Universitetet i Agder

Uniform fordeling modulo 1

YONAS TEKLEMICHAEL MEHARI

VEILEDER
Inger Johanne Håland Knutson

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Master

Forord

Først og fremst vil jeg takke Gud den allmektige for at han har gitt meg muligheten og veiledningen til å nå målet mitt og lykkes i denne oppgaven. Deretter vil jeg gjerne vise min største takknemlighet til min veileder Inger Johanne Håland Knutson. Jeg kan ikke si takk nok for hennes enorme støtte og hjelp. Jeg føler meg motivert og oppmuntret hver gang jeg møter henne. Jeg vil gjerne spesielt nøye til redigeringshjelp og konstruktive tilbakemeldinger. Uten hennes oppmuntring og veiledning denne oppgaven ikke ville ha realisert. Ord kan ikke uttrykke min takknemlighet til min elskende kjæreste Yordanos Gebrehiwet. Jeg vil bare at du skal vite hvor takknemlig jeg er for alt du gjør. Du er alltid klar til å støtte meg, og jeg kan ikke takke deg nok.

Jeg er også takknemlig overfor mine klassekamerater for de fantastiske studieårene. Spesielt vil jeg gjerne takke til Hege Kristine Reinholt for hennes enorme støtte og hjelp.

Til slutt vil jeg være unnlatt å ikke nevne familien min, spesielt Teklemichael Mehari og Elsa Mebrahtu. Og til mine brodre Kesis Kasaye Anteneh, Zenawi Tesfagabr og Daniel Eyassu. Deres tro på meg har holdt humøret og motivasjonen høy under studien.

Sammendrag

Målet til oppgaven er å beskrive uniform fordeling av tallfølger modulo en (forkortet u.d. mod 1) med tanke for at elever som har fordypning i matematikk fra videregående skole, kan (med litt arbeid) forstå matematikken. Uniform fordeling av tallfølger modulo 1 er opptatt av fordelingen av desimaldelen til tallene i følgen i intervallet fra o til 1. Hvis a er et reelt tall, vil $\{a\}$ stå for desimaldelen av tallet. Vi sier at en følge $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d. mod 1 hvis for enhver $0 \leq a < b < 1$, så vil antall elementer fra følgen $(\{x_n\})$, $n = 1, \ldots, N$ som ligger i intervallet (a, b), delt på N gå mot lengden av intervallet, $b - a$. Det betyr at hvis vi trekker et tilfeldig element fra følgen $(\{x_n\})$, så er sannsynligheten for at verdien ligger mellom a og b, lik $b - a$.
Det var H. Weyl som introduserte begrepet uniform fordeling (mod 1) og ga flere ekvivalente formuleringer, blant dem følgende: En følge (x_n) er u.d.mod 1 hvis og bare hvis for alle kontinuerlige funksjoner på $[0, 1]$, så er

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

En av de andre formuleringene bruker komplekse funksjoner $f(x) = e^{2\pi ihx}$ der $h \in \mathbb{Z}$ for å finne en grunnleggende kriterium som vi kan bruke for å avgjøre om en følge er u.d.mod 1 eller ikke. Det er:
Følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1 hvis og bare hvis

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ihx_n} = 0 \qquad \text{for alle } h \in \mathbb{Z}, \quad h \neq 0.$$

I tillegg har vi andre metoder som kan hjelpe oss for se om en følge er u.d.mod 1 eller ikke. Noen av dem er Fejers Teorem og Van der Corput's differanse

teorem. Et klassisk eksempel på følger som vises u.d.mod 1 ved bruk av Van der Corputs differanse teorem er $(p(n))$ der

$$p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + \alpha_0$$

er et polynom med reelle koeffisienter og α_m er irrasjonal.

Abstract

The aim of the thesis is to describe the uniform distribution of sequence numbers modulo one (abbreviated u.d. mod 1) with the view that students who have advanced mathematics from upper secondary school can (with a little work) understand the mathematics. Uniform distribution of sequence of numbers modulo 1 is concerned with the distribution of the decimal part of the numbers in the sequence in the interval from o to 1. If a is a real number, $\{a\}$ will represent the decimal part of the number. We say that a sequence $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ is u.d. mod 1 if for any $0 \leq a < b < 1$, then the number of elements from the sequence $(\{x_n\})$, $n = 1, \ldots, N$ that lie in the interval (a, b), divided by N go towards the length of the interval, $b - a$. It means that if we draw a random element from the sequence $(\{x_n\})$, then the probability that the value lies between a and b, equal to $b - a$.

It was H. Weyl who introduced the concept of uniform distribution (mod 1) and gave several equivalent formulations, among them the following: A sequence (x_n) is u.d.mod 1 if and only if for all continuous functions on $[0, 1]$, then is

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

One of the other formulations uses complex functions $f(x) = e^{2\pi i h x}$ where $h \in \mathbb{Z}$ to find a basic criterion that we can use to decide whether a sequence is u.d.mod 1 or not. It is

The sequence $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ is u.d.mod 1 if and only if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \qquad \text{for alle } h \in \mathbb{Z}, \quad h \neq 0.$$

In addition, we have other methods that can help us to see whether a sequence is u.d.mod 1 or not. Some of them are Fejer's Theorem and Van der Corput's difference theorem. A classic example of a sequence that shows u.d. mod 1 using Van der Corput's difference theorem is $(p(n))$ where

$$p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + \alpha_0$$

be a polynomial with real coefficients and let α_m be irrational. Then the sequence is $(p(n))$ u.d.mod 1.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

Oppgaven går ut på å studere uniform fordeling av tallfølger modulo en (forkortet u.d. mod 1). Målet til oppgaven er å beskrive uniform fordeling modulo 1 med tanke for at elever som har fordypning i matematikk fra videregående skole, kan (med litt arbeid) forstå matematikken. Når vi sier elever som har fordypning i matematikk fra videregående skole", har vi tnkt elever som har hatt R1 og R2 fra videregående skole. For å oppnå det, har vi brukt noen strategier som fremmer begrepsmessig forståelse. Noen av trategiene er dele opp problemer og beviser, bruke gode eksempler for å gi praktiske erfaringer og bruke grafer som hjelper for å øke elevenes nysgjerrighet og interesse. Begrepet uniform fordeling av følger ble først brukt av den tyske matematikeren og astronomen P. Bohl og av den polske matematikeren W. Sierpinski. Men det var først etter at H. Weyl publiserte sin artikkel om uniform fordeling av polynomer i Mathematische Annalen i 1916, at en så den fulle betydning av begrepet. Den generelle teorien om uniform fordeling ble deretter videreutviklet av ungarske matematikere, spesielt av L. Fejer, og også av nederlandske matematikere, fremfor alt må J. G van der Corput og J. F. Koksma nevnes. Noen av anvendelsene av u.d.mod 1. er generering av tilfeldige tall og bruk i andre felter i matematikk for eksempel i ergodic teori [Hl].

1.1 Definisjon av uniform fordeling modulo 1

For reelle tall x, la $[x]$ betegne heltallsdelen av x, altså det største heltallet $\leq x$; la $\{x\} = x - [x]$ være desimaldelen av x. Vi legger merke til at desimaldelen av et hvert reelt tall er inneholdt i enhetsintervallet $I = [0, 1)$.

La $\omega = (x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ være en gitt følge av reelle tall. For et positivt heltall N og en delmengde E av I, la telle funksjonen $A(E; N; \omega)$ defineres som antall ledd $x_n, 1 \leq n \leq N$,for hvilke $\{x_n\} \in E$. Nå kan vi definere uniform fordeling modulo 1. Det er viktig å nevne først at mye av stoffet om u.d.mod 1 er hentet fra [KN].

Definisjon 1.1.1. Følgen $\omega = (x_n), n = 1, 2, \ldots,$ av reelle tall sies å være uniformt fordelt modulo 1 (forkortet u.d. mod 1) hvis for hvert par a, b av reelle tall med $0 \leq a < b \leq 1$ vi har

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} = b - a. \tag{1.1}$$

Hva betyr dette? Dette betyr at hvis vi plukker ut et tilfeldig element fra følgen så er sannsynligheten for at det ligger mellom a og b lik $b - a$. Dette gjelder uansett hva a og b er når $0 \leq a < b < 1$. Siden $0 \leq a \leq b \leq 1$, blir $b - a$ alltid mellom 0 og 1 [KN, s. 1].

Lemma 1.1.2. *Hvis følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots,$ er u.d.mod 1, vil følgen $(x_n + \alpha), n = 1, 2, 3, \ldots,$ hvor α er en reelle konstant, være u.d.mod 1.*

Bevis. Vi vet fra definisjonen av u.d.mod 1 at en følge $\omega = (x_n)$ er u.d. mod 1 hvis for alle reelle tall a og b som er $0 \leq a \leq b \leq 1$, så er

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A([a, b]; N; \omega)}{N} = b - a.$$

Når vi ser på følgen $(x_n + \alpha)$, er det lett å se følgen (x_n) flyttet α i den reelle tall aksen. Det betyr at hvis (x_n) var i intervalet $[0, 1)$, da følgen $(x_n + \alpha)$ er i intervalet $[\alpha, \alpha + 1)$. Da kan vi si at for alle reelle tall a og b som er $\alpha \leq a \leq b \leq \alpha + 1$, da har vi

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A([a, b]; N; (x_n + \alpha))}{N} = b - a.$$

$\square$

Men i kapittel 3 skal vi bevise dette ved hjelp av Weyl kriterium [KN, s. 3]. For å forstå og utvikle definusjonen av uniform fordeling modulo 1, skal vi se på noen funksjoner og dets egenskaper og vi skal se på forholdet mellom funksjonene. Disse funksjoner er tellefunktion, karakteristisk funksjon og trappefunksjon.

1.2 Tellefunksjon

Tellefunksjon er en funktion som teller antall elementer som oppfyller et kriterium i en mengde. For eksempel har vi en følge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ av reelle tall. Vi er interesserte i desimaldelene $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \ldots$ av tallene. Disse ligger i intervallet $[0, 1)$. Nå velger vi ut et delintervall $[a, b) \subset [0, 1)$ og vi skal telle antall elementer blant de første N elementene $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \ldots, \{x_N\}$ fra følgen som ligger i $[a, b)$. Og vi kan presentere som følger:

$$A([a,b)\,;N) =\mid \{n \leq N \mid \{x_n\} \in (a,b)\} \mid \tag{1.2}$$

hvor $|E|$ er antall elementer i mengden E. Dette betyr at vi teller antall elementer som har verdi mellom a og b fra totalt N elementer. Altså antallet av slike elementer er alltid et tall mellom 0 og N. ‘

$$0 \leq A([a,b);N) \leq N.$$

Nå skal vi se et eksempel på telle funksjon.

Eksempel 1.2.1. La $x_1 = 0.6; x_2 = 0.3; x_3 = 0.1; x_4 = 0.9; x_5 = 0.3; x_6 = 0.4; x_7 = 0.5; x_8 = 0.1; x_9 = 0.0$.

1. Når $[a, b) = [0.5, 1)$, $N = 5$

$$A([0.5,1);5) \;=\mid \{n \leq 5 \mid x_n \in [0.5,1)\} \mid = \mid \{0.6, 0.9\} \mid = \; 2.$$

2. Når $[a, b) = [0.5, 1)$, $N = 9$

$$A([0.5,1);9) \;=\mid \{n \leq 9 \mid x_n \in [0.5,1)\} \mid = \mid \{0.6, 0.9, 0.5\} \mid = \; 3.$$

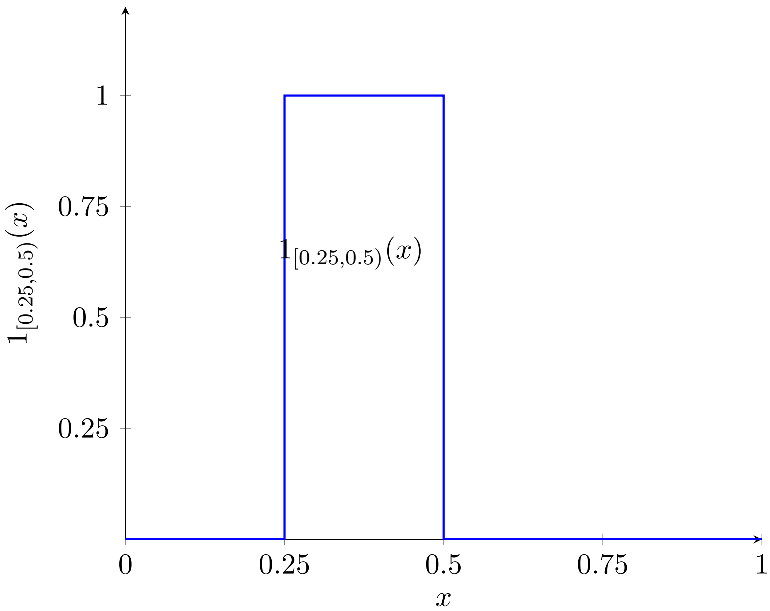
3. Når $[a, b) = [0, 0.5)$, $N = 7$

$$A([0, 0.5); 7) = |\ \{n \leq 5 \mid x_n \in [0, 0.5)\}\ | = |\ \{0.3, 0.1, 0.3, 0.4\}\ | = 4.$$

1.3 Karakteristisk funksjon og trappefunksjon

Karakteristisk funksjon er en funksjon som tildeler verdien 1 til medlemmene i en gitt mengde og verdien 0 til dets ikke-medlemmer. Det er vanlig å bruke $1_{[a,b)}(x)$ som notasjon for karakteristisk funksjon

$$1_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1.3}$$



En funksjon er trappefunksjon hvis den kan skrives som en endelig lineær kombinasjon av karakteristiske funksjoner. En lineær kombinasjon er et uttrykk konstruert fra en mengde med elementer ved å multiplisere hvert element med en konstant og legge sammen resultatene. For eksempel hvis f og g er to funksjoner, da en lineær kombinasjon av f og g vil være et hvilket som helst uttrykk av formen $af + bg$, der a og b er konstanter. Nå skal vi se på et eksempel på en trappefunksjon $f(x)$ og vi skal presentere det som en lineær kombinasjon av karakteristiske funksjoner.

La

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < a_1 \\ \frac{1}{2}, & a_1 \leq x < a_2 \\ \frac{3}{4}, & a_2 \leq x < a_3 \\ 1, & a_3 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $0 < a_1 < a_2 < a_3 < 1$.

Vi kan skrive $f(x)$ i form av karakteristiske funksjoner slik

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$$

hvor $f_n(x), n = 1, 2, 3$ og 4 er:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < a_1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{1}{4} \cdot \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a_1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{1}{4} 1_{[0,a_1)}(x)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & a_1 \leq x < a_2 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} 1, & a_1 \leq x < a_2 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{1}{2} 1_{[a_1,a_2)}(x)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & a_2 \leq x < a_3 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{3}{4} \cdot \begin{cases} 1, & a_2 \leq x < a_3 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = \frac{3}{4} 1_{[a_2,a_3)}(x)$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1, & a_3 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} = 1_{[a_3,1)}(x)$$

så

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot 1_{[0,a_1)}(x) + \frac{1}{2} \cdot 1_{[a_1,a_2)} k(x) + \frac{3}{4} \cdot 1_{[a_2,a_3)}(x) + 1_{[a_3,1)}(x).$$

Dette viser at vi kan skrive en vilkårlig trappefunksjon $h(x)$ i form av karakteristisk funksjon $1_{[a,b)}(x)$ på denne måte:

$$h(x) = \begin{cases} d_1, & a_0 \leq x < a_1 \\ d_2, & a_1 \leq x < a_2 \\ d_3, & a_2 \leq x < a_3 \\ \vdots & \vdots \\ d_N, & a_{N-1} \leq x < a_N \end{cases}$$

hvor $d_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in [0,1)$ og $i = 1,2,3,\dots N$ og $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_N = 1$

$$h(x) = d_1 1_{[a_0,a_1)}(x) + d_2 1_{[a_1,a_2)}(x) + d_3 1_{[a_2,a_3)}(x) + \cdots + d_N 1_{[a_{N-1},a_N)}(x)$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} d_n 1_{[a_{n-1},a_n)}(x). \tag{1.4}$$

For å oppsummere forholdet mellom trappefunksjon og karakteristisk funksjon er det lett å se likning (1.4.) Trappefunksjon er lineær kombinasjon av karakteristisk funksjon.

1.4 Ekvivalent formulering av uniform fordeling modulo 1

Nå skal vi utlede en ekvivalent formulering av definisjonen til u.d.mod 1 [KN, s. 2].

Setning 1.4.1. *La følgen $(x_n), n = 1,2,3,\cdots$ være u.d.mod 1 og la $0 \le a < b < 1$, Da har vi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx. \tag{1.5}$$

Bevis. Først skal vi vise

$$\frac{A([a,b);N;(\{x_n\}))}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}).$$

Etter på skal vi vise likning (1.5).

La

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\})$$

da blir

$$y_1 = 1_{[a,b)}(\{x_1\})$$

$$y_2 = \frac{1_{[a,b)}(\{x_1\}) + 1_{[a,b)}(\{x_2\})}{2}$$

$$y_3 = \frac{1_{[a,b)}(\{x_1\}) + 1_{[a,b)}(\{x_2\}) + 1_{[a,b)}(\{x_3\})}{3}$$

$$\vdots$$

$$y_N = \frac{1_{[a,b)}(\{x_1\}) + 1_{[a,b)}(\{x_2\}) + 1_{[a,b)}(\{x_3\}) + \cdots + 1_{[a,b)}(\{x_N\})}{N}$$

vi vet at

$$1_{[a,b)}(\{x\}) = \begin{cases} 1, & a \leq \{x_n\} < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det betyr at $1_{[a,b)}(\{x_1\})+1_{[a,b)}(\{x_2\})+1_{[a,b)}(\{x_3\})+\cdots+1_{[a,b)}(\{x_N\})$ gir antall elementer blant de første N elementene $(\{x_1\}), (\{x_2\}), (\{x_3\}), \ldots, (\{x_N\})$ som ligger i $[a, b)$. Da blir

$$y_N = \frac{1_{[a,b)}(\{x_1\}) + 1_{[a,b)}(\{x_2\}) + 1_{[a,b)}(\{x_3\}) + \cdots + 1_{[a,b)}(\{x_N\})}{N} = \frac{A([a, b); N; (\{x\}))}{N}$$

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \frac{A([a, b); N; (\{x\}))}{N}$$

Nå kan vi finne grensen til y_N når $N \to \infty$ slik

$$\lim_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{A([a, b); N; (\{x\}))}{N}.$$

Siden $(\{x_n\})$ er u.d. mod 1, vet vi at $\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b);N;(\{x\}))}{N} = b - a$, nemlig at

$$\lim_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{A([a, b); N; (\{x\}))}{N} = b - a.$$

Altså

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b - a. \tag{1.6}$$

Nå skal vi se på $\int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx$.

Vi vet at

$$1_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da

$$\begin{aligned} \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx &= \int_0^a 0\ dx + \int_a^b 1\ dx + \int_b^1 0\ dx \\ &= 0 + (b - a) + 0 \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Siden

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b - a$$

og

$$\int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx = b - a,$$

så må

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx.$$

Nå kan vi si at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b);N;(\{x\}))}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx. \quad (1.7)$$

□

Vi har sett at vi kan presentere trappe funksjon i form av karakteristisk funksjon. Nå skal vi se at (1.5) stemmer også for trappe funksjoner $h(x)$.

Setning 1.4.2. *La følgen* $(x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$ *være u.d.mod 1 og la* $h(x)$ *være en trappefunksjon. Da har vi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h(\{x_n\}) = \int_0^1 h(x)\ dx. \quad (1.8)$$

Bevis. Vi så i (1.4) at en trappefunksjon kan skrives som

$$h(x) = \sum_{i=1}^{I} d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(x).$$

Vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h(\{x_n\}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(\{x_n\}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (d_1 1_{[a_0,a_1)}(\{x_n\}) + d_2 1_{[a_1,a_2)}(\{x_n\}) + \ldots \\
&+ d_I 1_{[a_{I-1},a_I)}(\{x_n\})) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} d_1 1_{[a_0,a_1)}(\{x_n\}) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} d_2 1_{[a_1,a_2)}(\{x_n\}) + \ldots \\
&+ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(\{x_n\}).
\end{aligned}$$

Fra likning (1.5) kan vi skrive

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\{x_n\}) &= \int_0^1 d_1 1_{[a_0,a_1)}(x)\ dx + \int_0^1 d_2 1_{[a_1,a_2)}(x)\ dx + \dots \\ &+ \int_0^1 d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(x)\ dx \\ &= \int_0^1 (d_1 1_{[a_0,a_1)}(x) + d_2 1_{[a_1,a_2)}(x) + \dots + d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(x))\ dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{I} d_i 1_{[a_{i-1},a_i)}(x)\ dx\end{aligned}$$

så vi har fått at

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h(\{x_n\}) = \int_0^1 h(x)\ dx.$$

$\square$

Kapittel 2

Bakgrunnskunnskap

I denne kapittel skal vi se på noen teori som kan hjelpe oss når vi skal studere u.d.mod. 1. Noen av dem er øvre og nedre grense av reelle følge, Remann integral, tett følge og andre teori av kompleks funksjon, polynomial funksjon og absolutt verdi funksjon. På slutten skal vi se på noen følger for å undersøke om de er tett og uniform fordelt.

2.1 Øvre og nedre grense av reelle følge

2.1.1 Øvre og nedre Grenser av en reell følge som henholdsvis supremum og infimum av grensesettet til følgen.

Grensesettet til (x_n) er mengden som inneholder grensene for alle konvergente delfølge av (x_n). Hvis supremumet til grensesettet til (x_n) eksisterer, dvs. hvis det er et reelt tall, definerer vi det som øvre grensen for (x_n). Det vil si at den øvre grensen til (x_n) er supremum av grensesettet til (x_n), forutsatt at den eksisterer. På samme måte, hvis infimum av grensesettet til (x_n) eksisterer, dvs. hvis det er et reelt tall, definerer vi det som nedre grense til (x_n). Det vil si at nedre grensen til (x_n) er infimum av grensesettet til (x_n), forutsatt at den eksisterer. Nå skal vi definere øvre grense og nedre grense til en følge [TBB].

Definisjon 2.1.1. La (x_n) være en begrenset følge av reelle tall.

1. Øvre grensen til (x_n) er infimum for mengde V av $v \in \mathbb{R}$ slik at $v < x_n$ for ikke mer enn et endelig antall $n \in \mathbb{N}$. Det er betegnet med

$$\limsup x_n \quad \text{eller} \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

2. Nedre grensen til (x_n) er supremum for mengden W av $w \in \mathbb{R}$ slik at $x_m < w$ for ikke mer enn et endelig antall $m \in \mathbb{N}$. Det er betegnet med

$$\liminf x_n \text{ eller } \underline{\lim}\, x_n.$$

2.1.2 Grunnleggende egenskaper til øvre grense og nedre grense av en reelle følge

Her skal vi se på noen grunnleggende egenskaper til øvre grense og nedre grense uten å bevise egenskapene for å sette søkelys på egenskapen til grensene av reelle følge. Deretter skal vi se på noen eksempler av reelle følge ved hjelp av graf [TBB].

La (x_n) være en reelle følge

1. La $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ være enten reelle tall eller $\boldsymbol{\infty}$, da er det alltid

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

2. La $l \in \mathbb{R}$ da konvergerer (x_n) mot l (altså $\lim_{n\to\infty} x_n = l$), hvis og bare hvis

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Nå skal vi finne øvre og nedre grense for noen følger og vi skal avgjøre om følgen konvergerer eller ikke når $n \to \infty$.

Eksempel 2.1.2. La $(x_n) = ((-1)^n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Vi skal se grafen til følgen i Figure 2.1.

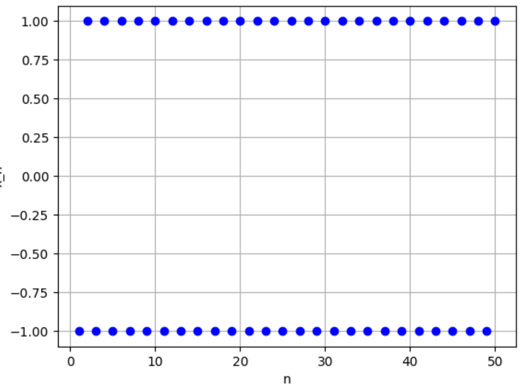
$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{for alle partall n} \\ -1, & \text{for alle oddetall n.} \end{cases}$$

Siden (x_n) har verdi 1 eller -1 for alle $n \in \mathbb{N}$, kan vi si

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -1$$

og

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$



Figur 2.1: Følgen $((-1)^n)$

Nå vet vi at (x_n) ikke konvergerer fordi

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Eksempel 2.1.3. La $(x_n) = (n + \frac{(-1)^n}{n}), n = 1, 2, 3, \ldots$

Vi kan se grafen til følgen i Figure 2.2.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (n + \frac{(-1)^n}{n}) = \lim_{n\to\infty} n(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}) = \infty.$$

Det betyr at x_n ikke konvergerer. Og siden $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, kan vi si

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

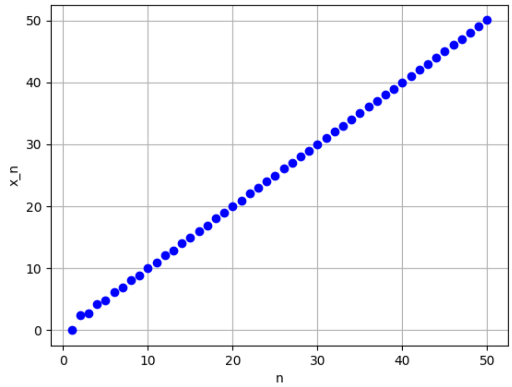
Eksempel 2.1.4. La $(x_n) = (\ln n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Grafen til følgen $(\ln n)$ er vist i Figure 2.3.

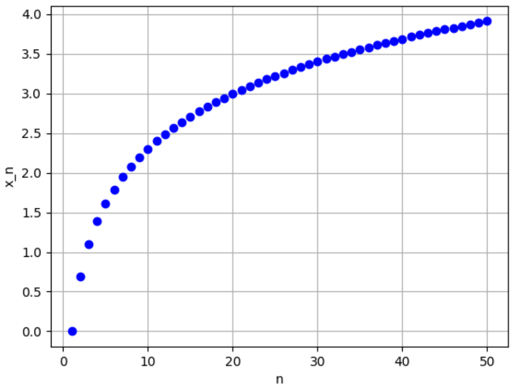
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Nå kan vi si at (x_n) ikke konvergerer. Og

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n) = \varlimsup_{n\to\infty} (x_n) = \infty.$$



Figur 2.2: Følgen $(x_n) = (n + \frac{(-1)^n}{n})$



Figur 2.3: Følgen $(x_n) = (\ln n)$

Vi har sett øvre og nedre grense til (x_n) i Eksempel 2.1.2, 2.1.3 og 2.1.4. Nå skal vi se på følgen $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n), N = 1, 2, 3, \ldots$. Og vi skal finne øvre og nedre grensen til y_N. Vi skal se også om y_N konvergerer eller ikke når $N \to \infty$.

Eksempel 2.1.5. La $(x_n) = (-1)^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ og $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n), n = 1, 2, 3, \ldots N \ldots$. Hvor følgen y_N ser slik ut:

$$y_1 = x_1 = -1$$

$$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

$$y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-1+1-1}{3} = \frac{-1}{3}$$
$$y_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{-1+1-1+1}{4} = 0$$
$$\vdots$$
$$y_N = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdot + x_N}{N}.$$

Det betyr at

$$y_N = \begin{cases} \frac{0}{N} = 0 & \text{for alle partall N} \\ \frac{-1}{N} & \text{for alle oddetall N.} \end{cases}$$

Siden $\frac{-1}{N} < 0$ for alle $N \in \mathbb{N}$, kan vi si

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{-1}{N} = 0$$

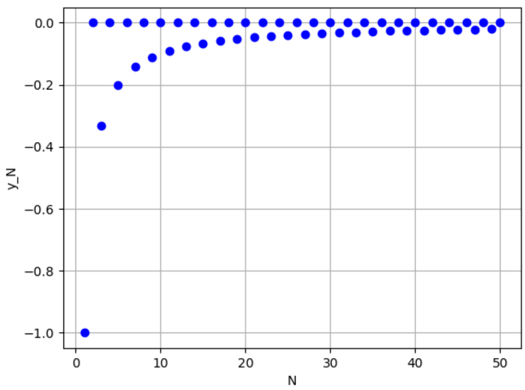
og

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \overline{\lim}_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Siden øvre grense og nedre grense eksisterer og de er like, da konvergerer y_N. Altså

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \overline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} y_N = 0.$$

Nå skal vi se grafen til y_N i Figure 2.4.



Figur 2.4: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}((-1)^n)$

Eksempel 2.1.6. La $(x_n) = n + \frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ og $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$, N. vi kan se grafen til følgen i Figure 2.5.

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n + \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \frac{1}{N} (\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}) &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= -1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots \end{aligned}$$

siden hvert av uttrykkke i parentes er positivt, kan vi si

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}) > -1.$$

Da y_N blir

$$\begin{aligned} y_N &> \frac{1}{N} (\frac{N(N+1)}{2} - 1) \\ &= \frac{N+1}{2} - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

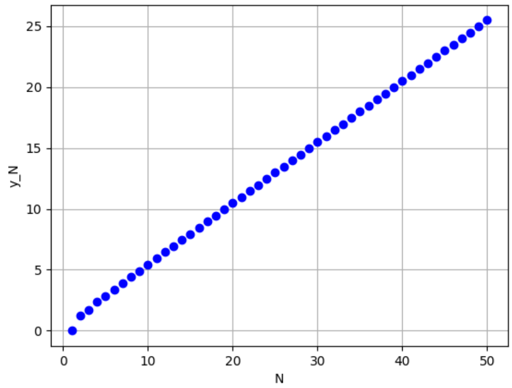
$$\lim_{N \to \infty} (\frac{N+1}{2} - \frac{1}{N}) = \infty$$

da må

$$\lim_{N \to \infty} y_N = \infty.$$

Det betyr at

$$\underline{\lim}_{N \to \infty} y_N = \overline{\lim}_{N \to \infty} y_N = \infty.$$



Figur 2.5: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(n + \frac{(-1)^n}{n})$

2.2 Riemann Integral

Vi begynner med noen definisjoner som trengs før vi kan definere Riemann-integralet. La $\mathbb{R}$ være de reelle tallene.

Definisjon 2.2.1. Anta at $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$. En partisjon på $[a, b]$ er en endelig liste av formen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, hvor $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Vi bruker en partisjon $x_0, x_1, \ldots, x_n$ av $[a, b]$ for å tenke på $[a, b]$ som en union av lukkede delintervaller, som følger:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

.

Den neste definisjonen som vi skal introdusere her er notasjonen for infimum og supremum av verdiene til en funksjon på en delmengde av definisjonsmengde [A, s. 2].

Definisjon 2.2.2. Notasjon for infimum og supremum av en funksjon
Hvis f er en funksjon med reelle verdier og A er et delmengde av definisjonsmengden til f, så er

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{og} \quad \sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

[A, s. 2].

Definisjon 2.2.3. Nedre og øvre Riemann-summer

Anta at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon og P er en partisjon $x_0, x_1, \ldots, x_n$av$[a, b]$. Den nedre Riemann-summen $L(f, P, [a, b])$ og den øvre Riemann-summen $U(f, P, [a, b])$ er definert av

$$L(f, P, [a, b]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$

Og

$$U(f, P, [a, b]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$

Når vi tar en partisjon med bare et lite mellomrom mellom påfølgende punkter, bør den nedre Riemann-summen være litt mindre enn arealet under grafen, og den øvre Riemann-summen skal være litt mer enn arealet under grafen. Bildene i neste eksempel bidrar til å formidle ideen om disse tilnærmingene. Sidene til det j^{te} rektangelet har lengde $(x_j - x_{j-1})$ og har høyde $\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f$ for nedre Riemann-sum og høyde $\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$ for øvre Riemann-sum [A, s. 2].

Eksempel 2.2.4. Nedre og øvre Riemann-summer

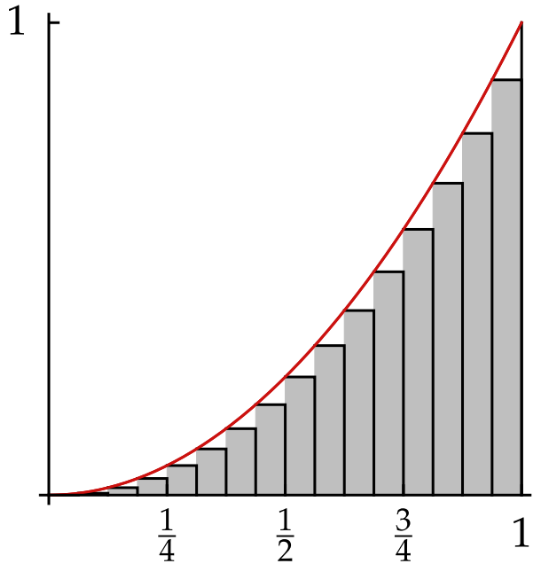
Definer $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ved $f(x) = x^2$. La P_n betegne partisjonen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, 1$ av $[0, 1]$. Grafen til $L(x^2, P_{16}, [0, 1])$ er i Figure 2.6. Og grafen til $U(x^2, P_{16}, [0, 1])$ er i Figure 2.7.

Til partisjonen P_n, har vi $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ til hver $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Da vil

$$\begin{aligned} L(x^2, P_n, [0, 1]) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) (\frac{(j-1)^2}{n^2}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2. \end{aligned}$$

Vi skal bruke

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.$$



Figur 2.6: [A, s. 3] $L(x^2, P_{16}, [0,1])$

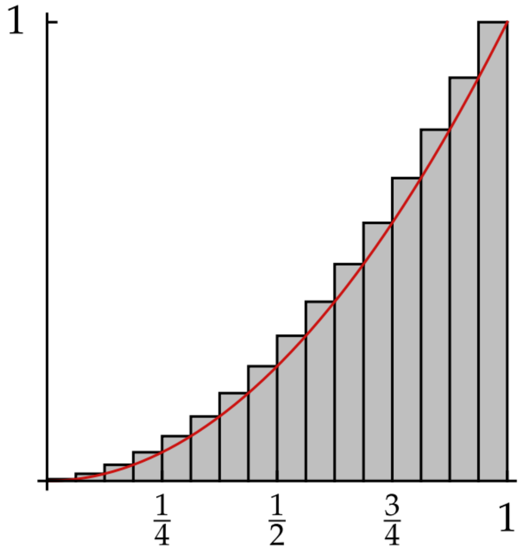
Da

$$\begin{aligned}
L(x^2, P_n, [0,1]) &= \frac{1}{n^3}(\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - n^2) \\
&= \frac{1}{n^2}(\frac{2n^2+3n+1}{6} - n) \\
&= \frac{1}{n^2}(\frac{2n^2+3n+1-6n}{6}) \\
&= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned}
U(x^2, P_n, [0,1]) &= \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})(\frac{j^2}{n^2}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{1}{n^3}(\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Nå kan vi si at når vi øker antall punkter i en partisjon altså når vi øker n,



Figur 2.7: [A, s. 3] $U(x^2, P_{16}, [0,1])$

øker den nedre Riemann-summen og reduserer den øvre Riemann-summen [A, s. 2 - 4].

Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon og P, P_1 er partisjoner av $[a,b]$ slik at listen som definerer P er en delmengde av listen som definerer P_1. Da vil

$$L(f, P, [a,b]) \leq L(f, P_1, [a,b]) \leq U(f, P_1, [a,b]) \leq U(f, P, [a,b]).$$

Nå skal vi bruke nedre og øvre Riemann-summer til å definere nedre og øvre Riemann-integraler.

Definisjon 2.2.5. Definisjon nedre og øvre Riemann-integraler

Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en avgrenset funksjon. Det nedre Riemann-integralet $L(f, [a,b])$ og det øvre Riemann-integralet $U(f, [a,b])$ av f er definert av

$$L(f, [a,b]) = \sup_P L(f, P, [a,b])$$

og

$$U(f, [a,b]) = \inf_P U(f, P, [a,b]),$$

hvor supremum og infimum ovenfor er tatt over alle partisjoner P av $[a,b]$.

I definisjonen ovenfor tar vi supremum (over alle partisjoner) av de nedre Riemann-summene fordi vi vet at når vi øker antall punkter i en partisjon øker den nedre Riemann-summen og bør gi et mer nøyaktig estimat av arealet under grafen. På samme måte tar vi i definisjonen ovenfor infimum (over alle partisjoner) av de øvre Riemann-summene fordi når vi øker antall punkter i en partisjon reduserer den øvre Riemann-summen og bør gi et mer nøyaktig estimat av området under grafen [A, s. 4].

Vårt første resultat om nedre og øvre Riemann-integraler altså $L(f, [a, b])$ og $U(f, [a, b])$ er en enkel ulikhet.

Anta at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en avgrenset funksjon. Da vil

$$L(f, [a, b]) \leq U(f, [a, b]).$$

Det nedre Riemann-integralet og det øvre Riemann-integralet kan begge med rimelighet anses å være arealet under grafen til en funksjon. Hvilken skal vi bruke? Bildene i eksempel ovenfor antyder at disse to mengdene er de samme for funksjonen i det eksemplet; Vi vil snart bekrefte denne mistanken. Men som vi vil se i neste avsnitt, finnes det funksjoner som det nedre Riemann-integralet ikke er lik det øvre Riemann-integralet.

I stedet for å velge mellom det nedre Riemann-integralet og det øvre Riemann-integralet, er standardprosedyren i Riemann-integrasjon å bare vurdere funksjoner der disse to integralene er like. Denne beslutningen har den store fordelen at Riemann-integralet oppfører seg som vi ønsker med hensyn til de to funksjonene $L(f, [a, b])$ og $U(f, [a, b])$ [A, s. 3 - 5].

Definisjon 2.2.6. Riemann integrerbar; Riemann integrert

En begrenset funksjon på et lukket avgrenset intervall kalles Riemann-integrerbar hvis det nedre Riemann-integralet er lik det øvre Riemann-integralet.

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er Riemann-integrerbar, så er Riemann-integralet $\int_a^b f\ dx$ definert ved [A, s. 5].

$$\int_a^b f\ dx = L(f, [a, b]) = U(f, [a, b]).$$

Nå skal vi fortsette med eksemplet ovenfor for å se om funksjonen $f(x) = x^2$ i intervalet $[0,1]$ er Riemann-integral.

Eksempel 2.2.7. Beregning av Riemann-integralet til $f(x) = x^2$.
Definer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$.
Fra Eksempel 2.2.4 vi vet at

$$U(x^2, P_n, [0,1]) = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \quad \text{og} \quad L(x^2, P_n, [0,1]) = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}.$$

For å få supremum og infimum av $f(x)$, skal vi ta en stor partisjon altså vi skal bruke $n \to \infty$ for å finne $\sup_{n\to\infty} L(x^2, P_n, [0,1]) = L(f,[0,1])$ og $\inf_{n\to\infty} U(x^2, P_n, [0,1]) = U(f,[0,1])$. Dette kan vi skrive og finne slik:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(6)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}.\end{aligned}$$

Vi vet at når $n \to \infty$ både $\frac{3}{n}$ og $\frac{1}{n^2}$ går mot 0. Da

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} \\ &= \frac{2-0+0}{6} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned}\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(6)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} \\ &= \frac{2+0+0}{6} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Siden $L(f,[0,1]) = U(f,[0,1]$, er $f(x)$ Riemann integrerbar og

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}.$$

2.3 Kontinuerlige funksjoner som tilnærmer en karakterisk funksjon

Nå skal vi se at en karakterisk funksjon kan tilnærmes av kontinuerlige funksjoner.

Lemma 2.3.1. *La $[a, b)$ være et vilkårlig delintervall av $I = [0, 1)$ og $\epsilon > 0$. Da finnes det to kontinuerlige funksjoner $g_1(x)$ og $g_2(x)$ slik at*

$$g_1(x) \leq 1_{[a,b)}(x) \leq g_2(x) \qquad \text{for alle} \qquad x \in I \tag{2.1}$$

og

$$\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\ dx \leq \epsilon.$$

Bevis. Vi kan definere funksjonene $g_1(x)$ og $g_2(x)$ ved å la $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ som tilfredsstiller (2.1) og

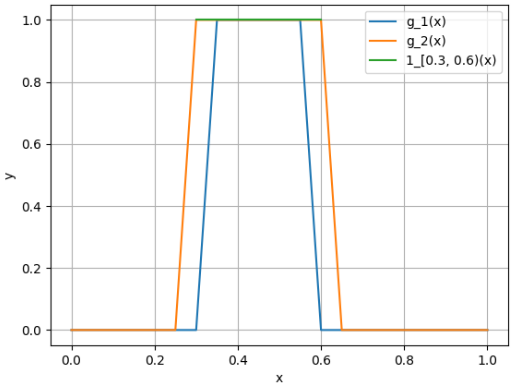
$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ \frac{x-a}{\delta} & a \leq x < a + \delta \\ 1 & a + \delta \leq x < b - \delta \\ \frac{b-x}{\delta} & b - \delta \leq x < b \\ 0 & b \leq x < 1 \end{cases}$$

og

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a - \delta \\ \frac{x+\delta-a}{\delta} & a - \delta \leq x < a \\ 1 & a \leq x < b \\ \frac{b+\delta-x}{\delta} & b \leq x < b + \delta \\ 0 & b + \delta \leq x < 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\ dx = \int_0^1 g_2(x)\ dx - \int_0^1 g_1(x)\ dx.$$

Verdien til $\int_0^1 g_2(x)\ dx$ og $\int_0^1 g_1(x)\ dx$ er lik arealet mellom grafen og x- aksen som er en trapes. Arealet til en trapes er $A = \frac{h \cdot (b_1 + b_2)}{2}$. hvor b_1 og b_2 er



Figur 2.8: Grafen til $g_1(x), g_2(x)$ og $1_{[a,b)}(x)$ med $[a,b) = [0.3, 0.6), \delta = 0.05$ og $\epsilon = 0.1$

parallele sider og h er avstanden mellom b_1 og b_2. Da

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\ dx &= \int_0^1 g_2(x)\ dx - \int_0^1 g_1(x)\ dx \\ &= \frac{1 \cdot ((b-a+2\delta)+(b-a))}{2} - (\frac{1 \cdot ((b-a)+(b-a-2\delta))}{2}) \\ &= (b-a)+\delta - ((b-a)-\delta) \\ &= 2\delta.\end{aligned}$$

Siden $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ eller $2\delta \leq \epsilon$, blir det

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\ dx &= 2\delta \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

2.4 Rekker

Her skal vi se summen av aritmetiske og geometriske rekke.

Aritmetiske rekker

Nå skal vi se på et eksempel av aritmetisk rekke.

Lemma 2.4.1. *La* $1 + 2 + 3 + \cdots + N$ *være en aritmetisk rekke. Da*

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Bevis. Først kan vi si at

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + N.$$

Og la

$$S_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) + N$$

. Vi kan skrive S_N slik også

$$S_N = N + (N-1) + (N-2) + (N-3) + \cdots + 2 + 1.$$

Så

$$\begin{aligned}
2S_N &= (1+N) + (2+N-1) + (3+N-2) + \cdots + (N+1) \\
&= (1+N) + (1+N) + (1+N) + \cdots + (N+1) \\
&= N(N+1).
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n &= S_N \\
&= \frac{N(N+1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Geometriske rekker

Lemma 2.4.2. *La* $x \in \mathbb{R}$ *og* $N \in \mathbb{N}$. *og la* $\sum_{n=1}^{N} x^n$ *være en geometrisk rekke. Da er*

$$\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x(x^N - 1)}{x - 1}.$$

Bevis. La

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N.$$

Så

$$xS_N = x^2 + x^3 + x^4 \cdots + x^{N+1}.$$

Det betyr at

$$xS_N - S_N = x^{N+1} - x$$

$$S_N(x-1) = x^{N+1} - x$$

$$S_N = \frac{x(x^N - 1)}{x-1}.$$

□

2.5 Komplekse tall

Vi har mange likninger som vi har ikke løsning i reelle tall. For eksempel $x^2 + 1 = 0$. Dette fører til en studie av komplekse tall.

Hvis et reelt tall er kvadrert, kan ikke svaret være negativt. For eksempel, ved å kvadrere både 9 og -9, er resultatet positivt. Det er $9^2 = 81$ og $(-9)^2 = 81$. Det er umulig å få et negativt resultat ved å kvadrere et reelt tall. Anta at vi introduserer en ny type tall, kalt i, med egenskapen at $i^2 = -1$. Tallet i kan ikke være et reelt tall fordi kvadratet er negativt. Vi sier det er imaginær. Etter å ha definert i^2 som -1, følger det at

$$i = \sqrt{-1}$$

og vi kan bruke dette til å skrive ned kvadratroten av et hvilket som helst negativt tall [CD, s. 440 - 446].

Definisjon 2.5.1. i er et imaginær tall slik at $i^2 = -1$.

Eksempel 2.5.2. Vi skal vinne et uttrykk for kvadratroten av -9.

$$\begin{aligned}\sqrt{-9} &= \sqrt{9\cdot(-1)}\\ &= \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}\\ &= 3\cdot\sqrt{-1}\\ &= 3i\end{aligned}$$

Eksempel 2.5.3. Vi skal finne løsningen av ligningen $x^2 - 10x + 29 = 0$.

$$x^2 - 10x + 29 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + 4 = 0$$

$$(x-5)^2 + 4 = 0$$

$$\sqrt{(x-5)^2} = \pm\sqrt{-4}$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{-4}$$

$$x - 5 = \pm 2i$$

$$x = 5 \pm 2i.$$

Det betyr at vi har to løsninger, nemlig

$$5 + 2i \;\text{ og }\; 5 - 2i.$$

2.5.1 Komplekst tall

I eksempel 2.5.3 fant vi at løsningene av ligningen $x^2 - 10x + 29 = 0$ er $5 \pm 2i$. Løsningene er kjent som komplekse tall. Et komplekst tall som $5 + 2i$ består av to deler, en reell del 5 og en imaginær del 2. Den imaginære delen er multiplumet av i. Det er vanlig å bruke bokstaven z for å stå for et komplekst tall og skrive $z = a + ib$ der a er den reelle delen og b er den imaginære delen [CD, s. 442 - 444].

Definisjon 2.5.4. Hvis z er et komplekst tall, så skriver vi

$$z = a + ib$$

hvor a er den reelle delen og b er den imaginære delen.

Like komplekse tall

To komplekse tall er like bare når deres reelle deler er like, og deres imaginære deler er like. Så hvis $a + ib$ er lik $5 + i2$, følger det at a må være 5 og b må være 2.

Kompleks konjugert

I eksempel 2.5.3 løste vi andregradsligningen $x^2 - 10x + 29 = 0$ og vi så at den andre løsningen, $5 - 2i$ er nesten den samme som den første, $5 + 2i$; bare tegnet til den imaginære delen har endret seg. Tallet $5 - 2i$ sies å være den kompleks konjugerte av $5 + 2i$. Generelt for å finne den kompleks konjugerte av et komplekst tall, endres tegnet til den imaginære delen fra $+$ til $-$ eller omvendt. Vi betegner det komplekse konjugatet av z ved $\overline{z}$ [CD, s. 445 - 447].

Definisjon 2.5.5. Hvis $z = a + ib$, er et kompleks tall, så er dets komplekse konjugerte, betegnet med $\overline{z}$,

$$\overline{z} = a - ib.$$

Noen egenskaper ved komplekse tall

La $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$.

1. Addisjon og subtraksjon av komplekse tall

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

2. Multiplikasjon av to komplekse tall

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

3. Multiplikasjon av komplekst tall og dets konjugat

$$z_1 \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2.$$

4. Divisjon av to komplekse tall

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \\ &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.\end{aligned}$$

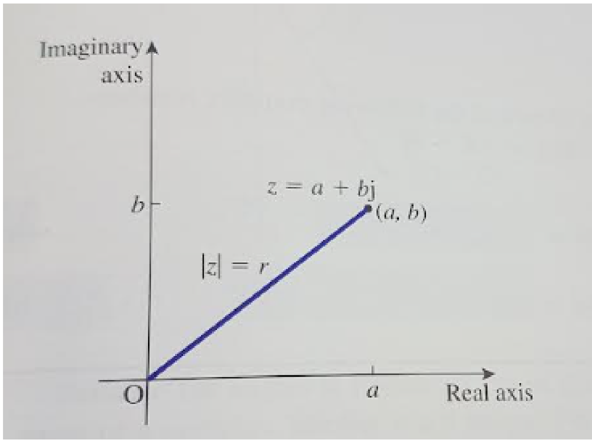
Modulen og argumentet til et komplekst tall

Modulus

I figure 2.9 ser vi det komplekse tallet $z = a + ib$. Avstanden til punktet (a, b) fra origo er modulen av det komplekse tallet. Og symbolet er r eller $|z|$. Vi kan finne Modulen ved å bruke Pythagoras teorem, det vil si

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Modulen er aldri negativ.



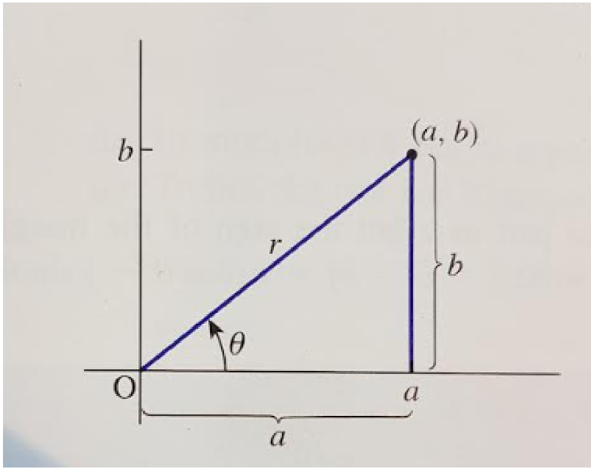
Figur 2.9: [CD, s. 455]

Argument

I figur 2.10 ser vi det komplekse tallet $z = a + ib$. vi kan finne vinkelen mellom den positive x-aksen og en linje som forbinder (a, b) med origo. Denne vinkelen kalles argumentet til det komplekse tallet. Det er forkortet til arg(z) og får ofte symbolet θ.

Fra figur 2.10, kan vi finne θ ved hjelp av trigonometri som følger:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{så} \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a}).$$



Figur 2.10: [CD, s. 461]

2.5.2 Polar form av komplekse tall

I figur 2.10 ser vi det komplekse tallet $z = a + ib$. Vi kan bruke ttigonometri for å skrive

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{og} \quad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Da har vi

$$a = r\cos\theta \quad \text{og} \quad b = r\sin\theta.$$

Vi kan bruke disse resultatene til å skrive et kompleks tall i polar form:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

2.5.3 Eksponentiell form av et komplekst tall

Eulers relasjon

For å utlede eksponentiell form av et komplekst tall må vi referere til Eulers relasjon. Euler kommer til et nyttig relasjon av $\cos x$, $\sin x$ og e^x ved hjelp av potensrekkeutvidelsen av $\cos x$, $\sin x$ og e^x [CD, s. 464 - 470]. .

Setning 2.5.6. *Eulers relasjon*
La θ være en vinkel måles i radianer. Så har vi

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Nå kan vi ta $-\theta$ i steden for θ i Eulers relasjon for å se viktig egenskap som vi kan bruke senere til å finne konjugate av en kompleks tall i eksponentiall form.

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= e^{i(-\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \end{aligned}$$

Vi vet fra trigonometri at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$. Så

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Eksponentiell form av et komplekst tall

Ved å bruke den polare formen husker vi at et komplekst tall med modul r og argument θ kan skrives som

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Det følger umiddelbart av Eulers relasjoner at vi også kan skrive dette komplekse tallet i eksponentiell form som $z = re^{i\theta}$.

Setning 2.5.7. *La r være modulen og θ være argumentet til et komplekst tall z. Så, eksponentiell form av et komplekst tall er*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

og

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}.$$

2.6 Absolutt verdi og polynomfunksjoner

Lemma 2.6.1. *La θ være et et irrasjonal tall, og la $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$. Da*

$$|e^{2\pi i h\theta}| = 1 \quad \text{og} \quad |e^{2\pi i h\theta} + 1| < 2.$$

Bevis. Først skal vi se på $|e^{2\pi i h\theta}|$. Vi vet at

$$e^{2\pi i h\theta} = \cos 2\pi i h\theta + i \sin 2\pi i h\theta.$$

Og vi vet fra trigonometri at

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

for alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Så fra kompleksetall teori

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i h\theta}| &= \sqrt{\cos^2 2\pi i h\theta + \sin^2 2\pi i h\theta} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nå skal vi se på $|e^{2\pi i h\theta} + 1| < 2$. Fra trekant ulikheten kan vi skrive

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i h\theta} + 1| &\leq |e^{2\pi i h\theta}| + |1| \\ &\leq 1 + 1 \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Men siden θ er et irrasjonal tall og $h \neq 0$, må $2\pi h\theta \neq 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Det betyr at $e^{2\pi i h\theta} \neq -1$. Så

$$|e^{2\pi i h\theta} + 1| < 2.$$

□

Lemma 2.6.2. *La $p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + \alpha_0, m \geq 1$ være et polynom med reelle koeffisienter. Da er*

$$p(x+h) - p(x) = g(x)$$

hvor $g(x)$ er et polynom med reelle koeffisienter og grad høyst $m-1$. Det vil si at

$$g(x) = \beta_{m-1}x^{m-1} + \beta_{m-2}x^{m-2} + \cdots + \beta_0$$

hvor for alle $0 \leq i \leq m-1, \beta_i \in \mathbb{R}$ og $\beta_{m-1} = \alpha_M \cdot M \cdot h$.

Bevis. Vi skal bruke induksjonsbevis. Når $m = 1$,

$$p_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Da

$$\begin{aligned} p_1(x+h) - p_1(x) &= \alpha_1(x+h) + \alpha_0 - (\alpha_1 x + \alpha_0) \\ &= \alpha_1 x + \alpha_1 h - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_0 \\ &= \alpha_1 h \end{aligned}$$

som er et konstant polynom, det vil si av grad 0. Så påstanden er sann når $m = 1$.

Når $m = M$,

$$p_M(x) = \alpha_M x^M + \alpha_{M-1}x^{(M-1)} + \cdots + \alpha_0$$

der $\alpha_M \neq 0$. Og vi antar at det er sant for $m = M$. Det vil si at

$$\begin{aligned} p_M(x+h) - p_M(x) &= \beta_{M-1}x^{M-1} + \beta_{M-2}x^{M-2} + \cdots + \beta_0 \\ &= g_{M-1}(x). \end{aligned}$$

Nå skal vi vise at det er sant for $m = M+1$. Når $m = M+1$,

$$\begin{aligned} p_{M+1}(x) &= \alpha_{M+1}x^{(M+1)} + \alpha_M x^M + \alpha_{M-1}x^{(M-1)} + \cdots + \alpha_0 \\ &= \alpha_{M+1}x^{(M+1)} + p_M(x). \end{aligned}$$

Så kan vi skrive

$$\begin{aligned} p_{M+1}(x+h) - p_{M+1}(x) &= \alpha_{M+1}(x+h)^{(M+1)} + p_M(x+h) - (\alpha_{M+1}x^{(M+1)} + p_M(x)) \\ &= \alpha_{M+1}((x+h)^{(M+1)} - x^{(M+1)}) + p_M(x+h) - p_M(x). \end{aligned}$$

Vi vet at fra vår induksjons antagelse at

$$p_M(x+h) - p_M(x) = g_{M-1}(x).$$

Og vi vet at

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

hvor $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ er et binomial faktor med n og k er positive heltall, $k \leq n$. Så blir

$$\begin{aligned} p_{M+1}(x+h) - p_{M+1}(x) &= \alpha_{M+1}(\binom{M+1}{0} x^{M+1} h^0 + \binom{M+1}{1} x^M h^1 + \cdots \\ &+ \binom{M+1}{M+1} x^0 h^{M+1} - x^{M+1}) + g_{M-1}(x) \\ &= \alpha_{M+1}(\binom{M+1}{1} x^M h + \binom{M+1}{2} x^{M-1} h^2 + \cdots \\ &+ \binom{M+1}{M+1} h^{M+1}) + g_{M-1}(x) \\ &= \gamma_M x^M + \gamma_{M-1} x^{(M-1)} + \cdots + \gamma_0 \\ &= h_M(x) \end{aligned}$$

hvor for alle $0 \leq j \leq M, \gamma_j \in \mathbb{R}$ og $\gamma_M = \alpha_{M+1} \cdot (M+1) \cdot h$ Det betyr at det er sant for $m = M+1$ som vi skulle vise. □

2.7 Tett følger

Før vi se på noen eksempel på u.d.mod 1, skal vi se på noen følger som er tett i intervallet $[0,1)$. Det er forskjell på u.d.mod 1 og tett følge. Det betyr at en følge kan være tett uten å være u.d.mod 1. Men alle følger som er u.d.mod 1, er også tette. Nå skal vi definere en tett følge og vi skal vise noen eksempel på følger som er tett.

Definisjon 2.7.1. En følge $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er tett i intervallet $[0,1)$, hvis for en vilkårlig $a \in [0,1)$ og $\epsilon > 0$, finnes det $l \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a - x_l| < \epsilon.$$

Eksempel 2.7.2. La α være et irrasjonal tall og $(\{n\alpha\})$ er en følge hvor $n = 1, 2, 3, \ldots$ og $\{n\alpha\}$ er desimaldelen av $n\alpha$. Følgen $(\{n\alpha\})$ er tett.

Bevis. Nå skal vi vise $(\{n\alpha\})$ er tett i intervallet $[0, 1)$, hvis for alle $\epsilon > 0$ og for alle $a \in [0, 1)$, finnes det $l \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a - \{l\alpha\}| < \epsilon.$$

La $\epsilon > 0$ være gitt.

For å vise dette, kan vi dele enhetsintervalle med N punkter

$$0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \frac{4}{N}, \ldots, \frac{N}{N} = 1.$$

Da kan vi lage N delintervaller i enhetsintervallet slik at

$$[0, 1) = [0, \frac{1}{N}) \cup [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}) \cup [\frac{2}{N}, \frac{3}{N}) \cup [\frac{3}{N}, \frac{4}{N}) \cup \cdots \cup [\frac{N-1}{N}, 1).$$

La $l([a, b))$ være lengden til intervallet $[a, b)$ slik $l|[a, b)| = b - a$. Nå kan vi ta N slik at $\frac{1}{N} \leq \epsilon$. Det betyr at hver delintervall har lengde som er mindre eller lik ϵ. Altså

$$l([0, \frac{1}{N})) = l([\frac{1}{N}, \frac{2}{N})) = l([\frac{2}{N}, \frac{3}{N})) = l([\frac{3}{N}, \frac{4}{N})) = \cdots = l([\frac{N-1}{N}, 1)) = \frac{1}{N} \leq \epsilon.$$

Siden $\{n\alpha\}$ er altid forskjellige irrasjonale tall for alle $n \in \mathbb{N}$ altså

$$\{i\alpha\} \neq \{j\alpha\} \text{ for alle } i, j \in \mathbb{N},$$

så når vi tar $N + 1$ elementer fra følgen

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{\alpha\},$$

vil det være minst et intervall $[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N})$, hvor $1 \leq r \leq N$ som inneholder to elementer. Men vi kan ikke si det hvis vi bare bruker N elementer fra følgen. La de to leddene være $\{m\alpha\}$ og $\{k\alpha\}$ og la

$$\{m\alpha\} > \{k\alpha\}.$$

Det betyr at

$$\{m\alpha\} - \{k\alpha\} < \epsilon.$$

Vi kan skrive $\{(m-k)\alpha\}$ slik

$$\begin{aligned}\{(m-k)\alpha\} &= m\alpha - k\alpha - [(m-k)\alpha] \\ &= \{m\alpha\} + [m\alpha] - \{k\alpha\} - [k\alpha] - [(m-k)\alpha] \\ &= \{m\alpha\} - \{k\alpha\} + [m\alpha] - [k\alpha] - [(m-k)\alpha] \\ &= \{m\alpha\} - \{k\alpha\} + H\end{aligned}$$

hvor $H \in \mathbb{Z}$.
La $m - k = l$, da kan vi skrive $\{(m-k)\alpha\}$ slik

$$\{l\alpha\} = \{m\alpha\} - \{k\alpha\} + H$$

For å vise $(\{n\alpha\})$ er tett, skal vi se i to tilfeller nemlig når l er positiv og når l er negativ.

1. Når l er positiv.

   Det betyr at $m > k$ og vi kan finne desimaldelen av $\{l\alpha\}$ på følgene måte

   $$\{l\alpha\} = \{m\alpha\} - \{k\alpha\} \ < \ \epsilon.$$

   Vi vet at nå har vi et ledd $\{l\alpha\}$, hvor l er $1 \leq l \leq N$ som ligger mellom 0 og ϵ altså i $[0, \epsilon]$.

   Nå skal vi se om det finnes et ledd som har verdien $2\{l\alpha\}$.

   $$\begin{aligned}2\{l\alpha\} &= 2(l\alpha - [l\alpha]) \\ &= 2l\alpha - 2[l\alpha]\end{aligned}$$

   siden $2\{l\alpha\} < 1$, da må $2[l\alpha]$ være lik $[2l\alpha]$. Så

   $$\begin{aligned}2\{l\alpha\} &= 2l\alpha - 2[l\alpha] \\ &= 2l\alpha - [2l\alpha] \\ &= \{2l\alpha\}.\end{aligned}$$

   Vi vet at $\{l\alpha\} < \epsilon$, da kan vi si

   $$2\{l\alpha\} = \{2l\alpha\} < 2\epsilon.$$

Det betyr at vi har et ledd $(2l)\alpha$, hvor $2l \in \mathbb{N}$ som har desimaldelen lik $2\{l\alpha\}$. Altså leddet $\{2l\alpha\}$ ligger i intervallet $[0, 2\epsilon)$.

Vi vet ikke om $\{2l\alpha\}$ ligger i intervallet $[0, \epsilon)$ eller i intervallet $[\epsilon, 2\epsilon)$. Men vi vet at

$$\{2l\alpha\} - \{l\alpha\} = \{l\alpha\} < \epsilon.$$

Vi kan finne også et ledd som har desimaldelen $3\{l\alpha\}$.

$$\begin{aligned}
3\{l\alpha\} &= 3(l\alpha - [l\alpha]) \\
&= 3l\alpha - 3[l\alpha] \\
&= 3l\alpha - [3l\alpha] \\
&= \{3l\alpha\}
\end{aligned}$$

Det betyr at leddet $(3l)\alpha$ ligger i intervallet $[0, 3\epsilon)$.

La $\epsilon_1 = \{l\alpha\}$, da

$$\epsilon_1 = \{2l\alpha\} - \{l\alpha\} = \{3l\alpha\} - \{2l\alpha\} = \cdots = \{Nl\alpha\} - \{(N-1)l\alpha\} = \{l\alpha\} \leq \epsilon.$$

Nå kan vi si at $\{l\alpha\} \in [\epsilon_1, 2\epsilon_1)$, $\{2l\alpha\} \in [2\epsilon_1, 3\epsilon_1)$ og $\{3l\alpha\} \in [3\epsilon_1, 4\epsilon_1)$.

La K være den største heltallet som er mindre enn $\frac{1}{\epsilon_1}$. Hvor $K \geq N$. Da kan vi finne de andre leddene på samme måte fram til 1 slik

$$(4l)\alpha, (5l)\alpha, (6l)\alpha, \ldots, (N \cdot l)\alpha, \ldots, (K \cdot l)\alpha$$

som ligger i intervallene henholdsvis

$$[4\epsilon_1, 5\epsilon_1), [5\epsilon_1, 6\epsilon_1), [6\epsilon_1, 7\epsilon_1), \ldots, [N\epsilon_1, (N+1)\epsilon_1), \ldots, [K\epsilon, 1).$$

Dette betyr at for alle $a \in [0, 1)$ har vi minst et ledd $\{(i \cdot l)\alpha\}$, hvor $1 \leq i \leq K$ slik at

$$|a - \{(i \cdot l)\alpha\}| < \epsilon.$$

2. Når l er negativ.

   Det betyr at $m < k$ og

$$\{l\alpha\} = \{m\alpha\} - \{k\alpha\} < \epsilon$$

$\{l\alpha\}$ ble negativ, så må vi finne positiv desmaldelen som følger:

La $l_1 = -l > 0$, da er

$$\begin{aligned}\{l_1\alpha\} &= \{-l\alpha\} \\ &= -\{l\alpha\} \\ &= 1 - \{l\alpha\}.\end{aligned}$$

Siden $\{l\alpha\} < \epsilon$, da blir det

$$\{l\alpha\} > 1 - \epsilon.$$

Med andre ord har vi et ledd $\{l_1\alpha\}$, hvor l_1 er $1 \leq l_1 \leq N$ som ligger mellom $(1 - \epsilon)$ og 1 altså $[(1 - \epsilon), 1)$. Vi kan skrive ved hjelp av ϵ_1 også slik

$$\{l_1\alpha\} = 1 - \epsilon_1.$$

Vi kan si at $\{l_1\alpha\} \in [(1 - \epsilon_1), 1)$ Nå skal vi se om det finnes et ledd som har desimaldelen lik $1 - 2\epsilon_1$ ved å bruke $\{2l\alpha\}$ slik

$$\begin{aligned}\{2l_1\alpha\} &= \{-2l\alpha\} \\ &= -\{2l\alpha\} \\ &= 1 - \{2l\alpha\} \\ &= 1 - 2\epsilon_1.\end{aligned}$$

Det betyr at vi har et ledd $\{(2l_1)\alpha\}$ hvor $2l_1 \in \mathbb{N}$, som ligger i intervallet $[(1 - 2\epsilon_1), (1 - \epsilon_1))$.

Vi kan finne også et ledd som har desimaldelen $1-3\epsilon_1$. altså et ledd som har desimaldelen i intervallet $[(1 - 3\epsilon_1), (1 - 2\epsilon_1))$ ved å bruke samme metode. Det er $\{(3l_1)\alpha\}$.

Vi kan finne de andre leddene på samme måte fram til 0 slik

$$(4l)\alpha, (5l)\alpha, (6l)\alpha, \ldots, (N78l)\alpha, \ldots, (Kl)\alpha$$

som ligger i intervallene henholdsvis

$$[(1-4\epsilon_1),(1-3\epsilon_1)),[(1-5\epsilon_1),(1-4\epsilon_1)),[(1-6\epsilon_1),(1-5\epsilon_1)),\ldots,$$
$$[(1-N\epsilon_1),(1-(N-1)\epsilon_1)),\ldots,[0,(1-K\epsilon_1)).$$

Dette betyr at for alle $a \in [0,1)$ har vi minst et ledd $\{(i \cdot l_1)\alpha\}$, hvor $1 \leq i \leq K$ slik at

$$|a - \{(i \cdot l_1)\alpha\| < \epsilon.$$

□

2.8 Noen eksempler på tette og u.d.mod 1 følger

Vi har sett på teori om tette og u.d.mod 1 følger. Her skal vi se på noen følger som vi skal undersøke om er tette eller u.d.mod 1. Men først skal vi undersøke om de er tette eller ikke ved hjelp av grafer.

Eksempel 2.8.1. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1,2,3,\ldots$ hvor $\alpha = \frac{1}{3}$. Undersøk om (x_n) er tett eller ikke tett.

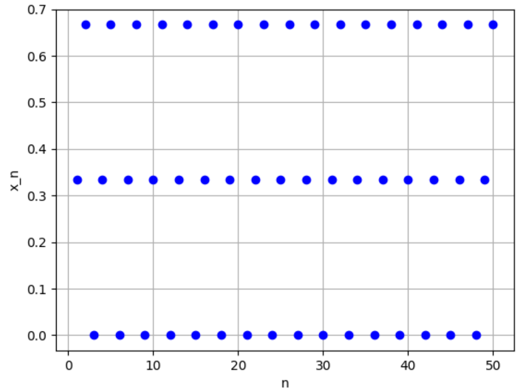
$$(x_n) = (\{\frac{1}{3}n\}) = \{\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},\ldots\}.$$

Det er ikke vanskelig å se at følgen har bare tre verdier nemlig $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ og 0 i enhetsintervallet. Så følgen er ikke tett. Men vi skal se en graf for å se følgen i Figure 2.11 når $n = 50$.
Grafen viser også at følgen $(\{\frac{1}{3}n\})$ ikke er tett.

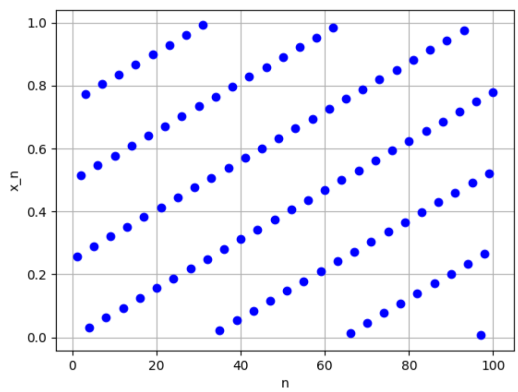
Eksempel 2.8.2. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1,2,3,\ldots$ hvor $\alpha = 1.2578$. undersøk om (x_n) er tett eller ikke.

$$(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}) = \{0.2578, 0.5156, 0.7734, 0.0312, 0.2890, \ldots\}.$$

Nå skal vi undersøke på følgen $(\{0.2578 \cdot n\})$ ved å bruke grafer. Vi skal se på følgen ved hjelp av grafer, når $n = 100, n = 1000$ og $n = 10000$.



Figur 2.11: $(x_n) = (\{\frac{1}{3}n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$, for $n = 50$



Figur 2.12: $(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots 99, 100,$

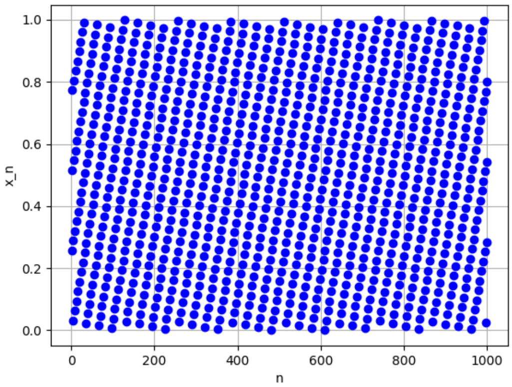
Som vi ser på grafene i Figure 2.12, Figure 2.13 og Figure 2.14, følgen $(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\})$ forandre seg ikke etter $n = 1000$. Det er på grunn av følgen er en periodisk følge med periode 1000. Dette betyr at følgen har bare 1000 forskjellige verier i enhetsintervallet $[0, 1)$.

Nå skal vi se på følgen når $n = 1001$ og vi skal se generalt når $n > 1000$ som følger.

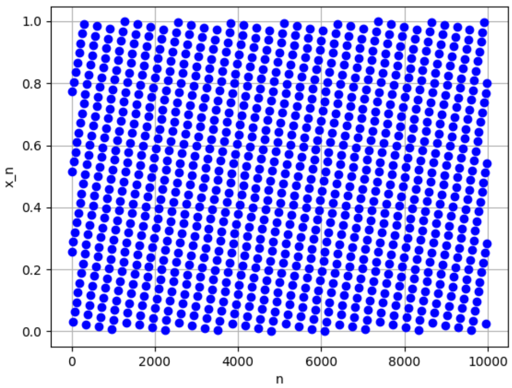
Følgen $(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}) = (\{\frac{12578}{1000} \cdot n\})$

Vi vet at for $n = 1$

$$x_1 = \{1.2578\} = 0.2578$$



Figur 2.13: $(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots 999, 1000$



Figur 2.14: $(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots 9999, 10000$

For $n = 1001$

$$\begin{aligned} x_{1001} &= \{\frac{12578}{1000} \cdot 1001\} \\ &= \{\frac{12578}{1000} \cdot (1000 + 1)\} \\ &= \{\frac{12578}{1000} \cdot 1000 + \frac{12578}{1000}\} \\ &= \{12578 + 1.2578\}. \end{aligned}$$

Siden $12578 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_{1001} &= \{1.2578\} \\ &= x_1 \\ &= 0.2578. \end{aligned}$$

Dette gjelder for alle $n > 1000$.

For alle $n > 1000$, kan vi skrive

$n = N(1000) + l$ hvor $N \in \mathbb{N}$ og $l \in \{1, 2, 3, \dots 999, 1000\}$. Da

$$\begin{aligned} x_n &= \{\frac{12578}{1000} \cdot n\} \\ &= \{\frac{12578}{1000} \cdot (N(1000) + l)\} \\ &= \{12578 \cdot N + \frac{12578}{1000} \cdot l\}. \end{aligned}$$

Siden $12578 \cdot N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &= \{\frac{12578}{1000} \cdot l\} \\ &= \{1.2578 \cdot l\}. \end{aligned}$$

Så følgen $(\{1.2578 \cdot n\})$ er ikke tett.

Nå skal vi generalisere følgen $(x_n) = (\{\alpha n\})$ for alle $\alpha \in \mathbb{Q}$. Og vi skal vise at alle følger $(\{\alpha n\})$ hvor α er rasjonal tall er ikke tett.

Bevis. Vi kan skrive α i form av brøk $\alpha = \frac{p}{q}$ hvor $p, q \in \mathbb{N}$.

Følgen $(\{\alpha n\})$ ser slik ut:

$$(\{\alpha n\}) = \{\{\alpha\}, \{\alpha 2\}, \{\alpha 3\}, \dots, \{\alpha q\}, \{\alpha(q+1)\}, \dots\}.$$

Nå skal vi vise følgen $(\{\alpha n\})$ har en endelig mengde av verdiger altså følgen har bare q fprskjellige verdier i $(0, 1]$. Dette betyr at for alle $n > q$ følgen (x_n) er

$$x_n \in \{\{\alpha\}, \{\alpha 2\}, \{\alpha 3\}, \dots, \{\alpha q\}\}.$$

For alle $n > q$, kan vi skrive

$$n = N \cdot q + l \text{ hvor } N \in \mathbb{N} \text{ og } l \in \{1, 2, 3, \dots, q\}.$$

Da

$$
\begin{aligned}
x_n &= \{\alpha n\} \\
&= \{\frac{p}{q} \cdot n\} \\
&= \{\frac{p}{q} \cdot (N \cdot q + l)\} \\
&= \{p \cdot N + \frac{p}{q} \cdot l\}.
\end{aligned}
$$

Siden $p \cdot N \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
x_n &= \{\frac{p}{q} \cdot l\} \\
&= \{\alpha l.\}
\end{aligned}
$$

Vi vet at en følge $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er tett hvis og bare hvis for alle $\epsilon > 0$ og for alle $a \in (0, 1]$finnes det $m \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a - x_m| < \epsilon.$$

Men for følgen $\{\alpha n\}$ kan vi finne $\epsilon > 0$ som strider med definisjonen. For eksempel la $\epsilon = \frac{1}{2q}$ og $a = \frac{1}{2q}$, da finnes ikke $m \in \mathbb{N}$ som oppfyller slik

$$|a - x_m| < \epsilon.$$

Dette betyr at følgen $(\{\alpha n\})$, hvor α er rasjonal tall er ikke tett. $\square$

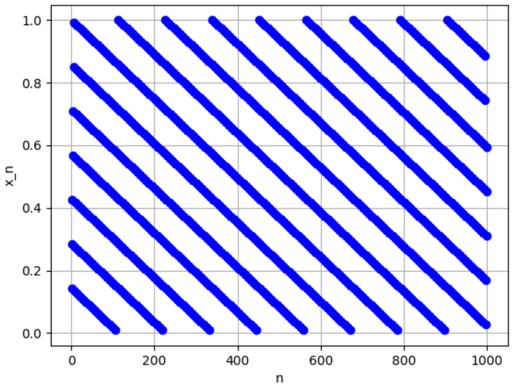
Eksempel 2.8.3. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha = \pi$. Undersøk om (x_n) er tett eller ikke tett.

$$(x_n) = \{0.1415926\ldots, 0.2831853\ldots, 0.42477796\ldots, 0.5663706144\ldots,\ \ldots\}.$$

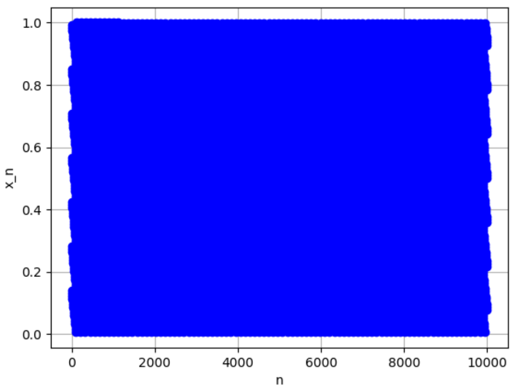
Nå skal vi undersøke følgen $(\{\pi \cdot n\})$ ved å bruke $n = 1000$ og $n = 10000$ i grafer for å ha bedre oversikt på følgen.

Når vi ser på grafene til $(\{\pi n\})$ i Figure 2.15 og Figure 2.16, ser vi at grafen til $(\{\pi n\})$ blir tettere og tettere når n øker. Det er på grunn av π er irrasjonal tall. Da fikk vi som resultat forskjellige verdier for alle $n \in \mathbb{N}$. Det betyr at for alle $\epsilon > 0$ og for alle $a \in (0, 1]$ finnes det $m \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a - x_m| < \epsilon.$$



Figur 2.15: $(x_n) = (\{\pi \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots 999, 1000$



Figur 2.16: $(x_n) = (\{\pi \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots 9999, 10000$

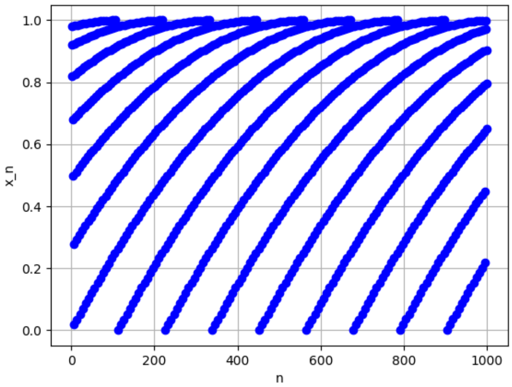
Som vi har bevist i Eksempel 2.7.2, er følgen $(\{\pi n\})$ tett.

Eksempel 2.8.4. La følgen $(x_n) = (1 - \{\pi n\}^2), n = 1, 2, 3, \ldots$. Undersøk om følgen (x_n) er tett eller ikke.

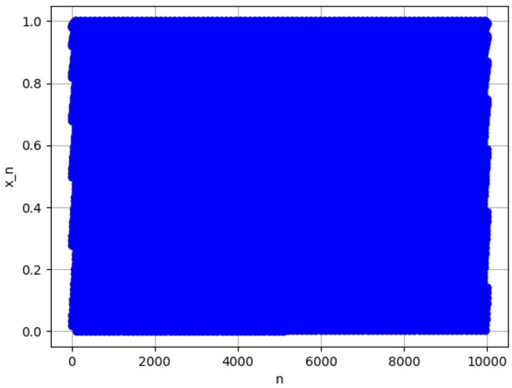
$$(x_n) = (1 - \{\pi\}^2), 1 - \{\pi 2\}^2, 1 - \{\pi 3\}^2, \ldots\}.$$

$$(x_n) = \{0.13039559\ldots, 0.521582395\ldots, 0.17356039\ldots, \ \ldots\}.$$

Nå skal vi undersøke følgen $(x_n) = (1 - \{\pi n\}^2)$ ved å bruke $n = 1000$ og $n = 10000$ i grafer for å ha bedre oversikt på følgen når vi øker n.



Figur 2.17: $(x_n) = (1 - \{\pi n\}^2), n = 1, 2, 3, \ldots 999, 1000$



Figur 2.18: $(x_n) = (1 - \{\pi n\}^2), n = 1, 2, 3, \ldots 9999, 10000$

Når vi ser på grafene til $(1 - \{\pi n\}^2)$ i Figure 2.17 og Figure 2.18, merker vi at grafene blir tettere og tettere når vi øker n. Selv om følgen $1 - (\{\pi n\})^2$ er mer tettere når vi nærmere seg mot 1 enn når vi nærmere seg mot 0, er følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ tett.

Vi kan ikke stole på grafer for å bevise følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ er tett. Men vi har brukt dem som et verktøy til å illustrere følgen. Nå skal vi bevise at følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ er tett som følger:

Bevis. Vi vet fra Eksempel 2.8.3 at $(\{n\pi\})$ er tett. Det vil si at for en gitt

$\epsilon > 0$ og $0 \leq a < 1$, finnes det $n \in \mathbb{N}$ slik at

$$|\{n\pi\} - a| < \epsilon.$$

Nå skal vi bruke samme prinsipp for å vise følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ er tett.

La $0 \leq a < 1$ og $\epsilon > 0$. Vi skal vise at det finnes $m \in \mathbb{N}$ slik at

$$|1 - \{\pi m\}^2 - a| < \epsilon. \tag{2.2}$$

For å vise at det finnes en m som oppfyller ulikhet (2.2), skal vi starte ved å la $\delta > 0$. Siden $0 \leq \sqrt{1-a} \leq 1$, finnes det $m \in \mathbb{N}$ slik at

$$|\{\pi m\} - \sqrt{1-a}| < \delta.$$

Da vil

$$\begin{gathered}
-\delta < \{\pi m\} - \sqrt{1-a} < \delta \\
\sqrt{1-a} - \delta < \{\pi m\} < \sqrt{1-a} + \delta \\
(\sqrt{1-a} - \delta)^2 < \{\pi m\}^2 < (\sqrt{1-a} + \delta)^2 \\
1 - (\sqrt{1-a} + \delta)^2 < 1 - \{\pi m\}^2 < 1 - (\sqrt{1-a} - \delta)^2.
\end{gathered}$$

Nå skal vi se på $1 - (\sqrt{1-a} + \delta)^2$ og $1 - (\sqrt{1-a} - \delta)^2$.

$$\begin{aligned}
1 - (\sqrt{1-a} + \delta)^2 &= 1 - ((\sqrt{1-a})^2 + 2\delta\sqrt{1-a} + (\delta)^2) \\
&= 1 - 1 + a - 2\delta\sqrt{1-a} - \delta^2 \\
&= a - \delta(2\sqrt{1-a} + \delta).
\end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned}
1 - (\sqrt{1-a} - \delta)^2 &= 1 - ((\sqrt{1-a})^2 - 2\delta\sqrt{1-a} + (\delta)^2) \\
&= a + \delta(2\sqrt{1-a} - \delta).
\end{aligned}$$

Da blir

$$a - \delta(2\sqrt{1-a} + \delta) < 1 - \{\pi m\}^2 < a + \delta(2\sqrt{1-a} - \delta)$$

$$-\delta(2\sqrt{1-a} + \delta) < 1 - \{\pi m\}^2 - a < \delta(2\sqrt{1-a} - \delta). \tag{2.3}$$

Siden $\delta > 0$ vet vi at

$$\delta(2\sqrt{1-a}+\delta) > \delta(2\sqrt{1-a}-\delta).$$

Så skal vi ta δ slik at

$$\delta(2\sqrt{1-a}+\delta) < \epsilon.$$

Da vet vi at $\delta(2\sqrt{1-a}-\delta) < \epsilon$.
Nå kan vi skrive ulikhet (2.3) som følger

$$-\epsilon < 1 - \{\pi m\}^2 - a < \epsilon.$$

Altså

$$|1 - \{\pi m\}^2 - a| < \epsilon.$$

Det var det som vi skulle vise for å si følgen $(1 - \{\pi m\}^2)$ er tett. $\square$

Men følgen er ikke u.d.mod 1 fordi følgen er tettere når vi nærmere til 1 enn til 0. Det betyr at vi har større sannsynlighet for et vilkårlig element fra følgen havner rundt 1 enn rundt 0.

Nå skal vi se de eksemplene ovenfor om de er u.d.mod 1 eller ikke.

Eksempel 2.8.5. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha = \frac{1}{3}$. Undersøk om (x_n) er u.d.mod 1 eller ikke.

$$(x_n) = (\{\frac{1}{3}n\}) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\}.$$

Vi skal bruke definisjon av u.d.mod 1

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b), N; (x_n))}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b - a.$$

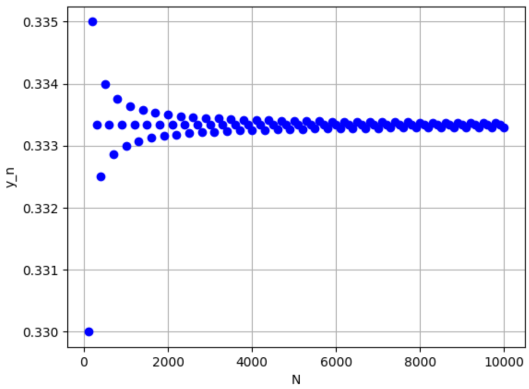
For å undersøke om (x_n) er u.d.mod 1, skal vi bruke grafer og definisjon av øvre og nedre grense til følger.
Vi skal bruke

$$y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \text{ hvor } N \in \{100, 200, 300, \ldots\}$$

for å lage grafer. Først skal vi finne øvre og nedre grense til y_N fra grafen.Etter på skal vi se på øvre og nedre grense for å sjekke om grensen til y_N eksisterer eller ikke. Til slutt skal vi sjekke grense verdi med definisjon av u.d.mod 1. Det er viktig å huske at dette gjelder for alle $[a, b) \cup [0, 1)$.

Nå skal vi lage en graf av y_N i intervallet $[0.5, 0.75)$ slik

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{\frac{1}{3} \cdot n\}).$$



Figur 2.19: $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{\frac{1}{3} \cdot n\})$

Vi kan se i Figure 2.19 at vi har både øvre og nedre grense som er lik $\frac{1}{3}$. Dette betyr at y_N konvergerer mot $\frac{1}{3}$ når $N \to \infty$ slik:

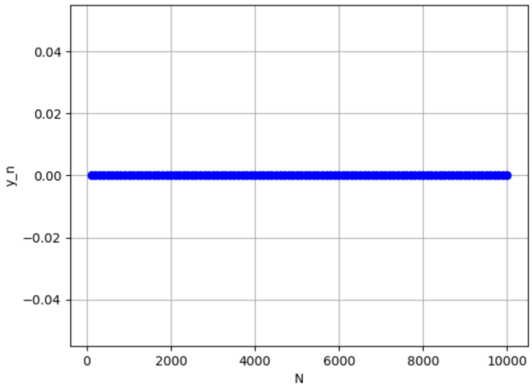
$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = \frac{1}{3}$$

Men vi vet at $0.75 - 0.5 = 0.25$ og det er forskjellig fra $\frac{1}{3}$ altså $\lim_{N\to\infty} y_N = \frac{1}{3} \neq 0.25$.

Vi kan se også på $y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\})$ i intervallet $[0.1, 0.2)$ slik

$$y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0,2)}(\{x_n\}).$$

Grafen til $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(\{\frac{1}{3} \cdot n\})$ er i Figure 2.20.



Figur 2.20: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(\{\frac{1}{3}\cdot n\})$

I grafen kan vi se at vi har både øvre og nedre grense som er lik 0. Da y_N konvergerer mot 0 når $N \to \infty$ slik

$$\varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(\{x_n\}) = \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(\{x_n\}) = 0.$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0 \neq (0.2 - 0.1).$$

Så (x_n) er ikke u.d.mod 1.

Eksempel 2.8.6. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha = 1.2578$. Undersøk om (x_n) er u.d.mod 1 eller ikke.

$$(x_n) = (\{1.2578 \cdot n\}) = \{0.2578, 0.5156, 0.7734, 0.0312, 0.2890, \ldots\}.$$

Vi skal bruke definisjon av u.d.mod 1

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b), N; (x_n))}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b - a.$$

For å undersøke om (x_n) er u.d.mod 1, skal vi bruke grafer og definisjon av øvre og nedre grense til følger.

Vi skal bruke

$$y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \text{ hvor } N \in \{100, 200, 300, \ldots\}$$

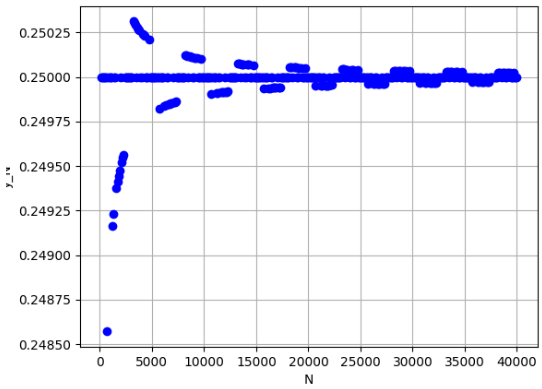
for å lage grafer.

La $y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{1.2578 \cdot n\})$.

Nå skal vi lage en graf av y_N i intervallet $[0.5, 0.75)$ slik

$$y_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{1.2578 \cdot n\})$$

i Figure 2.21.



Figur 2.21: $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{1.2578 \cdot n\})$

Som vi ser grafen i Figure 2.21, har vi både øvre og nedre grense som er lik 0.25. Dette betyr at y_N konvergerer mot 0.25 når $N \to \infty$ slik:

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.5,0.75)}(\{x_n\}) = 0.25.$$

Vi vet at $0.75 - 0.5 = 0.25$. Det betyr at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.25 = 0.75 - 0.5$.

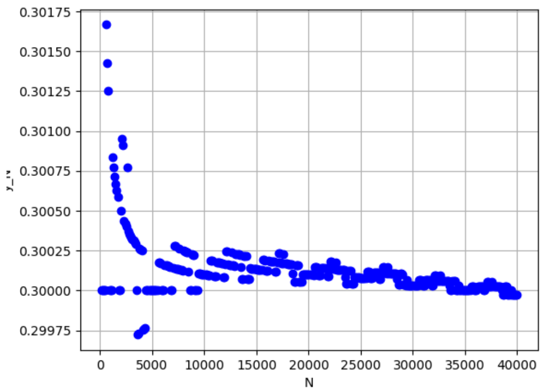
Vi kan se y_N i intervallet $[0.1, 0.4)$ for å undersøke mer slik

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.4)}(\{1.2578 \cdot n\})$$

i Figure 2.22

I Figure 2.22 kan vi se at vi har både øvre og nedre grense som er lik 0.3. Da y_N konvergerer mot 0.3 når $N \to \infty$ slik

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.4)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.4)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.4)}(\{x_n\}) = 0.3.$$



Figur 2.22: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.4)}(\{1.2578 \cdot n\})$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0.3 = (0.4 - 0.1).$$

Følgen $(\{1.2578{\cdot}n\})$ oppfyller definisjonen til u.d.mod 1 i intervallene $[0.5, 0.75)$ og $[0.1, 0.4)$. Men for å si $(\{1.2578 \cdot n\})$ er u.d.mod 1 må vi undersøke mer om følgen, når intervallet $[a, b)$ går mot 0. Da kan vi ta $[a, b) = [0.100001, 0.10001)$ for å se om det stemmer med definisjonen til u.d.mod 1 ved hjelp av graf slik

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{1.2578 \cdot n\})$$

i Figure 2.23.

I Figure 2.23 kan vi se at vi har både øvre og nedre grense som er lik 0. Da y_N konvergerer mot 0 når $N \to \infty$

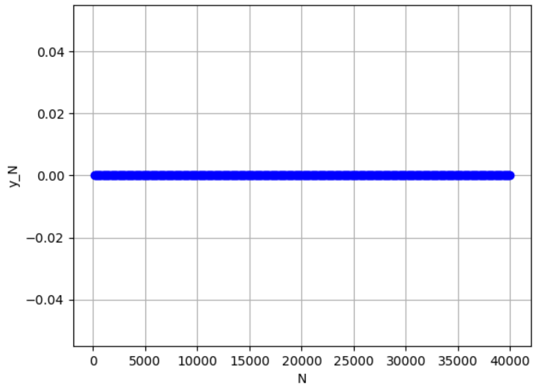
$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001-0.10001)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001-0.10001)}(\{x_n\}) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001-0.10001)}(\{x_n\}) = 0.$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0 \neq (0.10001 - 0.100001).$$

Vi kan ikke stole på grafen for å si $1.2578n$ er ikke u.d.mod 1. Men i neste kapittel skal vi bruke Weyl kriterium for å vise følgen $(\{\alpha n\})$, hvor α er rasjonaltall er ikke u.d.mod 1.



Figur 2.23: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{1.2578 \cdot n\})$

Eksempel 2.8.7. La følgen $(x_n) = (\{\alpha n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha = \pi$. Undersøk om (x_n) er u.d.mod 1 eller ikke.

$$(x_n) = \{0.1415926\ldots, 0.2831853\ldots, 0.42477796\ldots, 0.5663706144\ldots, \ \ldots\}.$$

Nå skal vi undersøke følgen $(\{\pi \cdot n\})$ ved å bruke $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{\pi \cdot n\})$ i grafer for å ha bedre oversikt på følgen.

Først la $[a, b)$ være $[0.1, 0.7)$,da y_N blir

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.7)}(\{\pi \cdot n\}).$$

Og grafen til y_N har vi i Figure 2.24.

Vi kan se grafen i Figure 2.24 at vi har både øvre og nedre grense som går mot 0.6. Dette betyr at y_N konvergerer mot 0.6 når $N \to \infty$.

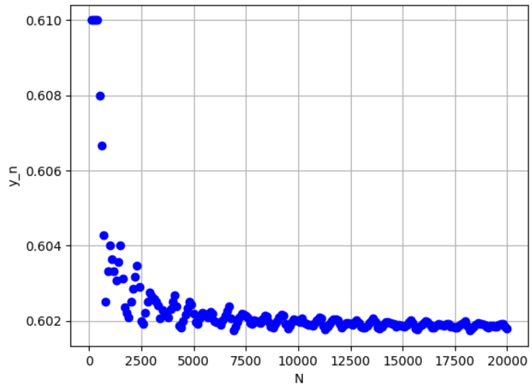
$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.7)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.7)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.7)}(\{x_n\}) = 0.6.$$

Vi vet at $0.7 - 0.1 = 0.6$. Det betyr at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.6 = 0.7 - 0.1$.

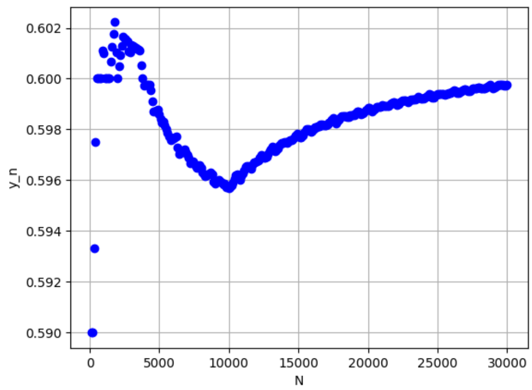
Nå skal vi ta $[a, b) = [0.3, 0.9)$ for å se y_N i en graf slik

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.3,0.9)}(\{\pi \cdot n\})$$

i Figure 2.25.



Figur 2.24: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.7)}(\{\pi \cdot n\})$



Figur 2.25: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.3,0.9)}(\{\pi \cdot n\})$

Vi kan se grafen i Figure 2.25 at vi har både øvre og nedre grense som går mot 0.6 når vi brukestor N. Dette betyr at y_N konvergerer mot 0.6 når $N \to \infty$.

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.3,0.9)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.3,0.9)}(\{x_n\}) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.3,0.9)}(\{x_n\}) = 0.6.$$

Vi vet at $0.9 - 0.3 = 0.6$. Det betyr at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.6 = 0.9 - 0.3$.

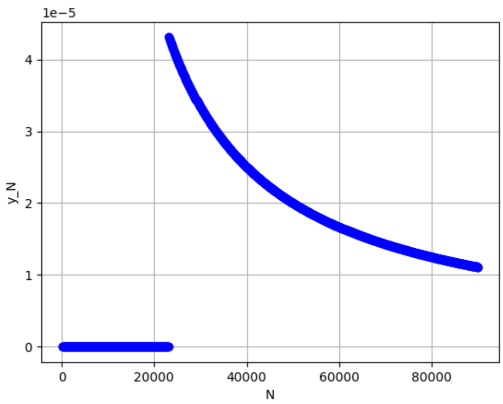
Følgen $(\{\pi \cdot n\})$ oppfyller definisjonen til u.d.mod 1 i intervallene $[0.1, 0.7)$ og $[0.3, 0.9)$. Men for å si $(\{\pi \cdot n\})$ er u.d.mod 1 må vi undersøke mer om følgen, når intervallet $[a, b)$ går mot 0. Det er fordi når α er rasjonaltal tall som vi har sett i Eksempel (2.8.6), finnes det intervall $[a, b)$ vhor $a, b \in [0, 1)$ som gir

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{\alpha \cdot n\}) = 0.$$

Det betyr at vi har intervall $[a, b)$ som er null sannsynlighet for an vilkårlig ledd fra følgen $(\{\alpha \cdot n\})$, hvor α er rasjonal tall som havner i intervallet $[a, b)$. Så vi skal prøve å undersøke følgen $(\{\pi n\})$ i intervallet $[a, b)$ som går mot null for å analysere mer. Da kan vi ta $[a, b) = [0.100001, 0.10001)$ for å se om det stemmer med definisjonen til u.d.mod 1 ved hjelp av graf slik

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{\pi \cdot n\})$$

i Figure 2.26.



Figur 2.26: $y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{\pi \cdot n\})$

Vi kan se i Figure 2.26 at vi har både øvre og nedre grense som går mot 0.9×10^{-5} når vi tar stor N. Det er vanskelig å konkludere at y_N konvergerer mot 0.9×10^{-5}. Men grafen indikerer at y_N går mot 0.9×10^{-5} som er vår ønske slik at undersøkelsen skal støtte oss for å si følgen $(\{\pi n\})$ er u.d.mod 1. Dette betyr at vi skal akseptere y_N konvergerer mot 0.9×10^{-5} når $N \to \infty$ slik:

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001,0.10001)}(\{x_n\}) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.100001, 0.10001)}(\{x_n\}) = 0.9 \times 10^{-5}.$$

Vi vet at $0.10001 - 0.100001 = 0.9 \times 10^{-5}$. Det betyr at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.9 \times 10^{-5} = 0.10001 - 0.100001$.

Så det ser ut som at følgen $(x_n) = (\{\pi \cdot n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1. Men vi skal bevise dette i neste kapittel ved hjelp av Weyl kriterium.

Eksempel 2.8.8. La følgen $(x_n) = (1 - \{\pi n\}^2), n = 1, 2, 3, \ldots$. Undersøk om følgen (x_n) er u.d.mod 1 eller ikke.

$$(x_n) = \{1 - \{\pi\}^2, 1 - \{\pi 2\}^2, 1 - \{\pi 3\}^2, \ldots\}$$

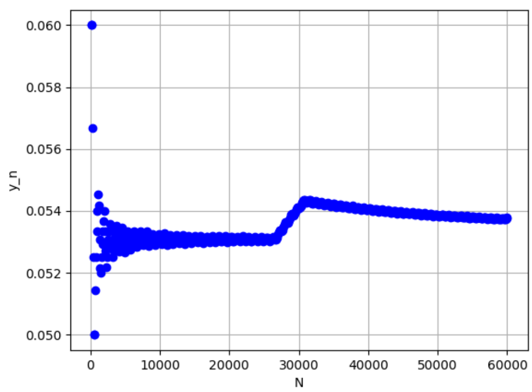
$$(x_n) = \{0.13039559\ldots, 0.521582395\ldots, 0.17356039\ldots,\ \ldots.\}$$

Nå skal vi undersøke følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ ved å bruke $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(1 - \{\pi n\}^2)$. i grafer for å ha bedre oversikt på følgen.

Først la $[a, b)$ være $[0.1, 0.2)$,da y_N blir

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(1 - \{\pi n\}^2)$$

Og grafen til y_N ser slik ut i Figure 2.27.



Figur 2.27: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(1 - \{\pi n\}^2)$

I Figure 2.27 kan vi se at grafen stablisere seg mellom 0.052 og 0.056. Og det ser ut som grafen går mot 0.054 når vi tar stor N. Men det er ganske tydelig at grafen konvergerer ikke mot 0.1 som er vår ønske slik at undersøkelsen støtter oss for å si følgen er u.d.mod 1. Så kan vi si at y_N konvergerer mot 0.054 som er forskjellig fra $0.2 - 0.1 = 0.1$. Altså

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \overline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} y_N = 0.054.$$

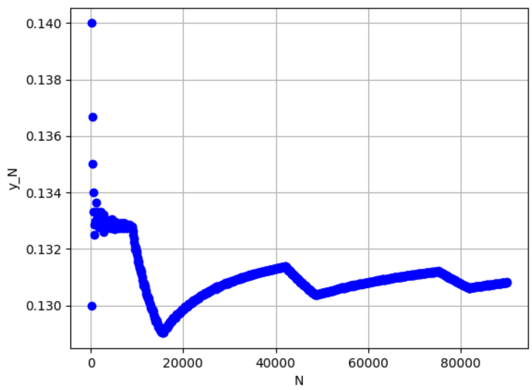
Og

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0.054 \neq 0.1 = 0.2 - 0.1.$$

Nå skal vi se y_N i intervallet nærmere mot 1 for å undersøke mer på følgen. La $[a,b) = [0.8, 0.9)$, da y_N blir

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.8,0.9)}(1 - \{\pi n\}^2)$$

Og vi skal se $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(1-(\{\pi n\})^2)$ i en graf for å finne ut hvordan y_N konvergerer når $N \to \infty$. Grafen til $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.8,0.9)}(1 - \{\pi n\}^2)$ er i Figure 2.28.



Figur 2.28: $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.8,0.9)}(1 - \{\pi n\}^2)$

Vi kan ikke konkludere konvergense av følgen fra grafen i Figure 2.28. Men kan vi se at grafen stablisere seg mellom 0.130 og 0.132. Og det ser ut som grafen går mot 0.131 når vi tar stor N. Men det er ganske tydelig at grafen konvergerer ikke mot 0.1 som er vår ønske slik at undersøkelsen støtter oss for å si følgen er u.d.mod 1. Så kan vi si at y_N konvergerer mot 0.131 som er forskjellig fra $0.9 - 0.8 = 0.1$. Altså

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \overline{\lim}_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} y_N = 0.131$$

Og

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0.131 \neq 0.1 = 0.9 - 0.8.$$

Vi har sett tidligere i Eksempel2.2 at følgen $(1-\{\pi n\}^2)$ er tett. Men når vi ser følgen i en funksjon y_N på intervallet $[0.1, 0.2)$ slik $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.1,0.2)}(1 - \{\pi n\}^2)$. Da har vi fant ut at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.054 < 0.1 = 0.2 - 0.1$. Og når vi tar intervallet $[0.8, 0.9)$ til y_N slik $y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0.8,0.9)}(1 - \{\pi n\}^2)$. Da har vi fant ut at $\lim_{N\to\infty} y_N = 0.131 > 0.1 = 0.9 - 0.8$. Dette betyr at selv om følgen $1 - (\{\pi n\})^2$ er tett i enhetsintervallet $[0, 1)$, er den tettere i intervallet $[0.8, 0.9)$ enn i intervallet $[0.1, 0.2)$. Fordi vi har stor sannsynlighet som er 0.131 for å finne et ledd i intervallet $[0.8, 0.9)$ enn sannsynligheten som er 0.054 for å finne et ledd i intervallet $[0.1, 0.2)$ fra følgen $1 - (\{\pi n\})^2$. Så, Følgen $1 - (\{\pi n\})^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ er ikke u.d.mod 1. Men vi skal bruke Weyl kriterium i kapittel 2 for å bevise følgen $(x_n) = 1(\{\pi n\})^2, n = 1, 2, 3,$ er ikke u.d.mod 1.

Kapittel 3

Noen metoder for å vise at en følge er uniformt fordelt

Som vi har sett I kapittel 1 kan vi undersøke følger for å se om de er u.d.mod 1 eller ikke. Men det tar mye tid og arbeid for å vise dette ved hjelp av grafer. I tillegg kan vi ikke stole på grafer for å konkludere om de er u.d.mod 1 eller ikke. Derfor trenger vi gode metoder som vi kan bruke som et verktøy for å vise en følge er u.d.mod 1. Det finnes mange forskjellige følger som er vanskelig å vise om de er u.d.mod 1 eller ikke. Derfor finnes det flere metoder som kan hjelpe oss for å vise enklere om de er u.d.mod 1 eller ikke. Noen ganger er det lurt å bruke kombinasjon av to eller tre metoder for å vise en følge er u.d.mod 1.

I denne kapittel skal vi se på noen metoder for å vise at en følge er u.d.mod 1. Metodene som vi skal se I denne kapittel er Weyl kriterium, Van der Courput differensteorem, Fjers teorem.

3.1 Flere ekvivalente formuleringer av uniform fordeling modulo 1

3.1.1 Bruk av kontinuerlige funksjoner

Weyl utviklet en teori fra likning (1.8) slik at det gjelder til alle kontnuerlige funksjoner ved hjelp av Remann integral [KN, s. 2 - 3].

Teorem 3.1.1. *Følgen $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ er u. d. mod. 1 hvis og bare hvis for alle reelle kontinuerlige funksjoner f som er definert i det lukkede enhetsintervallet $I = [0, 1]$, så er*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Bevis. For å bevise teoremet, har vi to deler. Den første, antar vi at $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod. 1. Og vi skal vise at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

når f er en kontinuerlig funksjon.
La f være en kontinuerlig funksjon og $\epsilon > 0$. Alle kontinuerlige funksjoner er Riemann-integrerbar funksjoner. Så har vi to trappefunksjoner f_1 og f_2 slik at

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \ \text{ for alle } x \in I$$

og slik at

$$\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))\ dx \ \le \ \epsilon.$$

Da blir

$$\int_0^1 f_2(x)\ dx - \int_0^1 f_1(x)\ dx \ \le \ \epsilon$$

$$\int_0^1 f_2(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)\ dx. \tag{3.1}$$

Fra Riemann-integral har vi sett at hvis $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ for alle $x \in I$, er

$$\int_0^1 f_1(x)\ dx \le \int_0^1 f(x)\ dx \le \int_0^1 f_2(x)\ dx. \tag{3.2}$$

Det følger av (3.1) og (3.2) at

$$\int_0^1 f(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)\ dx.$$

Siden f_1 er trappefunksjon og $\{x_n\}$ er u.d.mod. 1, vet vi fra likning (1.8) at

$$\int_0^1 f(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)\ dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}).$$

Vi vet ikke om $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})$ eksisterer. Men vi vet at $f_1(\{x_n\}) \le f(\{x_n\})$ for alle $x \in [0,1]$ og $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\})$ eksisterer. Nå vet vi at nedre grense til $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})$ må være større eller lik enn grensen til $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\})$. Det vil si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \le \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}).$$

Og fra egenskapen til øvre og nedre grense, altså $\varliminf f \le \varlimsup f$ kan vi skrive

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \le \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}).$$

Nå kan vi skrive hele slik

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)\ dx &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \le \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\ &\le \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}) \\ &= \int_0^1 f_2(x)\ dx \le \int_0^1 f(x)\ dx + \epsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dette gjelder for alle $\epsilon > 0$. Når vi tar $\epsilon \to 0$ vil både

$$\int_0^1 f(x)\ dx - \epsilon \to \int_0^1 f(x)\ dx$$

og

$$\int_0^1 f(x)\ dx + \epsilon \to \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Slik at fra ulikheten (3.1) får vi at

$$\int_0^1 f(x)\ dx \le \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Men da må alle ulikheter være likhet

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Det betyr den øvre og nedre grense til $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})$ må være like. Alstå $\varliminf \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \varlimsup \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})$. Da vil i følge egenskapen til øvre og nedre grense, grensen til f eksisterer og er lik øvre eller nedre grense. Vi kan skrive dette slik:

$$\varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Som viser at hvis $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1, er det

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

for alle f som er kontinuerig funksjon.

Nå skal vi vise den andre delen ved å la $(x_n), 1, 2, 3, \ldots$ være en gitt følge og antar $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$ er sant for alle reelle kontinuerlige funksjoner definert i det lukkede enhetsintervallet I.

La $[a, b)$ være et vilkårlig delintervall av I og $\epsilon > 0$.

Fra Lemma 2.3.1 finnes det to kontinuerlige funksjoner $g_1(x)$ og $g_2(x)$ slik at

$$g_1(x) \le 1_{[a,b)}(x) \le g_2(x) \qquad \text{for alle} \qquad x \in I$$

og

$$\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))\ dx \le \epsilon.$$

Da har vi

$$\int_0^1 g_2(x)\ dx - \int_0^1 g_1(x)\ dx \le \epsilon$$

$$\int_0^1 g_2(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 g_1(x)\ dx.$$

Siden $g_1(x) \le 1_{[a,b)}(x) \le g_2(x)$ for alle $x \in I$ vil

$$\int_0^1 g_1(x)\ dx \le \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx \le \int_0^1 g_2(x)\ dx$$

og

$$\int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx - \epsilon \leq \int_0^1 g_1(x)\ dx.$$

Siden $\int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx = b-a$ og vi antar at $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$ for alle kontinuerlig funksjon f. Så blir

$$(b-a)-\epsilon \leq \int_0^1 g_1(x)\ dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(\{x_n\}).$$

Fra egenskapen til øvre og nedre grense som er $\underline{\lim}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \leq \overline{\lim}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})$ kan vi skrive slik

$$\begin{aligned}
(b-a)-\epsilon \leq & \int_0^1 g_1(x)\ dx \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(\{x_n\}) \leq \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \\
&\leq \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_2(\{x_n\}) \leq \\
&= \int_0^1 g_2(x)\ dx \leq (b-a)+\epsilon.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Når vi tar $\epsilon \to 0$ vil både $(b-a)-\epsilon$ og $(b-a)+\epsilon$ gå mot $b-a$ slik

$$(b-a)-\epsilon \to b-a$$

og

$$(b-a)+\epsilon \to b-a.$$

Nå kan vi få slik fra ulikhet (3.2)

$$b-a \leq \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \leq \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) \leq b-a.$$

Da må alle ulikhetene være likhet

$$b-a = \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b-a.$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = b-a.$$

Vi vet at $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N}$, slik at

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty}\frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} = b-a.$$

I følge definisjonen av u.d.mod 1, må $(x_n), n = 1,2,3,\ldots$ være u.d.mod 1. $\square$

Korollar 3.1.2. *Følgen (x_n) er u.d.mod 1 hvis og bare hvis for alle Riemann-integrerbar funksjon f på $I = [0,1]$, holder*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Bevis. For å bevise Korollar 3.1.2, skal vi ta to veier. Først antar vi $\{x_n\}$ er u.d.mod 1. Og vi skal vise

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

for alle Riemann-integrerbare funksjoner f.

La $f(x)$ være en Riemann-integrerbar på $I = [0,1]$ og $\epsilon > 0$. Da følger det fra definisjonen av Riemann-integral, at vi har to trappefunksjoner f_1 og f_2 slik at for alle $x \in I$ $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ og

$$\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))\ dx \ \le \ \epsilon$$

$$\int_0^1 f_2(x)\ dx - \int_0^1 f_1(x)\ dx \ \le \ \epsilon.$$

Her er det akkurat samme som den første delen av beviset I Teorem 3.1.1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\ dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)\ dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \\
&\le \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\
&\le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}) = \int_0^1 f_2(x)\ dx \\
&\le \int_0^1 f(x)\ dx + \epsilon.
\end{aligned}$$

Når $\epsilon \to 0$ det ser slik ut

$$\int_0^1 f(x)\,dx - 0 \le \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \int_0^1 f(x)\,dx + 0.$$

Da må alle ulikhetene være likhet

$$\int_0^1 f(x)\,dx - 0 = \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\,dx + 0.$$

Altså

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}).\end{aligned}$$

Nå skal vi vise den andre veien ved å la (x_n) være en følge og antar

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

er sant for alle Riemann-integrerbar funksjon f on $I = [0,1]$. Da vil (x_n) være u.d.mod 1.

For å vise den, la $[a,b)$ være en vilkårlig delintervall av I.

Vi vet at $1_{[a,b)}$ er Riemann-integrerbar funksjon. det betyr at i følge vår antagelse

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) &= \int_0^1 1_{[a,b)}(x)\ dx \\ &= b-a.\end{aligned}$$

Vi vet at $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N}$, slik at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[a,b)}(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} = b-a.$$

I følge definisjonen av u.d.mod 1, må $(x_n), n = 1,2,3,\ldots$ være u.d.mod 1. $\square$

Korollar 3.1.3. *Følgen* $(\{x_n\})$*er u.d.mod 1 hvis og bare hvis for alle kontinuerlige funksjoner f på $\mathbb{R}$ som tar kompøekse verdier og har periode* 1*, så er*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

Bevis. For å bevise Korollar 3.1.3, skal vi ta to veier. Først antar vi $(\{x_n\})$ er u.d.mod 1. Og vi skal vise

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

når $f(x)$ er en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

der $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er reelle funksjoner med periode 1.

For at $f(x)$ skal være kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}$, så må $f_1(x)$ og $f_2(x)$ være kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}$ som gir reelle verdier. Da

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (f_1(\{x_n\}) + i f_2(\{x_n\})) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) + i \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}).\end{aligned}$$

Fra Teorem 3.1.1 vet vi for $(\{x_n\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod. 1 at $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx$ for alle reelle-verdi kontinuelig funksjon f. Så

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) &= \int_0^1 f_1(x)\ dx + i\ \int_0^1 f_2(x)\ dx \\ &= \int_0^1 f_1(x)\ d(x) + \int_0^1 i\ f_2(x)\ dx \\ &= \int_0^1 (f_1(x) + i\ f_2(x))\ dx \\ &= \int_0^1 f(x)\ dx.\end{aligned}$$

Nå skal vi vise den andre veien ved å la (x_n) være en følge og antar

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\ dx \tag{3.5}$$

være sant for alle komplekse kontinuerlige funksjoner med periode 1.

Hvis $f(x)$ er en reell funksjon, så er $f(x)$ en spesiell kompleks funksjon slik at (3.5) også riktig for denne.

Så i følge Teorem 3.1.1, må $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ være u.d.mod 1.

$\square$

Nå skal vi se Weyl kriterium som er en av de grunnleggede metoder for å vise en følge er u.d.mod 1 eller ikke. Men først skal vi se på Weierstrass teorem som kan hjelpe oss for å bevise Weyl kriterium.

3.1.2 Weierstrass teorem

Vi har to variasjoner av et teorem av Weierstrass. Det er når funksjonen er reell. Det vil si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og når funksjonen er kompleks, Det vil si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Teorem 3.1.4. *Polynomene ligger tett i $C([a,b],\mathbb{R})$ hvor C er en kontinuerlig funksjon for alle $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Det vil si at for en hver kontinuerlig funksjon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ og $\epsilon > 0$, så eksistere det et polynom $p(x)$ slik at*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \qquad \textit{for alle} \quad x \in [a,b] \tag{3.6}$$

Her skal vi se på en kompleks funksjon Z for å beskrive et trigonometrisk polynom.
La $Z = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = e^{2\pi i x}$ hvor $x \in [0,1]$.
Nå kan vi lage et trigonometrisk polynom $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ slik:

$$g_h(x) = e^{2\pi i h x} = \cos 2\pi h x + i \sin 2\pi h x \qquad \text{hvor} \qquad h \in \mathbb{Z}$$

$g_h(x)$ er periodisk funksjon med periode 1. Dette betyr at $g_h(x) = g_h(x+1)$. Vi kan skrive $g_h(x)$ på en enkelt måte slik at vi kan se den trigonometrisk polynom lettere slik:

$$\begin{aligned} g_h(x) &= e^{2\pi i h x} \\ &= (e^{2\pi i x})^h \\ &= Z^h. \end{aligned}$$

Da kan vi skrive

$$\psi_h(z) = z^h \qquad \text{hvor} \qquad z \in \Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Nå kan vi tenke på z^h som et polynom i z selv om h kan være negativ også. Og vi kan skrive mer generalt slik

$$g(x) = \sum_{h=-H}^{H} C_h e^{2\pi i h x} \qquad \text{hvor} \qquad C_h \in \mathbb{C}.$$

Da kan vi kalle $g(x)$ et trigonometrisk polynom. Nå kan vi se på det andre Weierstrass teoremet slik.

Teorem 3.1.5. *De trigonometriske polynomene ligger tett i $C([0,1],\mathbb{C})$, hvor $C([0,1],\mathbb{C}) errommetavallekontinuerligefunksjonerf$: [0,1] $\to \mathbb{C}$. Det vil si at for en hver kontinuerlig funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ og $\epsilon > 0$, så eksisterer det et trigonometrisk polynom $\psi(x) = \sum_{h=-H}^{H} C_h e^{2\pi i h x}$ slik at*

$$|f(x) - \psi(x)| < \epsilon \qquad \textit{for alle} \quad x \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Vi skal ikke bevise Weierstrass teorem for å begrense temaet. Men i steden skal vi fokusere mer på Weyl kriterium.

3.1.3 Weyl kriterium

Funksjonene f på formen $f(x) = e^{2\pi i h x}$ hvor h er et heltall som ikke er null, tilfredsstiller betingelsene for Korollar 3.1.3. Således, hvis (x_n) er u.d.mod 1, vil relasjonen $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx$ være tilfredsstilt for slike f. Det er et viktig fakta i teorien om u.d.mod 1 at disse funksjonene allerede er tilstrekkelige til å bestemme u.d.mod 1 av en følge. Nå skal vi se på Weyl kriterium teorem [KN, s. 7 - 9].

Teorem 3.1.6. *Følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1 hvis og bare hvis*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \qquad \textit{for alle } h \in \mathbb{Z}, \quad h \neq 0. \tag{3.8}$$

Vi skal bevise Weyl kriterium i to deler. Den første delen er ved å anta (x_n) er u.d.mod 1, da skal vi vise $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$. Den andre delen er ved å anta $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$ er sant, da skal vi vise (x_n) er u.d.mod 1. Den andre delen er litt vanskelig. Men først skal vi ta den første delen.

Bevis. Antar at (x_n) er u.d.mod 1. Og vi har en kontinuerlig og periodik funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$f(x) = e^{2\pi i h x} = \cos 2\pi h x + i \sin 2\pi h x.$$

Det vil si at

$$f(x+1) = f(x) \qquad \text{for alle} \quad x \in [0,1].$$

Fra Korollar (3.1.3) vet vi at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

Da kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} &= \int_0^1 e^{2\pi i h x}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi h i} \cdot e^{2\pi i h x}|_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi h i} \cdot (e^{2\pi i h} - e^0) \\
&= \frac{1}{2\pi h i} \cdot (\cos 2\pi h + i \sin 2\pi h - 1) \\
&= \frac{1}{2\pi h i} \cdot (1 + 0 - 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

som skulle vises.

Nå skal vi se på den andre delen av beviset av Weyl kriterium teorem. Det vil si at vi skal anta

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$$

er sant for alle $h \in \mathbb{Z}, \quad h \neq 0$, da skal vi vise at (x_n) er u.d.mod 1. Det vil si at vi skal vise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\ dx \tag{3.9}$$

for alle kontinuerlige komplekse funksjoner f.

La $f(x)$ være en kompleks kontinuerlig funksjon og la $\epsilon > 0$. Så fra Weierstress teorem finnes det et trignometetrisk polynom $\psi(x) = \sum_{h=-H}^{H} C_h e^{2\pi i h x}$ slik at

$$|f(x) - \psi(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{for alle} \quad x \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Nå skal vi se at funksjonen $\psi(x)$ oppfyller likning (3.9), det vil si at

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) \to \int_0^1 \psi(x)\ dx$$

Nå skal vi starte med $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n)$ først

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=-H}^{H}C_h e^{2\pi i h x_n}\\
&= \sum_{h=-H}^{H}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}\\
&= \sum_{h=-H}^{-1}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n} + C_0\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i(0)x_n} + \sum_{h=1}^{H}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}.
\end{aligned}$$

Som vi antar i starten, vet vi at $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n} = 0$ for alle $h \in \mathbb{Z},\ \ h \neq 0$, da kan vi finne ut at $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{h=-H}^{-1}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n} = 0$ og $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{H}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n} = 0$.

Og vi vet at $e^{2\pi i(0)x_n} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ slik at

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i(0)x_n} = \frac{1}{N}\cdot N = 1.$$

Så

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{h=-H}^{-1}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n} + \lim_{N\to\infty}C_0\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i(0)x_n}\\
&\quad + \lim_{N\to\infty}\sum_{h=1}^{H}C_h\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}\\
&= 0 + C_0\cdot(1) + 0\\
&= C_0.
\end{aligned}$$

Vi har fant ut at $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n) = C_0$. Nå skal vi se på funksjonen $\psi(x_n)$ i integral slik

$$\begin{aligned}
\int \psi(x)\ dx &= \int_0^1 (\sum_{h=-H}^{H} C_h e^{2\pi i h x})\ dx \\
&= \int_0^1 (\sum_{h=-H}^{-1} C_h e^{2\pi i h x} + C_0 e^{2\pi i (0) x} + \sum_{h=1}^{H} C_h e^{2\pi i h x})\ dx \\
&= \int_0^1 \sum_{h=-H}^{-1} C_h e^{2\pi i h x}\ dx + \int_0^1 C_0 e^{2\pi i (0) x}\ dx + \int_0^1 \sum_{h=1}^{H} C_h e^{2\pi i h x}\ dx \\
&= \sum_{h=-H}^{-1} C_h \int_0^1 e^{2\pi i h x}\ dx + \int_0^1 C_0\ dx + \sum_{h=1}^{H} C_h \int_0^1 e^{2\pi i h x}\ dx \\
&= \sum_{h=-H}^{-1} C_h (\frac{1}{2\pi i h x} e^{2\pi i h x})|_0^1 + C_0 x|_0^1 + \sum_{h=1}^{H} C_h (\frac{1}{2\pi i h x} e^{2\pi i h x})|_0^1 \\
&= \sum_{h=-H}^{-1} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(e^{2\pi i h} - e^0) + C_0 + \sum_{h=1}^{H} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(e^{2\pi i h} - e^0)
\end{aligned}$$

$e^{2\pi i h} = \cos 2\pi h + i \sin 2\pi h = 1$ for alle $h \in \mathbb{Z}$ og $e^0 = 1$, da kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\int \psi(x)\ d(x) &= \sum_{h=-H}^{-1} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(1-1) + C_0 + \sum_{h=1}^{H} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(1-1) \\
&= \sum_{h=-H}^{-1} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(0) + C_0 + \sum_{h=1}^{H} C_h \cdot \frac{1}{2\pi i h x}(0) \\
&= 0 + C_0 + 0 \\
&= C_0.
\end{aligned}$$

Nå vet vi at

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) \to \int_0^1 \psi(x)\ dx$$

når $N \to \infty$. Det betyr at det finnes $N_0 \in \mathbb{N}$ slik at for $n > N_0$

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \int_0^1 \psi(x)\ dx| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.11}$$

Men det vi vil vise er

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_0^1 f(x)\ dx$$

når $N \to \infty$. Det betyr at det må finnes $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at for $N > N_1$

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx| \leq \epsilon. \tag{3.12}$$

For å vise likning (3.12), kan vi starte slik

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx| = |&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \int_0^1 \psi(x)\ dx \\
&+ \int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx|.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Fra trekant ulikheten som sier $|x+y| \leq |x| + |y|$ altså

$$
\begin{aligned}
|x+y+x| &\leq |x| + |y+z| \\
&\leq |x| + |y| + |z|.
\end{aligned}
$$

Nå kan vi skrive likning (3.13) slik

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx| \leq &|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n)| \\
&+ |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \int_0^1 \psi(x)\ dx| \\
&+ |\int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx|
\end{aligned}
$$

Fra likning (3.11) vet vi at $|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \int_0^1 \psi(x)\ dx| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for alle $n > N_0$. Og

$$
|\int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx| = |\int_0^1 (\psi(x) - f(x))\ dx|.
$$

Fra egenskapen til integrasjon vet vi $|\int f(x)\ dx| \leq \int |f(x)|\ dx$

$$
|\int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx| \leq \int_0^1 |\psi(x) - f(x)|\ dx.
$$

Fra likning (3.10) vet vi at $|\psi(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for alle $x \in [0,1)$ slik at

$$
\begin{aligned}
|\int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx| &\leq \int_0^1 |\psi(x) - f(x)|\ dx \\
&\leq \int_0^1 \frac{\epsilon}{3}\ dx \\
&= \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Og

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n)| = |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - \psi(x_n))|$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Fra trekant ulikheten vet vi at $|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - \psi(x_n))| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(f(x_n) - \psi(x_n)|$.

Og fra likning (3.10) vet vi at $|\psi(x_n) - f(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for alle x_n fordi alle $x_n \in [0,1)$ da

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n)| &= |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - \psi(x_n))| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(f(x_n) - \psi(x_n)| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Nå kan vi skrive likning (3.13) slik

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx| &\leq |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n)| \\
&+ |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(x_n) - \int_0^1 \psi(x)\ dx| \\
&+ |\int_0^1 \psi(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

for alle $n \in \mathbb{N}, n > \text{Max}\ \{N_0, N_1\}$. Det vil si at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

for alle kontinuerlige funksjoner f, I følge Teorem 3.1.1 må (x_n) være u.d.mod 1. □

Vi skal se på en korollar nedenfor for å vise u.d.mod 1 er symmetri. Det vil si at hvis (x_n) er u.d.mod 1, må $(-x_n)$ være u.d.mod 1.

Korollar 3.1.7. *La* $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ *er u.d.mod 1. Så følgen* $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ *er u.d.mod 1.*

Bevis. Vi skal bruke Weyl kriterium.
La $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$, så kan vi skrive

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(-h)x_n}.$$

Og la $H = -h$, da er $H \in \mathbb{Z}, \quad H \neq 0$. Så kan vi skrive

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i H x_n}.$$

Siden (αx_n) er u.d.mod 1 og H er $H \in \mathbb{Z}, \quad H \neq 0.$, i følge Weyl kriterium

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i H x_n} = 0.$$

Altså

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)} = 0.$$

Det betyr at i følge Weyl kriterium må følgen (x_n) være u.d.mod 1.

□

Nå skal vi se på noen eksempler som vi skal bruke Weyl kriterium for å vise u.d.mod 1 av følger.

3.1.4 Noen eksempler av Weyl kriterium

Her skal vi se på noen følger som kan vi vise at de er u.d.mod 1 ved hjelp av Weyl kriterium.

Setning 3.1.8. *Hvis* (x_n) *er u.d.mod 1, så er* (mx_n) *u.d.mod 1 for alle* $m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0$.

Bevis. La $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$, så kan vi skrive

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(m x_n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h m x_n}.$$

Og la $H = h \cdot m$, da er $H \in \mathbb{Z}, \quad H \neq 0$. Så kan vi skrive

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(m x_n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i H x_n}.$$

Siden (x_n) er u.d.mod 1 og H er $H \in \mathbb{Z}, \quad H \neq 0.$, i følge Weyl kriterium

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i H x_n} = 0.$$

Dermed

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(m x_n)} = 0.$$

Det betyr at i følge Weyl kriterium må følgen $(m x_n)$ være u.d.mod 1. □

Setning 3.1.9. *Hvis følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1, så er følgen $(x_n + \alpha), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor α er en reell konstant, u.d.mod 1.*

Bevis. Vi har sett dette ved hjelp av mat ematisk logisk begrunelse og forståelse i Lemma 2.2. Men nå skal vi vise dette ved hjelp av Weyl kriterium

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n+\alpha)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)} e^{2\pi i h\alpha} \\ &= e^{2\pi i h\alpha} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)}. \end{aligned}$$

I følge Weyl kriterium vet vi at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n)} = 0.$$

Så

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n+\alpha)} &= e^{2\pi i h\alpha} \cdot (0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Så i følge Weyl kriterium må følgen $(x_n + \alpha), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor α er reelle konstant være u.d.mod 1. □

Eksempel 3.1.10. Hvis følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1, og hvis (y_n) er en følge med egenskapen $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \alpha$, hvor α er et reellt konstant tall, så er (y_n) u.d.mod 1.

Bevis. Først skal vi se at (y_n) er u.d.mod 1 når $\alpha = 0$ altså når $(x_n - y_n) \to 0$. La $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$ og $\epsilon > 0$.
Nå skal vi vise at $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n} = 0$ eller, for en gitt $\epsilon > 0$, finnes det $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $N > N_1$

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| \leq \epsilon.$$

Så kan vi skrive

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| &= |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(y_n - x_n + x_n)}| \\
&= |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(y_n - x_n)} \cdot e^{2\pi i h x_n}| \\
&= |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1)e^{2\pi i h x_n} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \\
&\leq |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1)e^{2\pi i h x_n}| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1||e^{2\pi i h x_n}| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}|
\end{aligned}$$

Vi vet at $|e^{2\pi i h x_n}| = 1$, da kan vi si

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}|$$

Siden $(x_n - y_n) \to 0$, vil $e^{2\pi i h(y_n - x_n)} \to 1$. Det betyr at $e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1 \to 0$. Da for en gitt $\epsilon > 0$, finnes det $N_0 \in \mathbb{N}$ slik at for $n > N_0$

$$|(e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Siden (x_n) er u.d.mod 1, vet vi at $|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \to 0$. Det finnes $M \in \mathbb{N}$ slik at for $N > M$

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N_0} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + \frac{1}{N}\sum_{n=N_0+1}^{N} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}|
\end{aligned}$$

Vi vet at $|e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| \leq 2$ slik at

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N_0} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + \frac{1}{N}\sum_{n=N_0+1}^{N} |e^{2\pi i h(y_n - x_n)} - 1| + |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \\
&\leq \frac{2N_0}{N} + \frac{N - N_0}{N} \cdot \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

Vi kan ta stor nok N slik at $\frac{2N_0}{N} < \frac{\epsilon}{3}$ og $N > M$. Og vi vet at $\frac{N-N_0}{N} < 1$ da må være $\frac{N-N_0}{N} \cdot \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3}$ som resultat

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n}| &\leq \frac{2N_0}{N} + \frac{N - N_0}{N} \cdot \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n} = 0.$$

I følge Weyl kriterium må (y_n) være u.d.mod 1.

Nå skal vi vise at (y_n) er u.d.mod 1 for $\alpha \neq 0$. La $z_n = y_n + \alpha$. Da vil

$$x_n - z_n \to 0.$$

Som vi har sett ovenfor når $\alpha = 0$, må (z_n) være u.d.mod 1. Det betyr at $(y_n + \alpha)$ er u.d.mod 1. Så i følge Lemma 1.1.2 må (y_n) være u.d.mod 1. □

Eksempel 3.1.11.

Setning 3.1.12. *Hvis (x_n) er u.d.mod 1 og (y_n) tilfredsstiller*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |y_n| = 0,$$

så er $(x_n + y_n)$ u.d.mod 1.

Bevis. For å vise at $(x_n + y_n)$ er u.d.mod 1, skal vi bruke Weyl kriterium. Det vil si at vi skal vise

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n+y_n)} = 0$$

hvor $h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$.

Det betyr at vi skal vise for en gitt $\epsilon > 0$ finnes det $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $N > N_1$

$$|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n+y_n)}| < \epsilon.$$

La $\epsilon > 0$ være gitt. Nå kan vi starte med

$$\begin{aligned} |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(x_n+y_n)}| &= |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^{2\pi i h(x_n+y_n)} - e^{2\pi i h x_n} + e^{2\pi i h x_n})| \\ &= |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n} - 1) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| \\ &\leq |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n} - 1)| + |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}|. \end{aligned}$$

Vi vet at $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} \to 0$. Det betyr at det finnes $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $N > N_2$

$$|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Så skal vi vise $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n} - 1) \to 0$.

$$\begin{aligned} |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n} - 1)| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n} - 1)| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h x_n}||e^{2\pi i h y_n} - 1| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h y_n} - 1|. \end{aligned}$$

La $g(y_n) = e^{2\pi i h y_n}$, da for en gitt $\epsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at, hvis $|y_n| < \delta$ så vil

$$|g(y_n) - g(0)| = |e^{2\pi i h y_n} - 1| < \frac{\epsilon}{4}.$$

La $\Im = \{n \in \mathbb{N} \mid |y_n| > \delta\}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i h y_n} - 1| = \frac{1}{N} \sum_{n\in\Im\cap[1,N]} |e^{2\pi i h y_n} - 1| + \frac{1}{N} \sum_{n\notin\Im\cap[1,N]} |e^{2\pi i h y_n} - 1| \tag{3.14}$$

Vi vet at $|e^{2\pi i h y_n} - 1| \le 2$. Men $|e^{2\pi i h y_n} - 1| < \frac{\epsilon}{4}$ når $|y_n| < \delta$. Så ulikhet (3.14) blir

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|e^{2\pi i h y_n} - 1| &\le \frac{1}{N}\sum_{n\in\Im\cap[1,N]} 2 + \frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}\frac{\epsilon}{4}\\ &= \frac{2}{N}|\{n \le N \mid n \in \Im\}| + \frac{1}{N}|\{n \le N \mid n \notin \Im\}| \cdot \frac{\epsilon}{4}\\ &= 2 \cdot \frac{|\{n \le N \mid n \in \Im\}|}{N} + \frac{|\{n \le N \mid n \notin \Im\}|}{N} \cdot \frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

La $\epsilon_1 > 0$ være gitt. Da finnes det $N_0 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $N > N_0$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|y_n| < \epsilon_1.$$

Vi kan skrive $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|y_n|$ i to del ved hjelp av δ som følger

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|y_n| &= \frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}^{N}|y_n| + \frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}^{N}|y_n|\\ &\ge \frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}^{N}\delta + \frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}^{N}|y_n|\\ &\ge \delta\frac{1}{N}\sum_{n\notin\Im\cap[1,N]}^{N}1\\ &= \delta\frac{1}{N}|\{n \le N \mid n \in \Im\}|.\end{aligned}$$

Så kan vi si at

$$\delta\frac{1}{N}|\{n \le N \mid n \in \Im\}| < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|y_n| < \epsilon_1.$$

Altså

$$\frac{|\{n \le N \mid n \in \Im\}|}{N} < \frac{\epsilon_1}{\delta}.$$

Det betyr at hvis vi tar $\frac{\epsilon_1}{\delta} = \frac{\epsilon}{8}$, da kan vi si at det finnes $N_0 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $N > N_0$

$$2 \cdot \frac{|\{n \le N \mid n \in \Im\}|}{N} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Og siden $|\{n \le N \mid n \notin \Im\}| \le N$, må $\frac{|\{n \le N | n \notin \Im\}|}{N} \le 1$.

Da, for alle $N > N_0$ ulikhet (3.14) blir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|e^{2\pi i h y_n}-1| &\leq 2\cdot\frac{|\{n\leq N \mid n\in\Im\}|}{N}+\frac{|\{n\leq N \mid n\notin\Im\}|}{N}\cdot\frac{\epsilon}{4} \\
&\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4} \\
&=\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h(x_n+y_n)}| &\leq |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}(e^{2\pi i h y_n}-1)|+|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\
&=\epsilon
\end{aligned}$$

som vi skulle vise. I følge Weyl kriterium må $(x_n + y_n)$ være u.d.mod 1. □

Eksempel 3.1.13. La θ være et irrasjonal tall. Da er følgen $n\theta, n = 1, 2, 3, \dots$ u.d.mod 1.

Bevis. Vi vet fra Weyl kriterium at følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$ er u.d.mod 1 hvis og bare hvis

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}=0.$$

Nå skal vi vise at $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h\theta n}=0$ og dermed at, følgen $(\{n\theta\})$ er u.d.mod 1.

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h\theta n}|=\frac{1}{N}|\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h\theta n}|.$$

La $\quad e^{2\pi i h\theta}=x$. Da er

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h\theta n}|=\frac{1}{N}|\sum_{n=1}^{N}x^{n}|.$$

I følge Lemma 2.4.2 blir

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h\theta n}| &= \frac{1}{N}|\frac{x(x^N-1)}{x-1}| \\
&= \frac{1}{N}\frac{|x(x^N-1)|}{|x-1|} \\
&= \frac{1}{N}\frac{|x||x^N-1|}{|x-1|}.
\end{aligned}
$$

Nå skal vi tilbake til $e^{2\pi i h\theta} = x$

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h\theta n}| &= \frac{1}{N}\frac{|x||x^N-1|}{|x-1|} \\
&= \frac{1}{N}\frac{|e^{2\pi i h\theta}||(e^{2\pi i h\theta})^N-1|}{|e^{2\pi i h\theta}-1|}.
\end{aligned}
$$

I følge Lemma 2.6.1 blir

$$
|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h\theta n}| < \frac{1}{N}\frac{2}{|e^{2\pi i h\theta}+(-1)|}.
$$

Siden $|e^{2\pi i h\theta}+1|$ er et konstant tall med hensyn til N, da

$$
\frac{2}{N|e^{2\pi i h\theta}+(-1)|} \to 0
$$

når $N \to \infty$.

Så i følge Weyl kriterium må følgen $(\{n\theta\})$ hvor $n = 1, 2, 3, \ldots$ være u.d.mod 1.

□

Eksempel 3.1.14. Følgen $(1 - \{\pi n\}^2)$ er ikke u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Weyl kriterium for å vise følgen ikke er u.d.mod 1. Men vi trenger en bestemt h for å vise

$$
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h(1-\{\pi n\}^2)} \neq 0. \tag{3.15}
$$

Har skal vi bruke $h = 1$ for å vise (3.15).

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(1-\{\pi n\}^2)} &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i}\cdot e^{-2\pi i\{\pi n\}^2} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1\cdot e^{-2\pi i\{\pi n\}^2}.
\end{aligned}
$$

La $x_n = \{\pi n\}$ og $f(x_n) = e^{-2\pi i x_n^2}$.

Siden f er en kontinuerlig kompleks funksjon med periode 1, so følger det av Korollar 3.1.3 hvis (x_n) er u.d.mod 1, så vil

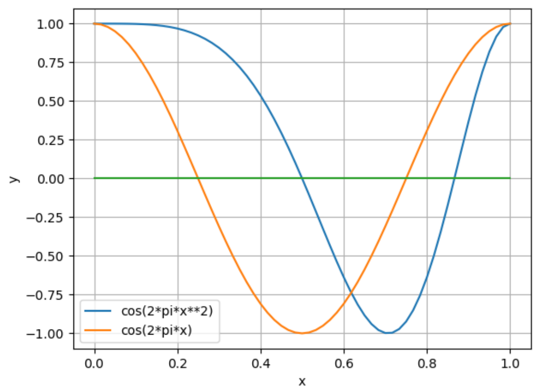
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Så

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i \{\pi n\}^2} &= \int_0^1 e^{-2\pi i x^2}\ dx \\
&= \int_0^1 (\cos 2\pi x^2 - i \sin 2\pi x^2)\ dx \\
&= \int_0^1 \cos 2\pi x^2\ dx - i \int_0^1 \sin 2\pi x^2\ dx.
\end{aligned}$$

Nå skal vi bruke grafer for å illustrere at $\int_0^1 \cos 2\pi x^2\ dx \neq 0$ som er mer enn nok for å si $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i \{\pi n\}^2} \neq 0$.

Vi skal bruke grafen til $\cos 2\pi x$ og $\cos 2\pi x^2$ når $x \in [0, 1)$ for å studere $\int_0^1 \cos 2\pi x^2\ dx$.



Figur 3.1: Grafen til $\cos 2\pi x$ og $\cos 2\pi x^2$.

Vi vet at $\int_0^1 \cos 2\pi x\ dx = 0$. Det betyr at arealet over x-aksen og arealet under x-aksen er lik. Og vi ser i Figure 3.1 at grafen til $\cos 2\pi x$ er symmetrisk. Men grafen til $\cos 2\pi x^2$ er ikke symmetrisk. Og det ser tydelig ut at arealet over x-aksen er større enn areaalet under x-aksen. Så kan vi si at $\int_0^1 \cos 2\pi x^2\ dx \neq 0$.

Som resultat
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ih(1-\{\pi n\}^2)}\neq 0.$$
Så i følge Weyl kriterium er følgen $(1-\{\pi n\}^2))$ ikke u.d.mod 1. $\square$

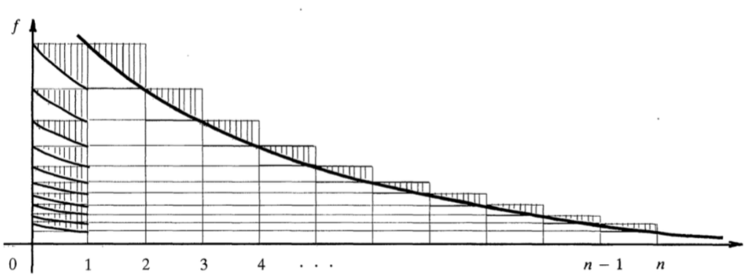
Nå skal vi vise at følgen $(\ln n), n = 1, 2, 3, \ldots$ ikke er u.d.mod 1 ved hjelp av Weyl kriterium. Vi skal bruke Euler summasjonsformel for å presentere

$$F(t) = e^{2\pi ih\ln t}$$

som er enklere for å bruke Weyl kriterium. Det kan være nyttig å forklare litt om grunnleggende prinsipp av Euler summasjon formula for en funksjon f som er et positivt og strengt avtagende på $[1,\infty)$. Til slutt skal vi presentere en kontinuerlig kompleks funksjon f ved hjelp av Euler summasjon formula.

Euler summasjon formula

La f være en positiv og strengt avtagende funksjon på $[1, N]$. Vi introduserer en følge (d_N) av tall som representerer summen av arealene til det skraverte krumlinjende stykker over intervallet $[1, N]$ som vi ser i **figure 3.2**. Det vil si at vi definerer
$$d_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)\ dx \tag{3.16}$$
hvor $N = 2, 3, 4, \ldots$.



Figur 3.2: [Ap][s. 409]

Det er klart at

$$d_{N+1} > d_N.$$

Og alle de skraverte delene kan forskyves til venstre for å okkupere en del av rektengelet med høyde $f(1)$ over intervallet $[0,1]$ som vist i **figure 3.2**.
Det er ingen overlapping av de forkjøvede skraverte delene på grunn av f er strengt avtagende funksjon. Sammenligning av arealer gir oss ulikhetene slik

$$0 < d_N < d_{N+1} < f(1).$$

Arealet til rektangelet med høyde $f(1)$ og bredde 1 er $f(1)$.
Derfor er (d_N) økende og er begrenset ovenfra ovenfor, så (d_N) har en endelig grense

$$c(f) = \lim_{N\to\infty} d_N.$$

Vi referer til $c(f)$ som den generaliserte Eulers konstant assosiert med funksjonen f.
Geometrisk representerer $c(f)$ summen av arealene av alle de krumlinjede trekantede delene over intervallet $[1,\infty)$. Disse bitene kan være forskyves til å passe inn i rektangelet til arealet $f(1)$ som vist i **figure 3.2** uten overlappende.
Så har vi ulikheten

$$0 < c(f) < f(1).$$

Dessuten $c(f) - d_N$ representerer summen av arealene til de trekantende delene over intervallet $[N,\infty)$. Disse brikkene kan oversettes til venstre for å okkupere en del av rektangelet med høyde $f(N)$ over intervallet $[0,1]$. Ved å sammenligne arealer finner vi

$$0 < c(f) - d_N < f(N), \qquad N = 1,2,3,\ldots \tag{3.17}$$

fra disse ulikhetene kan vi utlede en teorem som følger. [Ap][s. 409 - 411]

Teorem 3.1.15. *Hvis f er et positivt og strengt avtagende på $[1,\infty)$, er det en positiv konstant $c(f) < f(1)$ og følgen $(E_f(N)$ med $0 < (E_f(N)) < f(N)$, slik at*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\ dx + c(f) + E_f(N), \qquad N = 1,2,3,\ldots \tag{3.18}$$

Men vi skal bruke Euler summation formula, hvor $F(t)$ er en kontinuerlig kompleks funksjon. Men vi vil gjerne bruke Euler summation formula når f er en kontinuerlig kompleks funksjon som nyttig i Weyl kriterium. Men det er litt komplisert og ut av vår tema for å forklare og bevise i detaljer her. Men vi skal presentere som teorem nedenfor. [Ap][s. 411 - 414]

Teorem 3.1.16. *La $F(t)$ være en kontinuerlig kompleks funksjon som er derivert på $1 \leq t \leq N$ hvor $N \in \mathbb{N}$ så*

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) = \int_1^N F(t)\ dt + \frac{1}{2}(F(1) + F(N)) + \int_1^N (\{t\} - \frac{1}{2})F'(t)\ dt. \quad (3.19)$$

Eksempel 3.1.17. Følgen $(\ln n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er ikke u.d.mod 1.

Bevis. Vi vet fra Weyl kriterium at følgen $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1 hvis og bare hvis

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0.$$

Her skal vi bruke $F(t) = e^{2\pi i h \ln t}$ i Euler summation formula og vi skal dele på N for å vise at $\ln n$ ikke er u.d.mod 1.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h \ln n} = \frac{1}{N}(\int_1^N e^{2\pi i h \ln t}\ dt + \frac{1}{2}(e^{2\pi i h \ln 1} + e^{2\pi i h \ln N}) + \int_1^N (\{t\} - \frac{1}{2})\frac{2\pi i h}{t} e^{2\pi i h \ln t}\ dt). \quad (3.20)$$

Siden vi skal vise at $\ln n$ ikke er u.d.mod 1, skal vi bruke en bestemt h. Her skal vi bruke $h = 1$ i $F(n)$ for å vise $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i 1 \ln n} \neq 0$. Da Euler's summasjon formula blir

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \ln n} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i \ln t}\ dt \\ &+ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\frac{1}{2}(e^{2\pi i \ln 1} + e^{2\pi i \ln N}) \\ &+ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_1^N (\{t\} - \frac{1}{2})\frac{2\pi i}{t} e^{2\pi i \ln t}\ dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vi har tre ledd på høyre side likning (3.4.4). Vi skal starte med det andre leddet.

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left|\frac{1}{2}(e^{2\pi i \ln 1} + e^{2\pi i \ln N})\right| &= \frac{1}{N}\left|\frac{1}{2}\right|\left|e^{2\pi i (0)} + e^{2\pi i \ln N}\right| \\ &= \frac{1}{2N}|e^{0} + e^{2\pi i \ln N}| \\ &= \frac{1}{2N}|1 + e^{2\pi i \ln N}|.\end{aligned}$$

Vi vet at $|e^{2\pi i \ln N}| = 1$, fra trekant ulikheten vet vi

$$\begin{aligned}|1 + e^{2\pi i \ln N}| &\leq 1 + |e^{2\pi i \ln N}| \\ &\leq 1 + 1 \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left|\frac{1}{2}(e^{2\pi i \ln 1} + e^{2\pi i \ln N})\right| &= \frac{1}{2N}|1 + e^{2\pi i \ln N}| \\ &\leq \frac{1}{2N}2 \\ &\leq \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\frac{1}{2}(e^{2\pi i \ln 1} + e^{2\pi i \ln N}) \quad \leq \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \quad = \quad 0. \tag{3.22}$$

Nå skal vi se på det første leddet

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_1^N e^{2\pi i \ln t}\, dt = \frac{1}{N}\int_1^N (e^{\ln t})^{2\pi i}\, dt.$$

Vi vet at $e^{\ln t} = t$, så

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\int_1^N e^{2\pi i \ln t}\ dt &= \frac{1}{N}\int_1^N (e^{\ln t})^{2\pi i}\ dt \\
&= \frac{1}{N}\int_1^N t^{2\pi i}\ dt \\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{t^{2\pi i+1}}{2\pi i+1}\Big|_1^N \\
&= \frac{1}{N(2\pi i+1)}(N^{2\pi i+1} - 1^{2\pi i+1}) \\
&= \frac{1}{N(2\pi i+1)}(N\cdot N^{2\pi i} - 1) \\
&= \frac{1}{N(2\pi i+1)}(N\cdot (e^{\ln N})^{2\pi i} - 1) \\
&= \frac{1}{N(2\pi i+1)}(N\cdot e^{2\pi i \ln N} - 1) \\
&= \frac{e^{2\pi i \ln N}}{2\pi i+1} - \frac{1}{N(2\pi i+1)} \\
&= \frac{1}{2\pi i+1}(e^{2\pi i \ln N} - \frac{1}{N}).
\end{aligned}$$

Vi vet at $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} = 0$ men $e^{2\pi i \ln N}$ varierer mellom 1 og -1. Det vil si

$$\varliminf_{N\to\infty} e^{2\pi i \ln N} = -1 \qquad \text{og} \qquad \varlimsup_{N\to\infty} e^{2\pi i \ln N} = 1.$$

Det betyr at vi har ikke grense verdi til $e^{2\pi i \ln N}$ på grunn av

$$\varliminf_{N\to\infty} e^{2\pi i \ln N} \neq \varlimsup_{N\to\infty} e^{2\pi i \ln N}.$$

Så

$$\lim_{N\to\infty} e^{2\pi i \ln N}$$

eksisterer ikke. Som resultat

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_1^N e^{2\pi i \ln t}\ dt$$

eksisterer ikke.

Nå skal vi se på det tredje leddet

$$\frac{1}{N}\int_1^N (\{t\} - \frac{1}{2})F'(t)\ dt.$$

Siden $(\{t\}-\frac{1}{2})$ er alltid mellom $-\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$, kan vi si at

$$|\{t\}-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}|\int_1^N (\{t\}-\frac{1}{2})F'(t)\ dt| &\leq \frac{1}{N}\int_1^N |(\{t\}-\frac{1}{2})F'(t)|\ dt \\
&= \frac{1}{N}\int_1^N |(\{t\}-\frac{1}{2})||F'(t)|\ dt \\
&\leq \frac{1}{N}\int_1^N \frac{1}{2}|F'(t)|\ dt \\
&= \frac{1}{2N}\int_1^N |F'(t)|\ dt.
\end{aligned}$$

Nå skal vi se på $|F'(t)|$ der

$$F(t) = e^{2\pi i \ln t}.$$

Så

$$\begin{aligned}
|F'(t)| &= |e^{2\pi i \ln t}\cdot \frac{2\pi i}{t}| \\
&= |e^{2\pi i \ln t}||\frac{2\pi i}{t}| \\
&= 1|\frac{2\pi i}{t}| \\
&= |\frac{2\pi}{t}||i| \\
&= |\frac{2\pi}{t}|1 \\
&= \frac{2\pi}{t}.
\end{aligned}$$

Nå kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}|\int_1^N (\{t\}-\frac{1}{2})F'(t)\ dt| &\leq \frac{1}{2N}\int_1^N |F'(t)|\ dt \\
&= \frac{1}{2N}\int_1^N \frac{2\pi}{t}\ dt \\
&= \frac{\pi}{N}(\ln t|_1^N) \\
&= \frac{\pi}{N}(\ln N - \ln 1) \\
&= \frac{\pi \ln N}{N}.
\end{aligned}$$

Da

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_1^N(\{t\}-\frac{1}{2})F'(t)\ dt \leq \lim_{N\to\infty}\frac{\pi\ln N}{N}.$$

Siden vi fikk $\lim_{N\to\infty}\pi\ln N=\infty$ og $\lim_{N\to\infty}N=\infty$, kanvi bruke L'Høpital's regel for å finne grense verdien.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi\ln N}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{d}{dN}(\pi\ln N)}{\frac{d}{dN}(N)}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{\pi}{N}}{1}=0.$$

Det betyr at

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_1^N(\{t\}-\frac{1}{2})F'(t)\ dt=0.$$

Siden både det første og det tredje leddet går mot 0 når $N\to\infty$ og det midterste leddet ikke har noen grense, så eksisterer ikke grensen av $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i\ln n}$. Dermed, $\ln n$ er ikke u.d.mod 1. □

3.2 Van der Corputs differanse teorem

Først skal vi se på Van der Corputs ulikhet og andre lemma som hjelpe oss for å forstå Var der Corput's differanse teorem [KN, s. 25 - 28]..

Lemma 3.2.1. *La $u_1,u_2,\dots,u_N$ være komplekse tall og $u_n=0$ for alle $n\leq 0$ og $n>N$, og la H være et heltall med $1\leq H\leq N$. Da er*

$$H\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{l=1}^{N+H-1}\sum_{h=0}^{H-1}u_{l-h}. \tag{3.23}$$

Bevis. Det første leddet av $\sum_{l=1}^{N+H-1}\sum_{h=0}^{H-1}u_{l-h}$ er når $l=1$ og $h=H-1$. Det er på grunn av u_{l-h}. Så den første leddet er $u_{1-(H-1)}=u_{-H+2}$. Og det siste leddet er når $l=N+H-1$ og $h=0$. Det betyr at det siste leddet er $u_{(N+H-1)-0}=u_{N+H-1}$. Nå skal vi se på summen $\sum_{l=1}^{N+H-1}\sum_{h=0}^{H-1}u_{l-h}$ ved å skrive ut summen $\sum_{l=1}^{N+H-1}u_{l-h}$ for hver $h\in\{0,1,2,\dots,H-1\}$ slik:
når $h=0$, $\sum_{l=1}^{N+H-1}u_{l-h}$ blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1}u_l=u_1+u_2+\cdots+u_N+u_{N+1}+\cdots+u_{N+H-1}$$

når $h = 1$, $\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-h}$ blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_N + u_{N+1} + \cdots + u_{N+H-2}$$

$$\vdots$$

når $h = H - 1$, $\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-h}$ blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)} = u_{-H+2} + u_{-H+3} + \cdots + u_1 + u_2 + \cdots + u_N.$$

Siden $u_n = 0$ for alle $n \leq 0$ og $n > N$, blir $\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-h}$ som følger for $h = 0, 1, 2, \ldots, H-1$

når $h = 0, \sum_{l=1}^{N+H-1} u_l = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$

når $h = 1, \sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$

$$\vdots$$

når $h = H - 1, \sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)} = u_1 + u_2 + \cdots + u_N.$

Vi har H ganger av summen $u_1 + u_2 + \cdots + u_N$. Så

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h} &= H \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_N) \\ &= H \sum_{n=1}^{N} u_n.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.2. *La $u_1, u_2, \ldots, u_N$ være komplekse tall og $u_n = 0$ for alle $n \leq 0$ og $n > N$, og la H være et heltall med $1 \leq H \leq N$. Da er*

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} = \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{n=1}^{N} u_n \overline{u}_{n+h}. \tag{3.24}$$

Bevis. Først skal vi se på alle mulige kombinasjon av r og s ved å variere r i $\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}$. Vi kan notere kombinasjon av r og s ved (r, s).

Når $r = 1$ har vi 1 kombinasjon $(1, 0)$.

$$\text{Når } r = 2 \text{ har vi 2 kombinasjon } (2,1) \text{ og } (2,0).$$

$$\text{Når } r = 3 \text{ har vi 3 kombinasjon } (3,2), (3,1) \text{ og } (3,0).$$

Også videre

når $r = H - 1$ har vi $H - 1$ kombinasjon

$$(H-1, H-2), (H-1, H-3), \ldots, (H-1, 1) \text{ og } (H-1, 0).$$

Men vi kan presentere $\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}$ på en annen måte ved å la

$$n = l - r \text{ og } h = r - s.$$

Så

$$l - s = n + h \text{ og } u_{l-r}\overline{u}_{l-s} = u_n\overline{u}_{n+h}.$$

Det betyr at vi kan finne alle mulige kombinasjon av r og s for $h = 1, 2, 3, \ldots, H-1$.

Når $h = 1$ har vi $H - 1$ mulige kombinasjon

$$(1,0), (2,1), (3,2), \ldots, (H-2, H-3) \text{ og } (H-1, H-2).$$

Når $h = 2$ har vi $H - 2$ mulige kombinasjon

$$(2,0), (3,1), (4,2), \ldots, (H-2, H-4) \text{ og } (H-1, H-3).$$

Når $h = 3$ har vi $H - 3$ mulige kombinasjon

$$(3,0), (4,1), (5,2), \ldots, (H-2, H-5) \text{ og } (H-1, H-4).$$

$$\vdots$$

$$\text{Når } h = H - 1 \text{ har vi 1 mulig kombinasjon } (H-1, 0).$$

Nå skal vi se på alle mulige kombinasjon for $h = r - s = 1$ av summen

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}. \tag{3.25}$$

Når $(r,s) = (1,0)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-1}\overline{u}_l = u_0\overline{u}_1 + u_1\overline{u}_2 + \cdots + u_{N-1}\overline{u}_N + u_N\overline{u}_{N+1} + \cdots + u_{N+H-2}\overline{u}_{N+H-1}.$$

Når $(r,s) = (2,1)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-2}\overline{u}_{l-1} = u_{-1}\overline{u}_0 + u_0\overline{u}_1 + \cdots + u_{N-1}\overline{u}_N + u_N\overline{u}_{N+1} + \cdots + u_{N+H-3}\overline{u}_{N+H-2}.$$

$$\vdots$$

Når $(r,s) = (H-1, H-2)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)}\overline{u}_{l-(H-2)} = u_{-H+2}\overline{u}_{-H+3} + u_{-H+3}\overline{u}_{-H+4} + \cdots + u_0\overline{u}_1 + u_1\overline{u}_2 + \cdots$$
$$+ u_{N-1}\overline{u}_N + u_N\overline{u}_{N+1}.$$

Men vi vet at $u_n = 0$ for alle $n \leq 0$ og $n > N$ og alle kombinasjon av (r,s) for $h = 1$ har leddene

$$u_1\overline{u}_2 + u_2\overline{u}_3 + \cdots + u_{N-1}\overline{u}_N$$

som er ikke null. Og vi vet at vi har $H-1$ mulige kombinasjon av (r,s) for $h = 1$. Så for $h = 1$ har vi

$$(H-1) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} u_n\overline{u}_{n+1}.$$

Vi skal se på alle mulige kombinasjon for $h = 2$ ved hjelp av summen (3.25) som følger:

Når $(r,s) = (2,0)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-2}\overline{u}_l = u_{-1}\overline{u}_1 + u_0\overline{u}_2 + \cdots + u_{N-2}\overline{u}_N + u_{N-1}\overline{u}_{N+1} + \cdots + u_{N+H-3}\overline{u}_{N+H-1}.$$

Når $(r,s) = (3,1)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-3}\overline{u}_{l-1} = u_{-2}\overline{u}_0 + u_{-1}\overline{u}_1 + \cdots + u_{N-2}\overline{u}_N + u_{N-1}\overline{u}_{N+1} + \cdots + u_{N+H-4}\overline{u}_{N+H-2}.$$

$$\vdots$$

Når $(r,s) = (H-1, H-3)$, summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)}\overline{u}_{l-(H-3)} = u_{-H+2}\overline{u}_{-H+4} + u_{-H+3}\overline{u}_{-H+5} + \cdots + u_0\overline{u}_2 + u_1\overline{u}_3 + \cdots$$
$$+ u_{N-2}\overline{u}_N + u_{N-1}\overline{u}_{N+1} + u_N\overline{u}_{N+2}.$$

Siden $u_n = 0$ for alle $n \leq 0$ og $n > N$, har vi

$$(H-2) \cdot \sum_{n=1}^{N-2} u_n\overline{u}_{n+2}$$

for $h = 2$. Det er tilsvarende for $h = H-1$, men vi har bare en kombinasjon av r og s. Det er når $(r,s) = (H-1, 0)$. Så summen (3.25) blir

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)}\overline{u}_l = u_{-H+2}\overline{u}_1 + u_{-H+3}\overline{u}_2 + \cdots + u_0\overline{u}_{H-1} + u_1\overline{u}_H + \cdots$$
$$+ u_{N-(H-1)}\overline{u}_N + u_{N-H+2}\overline{u}_{N+1} + u_N\overline{u}_{N+H-1}.$$

Det betyr at for $h = H-1$ kan vi skrive slik

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} u_{l-(H-1)}\overline{u}_l = \sum_{n=1}^{N-(H-1)} u_n\overline{u}_{n+(H-1)}.$$

Nå kan vi oppsumere for alle h slik

$$\text{for } h = 1, \quad (H-1) \cdot \sum_{n=1}^{N-1} u_n\overline{u}_{n+1} = (H-h) \cdot \sum_{n=1}^{N-h} u_n\overline{u}_{n+h}$$

$$\text{for } h = 2, \quad (H-2) \cdot \sum_{n=1}^{N-2} u_n\overline{u}_{n+2} = (H-h) \cdot \sum_{n=1}^{N-h} u_n\overline{u}_{n+h}$$

$$\vdots$$

$$\text{for } h = H-1, \quad 1 \cdot \sum_{n=1}^{N-(H-1)} u_n\overline{u}_{n+(H-1)} = (H-h) \cdot \sum_{n=1}^{N-h} u_n\overline{u}_{n+h}.$$

Nå kan vi summe alle h fra 1 til $H-1$ som følger

$$\sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{n=1}^{N} u_n\overline{u}_{n+h}.$$

Det betyr at

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} = \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{n=1}^{N} u_n\overline{u}_{n+h}.$$

□

Lemma 3.2.3. *Van der Corputs ulikhet*

La $u_1, u_2, \dots, u_N$ *være komplekse tall, og* H *være et heltall med* $1 \le H \le N$. *Da*

$$\begin{aligned} H^2|\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 \le H(N+H-1)\sum_{n=1}^{N}|u_n|^2 \\ + 2(N+H-1)\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\Re\sum_{n=1}^{N-h} u_n\overline{u}_{n+h} \end{aligned} \tag{3.26}$$

hvor $\Re u_n$ *er den reelle delen av* u_n.

Bevis. La $u_n = 0$ for alle $n \le 0$ og $n > N$. Så i følge Lemma 3.2.1 kan vi skrive

$$\begin{aligned} H^2|\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 &= |H\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 \\ &= |\sum_{l=1}^{N+H-1}\sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}|^2. \end{aligned}$$

Fra Cauchy Schwarz ulikhet, har vi

$$|\sum_{k=1}^{n} u_k\overline{v}_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\sum_{m=1}^{n}|v_m|^2$$

hvor $u_k, v_k \in \mathbb{C}$. Nå skal vi bruke cauchy schwarz ulikhet ved å la $u_k = \sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}$ og $\overline{v}_k = 1$. Det betyr at

$$\begin{aligned} H^2|\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 &= |\sum_{l=1}^{N+H-1}\sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}|^2 \\ &\le \sum_{l=1}^{N+H-1}|\sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}|^2\sum_{l=1}^{N+H-1} 1 \\ &= (N+H-1)\sum_{l=1}^{N+H-1}|\sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}|^2. \end{aligned}$$

Vi vet at $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ og $\overline{\sum z_n} = \sum \overline{z}_n$, hvor $z \in \mathbb{C}$. Så

$$\begin{aligned}
H^2 |\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 &\leq (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} |\sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}|^2 \\
&= (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} (\sum_{r=0}^{H-1} u_{l-r})(\overline{\sum_{s=0}^{H-1} u_{l-s}}) \\
&= (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} (\sum_{r=0}^{H-1} u_{l-r})(\sum_{s=0}^{H-1} \overline{u}_{l-s}) \\
&= (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}.
\end{aligned}$$

Nå kan vi dele $\sum_{r,s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}$ i tre deler ved å bruke når $r = s$, $s < r$ og $s > r$.

$$\begin{aligned}
H^2 |\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 &\leq (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} \\
&= (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} (\sum_{r=s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} + \sum_{r,s=0,s>r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} \\
&+ \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}).
\end{aligned}$$

Nå skal vi se på $\sum_{r=s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}$ ved å la $r = s = h$ som følger

$$\begin{aligned}
\sum_{r=s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} &= \sum_{h=0}^{H-1} u_{l-h}\overline{u}_{l-h} \\
&= \sum_{h=0}^{H-1} |u_{l-h}|^2.
\end{aligned}$$

Og vi skal se på $\sum_{r,s=0,s>r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}$ slik:

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s=0,s>r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} &= \overline{\sum_{r,s=0,s>r}^{H-1} \overline{u}_{l-r}u_{l-s}} \\
&= \overline{\sum_{r,s=0,r>s}^{H-1} \overline{u}_{l-s}u_{l-r}} \\
&= \overline{\sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}}.
\end{aligned}$$

Så

$$
\begin{aligned}
H^2|\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 \leq (N+H-1) &\sum_{l=1}^{N+H-1} (\sum_{r=s=0}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} + \sum_{r,s=0,s>r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} \\
&+ \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}) \\
&= (N+H-1) \sum_{l=1}^{N+H-1} (\sum_{h=0}^{H-1} |u_{l-h}|^2 + \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} \\
&+ \overline{\sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}}) \\
&= (N+H-1)(\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} |u_{l-h}|^2 + 2\Re \sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s}).
\end{aligned}
$$

Fra Lemma 3.2.1 vet vi at

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} |u_{l-h}|^2 = H \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2.$$

Og fra Lemma 3.2.2 vet vi at

$$\sum_{l=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0,s<r}^{H-1} u_{l-r}\overline{u}_{l-s} = \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{n=1}^{N-h} u_n \overline{u}_{n+h}.$$

Så blir det

$$H^2|\sum_{n=1}^{N} u_n|^2 \leq (N+H-1)(H \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2 + 2\Re \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{n=1}^{N-h} u_n \overline{u}_{n+h}).$$

□

Teorem 3.2.4. *Van der Corputs differanse teorem La (x_n) være en gitt følge av reelle tall. Hvis for alle $h \in \mathbb{N}$ følgen $(x_{n+h} - x_n), n = 1, 2, 3, \ldots,$ er u.d.mod 1, så er (x_n) u.d.mod 1.*

Bevis. La $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Nå skal vi bruke Lemma 3.2.3 med $u_n = e^{2\pi i m x_n}$ og dele den med H^2N^2. Da får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N^2}|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}|^2 \leq \frac{H(N+H-1)}{H^2N^2} &\sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi i m x_n}|^2 \\
&+ \frac{2(N+H-1)}{H^2N^2} \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \Re \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m x_n} \cdot e^{-2\pi i m x_{n+h}}
\end{aligned}
$$

hvor $\Re z$ er den reelle delen av $z \in \mathbb{C}$.

Fordi hvis

$$u_n = e^{2\pi imx_n} = \cos(2\pi imx_n) + i\sin(2\pi imx_n),$$

da

$$\begin{aligned}\overline{u}_n &= \cos(2\pi imx_n) - i\sin(2\pi imx_n)\\ &= \cos(-2\pi imx_n) + i\sin(-2\pi imx_n)\\ &= e^{-2\pi imx_n}.\end{aligned}$$

Vi vet at $|e^{2\pi imx_n}| = 1$. Da er $\sum_{n=1}^{N} |e^{2\pi imx_n}|^2 = N$.

Og $\frac{1}{N^2}|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imx_n}|^2 = |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imx_n}|^2$. Så

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imx_n}|^2 \leq \frac{N+H-1}{HN} + 2\sum_{h=1}^{H-1} \frac{(N+H-1)(H-h)}{H^2N^2} \Re \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})}.$$

Vi vet at $\Re \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})} \leq |\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})}|$ slik at

$$\begin{aligned}|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imx_n}|^2 \leq \frac{N+H-1}{HN} &+ 2\sum_{h=1}^{H-1} \frac{(N+H-1)(H-h)}{H^2N^2}\\ &\cdot |\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})}|.\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\begin{aligned}|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imx_n}|^2 \leq \frac{N+H-1}{HN} &+ 2\sum_{h=1}^{H-1} \frac{(N+H-1)(H-h)(N-h)}{H^2N^2}\\ &\cdot |\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})}|.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Siden $N - h \to \infty$ når $N \to \infty$ for en konstant h og følgen $(x_n - x_{n+h})$ er u.d.mod 1 for alle $h \geq 1$, så vil

$$\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi im(x_n - x_{n+h})} \to 0$$

og

$$\frac{(N+H-1)(H-h)(N-h)}{H^2N^2} = \frac{(1+\frac{H-1}{N})(H-h)(1-\frac{h}{N})}{H^2} \to \frac{H-h}{H^2}.$$

Da blir det

$$\lim_{N\to\infty} 2\sum_{h=1}^{H-1} \frac{(N+H-1)(H-h)(N-h)}{H^2N^2} \cdot |\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m(x_n - x_{n+h})}| = 0$$

og

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N+H-1}{HN} = \lim_{N\to\infty} (\frac{1}{H} + \frac{1}{N} - \frac{1}{HN}) = \frac{1}{H}.$$

Her vet vi ikke om $\lim_{N\to\infty} |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}|^2$ eksisterer eller ikke. Men vi vet at

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} (\frac{N+H-1}{HN} + 2\sum_{h=1}^{H-1} & \frac{(N+H-1)(H-h)(N-h)}{H^2N^2} \\ & \cdot |\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m(x_n - x_{n+h})}|)) \\ & = \frac{1}{H}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Så i følge ulikheten (3.27) og likning (3.28) kan vi skrive

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}|^2 \leq \frac{1}{H}$$

for alle $H \in \mathbb{N}$.

Siden H er uavhengig av $|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}|^2$ og dette gjelder for alle $H \in \mathbb{N}$, må

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0.$$

Da må (x_n) være u.d.mod 1. □

3.2.1 Van der Corputs triks

Nå skal vi se på noen følger som kan vi vise at de er u..d.mod 1 ved hjelp av Van der Corputs differanse teorem.

Eksempel 3.2.5. La $(x_n) = \alpha n, n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor α er et irrasjonalt tall er u.d.mod 1. Da er $\alpha n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Van der Corputs differanse teorem for å vise at $\alpha n^2, n =$

$1, 2, 3, \ldots$ u.d.mod 1.

$$\begin{aligned} x_{n+h} - x_n &= \alpha(n+h)^2 - \alpha n^2 \\ &= \alpha(n^2 + 2hn + h^2) - \alpha n^2 \\ &= \alpha 2hn + \alpha h^2. \end{aligned}$$

La $\beta = 2h\alpha$ og $\gamma = 2h^2$.

$$x_{n+h} - x_n = \beta n + \gamma.$$

Vet vi at β er irrasjonal tall. Da må βn være u.d.mod. 1. Og i følge Lemma 1.1.2 er $(\beta n + \gamma)$ er u.d.mod 1.

Så i følge Van der Corputs differanse teorem må følgen $\alpha n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ være u.d.mod 1. □

3.2.2 Weyls teorem for polynomer

Nå skal vi se på følger som er polynomer med irrasjonall ledende koeffisient. Vi skal bruke Van der Corputs differanse teorem for å vise at de er u.d.mod 1.

Det er en spesifikk tilfelle fra det som H. Weyl beviste i begynnelsen av 1900-tallet at det for ethvert reelt polynom [W]

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$$

hvor minst én koeffisient $a_i, i \geq 1$ er irrasjonal, er følgen $(p(n)), n = 1, 2, \ldots$ uniform fordelt mod 1.

Teorem 3.2.6. *La $p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + \alpha_0$, være et polynom med reelle koeffisienter og la α_m være irrasjonell. Da er følgen $(p(n))$ u.d.mod 1.*

Bevis. Vi skal bruke induksjonsbevis.

For $m = 1$,

$$p(x) = \alpha x + \alpha_0$$

hvor α er irrasjonall.

I følge Lemma 1.1.2 vet vi at følgen $(\alpha n + \alpha_0)$ er u.d.mod 1. Så, det er sant for $m = 1$.

Vi antar at $(p(n))$ u.d.mod 1 for $m = M$. Det vil si

$$(p(n)) = (\alpha_M n^M + \alpha_{M-1} n^{(M-1)} + \cdots + \alpha_0)$$

hvor α_M er irrasjonell, er u.d.mod 1.

Nå skal vi vise at for $m = M + 1$,

$$(p(n)) = (\alpha_{M+1} n^{(M+1)} + \alpha_M n^M + \cdots + \alpha_0)$$

hvor α_{M+1} er irrasjonell, er u.d.mod 1.

Vi skal bruke Van der Corputs differensteorem hvor $x_n = \alpha_{M+1} x^{(M+1)} + \alpha_M x^M + \cdots + \alpha_0$. Så

$$\begin{aligned} x_{n+h} - x_n = \alpha_{M+1}(x+h)^{(M+1)} + \alpha_M (x+h)^M + \cdots + \alpha_0 \\ - \alpha_{M+1} x^{(M+1)} + \alpha_M x^M + \cdots + \alpha_0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

I følge Lemma 2.6.2 vet vi at $x_{n+h} - x_n$ er et polynom med grad M med ledende koeffisient $\alpha_{M+1}(M+1)h$ som er irrasjonall. Så i følge vår induksjons antakelse for $m = M$, vet vi at følgen (3.29) er u.d.mod 1.

I følge Van der Corputs differensteorem må følgen $(x_n) = (\alpha_{M+1} x^{(M+1)} + \alpha_M x^M + \cdots + \alpha_0)$ være u.d.mod 1. Det er som vi skulle vise for $m = M + 1$.

□

3.3 Fejers Teorem

Som en annen konsekvens av Weyl-kriterium får vi et teorem som vil gi mange flere eksempler på følger som er u.d.mod 1 [KN, s. 13 - 15].

Teorem 3.3.1. *Fejers Teorem La $f(x)$ være en funksjon definert for $x > 1$ som er differensierbar for $x \geq x_o$. Hvis $f'(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ og*

$$\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \infty$$

så er følgen $(f(n)), n = 1, 2, 3, \dots,$ u .d.mod 1.

3.3.1 Fejers følger

Her i seden for å bevise teoremen, skal vi se på noen følger som kan vise at de er u.d.mod 1 ved hjelp av Fejers teorem.

Eksempel 3.3.2. Følgen $(x_n) = (\alpha n^\sigma \ln^\tau n), n = 1, 2, 3, \dots$ hvor $\alpha \neq 0$, $0 < \sigma < 1$ og vilkårlig τ er u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Fejers Teorem for å vise $(x_n) = \alpha n^\sigma \ln^\tau n$ er u.d.mod 1. La $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ og la

$$f(x) = \alpha x^\sigma \ln^\tau x.$$

Da vet vi at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(x^\sigma \cdot \tau \frac{\ln^{\tau-1} x}{x} + \sigma x^{\sigma-1} \ln^\tau x) \\ &= \alpha(x^{\sigma-1} \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x|f'(x)| &= x|\alpha x^{\sigma-1} \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma)| \\ &= |\alpha x^\sigma \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma)|. \end{aligned}$$

Nå kan vi finne

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha(x^{\sigma-1} \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma).$$

Vi vet at $\lim_{x\to\infty}(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) = \sigma$. Og vi vet at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Nå antar vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^k x}{x} = 0$$

er sant. Da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^{k+1} x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(k+1)\frac{\ln^k x}{x}}{1} \\
&= (k+1) \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^k x}{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha(x^{\sigma-1} \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) = 0 \tag{3.30}$$

for alle $\sigma < 1$. Og

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \alpha((\sigma-1)x^{\sigma-2} \ln^\tau x + x^{\sigma-1}\tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x})(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) + \alpha(x^{\sigma-1} \ln^\tau x)(\frac{-\tau}{x\ln^2 x}) \\
&= \alpha x^{\sigma-2} \ln^\tau x((\sigma-1) + \frac{1}{\ln x})(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) - \frac{\tau}{\ln^2 x}).
\end{aligned}$$

Når $x \to \infty$,

$$((\sigma-1) + \frac{1}{\ln x})(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma) - \frac{\tau}{\ln^2 x} \to (\sigma-1)\sigma$$

som er negativt når $0 < \sigma < 1$. Da kan vi si at $f'(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ hvis σ er $0 < \sigma < 1$. Og

$$\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \lim_{x\to\infty} |\alpha x^\sigma \ln^\tau x)(\frac{\tau}{\ln x} + \sigma)| = \infty \tag{3.31}$$

for alle $\sigma > 0$.

Da, i følge Fejers Teorem og likning (3.30) og (3.31) må σ være $0 < \sigma < 1$ slik at $(x_n) = \alpha n^\sigma \ln^\tau n, n = 1, 2, 3, \ldots$ skal være u.d.mod 1. □

Eksempel 3.3.3. Følgen $(x_n) = (\alpha \ln^\tau n), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha \neq 0$ og $\tau > 1$ er u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Fejers Teorem for å vise $(x_n) = (\alpha \ln^\tau n)$ er u.d.mod 1. La $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ og la

$$f(x) = \alpha \ln^\tau x.$$

Da vet vi at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med

$$f'(x) = \alpha\tau \frac{\ln^{\tau-1} x}{x}$$

og

$$\begin{aligned} x|f'(x)| &= x|\alpha\tau \frac{\ln^{\tau-1} x}{x}| \\ &= |\alpha\tau \ln^{\tau-1} x|. \end{aligned}$$

Nå skal vi se på grensene til $f'(x)$ og $x|f'(x)|$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha\tau \frac{\ln^{\tau-1} x}{x} = \alpha\tau \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^{\tau-1} x}{x} = 0 \tag{3.32}$$

for alle $\tau \in \mathbb{R}$. Og

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha \cdot \tau \frac{(\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x} x - 1 \cdot \ln^{(\tau-1)}}{x^2} \\ &= \alpha \cdot \tau \frac{(\tau-1)\ln^{(\tau-2)} x - \ln^{(\tau-1)} x}{x^2} \\ &= \alpha \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x^2}(\frac{(\tau-1)\tau}{\ln x} - \tau). \end{aligned}$$

Vi vet at når $x \to \infty$, $\frac{(\tau-1)\tau}{\ln x} - \tau \to -\tau$. Da må τ være positivt slik at $f'(x)$ skal gå monotont til 0 når $x \to \infty$. Og

$$\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \lim_{x\to\infty} |\alpha\tau \ln^{\tau-1} x| = \infty \tag{3.33}$$

for alle $\tau > 1$. Da, i følge Fejer's Theorem og likning (3.32) og (3.33) må τ være $\tau > 1$ slik at $(x_n) = \alpha \ln^\tau n, n = 1, 2, 3, \ldots$ skal være u.d.mod 1. $\square$

Eksempel 3.3.4. Følgen $(x_n) = (\alpha n \ln^\tau n), n = 1, 2, 3, \ldots$ hvor $\alpha \neq 0$ og $\tau < 0$ er u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Fejers Teorem for å vise $(x_n) = (\alpha n \ln^\tau n)$ er u.d.mod 1. La $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ og la

$$f(x) = \alpha x \ln^\tau x.$$

Vi vet at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(\ln^\tau x + x\tau \frac{\ln^{\tau-1} x)}{x} \\ &= \alpha \ln^\tau x(1 + \frac{\tau}{\ln x}) \end{aligned}$$

og

$$x|f'(x)| = x|\alpha \ln^\tau x(1 + \frac{\tau}{\ln x})|.$$

Nå skal vi se på grensene til $f'(x)$ og $x|f'(x)|$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha \ln^\tau x(1 + \frac{\tau}{\ln x}).$$

Vi vet at $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{\tau}{\ln x}) = 1$. Og vi vet at $\lim_{x\to\infty} \ln x = 0$. for alle $\tau < 0$. Det betyr at

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha \ln^\tau x(1 + \frac{\tau}{\ln x}) \tag{3.34}$$

for alle $\tau < 0$. Og

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha \cdot \tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}(1 + \frac{\tau}{\ln x}) + \alpha \ln^\tau x(-\tau \frac{\ln^{-2} x}{x}) \\ &= \alpha \cdot \tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}(1 + \frac{\tau}{\ln x} - \frac{1}{\ln x}) \\ &= \alpha \cdot \tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}(1 + \frac{\tau - 1}{\ln x}) \\ &= \alpha \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}(\tau + \frac{\tau(\tau - 1)}{\ln x}). \end{aligned}$$

Vi vet at når $x \to \infty$, $\tau + \frac{\tau(\tau-1)}{\ln x} \to \tau$. Da må τ være negativt slik at $f'(x)$ skal gå monotont til 0 når $x \to \infty$. Og

$$\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \lim_{x\to\infty} x|\alpha \ln^\tau x(1 + \frac{\tau}{\ln x})| = \infty \tag{3.35}$$

for alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Det betyr at i følge Fejer's Theorem og likning 3.34) og (3.35) må det være $\tau < 0$ slik at $(x_n) = (\alpha \ln^\tau n), n = 1, 2, 3, \ldots$ skal være u.d.mod 1. $\square$

Nå skal vi utvide Fejers teorem ved hjelp av Van der Corputs differensteorem som fører til mange interessante nye følger som er u.d.mod 1.

3.4 Utvidet Fejers teorem

Teorem 3.4.1. *La k være et positivt heltall, og la $f(x)$ være en funksjon definert for $x > 1$, som er k ganger differensierbar for $x > x_0$. Hvis $f^k(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ og hvis $\lim_{x\to\infty} x|f^{(k)}(x)| = \infty$, så er følgen $(f(n)), n = 1, 2, 3, \ldots,$ u.d.mod 1 [KN, s. 28 - 31].*

Bevis. Vi skal bruke induksjonsbevis ved å vise at det er sant for $k = 1$ deretter skal vi anta at det er sant for $k = K$. Til slutt skal vi vise at det er sant for $k = K + 1$.
når $k = 1$,
vi vet fra Fejers teorem at hvis $f'(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ og

$$\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \infty,$$

da $(f(n))$ er u.d.mod 1.
Vi antar at det er sant for $k = K$. Det vil si at hvis

$$\lim_{x\to\infty} f^K(x) = 0$$

og

$$\lim_{x\to\infty} x|f^K(x)| = \infty,$$

da $(f(n))$ er u.d.mod 1.
Nå skal vi vise at det er sant for $k = K + 1$ som følger.
La f være en funksjon som tilfredsstiller følgende: $f^{(k)}(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ og

$$\lim_{x\to\infty} x|f^{K+1}(x)| = \infty.$$

Og la

$$g_h(x) = f(x + h) - f(x)$$

hvor h er et positivt heltall for $x \geq 1$. Så

$$g_h^K(x) = f^K(x + h) - f^K(x)$$

for $x \geq x_0$.

Nå skal vi bruke middelverdisetningen som er

$$\frac{h(x+h)-h(x)}{h} = h'(z)$$

for et punkt $x < z < x+h$.

Så kan vi skrive

$$\begin{aligned} g_h^K(x) &= f^K(x+h) - f^K(x) \\ &= hf^{K+1}(z_x) \end{aligned}$$

for et punkt $x < z_x < x+h$.

I følge vår antagelse

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} g_h^K(x) &= \lim_{z_x\to\infty} hf^{K+1}(z_x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} xg_h^K(x) &= \lim_{z_x\to\infty}(x - z_x + z_x)hf^{K+1}(z_x) \\ &= \lim_{z_x\to\infty} z_x hf^{K+1}(z_x) - \lim_{z_x\to\infty}(z_x - x)hf^{K+1}(z_x) \\ &= \infty - 0 \\ &= \infty \end{aligned}$$

på grunn av $z_x - x < h$ og $\lim_{z_x\to\infty} f^{K+1}(z_x) = 0$. I følge induksjons antagelse er $(g_h(n))$ u.d.mod 1. Det betyr at for alle $h \in \mathbb{N}$ $(g_h(n)) = (f(n+h) - f(n))$ er u.d.mod 1. Så i følge Van der Corputs differensteorem må $(f(n))$ være u.d.mod 1.

Nå vet vi at det er sant for $k = K+1$. Det vil si at hvis $f^{(k+1)}(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$ og

$$\lim_{x\to\infty} x|f^{K+1}(x)| = \infty,$$

da $(f(n))$ er u.d.mod 1. $\square$

Eksempel 3.4.2. La $\alpha \neq 0$ og $\sigma > 0$ med σ ikke heltall. Da er følgen $(\alpha n^\sigma), n = 1, 2, 3, \ldots,$ u.d.mod 1.

Bevis. La $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, $\sigma > 0$ og la

$$f(x) = \alpha x^{\sigma}.$$

Vi vet at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med å la $\sigma = k + m$, hvor k er den største heltallen som er mindre enn σ og m er desimaldelen av σ. Det betyr at

$$f(x) = \alpha x^{\sigma} = \alpha x^{(k+m)}.$$

Så

$$f'(x) = \alpha(k+m)n^{(k-1+m)}$$

$$f''(x) = \alpha(k+m)(k-1+m)n^{(k-2+m)}$$

$$\vdots$$

$$f^{k}(x) = cx^{m}$$

hvor $c = (k+m)(k-1+m)(k-1+m)\cdots(1+m)$. Så

$$f^{k+1}(x) = c \cdot mx^{(m-1)}.$$

Nå vet vi at

$$\lim_{x\to\infty} f^{k+1}(x) = \lim_{x\to\infty} c \cdot mx^{(m-1)} = 0$$

og

$$f''(x) = c \cdot m(m-1)x^{(m-2)}$$

som er negativt. Da kan vi si at $f^{(k+1)}(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$. Og

$$\lim_{x\to\infty} x|f^{k+1}(x)| = \lim_{x\to\infty} |c \cdot mx^{m}| = \infty.$$

Så i følge Teorem 3.4.1 er følgen $(x_n) = (\alpha n^{\sigma}), n = 1, 2, 3, \ldots$ u.d.mod 1. $\square$

Eksempel 3.4.3. La $\alpha \neq 0$, $\sigma > 0$ med σ ikke heltall og la τ være vilkårlig. Så er følgen $(\alpha n^{\sigma} \ln^{\tau} n), n = 2, 3, \ldots,$ u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Teorem 3.4.1. La $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, $\sigma > 0$ og la

$$f(x) = \alpha x^{\sigma} \ln^{\tau} x.$$

Vi vet at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med å la $\sigma = k + m$, hvor k er den største heltallen som er mindre enn σ og m er desimaldelen av σ. Det betyr at

$$f(x) = \alpha x^{\sigma} \ln^{\tau} x = \alpha x^{(k+m)} \ln^{\tau} x.$$

Så

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(k+m)x^{(k-1+m)} \ln^{\tau} x + \alpha x^{(k+m)} \tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} \\ &= \alpha(k+m)x^{(k-1+m)} (\ln^{\tau} x + \frac{\tau}{k+m} \ln^{(\tau-1)} x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha(k+m)(k-1+m)x^{(k-1+m)} (\ln^{\tau} x + \frac{\tau}{k+m} \ln^{(\tau-1)} x) \\ &+ \alpha(k+m)x^{(k-1+m)} (\tau \frac{\ln^{\tau} x}{x} + \frac{\tau(\tau-1)}{k+m} \frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x}) \\ &= \alpha(k+m)(k-1+m)x^{(k-1+m)} (\ln^{\tau} x \\ &+ \tau(\frac{1}{k+m} + \frac{1}{k-1+m}) \ln^{(\tau-1)} x + \frac{\tau(\tau-1)}{(k+m)(k-1+m)} \ln^{(\tau-2)} x). \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^{k}(x) = cx^{m}(\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x)$$

og

$$f^{(k+1)}(x) = c \cdot m x^{(m-1)} (\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_{k+1} \ln^{(\tau-(k+1))} x)$$

hvor $c = \alpha(k+m)(k-1+m)(k-2+m)\cdots(1+m)$ og $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$.
Fra Eksempel 3.3.2 vet vi at

$$\lim_{x \to \infty} c \cdot m x^{(m-1)} \ln^{\tau} x = 0$$

og

$$\lim_{x \to \infty} x |c \cdot m x^{(m-1)} \ln^{\tau} x| = \infty.$$

Så

$$\lim_{x\to\infty} f^{(k+1)}(x) = \lim_{x\to\infty} c\cdot mx^{(m-1)}(\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x$$
$$+ \cdots + a_{k+1} \ln^{(\tau-(k+1))} x)$$
$$= \lim_{x\to\infty} c\cdot mx^{(m-1)} \ln^{\tau} x + \lim_{x\to\infty} c\cdot m\cdot a_1 x^{(m-1)} \ln^{(\tau-1)} x$$
$$+ \cdots + \lim_{x\to\infty} c\cdot m\cdot a_{k+1} x^{(m-1)} \ln^{(\tau-(k+1))} x$$
$$= 0.$$

Og

$$f^{(k+2)}(x) = c\cdot m(m-1)x^{(m-2)} \ln^{\tau} x + c\cdot mx^{(m-1)}\tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}$$
$$= c\cdot mx^{(m-2)} \ln^{\tau} x((m-1) + \frac{\tau}{\ln x}).$$

Vi vet at når $x \to \infty$ $(m-1) + \frac{\tau}{\ln x} \to m-1$ som er negativt. Da kan vi si at $f^{(k+1)}(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$. Og

$$\lim_{x\to\infty} x|f^{(k+1)}(x)| = \lim_{x\to\infty} x|c\cdot mx^{(m-1)}(\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x$$
$$+ \cdots + a_{k+1} \ln^{(\tau-(k+1))} x)|$$
$$= \lim_{x\to\infty} c\cdot mx^{m} \ln^{\tau} x|1 + \frac{a_1}{\ln x} + \frac{a_2}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{a_k}{\ln^k x}|$$
$$= \infty \cdot 1$$
$$= \infty.$$

Så i følge Teorem 3.4.1 er følgen $(x_n) = (\alpha n^{\sigma} \ln^{\tau} n), n = 2, 3, \ldots$ u.d.mod 1. □

Eksempel 3.4.4. La k være et positivt heltall, la $\alpha \neq 0$ og $\tau < 0$. Så er følgen $(\alpha n^k \ln^{\tau} n), n = 2, 3, \ldots,$ u.d.mod 1.

Bevis. Vi skal bruke Teorem 3.4.1.

La $\alpha \in \mathbb{R}, ogla f(x) = \alpha x^k \ln^{\tau} x$. Vi vet at i følge Korollar 3.1.7 hvis følgen (αx_n) er u.d.mod 1, da må følgen $(-\alpha x_n)$ være u.d.mod 1. Vi skal starte med

$$\begin{aligned}f'(x) &= \alpha \cdot kx^{(k-1)} \ln^{\tau} x + \alpha x^{k} \tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} \\ &= \alpha \cdot kx^{(k-1)} (\ln^{\tau} x + \frac{\tau}{k} \ln^{(\tau-1)} x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) = {} & \alpha \cdot k(k-1)x^{(k-2)} (\ln^{\tau} x + \frac{\tau}{k} \ln^{(\tau-1)} x) \\ & + \alpha \cdot kx^{(k-1)} (\tau \frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} + \frac{\tau(\tau-1)}{k} \frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x}) \\ & = \alpha \cdot k(k-1)x^{(k-2)} (\ln^{\tau} x + \tau(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}) \ln^{(\tau-1)} x + \frac{\tau(\tau-1)}{k(k-1)} \ln^{(\tau-2)} x)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}f^{k}(x) &= cx^{(k-k)} (\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x) \\ &= c(\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x)\end{aligned}$$

hvor $c = \alpha \cdot k(k-1)(k-2) \cdot \cdots \cdot 1$ og $a_1.a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Siden $\tau < 0$, vet vi at

$$\lim_{x \to \infty} \ln^{\tau} x = 0$$

og

$$\lim_{x \to \infty} x \ln^{\tau} x = \infty.$$

Så

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} f^{k}(x) &= \lim_{x \to \infty} c(\ln^{\tau} x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x) \\ &= \lim_{x \to \infty} c \ln^{\tau} x + \lim_{x \to \infty} c \cdot a_1 \ln^{(\tau-1)} x \\ &+ \cdots + \lim_{x \to \infty} c \cdot a_k \ln^{(\tau-k)} x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned}f^{k+1}(x) &= c(\tau \ln^{\tau} x + a_1(\tau-1) \ln^{(\tau-1)} x + a_2(\tau-2) \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k(\tau-k) \ln^{(\tau-k)} x) \\ &= c \ln^{(\tau-1)} x (\tau + \frac{a_1(\tau-1)}{\ln x} + \frac{a_2(\tau-2)}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{a_k(\tau-k)}{\ln^k x}).\end{aligned}$$

Vi vet at $\tau + \frac{a_1(\tau-1)}{\ln x} + \frac{a_2(\tau-2)}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{a_k(\tau-k)}{\ln^k x} \to \tau$ som er negativt når $x \to \infty$. Da kan vi si at $f^k(x)$ går monotont til 0 når $x \to \infty$. Og

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x|f^k(x)| &= \lim_{x\to\infty} x|c(\ln^\tau x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x)| \\
&= \lim_{x\to\infty} cx \ln^\tau x|1 + \frac{a_1}{\ln x} + \frac{a_2}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{a_k}{\ln^k x}| \\
&= \infty|1 + 0 + 0 + \cdots + 0| \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Så i følge Teorem 3.4.1 er følgen $(x_n) = (\alpha n^k \ln^\tau n), n = 2, 3, \ldots$ er u.d.mod 1. □

Eksempel 3.4.5. La k og α være som Eksempel 3.4.4 og $\tau > 1$. Så er følgen $(\alpha n^k \ln^\tau n), n = 2, 3, \ldots,$ u.d.mod 1.

Bevis. Fra Eksempel 3.4.4 vet vi at

$$f^k(x) = c(\ln^\tau x + a_1 \ln^{(\tau-1)} x + a_2 \ln^{(\tau-2)} x + \cdots + a_k \ln^{(\tau-k)} x).$$

Men siden $\tau > 1$, vet vi at

$$\lim_{x\to\infty} \ln^\tau x = \infty$$

og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\tau x}{x} = 0.$$

Så

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= c(\tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} + a_1 \cdot (\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x} + \cdots + a_k \cdot (\tau-k)\frac{\ln^{(\tau-(k+1))} x}{x}) \\
&= c \cdot \tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} + c \cdot a_1 \cdot (\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x} \\
&+ \cdots + c \cdot a_k \cdot (\tau-k)\frac{\ln^{(\tau-(k+1))} x}{x}.
\end{aligned}$$

Nå kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f^{(k+1)}(x) = \lim_{x\to\infty}&(c \cdot \tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x} + c \cdot a_1 \cdot (\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x} \\
&+ \cdots + c \cdot a_k \cdot (\tau-k)\frac{\ln^{(\tau-(k-1))} x}{x}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Og

$$
\begin{aligned}
f^{(k+2)}(x) &= c\tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x^2}(\frac{\tau-1}{\ln x}-1)+c\cdot a_1(\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x^2}(\frac{\tau-2}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}) \\
&+\cdots+c\cdot a_k(\tau-k)\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x^2}(\frac{\tau-(k+1)}{\ln^{(k+1)} x}-\frac{1}{\ln^k x}) \\
&= c\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x^2}(-\tau+\frac{(\tau-1)(1-a_1)}{\ln x}+\frac{(\tau-2)(a_1(\tau-1)-a_2)}{\ln^2 x} \\
&+\cdots+\frac{(\tau-k)a_k(\tau-(k+1))}{\ln^{(k+1)} x}).
\end{aligned}
$$

Vi vet at $-\tau+\frac{(\tau-1)(1-a_1)}{\ln x}+\frac{(\tau-2)(a_1(\tau-1)-a_2)}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{(\tau-k)a_k(\tau-(k+1))}{\ln^{(k+1)} x}\to-\tau$ som er negativt når $x\to\infty$. Da kan vi si at $f^{(k+1)}(x)$ går monotont til 0 når $x\to\infty$. Og

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x|f^{(k+1)}(x)| &= \lim_{x\to\infty} x|c\cdot\tau\frac{\ln^{(\tau-1)} x}{x}+c\cdot a_1\cdot(\tau-1)\frac{\ln^{(\tau-2)} x}{x} \\
&+\cdots+c\cdot a_k\cdot(\tau-k)\frac{\ln^{(\tau-(k-1))} x}{x}| \\
&= \lim_{x\to\infty}|c\ln^{(\tau-1)}(\tau+\frac{a_1\cdot(\tau-1)}{\ln^1 x}+\cdots+\frac{a_k\cdot(\tau-k)}{\ln^k x}| \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Nå kan vi si at følgen $(\alpha n^k\ln^\tau n), n=2,3,\ldots$, hvor k er et positivt heltall, og $\alpha\neq 0$ er u.d.mod 1 for alle $\tau<0$ og $\tau>1$. $\square$

Bibliografi

[KN] L. Kuiper and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*

[Ap] Tom M. Apostol (1999) An Elementary View of Euler's Summation Formula, The American Mathematical Monthly, 106:5, 409-418, DOI: 10.1080/00029890.1999.12005063

[A] S. Axler. (2020). Measure, Integration and Real Analysis, Springer open

[CD] A. Croft and R. Davison, 2015, Mathematics for engineers, $4^t h$ Edution, Pearson education limited.

[W] Ober die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77, 313-352 (1916); also in Gesanunelte Abhandhmgen, Band I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1968, pp. 563-599; and in Selecta Hermann Weyl, Birkhauser Verlag, BaselStuttgart, 1956, pp. 111-147.

[Hl] E. Hlawka, 1984, The theory of uniform distribution, A B Academic publishers.

[TBB] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner and Andrew M. Bruckner, 2008, Elementary real analysis, $2^n d$ edition, Prentice Hall.