Løse likninger med ulike representasjoner

Hvordan utvikles den algebraiske tenkingen hos to elever på 5. trinn gjennom fire økter med likningsløsning og gradvis progresjon av abstraksjon?

PÅL GLENDRANGE

VEILEDER
David Alexander Reid

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Med denne masteravhandlingen markeres slutten på fem år på grunnskolelærerutdanningen ved Universitetet i Agder. Det har vært fem begivenhetsrike år, og jeg ønsker å sende en takk til alle som har vært med på å skape gode minner. 2023 så langt har vært et halvår som har bestått av lite fritid og mye arbeid. Prosessen med å skrive en masteravhandling har vært svært lærerik.

Jeg ønsker å rette en stor takk til lærerne som deltok i forskningsprosjektet, og gjennomførte undervisningseksperimentet. I den anledning vil jeg også takke elevene og de øvrige deltakerne i ALGEBRA-prosjektet. Denne masteravhandlingen hadde ikke blitt til uten dere. Min veileder, David Alexander Reid, har støttet meg gjennom hele prosessen og bidratt med konstruktive tilbakemeldinger. Ditt bidrag har vært uvurderlig, og jeg vil rette en stor takk for hjelpen du har gitt meg.

Helt til slutt vil jeg takke venner og familie, som har vært en stor støtte for meg i prosessen med å skrive en masteravhandling. Dere har bidratt med glede og oppmuntring i en ellers hektisk hverdag med mye arbeid.

Kristiansand, mai 2023

Pål Glendrange

Sammendrag

Denne masteravhandlingen handler om løsning av likninger ved ulike representasjoner. Hensikten med studien er å undersøke hvordan algebraisk tenkning utvikles gjennom arbeid med likningsløsning som blir gradvis representert mer abstrakt. En kvalitativ flerkasusstudie basert på et undervisningseksperiment ble gjennomført for å undersøke dette. Det ble introdusert flere ulike representasjoner av likninger, i stigende grad mer abstrakte. Først ble fysiske vekter brukt for å representere balanseforholdet, deretter arbeidet elevene med algebra tiles og tegninger av algebra tiles, og til slutt var likningene representert symbolsk. Undervisningseksperimentet ble gjennomført i en klasse på 5. trinn. Forskningsspørsmålet til studien er:

> *Hvordan utvikles den algebraiske tenkingen hos to elever på 5. trinn gjennom fire økter med likningsløsning og gradvis progresjon av abstraksjon?*

Studiens baseres på et teorigrunnlag som beskriver algebra og algebraisk tenkning, med utgangspunkt i tanker fra James J. Kaput og Carolyn Kieran. Dette inkluderer teori om transformativ og relasjonell tenkning, aritmetiske og algebraiske løsningsstrategier for likninger, representasjoner, variabler, balansemodeller og manipulativer. Datagrunnlaget er basert på empirisk data hentet inn gjennom video- og lydopptak, feltnotater og elevbesvarelser.

Resultatene fra denne studien viser ulike løsningsstrategier i møte med likninger. Elevene brukte aritmetiske strategier som for eksempel gjett og sjekk i starten. Gjennom arbeid med konkrete representasjoner som fysiske vekter og algebra tiles, utviklet elevene strategier som baserer seg på å utføre formelle operasjoner på begge sider av likningen, i tillegg til utvikling av en relasjonell forståelse av likhet og operasjoner. Studiens resultater blir koblet til teori og tidligere forskning i diskusjonsdelen, for å vise hvordan elevene tenkte algebraisk og for å vise deres utvikling gjennom undervisningseksperimentet.

Abstract

This master's thesis is about equation solving with different representations. The purpose of the study is to investigate how algebraic thinking develops through work with equation solving which is gradually represented more abstractly. A qualitative multi-case study based on a teaching experiment was carried out to investigate this. Several different representations of equations, increasingly more abstract, were introduced. First, physical balances were used to represent the balance relationship, then the students worked with algebra tiles and drawings of algebra tiles, and finally the equations were represented symbolically. The teaching experiment was carried out in a class in the 5^{th} grade. The research question for the study is:

> *How does the algebraic thinking of two pupils in the 5th grade develop through four sessions of equation solving and gradual progression of abstraction?*

The study has a theoretical base that describes algebra and algebraic thinking, based on ideas from James J. Kaput and Carolyn Kieran. This includes theory on transformational and relational thinking, arithmetic, and algebraic methods for solving equations, representations, variables, balance models and manipulatives. The data is based on empirical data collected through video and audio recordings, field notes and student responses.

The results from this show different solution strategies when faced with equations. The pupils used arithmetic strategies, such as guess and check in the beginning. Through work with concrete representations such as physical weights and algebra tiles, the pupils developed strategies based on performing formal operations on both sides of the equations, in addition to a development of a relational understanding of equality and operations. The results of the study then connected to theory and prior research, to show how the pupils were thinking algebraically and to show how this developed throughout the teaching experiment.

Innholdsfortegnelse

1 Introduksjon

Denne masteravhandlingen er en kvalitativ kasusstudie, basert på et undervisningseksperiment som er utviklet og gjennomført i en klasse på 5. trinn. Undervisningseksperimentet utforsker en tilnærming til læring av algebra gjennom likningsløsning, og en parallell progresjon innen abstraksjon og algebraisk tenking. Empirisk data er innsamlet gjennom video- og lydopptak, i tillegg til feltnotater og elevbesvarelser. Målet med studien er å undersøke hvordan to elevers algebraiske tenkning utvikles gjennom arbeid med likningsløsing.

1.1 Problemstilling og bakgrunn for valg av tema

Algebra er et tema elever historisk sett har slitt med. Tradisjonelt sett har man hatt en aritmetikk-så-algebra tilnærming i opplæringen, der aritmetikk har vært fokus på barneskole og algebra har vært fokus på ungdomsskole og videregående (Cai & Knuth, 2011). Dette har ført til at algebra har blitt tolket som noe nytt, adskilt fra den matematikken elevene er vant med, når de møter den først i de senere trinnene (Kieran, 2007). Skillet mellom aritmetikk og algebra har blitt beskrevet som vanskelig (Filloy & Rojano, 1989). Ulike tilnærminger er prøvd for å løse dette problemet, inkludert å identifisere viktige aspekter som gjør denne overgangen vanskelig, for eksempel forståelsen av likhetstegnet (Knuth et al., 2006). I nyere tid har en ny tilnærming blitt utviklet, der man ser på aritmetikk og algebra som to sider av samme mynt, i stedet for to separate felt som må kobles sammen (Cai & Knuth, 2011). Denne tilnærmingen kalles tidlig algebra, hvor man prøver å algebraifisere eksisterende læreplaner, i kontrast til å importere algebraiske oppgaver fra senere trinn.

Å løse likninger og forklare hva det vil si at et tall er løsning på en likning er et nytt kompetansemål for 5. trinn i den nye læreplanen, i tillegg beskriver læreplanen også flere kompetansemål på mellomtrinnene som omhandler algebra (Kunnskapsdepartementet, 2019). UiA har satt i gang et forskningsprosjekt, som har som mål å utvikle undervisningsopplegg (ALTA: Algebra Learning Teaching Activity), og skal hjelpe elever i overgangen fra aritmetikk til algebra. Denne studien er en del av dette prosjektet, hvor en ALTA for undervisning i likningsløsning er gjennomført.

1.2 Forskningsspørsmål

Hvordan utvikles den algebraiske tenkingen hos to elever på 5. trinn gjennom fire økter med likningsløsning og gradvis progresjon av abstraksjon?

1.3 Disposisjon

Masteravhandlingen starter med en presentasjon av teori og tidligere forskning som studien er basert på. Dette innebærer en redegjørelse av algebra og algebraisk tenkning, transformativ og relasjonell tenkning, variabler, aritmetisk og algebraisk likningsløsning og representasjoner. Teorikapittelet avsluttes med en presentasjon av tidligere forskning på bruk av balansemodeller og manipulativer. Videre blir det gjort rede for metodologiske valg, som inkluderer valgt forskningsmetode, valg av prosjektdeltakere, utvikling og gjennomføring av undervisningseksperiment, i tillegg til en redegjørelse for hvordan empiri er samlet inn, behandlet og analysert. Metodekapittelet avsluttes med refleksjoner rundt studiens kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet, i tillegg til etiske betraktninger. Etterfulgt av dette, vil resultatene fra studien presenteres og analyseres på grunnlag av forskningsspørsmålet, etterfulgt av en diskusjon i lys av teori og tidligere forskning. I konklusjonen oppsummeres diskusjonen av resultatene for å besvare forskningsspørsmålet. Deretter følger en oppfordring til videre forskning, refleksjon rundt studien og avslutning. Mot slutten presenteres en oversikt over litteraturen som er brukt, før til vedleggene presenteres til slutt.

2 Teori og tidligere forskning

I dette hovedkapittelet gjennomgås teorigrunnlaget til studien. Først presenteres teori om algebraisk tenkning. Deretter følger teori som omhandler transformativ og relasjonell tenkning, etterfulgt av teori om variabler, og aritmetisk og algebraisk likningsløsning. Videre presenteres teori om representasjoner, før det til slutt vil være en presentasjon av tidligere forskning rundt bruken av balansemodeller og algebra tiles.

2.1 Algebraisk tenkning

Tradisjonelt sett skiller de fleste læreplaner mellom aritmetikk og algebra, hvor fokuset endres i overgangen fra barneskolen til ungdomsskolen. Det er derimot en voksende enighet om at denne delingen gjør det vanskeligere for elever å lære algebra på de senere trinnene (Kieran, 2007). Overgangen mellom aritmetikk og algebra er vanskelig for mange elever, og selv om de presterer godt i aritmetikk, så krever algebra en annen type tenkning (Kieran et al., 2007; Kilpatrick et al., 2001). Det finnes en bred enighet om at tidlig innføring av algebraiske ideer i barneskolen gir elever et bedre utgangspunkt for forståelse av algebra (Blanton et al., 2019; Cai & Knuth, 2011; Radford, 2014). I følge Kieran (2004) har elever som opererer innenfor en aritmetisk tankegang ofte fokus på kalkulering, og ser ikke relasjonelle aspekter ved operasjoner. Derfor er det nødvendig med justeringer når man arbeider med utvikling av algebraisk tenkning. Hun nevner fem punkter dette innebærer:

1. Fokus på relasjoner, og ikke kun kalkulering av et numerisk svar
2. Fokus på operasjoner og deres inverse operasjoner
3. Fokus på å både representere og løse problemer, i motsetning til å kun løse dem
4. Fokus på både tall og bokstaver, i motsetning til tall alene. Dette inkluderer:
    I. Arbeid med tall som til tider kan være ukjente, variabler eller parametere
    II. Å godta ulukkede bokstavuttrykk som svar
    III. Å sammenligne uttrykk basert på ekvivalens, i motsetning til deres numeriske verdi
5. Et nytt fokus på betydningen av likhetstegnet

I følge Kaput (2008) består algebraisk tenkning av to nøkkelaspekter, (1) å lage og uttrykke generaliseringer og økende grad av formelle og konvensjonelle symbolsystemer, og (2) syntaktiske guidede resonnement og handlinger på generaliseringer uttrykt i konvensjonelle symbolsystemer. Disse nøkkelaspektene skjærer på tvers av skolealgebraen, blant annet algebra som studien av strukturer og systemer abstrahert fra beregninger og relasjoner, og algebra som studien av funksjoner, relasjoner og felles variasjon (Kaput, 2008).
Handlinger innen generalisering og abstraksjon gir opphav til formalisme som støtter syntaktiske beregninger som igjen kan undersøkes for sine egne strukturer, vanligvis basert på deres konkrete opphav (Kaput, 1995).
Kaput (1995) sier at disse strukturene ser ut til å ha tre formål;

1. Berike forståelsen for systemene de er abstrahert fra
2. Å gi iboende nyttige strukturer for beregninger, frigjort fra detaljene de en gang var knyttet til
3. Å legge et grunnlag for høyere nivå av abstraksjon og formalisering

Algebraisk tenkning i de tidlige trinnene burde ifølge Cai & Knuth (2011) utvikles bl.a. gjennom analyse av forhold mellom kvantiteter, legge merke til strukturer, generalisering, problemløsning og modellering. Det finnes flere måter tidlig algebra kan foregå i klasserommet, der funksjonell tenking er en måte lærere kan bygge generalitet inn i læreplanen og instruksjoner (Blanton & Kaput, 2011). Mange forskere har argumentert for viktigheten til et funksjonelt perspektiv som kontrast til en mer tradisjonell tilnærming som fokuserer på algebra som symbolmanipulering (Bednarz & Janvier, 1996).

2.2 Transformativ og relasjonell tenkning

Kieran (2004) kategoriserer skolealgebra etter aktivitetene elever vanligvis deltar i, der en av dem er transformative aktiviteter. Dette er aktiviteter som innebærer f.eks. erstatning, forenkling av uttrykk eller likningsløsning. En stor del av disse aktivitetene omhandler å endre formen til et uttrykk eller likning samtidig som balansen blir opprettholdt (Kieran, 2004).

Å kunne løse likninger er et grunnleggende og viktig aspekt av algebraisk tenkning (Cai & Knuth, 2011). Hovedkarakteristikken til en likning er at uttrykkene på begge sider av likhetstegnet representerer samme verdi, samtidig som de kan se annerledes ut (Otten et al., 2019b). Algebraisk tenkning er avhengig av forståelse for en rekke nøkkelbegreper, hvor ekvivalens og variabler er to av de mest fundamentale (Knuth et al., 2011). Forståelsen av likhetstegnet som man håper elever uttrykker, er en relasjonell forståelse der likhetstegnet representerer et ekvivalensforhold. (Behr et al., 1980). Derimot har mange elever tidlig en operasjonell forståelse av likhetstegnet som et signal for at noe skal kalkuleres (Behr et al., 1980; Falkner et al., 1999). En slik forståelse inkluderer for eksempel å referere til likhetstegnet som *totalen* eller *svaret* (Knuth et al., 2006). Den relasjonelle forståelsen for likhetstegnet blir særlig viktig når elever møter, og lærer å løse algebraiske likninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, i tillegg til å forstå at disse operasjonene opprettholder ekvivalensen (Knuth et al., 2011). Knuth et al., (2006) hevder det finnes en sterk positiv sammenheng mellom elevers relasjonelle forståelse av likhetstegnet og deres prestasjoner innen likningsløsning. Kilpatrick et al., (2001) sier at elevers utvikling av forståelse av likhet og ekvivalens, i tillegg til utvikling av en dypere forståelse av operasjoner og inverse operasjoner, skjer nettopp gjennom transformative aktiviteter som likningsløsning.

2.3 Variabler

Det finnes flere forståelser av begrepet variabel (Knuth et al., 2011; Küchemann, 1981; Usiskin, 1988). Elevers tolkning av begrepet variabel skiller mellom statisk forståelse av variabler som objekter (merkelapp for et objekt eller objektet selv) eller spesifikke ukjente (en fast verdi), og dynamisk forståelse av variabler som generaliserte tall (representerer flere verdier, en om gangen) eller ubestemte varierende kvantiteter (flere tall representert på en gang). For å oppnå en symbolsk representasjon av et funksjonelt forhold i en problemløsningskontekst, kan variabelen brukes midlertidig som ukjent. Derimot må man forstå variabelen som en ubestemt kvantitet for å definere eller arbeide med funksjonen (Molina et al., 2018).

2.4 Algebraisk versus aritmetisk likningsløsning

Aritmetikk er ofte orientert rundt å finne et svar, og fokuserer lite på representasjon av relasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Bednarz & Janvier (1996) karakteriserer aritmetiske prosedyrer som bearbeiding av kjente mengder, hvor man forsøker å finne koblinger mellom mengdene og operere på dem. Fokuset i aritmetikk blir derfor på beregninger, i kontrast til en algebraisk tankegang som fokuserer på relasjonelle aspekter ved operasjoner (Kieran, 2004). De ulike strategiene, overbevisningene og modellene elever utvikler gjennom arbeid med aritmetikk, blir også videreført når elevene møter algebraiske problemer (Bednarz & Janvier, 1996). Filloy & Rojano (1989) hevder at dette må endres i overgangen mellom aritmetikk og algebra, hvor algebra innebærer å utføre operasjoner på andre objekter enn kjente tall. Dette er i tråd med at Kieran (2004) trekker frem justeringer som involverer fokus på relasjoner, operasjoner, tall og bokstaver og et nytt fokus på likhetstegnet.

Filloy & Rojano (1989) skiller mellom aritmetiske og algebraiske likninger, hvor aritmetiske likninger er på formen Ax+B=C. I slike likninger impliserer venstresiden en sekvens av operasjoner hvor høyresiden er en konsekvens av disse operasjonene (Filloy & Rojano, 1989), der elever ofte tolker likhetstegnet som et operasjonelt symbol (Behr et al., 1980; Falkner et al., 1999) og refererer til tegnet som *totalen* eller *svaret* (Knuth et al., 2006). Algebraiske likninger har formen Ax+B=Cx+D, og innebærer operasjoner som er utenfor aritmetiske prosedyrer, nærmere bestemt operasjoner på den ukjente. For at disse operasjonene skal være meningsfulle for elevene, må de forstå at uttrykkene på begge sider av likningen er av lik struktur (Filloy & Rojano, 1989).

Algebraiske metoder for løsning av likninger innebærer at man utfører de samme transformasjonene på begge sider av likningen (Knuth et al., 2006), og er en viktig formell likningsløsningsprosedyre (Kilpatrick et al., 2001; Otten et al., 2019b). Dette er en strategi elever ofte bruker (Booth & Koedinger, 2008), der målet er å isolere de(n) ukjente på en side av likningen (Otten et al., 2019b). Å utføre samme operasjoner på begge sider av likningen kan være enklere for elever som allerede ser på likninger som enheter med symmetrisk balanse (Kilpatrick, 2001).

Dette er derimot ikke den første metoden elever ofte lærer (Kilpatrick et al., 2001). Gjett og sjekk eller andre uformelle strategier som å jobbe bakover-strategien eller dekke over-strategien brukes for å introdusere likningsløsning (Knuth et al., 2006; Kilpatrick et al., 2001), der gjett og sjekk omtales som en mindre ønskelig løsningsstrategi (Otten et al., 2019b). Gjett og sjekk-metoden går ut på å prøve ulike tall og verdier for å komme til en korrekt løsning på oppgaven, og er en mye brukt metode av elever (Fülöp, 2020). Stacey & McGregor (1999) karakteriserer dette som en ikke-algebraisk og aritmetisk strategi, hvor de også kategoriserer tre ulike måter dette blir utført på: (1) Tilfeldig gjetning hvor man håper på å være heldig og finne en korrekt løsning, (2) prøve på tall i sekvens der man håper å nå den korrekte løsningen og (3) utføre flere tester, og bruke resultatet fra forrige test for å velge den neste.

2.5 Representasjoner

I følge Kieran (2007) kan bruken av ulike representasjoner bidra til utvikling av algebraisk tenkning, der matematiske objekter ikke er tilgjengelig slik fysiske objekter er. Duval (2002, 2006) hevder at en introduksjon av tegn og andre semiotiske representasjoner er den eneste måten å få tilgang til de matematiske objektene. Dette er noe Blanton et al. (2019) også poengterer, hvor representasjon er en viktig praksis for å utvikle algebraisk tenkning. Elevers forståelse for matematiske objekter utvikles gjennom arbeid med flere ulike semiotiske representasjoner (Kieran, 2007). Leong et al. (2015) foreslår CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) som tilnærming, og omhandler en gradvis overgang mellom representasjoner. Dersom dette gjøres over en periode på 4-6 undervisningstimer tillater det at intermodale koblinger etableres, og elevene kan gå videre til det neste stadiet når de er klare for dette (Leong et al., 2015).

Duval (2006) hevder semiotiske representasjoner kan transformeres uten at ny data eller observasjoner tilføres, og at evnen til å transformere mellom representasjoner er en terskel for å se fremgang på læring i matematikk. Duval (2006) skiller mellom to typer transformasjoner av representasjoner, *behandling* og *konvertering. Behandling* innebærer å utføre aritmetiske og algebraiske prosedyrer, for eksempel likningsløsning. *Konvertering* omhandler å endre representasjonsform, samtidig som objektene som betegnes forblir de samme (Duval, 2006). Filloy & Rojano (1989) beskriver også *oversetting* og *separering* som to fundamentale komponenter i overgangen fra aritmetikk til algebra, hvor man bruker konkrete modeller og representasjoner for å operere på den ukjente. *Oversetting* handler om å utstyre de nye objektene og operasjonene i en abstrakt kontekst med mening, gjennom å gi dem mer konkrete manifestasjoner. *Separering* omhandler å løsrive seg fra detaljene om meningen tilhørende den konkrete konteksten gir til objektene og operasjonene (Filloy & Rojano, 1989). Begge måter å se representasjoner på beskriver operasjoner og prosedyrer som blir gjort for å løse problemer, i tillegg til endringer i representasjonsformer. I *oversettelsesprosessen* som Filloy & Rojano (1989) beskriver, foregår det *behandling* som Duval (2006) beskriver, der man utfører aritmetiske eller algebraiske prosedyrer på objekter i en konkret kontekst. Dette kan være å løse likninger innenfor en konkret representasjon. Disse prosedyrene er analogier for hva som skjer på et abstrakt nivå. I *konverteringsprosessen* som Duval (2006) beskriver, der man for eksempel løser likninger som har en mer abstrakt representasjonsform, er målet at elevene skal oppnå en *separasjon* fra detaljene om meningen til den konkrete konteksten, og ikke være avhengig av konkrete representasjonsmåter (Filloy & Rojano, 1989).

Algebraiske relasjoner som er representert på ikke-symbolske former (f.eks. modeller eller manipulativer), er ofte lettere å forstå for elever enn relasjoner som er representert symbolsk (Watson, 2009), og det finnes empirisk bevis på at bruken av flere representasjoner forbedrer elevers forståelse av algebraiske konsepter, som f.eks. likningsløsning (Warren et al., 2016; Watson, 2009).

2.6 Balansemodeller

Tilnærminger som har blitt utviklet for læring av lineær likningsløsning er utviklet for å overkomme vanskeligheter i forhold til relasjonell forståelse av likhetstegnet, eller operasjoner på ukjente for å løse likninger (Otten et al., 2019b). Ulike matematiske modeller som arealmodeller, lineære modeller eller balansemodeller har blitt brukt (Van Amerom, 2002). Disse modellene er ment for å hjelpe elever med å forstå hva likningsløsning involverer og å hjelpe dem med å utvikle strategier for å finne verdien til den ukjente (Otten et al., 2019b). Balansemodellen har en lang didaktisk historie (Otten et al., 2019b), og flere ulike typer balansemodeller har blitt brukt for å lære likninger, f.eks. konkrete fysiske vekter eller virtuelle vekter (Otten et al., 2019a). Konkrete balansemodeller velges ofte på grunn av at den fysiske erfaringen elever får gjennom å arbeide med slikt utstyr, og sies å være fordelaktig for elevenes læringsprosess. Den dynamiske karakteristikken til fysiske vekter tillater elevene å få en direkte tilbakemelding på deres handlinger, og kan hjelpe elever med å utvikle strategier for å opprettholde balansen (Otten et al., 2019b). Dette er et aspekt som mangler i andre representasjonsformer. Gjennom fysisk erfaring med vekter og utvikling av strategier for å opprettholde balansen, kan elevers forståelse av ekvivalens styrkes, samt føre til en mer abstrakt forståelse som er nødvendig for likningsløsning på et mer formelt nivå (Otten et al., 2019b). De fysiske manipulasjonene som opprettholder balansen av vekten kan fungere som en metaforisk kartlegging (Lakoff & Johnson, 1980; Núñez et al., 1999) for de algebraiske strategiene som brukes for å opprettholde balansen (Otten et al., 2019b).

2.7 Manipulativer

Manipulativer er læringsverktøy som blir brukt for å konkret representere et abstrakt matematisk konsept, og kan bli manipulert av elever gjennom ulike sanser for å konstruere en forståelse av konsepter som skal læres (McNeil & Jarvin, 2007; Moyer, 2001). Fysiske manipulativer er fysiske objekter som gir unike fordeler, inkludert å forbedre minne gjennom fysiske handlinger (McNeil & Jarvin, 2007). Algebra tiles er en type matematisk manipulativ (Kablan, 2016) og er et pedagogisk verktøy for å hjelpe elever med å forstå algebraiske begreper ved å bruke geometriske figurer (Castro, 2017). De geometriske figurene består av kvadrater og rektangler i forskjellige dimensjoner (Thornton, 1995), og tillater brukerne blant annet å løse lineære systemer og modellere algebraiske uttrykk (Garzon & Bautista, 2018). De gir også læreren mulighet til å fokusere på å innføre begreper, i motsetning til å fokusere på instruktive metoder som oppmuntrer til memorering (Caglayan et al., 2013; Saraswati et al., 2016). Bruk av algebra tiles for å representere balansen mangler det dynamiske aspektet som fysiske vekter medbringer, der man får en direkte tilbakemelding på hvorvidt operasjonene man utfører opprettholder balansen (Otten et al., 2019b). Derimot tillater de fysiske operasjoner som å flytte på eller fjerne objekter, som man også gjør ved bruken av fysiske vekter.

Men ifølge Ball (1992) må vi være forsiktige med bruken av manipulativer i matematikkundervisningen. Vi må ikke villedes til å tro at manipulativene automatisk vil lede til en matematisk forståelse. Kontekst, hvordan og når konkretene brukes og hva slags samtaler og diskusjoner man har om manipulativene, er like viktig som konkretene i seg selv

(Ball, 1992). Elever er heller ikke nødvendigvis i stand til å manipulere objektene som det er tiltenkt, og kan trenge veiledning for å operere på dem meningsfullt (Carbonneau et al., 2013). Elever kan også ha vanskeligheter med å hente ut de underliggende matematiske konseptene fra representasjonene de fysiske objektene utgjør, uansett om de opereres på etter tiltenkt måte (Clements, 2000; Kilpatrick et al., 2001; Pape & Tchoshanov, 2001). Elever kan dessuten ha vanskeligheter med å se en sammenheng mellom de manipulativbaserte og symbolske representasjonene (Kilpatrick et al., 2001; Pape & Tchoshanov, 2001; Uttal et al., 2013), og kan behøve hjelp med å koble disse sammen (Kilpatrick et al., 2001; Manches & O’Malley, 2012; Uttal et al., 2013).

3 Forskningsmetode

I dette hovedkapittelet vil jeg redegjøre for studiens forskningsmetode og prosjektdeltakere. Videre vil det følge en beskrivelse av hvordan undervisningseksperimentet ble utviklet og gjennomført, i tillegg til hvordan data ble innsamlet og håndtert. Deretter beskrives hvordan dataanalysen ble gjennomført, og en redegjørelse for studiens kvalitetskriterier og etiske betraktninger til slutt.

3.1 Forskningsparadigme, forskningsstrategi og forskningsdesign

Dette forskningsprosjektet ligger innenfor et interpretativt forskningsparadigme. Dette kalles også ofte fortolkningsparadigme, ettersom forskeren inngår sterkt i fenomenet som studeres og i fortolkningen av data (Bryman, 2012).

Målet med studien var å kartlegge elevers utvikling i algebraisk tenkning, gjennom å observere deres kompetanse og løsningsstrategier i arbeid med likninger. I tillegg til dette hadde jeg som mål å finne en tilnærming til introduksjon av algebra på mellomtrinnet som var fordelaktig for elevenes progresjon i algebraisk tenkning og kompetanse i likningsløsning. Ved å gjennomføre et undervisningseksperiment får man mulighet til å teste ut nye metoder og aktiviteter, og man får på nært hold erfare elevers matematiske læring og resonnering (Steffe & Thompson, 2000). Det ble utviklet et undervisningsopplegg som utforsker utvikling av algebraisk tenkning gjennom arbeid med likninger (Se kapittel 3.3 for detaljer). Steffe & Thompson (2000) trekker frem flere elementer ved undervisningseksperiment som metode. Et undervisningseksperiment involverer en sekvens av undervisningsepisoder, og inneholder flere aktører. Disse aktørene er normalt sett en lærer, en eller flere elever, samt et vitne som observerer eksperimentet. I tillegg må man ha en metode for å dokumentere hva som foregår gjennom episodene, der video- og/eller lydopptak er vanlig (Steffe & Thompson, 2000). Dersom man utforsker flere kasus, defineres dette som en flerkasusstudie. Resultatene som oppnås gjennom slike studier er derimot begrenset med tanke på å si noe om elevers tenkning på generell basis (Bryman, 2012). Min studie er en kombinasjon av en flerkasusstudie og et undervisningseksperiment.

Et undervisningseksperiment bestående av fire undervisningstimer (episoder) har blitt gjennomført i en klasse på 5. trinn etter Steffe & Thompson (2000) sin beskrivelse av et undervisningseksperiment. Jeg hadde en fast rolle som observatør i alle episodene. I noen av episodene var også andre forskere i ALGEBRA-prosjektet til stede. Klassens kontaktlærer, som var med på å utvikle undervisningseksperimentet, hadde ansvar for gjennomføring. Dette innebærer oppstart og avslutning, informasjonsgivning, veiledning av elevarbeid og å lede diskusjoner. Min rolle som observatør var i hovedsak en tilbaketrukken rolle, hvor fokuset var på observering og notering av observasjoner gjennom episodene, i tillegg til et ansvar for å klargjøre og operere utstyr for datainnsamling (kamera og lydopptakere). Det ble gjort video- og lydopptak i tre av fire undervisningstimer, der tre kamera og tre lydopptakere dokumenterte tre gruppers arbeid med likninger. Etter hver økt ble også eventuelle elevbesvarelser som oppgaveark samlet inn.

3.2 Prosjektdeltakere

Tema for oppgaven er algebra, algebraisk tenkning og likninger, og det var også naturlig å gjennomføre studien på 5. trinn, etter innføring av nye kompetansemål som omhandler løsning av likninger på 5. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). I ALGEBRA-prosjektet er fem lærere på to skoler deltakere. Alle fem har matematikkundervisning fordelt på 5-7. trinn, der noen av lærerne også har matematikkundervisning på flere trinn. På et workshop med lærerne og forskere i forskningsprosjektet, ble skisser for undervisningseksperiment (ALTA: Algebra Learning Teaching Activity) som omhandler algebra presentert, med ulikt fokus for hvert trinn. Undervisningseksperimentet omhandlende løsning av likninger ble valgt for 5. trinn, og lærerne som har matematikkundervisning på 5. trinn skulle gjennomføre dette undervisningseksperimentet i sin klasse. Det endte dermed opp med at en lærer utførte undervisningseksperimentet i en klasse på 5. trinn på en privat barneskole på Sørlandet. Klassens kontaktlærer, som gjennomførte undervisningseksperimentet, hadde sendt ut informasjonsskriv (vedlegg 2) til elevenes foresatte i god tid, slik at de fikk tid til å tenke over og stille spørsmål i forhold til et eventuelt samtykke til deltakelse i forskningsprosjektet. I klassen var det totalt 16 elever, hvor 15 av elevene var til stede i løpet av de fire undervisningsøktene. 13 av disse elevene hadde gitt samtykke til deltakelse i studien, som innebar samtykke til video- og lydopptak og innsamling av elevbesvarelser. Alle elever arbeidet med de samme oppgavene gjennom hele undervisningseksperimentet, og elevene som ikke hadde samtykke til deltakelse arbeidet i samme gruppe.

3.3 Undervisningseksperiment (ALTA)

En skisse til en ALTA (Se vedlegg 3) som utforsker løsning av likninger ble utviklet av meg, i samarbeid med veileder. Denne ble presentert på et workshop med forskere og lærere i ALGEBRA-prosjektet, og videreutviklet sammen med læreren som skulle gjennomføre ALTA-en for å tilpasse den til klassen. Det kommer nå en mer detaljert beskrivelse av undervisningseksperimentet.

3.3.1 ALTA løse likninger

ALTA-en er en skisse for et undervisningseksperiment som utforsker løsning av likninger gjennom en progresjon innen algebraisk tenkning og abstraksjon i forhold til representasjoner. Kjerneelementer som faller inn i ALTA-en er representasjon og kommunikasjon, samt abstraksjon og generalisering. Kompetansemålet ALTA-en har grunnlag i er *løse likninger og ulikheter gjennom logiske resonnement og forklare hva det vil si at et tall er en løsning på en ligning* (Kunnskapsdepartementet, 2019). ALTA-en beskriver fem økter, der man har en progresjon i grad av algebraisk tenkning som kreves, og representasjonene for likninger blir mer abstrakte.

ALTA-en starter med å benytte fysiske vekter for å representere likhetsforhold og balanse. Ideen om bruk av balansemodell for likningsløsning er hentet fra en studie gjort av Otten et al. (2019b). I første økt var hensikten at elevene skulle få fysisk erfaring med vektene, gjennom å finne vekten til ulike objekter og observere hvilke handlinger som gjorde at balansen til vekta ble opprettholdt. Videre beskriver ALTA-en aktiviteter for løsning av likninger med fysiske vekter, der poser med ukjent farge og vekt brukes for å representere tall og ukjente i en likning. Bruken av fysiske vekter gjør at elevene i sanntid får tilbakemelding på hvilke operasjoner som utføres på objektene, opprettholder balansen. Deretter øker graden av abstraksjon, og likningene går over til å bli representert av algebra tiles. Bruk av algebra tiles som representasjon for likninger tillater elevene å utføre de samme operasjonene som med fysiske vekter, men man får derimot ikke noe direkte tilbakemelding på om hvorvidt balansen opprettholdes. Gjennom manipulering av algebra tiles skulle elevene løse likninger, der operasjonene de gjorde på fysiske vekter i første økt, fungerer som en metafor for hvordan man kan operere på tiles. Neste representasjon som beskrives er tegninger av fysiske objekter, der graden av abstraksjon økes ved at man ikke lenger flytter på fysiske objekter når man utfører operasjoner. Derimot er objektene ennå synlige, og man kan utføre og holde oversikten på operasjoner ved å krysse ut objekter eller tegne nye objekter. I siste del av ALTA-en er likningene representert symbolsk. Objektene er nå skjult, men de samme operasjonene utføres ved hjelp av formell notasjon, som også gjør at man har oversikt over hvilke operasjoner som utføres.

3.3.2 Gjennomføring

ALTA-en ble brukt som skisse for progresjonen gjennom undervisningsøktene. Det ble gjort endringer underveis, f.eks. sammenslåing av økter beskrevet i ALTA-en, eller tidligere progresjon enn planlagt basert på elevprestasjoner. Jeg vil nå presentere hvordan øktene ble gjennomført.

3.3.2.1 Første økt

I første økt var fokuset at elevene skulle få fysisk erfaring med å arbeide med en balansemodell, etter inspirasjon fra Otten et al. (2019b). Elevene fant vekten til ulike objekter i form av hvor mange numicon-brikker som skulle til for å balansere vekten. I noen tilfeller var det enheter av flere identiske objekter som var teipet sammen. I disse tilfellene måtte elevene finne vekten til de individuelle objektene ved å ta i bruk divisjon. Etter arbeidet i grupper samlet elevene seg i amfiet for en oppsummering. Her ble det diskutert hvilke handlinger som gjorde at vekten forble i balanse. I tillegg introduserte læreren notasjonen x som står for den ukjente vekten. Elevene hadde funnet ut at fire objekter som var teipet sammen veide 64 numicon-brikker, og læreren skrev dette ned som 4x = 64. Deretter separerte elevene objektene mentalt, og fant at ett objekt veide 16, som ble skrevet som x = 16. Etter planen skulle elevene også løse likninger ved hjelp av fysiske vekter, men på grunn av manglende utstyr fikk de ikke anledning til dette. Til tross for dette, var gjennomføringen en suksess, der elevene fikk arbeidet med og diskutert balanseforhold, likhet og operasjoner, gjennom fysisk erfaring med konkrete vekter.

3.3.2.2 Andre økt

I denne økten var målet å løse likninger som var representert i form av algebra tiles, og de fikk utdelt et oppgaveark med åtte likninger (se vedlegg 4). Målet var at elevene skulle ta med seg erfaringene de gjorde fra første økt, for eksempel å fjerne det samme på begge sider av vekta for å opprettholde balansen, og bruke disse i manipulering av tiles for å finne en løsning på likningene. Elevene jobbet i grupper, der to-og-to elever hovedsakelig samarbeidet med løsningene. Etter gruppearbeidet samlet elevene seg i amfiet for en oppsummering, der elever som var villige ble valgt til å løse likningene på smart-tavlen. Likningene var her representert som tegninger av algebra tiles, og operasjonene de utførte var i form av utkrysning av tiles. Gjennomføringen av økten gikk etter planen, og lærer og jeg var positivt overrasket over elevenes prestasjoner. På grunn av dette, og at elevene fikk erfare hvordan man bruker tegninger av algebra tiles som representasjon av likninger, bestemte vi oss for å gå videre til symbolsk representasjon i neste økt.

3.3.2.3 Tredje økt

I denne økten var målet å løse symbolsk representerte likninger, samtidig som man kunne benytte seg av algebra tiles som hjelpemiddel. Elevene fikk utdelt et oppgaveark (se vedlegg 5) med 14 likninger. De åtte første likningene var de samme som elevene arbeidet med å løse i andre økt, men var i denne økten representert symbolsk. De startet først å arbeide individuelt før de gikk sammen i grupper for å løse oppgavene. Mot slutten fikk elevene også utdelt et oppgaveark med tekstoppgaver, der oppgaven var å lage bokstavuttrykk som representerte situasjonen i oppgaven. På grunn av tekniske årsaker blir ikke resultater fra tekstoppgavene presentert i denne studien. Etter gruppearbeidet samlet elevene seg i amfiet for en oppsummering. Gjennomføringen av denne økten var preget av uro i klassen. I gruppearbeidet var elevene distraherte, og snakket i stor grad om andre ting enn det som var relevant til oppgavene de skulle løse.

3.3.2.4 Fjerde økt

I denne økten var også målet at elevene skulle løse symbolske representerte likninger, der algebra tiles var et tilgjengelig hjelpemiddel for de som følte de behøvde dette. Oppgavene var likninger som de fikk utdelt på et oppgaveark (se vedlegg 6). I tillegg fikk elevene instruksjon om å notere ned symbolsk, hvilke operasjoner de utførte i løsningen av likningen. Dette kunne være operasjoner de utførte med tiles, eller kun symbolske operasjoner. I instruksjonen ble en type notasjon for operasjoner innført av lærer; man skriver en strek (|) etter likningen, der operasjonene som blir utført skrives bak streken (f.eks. $x + 3 = 7 \mid -3$). I denne økten fikk elevene et valg om å jobbe individuelt eller i par. Elevene som ble ferdig med oppgavearket, fikk utdelt et oppgaveark med tekstoppgaver, der de skulle lage bokstavuttrykk som passet til problemsituasjonen, og løse likningen. På grunn av tekniske årsaker blir ikke resultater fra tekstoppgavene presentert i denne studien. Etter elevaktiviteten samlet alle elevene seg i amfiet for en oppsummering. Ettersom tredje økts gjennomføring ikke gikk helt etter planen, bestemte vi oss før fjerde økt for å gjøre endringer som innebar å ha et større fokus på operasjoner, og hvordan man på en meningsfull måte kan benytte symbolsk notasjon for å utføre operasjoner. Fjerde økt var en produktiv økt, der det var lite uro i klassen og elevene arbeidet bra gjennom hele økten.

3.4 Datainnsamling og behandling av data

Gjennom fire undervisningstimer ble elever observert i gruppearbeid, individuelt arbeid og plenumssamlinger. Det ble gjort video- og lydopptak av lærerforedrag og gruppearbeid i de tre første øktene. På grunn av manglende utstyr var det ikke mulig å gjennomføre video- og lydopptak i siste undervisningsøkt. I tillegg er det tatt feltnotater, og jeg har samlet inn oppgaveark som elevene arbeidet med. Video- og lydinnspillingsutstyr ble plassert ved tre gruppebord, og dokumenterte handlinger og utsagn i gruppearbeidet. Feltnotatene inneholder utsagn fra elevene og generelle beskrivelser av elevenes arbeid. I notatene er navn anonymisert, der det kun forekommer informasjon om elevens forbokstav og hvilken gruppe de tilhører.

Video- og lydopptakene som er gjort ble etter hver økt overført og lagret på en fellesmappe i Microsoft Teams. Teams-mappen var på en sikker server, og var kun tilgjengelig for forskere i prosjektet. Etter hver økt ble filene som var lagret, enten på internminne til kamera og lydopptaker eller på minnebrikker, slettet for å sikre at dataen ikke kunne bli nådd av andre eller spredt videre. I Teams ble video- og lydfiler fordelt på mapper som ga informasjon om hvilken gruppe som var dokumentert, og på hvilken dag det gjaldt. Feltnotater og elevbesvarelser som er samlet inn, ble scannet og lagret på eksterne minnebrikker. Dette ble gjort for å sikre at data ikke gikk tapt.

Etter gjennomføringen av undervisningsprosjektet, ble alle videoer og lydfiler gjennomgått grundig. Det ble gjort notater om tidspunkt i videoer og lydfiler av hendelser og utsagt fra de forskjellige gruppene. Dette var utsagn og interaksjoner som omhandlet f.eks. ulike løsningsstrategier, matematiske resonnementer eller diskusjoner mellom elev og elev eller lærer og elev. Notatene om tidspunkt i filene ble så utvidet, der situasjonen og interaksjonene ble beskrevet mer detaljert. Det ble så gjort et utvalg av disse situasjonene, som baserer seg på blant annet antall situasjoner som er beskrevet, kvalitet og tydelighet. En gruppe ble valgt ut basert på disse kriteriene. Hendelsene og interaksjonene som var notert fra denne gruppen, ble så transkribert. I transkripsjonene er navn anonymisert, der de er gitt fiktive navn som er basert på forbokstaven i deres egentlige navn, og som også antyder kjønnet til deltakeren.

3.5 Dataanalyse

Etter gjennomføringen av undervisningsprosjektet, ble video- og lydfiler fra alle gruppene grundig gjennomgått. Gjennom flere gjennomganger ble det notert ned tidspunkt i filene hvor interessante hendelser eller utsagt basert på forskningsspørsmålet forekom. Disse notatene ble utvidet fortløpende, der det ble gjort beskrivelser av hendelsene. Dette resulterte i en stor mengde notater. Disse ble så gjennomgått i samarbeid med veileder, og vi gjorde et utvalg som var basert på mengde og kvalitet på data til spesielt en gruppe. Deretter begynte jeg å beskrive disse hendelsene ytterligere for å gi mer kontekst til situasjonen, i tillegg ble det gjort transkripsjoner fra hendelsene som er beskrevet. Jeg har ikke transkribert alle opptakene i sin helhet, det er kun gjort transkripsjon av hendelsene som er beskrevet som interessante for mitt forskningsspørsmål. I transkripsjonene er navn anonymisert, der elevene er gitt fiktive navn som angir deres egentlige forbokstav og som også antyder kjønn. Videre informasjon om transkripsjonene er presentert i transkripsjonsnøkkelen (vedlegg 7). Når transkripsjonen av disse hendelsene var ferdige, ble det gjort et ytterligere utvalg som fokuserte på to av elevene på gruppen, og dannet resultatgrunnlaget til de to kasusene. Det samme gjelder elevbesvarelser, der kun elevbesvarelser fra de to kasusene er presentert.

I studiens analysedel er målet å si noe om de to elevenes algebraiske tenkning og deres utvikling i algebraisk tenkning. Det er gjort ved å først beskrive interaksjonene elevene har deltatt i, som tar for seg løsningsstrategier, handlinger relevante til oppgaveløsning, tillegg til matematiske resonnement og diskusjoner eleven har deltatt i. Konklusjoner som knytter disse resultatene til forskningsspørsmålet er nådd ved å se gjennom videoer gjentatte ganger, for å kunne gi en nøyaktig beskrivelse for hva som foregikk i undervisningen. Disse beskrivelsene ble diskutert med andre, i for eksempel veiledningsmøter eller workshop i etterkant av undervisningseksperimentet. Deretter startet jeg med et litteratursøk, for å kunne koble studiens resultater og mine tolkninger av resultatene til teori og tidligere forskning, og svare på forskningsspørsmålet.

3.6 Studiens kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet

Valg av forskningsdesign vil ifølge Bryman (2012) avgjøre hvilke prioriteringer som gjøres i forskningsprosessen, og i forskning som involverer mennesker brukes ulike kriterier for kvalitet. De vanligste kriteriene er *reliabilitet* og *validitet*. Disse er derimot ofte forbundet med kvantitativ forskning. Lincoln & Guba (1985) foreslår derfor alternative kriterier for kvalitativ forskning; *kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet* og *bekreftbarhet*. Ettersom min studie er en kvalitativ studie, tar jeg utgangspunkt i disse kriteriene og skal nå beskrive disse i forhold til min studie.

3.6.1 Kredibilitet

Kredibilitet beskrives som en parallell til *intern validitet*, og forsøker å si noe om i hvilken grad resultatene er troverdige. I tillegg innebærer det også spørsmål i forhold til om forskningen er gjennomført i henhold til god forskningspraksis. Med andre ord handler det om hvorvidt man kan uttrykke seg i forhold til kausalitet, og om dataen måler det jeg sier at det måler (Bryman, 2012). Kasusstudier kan være opplysende og innsiktsfulle, og kan være av god verdi for læring og undervisning, noe som styrker *kredibiliteten*. Det er derimot vanskelig å uttale seg om *kausalitet* i slike studier (Wellington, 2015). Jeg vil påstå at denne studien er gjort i henhold til god forskningspraksis. Formelle retningslinjer er fulgt ved å melde inn studien og fått godkjennelse av NSD (Norsk Senter for Forskningsdata) til å behandle personopplysninger (se vedlegg 1). Deltakerne er opplyste om hva studien innebærer, og man har kunnet gjøre et velinformert valg med tanke på samtykke til deltakelse.

3.6.2 Overførbarhet

Overførbarhet omtales som en parallell til *ekstern validitet*. Dette innebærer om hvorvidt funnene i studien er overførbare til andre kontekster, eller om den kan gjennomføres på nytt med forventning om samme resultatet i andre kontekster (Bryman, 2012). Med andre ord omhandler det om hvorvidt studien gir grunnlag for å generalisere funnene ut over denne konkrete forskningskonteksten. Kasusstudier er basert på en kvalitativ forskningsmetode, og har som hensikt å gå i dybden på ett eller flere kasus. Denne studien er en flerkasusstudie og jeg har ikke noe grunnlag for å generalisere funnene utover den konkrete forskningskonteksten, noe som er en tydelig svakhet med tanke på *overførbarhet*. Prosjektdeltakerne inkluderer elever med ulike holdninger, ferdigheter og kunnskaper, og kan sees som representative for elever på 5. trinn, og kan være med på å styrke *overførbarheten*. Noe som kan svekke *overførbarheten* er at det er elever på en privat barneskole, i tillegg uttrykker Wellington (2015) at kasusstudier som gjennomføres flere ganger vil ofte gi ulike resultater.

3.6.3 Pålitelighet

Pålitelighet beskrives som en parallell til *ekstern validitet*, og omhandler i hvilken grad denne studien er til å stole på, og innebærer om funnene gjort i studien kan gjelde til andre tidspunkt og om konsistens i funnene. I tillegg tas det opp spørsmål om i hvilken grad funnene er avhengige av observatøren, og om andre observatører vil ende opp med samme funn basert på teori og empiri (Bryman, 2012). Denne studien er i en viss grad observatøruavhengig, der min rolle som observatør var en tilbaketrukket rolle som fokuserte på teknikken rundt datainnsamling og observasjonsnotater underveis i undervisningen. Derimot har læreren ofte en stor påvirkningsgrad, og kan ha vært med på å påvirke elevene gjennom f.eks. å stille ledende spørsmål. Jeg har strebet etter å gjøre studien så transparent som mulig, ved å beskrive gjennomføring og redegjøre for datainnsamling/dataanalyse så nøyaktig og detaljert som mulig. I tillegg er fullverdige video- og lydfiler tilgjengelig for øvrige deltakere i prosjektet, slik at det er vanskelig å fabrikkere data og resultater kan kontrolleres og etterprøves. Dette kan være med på å styrke studiens *pålitelighet*.

3.6.4 Bekreftbarhet

Bekreftbarhet omtales som en parallell til *objektivitet*. Dette innebærer i hvilken grad forskeren kan ha påvirket funn og resultater gjennom egne synspunkter, overbevisninger og verdier (Bryman, 2012). Mine personlige og faglige verdier og synspunkter kan dermed, og har mest sannsynlig, vært med på å påvirke analyse av data og tolkning av teori. Dette innebærer at en annen forsker ville sannsynligvis tolket og analysert resultatene på en annen måte. I tillegg har jeg valgt et fokus som ser på elevers utvikling i algebraisk tenkning, og kan ha ført til at jeg har gått glipp av andre viktige momenter. Dette valget av fokus kan ha gjort meg for ensporet, og jeg er dermed åpen for at egne synspunkter og verdier kan ha påvirket resultatene av studien.

3.7 Etiske betraktninger

Denne studien inneholder personopplysninger som er blitt behandlet av datamaskiner og annet utstyr. Studien er derfor meldepliktig, og søknad ble sendt til NSD, og denne ble godkjent (se vedlegg 1). Det er også utarbeidet et informasjonsskriv (vedlegg 2), med informasjon om hva prosjektet innebar og hvilke datainnsamlingsmetoder de eventuelt kunne samtykke til, slik at elevenes foresatte kunne ta en informert avgjørelse om samtykke til deltakelse i studien. Alle resultater som er presentert er anonymiserte for å verne om personopplysninger og bevare anonymiteten til deltakerne. Video- og lydopptak er blitt lagret på en sikker server, for å forhindre at personer som ikke deltar i studien skal få tak i sensitiv data. Videoer og lydfiler er slettet fra innspillingsutstyr etter hver undervisningsøkt.

4 Resultater

Jeg skal i dette hovedkapittelet presentere resultatene fra studien. Det vil være resultatene fra to elever, Frida og Nils, sine opplevelser gjennom undervisningseksperimentet. Det vil først komme en beskrivelse av Fridas resultater fra hver økt i undervisningseksperimentet, etterfulgt en analyse av resultatene. Dette repeteres for hver økt av undervisningseksperimentet. Det vil så komme en oppsummering av Fridas opplevelse gjennom alle øktene. Denne prosessen repeteres så for Nils' resultater.

4.1 Fridas opplevelse

4.1.1 Første økt

I den første undervisningsøkta arbeidet elevene i grupper med fysiske vekter. Gruppen bestod av Frida, Nils, Cristian og Thomas. De fant vekten til et utvalg av objekter, i form av hvor mange numicon-brikker som skulle til for å balansere vektene. I noen tilfeller var objektene sammensatte objekter, laget ved å teipe flere identiske objekter sammen (dette blir heretter referert til som enhet med X objekt). I disse tilfellene måtte elevene finne vekten til de individuelle objektene ved å dividere. Etter å ha arbeidet i grupper, samlet alle elevene seg i amfiet for en oppsummering. Her introduserte også læreren x som notasjon for en ukjent vekt.

4.1.1.1 Beskrivelse av resultater – første økt

Etter å ha eksperimentert med de fysiske vektene en stund, får elevene i oppgave å finne vekten til enheter med to, tre og fire objekter som er teipet sammen. De starter med enheten med to objekter, og finner ut av vekten ved å først prøve med to og tre numicon-brikker, før de oppdager at vekten er balansert med fire numicon-brikker. Enheten med tre objekter blir så lagt på vekta, og de prøver med fem numicon-brikker først, før de finner ut at vekten er i balanse med seks brikker. Frida sitter for det meste og ser på at de andre elevene på gruppa prøver forskjellig antall numicon-brikker, men hun observerer nøye om vekten er i balanse eller ikke.

Frida: Det er jo bare dobbelt av den.
Nils: Åja, hver av de der (enkeltobjekt i enhet) veier en (numicon-brikke). Nei, en sånn der (enkeltobjekt i enhet) veier to (numicon-brikker).
Frida: Og da er den med fire (objekter i enhet), åtte (numicon-brikker).

Frida teiper så sammen fem objekter til en enhet, på eget initiativ, og kommer med påstanden at vekten til denne enheten må være ti numicon-brikker. Argumentet hun bruker er at vekten til to og tre objekter er allerede kjent, og til sammen er det samme som vekten til enheten med fem brikker. Samme argument blir brukt for vekta til enhet med seks objekter. I begge tilfellene blir påstandene bekreftet av Frida ved å sjekke antallet numicon-brikker i forhold til enhetene på den fysiske vekta.

4.1.1.2 Analyse av resultater – første økt

I løsningen av oppgaven de fikk, der de skulle finne vekten til enheter av objekter teipet sammen, observerte Frida for det meste, mens de andre gruppemedlemmene prøvde seg frem med ulikt antall numicon-brikker. Hun var derimot observant i forhold til om hvorvidt vekten var i balanse eller ikke. Den fysiske vekten gir en direkte tilbakemelding på om man har oppnådd balanse. Balanse ser ut til å være et konsept Frida er opptatt av.

Hun teipet også sammen enheter av fem og seks objekter på eget initiativ, der hun argumenterte for vekten til enhetene før hun sjekket og validerte løsningene på den fysiske vekta. Dette viser at hun ser en sammenheng og struktur i forholdet mellom antall objekter i enheten og numicon-brikker, og hun bruker denne strukturen for å argumentere for vekten til de ukjente enhetene. Igjen ser vi fordelen ved den dynamiske vektens egenskap, ved at elevene får direkte tilbakemelding på om hvorvidt løsningene er korrekte.

4.1.2 Andre økt

I denne økta fikk elevene utdelt et ark med bilder av algebra tiles som representerte likningene. Oppgaven var å finne verdien til de grønne tilesene (se vedlegg 4), og alle elevene fikk utdelt et sett med fysiske algebra tiles som de kunne bruke for å løse likningene. De ble delt inn og plassert i samme grupper som i forrige økt, men de skulle i hovedsak samarbeide i par. Parene på denne gruppen var Nils og Cristian, og Frida og Thomas.

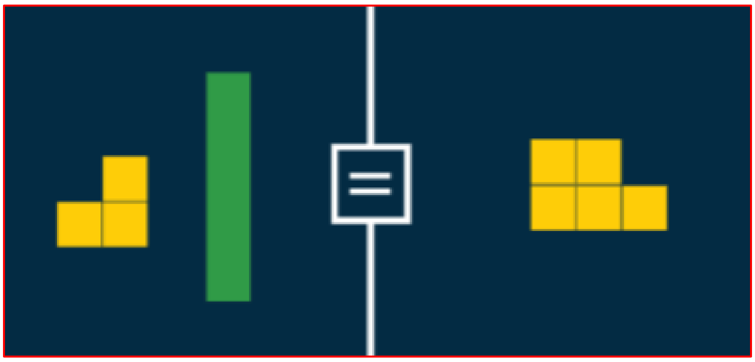
4.1.2.1 Beskrivelse av resultater – andre økt

Frida jobber med oppgave 1 (se figur 4-1). Hun ser umiddelbart at løsningen er tre.

Figur 4-1, Oppgave 1 andre økt

Lærer: Du skal finne ut av hvor mange gule er den grønne verdt.
Frida: Den er jo tre da.
Lærer: Ja, da kan du skrive grønn er lik tre.

Hun begynner med neste oppgave (se figur 4-2) og spør lærer om hvorvidt den grønne er verdt det samme her som i forrige oppgave.



Figur 4-2, Oppgave 2 andre økt

Frida: Da er den, er de like mye verdt, er de like mye?
Lærer: Nei, så er de forskjellige. Så der må du finne ut av på nytt, hvor mye er den verdt der nede da?
Frida: Men er den, er de to sidene like mye verdt?
Lærer: Ja.
Frida: Da er jo den to.
Lærer: OK, hvordan kom du frem til det?
Frida: Fordi, her er det tre der (gule tiles på venstre side), og der er det tre der (gule tiles på høyre side), og der er det bare to igjen (resterende gule tiles på høyre side). Så den er to.

Hun deler de fem gule tilesene på høyre side i to grupper, og kobler tre gule tiles med de tre gule tilesene på venstre side, før hun kobler de to resterende gule tilesene på høyre side med den grønne tilen på venstre side. Disse operasjonene gjøres mentalt, og fysiske algebra tiles blir ikke brukt.

Frida løser oppgave 3 uten å kommentere på denne og går videre til oppgave 4 (se figur 4-3). Hun ser på tegningen, og ut ifra bevegelsene hun gjør med blyanten over tegningen, ser det ut som hun også her prøver å gruppere tiles. Hun beveger blyanten over tre og tre gule tiles, hvor hun peker på en grønn tile etter hver gruppe av tre. Hun spør så Thomas om løsningen er tre, og han svarer at det er det.

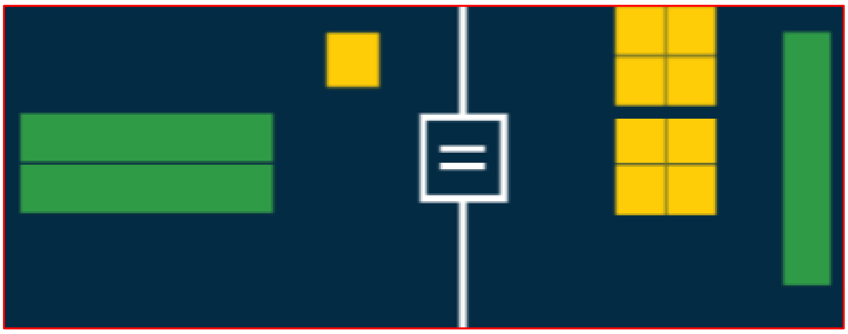
Figur 4-3, Oppgave 4 andre økt

Frida arbeider med oppgave 5 (se figur 4-4) og ser ut til å slite med å se finne en løsning ved å ta i bruk samme strategi som hun har gjort så langt. Nils har kommet frem til en løsning og han har også nevnt dette for gruppa, men Frida ser ut til å slite med å se strukturen og validere løsningen selv. Hun uttrykker flere ganger at hun ikke forstår dette. Kompleksiteten øker for hver likning, og her ser vi at antallet tiles har økt, i tillegg er det både gule og grønne tiles på hver side av likningen.

Figur 4-4, Oppgave 5 andre økt

Frida: Vent hæ, nå skjønner jeg ingenting.
[Frida ser på oppgaven i en stund uten å si noe]
Frida: Åh, jeg skjønner ingenting.

Frida arbeider med oppgave 6 (se figur 4-5), og ser ut til å slite med å løse likningen. Hun gjør bevegelser over tegningene, som vi også har sett tidligere, og forsøker tilsynelatende å bruke samme strategi for å løse denne likningen. Nils har kommet frem til en løsning, og nevner dette for resten av gruppa. Likevel ser det ut som Frida sliter med å se løsningen selv, og klarer ikke å godkjenne løsningen Nils har nevnt.



Figur 4-5, Oppgave 6 andre økt

Frida: Da er det fire og fire der (grupper av fire gule tiles på høyre side), og der er det to (grønne tiles på venstre side).

Lærer kommer til gruppa og gir veiledning på oppgave 7 (se figur 4-6). Han forklarer at man bør begynne å telle opp hvor mange tiles man har på hver side. Han minner dem også på at man kan ta bort det samme fra begge sider. Etter hvert ber han dem om å legge ut tiles på det store arket på bordet (likhetsmatten). Frida finner frem arket på pulten.

Figur 4-6, Oppgave 7 andre økt

Lærer: Sånn Frida, hvis du begynner å legge ut.
Frida: Og da legger jeg ut, to grønne (på høyre side), og en grønn (på venstre side). Og så er det 1-2-3-4-5-6-7-8-9 (gule på venstre side).
Thomas: Og syv (gule) på den andre sida.
[Frida og Thomas teller opp på høyre side]
Lærer: Og nå veier de det samme. Ikke sant, nå står vekta helt likt. Men spørsmålet er jo, jeg har lyst til å vite hvor mye en grønn en veier.
[Nils tar så bort en grønn tile fra hver side]
Lærer: Så dere det Nils gjorde nå?
Cristian: Hvor mye må den (grønne) veie da?
Lærer: Bare vent litt. Nå tok Nils vekk en grønn en, så dere det?
Thomas: To grønne.
Lærer: To grønne, han tok vekk en grønn fra hver side.
Thomas: Da er det jo syv …
Nils: Pluss et tall som skal bli ni
Thomas: Syv pluss et tall som skal bli ni, det er jo to det.
Lærer: Så dere det ble litt lettere når han tok vekk en grønn en?
Frida: Ja, er lik to da?
Lærer: Men det du også kunne gjort, du kunne tatt vekk syv gule fra begge sider hvis du hadde hatt lyst til det.
Nils: Og to grønne.
Lærer: Hva skjer da? Hvis du nå tar vekk syv gule fra begge sider.
[Nils og Thomas fjerner syv gule tiles fra hver sin side, og Cristian og Frida fjerner en grønn fra hver side]
Lærer: Hva må den (grønne) være nå?
Frida: Da må den være to. Da er den to.
Lærer: Ja. Ser du nå, nå kan du jo se det helt tydelig, for nå er det to (gule) på den ene sida og en grønn på den andre sida.
Frida: Ja.

Figur 4-7, Oppgave 7 andre økt, løsning

Etter oppgave 7, samlet elevene seg i amfiet og elever som meldte seg frivillig, løste likningene på smart-tavle ved å ta i bruk en kombinasjon av tegninger og symboler. Læreren veiledet elevene gjennom løsningen av likningene. I denne delen av økten var Frida kun tilskuer.

4.1.2.2 Analyse av resultater – andre økt

Frida startet med en strategi som i begynnelsen så ut til å være tilstrekkelig for å løse likningene. Hun koblet grupper av tiles på begge sider av likningen sammen, og så ut ifra de resterende tilesene hva verdien til den grønne tilen var. I oppgave 2 koblet hun sammen grupper av gule tiles. Ut ifra bevegelsene Frida gjorde med blyanten i oppgave 4, ser det ut som hun tilegner grupper av tre gule tiles til hver sin grønne tile. Dette fører til at hun sitter igjen med en grønn tile på hver side. Antallet/verdien blir lik på begge sider dersom de resterende grønne tilesene på venstre og høyre side også er verdt tre.

Oppgave 5 har liknende struktur som oppgave 2, men kompleksiteten har økt, ved at antallet tiles har økt og det er både grønne og gule tiles på begge sider. Strategien hun har brukt frem til nå, ved å gruppere de gule tilesene på hver side i, og se på de resterende tilesene, kan bli brukt på denne oppgaven også. Derimot kan ikke den resterende gruppen av gule tiles på høyre side tilegnes til kun en grønn tile på den andre siden av likningen. Det at hun ikke klarer å validere løsningen Nils har gitt, kan også tyde på at hun ikke behersker gjett og sjekk-metoden, der løsningen kan bekreftes ved å erstatte de grønne tilesene med en verdi, og telle opp antallet dette tilsvarer på begge sider.

På oppgave 6 forsøkte Frida tilsynelatende å benytte seg av samme strategi som hun har gjort tidligere. Det tyder på at hun forsøkte å gruppere de gule tilesene på høyre side i grupper av fire, og tildele disse gruppene til hver sin grønne tile på venstre side. Ved å gjøre dette, vil det gjenstå en gul på venstre side og en grønn på høyre side, og Frida vil raskt oppdage at dette ikke er en gyldig løsning. Igjen kan det også tyde på at hun ikke behersker gjett og sjekk-strategien, og klarer ikke å godkjenne løsningen Nils har gitt ved å erstatte de grønne tilesene med løsningen og telle opp antallet dette tilsvarer på hver side.

På oppgave 7 veiledet læreren dem gjennom prosessen å fjerne samme antall tiles på begge sider av likningen. Dette virker å være ukjent for Frida, som tidligere har benyttet seg av en strategi basert på gruppering og tildeling av tiles. Denne strategien har vist seg utilstrekkelig i møte med stadig mer komplekse likninger. Hun observerer at de andre elevene på gruppa utfører operasjonene etter instrukser/veiledning fra lærer. Når alle operasjonene er utført, og løsningen er representert på bordet, oppdager Frida at løsningen er to.

Metaforen om vekt ble også brukt av lærer i veiledning av elevene. Hvorvidt Frida tok til seg dette, og så strukturen med at balansen ble opprettholdt når de utførte operasjonene, kan ikke sies med sikkerhet. Men vi noterer oss fra oppgave 2, hvor Frida eksplisitt spurte «er de to sidene like mye verdt?», som indikerer at hun har en forståelse av at begge sider av likningene representerer et ekvivalensforhold.

4.1.3 Tredje økt

I denne økten skulle elevene løse likninger som var representert symbolsk. De ble oppfordret til å ta i bruk fysiske algebra tiles som hjelpemiddel. Elevene startet med å arbeide individuelt med et oppgaveark med symbolske likninger (se vedlegg 5). Etter ti minutter individuelt arbeid, samlet elevene i de samme gruppene som tidligere.

4.1.3.1 Beskrivelse av resultater – tredje økt

Frida arbeider med oppgave 7 (se figur 4-8). Hun har gjort oppgave 1-6 individuelt. Oppgave 7 er samme oppgave som de løste andre økt sammen med lærer, der likningen var representert som bilder av algebra tiles. Hun ser ut til å slite med å løse oppgaven, og kikker bort på Nils sitt ark, der han har skrevet ned løsningene han har kommet frem til. Lærer kommer forbi, og Frida sier hun ikke forstår hvordan hun skal legge opp tilesene.

7) $x + 9 = 2x + 7$

Figur 4-8, Oppgave 7 tredje økt

Frida: Jeg skjønner ikke hvordan man legger de opp.
Lærer: Du bytter ut x-en med en grønn en (grønn tile).
[Nils og Cristian får beskjed om å hjelpe Frida og resten av gruppa med å løse likningene]
Frida: Da er den grønne X.
Thomas: Eller Y, eller M.
Cristian: Uansett hvilken bokstav det er, så er den sånn (grønn tile).
[Frida finner frem algebra tiles for å kunne representere og løse likningen]
Nils: X pluss ni (på venstre side av likningen).
Frida: Og da er det to X vel?
Nils: Da er det to X på den andre, og så er det syv.
[Frida legger ut tiles på bordet, slik at det representerer likningen]
Nils: Så tar vi vekk syv fra begge sidene, og så tar vi vekk en sånn en (grønn tile fra begge sidene).

I sekvensen hvor operasjonene utføres, er Frida tilskuer mens Nils fjerner syv gule tiles og en grønn tile fra hver side. De sitter igjen med en grønn tile = to gule tiles.

Frida begynner på oppgave 10 (se figur 4-9). Hun sier hun har funnet løsningen på oppgave 8 og 9 tidligere i økten. Hvilken løsningsstrategi som er brukt, og om løsningen er korrekt kan vi ikke si noe om ut ifra videoene. Hun starter med å finne frem nok tiles til å kunne representere likningen, og legger de ut på bordet. Hun begynner å løse likningen, med Nils som veileder i prosessen.

10) $8 + 5x = 33$

Figur 4-9, Oppgave 10 tredje økt

Frida: Og da må jeg ta vekk åtte.
[Frida og Nils fjerner åtte gule tiles fra begge sider av likningen, har igjen fem grønne = tjuefem gule]
Frida: Og da må jeg dele de ...
Thomas: Tror du ikke det er fem?
Frida: Ja jeg vet, det er fem.
Nils: Så tar du, så må du telle.
Frida: Fire … nei bare si svaret på den.
Nils: Det er fem.

4.1.3.2 Analyse av resultater – tredje økt

På oppgave 7 tyder det på at Frida ikke ennå behersker oversettelsen fra symbolsk representerte likninger til likninger representert av algebra tiles. Nils veiledet Frida i denne prosessen. Hun ser heller ikke ut til å være helt komfortabel med å utføre formelle operasjoner på algebra tiles ennå, og fikk veiledning også i denne prosessen av Nils. Når alle operasjonene var utført derimot, klarte Frida å se hva løsningen måtte være, som var representert som en grønn tile på høyre side, og to gule tiles på venstre side. Dette var samme likning som lærer veiledet elevene på gruppa i å utføre formelle prosesser.

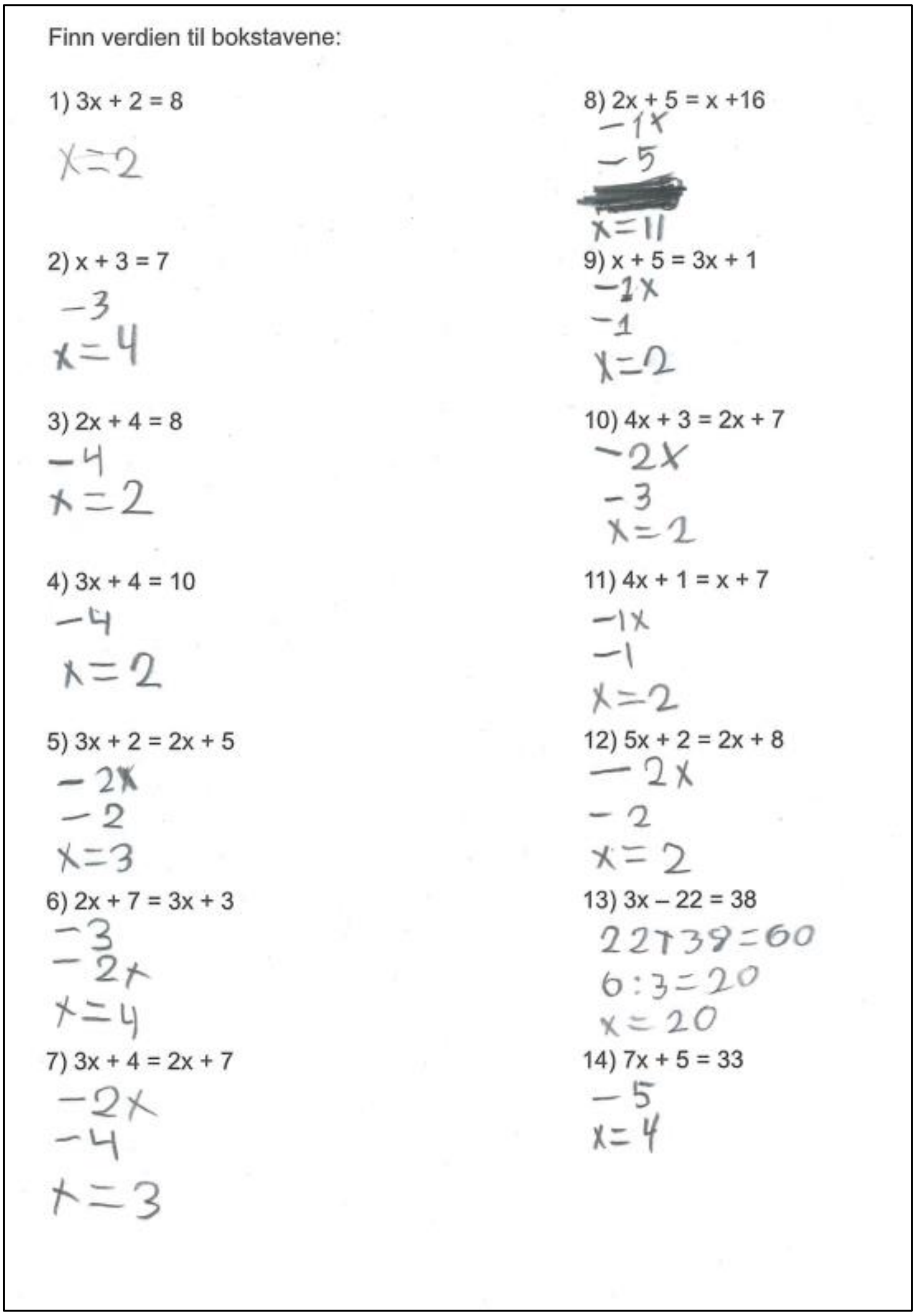
På oppgave 10 ser det ut til at Frida er mer komfortabel med både å representere symbolske likninger med algebra tiles, og å utføre operasjoner på dem. Dette ser vi ved at hun fant frem riktig antall tiles som kreves for å representere likningen, og at hun begynte å utføre operasjonene som var naturlig for å løse likningen. Etter å ha trukket fra åtte gule tiles fra begge sider, gjenstår det fem grønne på venstre side og tjuefem gule på høyre side. Hun uttrykte at neste operasjon innebærer deling, men lykkes ikke i å utføre denne operasjonen. Hun ble også spurt av Thomas om hun ikke trodde det ble fem, hvor hun svarte at hun visste det var fem. Spørsmålet er da hva Frida og Thomas tolket «det» som er i denne situasjonen. Thomas ser ut til å referere til løsningen på likningen, mens Frida ser ut til å tolke «det» som antall grønne tiles som de tjuefem skulle deles på. Frida gjør et forsøk i å utføre en operasjon som innebærer deling, men så ikke ut til å lykkes med dette. Hun nevner først tallet fire, før hun gir opp og ber Nils om å si løsningen til henne.

4.1.4 Fjerde økt

I denne økten skulle elevene arbeide med å løse likninger som var representert symbolsk. De fikk utdelt et oppgaveark med 14 likninger (se vedlegg 6). Elevene fikk velge om de ville arbeide individuelt eller i grupper.

4.1.4.1 Beskrivelse av resultater – fjerde økt

Figur 4-10 viser besvarelsen på oppgavearket Frida arbeidet med i fjerde økt. Frida arbeidet stort sett individuelt i denne økten, men fikk noen ganger hjelp av lærer eller andre elever. Hun benyttet seg av fysiske algebra tiles for å utføre operasjoner på alle likningene.


Finn verdien til bokstavene:

1) $3x + 2 = 8$
x=2

2) $x + 3 = 7$
−3
x=4

3) $2x + 4 = 8$
−4
x=2

4) $3x + 4 = 10$
−4
x=2

5) $3x + 2 = 2x + 5$
−2x
−2
x=3

6) $2x + 7 = 3x + 3$
−3
−2x
x=4

7) $3x + 4 = 2x + 7$
−2x
−4
x=3

8) $2x + 5 = x + 16$
−1x
−5
x=11

9) $x + 5 = 3x + 1$
−1x
−1
x=2

10) $4x + 3 = 2x + 7$
−2x
−3
x=2

11) $4x + 1 = x + 7$
−1x
−1
x=2

12) $5x + 2 = 2x + 8$
−2x
−2
x=2

13) $3x – 22 = 38$
22+38=60
6:3=20
x=20

14) $7x + 5 = 33$
−5
x=4

Figur 4-10, Fridas besvarelse på oppgaveark i fjerde økt

4.1.4.2 Analyse av resultater – fjerde økt

Frida benyttet seg av algebra tiles i løsningen av alle likningene. Hun har notert ned noen av operasjonene hun har utført, hovedsakelig operasjoner der hun trekker fra tall og ukjente fra begge sider. Operasjoner som innebærer divisjon har hun ikke notert ned (utenom i oppgave 13, der hun skriver ned 6:3. Vi ser derimot at hun har kommet frem til korrekt løsning på likningene, noe som tyder på at operasjoner som innebærer divisjon gjøres mentalt. Det tyder på at hun behersker disse operasjonene når hun har algebra tiles som hjelpemiddel for å utføre operasjonene på, der hun også behersker å oversette både fra abstrakte representasjoner (symbolske likninger), til mer konkrete representasjoner (algebra tiles). Hun behersker også å oversette andre vei, ved at hun kommer frem til en løsning, som representeres av algebra tiles, til symbolsk representasjon av løsningen. Hun har ved hjelp av algebra tiles, og notering av operasjoner kommet frem til riktig løsning for x på alle likningene.

4.1.5 Oppsummering av Fridas resultater

Det vi kan trekke ut ifra utviklingen til Frida gjennom de fire øktene er at hun i starten manglet en klar strategi for å løse likninger. I første økt var hun passiv i arbeidet med å finne vekten til ulike objekter, men observerte nøye om hvorvidt vekten var i balanse eller ikke i de forskjellige løsningene. I møte med oppgaver som omhandlet å løse likninger, ser vi hun i starten av andre økt klarte å løse likninger med å benytte seg av en strategi som baserer seg på gruppering og tildeling av algebra tiles. Denne strategien viste seg å være utilstrekkelig i møte med mer komplekse likninger. Mot slutten av andre økt kan vi se starten på at hun begynte å forstå hvordan man løser likninger ved å utføre formelle operasjoner på tall og ukjente, i form av algebra tiles. Denne kompetansen blir forsterket i tredje økt, hvor hun ble mer komfortabel med operasjoner på algebra tiles, i tillegg til å representere likninger med tiles. Etter fjerde økt ser vi at hun behersker å oversette fra symbolsk representasjon av likninger til algebra tiles, og hun mestrer operasjoner på tiles for å løse likningene. Etter at formelle operasjoner på algebra tiles ble presentert som løsningsstrategi, benyttet Frida seg av disse i løsningen av de fleste likningene. Operasjonene som utføres på algebra tiles ser ut til å gi god mening for Frida.

4.2 Nils' opplevelse

4.2.1 Første økt

I den første undervisningsøkta arbeidet elevene i grupper med fysiske vekter. Gruppen bestod av Frida, Nils, Cristian og Thomas. De fant vekten til et utvalg av objekter, i form av hvor mange numicon-brikker som skulle til for å balansere vektene. I noen tilfeller var objektene sammensatte objekter, laget ved å teipe flere identiske objekter sammen (dette blir heretter referert til som enhet med X objekt). I disse tilfellene måtte elevene finne vekten til de individuelle objektene ved å dividere. Etter å ha arbeidet i grupper, samlet alle elevene seg i amfiet for en oppsummering. Her introduserte også læreren *x* som notasjon for en ukjent vekt.

4.2.1.1 Beskrivelse av resultater – første økt

Elevene får i oppgave å finne vekten til enheter av to, tre og fire identiske objekter som er teipet sammen. De starter med enhet med to objekter teipet sammen, og finner ut av at vekten er fire numicon-brikker ved å prøve seg frem med to og tre først. Enheten med tre objekter blir så lagt på vekta, hvor de prøver med fem numicon-brikker først, før det finner ut at løsningen er seks. Nils er aktiv i dette arbeidet, og styrer i stor grad antallet numicon-brikker som legges på vekta for å finne balanse.

Frida: Det er jo bare dobbelt av den.
Nils: Åja, hver av de der (enkeltobjekt i enhet) veier en (numicon-brikke). Nei, en sånn der (enkeltobjekt i enhet) veier to (numicon-brikker).
Frida: Og da er den med fire (objekter i enhet), åtte (numicon-brikker).
[Elevene finner lærer for å vise hva de har funnet ut]
Nils: Vi fant ut av svaret.
Lærer: OK.
Nils: En av disse her (enkeltobjekt i enhet) veier to av disse (numicon-brikker). Og så er den her (enhet med to objekter), fire (numicon-brikker). Og så er den her (enhet med tre objekter), seks (numicon-brikker). Og så er den siste (enhet med fire objekter), åtte (numicon-brikker).
[Elevene beviser så at løsningene er korrekte med å sjekke på den fysiske vekten]
Lærer: Men det jeg lurer på, hvordan fant dere ut av det?
Cristian: Vi bare prøvde.
Lærer: Prøvde dere bare masse forskjellig, eller hadde dere en tanke?
Nils: Vi starta først med den med to (objekter i enhet), og så hadde vi oppi to, så tre, så fire (numicon-brikker). Så funka det på fire. På den neste (enhet med tre objekter) prøvde vi fem, så seks (numicon-brikker). Så fant vi ut av at det mest sannsynlig var åtte (numicon-brikker) på den neste, på fireren (enhet med fire objekter).
Lærer: Ja, så når dere kom til den fjerde så gikk dere bare rett på dobling med en gang?
Nils/Cristian: Ja.
Lærer: Spennende. Så det betyr egentlig at dere fant et system i det. Bra.

4.2.1.2 Analyse av resultater – første økt

I arbeidet med å finne vekten til enhetene med objekter teipet sammen, forklarer Nils at de i starten prøvde med ulikt antall numicon-brikker for å finne ut hva de veide. Dette tyder på at gjett og sjekk er en kjent strategi for Nils, som ledet dette arbeidet. Etter å ha funnet vekten til de to første enhetene, ser Nils en struktur, og forklarer at enkeltobjektene i enhetene veier to numicon-brikker. Gjett og sjekk-strategien ble brukt for å finne et system, slik at man kunne gjøre antakelser for vekten til andre enheter med flere objekter.

4.2.2 Økt 2

I denne økta fikk elevene utdelt et ark med bilder av algebra tiles som representerte likningene. Oppgaven var å finne verdien til de grønne tilesene (se vedlegg 4), og alle elevene fikk utdelt et sett med fysiske algebra tiles som de kunne bruke for å løse likningene. De ble delt inn og plassert i samme grupper som i forrige økt, men de skulle i hovedsak samarbeide i par. Parene på denne gruppen var Nils og Cristian, og Frida og Thomas.

4.2.2.1 *Beskrivelse av resultater – andre økt*

Gruppen arbeider med likninger som er presentert i form av algebra tiles. Nils har løst oppgave 1 og 2 uten å kommentere på dem, og samarbeider nå med Cristian for å løse oppgave 3 (se figur 4-11).

Figur 4-11, Oppgave 3 andre økt

Nils: Oisann, nå er de der to (grønne tiles), så det blir to (en grønn tile er verdt to gule tiles). Siden der er det fire (gule) og der er det to (grønne).
Cristian: Ja, men det blir to.
Nils: Hæ?
Cristian: Siden en av de (grønn tile) er verdt en av de (gruppe av to gule tiles).
Nils: Ja jeg vet det, da er grønn lik to.

Etter å ha funnet en løsning på oppgave 3, går Nils og Cristian videre til oppgave 4 (se figur 4-12). De virker litt frustrerte, fordi Frida og Thomas har kommet lengre på oppgavearket, og ser ut til å stresse litt med å finne løsning på oppgaven. Cristian foreslår to som løsning på oppgaven.

Figur 4-12, Oppgave 4 andre økt

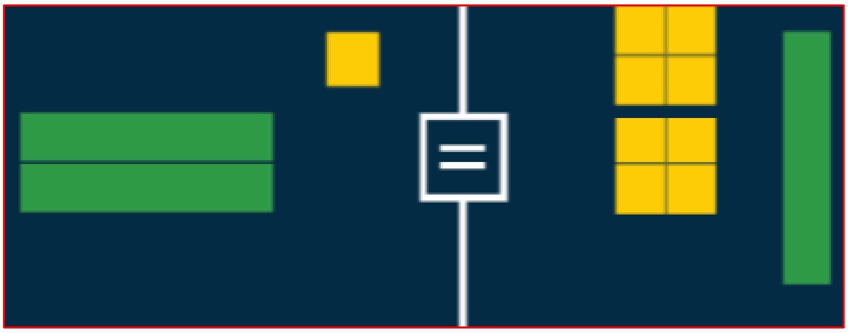
Cristian: En av de er verdt to, en av de er verdt to. Jeg har ikke peiling på hva dette er.
[Nils ser ut til å ta seg sammen og begynner å se nærmere på oppgaven]
Nils: Det er jo seks (gule tiles på høyre side) her, og da kan den der (grønn tile på høyre side) være verdt …
Nils: Den der (grønn tile på høyre side) er verdt tre. Siden da blir det ni (på høyre side), så er det tre-seks-ni (peker på de grønne tilesene på venstre side).

En kort stund etter Nils har begynt å studere oppgave 5 (se figur 4-13) kommer han med påstanden om at løsningen på oppgaven er to.

Figur 4-13, Oppgave 5 andre økt

Nils: Den er to, det er jo lett, det er to.
Frida: Hm?
Nils: Grønn er to.

Etter en liten stund med andre aktiviteter enn matematikk, kommer Nils med en påstand om løsningen på oppgave 6 (se figur 4-14).



Figur 4-14, Oppgave 6 andre økt

Nils: De der (grønne tiles) er verdt fire.
Frida: Hva er verdt fire?
Nils: Åtte, fire, det er tolv. Å svarte, jeg er skutt i huet. Det er verdt fem, det er tretten (på høyre side). Så er det ti, elleve (på venstre side). Jeg er skutt i huet.
[Nils studerer oppgave 6 ytterligere, og han med en ny påstand om hva løsningen er]
Nils: Femten, åtte pluss syv er femten, så det blir syv. Grønn er lik syv.

Nils har løst oppgave 7 (se figur 4-15) uten å kommentere ytterligere på den, og blir utfordret på å forklare hvordan han tenkte når han løste denne oppgaven.

Figur 4-15, Oppgave 7 andre økt

Assistent: Vis hvordan du tenkte på den (oppgave 7).
Nils: På den bare startet jeg med to på disse (peker på grønne tiles), og så telte jeg …
Nils: Først bør du telle alle de gule, det var det jeg gjorde. Da fant jeg ut at der var det syv (venstre side), og der var det ni (høyre side). Derfor må de der (grønne tiles) være verdt to.

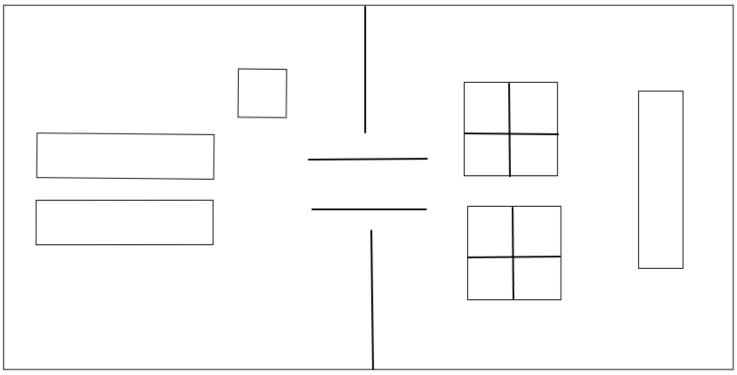
Lærer kommer til gruppa og gir veiledning. Han forklarer at man bør begynne å telle opp hvor mange tiles man har på hver side. Han minner dem også på at man kan ta bort det samme fra begge sider. Etter hvert ber han dem om å legge ut tiles på det store arket på bordet (likhetsmatten). Frida finner frem arket på pulten.

Lærer: Sånn Frida, hvis du begynner å legge ut.
Frida: Og da legger jeg ut, to grønne (på høyre side), og en grønn (på venstre side). Og så er det 1-2-3-4-5-6-7-8-9 (gule på venstre side).
Thomas: Og syv (gule) på den andre sida.
[Frida og Thomas teller opp på høyre side]
Lærer: Og nå veier de det samme. Ikke sant, nå står vekta helt likt. Men spørsmålet er jo, jeg har lyst til å vite hvor mye en grønn en veier.
[Nils tar så bort en grønn tile fra hver side]
Lærer: Så dere det Nils gjorde nå?
Cristian: Hvor mye må den (grønne) veie da?
Lærer: Bare vent litt. Nå tok Nils vekk en grønn en, så dere det?
Thomas: To grønne.
Lærer: To grønne, han tok vekk en grønn fra hver side.
Thomas: Da er det jo syv …
Nils: Pluss et tall som skal bli ni.
Thomas: Syv pluss et tall som skal bli ni, det er jo to det.
Lærer: Så dere det ble litt lettere når han tok vekk en grønn en?
Frida: «Ja, er lik to da?»
Lærer: Men det du også kunne gjort, du kunne tatt vekk syv gule fra begge sider hvis du hadde hatt lyst til det.
Nils: Og to grønne.

Lærer: Hva skjer da? Hvis du nå tar vekk syv gule fra begge sider.
[Nils og Thomas fjerner syv gule tiles fra hver sin side, og Cristian og Frida fjerner en grønn fra hver side]
Lærer: Hva må den (grønne) være nå?
Frida: Da må den være to. Da er den to.
Lærer: Ja. Ser du nå, nå kan du jo se det helt tydelig, for nå er det to (gule) på den ene sida og en grønn på den andre sida.
Frida: Ja.

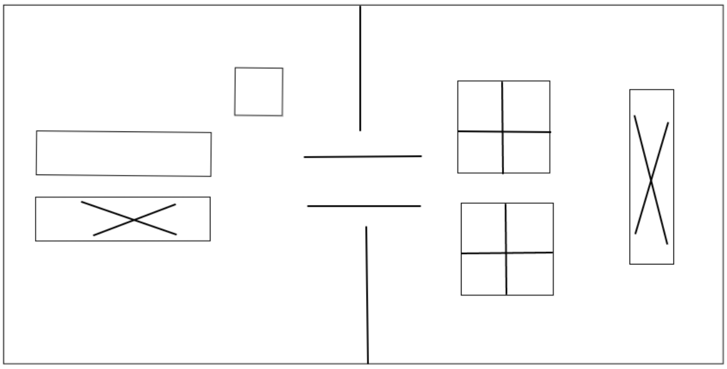
Figur 4-16, Oppgave 7 andre økt, løsning

Etter å ha løst oppgave 7, samlet alle elevene seg i amfiet for å oppsummere. Elever som meldte seg frivillig ble plukket ut for å løse likningene de arbeidet med, der de brukte en kombinasjon av tegninger og symboler for å representere og løse likningene. Dette arbeidet var veiledet av lærer. Nils ble plukket ut til å løse oppgave 6 (se figur 4-17). Lærer tegner opp oppgaven og ber Nils om å skrive ned hvordan likningen ser ut symbolsk. Han skriver ned 2x + 1 på venstre side og 8 + x på høyre side. Han blir så bedt om å begynne å løse oppgaven. Han krysser ut en grønn tile på hver side av likningen. Han blir bedt om å skrive ned hvordan likningen ser ut nå symbolsk. Til å begynne med forstår han ikke helt hva læreren mener, men får hjelp ved at lærer holder foran det som er krysset ut, og han spør hva som står igjen nå. Han skriver ned x + 1 på venstre side og 8 på høyre side (se figur 4-18). Han fortsetter så å løse oppgaven, hvor han krysser ut en gul tile på begge sider, og noterer ned løsningen symbolsk, x = 7 (se figur 4-19).



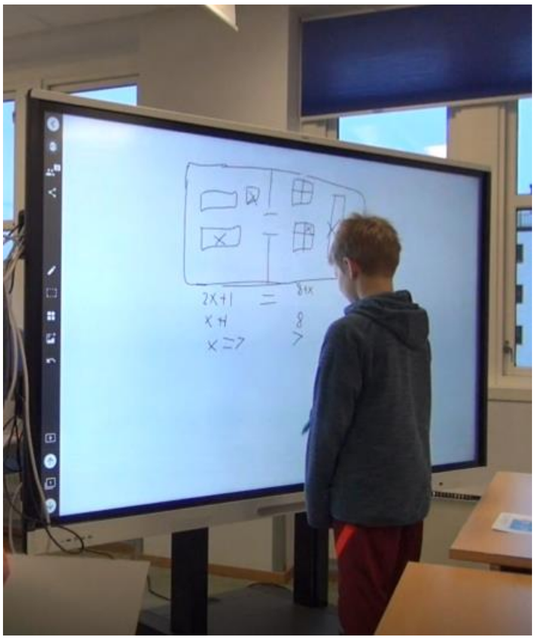
$$2x + 1 \;=\; 8 + x$$

Figur 4-17, Likningen presentert med tiles og symbolsk



$$2x + 1 \;=\; 8 + x$$
$$x + 1 \;=\; 8$$

Figur 4-18, Likning etter første sett med operasjoner er utført



Figur 4-19, Løsningen Nils kom frem til på oppgave 6

4.2.2.2 Analyse av resultater – andre økt

I starten ser det ut til at Nils og Cristian grupperer gule tiles i like store grupper, og tildeler disse gruppene av gule tiles til grønne tiles. På oppgave 3 er det to grønne tiles og fire gule tiles, så svaret må etter deres strukturering av tiles bli at en grønn er verdt to gule. De benytter seg ikke av tiles for å utføre disse operasjonene, men ser heller kun på tegningen av tiles og legger merke til strukturer her, og utfører operasjoner mentalt.

På oppgave 4 ser det ut til at Nils benytter seg av en ny strategi, der han gjetter på en verdi til de grønne tilesene og sjekker løsningen ved å telle opp hvor mange gule tiles dette tilsvarer på hver side. Dersom antallet er likt på begge sider, bekreftes løsningen. Hvordan Nils kommer frem til en verdi for den grønne tilen er usikkert, men basert på strategier som er brukt tidligere kan det tyde på at han grupperer de gule tilesene i grupper av tre, og bruker dette som en pekepinn når han gjetter verdien.

På oppgave 5 tyder det på at Nils fortsetter å benytte seg av gjett og sjekk som løsningsstrategi, der han gjetter på en verdi til de grønne tilesene og teller opp antallet dette tilsvarer på begge sider av likningen. Når Nils kommer med påstanden om at en grønn tile er verdt to, gis det ikke noe forklaring for hvordan han tenkte når han kom frem til denne løsningen. Det kan tenkes at han grupperer tiles, og bruker gruppene og de resterende tilesene som en pekepinn på hva de grønne tilesene må være verdt for å få likt antall på begge sider. I dette tilfellet vil en gruppering av gule tiles i grupper på tre, gi to resterende gule tiles på høyre side. Dersom denne gruppen av resterende tiles gjøres om til en grønn tile, vil likningen se lik ut. Det kan tenkes at en liknende strategi blir brukt for å finne en verdi som virker sannsynlig, før dette sjekkes ved å telle opp antallet dette gir på begge sider.

På oppgave 6 fortsetter Nils med samme strategi. Han forsøker å gjette på en verdi til de grønne tilesene. I denne oppgaven tyder det på at han grupperer de gule tilesene på høyre side inn i grupper på fire, og bruker dette som grunnlag når han gjetter på verdien til de grønne tilesene. Når han har gjort dette teller han så opp antallet dette vil gi på begge sider. Han oppdager raskt at løsningen ikke kan være korrekt dersom de grønne er verdt fire, fordi antallet på begge sider er ulikt. Da forsøker han med fem, og oppdager at også denne løsningen ikke er gyldig, ved at antallet er ulikt. Dette er en sterk indikasjon på at Nils i all hovedsak benytter seg av gjett og sjekk-metoden når han løser likninger. Det tyder også på at han benytter seg av gruppering av gule tiles for å få en pekepinn på hva de grønne tilesene kan være verdt, og ikke gjetter helt vilkårlig på en verdi.
Her kan det tyde på at eleven har prøvd seg frem med ulike verdier til den grønne tilen, og har nå kommet til syv. Da oppdager han at dersom de grønne tilesene er verdt syv, vil han få det samme antallet på begge sider, og konkluderer da med at løsningen er korrekt. Gjett og sjekk metoden ser ut til å være strategien Nils benytter seg av i møte med likninger, hvor han på denne oppgaven har gjettet på flere ulike løsninger, og sjekket antallet dette tilsvarer flere ganger. Han har eksplisitt forkastet to av løsningene (fire og fem), før han til slutt kom frem til en gyldig løsning på likningen, ved å sjekke og konfirmere svaret.

På oppgave 7 ser det ut som Nils også her gjetter på en verdi til de grønne tilesene. Det tyder på at dette gjettet ikke er vilkårlig, men basert på sammenhengen mellom antall gule tiles på hver side og antall grønne tiles på hver side. Når han har gjort dette, teller han opp på begge sider, og dersom verdien/antallet tiles blir det samme på begge sider, bekreftes løsningen.
I sekvensen hvor lærer veileder dem på oppgave 7 blir alle elevene utfordret på å løse oppgaven ved å utføre formelle operasjoner på tilesene. Det er en strategi de ikke har brukt før i økten, og vi har sett at Nils har tatt i bruk gjett og sjekk-strategien hyppig. Dette er en strategi som har fungert for Nils, hvor han har lykkes med å finne en løsning på alle likningene tidligere, samt oppgave 7. Vi ser at Nils starter med å ta bort en grønn tile på hver side, uten oppfordring fra lærer. Dette indikerer at han behersker denne strategien, men velger likevel å benytte seg av gjett og sjekk for det meste. Når denne operasjonen er utført ser vi at både Thomas og Nils er tilfreds med dette, og ser hva løsningen må bli. De blir likevel utfordret på å gjennomføre siste del av operasjonene, og fjerne syv gule tiles fra hver side.

Etter gruppearbeidet blir Nils valgt ut til å løse oppgave 6 på smart-tavla. I løsningen ser vi at Nils behersker å oversette mellom symbolske og konkrete representasjoner. Han utfører formelle operasjoner i form av å krysse ut samme antall tiles på hver side av likningen, og oversetter også hvordan likningen representeres symbolsk gjennom løsningen. Vi har tidligere sett gjett og sjekk som en hyppig brukt strategi av Nils, men han viser her at han behersker formelle operasjoner på tegninger av tiles som løsningsstrategi.

4.2.3 Tredje økt

I denne økten skulle elevene løse likninger som var representert symbolsk. De ble oppfordret til å ta i bruk fysiske algebra tiles som hjelpemiddel. Elevene startet med å arbeide individuelt med et oppgaveark med symbolske likninger (se vedlegg 5). Etter ti minutter individuelt arbeid, samlet elevene i de samme gruppene som tidligere.

4.2.3.1 Beskrivelse av resultater – tredje økt

Elevene startet denne økta med å løse oppgaver individuelt med likninger på oppgaveark, og samles etter 10 minutter i gruppene for å fortsette med oppgavene. Frida sliter med oppgave 7 (se figur 4-20), og lærer ber Nils og resten av gruppa om å hjelpe henne.

7) $x + 9 = 2x + 7$

Figur 4-20, Oppgave 7 tredje økt

Frida: Jeg skjønner ikke hvordan man legger de opp.
Lærer: Du bytter ut x-en med en grønn en.
Frida: Da er den grønne X.
Thomas: Eller Y, eller M.
Cristian: Uansett hvilken bokstav det er, så er den sånn (grønn tile).
[Frida finner frem tiles]
Nils: X pluss ni.
Frida: Og da er det to X vel.

Nils: Da er det to X på den andre, og så er det syv.
[Frida legger ut tiles, slik at det representerer likningen]
Nils: Så tar vi vekk syv fra begge sidene, og så tar vi vekk en sånn en (grønn tile fra begge sidene).

Nils utfører operasjonene på algebra tiles, mens Frida er tilskuer. Etter operasjonene er utført gjenstår det en grønn tile = to gule tiles

Frida begynner på oppgave 10 (se figur 4-21). Hun starter med å finne nok tiles til å kunne representere likningen konkret. Hun begynner å løse likningen, med Nils og Thomas som veiledere i prosessen.

10) $8 + 5x = 33$

Figur 4-21, Oppgave 10 tredje økt

Frida: Og da må jeg ta vekk åtte.
[Frida og Nils fjerner åtte fra begge sider av likningen, har igjen fem grønne = tjuefem gule]
Frida: Og da må jeg dele de …
Thomas: Tror du ikke det er fem?
Frida: Ja jeg vet, det er fem.
Nils: Så tar du, så må du telle.
Frida: Fire ... nei bare si svaret på den.
Nils: Det er fem.

Nils og Cristian jobber med oppgave 11 (se figur 4-22). De har gjort oppgave 1-10 enten individuelt eller i grupper uten å kommentere på dem. De har ikke benyttet seg av algebra tiles frem til nå i løsningene.

11) $3y + 8 = 14$

Figur 4-22, Oppgave 11 tredje økt

Cristian: Det er tre Y pluss åtte.
[Cristian teller opp åtte gule tiles og legger dem ut på venstre side]
Nils: Er lik fjorten.
Cristian: Ja, men da må de være faktisk tre, to. En toer.
Nils: Hvis du tar vekk, hvis du tar vekk åtte fra begge to. Fra, liksom åtte fra svaret. Så svaret blir fire, nei seks istedenfor …
Cristian: Det er to.
Nils: Ja, det er to.

Nils arbeider med å løse oppgave 13 (se figur 4-23). Han har tilsynelatende løst oppgave 12, og kommenterer ingenting på dette. Algebra tiles blir heller ikke tatt i bruk.

13) $3m - 2 = 58$

Figur 4-23, Oppgave 13 tredje økt

Nils: Tre M minus to er lik femtiåtte. Svarte, tre M må jo være dritmye da. Tre M, det er tjue. En M er tjue.
[Nils skriver ned 1m = 20]
[Cristian virker ikke helt enig, og ser på hva Nils skriver]
Nils: Fordi tjue ganger tre er lik seksti, minus to, det er femtiåtte.

Nils går videre til oppgave 14 (se figur 4-24).

14) $7m + 5 = 26$

Figur 4-24, Oppgave 14 tredje økt

Nils: Syv M pluss fem er lik tjueseks … Tre.
[Nils skriver ned m = 3 på oppgavearket]
Nils: Fordi syv ganger tre er tjueen, pluss fem, det er tjueseks.

4.2.3.2 Analyse av resultater – tredje økt

I veiledningen av Frida på oppgave 7 og 10, tyder det på at Nils behersker både å representere symbolske likninger med algebra tiles, og å utføre formelle operasjoner på algebra tiles for å løse likningene. Han veileder Frida godt i disse prosessene.

På oppgave 11 ser vi at Nils og Cristian begynner å representere den symbolske likningen med tiles, men fullfører ikke denne prosessen. De starter også med å utføre formelle operasjoner på symboler, der de trekker fra åtte fra begge sider av likningen. En ting å merke seg i denne interaksjonen er at Nils omtaler høyresiden av likningen som «svaret», og at han får seks som svar dersom åtte trekkes fra på begge sider. Han deler så seks på tre, som er antall ukjente som er igjen på venstre side av likningen, og får løsningen to. Tidligere har Nils benyttet seg av gjett og sjekk for å løse likningene han har møtt, men her ser vi også tegn på at han behersker formelle operasjoner.

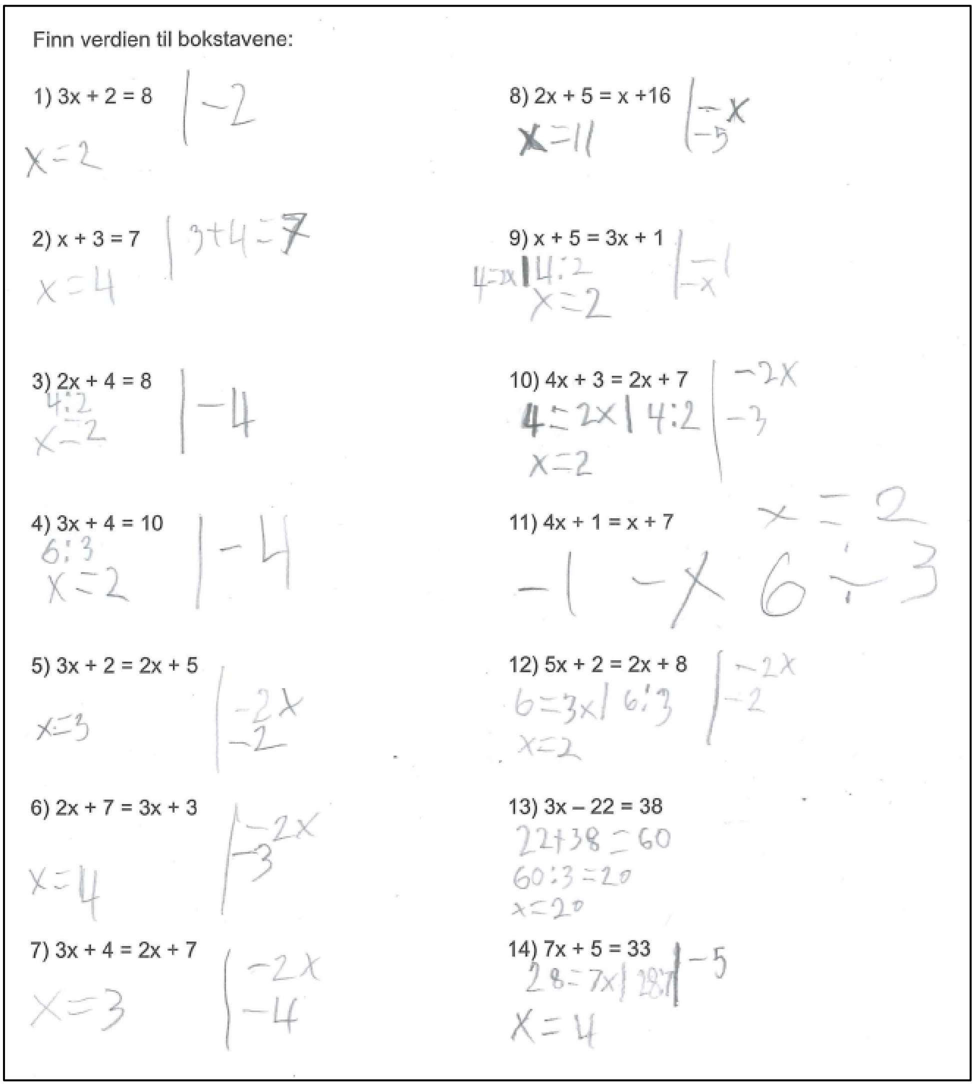
På oppgave 13 ser vi at Nils bytter tilbake til å bruke gjett og sjekk som løsningsstrategi. Han erstatter den ukjente med en løsning som ser ut til å være korrekt, og sjekker løsningen med å telle opp antallet dette tilsvarer på begge sider av likningen. Samme løsningsstrategi ser vi også i løsningen av oppgave 14.

4.2.4 Fjerde økt

I denne økten skulle elevene arbeide med å løse likninger som var representert symbolsk. De fikk utdelt et oppgaveark med 14 likninger (se vedlegg 6). Elevene fikk velge om de ville arbeide individuelt eller i grupper.

4.2.4.1 *Beskrivelse av resultater – fjerde økt*

Figur 4-25 viser besvarelsen på oppgavearket Nils arbeidet med i fjerde økt. Nils samarbeidet med Cristian for å løse likningene. Han benyttet seg kun av symbolsk notasjon for å utføre operasjoner, fysiske algebra tiles ble ikke tatt i bruk.



Finn verdien til bokstavene:

1) 3x + 2 = 8 | −2
x = 2

2) x + 3 = 7 | 3+4 = 7
x = 4

3) 2x + 4 = 8 | −4
4:2
x = 2

4) 3x + 4 = 10 | −4
6:3
x = 2

5) 3x + 2 = 2x + 5 | −2x, −2
x = 3

6) 2x + 7 = 3x + 3 | −2x, −3
x = 4

7) 3x + 4 = 2x + 7 | −2x, −4
x = 3

8) 2x + 5 = x + 16 | −x, −5
x = 11

9) x + 5 = 3x + 1 | −1, −x
4 = 2x | 4:2
x = 2

10) 4x + 3 = 2x + 7 | −2x, −3
4 = 2x | 4:2
x = 2

11) 4x + 1 = x + 7
−1 −x 6 : 3
x = 2

12) 5x + 2 = 2x + 8 | −2x, −2
6 = 3x | 6:3
x = 2

13) 3x – 22 = 38
22+38 = 60
60:3 = 20
x = 20

14) 7x + 5 = 33 | −5
28 = 7x | 28:7
x = 4

Figur 4-25, Oppgaveark Nils dag 4

4.2.4.2 *Analyse av resultater – fjerde økt*

I løpet av øktene har Nils vist at han behersker løsning av likninger godt, og at han ofte benytter seg av gjett og sjekk metoden. Men han har også vist at han behersker å utføre operasjoner på tall og ukjente for å isolere den ukjente på en side av likhetstegnet. Vi kan se fra oppgavearket at eleven benytter seg av samme type notasjon som lærer viste i plenum, ved å sette en strek (|) bak likningen, der operasjonen som utføres skrives bak streken. Dersom det er flere operasjoner, skrives disse under hverandre. Han noterer ikke ned hvordan likningen ser ut etter å ha utført de individuelle operasjonene, før han kommer til oppgave 9. I oppgave 9-14 er differansen mellom antallet X-er på hver side større enn 1. Dette ser vi tydelig ved at han i for eksempel oppgave 9, skriver 4=2x etter å ha utført operasjonene -1 og -x på hver side av likningen. Vi kan også se at han i oppgave 10-14 bytter side på tallene og de ukjente (f.eks. oppgave 10: 4=2x), før han i svaret bytter tilbake og skriver x på venstre side og løsningen på høyre (x=2). Hvorfor han gjør dette er usikkert, men vi noterer oss at i oppgave 9 er dette den naturlige måten å notere dette på, hvor han også her bytter side når han skriver løsningen (x=2). Det kan tenkes at han fortsetter med den samme strukturen han oppdaget i oppgave 9, hvor det er naturlig at tallene skrives på venstre side og de ukjente på høyre side. Det er vanskelig å si om dette indikerer noe bredere forståelse for likhetstegnet hvor likhetstegnet representerer et likhetsforhold, eller om det bare representerer repetisjon av et mønster han allerede har oppdaget. Her noterer han også ned operasjonen som blir utført, i dette eksempelet skriver han 4:2. Dette kan tyde på at han benytter seg av tankegangen han har vist tidligere, der han med tiles brukte strategien med å fordele likt antall gule tiles på hver sin grønne tile. I denne konteksten blir det å dele et tall på hver sin x (ukjente).

4.2.5 Oppsummering av Nils' resultater

Det vi kan trekke ut fra Nils' opplevelse er at gjett og sjekk-strategien for å løse problemer ser ut til å være en velkjent strategi som Nils mestrer. I arbeidet med å finne vekten til objekter i enheter som er teipet sammen i første økt, benyttes denne strategien. Denne strategien ble også tatt i bruk hyppig i andre økt, når de skulle løse likninger som var presentert i form av algebra tiles, og han lykkes med å løse likningene med denne strategien. Han blir etter hvert utfordret på denne strategien, noe vi ser først i veiledningen av lærer på oppgave 7 fra andre økt. Her viser han at han også behersker å utføre formelle operasjoner på algebra tiles for å løse likninger. Det samme ser vi også fra løsningen av oppgave 6 på smart-tavle, hvor han opererer på tegninger av tiles, og når han veileder Frida med algebra tiles. Fra fjerde økt ser vi ytterligere bevis på dette, hvor han i løsningen av symbolske representerte likninger noterer ned operasjoner han utfører, før han til slutt skriver ned løsningen symbolsk. I oppgaver der differansen mellom X-ene på hver side er større enn 1, legger han også inn et mellomledd etter å ha utført de første operasjonene, der han representerer likningen symbolsk etter at disse operasjonene er utført.

5 Diskusjon

I dette hovedkapittelet vil det forekomme en diskusjon av resultatene til Frida og Nils i lys av teori og tidligere forskning, for å se hvilken utvikling de har hatt innen algebraisk tenkning gjennom undervisningseksperimentet. Fridas resultater blir diskutert først, etterfulgt av Nils' resultater. Siste avsnitt i begge delkapitlene er en oppsummering elevenes utvikling gjennom undervisningseksperimentet.

5.1 Diskusjon Fridas resultater

Vi ser fra starten at Frida mangler en klar strategi for å løse likninger. Hun klarer fint å løse likningene i starten av første økt, men strategien hun bruker viser seg å være utilstrekkelig når likningene stadig blir mer komplekse og algebraiske. Hun ser derimot ut til å ha en viss forståelse av likhetstegnet som et relasjonelt symbol (Behr et al., 1980; Falkner et al., 1999), når hun i andre økt spør om bekreftelse på om begge sider av likningene er verdt like mye. Dette er noe som Knuth et al., (2011) karakteriserer som særlig viktig når elever løser algebraiske likninger. Dette viser hun også i første økt, der hun er opptatt av de fysiske vektene, og om hvorvidt de er i balanse eller ikke ved ulike løsninger. Den fysiske vektens dynamiske egenskap, hvor den gir direkte tilbakemelding om vekten er i balanse eller ikke (Otten et al., 2019b), ser ut til å være med på å styrke hennes relasjonelle forståelse av likhetstegnet. Her legger hun også merke til strukturer, når hun bruker vekten til kjente enheter for å forutsi vekten til ukjente enheter.

Vi ser ikke tegn til at gjett og sjekk eller andre aritmetiske strategier er noe hun behersker eller er kjent med. Nils nevner flere ganger løsninger til oppgaver, men Frida ser ikke ut til å klare å godkjenne disse løsningen ved å ta i bruk gjett og sjekk. Mot slutten av gruppearbeidet andre økt, ser vi at en formell strategi basert på å utføre de samme operasjonene på begge sider av likningen blir introdusert av læreren. Det kan tyde på at dette er starten på hennes overgang fra aritmetisk til algebraisk tenkning, hvor hun begynner å tilegne seg en strategi som lar henne delta i de algebraiske aktivitetene. Dette er aktiviteter som Kieran (2004) kategoriserer som transformative algebraiske aktiviteter. I slike aktiviteter vil elever ifølge Kilpatrick et al., (2001) utvikle sin forståelse av begreper som likhet og ekvivalens, en forståelse som ifølge Knuth et al., (2006) impliserer en sterk positiv sammenheng med prestasjoner innen likningsløsning. I løpet av øktene kan vi observere en gradvis utvikling når det gjelder prestasjoner.

Forståelsen av begrepet balanse, som elevene har fått fysisk erfaring med fra første, ser også ut til å være en bidragsyter til Fridas evne til å tilegne seg den formelle algebraiske løsningsstrategien. Dette er i tråd med Kilpatrick et al., (2001), der forståelsen om balanse har en positiv sammenheng med evnen til å utføre samme operasjon på begge sider av likningen er enklere for elever som ser på likningen som enheter med symmetrisk balanse. Deres erfaring med fysiske vekter, og vektens dynamiske egenskaper (Otten et al., 2019b), kan ha vært med på å styrke forestillingen om at likningen symboliserer et balanseforhold også når Frida arbeider med mer abstrakte representasjoner.

Et annet aspekt ved undervisningsopplegget som ser ut til å være fordelaktig for Fridas utvikling i algebraisk tenkning er bruken av modeller. Filloy & Rojano (1989) beskriver en tilnærming til overgangen mellom aritmetikk og algebra, som baserer seg på modellering en konkret kontekst. I modelleringen blir manipulativer som vekter og algebra tiles brukt, som ifølge McNeil & Jarvin (2007) og Moyer (2001) hjelper elever med å forstå abstrakte konsepter som å utføre operasjoner på begge sider av likningen gjennom representasjon i en konkret kontekst. Dette er også i tråd med hva Castro (2017) sier, hvor algebra tiles gjør algebraiske ideer tilgjengelig for alle elever. Empirisk bevis støtter dette, hvor det er vist at algebraiske relasjoner som representeres ikke-symbolsk er lettere for elever å forstå (Watson, 2009), forståelse for likningsløsning øker dersom man tar i bruk flere ulike representasjoner (Warren et al., 2016; Watson, 2009).

Derimot observerer vi at Frida ser ut til å være avhengig av algebra tiles for å løse likningene, etter at denne metoden er introdusert for henne. Dette tyder på at hun i modelleringsprosessen ikke ennå har oppnådd *separasjon* fra meningen operasjonene på et konkret nivå representerer på et mer abstrakt nivå, noe som Filloy & Rojano (1989) beskriver som en fundamental komponent i denne prosessen. Elever kan ifølge Clements (2000), Kilpatrick et al., (2001) og Pape & Tchoshanov (2001) ha vanskeligheter med å hente ut de underliggende matematiske konseptene som de konkrete representasjonene utgjør. Det vil ifølge Ball (1992) være viktig og samtale om og diskutere manipulativene for å oppnå matematisk forståelse. Vi kan se tegn på utvikling av denne evnen til å se sammenheng mellom ulike representasjoner, som Kilpatrick et al., (2001), Pape & Tchoshanov (2001) og Uttal et al., (2013) beskriver som vanskelig for eleven i fjerde økt, der de blir instruert til å notere ned symbolsk hvilke operasjoner som utføres på et mer konkret nivå. Dette kan være fordelaktig for elevens evne til å koble representasjonene sammen. Resultatene fra fjerde økt viser også at Frida behersker i en viss grad den første fundamentale komponenten Filloy & Rojano (1989) beskriver, der hun klarer å oversette begge veier mellom symbolsk representasjon og konkrete representasjoner i form av algebra tiles.

Når elevene skulle begynne å løse likninger i andre økt, manglet Frida en strategi som lot henne gjøre dette på en meningsfull måte. Hun så ikke ut til å være kjent med gjett og sjekk eller andre aritmetiske metoder for likningsløsning heller. Derimot viste hun forståelse for balanse og likhet, noe elevene hadde fått erfaring med i første økt i arbeid med fysiske vekter. Denne erfaringen om balanse ser ut til å ha festet seg hos Frida, og hennes relasjonelle forståelse av likhetstegnet ser ut til å bli styrket av denne erfaringen. Den relasjonelle forståelsen er et nøkkelbegrep i algebraisk tenkning og likningsløsning. I løpet av andre økt blir Frida introdusert for en formell algebraisk løsningsstrategi, der de samme operasjonene blir utført på begge sider av likningen. Dette virker å være en meningsfull strategi for Frida, særlig når operasjonene utføres på fysiske algebra tiles. Hun ser ut å slite litt i starten med denne strategien, men gjennom veiledning fra lærer og andre elever, behersker hun dette bedre etter hvert. Dette er tegn på at hennes algebraiske tenkning utvikles i takt med hennes forståelse av formelle algebraiske løsningsstrategier. Erfaringen og forståelse om balanse og likhet ser også ut til å være fordelaktig for hennes forståelse av de formelle operasjonene som utføres, og at de opprettholder balansen i likningen. I arbeid med symbolske representasjoner i tredje og fjerde økt, klarer Frida å oversette fra symboler til algebra tiles, som er en viktig komponent i overgangen fra aritmetikk til algebra. Hun er derimot avhengig av fysiske algebra tiles for å utføre de formelle operasjonene. Hun har ikke ennå klart å separere meningen til operasjonene på de konkrete representasjonene, fra operasjonene på et mer abstrakt nivå. Hun behersker for eksempel ikke å utføre formelle operasjoner på symboler, uten å ha fysiske algebra tiles som hjelpemiddel. Derimot blir operasjonene som utføres på algebra tiles og løsninger, notert ned symbolsk i arbeid med symbolske representasjoner.

5.2 Diskusjon Nils' resultater

Når elevene begynte å løse likninger i andre økt, ser vi at gjett og sjekk er en strategi Nils bruker aktivt for å løse likningene. Dette samsvarer med Kilpatrick et al. (2001) og Fülöp (2020), som beskriver at gjett og sjekk er en metode mange elever begynner med når de løser likninger. Dette er en metode som kategoriseres av Stacey & McGregor (1999) som en aritmetisk tilnærming til likningsløsning, og er et tegn på at Nils innehar en aritmetisk tankegang i starten. Det er vanskelig å si noe om hvilken tilnærming han har til gjett og sjekk i forhold til hvordan Stacey og McGregor (1999) beskriver disse tilnærmingene, fordi han ofte kun uttrykker løsningen muntlig når han har funnet den. Det vi derimot ser fra oppgave 6 i andre økt, er at han først gjetter fire og fem som løsninger, og forkaster disse, før han kommer frem til syv som den korrekte løsningen. Dette kan samsvare med tilnærming 2, der han prøver på tall i en sekvens (Stacey & McGregor, 1999) som begynner med fire, der han fortsetter å prøve med de påfølgende tallene før han til slutt finner en korrekt løsning. Det kan også samsvare med tilnærming 3, der han utfører flere tester og bruker resultatet fra forrige test for å velge den neste. En annen indikasjon på at han hovedsakelig tenker aritmetisk i løsning av likninger er fra tredje økt i arbeid med å løse symbolsk representerte likninger, hvor han omtaler høyresiden av likningen som *svaret*. Dette er noe Knuth et al. (2006) også beskriver, noe som også kan implisere at han har en operasjonell forståelse av likhetstegnet, som igjen også karakteriseres som tegn på aritmetisk tenkning.

Noe som taler for at Nils innehar en relasjonell forståelse av likhetstegnet, er måten gjett og sjekk benyttes for å løse likninger, der han kun godkjenner løsninger som representerer et ekvivalensforhold mellom begge sider i likningen. Dette er tegn på at han ser på likhetstegnet som et relasjonelt symbol, som beskrevet av Behr et al. (1980) og Falkner et al. (1999). Hans prestasjoner gjennom alle øktene, som viser at han er god til å finne løsninger på likninger, indikerer også at han har utviklet en relasjonell forståelse av likhetstegnet, som Knuth et al., (2006) beskriver som en sterk positiv sammenheng. Det å kunne løse likninger er også definert som et grunnleggende og viktig aspekt ved algebra (Cai & Knuth, 2011).
Med den aritmetiske tilnærmingen som baserer seg på gjett og sjekk, kan det argumenteres for at Nils ikke deltar i det Kieran (2004) karakteriseres som transformative algebraiske aktiviteter når han løser likninger alene. Men vi observerer fra oppgavene han veileder Frida, når han løser oppgave 6 fra andre økt i plenum på smart-tavle, og i arbeid med symbolske representasjoner i fjerde økt, at han behersker det som beskrives som en viktig formell metode for å løse likninger (Kilpatrick et al., 2001; Knuth et al., 2006; Otten et al., 2019b). I disse tilfellene blir formelle operasjoner utført på algebra tiles og tegninger av algebra tiles i andre og tredje økt, og operasjoner utføres utelukkende på symboler i fjerde økt. Dette er i

situasjoner Nils blir utfordret på sine egne løsningsstrategier, og får gjennom disse transformative aktivitetene (Kieran, 2004) utviklet sin forståelse for begreper som likhet og ekvivalens (Kilpatrick et al., 2001), som ifølge Knuth et al., (2006, 2011) er nøkkelbegreper i lineær likningsløsning.

Noe som ser ut til å være med på å forsterke Nils sin forståelse for matematiske konsepter som likhet og likninger er den fysiske erfaringen han har gjort med manipulativer som fysiske vekter og algebra tiles. Det kan ha vært med på å styrke forståelsen av algebraiske relasjoner ved at de har vært representert konkret (Watson, 2009) og de har også hatt flere ulike representasjoner som ifølge Warren et al., (2016) og Watson (2009) har gjort likningsløsning lettere å forstå. Denne bruken av manipulativer beskrives av Filloy & Rojano (1989) som en tilnærming til overgangen fra aritmetikk til algebra, hvor det foregår en modellering på et konkret nivå. I denne prosessen er det to fundamentale komponenter, (1) en to-veis oversetting mellom representasjonene og (2) seperasjon fra analogiene de konkrete representasjonene uttrykker for hva som skjer på et mer abstrakt nivå (Filloy & Rojano, 1989). Disse prosessene kan by på vanskeligheter for elever, hvor de grunnleggende matematiske konseptene de fysiske manipulativene representerer kan være vanskelige å hente ut (Clements, 2000; Kilpatrick et al., 2001; Pape & Tchoshanov, 2001). Sammenhengen mellom representasjonene kan også være vanskelig å koble sammen (Kilpatrick et al., 2001; Pape & Tchoshanov, 2001; Uttal et al., 2013). Nils ser derimot ut til å beherske disse prosessene godt, f.eks. viser han i løsningen av oppgave 6 på smart-tavle at han kan oversette mellom hvordan likningen representeres i form av tegninger av tiles og symbolske representasjoner. Han viser også at han har oppnådd en seperasjon fra hva de konkrete representasjonene uttrykker, ved han han i fjerde økt utelukkende utfører formelle operasjoner på symboler.

Nils bruker i begynnelsen uformelle aritmetiske strategier for å løse likninger, som gjett og sjekk. Likningene ser ikke ut til å være krevende nok for at Nils behøver algebraiske strategier for å løse dem, og deltar i starten ikke i de transformative algebraiske aktivitetene. Han ser også ut til å ha en operasjonell forståelse av likhetstegnet, hvor han for eksempel i tredje økt refererer til tegnet som svaret. Derimot blir han gjennom undervisningseksperimentet utfordret på denne strategien, hvor han blant annet må veilede Frida i formelle operasjoner på algebra tiles, utføre formelle operasjoner på tegninger av algebra tiles i andre økt, og utføre formelle operasjoner på symboler i fjerde økt. Dette er tegn på at han behersker en algebraisk metode for å løse likninger, som også er en indikasjon på en utvikling i algebraisk tenkning. Hans relasjonelle forståelse av likhetstegnet ser også ut til å utvikles, der ekvivalensforholdet mellom sidene i likningen er fokuset, og kun godkjenner løsninger som uttrykker dette forholdet. Erfaringen Nils fikk med fysiske vekter kan ha vært med på å styrke denne forståelsen, som er et nøkkelbegrep i algebraisk tenkning. I arbeid med ulike representasjoner, viser han også at han behersker å oversette mellom ulike representasjoner. Nils viser også at han har separert meningen operasjonene på et konkret nivå gir, med operasjonene på et abstrakt nivå, når han i fjerde økt utfører formelle operasjoner på symboler. Dette er to fundamentale komponenter i overgangen fra aritmetikk til algebra, og er tegn på at han tenker algebraisk i løsningen av likninger.

6 Konklusjon

I dette hovedkapittelet besvares forskningsspørsmålet på grunnlag av resultatene fra studien. Deretter kommer jeg med en oppfordring til videre forskning, samt refleksjon rundt studien og hvilke metoder som ble brukt for datainnsamling. Til slutt følger en avslutning.

6.1 Hvordan utvikles den algebraiske tenkingen hos to elever på 5. trinn gjennom fire økter med likningsløsning og gradvis progresjon av abstraksjon?

Frida og Nils hadde to forskjellige utgangspunkt før undervisningseksperimentet. Frida ble beskrevet som en elev som sliter med matematikk og hadde lite forkunnskaper på forhånd. Nils blir beskrevet som sterk i matematikk, og hadde forkunnskaper om løsningsstrategier for å løse likninger. Dette ser vi ved at Nils benytter seg av gjett og sjekk, og Frida har en strategi som baserer seg på gruppering og tildeling av algebra tiles. Begge tilfeller indikerer et fravær av algebraisk tenkning.

Gjennom arbeid med ulike representasjoner, blant annet fysiske vekter, algebra tiles og tegninger av tiles, samt symbolske representasjoner, ser vi hos begge elever en utvikling av formelle algebraiske løsningsstrategier. Dette er tegn på at både Frida og Nils utvikler algebraisk tenkning. Erfaring med fysiske vekter og de dynamiske egenskapene de bringer, ser vi også at elevene utvikler en forståelse av likhet og balanse. Dette er et nøkkelbegrep innen algebraisk tenkning. I arbeid med de ulike representasjonene, og den gradvise prosessen av abstraksjon, ser vi også at begge elever lykkes i å oversette mellom representasjoner, som er tegn på utvikling i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Det at likningene var representert ulike måter, både ikke-symbolsk og symbolsk, kan ha vært med på å gjøre denne overgangen lettere. Derimot ser Frida ut til å være avhengig av konkrete representasjoner som algebra tiles, for å utføre de formelle operasjonene. Nils ser ut til å være uavhengig av konkrete representasjoner, og lykkes i å utføre formelle operasjoner utelukkende på symboler. Det og separeres fra meningen til de konkrete kontekstene er en fundamental komponent i overgangen fra aritmetikk til algebra. Her ser vi en forskjell i utviklingen, hvor Nils har oppnådd separasjon og Frida er ennå avhengig av konkrete representasjoner.

6.2 Videre forskning, refleksjon og avslutning

Mange elever sliter med overgangen fra aritmetikk til algebra (Kieran et al., 2007: Kilpatrick et al., 2001). Kieran (2004) nevner fokus på relasjoner, representasjoner og operasjoner som justeringer som må gjøres i denne overgangen. En tilnærming som har blitt brukt er modellering i en konkret kontekst, og har en gradvis abstraksjonsprosess hvor målet er at elevene skal bli uavhengig av de konkrete representasjonene (Filloy & Rojano, 1989). Denne studien benyttet seg av denne tilnærmingen. Studien er også del av et større prosjekt, og undervisningseksperimentet skal gjennomføres på nytt i en annen klasse. I etterkant av studien er det i samarbeid med prosjektdeltakerne gjort forslag til endringer, for eksempel større grad av tilpasning i vanskelighetsgrad på oppgaver, større fokus på formelle operasjoner og formell symbolsk notasjon.

Resultatene fra denne studien er kun basert på to kasus, og jeg har dermed ikke grunnlag for å generalisere funnene utover den konkrete forskningskonteksten. Andre resultater kunne kommet frem dersom studien ble gjort i en annen klasse. En kvantitativ tilnærming til studien vil kunne gi et bedre grunnlag for å generalisere funn. I tillegg er resultatene en tolkning av hva elevene sa og gjorde i video- og lydopptakene. Et oppgavebasert intervju med kasusene kunne gitt en bedre innsikt i elevenes tenkning.

Gjennom denne deltakelsen i ALGEBRA-prosjektet og arbeid med denne masteravhandlingen har jeg tilegnet meg ny kunnskap og forståelse av algebra og algebraisk tenkning. Dette er en erfaring jeg vil ta med meg inn i yrkeslivet som matematikklærer. Jeg håper studien og resultatene som har kommet frem kan bidra til å styrke algebraundervisningen på mellomtrinnet, og gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra lettere for elever.

7 Litteraturliste

Ball, D. L. (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, *16*, 14-18,46-47. https://www.aft.org/sites/default/files/ae_summer1992_ball.pdf

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. I N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 115-136). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How Children View the Equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-18. https://gpc-maths.org/data/documents/doks/behr-howequal.pdf

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A., Stylianou, D., Knuth, E., Isler-Baykal, I., & Strachota, S. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, *56*(5),1930-1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 5-23). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Booth, J., & Koedinger, K. (2008). Key Misconceptions in Algebraic Problem Solving. *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society*, 571-576. https://www.researchgate.net/publication/281131215_Key_misconceptions_in_algebraic_problem_solving

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Caglayan, G., Olive, J., & Izsák, A. (2013). How Middle School Students Understand Polynomial Sums and Products Using Algebra Tiles Model in a « cours dialogué ». *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *33*(3), 267-306. https://revue-rdm.com/2013/how-middle-school-students/

Cai, J., & Knuth, E. J. (2011). Introduction. I J. Cai, E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. vii-xi). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carbonneau, K., Marley, S., & Selig, J. (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics With Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*. https://www.researchgate.net/publication/248701204_A_Meta-Analysis_of_the_Efficacy_of_Teaching_Mathematics_With_Concrete_Manipulatives

Castro, S. (2017). *Algebra Tiles Effect on Mathematical Achievement of Students with Learning Disabilities*. [Masteroppgave, California State University]. Digital Commons @ CSUMB. https://digitalcommons.csumb.edu/caps_thes_all/129/

Clements, D. H. (2000). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *1*(1), 45-60. https://doi.org/10.2304/ciec.2000.1.1.7

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking (Opprinnelig publisert i 1999) I F. Hitt (Red.), *Representations and Mathematics visualization: PME-NA Working Group (1998-2002)* (s. 311-336). CINVESTAV-IPN. https://www.academia.edu/807016/Working_Group_on_Representations_and_Mathematics_Visualization

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232-236. http://academic.sun.ac.za/mathed/174/AlgebraNCTM.pdf

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25. https://www.jstor.org/stable/40247950

Fülöp, Z. (2020). Regula Falsi in Lower Secondary School Education II. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *18*(2), 121-142. https://doi.org/DOI:10.5485/TMCS.2020.0512

Garzón, J., & Bautista, J. (2018). Virtual Algebra Tiles: A Pedagogical Tool to Teach and Learn Algebra Through Geometry. *Journal of Computer Assisted Learning*, *34*(1), 1-8. https://www.researchgate.net/publication/327074736_Virtual_Algebra_Tiles_A_pedagogical_tool_to_teach_and_learn_algebra_through_geometry

Kablan, Z. (2016). The Effect of Manipulatives on Mathematics Achievement Across Different Learning Styles. *Educational Psychology*, *36*(2), 277-296. https://www.researchgate.net/publication/292977001_The_effect_of_manipulatives_on_mathematics_achievement_across_different_learning_styles

Kaput J. J. (1995). *A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?*. Innlegg presentert ved The Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (s. 707-762). Information Age Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. I J. Cai & E. J. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 259-276). Springer.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312. http://www.jstor.org/stable/30034852

Küchemann, D. (1981). Chapter 8: Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics* (s. 102-119). John Murray, London.

Kunnskapsderpartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19?lang=nob

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). Conceptual Metaphor in Everyday Language. *Journal of Philosophy*, *77*(8), 453-486. https://cse.buffalo.edu/~rapaport/575/F01/lakoff.johnson80.pdf

Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveuying Its Origins and Charting Its Future. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1-18. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16_1/TME16_1.pdf

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry.* SAGE Publications.

Manches, A., & O'Malley, C. (2012). Tangibles for Learning: A Representational Analysis of Physical Manipulation. *Personal and Ubiquitous Computing*, *16*(4), 405-419. https://doi.org/10.1007/s00779-011-0406-0

McNeil, N. M., & Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add up: Disentangling the Manipulatives Debate. *Theory Into Practice*, *46*(4), 309-316. http://www.jstor.org/stable/40071507

Molina, M., Ambrose, R., & del Rio, A. (2018). First Encounter with Variables by First and Third Grade Spanish Students. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 261-280). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11

Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197. https://doi.org/10.1023/A:1014596316942

Núñez, R., Edwards, L., & Matos, J. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 45-65. https://doi.org/10.1023/A:1003759711966

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019a). The Balance Model for Teaching Linear Equations: A Systematic Literature Review. *International Journal of STEM Education*, *6*. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., & Heinze, A. (2019b). Developing Algebraic Reasoning in Primary School Using a Hanging Mobile as a Learning Supportive Tool. *Infancia y aprendizaje*, *42*(3), 615-663. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice*, *40*(2), 118-127. https://www.researchgate.net/publication/249901059_The_Role_of_Representations_in_Developing_Mathematical_Understanding

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Saraswati, S., Indra Putri, R., & Somakim, S. (2016). Supporting Students' Understanding of Linear Equations With One Variable Using Algebra Tiles. *Journal on Mathematics Education*, *7*. https://doi.org/10.22342/jme.7.1.2814.19-30

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Steffe. L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 267-307). Erlbaum. https://www.researchgate.net/publication/264119299_Teaching_experiment_methodology_Underlying_principles_and_essential_elements

Thornton, G. J. (1995). *Algebra Tiles and Learning Styles*. [Masteroppgave, Simon Fraser University]. Summit Research Repository. https://summit.sfu.ca/item/6699

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I A. F. Coxford (Red.), *The Ideas of Algebra, K-12* (s. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Uttal, D., Amaya, M., Del, M., Maita, M. d. R., Hand, L. L., Cohen, C., Doherty, K., & DeLoache, J. (2013). It Works Both Ways: Transfer Difficulties between Manipulatives and Written Subtraction Solutions. *Child Development Research*, *13*. https://doi.org/10.1155/2013/216367

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of Early Algebra: Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra.* [Doktorgradsavhandling, Utrecht University]. Utrecht University Repository. https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/874

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the Learning and Teaching of Algebra. I Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Red.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (s. 73-108). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3

Watson, A. (2009). Algebraic Reasoning. I T. Nunes, P. Bryant & A. Watson (Red.), *Key understandings in mathematics learning* (Paper 6). Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/project/key-understandings-in-mathematics-learning

Wellington, J. (2015). *Educational Research: Contemporary Issues and Practical Approaches* (2. utg.) Bloomsbury.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Vurdering av behandling av personopplysninger
Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til forskningsprosjekt
Vedlegg 3: ALTA Løse likninger
Vedlegg 4: Oppgaveark andre økt – algebra tiles
Vedlegg 5: Oppgaveark tredje økt – symbolske likninger
Vedlegg 6: Oppgaveark fjerde økt – symbolske likninger
Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel

8.1 Vedlegg 1: Vurdering av behandling av personopplysninger

Sikt

Meldeskjema / ALGEBRA-prosjektet / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
849691	Standard	09.01.2023

Prosjekttittel
ALGEBRA-prosjektet

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
David A. Reid

Prosjektperiode
01.01.2023 - 31.12.2030

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2030.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2030.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og

konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

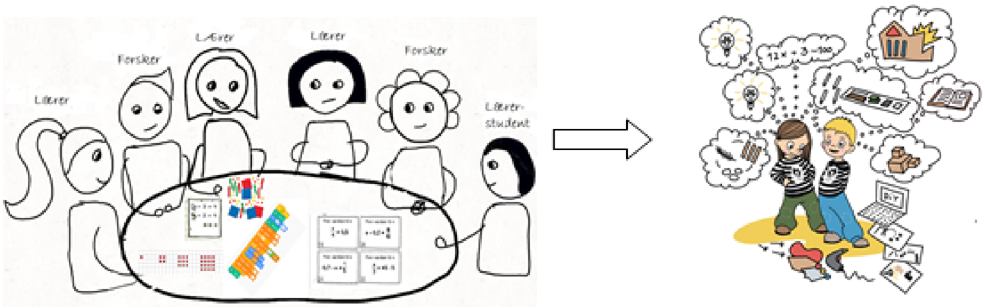
Lykke til med prosjektet!

8.2 Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til forskningsprosjekt

Vil du delta i forskningsprosjektet

"ALGEBRA"?

Hei! Har du lyst å være med i et forskningsprosjekt? Vi ønsker å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.



Formål
I dette prosjektet vil vi samarbeide med lærere om utvikling av læringsaktiviteter som legger til rette for at du kan bli god i matematikk, og da med spesielt fokus på algebra. Disse læringsaktivitetene vil inkludere matematiske problemer å bryne seg på, redskaper for å kunne løse problemene, sånn som konkretiseringsmateriell, og anbefalinger for lærerhandlinger, sånn som strategier for å stille spørsmål, hvordan gruppere elever hensiktsmessig, ledelse av gruppediskusjoner og helklassediskusjoner osv. Vi har lyst å se hvordan du og dine medelever deltar i disse aktivitetene, hvilke ideer og tanker dere gjør dere og hvilke muligheter dere får til å lære algebra. Vi håper du vil være med!

Vi vil for eksempel undersøke spørsmål som:
- *Hvilke elementer i designet av aktivitetene støtter elevens utvikling av algebraisk tenking?*
-*Hvilke muligheter og utfordringer for læring av likninger opplever elevene når de jobber med konkretiseringsmateriell, diagrammer og symboler?*

Hvis du har lyst å være med, kan det også være at vi ber deg om å forklare oss litt mer om hvordan du tenker når du løser matematikkproblemer. Om du kan tenke deg det så kan du krysse av litt lengre nede for at du også er villig til å gi et intervju.

Dette prosjektet er et forskningsprosjekt fra Universitet i Agder.

Hvem leder forskningsprosjektet?
Forskeren heter David Reid.

Det er også fire forskere til fra UiA med i prosjektet. De heter Martin Carlsen, Linda Gurvin Opheim, Elin Røkeberg Lid og Jorunn Reinhardtsen.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi spør deg om å være med, fordi du er en elev på mellomtrinnet og din lærer i matematikk samarbeider med oss om å lage gode læringsaktiviteter.

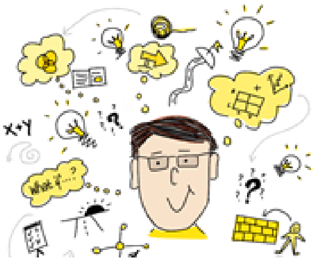
Vi vet enda ikke hvem du er eller hva du heter, men din matematikklærer gir deg dette brevet fra oss.

Hvis du har lyst å være med i forskningsprosjektet, må du skrive under på siste ark i dette brevet, og da gir du tillatelse for at vi får inkludere det du gjør og bidrar med i undervisningen når vi samler inn data i ditt klasserom.

Hvis du ikke har lyst å være med, så utelater vi dine bidrag i klasserommet.

Hva betyr det for deg å delta?
Hvis du har lyst å delta i forskningsprosjektet, så følger du matematikkundervisningen på skolen som vanlig. Vi ønsker å filme undervisningen for å kunne gå i detaljer å se hva som hjelper deg å løse utfordrende problemer i matematikk og hvordan undervisningen kan støtte din videre utvikling. Det

kan hende at vi ønsker å ha et intervju med deg. Et intervju er en samtale der vi stiller deg forskjellige spørsmål. Spørsmålene vil handle om hvordan du tenker når du løser problemer og hvilke hjelpemidler du liker å bruke.



Både Linda og Jorunn vil være med under intervjuet, og vi vil gjøre lydopptak av intervjuet. Intervjuet vil ta ca. 30 minutter.

Hvis du synes det er greit, vil vi også samle inn skrevne løsninger som du har jobbet med i klasserommet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det betyr at du kan velge selv om du har lyst å være med eller ikke. Ingen andre kan velge dette for deg. Det er bare du sammen med dine foreldre som kan samtykke. Samtykke betyr at du sier at du synes noe er greit.

Hvis du vil delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Det betyr at det er lov å ombestemme seg, og det er helt i orden. All informasjon om deg vil da bli slettet.

Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller om du først sier «ja» og så «nei». Ingen vil bli sur eller lei seg.

Dersom du ikke ønsker å delta så vil du likevel få likt tilbud om undervisning som dine medelever og du vil få delta i de samme læringsaktivitetene. Vi vil sørge for at du ikke blir med på videoopptakene som gjøres i ditt klasserom. Dersom helklassesamtaler blir aktuelle å filme vil du få tilbud om tilsvarende samtale på et grupperom.

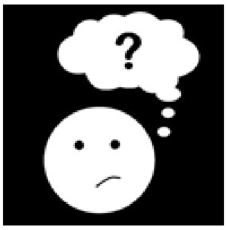
Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker innsamlet data
Vi vil bare bruke data til å finne ut hvilke læringsaktiviteter som hjelper deg å lære algebra.
Vi vil ikke dele innsamlet data med andre. Det er bare forskerne i prosjektet som har tilgang til data.
Vi lagrer all data på en sikker datamaskin.
Vi sletter video- og lydopptak fra klasserom og intervjuet når prosjektet er over.
Vi passer på at ingen kan kjenne deg igjen når vi skriver forskningsartikler. Vi vil for eksempel finne opp et annet navn når vi skriver om deg.
Vi følger loven om personvern.

Hva skjer med dine personidentifiserende data når vi avslutter forskningsprosjektet?
Vi er ferdig med forskningsprosjektet 31.12.2030. Innsamling av data kan foregå frem til 31.12.2024, men vi ønsker å beholde innsamlet data frem til prosjektslutt for videre forskning.
Da vil vi passe på at all personidentifiserende data (video- og lydopptak) er slettet.

Dine rettigheter
Du kan klage til Datatilsynet dersom du synes at vi har behandlet dine personidentifiserende data på en uforsiktig måte eller på en måte som ikke er riktig.

Hva gir oss rett til å samle inn personidentifiserende data?
Vi behandler data som inkluderer deg bare hvis du sier at det er greit og du skriver under på samtykkeskjemaet.

Hvor kan jeg finne ut mer?



Hvis du har spørsmål om studien, kan du ta kontakt med:

- *Universitet i Agder* ved
  Jorunn Reinhardtsen, jorunn.reinhardtsen@uia.no, 40 49 23 33
  David Reid. david.reid@uia.no
- Vårt personvernombud:
  Trond Hauso, Personvernombud@uia.no, 936 01 625

Universitet i Agder har bedt Personverntjenester se om prosjektet følger loven om personvern. Personverntjenester har gjort dette, og mener at vi følger loven.

Hvis du lurer på hvorfor Personverntjenester mener dette, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen David, Martin, Linda, Elin og Jorunn

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *ALGEBRA*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at barnet mitt:

- ☐ kan delta i intervju hvor det gjøres video- og lydopptak
- ☐ kan observeres og tas video- og lydopptak av i klasserommet
- ☐ jeg samtykker til at mitt barns skriftlige arbeider kan samles inn/kopieres

Jeg samtykker til at mitt barn, ____,
får delta i prosjektet og innsamlet data kan behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

8.3 Vedlegg 3: ALTA Løse likninger

ALTA: Løse likninger på 5. trinn

Kjerneelement

Representasjon og kommunikasjon

Abstraksjon og generalisering

Kompetansemål etter 5. trinn

- Løse ligninger og ulikheter gjennom logiske resonnement og forklare hva det vil si at et tall er en løsning på en ligning

Første time: Fysiske erfaringer med balansemodell

Aktivitet:

Elevene presenteres med en balansemodell, og poser med forskjellig farge og vekt. Vekten til posen er ukjent for elevene. Elevene må utforske og oppdage måter å manipulere posene, slik at man balansen opprettholdes.

- Hvilke handlinger opprettholder likheten/balansen
- Hvilke endringer kan man gjøre slik at det ser annerledes ut - men balansen opprettholdes, samtidig som man bruker de samme posene
- Legge til/ta vekk poser – opprettholde balanse

Diskusjon:

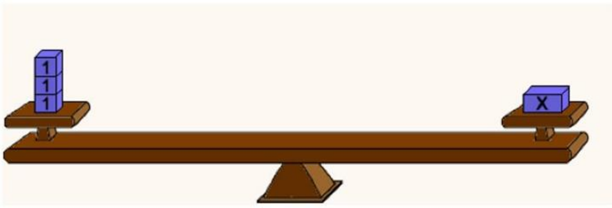
Hvilke strategier brukte elevene for å opprettholde balansen?

Andre time: Bruke balansemodell for å løse likninger

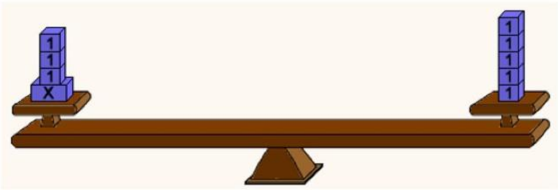
Aktivitet:

Elevene skal løse likninger ved bruk av balansemodell. Likningene som presenteres vil være på forskjellig nivå, og vil i økende grad kreve mer algebraisk tenkning.

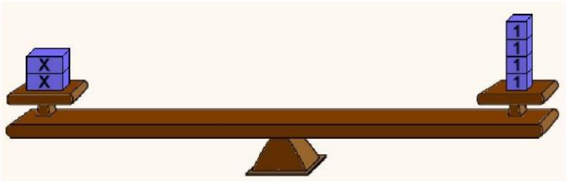
- Addisjon med ukjent svar (1 + 2 = X)
  1 klinkekule + 2 klinkekuler = pose med ukjent antall klinkekuler



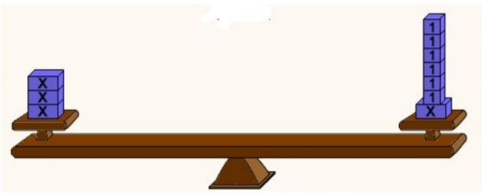
- Addisjon med ukjent addend (3 + X = 5)
  3 klinkekuler + pose med ukjent antall klinkekuler = 5 klinkekuler



- Multiplikasjon med ukjent faktor (2X = 4)
  2 poser med ukjent antall klinkekuler = 4 klinkekuler



- Ligning med ukjent på begge sider (3X = X + 6)
  3 poser med ukjent antall klinkekuler = pose med ukjent antall klinkekuler + 6 klinkekuler



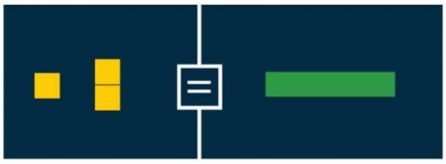
- Gjennom manipulering av posene (legge til/ta vekk/flytte) og opprettholde balansen, skal elevene finne ut hvor mange klinkekuler de ukjente posene inneholder

Tredje time: Manipulering av fysiske objekter som representerer balansen (algebra tiles)

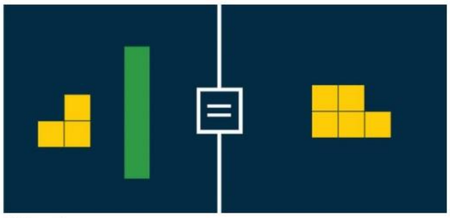
Aktivitet:

Elevene presenteres med algebra tiles og en likhetsmatte. Gjennom manipulering av tiles, skal elevene løse ligninger av forskjellig nivå, økende i grad av algebraisk resonnering som kreves.

- 1 + 2 = X

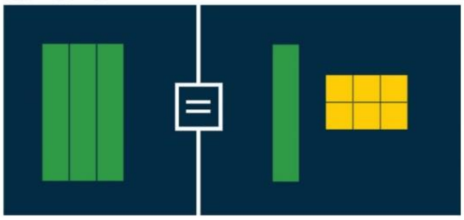


- 3 + X = 5



- 2X = 4

- 3X = X + 6

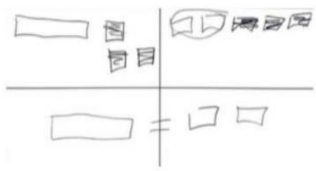


Fjerde time: Tegninger av fysiske objekter som representere balansen

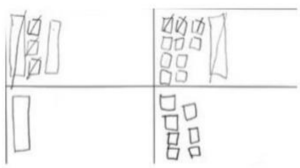
Aktivitet:

På samme måte som ved bruk av tiles i forrige time, skal elevene løse likninger på forskjellig nivå, ved hjelp av tegninger av fysiske objekter.

- 3 + X = 5



- 2X + 3 = X + 10



Femte time: Symbolsk løsning av ligninger

Aktivitet:

I denne timen blir elevene introdusert for symbolsk representasjon av ligninger, der målet er at elevene skal løse ligninger ved bruk av symbolsk notasjon.

Eksempeloppgave:

Georg kjøpte 7 like pakker tyggegummi. Det stod ingenting på pakken om hvor mange biter det var i én pakke, men da han hadde åpnet alle pakkene hadde han 84 biter. Hvor mange biter var det i hver pakke?

$7X = 84$

$X = 84/7$

$X = 12$

Generelle tanker

Bruken av en konkret balansemodell gjør at elevene erfarer at operasjoner de utfører på modellen har en direkte virkning på tilstanden til modellen (i balanse eller ikke) – som representerer likhet i lineære ligninger. Dette er ment for å bedre elevenes forståelse av likhetstegnet, som er et instrumentelt begrep i løsning av lineære ligninger (Otten et al.)

Progresjonen er lagt opp slik at man gradvis går fra aritmetisk til algebraisk tankegang, ved å ha en progresjon fra konkrete til mer abstrakte representasjoner. Ved å introdusere modeller, får abstrakte situasjoner en konkret manifestering. Tilstanden på det konkrete nivået representerer en annen tilstand på et mer abstrakt nivå. Det finnes en direkte oversettelse mellom nivåer, der operasjonene og handlingene som skjer på et konkret nivå har analogier for hva som skjer på et mer abstrakt nivå, og motsatt. (Filloy & Rojano).

Vi håper at å gradvis introdusere mer abstrakte representasjoner skal hjelpe elevene i progresjon i algebraisk resonnering og utvikling av algebraisk syntaks. Dersom man går direkte fra konkrete modeller til algebraisk notasjon, er faren at man blir fiksert på semantikken til de konkrete modellene og dette kan hindre utviklingen av algebraisk syntaks (Filloy & Rojano).

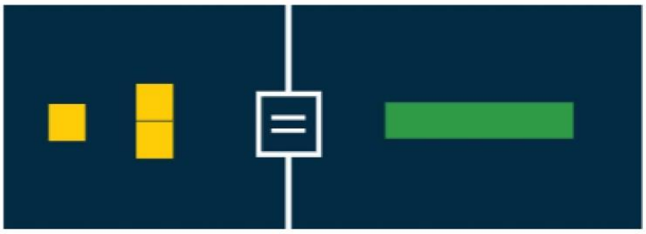
Tanken er da at man ved å ha en gradvis progresjon i abstraksjon og algebraisk resonnering, ikke blir avhengig av de mest konkrete representasjonene når man introduseres for mer abstrakte situasjoner, men kan se sammenhenger med flere forskjellige representasjoner, og gjøre oversettelser mellom dem.

En annen ting man bør tenke på er at elevene bør diskutere hva de forskjellige representasjonene illustrerer og hvordan de relaterer til hverandre. Man bør også designe oppgaver som er vanskeligere når man øker graden av abstraksjon, slik at elevene tvinges til å løse oppgavene algebraisk.

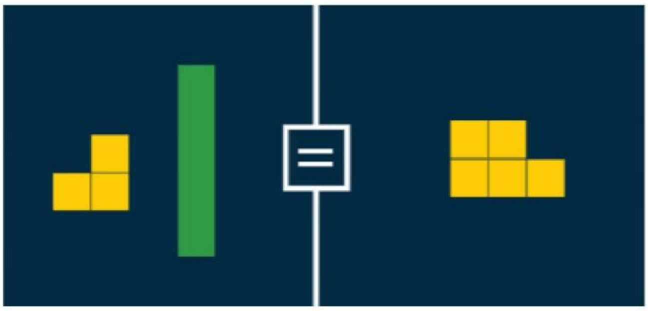
8.4 Vedlegg 4: Oppgaveark andre økt – algebra tiles

Her skal vi finne ut verdien på de grønne stavene. Det hjelper ikke å bruke lengden til å gjette verdien, her må dere finne ut ved hjelp av reglene dere lærte i går med vektene.

Oppgave 1.

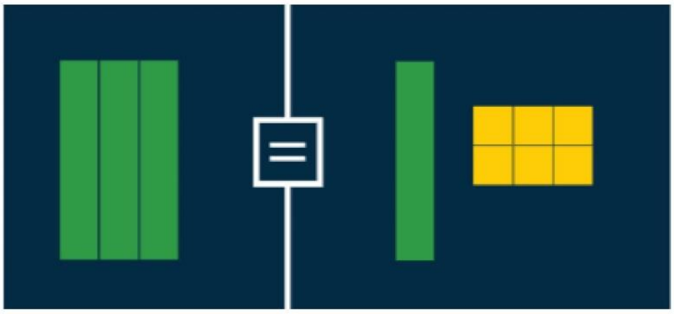


Oppgave 2.



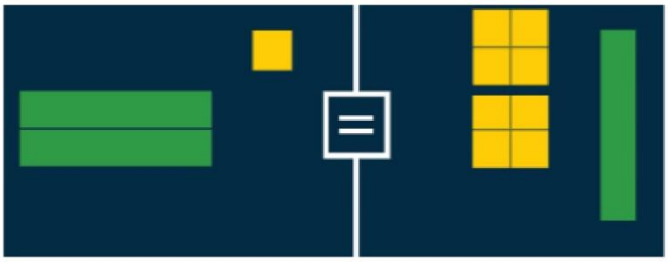
Oppgave 3.

Oppgave 4.

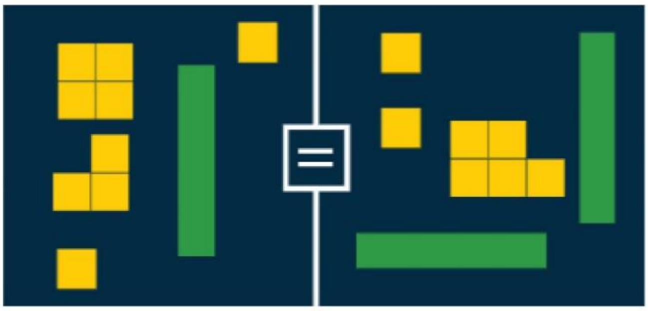


Oppgave 5.

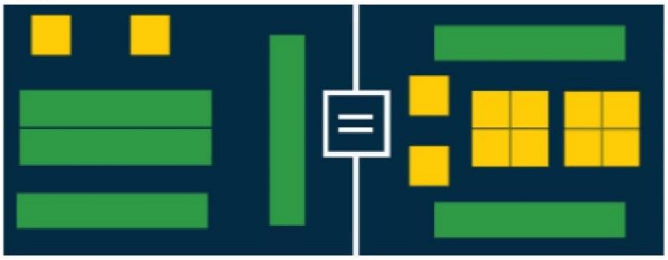
Oppgave 6.



Oppgave 7.



Oppgave 8.



8.5 Vedlegg 5: Oppgaveark tredje økt – symbolske likninger

Finn verdien til bokstavene:

1) $3 + 2 = x$

2) $x + 3 = 5$

3) $2x = 4$

4) $3x = x + 6$

5) $2x + 2 = x + 5$

6) $2x + 1 = x + 8$

7) $x + 9 = 2x + 7$

8) $4x + 2 = 2x + 10$

9) $2x + 10 = 24$

10) $8 + 5x = 33$

11) $3y + 8 = 14$

12) $6 + 30y = 66$

13) $3m – 2 = 58$

14) $7m + 5 = 26$

8.6 Vedlegg 6: Oppgaveark fjerde økt – symbolske likninger

Finn verdien til bokstavene:

1) $3x + 2 = 8$

2) $x + 3 = 7$

3) $2x + 4 = 8$

4) $3x + 4 = 10$

5) $3x + 2 = 2x + 5$

6) $2x + 7 = 3x + 3$

7) $3x + 4 = 2x + 7$

8) $2x + 5 = x + 16$

9) $x + 5 = 3x + 1$

10) $4x + 3 = 2x + 7$

11) $4x + 1 = x + 7$

12) $5x + 2 = 2x + 8$

13) $3x - 22 = 38$

14) $7x + 5 = 33$

8.7 Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel

…	Indikerer at eleven stopper for å tenke eller blir avbrutt
(Tekst)	Beskriver hendelser, bevegelser eller kontekst som ikke blir uttrykt verbalt
[Tekst]	Beskriver hva som skjer mellom transkripsjonene
?	Indikerer at et spørsmål blir stilt

Utelatt fra transkripsjonene:

- Lyder som «ehm» og «hmm».
- Sekvenser mellom transkripsjonene som er indikert med [Tekst], transkriberes ikke ting som blir sagt som ikke er relevant for oppgaven de arbeider med