av digitale verktøy.

Skriftlige prøver er en av vurderingsformene som også Frejd (2013) fant at gjorde seg gjeldene i vurdering av modelleringskompetanse. Det er også å anse som en atomistisk vurderingsform (Blum & Niss, 2020). Prøven som lærerne hadde i sin klasse inneholdt lukkede oppgaver som ifølge Borromeo Ferri (2018) ikke kan anses som modelleringsoppgaver, da de ikke legger til rette for alle stegene i modelleringssyklusen. Oppgavene la først og fremst til rette for steg 4, steg 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. På den måten vektlegger lærerne også kompetanse i disse stegene i vurdering av elevenes modelleringskompetanse. Oppgavene handlet dessuten nesten utelukkende om funksjoner og regresjon.

Når det gjelder lærernes vektlegging i undervisningen av modellering, bruker de mye tid på å undervise om funksjoner, regresjon og GeoGebra. De underviser modellering som en utvidelse av temaet funksjoner, slik som lærerboken fremhever. Deres vektlegging av regresjon og GeoGebra begrunnes ut fra hva eksamen og lærerboken fokuserer på. Videre sier lærerne at de bruker mye tid på å jobbe med oppgaver i undervisningen. Dette understreker Borromeo Ferri (2018) og Blum og Niss (2020) at er et viktig element i kvalitetsundervisning av modellering. Lærerne vektlegger også at elevene samarbeider med oppgavene, noe som empirisk forskning tilsier at er hensiktsmessig (Blum & Niss, 2020). Oppgavene som lærerne velger å bruke i undervisningen styres av eksamen og lærerboken, og er primært atomistiske oppgaver som fokuserer på steg 4, 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. Samtidig krever de fleste oppgavene bruk av digitale verktøy, da først og fremst GeoGebra. Derav vektlegger lærerne og bruker mye til å undervise i bruk av GeoGebra. De forteller at de går steg for steg gjennom fremgangsmåten for å utføre en regresjon i GeoGebra. Borromeo Ferri (2018) påpeker også at bruk av digitale programvarer bør være en del av undervisningen av modellering på videregående.

Samlet sett viser også intervjuene generelt at lærerne mangler grunnleggende elementer innen den pedagogiske innholdskunnskapen i modellering som beskrevet av Borromeo Ferri (2018), samt Borromeo Ferri og Blum (2010). De mangler eksempelvis kjennskap til vesentlige begreper innenfor den teoretiske dimensjonen. Kun lærer 3 nevner modelleringssyklusen, selv om modelleringssyklusen er grunnleggende innen kunnskap om modellering og modelleringskompetanse. Ingen av lærerne bruker begreper som «matematisering» og «validering», og nevner heller ikke at modellering er en syklisk prosess. I tillegg har de heller ikke kunnskap om perspektiver på modellering eller ulike tilnærminger i undervisning av modellering som blir beskrevet av det teoretiske rammeverket. Lignende funn kan også identifiseres i Berget (2023) sin studie av fire lærere i matematikk 2P. Videre viser lærernes refleksjoner rundt oppgavene i slutten av intervjuet at de mangler kunnskap om modelleringsoppgaver og hva som kan anses som modelleringsoppgaver. I følge Borromeo Ferri (2018) er oppgaver lignende oppgave 1 ikke å anse som en modelleringsoppgave, men alle lærerne mener dette er en modelleringsoppgave.

Samtidig er det vesentlig å se på det lærerne sier som en del av den sosiale konteksten de befinner seg i. Lærerne kan ikke ses på som isolerte individer da de er en del av en skolekultur som i stor grad former deres forståelse og vektlegging. Dette kommer til syne gjennom at de lar lærerboken, læreplanen og eksamen bestemme hva de skal vektlegge. Lærer 2 nevner også at hun ikke føler det er «lagt opp til» at de skal bruke åpne oppgaver. Et slikt utsagn kan tyde på at hun er en del av en større setting som inkluderer flere faktorer enn bare hva hun selv mener og ønsker. Lærer 1 og lærer 3 nevner også at tradisjon har innvirkning. I lærer 1 sine utsagn kan en blant annet identifisere utrykk som «tradisjonelle modelleringsbilde» eller «tradisjonell modelleringsoppgave». Med tradisjon kan det trekkes paralleller til hvordan skolen som kultur og system har fungert i mange år, samt hvordan lærere vanligvis har forstått og vektlagt ulike tema. Tradisjonen og kulturen i skolen kan videre forklare hvorfor lærer 2 opplever spenninger mellom hva hun selv lærte på universitetet om modellering, og hva hun har valgt å vektlegge i sin undervisning av modellering. Det kan også forklare hvorfor det av og til ser ut til å være en uoverensstemmelse mellom lærernes ønske med undervisningen, samt hva de tror elevene vil få bruk for i hverdagslivet, og hva de faktisk gjennomfører og vektlegger i undervisningen.

Situasjonen lærerne befinner seg i da de blir intervjuet er også med på å påvirke hva de sier. Å sitte i et intervju er en konstruert og uvant situasjon for dem. Dette, i tillegg til at lærerne kanskje er usikre, kan være en forklaring til hvorfor det kan identifiseres endringer i deres uttalelser i løpet av intervjuet. Lærere som i starten ser ut til å forstå modellering som matematisering, nyanserer for eksempel dette senere da de reflekterer over oppgaver som ikke finnes i lærerboken. Samtidig kommer lærerne ved enkelte anledninger med tilsynelatende motstridene utsagn.

5.1.2 Sentrale spenninger mellom læreres forståelse og forskning

I analyse av lærerintervjuene fremkommer det elementer relatert til deres forståelse og vektlegging som ikke samsvarer med hvordan forskningslitteraturen fremstiller dette. Berget (2023) avslørte også slike spenninger i sin studie. Noen av spenningene som er identifisert i denne studien er allerede nevnt, men vil bli videre utdypet i dette deltakapittelet.

Når det gjelder lærernes forståelse av modellering, er det hovedsakelig tre spenninger som kan trekkes frem. For det første, er lærerne usikre på om modellering er noe som er relevant for alle elevenes hverdagsliv. Dette gjelder spesielt lærer 1 og lærer 2. Forskning på modellering beskriver imidlertid at en av hovedgrunnene til å innføre modellering som en del av pensum i utdanning, er nettopp å gjøre skolematematikken relevant for elevenes hverdagsliv (Blum, 2015). Denne spenningen samsvarer også med resultater fra Berget (2023). For det andre, kan enkelte læreres uttalelser tyde på at de knytter mye av sin forståelse av modellering til matematisering. Som det teoretiske rammeverket i denne studien beskriver, er matematisering å anse kun som en del av modellering. Matematisering i seg selv handler om å lage en matematisk modell for å beskrive virkeligheten, og representer kun overgangen fra den virkelige verden til den ekstra-matematiske verden. Modellering må nødvendigvis forsås som en aktivitet som innebærer overgang frem og tilbake mellom disse to verdenene.

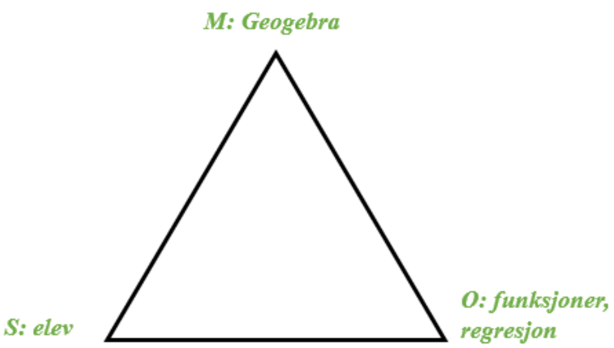
Den tredje spenningen relatert til forståelse av modellering, er at lærerne knytter modellering til et spesifikt matematisk innhold, nemlig funksjoner. Denne spenningen fant også Berget (2023) i sin studie. Lærer 2 utrykker dessuten at det en kontrast mellom modellering og tema som «algebra og likninger». Sentralt i det teoretiske rammeverket er imidlertid at matematisk modellering er en overordnet aktivitet som ikke knyttes til noe spesifikt matematisk innhold (Berget, 2023).

Når det gjelder forståelse og vurdering av modelleringskompetanse, er det spesielt tre spenninger som jeg ønsker å trekke frem. For det første, anser ikke lærerne steg 2 i modelleringssyklusen, forenkle/strukturere, der elevene må gjøre egne antakelser og forenklinger, for å være en viktig del av modelleringskompetansen. Dette er derimot ifølge det teoretiske rammeverket å anse som en av de mest essensielle delene av modelleringsprosessen. Denne spenningen ble også identifisert av Berget (2023). For det andre, vektlegger lærerne elevenes ferdigheter i GeoGebra i sin vurdering av deres modelleringskompetanse. Grunnen til dette har sammenheng med hvordan elevene blir vurdert på eksamen. Kompetanse i digitale verktøy er imidlertid ikke å anse som en del av modelleringskompetanse ifølge forskningslitteraturen, selv om den ofte er aktivert i forbindelse med aktivering av modelleringskompetanse (Blum & Niss, 2020). For det tredje, legger lærerne mer vekt på enkelte steg i modelleringssyklusen når de vurderer elevenes modelleringskompetanse. De har blant annet benyttet en atomistisk vurderingsform som primært innehold oppgaver som la til rette for steg 4, 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. Et viktig prinsipp ved bruk av atomistiske vurderingsformer og oppgaver, er imidlertid at oppgavene til sammen bør legge til rette for alle steg i modelleringssyklusen (Blum & Niss, 2020).

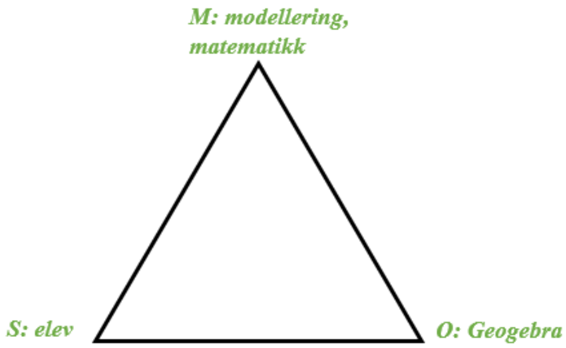
Noen spenninger kan også identifiseres relatert til hva lærerne ser ut til å vektlegge i undervisning av modellering. For det første velger de atomistiske, lukkede oppgaver som elevene skal jobbe med. De gir også elevene øvelse i å utføre en gitt fremgangsmåte når de går gjennom steg for steg i GeoGebra. Dermed får ikke elevene øvelse i alle stegene i modelleringssyklusen, og de oppfordres heller ikke til individuelle modelleringsruter. På den måten reduserer lærerne de kognitive kravene relatert til modellering. Samlet sett utgjør dette en spenning med hva som beskrives i rammeverket relatert til forskning på undervisning av modellering. Her vektlegges det at elevene bør få jobbe med oppgaver som til sammen legger til rette for alle stegene i modelleringssyklusen, samt åpne oppgaver der de oppfordres til individuelle modelleringsruter (Blum, 2015; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018).

For det andre, underviser lærerne modellering i tilknytning til funksjoner og regresjon. Inngangen til temaet modellering er på den måten funksjoner, og ikke virkelige eller reelle situasjoner. Lærer 3 sier at han eksplisitt vektlegger reelle kontekster i undervisningen, men disse kontekstene er likevel tilknyttet funksjoner eller regresjon. Å ta utgangspunkt i reelle situasjoner uten tilknytning til et bestemt matematisk innhold, bør være et viktig element i undervisningen av matematisk modellering (Blum & Niss, 2020). På slik vis er det en spenning her mellom det som lærerne vektlegger og det som vektlegges av forskere innenfor undervisningen av matematisk modellering.

For det tredje, vektlegger lærerne GeoGebra i sin undervisning av modellering. De bruker store deler av undervisningen på å lære elevene programmet og hvordan de skal utføre en regresjon. De fleste av oppgavene lærerne velger å bruke krever også bruk av GeoGebra. Grunnen til at det brukes så mye tid på dette har sammenheng med hva som kreves av elevene på eksamen. På den måten fokuserer lærerne på verktøyet i stedet for på modelleringen i seg selv. Dette samstemmer ikke med hva som anes som hensiktsmessig i undervisning av modellering i forskningslitteraturen. Lærernes tilnærming til GeoGebra kan oppsummeres som i figurene under. GeoGebra brukes på den ene siden som verktøy for å lære elevene om funksjoner og regresjon. På den andre siden er GeoGebra å anse som målet i seg selv, der lærerne vektlegger å bruke modellering, eller andre matematiske konsepter, som medierende verktøy for å lære elevene å bruke GeoGebra.



Figur 43: GeoGebra som medierende verktøy i undervisningen



Figur 44: GeoGebra som objekt i i undervisningen

Hva lærerne vektlegger i undervisningen, men også hva de vektlegger i vurdering og i sin forståelse av modellering og modelleringskompetanse, kan oppsummeres som å gå inn under målet «modellering for eksamens skyld» (Berget, 2023). Dette ble også påpekt av Berget (2023) i hennes studie. I tillegg til tilnærmingene «modellering for matematikkens skyld» (Blum & Niss, 2020) og «matematikk for modelleringens skyld» (Blum & Niss, 2020), viser resultater at lærernes tilnærming til modellering også har nøye sammenheng med hva som kreves av elevene på eksamen. Lærerne velger oppgaver, tilpasser undervisningen og lager vurderinger basert på dette.

5.2 ELEVENES MODELLERINGSKOMPETANSE

Resultater relatert til på hvilken måte elevene viser modelleringskompetanse når de løser modelleringsoppgaver, ble presentert i kapittel 4.2. I dette kapittelet vil jeg sammenfatte og diskutere dette videre. Mye av analysen omhandlet gruppens modelleringsruter på de ulike oppgavene, samt hvordan de viste kompetanse på de ulike stegene i modelleringssyklusen. Dette vil jeg oppsummere og se på i lys av tidligere forskning i kapittel 5.2.1. I kapittel 5.2.2 vil jeg diskutere gruppens modelleringskompetanse, mens i kapittel 5.2.3 diskuteres elevenes bruk av digitale verktøy i oppgaveløsningen.

5.2.1 Gruppenes modelleringsruter

Gruppenes modelleringsruter i de ulike oppgavene er illustrert i figur 18, 21, 27, 33, 35. Disse representerer en sammenfatning av hvilke steg i modelleringssyklusen gruppen som helhet er innom når de løser de enkelte oppgavene. Modelleringsrutene er på slik vis ikke individuelle og kan ikke knyttes til den enkelte elev. Generelt viser modelleringstrutene at elevene er gjennom hele modelleringssyklusen når de løser oppgaver. Unntaket er å finne i gruppe 2 sitt arbeid med oppgave i (Figur 33). Samtidig er det nødvendig å nevne at det kan være tilfeller der gruppen er innom flere steg i modelleringssyklusen enn hva analysen har fanget opp. Elevene kan for eksempel være innom et steg uten å utrykke det hverken muntlig eller skriftlig.

Gruppene sine modelleringsruter og på hvilken måte de viser kompetanse på de ulike stegene i modelleringssyklusen, kan oppsummeres som i Tabell 13, Tabell 14 og Tabell 15 (gruppe 1), samt Tabell 16, Tabell 17 og Tabell 18 (gruppe 2). På oppgave 1 viser gruppe 1 kompetanse på alle stegene i modelleringssyklusen, men de kunne med fordel ha validert resultatene sine noe mer. Gruppe 2 viser ikke kompetanse på steg 6 på denne oppgaven, men viser kompetanse på de andre stegene. På oppgave 2 viser begge gruppene kompetanse på alle stegene. Gruppe 1 viser imidlertid manglende kompetanse spesielt på steg 2 og 6, men også på steg 3. Den andre gruppen mangler å vise noe kompetanse på steg 6 og litt på steg 2. På oppgave 3 viser gruppe 1 god kompetanse på alle steg, men mangler litt på steg 2. Det samme gjør gruppe 2, i tillegg til å mangle litt på steg 6 i modelleringssyklusen.

Generelt indikerer analysen at gruppe 1 viser god kompetanse på steg 1, 4 og 5 på alle oppgavene, mens gruppe 2 viser god kompetanse på steg 1, 3, 4 og 5 på alle oppgavene. At elevene ikke sliter med det første steget i modelleringssyklusen, står i motsetning til funn fra Blum og Ferri (2009). Blum og Ferri (2009) fant imidlertid også at steg 2 og steg 6 i modelleringssyklusen ser ut til å være spesielt utfordrende for elever. Dette samstemmer med funn i denne studien. Samtidig er gruppene i denne studien innom både steg 2 og steg 6 ved flere anledninger og klarer å vise noe kompetanse også her. De sliter derimot med å hensiktsmessig validere resultatene sine ved flere tilfeller, samt å gjøre egne antakelser og ta hensyn til mange faktorer. På oppgave 2 tar de kun hensyn til kostand frem og tilbake. Dette er det som Blum & Leiß (2006) kaller for en standardmodell. På oppgave 3 tar de derimot hensyn til litt flere faktorer, og diskuterer elementer som ikke bare er realtert til kostnad. I oppgaveløsningen utrykker de frustrasjon over at ikke all informasjon er oppgitt, men i den avlsuttende samtalen i intervjuet påpeker enkelte av elevene at de synes spesielt dette aspektet var morsomt. Elevene utrykkte dessuten også at de ikke hadde erfaring med slike oppgaver med manglende informasjon. Dette samsvarer med funn til blant annet Blum og Ferri (2009), samt Jankvit og Niss (2020)

Analysen og modelleringsrutene viser også at gruppene bruker mye tid på steg 2 i modelleringssyklusen. Dette gjelder spesielt på oppgave 3, hvor begge gruppene bruker omtrent halvparten av tiden på dette steget. I arbeid med oppgave 2 kommer det også frem lignende tendenser. Forklaringen til dette kan ligge i elevenes manglende erfaring på dette steget, samt deres mangel på ekstra-matematisk kunnskap. Samtidig er dette tendenser som også trekkes frem i flere studier, og som blir vektlagt i argumentasjonene til hvorfor elevene bør jobbe med atomistiske oppgaver i undervisningen. Blomhøj og Jensen (2003) påpeker at resultatet av en full modelleringsprosess ofte et at mye av tiden blir brukt på de første stegne i modelleringssyklusen, og lite tid blir brukt på steg 3, matematisere, og steg 4, jobbe med matematikk. Slike tendenser kan slik identifiseres i denne studien.

5.2.2 Gruppens modelleringskompetanse

Modelleringskompetanse handler om evne til å konstruere modeller ved å utføre steg i modelleringssyklusen på en hensiktsmessig måte. Det handler også om evne til å kritisk analysere og sammenligne modeller (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Niss, 2020; Borromeo Ferri, 2018; Niss et al., 2007; Niss & Højgaard, 2019). Kritisk analyse og sammenligninger av modeller er komponenter som kan inngå i steg 6, validere, i modelleringssyklusen. Gruppens modelleringskompetanse kan dermed ses på i sammenheng med deres modelleringsruter og hvordan de viste kompetanse på de enkelte stegene. Det er imidlertid nødvendig å påpeke at det her er snakk om gruppens modelleringskompetanse, ikke den enkelte elev, da disse kan avvike fra hverandre. Den enkelte elev kan eksempelvis inneha en bedre modelleringskompetanse enn det gruppen viser, eller motsatt. Videre kan det også være at gruppen eller elevene har mer modelleringskompetanse enn det som fremkommer i intervjuet. I den forbindelse er gruppedynamikken avgjørende. I begge gruppene er det enkelte elever som styrer mye av løsningsprosessen. I gruppe 1 er Berit mest fremtredende, mens i gruppe 2 styrer Dina mye av dialogen.

Generelt viser gruppene at de innehar relativt god modelleringskompetanse. Dette kan begrunnes ut fra at de er innom alle stegene i modelleringssyklusen i oppgaveløsningen, samt at de viser kompetanse på alle stegene. Samtidig viser gruppene, som nevnt, noe manglende kompetanse på steg 2 og steg 6 i modelleringssyklusen. Det hadde dermed vært rom for at de kunne vist enda bedre modelleringskompetanse dersom de hadde jobbet hensiktsmessig innenfor også disse stegene.

Når det gjelder steg 2, synes elevenes mangel på ekstra-matematisk kunnskap å være utslagsgivende, både med tanke på hvor mye tid de bruker på steget, men også kompetansen de viser. Samme faktor belyses også av Borromeo Ferri (2006). Dette gir opphav til spørsmålet om hvor mye en skal vektlegge den ekstra-matematisk kunnskapen i en evaluering av elevenes modelleringskompetanse. Er det slik at mangel på ekstra-matematisk kunnskap tilsvarer manglende modelleringskompetanse eller handler modelleringskompetanse om å anvende den ekstra-matematiske kunnskapen en allerede har? I utgangspunktet handler modelleringskompetanse om sistnevnte.

5.2.3 Bruk av digitale verktøy

Begge gruppene benytter seg av digitale verktøy i arbeid med oppgave 2 og 3. På den måten aktiveres deres hjelpemiddelkompetanse når de jobber med modellering, slik som ofte er tilfellet (Blum & Niss, 2020; Niss & Højgaard, 2019). Gruppenes modelleringsprosess i lys av digitale verktøy kan ses i sammenheng med Greefrath (2011) sin utvidelse av modelleringssyklusen (Figur 5). Gruppene bruker mest tid på å undersøke, men på oppgave 2 er de også innom eksperimentere og visualisere.

Generelt viser elevene ganske god kompetanse i bruk av digitale verktøy. Analysen i denne studien viser også at bruk av digitale verktøy minimerer behovet for ekstra-matematisk kunnskap. Elevene kan søke opp ting de ikke vet på internett, og på den måten slippe å gjøre egne anslag og antakelser. Bruk av digitale verktøy fører dermed til at elevene ikke blir utfordret på samme måte, sammenlignet med hva de hadde gjort dersom de ikke hadde hatt disse hjelpemidlene tilgjengelige. Dette gjelder spesielt når de jobber innenfor steg 2 i modelleringssyklusen. Det kan slik settes spørsmålstegn til hvorvidt elevene hadde klart å vise kompetanse på dette steget dersom de ikke hadde hatt digitale hjelpemidler tilgjengelig. Bruk av internett er kanskje avgjørende for at de klarer å løse oppgavene, og på den måten viser mer modelleringskompetanse enn hvis de ikke hadde brukt PC? Videre indikerer analysen at når elevene undersøker på internett er de opptatt av å finne nøyaktige verdier og de gjør på den måten mindre egne forenklinger.

5.3 SAMMENHENGER OG FORSKJELLER MELLOM LÆRER OG ELEVER

Analyse fra lærerintervjuene og elevintervjuene ga grunnlag for en sammenligning mellom elevgruppene og deres lærer. Denne sammenligningen ble presentert i kapittel 4.3. I dette kapittelet vil jeg sammenfatte og diskutere dette videre. Generelt viser resultatene at det er en sammenheng mellom hva læreren uttaler om modellering, modelleringskompetanse, vurdering og undervisning, og hva deres elever viser når de løser oppgaver. Dette er ikke særlig overraskende. Videre er det samtidig identifisert noen merkbare forskjeller.

Det er noen synlige sammenhenger mellom lærerne og elevgruppene. Begge lærerne fokuserer blant annet på steg 1, 4, 5 og 6 i modelleringssyklusen i undervisning av modellering og vurdering av modelleringskompetanse. Både steg 1, 4 og 5 er steg som elevene generelt viser god kompetanse i. I tillegg viser elevene også kompetanse på steg 3 i modelleringssyklusen, og dette er noe begge lærerne knytter til sin forståelse av modelleringskompetanse. I tillegg vektlegges ikke steg 2 i modelleringssyklusen av lærerne, hverken i deres forståelse av modelleringskompetanse, i undervisning eller vurdering. Dette er også et steg som elevene viser manglende kompetanse i ved flere anledninger. Videre vektlegger lærerne bruk av GeoGebra, og elevene velger å ta i bruk GeoGebra på oppgave 2. At det er en sammenheng mellom lærerens kunnskap og forståelse, og elevenes forståelse og prestasjoner, er ikke noe nytt. Dette nevnes av Shulman (1986), og var også den sentrale konklusjonen i både COACTIV og TEDS (Blömeke & Kaiser, 2014; Borromeo Ferri, 2018; Kunter & Baumert, 2013). Dette understreker den viktige betydningen av at lærerne har god kunnskap og dyp forståelse av modellering når de skal undervise elevene i tema.

Samtidig er det også mulig å identifisere noen forskjeller. For selv om lærerne sier eksplisitt at de vektlegger steg 6 i modelleringssyklusen, viser elevene manglende kompetanse her. Motsatt tilfelle kan muligens påvises når det gjelder steg 2 i modelleringssyklusen. Lærerne vektlegger ikke steg 2 når de snakker om modelleringskompetanse, undervisning og vurdering. På dette steget viser elevene som sagt manglende kompetanse enkelte steder, men de viser likevel noe kompetanse her, da de klarer å finne relevant informasjon og gjøre noen antakelser. Dette kan tyde på at elevene kan inneha kompetanse innenfor enkelte steg i modelleringssyklusen, selv om lærerne ikke vektlegger dem. Det forsås dermed at læreren alene ikke har innvirkning på elevenes kompetanse. Elevene er en del av et større sosialt samspill enn bare lærer-elev samspillet. Deres utvikling av modelleringskompetanse skjer også i samspill med elever, venner, familie eller andre, og har en sammenheng med kontekstene de til enhver tid befinner seg i.

Et annet tilfelle som belyser forskjeller mellom lærerne og deres elever, er i refleksjon og arbeid rundt «Fylle drivstoff». Generelt ser det ut til at lærerne har mindre tro til elevene enn hva elevene faktisk viser. Begge lærerne tror elevene kommer til å slite på oppgaven, og uttaler at det ikke er sikkert at elevene kommer frem til en løsning. Lærer 2 sier at mange av hennes elever trolig bare ville multiplisere tallene i oppgaven uten å ta hensyn til noe annet. Denne løsningen kalles av Blum og Leiß (2006) for en tradisjonell løsning. I sin studie fant de at mange elever løste oppgaven på denne måten. Gruppen til lærer 2 tar imidlertid hensyn til bensinforbruk, og nevner dessuten også andre faktorer. Samtidig sier lærer 2 senere i sine refleksjoner at elevene hennes er flinke til å diskutere og kunne kommet frem til et svar hvis de diskuterte seg imellom. Lærer 3 sier også at noen elever, dog et fåtall, kanskje kunne kommet frem til en fornuftig løsning.

Det er også verdt å nevne at det kommer til syne forskjeller mellom gruppene. For det første har de ganske ulike modelleringsruter og viser kompetanse på de ulike stegene i ulik grad. Gruppe 2 viser generelt litt bedre kompetanse enn gruppe 1 på steg 2 og 3 i modelleringssyklusen. Det ser også ut til at gruppe 2 innehar litt mer ekstra-matematisk kunnskap og litt bedre forståelse av sammenhengen med den virkelige verden, ettersom de velger rimelige verdier i sine antakelser. Dette kan ha sammenheng med at lærer 3 sier at han spesielt vektlegger å knytte modellering opp mot reelle kontekster, mens dette ikke vektlegges særlig av lærer 2. I tillegg går gruppe 1 fortere i gang med GeoGebra enn gruppe 2 på oppgave 2. Gruppe 1 ser helt i starten av oppgaveløsningen at de kan bruke GeoGebra, mens gruppe 2 ikke innser dette før mer mot slutten. Dette kan tyde på at lærer 2 muligens vektlegger bruk av GeoGebra i større grad enn hva lærer 3 gjør. Utsagnene fra lærerne i intervjuene kan indikere dette.

6 KONKLUSJON OG IMPLIKASJONER

I denne studien har jeg undersøkt matematisk modellering i 1P, et fellesfag i første klasse på videregående skole. Jeg har utforsket både lærere og elever, og sett på tre læreres forståelse og seks elevers modelleringskompetanse. I dette avsluttende kapittelet vil jeg først i kapittel 6.1 oppsummere og gi et svar på forskningsspørsmålene mine. Deretter, i kapittel 6.2, vil jeg reflektere over denne studiens begrensinger, før jeg i kapittel 6.3 presenterer dette arbeidets mulige implikasjoner for undervisning og forskning. Til slutt skal jeg i kapittel 6.4 kort reflektere over mitt eget utbytte av denne studien.

6.1 BESVARELSE AV FORSKNINGSSPØRSMÅL

Formålet og fokuset til denne studien har vært å besvare følgende tre forskningsspørsmål:

I. *Hvordan forstår lærere i 1P modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger de i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?*

II. *På hvilken måte viser elevgrupper i 1P modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?*

III. *Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom gruppens modelleringsprosess og deres lærers uttalelser relatert til modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering?*

6.1.1 Læreres forståelse

Slik det fremkommer i intervjuene, forstår lærerne modellering som en prosess bestående av flere elementer, samt en aktivitet som har sammenheng med virkeligheten. Ingen av lærerne beskriver imidlertid modellering som en syklisk prosess og forklarer bare enkelte av stegene i modelleringssyklusen. Dessuten er lærerne også noe usikre på om på modellering er å anse som relevant for alle elevenes hverdagsliv. Spesielt lærer 1, men også lærer 2, ser videre ut til å forstå modellering i lys av steg 3, matematisere, og steg 6, validere, selv om de også nyanserer dette noe senere i intervjuene. Lærerne knytter i tillegg sin forståelse av modellering til funksjoner og regresjon, men lærer 3 sier eksplisitt at modellering ikke utelukkende handler om dette.

Lærernes forståelse av modelleringskompetanse er nært relatert til deres forståelse av modellering. De anser modelleringskompetanse for å være sammensatt av flere delkompetanser, men knytter den ikke nødvendigvis til alle stegene i modelleringssyklusen. Kompetanse i steg 3, matematisere, og steg 6, validere, er spesielt viktig for lærer 1, men også lærer 2. Sammenlignet med sine kolleger, forstår lærer 3 modelleringskompetanse i lys av flere steg i modelleringssyklusen. Alle lærerne uttaler samtidig at de anser det som viktig at elevene forstår oppgaven og kommer i gang, og legger slik vekt på steg 1, konstruere, i modelleringssyklusen. Ingen av lærerne nevner imidlertid kompetanser relatert til steg 2, forenkle/strukturere, i uttalelser om modelleringskompetanse.

I vurdering av modelleringskompetanse vektlegger lærerne spesielt elevenes kompetanse i steg 4, steg 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen. De legger også vekt på elevenes kompetanse i funksjoner og regresjon, samt deres ferdigheter i GeoGebra. Dette kommer blant annet frem ved at alle lærerne uttaler at de gjennomførte en skriftlig vurdering som inneholdt lukkede oppgaver som primært la til rette for kompetanse innenfor disse områdene.

I undervisningen vier lærerne mye tid til funksjoner, regresjon og GeoGebra. Deres undervisning om modellering sees som en utvidelse av temaet funksjoner, og lærerne forteller at de gjennomgår fremgangsmåte for regresjonsanalyse i GeoGebra steg for steg. Dette har sammenheng med lærerbokens og eksamens vektlegging. Lærerne uttaler også at de bruker mye tid på å jobbe med oppgaver i undervisningen, og vektlegger samarbeid mellom elevene. Oppgavene de velger å bruke i undervisningen er lukkede oppgaver som fokuserer på bruk av GeoGebra, samt steg 4, 5 og deler av steg 6 i modelleringssyklusen.

6.1.2 Elevgruppenes modelleringskompetanse

Elevene i denne studien viser modelleringskompetanse ved å løse de tre modelleringsoppgavene de får i det oppgavebaserte gruppeintervjuet. Deres modelleringskompetanse kan ses i sammenheng med deres modelleringsrute, og på hvilken måte de viser kompetanse på de enkelte stegene i modelleringssyklusen. Generelt viser de kompetanse på alle steg i modelleringssyklusen, og gjennom alle oppgavene viser de først og fremst god kompetanse på steg 1, 4 og 5. Elevgruppene viser enkelte steder manglende kompetanse, spesielt innenfor steg 2 og 6 i modelleringssyklusen. Gruppene kunne slik vist mer kompetanse dersom de i større grad hadde tatt hensyn til flere faktorer og foretatt egne antakelser og forenklinger, samt validert sin modell og sine resultater i større grad.

Begge gruppene løser oppgavene ved å samarbeide, diskutere og ta i bruk digitale verktøy. De bruker internett til å søke opp informasjon på oppgave 2 og 3, og på oppgave 2 bruker de GeoGebra når de jobber med matematikk. De bruker mye tid på å søke på internett og derfor mest tid på steg 2 i modelleringssyklusen.

6.1.3 Sammenhenger og forskjeller mellom lærer og elever

I resultatene kommer det til syne både sammenhenger og forskjeller mellom hva lærerne uttaler om modellering, modelleringskompetanse, undervisning og vurdering, og hva deres elever viser når de løser modelleringsoppgaver. Begge lærerne fokuserer på steg 1, 3, 4, 5 og deler av steg 6 modelleringssyklusen, og legger ikke særlig vekt på steg 2 i modelleringssyklusen. En sammenheng kan da identifiseres ved at elevene generelt viser relativt god kompetanse på steg 1, 4 og 5 når de løser alle oppgavene, samt manglende kompetanse på steg 2 enkelte steder. Videre legger lærerne vekt på bruk av GeoGebra i undervisning og vurdering, og elevene tar i bruk dette verktøyet på oppgave 2. Samtidig er det en forskjell ved at elevene viser manglende kompetanse på steg 6 i modelleringssyklusen, selv om lærerne eksplisitt uttaler at de vektlegger vurdering av modellen. I tillegg viser elevene noe kompetanse på steg 2 i modelleringssyklusen, til tross for lærerne manglende vektlegging av dette steget. Ytterligere forskjeller kommer til syne i lærernes refleksjoner rundt «Fylle drivstoff». Lærernes skepsis til elevenes prestasjoner på oppgaven stemmer ikke overens med elevenes faktiske evne til å løse den.

Forskjeller mellom gruppene kan også avdekkes. Gruppe 2 viser generelt bedre kompetanse på steg 2 og steg 3 i modelleringssyklusen og bedre forståelse av den virkelige verden. Dette kan ha sammenheng med at lærer 3 i større grad sier han vektlegger å knytte modellering opp mot reelle kontekster, sammenlignet med lærer 2. I tillegg er gruppe 1 raskere i gang med GeoGebra, noe som muligens har sammenheng med lærernes prioriteringer av dette verktøyet i undervisningen. Uttalelser indikerer at lærer 2 legger mer vekt bruk av GeoGebra, enn hva lærer 3 gjør.

6.2 STUDIETS BEGRENSNINGER

Denne studien er en kvalitativ casestudie som tar for seg totalt ni deltakere, da tre lærere og seks elever i matematikk 1P ved en videregående skole. Dette er relativt få deltakere, og mine funn kan dermed ikke nødvendigvis overføres til andre lærere eller elever i 1P. Studiens ytre validitet er slik begrenset. Jeg kunne med fordel inkludert flere deltakere fra flere skoler, og på den måten kunne deltakerne vært representative for en større del av lærere og elever i matematikk 1P. Funnene i studien kan imidlertid bidra til økt kunnskap og innsikt i emne, ettersom de er forankret i teorier og samstemmer med tidligere forskning. Dessuten kan ikke den aktuelle skolen sies å være nevneverdig spesiell sammenlignet med andre videregående skoler i Norge.

Mine valg relatert til dette prosjektets teoretiske rammeverk, kan også relateres til begrensinger i denne studien. Matematisk modellering er ikke entydig definert innenfor matematikkdidaktikken, og det er derfor ikke gitt at slik det fremstilles i denne studien er den eneste korrekte måten. Jeg har selv valgt forskning og hvilke definisjoner som skulle danne utgangspunktet for analysen min. Samtidig har også min tolkning av det teoretiske rammeverket lagt grunnlag for analyseverktøyene i denne studien. Slik er det flere subjektive aspekter som kan anses som begrensinger, selv om disse har blitt forsøkt tatt hensyn til og minimert.

I etterpåklokskapens navn er det også enkelte elementer ved metoden som med fordel kunne vært gjort annerledes. I utarbeidelse av intervjuguide til lærerne tok jeg utgangspunkt i Berget (2023) sin intervjuguide og gjorde enkelte justeringer. Jeg kunne med fordel gjort enda flere justeringer og dannet en intervjuguide som var kortere, mer konkret og mer spisset inn mot mine forskningsspørsmål. Når det kommer til gjennomføring av intervjuet, for å oppnå et bedre bilde av lærernes forståelse, burde jeg ha oppfordret dem til å gi mer utfyllende forklaringer på flere av deres uttalelser. Selv om dette ble gjort ved noen anledninger, kunne det med fordel vært gjentatt hyppigere.

Når det gjelder elevintervjuene kan det også settes spørsmålstegn til valg av oppgaver. Det kan tenkes at oppgavene hadde et for enkelt matematisk innhold, og at elevene dermed ikke ble testet tilfredsstillende nok på alle stegene i modelleringssyklusen. Samtidig var det et poeng at elevene skulle få mulighet til å gå gjennom alle stegene, uten å sitte fast grunnet for vanskelig matematikk. Oppgaven «Fylle drivstoff» ble valgt fordi den har blitt godt utprøvd tidligere. Det er imidlertid en oppgave fra 2006, og kunne med fordel vært modernisert litt, da mange elever har mer kjennskap til el-biler. Videre kan det settes spørsmålstegn til min oversettelse av oppgaven. «Is it worthwhile» ble oversatt til «lønner det seg», men en bedre oversettelse kunne muligens vært «er det verdt det». Min oversettelse kan i større grad ha ledet elevene til å kun ta hensyn til kostnad i deres modell. Videre fikk elevene i løsningsprosessen lov til å ta i bruk digitale verktøy, og dermed mulighet til å søke på internett. Dette stjal mye av tiden, og det kan ha hindret elevene i å vise kompetanse i å gjøre egne antakelser og forenklinger.

6.3 IMPLIKASJONER

Dette kapittelet utforsker implikasjonene av funn fra denne studien, både relatert til undervisning og videre forskning. Implikasjoner for undervisning handler om hvordan funn fra studien kan gi innsikt til hvordan undervisning av modellering bør utformes og gjennomføres. Implikasjoner for forskning retter oppmerksomheten mot de åpne dørene for fremtidig forskning som studienes funn muligens kan ha avdekket.

6.3.1 Implikasjoner for undervisning

Selv om funnene i denne studien ikke kan generaliseres, kan de likevel gi noen implikasjoner for undervisning innen matematisk modellering. Generelt viser denne studien at en begrenset forståelse av modellering fra lærens side kan by på utfordringer til utvikling av en helhetlig modelleringskompetanse hos elever. Dette samsvarer med tidligere forskning. Å styrke lærernes forståelse av modellering som en syklisk prosess, samt legge vekt på alle stegene i modelleringssyklusen i undervisning, er faktorer som muligens bør vektlegges for å kunne levere en kvalitetsundervisning i matematisk modellering. Det kan i tillegg være spesielt hensiktsmessig å fokusere på steg 2, forenkle/strukturere, og steg 6, validere, i undervisningen. Dessuten kan funn fra studien brukes til å bevisstgjøre lærere på innvirkningen deres forståelse har på elevene, og inspirere til ønske om å utvikle egen kompetanse i matematisk modellering.

Funn fra denne studien indikerer at elevene har lite erfaringer med åpne oppgaver som legger til rette for alle stegene i modelleringssyklusen. Dette støttes også av tidligere empiriske studier. Oppgaver brukt i elevintervjuene kan slik fremstå som eksempler på oppgaver som kan benyttes relatert til denne utfordringen. Studien impliserer i tillegg at en hensiktsmessig tilnærming for å engasjere elevene i åpne modelleringsoppgaver, er å oppmuntre til samarbeid og diskusjon i grupper. Samtidig viser elevenes modelleringsprosess at bruk av digitale verktøy kan være viktige hjelpemidler i modelleringsprosessen, men det er også verktøy som kan stjele mye tid. I undervisning kan det dermed være hensiktsmessig å ha et bevisst og konstruktivt forhold til bruken av disse verktøyene.

Funn fra denne studien viser videre at eksamen styrer mye av hvordan vurdering av modelleringskompetanse, samt undervisningen i matematisk modellering, foregår. Dette støttes også av tidligere forskning. Et tiltak for at undervingen og vurderingen skal gjenspeile modelleringens mangfoldige natur, kan dermed være å endre eksamensformen. En slik endring er allerede i gang, da det i 2024 skal prøves ut langtidsoppgaver, blant annet i matematikk 1P-Y, som et alternativ eller supplement til dagens eksamensform (Utdanningsdirektoratet, 2023). Dette tror jeg er et viktig skritt i riktig retning.

6.3.2 Implikasjoner for videre forskning

Funn fra denne studien har gitt meg en økt interesse for å undersøke ytterligere aspekter relatert til læreres forståelse og elevers modelleringskompetanse. For det første hadde det vært interessant å undersøke flere lærere og elever i matematikk 1P, og på den måten i større grad kunne generalisere resultater og konklusjoner. Videre ville det også vært interessant å gjennomføre observasjon av lærernes undervisningsøkter eller prøve ut et undervisningsopplegg i modellering forankret i forskning. For det andre har mine funn rettet min oppmerksomhet mot enda flere spørsmål, som for eksempel: «hvilke faktorer påvirker læreres forståelse av matematisk modellering?». Det hadde vært spennende å utforske dette ved å blant annet se på lærerbokens rolle eller betydningen av innholdet i læreres utdanning. For det tredje kunne det også vært interessant å undersøke andre lærere eller elever i andre matematikkfag for å få bedre innsikt i matematisk modellering i den norske skolen.

6.4 EGET UTBYTTE

Det har vært utrolig lærerikt å arbeide med denne masteroppgaven, og jeg sitter igjen med mye ny kunnskap og erfaring som er relevant for min videre lærerpraksis. Jeg har blant annet fått en dypere forståelse av matematisk modellering som tema og fått innsikt i hvordan jeg kan undervise modellering for mine elever på en hensiktsmessig måte. På den måten føler jeg dette arbeidet har gitt meg den kompetansen og tryggheten jeg trenger for å implementere modellering i undervisningen. Dette ser jeg på som en stor fordel ettersom modellering nå er en del av kjerneelementene i læreplanen. Videre har jeg blitt inspirert til å jobbe enda mer med modellering i min undervisningspraksis, og sett verdien av å vektlegge virkelige og reelle kontekster i undervisningen. Dessuten har jeg også fått en smakebit på hvilke ideer og synspunkter til modellering som finnes blant lærere, og da hva jeg kan møte av holdninger på arbeidsplassen. Jeg har i tillegg fått bedre innsyn i hvordan elever jobber med modelleringsoppgaver, samt hvordan jeg kan utvikle slike oppgaver.

LITTERATURLISTE

Afram, O. O. (2021). *Mathematical Modelling Tasks.* (Upubiliset dokument).

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 38*, 293-301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Bell, J., & Waters, S. (2014). *Doing Your Research Project: A Guide for First-time Researchers* (6. utg.). Open University Press.

Berget, I. K. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education, 27*(1), 52-70.

Berget, I. K. (2023). Mathematical modelling in the discourses of the KOM and PISA frameworks and teacher interviews. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2165536

Berget, I. K., & Bolstad, O. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis, 13*(1), 83–97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1), 149–171. https://doi.org/10.1023/

Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (s. 15-30). Springer.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I S. J. Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73-96). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiß, D. (2006). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. I M. Bosch (Red.), *CERME 4– Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1623-1633). FUNDEMI IQS–Universitat Sant Feliu de Guíxois.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 222-231). Horwood Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W., & Niss, M. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling.* Routledge.

Blum, W., & Pollak, H. (2018). Foreword. I R. Borromeo Ferri (Red.), *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education* (s. vii-viii). Springer.

Blömeke, S., & Kaiser, G. (2014). Theoretical Framework, Study Design and Main Results of TEDS-M. I S. Blömeke, F. Hsieh, G. Kaiser, & W. H. Schmidt (Red.), *International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn* (s. 19-47). Springer.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1P* (4. utg.). Aschehoug & Co.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik (ZDM), 38*(2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. *Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications*, 2080-2089.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach matematical modelling in school and teacher education.* Springer.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education – experiences from a modelling seminar. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Red.), *Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2046-2055).

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Dialog, samspel og læring.* Abstrakt forlag.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assesment: A literature review. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 413-438.

Galbraith, P. (2012). Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(5), 3-16.

Gjøvik, Ø. (2019). *Matematisk modellering og IKT [Foredrag].* Novemberkonferansen, Trondheim. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Novemberkonferansen/Modellering%20og%20IKT%20-%20Novemberkonferansen.pdf

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (s. 301-304). Springer.

Hankeln, C., Adamek, C., & Greefrath, G. (2019). Assessing sub-competencies of mathematical modelling—development of a new test instrument. I G. A. Stillman, & J. P. Brown (Red.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (s. 143-160). Springer.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 2P.* Aschehoug & Co.

Imsen, G. (2020). *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (6. utg.). Universitetsforlaget.

Jacobsen, D. I. (2021). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?: Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (3. utg.). Cappelen Damm.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 467-496. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530

Julie, C. (2002). Making relevance relevant in mathematics teacher education. I *In Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics* (s. 1-8). Wiley.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik (ZDM), 38*(3), 302-310.

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet. (1994). *Læreplan for matematikk.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for videregående opplæring R94. https://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/felles-allmenne-fag/5/lareplan_matematikk.rtf

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record, 108*(6), 1017-1054.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Kongleif, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder. http://hdl.handle.net/11250/2616700

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 praktisk (matematikk P) (MAT08-01).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat08-01

Kunter, M., & Baumert, J. (2013). The COACTIV Research Program on Teachers' Professional Competence: Summary and Discussion. I M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Naubrand (Red.), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers* (s. 345-368). Springer.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Maher, C. A., & Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. Encyclopedia of mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 821-824). Springer.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (s. 63-78). Horwood Publishing.

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (s. 3-32). Springer.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), 1-23.

Stillman, G. A., Blum, W., & Kaiser, G. (2017). Crossing Boundaries in Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice. I G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Red.), *Mathematical Modelling and Applications* (s. 1-23). Springer.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv.* Cappelen Akademisk Forlag.

Taber, K. S. (2020). Mediated learning leading development—The social development theory of Lev Vygotsky. I B. Akpan, & T. J. Kennedy (Red.), *Science education in theory and practice: An introductory guide to learning theory* (s. 277-291). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43620-9_19

Utdanningsdirektoratet. (2019, november 18). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2023, September 13). *Utprøving av langtidsoppgave som alternativ eller supplement til eksamen*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/utproving-av-langtidsoppgave-som-alternativ-eller-supplement-til-eksamen/

Vos, P. (2011). What is 'authentic' in the teaching and learning of mathematical modelling? I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Red.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling* (s. 713-722). Springer.

Vos, P., & Frejd, P. (2022, Februar). The modelling cycle as analytic research tool and how it can be enriched beyond the cognitive dimension. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Wess, R., Klock, H., Siller, H., & Greefrath, G. (2021). *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling: A Test Instrument.* Springer.
Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331-364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157
Ärlebäck, J. B., & Bergsten, C. (2010). On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. I R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Red.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (s. 597-609). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_5

LISTE OVER FIGURER OG TABELLER

Figurer

Tabeller

VEDLEGG

VEDLEGG 1: GODKJENNESLE FRA SIKT

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer

871004

Vurderingstype

Automatisk

Dato

13.02.2023

Tittel

Modellering i matematikk 1P

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig

Pauline Vos

Student

Karoline Engestøl

Prosjektperiode

09.01.2023 - 31.12.2023

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Grunnlag for automatisk vurdering

Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
    - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
    - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
    - Fagforeningsmedlemskap
    - Genetiske data
    - Biometriske data for å entydig identifisere et individ
    - Helseopplysninger
    - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)
- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)
- Hvor lenge personopplysningene vil bli behandlet
- Retten til å trekke samtykket tilbake og øvrige rettigheter

Informasjonssikkerhet

Du må behandle personopplysningene i tråd med retningslinjene for informasjonssikkerhet og lagringsguider ved behandlingsansvarlig institusjon. Institusjonen er ansvarlig for at vilkårene for personvernforordningen artikkel 5.1. d) riktighet, 5. 1. f) integritet og konfidensialitet, og 32 sikkerhet er oppfylt

VEDLEGG 2: INTERVJUGUIDE LÆRERE

Intervjuguide - individuelt intervju lærere

Før intervjuet starter:

- Informere om formålet med intervjuet og masteroppgave
- Anonymitet og retten til å trekke seg
- Lydopptak og lagring
- Er det noe intervjuobjektet lurer på?

---

1 Bakgrunn

1.1 Hva slags matematikkutdanning har du?
   a. Lærerutdanning? Annen utdanning?

1.2 I hvor mange år har du undervist matematikk? Og IP?

1.3 Hva lærte du om modellering i egen høyere utdanning?

1.4 Kan du huske å ha jobbet med modellering som elev på grunnskolen/videregående?
   a. Eksempler?

---

2 Faget 1P

2.1 Hva mener du er forskjellen mellom matematikk 1P og andre matematikkfag?
   a. Hva vektlegges, hva undervises?

2.2 Hva er mest utfordrende med å undervise 1P, slik du ser det?

2.3 Hva tror du elevene synes er mest utfordrende?
   a. Spesielle matematikk-tema? Større, mer overordnede utfordringer?
   b. Hvorfor?

2.4 Hva legger du i praktisk matematikk?

2.5 Hva er målet i faget 1P?
   a. Hvorfor?
   b. Omformulert: Hva mener *du* er målet i IP?
   c. Eventuelt: Hva *bør* være målet?

---

3 Undervisning av modellering

3.1 Hvilken lærerbok bruker dere?
   a. Hvorfor?

b. Hva tenker du om boka, og hvordan den vektlegger modellering?

3.2 På hvilken måte inkluderer du modellering i undervisningen? Når? Bare når dere har kapittelet?

3.3 Underviser du overordnet hva modellering er? Hva vektlegger du da? Fra boka eller ikke?

3.4 Hvordan valgte du å legge opp undervisningen av kapittelet «modellering»?
a. Undervisningsplan,
b. Bruk av eksempler? Hvilke? Fulgte boka?
c. Tavleundervisning/oppgaveløsning individuelt/grupper?

3.5 Hva bruker elevene mest tid på når de jobber med modellering?
a. Type oppgaver? Gruppejobbing/individuelt
b. Tverrfaglig? Erfaring med det?
c. Over lengre perioder?

3.6 Hva mener du er det viktigste for elevene å lære når de har om modellering?
a. Hvorfor?

3.7 Hva er utfordrende for elevene når de gjelder modellering?

---

4 Definisjonen av modellering

4.1 Vil du si at matematisk modellering er en fundamental prosess i faget 1P?

4.2 Hva har påvirket din forståelse av hva modellering er?

4.3 Hvordan skiller modellering seg ut fra andre tema i matematikk? På hvilken måte?

4.4 Hva skal til for at noe kan kalles modellering?

4.5 Hva er det viktigste i en modelleringsprosess?

4.6 Er det noen sammenheng mellom problemløsningsoppgaver og modelleringsoppgaver, slik du ser det?

---

5 Modelleringskompetanse

5.1 Er modelleringskompetanse en viktig del av å kunne matematikk?

5.2 På hvilken måte vurderer du elevene sin kompetanse i modellering?
a. Eksempler på hva som utviser en god modelleringskompetanse.

b. Hva vektlegger du?

5.3 På hvilken måte vurderer du elevene sin matematiske kompetanse?

---

6 Om spesifikke oppgaver

6.1 Hvilken eller hvilke av disse oppgavene er modelleringsoppgaver?

6.2 Kommenter forskjeller. Hvilken av disse legger mest til rette for at elevene kan vise modelleringskompetanse?

6.3 Hvilke av disse ville du helst brukt i en vurdering av elevenes modelleringskompetanse?
   a. Hvordan skulle elevene svart for å vise lav, middels, høy modelleringskompetanse?
   b. Hva hadde du lagt mest vekt på?

6.4 Oppgave 4: hva slags kompetanser trenger elevene for å løse denne oppgaven?

Oppgave 1

En bedrift har undersøkt sammenhengen mellom produksjonskostnader og antall produserte og solgte enheter. Tabellen nedenfor viser resultatet. Vi lar produksjonskostnadene være K(x) kroner ved produksjon av x enheter.

x	*36*	*57*	*100*	*150*
K(x)	*7200*	*10 000*	*22 000*	*47 000*

a) Bruk regresjon til å finne en andregradsmodell for produksjonskostnadene.
b) Bruk modellen til å anslå kostnadene ved produksjon av 80 enheter og ved produksjon av 200 enheter.
c) Hvilket av resultatene i oppgave b bør du ha størst tillit til? Forklar.

Oppgave 2

Ved produksjon og salg av x enheter av en vare, er overskuddet i kroner gitt ved

$$O(x) = -0{,}005x^3 + x^2 + 14x - 3000, \qquad der\ x \in \langle 0, 250\rangle$$

a) Bestem O(50).
Hva forteller svaret?

b) Hva er det største mulige overskuddet?
Hvor mange enheter må produseres for å oppnå dette?

c) Finn nullpunktene til f.
Hva forteller de?

Oppgave 3

Hvor langt kan man gå i løpet av et år?

Oppgave 4

Cecilie bor på Hånes. For å fylle drivstoff på hennes VW golf kjører hun til YX Lillesand. Der betaler hun i gjennomsnitt 19 kr per liter, men på Hånes må hun betale 21,50 kr per liter.

Lønner det seg for Cecilie å fylle drivstoff i Lillesand?
Begrunn svaret

VEDLEGG 3: INTERVJUGUIDE ELEVER

Intervjuguide - Oppgavebasert gruppeintervju av elever

1. Innledning

- Informere om formålet med intervjuet og masteroppgave, anonymitet og retten til å trekke seg, lydopptak og lagring
- Er det noe dere lurer på?
- Ønskelig med åpen diskusjon rundt oppgavene med minst mulig innblanding fra meg.
    - Prøv å forklar hva dere tenker når dere løser oppgavene og legg vekt på et godt samarbeid.
    - Jeg skal ikke vurdere dere i matematikk, kun prøve å forstå hvordan de tenker på oppgavene.
    - Det er meningen at dere skal bruke minst tid på den første oppgaven

---

2. Oppgavejobbing

- Mulige hjelpespørsmål til «Reisekostnader»:
    - Hvilken informasjon trengs for å løse oppgaven?

- Mulige hjelpespørsmål til «Fylle drivstoff» og «Hvilken leilighet?»
    - Sjekk om dere har tatt hensyn til alt.
    - Hvor nøyaktig er modellen nå?

---

3. Oppsummering og samtale

- Uformell samtale

- Oppfølgingsspørsmål til noen av oppgavene dersom hensiktsmessig
    - Dere sa …, hva mente dere med det?
    - Dere valgte å gjøre slik, hvorfor det?

- Spørsmål som kan stilles:
    - Hva synes dere? Var det interessant, gøy og kjedelig?
    - Har dere vært borti slike oppgaver før? Ligner de på de dere har hatt i undervisning av for eksempel modellering? Likheter og ulikheter.

---

4. Avslutning

- Et det noe dere vil legge til?
- Tusen takk for at dere ble med

VEDLEGG 4: INFORMASJONSSKRIV LÆRERE

Vil du delta i forskningsprosjektet «Modellering og modelleringskompetanse i 1p»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor vi ønsker å se nærmere på matematisk modellering og modelleringskompetanse i faget 1P. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

LK20 inneholder kjerneelementet «Modellering og anvendelser», som tilsier at modellering skal være en viktig del av undervisningen i alle fag, inkludert matematikk. Som lærer kan det imidlertid være vanskelig å orientere seg rundt begrepene «modellering» og «modelleringskompetanse», samt utfordrende å vite hva som bør vektlegges i undervisning av modellering og utvikling av elevers modelleringskompetanse. Dette prosjektet har som mål å få innsyn i nettopp denne problemstillingen i forhold til faget Matematikk 1p. Prosjektet tar utgangpunkt i følgende forskningsspørsmål:

1) *Hvordan forstår lærere i 1p modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger dem i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?*
2) *På hvilken måte viser elever i 1p modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?*
3) *Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom elevenes modelleringsprosess og deres lærer sin vektlegging og forståelse av modellering og modelleringskompetanse?*

Dette er et masterprosjekt som utføres ved Universitetet i Agder.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder - Fakultetet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Siden du er lærer i faget matematikk 1P blir du spurt om å delta på dette prosjektet. Du og dine andre kolleger som underviser i dette faget blir spurt om å delta.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du blir med på et individuelt intervju. Intervjuet vil vare i omtrent 45 minutter og vil inneholde spørsmål om 1p, modellering og modelleringskompetanse. Det vil bli tatt lydopptak av intervjuene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dette vil heller ikke påvirke din relasjon til arbeidsplass, ledelse eller kolleger.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. ***All data vil anonymiseres***.

- Det er kun masterstudent og veileder som vil ha tilgang til dine opplysninger.
- Tiltak som blir gjort for å sikre at ingen uvedkommende får tilgang til dine personopplysninger inkluderer følgende:
  - Navn og kontaktopplysningene dine vil erstattes med fiktive navn som vil lagres på en egen navneliste adskilt fra øvrige data.
  - Datamaterialet vil lagres på pc med passordbeskyttelse.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes i desember 2023. Etter prosjektslutt vil lydopptak slettes, og datamaterialet med dine personopplysninger vil anonymiseres.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Universitetet i Agder - Fakultetet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Pauline Vos på epost (pauline.vos@uia.no) eller på telefon: 38 14 23 32
- Vårt personvernombud: Trond Hauso på epost(personvernombud@uia.no) eller på telefon: 936 01 625

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Pauline Vos
(Forsker/veileder)

Karoline Engestøl
(Masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *«Matematisk Modellering i 1p»* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i individuelt intervju
- ☐ at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

VEDLEGG 5: INFORMASJONSSKRIV ELEVER

Vil du delta i forskningsprosjektet «Modellering og modelleringskompetanse i 1p»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor målet er å se nærmere på matematisk modellering og modelleringskompetanse i faget 1P. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å besvare følgende spørsmål:

1) Hvordan forstår lærere i 1p modellering og modelleringskompetanse, og hva vektlegger dem i undervisning av modellering og vurdering av elevenes modelleringskompetanse?
2) På hvilken måte viser elever i 1p modelleringskompetanse når de løser matematiske modelleringsoppgaver?
3) Hvilke eventuelle forskjeller eller sammenhenger kommer til syne mellom elevenes modelleringsprosess og deres lærer sin vektlegging og forståelse av modellering og modelleringskompetanse?

Dette er et masterprosjekt som utføres ved Universitetet i Agder

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder - Fakultetet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Etter avtale med ledelsen på skolen og din matematikklærer er du valgt ut til å delta i dette forskningsprosjektet. Flere elever fra din klasse blir også spurt om og delta. Et utvalg av dem som samtykker vil bli delt inn i grupper på tre og tre.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du blir med på et gruppeintervju sammen med to medelever. Intervjuet vil ta ca. 90 minutter (en dobbelttime) og innebærer at du sammen med gruppen din løser oppgaver knyttet til matematisk modellering. Det vil bli tatt lydopptak av intervjuene.
Jeg vil også kunne be din matematikklærer om tilgang til opplysninger om eventuelle vurderinger knyttet til modellering.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dette vil heller ikke påvirke din vurdering i faget eller ditt forhold til skolen eller lærerne.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. ***All data vil anonymiseres.***

- Det er kun masterstudent og veileder som vil ha tilgang til dine opplysninger.
- Tiltak som blir gjort for å sikre at ingen uvedkommende får tilgang til dine personopplysninger inkluderer følgende:
  - Navn og kontaktopplysningene dine vil erstattes med fiktive navn som vil lagres på en egen navneliste adskilt fra øvrige data.
  - Datamaterialet vil lagres på pc med passordbeskyttelse

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes i desember 2023. Etter prosjektslutt vil lydopptak slettes, og datamaterialet med dine personopplysninger vil anonymiseres.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder - Fakultetet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Pauline Vos på epost (pauline.vos@uia.no) eller
  på telefon: 38 14 23 32
- Vårt personvernombud: Trond Hauso på epost(personvernombud@uia.no) eller
  på telefon: 936 01 625

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Pauline Vos
(Forsker/veileder)

Karoline Engestøl
(Masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *«Matematisk Modellering i 1p»* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i et gruppeintervju
- ☐ at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

VEDLEGG 6: TRANSKRIPSJONSNØKKEL

Tegn	**Betydning**
..	Pause på 1-2 sekunder
…	Pause på 3 sekunder eller mer
!	Noe som blir sagt med tydelig entusiasme
?	Et spørsmål eller noe som blir sagt på en spørrende eller undrende måte
=	Overtar mens noen andre snakker
[*tekst*]	Kommentar for å tydeliggjøre eller presisere det som blir sagt, eksempelvis hva som refereres til ved bruk av ord som «det», «denne», «de» osv.
(*tekst*)	Beskrivelse av ikke-verbale observasjoner
*****setning	Setningen blir sagt samtidig som deltakeren ler