UiA Universitetet i Agder

Master

Kreativ resonnering i arbeidet med problemløsningsoppgaver

En kvalitativ studie av elever på 2.trinn sin resonnering i grupper under arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romforståelse

MARTINE THORVIK

VEILEDERE

Gjermund Torkildsen
Gro Blomgren

Universitetet i Agder, 2023
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Innlevering av min masteroppgave markerer slutten på en epoke som student, og starten på voksenlivet. Mitt femårige studieløp på lærerutdanningen 1-7 er nå overstått. De fem siste årene har jeg utviklet meg, lært mye, dannet livslange vennskap og blitt rik på erfaringer. Nå er jeg klar for å bruke denne erfaringen og kunnskapen i mitt videre arbeid som lærer. Jeg har blitt inspirert til å bruke mye av det jeg har lært gjennom studien min i videre undervisning i begynneropplæring med matematikk.

Å skrive masteroppgave har vært en berg- og dalbane, med både oppturer og nedturer. Det har til tider vært tungt, slitsomt og perioder med lite søvn. Det har også vært svært givende, lærerikt og verdifullt. Jeg har også lært veldig mye om meg selv, på godt og vondt. Å skrive en masteroppgave alene har gitt enorm mestringsfølelse og en viss stolthet over at dette produktet er mitt. Til tross for at jeg har skrevet alene, vil jeg takke medstudenter for gode samtaler, latter og lange, felles lunsjpauser. Mine medstudenter har bidratt til gode faglige og ikke-faglige diskusjoner, hvor vi har støttet, motivert og hjulpet hverandre gjennom tunge tider.

Arbeidet med min masteroppgave hadde ikke blitt det samme uten bidrag fra elevene som ønsket å stille opp. Uten dem hadde ikke studien blitt den samme. Ikke minst var det veldig spennende å utføre opplegget med elevgruppene og se gjennom datamaterialet i etterkant. En stor takk til andreklassingene som var med på lag.

Jeg vil rette en utstrakt takk til mine veiledere Gjermund Torkildsen og Gro Blomgren ved Universitetet i Agder. De har vært til stor hjelp med hele prosessen, og har vært kritiske og konstruktive for å utvikle min studie til å bli den beste mulige versjonen. Jeg er svært fornøyd og takknemlig for å ha dem som veiledere.

Kristiansand, mai 2023

Sammendrag

Denne studien er en kvalitativ casestudie som omhandler kreativ resonnering i elevers arbeid med problemløsningsoppgaver. Formålet med studien er å finne ut hvilke uttrykksformer elevene bruker, og hvordan disse uttrykksformene bidrar og øker elevers muligheter til å kreativt resonnere. Jeg har valgt å koble kreativ resonnering til problemløsning, fordi elever gjennom møter med problemer er nødt til å tenke nytt, anvende nye strategier, og være kreative når de argumenterer for sine løsningsstrategier. Valget falt mer spesifikt på problemløsningsoppgaver innenfor tematikken romforståelse.

I studien er det brukt deltakende observasjon som metode, med bruk av videoopptak. Datainnsamlingen foregikk i en periode over to dager i startfasen av masterprosjektet. Jeg fikk mulighet til å hente inn data ved en barneskole i Sør-Norge. Analysen er basert på elevenes samlede resultater, i form av verbale utsagn, skannede oppgaveark og min tolkning av elevenes problemløsningsprosess. Analyseverktøyet er utviklet fra egendefinerte kriterier, hvor jeg har sett sammenhengen mellom kreativ resonnering og problemløsningsfasene. Det er utviklet på bakgrunn av mitt teoretiske rammeverk og tidligere forskning.

Resultatene viser at elevene uttrykker sine argumenter og strategivalg om hverandre, og anvender både verbale uttrykk, gestikulasjoner og tegning, i arbeidet med de to problemløsningsoppgavene. Gjennom min aktive deltakelse hadde jeg mulighet til både å utfordre, veilede og motivere elevene gjennom problemløsningsprosessen. Ved at elevene også arbeidet i grupper, fikk de mulighet til å bruke læringsmiljøet til å ytre sine argumenter og resonnementer gjennom å utforske ulike løsningsstrategier og lande ulike konklusjoner. Arbeidet med kognitivt krevende problemløsningsoppgaver er derfor i stor grad egnet for at elever erfarer og utvikler seg innen kreativ resonnering.

Abstract

This study is a qualitative case study that addresses creative reasoning in students' work with problem-solving tasks. The purpose of the study is to identify which forms of expression the students use, and how these forms of expression contribute to and enhance students' opportunities for creative reasoning. I chose to connect creative reasoning to problem-solving because students, through encounters with problems, need to think differently, apply new strategies, and be creative when they argue for their solution strategies. More specifically, I focused on problem-solving tasks related to spatial understanding.

The method used in the study is participatory observation, using video recordings. Data collection took place over a period of two days at the beginning of the master's project, at an elementary school in the South of Norway. The analysis is based on the students' overall results, in the form of verbal statements, scanned task sheets, and my interpretation of the students' problem-solving process. The analysis tool is developed from self-defined criteria, where I have seen the connection between creative reasoning and problem-solving phases. It is developed based on my theoretical framework and previous research.

The results show that the students express their arguments and strategy choices to each other, and use both verbal expressions, gestures, and drawing, in working with the two problem-solving tasks. Through my active participation, I had the opportunity to challenge, guide, and motivate the students through the problem-solving process. By working in groups, the students were able to use the learning environment to express their arguments and reasoning by exploring different solution strategies and reaching different conclusions. Working with cognitively demanding problem-solving tasks is therefore largely suitable for students to experience and develop in creative reasoning.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

I denne studien vil jeg presentere min forskning innen resonnering i arbeid med problemløsningsoppgaver på 2.trinn. Mer spesifikt vil jeg gå inn på elevers muligheter til å kreativt resonnere, og hvordan de uttrykker seg gjennom arbeidet med to problemløsningsoppgaver innen romforståelse. Elevenes arbeid og min aktive deltakelse i observasjonene vil stå sentralt gjennom studien. Videre vil jeg presentere min bakgrunn for studien (1.1), hvor jeg både vil begrunne valg av tema, samt se tematikken i sammenheng med Læreplanverket 2020, og presentere målet for studien. Deretter blir mitt forskningsspørsmål presentert (1.2), hvor jeg legger frem begrepsavklaringer tilknyttet forskningsspørsmålet. Til slutt vil jeg presentere studiens oppbygning (1.3).

1.1 Bakgrunn for studien

Hvordan kan man få elever til å tenke over sammenhenger mellom prosedyrer og de matematiske ideene som ligger bak? Hvordan kan en samtidig få elevene til å argumentere for hvorfor akkurat deres løsningsforslag er riktig, og hvordan kan de bli oppmerksomme på dette? Hvorfor kan ikke elevene bare løse rutineoppgaver for å bli gode i matematikk? Dette er spørsmål jeg stilte da jeg skulle finne ut hva min studie skulle gå i dybden på. Begynneropplæringen i matematikk danner byggesteinene for elevenes videre utvikling i matematikkfaget. Mange elever strever med motivasjon og engasjement i faget, fordi de synes det er vanskelig, eller ikke ser hensikten med det. Derfor er det viktig at elever tidlig utvikler kompetanse for å se sammenhenger mellom hva de gjør og hvorfor de gjør det.

Mange norske elever er avhengig av veiledning fra en lærer for hvordan gå frem for å løse en oppgave, fordi norske klasserom i stor grad er preget av instrumentell læring. Den instrumentelle forståelsen elever utvikler innebærer innlæring av regler og formler, som betyr at eleven vet hvordan de skal løse en oppgave (Skemp, 1978). Likevel har de gjerne ikke forståelse for hvorfor oppgaven løses slik, eller om de underliggende relasjonene mellom stegene de tar og den eventuelle løsningen de lander. Fokuset på instrumentell forståelse kontra relasjonell forståelse har hatt stor plass i barns matematikkundervisning. Dette kan sammenlignes med prosedyrekunnskap kontra begrepsmessig kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986).

Det er mange indikasjoner på at norske elever sjeldent får mulighet til å utvikle sin begrepsmessige eller relasjonelle kunnskap. Derfor har Hiebert og Grouws (2007, sitert i Nosrati & Wæge, 2015) gjennom en analyse av undervisningseffekten på læring, kommet frem til to faktorer som fremmer relasjonell og begrepsmessig forståelse. Den første er at elever må få mulighet til å jobbe med oppgaver hvor de kan diskutere matematiske sammenhenger, stille spørsmål, prøve ut ulike løsningsstrategier og se hvordan problemer bygger på hverandre (Hiebert & Grouws, 2017, s.383, sitert i Nosrati & Wæge, 2015). Den andre faktoren er at elever må streve litt med matematiske ideer, og elevene må gjøre en innsats for å forstå noe hvor løsningen ikke er umiddelbar. For å knytte disse ideene til min studie, valgte jeg å la elevene arbeide med problemløsningsoppgaver. Dette for å øve deres relasjonelle og begrepsmessige forståelse i matematikk. Jeg ønsket også at elevene skulle få mulighet til å resonnere, argumentere og diskutere matematiske ideer og løsningsforslag, og derfor var det hensiktsmessig å velge oppgaver hvor løsningsforslaget ikke var åpenbart.

Elever må lære å både tenke, resonnere og løse problemer på en selvstendig måte, som også krever selvinnsikt (Nosrati & Wæge, 2015). For å lære dette hjelper det ikke at vi kun forholder oss til det tradisjonelle synet om at matematikk i hovedsak består av regler, prosedyrer og algoritmer. Dette er bakgrunn for min studie.

1.1.1 Studiens relevans

Arbeidet med å utvikle den nye læreplanen Kunnskapsløftet 2020 startet allerede høsten 2017, og bygger på Stortingsmelding nr.28 *Fag-Fordypning-Forståelse.* Her står det at «Kjerneelementene i et fag er det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget, og er det mest betydningsfulle faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Meld.St. 28 (2015-2016), s.34). Til tross for at kjerneelementene skal gjenspeile det viktigste i faget, kan det være uklart for en matematikklærer å vite hvordan de skal anvendes i didaktisk arbeid med elevers læring (Andreassen & Tiller, 2021, s.158). Dette støtter tanken om at kjerneelementer er noe en må lære for å mestre faget, men noe som er vanskelig å vurdere elevene i. Min studie vil i hovedsak fokusere rundt kjerneelementene *Resonnering og argumentasjon* og *Problemløsning og utforskning* (Utdanningsdirektoratet, 2020). Også kjerneelementene *Matematiske kunnskapsområder* og *Representasjon og kommunikasjon* er sentrale i min studie. Jeg vil senere i teorikapittelet koble kjerneelementene til annen teori.

1.1.2 Mål med studien

Målet med min studie er å lære mer om hvordan elever utrykker sin forståelse og sin prosedyrekunnskap gjennom arbeid med problemløsningsoppgaver, samt hvordan dette kan knyttes til elevenes kreative resonnering. At jeg får mulighet til å tilegne meg mer kunnskap innen temaene, vil både inspirere videre undervisning og gjøre at jeg utvikler meg som begynnende matematikklærer. Problemløsning og resonnering er store temaer som omfatter mye, tidligere forskning. Jeg har derfor måtte ta valg som innsnevrer det jeg ønsket å finne ut av, og for å forhåpentligvis kunne tilføye litt til forskningsfeltet. I neste delkapittel vil jeg presentere mitt forskningsspørsmål og dets hensikt.

1.2 Forskningsspørsmål og begrepsavklaring

Min studie har tittelen *En kvalitativ studie av elever på 2.trinn sin resonnering i grupper under arbeid med to problemløsningsoppgaver,* og omfatter et forskningsspørsmål:

> «På hvilke måter kommer elevers kreative resonnering til uttrykk gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romlig forståelse?»

Forskningsspørsmålet har som mål å finne ut av hvordan et utvalg andreklassinger uttrykker sin kreative resonnering gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver. For å besvare forskningsspørsmålet har jeg brukt deltakende observasjon med videoopptak. Jeg ser behovet for å avklare hvordan jeg har valgt å definere kreativ resonnering og problemløsning, som videre utdypes i teorikapittelet (2.2 og 2.3).

1. Kreativ resonnering er definert ut fra Lithners (2008) forklaring av sitt analytiske rammeverk, hvor han skiller mellom kreativ og imitativ resonnering. Kreativ resonnering oppstår dersom elevene må tenke nytt, være fleksible med sine strategivalg, argumentere rimelig og forankre argumentet matematisk (s.266).
2. Problemløsning er definert fra teori fra Schoenfeld (1985) og Pólyá (1945), hvor en oppgave anses som et problem dersom løsningen ikke er umiddelbart tilgjengelig for problemløseren.

Sammenhengen mellom kreativ resonnering og problemløsning er dermed at elevene må tenke nytt når de møter et problem, og resonnere seg frem til mulige løsninger på problemet.

1.3 Studiens oppbygning

For å besvare studiens forskningsspørsmål, vil jeg først og fremst presentere det teoretiske rammeverket studien baserer seg på. Teorikapittelet tar for seg sentrale matematiske teorier, og tidligere forskning. Dette danner grunnlaget for analysen og diskusjonen av datamaterialet. Etter teorien er presentert, vil jeg legge frem studiens metode, hvor jeg presenterer forskningsstrategi, -design, -og metoder. Her vil jeg redegjør for hvordan datamaterialet er hentet inn og behandlet, metodiske valg, og presentere analyseverktøy. Jeg vil også vurdere studiens reliabilitet og validitet, og etiske betraktninger. I kapittel fire presenteres mine resultater, som er analysert fra analyseverktøyet som presenteres i kapittel 3.5. I kapittel fem vil jeg drøfte mine resultater ut fra analysen og mitt teoretiske rammeverk, samt tidligere forskning. I kapittel seks vil jeg presentere min konklusjon, samt implikasjoner for videre forskning i kapittel syv.

2.0. Teori

Følgende kapittel vil legge til grunn studiens teoretiske rammeverk. Jeg vil presentere relevant teori og tidligere forskning. Jeg har valgt å dele teorikapittelet inn i seks hoveddeler. I første delkapittel (2.1) presenteres læring i matematikk. Deretter presenteres teori og tidligere forskning tilknyttet problemløsning (2.2) og kognitive krav (2.3). Så legger jeg frem delkapittelet om resonnering (2.4), og hvilke teoretiske aspekter som har relevans for min studie. Siden forskningsfeltet er bredt, har jeg fokusert på Lithners (2006) rammeverk. I fjerde delkapittel presenteres læring i samspill (2.5). Til slutt vil jeg gjennomgå relevant teori tilknyttet de matematiske kunnskapsområdene mine utvalgte oppgaver berører (2.6).

2.1 Læring i matematikk

I følgende delkapittel vil jeg presentere syn på læring i matematikk, med relevans til min studie.

2.1.2 Konstruktivistisk læringssyn

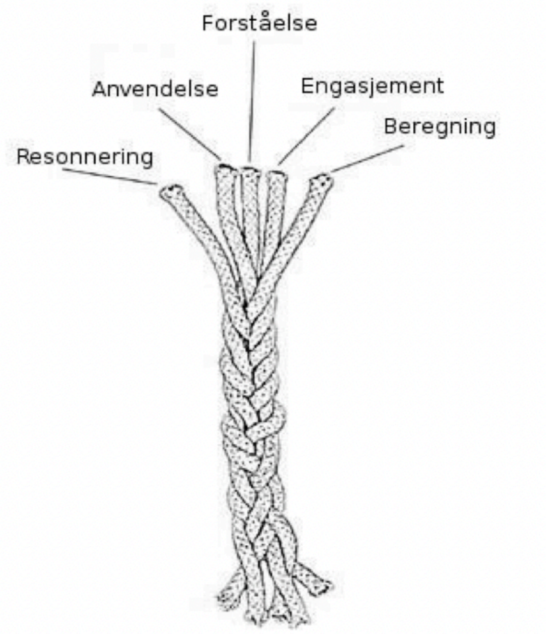
Den konstruktivistiske grunntanken er at man ser på kunnskap som noe som blir konstruert av et individ gjennom aktivitet (Säljö, 2016, s.157). En skiller mellom individualkonstruktivistiske og sosialkonstruktiviste læringssyn, hvor førstnevnte i hovedsak bygger på kognitivistiske tradisjoner, mens sistnevnte har opphav i sosiokulturelle tradisjoner (Säljö, 2016, s.161).

Piaget (1970) sier at dersom en underviser barn for tidlig om noe som selv kunne vært oppdaget på egenhånd, vil barnet hindres i å selv oppdage det og forstå det fullt ut (*sitert i* Säljö, 2016, s.62). Han argumenterer for at tradisjonell undervisning kan ha negativ innvirkning på barns kunnskapsutvikling. Kunnskap konstrueres av individet gjennom aktivt engasjement og meningsskaping, hvor det kognitive apparatet prosesserer og omdanner informasjon. For eksempel kan et barn oppfatte noe og dermed lage et mentalt bilde i hjernen, hvilket er en indre prosess som ikke er synlig for utenforstående, og som i stor grad også er utilgjengelig for barnet selv. Altså er dette aktiviteter som ligger bak det mennesker gjør eller tenker (Säljö, 2016, s.159-160). Det gjør det også vanskelig å få innsikt i personers tanker bak eksempelvis arbeidet med problemløsningsoppgaver. En får innblikk i *hva* de gjør, men ikke alltid *hvordan* kunnskapen konstrueres for den enkelte.

Dewey (u.å, *sitert i* Säljö, 2016, s.160) uttrykker at konstruksjon av kunnskap er sosialt, og at kunnskap oppstår fra handling og kommunikasjon. Utforskende arenaer hvor man bearbeider og løser noe ukjent eller uforståelig innenfor rammen for en aktivitet, er en slik aktiv prosess som inneholder elementer av refleksjon, forsøk på å formulere meningsfulle spørsmål, løsninger og utprøving av løsningsforslag (Säljö, 2016, s.160). Dewey legger dermed vekt på at kunnskapen i et sosialkonstruktivistisk perspektiv, dannes gjennom kommunikasjon i fellesskap.

2.1.2 Matematiske kompetanser

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) har utviklet en trådmodell for matematisk kompetanse. Modellen er en visualisering av de fem matematiske kompetanseområdene som ses på som nødvendig for å bli god i matematikk. De fem områdene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre, som kommer til syne i modellen (se figur 1). Områdene beskrives som resonnering, anvendelse, forståelse, engasjement og beregning (oversettelse av Kilpatrick et.al., 2001, s.5). Hensikten er at elevene utvikler de fem kompetanseområdene parallelt, som gjør at det utvikles en helhetlig matematisk kompetanse som både blir varig og anvendbar. Jeg vil nå beskrive de fem kompetansene.



*Figur 1.*Kilpatrick et.al (2001, s.5) sin trådmodell for matematiske kompetanser, norsk oversettelse.

1. Forståelse: begrepsmessig forståelse *(conceptual understanding)* utgjør evnen til å forstå matematiske konsepter, begreper, prosedyrer - og å se sammenheng mellom disse. Dette kan innebære å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner gjennom eksempelvis problemløsning.

2. Beregning: handler om prosedyrekunnskap *(procedural fluency)*. Det er evnen til å utføre matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt, effektivt og hensiktsmessig. Dette betyr også å kunne anvende riktig prosedyre i riktig situasjon.

De to første kompetanseområdene er nært tilknyttet det Skemp (1978) kaller relasjonell og instrumentell forståelse. Distinksjonen mellom relasjonell og instrumentell forståelse er analogt med forskjellen mellom å vektlegge matematikk som resonnement, og matematikk som prosedyrer og regler (Skemp, 1978).

3. Anvendelse handler om strategisk kompetanse *(strategic competence),* og dermed evnen til å gjenkjenne og formulere matematiske problemer, bruke ulike representasjoner og løsningsstrategier, og vurdere løsningens rimelighet. Dette området er tett tilknyttet problemløsning, og evnen til å være fleksible i valg av strategier.

4. Resonnering (*adaptive reasoning*) beskrives som evnen til logisk tankegang, refleksjon, forklaring og begrunnelse. Dette innebærer å begrunne sammenhenger mellom både begreper, egenskaper og fremgangsmåter. Argumentasjon ses på som en viktig egenskap innen resonnering.

5. Motivasjon i matematikk omhandler også metakognisjon og selvregulering, og evnen til å bruke matematikken til nyttighet *(productive disposition)*. Å være bevisst egne læringsprosesser og å kunne regulere dem, krever utholdenhet og tro på egne ferdigheter, og en interesse for å se på matematikken som hensiktsmessig. En må være motivert, samt kunne reflektere over hensikten av matematikken som anvendes.

2.2 Problemløsning og utforsking

I Læreplanverket 2020 defineres problemløsning og utforsking på følgende måte:

> *«Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Problemløsing handler også om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige.»*
> (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2)

Kjerneelementet fastslår at elever skal vektlegge fremgangsmåter, diskutere dem og dermed kunne løse ukjente problemer. Utforsking er nært tilknyttet problemløsning i den forstand at elever gjerne utforsker strategier i arbeid med problemløsningsoppgaver. Videre vil jeg legge frem tidligere forskning og teori innen problemløsning som har relevans for min studie.

2.2.1 Hva er et matematisk problem?

I matematikkdidaktikken skiller en gjerne mellom matematiske problemer og rutineoppgaver når en snakker om matematiske oppgaver. Sistnevnte omhandler å fremkalle et svar utfra en kjent algoritmisk fremgangsmåte (Schoenfeld, 1985, s.74). Det vil si at det finnes en plan for hvordan oppgaven skal løses. I problemløsningsoppgaver må en selv lage denne planen for fremgangsmåte. Det er omstridt diskusjon mellom det å fremkalle svar versus å løse et problem, fordi det er opp til den enkelte elevs forståelse av oppgaven. For eksempel kan spørsmålet 7*8 være en typisk rutineoppgave for en elev som vet at svaret er 56, og eleven vil derfor bare gjengi svaret. For en annen elev må kanskje regnestykke deles opp, visualiseres i form av konkreter og vil til slutt kunne fremkalle et svar. Felles for de ulike forståelsene av matematiske problem blant matematikkdidaktikere er at relasjonen mellom problemet og problemløseren er viktigst. Det er dermed ikke bare oppgavens egenskaper eller oppfattede nivå som avgjør om det er et problem, men forholdet til den som skal løse det (Geiger & Galbraith, 1998, s.535). Et problem er nødvendigvis ikke et universelt problem for alle elever, men for den enkelte som møter det. Vanskelighetsgraden til et problem er derfor intellektuelt, og ikke bare regneteknisk (Schoenfeld, 1985, s.74).

Når en skal løse et matematisk problem, er målet med handlingen å oppnå en konklusjon. Det vil derfor ikke kunne anses som et problem dersom konklusjonen oppnås uten prøvelse (Pólya, 1981). En matematisk oppgave må kunne oppnå to kriterier for å defineres som et problem: (a) eleven må være både engasjert og motivert å finne en løsning, og (b) løsningen er ikke lett tilgjengelig for eleven gjennom matematiske midler (Schoenfeld, 1985, s.74). Det betyr at dersom problemløseren må tenke på en ny måte for å komme videre i oppgaven, eller for å anvende en løsningsstrategi, anses oppgaven som et problem.

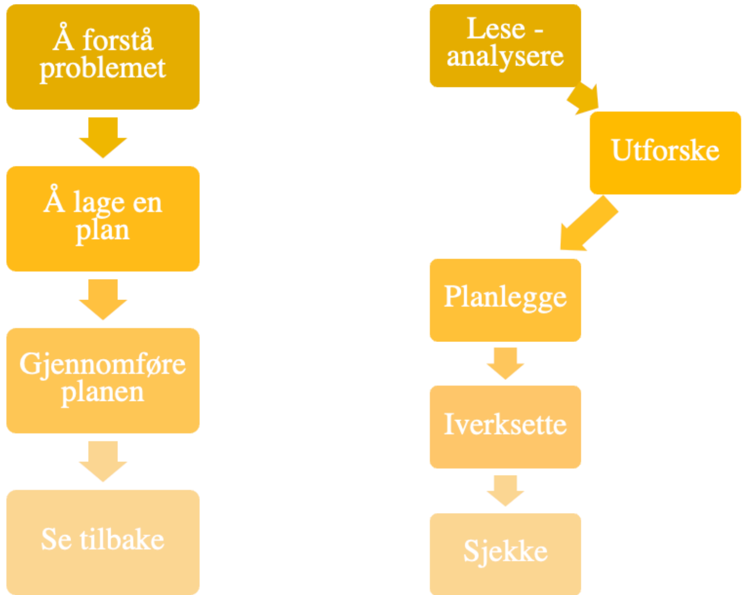
2.2.2 Problemløsning

For barn i førskolealder blir verden gjerne oppfattet som fordomsfri og naturlig, og de har derfor uformelle og ufaglærte strategier som egner seg for å løse hverdagslige problemer de støter på (Björklund, 2012, s.157). Barn kan for eksempel benytte seg av fingre og hender, måle med kroppen eller objekter som vanligvis brukes til andre formål i hverdagen. På denne måten finner barna løsninger ut fra intuitive handlinger. Disse løsningsmodellene tar utgangspunkt i tidligere erfaringer barna har, og intuitive tankeprosesser. Problemløsning fra hverdagen skiller seg gjerne fra den formelle matematiske problemløsningen barna senere møter i skolen (Björklund, 2012, s.157). Studier som sammenlikner barns oppfatning av matematisk problemløsning, viser at barn oftest fokuserer på å prestere et korrekt svar på det problemet de stilles ovenfor (Ahlberg, 1994, 1995). Måten å tilnærme seg et problem er derfor ensidig og fokuserer på å følge et sett bestemte regler eller algoritmer heller enn å være åpen og kreativ. Denne åpne og kreative delen av problemløsningsprosessen er gjerne delen hvor elevene utforsker ulike fremgangsmåter, og prøver og feiler (Schoenfeld, 1985).

Et problem er en situasjon som konfronterer eleven, som krever løsning, og hvor veien til svaret ikke er umiddelbart eller kjent (Posamentier & Krulik, 2009). Det er gjerne oppgaver hvor elevene ikke er blitt presentert for en fremgangsmåte på forhånd (Enge & Valenta, 2016, s.2). På denne måten kan ikke elevene imitere en lærer eller medelevs løsningsforslag, og må være selvstendige i deres tilnærming til problemet. For å løse et matematisk problem må du klare å kunne tenke i flere steg, skifte perspektiv, holde delproblemer i hukommelsen samtidig, og evne å anvende ulike strategier som fører til en løsning på problemet (*Adler, 1996,* sitert i Björklund, 2012, s.157). Problemløsning handler dermed i stor grad om å kunne resonnere rundt logiske forbindelser mellom delproblemer, for å anse problemet som en helhet.

2.2.3 Problemløsningsstrategier

Mye tidligere forskning innenfor problemløsning er basert på Pólyás (1945) arbeid. Blant annet Schoenfeld (1975;1976) har basert sitt arbeid på Pólyas plan for problemløsning. Til tross for at det ikke finnes noe fasit for hvordan en løser problemløsningsoppgaver, finnes det metoder for hvordan en best mulig kan gå frem for å løse dem. I matematikkdidaktisk forskning blir dette referert til som heuristikk. Det defineres slik: *«A heuristic strategy is a technique or suggestion designed to help you better understand a problem – and if you're lucky, solve it as a result"* (Schoenfeld, 1985, s.108). Heuristikk handler om erfaringsbaserte resonnementer, kvalifiserte gjetninger eller intuitiv dømmekraft, som er til hjelp i problemløsningsprosessen (Barak, 2013, s.659). I motsetning til algoritmer eller formelle strategier, vil ikke heuristikk kunne garantere optimale løsninger, men heller kunne fungere som mulige fremgangsmåter til å løse problemet. Jeg vil nå legge frem to ulike heuristiske planer for problemløsning, fra Pólya (1945) og Schoenfeld (1975; 1976; 1985), samt trekke tråder mellom dem.



Figur 2. Sammenligning av Pólyás (venstre) og Schoenfelds (høyre) planer for problemløsning, egen oversettelse og fremstilling.

Pólyá (1945) beskriver problemløsningsprosessen i fire faser. I hver av de fire nivåene introduseres spørsmål som kan være til hjelp i problemløsningsfasene, som heuristiske spørsmål for å hjelpe problemløseren. Denne planen er presentert i en nyere utgave av *How to Solve it* (Pólyá, 2004).

1. Å forstå problemet
2. Å lage en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Det er viktig å anerkjenne at forståelse for problemet er en del av problemløsningsprosessen. I nivå 1 vil forståelse derfor handle om å eksempelvis bryte ned problemet i delproblemer, eller forenkle problemet. Det krever at eleven benytter sin erfaringsbakgrunn både når det gjelder matematiske og språklige forkunnskaper. Elevene må anerkjenne at de har forstått problemet før de går videre til neste nivå, å lage en plan. Noen elever vil forstå problemet relativt raskt, mens andre trenger tid og forstår først problemet gjennom visualisering og konkretisering.

Problemløsning forutsetter at en tenker målrettet, som kan tolkes som Polyas nivå 2, hvor det lages en plan. Derfor må en være oppmerksom på egne tanker og sine omgivelser (Björklund, 2012, s.158). For at elevene skal lage en handlingsplan kreves det en interesse og motivasjon for å finne løsningen, og denne motivasjonen ligger gjerne bak å finne svaret. Å lage en plan for å nå målet er ikke alltid rett frem. Når barn skal løse problemløsningsoppgaver, vil nok ikke denne planleggingen alltid komme til syne. Uavhengig om elevene utrykker seg verbalt eller ikke, vil elevene føre et resonnement om hva som er rimelig å gjøre i situasjonen og hvordan hendelsene i problemet forholdes til hverandre (Björklund, 2012, s.158-159).

Mange vil nok også hoppe over nivå 2, og iverksette planen etter at de har forstått problemet. Dersom de ikke legger en plan, men bare går til nivå 3 hvor de iverksetter, vil nok flere måtte utprøve flere strategier. Elever vil derfor kunne oppleve å måtte gjennomføre nivå 2 og 3 gjentatte ganger, og dermed prøve og feile for å finne riktig fremgangsmåte.

Å kunne se tilbake på prosessen er det siste nivået i Pólyas (1945) plan for problemløsning. Dette handler om at elevene hele tiden må vurdere nivåene i problemløsningsplanen mot det endelige løsningsforslaget (Polya, 2004).

Etter min tolkning av Pólya (1945, 2004) er ikke de fire nivåene en hierarkisk metode der man følger planen steg for steg, men heller en slags veiledende plan for å løse problemer. Det er naturlig at de fire nivåene følger en logisk rekkefølge fra nivå én til fire, hvor siste fase forutsetter at stegene hele tiden repeteres i løpet av prosessen. Det er også naturlig at nivåene gjentas før en til slutt oppnår en konklusjon.

Schoenfeld (1975;1976) har laget en lignende handlingsplan for problemløsning som følger seks nivåer:

1. Lese
2. Analysere
3. Utforske
4. Planlegge
5. Iverksette
6. Sjekke

Nivå 1 og nivå 2 handler om å forstå problemet, fordi elevene først må lese problemet, og deretter analysere problemets innhold for å kunne forstå det. Dette kan sammenlignes med Pólyas (1945) første nivå. Å utforske handler om å kunne prøve ut ulike strategier og fremgangsmåter, uten å nødvendigvis ha et mål eller en plan. Etter elevene har utforsket, kan de gå videre til å planlegge (nivå 4). Dette er i henhold til min tolkning, sammenlignbart med Pólyas (1945) nivå to. Etter planen er satt, kan elevene iverksette (nivå 5) og til slutt sjekke (nivå 6) sine løsninger.

Nivåene skal ikke forstås som et program elevene er nødt til å gjennomføre mekanisk. Det var heller ment til å opptre som en veiledning elevene kunne bruke dersom de sto fast. Planen skulle gi veiledning til å velge mellom passende heuristiske teknikker (Schoenfeld, 1985, s.108). De mest vanlige heuristiske teknikkene involverer å:

- Steg 2 (analysere): *lage diagram/visuell fremstilling, å undersøke spesielle tilfeller, forenkle problemet*
- Steg 3 (utforske): *løse en enklere/tilsvarende oppgave, introdusere hjelpemidler, reformulere problemet*

(Schoenfeld, 1985, s.109, *min oversettelse*).

Det som i hovedsak skiller Pólyás (1945) og Schoenfelds (1985) handlingsplaner for problemløsning, er steget *utforskning* som kommer frem i nivå 3 av Schoenfelds (1985) nivåer. Det handler om å kunne utforske ulike fremgangsmåter, og evne å gå tilbake å prøve en ny retning dersom de sitter fast. Mange elever vil oppleve å bruke lang tid på å lage en plan, gjennomføre planen, og dersom de ikke kommer frem til en løsning, vil de gi opp. Det krever evne til å både revurdere og reversere for å kunne vurdere og utforske nye strategier. Dersom de ikke gjør dette, vil de ikke finne en løsning. Derfor vil utforskningselementet i Schoenfelds (1985) plan gjerne kunne sammenlignes med prøving-og-feiling, før elevene eventuelt legger en strategisk plan for fremgangsmåte. Min tolkning vil ikke bety at Pólyas plan ikke forutsetter at elevene utforsker, men at dette kommer tydeligere frem i Schoenfelds plan. Utforsking er uansett en naturlig del av problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2).

2.2.4 Å ha kontroll over problemløsningsprosessen

Atferdsaspektet ved å løse problemer handler om å kontrollere egen læringsprosess (Schoenfeld, 1985, s.27). Psykologisk kan dette knyttes til metakognisjon, å ha kontroll over egen læring (Flavell, 1979, s.906). Metakognisjon spiller en viktig rolle iblant annet muntlig kommunikasjon, -overtalelse -og forståelse, hukommelse, problemløsning, sosial kognisjon og ulike former for selvkontroll og selvtillit (Flavell, 1979, s.906). Handlinger som viser kontrollnivå i en problemløsningsprosess, dreier seg om elevene evner å se overordnede konsekvenser for utviklingen av en løsning (Schoenfeld, 1985, s.27). Det vil si om elevene har kontroll over beslutninger de tar, eller om de bare prøver ut ulike løsninger uten å tenke over utfallet. Metakognisjon og kontroll over egen læring er også sentralt i elevers mestring.

2.3 Kognitive krav i matematikk

Stein & Smith (1998) skiller mellom oppgaver med høye og lave kognitive krav (s.349). I tabellen under presenteres de fire nivåene, som rangeres fra a-d, hvor nivå (d) er oppgaver hvor det forventes høyest kognitive krav. Eksemplene som presenteres (tabell 1) har ikke stor relevans til min studie, men er oppgavene som presenteres i deres forskning, og benyttes derfor for å gi en bedre forståelse og kontekst over hva de ulike kognitive kravene innebærer (Stein & Smith, 1998, s.348-349).

Oppgaver med lave kognitive krav (lower-level demands)	**Oppgaver med høye kognitive krav (higher-level demands)**
(a) Memorering Eksempeloppgave: hva er formelen for å multiplisere brøk?	(c) Prosedyrer med kobling Eksempeloppgave: Finn $\frac{1}{6}$ av $\frac{1}{2}$. Bruk brøksirkler. Tegn opp svaret ditt og forklar løsningen.
(b) Prosedyrer uten kobling Eksempeloppgave: $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$	(d) Å tenke matematisk Eksempeloppgave: Lag en tekstoppgave hvor du bruker eksempler fra virkeligheten, ut fra denne brøken: $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$ Løs oppgaven uten å bruke brøkregelen, og forklar løsningen.

(*Tabell 1. Stein & Smith, 1998, s.348-349, egen oversettelse*)

Oppgaver med høye kognitive krav innebærer generelt matematisk tenkning, hvor elevene selv må analysere oppgaven og finne aktuelle fremgangsmåter, begrunne sine valg og vurdere om løsningen er gyldig. Dette kan også selvsagt skape usikkerhet hos elevene, fordi det er mange ukjente elementer knyttet til oppgaven (Enge & Valenta, 2016, s.7). Dersom elevene kjenner igjen typen problem eller oppgave, kan eleven muligens umiddelbart kunne anvende riktig metode for å komme frem til riktig svar, gjennom tidligere erfaringer med oppgavetypen (Posamentier & Krulik, 2009, s.2-3). Type oppgaver som følger faste algoritmer og hvor oppgaven krever lite tenkning, har lave kognitive krav. Oppgaver med lave kognitive krav omhandler memorering av formler, regler eller fakta, altså hvor det er liten tvil om hvordan elevene skal ta fatt på oppgavene (Enge & Valenta, 2016, s.3).

Problemløsningsoppgaver har gjerne høye kognitive krav. Her vil elevene være nødt til å anvende brede og generelle strategier for å finne løsninger. Selv om det er en prosedyre som kan følges i oppgaven, kan den ikke følges blindt – og elevene vil derfor kunne utvikle en bedre forståelse av matematiske begreper, prosesser og relasjoner (Enge & Valenta, 2016, s.5, s.7).

I et forskningsprosjekt av Boaler (1998) sammenlignes elevers opplevelse av matematikk i to skoler. Utvalg A fikk oppgaver med lave kognitive krav, og utvalg B fikk oppgaver med høye kognitive krav. Gruppene var tilfeldige, og det var derfor ikke noe nivåforskjell mellom utvalg A og B. Funnene viste at B-elevene betraktet matematikk som et kreativt fag, holdt ut lenger, var mer engasjerte, og fikk bedre resultater både på tester som gikk på standardalgoritmer, og problemer knyttet til hverdagen, enn A-elevene.

Det er gjerne noe utfordringer tilknyttet bruken av oppgaver med høye kognitive krav i undervisningen, spesielt dersom elevenes tidligere matematikkundervisning er preget mye oppgaver med lave kognitive krav med bruk av reprodusering av algoritmer og prosedyrer. Det kan oppstå usikkerhet blant elevene dersom de ikke kan anvende lærerens nylige forklarte fremgangsmåte. Derfor vil elever gjerne spørre om hjelp for å komme i gang, og læreren må derfor motivere til selvstendig arbeid, og holde igjen for ikke å forenkle spørsmålet for mye. Elevene blir ikke vant til å tenke selv, dersom de bare får oppgaver med lave kognitive krav. Dersom oppgaver med høye kognitive krav introduseres for tidlig, kan det virke demotiverende fordi slike oppgaver krever erfaring med nødvendige begreper, relasjoner og en bestemt type tenkning. Dersom elevene ikke har erfaring med slike oppgaver, vil motivasjonen svekkes dersom det krever utholdenhet (Enge & Valenta, 2016, s.13). Læreren er også nødt til å ha erfaring med kognitivt krevende oppgaver, for at oppgaven eller aktiviteten ikke går i alle mulige retninger og blir for svevende og abstrakt for elevene. Elevene er likevel nødt til å prøve og feile, men her kan læreren veilede dem inn på riktig spor gjennom aktiv deltakelse.

2.4 Resonnering

Det finnes mange forståelser og tidligere forskning om hva det innebærer å resonnere. Resonnering i matematikk er derfor komplisert av det faktum at det finnes implisitte antagelser om at det kun finnes én felles forståelse om resonnering (Yackel & Hanna, 2003, s.228). I forskningen til blant annet Styliandes (2008) omtales resonnering og bevis sammen. Her er hensikten å identifisere mønster, anta, føre et argument med bevis og et argument uten bevis (Styliandes, 2008, s. 10). I forskningsartikkelen blir likevel ikke resonnering tydelig definert, men heller sett i sammenheng med bevisføring. Duval (1998) foreslår at resonnering ses i sammenheng med tidligere, erfaringsbasert kunnskap for å gi ny innsikt i ukjente problemer. Dette utgangspunktet skal kunne brukes til å formulere spørsmål, løsningsstrategier, teste generaliseringer, og kunne begrunne hvorfor.

For å samle forståelsen av resonnering har Jeanotte og Kieran (2017, s.2) formulert en helhetlig forståelse av resonnering som knytter sammen ulike prosesser, med hensikten om å komme til en konklusjon. Disse prosessene oppsummeres som formodning, generalisering, eksemplifisering, bevis, argumentering og overbevisning. Disse begrepene benevnes gjerne Implisitt om hverandre innen forskningsfeltet, uten særlig refleksjon rundt hvordan de hører sammen. Blant annet i Kunnskapsløftet 2020 nevnes de to begrepene *resonnering og argumentasjon* som ett samlet kjerneelement. Ifølge læreplanen omtales de to begrepene slik:

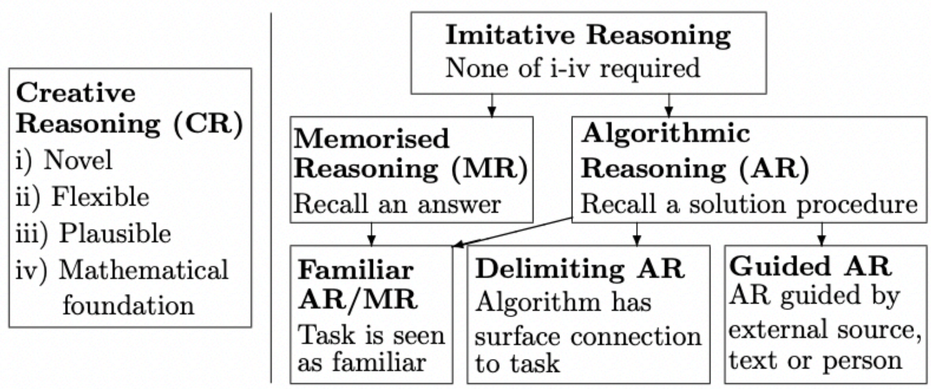
> *«Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker(...) Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige»* (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 3).

Min tolkning av kjerneelementet, er at argumentasjon og resonnering er tett sammenflettet, spesielt siden begrepet resonnering brukes i definisjonen av argumentasjon. I annen forskning (Lithner, 2006), omtales argumentasjon som en del av resonneringsprosessen. For å få en klarere forståelse av de to begrepene, vil jeg videre presentere Lithners (2006) rammeverk for resonnering.

2.4.1 Lithners rammeverk

Bakgrunnen for Lithners (2006) rammeverk har forståelse i en bred definisjon av resonnering. Det vil si at det ikke tar for seg formelle bevis eller mål om generalisering i konstruksjonen av et argument. Rammeverket er utviklet for å kunne forske på og kategorisere elevers resonnementer, og vil derfor gi innsikt i hvorfor elevene resonnerer slik de gjør. Som nevnt tidligere er både resonnering og forståelse to av de fem matematiske kompetanseområdene som utgjør breddekunnskap i matematikk (Kilpatrick et.al., 2001, s.5). Lithners (2006) rammeverk tar for seg disse to kompetanseområdene.

Rammeverket skiller mellom kreativ og imitativ resonnering. I korte trekk er kreativ resonnering knyttet til ikke-rutinemessige problemløsningsoppgaver. Det betyr at elevene må tenke nytt, anvende fleksible strategier, og argumentere på en troverdig måte, gjerne med et argument som er matematisk forankret (Lithner, 2006). Imitativ resonnering oppstår når elevene ikke møter kriteriene til kreativ resonnering, som vist i figur 3. Denne typen resonnement kan deles inn i memorert resonnering (MR) og algoritmisk resonnering (AR), og i videre i underkategorier familiær AR/MR, avgrenset AR og veiledet AR. I memorert resonnering vil resonnementet oppstå i form av å bare gjengi et svar, mens i algoritmisk resonnering vil det gjengis en løsningsprosedyre. Dette er typisk for rutineoppgaver. Grunnlaget for at delen av rammeverket som omfatter imitativ resonnering er større, er fordi forskningen innen dette feltet er mer omfattende og utviklet enn innenfor kreativ resonnering (som er synlig gjennom figur x).



Figur 3. Lithners rammeverk (2006) for kreativ og imitativ resonnering.

Jeg finner sammenheng mellom rammeverket og begrepene relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1978), hvor målet er å oppnå en relasjonell forståelse i matematikk. Målet er også at elevene skal kreativt resonnere. Ut fra egen tolkning av rammeverket, kan det tenkes at oppgaver med høye kognitive krav enklere tilrettelegger for at kreative resonnement oppstår, mens oppgaver av lave kognitive krav legger opp til imitative resonnement (Stein & Smith, 1998).

2.4.2 Kreativ resonnering

Det finnes ikke en enkel måte å definere kreativitet i matematisk forskning. Matematikk forbindes ikke med kreativ tenkning på samme måte som i eksempelvis praktiske, estetiske fag. Likevel er det to måter begrepet *kreativitet* gjerne blir definert til i matematikken; (1) en *tankeprosess* som skiller seg ut og avviker fra fikserte ideer, eller (2) et *produkt* som ses på som kreativt, som eksempelvis et kunstverk (Haylock, 1997). Kreativitet kan også ses på som det å ha dyp og fleksibel kunnskap som er bearbeidet over tid, i stedet for å komme på umiddelbare tanker (Haylock, 1997)

Kreativ resonnering legger stor vekt på resonnement som en begrunnelsesmåte, i den forstand av at å faktisk kommunisere sine matematiske ideer er viktigere enn hvordan ideene begrunnes (Lithner, 2006, s.5). Kreativ resonnering er mest fremtredende gjennom problemløsningsoppgaver, da dette krever at en tenker utenom innlærte algoritmer og rutiner. Det som i hovedsak skiller kreativ resonnering fra imitativ resonnering, er kreativitet og plausibilitet. Resonnementene vil nemlig oppstå som et produkt av kreativ matematisk tenkning, og derfor skille seg fra imitative resonnement (Bergqvist et.al., 2008). For å kalle et resonnement kreativt, må det oppfylle følgende kriterier: en må tenke nytt, være fleksibel, rimelig *og* matematisk forankre sitt resonnement. Kriteriene følger ikke en hierarkisk struktur fordi hendelsene ikke trenger å forekomme etter hverandre. Resonnementet sees heller på i helhetlig sammenheng.

Rimelighet

Felles for mye av den tidligere forskningen, er at resonnering gjerne må forankres i bevis og matematisk argumentasjon. I tidligere forskning innen resonnering, skiller en prinsipielt mellom gjetning og bevis (Pólya, 1945). Dette er en strengere definisjon av resonnering. For å best kunne knytte resonnering til mitt forskningsfelt, har jeg derfor valgt å ta utgangspunkt i et bredere perspektiv. Dette omtales som rimelig, eller sannsynlig resonnering, hvor en skiller mellom fornuftige og mindre fornuftige gjetninger (Pólya, 1945, s.5-6). Plausibel resonnering er mer knyttet til logikk enn formelle bevis. Et resonnement kan dermed være ukorrekt, men logisk for den som resonnerer (Lithner, 2008, s.253). Å ha en logisk tankegang trenger ikke nødvendigvis å basere seg på formelle bevis. Derfor er ikke resonnering det samme som bevisføring. Resonneringskompetanse handler om evnen til å forklare og begrunne sine valg på bakgrunn av den kunnskapen og dataene som er tilgjengelig for den som resonnerer (Kilpatrick et.al., 2001, s.5).

Matematisk forankring

Et sentral kriterie ved kreativ resonnering er at resonnementet er matematisk forankret. Dette betyr ikke at elevene må bruke matematiske notasjoner og ordforråd gjennom argumentene sine. Det vil heller bety at strategivalgene og argumentene som kommer til syne, på ett vis er forankret i noen matematiske egenskaper (Lithner, 2006, s.8). Balacheff (1988, *sitert i* Lithner, 2006, s.8) skiller mellom to ulike overbevisninger. Pragmatisk bevis handler om å kunne vise hvorvidt et resultat stemmer fordi «det fungerer». Slike bevis blir gjerne godtatt, fordi den som løser oppgaven gjerne selv overbevist om at løsningen er korrekt. Den andre formen for bevis blant elever er konseptuelle bevis. Det handler i større grad om å begrunne hvorfor det virker, og være nærmere en sannhet. Konseptuelle bevis er mer sofistikerte enn pragmatiske bevis (Balacheff, 1988). Likevel er nok pragmatiske bevis det som i størst grad kan forventes blant elever på småtrinnet. Det må vurderes hvilke erfaringer som kreves og hvilke matematiske egenskaper som er underliggende i problemet elevene skal løse. Derfra kan det vurderes i hvilken grad elevene er i stand til å forankre sitt argument matematisk.

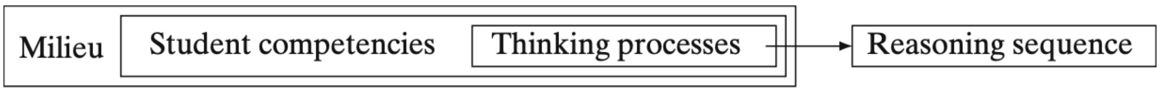
For at elever skal være delaktig i egen læreprosess og evne å utvikle kreativ resonneringskompetanse, er det viktig at elevene selv får utforske og prøve ut fremgangsmåter og løsningsstrategier, til tross for at læreren har en forutbestemt oppfatning av problemet (Lithner, 2008, s.271). Her kan det forventes en kollisjon mellom det læreren ønsker at eleven skal finne ut, og lærerens ønske om at eleven skal klare det selv. Dette vil jeg gå nærmere inn på i neste delkapittel.

2.5 Læring i samspill

Det utrykkes i overordnet del at elever både «tenker, erfarer og lærer i samspill med andre gjennom læringsprosesser, kommunikasjon og samarbeid» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s.15). Også resonnering forutsetter at elever samspiller i et læringsmiljø (Lithner, 2008, s.256).

2.5.1 Å være delaktig i sosialt fellesskap

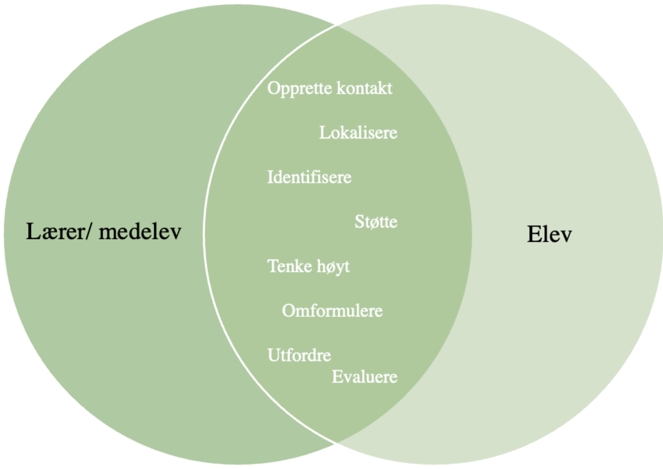
Å være både barn og voksne i et sosialt fellesskap innebærer at en ubevisst eller bevisst inntar en rolle, gjerne situasjonsbasert (Solomon & Black, 2008, i Hodgkinson & Mercer, 2008). Dette gjelder også for elever i klasserommet, eller som deltakende i mindre grupper. Noen elever vil naturlig være synlige ledere, enten sosialt eller faglig, eller på begge arenaer. Noen vil delta mindre i eksempelvis klasseromsdiskusjoner. Muntlig aktive elever vil gjerne utforske, stille spørsmål, forme hypoteser, resonnere og argumentere for og mot i diskusjoner (Solomon & Black, 2008, i Hodgkinson & Mercer, 2008). Slike elever ses gjerne på som en ressurs for læreren, men kan også være det for medelever, på den måten at de utfordrer miljøet. Å delta i slike diskusjoner kan både fremme forståelse, samt evnen til å resonnere og argumentere. Læringsmiljø er i følge Lithner (2008) utgangspunktet for god resonneringskompetanse (se figur 4). Det betyr at for at resonneringskompetanse skal få mulighet til å utvikle seg, må det være tilrettelegges for et læringsmiljø hvor elevene får lov til å resonnere sammen.



Figur 4. Opphavet til resonnering (Lithner, 2008, s.256).

Resonnering vil gjerne forekomme dersom en skal argumentere for en bestemt fremgangsmåte, som sjeldent foregår uten andre til stede. En av de sentrale aspektene ved Brosseaus (1997) didaktiske forskning, er delegeringen av ansvar i problemløsningen (*sitert i* Lithner, 2008, s.271). I fasen hvor eleven leser problemet, forstår det, og iverksetter en strategi, må læreren gjerne avstå å komme med forslag. Dette kalles en adidaktisk situasjon (Brosseau, 1997, *sitert i* Lithner, 2008, s.271). Likevel kan læreren være delaktig i elevenes resonneringsprosess, uten å prøve å fremkalle en korrekt måte å løse problemet.

Det finnes likevel måter læreren kan involvere seg i elevenes problemløsningsprosess. Dette kommer frem den utforskende samarbeidsmodellen. Utforsking er en del av problemløsningsprosessen, og jeg har derfor tatt utgangspunkt i denne modellen for dialog (se figur 5).



Figur 5. The Inquiry Co-operation Model (Alrø & Skovmose, 2003, s.13-15, egen oversettelse og fremstilling).

Å være i dialog gjennom en problemløsningsprosess handler om hvordan en lærer eller en medelev kommer i kontakt med andre elever for å både utforske ulike løsninger og identifisere perspektiver på problemet (Alrø & Skovmose, 2003, s.13-15). Dersom elever kommuniserer sine forslag og forståelser, vil det kunne bidra til en fellesskapsfølelse rundt prosessen. Omformulering går ut på å repetere utsagn, gjerne i et forsøk for å forstå hverandre, og er en viktig del av kommunikasjonen i prosessen. Her vil en også kunne utfordre og evaluere hverandre, gjennom å skyve problemet i en ny retning, stille utfordrende spørsmål, eller utfordre eleven til å skifte perspektiv. Evalueringen handler i større grad om å gi konstruktive tilbakemeldinger, støtte eller ros underveis og ved slutten av en problemløsningsprosess (Alrø & Skovmose, 2003, s.13-15)

2.5.2 Resonnering i grupper

Det kan være vanskelig å uttale seg muntlig i en helklassediskusjon, og det er ofte her elever faller bort. Derfor kan læreren tilrettelegge for miljø hvor elevene får øvd på sin resonneringskompetanse i mindre grupper. Liljedahl (2021) argumenterer for at gruppering av elever for faglige årsaker, generelt følger én av tre begrunnelser: pedagogikk, produktivitet eller ro (s.39-40). Basert på tidligere forskning hevder han derfor at de pedagogiske grunnene for at læreren enten danner homogene eller heterogene grupper, er for at elevene kan eller skal *lære av hverandre*, basert på deres evner, utholdenhet eller vaner. Den andre grupperingsårsaken Liljedahl (2021) fant gjennom forskningen, *produktivitet*, omhandler hvorvidt læreren arrangerer gruppen slik at det blir gjennomført mest effektivt arbeid, for eksempel gjennom å slå sammen en sterk leder med litt faglig svakere elever. Til slutt innebærer det *å skape ro* at læreren på enkeltvis setter sammen grupper for å atskille venner eller forstyrrende elever, fordi slike grupperinger gjerne skaper mindre produktivitet (s.39-40). For å øve resonneringskompetansen, spesielt på småtrinnet, kan det være hensiktsmessig å danne heterogene grupper. Dette kan enten være på bakgrunn av matematiske ferdigheter, muntlige ferdigheter, eller sosiale ferdigheter. På denne måten kan elevene lære av hverandre, og ikke bare på egenhånd.

2.6 Matematiske kunnskapsområder

I dette delkapittelet vil jeg ta for meg de to matematiske kunnskapsområdene som i hovedsak belyses gjennom mine to problemløsningsoppgaver: areal og romforståelse. De valgte oppgavene presenteres i kapittel 3.2.2

2.6.1 Areal

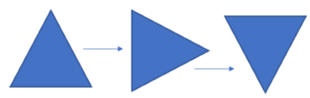
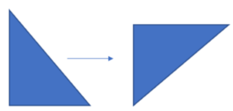
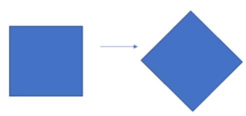
Areal er måling av størrelsen på en todimensjonal flate og mengden plass innenfor grensene av denne flaten (Clements & Sarama, 2021, s.260). Arealkunnskap handler også om evnen til å sette sammen og bryte ned former og figurer. Ifølge en progresjonstabell som viser barns tidlige utvikling i henhold til former, skal barn i femårsalderen kunne sette sammen former for å danne et bilde, og bruker gjerne prøving og feiling. Det vil si at barna baserer formens plassering i figuren på formens generelle egenskaper, for eksempel at «det er et rektangel», eller gjennom vurdering av formens sidelengder (Clements & Sarama, 2021, s.236). Litt senere i utviklingen vil noen barn komponere figurer ved en forventning om at formen passer, og vil vurdere både vinkler, sidelengder, rotasjon og vending med hensikt om at formen skal plasseres riktig (Clements & Sarama, 2021, s.238).

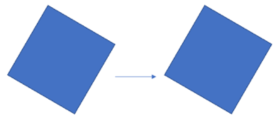
2.6.2 Romlig visualisering

Romlige bilder er mentale representasjoner av objekter fra virkeligheten, slik det oppstår i hodet til den enkelte. Denne interne representasjonen skjer gjennom fire prosesser: å frembringe et bilde, å studere bilde for å svare på spørsmål, å opprettholde et bilde i hode i tjeneste for en annen mental operasjon, og å transformere et bilde, for eksempel til papir

(Clements & Sarama, 2021, s.165). Romlige visualiseringsevner handler om å frembringe og manipulere mentale bilder, som inkluderer flytting, matching, eller en kombinasjon av dem (Clements & Sarama, 2021, s.165). En visualisering i hode til den enkelte elev, kan kommuniseres til andre gjennom å frembringe bildet på papir eller skjerm, gjennom gestikulasjoner eller muntlig forklaring. For eksempel kan eleven danne et mentalt bilde i hodet av en geometrisk form, bevare formen, og søke etter formen skjult i en mer kompleks figur (Clements & Sarama, 2021, s.165). Disse romlige visualiseringsferdighetene er en grunnpilar for å for eksempel kunne løse problemløsningsoppgaver, hvor flere mentale bilder må bevares samtidig. Under har jeg fremstilt barns utvikling innen romforståelse.

Tabell 2. Barns utvikling innen romforståelse. Basert på tidligere studier av Clements & Sarama, 2021, s.183-184, egen oversettelse.

Alder	Utviklingsprogresjon	Eksempel
5 år	**Begynnende skyver, flipper og dreier.** Bruker riktige bevegelser styrt av intuisjon, men ikke alltid nøyaktig når det gjelder retning og størrelse.	Vet at en form kan flippes for å matche en annen form, men flipper den kanskje feil vei. 
6 år	**Skyver, flipper og dreier.** Utfører horisontale og vertikale rotasjoner, ved å se for seg mentale operasjoner. De kan forestille seg bevegelsen og resultatet mentalt.	Vet at en form må snus 90 grader til høyre for å passe inn i et puslespill. 
7 år	**Diagonal flytter.** Utfører diagonale skyvninger og flipper, samt utfører alle bevegelser fra tidligere nivåer.	Vet at en form må flippes på skrå, 45 grader, for å passe et puslespill. 

8 år	**Mentale bevegelser**. Forutser hvordan resultatet blir etter mentale forflytninger av former/bilder (hvilken som helst retning eller antall).	Vet at hvis en f.eks. snur en form 120 grader, vil den falle over en annen brikke. 

5.6.3 Representasjoner

Det finnes ulike måter å uttrykke seg matematisk, og en *representasjon* defineres som noe som står for noe annet (Hana, 2014, s.131). Innen matematikkdidaktisk forskning er det fokusert på at en kan forstå et matematisk objekt gjennom å både kunne gjenkjenne ulike representasjoner av det, omforme en gitt representasjon av objektet fleksibelt, og kunne forflytte seg mellom ulike transformasjonstyper (Lesh, Post & Behr, 1987, *sitert i Hana, 2014, s.131*). Forskningslitteraturen skiller i hovedsak mellom to representasjonsformer:

1. Interne representasjoner er de kognitive bildene som dannes av objekter eller prosesser
2. Eksterne representasjoner kan uttrykkes fysisk, og benyttes dermed i kommunikasjon mellom mennesker. Dette kalles også semiotiske representasjoner (Hana, 2014, s.131-132).

Ulike eksterne representasjoner kan være gjennom gestikulering, skissering av diagrammer eller bilder eller med muntlige uttalelser. En studie av Johansson et.al. (2014) illustrerte viktigheten av at forholdet mellom verbalt språk, gestikulasjoner og konkrete objekter gjerne henger sammen med barns forklaringer.

3.0. Metode

I følgende kapittel vil jeg redegjør for valg av forskningsmetoder som ble brukt til innsamling av data, utvalg av informanter og datainnsamlingsprosessen. Hvordan datamaterialet har blitt behandlet og analysert vil også bli redegjort for i metodekapittelet. Til slutt vil jeg diskutere styrker og svakheter ved metoden, reliabilitet og validitet ved studien min, og etiske overveielser og hensyn.

3.1 Forskningsstrategi og forskningsdesign

Min studie er basert på et konstruktivistisk læringssyn, hvor hovedteorien går ut på at elevene må være aktive deltakere for å tilegne seg kunnskap (se kapittel 2.1.1). Forskningen min kan dermed også plasseres innenfor det konstruktivistiske paradigme. Perspektivet ser på den sosiale virkeligheten som noe i stadig endring og utvikling, hvor mennesker må handle og samhandle for å skape endring over tid (Postholm & Jacobsen, 2018, s.49). Epistemologi handler om forholdet mellom forskere og forskningsdeltakere, hvor det i konstruktivistisk perspektiv opprettes et nært samarbeidsforhold mellom alle deltakere av studien i konstruksjonen av kunnskap (Postholm & Jacobsen, 2018, s.91).

3.1.1 Kvalitativ studie

I forskning kan en bruke både kvalitative forskningsmetoder, kvantitative forskningsmetoder, eller en blanding, som kalles mixed methods. Det vanligste skille mellom kvantitative og kvalitative forskningsmetoder er at førstnevnte gjerne behandler tallmessige, målbare data, som deretter behandles gjennom statistiske analyser, mens kvalitative metoder brukes til å fange opp sosiale fenomener og menneskelig atferd (Postholm & Jacobsen, 2018, s.89). Begge metoder har styrker og svakheter en må veie for og mot, for at metoden best mulig skal kunne besvare forskningsspørsmålet. Min studie har en kvalitativ tilnærming, ettersom intensjonen er å forstå og beskrive elevers uttrykksformer og hvilke betydninger disse har for resonnering. Det kan ikke gis ved statistiske målinger. Mitt mål som kvalitativ forsker er dermed å prøve å forstå og løfte frem elevers uttrykk i sammenheng med deres egne livsverdener og erfaringer. Oppmerksomheten i min forskning være rettet mot deltakernes forståelser i samspill med eget perspektiv som forsker (Postholm & Jacobsen, 2018, s.90).

3.1.2 Casestudie

Metodologisk er mitt studiedesign en enkeltcasestudie. Det handler om å forstå hva som skjer innenfor en spesiell kontekst. Creswell (2013) beskriver casestudier som studier av «bounded systems», da enkeltcasen er avgrenset i tid og rom. For å best mulig besvare problemstillingen var det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i en case i skolen. Jeg har i mitt tilfelle sett på et utvalg andreklassingers arbeid i grupper med problemløsningsoppgaver. Casestudien ses i sammenheng med tidligere empiri og teori for å besvare forskningsspørsmålet.

Til tross for at analysen er gjort på tvers av ulike grupper, vil ikke det metodisk sett gå så langt som å kalle det komparativ casestudie. Jeg sammenligner funn fra ulike grupper, men det er likevel ikke det samme som å sammenligne flere caser.

3.2 Utvalg

I følgende delkapittel vil jeg presentere utvalg av deltakere, samt utvalget av oppgaver jeg har brukt i min studie, med begrunnelser.

3.2.1 Utvalg av deltakere

Mitt utvalg av deltakere for studien, er 15 andreklassinger ved en barneskole i Sør-Norge. Jeg søkte om tillatelse fra rektor ved en utvalgt skole om å utføre mitt forskningsprosjekt innen begynneropplæring matematikk. Deretter ble jeg satt i kontakt med lærerne på andretrinn som ga meg tillatelse til å undersøke elever ved trinnet, hvor gruppen totalt bestod av omtrent 35 andreklassinger. Deretter ble informasjonsskriv og samtykkeskjema sendt hjem i postmappen til alle elevene, slik at både foreldre og elever kunne velge hvorvidt de ønsket å samtykke til prosjektets deltakelse. Jeg satt en frist på at jeg ønsket svar innen to uker, og fikk da tilbake 16 elever som samtykket til både videopptak og lydopptak, med foreldretillatelse. Min studie hadde ikke som mål å fastslå et representativt utvalg, da jeg ikke skulle bruke dataene til å si noe om klassen generelt. Da jeg skulle samle inn data, var én av elevene syke, og dermed ble det totale utvalget på 15 elever.

Tidligere hadde jeg vært litt i kontakt med både lærere og elever ved trinnet, som gjorde at jeg hadde noe kjennskap til dem fra tidligere. Det kan bety at elevene også følte seg tryggere på meg som deltakende i studien. Jeg hadde til tross for dette, ikke god nok kjennskap til elevenes faglige bakgrunn i matematikk eller sammensetningen i elevgruppen til at jeg selv ønsket å gruppere dem. Derfor var det hensiktsmessig at lærerne på trinnet satt sammen fem grupper med tre elever. Jeg ønsket meg heterogene grupper med hensyn til ulik faglig bakgrunn, slik at noen grupper ikke ble utelukkende sterke eller svake i matematikk. Liljedahl (2021, s.40) tilføyer gode argumenter for hvorfor heterogene grupper er bedre egnet for å oppnå gode resultater, som for eksempel at elevene kan eller skal *lære av hverandre*, basert på deres evner, utholdenhet eller vaner. På bakgrunn av dette satt lærerne ved trinnet sammen fem blandede grupper for meg. Jeg har gitt elevene pseudonymer for å anonymisere. I kronologisk rekkefølge for gjennomføring er gruppene kalt gruppe A, B, C, D og E. Elevene i gruppe A har fått A-navn, og tilsvarende prosess er gjort for alle grupper.

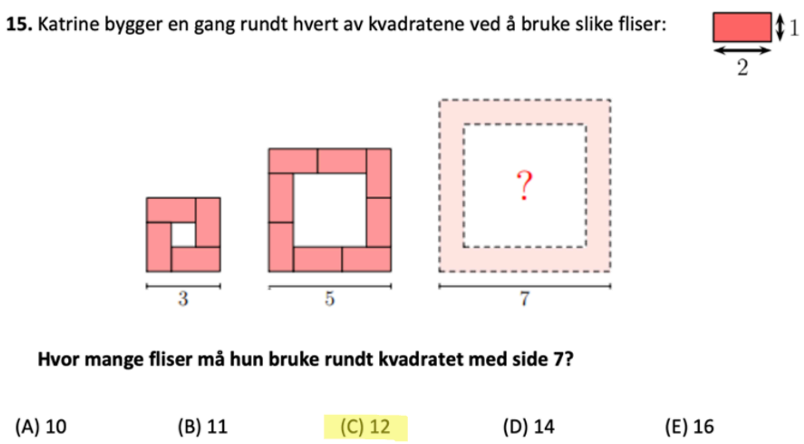
3.2.2 Utvalg av oppgaver

Etter at utvalget var bestemt til å være andreklassinger, startet utvalget av passende problemløsningsoppgaver som kunne passe aldersgruppen. Et annet kriterium var at oppgavene skulle ha potensiale til å besvare mitt forskningsspørsmål. Derfor ble oppgavene valgt på bakgrunn av muligheten til å uttrykke kreativ resonnering, hvor det ikke var noe åpenbar algoritmisk fremgangsmåte, eller en enkel måte å gå frem for å løse oppgaven. Problemløsningsoppgaver kan også kategoriseres som kognitivt krevende (kobling til kapittel 2.2.4). Valget falt på tre oppgaver fra Kengurukonkurransen, hvor kun to er utvalgt til analysen. Jeg vil nå legge frem valg av oppgaver, løsningsforslag og utvalg for datamaterialet til analyse.

Oppgavene fra Kengurukonkurransen er en årlig internasjonal problemløsningskonkurranse fra 4.-10. trinn (Matematikksenteret, 2022). Kengurukonkurransen deler inn oppgavene i fire kategorier: Precolier (1.-3.trinn), Ecolier (4.-5.trinn), Benjamin (6.-8.trinn) og Cadet (9.-10.trinn). Oppgavesettet Precolier 1.-3. er ikke med i den offisielle konkurransen, men er et utarbeidet oppgavesett for de yngste elevene. Det tilrettelegger for mindre oppgavetekst, samt mer bilder og figurer, enn Kenguruoppgaven for de eldre elevene. Oppgavesettene har variert vanskelighetsgrad, og er spesielt egnet problemløsningsoppgaver, samarbeid og diskusjon (Matematikksenteret, 2022). Det understrekes at hensikten er å stimulere matematikkinteressen, og at elevene ikke skal få følelsen av at dette er noe de bør kunne, men at oppgavene skal vekke interesse og nysgjerrighet (Matematikksenteret, 2022). Matematikksenteret beskriver oppgavene som motiverende, og er satt inn i kontekst for å vekke engasjement hos elevene. Det foreligger mye potensiale i selve oppgaveformuleringen, både gjennom bruk av illustrasjoner, svaralternativer og mulighet for å bruke konkreter og fremstilling av representasjoner underveis i prosessen. Det beskrives videre at elever flest klarer å svare på oppgavene med støtte av ulike hjelpemidler (Tømmerdal, 2022).

Jeg vil nå legge frem de tre oppgavene, som jeg selv har navngitt for å sette oppgaven inn i kontekst. Oppgavene vil bli presentert i samme rekkefølge som elevene fikk dem utdelt. I selve analysen ble én oppgave valgt bort, og jeg vil begrunne dette valget under presentasjon av oppgavene. Minimale justeringer som er gjort, er tatt med i beskrivelsen av oppgavene.

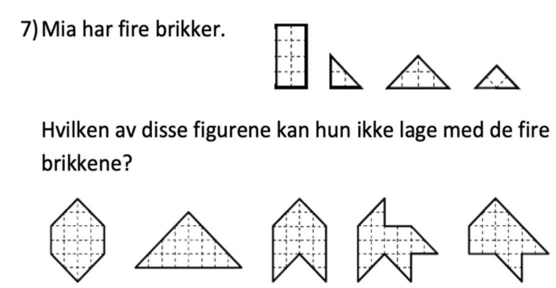
Oppgaven «Muren»



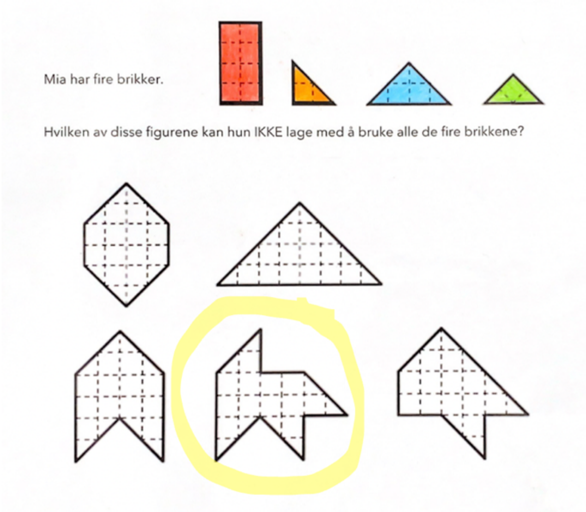
Figur 6. Oppgave hentet fra Precolier 1-3 (2022), oppgave 15. Ingen endringer i fremstilling av oppgaven. Riktig svar er markert i gult for å synliggjøre. Markeringen var ikke med i elevenes oppgaveark.

Oppgaven jeg har valgt å kalle *Muren* er en problemløsningsoppgave som handler om figurtall, hvor elevene må finne ut hvordan de kan finne neste kvadrat i rekken. Oppgaven handler om å oppdage mønster, løse figurtall og multiplikasjon. Jeg valgte i utgangspunkt oppgaven i henhold til at det kunne vært spennende å undersøke hvilke uttrykksformer elevene valgte å bruke, da oppgaven gir gode muligheter for å ta i bruk konkretisering som Lego eller Numicon. Likevel ble oppgaven valgt bort i analysen av elevresultater, da den ikke i like stor grad ga mulighet til kreativ resonnering. Dersom elevene umiddelbart oppdaget mønsteret i tallene under figurene, eller mønsteret i økningen av antall fliser, var det enkelt å kun fremkalle et svar. Oppgaven ga ikke like gode muligheter for utprøving av ulike strategivalg, ulike løsningsforslag eller passet under temaet romforståelse i samme grad som de to andre oppgavene.

Oppgaven «Mias brikker»



Figur 7. Oppgaven slik den ser ut fra Kengurukonkurransen (2014), Precolier 1-3, oppgave 7.

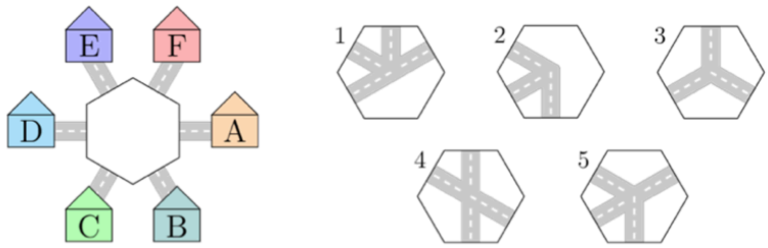


Figur 8. Oppgaven slik den ble fremstilt for elevene, med små justeringer. Riktig svar er markert i gult for å synliggjøre.

Denne oppgaven er oversatt fra en svensk kengurukonkurranse kalt Milou fra 2014 tilpasset aldersgruppen 1.-3.trinn, som NCM har oversatt og utarbeidet (Matematikksenteret, 2014). De beskriver at det er tatt hensyn til at elever i målgruppen ikke kan lese like godt, og teksten er derfor kortfattet og bygget på bilder og figurer. Derfor egner den seg godt for tilpasning til elevgruppen. Oppgaven *Mias brikker* er en problemløsningsoppgave som er valgt i forbindelse med at den passer godt med tematikken romforståelse. Den gir mulighet til å se sammenhenger mellom geometriske former, rotasjon og areal. Det er også en forutsetning at elevene har god mentaliseringsevne dersom de ikke blir tildelt fysiske brikker, fordi de mentalt må rotere og snu på de geometriske formene (brikkene) for at de skal passe i de sammensatte figurene. Jeg valgte å ikke introdusere puslespillbrikker, som gjorde at elevene selv måtte tegne opp brikkene i figurene. Dette forutsetter mer planlegging og problemløsning. Endringer som er gjort er med hensyn til etterarbeid med datamaterialet. For å enklere kunne tolke elevutsagn og tegninger i etterkant, valgte jeg derfor å fargelegge de geometriske brikkene. Dersom brikkene hadde vært uten farger, kunne det kommet mer presise matematiske formuleringer fra elevenes side, gjennom eksempelvis navngivelse av geomtetriske former. Siden jeg har basert problemstillingen på tematikken romforståelse, var dermed de geometriske begrepene eller matematiske begrep generelt like aktuelle å undersøke.

Oppgave «Almas veivalg»

21. Alma skal legge en brikke i midten slik at det er mulig å reise mellom A, B og E. Men det skal *ikke* være mulig å reise til D. Hun kan vri på brikkene.



Hvilke to brikker kan Alma bruke?

(A) 1 og 2 (B)2 og 3 (C) 1 og 4 (D) 4 og 5 (E) 1 og 5

Figur 9. Oppgave hentet fra Ecolier 4-5 (2022), oppgave 21. Ingen endringer i fremstilling av oppgaven. Riktig svar er markert i gult for å synliggjøre.

Den tredje og siste utvalgte oppgaven er hentet fra Ecolier 4-5 er godt egnet for problemløsning. Det går ut på at elevene må forestille seg hvilke veier som kan passe for å kunne komme til hus A, B og E. Den har mye av samme potensiale som forrige oppgave, da den krever romforståelse og problemløsning. Tematikken kan i denne oppgaven relateres til at elevene må mentalt rotere og snu på brikkene for at de skal passe. Til tross for at oppgaven er egnet 4.-5.klassinger, så jeg potensiale til at den passet min studie. Den kan være kognitivt krevende for en andreklassing. I bakhånd hadde jeg derfor laget puslespillbrikker, dersom oppgaven skulle vise seg å være for vanskelig. Det ligger også potensiale i svaralternativene, fordi dersom elevene finner ut at et veivalg passer, kan de eliminere noen løsningsforslag.

3.3 Metode for datainnsamling

For å fange opp elevers uttrykk i forbindelse med problemløsningen, valgte jeg å anvende deltakende observasjon som metode for datainnsamling. Først vil jeg presentere observasjon som metode. Videre presenteres også min rolle i forbindelse med datainnsamlingen (3.3.1).

Deretter vil jeg presentere hvordan selve gjennomførelsen og etterarbeidet av datainnsamlingen foregikk (3.3.2)

3.3.1 Observasjon som metode

Jeg har valgt å benytte observasjon som datainnsamlingsmetode. Observasjon egner seg for å direkte tilgang til det som skal undersøkes (Christoffersen & Johannesen, 2012). For å undersøke hvordan elevgruppene uttrykket sin resonnering, var dette den mest hensiktsmessige metoden. Observasjon handler ikke bare om å se, men om å bruke sansene for å prøve og oppfatte og forstå det som skjer (Postholm & Jacobsen, 2018, s.114). Dermed kunne jeg undersøke verbale utsagn i samhandling med elevenes fysiske handlinger. Gold (1958) henviser til roller som inntas under observasjon, en dimensjon som strekker seg fra *grad av deltakelse* til *grad av avstand* (se tabell 3). Min rolle under observasjonene var *fullstendig deltaker,* hvor forskeren ifølge Gold anses som en del av det som observeres. Valget ble tatt da jeg ønsket å stille oppfølgingsspørsmål for at elevene skulle utdype hva de tenkte. Ettersom min rolle i observasjonene var å bidra til dialog og tilrettelegge for resonnering gjennom spørsmålsstilling, vil resultatene være påvirket av min grad av deltakelse og avstand til elevene. Å være fullstendig deltaker kan også sammenlignes med det Adler & Adler (1994) beskriver som *aktiv medlemskapsrolle,* hvor forskerens rolle er å studere prosesser en er delaktig i, eller blir delaktig i løpet av forskningen. Forskeren har derfor en funksjon som bidrar til å utvikle gruppens handlinger.

		Forskerens deltakelse	
		Liten	**Stor**
Forskerens avstand	**Liten**	Deltaker-som-observatør	Fullstendig deltaker
	Stor	Fullstendig observatør	Observatør-som-deltaker

Tabell 3. *Observatørroller av Gold (1958), oversatt i Postholm & Jacobsen, 2018, s.114, egen fremstilling.*

3.3.2 Videoopptak

Jeg valgte å benytte videoopptak under observasjonene, slik at jeg kunne være til stede i datainnsamlingen. Fordelen med å bruke videoopptak er også at jeg fikk mulighet til å undersøke elevenes uttrykksformer, både verbalt og fysisk. Videoopptak er en viktig ressurs når det gjelder å fange opp den interaktive prosessen innen resonnering, spesielt i undersøkelser av mindre grupper (Rasmussen & Stephan, 2008; Mueller et al., 2012). Derfor benyttet jeg meg av videoopptak, for å senere kunne analysere opptakene. Som fullstendig deltaker av observasjonene, hadde det ikke vært hensiktsmessig å sitte å notere underveis, da dette hadde vært tidkrevende og kunne ført til utelatte detaljer. Ulempen med kun feltnotater er at det kun ville representert et utvalg av informasjon i registreringsøyeblikket (Postholm & Jacobsen, 2018, s.228). Ved å bruke videoopptak under datainnsamling, økes påliteligheten ved at jeg unngikk å registrere kun det som hadde besvart mitt forskningsspørsmål. Dermed reduserte jeg risikoen for selektiv notering (Postholm & Jacobsen, 2018, s.228).

3.3.3 Utvikling av intervjuguide

En del av å være aktiv deltaker under observasjon handler som nevnt om å tilslutte seg forskningsprosessen og være delaktig i det som observeres (Gold, 1958, i Postholm & Jacobsen, 2018, s.116). Dermed ønsket jeg å stille oppfølgende spørsmål der det ble naturlig i prosessen. Jeg lot meg inspirere av Goldins (1997) fire nivåer for spørsmålstilling under oppgavebasert intervju, for å danne en intervjuguide. De fire nivåene presenteres slik:

1) Spørsmålsstilling med åpne spørsmål og rikelig med tid til å svare, for eksempel «kan du forklare/utdype det?»
2) Heuristiske og eksperimentelle forslag til informantene, dersom elevsvaret ikke er spontant, som «kan du vise meg med klossene?»
3) Guidet heuristisk respons, til videre veiledning, som «kan du se noe mønster om jeg flytter klossene slik?»
4) Utforskende, metakognitive spørsmål, hvor målet er at eleven forklarer hva hun/han tenker «kunne du prøvd å forklare hvordan du tenkte?»

(Goldin, 1997, s.45, *egen oversettelse*)

Hensikten til Goldins nivåer er å uttømme for foregående kunnskap før en går videre til neste nivå. Forskerens mål er å fremkalle både en muntlig forklaring for elevenes løsningsforslag, samt en sammenfallende representasjon konstruert av barnet (Goldin, 1997, s.45-46). Mercer (Mercer & Littleton, 2008) forklarer at læreren, i mitt tilfelle meg som fullstendig deltaker, skal opptre som en veileder for barna. Med dette var målet med aktiv spørsmålstilling å få innsikt i hvordan elevene resonnerer seg frem til en løsning, uten fokus på at de selvstendig skulle finne frem til riktige løsninger. Hensikten var derfor å veilede dem til å resonnere og kommunisere med hverandre, slik at enkeltelevers resonnementer og strategier ble synlige for gruppen. Det påpekes at barns matematiske samtaler består av mer enn verbale utsagn (Jeonotte & Kieran, 2017). De inkluderer også gestikulasjoner, representasjoner og intonasjoner elevene anvender for å støtte sine argumenter. Siden jeg benyttet meg av videoopptak, noterte jeg ikke særlig underveis. Likevel brukte jeg intervjuguiden for å stille spørsmål underveis (se vedlegg ...).

3.4 Datainnsamlingen

Datainnsamlingen ble gjennomført over to dager, ved to pilotobservasjoner og tre observasjoner. Jeg har nå lagt frem valg av metode og forberedelser til datainnsamlingen, ved å introdusere utvalg av deltakere, oppgaver, og utarbeiding av intervjuguiden. Jeg vil videre presentere selve datainnsamlingsprosessen, samt ettarbeidet.

3.4.1 Pilotering

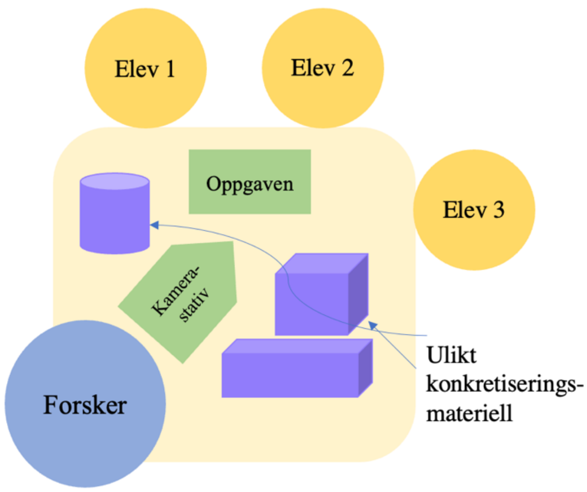
Jeg valgte å utføre to pilotobservasjoner før selve gjennomføringen. Det ga mulighet til å prøve ut opplegget og vurdere eventuelle endringer. To av gruppene ble tilfeldig utvalgt som pilotgrupper. Gruppene er kalt gruppe A og B. Hensikten med pilotobservasjonene var å undersøke om oppgavenes vanskelighetsgrad var passende for andreklassinger. Det ble undersøkt i forhold til tidsbruk, gruppens selvstendighet, og min innblanding i problemløsningsprosessen. Intervjuguiden ble også vurdert. Til slutt vurderte jeg kameraets vinkling av hensyn til å fange opp tilstrekkelig bilde av elevenes prosesser. Etter to pilotobservasjoner, var det ikke behov for store endringer. Jeg ble likevel mer bevisst min egen rolle som deltakende i elevenes problemløsningsprosess etter piloteringen. Dette er elementer som drøftes opp mot resultatene senere i studien. Siden svært få endringer ble gjort etter pilotene, er gruppe A og B en del av det samlede datamaterialet som analyseres.

3.4.2 Gjennomføring

Jeg ønsket at læringssituasjonen skulle gi mulighet for at elevene kunne uttrykke seg semiotisk gjennom eksterne representasjoner (Hana, 2014, s.131), og fant derfor frem ulike materialer elevene kunne bruke dersom ønskelig. Materialene var numiconbrikker, numiconbrett, cuisenairestaver, fargeblyanter, blyanter, rutete ark, blyanter, viskelær og hadde flere eksemplarer av oppgavearkene skrevet ut. Jeg hadde laminert et eksemplar av oppgavearkene på forhånd, slik at de skulle fremstå likt for alle fem gruppene. I bakhånd hadde jeg til to av oppgavene (*Mias brikker* og *Almas veivalg*) laget laminerte puslespillbrikker, dersom oppgavene ble for vanskelige å mentalisere eller visualisere rent teknisk.

I selve gjennomførelsen kom det frem at elevene kun brukte det fremlagte konkretiseringsmateriellet som numicon og cuisinare-staver i første oppgave *Muren*. For de andre to oppgavene *Mias brikker* og *Almas veivalg*, brukte elevene i hovedsak fargeblyanter, blyanter og utprintede oppgaveark. Kengurukonkurransen har selv spesifisert at oppgavearkene for de minste elevene i hovedsak består av figurer, bilder og lite tekst, for at de skal være tilgjengelig for de yngste barna i skolen (Matematikksenteret, 2022). Oppgavearket er derfor utformet slik at elevene kan bruke det aktivt i problemløsningen.

Gruppene ble hentet av meg i klasserommet. Alt av utstyr på grupperommet var lagt opp på forhånd, og kamerastativet var satt opp. Oppsettet var likt for alle gruppene. For å ufarliggjøre situasjonen, fikk elevene komme bak kamera og se. Det ble også presisert at videoopptaket kun skulle behandles av meg, og var bare for egen gjennomgang i ettertid. Dermed ble ikke kameraet et forstyrrende element. Videoopptaket ble startet før elevene fikk oppgavepresentasjonen, slik at jeg i resultatene kunne undersøke min egen rolle i oppstarten. Mellom hver ny oppgaveintroduksjon ble opptaket stoppet og startet igjen, for at datamaterialet skulle være ryddigere å se gjennom.



Figur 10. Visualisering av bordet under oppgaveløsingen, egen fremstilling.

Figuren viser hvordan elevene satt i forhold til meg og kamerastativet. I introduksjonen ble oppgaveteksten lest høyt fra meg, mens oppgavearket lå foran dem. Få eller ingen føringer ble lagt for hvilke materialer de skulle benytte seg av, men alt lå tilgjengelig foran elevgruppene. Noen grupper fikk derimot veiledning dersom de sto fast, eller dersom det virket overveldende for gruppen å velge materiale. Jeg gjorde elevene bevisst på at jeg kunne stille spørsmål underveis, men at jeg ikke var ute etter noe riktig eller galt svar. Jeg klargjorde også at de skulle diskutere og snakke med hverandre, og kunne svare spørsmålene mine underveis dersom de ønsket. Som fullstendig deltaker bestemte jeg hvilke ideer (hva) og hvilke elever (hvem) som blir satt søkelys på under diskusjonene (Wæge, 2019, s.34). Derfor forsøkte jeg å veksle mellom hvem som fikk ordet og mellom å stille åpne spørsmål til gruppen og til spesifikke deltakere av gruppene.

Da én oppgave var helt ferdig, introduserte jeg den neste. Elevene gjennomførte totalt tre oppgaver, på samme måte. Helt til slutt i observasjonene, stilte jeg noen oppklarende spørsmål, om hvordan de samlet sett hadde opplevd oppgavene og samarbeidet.

3.4.3 Etterarbeid av datainnsamlingen

Etter datainnsamlingen ble videoene overført til et passordbeskyttet minnepenn, slik at personopplysninger ble ivaretatt. Deretter ble alle videoene nøye gjennomgått og forsøkt systematisert. Jeg noterte fra videoene, og undersøkte innholdet for å bestemme et utvalg til analyseprosessen. Før jeg begynte transkriberingsprosessen, ønsket jeg å snevre inn dataene litt. Derfor jobbet jeg fra en abduktiv tilnærming, hvor jeg først tilnærmet meg en analysestrategi, for *så* å undersøke dataene nøyere (Postholm & Jacobsen, 2018, s.102). Jeg laget dermed en transkripsjonsnøkkel som egnet seg for å se sammenhengen mellom muntlige uttalelser og fysiske handlinger (se vedlegg 3). Jeg har ikke i alle tilfeller transkribert hele videoopptaket, da datamaterialet var omfattende. Transkripsjoner finnes som to separate vedlegg. Jeg har heltranskribert noen videoer, og transkripsjonsutdragene i analysekapittelet er da nummerert. Der jeg har grovtranskribert, har jeg nummerert med romertall, for å kunne henvise til linjenummer. Analysen baserer seg både på transkripsjonsutdrag, skannede oppgaveark, samt elevenes handlinger.

3.5 Analysestrategi

Etter datamaterialet var innsamlet, nøye gjennomgått og delvis transkribert, startet arbeidet med analyse. Postholm og Jacobsen (2018) nevner at analyseprosessen allerede er igangsatt når forskeren trer ut i feltet og materiale samles inn (s.140). Min rolle som fullstendig deltaker under observasjon, førte til at jeg underveis i datainnsamlingen selv valgte hvilke elevresonnement jeg ønsket å følge opp, og når i prosessen det passet seg å stille oppfølgingsspørsmål. Dette er en del av den umiddelbare analysen Postholm og Jacobsen (2018) refererer til, da jeg stadig underveis tok avgjørelser som kan ha ført til endringer i resultatene. Dette er tatt i betraktning da jeg senere vil gjennomgå og drøfte elevresultater (kapittel 4 og 5).

Analyseprosessen kan beskrives gjennom tre steg: åpen-, aksial- og selektiv koding (Strauss & Corbin, 1990; 1998). I den åpne kodingsprosessen utvikles det hovedkategorier, mens subkategorier utvikles i den aksiale kodingsfasen, og til slutt utvikles kjernekategorier gjennom den selektive kodingsfasen. Det er gjennom den selektive kodingsfasen at kategoriene relateres til hverandre og settes sammen i en helhet. Strauss og Corbin (1990; 1998) poengterer også at det *ikke* er et tydelig skille mellom de tre analysestegene, som jeg selv har erfart. Det ble stadig utviklet nye kategorier og underkategorier om hverandre, noe som gjør at datamaterialet konstant var under utvikling. Dette er en del av den konstant komparative analysen, hvor forskeren må være intuitiv og kreativ gjennom analyseprosessen for å kontinuerlig sammenligne datasettet, og for å gjøre nye oppdagelser (Postholm & Jacobsen, 2018, s.141).

Gjennom min analyse vil jeg forsøke å besvare mitt forskningsspørsmål, *«På hvilke måter kommer elevers kreative resonnering til uttrykk gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romlig forståelse?»*. Jeg har valgt å koble problemløsning til kreativ resonnering på bakgrunn av at fremgangsmåten ikke nødvendigvis vil være åpenbar eller kunne kobles til noe algoritmisk. Det understrekes at oppgaver som fremmer kreativ resonnering skal være ukjente for de som skal løse dem (Lithner, 2008).

Jeg tok i bruk Lithners rammeverk for kreativ resonnering (2006) da jeg skulle utvikle hovedkategoriene. Kategoriene er dermed basert på de fire nivåene som inngår i den kreative resonneringsprosessen: å tenke nytt, fleksibilitet, rimelighet, og matematisk forankring (Lithner, 2006). I utgangspunktet var planen å bruke hele Lithners analytiske rammeverk (se figur x, kapittel 2.3.1) som skiller mellom kreativ og imitativ resonnering for å analysere elevresultatene. Likevel ble jeg bevisst under oppgaveutvelgelsen at jeg aktivt søkte oppgaver som kunne lede til kreativ resonnering. Ved utvikling av analyseverktøy ble det dermed ikke umiddelbart enkelt å skille elevresultater i kreativ og imitativ resonnering, fordi en stor del andel av elevresonnementene var kreative. På bakgrunn av den nøye utvelgelsen av oppgaver og et kriterium om problemløsningsoppgaver, var jeg også nødt til å endre og justere mitt valg av analyseverktøy. Jeg falt derfor på å aktivt søke etter elevresonnement som var kreativt resonnerende, og har derfor valgt bort imitativ resonnering. Jeg fulgte derfor den kreative resonnementstrukturen til Lithner (2008) for å danne kategorier (se tabell x)

Tabell 4. *Hovedkategorier og forklaring, basert på Lithner (2008, s.266, egen oversettelse)*

Nivå	Forklaring
Å tenke nytt	Resonneringssekvensen elevene bruker er ny for eleven, og for å løse oppgavene må elevene tenke nytt.
Fleksibilitet	Elevene er ikke bundet til en bestemt strategi, men benytter ulike tilpasninger og strategier slik den fungerer.
Rimelighet	Argumentasjonen som støtter eller motiverer strategivalg eller implementering av strategi ses på som rimelig.
Matematisk forankring	Argumentene elevene bruker er forankret matematisk.

Etter hovedkategoriene ble dannet fra Lithners (2006) fire nivåer i kreativ resonnering, har jeg forsøkt å utvikle noen underkategorier hvor kategoriene videre utdypes. For å tydeliggjøre sammenhengen mellom forskningsspørsmålet og analysen, ble underkategorier dannet. Dette inngår som en del av den aksiale kodingsfasen. Jeg har basert disse underkategoriene på teori fra heuristikk i problemløsning (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985), argumentasjon og overbevisning (Volmink, 1990; Valenta, 2016; Balacheff, 1988), og matematiske egenskaper problemløsningsoppgavene innebærer (Clements & Sarama, 2021). Jeg vil videre presentere analyseverktøyet med forklaring under om hvordan hovedkategoriene og underkategoriene er koblet sammen.

Tabell 5. Analyseverktøy for å undersøke hvordan elever uttrykker kreativ resonnering gjennom arbeid med problemløsningsoppgaver.

Hovedkategorier	Underkategorier
Nivå i kreativ resonnering	Elevers uttrykksmåter
1. Å tenke nytt	Elevene har en oppfatning for hvordan problemet skal løses (1)
	Elevene oppdager egen misoppfatning av problemet (2)
	Elevene legger en plan for å løse problemet (3)
2. Fleksibilitet	Elevene lager en visualisering, bruke tegning som hjelpemiddel (4)
	De prøver og feiler, gjett og sjekk (5)
	Elimineringsmetoden anvendes (6)
	Elevene ser etter mønster (7)
	De arbeider baklengs, starte med kjent informasjon (8)
	Forenkler problemet (9)
3. Rimelighet	Å overbevise en venn, hjelpe (10)
	Å overbevise en skeptiker (11)
	Å motbevise for å støtte egen argumentasjon (12)
4. Matematisk forankring	Mentalisering (13)
	Romlig forståelse (14)
	Se tallmønstre/ mønstre (15)
	Identifisere geometriske egenskaper (16)

Kategori 1: Å tenke nytt

Kategorien baserer seg på at elevene må tenke nytt, som har sammenheng med at strategien eller fremgangsmåten er uklar for elevene. Etter min tolkning er dermed underkategori 1-3 basert på elevers forståelse av hvordan problemet kan løses. Dette henger sammen med nivå én og to av Pólyas problemløsningsplan (1945), hvor en skal forstå problemet og lage en plan, og Schoenfelds nivå én til tre, hvor en skal lese, analysere, utforske og planlegge problemløsningen (1985).

Kategori 2: Fleksibilitet

I kategori to som omhandler fleksibilitet, har jeg gjennom underkategori fire til ni, implementert seks ulike problemløsningsstrategier som særlig er aktuelle i småskolen (Torklidsen, 2017). At elevene må være fleksible i sine strategivalg for å kunne løse problemet kan tolkes som å utforske ulike fremgangsmåter (Schoenfeld, 1985). Her har jeg dannet underkategorier basert på bakgrunn i hvordan elevene gikk frem for å løse problemet, som tar utgangspunkt i teori fra heuristiske problemløsningsstrategier. Underkategori fire og fem er utviklet på bakgrunn av hvordan elevene forstår oppgaven og dermed utforsket fremgangsmåter, gjennom for eksempel uttrykke seg gjennom tegning, og gjennom å prøve og feile for å finne gode strategier. Underkategoriene seks til ni handler om hvilke strategier elevene anvender for å gå løs på problemet. Dermed handler det om hvordan elevene beveger seg gjennom oppgaven og ikke bare holder seg til en bestemt fremgangsmåte. Én av disse underkategoriene, *å lage en systematisk tabell*, er byttet ut med *elimineringsmetoden*. Dette fordi det i elevresultatene ikke var noe tilfeller av å lage systematiserte tabeller.

Kategori 3: Rimelighet

Kategorien rimelighet handler om i hvilken grad elevene klarer å begrunne sine argumenter på en overbevisende måte når de begrunner sin løsningsstrategi. Her er underkategoriene dannet på bakgrunn av teori fra Balacheff (1988) og Volmink (1990) som snakker om overbevisning. Siden jeg har undersøkt hvordan elevene resonnerer i grupper, var det naturlig at underkategoriene omfattet hvordan elevene begrunner sine argumenter, og hvordan argumentene deretter godtas eller forkastes av deltakerne av det bestemte læringsmiljøet. I min studie er derfor denne kategorien tilknyttet hvordan elevene overbeviser deltakerne av gruppen om en bestemt fremgangsmåte eller strategivalg, som er bakgrunn for utformingen av underkategoriene åtte til ti.

Kategori 4: Matematisk forankring

Kategori fire handler om hvordan elevene forankrer argumentene sine i problemets matematiske egenskaper. Fra problemløsningsoppgavene som er brukt i studien har jeg hentet ut noen hovedområder innen matematikk som også ble brukt for å støtte elevenes argumenter. Underkategorien 11 og 12 er derfor basert på mentaliseringsevne og romlig forståelse, som begge de utvalgte problemløsningsoppgavene legger opp til. Underkategori 13 og 14 er utformet etter hvordan elevene kunne støtte seg på matematiske egenskaper som areal og geometriske egenskaper når de argumenterte.

3.6 Studiens troverdighet

Min studie berører spørsmål om validitet og reliabilitet. Samlet sett kan dette ses på som studiens troverdighet. Postholm & Jacobsen (2018, s.222) mener at forskningens kvalitet må belyses gjennom to spørsmål:
(a) Hvilke begrensinger som er gjort i henhold til egen forskning. Dette omtales som studiens validitet, eller gyldighet.
(b) Hvordan forskeren gjennomføring kan ha påvirket resultatene. Det er studiens reliabilitet, eller pålitelighet.

3.6.1 Validitet

Validitet handler om hvorvidt konklusjonene som trekkes er gyldig for det som er studert. En diskuterer gjerne indre og ytre validitet når en snakker om studiens gyldighet (Postholm & Jacobsen, 2018, s.223).

Indre validitet tar for seg hvorvidt forskerens konklusjoner samsvarer med det som er studert. Dette kalles også årsak-virkning-forhold, eller kausalitet, altså korrelasjonen mellom to faktorer (Postholm & Jacobsen, 2018, s.233). Hvor sikre kan vi være i konklusjonene for et resultat er gyldig? For å i det hele tatt kunne uttale seg kausalt i atferds- og samfunnsvitenskapen, må det gjøres gjennom teoretiske resonnement som bygger på tidligere forskning og teori (Postholm & Jacobsen, 2018, s.235). I min studie vil jeg kunne trekke slutninger og se empiri i sammenheng med teori, men må være forsiktig med å generalisere. Min indre gyldighet svekkes gjennom at jeg kun kan antyde konklusjoner ut fra egne data, men det er likevel godt dokumenterte data hvor det er mulig å undersøke hvordan flere faktorer samsvarer for å besvare problemstillingen. Dersom jeg eksempelvis kun hadde undersøkt verbale utsagn gjennom feltnotater, ville den indre valideten blitt svekket. Målbarheten i studien handler om hvorvidt mine datainnsamlingsmetoder er gyldige for å besvare forskningsspørsmålet (Postholm & Jacobsen, 2018, s.223). Her vil min bruk av videoopptak styrke den indre validiteten, fordi det ga mulighet til å fange opp flere detaljer da studien ble gjennomført på egenhånd.

Som nevnt tidligere, vil min bakgrunn og mine teoretiske antagelser i forkant av datainnsamlingen ha kunne innvirket på mine funn. Som forsker har jeg måttet ta metodiske valg for å sikre at dataene best mulig besvarer forskningsspørsmålene mine. Dette kan ha ført til at interessante eksempler fra observasjonene mine har blitt oversett. På den andre siden, vil jeg som forsker ha eierskap til studien som primærkilde til empirien, som også bistår studiens gyldighet.

Ytre validitet, eller overførbarhet, handler om i hvilken grad funnene kan generaliseres til en større populasjon. Casestudier har imidlertid begrenset empirisk generaliserbarhet, da de kun går i dybden på få enheter (Andersen, 2013, s.14). Mine resultater fra et utvalg andreklassinger, vil da ikke kunne være representativt for alle andreklassinger på eksempelvis nasjonalt nivå. Casestudier er som nevnt kontekstavhengig, og gir derfor ikke grunnlag til å generalisere funnene utover min case. Den empiriske representativiteten er imidlertid ikke det samme som teoretisk representativitet. Teoretisk representativitet krever en overbevisende argumentasjon for hvordan og empiriske sammenhenger og prosesser kan sees som representative (Andersen, 2013, s.14). Med hensyn til egen studie styrkes min ytre validitet ved at jeg gjennom metodekapittelet er transparent om egen deltakelse og egne valg. Dersom jeg på en overbevisende måte kobler teori og empiri, styrkes også den ytre validiteten.

3.6.2 Reliabilitet

I følge Heshusisus (1994, sitert i Kvale & Brinkmann, 2015) kan en som forsker aldri være helt objektiv når det gjelder egen deltakelse, men heller være bevisst og transparent i hvordan funnene fremlegges. Det kan bidra til å styrke studiens pålitelighet. Reliabilitet handler om forskningsresultatenes konsistens, og i hvilken grad resultatene har potensiale til å bli reprodusert ved et senere tidspunkt av andre forskere (Kvale & Brinkmann, 2015). Kvalitative studier er vanskelig å repetere, fordi resultatene er svært kontekstavhengige. Dersom en gjennom forskningsprosessen belyser styrker og svakheter ved studien, vil det kunne bidra til en større grad av pålitelighet ovenfor hvorfor resultatene ble akkurat slik.

Funnene som kommer frem i min studie kan være delvis påvirket av min kjennskap til elevene. Det skal likevel sies at jeg ikke kjente deres faglige bakgrunn, men ønsket å danne kjennskap til dem for å betrygge dem i situasjonen, og var derfor innom klassen flere ganger i forkant av datainnsamlingen. Studien er derfor delvis påvirket av kontekstuelle forhold. Kjennskapen til elevene kan likevel ses som en styrke i den grad at dersom jeg var totalt fremmed for elevene, kunne det ha påvirket resultatene i negativ forstand. Derfor har også min grad av avstand og nærhet til deltakerne, slik som Gold (1958) beskriver gjennom sine observatørroller, hatt innvirkning på resultatene. Det kan likevel tenkes at dersom studien hadde blitt gjennomført av en annen forsker på en annen skole, at resultatene ikke hadde vært totalt avvikende.

3.7 Etiske overveielser

Norsk senter for forskningsdata, kalt NSD, arbeider for at forskningen skal verne om menneskers sikkerhet og personvern. Siden min studie innebar video- og lydopptak av sårbare grupper, altså barn, søkte jeg om godkjenning fra NSD for å kunne utføre studien. Etter godkjennelse, ble informasjonsskriv og samtykkeskjema utsendt til foreldre (se vedlegg ##). De signerte skjemaene ble makulert etter at de ble skannet og overført til en passordbeskyttet minnepenn. Retningslinjene for å delta kom tydelig frem, hvor rettighetene rundt å trekke sitt barn fra studien ved ethvert tidspunkt kom frem. Også barna fikk informasjon om at dersom de ikke ønsket å delta på selve datainnsamlingstidspunktet, kunne de selvsagt trekke seg. Alle personvernopplysninger ble i etterkant av datainnsamlingen, transkribert og i etterkant ble samtykkeskjemaene makulert.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utgitt en rekke etiske overveielser og lovpålagte avgjørelser som gjelder innen forskningsfeltet (2021). Christoffersen & Johannesen (2012) oppsummerer disse retningslinjene til tre hovedhensyn en som forsker må tenke på:

(1) Informantenes rett til autonomi og selvbestemmelse
(2) Forskerens plikt til å respektere informantens privatliv, og
(3) Forskerens ansvar til å opprettholde informantens trygghet, og unngå skade.

Den første sammenfatningen av retningslinjer (1), kan overføres til min studie i den grad at elevene selv fikk bestemme over egen deltakelse. Både foreldre og elever måtte samtykke. For at datainnsamlingen skulle være mer forutsigbar for elevene, ga jeg dem beskjed om når og hvor datainnsamlingen skulle foregå, og at dersom noen angret på datainnsamlingsdagen, trengte de ikke delta. Når det gjelder (2), ble informantens privatliv ivaretatt i den grad at både foreldre og elever ble informert over deres grad av anonymitet, og hvilke grep jeg skulle ta for å ivareta personopplysninger. Forskerens ansvar for å bevare elevenes trygghet (3), er et svært viktig etisk hensyn i min studie. Elevene skulle i grupper på tre være alene med meg på grupperom, og jeg ønsket derfor å betrygge dem og gjøre læringssituasjonen mest mulig trygg. For å passe på at elevene ble trygge på meg og situasjonen, dannet jeg kjennskap til dem over tid. De fikk også før selve oppgaveløsingen i datainnsamlingen, se og undersøke mitt perspektiv i videotakingen, og jeg spurte om de var nysgjerrige på hva jeg så bak kamera. Dette kan ha betrygge elevene i situasjonen med videotaking.

4.0 Resultater og analyse

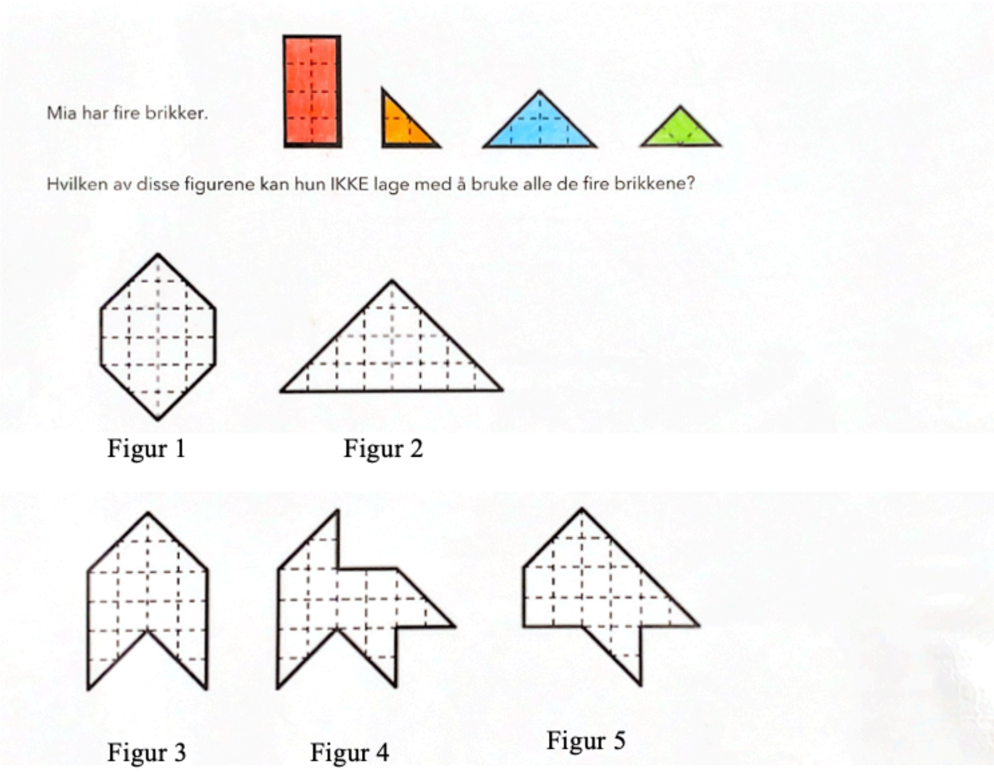
I følgende kapittel vil jeg presentere min analyse av resultater fra studien. Her vil analysen bære preg av at resultatene inkluderer egne tolkninger av hvordan jeg har forstått og oppfattet elevresultatene. Først presenteres resultater tilknyttet oppgaven jeg har valgt å kalle *Mias brikker*, og deretter resultater tilknyttet oppgaven *Almas veivalg*. Jeg har valgt å begrense analysen til eksempler fra tre grupper ved fremlegg av første oppgave, og to gruppers løsninger tilknyttet andre oppgave. Gruppe A er presentert i fremlegg av begge oppgaver, mens de tre andre gruppene er presentert én gang hver. Gruppe D er tatt bort av hensyn til at resultatene her var svært likt gruppe C sine resultater, og på bakgrunn av at jeg ønsket å begrense utvalg av resultater, og heller gå mer i dybden på utvalgte sekvenser og oppgaveark. Gruppe A ble fremstilt to ganger fordi deres resultater var meget interessante å undersøke. Hvert eksempel vil inneholde transkripsjonsutdrag, samt tabeller og skannede oppgaveark, for å få et overordnet blikk over elevresultatene. For å analysere har jeg sett på det samlede datamaterialet med hensyn til analyseverktøyet mitt, som er presentert i kapittel 3.5.

Jeg har ikke valgt å benytte kategoriene og underkategoriene i analyseverktøyet som underoverskrifter, da dette ikke ville gitt en ryddig fremstilling av mine resultater. Jeg har heller valgt å trekke inn analyseverktøyet jevnt over i presentasjon av oppgavene, og samle trådene ved en oppsummering av min analyse av hver gruppes resultater.

Siden jeg er deltakende i observasjonene, er jeg hatt innvirkning på resultatene i variert grad. Jeg vil senere drøfte min deltakelse opp mot gruppenes løsninger og resonnementer. Siden gruppenes selvstendighet var variert, er også min deltakelse skiftende fra gruppe til gruppe. Det ble gjennomført en grundig gjennomgang av datamaterialet fra videoopptakene sammen med oppgavearkene, før analysen startet. De samlede resultatene vil besvare mitt forskningsspørsmål:

> ***«På hvilke måter kommer elevers kreative resonnering til utrykk gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romlig forståelse?»***

4.1 Mias brikker



Figur 11. *Fremstilling av oppgaven Mias brikker slik den ble fremstilt for elevene. Figurnummer er lagt til med hensyn til fremlegg av resultater.*

For å løse problemløsningsoppgaven *Mias brikker*, er det ikke noe innlært algoritme elevene kunne anvende. Elevene hadde ikke fysiske brikker, men heller flere eksemplarer av oppgavearket samt tilhørende fargeblyanter (rød, oransje, blå og grønn), blyanter og viskelær. Gruppene brukte ulikt antall forsøk og dermed også i noen tilfeller flere oppgaveark, flere antall utprøvinger av samme figur og ulike strategier for å løse oppgaven. Dette gjør at oppgavene i større grad inviterer til kreativ resonnering, da problemløsningsoppgavene verken følger en algoritmisk eller imitativ struktur. Jeg vil nå legge frem noen utdrag av gruppens resultater som gir innblikk i hvordan elevgruppene løste problemløsningsoppgavene, og hvordan dette førte til kreativ resonnering. Mine utvalgte resultater fra *Mias brikker* er gruppe A, gruppe B og gruppe E. De er nummerert etter kronologisk rekkefølge. Både gruppe A og B var dermed de to gruppene som var en del av piloteringen på første dag, men siden få- eller ingen store endringer ble gjort, er de inkludert i resultatene.

4.1.1 Gruppe A – *Å følge en systematisk problemløsningsplan*

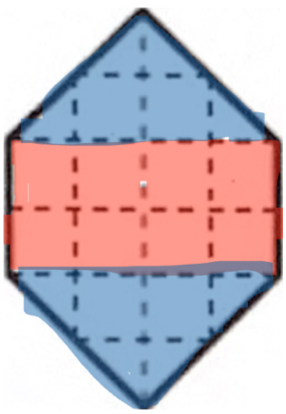
I dette delkapittelet vil jeg presentere hvordan gruppen jeg har valgt å kalle A, arbeidet med *Mias brikker*. Elevene i gruppe A vil videre omtales med fiktive navn Aksel, Alice og Aurora. De var første gruppe til å prøve ut oppgavesettet.

Ved muntlig introduksjon av oppgaven, leste jeg oppgaveteksten slik den er fremstilt, hvor jeg samtidig pekte på de geometriske figurene (brikkene) og de sammensatte figurene på arket. I oppgaveteksten står det ikke noe om rotasjon av brikkene, eller bruk av en brikke flere ganger i samme figur, og det kan dermed oppfattes som noe elevene selv må tyde og forstå for å løse problemet. Derfor la jeg ikke vekt på dette ved muntlig introduksjonen av problemet. Siden gruppe A var første pilotgruppe, var det derfor her jeg ble oppmerksom på manglende informasjon i oppgaveteksten, som jeg vil presentere videre gjennom elevenes første utprøving vist i tabellen, samt et tilhørende transkripsjonsutdrag.

Tabell 6. Gruppe A sine to første forsøk på problemet Mias brikker.

Forsøk nummer	**Figur**	**Brikkerekkefølge**	**Elevsvar**
1	Figur 1		Mangler
2	Figur 1		

Elevgruppe A startet med å tegne inn de geometriske brikkene i figur 1, uten å synlig planlegge noe i forkant. Det tyder på at de selv oppfattet at de forsto det oppgaven etterspurte.



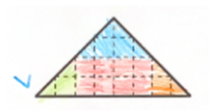
Da den rektangulære brikken ble tegnet på tvers i figur 1, viste elevene at de har forstått at brikkene mentalt kan roteres for at de skal passe, selv om informasjonen ikke er gitt i oppgaveteksten. Deretter tegnet de inn den blå trekanten både øverst og nederst i figur 1, slik at figuren ble fylt opp. Første forsøk ble dermed seende slik ut (egen gjenskaping av elevenes tegning, *til venstre*). Etter første forsøk så jeg behov for å presisere for elevgruppen at én brikke ikke kan brukes flere ganger i samme figur. Dette førte til at elevene måtte endre strategi og tenke nytt, som vist i følgende transkripsjonsutdrag (1).

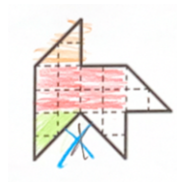
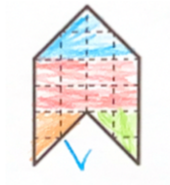
Transkripsjonsutdrag 1
Å prøve og feile for å forstå oppgaven

38	Martine	Oi, men det glemte jeg å si. Dere får bare bruke, nå har dere allerede brukt blå, så nå er dere ferdig med den. Da må dere se om dere kan bruke noen av de andre
39	Alice	*visker ut blåfargen*
40	Aurora	Så, da kan vi ikke bruke blå, eh, på ingen av de andre? *peker på de andre figurene*
41	[Martine]	Eh, jo! Du kan bruke det på de andre, men på samme figur kan du bare bruke én brikke én gang.
42	[Aksel]	≈Hæ, men da går det jo ikke /oppgitt/, det går ikke
43	[Aurora]	≈//utydelig, snakker for seg selv// *gestikulerer hvor den oransje brikken skal*
44	[Martine]	≈Men, prøv og hør på Aurora nå, hva ville du si?
45	Aurora	Hvis vi tar den oransje der? *ser på meg*
46	[Martine]	Ja, for det går an å snu på brikkene!
47	Aurora	*fargelegger oransje*
48	Alice	Ellers så kan man ta de oransje og den grønne, for de er jo helt like i formen? *ser på meg*
49	Martine	Perfekt! Da går det da? Hvis Aurora tar oransje der, hvilken kan du ta for å fylle inn den neste?
50	Alice	*starter å viske ut det blå feltet fra tidligere*
51	Martine	Men, den blå kan du bare ha! Den blå har du allerede brukt. Så den blå kan være der ≈ men kan den grønne passe inn der sa du Alice? For de er jo helt like i formen? *peker på ufarget trekant ved siden av den oransje*
52	Aurora	Ja! Den kan jo være den veien, bare? *gestikulerer hvordan formen kan roteres*
53	Aksel	*fargelegger grønt på indikert plass i figuren*

Fra transkripsjonsutdrag 1 er det interessante resultater å rette søkelys mot. Elevene har etter egen oppfatning løst oppgaven riktig, men jeg utfordret dem til å prøve igjen ved å legge til informasjon i oppgaven (linje 38). Først og fremst er det interessant å se hvordan elevenes misforståelse av oppgaven ble uttrykket gjennom både å stille spørsmål til meg om delproblemet som oppstår (linje 40), samt litt frustrasjon over at deres opprinnelige løsningsforslag og plan ikke ble godtatt (linje 42). Det er naturlig del av problemløsningsprosessen at elevene ikke ser noe umiddelbar løsning, som tydeliggjøres gjennom utdraget. Det er mulig at elevene i gruppen er vant til å jobbe mer algoritmisk og imitativt i matematikk, og at det er derfor elevene både trengte oppklaringer og bekreftelse fra en voksen, samt uttrykte at dersom første løsningsforslag ikke gikk, finnes det ikke flere måter å løse oppgaven på. Elevene må ha forstått problemet for å kunne videre være fleksible og rimelige da de skal argumentere for sine løsningsforslag. Det krever fleksibilitet gjennom prøving og feiling av strategier for å finne en løsning, hvor elevene ikke bare kan lande et svar og gå videre. Videre kan en se hvordan Aurora ønsket å prøve videre, hvor hun gestikulerte hvor brikkene kunne plasseres, som kan tyde på at hun legger en plan for hvordan problemet kunne løses (linje 43). Elevgruppen opptrådde derfor fleksible, og prøvde ut en ny løsning til samme figur, med den oransje brikken (linje 45). Alice kom deretter med et matematisk forankret argument, hvor hun indikerte at de to små trekantene er like i formen (linje 48). Her forankres hennes argument i de geometriske egenskapene til trekantene og hun oppfatter at de er like i formen, og at begge brikkene derfor passer hvis de roteres. Det er vanskelig å bedømme om et resonnement er rimelig, da det i størst grad handler om evnen til å begrunne egne valg. Et argument kan oppfattes rimelig for den som argumenterer, men kan likevel være feil. For å vurdere om argumentet er rimelig, vil det være hensiktsmessig å se om resten av deltakerne forstår det. Alices argument ble fulgt opp av både meg som deltaker, og medelev Aurora, som gestikulerte hvilken vei den grønne brikken kunne roteres. Dermed virket argumentet rimelig for resten av gruppen, siden det ble forstått og fulgt opp. På bakgrunn av at transkripsjonssekvensen både viser til at elevene endret tankegang etter misforståelser, utforsket nye strategier, samt argumenterte rimelig og med matematisk forankring, har jeg identifisert sekvensen som kreativt resonnerende.

Tabell 7. Gruppe A sine videre forsøk på å løse Mias brikker.

Forsøk nummer	**Figur**	**Brikkerekkefølge**	**Elevsvar**
3	Figur 2		

4	Figur 4		
5	Figur 3		
6	Figur 5	 (mangler en rad først)	

Tabellen viser at resten av figurene ble løst på første forsøk, som tyder på at elevene både forstod at brikkene kunne roteres, snus og kun brukes én gang. Etter at elevene hadde forstått problemet og løst figur 1, prøvde de figur 2, som ble løst på første forsøk.
Deretter foreslo jeg at figurene ikke nødvendigvis måtte løses i kronologisk rekkefølge. Transkripsjonssekvensen under viser hvordan elevene bestemte seg for hvilken de skulle prøve ut.

Transkripsjonsutdrag 2
Elimineringsmetoden

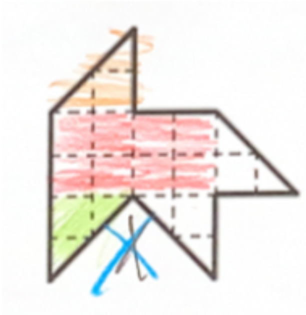
80	Martine	Mhm, ja. Hvilken vil dere prøve nå da? Dere må ikke gjøre det i rekkefølge heller.
81	Aurora	::skal vi prøve den?:: *peker på figur 3*
82	Alice	Den *peker på figur 4*
83	[Aurora]	Nei, den, den *peker på figur 4*
84	Aksel	Ja, for den er jeg sykt usikker på *peker på figur 4*

Elevene diskuterer hvilken strategi de skal anvende for å løse problemet. Det diskuteres ulike forslag, som tyder på fleksibilitet. Elevgruppen ble fort enige om å prøve figur 4, hvor Aksel også begrunnet valget i at den så vanskeligst ut (linje 84). Det kan tyde på god romforståelse, hvor elevene mentalt ser for seg brikkesammensetningen, og ønsker å eliminere den.

Transkripsjonsutdrag 3

Elevene lander en konklusjon om figur 4

89	Aurora	Men det blir jo faktisk litt vanskelig, siden vi har jo flere sånne her? Vi kan ikke bruke noen av de andre *peker på de to resterende trekantene i figur 4*
90	Martine	Dere kan bare bruke én brikke én gang
91	Aurora	Ja /bekreftende/, og da bruker jeg oransje der, men hva skal vi bruke på disse? *peker med oransje fargeblyant på de hvite trekantene, som vist i elevenes tegning*



92	Aurora, Alice	*kikker undrende på meg*
93	Martine	/hever skuldrene, som jeg ikke vet/
94	Alice	Da er det den som er feil (2s) *peker på figur 4*

Utdraget viser hvordan elevene kom til en konklusjon om at figur 4 ikke kunne virke, og la frem rimelige argumenter som begrunnelse. De viser igjen forståelse for problemet, og forklarte at de ikke har noen brikker igjen å bruke. Likevel utfordret jeg dem i etterkant til å prøve ut figur 3 og 5, for å være sikre på deres konklusjon. Dette er den delen av problemløsningsprosessen som handler om å se tilbake, eller sjekke sin konklusjon. Det handler også om at elevenes resonnement om hvorfor figur 4 ikke virket, skulle bli mer overbevisende for alle deltakere. Gruppe A løste først figur 3, og deretter figur 5. Under utprøving av den siste figuren møtte deltakerne på et problem, hvor to av deltakerne måtte bruke sin overbevisningsevne for å endre den tredje elevens tankegang (se transkripsjonsutdrag 4).

Transkripsjonsutdrag 4
Å overbevise en venn

105	Aksel	*begynner å fargelegge det røde rektangelet på figur 5, men stopper opp når han har farget ¾* /lener seg litt tilbake/ Eh, nei! (1s) Den skal ikke være der
106	Alice	Jo, hvis du tar den helt bort til kanten *peker på manglende ruter på figur 5*

107	Aurora	≈Men hvor mange – 1, 2, 3, 4 *teller rader i rød brikke*– 1,2,3,4 *teller videre rader i Aksel har fargelagt* – da får vi jo plass helt bort i kanten dit *peker på den tomme raden i figur 5*
108	Aksel	Ja *fargelegger ferdig det røde rektangelet på figur 5*
109	*Martine*	Så lurt
110	Aurora	Mhm, siden det er jo bedre hvis vi teller disse her, hvis vi teller sånn 1,2,3,4, da er det jo 4 der *peker med fargeblyanten mens hun teller*
111	Alice	≈ Også stopper du med den streken der *peker der Aksel fargelegger, indikerer hvor han skal stoppe*

Transkripsjonsutdrag 4 viser hvordan Aksel først så ut til å være sikker i sin fremgangsmåte, fordi han fulgte samme mønster som tidligere og startet med den røde, største brikken (linje 105). Her imiterte han tidligere strategier som har vist seg å fungere for de andre figurene. Han farget seks av åtte ruter, men stoppet opp og uttalte at den ikke fungerte (linje 106). For å overbevise Aksel, argumenterte Alice og Aurora med bakgrunn i brikkens areal, altså brikkens matematiske egenskaper (linje 106, 107, 110, 111). Dette gjør argumentet deres mer troverdig og rimelig, og støtter deres resonnement om at den røde brikken passet. Utdraget viser at gruppe A støttet på et problem, måtte tenke nytt, og argumentere for løsningsforslag med bakgrunn i oppgavens matematiske egenskaper. Dette er tegn på kreativ resonnering.

Samlet sett har jeg nå presentert deler av transkripsjonsutdrag, i kombinasjon med elevenes løsninger presentert i tabellsammenhenger. De fire transkripsjonsutdragene er bare deler av den deltakende observasjonen sammen med de gruppe A, men viser hvordan elevene både på egenhånd og med hjelp, kreativt resonnerte seg frem til løsninger. For at en resonnement kan oppfattes som kreativt, må elevene både tenke nytt, være fleksible, og argumentene deres må være rimelige og matematisk forankret. For at resonnementet først og fremst skal være nytenkende, må det oppstå av at elevene ikke er kjent med hvordan de skal løse oppgaven. Det kommer frem i resultatene, da elevene stadig måtte prøve og feile for å finne løsninger, og ikke bare kunne lande et svar og si at oppgaven var løst. Gjennom problemløsningen utfordret de hverandre, og måtte på denne måten stoppe opp, få oversikt over problemet, og komme med argumenter for sine løsningsforslag. Et spennende funn fra gruppe A er hvordan de konsekvent plasserte den røde brikken først, og alltid plasserte den på tvers i figurene. De viser god forståelse for oppgavens tematikk, romforståelse og areal.

4.1.2 Gruppe B – *Elevene planlegger før de utfører*

Gruppe B har fått pseudonymene Benedicte, Bea og Betina. Jeg vil legge frem de samlede resultatene for å gi et helhetlig bilde på elevenes problemløsningsprosess og hvordan de uttrykket kreativ resonnering. På samme måte som gruppe A, forklarte jeg oppgaven for elevene slik den presentes i oppgaveformuleringen. Elevene uttrykket deretter at de ikke forstod oppgaven, og jeg hjalp dem derfor med hvordan de mentalt kunne plassere første brikke (se transkripsjonsutdrag 5).

Transkripsjonsutdrag 5

Hjelp til å forstå oppgaven

2	Martine	Skjønte dere det?
3	Bea	Nei jeg skjønte ikke det
4	Martine	Nei, så hun har fire brikker. Her kan dere få lov å tegne og prøve dere litt frem hvis dere vil etterpå *legger frem utprintet ark foran oppgavearket*
5	Martine	Men, hvis hun har brukt den røde brikken *peker på rød brikke* for eksempel (1s), hvor tror du hun kan bruke den rød på den figuren *peker på figur 1*?
6	Benedicte, Betina	Der *peker på samme plass, midten av figuren*
7	[Benedicte]	≈Der i midten hvis hu tok den sånn, også snudde hun den sånn, da blir det en form som er sånn *gestikulerer hvordan hun snur rød brikke til at den passer i figur 1* *peker på rød brikke*
8	Martine	Ja, bra! Og når Mia har brukt den, så kan hun ikke bruke den en gang til på samme figuren. Skjønte du det bedre nå?
9	Benedicte	Mhm

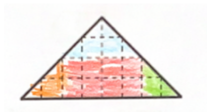
Transkripsjonsutdraget viser til en diskusjon uten at noe tegnes på oppgavearket. Her forstod elevgruppen selv at de kunne rotere og snu brikkene, uten at det ble lagt føringer fra meg (linje 7). Benedicte la til en forklaring for sitt valg av plasseringen, og viser her romforståelse. Før elevene begynte prosessen selv, forsøkte jeg å få gruppen til å tenke over hvilken figur det er lurt å starte med. Det kan ses i transkripsjonsutdraget under.

Transkripsjonsutdrag 6
Et forsøk på planlegging

10	Martine	Hva tror dere er lurt å begynne med nå? Nå skal dere finne ut – det er én av de figurene hun ikke kan lage – er det noen dere tenker med en gang at det ikke går an å lage? Eller vil dere bare prøve dere frem?
11	Benedicte	Jeg tenker faktisk at hun ikke kan lage, ja, den! *peker på figur 4*
12	Betina	Jeg tenker at hun ikke kan lage eh (2s)
13	Benedicte	Jeg tror faktisk at hun ikke kan lage de nederste *peker på de tre nederste figurene*
14	Betina	Jeg tror at hun kan lage noe, eh, hun kan jo ta den der, så hu kan lage noe med den *peker på oransje trekant til et hjørne i figur 4* (2s) Men den, tror jeg ikke hun kan lage noe *peker på figur 3*
15	Benedicte	Jeg synes heller ikke hun kan lage noe med den, den har større kanter *peker på figur 3*
16	Benedicte	Hva tenker du, Bea?
17	Bea	Mm, jeg tror heller ikke hun kan lage den *peker på figur 3*
18	[Betina]	≈Skal vi fargelegge på dette arket?
19	Martine	Dere kan prøve å fargelegge her, nå vet dere jo hvilke brikker som har hvilken farge – så må dere jobbe sammen og snakke sammen
20	Betina	Eh, skal vi ha rød på denne? *farger rød på figur 1*

Transkripsjonsutdrag 6 viser hvordan jeg forsøkte å veilede elevene til å legge en plan, slik at elevene kunne resonnere rundt hvilke figurer de ikke trodde kunne virke, og eventuelt kunne eliminere bort. Diskusjonen dreide seg i hovedsak om usikkerheten rundt figur 3 og 4. Noen av resonnementene hang løst uten matematisk forankring. Likevel henter noen argumenter oppgavens matematiske egenskaper, som i linje 15, hvor eleven resonnerte rundt figurens kanter. Siden argumentet var matematisk forankret i figurens form, vil det også fremstå mer troverdig for medelevene. Det kom til syne i linje 17, hvor Bea også støttet Benedictes argument. Til tross for at elevene var inne på en god diskusjon om hvilke figurer som ikke kunne virke, gikk elevene raskt tilbake til å prøve figur 1. Det er denne figuren vi tok utgangspunkt i for å forstå oppgaven, og hadde sammen allerede mentalt plassert den røde brikken. Elevgruppen anvender den kjente informasjonen, og starter derfor med figur 1 igjen.

Tabell 8. Gruppe B sine forsøk på Mias brikker.

Forsøk nummer	**Figur**	**Brikkerekkefølge**	**Elevenes tegninger**
1	Figur 1		Mangler
2	Figur 1		
3	Figur 2		
4	Figur 3		
5	Figur 5		

Tabell 8 viser at gruppe B prøvde ut figurene i kronologisk rekkefølge. De brukte også et forsøk på hver figur, bortsett fra med figur 1, hvor den røde brikken først ble tegnet opp uten rotasjon. Når elevene hadde løst figur 1, anvendte ikke elevene samme brikkerekkefølge for de påfølgende figurene, men tegnet heller brikkene i et uvilkårlig mønster. Det kan tyde på at elevene for hver ny figur omstilte seg, og ikke valgte og imiterte hvordan de tidligere hadde tegnet figurene. At elevene ikke fulgte en fast plan kan tyde på at de prøvde og feilet ulike måter å løse problemet, og kan bety at de startet en ny tankeprosess for hver figur. Siden jeg kun har observert elevenes synlige representasjoner, er det også vanskelig å trekke slutninger om brikkerekkefølgen samsvarer med hvordan elevene mentalt hadde forestilt seg dem. Hvorfor figur 4 ikke er inkludert i tabellen, kommer frem i et senere transkripsjonsutdrag.

Transkripsjonsutdrag 7

Mentale forestillinger

62	Betina	Jeg tenker faktisk nå, at vi kan ta den oransje der, og den grønne der (2s) også kan vi ta den røde der, sånn at vi har brukt alle *peker på brikkenes plasseringer i forhold til figur 2*

For å løse de påfølgende figurene, uttrykket elevgruppen seg verbalt, pekte og gestikulerte formens rotasjon, uten å tegne først. Dette tyder på at elevgruppen hadde god romforståelse hvor de mentalt plasserte brikkene før de ble tegnet opp. Dermed la elevgruppen også en plan for brikkesammensetning. Dette kommer også til syne både gjennom transkripsjonsutdrag 8 og 9.

Transkripsjonsutdrag 8

Å oversette mellom mentale bilder og tegning

70	[Benedicte]	Eh, jeg tenker den kommer til å gå på en måte *peker på figur 3*
71	[Martine]	≈Ja, vil dere prøve?
72	[Benedicte]	≈Men du kan jo bare snu den røde der, fordi (1s) åsså kan du ta den blå der, og den grønne der, og den oransje der *peker med fingrene hvor hun mener brikkene skal plasseres*
73	[Betina]	≈/ivrig/ Og de, og de *peker på grønn og oransje brikke, samtidig som Benedicte forklarer* Ja!
74	Martine	Ja, så bra! Og det klarte du å tenke helt uten å tegne, du bare så det for deg? (1s) Gjorde du det, Benedicte?
75	Benedicte	*nikker*
76	Betina	Ja, meeen (1s) skal jeg bare fargelegge den lille toppen?
77	[Benedicte]	≈Du skal fargelegge * peker hvor hun skal fargelegge blått*
78	[Betina]	≈Ja men da er det bare 1-2, en firkant *teller rader øverst i figur 3*
79	[Benedicte]	≈Ja men (1s) jeg så, den veien *tar arket til seg og snur det opp ned**viser med fingrene fra hvilken rad Betina skal fargelegge*
80	Betina	Oja, hehe *fortsetter å fargelegge blått*

I transkripsjonsutdrag 8 kan en se at Benedictes argument om hvordan brikkene skal plasseres ble godtatt av Betina, men at hun trengte ytterligere forklaring i det hun skulle tegne (linje 76). Det tyder på at argumentet er logisk for den som forklarer, men ikke for de andre deltakerne. Det var noe misforståelser i størrelsesforhold i overførsel mellom mentalt bilde og tegning, men Benedicte forklarte hvordan hun hadde tenkt (linje 77, 79). Gjennom å rotere arket uttrykte Benedicte også forståelse rundt hvordan hun mentalt hadde rotert brikken til at den skulle passe. Argumentet ble også forstått fordi det ble forankret i figurens egenskaper, hvor antall ruter i brikken ble talt opp mot figuren. Dette gjorde også resonnementet mer troverdig.

Transkripsjonsutdrag 9

Elevgruppen lander en konklusjon

85	Martine	Okei (2s) hva tenker dere nå?
86	Betina	Mm, jeg tenker vi kunne prøve oss på den! *peker på figur 5* Siden der er det de to *peker på to små trekanter*, og der er det – hvis vi tar røde der, og de to der, også den blå der, også da er det den (figuren) som ikke kan gå *peker så på figur 4*
87	Martine	Smart tenkt! Hvordan så du det, Betina?
88	[Benedicte, Betina]	*fargelegger*
89	Betina	Ehh (2s), jeg bare så det
90	Benedicte	/bestemt/ da er det den *peker på figur 4*
91	Martine	Da er det den som ikke går?
92	Betina	Mhm
93	Martine	Kjempebra tenkt! (1s) Hvorfor begynte du å fargelegge den siste (figuren) og ikke den i midten? Var det noe grunn for det?
94	[Benedicte]	≈På grunn av, fordi det er fire kanter, det er bare, det er bare tre kanter, men der er det fire kanter *peker på figur 4, så de tre trekant brikkene, så figur 4 igjen*
95	Martine	/overasket/ ja! Så dere så et mønster der?

96	Benedicte	Mhm

I transkripsjonsutdrag 9 kom gruppen til konklusjon om at figur 4 måtte være den som ikke virket, gjennom at de først konkluderte med hvordan brikkene kunne plasseres i figur 3 og 5. Også her brukte gruppe B mentaliseringsevnen for å uttrykke sine løsninger. Figur 5 ble forklart, hvor jeg forsøkte å få Betina til å utdype sitt argument (linje 87). Hun utrykket ikke noe videre forklaring enn å tegne inn figuren. Deretter ønsket jeg begrunnelse fra gruppen over hvorfor de løste figur 5 og ikke 4, og Benedicte uttrykket videre et matematisk forankret argument (linje 94). Her begrunnes figurenes geometriske trekk, med at det ikke er nok «spisse» brikker til å passe figur 4. Det kan bunne i at figur 4 har fire spisse vinkler, mens de resterende figurene har tre eller færre.

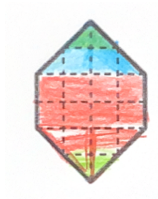
I flere tilfeller av gruppe B sine løsninger, uttrykket de seg først muntlig, og deretter tegnet de. I henhold til typiske steg i en problemløsningsprosess, kan det tolkes som at elevene først la en plan, og så utførte den. Ved å utrykke muntlig hva de tenkte, før de tegnet opp, vil planen kunne synliggjøres for resten av deltakerne. På denne måten virket argumentet mer rimelig og troverdig når de videre skulle tegne opp figurene, og viser at de ikke bare prøver og feiler. Transkripsjonsutdragene synliggjør også deler av matematiske forankrede argumenter hvor både areal og geometriske egenskaper støttet argumentene, som bekrefter at elevene kreativt resonnerer.

4.1.3 Gruppe E – *Å løse problemet på egenhånd*

Gruppe E var siste gruppe som løste problemløsningsoppgavene. I forhold til oppstarten, spesifiserte jeg her at de kunne rotere og snu på brikkene. Her ble det likevel litt misforståelser i oppstarten med tanke på brikkenes størrelsesforhold til figurene, som dermed førte til at gruppen brukte flere forsøk på figur 1 (se tabell 9).

Tabell 9. Gruppe E sine forsøk på Mias brikker.

Forsøk nummer	**Figur**	**Brikkerekkefølge**	**Elevsvar**

1	Figur 1		
2	Figur 1		

Utprøvingen av den første figuren ble gjort på to separate oppgaveark, hvor det første forsøket tydet på at elevgruppen ikke hadde forstått alle aspekter ved problemet. For det første brukte de flere brikker to ganger, størrelsesforholdet samsvarte ikke, og brikkene overlappet. Etter en oppklaring fra meg, ble det forklart at brikkene bare kunne brukes én gang i samme figur, og kunne roteres, løste gruppen figur 1. Ved at de fikk et separat oppgaveark fikk de muligheten til å starte på nytt, og dermed oppdage nye strategier. Etter å ha løst figur 1 med litt utprøving, spurte jeg om hvilken figur de ville prøve ut. De tre deltakerne var uenige, og kom til konklusjon om å teste ut hver sin figur på separate oppgaveark. Denne tilnærmingen førte til interessante funn. Jeg vil nå gå nærmere inn på utprøvingen av de tre nederste figurene. Diskusjonen om hvilken figur de skulle velge kan ses i transkripsjonsutdraget under.

Transkripsjonsutdrag 10

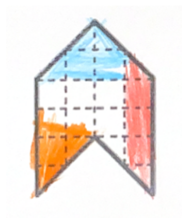
En annerledes fremgangsmåte

I	Martine	Hvilken vil dere prøve ut som neste?
II	[Emilia, Eira]	Jeg vil prøve den! *peker på hver sin figur, 4 og 5*
III	Martine	Hvorfor vil du prøve den, Emilia?
IV	Emilia	Ehh, fordi den er vanskelig *peker på figur 5*
V	Martine	Ja, hvorfor vil du prøve den, Eira?
VI	Eira	Fordi atte, det ser det litt ut som det kan være den, men det ser også ut som det ikke kan være den, og da vil jeg bare ta den bort
VII	Martine	Hvilken synes du ser vanskeligst ut, Eskild?
VIII	Eskild	*peker på figur 3*
IX	Eskild	Kan vi ikke prøve ut én hver

X	Martine	Jo, dere kan jo prøve ut én hver og forklare til de andre etterpå?
XI	Eira	Men se *peker på figur 4* hvis jeg tar én liten (trekant) der, og én liten der, og én liten der, det går ikke an

Her kan man se at elevene ønsket å arbeide baklengs for å finne ut hvilken figur som ikke kunne lages med de fire brikkene, gjennom å ikke prøve ut brikkene i kronologisk rekkefølge. Elevgruppen hadde en felles enighet om at de ønsket å prøve ut den som så vanskeligst ut, og de anvendte derfor elimineringsmetoden. Likevel var det bare Eira (linje XI) som uttrykte en videre forklaring for hvorfor hennes utvalgte figur ikke kunne fungere, hvor forklaringen ble forankret i figurens egenskaper. Hun viste at det lå en plan for det hun skulle utføre, og hvordan hun ønsket å plassere brikkene i figur 4. Argumentet ble ikke fulgt opp av resten av gruppen, som mulig kan være fordi elevgruppen allerede hadde lagt en plan for hvordan oppgaven skulle løses, og ikke var fleksible nok for å lytte til Eiras forklaring.

Tabell 10. Gruppe E sine forsøk på Mias brikker.

Forsøk nummer	**Figur**	**Brikkerekkefølge**	**Elevsvar**
4	Figur 3	 (Eskild)	
5	Figur 3	 (Eskild og Eira)	
6	Figur 5	 (Emilia)	

7	Figur 4	 (Emilia)	

I tabellen over vises elevenes løsningsforslag til figurene. Elevene arbeidet på hvert sitt nye oppgaveark, med hver sin figur. I det elevene arbeidet, oppdaget Eira og Eskild at begge testet figur 3, selv om det ikke var planen. Eskild hadde tegnet noen brikker utover, mens Eira kun hadde plassert den røde brikken på langs. Det ble oppdaget at de hadde løst den ulikt, og jeg utfordret dem til å løse figuren sammen. Eskild uttrykte at han hadde løst figuren feil, og de ble utfordret til å tenke nytt. De løste deretter figur 4 sammen på Eiras ark. I mellomtiden hadde Emilia løst figur 5, og prøvde seg også på figur 4, som vises gjennom følgende transkripsjonsutdrag.

Transkripsjonsutdrag 11

Elevgruppen løser problemet

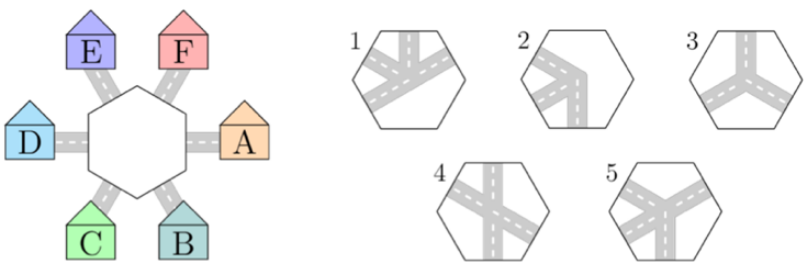
XII	Eskild	Sånn! *fargelegger ferdig figur 3*
XIII	Martine	Da fant Eskild ut at den virker. Bra
XIV	Emilia	Denne virker ikke! Jeg fant det ut! *løfter opp arket sitt*
XV	Martine	Hvorfor tror du at den ikke virker, Emilia?
XVI	Emilia	Fordi atte her er det fire sånne spisser, og den har vi ingen av klossene på, og den liksom, har én sånn en, men den har ikke den store blåe *peker på spissene i figur 4*
XVII	Martine	Nei, den har ikke den store blå! Tenkte du det samme Eira, du så jo den med en gang og trodde den var vanskeligst? Så du det samme som Emilia?
XVIII	Eira	Mhm, ja. Det var ikke den blå der, bare de små

På bakgrunn av at både figur 3 og 5 hadde blitt utprøvd og viste seg å virke, kom Emilia til konklusjon om at figur 4 ikke hadde plass til alle brikkene. Hun forklarte mens hun tegnet inn figur 4 på eget ark (linje XVI). Her viste Emilia også at hun klarte å argumentere matematisk for hvorfor figur 4 ikke kunne virke, gjennom at figur 4 hadde fire spisser, mens de andre figurene hadde tre. Det forklares også at den blå brikken ikke får plass. Dermed forankres hennes resonnement matematisk, gjennom å undersøke både brikkenes og figurenes geometriske egenskaper.

Jeg har nå presentert hvordan kreativ resonnering kommer til syne i tre eksempler fra ulike gruppers løsningsforslag på oppgaven *Mias brikker*. Det er fremtredende at elevene på ulikt vis uttrykte sin kreative resonnering gjennom både prøving og feiling, planlegging, iverksetting av strategier, og gjennom å sjekke egne svar. Oppsummert var gruppe E den gruppen som skilte seg mest ut i forhold til fremgangsmåte. De valgte å prøve ut hver sin figur på hvert sitt oppgaveark, etter en felles forståelse over hvordan de kunne løse problemet gjennom figur 1. Dette førte til at elevgruppen i motsetning til gruppe A og B, ikke behøvde å argumentere for ulike løsningsforslag og strategier til gruppen, dersom de var uenige i problemløsningsplanen. De uttrykte seg heller gjennom tegning, og kunne uttrykke ulike strategivalg. Det er vanskelig å vurdere om elevene i gruppen hadde en plan, eller om de bare prøvde og feilet for å løse figuren. I Eiras tilfelle (linje XI, transkripsjon 10) forsøkte hun å forklare til gruppen, men det ble ikke godtatt før omtrent alle figurene var prøvd ut. Elevene prøvde seg ikke på figur 2. Det kan bunne i at elevene heller ønsket å prøve seg på de figurene som virket vanskeligst, for å eliminere løsningsforslag og lande en konklusjon.

4.2 Almas veivalg

21. Alma skal legge en brikke i midten slik at det er mulig å reise mellom A, B og E.
Men det skal *ikke* være mulig å reise til D. Hun kan vri på brikkene.



Hvilke to brikker kan Alma bruke?

(A) 1 og 2 (B)2 og 3 (C) 1 og 4 (D) 4 og 5 (E) 1 og 5

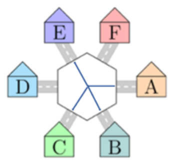
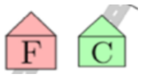
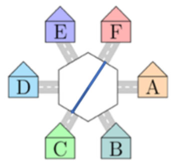
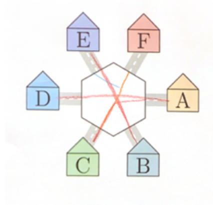
Å løse problemløsningsoppgaven Almas veivalg krevde både romforståelse og evnen til å kunne resonnere seg frem til mulige løsninger. Elevene hadde heller ikke her fysiske brikker.

Jeg testet ut fysiske puslespillbrikker med én av pilotgruppene (gruppe B), for å ha prøvd det ut. Det viste seg at introduksjonen av fysiske brikker førte til at oppgavens potensiale ble noe svekket, fordi elevene fysisk kunne plassere brikken mellom husene, og rotere den helt til den passet. Dermed valgte jeg å beholde oppgaven slik den var, hvor elevene måtte bruke sin mentaliseringsevne for å løse problemet. Jeg vil nå legge frem to gruppers arbeid og ulike måter resonnementer kom til uttrykk gjennom gruppearbeidet, på samme måte som i delkapittel 4.1. Mitt utvalg består av gruppe A og gruppe C. Som nevnt tidligere er gruppe A en del av piloteringen. Resultatene vil bli presentert i kronologisk rekkefølge.

4.2.1 Gruppe A – *Viktigheten av rimelige argumenter*

Gruppe A er presentert tidligere, men fordi deres gruppe evnet å utfordre hverandre som en del av problemløsningsprosessen, er de også tatt med i resultatene for Almas veivalg. Jeg vil nå gjennomgå utvalgte transkripsjonssekvenser og tabeller, og kommentere på deres valg av uttrykksformer for å begrunne elevgruppens kreative resonnering.

Tabell 11. Gruppe A sitt løsningsforslag til Almas veivalg, med min fremstilling av hvordan elevene enten tegnet eller gestikulerte sitt løsningsforslag, i høyre kolonne.

Forsøk nummer	**Veivalg**	**Rekkefølge av hus**	**Uttrykksform**		**Fremstilling av elevsvar**
			Gestikulerer	**Tegner**	
1			X		
2				X	
3				X	

Tabellen viser at gruppe A valgte å jobbe baklengs, hvor de startet med veivalg 5, og jobbet seg bakover i de nummererte veivalgene, fra fem til én. Elevgruppen brukte flere forsøk, da de stadig argumenterte frem og tilbake mellom ulike løsninger til veivalget. Jeg vil nå kommentere på elevenes prosess i arbeid med veivalg 5 gjennom transkripsjon 12 og 13.

Transkripsjonssekvens 12

Umiddelbar oppfatning av et mulig løsningsforslag

I	Aksel	Det er den! Jeg bare tenker, det er den! *peker på veivalg 5*
II	Aurora	Men da vet vi jo at den her kan passe inn der *peker mellom hus A og hus D*
III	Aksel	Neeeiiii
IV	Aurora	Hvis vi bruker den... nei
V	Aksel	Den, se nå, se nå *fjerner Auroras hender og lener seg over arket* Hvis vi tar den, så tar vi A, B, og så kommer jo den til C! Og, ja men, rett bak B - og B er jo i midten, så kommer den til E! Og da er jo den riktig! *peker mens han forklarer*
VI	Aurora	Jeg følte at du snakka veldig mye *fniser*
VII	Aksel	Ja det er jo derfor jeg gjør det, for jeg må forklare det litt nøye [...]
VIII	Aurora	Se! Se, når vi, kunne vi kjøre til F?
IX	Martine	Du kan kjøre til alle utenom D, men den skal klare å reise gjennom A, E og B
X	Aurora	Se, hvis vi tar en strek der *tegner strek fra hus F til C*, da kan den jo kjøre til F og C ... ja, også kjører vi, nei ...

Omtrent umiddelbart etter en muntlig introduksjon av oppgaven for elevgruppe A, brøt Aksel ut at «det er den!» og pekte på veivalg nr.5 (linje I). Det indikerer at Aksel klarte å se for seg hvordan veivalget skulle plasseres mentalt. Elevene måtte her tenke på en ny måte, og anvende evnen til å kunne rotere og forflytte mentale bilder for å kunne forestille seg hvordan brikkene kunne plasseres. Fra sekvens I-VII er det tydelig at Aksel forstod problemet fordi han forankret sitt resonnement gjennom figurens rotasjonsegenskaper. Aurora forsøkte å forstå hans argument ved å selv forklare løsningsforslaget (linje 84, linje 90). Fra linje 90 begynte Aurora å tegne opp brikken i samme retning som den ble fremstilt på oppgavearket. Her prøvde hun og feilet som strategivalg. Elevgruppen var fleksible gjennom å utforske ulike strategier. Deretter minnet jeg gruppe A på at de kunne rotere brikkene (se transkripsjon under).

Transkripsjonsutdrag 13

Å tegne for å overbevise de andre deltakerne

XI	Martine	Men går det an å vri på brikken?
XII	Alice	Ja!
XIII	Aurora	Ja, det gikk an å vri!
XIV	Aksel	Ja, det er derfor vi skal vri på den der! *drar arket mot seg og peker på veivalg 5* (2s)
XV	Aurora	*innpust* Ja! Vi viser den der, du ser den her
XVI	Aksel	Se! Okei, okei
XVII	Martine	Så nå skal Aksel tegne, så må du forklare litt hva du gjør
XVIII	Aksel	Okei, sånn *tegner strek fra midten og ned til hus B og A* Det var jo den og den. Også tar vi også, det var helt riktig der *fremhever strek ned til hus C*, sånn. Og, så! Du vet at B var den i midten, på grunn av der og der *peker på veivalg 5 sine små veier* B fikk den bakerst, og B peker jo mot E! Og derfor er det riktig.
XIX	Aurora	≈Jeg har det jeg har det!! Ja, for hvis man skulle snudd på den der, så kunne jo den der, siden der er det jo ikke noe utgang, og da kan man ikke kjøre til D.

Mens Aksel forklarte og tegnet, lyttet resten av gruppen. Det er tydelig at hans resonnement tydeligere kom frem da han fikk tegnet opp løsningsforslaget rundt veivalg 5. Han klarte å overbevise gruppen til å forstå hans opprinnelige tankegang, og matematisk forankrer sitt resonnement. Dette er et eksempel på at elevene kreativt resonnerer seg frem til riktig løsning. I slutten av transkripsjonen (linje XIX) er det tydelig at Aurora hadde forstått Aksels resonnement, da hun gjenfortalte og forenklet problemet ved å selv forklare løsningsforslaget. Etter at elevene hadde identifisert at veivalg 5 kunne fungere, spurte jeg hvilken de vil prøve ut. Elevene fortsatte å arbeide baklengs, og diskuterte veivalg 4. Dermed oppstod det gode kreative resonnementer, fordi elevene var uenige og måtte begrunne sine valg (transkripsjon 14).

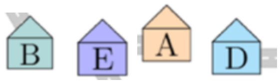
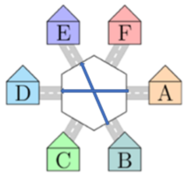
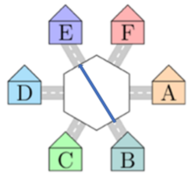
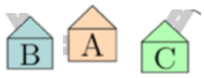
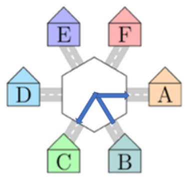
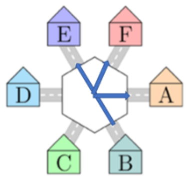
Transkripsjonssekvens 14

Uenighet førte til gode resonnementer

XX	Aurora	Det kan være veldig mange!
XXI	Aksel	Det kan ikke være den vertfall *peker på veivalg 4*
XXII	Aurora, Alice	Jooo
XXIII	Aksel	Nei! Fordi, se nå *tegner strek mellom hus B og E, og hus A og D* sånn, og sånn. Det kan ikke være den
XXIV	Aurora	≈Det KAN være den *peker på veivalg 4*
XXV	Aksel	Okei vi krysser over de det ikke kan være, det kan ikke være den *peker på veivalg 4*
XXVI	Alice	Det kan være den *peker på veivalg 4*
XXVII	Aurora	Jo! Det kan være denne
XXVIII	Martine	Vil du vise? Hvorfor det kan være den
XXIX	Aurora	Siden hvis vi lager, jo, nei ... er det en tynn X? *setter strek mellom hus B og hus E* Og da ser vi jo at de peker på sånn
XXX	Aksel	≈Det er en tynn X ja, en tynn X
XXXI	Aurora	Og man kan jo ikke komme seg inn til D!
XXXII	Martine	Men husk at du også skal komme til A
XXXIII	Aurora	/utydelig/ komme til A, ja, men da, kan vi ikke bruke de andre også? *peker på veivalgene*
XXXIV	Alice	Men vi kan jo vri på brikkene
XXXV	Aksel	Men kan vi sette et kryss over den da? Plis
XXXVI	Aurora	Ja

Elevene identifiserte veivalg 4 som en tynn X, som viser at de dannet et mentalt bilde i prosessen hvor de skulle overføre det mentale bildet ned til arket. Aksel hadde gitt sin forklaring (linje XXIII) og tegnet den opp. Likevel ville Aurora utforske eget løsningsforslag, og forsøkte å tegne. Hun mente at løsningen var klar, fordi veien ikke kunne komme inn til hus D. Auroras forslag gjorde likevel at en ikke kom til hus A, som var et kriterium for at veivalget skulle fungere. Dermed forkastes hennes argument, og Aksel eliminerte bort veivalg 4 ved å sette et kryss over det. Transkripsjonsutdrag 11 viser hvordan elevene i større grad måtte bruke overbevisningsevne deres for at deres resonnement skulle oppfattes riktig for de øvrige deltakerne, enn dersom de hadde vært enige fra starten. Elevene anvendte fleksible metoder, som viser at de var villige til å utforske flere måter å løse oppgaven på. Det tyder på at de kreativt resonnerer godt, fordi de ikke bare bruker den første og beste løsningen.

Tabell 12. Elevgruppe A sine løsningsforslag til Almas veivalg.

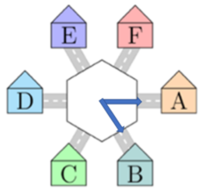
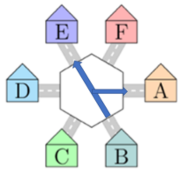
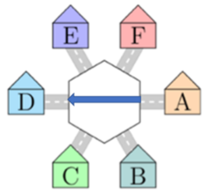
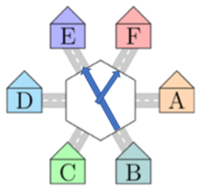
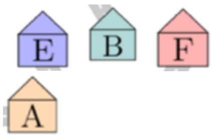
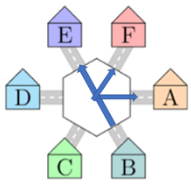
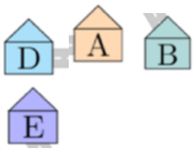
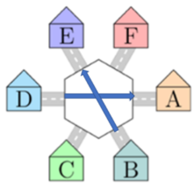
Forsøk nummer	**Veivalg**	**Rekkefølge av hus**	**Gestikulerer**	**Tegner**	**Fremstilling av elevsvar**
4				X	
5				X	
6				X	
7				X	

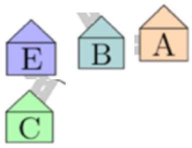
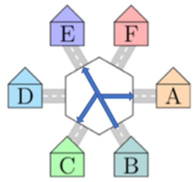
Etter diskusjoner rundt løsningene til både veivalg 1 og 4, valgte elevgruppen å prøve veivalg 2. De ga det et forsøk, før de eliminerte løsningsforslaget og heller prøvde veivalg 1. I tabellen over, kan en se hvordan de kun brukte ett forsøk, og kom frem til en løsning. Det kan tyde på at elevene etter mye prøving og feiling og diskusjoner rundt ulike veivalg, hadde forstått problemet og hadde en klar plan for hvordan de neste veivalgene kunne plasseres.

4.2.2 Gruppe C – Å planlegge og så iverksette

Gruppe C er ikke tidligere presentert, og var første observasjon etter de to pilotene. De har fått pseudonymer Celine, Casper og Camille. For å presentere deres arbeid vil jeg på samme måte som med gruppe A, legge frem et utvalg transkripsjonsutdrag og tabeller.

Tabell 13. Gruppe C sine løsningsforslag til Almas veivalg.

Forsøk nummer	**Veivalg**	**Rekkefølge av hus**	**Uttrykksform**		**Fremstilling av elevsvar**
			Gestikulerer	Tegner	
1			X		
2				X	
3			X		
4			X		
5				X	
6				X	

7				X	

Tabellen viser at gruppe C valgte å teste ut veivalgene i relativt kronologisk rekkefølge. De hadde derimot bare behov for å tegne opp tre av løsningsforslagene, og tester fire totalt. Det kan tyde på at de viste en forståelse for romlige forhold, og hadde god evne til å mentalisere og se for seg hvordan veivalget skulle plasseres mellom husene.

Transkripsjonssekvens 15

En logisk gjetning

I.	Casper	Jeg tror den *peker på veivalg 1* skal der *peker på sirkel med hus*
II.	Martine	Ja, hvorfor tror du det? Vil du kanskje ha et ark å tegne på for å vise *legger frem ark*
III.	Casper	Fordi da kan, da kjører den inn der *peker på hus A* også kan veien fortsette ... nei
IV.	Martine	Men Casper du kan jo prøve å tegne den ut? Og husk at du kan vri på brikkene så mye du vil
V.	Celine	*begynner å tegne strek fra E og mot midten*

Umiddelbart identifiserte Casper at det kunne være veivalg 1. Det virket som Casper hadde en idé i hodet, men ombestemte seg. Siden argumentet hans ikke ble forankret matematisk eller tegnet opp, virket det kanskje ikke troverdig nok for de andre deltakerne, og ble ignorert. Celine begynte deretter å tegne på arket uten å snakke høyt. I det veivalg 3 ble foreslått av Camille, tok Celine opp blyanten igjen.

Transkripsjonssekvens 16

Utprøving av veivalg 3

VI.	Camille	Det kan jo være den, for den har 3 veier og den skal til 3 hus *peker på veivalg 3*
VII.	Celine	*Begynner å tegne opp veivalg 3, setter strek fra hus E til hus B og hus A*
VIII.	Martine	Hvilken er det du tegner opp nå, Celine?
IX.	Celine	Den *peker på veivalg 3*
X.	Martine	Ja, ser den lik ut *peker på tegning*, som den? *peker på veivalg 3*
XI.	Casper	Ja, bare at hun vridde på den
XII.	Martine	Hvis dere ser, så går den bare til annen hvert hus. Så egentlig, skal den pilen som peker mot B gå ned til C... Så dere det?
XIII.	Celine	Mhm
XIV.	Camille	Mot C?
XV.	Celine	Det er en T *peker på tegning* og det er en Y *peker på veivalg 3*

Camille foreslo veivalg 3, og fulgte opp med en rimelig forklaring (linje VI). Derfor begynte Celine å tegne på arket igjen. Det kan tolkes som at Camilles argument var troverdig, og planen blir iverksatt og prøvd ut på papiret. Elevene tegnet opp veien feil, og jeg utfordret dem til å se nøyere på veiens egenskaper (linje X). Etter forklaringen virket Camille fortsatt usikker, og Celine forklarte med egne ord hvorfor veivalg 3 var feil (linje XV). Det førte til at Camille forstod resonnementet, fordi hun koblet problemet til noe kjent når hun ga sin forklaring. Hun bygger sitt resonnement på matematiske egenskaper, hvor hun viser god forståelse for hvordan veiene er plassert i henhold til hverandre (linje XV). Det gjorde at argumentet godtas, og elevene eliminerer bort veivalg 3 som mulig løsning.

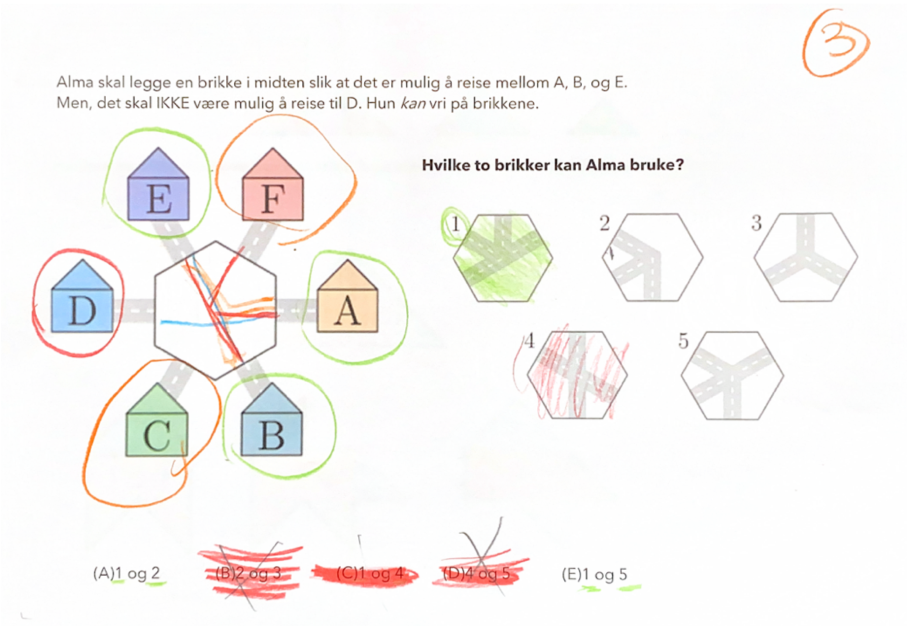
Transkripsjonsutdrag 17

Tilbake til veivalg 1

XVI.	Martine	Men Casper, du sa nr.1, hvorfor tror du den?
XVII.	Casper	Men jeg tror ikke den funker
XVIII.	Martine	Hva tenker du da
XIX.	Casper	Jeg den går sånn og sånn *gestikulerer strek mellom A og D* også da går den inn der *peker på D*
XX.	Martine	Ja, vil du tegne opp og vise?
XXI.	Celine	*gestikulerer med et viskelær at den går mellom E, F og B*

XXII.	Martine	Hvis en ser på brikken, er det en lang strek og to korte
XXIII.	Celine	≈ *tegner opp strek fra hus E til B, så F og A*
XXIV.	Martine	Se det Celine, går den til A, B og E nå?
XXV.	Casper	Eh, neei?
XXVI.	Celine	*tegner oppå strekene for å synliggjøre*
XXVII.	Martine	Går den til A, B, E?
XXVIII.	Camille	Jaa
XXIX.	Casper	Og F
XXX.	Martine	Men det går fint, så lenge den går til A, B, E, og ikke D

Transkripsjonsutdrag 17 er et eksempel på misoppfatninger når det gjald forståelse av problemet. Oppgaven inneholdt mye informasjon, som gjorde at det ikke kom tydelig nok frem at veiene også *kunne* innom hus F og C, men *måtte* innom A, B og E. Det kom frem i linje 146. Siden informasjonen ikke kom tydelig nok frem, ble derfor Casper usikker på sitt forslag om veivalg 1. Transkripsjonsutdraget viser også hvordan elevene utforsket løsningsforslagene gjennom å bare tegne og gestikulere, uten å snakke mye sammen. Casper var usikker på veivalg 1, og gestikulerte det han tenkte. Det tyder på at han ønsket å legge en plan gjennom å gestikulere, før han tegnet opp forslaget. På den andre siden, virket Celine sikker, og tegnet uten å diskutere med de andre deltakerne. Casper tvilte på løsningen, og i stedet for å utrykke et muntlig argument, valgte Celine å synliggjøre strekene på tegningen (linje XXV). Dette kan tolkes som en slags gjentakelse fra Celines side, for å gjøre hennes resonnement mer rimelig. Jeg gjentok også spørsmålet og Camille godtok argumentet (linje XXVIII). Casper var fortsatt i tvil, og jeg gjentok derfor problemformuleringen (linje XXX). I oppgavearket under kan en se hvordan elevene hadde tegnet opp sitt løsningsforslag. Etter denne utprøvingen, valgte også elevene å markere husene i henholdsvis rød, oransje og grønn, for å markere hvilke hus de kunne komme til, som vist under (se figur 11).



Figur 11. Gruppe C eliminerer løsningsforslag underveis

Oppgavearket viser hvordan elevene underveis eliminerte løsningsforslagene. Det er noe jeg utfordret dem til, for å se om de klarte å oppdage at noen forslag kunne elimineres da de hadde funnet ut at veivalg 1 var en mulig løsning. De unngikk å teste veivalg 2, men prøvde veivalg 4. De eliminerte veivalg 4 på første forsøk. Dermed strøk de ut de tre veivalgene i midten, fordi de viste at det verken kunne være veivalg 3 eller 4. Dette viser god forståelse for oppgaven. Deretter testet de veivalg 5 (se transkripsjon under).

Transkripsjonsutdrag 18

Elevene lander en konklusjon

XXXI.	Casper	Fem er det aldeles ikke
XXXII.	Martine	Det kan ikke være fem?
XXXIII.	Casper	Tror jeg i hvert fall
XXXIV.	Martine	Vil dere prøve? Dere kan få et nytt ark hvis det var mange streker der nå
XXXV.	Casper	Mm, ja
XXXVI.	Casper	*krysser over løsningsforslag fra forrige ark* vi var på fem
XXXVII.	Celine, Casper	*gestikulerer med hver sin blyant*
XXXVIII.	Casper	Vi må sikkert begynne på A ...
XXXIX.	Celine	*tegner opp løsningsforslag 5 riktig*
XL.	Martine	Hvilken har du tegnet opp nå?
XLI.	Celine	Nummer fem

XLII.	Martine	Ja, går den til A? *elevene svarer ja* Går den til B? *elevene svarer ja* Går den til E? *elevene svarer ja* Og går den til D? *elevene svarer nei* Nei, er den riktig da?
XLIII.	Camille	Og til C
XLIV.	Martine	Ja, er den riktig da?
XLV.	Casper	Ja *fargelegger grønt på siste løsningsforslag*

I dette transkripsjonsutdraget hentet elevene informasjonen fra forrige oppgaveark og overførte det, slik at problemet ble forstått i riktig lys når de skulle begynne å tenke over nytt delproblem (linje XXXVI). Elevene brukte et par forsøk på å gestikulere streker med blyanten, før de tegnet. Det tyder på at de la en plan, og var fleksible i valg av strategi. Etter Casper uttrykket at streken burde starte på A, fulgte Celine med å tegne streken opp fra hus A (linje XXXIX). Gjennom at Casper kommuniserte sin plan høyt, ble den fulgt, og løses dermed riktig. For å forsikre gruppen at de har funnet riktig svar, spurte jeg bekreftende spørsmål (linje XLII), og elevene godtok egen løsning på problemet. Camille uttrykte at den også går til C, og Casper godtok fortsatt løsningen. Det tyder på at han hadde oppklart misoppfatningen fra tidligere (trankripsjon 17, linje XXIX).

Elevgruppe C løser problemet relativt raskt, hvor de til tross for litt misoppfatninger, tenkte nytt og løste problemet med få forsøk. Til tross for at de ikke uttrykte sine argumenter så sterkt muntlig, brukte de tegning som hjelpemiddel for å forsterke egne løsningsforslag. Resultatet viser også at gestikulasjoner uten særlig forklaring gjorde det vanskelig å oppfatte et argument som rimelig. Elevene viste forståelse for romlige forhold, da de gjerne overførte bilde av veivalget til egen tegning på første forsøk.

5.0 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg svare på mitt forskningsspørsmål, gjennom å drøfte funn i analysen opp mot allerede presentert teori (kapittel 2). I første delkapittel (5.1) vil jeg drøfte mine metodiske valg, og hvordan min rolle som deltaker i observasjonene kan hatt innvirkning på resultatene. I andre delkapittel (5.2) vil jeg drøfte hvordan elevenes kreative resonnering kom til uttrykk, og diskutere dette i lys av mitt presenterte teoretiske rammeverk. Til slutt vil jeg komme til en konklusjon (kapittel 6) som besvarer forskningsspørsmålet mitt:

> *På hvilke måter kommer elevers kreative resonnering til uttrykk gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romlig forståelse?*

5.1 Metodisk drøfting

Som aktiv deltaker av observasjonene, hadde jeg en rolle i hvordan elevenes kreative resonnementer kom til uttrykk, og har spilt en rolle i elevenes problemløsningsprosess. En del av å løse et problem handler om å forstå problemet, utforske mulige løsninger, lage en plan, iverksette planen, og å se tilbake (Schoenfeld, 1985). Min aktive rolle i prosessen, kan ha hindret elevene i å oppdage egne strategier, samt muligheten til å være kreativ i prosessen. Dette kan hatt innvirkning på hvordan elevene fikk muligheten til å forstå problemet på egenhånd, og i noen tilfeller muligheten til å utforske mulige måter å løse oppgaven, ved at jeg eksempelvis tilbød elevene ark og fargeblyanter ganske tidlig i prosessen. Disse valgene under datainnsamlingen ble gjort noe bevisst, da jeg ønsket at elevene skulle ha mulighet til å tegne. Noen valg og utsagn fra min side ble intuitive, og min deltakelse var påvirket av elevenes grad av selvstendighet i problemløsningsprosessen. Gjennom videotaking, fikk jeg mulighet til å reflektere over min rolle i etterkant, som også bevisstgjorde meg lærerens rolle i en slik klasseromssituasjon ellers. Resultatene viser at elevene kan motiveres gjennom å få hjelp til å komme i gang med startfasen av problemløsningen. Dersom elevene sitter fast ved en misforståelse eller et delproblem og ikke kommer videre, kan det føre til at de gir opp. Et motargument er at deltakelsen gjerne kan bli for aktiv, som kan påvirke elevers evne til å selv utforske og oppdage egne strategier og løsninger. Det må derfor bli en balansegang mellom det å være aktiv deltaker og gripe for mye inn, og det å være tilbakeholden i å komme med forslag.

5.2 Problemløsningsprosessen og kreativ resonnering

I dette delkapittelet vil jeg drøfte resultater fra analysen i lys av teori fra problemløsning (Pólyá, 1945; Schoenfeld, 1985) og kreativ resonnering (Lithner, 2006; 2008). Jeg ser på disse to områdene og sammenhengen mellom de gjennom mitt analyseverktøy (kapittel 4.5), og legger derfor frem drøftingen på bakgrunn av dette. Her vil underoverskriftene være basert på hovedkategoriene i analyseverktøyet, hvor jeg vil forsøke å trekke tråder mellom de presenterte resultatene for drøfte felles funn på tvers av gruppene.

5.2.1 Å forstå problemet – og måtte tenke nytt

Å ha en forståelse for problemet er en forutsetning for å kunne starte problemløsningsprosessen (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). Felles for alle elevgruppenes problemløsningsprosesser i mine resultater, var at ingen hadde møtt oppgavene *Mias brikker* og *Almas veivalg* tidligere. Dermed måtte elevene tenke nytt for å forstå problemet.

Oppgavene *Mias brikker* og *Almas veivalg* ble presentert for gruppene, og opplest fra meg samtidig som elevene fikk se over og undersøke problemet. Dette var gjennomført likt for alle gruppene. Dette kan hatt innvirkning på elevens mulighet til å selv lese, analysere og dermed forstå oppgaven, og hente ut nyttig og relevant informasjon fra oppgaveteksten på egenhånd. I det elevene fikk hørt og sett problemet, og selv hadde en egen oppfattelse og tilstrekkelig informasjon til å starte, begynte prosessen. Likevel, kan det å lese problemet sammen bidra til at alle var delaktige i problemløsningsprosessen. Det kunne blitt dannet en felles forståelse i utgangspunktet, som kan være motiverende for å starte arbeidet mot en løsning.

I tilfellene knyttet til *Mias brikker*, grep jeg i flere tilfeller inn for å oppklare problemet, etter at elevene kun ga figur 1 ett forsøk. Dette kan hatt innvirkning på elevenes mulighet til å utforske oppgavene på et bredere plan. Dersom jeg hadde stilt meg mer tilbakeholden i oppstarten av problemløsningsprosessen, ville kanskje resultatene blitt annerledes. I presenterte resultater fra *Mias brikker* kom det frem at alle tre grupper (A, B og E) brukte to eller flere forsøk på å forstå hvordan de skulle løse den første figuren, med eller uten hjelp. Løsningsforslagene til elevene for figur 1, viser at de enten hadde misforstått bruken av samme brikke flere ganger i samme figur, eller at de hadde misforstått størrelsesforholdet mellom brikkene og figurene de mentalt skulle plassere brikkene i. Likevel hadde de skjønt at de kunne rotere og snu brikkene når de tegnet dem opp. Dette kan ha sammenheng med at barn fra fem årsalderen gjerne bruker riktige bevegelser utviklet fra intuisjonen, men ikke alltid er like nøyaktig når det gjelder retning og størrelse (Clements & Sarama, 2021, s.183). Dette tyder på at elevene fortsatt var i en prosess med å forstå problemet i det de iverksatte. Problemløsningsplanen forutsetter ikke at elevene følger den kronologisk, som også er tilfellet her. Det viser også at det er en ny sekvens som oppstår for elevene da de verken kan koble problemet til noe algoritmisk eller kjent, eller imitere et løsningsforslag (Lithner, 2006).

I *Almas veivalg,* var det ikke mange misforståelser når det gjaldt hvordan elevene forstod oppgaven, men heller at oppgaven inneholdt mye informasjon som gjorde at flere hadde behov for å forstå delproblemer på nytt. Et fellestrekk var derfor at flere grupper måtte se problemet i nytt lys. Det var også større misforståelser rundt å mentalt overføre bildene til egen representasjon enn med *Mias brikker*, som kan bunne i at veivalgene har mye detaljer som kan gjøre det vanskelig å mentalt overføre bilde presist til egen tegning. Disse resultatene var delvis forventet for en andreklassing, elever ikke forventes å korrekt kunne mentalt rotere bilder før de er i åtte-årsalderen (Clements & Sarama, 2021, s.184). Mine resultater tyder på at selv om elevene kanskje har forstått det oppgaven etterspør, har de ikke forstått alle momenter, og må prøve og feile litt for å forstå hele problemet før de eventuelt legger en ny plan. Dette vil jeg nå drøfte videre i delkapittel 6.2.2 og 6.2.3.

5.2.2 Å være fleksibel for å utforske ulike strategier

Å utforske som en del av problemløsningsprosessen handler om å kunne prøve ut ulike fremgangsmåter, feile, og prøve igjen (Schoenfeld, 1985), før elevene eventuelt går videre til å lage en plan. Det kan være vanskelig å lage en plan og følge den, fordi det krever at elevene har forstått alle aspekter av oppgaven først. Dermed er det en naturlig del å utforske mulige måter å gå frem for å løse problemet, både i *Mias brikker* og *Almas veivalg*.

I *Mias brikker,* kom det frem i resultatene at elevgruppene (A, B og E) brukte fleksible fremgangsmåter for å komme frem til sine konklusjoner. For eksempel kan en se mønster i hvordan gruppe A stadig startet med å mentalt plassere den røde, største brikken i figurene, i alle tilfeller. Det viser at elevgruppen viste en kontroll over problemløsningsprosessen, fordi de er konsekvent i sin fremgangsmåte (Schoenfeld, 1985, s. 27). Dette eksempelet kan også tyde på at elevene er vant til å jobbe algoritmisk og imitativt i prosedyreoppgaver, fordi de følger samme prosedyre for alle figurene. Etter at elevgruppe A har løst figur 1, og vet at strategien fungerer, går de videre til å imitere sin prosess på resten av figurene. Dette støtter Lithners (2006) teori om at elever i skolen gjerne jobber med instrumentelle rutineoppgaver, og dermed ikke får samme mulighet til å kreativt resonnere. Det viser at oppgavene jeg har gitt elevene tilrettelegger for at elever kan finne en god løsningsmetode, og anvende den om igjen. Det viser at elevene ikke nødvendigvis må bruke lang tid på å løse kognitivt krevende oppgaver. Dersom de kreativt resonnerer på en god måte, kan oppgaveløsingen bli effektiv.

Sammenliknet med resultater fra gruppe B og E, er mønsteret for brikkerekkefølge ikke konsekvent her. Det er vanskelig å tyde hvorfor elevgruppe B har tegnet opp brikkene i et usammenhengende mønster for hver ny figur, men det kan ha sammenheng med at elevene er i en utforskende prosess og tester ut ulike strategier for å løse figurene. Likevel er det vanskelig å anta at elevene fører opp brikkene på arket i den rekkefølgen de har tenkt. Den eksterne representasjonen trenger ikke nødvendigvis å samsvare med den interne (Hana, 2014, s.131). Denne usammenhengende rekkefølgen kan tyde på at elevene viste mindre kontroll over konsekvensene for utviklingen av en løsning (Schoenfeld, 1985, s.27). De holdt seg ikke til en plan aktivt, men prøvde seg heller frem til de landet en konklusjon.

Lignende resultater kommer frem under *Almas veivalg*, hvor det kan oppfattes vanskelig for elevgruppene å finne en strategi som mulig kunne anvendes for alle veivalgene. Dette kom også frem i analysen av elevresultatene, hvor en ser at hvert veivalg forutsetter at en forstår hvordan det mentale bilde kan roteres, snus og overføres til tegning. Her er det et mønster å se i at elevgruppene (A og C) ofte kommuniserte sine løsningsforslag høyt til gruppen eller gestikulerte, før de tegnet dem opp. Det er også i disse eksemplene, hvor elevgruppene først oversatte veivalget mentalt, at de gjerne tegnet det opp korrekt. Dette tyder på at elevene legger en plan, før de iverksetter (Schoenfeld, 1985). Resultatene viser evnen til å opprettholde mentale bilder i hodet og frembringe dem korrekt på papir etterpå (Clements & Sarama, 2021, s.165). Til tross for at elevene ikke alltid klarte å feilfritt tegne opp det veivalget etterspurte, var det også flere tilfeller hvor elevene klarte det, ved å bryte ned problemet. Da de brøt ned problemet i delproblemer, og forholdt seg til en og en «vei» i veivalget, var det enklere for dem å løse det. Dette kan en se eksempel til fra gruppe A og C med veivalg 5, hvor elevene tegner opp den lange veien først, og deretter de to sideveiene. Det forklarer elevens evne til å lage en plan for hvordan de skal angripe problemet, før de iverksetter planen. På den andre siden, ser en tilfeller i resultatene hvor elevene umiddelbart startet å tegne, og forstod deretter at løsningen ikke vil fungere, og ombestemte seg. Det vil si at det i tilfellene med arbeidet rundt *Almas veivalg*, gjerne lønner seg å legge en plan før en utforsker eventuelle løsningsforslag. Likevel kan det være vanskelig å opprettholde mentale bilder i overføringen, og at det er derfor elevene gjerne prøver seg frem gjennom tegning som uttrykksform.

Et generelt funn fra analysen, er at det vanskelig å tolke om elever konstruerer en plan, og observere hvordan de tenker før de setter i gang med å prøve å finne en løsning på problemet. Dersom elevgruppen ikke kommuniserer høyt hvordan de tenker å gå frem, kan det virke som at de bare prøver og feiler, selv om de kanskje har en plan i hodet. Det kan gjerne virke som elevene er planløse, og mangler bevissthet over egen prosess mot målet. For at elevene skal synliggjøre hvor de er i problemløsningsprossessen, må de være bevisst egne handlinger. Dette er en del av atferdsaspektet hvor elevene evner å kontrollere egen læringsprosess (Schoenfeld, 1985, s.27). For deltakerne av gruppen er det dermed viktig å være i dialog, hvor elevenes plan eller utforsking synliggjøres og kommer til uttrykk enten muntlig eller gjennom eksterne representasjoner. Å være fleksible i egne strategivalg er også tegn på at elevene er i prosessen av å kreativt resonnere. De anvender ingen kjent algoritmisk tilnærming, fordi de ikke kan bruke samme strategi konsekvent gjennom hele oppgaven. Dette kommer særlig til syne i oppgaven *Almas veivalg*.

5.2.3 Å konstruere et rimelig argument

Gjennom analysekapittelet kom elevenes kreative resonnementer gjerne til syne når elevene forsøkte å overbevise de andre deltakerne om at deres argument var mest gyldig. Lithner (2008, s.256) argumenterer for at all resonnering har opphav i læringsmiljø. Å bygge et rimelig resonnement handler dermed om hvilken støtte og motstand en får fra læringsmiljøet man befinner seg i. Derfor har det vært interessant å se på hvordan sekvenser at kreativ resonnering har oppstått i disse små gruppene, og hvordan elevene må begrunne sine strategier og valg i form av argumentasjon for at det skal overbevises til resten av gruppen. Et fellestrekk fra resultatene var at dersom deltakerne av gruppen utfordret hverandre, hadde de også større behov for å begrunne sine argumenter (Balacheff, 1990; Volmink, 1988). Uenighet i problemløsningsprosessene til elevene førte til at de måtte forsterke sine argumenter, gjennom å eksempelvis overbevise en skeptiker (Tømmerdal, 2022). Til tross for at de fleste deltakere var delaktig i prosessen, ble ikke dette alltid uttrykt gjennom muntlig kommunikasjon. Noen ganger brukte elevene bare tegning for å overbevise de andre deltakerne på gruppen om at deres argument var mer troverdig. I min analyse av resultater, kom det frem gjennom flere transkripsjonsutdrag at en elev måtte overbevise de andre deltakerne, eller at to deltakere måtte overbevise en skeptiker. Å overbevise en skeptiker gjør at elevene er nødt til å finjustere sitt argument, og begrunne det i større grad enn dersom argumentet bare hadde blitt akseptert av deltakerne (Volmink, 1990, sitert i Tømmerdal, 2022). Elevenes evne til å overbevise blir gjerne støttet av deres tegninger. Tegningene kan være med å oppklare hva eleven som argumenterer ønsker å få frem, og dermed gjøre eget argument mer logisk for elevgruppen.

At elever får en arena hvor de blir utfordret til å forsterke sine argumenter for strategivalg, er også viktig for å oppnå relasjonell forståelse i matematikk. Dersom elevers undervisning er preget av å fremkalle et riktig svar foran læreren eller i en lærebok, eksempelvis fra oppgaver med lave kognitive krav, kan det føre til at de ikke utfordres nok i matematikk. Ved å gi elevene oppgaver som krever problemløsning, kan de i større grad bli utfordret til å tenke kritisk over prosessen, samt øve på å begrunne egne valg.

5.2.4 Argumenter med matematisk forankring

I flere tilfeller bruker elevene «for» eller «fordi» uten at de andre deltakerne har stilt noe spørsmål om hvorfor. Det indikerer at elevene muligens har en naturlig innfallsvinkel når de skal argumentere. De bruker figurenes matematiske egenskaper for å støtte eget argument og begrunne sine løsningsforslag. Det finnes også tilfeller hvor elever kommer med logiske og matematiske forankrede argumenter, som ikke blir akseptert av gruppen før de tegnes opp. Til tross for at noen elever gir fornuftige muntlige forklaring på hvorfor deres løsningsforslag stemmer, blir disse resonnementene noen ganger oversett. Det kan hende at en elevs argument vil bli ignorert dersom de andre deltakerne har sine egne strategivalg i hode samtidig. For en andreklassing kan rutineoppgaver som følger algoritmer virke overveldende fordi det kreves at en følger en trinnvis struktur. Derfor kan problemløsningsoppgaver, slik som er brukt i min studie, være en god arena hvor disse trinnvise strukturene ikke vil bli overveldende for elevene. Til tross for at noen elever har et godt argument ovenfor et strategivalg, er det rom for at andre løsningsforslag også prøves ut. Likevel, dersom elevene er vant til å følge en plan, kan det være vanskelig å omstille seg. Derfor kan det hende at en elevs argument vil bli ignorert dersom de andre deltakerne har sine egne strategivalg i hode samtidig. Resultatene viser at likevel tendenser til at muntlige forslag som er matematiske forankret oftere blir godtatt, enn forslag uten videre forklaring.

Eksempler som kommer til syne gjennom problemet *Mias brikker*, er hvordan elevene benytter brikkenes geometriske egenskaper for å argumentere for hvorfor en bestemt brikke ikke passer inn i figurene. Slike argumenter fra resultatene er for eksempel at brikkene har «spisse kanter» eller «større kanter», eller «flere kanter» når de referer til hvordan de små, rettvinklede trekantene, eller den store trekanten kan plasseres i figurer. Elevene benytter seg også av brikkenes areal når de skal bestemme hvor brikkene plasseres i figurene, hvor de teller antall ruter på langsidene og kortsidene av figurene for at de skal passe. Dette er logiske argumenter som både forankrer de geometriske egenskapene og arealene til både brikkene og figurene, som kommer til syne gjennom flere elevresultater.

I oppgaven Almas veivalg, er det nok ikke like enkelt for elevene å oppdage mulige løsninger, eller hvilke matematiske egenskaper oppgaven behandler. Det handler om romforståelse og evnen til å korrekt plassere et veivalg mellom riktige hus. Dermed blir det vanskeligere å argumentere logisk, uten å prøve og feile først. Det er også vanskeligere å bare tegne opp og teste ut løsninger, som krever at elevene argumenterer muntlig før de tar et valg om å tegne opp veivalget. Her ser en også at elevene ofte brukte veivalgenes form og koblet det til noe kjent, som for eksempel at det lignet «en smal X» eller «en Y», for å enklere kunne oversette figuren mentalt til tegning. Det dukker også opp logiske argumenter hvor det resonneres rundt forholdet mellom antall veier og antall hus, som er en god logisk forbindelse til oppgavens matematiske egenskaper.

Begge problemløsningsoppgavene kreves en viss matematisk forkunnskap, for at elevene skal evne å forankre sitt argument i de matematiske egenskapene som oppgavene besitter. Felles for de to, er at oppgavene krever romlig forståelse for å mentalt kunne rotere, snu, matche, frembringe, og manipulere mentale bilder (Clements & Sarama, 2021, s.165). Det kommer frem i analysen av resultater at elevene viser denne forståelsen, og at deres argumenter gjerne er logiske når de forklarer og tegner opp hvordan de plasserer brikkene og veivalgene.

6.0 Konklusjon

I min studie har jeg gjennom deltakende observasjon fått mulighet til å undersøke elevgrupper på andre trinn sine prosesser av problemløsning og hvordan de uttrykker sine resonnementer. Jeg har presentert et utvalg av mine resultater, analyse av resultatene, samt drøftet funn opp mot relevant teori, for å besvare mitt forskningsspørsmål:

På hvilke måter kommer elevers kreative resonnering til uttrykk gjennom arbeid med to problemløsningsoppgaver innen romlig forståelse?

Gjennom ulike uttrykksformer som tegning, gestikulasjon og muntlig dialog, uttrykker elevene sin kreative resonnering. Resultatene viser at elevene gjerne bruker en kombinasjon av disse uttrykksformene for å forsterke sine resonnementer, heller enn å kun anvende én uttrykksform. Tidligere studier viser at barn er avhengige av støtte eller utfordring fra et læringsmiljø (Lithner, 2008), og dermed kan ikke resonnering oppstå på egenhånd. Dette er et fremtredende gjennom min studie, og støtter mitt metodevalg om at elever skulle ha mulighet til å konstruere forståelse for problemløsningsoppgavene i fellesskap. Spesielt i læringsmiljøer hvor elevene utfordrer hverandre, er de nødt til å forsterke sine resonnement for å overbevise øvrige deltakere. Innenfor et sosialkonstruktivistisk læringssyn er utforskende arenaer hvor man bearbeider og løser noe ukjent eller uforståelig, en aktiv prosess. Dette innebærer både refleksjon, formulering av løsninger og utprøving av løsningsforslag, innenfor rammen av en aktivitet (Säljö, 2016, s.160). Mine resultater støtter at elevenes uttrykksformer i arbeidet med problemløsningsoppgaver sjeldent uttrykkes uten prøving, feiling og misforståelser. Som lærer må en godta at elever trenger rom til å utforske ulike løsningsmetoder, men også akseptere at elever i noen tilfeller raskt finner en god løsningsstrategi som kan anvendes, og dermed løser problemet raskt og effektivt.

Min studie har gjort det mulig å undersøke elevers problemløsning i samspill med hvordan elevene kreativt resonnerer, gjennom å undersøke hvordan elevgruppene utforsket strategier, planlagte, og så tilbake for å sjekke svarene opp mot problemets matematiske egenskaper (Pólyá, 1945; Schoenfeld, 1985). Elevers planleggingsprosesser er til tider vanskelig å tolke fordi det er interne prosesser, men det er likevel mange trekk som tyder på at elevenes planlegging kommer til uttrykk gjennom ulike representasjoner. Til tross for at oppgavens tematikk gjorde det noe vanskelig å observere elevenes uttrykksformer bærer preg av at elever danner og oversetter mentale bilder i hodet, før de frembringes som en synlig uttrykksform, fikk jeg analysert tilstrekkelige resultater. De utvalgte problemløsningsoppgavene fra Kengurkonkurransen ga rom for at elevene uttrykket eksterne representasjoner, gjennom gestikulasjoner, tegning og muntlig argumenter og rimelige forklaringer. Oppgavene kunne dermed inspirere til at ulike løsningsforslag og strategier kom til syne.

7.0 Implikasjoner

I dette kapittelet vil jeg legge frem studiens betydning for undervisning (7.1) og implikasjoner for hvordan studien kan videreutvikles til videre forskning (7.2).

7.1 Implikasjoner for undervisning

Som nyutdannet, har jeg gjennom erfaring med å gjennomføre denne studien sett muligheter til hvordan min studie kan overføres til matematikkundervisning. Jeg har på bakgrunn av egen deltakelse hatt mulighet til å observere min rolle i forhold til elevenes selvstendighet og motivasjon. Som deltakende fikk jeg mulighet til å tett følge opp hver elev og deres problemløsningsprosess. Det kunne derfor vært spennende å se hvordan liknende metode kunne fungert i en helklassesituasjon, hvor læreren ikke nødvendigvis har tid eller kapasitet til samme oppfølging. Gjennom eksempelvis lærerstyrt stasjon i stasjonsundervisning, kunne læreren her bistått som hjelp og kompetanse i elevenes begynnende problemløsningskompetanse. Dersom elevene først hadde fått voksenoppfølging gjennom stasjoner, kunne nok opplegget blitt overført til helklassesituasjon.

Også oppgavenes tematikk gjør det vanskelig å hele tiden observere hvor i problemløsningsprosessene elevene befinner seg, fordi romforståelse gjerne er interne konstruksjoner av kunnskap, og overførsel av bilde til tegning er mentale prosesser. Dermed kan det tenkes at problemløsningsoppgaver med annen tematikk gjør det enklere å observere og bidra til elevers kreative resonneringsprosesser.

7.2 Implikasjoner for videre forskning

I min studie søkte jeg aktivt etter kreativ resonnering. Det kunne derfor vært interessant å også undersøke oppgaver som innebar algoritmisk og imitativ resonnering, for å kunne sammenligne funnene. En annen implikasjon er at oppgaver med tematikken romforståelse gjør det noe vanskelig å observere elevenes uttrykksformer, da mye skjer internt før det fremlegges en synlig representasjon. Problemløsningsoppgaver med annen tematikk, eller utforskningsoppgaver med flere mulige løsninger, kunne vært interessant å forske videre på.

Litteraturliste

Adler, P.A. & Adler, P. (1994). Observational Techniques. I N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Red.), *Handbook of Qualitative Research* (s.377-392). Sage.

Ahlberg, A. (1994). *Att möta matematiken i förskolan. Rita, tala och räkna matematik.* Rapport nr.12, Göteborgs universitet, instutitionen för matematik.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2003). *Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflection, critique*. Kluwer Academic Publishers.

Andersen, S.S. (2013). *Casestudier. Forskningsstrategi, generalisering og forklaring* (2.utg). Fagbokforlaget.

Andreassen, S-E. & Tiller, T. (2021). *Rom for magisk læring? En analyse av læreplanen LK20.* Universitetsforlaget.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. I D. Pimm (red.), Mathematics, teachers and children (s.216-235). Hodder and Stoughton.

Barak, M. (2013). Impacts of learning inventive problem-solving principles: students' transition from systematic searching to heuristic problem solving. *Instructional Science, 41*(4), 657–679. https://doi.org/10.1007/s11251-012-9250-5

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International journal of mathematical education in science and technology*, 39(1), 1–12. https://doi.org/10.1080/00207390701464675

Björklund, C. (2012). *Blant baller og klosser*. Cappelen Damm Akademisk.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and understanding. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), s. 41-62. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.1.0041

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt.

Clements, D.H. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach* (3.utg.). Routledge.

Creswell, J.W. (2013). *Qualitative inquiry & research design: choosing among five approaches* (3.utg). Sage.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (s. 37–52). Kluwer.

Enge, O. & Valenta, A. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. Acta Didactia Norden, 14(3), 1-18. https://dx.doi.org/10.5617/adno

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

G, Pólyá (1945). *How to Solve It*: *The classic introduction to mathematical problem-solving.* Penguin Mathematics.

G. Pólyá (1981). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press.

Posamentier, A.S. & Krulik, S. (2009). *Problem Solving in Mathematics, Grades 3-6: Powerful Strategies to Deepen Understanding*. Corwin.

Geiger, V. & Galbraith, P. (1998). Developing a diagnostic framework for evaluating student approaches to applied mathematics problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29:4, 533-559. https://doi.org/10.1080/0020739980290406

Goldin, G.A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9,* 40–177. https://doi.org/10.2307/749946

Guba, E.G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication & Technology*, *29*(2), 75–91. https://doi.org/10.1007/BF02766777

Hana, G.M. (2014). Matematiske tenkemåter. Caspar Forlag AS.
Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, *29*(3), 68-74. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and Procedural Knowledge* (s. 1-27). Routledge.

Hodgkinson, S. & Mercer, N. (2008). Exploring Talk in School: Inspired by the Work of Douglas Barnes. Sage.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Johansson, M., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2014). Young children's multimodal mathematical explanations. *ZDM*, 46 (6), 895–909. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0614-y

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *36(36)*, 20–32. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). Det kvalitative forskningsintervju (3.utg). Gyldendal akademisk.
Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.

Lithner, J. (2006). A Framework for Analysing Creative and Imitative Mathematical Reasoning. Umeå Universitet.

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Matematikksenteret (2014, 2022). *Kenguruoppgaver – oppgaveark.* https://www.matematikksenteret.no/læringsressurser-og-undervisningsopplegg/kenguru/kenguruoppgaver-oppgavebank

Matematikksenteret (2022). *Kengurukonkurransen.* https://www.matematikksenteret.no/konkurranser/kengurukonkurransen

Meld.st. nr.28 (2015-2016). *Fag – Fordypning – Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Sage.

Mercer, N. & Littleton, K. (2013). *Interthinking. Putting talk into words.* Routledge.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2012). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 369–387. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9354-x

Nosrati & Wæge (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Matematikksenteret. https://utdanningsforskning.no/artikler/2015/sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk/

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. I A. E. Kelly, J. Y. Baek, & R. A. Lesh (Red.). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (s. 195–215). Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Artihmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(5),* 344–350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Stylianides, A. J. & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, 11(4), 307–332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Säljö, R. (2016). *Læring – en introduksjon til perspektiver og metaforer*. Cappelen Damm Akademisk.

Tømmerdal, S. (2022). Hvorfor er dette riktig, og hvorfor er dette feil? Resonnering og argumentasjon på småtrinnet med oppgaver fra Kengurukonkurransen. *Tangenten 3,* 55-61.

Volmink, J. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras*, 23, 7–10.

Wæge, K. (2019). Samtaler i matematikk. I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk: matematikkdidaktikk i teori og praksis* (s.19-37). Fagbokforlaget.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. I J. Kilpatrick, W.G. Martin & D.Schifter (Red.) *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s.227-236). National Council of Teachers of Mathematics.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv/samtykkeskjema til elever og foreldre

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Vedlegg 3: Intervjuguide

Vedlegg 4: Transkripsjonsnøkkel

Vedlegg 5: Transkripsjoner heltranskriberte observasjoner (Appendix A)

Vedlegg 6: Transkripsjoner deltranskriberte observasjoner (Appendix B)

Vedlegg 7: De skannede oppgavearkene

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
«En kvalitativ studie av elevers arbeid med tidlig aritmetikk i problemløsnings- og utforskningsoppgaver»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet med studien vil være å se hvilke muligheter som ligger i bruken av problemløsnings- og utforskningsoppgaver, og nyttigheten av å bruke disse typer oppgaver for å utvide forståelsen av matematikk. Her vil jeg undersøke hvordan elevene må tenke utenfor boksen for å kunne resonnere seg frem til et svar. Det handler om å tidlig kunne tenke kreativt og kritisk innenfor matematikk.
I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg/ditt barn.

Formål
Dette er et informasjonsskriv til deg som foresatt i 2.trinn om forskningen ditt barn vil delta i. Jeg er masterstudent på Universitetet i Agder Kristiansand i begynneropplæring i matematikk. Jeg skal i den forbindelse gjennomføre et forskningsprosjekt på vårsemesteret 2023, som strekker seg over et halvt år. Mitt prosjekt handler om undersøkende matematikkundervisning i småskolen. Mitt formål vil være å undersøke hvordan elever kan utvide sin matematiske forståelse gjennom å bryte ut av faste mønster og innlærte algoritmer, og dermed tenke utenfor boksen. Jeg vil gjennom ett par økter i januar 2023 observere hvordan elevene klarer å øve seg til å resonere og snakke matte, mens de arbeider med ett par problemløsnings- og utforskningsoppgaver. Det vil derfor gjennomføres samtaler/intervju med elevene gjennom observasjonene. Jeg vil filme og/eller ta lydopptak under disse observasjonene, for å samle inn valide data. Dataene jeg samler inn fra disse observasjonene og intervjuene vil bli behandlet konfidensielt. Når jeg videre skal analysere dataene, vil materialet anonymiseres. De innsamlede dataene vil slettes når prosjektet avsluttes 31.12.23.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Agder (UiA) er ansvarlig for prosjektet.

Det er frivillig å delta

All medvirkning til dette prosjektet er basert på frivillighet, og en kan når som helst trekke sitt barn fra prosjektet. Dette kan gjøres uansett tidspunkt i prosjektet. Barnet må også selv ønske deltakelsen, og kan også trekke seg når som helst. Hvis barnet velger å delta, kan du/dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dersom du/dere ikke ønsker å inkludere deres barn i forskningsprosjektet, vil elevene få ordinær undervisning. Jeg vil bare ta ut grupper av 2-3 elever om gangen, og vil estimert ta 20-45 minutter av undervisningen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Dermed vil:

- Navn på elev, og navn på skole erstattes ved koder som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Datamaterialet vil bli transkribert og anonymisert i selve masteroppgaven. Deltakerne vil derfor ikke kunne gjenkjennes ved eventuell publikasjon.
- Datamaterialet vil lagres på en egen server, hvor videoopptak og lydopptak vil være innelåst. Det vil bare være meg selv som har tilgang, samt veiledere ved behov.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Student Martine Thorvik, martt18@uia.no

- Universitetet i Agder ved Gjermund Torklidsen, gjermund.torkildsen@uia.no (+47 381 41 779)
- Universitetet i Agder ved Gro Blomgren, gro.blomgren@uia.no (+47 372 33 280)
- Vårt personvernombud ved UiA, Personvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen
Veiledere: Gjermund Torkildsen & Gro Blomgren
Student: Martine Thorvik

Gjermund Torkildsen

Gro Blomgren

Martine Thorvik

(Forsker/veileder) (Forsker/veileder) (Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om forskningsprosjektet *«En kvalitativ studie av elevers arbeid med tidlig aritmetikk i problemløsnings- og utforskningsoppgaver»,* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i forskningsprosjektet ved videoopptak og lydopptak
- ☐ å delta i forskningsprosjektet ved bare lydopptak
- ☐ å ikke delta i forskningsprosjektet

Jeg __________________________ (foresattes signatur), ________________ (dato) samtykker til at Martine Thorvik observerer __________________________ (elevens navn), samler, oppbevarer og behandler data som beskrevet i samtykkeskrivet frem til prosjektet avsluttes.

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Vurdering av behandling av personopplysninger
06.12.2022

Referansenummer

857807

Vurderingstype

Standard

Dato

06.12.2022

Prosjekttittel

En kvalitativ studie av elevers arbeid med tidlig aritmetikk i problemløsnings- og utforskningsoppgaver

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig

Gjermund Torkildsen

Student

Martine Thorvik

Prosjektperiode

01.12.2022 - 31.12.2023

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Kommentar

OM VURDERINGEN

Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG

Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2023.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20). Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.
OPPFØLGING AV PROSJEKTET Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3: Intervjuguide

Åpne spørsmål	**Guidet/heuristisk respons**	**Metakognitive spørsmål/oppfølging**
Nå kommer jeg først til å lese oppgaven høyt for dere. Så får dere litt tid til å bli kjent med – og lese oppgaven, og så er det bare å starte når dere er klare, og husk at du må høre med hele gruppen om de er klare. Også er det veldig lurt å prate sammen om hva dere gjør og hvorfor dere gjorde det slik!	Hvordan tenkte du da? Hvorfor løste du oppgaven akkurat på den måten? Respons: «vet ikke ...» → kan du vise.. se neste spørsmål. → «kan du hjelpe meg å forstå hvordan du tenkte/ hva du mener da?»	På hvilken måte kunne du løst denne oppgaven på en annen måte, tenker du?
Kan du vise meg hvordan du tenkte nå?	Kan du vise meg med brikkene/konkretene hvordan du tenkte? → *Interessant, hvorfor gjorde du det slik og ikke på en annen måte?*	Klarer du å oppdage et mønster hvis du flytter noen av brikkene? Guidet: «for eksempel hvis du flytter den hit ...»
Kan du forklare hvordan du tenkte nå?	Hvorfor løste du oppgaven akkurat på den måten? - Hvordan tenkte du da?	

Vedlegg 4: Transkripsjonsnøkkel

Handling	Tegnsetting	Forklaring
Uttalelser	Tekst	Utsagn eller uttalelser fra informanter
Overlapp	[tekst]	Blir brukt dersom to-flere informanter sier noe samtidig.
Overtakelse	≈tekst≈tekst	Indikerer når en av informantene overtar og fortsetter å snakke uten pause imellom.
Tydelige pauser (≥ 1 s)	(ns) der n=antall sekunder	Indikerer lengre pauser mellom utsagn/ handlinger.
Utydelig	//utydelig//	Dersom utsagn er utydelig/uforståelig.
Spørsmål	?	Indikerer dersom informantene stiller spørsmål til hverandre eller forsker.
Lav prat	::tekst::	Indikerer at elevene snakker lavt for seg selv / mens h*n arbeider.
Handlinger	*handling*	Indikerer at elevene utfører en handling.
Ulike handlinger	*handling A**handling B* osv..	Oppgir ulike handlinger i en slags monolog.

Vedlegg 5: Transkripsjoner (hele transkripsjoner)

Gruppe A og B sine observasjoner i arbeidet med *Mias brikker*

Observasjon – gruppe 1, oppg. 2: Aksel, Alice, Aurora – video 3

	Sekvens (s)	Deltaker	Muntlig samhandling	Gestikulasjoner
95	00:10	Martine	Mia har 4 brikker. De brikkene ser slik ut	*peker på de 4 brikkene*
96	00:16	Martine	Hvilken av de figurene kan hun IKKE lage ved å bruke alle de fire brikkene? Så hvis du skal bruke alle fire på de her, hvilken kan du ikke lage? (2s)	*peker først på brikkene, så på alle figurene*
97	00:32	Martine	Det er én som ikke går an å lage. Derfor har jeg lagt frem blyanter og viskelær, også har jeg lagt frem noen sånne som dere kan tegne på, hvis dere vil det.	*legger frem to ark som er lik oppgavearket. Arket er printet i svart/hvitt*
98	00:38	Aurora		≈*strekker seg til blyant*
99	00:38	Alice		≈*tar arket til seg, så en blyant*
100	00:39	Aksel	/ivrig/ Ja det går an med Numicon men det er veldig vanskelig!	
101	00:40	Martine	≈Ja	*legger frem fire fargeblyanter: rød, oransje, blå, grønn*
102	00:43	Martine	Så, må dere jobbe sammen! Så det er kanskje lurt å tegne bare på én av de, tror dere ikke det?	
103	00:48	Aurora	Skal vi tegne på denne? //utydelig//	*holder på arket, med oransje fargeblyant i hånda*
104	00:50	Martine	Ja, sånn at dere skal jo jobbe sammen	

105	00:52	Aurora	≈Okei, men skal vi tegne fargene på disse her	*begynner å farge brikkene likt som på oppgavearket*
106	00:54	Martine	Det kan dere, hvis dere synes det er lettere å holde styr på det	
107	00:58	[Aurora]	≈Vi gjør det //utydelig//	
108	01:01	Alice	Men skal vi bare bruke én sånn?	*holder opp ekstra printet ut oppgaveark, ser spørrende på meg*
109	01:03	Martine	Jeg tror det kan være lurt først, jeg bare lå frem flere sånn at det er ikke galt om dere gjør noe feil, da kan dere bare få nytt ark, jeg har printet mange ark	
110	01:12	Aurora	/Fniser/	*fortsetter fargelegging av brikkene*
111	01:14	Aksel	Okei, sånn, og hva nå (1s) Denne var grønn, denne var grønn	*fargelegger grønn brikke med grønnfarge*
112	01:18	Alice		*stille, farger blå brikke med blåfarge*
113	01:21	Martine	Hvorfor tror dere det er lurt å fargelegge de da?	
114	01:25	Alice	Fordi da-	
115	01:26	[Aurora]	Fordi da kan vi legge dem oppå – eller – vi tegner med den fargen	*peker først på brikker, så figurer*
116	01:30	Martine	Ja, så lurt!	
117	01:33	Aksel	Okei! Jeg bruker rød (1s), og grønn	*Aksel tar til seg rød og grønn fargeblyant, Alice holder blå, Aurora holder oransje*

118	01:36	Martine	Men nå må dere jo finne ut, hvordan kan dere (2s) legge de brikkene, oppå her? Hva kan være lurt å, kan det være lurt --	*peker på brikker, så figurer*
119	01:43	[Aurora]	/ivrig/ ≈Åh! Den der! Den her kan gå der, men vi bruker jo ikke alle da	*peker på rød brikke, gestikulerer den på tvers vannrett på figur 1*
120	01:47	Aksel	≈Ja, ja!	*fargelegger rødt der Aurora har indikert*
121	01:48	Aurora	Men skulle man bruke alle? Hva stod..	*kikker undrende på meg*
122	01:50	[Martine]	Nei, vi skal se hvilken det ikke går an å lage! Så hvis dere finner ut at det ikke går an å lage den	
123	01:55	Alice	Åsså kan det være, eh	
124	01:57	[Aksel]	Eh, finnes det en sånn? Ja, den finnes i blå! Blå, blå, blå! Der!	*indikerer nederst i figuren*
125	02:01	Alice		*fargelegger blått hvor Aksel indikerte*
126	02:03	Martine	Så lurt å ha hver sin farge	
127	02:06	Aurora	Men vi har ikke hver vår farge egentlig	
128	02:08	Martine	≈Nei, men at alle liksom får bli med	
129	02:09	Aurora	Mhm	
130	02:12	Aksel	(3s) Mm, den er ikke.. og blå der!	*peker på øverste trekant i figuren*
131	02:15	Alice		*starter å farge blått*
132	02:20	Martine	Oi, men det glemte jeg å si. Dere får bare bruke, nå har dere allerede brukt blå, så nå er dere ferdig med den. Da må dere se om dere kan bruke noen av de andre	
133	02:29	Alice		*visker ut blåfargen*

134	02:30	Aurora	Så, da kan vi ikke bruke blå, eh, på ingen av de andre?	*peker på de andre figurene*
135	02:32	[Martine]	Eh, jo! Du kan bruke det på de andre, men på samme figur kan du bare bruke én brikke én gang.	
136	02:37	[Aksel]	≈Hæ, men da går det jo ikke /oppgitt/, det går ikke	
137	02:37	[Aurora]	≈//utydelig//	*gestikulerer hvor den oransje brikken skal*
138	02:39	[Martine]	≈Men, hør på Aurora nå, hva ville du si?	
139	02:41	Aurora	Hvis vi tar den oransje der?	*ser på meg*
140	02:44	[Martine]	Ja, for det går an å snu på brikkene!	
141	02:48	Aurora		*fargelegger oransje*
142	02:48	Alice	Ellers så kan man ta de oransje og den grønne, for de er jo helt like i formen?	*ser på meg med bekreftende blikk*
143	02:54	Martine	Perfekt! Da går det da? Hvis Aurora tar oransje der, hvilken kan du ta for å fylle inn den neste?	
144	03:02	Alice		*starter å viske ut det blå feltet fra tidligere*
145	03:03	Martine	Men, den blå kan du bare ha! Den blå har du allerede brukt. Så den blå kan være der ≈ men kan den grønne passe inn der sa du Alice? For de er jo helt like i formen?	*peker på ufarget trekant ved siden av den oransje*
146	03:10	Aurora	Ja! Den kan jo være den veien, bare?	*gestikulerer hvordan formen kan snus*
147	03:13	Aksel		*fargelegger grønt på indikert plass i figuren*
148	03:15	Martine	Da fant dere ut at den virker! Så da må dere prøve på de andre	
149	03:17	Aurora	≈Ja	
150	03:17	Alice		*tegner et sjekk-merke ved siden av figur 1*
151	03:19	Martine	Bra	

152	03:20	Aksel	Den her tror jeg, ehh	*peker på figur 2*
153	03:23	Alice	Da tar vi, vi kan ta den blå oppi der	*peker til øverste trekantform i figur 2*
154	03:26	Aksel		*dypt innpust*
155	03:27	Aksel	::Den kan ikke komme der, men den kan komme der::	
156	03:29	Aurora	Men hvor mange sånne her brukte vi på den her da? Siden det er jo litt lurt å vite når, hvis vi tar alt for mange sånne!	*tar bort Aksel sin hånd, siden den dekker brikkene* *peker på blå brikke, så figur 2*
157	03:37	Martine	Mhm, for dere kan bare bruke brikken én gang.	
158	03:40	Aksel	≈Vi tar den	*farger rødt på tvers, vannrett, på figur 2*
159	03:42	Martine	Nå fant Aksel den første, det er kanskje lurt å begynne med den største, tror du ikke?	
160	03:46	Aurora	Ja /bestemt/ (1s) hvis ikke får vi ikke plass på slutten	
161	03:50	Martine	Nei det var veldig lurt tenkt	
162	03:51	Aurora	Den grønne, den grønne, hvis vi snur den sånn her	*farger grønt i hjørnet til høyre for rødt rektangel på figur 2*
163	03:54	[Aksel]	≈Ja, ja! Også den oransje	
164	03:56	[Aurora]	≈Ja, også den oransje på den andre sida!	
165	03:57	Alice		*farger blått på toppen, uten å høre med de andre*
166	03:58	Aurora		*farger inn oransje hvor de diskuterte*
167	03:58	Aksel	Ja, den blåe der! Det er ikke den! Det er langt ifra den! /ivrig/	*lener seg tilbake fra bordet*
168	04:03	Martine	Så bra! Dere er gode altså	
169	04:03	Alice		*tegner et sjekk-merke ved siden av figur 2*

170	04:07	Aksel	Det jeg liker med å tegne det er atte, at det blir fine farger med det	
171	04:11	Martine	/Fniser/ Jaha, også er det litt lettere å se. For nå så dere at når dere fargelagte de, var det ikke lettere å tegne de opp da?	*peker på brikkene*
172	04:20	Aurora	Jo /bestemt/	
173	04:21	Aksel	/innpust/ Og de her, det måtte jo egentlig være fargelagt, for de to her er jo helt like	*peker på oransje og grønn trekant*
174	04:27	Martine	Mhm, ja. Hvilken vil dere prøve nå da? Dere må ikke gjøre det i rekkefølge heller.	
175	04:30	Aurora	::skal vi prøve den?::	*peker på figur 3*
176	04:31	Alice	Den	*peker på figur 4*
177	04:31	[Aurora]	Nei, den, den	*peker på figur 4*
178	04:34	Aksel	Ja, for den er jeg sykt usikker på	*peker på figur 4*
179	04:36	Aksel	Men, jeg fant ut at den røde skulle være der	*starter å fargelegge rød brikke på tvers*
180	04:38	Aurora	Ja, jeg fant ut at den oransje	
181	04:41	Alice	Jeg fant ut av den grønne ::den kan være der, den lille grønne::	*farger grønn brikke nederst til høyre*
182	04:45	Aurora	//utydelig// ::den kan være der::	*peker øverst til høyre med oransje fargeblyant*
183	04:48	Aurora	Men det blir jo faktisk litt vanskelig, siden vi har jo flere sånne her? Vi kan ikke bruke noen av de andre	*ser undrende på meg**peker på de to resterende trekantene i figur 4*
184	04:53	Martine	Dere kan bare bruke én brikke én gang	
185	04:55	Aurora	Ja /bekreftende/, og da bruker jeg oransje der, men hva skal vi bruke på disse?	*peker øverst til høyre med oransje fargeblyant*
186	04:59	Aurora, Alice		*kikker undrende på meg*
187	05:00	Martine	/hever skuldrene, som jeg ikke vet/	
188	05:01	Alice	Da er det den som er feil (2s)	*peker på figur 4*

189	05:03	Martine	Kanskje? (1s) Kanskje dere kan teste? Hvis dere tror at den er feil nå, så kan dere jo kanskje teste de to andre for å se om de er riktig, for da er dere jo 100% sikker?	*peker på figur 4* *peker på figur 3 og 5*
190	05:12	[Aurora]	/ivrig/ Ja, den har vi her!	*fargelegger oransje trekant på riktig plass*
191	05:15	Alice	Ja, eh //utydelig//	*fargelegger den grønne trekanten på riktig plass*
192	05:16	Aksel		*fargelegger det røde rektangelet på riktig plass*
193	05:18	Martine	Og Aksel, du ville teste den i midten nede for det var den (figuren) du var mest usikker på?	
194	05:23	Aurora	≈også den blå, kan jeg få blåfargen	
195	05:26	Alice		*farger blå trekant på riktig plass*
196	05:27	Aksel	/ivrig, lener seg bak/ Ja, den der var det ikke!	
197	05:29	Martine	Nei, den virket? Da kan jo Alice ta det sjekk-merket sitt	
198	05:32	Alice	*fniser*	
199	05:32	Aksel		*begynner å fargelegge det røde rektangelet på figur 5, men stopper opp når han har farget ¾*
200	05:38	Aksel	/lener seg litt tilbake/ Eh, nei! (1s) Den skal ikke være der	
201	05:42	Alice	Jo, hvis du tar den helt bort til kanten	*peker der det ikke fargen mangler*
202	05:43	[Aurora]	≈Men hvor mange – 1, 2, 3, 4 – 1,2,3,4 – da får vi jo plass helt bort i kanten dit	*teller rader i original-brikken**teller videre rader i Aksel har fargelagt* *peker på den tomme raden*

203	05:47	Aksel	Ja	*fargelegger ferdig det røde rektangelet på figur 5*
204	05:49	Martine	Så lurt	
205	05:50	Aurora	Mm, siden det er jo bedre hvis vi teller disse her, hvis vi teller sånn 1,2,3,4, da er det jo 4 der	*peker med fargeblyanten mens hun teller*
206	05:57	[Alice]	Også stopper du med den streken der	*peker der Aksel fargelegger, indikerer hvor han skal stoppe*
207	05:57	[Aurora]	Og da vet vi at det er	*peker videre*
208	06:00	Aksel	Også trenger vi grønn der!	*peker på en av de små trekantene*
209	06:00	Aurora		*begynner å fargelegge oransje på den andre lille trekanten*
210	06:01	Alice	/ivrig/ Jeg vet hvem som er feil, jeg vet det!	
211	06:03	Martine	Ja, hva fant ut da Alice	
212	06:04	[Aksel]	≈Det er den!	*peker på figur 4, mens han fortsetter å fargelegge grønt på figur 5*
213	06:05	[Alice]	≈Ja, det er den!	*peker på figur 4, mens hun fortsetter å fargelegge blått på figur 5*
214	06:06	Martine	/overasket/ Ja, hvorfor er den feil da?	
215	06:07	Alice	Fordi at	
216	06:07	[Aurora]	≈Siden alle andre fungerte!	
217	06:08	Martine	Ja	
218	06:09	Alice	Fordi alle de andre	
219	06:10	Martine	Så da, på en måte, siden alle andre fungerte så måtte det være den?	
220	06:13	[Alice, Aurora]	Ja	
221	06:14	Martine	Er det noen annen måte du kunne se det på?	

222	06:17	Aksel	(1s) Ehm, den de, ehm ... hvis du... fargelegg den	*gestikulerer at Aurora skal fargelegge den ene oransje, lille trekanten på figur 4*
223	06:21	Aurora		*fargelegger*
224	06:27	Aksel	/bestemt/ Okei, nå! Den der kan jo ikke brukes, og da har vi jo brukt alle de andre?	*peker på blå, stor trekant*
225	06:32	[Martine]	≈Ja	
226	06:33	[Aksel]	≈Og da kan vi jo ikke bruke de formene (1s), derfor, ja! Så er det den!	*peker på de brikkene som allerede er brukt* *peker så på figur 4*
227	06:39	Martine	Perfekt	
228	06:40	Aurora	Ja, siden vi kunne ikke brukt de på nytt	
229	06:41	Martine	Kjempebra	
230	06:43	Alice	Da er den kryss, og denne sånn	*setter kryss ved figur 4, og sjekk-merke ved figur 5*

Intervju – gruppe 2, oppg. 2: Benedicte, Bea, Betina – video 6 (08:58,17)

	Sekvens (ns)	Deltaker	Muntlig samhandling	Gestikulasjoner
10	00:30	Martine	*Forklaring av oppgavene*	
11	01:00	Martine	Skjønte dere det?	
12	01:03	Bea	Nei jeg skjønte ikke det	
13	01:04	Martine	Nei, så hun har fire brikker. Her kan dere få lov å tegne og prøve dere litt frem hvis dere vil etterpå	*legger frem utprintet ark foran oppgavearket*
14	01:10	Martine	Men, hvis hun har brukt den rød brikken på den figuren (1s), hvor tror du hun kan bruke den rød på den figuren?	*peker først på rød brikke, så figur 1*
15	01:19	Benedicte, Betina	Der	*peker på samme plass, midten av figuren*
16	01:20	[Benedicte]	≈Der i midten hvis hu tok den sånn, også snudde hun den sånn, da blir det en form som er sånn	*gestikulerer hvordan hun snur rød brikke til at den passer i figur 1* *peker på rød brikke*
17	01:28	Martine	Ja, bra! Og når Mia har brukt den, så kan hun ikke bruke den en gang til på samme figuren. Skjønte du det bedre nå?	
18	01:37	Benedicte	Mhm	
19	01:38	Martine	Hva tror dere er lurt å begynne med nå? Nå skal dere finne ut – det er én av de figurene hun ikke kan lage – er det noen dere tenker med en gang at det ikke går an å lage? Eller vil dere bare prøve dere frem?	
20	01:49	Benedicte	Jeg tenker faktisk at hun ikke kan lage, ja, den!	*peker på figur 4*
21	01:56	Betina	Jeg tenker at hun ikke kan lage eh (2s)	
22	02:02	Benedicte	Jeg tror faktisk at hun ikke kan lage de nederste	*peker på de tre nederste figurene*

23	02:04	Betina	Jeg tror at hun kan lage noe, eh, hun kan jo ta den der, så hu kan lage noe med den. Men den, tror jeg ikke hun kan lage noe	*peker på oransje trekant til et hjørne i figur 4* *peker på figur 3*
24	02:13	Benedicte	Jeg synes heller ikke hun kan lage noe med den, den har større kanter	*peker på figur 3*
25	02:19	Martine	Hva tenker du, Bea?	
26	02:20	Bea	Mm, jeg tror heller ikke hun kan lage den	*peker på figur 3*
27	02:22	[Betina]	≈Skal vi fargelegge på dette arket?	
28	02:26	Martine	Dere kan prøve å fargelegge her, nå vet dere jo hvilke brikker som har hvilken farge – så må dere jobbe sammen og snakke sammen	
29	02:35	Betina	Eh, skal vi ha rød på denne?	*farger rød på figur 1*
30	02:37	Benedicte	/utydelig/ der ser vi at rød her	*farger rød på figur 2*
31	02:52	Martine	Og husk at, husk å telle rutene også	*peker på rød brikke*
32	02:55	Betina	Det er 4 ruter, og det er bare 3 der.	*peker først på rød brikke, så figur 2*
33	02:59	Betina	Så jeg tror vi skal ta den der (4s) 1-2-3-4	*farger rødt på høykant i figur 1*
34	03:04	Benedicte	::Ja, men::	*peker på figur 2*
35	03:06	Betina	Det er trekanter der, ikke firkanter	*peker på figur 1, fortsetter å fargelegge figur 2*
36	03:14	Martine	Hvis dere gjør noe feil har jeg mange ark dere kan fargelegge	
37	03:15	[Benedicte]	≈Vi kan ikke bruke den heller! Se (1s) det er 1, det er på 3 på hver rute, ikke 4, men hvis du tar den den veien går det an	*peker på figur 5, og visualiserer hvordan rød brikke kan snus*
38	03:30	Martine	Og husk at alle brikkene skal fylle opp hele figuren	
39	03:36	Betina	Hva!	*stopper å fargelegge*

40	03:35	Martine	Ja /innpust/, så (3s), alle de brikkene, de skal liksom fylle opp en figur. Skal vi prøve å gjøre den første sammen, så jeg liksom kan vise hva jeg har tenkt? (2s) Hvis vi, nå tar jeg et nytt ark, så gjør vi den første sammen så jeg kan vise hva jeg har tenkt.	*peker på alle brikkene* *tar arket de har fargelagt på, legger frem et nytt blankt oppgaveark*
41	03:52	Martine	Hvis vi tenker den røde (1s) får den plass, hvor er det best at den får plass hvis jeg skal få plass til alle de (brikkene)?	
42	03:58	[Betina]	≈Der, der	*peker på midten av figur 1*
43	04:00	Martine	På midten der?	*begynner å farge rødt på langs av figur 1*
44	04:01	[Betina]	/ivrig/ Nå vet jeg det!	*løper å henter et nytt ark*
45	04:08	Betina	Kan jeg prøve meg?	
46	04:10	Martine	Ja, selvfølgelig (3s) Hva annet kan vi gjøre da?	*fortsetter å fargelegge rødt*
47	04:14	Betina	Jeg tror den store trekanten skal der	*peker først på blå trekant, så på figur 2*
48	04:17	Martine	(2s) Husk at de (figurene) er like store, som de her (brikkene)	
49	04:19	[Benedicte]	≈/utydelig/ Åsså tror jeg faktisk den blåe der skal være der	*peker på den store trekanten på toppen i figur 1*
50	04:22	Martine	Ja! Bra (1s), den blå kan gå der	*fargelegger blå trekant der hvor Benedicte indikerer*

51	04:28	Benedicte	(3s) Også der må vi tenke litt, vi har to spisse også kan vi se hva vi kan gjøre med dem. Den der er litt skeiv så kanskje vi kan ta den (1s) først tar vi den, også prøver vi der, og den er cirka sånn her	*peker frem og tilbake mellom oransje trekant, grønn trekant, og figur 1*
52	04:44	Martine	For husk at dere kan snu på de og, snu på brikkene	
53	04:47	Betina	Ja, så du kan ta den opp-ned, og ta den blå der	
54	04:47	[Martine]	≈Men nå har vi allerede brukt den blå, så nå kan vi ikke bruke blå igjen, nå er det bare grønn og oransje igjen. Men ser dere nå, at den har en sånn kant (1s), og den har en sånn kant?	*peker på at de to grønne og oransje trekantene begge er rettvinklet*
55	04:58	Betina	Mhm, ja	
56	04:58	Benedicte	Så da kan de to lage den trekanten (2s)	*peker på to små trekanter, og så den store blå trekanten*
57	05:04	Martine	Som betyr at vi kan ta den oransje (2s) her, og den grønne (1s), der	*fargelegger oransje*
58	05:10	[Benedicte]	≈::og den grønne der::	≈*fargelegger grønt på den tomme plassen i figur 1*
59	05:15	Martine	(3s) Skjønte dere litt mer nå?	
60	05:16	Benedicte	Ja	
61	05:17	[Martine]	≈For nå har vi brukt alle 4, til å fylle opp den figuren (1s). Nå skal dere finne ut hvilken (figur) dere IKKE kan bruke til å fylle opp med alle 4 brikkene	

62	05:26	[Benedicte]	≈Hva med den, den er jo bare 1-2-3, også er det 4 der	*teller rader oppover i figur 2**peker så på rød brikke*
63	05:30	Martine	Kan du legge den en annen vei? (1s) Du kan snu så mye du vil på brikkene	
64	05:32	[Benedicte]		≈*snur arket loddrett foran seg*
65	05:36	Betina	Hva, jeg gjorde den feil!	*har holdt på en stund med sitt eget ark*
66	05:38	Martine	Det går fint, men nå tror jeg vi jobber med det arket som Benedicte har, sånn at alle kan se på samme ark (1s) Også må dere snakke sammen	*tar arket som Betina har holdt på med*
67	05:44	[Benedicte]	Oookei (1s) vi kan kanskje prøve og ta den blåe oppå her	*peker øverst i figur 2*
68	05:53	Betina	(2s) Mhm	
69	05:55	Benedicte		*begynner å fargelegge blått*
70	05:57	Martine	Hva tenker du, Bea?	
71	05:59	Betina	Jeg tenker faktisk nå, at vi kan ta den oransje der, og den grønne der (2s) også kan vi ta den røde der, sånn at vi har brukt alle	*peker på de to nederste hjørnene av figur 2*
72	06:10	[Benedicte]		*begynner å fargelegge der Betina indikerer*
73	06:12	[Martine]	Perfekt (2s), nå skjønte dere det! Det var bare litt vanskelig oppgave.	
74	06:26	Martine	Åsså kan jo dere, nå kan dere jo bytte på å fargelegge	
75	06:31	Benedicte	Bea du kan fargelegge der, åsså kan den røde være der, du kan fargelegge den røde Bea	*peker hvor Bea skal fargelegge rødt*

76	06:35	Bea		*fargelegger rødt*
77	06:49	Benedicte	Denne videoen kommer til å bli laaaaang	
78	06:53	Martine	Okei, tenker dere nå at dere vil prøve ut alle de tre (figurene) nederst, eller er det noen dere tenker ikke kommer til å fungere, som kanskje kan-	
79	07:00	[Benedicte]	Eh, jeg tenker den kommer til å gå på en måte	*peker på figur 3*
80	07:03	[Martine]	≈Ja, vil dere prøve?	
81	07:05	[Benedicte]	≈Men du kan jo bare snu den røde der, fordi (1s) åsså kan du ta den blå der, og den grønne der, og den oransje der	*peker med fingrene hvor hun mener brikkene skal plasseres*
82	07:10	[Betina]	≈/ivrig/ Og de, og de. Ja!	*peker på grønn og oransje brikke, samtidig som Benedicte forklarer*
83	07:14	Martine	Ja, så bra! Og det klarte du å tenke helt uten å tegne, du bare så det for deg? (1s) Gjorde du det, Benedicte?	
84	07:21	Benedicte		*nikker*
85	07:24	Betina	Ja, meeen (1s) skal jeg bare fargelegge den lille toppen?	
86	07:26	[Benedicte]	≈Du skal fargelegge	*peker hvor hun skal fargelegge blått*
87	07:28	[Betina]	≈Ja men da er det bare 1-2, en firkant	*teller rader øverst i figur 3*
88	07:30	[Benedicte]	≈Ja men (1s) jeg så, den veien	*tar arket til seg og snur det opp ned**viser med

				fingrene fra hvilken rad Betina skal fargelegge*
89	07:34	Betina	Oja, hehe	*fortsetter å fargelegge blått*
90	07:35	Martine	Ja (1s) så du så det fra en annen vinkel? (6s) så bra, nå jobber dere veldig fint sammen	
91	07:46	Bea, Benedicte		*fargelegger rødt på indikert plass*
92	07:46	Benedicte	Det går fortere!	
93	07:55	Betina		*tar til seg oransje og grønn fargeblyant, og starter fargelegging*
94	07:57	Martine	Og så går Betina løs på grønn og oransje (3s) Okei (2s) hva tenker dere nå?	
95	08:05	Betina	Mm, jeg tenker vi kunne prøve oss på den! Siden der er det de to, og der er det – hvis vi tar røde der, og de to der, også den blå der, også da er det den (figuren) som ikke kan gå	*indikerer med fingrene hvor brikkene skal ligge, på figur 5* *peker så på figur 4, som ikke kan gå*
96	08:18	Martine	Smart tenkt! Hvordan så du det, Betina?	
97	08:18	[Benedicte, Betina]		*fargelegger*
98	08:22	Betina	Ehh (2s), jeg bare så det	
99	08:25	[Benedicte]	≈Vi barna har bare en geni hjerne (2s) som ikke de voksne kan se	
100	08:27	Martine	/ler/ ja	

101	08:37	Benedicte	/bestemt/ da er det den	*peker på figur 4*
102	08:38	Martine	Da er det den som ikke går?	
103	08:39	Betina	Mhm	
104	08:41	Martine	Kjempebra tenkt! (1s) Hvorfor begynte du å fargelegge den siste (figuren) og ikke den i midten? Var det noe grunn for det?	
105	08:46	[Benedicte]	≈På grunn av, fordi det er fire kanter, det er bare, det er bare tre kanter, men der er det fire kanter	*peker på figur 4, så de tre trekant brikkene, så figur 4 igjen*
106	08:52	Martine	/overasket/ ja! Så dere så et mønster der?	
107	08:55	Benedicte	Mhm	
108	08:56	Martine	Veldig bra!	

Vedlegg 6: Transkripsjoner (grovtranskribert)

Grovtranskripsjoner av gruppe E sitt arbeid med Mias brikker, og gruppe A og C sitt arbeid med Almas veivalg. I henhold til analysen som er gjort, samsvarer ikke disse tallene. Jeg legger dem likevel med for å gi et innblikk i mitt arbeid.

Gruppe 1 oppgave 3: Aksel, Alice, Aurora (video 4, 10:21) – grovtranskribert
Nummereringen kan ignoreres, samsvarer ikke med fremlegg av resultater

81	00:26	Aksel	Det er den! Jeg bare tenker, det er den!	*peker på veivalg 5*
82	00:32	Aurora	Men da vet vi jo at den her kan passe inn der	*peker mellom hus A og hus D*
83	00:34	Aksel	Neeeiiii	
84	00:35	Aurora	Hvis vi bruker den... nei	
85	00:38	Aksel	Den, se nå, se nå. Hvis vi tar den, så tar vi A, B, og så kommer jo den til C! Og, ja men, rett bak B, g B er jo i midten, så kommer den til E! Og da er jo den riktig!	*fjerner Auroras hender og lener seg over arket* *forklarer ivrig mens han peker*
86	00:55	Aurora	Jeg følte at du snakka veldig mye	*fniser*
87	00:57	Aksel	Ja det er jo derfor jeg gjør det, for jeg må forklare det litt nøye.	
88	01:01	Alice	Å, å! Jeg vet hvorfor det er den	*peker på veivalg 5*
89	01:02	Martine	Hvorfor det?	
90	01:02	Alice	Ellers så er det den	*peker på veivalg 3*
91	01:05	Alice	Den fordi atte, da	
92	01:08	Aurora	[Ja!]	
93	01:10	Alice	Da kan den komme til A, og eh, ja.	*peker på den lange veien i veivalg 5*
94	01:10	Aurora	Se! Se, når vi, kunne vi kjøre til F?	
95	01:17	Martine	Du kan kjøre til alle utenom D, men den skal klare å reise gjennom A, E og B.	
96	01:23	Aurora	Se, hvis vi tar en strek der, da kan den jo kjøre til F og C ... ja, også kjører vi, nei...	*tegner strek fra hus F til C*

97	01:36	Martine	Men går det an å vri på brikken?	
98	01:38	Alice	Ja!	
99	01;38	Aurora	Ja, det gikk an å vri!	
100	01:39	Aksel	Ja, det er derfor vi skal vri på den der! (2s)	*drar arket mot seg og peker på veivalg 5*
101	01:43	Martine	Vis hva du tenker Aksel	
102	01:45	Aurora	*innpust* Ja! Vi viser den der, du ser den her	
103	01:47	Aksel	Se! Okei, okei	
104	01:50	Martine	Så nå skal Aksel tegne, så må du forklare litt hva du gjør	
105	01:52	Aksel	Okei, sånn* Det var jo den og den. Også tar vi også, det var helt riktig der*, sånn. Og, så! Du vet at B var den i midten, på grunn av der og der* B fikk den bakerst, og B peker jo mot E! Og derfor er det riktig.	*tegner strek fra midten og ned til hus B og A* *fremhever strek ned til hus C* *peker på veivalg 5 sine små veier*
106	02:11	Aurora	≈Jeg har det jeg har det!! Ja, for hvis man skulle snudd på den der, så kunne jo den der, siden der er det jo ikke noe utgang, og da kan man ikke kjøre til D.	
107	02:30	Martine	Nå vet dere at vertfall den virker, men hvis dere ser på de andre svaralternativene, hvilken av de kan det være?	
108	02:39	Aurora	Ehh, hva med nummer tre	
109	02:40	Aksel	Det er nok den	*peker på veivalg 4*
110	02:42	Aurora	Det kan være veldig mange! (1)	
111	02:46	Aksel	Det kan ikke være den vertfall (6)	
112	02:47	Aurora, Alice	Jooo (9)	
113	02:48	Aksel	Nei! Fordi, se nå * sånn, og sånn. Det kan ikke være den (9, 10)	*tegner strek mellom hus B og E, og hus A og D* (12)
114	02:57	Alice	≈Det kan være nummer to (2)	*peker på veivalg 2*
115	02:57	Aurora	≈Det KAN være den (9)	*peker på veivalg 4*

116	02:59	Aksel	Okei vi krysser over de det ikke kan være, det kan ikke være den (10)	*peker på veivalg 4*
117	03:01	Alice	Det kan være den (9)	*peker på veivalg 4*
118	03:01	Aurora	Jo! Det kan være denne (9)	*peker ivrig på veivalg 4*
119	03:04	Martine	Vil du vise? Hvorfor det kan være den (4)	
120	03:06	Aurora	Siden hvis vi lager, jo, nei ... er det en tynn X? Og da ser vi jo at de peker på sånn (11, 12)	*setter strek mellom hus B og hus E*
121	03:16	Aksel	≈Det er en tynn X ja, en tynn X (12)	
122	03:18	Aurora	Og man kan jo ikke komme seg inn til D! (1)	
123	03:21	Martine	Men husk at du også skal komme til A (2)	
124	03:22	Aurora	/utydelig/ komme til A, ja, men da, kan vi ikke bruke de andre også? (2)	*peker på resten av veivalgene*
125	03:28	Alice	Men vi kan jo vri på brikkene (7)	
126	03:31	Aksel	Men kan vi sette et kryss over den da? Plis (9)	
127	03:35	Aurora	Ja (8)	
128	03:36	Martine	For jeg tror Aksel har et poeng, at det ikke kan være nummer 4.	

Oppgave Almas veivalg, gruppe 5: Emilia, Eira, Eskild

Nummereringen kan ignoreres, samsvarer ikke med fremlegg av resultater

	Hvem	**Hva**
1	Martine	Hvilken vil dere prøve ut som neste?
2	[Emilia, Eira]	Jeg vil prøve den! *peker på figur 4 og 5*
3	Martine	Hvorfor vil du prøve den, Emilia?
4	Emilia	Ehh, fordi den er vanskelig *peker på figur 5*
5	Martine	Ja, hvorfor vil du prøve den, Eira?
6	Eira	Fordi atte, det ser det litt ut som det kan være den, men det ser også ut som det ikke kan være den, og da vil jeg bare ta den bort
7	Martine	Hvilken synes du ser vanskeligst ut, Eskild?

8	Eskild	*peker på figur 3*
9	Eskild	Kan vi ikke prøve ut én hver
10	Martine	Jo, dere kan jo prøve ut én hver og forklare til de andre etterpå
11	Eira	Men se *peker på figur 4* hvis jeg tar én liten (trekant) der, og én liten der, og én liten der, det går ikke an
		[...]
12	Emilia, Eskild	*begynner å fargelegge på hvert sitt ark*
13	Eira	*kikker lenge på arket* hva skal jeg gjøre hvis jeg gjør feil?
14	Emilia	Jeg er ferdig
15	Martine	Så bra, du fant ut at den virket?
16	Emilia	Mhm
17	Eira	*begynner å farge figur 4 i stedet for 5* nei nå gjorde jeg den!
18	Martine	Det går fint, kanskje du og Eskild gjør det på to forskjellige måter, og kan forklare til hverandre?
19	Eskild	Jeg har gjort feil
20	Martine	

1	Eskild	Sånn! *fargelegger ferdig figur 4*
2	Martine	Da fant Eskild ut at den virker, bra
3	Emilia	Denne virker ikke! Jeg fant det ut!
4	Martine	Hvorfor tror du at den ikke virker, Emilia?
5	Emilia	Fordi atte her er det fire sånne spisser, og den har vi ingen av klossene på, og den liksom, har én sånn en, men den har ikke den store blåe
6	Martine	Nei, den har ikke den store blå! Tenkte du det samme Eira, du så jo den med en gang og trodde den var vanskeligst? Så du det samme som Emilia?
7	Eira	Mhm, ja. Det var ikke den blå der, bare de små

Oppgave Almas veivalg, gruppe 3: Celine, Casper, Camille
Nummereringen kan ignoreres, samsvarer ikke med fremlegg av resultater

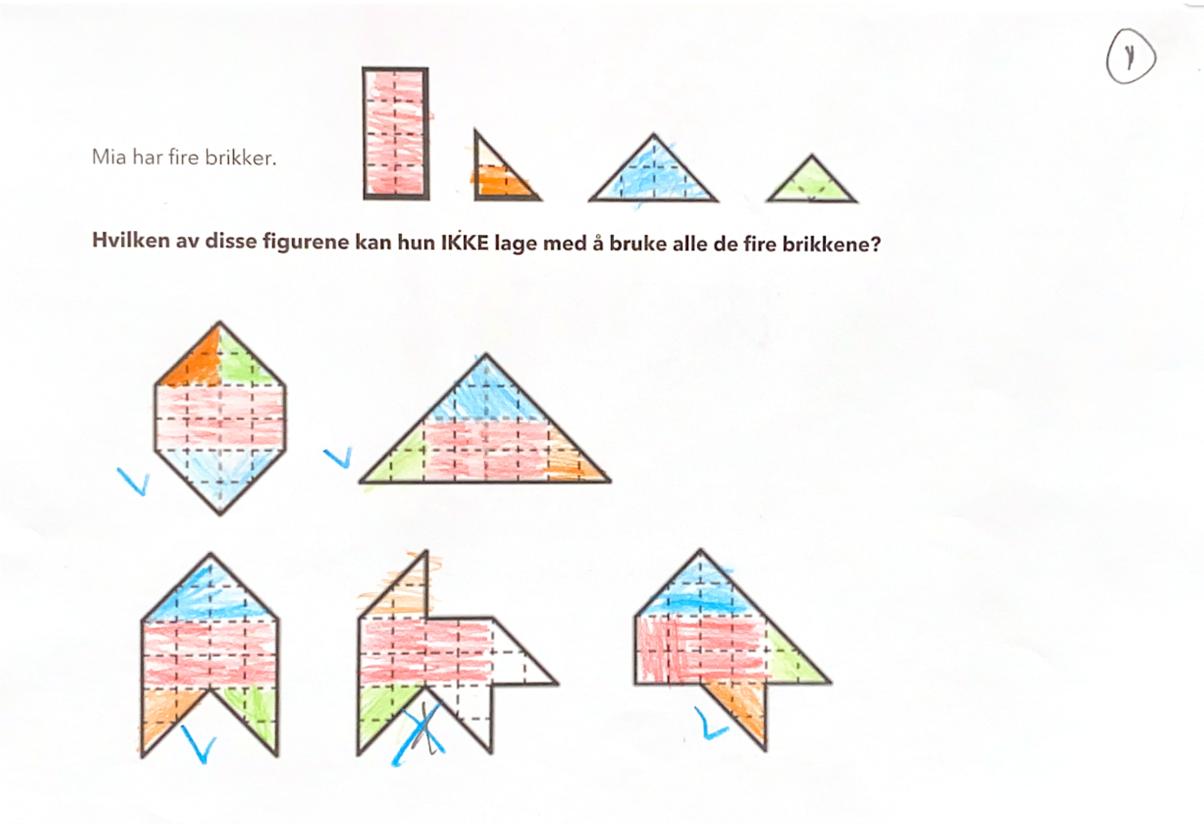
117.	Camille	Det kan jo være den, for den har 3 veier og den skal til 3 hus *peker på veivalg 3*
118.	Celine	*Begynner å tegne opp veivalg 3, setter strek fra hus E til hus B og hus A*
119.	Martine	Hvilken er det du tegner opp nå, Celine?
120.	Celine	Den *peker på veivalg 3*
121.	Martine	Ja, ser den lik ut *peker på tegning*, som den *peker på veivalg 3*?
122.	Casper	Ja, bare at hun vridde på den
123.	Martine	Hvis dere ser, så går den bare til annen hvert hus. Så egentlig, skal den pilen som peker mot B gå ned til C... Så dere det?
124.	Celine	Mhm
125.	Camille	Mot C?
126.	Celine	Det er en T *peker på tegning* og det er en Y *peker på veivalg 3*
127.		
128.	Casper	Jeg tror den *peker på veivalg 1* skal der *peker på sirkel med hus*
129.	Martine	Ja, hvorfor tror du det? Vil du kanskje ha et ark å tegne på for å vise *legger frem ark*
130.	Casper	Fordi da kan, da kjører den inn der *peker på hus A* også kan veien fortsette ... nei
131.	Martine	Men Casper du kan jo prøve å tegne den ut? Og husk at du kan vri på brikkene så mye du vil
132.	Celine	*begynner å tegne strek fra E og mot midten*
133.	Martine	Men Casper, du sa nr.1, hvorfor tror du den?

134.	Casper	Men jeg tror ikke den funker
135.	Martine	Hva tenker du da
136.	Casper	Jeg den går sånn og sånn *gestikulerer strek mellom A og D* også da går den inn der *peker på D*
137.	Martine	Ja, vil du tegne opp og vise?
138.	Celine	*gestikulerer med et viskelær at den går mellom E, F og B*
139.	Martine	Hvis en ser på brikken, er det en lang strek og to korte
140.	Celine	≈ *tegner opp strek fra hus E til B, så F og A*
141.	Martine	Se det Celine, går den til A, B og E nå?
142.	Casper	Eh, neei?
143.	Celine	*tegner oppå strekene for å synliggjøre*
144.	Martine	Går den til A, B, E?
145.	Camille	Jaa
146.	Casper	Og F
147.	Martine	Men det går fint, så lenge den går til A, B, E, og ikke D

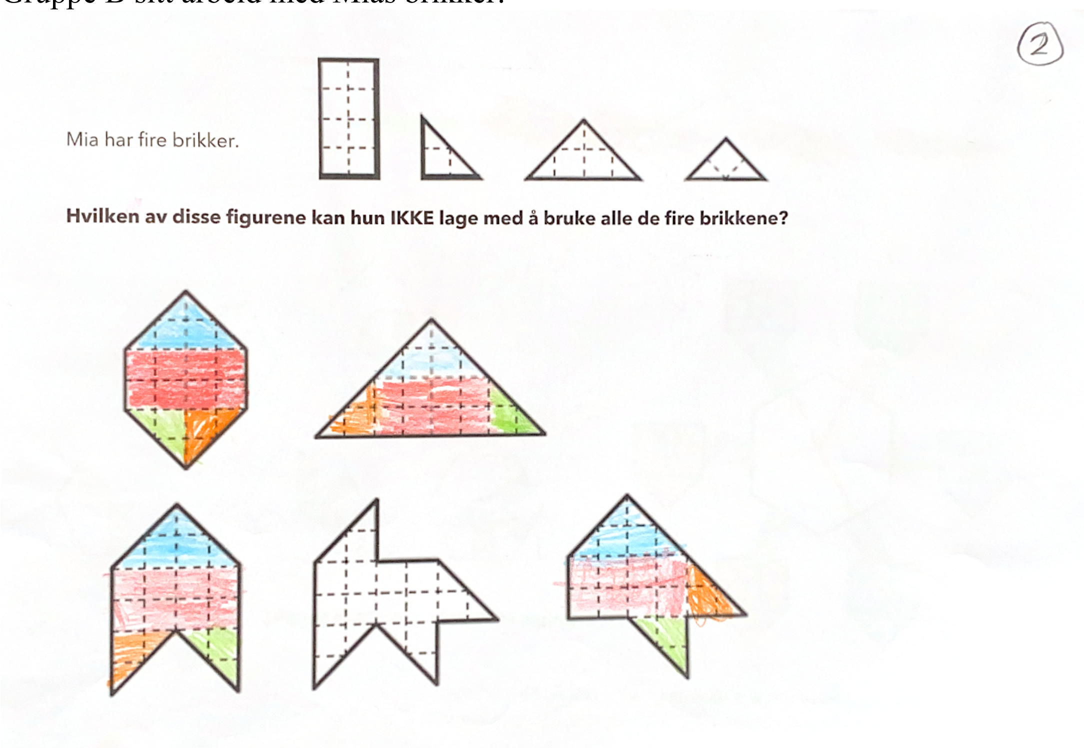
148.	Casper	Fem er det aldeles ikke
149.	Martine	Det kan ikke være fem?
150.	Casper	Tror jeg i hvert fall
151.	Martine	Vil dere prøve? Dere kan få et nytt ark hvis det var mange streker der nå
152.	Casper	Mm, ja
153.	Casper	*krysser over løsningsforslag fra forrige ark* vi var på fem
154.	Celine, Casper	*gestikulerer med hver sin blyant*
155.	Casper	Vi må sikkert begynne på A...
156.	Celine	*tegner opp løsningsforslag 5 riktig*
157.	Martine	Hvilken har du tegnet opp nå?
158.	Celine	Nummer fem
159.	Martine	Ja, går den til A? *elevene svarer ja* Går den til B? *elevene svarer ja* Går den til E? *elevene svarer ja* Og går den til D? *elevene svarer nei* Nei, er den riktig da?
160.	Camille	Og til C
161.	Martine	Ja, er den riktig da?
162.	Casper	Ja *fargelegger grønt på siste løsningsforslag*

Vedlegg 7: De skannede oppgavearkene

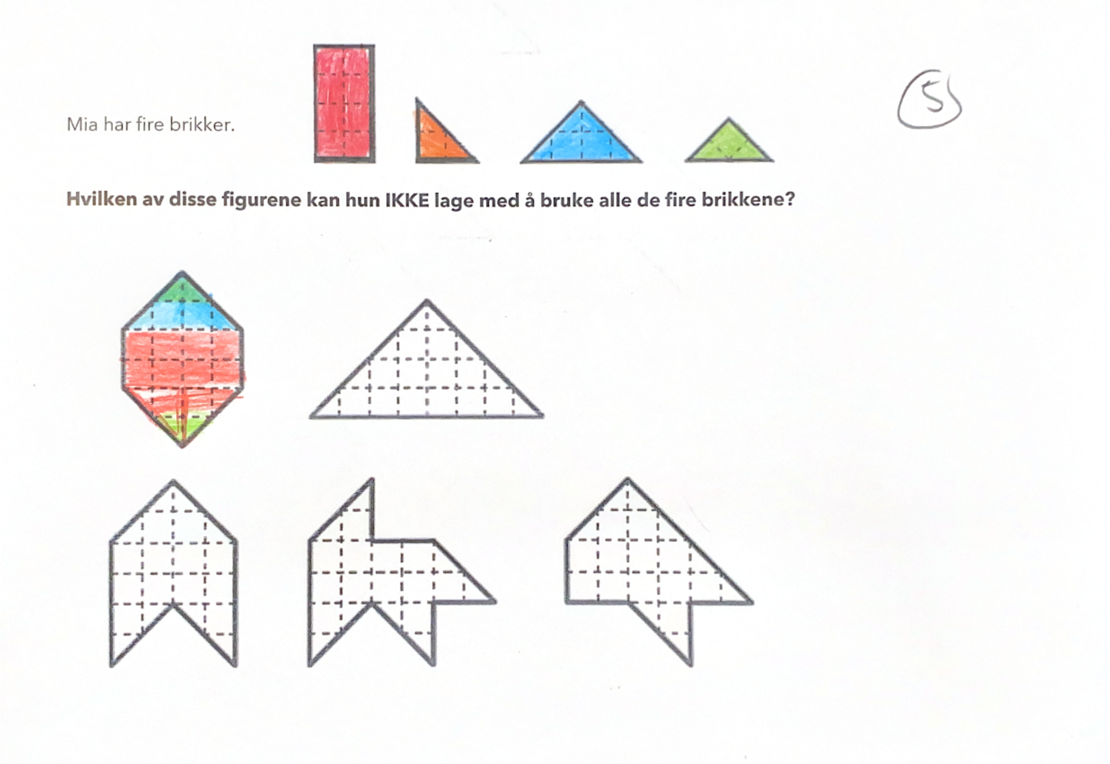
Gruppe A sitt arbeid med Mias brikker:

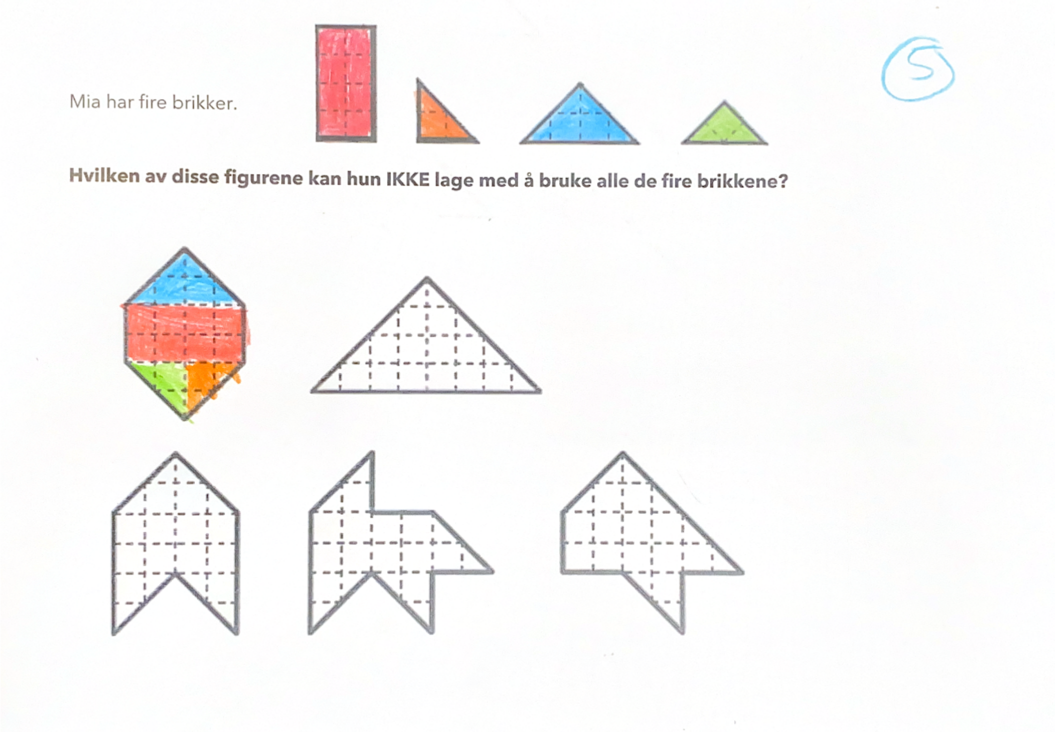


Gruppe B sitt arbeid med Mias brikker:



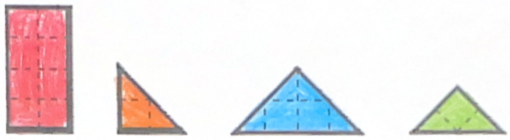
Gruppe E sitt arbeid med Mias brikker:



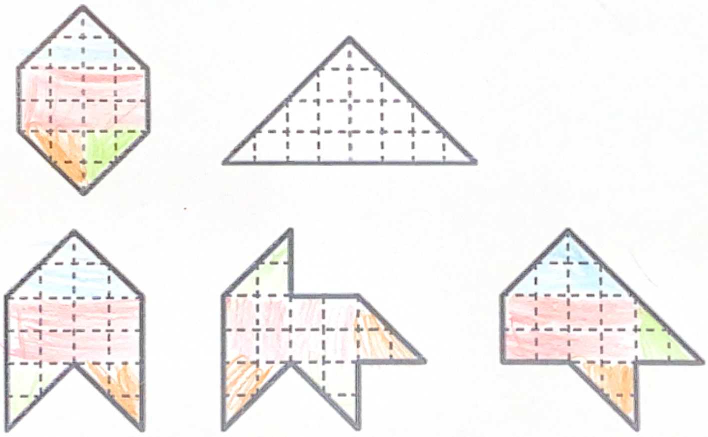


5

Mia har fire brikker.

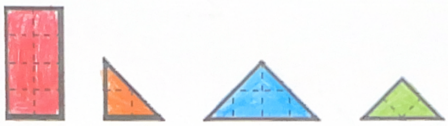


Hvilken av disse figurene kan hun IKKE lage med å bruke alle de fire brikkene?

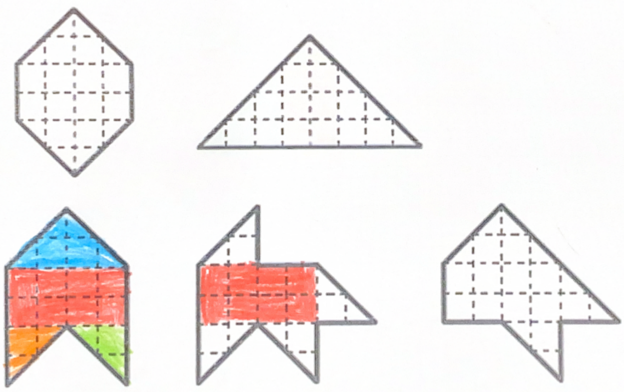


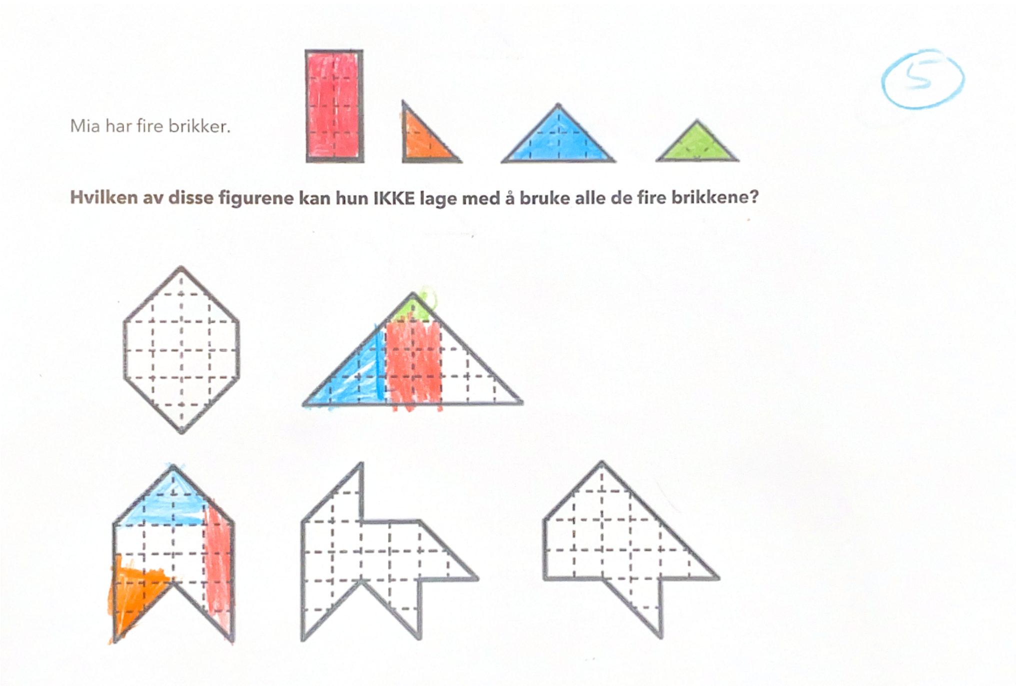
5

Mia har fire brikker.

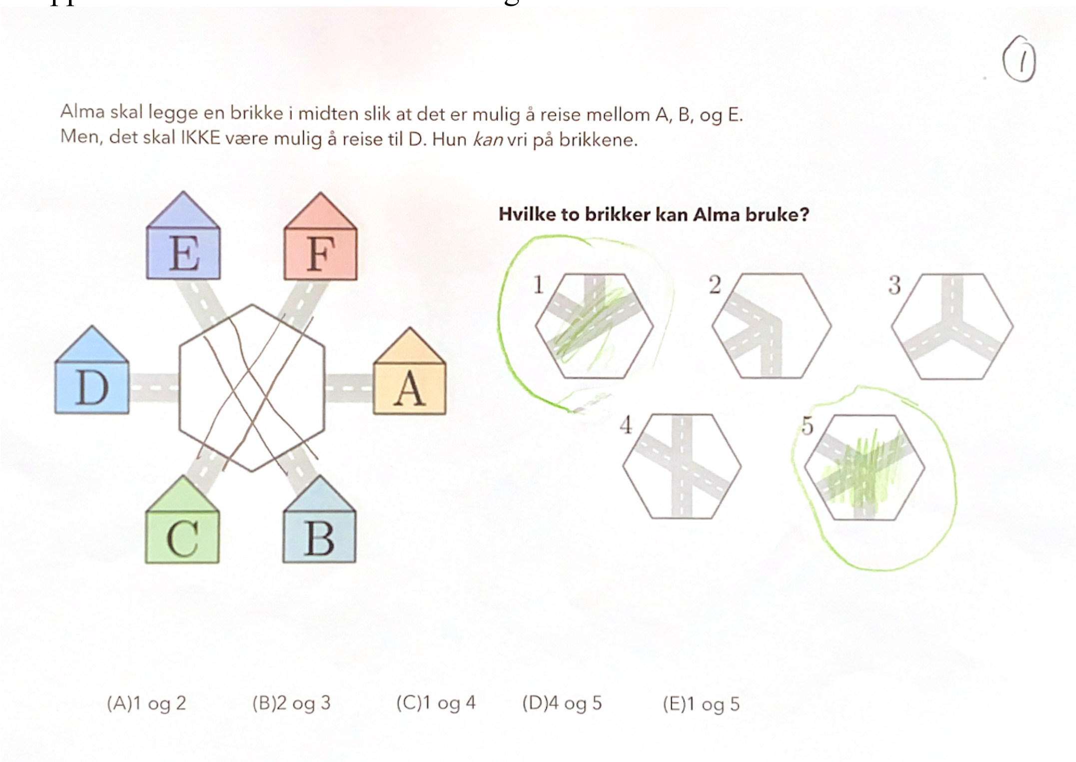


Hvilken av disse figurene kan hun IKKE lage med å bruke alle de fire brikkene?



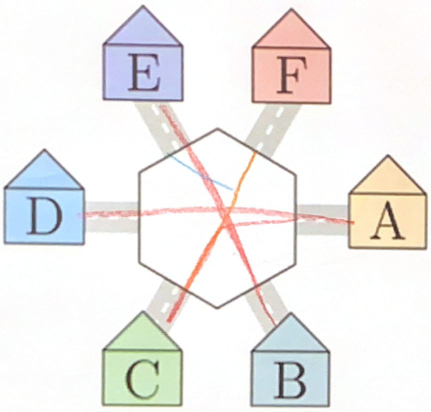


Gruppe A sitt arbeid med Almas veivalg:

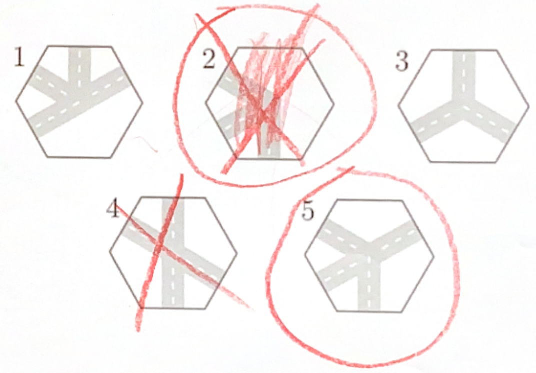


1

Alma skal legge en brikke i midten slik at det er mulig å reise mellom A, B, og E.
Men, det skal IKKE være mulig å reise til D. Hun *kan* vri på brikkene.



Hvilke to brikker kan Alma bruke?

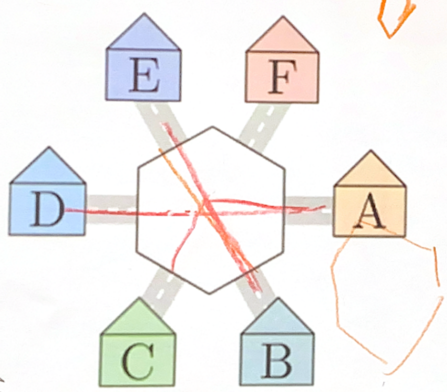


(A)1 og 2 (B)2 og 3 (C)1 og 4 (D)4 og 5 (E)1 og 5

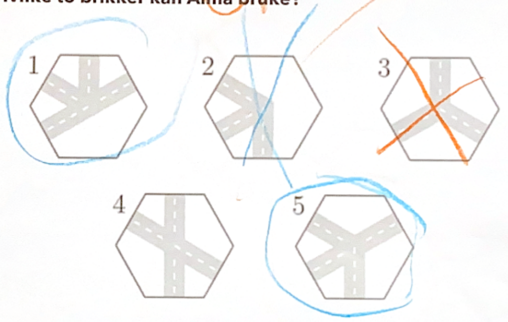
1

Alma skal legge en brikke i midten slik at det er mulig å reise mellom A, B, og E.
Men, det skal IKKE være mulig å reise til D. Hun *kan* vri på brikkene.

ABE AbdF



Hvilke to brikker kan Alma bruke?



(A)1 og 2 (B)2 og 3 (C)1 og 4 (D)4 og 5 (E)1 og 5

Gruppe C sitt arbeid med Almas veivalg: