Representasjoner av Funksjoner – Tolkning og Konvertering

Elevers arbeid med å identifisere samme funksjon på tvers av ulike representasjoner.

ROAR STOREGRAVEN

VEILEDER
Hans Kristian Nilsen

Universitetet i Agder, 2022
Fakultet for Teknologi og Realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Dette masterprosjektet markerer slutten på utdanningen som *lærerspesialist i matematikk*. Det har pågått over tre år, og det har vært meget inspirerende og engasjerende. Både det faglige innholdet, men også erfaringsutvekslingen med andre engasjerte matematikklærere fra andre steder i landet, har bidratt til at jeg har utviklet min kompetanse og mitt syn på matematikkundervisning. I det vi avslutter vår utdanning, og kommer ut i andre enden som «spesialister», blir imidlertid ordningen skrotet av ny regjering. Det er synd at det nå blir opp til hver enkelt skole hvorvidt de ønsker å legge til rette for at lærerspesialistene skal få bidra til faglig utviklingsarbeid på skolen. Det er min personlige opplevelse at skolefaget matematikk virkelig trenger en fornyelse. Den nye læreplanen (LK2020) er helt klart i tråd med det didaktiske forskningsfeltet, men en stor del av matematikklærerne der ute mangler etter min mening kompetansen og kunnskapen til å sette læreplanens intensjoner ut i live. Jeg vet at de lærerne som i år er ferdig utdannede lærerspesialister i matematikk har mye å bidra med i å endre på dette, og det er leit om de ikke får anledning til det på grunn av den enkelte skoles økonomi.

Å studere matematikkdidaktikk parallelt med å undervise har vært interessant. Det har vært lettere å konkretisere det teoretiske og knytte det til eksempler fra egen praksis. Det har imidlertid ikke alltid gagnet elevene mine, da stadig nye impulser fra faglitteraturen har påvirket undervisningen. Det har nok ført til perioder hvor litt for mange idéer har blitt prøvd ut samtidig, og hvor endringer i praksisen ikke har fått tid til å etablere seg før nye endringer ble innført. Jeg erkjenner at dette nok har vært utfordrende for elevene. De har likevel holdt ut, og har stort sett forholdt seg positive til det nye, noe jeg er svært takknemlig for.

Jeg ønsker også å rette en takk til min veileder, Hans Kristian Nilsen, for god støtte gjennom prosjektet. Han har stilt seg fleksibelt til disposisjon, og har sørget for veiledning på mine premisser. Gode samtaler og konstruktive tilbakemeldinger har vært sentrale i utformingen av oppgaven helt fra starten.

Jeg opplever innholdet i prosjektet som veldig spennende, og det vil prege min matematikkundervisning i fremtiden. Jeg er overbevist om at deler av teorien jeg har satt meg inn i gjennom dette prosjektet, rører ved selve kjernen i læring og undervisning av matematikk, og de utfordringer som elever opplever. Til tross for at det har vært krevende lesning, har det derfor likevel vært meget motiverende, da jeg opplever at det gir verdifull innsikt i de utfordringene elever og lærere står ovenfor i sitt daglige arbeid.

Roar Storegraven, 14.05.2022

Sammendrag

Det finnes grunnlag for å si at det matematiske emnet *funksjoner* er av stor betydning for det enkelte individ, både som et fundamentalt element i videre studier av matematikk, men også for aktiv og kritisk deltakelse i dagens informasjonssamfunn (Blomhøj, 1997). I læreplanen LK20 står det spesifikt at elever på ungdomstrinnet skal kunne representere funksjoner på ulike måter og kunne forklare sammenhenger mellom disse representasjonene (Utdanningsdirektoratet, 2020). Teorier som tar utgangspunkt i semiotiske representasjoner i matematikk legger til grunn at disse er helt fundamentale for matematisk tenkning (Janvier, 1987), og noen vil hevde at koordinasjon av ulike representasjoner for samme matematiske idé er selve kjernen i læring av matematikk (Duval, 2006).

Den anerkjente matematikkdidaktikeren Malcolm Swan presenterer i en artikkel fra 2008 ulike oppgavetyper for å utvikle forståelse for matematiske konsepter (Swan, 2008). Blant disse oppgaveutformingene finnes en aktivitet hvor elever jobber sammen for å identifisere den samme matematiske idéen på tvers av ulike typer representasjoner. I Swans (2008) eksempel er emnet «algebraiske uttrykk», og det hevdes at å knytte sammen de ulike representasjonene med samme idé vil skape en dypere forståelse for betydningen av algebraiske uttrykk (Swan, 2008).

Dette masterprosjektet undersøker det aktuelle oppgavedesignet, tilpasset emnet funksjoner. Målet er å utvikle forståelse for hvilke prosesser elevene går gjennom i arbeidet med denne type aktivitet. Forskningsspørsmålene som er formulert spør om hva som karakteriserer ungdomsskoleelevers arbeid med denne type oppgave, og hvilke eventuelle preferanser som kommer til uttrykk i arbeidet. Det utarbeides *verditabeller, grafer, algebraiske uttrykk* og *verbale beskrivelser* som representerer syv ulike funksjoner. Gjennom analyse av elevgruppers dialog under arbeid med å identifisere sammenhenger mellom disse representasjonene, presenteres noen sentrale karakteristikker ved elevenes arbeid. Karakteristikkene drøftes i lys av teori om representasjoner, og mulig læringspotensial diskuteres på bakgrunn av dette.

Det konkluderes med at aktiviteten gir gode muligheter for elever til å utvikle sine evner til tolkning av de ulike representasjonene. De aktuelle elevene viser også klare tendenser til å foretrekke såkalte *lokale tolkninger* av representasjonene (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). I tillegg gir en analyse av *kongruens*, eller «gjennomsiktighet», mellom representasjonene, sammen med karakteristikkene av elevenes arbeid, opphav til en interessant hypotese om hva som er avgjørende for de valgene elevene tar underveis. Resultatene i denne masteroppgaven reiser spørsmål både knyttet til aktivitetens design, men

også om arbeid med matematiske representasjoner generelt, som krever videre studier for å kunne svare på.

Abstract

Knowledge in the mathematical domain of *functions* can be said to be of great importance to the individual, both as a fundamental steppingstone to further studies of mathematics, but also in being an active citizen in a modern society (Blomhøj, 1997). In the Norwegian mathematics curriculum it is clearly stated that students (age 14-16) should be able to represent functions in a range of different ways, and to show the connections between these representations (Utdanningsdirektoratet, 2020). Theories of the role of semiotic representations in mathematics claims that the use of such representations is fundamental to mathematical thinking (Janvier, 1987), and some would say that the coordination of different representations of the same mathematical idea is the very essence of the learning of mathematics (Duval, 2006).

Malcolm Swan, a renowned figure in the field of mathematics education research, presented in an article five types of tasks designed to promote conceptual understanding (Swan, 2008). Among these, there is an activity named "Interpreting multiple representations", where students work together in matching cards with multiple kinds of representations of the same mathematical ideas. In Swans (2008) example the activity is concerned with understanding the meaning of algebraic expressions, and the claim is that connecting different representations to the same mathematical idea will lead to a deeper conceptual understanding of the expressions (Swan, 2008).

This master's thesis studies the described learning activity in the context of functions. The goal has been to develop a better understanding of the processes that students go through when working in this way. The research questions that have been formulated asks (1) what characterizes the work of students in secondary school when they work on matching different representations of functions, and (2) which, if any, preferences for representations that can be observed in their work. Graphs, algebraic expressions, tables and verbal descriptions are designed, together representing seven different functions, both linear and non-linear. Through analysis of the dialogue of two groups of students while working on matching the representations, some key characteristics of the work is described. These characteristics are then discussed based on relevant theory to shed some light on the possible learning outcomes that this kind of activity might support.

The results indicate that the activity provides good opportunities for students to develop their abilities in interpreting the different representations. There is also a clear tendency that the students prefer doing so-called *local interpretations* (Leinhardt et al., 1990). Furthermore, an analysis of the degree of *congruence*, or "transparency" between the representations, together with the characteristics of the

students' work, gives rise to an interesting hypothesis regarding which factors impact the students' choices in the activity the most. Both findings, if found to be generalizable, entail implications for the teaching not only of functions, but mathematics in general. This study points to interesting factors involved in this kind of learning activity. However, the results are highly contextual, and further studies are needed to investigate the reliability of the conclusions.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Både i et dagligdags og i et rent matematisk perspektiv, er tilegnelsen av konseptet *funksjoner* av betydning for den enkelte samfunnsborger (Blomhøj, 1997). Det er en forutsetning både for studier av matematikkfaget etter grunnskolen, og for å kunne forstå de mange matematiske modellene som anvendes i samfunnet blant annet innen statistikk og økonomi (Blomhøj, 1997; Hitt, 1998). Studier av elever, lærerstudenter og lærere, indikerer imidlertid at forståelsen for dette emnet ofte er noe begrenset (Blomhøj, 1997; Grevholm, 1998; Hansson, 2003; Hitt, 1998; Persson, 2013). I den nasjonale læreplanen, Kunnskapsløftet 2020, er forståelse av konseptet funksjoner et viktig element i kompetansemålene på ungdomstrinnet. Her står det blant annet at elevene skal kunne representere funksjoner på ulike måter, vise sammenhenger mellom representasjonene, og at de skal kunne bruke funksjoner i arbeid med modellering (Utdanningsdirektoratet, 2020). *Representasjoner* er de ulike billedlige, symbolske og verbale formene for kommunikasjon som brukes i matematikk, og bruk av slike er fundamentalt for matematisk tenkning (Janvier, 1987).

Funksjoner er et komplekst emne med forbindelser til en rekke andre matematiske områder og som kommer til uttrykk gjennom flere ulike representasjoner (Blomhøj, 1997; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Janvier, 1987). Å fleksibelt kunne omforme representasjoner og effektivt bevege seg mellom ulike typer representasjoner blir ansett som kilden til forståelse av matematiske idéer og evne til problemløsning (Duval, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Nitsch et al., 2015). Claude Janvier påpekte i 1987 at en viktig side ved all symbolbruk i matematikk ofte blir oversett, nemlig *oversettelsesprosessen*. Siden har det blitt gjort en del forskning på området. Funn inkluderer korrelasjon mellom evne til oversettelse og evne til problemløsning (Gagatsis & Shiakalli, 2004), at ingen oversettelsesprosesser kan gis prioritet foran andre i arbeidet med å utvikle forståelse (Nitsch et al., 2015), og at elever strever mer med noen oversettelser enn andre (Bossé, Adu-Gyamfi, & Cheetham, 2011).

På bakgrunn av dette er hensikten i dette masterprosjektet å designe og prøve ut et undervisningsopplegg som legger til rette for at elever får arbeide spesifikt med å *tolke* og *knytte sammen* ulike representasjoner av funksjoner. Opplegget er inspirert av et oppgavedesign av Malcolm Swan (2008), og hovedaktiviteten går ut på at elevene i små grupper får i oppgave å gruppere fysiske kort med ulike representasjoner av ulike funksjoner. Swan (2008) hevder at denne type aktivitet kan føre til dypere forståelse av matematiske idéer, men er lite detaljert i sin forklaring av hvorfor. Motivasjonen bak prosjektet er å bedre forstå *hva* elevene gjør i en slik aktivitet, spesifikt innen emnet funksjoner, og hvilke aspekter ved dette arbeidet som kan tenkes å gi den antatte læringseffekten.

Følgende problemstillinger er formulert:

I Hva karakteriserer ungdomsskoleelevers arbeid med å identifisere og gruppere kort med ulike representasjoner av funksjoner?

II Hvilke, hvis noen, preferanser for representasjoner og overganger mellom disse kan spores hos elevene i en slik aktivitet?

Gjennom en kvalitativ analyse av samtalene i utvalgte elevgrupper, er målet å undersøke om det finnes elementer i arbeidet som i lys av relevant teori kan tenkes å fremme elevenes evne til å oversette mellom representasjonene. Håpet er først og fremst at dette arbeidet kan danne utgangspunktet for mer målrettede studier av slike læringsaktiviteter, og at dette igjen kan gi implikasjoner for matematikkundervisning og læring av funksjoner.

2 Teori

Dette kapittelet vil gi en innføring i de sentrale teoretiske idéene og begrepene som ligger til grunn for denne oppgaven. Det gjelder både det overordnede synet på hva læring av matematikk innebærer, samt de mer spesifikke teoriene og begrepene som vil benyttes i analysen av datamaterialet. Den teoretiske posisjoneringen er også viktig i begrunnelsen for valget av aktivitet som skal undersøkes, da dette valget reflekterer et syn på hvordan matematikk kan læres.

2.1 Læringsteoretisk posisjonering

Den teorien dette masterprosjektet i all hovedsak lener seg på er Raymond Duvals arbeid med semiotiske representasjoner. I artikkelen fra 2006 kaller han arbeidet for *en kognitiv analyse av problemer med forståelse i læring av matematikk* (Duval, 2006, s. 1). Tittelen gjør det nærliggende å plassere dette arbeidet i en kognitiv læringstradisjon. Dette er idéer man gjerne forbinder med *konstruktivisme*, hvor man er opptatt av at læring foregår gjennom aktiv konstruksjon av kunnskap i hodet på det enkelte individ (Lerman, 1989). Duval er i all hovedsak opptatt av individets interaksjon med matematiske symboler og representasjoner, og hvordan individet konstruerer kunnskap rundt matematiske idéer gjennom interaksjon med ulike representasjonsformer. Å lære matematikk innebærer i dette perspektivet å konstruere kunnskap omkring abstrakte matematiske idéer gjennom å lære hvordan de ulike måtene å representere idéene på er knyttet sammen, og hvordan de er relatert til andre idéer. Det innebærer å fleksibelt kunne skifte representasjonsform samtidig som man referer til samme objekt.

Sentralt i konstruktivismen finner man også hypotesen om at sannhet er individuelt (Lerman, 1989). Det vil si, hver enkelt konstruerer sin kunnskap om verden basert på sine erfaringer med den, og man kan ikke være sikker på at andres oppfatning av verden er lik ens egen. I denne tradisjonen finner vi da også begreper som *interne representasjoner* (Goldin & Kaput, 1996) og *antatt felles forståelse* (Skott, Skott, Jess, & Hansen, 2018). Utgangspunktet for disse begrepene er nettopp at individet konstruerer sine egne, unike forestillinger om verden og objektene i den, og at man må ta utgangspunkt i at disse verdensbildene ikke er identiske.

I dette masterprosjektet ligger det en grunntanke som er på linje med konstruktivismen, nemlig at elevene selv aktivt må konstruere kunnskapen gjennom interaksjon med de representasjoner de møter i klasserommet, både skriftlig, billedlig og muntlig. Kunnskap kan ikke overføres passivt fra lærer, og læringsaktiviteten som undersøkes her er derfor i høy grad elevsentrert. Videre følger en mer detaljert beskrivelse av sentrale idéer i det matematikkdidaktiske fagfeltet «representasjoner», med hovedvekt på Duval.

2.2 Semiotiske representasjoner

En tilnærming til hva det vil si å gjøre matematikk er gjennom å se på hva som er karakteristisk for denne aktiviteten. I dette masterprosjektet legges det til grunn at *all matematisk aktivitet innebærer en eller annen form for manipulasjon av semiotiske representasjoner* (Duval, 2006). En semiotisk representasjon er en form for konfigurasjon som viser til, står for eller symboliserer noe annet (Goldin & Kaput, 1996). Det er alle de ord, tegninger, linjer, symboler eller figurer vi produserer muntlig eller skriftlig for å referere til et objekt (Duval, 2017). Disse ulike formene for representasjoner har alle ulike regler for hvordan de produseres, avhengig av hvilken *type* representasjon det er. Slike klasser av representasjoner har blitt gitt ulike navn. Kaput har brukt begrepet «symbol schemes», Goldin har kalt dem «representational systems» (Goldin & Kaput, 1996), og Leinhardt et al. (1990) refererer til «symbol systems». I denne oppgaven vil jeg bruke Duvals (2006) begrep *register*. De refererer alle til samme idé, et system med fastsatte regler for hvordan matematiske idéer skal komme til uttrykk gjennom symboler og tegn, bilder eller ord (Duval, 2017). Eksempler på slike register er *kartesiske grafer*, *algebraiske uttrykk* eller *brøker*. Goldin & Kaput (1996) beskriver også et skille mellom *interne* og *eksterne* representasjoner, hvor de eksterne er de vi kan observere skriftlig eller muntlig. Interne representasjoner er representasjoner individer har for matematiske objekt «i sitt eget hode», og er ikke tilgjengelige for observasjon (Goldin & Kaput, 1996). I denne oppgaven er søkelyset utelukkende på eksterne, observerbare representasjoner.

2.3 Representasjoners særstilling i matematikk

Duval (2006, 2017) hevder at matematikk er et spesielt tilfelle når man studerer representasjonenes rolle for den faglige aktiviteten. Han går så langt som å si at transformasjon av semiotiske representasjoner er selve kjernen i matematisk aktivitet (Duval, 2006, 2017). Hans analyse av denne påstanden avdekker noen viktige momenter ved matematikkfaget og tilegnelse av matematisk kunnskap. Videre presenteres noen sentrale idéer og begreper fra hans arbeid.

2.3.1 Utilgjengeligheten til matematiske objekt og utvalget av representasjoner

Matematikk er den vitenskapen som benytter seg av det største utvalget av semiotiske representasjoner (Duval, 2017). Dette har antakeligvis bakgrunn i den særstillingen representasjonene har i faget. Matematikk skiller seg nemlig fra alle andre vitenskapelige kunnskapsområder særlig på ett punkt: objektene det skapes kunnskap rundt er *utilgjengelige* uten semiotiske representasjoner (Duval, 2006, 2017). Disse objektene vil videre refereres til som *matematiske objekter*. Et matematisk objekt kan være alt fra «tallet 4», til idéen om en «lineær funksjon». Ved at de er utilgjengelige menes at de ikke kan observeres eller måles med instrumenter. Dette byr umiddelbart på utfordringer, da man befinner seg i en situasjon hvor man forsøker å tilegne seg kunnskap om objekter som egentlig ikke finnes i den fysiske verden. Duval (2017) problematiserer at mange kognitive modeller for tilegnelse av matematikkunnskap baserer seg på antakelsen om at læring av matematikk vil kunne foregå på samme måte som andre kunnskapsområder, ved at man først blir kjent med de aktuelle kunnskapsobjektene slik de faktisk forekommer, for så å tilknytte representasjoner. Slik Duval ser det, er ikke dette mulig i matematikken. Duval (2017) illustrerer denne kritiske forskjellen mellom matematikk og andre fagområder ved å stille noen essensielle spørsmål: (1) Kan vi sidestille objektet selv med dets representasjoner? (2) Når man sidestiller ulike representasjoner av objektet, er det mulig å se at det er det samme objektet? Vi kan sidestille en modell eller en definisjon av en stol med *selve stolen* for å undersøke hvor godt representasjonen representerer det virkelige objektet, og hvilke aspekter ved objektet som kommer godt eller dårlig frem gjennom representasjonen. Denne muligheten har vi ikke med matematiske objekt. Vi kan *ikke* sidestille grafen til en lineær funksjon med den «ekte» lineære funksjonen for å sammenligne. Vi har kun representasjonen å forholde oss til. Resultatet blir at i møtet med et nytt matematisk objekt, vil elever naturlig se representasjonen *som* det faktiske objektet, og ikke som en representasjon av noe (Duval, 2006). Men hvordan skal man så kunne tilknytte flere representasjoner til samme matematiske objekt?

2.3.2 Det kognitive læringsparadokset

For å få tilgang til et nytt matematisk objekt må man nødvendigvis gjøre dette ved hjelp av en representasjon plukket fra et av flere mulige register. Denne representasjonen vil da ta plassen som selve objektet, da det som en konsekvens av matematiske objekters abstrakte natur ikke er mulig å skille objektet fra dets første representasjon (Duval, 2006). Samtidig er det en forutsetning at man skiller objektet fra representasjonen for å kunne assosiere objektet med en *annen* representasjon. Det er denne tilsynelatende umulige situasjonen et individ står ovenfor når ny matematikk skal læres. Det er et paradoks som er særegent for matematikkfaget, og er roten til mye av problemene elever opplever i skolen (Duval, 2006). Løsningen på problemet er, ifølge Duval selv, bevisst og målrettet arbeid med samvariasjon av ulike representasjoner for det samme objektet (Duval, 2006). Sagt på en annen måte: kun ved å gjøre små variasjoner av det matematiske objektet som studeres, og observere hvilke utslag dette gir i to eller flere representasjoner *samtidig*, kan man skille ut hvilke deler av representasjonene som er matematisk relevante for objektet, og videre skille objektet fra dets representasjoner. Man kan da se at objektet ikke *er* representasjonen, men at objektet påvirker *enkelte deler* av en representasjon.

2.3.3 Behandling og konvertering

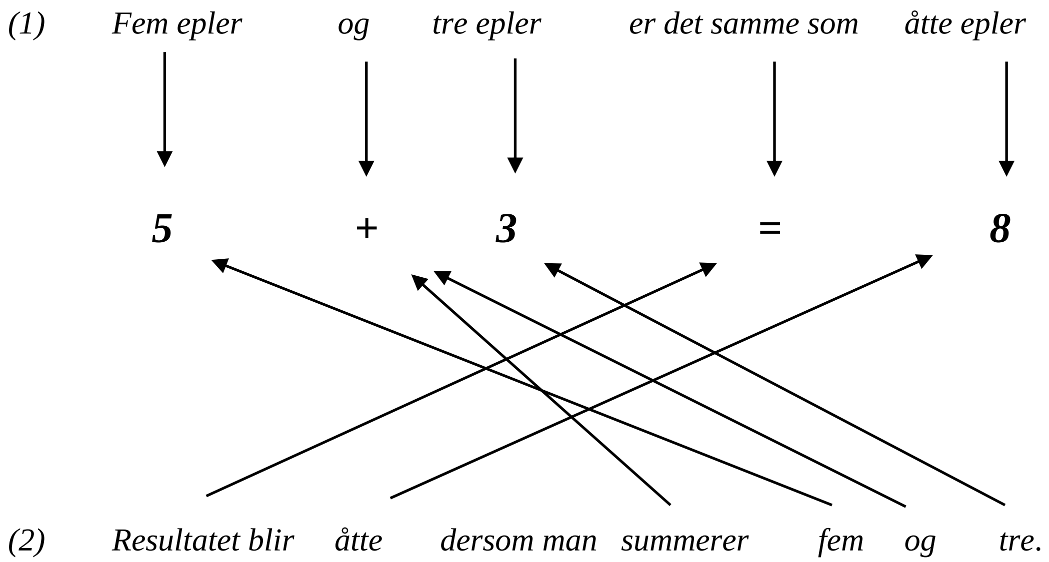
I matematikken er representasjonenes rolle ikke først og fremst «å stå for noe», slik tilfellet er i andre disipliner. Det viktigste er at de tillater transformasjon – substitusjon av én representasjon mot en annen samtidig som det refereres til det samme matematiske objektet (Duval, 2006). Hvordan en representasjon blir brukt handler mer om hvilke transformasjoner registeret tillater enn hvilket objekt som representeres. Ulike register har ulik kapasitet for transformasjon (Duval, 2006). Goldin & Kaput peker også på at det er forskjell i hva som er mulig å representere fra register til register. Kontrasten mellom en funksjon som en tabell med verdier og funksjonen som et algebrauttrykk er stor. Det algebraiske registerets syntaks tillater andre transformasjoner enn tabellene. Samtidig er det også forskjell på transformasjoner som gjøres innen ett og samme register, og transformasjoner som gjøres på tvers av ulike register.

Duval bruker begrepene «treatments» og «conversions» om henholdsvis transformasjoner innen samme register (f.eks. løse en oppstilt likning algebraisk), og transformasjon fra et register til et annet (f.eks. tegn grafen til et funksjonsuttrykk). I denne oppgaven er «treatments» oversatt til *behandling*, og «conversions» til *konvertering*. For Duval starter læring av matematikk med koordinasjon av *minst* to ulike register (Duval, 2006), og fenomenet *konvertering* er dermed av særlig interesse. Dette innebærer å kunne representere samme idé på minst to ulike måter. Dette ses tidlig hos barn gjennom koblingen av tallord og fysiske objekter eller bilder av gjenstander. Senere tilknyttes de skriftlige tallsymbolene også til tallordene. Duval påpeker at mye av det som er karakteristisk for en type representasjon skyldes syntaksen til registeret den tilhører, og ikke nødvendigvis det bestemte objektet som representeres (Duval, 2006). Det kan eksemplifiseres ved en graf og et funksjonsuttrykk som begge representerer den samme funksjonen. For et utrent øye er det tilsynelatende ingenting som avslører at disse representasjonene representerer det samme objektet. En matematiker vil umiddelbart kunne identifisere de kritiske delene i representasjonene, og se dem som to sider av samme sak. Nybegynnere vil ha større problemer med å vite hva de skal se etter. Identifiseringen av disse kritiske elementene i en representasjon er helt avgjørende for å kunne konvertere fra et register til et annet (Duval, 2006).

Det er antatt at bruk av flere representasjoner samtidig, ofte kalt «multiple external representations» (MER), vil bidra til økt læring også i matematikk (Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002). Dette er imidlertid villedende, da det *først* krever evnen til å tolke ulike representasjoner som uttrykk for det samme før man kan dra nytte av dem samlet for å utvikle kunnskap om objektet som representeres (Duval, 2017). I studien til Ainsworth et al., (2002) bekrefter funnene dette, og de påpeker at «If a learner is unable to translate, or has difficulty mapping their knowledge between representations, then the unique benefits of MERs may never arise.» (s. 28). De sier også at å lære og gjøre en slik oversettelse (konvertering) mellom ulike register er langt fra trivielt, og krever særlig oppmerksomhet i undervisning. Dette finner vi også hos Duval (2006), som hevder at det skolen først og fremst må lære elever, er nettopp konvertering mellom registre.

2.3.4 Kongruens mellom representasjoner

Enkelte konverteringer mellom representasjoner fremstår som mindre problematiske for elever enn andre. I en konvertering må relevant informasjon tolkes i én representasjon og konverteres til en tilsvarende informasjonsenhet i en annen representasjon. Goldin & Kaput (1996) snakker om en korrespondanse mellom elementer i ulike representasjoner. De beskriver også hvordan betydningen av et slik element avhenger både av syntaksen innad i registeret, men også av hva det er ment å skulle representere. I arbeidet med å bevege seg fra et register til et annet, samtidig som man referer til samme objekt, vil det dermed variere hvor stor grad av tolkning som kreves, alt etter hvilke representasjoner det er snakk om. I følge Duval (2006, 2017) finnes en variasjon i grad av «gjennomsiktighet». For enkelte par av representasjoner vil det være mer opplagt hvilke elementer som samsvarer enn for andre. Følgende situasjon beskrevet med ord og tall er et eksempel på en konvertering med ulik grad av gjennomsiktighet:



Den første formuleringen oppleves som mer «rett frem», hvor ulike deler av teksten kan knyttes til deler i regnestykket uten særlig grad av tvetydighet. En endring i formuleringen av den verbale representasjonen (2) vil kunne gjøre en slik konvertering *mindre* gjennomsiktig. Her er det ikke lenger samme kronologi, og det er ikke like entydig sammenheng mellom elementene i representasjonene. Duval (2017) peker på dette fenomenet som avgjørende for elevers evne til å konvertere mellom representasjoner, og han bruker begrepet *kongruens* for å beskrive det. Dersom en konvertering er kongruent, betyr det at det er en tydelig én-til-én-korrespondanse mellom elementene i representasjonene, og det kreves relativt lite tolkning av elementene for å konvertere dem (Duval, 2017). I en ikke-kongruent konvertering er det lite eller ingen opplagt direkte sammenheng mellom elementer i representasjonene, og det krever stor grad av tolkning for å kunne gjøre konverteringen. En vurdering hvorvidt en konvertering klassifiseres som kongruent eller ikke er noe som må vurderes i hvert enkelt tilfelle, og det er ikke mulig å komme med noen generelle klassifiseringer om kongruens mellom bestemte registre (Duval, 2017).

Adu-Gyamfi, Bossé & Chandler (2017) anvendte kongruensbegrepet som et analyseverktøy når de studerte elevers arbeid med algebraiske og grafiske representasjoner av polynomfunksjoner. Slik de bruker begrepet, er ikke kongruens noe som kun beskriver forholdet mellom to representasjoner, men også handlingene elever velger å gjøre. De beskriver hvordan to grupper elever gjør henholdsvis kongruente og ikke-kongruente konverteringer i arbeidet med samme oppgave. Her knyttes ikke-kongruente konverteringer sammen med en dypere forståelse for konseptet polynomfunksjon, og kongruente konverteringer med mer overfladisk kunnskap.

2.4 Konvertering av representasjoner – Objektet «funksjon»

Janvier (1987) var tidlig ute med å hevde at en viktig del av arbeidet med representasjoner i matematikkundervisning ofte ble oversett: nemlig oversettelsesprosessene. Janvier brukte ordet *oversettelse* (translation) om disse prosessene. Duval (2006) har imidlertid påpekt at de kognitive prosessene som inngår i dette arbeidet er langt mer komplekse enn det man gjerne forbinder med oversettelse av språk, og ordet *konvertering* er derfor å foretrekke. I enhver konvertering beveger man seg nødvendigvis *fra* en representasjon *til* en annen. Janvier (1987) omtalte disse som *source representation* og *target representation*. Oversatt til norsk kan vi si *kilde- og målrepresentasjon*. Hva som er kilden og hva som er målet er avgjørende for oversettelsesprosessen (Janvier, 1987). For eksempel, dersom man har en grafisk fremstilling av en funksjon som kilderepresentasjon, vil man måtte analysere den ulikt avhengig av om målrepresentasjonen er et algebraisk uttrykk eller en tabell. For å komme frem til uttrykket, må man beregne grafens stigning og skjæring med y-aksen. Ønsker man å lage en verditabell, må man lese av punkter på grafen. Dette er to ganske ulike prosesser. Med andre ord, målrepresentasjonen avgjør hvordan man tolker kilderepresentasjonen.

Janviers påstand har senere vært utgangspunktet for flere studier på lærere og elevers arbeid med konvertering av representasjoner, hvorav noen handler spesifikt om emnet *funksjoner*. Stort sett studeres konvertering mellom representasjoner produsert i de fire vanligste registrene elevene møter i grunnskolen når det gjelder funksjoner: *verbal beskrivelse av situasjon, verditabeller, algebraiske uttrykk* og *grafer i det kartesiske koordinatsystemet.*

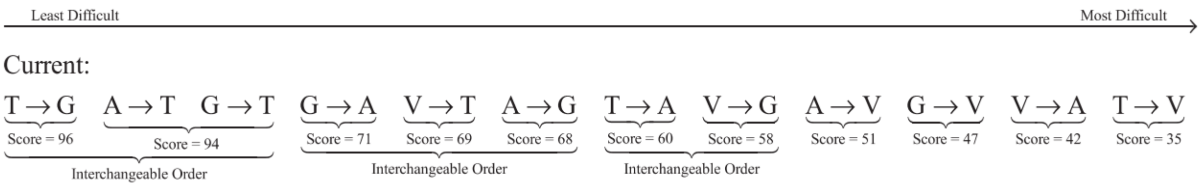
2.4.1 Faktorer som påvirker konvertering

Den omtalte variabelen *kongruens* har stor betydning for konverteringen mellom representasjoner, og kan ifølge Duval (2017) i stor grad predikere i hvilken grad elever lykkes med en konverteringsoppgave. Det er samtidig andre faktorer som også kan spille inn. Leinhardt et al. (1990) peker på at de fleste oppgaver kan klassifiseres som enten en *tolknings*- eller *konstruksjonsoppgave,* hvor en tolkningsoppgave forbindes med identifisering og beskrivelse av representasjoner, og en konstruksjonsoppgave innebærer å produsere en ny representasjon basert på en annen. Duval (2006) argumenterer for at all interaksjon med semiotiske representasjoner innebærer en form for tolkning. Denne tolkningen kan være *global* eller *lokal* (Leinhardt et al., 1990). Globale tolkninger innebærer å tolke helhetlige trekk ved representasjonen, som utvikling i mønstre, stigning eller spørsmål knyttet til kontinuitet. Lokale tolkninger er knyttet til avgrenset informasjon, som et punkt på grafen, en bestemt funksjonsverdi eller et bestemt tilfelle i et figurmønster. På denne måten er det mulig å klassifisere de typiske tolkningene forbundet med konverteringer mellom representasjonene av funksjoner. Tolkningen som kreves i konverteringen graf → uttrykk kan sies å være global, det vil si, man må ta hele linja og dens egenskaper i betraktning for å kunne gjøre konverteringen (Bossé et al., 2011). I konverteringen graf → tabell kreves en mer lokal tolkning, hvor man kun konsentrerer seg om utvalgte punkter på grafen. Alle konverteringene mellom de fire registrene knyttet til funksjoner kan klassifiseres på denne måten, og kan fremstilles i samme matrise som Janvier (1987) opprinnelig brukte (se figur 2.1).

To / From	Situations, Verbal Description	Table	Graph	Formulae [Symbolic]
Situations, Verbal Description		Global	Global	Global
Table	Global		Local	Global
Graph	Global	Local		Global
Formulae [Symbolic]	Global	Local	Local	

Figur 2.1: Tolkning assosiert med de ulike konverteringene (Bossé et al., 2011)

Globale tolkninger regnes som mer utfordrende for elever (Adu-Gyamfi, Lynch-Davis, & Bosse, 2019; Bossé et al., 2011; Duval, 2006). Konverteringer mellom representasjoner som krever globale tolkninger regnes derfor som vanskeligere enn de som krever lokale. Dette sammenfaller med funnene til Adu-Gyamfi et al. (2019) som basert på litteraturgjennomgang og egne resultater rangerte de ulike konverteringene etter hvor ofte elever lykkes (se figur 2.2)



Figur 2.2. Konverteringer etter vanskegrad (Adu-Gyamfi et al., 2019, s. 401)

Her står bokstavene T, G, A og V henholdsvis for tabell, graf, algebraisk uttrykk og verbal beskrivelse. Om man studerer matrisen (figur 2.1) til Bossé et al. (2011) opp mot denne rangeringen av vanskegrad, ser man at de konverteringene som baseres på lokale tolkninger har høyest suksessrate (til venstre), og at de som rangeres som vanskeligst er de som krever globale tolkninger.

I artikkelen fra 2011 trekker Bossé et al. frem et utvalg faktorer de mener påvirker konverteringsprosessene mellom representasjonene for funksjoner. I tillegg til å assosiere de ulike konverteringene med lokale eller globale tolkninger, nevner de også tilstedeværelsen av «fact gaps», «confounding facts» og «attribute density» som avgjørende. *Informasjonshull* («fact gaps») refererer til i hvilken grad det kan være mangel på nødvendig informasjon for å gjøre en konvertering. Verditabellen trekkes frem som et eksempel på en kilde-representasjon som ofte kan ha en høy grad av informasjonshull. F.eks. er det ikke sikkert tabellen inneholder informasjon om nullpunkter eller skjæringspunkter, noe som vil vanskeliggjøre konverteringen til for eksempel en graf. *Villedende informasjon* («confounding facts») viser til informasjon som ikke er direkte relevant for konverteringen, og som kan forkludre prosessen. Her nevnes eksempler som at verdiene i en verditabell ikke står oppgitt i stigende rekkefølge, eller hvordan ulike lokale maksimum eller minimum på en graf kan være forvirrende for elever som prøver å lage et algebraisk uttrykk for grafen. *Informasjonstetthet* («attribute density») handler om mengden informasjon en representasjon tilbyr og hvor tettpakket den er. Generelt regnes den grafiske og algebraiske representasjonen for å ha høy tetthet, og tabell og verbale beskrivelser som lav tetthet. Høy tetthet kan gjøre det mer utfordrende å plukke ut det som er relevant (Bossé et al., 2011). I tabell 2.3 under har forfatterne rangert konverteringene etter elevsuksess, og kodet dem med de beskrevne faktorene.

Student Ability to Perform Particular Translations	Translations Coded with Fact Gaps, Confounding Facts, Attribute Density, Proximity, Translation Actions, and Transitional Representations	
Generally Able to Perform These	FG=low FG=low C=low local C=low table → graph D=low plotting D=high	FG=low FG=low C=low local C=low symbolic → table D=high computing D=low
	FG=low FG=low C=low local C=low graph → table D=high reading off D=low	FG=low FG=low C=high local C=low verbal → table D=low measuring D=low
Generally Able to Perform This (Using a Transitional Representation)	FG=low FG=high C=low global C=high symbolic → graph D=high sketching D=high	⇔ FG=low FG=low→low FG=low C=low local C=low→low local C=low symbolic → table → graph D=high computing D=low plotting D=high Process employing transitional representation
Less Able to Perform These	FG=high FG=low C=high global C=high table → symbolic D=low fitting D=high	FG=low FG=low C=high global C=high graph → symbolic D=high curve fitting D=high
Less Able to Perform These (Using a Transitional Representations)	FG=high FG=high C=high global C=high verbal → graph D=low sketching D=high	⇔ FG=low FG=low→high FG=low C=high local C=low→low local C=high verbal → table → graph D=low measuring D=low plotting D=high Process employing transitional representation
	FG=high FG=low C=high global C=high verbal → symbolic D=low modeling D=high	⇔ FG=low FG=low→high FG=low C=high local C=low→high global C=high verbal → table → symbolic D=low measuring D=low fitting D=high Process employing transitional representation
Rarely Able to Perform These	FG=low FG=high C=high global C=high graph → verbal D=high interpretation D=low	FG=low FG=high C=low global C=high symbolic → verbal D=high parameter recognition D=low
	FG=high FG=high C=high global C=high table → verbal D=low reading D=low	

Figure 5. Multidimensional aspects of translations

Figur 2.3: «Multidimensional aspects of translations (Bossé et al., 2011, s. 127)

Enkelte av konverteringene er merket med doble blå piler, som indikerer at disse konverteringene oftest løses gjennom å dele dem opp i to steg, som involverer en «transitional representation».

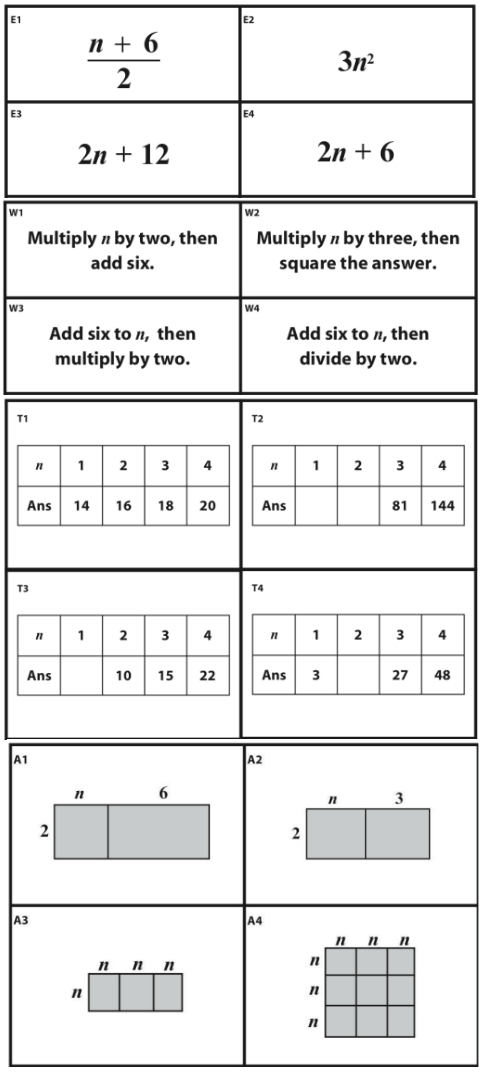
Bossé et al. (2011) trekker frem at samtlige av de vanskeligste konverteringene i tabellen inneholder den verbale representasjonen, som ofte skårer høyt på villedende informasjon (*C* =

high). Samtidig observerer de at konverteringene som elever oftest lykkes med har en kilde-representasjon som skårer lavt både på informasjonshull og villedende informasjon.

2.5 Læringsaktivitetens design

Her følger en kort beskrivelse av det opprinnelige oppgavedesignet som har fungert som inspirasjon for utviklingen av aktiviteten i masterprosjektet.

I en artikkel fra 2008 presenterer Malcolm Swan fem oppgavetyper som han hevder egner seg for å jobbe med utvikling av forståelse for matematiske idéer («conceptual development»). Én av disse oppgavetypene er «Interpreting multiple representations» (Swan, 2008, s. 3). Elever jobber i grupper og samarbeider om å gruppere ulike typer representasjoner av det samme matematiske objektet. Representasjonene er skrevet ut på egne kort, og elevene skal fysisk legge kortene ved siden av hverandre dersom de representerer samme objekt. I den konkrete aktiviteten Swan beskriver er målet å utvikle forståelse av algebraiske uttrykk. Kortene inneholder fire forskjellige representasjoner: algebraiske uttrykk, verditabeller, verbale beskrivelser og arealmodeller (se figur 2.4). Elevene får først ut kortene med verbale beskrivelser og algebrauttrykk. Så får de tabellene, og til slutt arealmodellene. Elevenes oppgave i hvert steg er å undersøke representasjonene og prøve å finne hvilke som «matcher», som representerer den samme matematiske idéen. Før oppgaven blir elevene bedt om å være nøye med å begrunne sammen i gruppa hvorfor de mener at to representasjoner samsvarer. Swan (2008) beskriver flere hensyn som er blitt tatt i utviklingen av kortene for å sørge for å unngå overfladiske og ikke-matematiske strategier for paring av kort. Dette blir omtalt i mer detalj i



Figur 2.4: Utvalg av kortene brukt i aktiviteten om algebra (Swan, 2008, s. 5)

neste kapittel, da det har hatt stor innflytelse på hvordan kortene i dette masterprosjektet har blitt utviklet.

Swan skriver om aktiviteten at elevene må «…discriminate between commonly confused expressions and explain their differences» og «In particular, it involves: translating between algebraic expressions words, tables, and geometrical areas» (Swan, 2008, s. 4). Oppgaven er med andre ord tenkt å stimulere elevene til å gjøre *oversettelser mellom ulike representasjoner*, og til å *diskriminere mellom relevante elementer* i representasjonene. Begge disse punktene er nevnt som sentrale i utvikling av matematisk tenkning (Duval, 2006, 2017).

2.6 Kunnskap om representasjoner og matematikkompetanse

Det er gjort funn som tyder på en klar korrelasjon mellom suksess i konvertering mellom representasjoner og suksess i problemløsning (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Et annet interessant resultat fra denne forskningen er at når elever får presentert den samme funksjonen først gjennom en grafisk representasjon og etterpå som en verbalt beskrevet situasjon, gjenkjenner de som regel ikke funksjonen. De angriper oppgaven som om det er noe helt nytt. Suksessraten blant elevene i denne studien er også lavere i alle tilfeller hvor den grafiske representasjonsformen er til stede (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Enkelte har pekt på forskjellene i hvordan en matematiker og en «nybegynner» angriper en representasjon. En viktig forskjell ser ut til å være kunnskap om hva som er de relevante delene av en representasjon. Der hvor en matematiker umiddelbart fokuserer oppmerksomheten på de delene av representasjonen som er av betydning for det matematiske objektet, har en nybegynner en tendens til å se mer helhetlig på representasjonen, og har større problemer med å trekke ut relevant informasjon for å gjøre konverteringen effektivt (Ainsworth et al., 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004)

Nitsch et al. (2015) har undersøkt hvorvidt konverteringer mellom visse representasjoner av funksjoner er viktigere enn andre når det gjelder å utvikle kompetanse i emnet funksjoner. Funnene i denne studien er klare på at en modell som likestiller de ulike konverteringsprosessene, og ser alle som viktige dimensjoner i utvikling av forståelse innen emnet, er den beste forklaringsmodellen (Nitsch et al., 2015). Dette betyr at ingen representasjoner eller konverteringer kan tilskrives en mer sentral rolle enn andre i en helhetlig beskrivelse av kompetansestrukturen, noe som også har implikasjoner for undervisningen i emnet. Det er gjort funn som indikerer at enkelte representasjoner og konverteringer ofte vil vektes mer enn andre i undervisning (Bossé et al., 2011; Leinhardt et al., 1990). Bossé et al. (2011) hevder blant annet at oversettelser som går *til en verbal beskrivelse av situasjon,* fra enten tabeller, grafer eller uttrykk, ofte blir fullstendig utelatt. I samme studie kommer det frem at nettopp disse overgangene er de vanskeligste for elevene. Hvorvidt dette er et resultat av manglende undervisning, eller om man unngår det i undervisning fordi det er vanskelig, er ikke klart.

Aktiviteten i masterprosjektet tar blant annet utgangspunkt i funnene til Nitsch et al. (2015) som peker på viktigheten av god kunnskap på tvers av alle de fire representasjonene forbundet med funksjoner for å oppnå god kompetanse i emnet.

3 Utvikling av aktivitetskort og gjennomføring

I dette kapittelet argumenteres det først for hvorfor den aktuelle typen aktivitet anses som hensiktsmessig for å arbeide med konvertering mellom representasjoner. Dette etterfølges av en beskrivelse av didaktiske hensyn som er tatt i planleggingen av gjennomføringen. Videre presenteres de ulike typene oppgavekortene elevene får utdelt, valg som er tatt underveis i utviklingen av kortene og begrunnelser for disse. Til slutt beskrives gjennomføringen av undervisningsøkten i sin helhet med litt mer kontekst.

3.1 Bakgrunn for valg av aktivitet

Undervisningsopplegget som prøves ut i denne masteroppgaven er i høy grad inspirert av Swans opplegg om algebraiske uttrykk, som beskrevet i avsnitt 2.6. Utgangspunktet for dette var en hypotese om at denne typen aktivitet også ville fungere godt i emnet funksjoner, nettopp fordi den legger opp til målrettet arbeid med representasjoner og sammenhengen mellom disse.

Denne oppgaven kan sies å være en MER-oppgave («Multiple External Representations») da den benytter seg av flere ulike representasjoner parallelt. Duval har kritisert tanken om at bruken av flere representasjoner i seg selv vil lede til læring, da et læringsutbytte av flere representasjoner for samme objekt forutsetter evne til konvertering mellom de aktuelle representasjonene. Frem til denne evnen foreligger er det ikke annet en tilfeldige bilder og symboler satt ved siden av hverandre (Duval, 2017). Hensikten i denne oppgaven er imidlertid ikke utelukkende at elevene skal lære funksjonsbegrepet bedre fordi de får flere representasjoner. Et minst like sentralt mål for valg av aktiviteten var å forsøke å utvikle fleksibilitet i å konvertere mellom representasjonene. Oppgavens utforming, hvor det er gitt at alle representasjonene hører hjemme sammen med noen av de andre, opplever jeg setter fokuset på *hvordan* man kan se hvilke som hører sammen. Målet blir å lære hva som er den relevante informasjonen å trekke ut av to representasjoner for å identifisere samsvar mellom dem. Dette er knyttet til Duvals (2006, 2017) kognitive paradoks. Elevene jobber i aktiviteten med en stor mengde representasjoner. De har fra seks til åtte representasjoner fra hvert av de fire registrene. Alle representasjonene innen samme register har mye til felles, men også noen detaljer som skiller dem. For eksempel er koordinatsystemet det samme, og reglene for plassering av punkter er det samme, men selve grafen varierer. Samtidig har de tabeller som ved første øyekast ser helt like ut, og funksjonsuttrykk som ligner på hverandre. Det er mulig å se at representasjonene alle følger noen bestemte regler. Duval (2006, 2017) hevder nettopp at det som gjør representasjoner ulike avhenger mer av hvilket register de tilhører, enn hvilket matematisk objekt det representerer. Samtidig er det slik at det som faktisk gjør representasjonene fra samme register forskjellige, er hvordan de ulike matematiske objektene (her ulike funksjoner) påvirker de delene av representasjonen som virkelig er av betydning. Det å få observere hvordan enkelte deler av representasjonene endrer seg i takt med at man justerer på det representerte objektet omtales av Duval (2006) som selve løsningen på det kognitive paradokset. På grunn av dette var det også en hypotese at den aktuelle aktiviteten vil kunne bidra til at elevene får dissosiert objektet funksjon fra dets representasjoner.

Litteraturgjennomgangen beskriver forskning og teori som i all hovedsak er opptatt av prosessene involvert i å *skape* en representasjon basert på en annen. Det vil si at man både må tolke en eksisterende representasjon (kilderepresentasjon), men også vite hvordan man produserer en ny representasjon (målrepresentasjon) for det samme objektet i et annet register. I det aktuelle undervisningsopplegget ligger hovedvekten i elevens arbeid på å *tolke* eksisterende representasjoner og avdekke hvilke som representerer den samme funksjonen. Janviers (1987) begreper kilderepresentasjon og målrepresentasjon er derfor vanskelige å plassere sikkert i denne konteksten. Det var på forhånd ikke opplagt hvilken representasjon som ville fungere som det ene eller det andre i arbeidet med å sammenligne dem. Det var nærliggende å tro at man vil veksle hyppig mellom å tolke f.eks. fra graf til tabell, og tabell til graf.

3.2 Utdeling av kortene

Det er mange måter kortene kunne blitt delt ut på. Jeg har valgt å dele kortene ut i flere sekvenser slik som også Swan (2008) gjorde i sitt opplegg. Dette er et valg som har flere begrunnelser, først og fremst didaktiske, men også noen metodiske. Fra et didaktisk ståsted baseres sekvenseringen først og fremst på at å få samtlige 29 kort utdelt samtidig vil kunne oppleves overveldende og kaotisk for elevene. For mange elever vil det være vanskelig å få oversikt og å systematisere de ulike representasjonene, og mye tid vil trolig gå med på dette. Det er et ønske at elevene kommer i gang med matematikken så fort som mulig.

Når det gjelder den bestemte rekkefølgen kortene deles ut i, avviker denne noe fra det opprinnelige opplegget til Swan (2008), for eksempel ved at verbale beskrivelser, som hos Swan ble delt ut først, her deles ut til slutt. Her trekkes det på forskningslitteraturen som ganske tydelig har tegnet et bilde av et hierarki når det gjelder vanskelighetsgrad i oversettelsesprosessene (Adu-Gyamfi et al., 2019; Bossé et al., 2011; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Gjennom å begynne med det antatt minst krevende, er målet å få engasjert så mange elever som mulig fra starten. I tillegg kan det være en fordel å ha flere representasjoner å spille på når elevene møter de vanskeligste oversettelsesoppgavene på slutten.

Det er imidlertid viktig å påpeke at valget om å dele kortene ut i flere omganger frarøver elevene muligheten til selv å velge hvilken rekkefølge de vil jobbe i. Det kunne vært interessant å gi elevene alle representasjonene samtidig for å enda bedre kunne å studere hvilke preferanser elevene har for representasjonsformer i en sånn type oppgave. Dette har ikke blitt prioritert i dette prosjektet.

3.3 Utvikling av oppgavekort

Videre presenteres oppgavekortene i den rekkefølgen de ble delt ut. I tillegg redegjøres det for hvilke intensjoner og begrunnelser som ligger bak de ulike valgene i utviklingen. De fleste konkrete representasjonene vil bli presentert i teksten. Samtlige representasjoner finnes som vedlegg (1).

3.3.1 Valg av funksjoner

Det var ønskelig at elevene skulle få erfaring med ulike typer funksjoner. Tradisjonelt sett er det de lineære funksjonene som får mest oppmerksomhet i grunnskolen, og det var naturlig at disse utgjorde en betydelig del av utvalget. Samtidig var det ønskelig at omvendt proporsjonalitet var representert, samt en kvadratisk funksjon. Da jeg skulle bestemme meg for de konkrete funksjonene var det et poeng at de kunne illustreres grafisk innen omtrent det samme verdiområdet. Dette henger sammen med problemet om «overfladisk gjenkjenning av parametere» og omtales mer detaljert i kapittel 3.3.3. Følgende syv funksjoner, her representert algebraisk, var en del av aktiviteten:

F1	$y = 24x$	*Lineær, proporsjonal*
F2	$y = -0{,}5x + 24$	*Lineær*
F3	$y = 2x + 5$	*Lineær*
F4	$y = 5x + 2$	*Lineær*

F5	$y = \frac{24}{x}$	*Omvendt proporsjonal*
F6	$y = x^2$	*Kvadratisk*
F7	$y = \sqrt{x}$	*Invers av nr. 6 (Potensfunksjon)*

Hensikten med å ta med F7 var å unngå at den kvadratiske (F6) skulle bli for åpenbar. Potensfunksjoner generelt, og inverse funksjoner er ikke noe som berøres i ungdomsskolen, og elevene har ingen kjennskap til slike funksjoner.

For enkelt å kunne referere til bestemte oppgavekort i teksten, er kortene merket med bokstaver og et tall. Bokstavene angir hvilket register representasjonen hører til, og bokstavene som brukes er G, T, U, og V for henholdsvis *graf, tabell, algebraisk uttrykk* og *verbal beskrivelse*. Tallene refererer til hvilken funksjon som representeres, og samsvarer med listen over funksjonene ovenfor. Enkelte funksjoner har to ekvivalente representasjoner i samme register, og de skilles da ved en liten *a* eller *b* i tillegg. Under er noen eksempler:

U1	U2a
y = 24x	y = -0,5x + 24

T1

x	1	2	3	4
y		48	72	96

T2

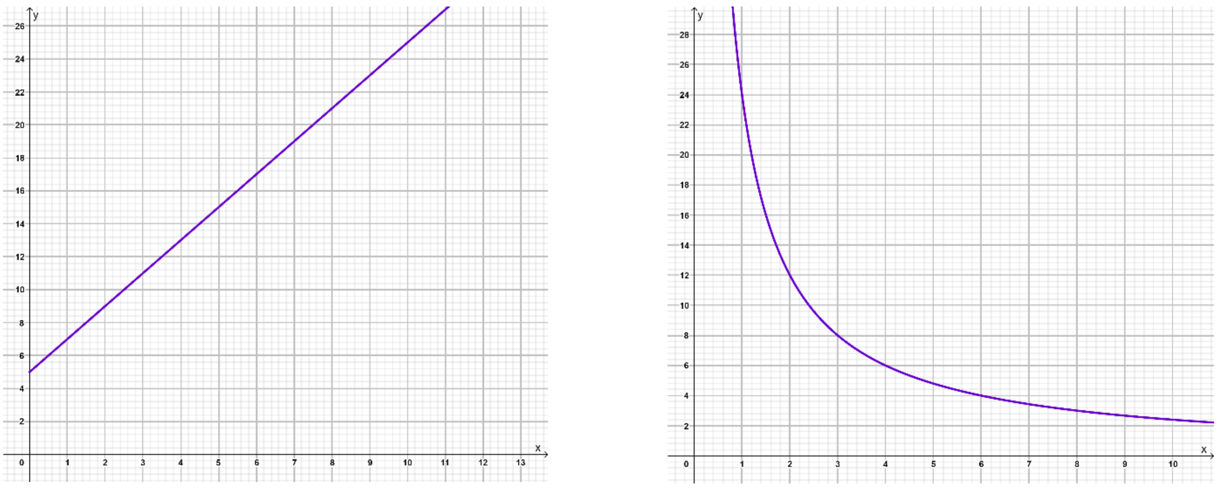
x	5	10	15	20
y		19	16,5	14

Disse kortene viser det algebraiske uttrykket til funksjon nummer én (U1), og ett av to ekvivalente algebraiske uttrykk for funksjon nummer to (U2a). T1 og T2 er tabellene som representerer henholdsvis samme funksjoner.

Alle kortene som brukes i undervisningsopplegget har jeg laget selv. Underveis måtte det gjøres mange justeringer. Swan (2008) beskriver flere grep som ble gjort for å fremprovosere dypere tenkning i arbeidet med sin algebraoppgave. Også i mitt arbeid med å designe representasjoner for funksjoner var det flere hensyn å ta for å i størst mulig grad unngå at elevene kunne ta «snarveier» uten å måtte tenke matematikk. Videre beskriver jeg mer detaljert hvordan de ulike representasjonene ble utviklet.

3.3.2 Graf og Tabell

Elevene startet med tabeller og grafer. Det antas på bakgrunn av annen forskning at dette vil være det minst utfordrende for elevene (Adu-Gyamfi et al., 2019; Bossé et al., 2011; Gagatsis & Shiakalli, 2004). For å gjøre en overgang mellom disse to representasjonene, uavhengig av hva som er kilde- eller målrepresentasjon, kreves kun lokale tolkninger (Bossé et al., 2011). Lokale tolkninger regnes generelt for å være mindre krevende enn globale tolkninger. Helt spesifikt innebærer det her å tolke punkter på grafen og sammenligne koordinatene med x- og y-verdier i tabell, og omvendt. Det var derfor et poeng at det var mulig å lese verdiene på aksene i den grafiske representasjonen. Figur 3.1 viser hvordan kortene med grafiske fremstillinger så ut.



$y = 2x + 5$

$y = \frac{24}{x}$

Figur 3.1

Overfladisk gjenkjenning av parametere

Det at flere av funksjonene har samme eller lignende parametere gjør også at de kan representeres grafisk innenfor et tilsvarende verdi-område. Dette bidrar til at elevene ikke kan gjenkjenne for eksempel veldig høye verdier på aksene, med en tekst eller et uttrykk med veldig høye parametere. Dersom det var stor variasjon i størrelsen på verdiene til funksjonene, ville det også være enklere å bruke en elimineringsmetode for å finne en passende tabell til grafene.

Hull i tabellene

I verditabellene er det noen «hull» (se figur 6). Dette grepet var fra Swans (2008) side tenkt å sørge for at elevene fortsatte å gjøre koblinger mellom representasjonene også etter å ha paret dem. Det var i utgangspunktet også min hensikt med å la enkelte funksjonsverdier stå tomme. Underveis i arbeidet viste det seg imidlertid at noen av hullene ble valgt av en annen grunn: for å gjøre det vanskeligere å se hvilken verditabell som passet til hvilken graf. Dette gjaldt særlig for funksjonene hvor *f(1) = 24*. Det var to tabeller (*T1* og *T2*) som begge hadde disse verdiene, og jeg vurderte det som for enkelt å gjøre en overfladisk match med grafene og uttrykkene. Figur 3.2 viser et utvalg av tabellene elevene fikk.

T1

x	1	2	3	4
y		48	72	96

T5a

x	1	2	3	4
y		12	8	6

T3

x	2	4	6	8
y	9		17	

Figur 3.2

3.3.3 Funksjonsuttrykk

Kortene med funksjonsuttrykk ble delt ut når elevene var ferdige med å plassere tabeller og grafer. Overganger *fra* funksjonsuttrykk *til* enten graf eller tabell bygger på lokale tolkninger av funksjonsuttrykkene (Bossé et al., 2011). Det innebærer å velge verdier for uavhengig variabel og regne ut funksjonsverdier. Andre veien, vil overgangene graf *til* uttrykk og tabell *til* uttrykk kreve globale tolkninger (Bossé et al., 2011). Det var på forhånd uklart hvilke tolkninger elevene ville gjøre da det ikke var opplagt hvilken retning elevene ville gå. Disse kortene vurderte jeg alt i alt som noe mer utfordrende å plassere enn tabell og graf.

Ekvivalente funksjonsuttrykk

Noen av funksjonene fikk to ekvivalente funksjonsuttrykk. Et eksempel på dette er de to uttrykkene *U2a og U2b* (se figur 3.3). Det var to årsaker til dette. Det ene var å gi elevene erfaring med at to visuelt ulike funksjonsuttrykk kan være uttrykk for den samme funksjonen. Det andre var å sørge for ekstra kort med funksjonsuttrykk på, da det var planlagt at det skulle *mangle* et funksjonsuttrykk som elevene skulle måtte produsere selv. Det var imidlertid ønskelig at det ikke skulle være så åpenbart at det manglet et funksjonsuttrykk. Elevene skulle ikke kunne oppdage det kun ved å sammenligne antallet representasjoner fra hvert register.

U2a	$y = -0{,}5x + 24$
U2b	$y = 24 - \frac{x}{2}$
U5a	$y = \frac{24}{x}$
U5b	$y = 3 \cdot \frac{8}{x}$
U1	$y = 24x$
U3	
U4	$y = 5x + 2$

Figur 3.3

Overfladisk gjenkjenning av parametere

I Swans oppgave er det viktig at de algebraiske uttrykkene ligner på hverandre ved at samme variabel (*n*) og de samme tallene (*2, 3, 6, 12*) blir brukt. Dette er for å unngå overfladisk «matching» ved kun å gjenkjenne tall i f.eks. tekst og uttrykk. Dersom du har en tekst som beskriver at man skal multiplisere *5* med *a*, og det kun finnes ett uttrykk eller én figur som inneholder tallet *5* og variabelen *a*, vil det ikke kreve noe matematisk tenkning for å gjøre koblingen. På samme måte var det avgjørende at funksjonene jeg valgte i min oppgave hadde noen likhetstrekk, slik at elevene ble nødt til å gå dypere inn i betydningen av representasjonene. For eksempel har tre av funksjonene tallet *24* som en av sine parametere, og funksjonene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$ som begge omhandlet sammenhengen mellom areal og sidelengde av et kvadrat. Figur 3.3 viser fire av kortene med funksjonsuttrykk som alle inneholder tallet 24, og tilhørende verbale beskrivelser. Ved at det ikke er så enkelt å koble uttrykk og tekst kun gjennom å gjenkjenne parameterne, er elevene nødt til å vurdere selve funksjonen for å avgjøre hvilke kort som hører sammen. Legg merke til hvordan uttrykkene *U2a, U2b* og *U5a* alle inneholder parameteren 24, og samtidig har en negativ utvikling ettersom *x* øker. Dette krever at elevene må skille mellom negativ lineær stigning og en omvendt proporsjonal utvikling.

Blanke kort

I bunken med funksjonsuttrykk fulgte det i tillegg med et blankt kort (U3). Dette skulle brukes til å lage et funksjonsuttrykk til den funksjonen som ikke var representert algebraisk. Den aktuelle funksjonen (F3) var en lineær funksjon da elevene ikke hadde forutsetninger for å kunne produsere noen andre typer funksjonsuttrykk. I Swans oppgave bes også elever om å produsere egne algebraiske uttrykk, men har da fått andre kort med uttrykk som ligner. Dette for å gi elevene en modell å se til i arbeidet. Funksjonsuttrykket jeg ville elevene skulle lage var $y = 2x + 5$. Blant uttrykkene elevene hadde fått utdelt var funksjonen $y = 5x + 2$, som da fungerer som en modell. Sammenligning av disse to uttrykkene kan også være interessant da de ligner veldig på hverandre. Denne oppgaven sikrer at elevene må gjøre en overgang *til* funksjonsuttrykk, noe som krever en global tolkning.

3.3.4 Verbale beskrivelser

Litteraturen på representasjoner er klar på at den mest krevende oversettelsen for elever er *fra* graf/tabell/uttrykk *til* verbal beskrivelse av situasjon (Adu-Gyamfi et al., 2019; Bossé et al., 2011). Alle disse overgangene krever globale tolkninger av kilderepresentasjonen. Går man derimot andre veien, vil overgangen verbal beskrivelse *til* tabell kun kreve lokale tolkninger. Det kan nevnes at utviklingen av disse kortene opplevdes som den

V1 Epler kjøpes til 24 kr pr. kilogram. Prisen (y) avhenger av antall kilo (x) man kjøper.
V3 Lille Synnøve får pante en pose med små tomflasker. Hun får da 2 kroner pr flaske. I bukselommen har hun allerede 5 kroner. Hvor mye penger hun har etter å ha pantet (y) er avhengig av hvor mange flasker det er i posen (x).
V5 Det er kjøpt inn tre pizzaer med til sammen 24 pizzastykker til en fest. Hvor mange pizzastykker det blir per person (y) avhenger av hvor mange gjester som kommer (x).

Figur 3.4

mest utfordrende delen av oppgavedesignet, en erfaring som stemmer godt overens med forskningen på overganger. Det var ønskelig at de verbale beskrivelsene skulle oppleves som ganske realistiske, og det er gjerne her noe av utfordringen ligger. Figur 3.4 viser den verbale beskrivelsen av tre av funksjonene i opplegget.

Det var bare seks verbale beskrivelser, og elevene fikk med et blankt kort her også. Oppgaven deres var å finne på en situasjon som kunne passe med funksjonsuttrykket $y = 5x + 2$. Det at elevene skal produsere sin egen verbale beskrivelse, antas på bakgrunn av litteraturen å være den største utfordringen i opplegget. Jeg har her valgt å la elevene beskrive en lineær funksjon med konstantledd og stigningstall. Det er denne typen funksjoner de møter desidert mest av i undervisningen.

3.3.5 Elimineringsmetoden

En utfordring med denne type aktivitet er at elever til en viss grad kan benytte seg av elimineringsmetoden for å unngå det matematiske innholdet, noe Swan (2008) også observerte i tidlige versjoner av hans oppgave. Det var derfor et poeng at man ikke så enkelt skulle kunne sitte igjen med bare ett kort av hver representasjon, som man da kan koble sammen uten å nødvendigvis forstå hvorfor. Derfor ble det produsert én ekstra tabell som viste samme funksjon som en av de andre tabellene, og to ekstra funksjonsuttrykk som var ekvivalente med eksisterende uttrykk. Det ble også, som nevnt, bare produsert seks verbale beskrivelser, selv om det var syv funksjoner. Disse grepene sikrer i større grad at elevene må ta et aktivt valg når de plasserer de siste kortene.

3.4 Gjennomføring av opplegget

En del uker i forveien hadde klassen vært gjennom opplegget til Swan (2008) i algebraundervisning. På denne måten hadde de kjennskap til aktivitetstypen. Undervisningen hadde dreid seg om funksjoner i noen uker før gjennomføring av det aktuelle opplegget, og fokus hadde i all hovedsak vært på lineære funksjoner, som de også har vært innom forrige skoleår. Vi hadde jobbet med idéen om stigning og konstantledd i grafer, tabeller og uttrykk.

I klassen er det 26 elever. De to gruppene som skulle tas opptak av var planlagt på forhånd. Resten av klassen ble tilfeldig delt inn i grupper på 3 eller 4 elever.

De ulike typene kort ble presentert for elevene, og det ble forklart at målet med aktiviteten var at elevene skulle finne ut hvilke kort som representerte den samme funksjonen og legge disse sammen i en gruppe. Elevene ble oppfordret til å prate sammen og komme frem til en felles begrunnelse for hvilke kort de plasserte sammen. Elevene ble så informert om rekkefølgen de kom til få kortene utdelt i:

1. *Graf og tabell*
2. *Algebraiske uttrykk*
3. *Verbale beskrivelser*

Det ble i forkant også gitt beskjed om at de skulle forsøke å fylle inn de manglende verdiene i tabellkortene. Deretter ble kortene delt ut.

Lærerens rolle i denne aktiviteten er først og fremst å bevege seg rundt i klasserommet og lytte til elevenes samtaler. Der det er nødvendig kan lærer stille spørsmål for å få elever til å utdype sine begrunnelser, eller gi hint for å hjelpe grupper som sitter fast videre. Lærer må også følge med på når gruppene nærmer seg ferdige med å knytte sammen de representasjonene de har, og sørge for å dele ut neste type representasjon, helst *før* elevene opplever dødtid.

Gjennomføringen tok i alt litt i underkant av 60 minutter.

4 Metode

I dette kapittelet beskrives hvordan prosjektet er designet, utvalg og metoder begrunnes, og det presenteres noen refleksjoner knyttet til etikk, gyldighet og troverdighet i gjennomføringen av en slik studie. Til slutt redegjøres det for hvordan datamaterialet har blitt analysert.

4.1 Forskningsdesign

Dette masterprosjektet har som mål å undersøke hva som karakteriserer ungdomsskoleelevers arbeid med å identifisere tilsvarende representasjoner for funksjoner. Det er av interesse å beskrive hvilke matematiske prosesser og undersøkelser elevene gir uttrykk for under arbeidet med denne spesifikke typen aktivitet. Hensikten med studien, og problemstillingene som er formulert på grunnlag av dette, gjør det nødvendig å samle inn *kvalitative* data. Problemstillingen etterspør en analyse av elevers opplevelse, kommunikasjon og adferd, noe som er kjennetegn på spørsmål som krever denne type forskningsdesign (de Freitas, Lerman, & Parks, 2017)

Prosjektet omhandler utprøving av et bestemt undervisningsdesign og forsøker å gå i dybden på hva som kjennetegner elevaktiviteten i en slik situasjon. Dette plasserer studien naturlig under kategorien *designforskning* (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2017). Designforskning har delvis overlapp med andre kvalitative forskningsdesign, som for eksempel kasusstudier, hvor man også er opptatt av å studere og forstå et lite utvalg. En av forskjellene er at designforskning har en større grad av intervensjon (Cobb et al., 2017). I det aktuelle prosjektet gjøres en intervensjon på den måten at en spesifikk aktivitet, som elevene i en skoleklasse ikke er vant til, testes ut. I tillegg kjennetegnes designstudier ved å være i høyere grad preget av teoretisk tyngde. Hensikten ved en designstudie er i de fleste tilfeller å utvikle en praksis og teori som kan støtte opp om en ønsket faglig utvikling (Cobb et al., 2017). I dette prosjektet er valget av aktivitet godt forankret i fagdidaktisk teori, og hensikten er i stor grad å undersøke hvorvidt den aktuelle praksisen (aktiviteten) er et godt undervisningsverktøy for å støtte opp om læring av matematikk, slik denne læringen defineres i teorien. Det påpekes også at designforskning sikter på å til en viss grad kunne generalisere funnene sine (Cobb et al., 2017). I masterprosjektet er målet å bedre forstå hva det spesifikke arbeidet innebærer, og eventuelle generaliseringer vil være som det man i matematikken kaller et «eksistensbevis». Med andre ord, det beste som kan oppnås i dette prosjektet er å påvise at det *finnes* muligheter for læring i den aktuelle aktiviteten, og forsøke å beskrive og forstå disse i lys av teorien. Dette vil kunne tolkes som en generalisering i så måte at det aktuelle undervisningsdesignet kan hevdes å skape muligheter for utvikling av visse typer kompetanse hos elever.

Det er vanlig at designforskning gjennomføres i flere sykluser, hvor designet revideres på bakgrunn av utprøving, for så å gjennomføres på ny (Cobb et al., 2017). Man kan ikke si at dette har vært gjort i dette prosjektet. Resultatene etter innledende analyser av datamaterialet gjorde imidlertid at det opplevdes som meget interessant å gjennomføre en ny runde datainnsamling. Dette var vanskelig å få gjennomført på det tidspunktet på grunn av restriksjoner på samarbeid knyttet til Covid-19-pandemien. Mot slutten av masterprosjektet ble det likevel samlet inn litt ekstra data fra én av de to gruppene som hadde blitt studert i den første runden. Det var imidlertid ikke gjort noen nevneverdig revidering av opplegget, og disse dataene har i stor grad blitt brukt som en utdypelse av de samme prosessene som ble observert under utprøvingen i full klasse. Dette trekker jeg derfor ikke frem som en ny utprøving, men kun som supplerende data.

4.2 Utvalget

I dette masterprosjektet er datamaterialet samlet inn i egen klasse. Dette er en klasse på 10. trinn, på en ungdomsskole på vest-landet, og klassen består av 26 elever. Undervisningsopplegget som prøves ut handler om emnet *funksjoner*. I 9. klasse hadde vi også jobbet med funksjoner, men med begrenset læringsutbytte. En kombinasjon av problembasert og utforskende undervisning, sammen med en klassekultur som ikke var mottakelig for dette på det tidspunktet, resulterte i at den ønskede læringseffekten uteble. På grunn av dette regnet jeg emnet funksjoner som tilnærmet ukjent for flertallet av elevene, og jeg forsøkte da en annen tilnærming til emnet, mer tuftet på teori om representasjoner. I forkant av datainnsamling jobbet vi i to uker med funksjoner, og hadde da fokus på de fire representasjonsformene, og at de alle kan representere den samme funksjonen. Det var likevel ikke mye kunnskap de hadde fått før datainnsamlingen fant sted. Gjennomføringen av undervisningsopplegget som studeres her, anser jeg dermed som en del av den innledende opplæringen i emnet funksjoner.

Datamaterialet består av lydopptak av to grupper, hver bestående av tre elever. Gruppene er basert på de elevene som var «tilgjengelige», i den forstand at de hadde samtykket til at det kunne gjøres opptak av dem. Det var opprinnelig syv elever som leverte skriftlig samtykke innen fristen. Alle disse elevene var satt opp til å være med på datainnsamlingen, men én elev var syk på den aktuelle dagen. De seks elevene var fordelt slik at det ble én guttegruppe og én jentegruppe. Å dele gruppene etter kjønn var aldri et poeng. De ble likevel delt slik av hensyn til å få mest mulig dialog ut av samarbeidet. Basert på min kunnskap om de sosiale forholdene i klassen, samt over et år med observasjon av tilfeldig valgte samarbeidsgrupper, ville en blanding av disse elevene fungere særlig dårlig for jentene, som da ville inntatt en mer passiv rolle.

Guttene som er med i utvalget er det man gjerne kaller «høyt presterende» elever. Det vil si, de liker matematikk godt, jobber grundig med idéene i faget, og lærer da også mye. Jentene er nok ikke like ivrige i sin interesse og sitt engasjement i faget, og «presterer» litt over middels. Det er dermed det man kan kalle en nivå-forskjell på de to gruppene i det aktuelle øyeblikket for datainnsamling, og det er en forventning at jentegruppa vil ha noe større utfordringer i arbeidet, ut ifra den bakgrunnskunnskap om representasjonene som elevene bringer med seg inn i aktiviteten.

4.3 Forskningsmetoder og datainnsamling

I prosjektet er målet å undersøke hva som karakteriserer elevers arbeid med en bestemt aktivitet. Aktiviteten innebærer ikke at elevene skal produsere et skriftlig arbeid, og en dokumentanalyse er derfor ikke relevant her. Dialogen innad i gruppa samtidig med at de tolker og forbinder representasjonene var det som var av interesse her, og dermed egner metoden *observasjon* seg godt (de Freitas et al., 2017)Min rolle i datainnsamlingen var både forsker *og* lærer, og det var hensikten at jeg skulle kunne samtale med elevene underveis for å gi tips eller stille spørsmål. På denne måten påvirker jeg elevenes arbeid gjennom å delvis delta i prosessen. Dette plasserer metoden mer spesifisert på *deltakende* observasjon (Bryman, 2021). Som deltaker i arbeidet vil jeg naturligvis påvirke retningen i arbeidet, og utfallet av arbeidet. Dette kan i noen sammenhenger være uheldig i forskningssammenheng. I dette prosjektet er imidlertid ikke dette et problem, da det er et undervisningsopplegg som undersøkes. En forståelse for hvilke eventuelle muligheter for læring som ligger i aktiviteten, bør også inneholde en tanke om lærerens rolle, og det kan derfor argumenteres for at denne rollen er en del av en helhetlig beskrivelse av undervisningsopplegget. Under gjennomføringen av opptakene var jeg lærer for hele klassen, og sirkulerte i klasserommet. Jeg var dermed ikke til stede hos gruppene hele tiden, men kun med jevne mellomrom.

Datamaterialet består av de konkrete representasjonene som elevene jobbet med under aktiviteten, samt lydopptakene fra de to gruppenes arbeid. Det ble gjort opptak i to omganger. Opprinnelig var det ikke planlagt en andre datainnsamling, og ønsket om dette oppstod underveis i analysen. Den andre runden med datainnsamling ble bare utført på jentegruppa. I gjennomføringen i full klasse jobbet gruppene med oppgaven i 45 minutter. I det andre opptaket av jentegruppa jobbet de i 30 minutter. Totalt 120 minutter med lydopptak.

Det ble tatt lydopptak av gruppene ved at en lydopptaker ble plassert på bordet hvor elevene jobbet. I de første opptakene var også resten av klassen delt inn i grupper som arbeidet med samme oppgave, og de to gruppene som skulle studeres ble trukket litt bort fra resten av gruppene i et forsøk på å redusere støy i opptakene. Lydopptakene ble transkribert i sin helhet, og anonymisert gjennom bruk av fiktive navn. Ingen spesiell programvare ble brukt for å transkribere, det ble gjort manuelt i et dokument. Transkripsjonene er i stor grad gjengitt slik det kommer frem i opptakene. Jeg har likevel utelatt enkelte fraser som ikke dreier seg om innholdet i aktiviteten, intern humor og «tenke-lyder» som «eeh». Jeg har bevisst skrevet alle tallord med bokstaver i stedet for tallsymboler. Dette er et valg jeg tok for å gjengi nøyaktig det elevene *sier*, og for å ikke tillegge en bestemt representasjon til tallene. Jeg har vært bevisst på å forsøke å tolke minst mulig underveis i transkripsjonsprosessen, og bare skrive ut de ordene jeg hørte, og en konsekvens av det ble at også tall ble skrevet som ord.

4.4 Validitet og reliabilitet

Begrepet validitet omhandler kort sagt om en studie faktisk måler det den hevder å skulle måle (de Freitas et al., 2017). Det handler med andre ord om hvorvidt forskningen kan sies å være gyldig, hvorvidt det er samsvar mellom premissene og konklusjonen. Begrepet «måling» hører kanskje mer hjemme i kvantitative metoder, da det ofte er vanskelig å måle det man studerer i kvalitative studier. I dette masterprosjektet er utgangspunktet nokså åpent og lite spesifikt, og det er i det hele tatt ikke så godt definert hva som skal måles. Prosjektet søker å forstå hva som karakteriserer elevers arbeid i et spesifikt undervisningsopplegg, uten å forsøke å måle eller påvise noen forhåndsdefinerte faktorer. Det ligger til grunn et teoretisk bakteppe om semiotiske representasjoner, og det har fra starten vært hensikten å karakterisere elevenes arbeid gjennom bruk av teoretiske begrep hentet derfra. Hva som ville dukke opp var imidlertid ikke kjent, og det ble heller ikke gjort antakelser på forhånd. Basert på Swans (2008) påstand om at denne type aktivitet skulle kunne føre til forståelse for aktuelle matematiske idéer, var hensikten å utvikle mer kunnskap om *hvordan* denne forståelsen kan skapes gjennom en slik aktivitet spesifikt innen emnet funksjoner. Ettersom aktiviteten fremhever det å knytte sammen flere ulike representasjonsformer for samme idé, var det naturlig å benytte seg av teori om representasjoner.

Ved å studere dataene gjennom den aktuelle teorien har enkelte faktorer og kategorier kommet til syne i elevenes arbeid. Hvordan jeg har tolket elevenes konkrete dialog som manifestasjoner av teoretiske begrep forsøker jeg å gjøre rede for i min presentasjon av resultatene. En annen teoretisk innfallsvinkel ville kunne belyse andre karakteristikker ved arbeidet, og det bildet av aktiviteten som jeg argumenterer for i denne oppgaven er langt fra fullstendig. I lys av det ydmyke forskningsspørsmålet vil jeg hevde at denne studien måler det den skal måle. Hvorvidt dette er etterprøvbart eller ei, er et litt annet spørsmål, som omfattes av begrepet *reliabilitet*.

Om man kan stole på resultatene i kvalitativ forskning er mye omdiskutert (de Freitas et al., 2017; Bryman, 2021). Kvalitativ forskning kan kritiseres for å være kontekstavhengig og vanskelig å generalisere til andre utvalg. I dette forskningsprosjektet er utvalget lite, og det fremstår som et kasus. Eventuelle funn i et så lite utvalg er vanskelige å generalisere fordi sannsynligheten er stor for at egenskaper ved de individene og den konteksten som studeres påvirker resultatene. Det er derfor stor usikkerhet knyttet til hvorvidt man vil kunne reprodusere de samme funnene i en lignende studie et annet sted. Dette legger begrensninger på hvilke slutninger man kan gjøre seg i en slik studie. I denne studien er det ikke mulig å komme med beskrivelser av hvordan elever *generelt* vil arbeide med en slik oppgave. Det er heller ikke mulig å hevde at eventuelt læringsutbytte som kan observeres i studien vil finne sted i en annen kontekst, med andre elever. Det som derimot er mulig i denne studien, er å avdekke interessante momenter ved akkurat disse elevenes arbeid med aktiviteten, og forsøke å gå i dybden på disse. Dette kan avdekke faktorer ved slike aktiviteter som kan gi kunnskap om undervisning i funksjoner og representasjoner. I beste fall søker denne studien å avdekke elementer i elevenes arbeid som teoretisk sett kan sies å være av betydning for læring, slik at fremtidige studier kan undersøke disse karakteristikkene ved hjelp av andre forskningsmetoder for å si noe mer generelt.

4.5 Etikk

I studien skulle det gjøres lydopptak av elever. Elevene er rundt 15 år gamle, og det er dermed nødvendig med samtykke fra både eleven og deres foresatte. Det ble søkt om godkjenning fra NSD for å gjennomføre datainnsamlingen, da det innebar å oppbevare lydopptak av elever. Informasjonsbrev ble sendt hjem med elevene, hvor formålet med prosjektet ble forklart, og informasjon om rettigheter til å trekke seg fra prosjektet ble gitt. Søknadsskjema til NSD finnes som vedlegg (nummer).

Å forske på egne elever innebærer noen etiske aspekter. Først og fremst er elever usikre på i hvilken grad deres deltakelse i prosjektet har noen effekt på deres karakter i faget. Både de som velger å ikke delta i prosjektet, og de som ikke føler at de mestrer oppgavene de får i prosjektet, kan være bekymret for om det vil påvirke lærerens vurdering av dem negativt. Dette vil jeg si er en legitim bekymring. Dette er et spenningsfelt for læreren som forsker. Gjennom arbeidet med å analysere elevenes arbeid får man verdifull informasjon om elevenes forståelse for matematikken, ofte langt mer detaljert enn man ville fått ellers. Hvordan vil dette farge lærerens vurdering av elevens faglige kompetanse? Det vil kanskje være naivt å anta at man skal kunne la være å bli påvirket, enten i positiv eller negativ retning.

Et annet punkt er hvordan elevene blir fremstilt i teksten. Elevene har anledning til å lese den ferdigskrevne studien, og vil i en så liten studie antakeligvis ikke ha problemer med å identifisere seg selv i teksten. Både som lærer og som forsker er det viktig å tenke gjennom hvordan man fremstiller resultatene. Å klassifisere elevers arbeid som for eksempel «bra» og «dårlig» kan være uheldig. Det kan også være uheldig det aktuelle forskningsformatet å tillegge enkeltelever visse egenskaper basert på deres ytringer, som at noen har en bedre forståelse enn andre. I prosjektet har jeg etterstrebet en objektiv behandling av ytringene. Med det mener jeg at det er selve ytringene som analyseres, og ikke egenskaper ved personen som har ytret dem.

Det blir ikke samlet inn noen personlig informasjon om elevene i dette prosjektet. Lydopptakene av samtalene deres skal likevel behandles konfidensielt, og opptakene slettes så fort de ikke lenger er av betydning for forskningsarbeidet.

4.6 Analysestrategi

I analyse av data kan man først og fremst skille mellom hvorvidt de kategorier og elementer man identifiserer i datamaterialet er forhåndsbestemt (*a priori*), eller om de «springer ut» av datamaterialet (*a posteriori*) (Wellington, 2015). I dette prosjektet ville det kanskje fremstå som underlig dersom kategoriene var forhåndsbestemt, da formålet er å karakterisere noe ukjent, som betyr at man stort sett ikke vet hva man ser etter. Likevel, etter å ha satt meg inn i teorien parallelt med utviklingen av undervisningsopplegget, var det noen sentrale begrep som jeg forventet å kunne peke på i datamaterialet. Ved starten av analysen hadde jeg likevel ikke noen definerte kategorier som styrte arbeidet, og jeg vil klassifisere analysestrategien som *a posteriori*.

Det var en tydelig inndeling av datamaterialet som følge av at representasjonene fra ulike register ble levert ut i flere omganger. Det ble ansett som sannsynlig at ulike prosesser og mekanismer kunne være involvert i de ulike «fasene», på grunn av at utvalget av representasjoner stadig ble utvidet:

1. Grafer og tabeller
2. Grafer, tabeller og **uttrykk**
3. Grafer, tabeller, uttrykk og **verbale beskrivelser**

I den innledende lesingen av datamaterialet, forsøkte jeg å danne meg et bilde av hva elevene stort sett holdt på med i arbeidet sitt. Wellington (2015) beskriver denne første fasen av arbeidet med analyse som «immersion» (s. 261). Ganske direkte oversatt vil det si å «bade» seg i datamaterialet, og hensikten er å få en følelse for hva som rører seg. Dette arbeidet innebærer å lese transkripsjoner, lytte til opptak, ta notater og merke seg interessante elementer (Wellington, 2015). Det som ble tydelig i mitt innledende arbeid var at elevene gjorde spesielt mye av en spesifikk rutine. De sjekket konkrete punkter på grafene med konkrete tabellverdier, og etter hvert også med konkrete funksjonsverdier i algebrauttrykkene. Store deler av datamaterialet var preget av denne hyppige vekslingen og «kontrollen» av punkter. Teorien pekte på at denne aktiviteten kunne beskrives som *lokale tolkninger*, som har sin motpart i *globale tolkninger*.

Den første kodingen av datamaterialet bestod dermed i å kode elevenes bevegelser mellom representasjoner som enten å være basert på lokale eller globale tolkninger av representasjonene. Hver gang en sekvens av ytringer omhandlet å se punkter på graf som tallpar i verditabell, eller utregning av konkrete funksjonsverdier for å sammenligne med punkter eller tabellverdier, ble dette kodet som lokale tolkninger. Hver gang det ble referert til «øker med», «synker med», «stigningen», «mønsteret», eller lignende ble dette kodet som globale tolkninger.

Datamaterialet viste det jeg oppfattet som en skjevfordeling i hvilke representasjoner elevene benyttet seg av i arbeidet. Dette ledet meg til å også kode for hvilke representasjoner som var involvert i tolkningene. En sekvens kunne nå f.eks. bli kodet med «Tabell → Graf, Lokal», eller «Uttrykk → Graf, Global». Retningen på pilen mellom representasjonene kunne ofte være vanskelig å bestemme. Ofte ble kodingen skrevet som «Graf ←→ Tabell, Lokal». Denne kodingen bidro til at det utviklet seg et bilde av hvordan elevene hadde en tendens til å jobbe.

På dette tidspunktet gikk jeg inn i en fase hvor jeg vekslet mye mellom teori og tolkning av data, slik Bryman (2021) beskriver i sin modell over kvalitativ forskning. Arbeidet tar form som en spiral, hvor man jobber med det teoretiske og konseptuelle parallelt med å tolke data. Som et ledd i å karakterisere elevenes arbeid, var det interessant å studere om elevene hadde noen preferanser for representasjoner og/eller konverteringer mellom dem. Basert på kodingen av konverteringene som var gjort så langt, ble det klart at elevene her gjorde noen valg som ikke virket tilfeldige. Samtidig kunne ikke kategoriseringen av konverteringer som globale eller lokale alene forklare valgene elevene gjorde. En dypere analyse var nødvendig.

Siste nivå i analysen involverte Duvals (2006, 2017) begrep *kongruens*. Duval (2017) hevder at grad av kongruens mellom to konkrete representasjoner må vurderes i hvert enkelt tilfelle, og jeg forsøkte meg derfor på en analyse av de konverteringene elevene gjorde i lys av kongruens-begrepet. Dette arbeidet innebar i stor grad en analyse av selve representasjonene slik de forekom i aktiviteten, men også å studere hvordan elevene uttrykte konverteringsprosessen mellom representasjonene. Tilfeller hvor det var tydelig at man kunne peke på elementer i forskjellige representasjoner som uttrykk for det samme, uten stor grad av fortolkning, ble klassifisert som kongruente. Derimot ble konverteringer hvor samsvar mellom representasjonene ikke kan etableres ved kun å referere direkte til synlige deler av representasjonene, men hvor det krever kunnskap og fortolkning, klassifisert som ikke-kongruente. Gjennom denne analysen klassifiserte jeg konverteringene som enten kongruente eller ikke-kongruente og la dette til det allerede etablerte skillet mellom lokal og global tolkning. Samlet ga disse faktorene en forklaringsmodell som ga svar på flere spørsmål.

I neste kapittel presenteres resultatene av denne analyseprosessen mer detaljert og med eksempler. Ulike trekk ved elevenes arbeid beskrives, og en samlet karakteristikk med tanke på hvilke konverteringer de gjør, og hvordan de gjør dem, illustreres gjennom egne visuelle modeller.

5 Resultater

I dette kapittelet presenteres elevenes arbeid med oppgaven. Målet er å skildre hva som kjennetegner elevenes arbeid med de ulike representasjonene, hvilke utfordringer de opplever i de ulike fasene av aktiviteten. Dette vil danne grunnlaget for å diskutere hvilket læringspotensial som ligger i aktiviteten basert på teorien presentert i kapittel 2.

5.1 Effektivisering av tolkninger

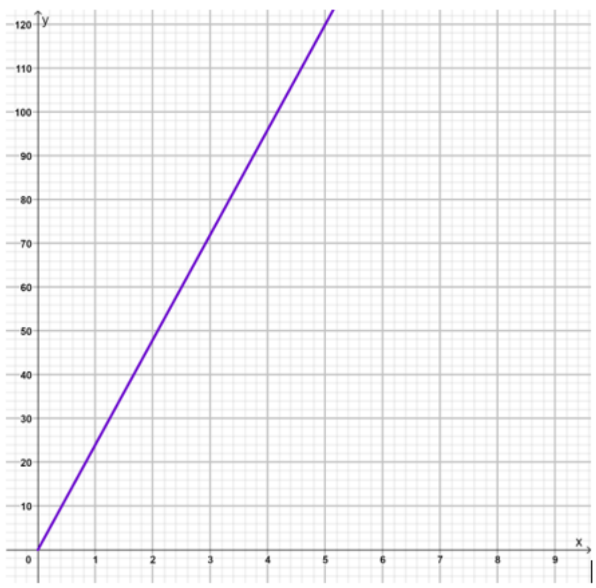
Én av de mer påfallende karakteristikkene ved aktiviteten er det store antallet representasjoner elevene må forholde seg til. Det er over 30 representasjoner som skal tolkes og plasseres, og mengden tolkninger som må til for å komme i mål med aktiviteten er dermed stor. Elevene jobbet med oppgaven i nærmere én klokketime, og det var tydelig at de var slitne mot slutten. Aktiviteten innebærer én time med mer eller mindre kontinuerlig tolkning av matematiske representasjoner, noe som er krevende når man ikke ennå er helt fortrolig med dem.

I jentegruppa kunne man observere at de ble mer effektive i sine tolkninger av representasjonene. Dette betydde nødvendigvis ikke at de lykkes med konverteringen til en annen representasjon, men evnen til å lese ut informasjon av en gitt representasjon ble merkbart bedre gjennom økta. Videre følger noen eksempler som forsøker å beskrive denne utviklingen.

Den grafiske representasjonen

I starten strever jentegruppa litt med å tolke selve representasjonen *graf*. Denne utfordringen observeres ikke hos guttene. Den første funksjonen jentene jobber med er $y = 24x$, og de tar utgangspunkt i den grafiske representasjonen (G1) og forsøker å finne tilhørende tabell. I starten er de usikre på selve koordinatsystemet, hva som er y-akse og x-akse og hvordan de skal beskrive

G1



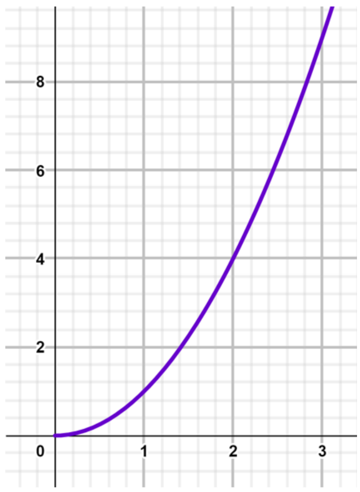
stigningen til grafen.

1. Helle: Stiger, null, stiger med to. Fordi, det går, du ser den stiger med to for hver gang. Fra konstantleddet.
2. Liv: Men er det y?
3. Helle: Y er den som står oppover

Utsagnet «du ser den stiger med to for hver gang» i linje 1 her viser til at grafen øker med to *ruter* vertikalt for hver rute man beveger seg i positiv retning parallelt med x-aksen. Her tar ikke jentene hensyn til skaleringen mellom aksene, som i dette tilfellet er omtrent 1:10. De har en idé om hvordan de skal definere stigning, men får feil verdi. I tillegg kommer det i linje 2 og 3 frem noe usikkerhet knyttet til selve oppbygningen av koordinatsystemet. På grunn av dette har gruppa litt startproblemer, og lærer må hjelpe dem litt på vei. Senere i arbeidet kan man se hvordan jentegruppa både leser av korrekt på grafene, og at det går mer effektivt.

125. Helle: Ok, vi må bare finne en. Der. To er fire. ... Den?
126. Liv: Én er jo én.
127. Synne: Men da ser vi bare om den stemmer.
128. Helle: Jo den er på én!
129. Liv: Åja her! Ja
130. Helle: Den er på midten.
131. Liv: Ja
132. Helle: Og så tre. Hvor er ni? Oi, kult.
133. Synne: Og så fire er seksten.
134. Liv: Ja der.
135. Helle: Vi klarte en med bue!

Her leser jentene av flere punkter ganske effektivt. Helles kommentar om at «den er på midten» refererer til at funksjonsverdien *f(1)* befinner seg «mellom» to ruter med tallverdier på (se graf). Dette indikerer at de har beveget seg bort fra idéen om å telle antall ruter i koordinatsystemet, og at de i stedet leser verdiene på aksene for å bestemme funksjonsverdier.



Den algebraiske representasjonen

Det neste eksempelet er et utdrag fra samtalen rundt det første algebraiske uttrykket jentene undersøker. Her dukker det opp flere begrep de har fått med seg i undervisning i forkant, som konstantledd og stigningstall. Utdraget er knyttet til det algebraiske uttrykket $y = 5x + 2$, og illustrerer hvordan de i det hele tatt strever med å gi mening til de ulike elementene i representasjonen.

187.	Synne:	Det er bare den som er fem
188.	Helle:	Nei, men det er vel at konst... Er det ikke noen andre som er to?
189.	Liv:	To?
190.	Helle:	At konstantleddet liksom er to.
191.	Liv:	X, x skal jo være fem.
192.	Helle:	Det er stigningstallet. … Fordi det betyr at fem kan være..
193.	Liv:	Så det vil si to, stiger med
194.	Helle:	Ja, men jeg mener at viss x skulle være to
195.	Liv:	Pluss hva?
196.	Helle:	Vent, sa ikke vi at stigningen var to?
197.	Liv:	Nei stigningen er jo fem, nei fire.
198.	Helle:	Ok, men da er det ikke den. Den da?

Helle påpeker ganske riktig at konstantleddet er to, uten at det fører videre til noe. I neste linje hevder Liv at x skal være fem, noe som antas å ha sitt utspring i at stigningstallet er fem, noe Helle påpeker i neste linje (192). Hun fortsetter imidlertid med «… fordi det betyr at fem kan være…», noe som tyder på at skillet mellom stigningstallet og den uavhengige variabelen er uklart. På slutten er det stor usikkerhet rundt hva som i det hele tatt er stigningen til funksjonen, og det går fra å være 5, til 2, til 4. I det hele tatt fremstår det som at jentene strever med å tolke og gi mening til de ulike bestanddelene av uttrykket. Dette står i kontrast til prosessen med å utvikle et manglende lineært uttrykk senere i aktiviteten:

359.	Helle:	OK, for den [y=5x+2] ligger på, konstantleddet ligger på to. Så det skal være ett eller annet x … Kan det være to x pluss fem?
360.	Liv:	Og hvorfor sier du det?
361.	Helle:	Hvis du ser på den så står det jo fem x pluss to
362.	Liv:	Ja
363.	Helle:	Og her ligger den jo på konstantleddet nummer to i den der fem x …
364.	Liv:	Men det plusser på ti, ikke plusse med to. Det er jo to, fire, så egentlig … Den stiger med fem og den stiger med to, så det må være sånn … To x.
365.	Helle:	Ja, ja, men det er jo to x pluss fem
366.	Liv:	Det er jo y er lik to x.
367.	Helle:	Men den ligger ikke på null.
368.	Liv:	Hvis du tenker … er lik to.
369.	Helle:	OK viss y
370.	Liv:	Hvis x er to. To ganger to er lik fire, det stemmer ikke.
371.	Helle:	Ja, men to ganger fire pluss fem. Det er jo fire, fem, seks, syv, åtte, ni.
372.	Liv:	To… To x pluss fire.
373.	Helle:	Ok?
374.	Liv:	To x pluss fem!

I denne sekvensen forsøker jentene å utvikle uttrykket $y = 2x + 5$ (U3), og refererer til et annet gitt uttrykk som ligner, $y = 5x + 2$ (U4). Helle foreslår tidlig korrekt uttrykk, og sekvensen viser Helles forsøk på å overbevise Liv om at det stemmer. Helle vet at konstantleddet beskriver skjæring med y-aksen, og sammenligner med grafen (linje 361 og 363). Liv viser i 364 at hun fremdeles strever med å skille stigningstallet og konstantleddet. Hun beskriver stigning som «det plusser med», som betyr at verdiene i tabellen stiger med en fast størrelse etter som x øker. Når Helle så beskriver det eksisterende uttrykket U4 ved at det har et konstantledd på «+2», virker det som om Liv tolker dette som en stigning på to, og protesterer: «Men det plusser på ti, ikke plusse med to …». Liv beskriver at funksjonsverdiene til $y = 5x + 2$ stiger med ti for hver gang i tabellen, noe som betyr en stigning på fem siden tabellen viser x-verdier med intervaller på to. Tabellen som hører til funksjonen de nå prøver å lage uttrykk for viser en stigning på to, som Liv ganske riktig påpeker. Dette bekrefter Helle, og legger til konstantleddet «+5» (linje 365). Liv derimot virker opphengt i at «+5» hører til den andre funksjonen (stigning på fem), og vil kun ha y = 2x. Hun avkrefter imidlertid selv at dette stemmer gjennom å teste et konkret eksempel (linje 370). Helle insisterer på å legge til fem som konstantledd, og de blir til slutt enige.

Sammenlignet med den første diskusjonen rundt funksjonsuttrykk, fremstår Helle i denne sekvensen som tryggere på hvilken effekt de ulike elementene i det algebraiske uttrykket har, og hvordan det gjenspeiler seg i den grafiske representasjonen. Det er mulig å observere en endring i jentenes tolkning av representasjonen. Nøyaktig hva dette skyldes er vanskelig å si, men elevene får gjennom aktiviteten anledning til å tolke og sammenligne et stort antall representasjoner. I eksempelet om den algebraiske representasjonen som er beskrevet her, inviteres elevene til å legge merke til hvordan små endringer i én representasjon gir utslag i de andre representasjonene, nærmere bestemt hvilken effekt det har å endre stigningstall fra 5 til 2, og samtidig endre konstantleddet fra 2 til 5.

5.2 Preferansen for det lokale

En tendens som raskt kom til syne i analysene av datamaterialet var at elevene så ut til å foretrekke undersøkelser av konkrete funksjonsverdier i sitt arbeid med å finne representasjoner som hørte sammen. I første del, da elevene kun hadde tabeller og grafer, var dette som forventet, da teori og tidligere forskning hevder at konvertering mellom disse representasjonene baseres på lokale tolkninger og at de oppleves som de minst krevende for elever. Dette viste seg imidlertid å være en tendens som også var tydelig i andre deler av arbeidet.

5.2.1 Tabeller og grafer

I første fase av aktiviteten jobbet de med verditabeller og grafer, og elevene brukte mest tid på å sammenligne punkter på grafene med tallpar i tabellene. Dette er det vi vil kalle lokale tolkninger. Aktivitetens design legger opp til at elevene kan gjøre et stort antall slike lokale konverteringer, og det er en ferdighet aktiviteten ser ut til å stimulere til utvikling av.

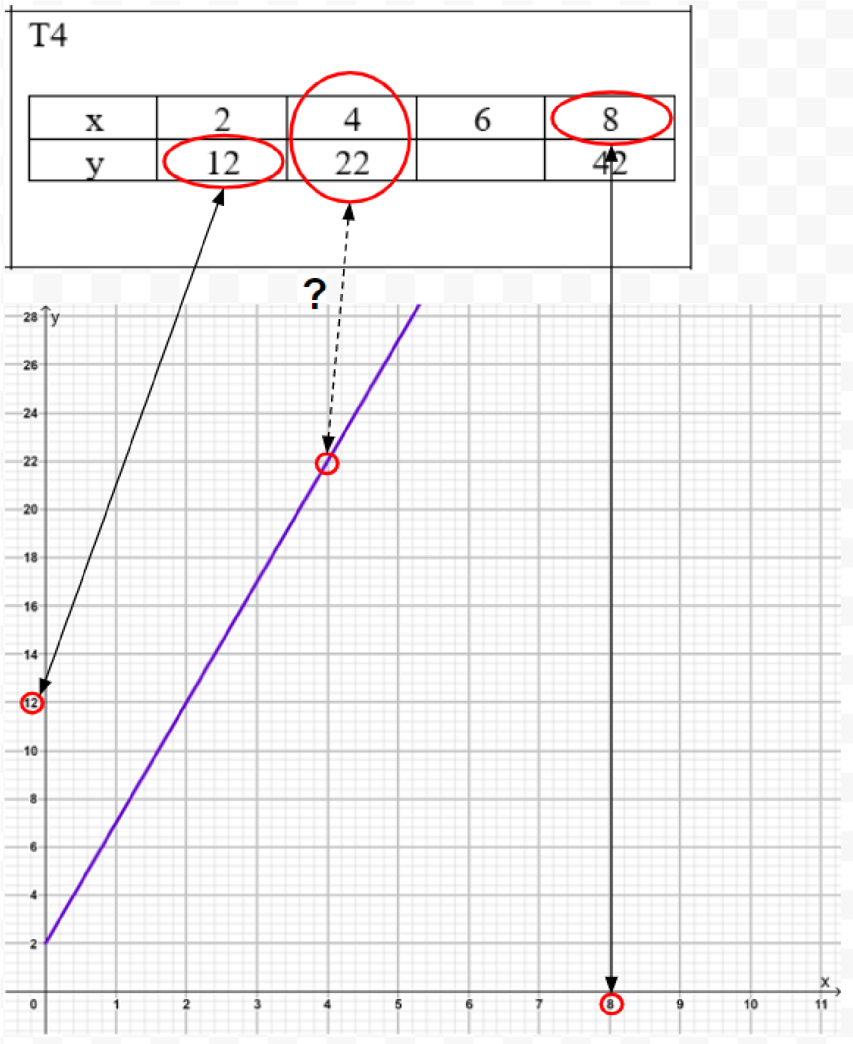
75. Helle: Den kan stemme, den som har to så ni, den kan kanskje stemme. Nei?
76. Liv: Ja, jo
77. Helle: To er ni
78. Liv: Og så, fire da
79. Helle: Tretten
80. Liv: Og seks, er sytten
81. Helle: Så den kan stemme
82. Synne: Ja den stemmer
83. Helle: Så da betyr det at fire er, hva var det vi sa at den var?
84. Synne: Tretten
85. Helle: Tretten, seks var sytten
86. Liv: Da er åtte …
87. Synne: Tjueén
88. Helle: Ja.

Dialogen ovenfor er karakteristisk for dette arbeidet. Ytringer som «to er ni» og «… seks, er sytten» er her uttrykk for x- og y-verdier både på graf og i tabell. Elevene gjør her en rekke konverteringer av tabellverdier *til* punkter på graf, og konverteringer av koordinater *til* tabellverdier. Det er ofte vanskelig å si hvilken retning konverteringen går. Elevenes arbeid i denne første fasen er preget av at de veksler hyppig mellom representasjonene og gjør nærmest simultane tolkninger av verdier i begge. Disse konverteringene fremstår som nokså «rett frem» for elevene. Det kan se ut til at elevene opplever et én-til-én-forhold mellom en konkret x- eller y-verdi i tabellen og den tilsvarende verdien på x- eller y-aksen i koordinatsystemet. Her antydes det med andre ord en grad av *kongruens* mellom de to representasjonene graf og tabell. Det er likevel usikkert hvorvidt elevene ser et *par* av tabellverdier som én-til-én med et spesifikt punkt på grafen. Dette er ikke noe elevene gir eksplisitt uttrykk for i dialogene. Hverken guttene eller jentene bruker begrepet *punkt* i sitt arbeid. Et utdrag fra tidlig i guttenes arbeid viser den samme prosessen, preget av lokale tolkninger og én-til-én-koblinger mellom konkrete verdier:

8. Adrian: Så hvorfor stemmer den her da?
9. Simon: Den stemmer fordi …
10. Adrian: Når x er fire, da skal den være seks, ja det stemmer. X tre da skal den være åtte, ja det stemmer. X to, da skal y være tolv, ja det stemmer.
11. Truls: Ja det stemmer, disse to. For du sa jo at når x er én, så er det litt over tjue. Og den her er jo tjuefire.
12. Adrian: Mhm

Her sjekker Adrian tabellverdiene opp mot grafen. Det foregår en hyppig og effektiv veksling mellom tallverdier i tabellen og koordinater på grafen. I transkripsjonene fra begge gruppenes arbeid kan det observeres et stort antall slike sekvenser. Det fremstår som at dette oppleves som en trygg metode for å bekrefte om representasjonene virkelig stemmer overens. Dette er et arbeid som elevene blir fortrolig med gjennom aktiviteten.

I figur 5.1 er det forsøkt å lage en skjematisk fremstilling av konverteringene elevene jobber med i denne første fasen. Her er det også lettere å se hvordan man kan argumentere for en viss grad av kongruens mellom disse representasjonene. Man kan se hvordan et konkret element i den ene representasjonen korresponderer til et annet konkret element i den andre. For eksempel er det mulig å trekke en pil fra tabellverdien x = 8 til et helt spesifikt element i den grafiske representasjonen, nemlig et punkt på tallinja ved navn «x-aksen».

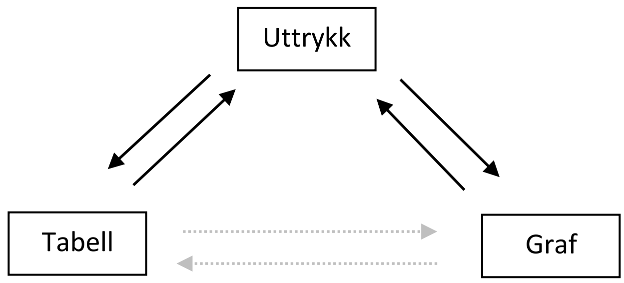


Figur 5.1

På samme måte er det mulig å identifisere samsvar mellom y-verdien i tabellen og på y-aksen kun gjennom å studere representasjonene. Det krever liten grad av fortolkning, og representasjonene må ikke bearbeides på noen måte for at denne koblingen skal kunne gjøres. Man kan rett og slett peke på elementene som hører sammen. Det er kanskje noe mer tolkning involvert i å identifisere punktet på grafen med tallparet i tabellen. Her må man vite at hvert punkt har en «adresse» gitt ved å gå loddrett ned til x-aksen og vannrett inn på y-aksen og lese av verdiene der. Det er likevel ingen tvetydighet ved denne korrespondansen. Ett tallpar i tabellen svarer til nøyaktig ett punkt på grafen, og man kan se dette som et tydelig én-til-én forhold. Denne type konverteringer som elevene gjør av punkter, kan dermed ses på som både *lokale* og *kongruente*.

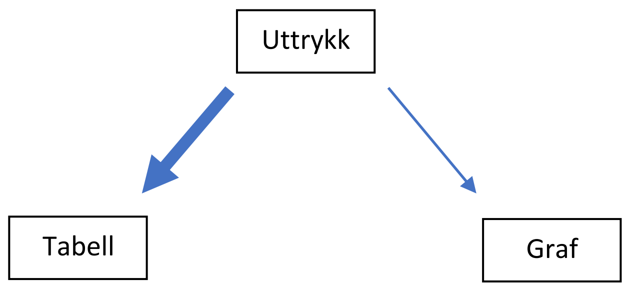
5.2.2 Lokale tolkninger av algebraiske uttrykk

Innføringen av de algebraiske uttrykkene åpner for å gjøre konverteringer basert på både lokale og globale tolkninger. Elevene hadde nå representasjoner fra *tre register* og langt flere kombinasjoner av kilde- og målrepresentasjon var teoretisk sett mulig å forestille seg, noe figuren under illustrerer.



Konverteringer mellom tabell og graf regnes som mindre sannsynlig i denne fasen, da disse koblingene allerede er gjort (derav svake, grå piler). Det som var interessant i denne fasen var hvordan elevene ville gå frem for å tilordne et funksjonsuttrykk til de representasjonene de allerede hadde knyttet sammen.

Det som kommer tydelig frem i transkripsjonene er at elevene i stor grad overser grafene i dette arbeidet. I arbeidet til de to gruppene kan man si at i valget mellom konverteringene *uttrykk* → *tabell* og *uttrykk* → *graf* er det en klar tendens til at de velger å gå til tabell.



Konverteringer fra uttrykk til tabell gjøres utelukkende basert på *lokale* tolkninger av funksjonsuttrykkene. Konvertering av lokale tolkninger vil betegnes med *blå* piler i figurer, og globale vil betegnes med *røde* piler. I arbeidet plukker elevene en verdi for den uavhengige variabelen fra tabellen, setter den inn i funksjonsuttrykket, og sammenligner funksjonsverdien de får ut med tabellen. Den samme type konvertering av konkrete funksjonsverdier ville også kunne gjøres fra uttrykkene til grafene, men dette observeres ikke i disse gruppenes arbeid. Tabellen ser ut til å foretrekkes.

Å basere seg på konverteringer fra uttrykk til tabell på grunnlag av lokale tolkninger, er både til god hjelp, men skaper også noen utfordringer for gruppene. Jentene lykkes bedre i å plassere uttrykkene ved å jobbe på denne måten enn ved å tolke uttrykkene globalt. Eksempelvis er det først på denne måten de lykkes i å plassere uttrykket $y = 2x + 5$, som var det første uttrykket de forsøkte seg på, men mislyktes med å plassere på grunn av usikkerhet rundt den globale tolkningen av uttrykket.

291.	Helle:	Skal vi prøve den igjen?
292.	Liv:	Ja
293.	Helle:	Fem ganger to … Det er den!
294.	Liv:	Ti pluss to er tolv, ja! … Og fem ganger fire, er tjue, pluss to er tjueto
295.	Synne:	Det er den.
296.	Liv:	Og seks ganger fem, hva er det? Tretti, og tretti pluss to er trettito
297.	Helle:	Ja, så det er egentlig fem-gangen pluss to.
298.	Liv:	Ja, fem-gangen pluss to.

Her kan man se hvordan elevene velger en verdi for den uavhengige variabelen, setter den inn i uttrykket, beregner verdien av uttrykket, og kontrollerer mot tabellen. Denne typen testing av konkrete x-verdier er gjennomgående i både guttene og jentenes arbeid i denne fasen av aktiviteten. I det spesifikke utdraget over er det interessant å legge merke til hvordan konverteringen av lokale punkter ikke bare bekrefter samsvar mellom representasjonene, men også leder til en generalisering av verdiene som «fem-gangen pluss to». Dette observeres kun i dette ene tilfellet.

Det er imidlertid en bakside ved å utelukkende benytte seg av de lokale tolkningene i arbeidet med algebraiske representasjoner. I de neste to utdragene kan man se hvordan jentene først lykkes i å plassere et funksjonsuttrykk på denne måten, og deretter hvordan det også kan være en sårbar metode.

261. Liv: Den da. [y = 24 – x/2]
262. Helle: Den? Da er det.
263. Liv: Vi prøver to vi. To, delt på to.
264. Helle: To delt på to, er to. Nei.
265. Liv: Nei, to delt på to er lik én. Tjuetre. Tjuefire minus én er jo tjuetre.
266. … [Lang pause]
267. Liv: Vi prøver med … et tall som ti.
268. Helle: Ti delt på to er fem.
269. H & L: Og tjuefire minus fem er …
270. Liv: Nitten!
271. Helle: Oi! Ok. Hva med femten?
272. Liv: Ok
273. Helle: Femten delt på to … Kalkulator …
274. Liv: Syv komma fem.
275. Helle: Og tjuefire minus syv komma fem.
276. Liv: Seksten komma fem!
277. Helle: Å yes!
278. Liv: Og tjue delt på to er ti, og tjuefire minus ti er fjorten.
279. Helle: Der har vi det.

I linjene 261-265 tester de ut x = 2. De blir usikre da denne verdien ikke finnes i verditabellen, og er vanskelig å lese ut av grafen. Etter pausen (266) går de over til å teste verdiene i tabellen, som er 10, 15 og 20, og de slår fast at representasjonene hører sammen. Det neste uttrykket de undersøker er $y = -0{,}5x + 24$, altså et uttrykk som er ekvivalent med det de nettopp plasserte. De iverksetter samme strategi som de nettopp har lykkes med.

283. Liv: Minus null komma fem ganger hva vil de ha?
284. Helle: To
285. Liv: To
286. Helle: Pluss tjuefire
287. Liv: Tjuefem komma fem [Regner feil]

Denne gang gjøres det feil i utregningen av funksjonsverdien, og de ender opp med en verdi som ikke passer med graf eller tabell. De lykkes ikke i å oppklare dette, og legger vekk uttrykket. Det er mulig at en global tolkning av uttrykkene her ville gjort det lettere å oppdage ekvivalensen mellom uttrykkene, og gjort arbeidet mindre utsatt for regnefeil. En global tolkning av stigningen til funksjonen som *negativ* kunne avslørt at funksjonsverdien de nettopp beregnet ikke kunne stemme, og kanskje resultert i en grundigere undersøkelse av beregningen.

Det finnes liknende eksempler fra guttenes arbeid som illustrerer det samme problemet. I det spesifikke eksempelet hos guttene er det ikke en direkte regnefeil som er årsaken, men en avrunding som gir et lite avvik. Guttene jobber her med uttrykket $y = 3 \cdot \frac{8}{x}$.

71. Adrian: Hvis det er x én, da blir y tjuefire. Hvis det er x to, da blir det tolv. Og hvis det er x tre,
72. Truls: Da er jo økningen da …
73. Adrian: Nei det synker, stigningen er negativ. … Åtte delt på tre, er lik to komma seks, seks, seks. Ganger med tre. Så da vil det være at hvis det er x tre, så er y syv komma ni. Og vi har ikke noen som er sånn. Vi har ingen grafer som passer med det.

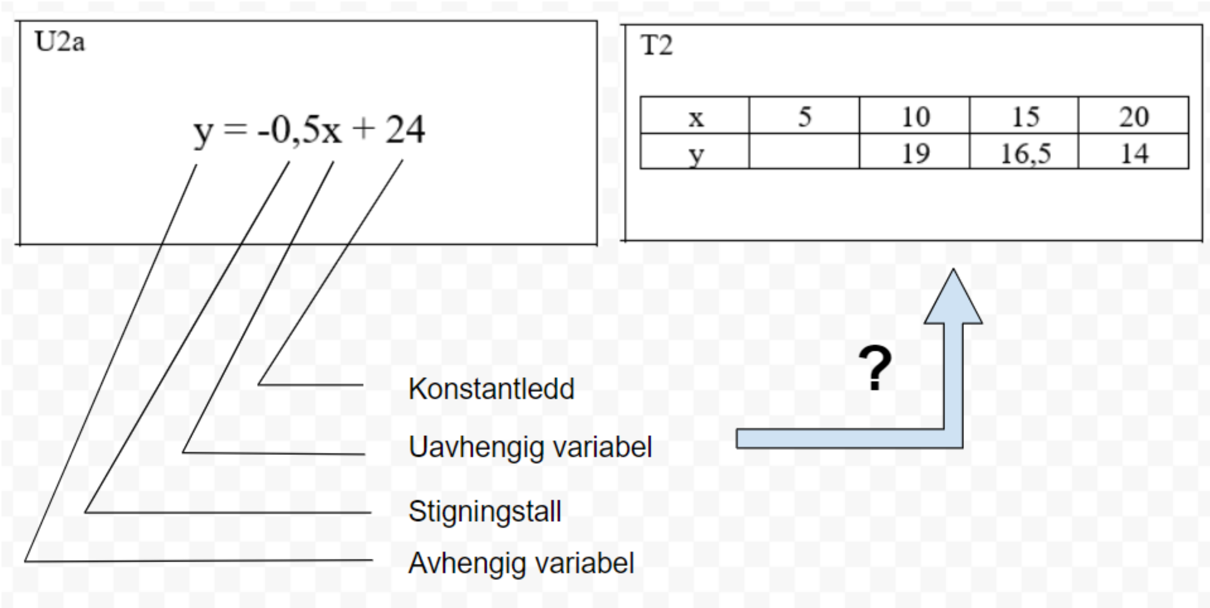
T5a

x	1	2	3	4
y		12	8	6

Her byr en annen konvertering på problemer, nemlig konverteringen fra brøk til desimaltall. Brøken $\frac{8}{3}$ representeres som 2,666, noe som multiplisert med tre gir 7,998. Adrian ser ikke at dette avviket skyldes en avrunding av desimaler, og konkluderer med at uttrykket ikke passer med tabellen (T5a), da *f(3)* skal være nøyaktig 8. Dette er igjen et eksempel på hvordan ensidig arbeid med de lokale tolkningene av funksjonsuttrykkene skaper problemer.

Selv om det byr på utfordringer for elevene at de blir litt ensporet i arbeidet, er det også her viktig å påpeke at elevene utvikler en ferdighet som kan sies å være en del av algebraisk kompetanse – å kunne substituere en konkret verdi for en uavhengig variabel og regne ut tilhørende avhengige variabel (selv om utregningene ikke alltid stemmer).

Konverteringene av punkter mellom verditabeller og grafer ble omtalt som kongruente konverteringer. Når det gjelder konvertering mellom algebraiske uttrykk og verditabeller, som utgjør en stor del av elevenes arbeid i den andre fasen i aktiviteten, vurderes disse som *ikke-kongruente*. Det er min oppfatning at det ikke er mulig å etablere et én-til-én-forhold mellom elementer i de to representasjonsformene (se figur 5.2).



Figur 5.2

Det er vanskelig å se hvordan man skal kunne etablere en entydig kobling mellom elementene i disse representasjonene. De konkrete tallverdiene som finnes i tabellen kan ikke finnes igjen i uttrykket, og parameterne i uttrykket finnes ikke i tabellen. Man kan se både x og y i begge representasjonene, men de har ulike roller. I tabellen fungerer de nærmest som merkelapper på radene med tallverdier. I uttrykket derimot, er de variabler. Man kan si at de er «plassholdere» for et potensielt uendelig utvalg verdier. Det vil være riktig å koble «y» i uttrykket med «16,5» i tabellen, men det vil samtidig være riktig å koble den med «14». Det er altså ikke entydig. Å avdekke stigningen og konstantleddet til funksjonen i tabellen vil kreve stor grad av fortolkning og behandling av tabellen.

5.3 Tolkning av stigning og utvikling

Så langt har oppmerksomheten vært på elevenes tendens til å jobbe med lokale punkter, da dette har stukket seg ut som dominerende i arbeidet. Det er samtidig slik at andre tolkninger av representasjonene også har sin plass i karakteristikken av elevenes arbeid. Elevene gjør også globale tolkninger og konverteringer basert på disse. Her har det utkrystallisert seg tre kategorier, som omtales hver for seg.

5.3.1 «Å peile seg inn»

Uttrykket «å peile seg inn» betegner her prosessen med å skaffe seg oversikt over aktuelle kandidater – hvilke representasjoner som sannsynligvis vil kunne representere den samme idéen som den representasjonen man har bestemt seg for å undersøke. Det er få av disse tolkningene, og de tar liten plass i datamaterialet. De kommer stort sett til syne bare som enkeltkommentarer. De oppleves likevel som markører for en viktig prosess elevene gjør i denne aktiviteten.

4. Adrian: Den her går nedover, det er ikke så veldig mange som går nedover.

Dette er en tidlig observasjon gjort av Adrian, hvor han studerer grafene de har fått utdelt. Han bemerker at det ikke er så mange av grafene som har en negativ utvikling. Det kommer ikke frem av dialogen hvorvidt denne observasjonen blir brukt direkte, men her kan man tenke seg at det vil være naturlig å lete etter tabeller hvor man også kan se en negativ utvikling. På denne måten snevrer man inn mulighetene, og kan være mer effektiv i arbeidet.

212.	Helle:	Viss du tar kvadratroten av noe så, hvis du tar kvadratroten av trettiseks så blir jo det seks, så det er jo veldig mye mindre. Så hvis jeg skal tippe så tipper jeg at det er en sånn bue.
213.	Liv:	Kvadratroten av to, hva er det? Nei fire
214.	Helle:	Det er to. Det er den!

Det er kanskje litt vanskelig å forstå nøyaktig hvordan Helle tenker når hun «tipper» at siden kvadratroten av 36 blir så mye mindre, så må det være en bue. Men likevel, dette er enda et eksempel på hvordan en veldig generell global tolkning av utvikling er med på å snevre inn mulige kandidater som må undersøkes. Her mener Helle at de må se på grafene som ikke er rette linjer, noe som utelukker en stor del av funksjonene.

5.3.2 Enkeltstående globale tolkninger

De fleste betraktningene som omhandler stigning, eller utviklingen i funksjonene, er mer spesifikt rettet inn mot konkrete representasjoner. Det gjøres tolkninger av globale egenskaper i representasjoner fra samtlige register. Det er imidlertid ikke alle disse tolkningene som konverteres for å etablere koblinger med andre representasjoner. Enkelte tolkninger blir stående som rene beskrivelser av en representasjon. Dette forekommer relativt ofte gjennom aktiviteten, og det er interessant å spørre seg hvorfor det er slik. Kan hende er det bare ment som beskrivelser, eller så kan det tenkes at elevene gjør en tolkning eller observasjon uten at de er i stand til å konvertere den aktuelle egenskapen til et annet register.

Stigning i tabeller

Et interessant funn i denne sammenheng er at det gjøres en del tolkninger av stigning i verditabellene. I ukene før aktiviteten ble gjennomført hadde vi vært innom hvordan vi kunne lese stigning ut av tabell, og det er ikke umulig at dette har påvirket elevene. Det er likevel interessant å studere hvordan de snakker rundt dette.

89. Liv: Det stiger med fire for hver gang.
90. Helle: Ja så stigningstallet er fire da. Hvis den stiger hver gang med fire.
91. Liv: Ja, men, det er jo to, fire, seks ... Så den stiger med fire på liksom ... når den stiger med to.

Denne sekvensen er basert på tabellverdier. De ser at funksjonsverdien øker med fire «for hver gang», det vil si ettersom man beveger seg til høyere x-verdier i tabellen. Men, som Liv bemerker i linje 91, så er det oppgitt x-verdier med intervaller på to, noe som gjør at vi får «dobbel stigning», og stigningen til funksjonen er dermed bare to. Dette er et eksempel på hvordan en global tolkning av tabell ikke blir brukt til noe, og man kan spekulere i om grunnen er at de ikke vet hvordan de skal benytte seg av denne informasjonen. De vender tilbake til lokale tolkninger av punkter for å avgjøre samsvar mellom graf og tabell.

T5a

x	1	2	3	4
y		12	8	6

Det som fremstår som den største utfordringen guttene støter på i aktiviteten, er knyttet nettopp til tolkning av utvikling i tabellverdier. De har på et tidlig tidspunkt forsøkt å fylle inn en av de tomme funksjonsverdiene i tabell T5a *kun* ved å tolke utviklingen i tabellen. Tabellen tilhører den omvendt proporsjonale funksjonen, og det er derfor utfordrende å avdekke stigningen til funksjonen kun utfra et begrenset utvalg verdier. Tabellen inneholder begrenset informasjon, noe som gjør det vanskelig å avgjøre hvilken type funksjon dette er. De har likevel kommet frem til at *f(1)* skal være 18, ved å anta en utvikling i tallrekka hvor differansen mellom y-verdiene synker med 2.

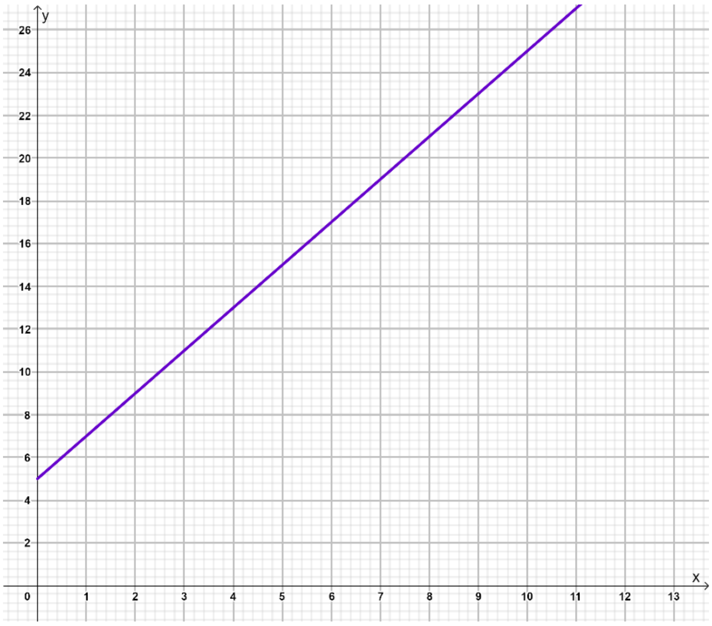
32. Adrian: Den her tingen, hva kan det være?
33. Truls: Se her, den øker med seks, kanskje atten?
34. Simon: Atten?
35. Truls: Ja for da blir det atten, og så blir det minus seks, og så blir det minus fire og så minus to. Så seksten, nei atten. Den økes..
36. Simon: Da er det nok samme mønster på den.
37. Adrian: Seks om gangen?
38. Truls: Nei ikke seks om gangen, den økes, den minskes med seks, og neste gang minsker den med fire. Det blir på en måte minus to fra..

I linje 35 kan man se begrunnelsen for funksjonsverdien. Truls baserer seg på to differanser, nemlig $f(2) – f(3) = 4$, og $f(3) – f(4) = 2$, og foreslår på grunnlag av det at $f(1)$ bør være 18 slik at $f(1) – f(2) = 6$. Selv om det er en interessant og krevende øvelse å tolke stigning ut fra tabell, fører det i dette tilfellet til store utfordringer i det videre arbeidet. Det resulterer først og fremst i at de ikke finner en passende graf, og det byr også på problemer når det gjelder å plassere uttrykket. Selve stigningen lykkes de ikke så godt i å artikulere, og det er vanskelig å se hvordan de skulle konvertert denne egenskapen til andre representasjoner. Denne beskrivelsen av stigning forblir kun i tabellen.

Stigning på graf

Når det kommer til den grafiske representasjonen, finner man en god del eksempler på globale tolkninger av denne. Også her blir enkelte av dem stående fast i dette registeret, og fremstår kun som beskrivelser av grafene.

64. Helle: Ok, konstantledd på fem [ser ut fra skjæring med y-akse], stigningen er bratt.
65. Synne: Her blir det hard bakke.
66. Liv: Så på to da
67. Helle: Oi, men det blir jo en halv, den er jo halv, for den er jo midt på. Å nei fem er jo og midt på
68. Liv: Ja for den er stigning to, så det er jo to.
69. Helle: To, fire, seks, åtte. Det er stigningen.
70. Liv: Har vi noen på den?
71. Helle: Vi ser om den passer.
72. Liv: Viss den er på ti, da er den tjuefem



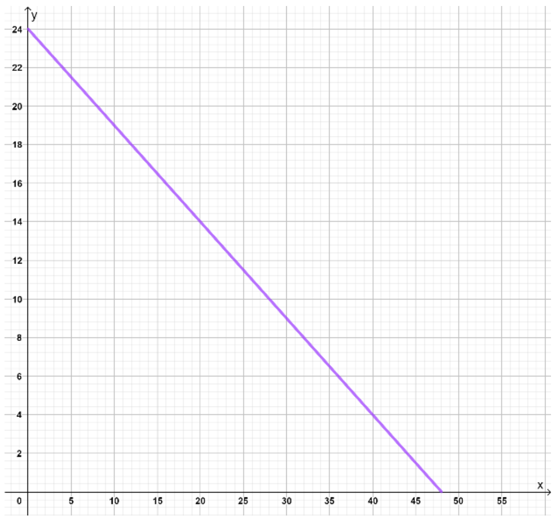
Denne sekvensen er et godt eksempel på hvordan elevene betrakter de globale karakteristikkene til grafen, men lar det ligge, og fortsetter å jobbe lokalt. Helle bestemmer fort skjæringspunktet og konstaterer at konstantleddet er fem. Stigningen beskrives ikke nøyaktig med det første. I linje 67 kan vi se hvordan Helle undersøker flere punkter på grafen og innser at grafen ikke går gjennom noen av «kryssene» i rutenettet. Verdiene ligger alltid på halvveien mellom to oppgitte verdier på y-aksen. Liv har antakeligvis lagt merke til at y-verdiene teller med to om gangen, og at siden grafen alltid ligger «midt på» for hver x-verdi, så er stigningen to (68). Jentene beskriver de globale trekkene ved grafen, konstantledd og stigning, men benytter ikke dette i det videre arbeidet. I siste linjen av utdraget (72), aner vi starten på en ny lokal test-sekvens av punkter.

Det neste eksempelet var vanskelig å plassere. Det gjøres en tolkning av stigning basert på en kombinasjon av tabellverdier og punkter på grafen. Det handler om den lineære grafen med konstantledd på 24 og som *synker* med en halv. Forut for utdraget som presenteres her, har jentene testet en del lokale punkter, og er egentlig overbevist om at tabell og graf hører sammen.

111. Helle: Må ikke det være en halv der da? Fordi det er en halv her.
112. Liv: Ja
113. Helle: Det ser ut som tjue … én komma ett eller annet.
114. Liv: Tjueen komma fem minus … Er det minus nitten? Er to komma fem.
115. Helle: Kan stigningen være to komma fem?
116. Liv: Så nitten minus to komma fem, er seksten komma fem. Ja, så, stigningen er to komma fem.
117. Helle: Det var rart, du ser at den går nedover.
118. Liv: Ja..
119. Helle: Det gir jo egentlig mening for konstantleddet er jo helt oppi der. Helt på tjuefire
120. Liv: Ja

T2

x	5	10	15	20
y		19	16,5	14



Arbeidet i denne sekvensen omhandler utfyllingen av den tomme funksjonsverdien i tabell T2. Helle lurer på om det må være et tall med «komma fem» der også siden det var det for *f(15)* (111). Hun forsøker å lese på grafen, og kommer frem til at det må være litt over 21. Linjene 114 til 116 er interessante. Liv beregner differansen mellom 21,5 og 19, og kommer til at det er 2,5. Helle tolker dette som at stigningen til funksjonen er 2,5. Liv undersøker differansen mellom *f(10)* og *f(15)*, får det samme, og virker styrket i troen på at stigningen er 2,5. Hvorvidt de her tolker stigning i tabell eller graf er veldig vanskelig å si. En av de sentrale verdiene for beregningen, 21,5, er lest ut av grafen, med støtte i tabellverdiene. Etterpå brukes tabellverdiene til å beregne differansen mellom funksjonsverdier.

Måten de beskriver stigningen er ikke helt presis. De beskriver en endring på 2,5 for hver økning på 5 av x-verdiene. Samtidig har de ikke spesifisert at denne utviklingen er negativ. Mangel på samsvar mellom et stigningstall på 2,5 og grafen bemerkes imidlertid på slutten av utdraget (117). Helle påpeker at grafen «går nedover», altså har en negativ utvikling, og hun får ikke det til å stemme med en stigning på 2,5. Ytringen i linje 119 kan tolkes som at Helle innser at den *faller* med 2,5, men det kan ikke påstås med sikkerhet. Jentene avslutter arbeidet med disse representasjonene her, og det er derfor vanskelig å si.

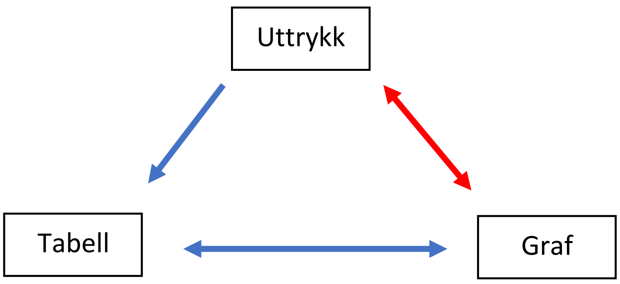
Dette eksempelet viser global tolkning av stigning, i graf og tabell, som ikke brukes direkte til å gjøre koblingen mellom representasjonene, men som et ledd i å fylle ut den manglende funksjonsverdien i tabellen. Dette har likhetstrekk med eksempelet over fra guttenes arbeid med å fylle ut funksjonsverdien i den omvendt proporsjonale funksjonen. Forskjellen er at guttene ikke hadde knyttet den grafiske representasjonen til tabellen først, og manglet derfor en alternativ representasjon til å kontrollere mot.

5.3.3 Globale konverteringer

Det var forventet at elevene skulle bemerke stigning i de algebraiske uttrykkene, da det kanskje er i denne representasjonen idéen om stigning kommer mest eksplisitt til syne som selve stigningstallet. I undervisning refereres det til delene av uttrykket ved hjelp av begrepene stigningstall og konstantledd. I datamaterialet kommer det frem at den algebraiske representasjonen er den representasjonen hvor globale tolkninger i størst grad konverteres og brukes direkte i arbeidet med å koble representasjonene. I andre fase av aktiviteten er det få eksempler på dette. De fleste eksemplene på aktiv bruk av globale tolkninger skjer i siste fase, i arbeidet med å tilordne verbale beskrivelser. Her omtales først eksemplene fra andre fase.

Uttrykk og Graf

Det har vært poengtert at i valget mellom å gå fra et funksjonsuttrykk til enten tabell eller graf, så foretrekker elevene å konvertere til tabell. Dette gjøres da basert på lokale tolkninger. Dersom det derimot gjøres en konvertering av globale tolkninger av funksjonsuttrykk, og disse er langt sjeldnere, er det ikke observert et eneste tilfelle hvor tabell er mål-representasjon. I andre fase av aktiviteten, *før* verbale beskrivelser er delt ut, kan konverteringene elevene gjør deles i lokale og globale slik figuren under viser. I figuren under betegnes konverteringer av globale tolkninger ved rød pil, og de lokale med blå.



Her foregår konverteringer basert på globale tolkninger utelukkende mellom den grafiske og den algebraiske representasjonen. Dette illustreres godt gjennom jentenes arbeid med å produsere funksjonsuttrykket $y = 2x + 5$. Denne sekvensen har også vært diskutert tidlig i analysene, og her gjengis bare bruddstykker.

346.	Liv:	Men hvis x er tre da. Nei, ni pluss to. Ja hvis x er tre, så må y være elleve. Og hvis x er fire, så er y tretten. Og hvis x er fem, så er y femten.
347.	Helle:	Så det stiger med to
348.	Liv:	Ja
349.	Helle:	Fordi det stiger jo med to, fire, seks, åtte
350.	Liv:	Ja, det stiger med to
351.	Helle:	Stiger med to ja

Liv leser av flere punkter på grafen (346) og Helle generaliserer utviklingen til en stigning på to (347). De gjør en global tolkning av grafens utvikling, og blir enige om en stigning på to. De går så over til å diskutere konstantleddet litt, før de vender tilbake til diskusjonen om stigningstallet til uttrykket. Liv har tatt med seg tolkningen «stiger med to», og konverterer dette til «2x» (366).

366.	Liv:	Det er jo y er lik to x.

Dette er et eksempel på konvertering av den globale tolkningen av stigning *fra* graf *til* uttrykk. Det er ofte slik at det blir en veksling frem og tilbake mellom representasjonene, slik at representasjonene bytter på å være kilde- og mål-representasjon. Dette kommer tydelig frem i følgende sekvens.

359.	Helle:	OK, for den [y=5x+2] ligger på, konstantleddet ligger på to. Så det skal være ett eller annet x … Kan det være to x pluss fem?
360.	Liv:	Og hvorfor sier du det?
361.	Helle:	Hvis du ser på den så står det jo fem x pluss to
362.	Liv:	Ja
363.	Helle:	Og her ligger den jo på konstantleddet nummer to i den der fem x …

Ytringen «konstantleddet ligger på to» refererer til grafens skjæringspunkt med y-aksen. Dette sammenlignes med konstantleddet i uttrykket $y = 5x + 2$. Vi har her en global tolkning fra graf til uttrykk. Like etterpå gjøres tolkningen motsatt vei (361 og 363), når Helle *først* viser til uttrykket, og sammenligner «+2» i uttrykket med skjæringen til grafen.

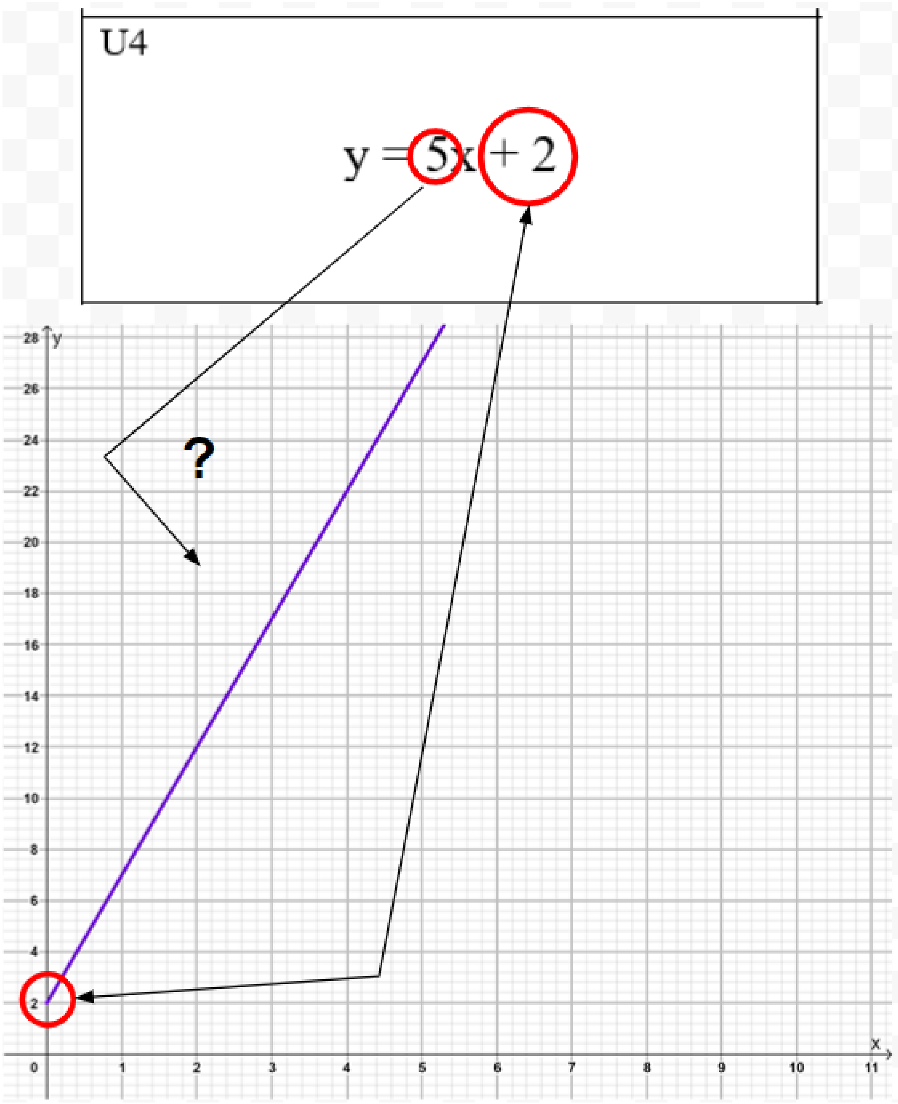
Etter å ha laget et uttrykk, gjennomfører gruppa en kontroll av uttrykket ved å prøve ut konkrete tallverdier i uttrykket. Det gjøres da gjentatte konverteringer av lokale tolkninger, og disse gjøres fra uttrykk til tabell.

381.	H og L:	To ganger to er fire, pluss fem er ni.
382.	Liv:	To ganger fire er åtte
383.	Helle:	Pluss fem er tretten.
384.	Liv:	To ganger seks er tolv, pluss fem er sytten.
385.	Liv:	Oi, vi er proffe folk.

Det fremstår som trygt for elevene å kontrollere gjennom lokale punkter, og det er en klar tendens til at tabellen foretrekkes i dette lokale arbeidet.

Det fremstår som relativt enkelt for elevene å påpeke konstantleddet til de lineære funksjonene. Det er mulig å peke på konstantleddet i uttrykket og skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen og hevde at disse to representerer det samme. Man kan si at det er et én-til-én-forhold mellom disse elementene. Elevene må legge betydelig mer arbeid ned i å konvertere idéen om stigning mellom en grafisk og en algebraisk representasjon. Om man tar utgangspunkt i stigningstallet i et funksjonssuttrykk, er det vanskeligere å peke på *hvor* det tilsvarende elementet i den grafiske representasjonen befinner seg. Det kan dermed argumenteres for ulik grad av kongruens mellom ulike elementer i disse to representasjonsformene. Representasjonen av en konstant verdi kan sies å være kongruent, og representasjonen av stigning ikke-kongruent (se figur 5.3). I tillegg dukker det opp et liknende spørsmål som i sammenligningen av tabell og uttrykk – hva med symbolene x og y? I koordinatsystemet vil variablene fungere som merkelapp på hver sin tallinje, og får som i tabellene en annen rolle enn de har i uttrykket. Det er ikke lett å peke nøyaktig på «hvor x er» i koordinatsystemet. Igjen ser vi at det er nødvendig å kunne gjøre den tolkningen at variablene kan innta en hvilken som helst verdi, for å kunne forklare sammenhengen mellom «x» i uttrykket, og «x-aksen» i koordinatsystemet. På grunnlag av det klassifiseres disse elementene i representasjonene som ikke-kongruente.

Alt i alt anses konverteringer mellom den grafiske og den algebraiske representasjonen som ikke-kongruente.



Figur 5.3

Verbale beskrivelser og funksjonsuttrykk

I tredje og siste fase av aktiviteten innføres de verbale beskrivelsene av situasjoner. Som beskrevet i kapittelet om utviklingen av opplegget, ble disse delt ut sist basert på antakelsen om at konverteringer som innebærer verbale beskrivelser er de mest utfordrende for elevene.

Denne antakelsen er gjort på grunnlag av tidligere forskning som er referert til tidligere i oppgaven. Datamaterialet fra aktiviteten er ikke helt i tråd med dette. Her skiller gruppene seg ganske markant fra hverandre. Guttegruppa plasserer alle tekstene i løpet av veldig kort tid. Jentene lykkes kun med noen få, og bruker så lang tid at de ikke få muligheten til å bli ferdig. Tredje fase fremstod jevnt over ikke som mer utfordrende enn andre fase.

Det ble raskt tydelig at elevene i stor grad valgte den algebraiske representasjonen i dette arbeidet og det meste av konverteringene som ble gjort i siste fase var mellom funksjonsuttrykk og verbal beskrivelse.

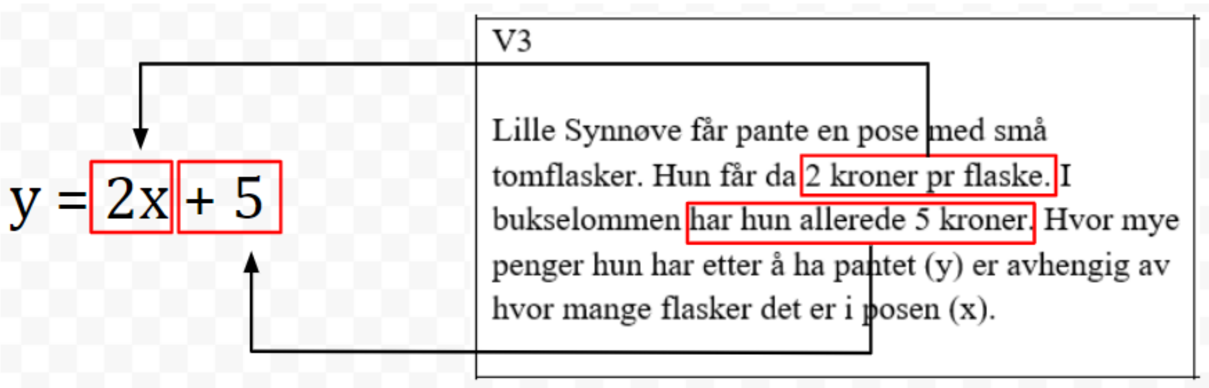
104. Adrian: Epler kjøpes til 24 kroner per kilogram. Prisen y, avhenger av antall kilo som er x. Ok, så den skal hele tiden da øke med... [noen plasserer den] Ja veldig lett.

105. Adrian: Det er kjøpt inn tre pizzaer med til sammen tjuefire pizzastykker til en fest. Hvor mange pizzastykker, y, avhenger av hvor mange gjester. Ok, så det er tjuefire da ... Ja tjuefire delt på x. Fordi det er tjuefire pizzastykker, også må du dele det på antall gjester.

Her plasserer guttene sine to første verbale beskrivelser i løpet av få minutter. Teksten leses én gang, og det ser ut til at det resonnerer umiddelbart med et algebraisk uttrykk. I ytring 105 kan man se hvordan Adrian kobler deler av situasjonen med deler av funksjonsuttrykket. Han sier at det må være 24, siden det er 24 pizzastykker, og så «delt på x» fordi man må dele på antall gjester. Her nevnes ingen konkrete funksjonsverdier, og i begge tilfellene (104 og 105) gjøres koblingen basert på konvertering av globale tolkninger. I tillegg aner man at elevene gir uttrykk for en viss kongruens mellom representasjonene her. Det pekes på «tjuefire pizzastykker» og den direkte koblingen til tallet «24» i uttrykket. Videre pekes det på «delt på x» og «dele på antall gjester» som uttrykk for det samme, selv om det ikke står spesifikt i den verbale beskrivelsen at man skal dele på antall gjester. At det finnes kongruens mellom enkelte av de verbale beskrivelsene og de algebraiske uttrykkene kommer også frem i neste utdrag.

114. Adrian: Lille Synnøve får pante en pose med små tomflasker. Hun får da to kroner per flaske. I bukselommen har hun allerede fem kroner. Hvor mye penger hun har etter å ha pantet y avhenger av hvor mange flasker det er. Så viss hun allerede har fem, så er det pluss fem, og så siden hun får to kroner per flaske, så er det to x pluss fem. Har vi det et sted?
115. Simon: Den tror vi
116. Adrian: Ja. Det er fem x pluss to …
117. Simon: To x …
118. Adrian: Der er den.

Også i arbeidet med å tilordne denne teksten, gjøres det globale tolkninger og konverteringer av disse. Det fremstår dessuten som om konverteringen består av én-til-én-korrespondanse mellom kritiske elementer i representasjonene. Ytringen «så viss hun allerede har fem, så er det pluss fem» kobler sammen idéen om en konstant verdi i de to representasjonene, og «siden hun får to kroner per flaske, så er det to x…» knytter sammen elementet stigning. Figur 5.4 illustrerer dette. Guttene evner å identifisere de elementene i den verbale beskrivelsen som er av betydning for funksjonen, og identifiserer de tilsvarende elementene i den algebraiske representasjonen.



Figur 5.4

Jentene lykkes i mindre grad enn guttene med å plassere tekstene. De tekstene de får plassert kontrolleres også i større grad av lokale tolkninger av situasjonen opp mot tabell, noe som kommer til utrykk i utdraget på neste side. Samtidig er dette et eksempel på at formuleringen av de verbale beskrivelsene kan være avgjørende for hvor mye tolkning eleven selv må gjøre for å etablere en kobling mellom den relevante informasjonen i teksten og andre representasjoner.

395.	Liv:	Arealet, y, til kvadratet er avhengig av sidelengden (x).
396.	Helle:	Siden du sa kvadrat så føler jeg det er den kvadratroten med en gang … Jeg vet ikke om det er det.
397.	Synne:	Det var en som hadde kvadratrot
398.	H & L:	Ja der ja.
399.	Liv:	Y, kvadrat … Areal til et kvadrat er avhengig av sidelengden. Men det må jo være …
400.	Helle:	Sidelengden.
401.	Liv:	Er ikke det i andre da? Siden det er jo, et kvadrat har jo like lange sider.
402.	Helle:	Ja
403.	Liv:	Det var jo en som var det. Denne. Hvis vi tenker, at to. Ja, så arealet til kvadratet avhenger av sidelengden … To ganger to, da får du jo arealet, og det er jo fire
404.	Helle:	Oi, oi, oi
405.	Liv:	Og tre ganger tre er ni. Det må jo være den.
406.	Helle:	Er vi enig?

V6

Arealet (y) til et kvadrat er avhengig av sidelengden (x).

U6

$$y = x^2$$

Det er ikke like enkelt å tegne piler fra ett element til et annet på tvers av representasjonene her. Man kan se at Helle først er inne på «kvadratroten av x», på grunn av ordet «kvadrat» (396). Det er Liv som innser at dersom sidelengdene kalles «x», så må arealet være x multiplisert med seg selv (401). Sekvensen avsluttes igjen med bekreftelse gjennom lokale tolkninger – testing av konkrete verdier.

Man kunne tenke seg en alternativ formulering av teksten: «Arealet (y) av et kvadrat er gitt ved sidelengden (x) multiplisert med seg selv.» Denne formuleringen vil i større grad være kongruent, da det er mer «rett frem» å koble elementene i de to representasjonene sammen. Med den opprinnelige formuleringen må denne transformeringen av «Areal … er avhengig av sidelengden x» til «… x multiplisert med seg selv» gjøres av eleven selv. Formuleringene av verbale beskrivelser må man derfor anta spiller en avgjørende rolle for opplevd kongruens med andre representasjoner.

Det er også interessant å se hvordan endringer i oppbygningen av et algebraisk uttrykk kan endre hvordan elevene opplever kongruens mellom den verbale og den algebraiske representasjonen. Det dukket opp et godt eksempel på dette i den andre gjennomføringen av aktiviteten med jentene. Mot slutten av økten jobbet jentene med å plassere den verbale beskrivelsen V2. Til denne teksten er det to ekvivalente algebraiske uttrykk, som de allerede har plassert sammen med grafen. Noen interessante betraktninger kom frem da de ble oppfordret til å utdype hva de tenkte om sammenhengen mellom teksten og utrykkene.

V2

En bil har 24 liter bensin i tanken. Når den kjører, bruker den en halv liter bensin per mil. Hvor mye bensin det er igjen på tanken (y) avhenger av hvor mange mil bilen har kjørt (x).

621.	Lærer:	Hva tenker dere andre? Hvis dere leser uttrykket og så tenker på situasjonen. … Det er tjuefire liter bensin igjen i tanken, også etter hvert som den kjører så bruker den en halv liter.
622.	Liv:	Per mil bruker den en halv liter.
623.	Helle:	Dersom jeg hadde lest den først så hadde jeg først tenkt den da.
624.	Synne:	Ja.
625.	Lærer:	Hvorfor?
626.	Helle:	Fordi jeg føler liksom det står tjuefire *minus*. Så den har liksom tjuefire og så tar den minus. Mens her står det liksom pluss tjuefire.
627.	Lærer:	Mhm
628.	Helle:	Akkurat som om den får mer.

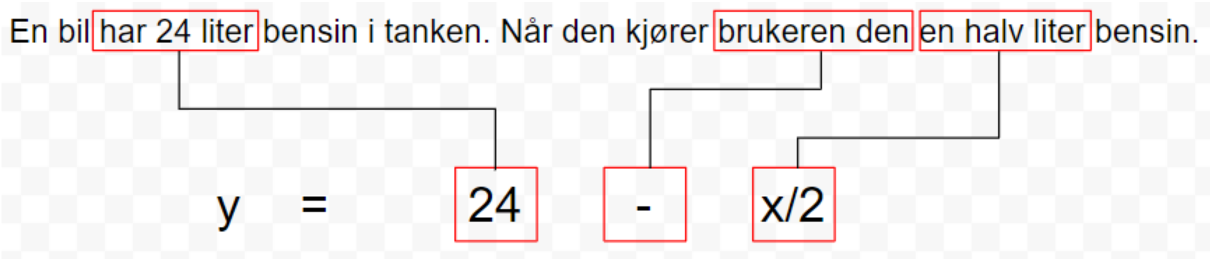
I ytring 626 sier Helle at hun opplever en ulik grad av samsvar mellom teksten og de to uttrykkene på grunn av leddenes *rekkefølge* i uttrykkene. Ytringen «Fordi jeg føler liksom det står tjuefire *minus* …» referer til uttrykk U2b, hvor konstantleddet står først i uttrykket, etterfulgt av den negative stigningen på en halv, uttrykt som brøk. I det andre uttrykket (U2a) er rekkefølgen reversert, og for Helle passer dette dårligere med situasjonen. Som hun sier, er det «akkurat som om den får mer». Helle tolker «+24» som at det blir lagt til noe. Dette kommer i konflikt med hennes opplevelse av en situasjon hvor noe skal trekkes fra. Det virker som om det er lettere å se de to representasjonsformene som uttrykk for det samme dersom de følger samme kronologi. Det er da mer «rett frem» å etablere et én-til-én-forhold mellom elementene. I figurene under er det forsøkt å gi en skjematisk fremstilling av dette.

U2a

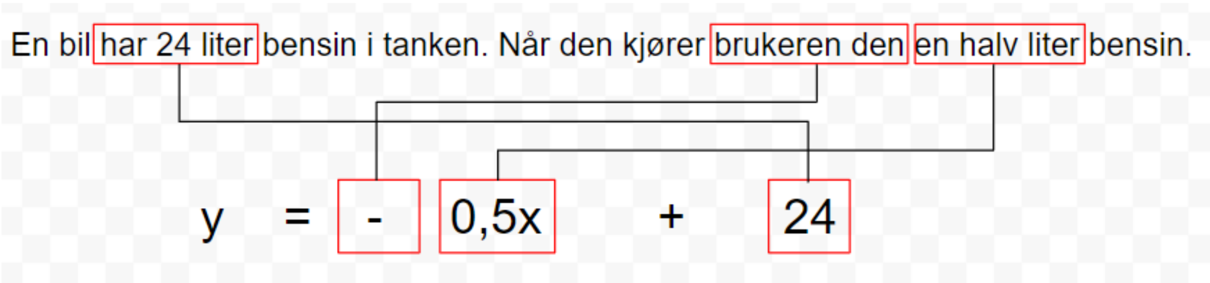
$$y = -0,5x + 24$$

U2b

$$y = 24 - \frac{x}{2}$$



Figur 5.5a: Kronologisk kobling av elementer: V2 – U2b



Figur 5.5b: Ikke kronologisk kobling av elementer: V2 – U2a

Helle utdyper mer detaljert hvordan hun tolker de to uttrykkene i forhold til situasjonen:

631. Lærer: Ja, men syns du at situasjonen passer bedre med den da? [y = 24 – x/2]
632. Helle: Ja.
633. Lærer: Sånn så du leser det? Kan du si det en gang til?
634. Helle: Når du først leser det så får du vite at han har tjuefire liter i en tank, så står det jo tjuefire. Så står det at når den kjører så bruker den en halv liter bensin per mil. Og da står det jo x/2, som er en halv, og siden det står minus så tenker jeg at den får mindre, og bruker, at det blir tomt. Men i den [y = -0,5x + 24] så føler jeg den plusser, viss jeg ikke hadde sett minus med en gang da.

Helle beskriver at den første opplysningen man får er at det er 24 liter bensin i en tank, og knytter dette til at det første leddet i funksjonsuttrykket er 24. Videre knytter hun forbruket på en halv liter til brøken, og er nøye med å bemerke at siden det står subtraksjonstegn foran, så *brukes* dette. Helles beskrivelse er interessant fordi det belyser hvor viktige små nyanser i representasjonene er for hvordan elever tolker dem.

5.4 Oppsummering

I analysen har jeg forsøkt å peke på noen sentrale karakteristikker av elevenes arbeid med aktiviteten, og jeg har forsøkt å illustrere disse med eksempler fra elevenes dialog. Gjennom arbeidet er det særlig fire overordnede trekk ved aktiviteten som har kommet til syne.

1. Elevene jobber med et særdeles stort antall representasjoner fra fire ulike register samtidig, og gjør et stort antall tolkninger av disse.
2. Elevene gjør globale tolkninger av samtlige representasjoner, også de som ofte er forbundet med lokale tolkninger.
3. Elevene viser en preferanse for lokale tolkninger av representasjoner.
4. Graden av kongruens mellom representasjoner ser ut til å ha betydning for elevenes valg av og arbeid med representasjoner.

I neste kapittel vil jeg utforske disse punktene videre i lys av teorien som er presentert innledningsvis i oppgaven. Jeg vil forsøke å kombinere idéene om at konvertering av representasjoner kan analyseres i to dimensjoner, nemlig lokal/global og grad av kongruens.

6 Diskusjon

I den videre diskusjonen av resultatene drøftes de karakteristikkene som har kommet frem i analysen opp mot teori for å si noe om potensielle læringseffekter og om hvordan elevenes valg underveis i aktiviteten kan forstås.

6.1 Potensial for læring

Resultatene fra gjennomføringen antyder at det kan foregå læring på to nivåer i denne aktiviteten. På den ene siden er det enkelte konkrete prosedyrer elevene gjentar ofte, og på den andre siden kan man se muligheter for utvikling av forståelse for sentrale konsepter. Disse omtales i de neste to avsnittene.

6.1.1 Øvelse på lokale prosedyrer

Essensen i matematisk aktivitet er transformasjon av semiotiske representasjoner (Duval, 2006, 2017). Med andre ord, effektiv behandling og konvertering av matematiske representasjoner er en viktig komponent i «å kunne» matematikk. Det er enkelte konverteringer aktiviteten ser ut til å innby til, og det er særlig lokale konverteringer av punkter. Det observeres i datamaterialet en progresjon i effektiviteten hos jentegruppa når det gjelder å sammenligne punkter på tvers av de tre representasjonene *graf*, *tabell* og *algebraiske uttrykk*. Aktivitetens design legger opp til at det er naturlig å gjøre et betydelig antall slike konverteringer, og det gir elevene god trening i disse prosedyrene. Det faktum at akkurat disse prosedyrene øves godt opp gjennom aktiviteten, samtidig som andre ikke gjør det, kan ha sammenheng med det konkrete designet av aktiviteten. Det er mulig at fokuset kan dreies over på andre prosesser ved å endre på hvilke representasjoner man gir elevene.

6.1.2 Forståelse for konseptet funksjon

Aktivitetens design er basert på designet til Malcolm Swan (2008). Hans opprinnelige aktivitet var laget med målet om å skape mer dybdeforståelse for algebraiske uttrykk gjennom å knytte disse til andre representasjonsformer. Han argumenterer for at aktiviteten gir elever muligheten til å bedre forstå hvilken betydning tilsynelatende små forskjeller i uttrykkene har. For eksempel bruker han uttrykkene $3n^2$ og $(3n)^2$ som er nokså like, og som lett kan forveksles. Gjennom å knytte disse sammen med blant annet geometriske arealmodeller blir forskjellen mer synlig. Sett gjennom teori om representasjoner, ser man her eksempel på hvordan ingen representasjoner alene kan fange essensen i et matematisk objekt, men at de ulike representasjonene alle fremhever ulike kvaliteter og egenskaper ved objektet. Samtidig tilbyr de ulike registrene ulike muligheter for manipulasjon, og hvilket register man benytter handler ofte mye om hvilke muligheter for transformasjon registeret tillater (Duval, 2006). Da det algebraiske registeret har stor kapasitet for transformasjon, bruker man gjerne mye tid i det registeret. *Forståelse* av matematikken kommer imidlertid ikke før koordineringen av minst to register starter (Duval, 2006). Slik jeg tolker teorien til Duval, vil jeg dermed påstå at den aktuelle typen aktivitet vil bidra til forståelse av de matematiske objektene involvert.

I dette masterprosjektet er aktiviteten satt inn i et beslektet emne – *funksjoner*. Det består, i likhet med Swans (2008) aktivitet, også av verditabeller, algebraiske uttrykk og verbale beskrivelser. Den største forskjellen er at arealmodellene er byttet ut med grafer. De algebraiske uttrykkene er her *funksjonsuttrykk* som er av en litt annen karakter enn generelle algebraiske uttrykk med én variabel, og de verbale beskrivelsene er av situasjoner fremfor å bare være verbale gjengivelser av uttrykkene, slik de fremstår hos Swan (2008).

Duval (2006; 2017) beskriver *det kognitive læringsparadokset* som en tilsynelatende uoverkommelig hindring i læring av matematikk. Elever må konstruere et matematisk objekt kun med utgangspunkt i semiotiske representasjoner av objektet, men uten direkte kunnskap om objektet. Dette leder til den paradoksale situasjonen som oppstår i læring av matematikk: elever må skille mellom objektet og dets første semiotiske representasjon for å kunne tilknytte objektet flere representasjoner. Dette fremstår imidlertid som umulig, da objektet kun er tilgjengelig gjennom representasjonen.

Veien ut av denne situasjonen hevdes å være og observere systematisk variasjon i flere register *samtidig* (Duval, 2006). Kun på denne måten kan man se hvordan endringer av det bakenforliggende objektet påvirker de relevante elementene i de ulike representasjonene. I aktiviteten som er utgangspunkt for oppgaven vil jeg argumentere for at det ligger en mulighet for nettopp dette. Elevene står overfor et stort antall representasjoner, som alle representerer én av syv ulike funksjoner. Etter som de forbinder stadig flere representasjoner blir det mulig å legge merke til nettopp denne variasjonen på tvers av representasjonene. Det er hvilket register en representasjon kommer fra som har størst innflytelse på hvordan den faktisk ser ut, og dermed kan man si at forskjellen mellom en tabell og et koordinatsystem først og fremst er et resultat av de ulike reglene for å produsere representasjoner i disse to registrene. Justeringer på funksjonen som representeres vil skape endringer i representasjonen, men ganske små endringer, tross alt. Under kan man sammenligne tabellen og grafen for funksjonene 3 og 4 i aktiviteten. De to tabellene representerer ulike funksjoner, men det kan nok oppleves som små forandringer i representasjonen fra T3 til T4 for et utrent øye. Det samme kan man observere fra G3 til G4. De fleste karakteristikker man kunne finne på å gi av grafen vil være den samme i begge tilfellene. I oppgaven er det slik at representasjonene innad i et register er fremstilt som veldig like. Det vil si, tabellene er nøyaktig samme størrelse og har lignende x-verdier, grafene er like store og har lignende verdi-områder synlig. Oppgaven for elevene blir å fokusere oppmerksomheten på de små, men *kritiske* elementene som endrer seg fra en representasjon til en annen.

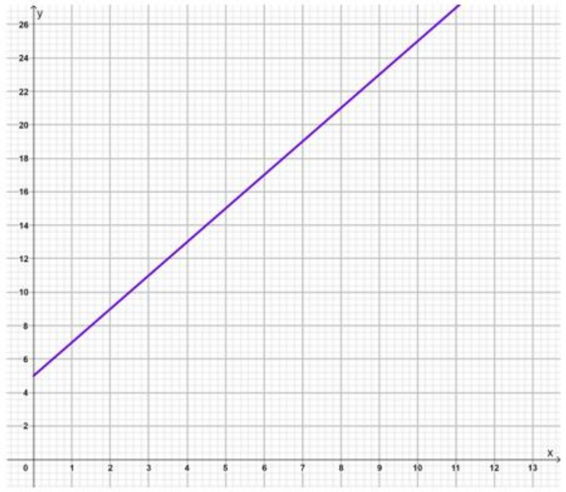
T3

x	2	4	6	8
y	9		17	

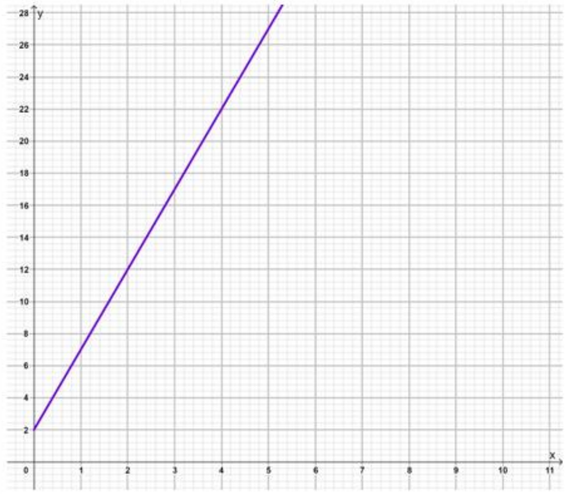
T4

x	2	4	6	8
y	12	22		42

G3



G4



Oppgaven legger opp til å sidestille syv grupper bestående av ulike representasjoner, hvor alle representasjonene innad i hver gruppe er kjent å skulle representere en konkret funksjon. En slik situasjon vil jeg argumentere for at gir elevene muligheten til å observere hvilke elementer i representasjonene som blir påvirket av å endre på det bakenforliggende objektet, og den tillater også at elevene kan observere hvordan en endring i for eksempel den algebraiske representasjonen vil gi utslag i den grafiske.

Dersom denne analysen av mulighetene i aktiviteten antas å være korrekt, betyr det at det finnes et potensial for læring i aktiviteten, slik læring er definert av Duval (2006, 2017). Det er min oppfatning at å jobbe på denne måten vil kunne bidra til koordinasjonen av flere register, og at man gjennom det kan utvikle en dypere forståelse for objektet funksjon.

6.2 Globale tolkninger for orientering

I Bossé et al. (2011) sin artikkel videreutvikler de matrisen først utviklet av Janvier (1987), og fyller den ut basert på hvorvidt en konvertering assosieres med lokale eller globale tolkninger av kilde-representasjon. I datamaterialet fra aktiviteten gir elevene uttrykk for tolkninger som ikke alltid sammenfaller med klassifiseringen i matrisen. Spørsmålet blir om den aktuelle aktiviteten skaper noen behov som stimulerer til andre tolkninger enn mer tradisjonelle oppgaver, hvor målet er å konstruere for eksempel en graf basert på en verditabell for en spesifikk funksjon. En slik konvertering klassifiseres som basert på *lokale* tolkninger (Bossé et al., 2011). I gruppeoppgaven blir derimot elevene stilt overfor en «let og finn»-type aktivitet, som skiller seg fra en mer klassisk «produksjons-oppgave». For å ta et hverdagslig eksempel, kan man tenke på å skulle legge sammen par med strømper som har blitt vasket og tørket, og som et resultat ligger godt blandet i en kurv. La oss si du velger å starte med en sokk som har en del rødfarge. Da blir det naturlig å gjennomsøke utvalget for andre sokker som også har fargen rød. Man gjør en sortering og eliminering basert på et kriterium og kan senere gjøre mer detaljerte analyser dersom det viser seg å være flere mulige kandidater som passer med dette kriteriet.

Det er på mange måter samme situasjon man står i når man får femten papirlapper med tabeller og grafer som skal pares. I resultatene ble det trukket frem et par eksempler på globale betraktninger elevene gjør i en slik orienteringsprosess. Blant annet ble det bemerket i starten, når de kun hadde tabeller og grafer, at det ikke var så mange som gikk «nedover». Dette enslige utsagnet er i seg selv interessant å legge merke til, da det indikerer at både tabellene og grafene blir tolket globalt for å beskrive den generelle utviklingen i verdiene. Dette utfordrer den klassifiseringen av konverteringer som basert på lokale og globale som presenteres av Bossé et al. (2011). Kan hende må en slik klassifisering også ta høyde for *hensikten* med konverteringen, da dette kan se ut til å påvirke hvordan elever tolker representasjonene. Man har sett at konverteringer innebærer ulike prosesser alt etter hvilken retning konverteringen går i, og dermed hva som opptrer som kilde- og målrepresentasjon (Adu-Gyamfi et al. 2019; Bossé et al., 2011; Duval, 2006). Det kan virke som om det vil være nyttig også å ta hensyn til hva som er hensikten med aktiviteten.

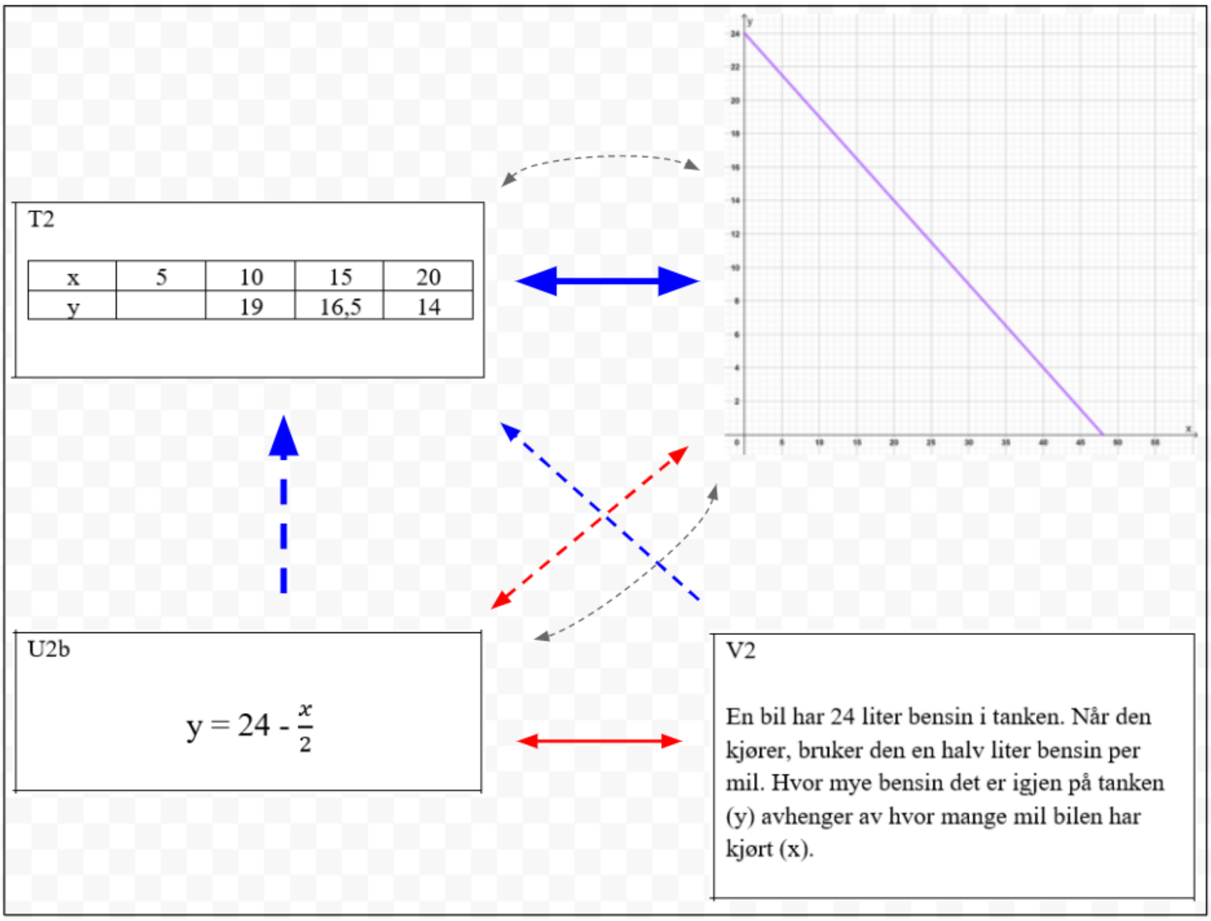
6.3 Elevenes preferanser og valg av konverteringer

I arbeidet med representasjoner fra fire ulike register, er det mulig å gjøre 12 ulike konverteringer. I analysene kommer det frem at ikke alle konverteringene er representert i datamaterialet, og at av dem som er representert, så er det enkelte som særlig foretrekkes av de aktuelle elevene i arbeidet med denne aktiviteten. I det følgende vil jeg forsøke å gi bedre oversikt over disse konverteringene, og i tillegg se til teorien for å kunne kaste mer lys over *hvorfor* elevene gjør disse valgene.

6.3.1 Oversikt og klassifisering av aktuelle konverteringer

Figur 6.1 er et forsøk på å lage et «kart» som viser hvilke konverteringer elevene gjorde under aktiviteten. I figuren er det brukt representasjoner fra aktiviteten som alle representerer den samme funksjonen. I modellen må de forstås som representanter for hvert sitt register, og koblingene mellom dem er ment å gjelde utover den spesifikke funksjonen som er representert. Figuren viser de konverteringene som kunne påvises i datamaterialet. I figuren er det brukt blå og røde piler, som symboliserer konverteringer basert på henholdsvis lokale og globale tolkninger. I den videre drøftingen av disse to ulike konverteringene finner jeg det hensiktsmessig å innføre noen mer komprimerte begreper, og vil fra nå av referere til *lokale konverteringer* og *globale konverteringer*.

I tillegg til å være fargekodet, er pilene også markert enten med heltrukken linje, eller med stiplet linje. Dette viser til hvorvidt konverteringen er kongruent eller ikke. For eksempel kan man se i figuren at konverteringer elevene gjør fra funksjonsuttrykk til tabell er markert med en blå, stiplet linje. Dette betegner da en *ikke-kongruent, lokal konvertering*. Konverteringene som gjøres mellom funksjonsuttrykk og verbale beskrivelser betegnes derimot som *kongruente, globale konverteringer*. Pilene er av noe ulik størrelse, og dette er gjort for å indikere hvor hyppig disse konverteringene er representert i datamaterialet. Det er slik at lokale konverteringer mellom graf, tabell og uttrykk er dem det gjøres flest av.



Figur 6.1: Kart over konverteringer

Pilspissene indikerer konverteringens retning. Der hvor pilen peker i begge retninger, som mellom algebrauttrykk og graf, er det enten vanskelig å avgjøre retningen på konverteringene, eller så er begge retninger representert i datamaterialet. Man legger fort merke til at det er enkelte konverteringer som ikke er markert. Valgene av konverteringer som elevene gjør gjennom aktiviteten drøftes i de neste avsnittene. Totalt er 8 av 12 mulige konverteringer markert i modellen. Den minste, grå, buede pilen som også knytter sammen enkelte av representasjonene, er ment å illustrere de noe overfladiske «peile seg inn»-tolkningene som noen ganger ble brukt for å snevre inn antall muligheter. Disse er kun observert mellom tabell og graf, samt mellom uttrykk og graf.

6.3.2 Valg av konverteringer i andre fase

Tabellene blir mye brukt av elevene. Lokale konverteringer *til* tabell dominerer i arbeidet. I første fase av aktiviteten har de ikke mulighet til å velge konverteringer, da de bare har to registre tilgjengelig. I andre fase derimot, får de utdelt algebraiske uttrykk, og man kan si de står ovenfor et valg. De kan forsøke å koble et uttrykk enten til en tabell, eller til en graf. Her er det en klar tendens til at elevene velger tabellene. Hvorfor er det slik?

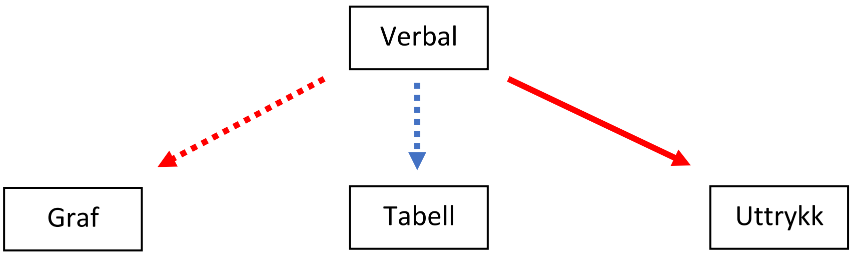
Dersom elever skulle ha produsert en graf fra et funksjonsuttrykk manuelt, er det vanligste at dette gjøres gjennom å beregne konkrete punkter ved å sette inn verdier for uavhengig variabel og regne ut den avhengige variabelen. Janvier (1987) kaller en slik konvertering for *indirekte*. I tabellen til Bossé et al. (2011) har også de brutt ned denne konverteringen til to steg, hvor det første steget involverer å produsere en verditabell. Alternativt vil det være mulig å identifisere globale egenskaper ved funksjonene både i funksjonsuttrykkene og i grafene og på den måten finne representasjoner som viser samme funksjon. Studier viser at elever har høyere suksessrate i arbeid med konverteringer som krever lokale tolkninger enn de som krever globale, noe som indikerer at slike tolkninger er mer krevende for elever (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Bossé et al., 2011). Dette er nok i det minste én del av forklaringen på hvorfor elevene i aktiviteten ser ut til å foretrekke det lokale arbeidet.

Det er imidlertid et valg til som elevene gjør, og hvor forklaringen kanskje er mindre innlysende. Da elevenes oppgave i denne aktiviteten *ikke* innebærer å produsere grafen, vil jeg hevde at det også er mulig å gjøre en *direkte*, lokal konvertering av punkter fra funksjonsuttrykket til grafen. Man kan velge seg en verdi for uavhengig variabel, beregne funksjonsverdien og kontrollere direkte med den grafiske representasjonen. Dette betyr at elevene står ovenfor et valg i den andre fasen av aktiviteten hvor *begge* valgene innebærer å gjøre ikke-kongruente, lokale konverteringer. Hvorfor er det da en så klar tendens til at de foretrekker tabellen?

Et mulig svar kan være å finne i modellen til Bossé et al. (2011), og deres beskrivelser av kvaliteter ved de fire ulike representasjonstypene. De snakker blant annet om det de kaller «attribute density», eller informasjonstettet som jeg har valgt å kalle det på norsk. På dette punktet skiller representasjonene tabell og graf seg fra hverandre. Sammenligner man dem, vil det stort sett være slik at tabellen inneholder mye mindre informasjon enn grafen. Det er en større mengde informasjon, og mer kompakt informasjon, å lese ut av en grafisk representasjon. Dette krever også mer av leseren. Tabellen er med andre ord mer lettlest. Dette kan være en årsak til at tabellen stikker seg ut som den foretrukne mål-representasjonen.

6.3.3 Valg av konverteringer i tredje fase

Når elevene kommer til den siste fasen av aktiviteten, har de representasjoner tilgjengelig fra alle fire registrene, og det er flere mulige fremgangsmåter elevene kan velge for å knytte de verbale beskrivelsene til de andre representasjonene. Dersom vi tar utgangspunkt i den verbale representasjonen som kilderepresentasjon, har elevene følgende muligheter:



Figur 6.2

Som pilene viser, innebærer de tre valgene tre ulike typer konvertering. Konvertering til tabell defineres som lokal, ikke-kongruent, konvertering til algebraisk uttrykk som global, kongruent, og konvertering til graf som global, ikke-kongruent. Resultatene viser at elevene utelukkende velger å jobbe mot funksjonsuttrykk i denne oppgaven, noe som er en interessant observasjon. Det er særlig to spørsmål som melder seg her. (1) Hvorfor bruker ikke elevene tabellene i samme grad som tidligere i aktiviteten? Og, (2) i valget mellom to globale konverteringer, hvorfor er det en så tydelig preferanse for å konvertere til funksjonsuttrykk? Jeg vil drøfte det andre spørsmålet først, og kommer tilbake til spørsmålet om tabellene etterpå.

Resultatene tyder på at elevene opplever konverteringen *verbal* → *uttrykk* som mer tilgjengelig enn *verbal* → *graf* i denne type aktivitet hvor representasjoner skal knyttes sammen. Dette kommer i konflikt med funnene til Adu-Gyamfi et al. (2019), hvor konverteringen *verbal* → *uttrykk* rangeres som vanskeligere (lavere suksessrate) enn *verbal* → *grafisk*. I studien til Gagatsis & Shiakalli fra 2004 finner de imidlertid at suksessraten blant elever for konvertering mellom representasjoner («translation tasks») faller i det den grafiske representasjonen er involvert. De finner også at suksess i konverteringen *verbal* → *grafisk* alltid predikerer suksess i konverteringen *algebraisk* → *grafisk*, da det er typisk at elever *først* konverterer tekst til funksjonsuttrykk, og deretter produserer grafen (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Her må det legges til at studien fra 2019 er mer en type litteratursammenfatning, hvor data er hentet på tvers av ulike forskningsdesign. Studien fra 2004 undersøker spesifikt «translation tasks» og i hvilken grad disse korrelerer med problemløsning. Datamaterialet i masteroppgaven ser ut til å stemme bedre med den sistnevnte, hvor det antydes at den algebraiske representasjonen er et middel for å gå fra verbal beskrivelse til grafisk representasjon, noe som igjen impliserer at det er mindre krevende å konvertere til den algebraiske representasjonen fra en verbal beskrivelse.

Med utgangspunkt i figur 6.2, som klassifiserer konverteringene som globale/lokale og kongruente/ikke-kongruente, er det tydelig at det er én forskjell mellom de to konverteringene. I analysen av kongruens mellom de verbale og algebraiske representasjonene i aktiviteten ble det pekt på en synlig én-til-én-korrespondanse mellom relevante elementer i representasjonene. Det samme kan man ikke si om konverteringen mellom de verbale beskrivelsene og den grafiske representasjonen. På samme måte som med *uttrykk → graf*, er det vanskelig å peke på isolerte elementer i de to representasjonene *verbal beskrivelse* og *graf* som uttrykker det samme. I tilfellet med lineære funksjoner kan det diskuteres hvorvidt en konstant verdi i teksten og skjæring med y-aksen er kongruente, men dette er for eksempel ikke tilfelle for den omvendt proporsjonale funksjonen. Sammenligner man den grafiske og den verbale beskrivelsen av den omvendt proporsjonale funksjonen, finnes det ingen opplagt én-til-én-forhold mellom noen av elementene. I uttrykket har man i det minste en tydelig sammenheng mellom «24 pizzastykker» og tallet 24 i telleren på brøken.

V5

Det er kjøpt inn tre pizzaer med til sammen 24 pizzastykker til en fest. Hvor mange pizzastykker det blir per person (y) avhenger av hvor mange gjester som kommer (x).

U5a

$$y = \frac{24}{x}$$

I møte med oppgaven om å identifisere grafen og teksten for denne omvendte proporsjonaliteten, vil jeg argumentere for at man til en viss grad er *nødt* til å gå via den algebraiske representasjonen, selv om det ikke nødvendigvis gjøres fysisk. I teksten står det at «Hvor mange pizzastykker det blir per person, avhenger av hvor mange gjester som kommer». På en eller annen måte *må* dette tolkes dit hen at tallet 24 må *deles* på antall gjester. Arbeider man lokalt, innebærer det at man må utføre denne divisjonen for noen konkrete verdier, og samtidig at man anser y-verdien som *gitt av* divisjonen. En mer global tolkning, hvor man forbinder en hyperbel med «delt på x», kan også tenkes å innebære en form for intern representasjon av sammenhengen gitt i uttrykket. I det hele tatt fremstår den algebraiske representasjonen «nærere» til teksten, og som mer kongruent i forhold til den.

Det mest fremtredende spørsmålet å stille her er kanskje likevel hvorfor ikke elevene velger å bruke tabellen i denne fasen også, slik tendensen har vært i resten av aktiviteten. Konvertering som innebærer lokale tolkninger regnes generelt som enklere (Bossé et al., 2011; Duval, 2006), og konverteringer *til* tabell er blant de konverteringene med høyest suksessrate (Adu-Gyamfi et al., 2019). Bossé et al. (2011) beskriver at konverteringen *verbal* → *grafisk* innebærer *verditabellen* som overgangsrepresentasjon, noe som betyr at elevene gjør lokale beregninger av konkrete funksjonsverdier basert på den verbale beskrivelsen, og tegner graf ved å plotte disse punktene. Dette skiller seg fra funnene til Gagatsis & Shiakalli (2004) som peker på den algebraiske representasjonen som overgangsrepresentasjon mellom verbale og grafiske representasjoner. I den studien var imidlertid ikke verditabeller en del av oppgavene som elever jobbet med. Konverteringen *verbal* → *tabell* → *graf* er det vanskelig å spore i dataene i denne masteroppgaven. Jentegruppa har en tendens til å kontrollere om de har valgt riktig funksjonsuttrykk ved å teste noen konkrete verdier fra situasjon til tabell, men dette kommer alltid *etter* at de har valgt seg ut et uttrykk. I neste delkapittel vil jeg sette søkelyset på fenomenet kongruens, og drøfte hvordan dette kanskje kan være deler av forklaringen på hvorfor tabellene ikke brukes mer aktivt i denne tredje fasen.

Det er imidlertid ett viktig poeng knyttet til oppgavetypen i den aktuelle aktiviteten som er viktig å påpeke før spørsmålet om bruk av tabellene kan kommenteres på. Studiene som peker på konvertering til verditabeller som enklest, har alle studert i hvilken grad elever lykkes i arbeidet når de er *tvunget* til å gjøre denne bestemte konverteringen. Det sier ikke nødvendigvis noe om hvilket register de ville foretrukket dersom målet var å finne en annen representasjon for den samme funksjonen.

6.3.4 Kongruens som faktor for valg av konvertering

På bakgrunn av det som har blitt diskutert så langt, kan det se ut til at kongruens mellom representasjonene spiller en vesentlig rolle i elevenes valg av konverteringer. Det kan se ut til at der hvor graden av opplevd kongruens mellom representasjonene er sammenlignbar, er det andre faktorer som blir gjeldene. Faktorer som hvorvidt konverteringen krever lokale eller globale tolkninger, eller graden av informasjonstetthet spiller inn. Dette ser man i andre fasen av aktiviteten hvor elevene velger å jobbe fra funksjonsuttrykk til tabell, som er blitt tolket som den lokale konverteringen som innebærer minst arbeid på grunn av lav informasjonstetthet i tabellen som mål-representasjon. Det var lenge en arbeidshypotese at skillet mellom lokal/global tolkning ville være det som veide tyngst i elevens valg. Denne hypotesen ble utfordret av valgene elevene så tydelig tok i tredje fase av aktiviteten, hvor de hadde muligheten til å gjøre lokale tolkninger til tabell, men valgte globale konverteringer til funksjonsuttrykk i stedet. Dette var den konverteringen med antatt høyeste grad av kongruens. En mulig hypotese her er at *graden av kongruens mellom to representasjoner er av større betydning for konvertering enn hvorvidt den innebærer lokale eller globale tolkninger.* Dette hevdes på ingen måte å være godt nok dokumentert. Duval (2017) er imidlertid tydelig på at kongruens er en avgjørende faktor for konvertering mellom representasjoner, og hevder at «… it is always the same variation of congruence and non-congruence between the respective contents of the starting representation and arrival representation *that facilitates or inhibits the conversion.*» (s. 87). Slik jeg forstår Duval her, mener han at variasjonen i kongruens mellom relevant innhold i kilde- og målrepresentasjon er det som enten legger til rette for eller blokkerer gjennomføringen av en konvertering. Han hevder her å ha sett et mønster i hva det er som gjør at elever enten mestrer eller ikke mestrer konverteringen av en matematisk idé fra et register til et annet. Han hevder også at dette er noe man kan observere på tvers av matematiske emner, og det handler om graden av «gjennomsiktighet» fra et register til et annet. Disse påstandene knytter seg naturlig til funnene gjort i denne oppgaven, hvor det tegner seg et bilde av hvordan graden av kongruens mellom representasjonene er med å avgjøre hvilke konverteringer elevene i størst grad lykkes med og dermed holder fast ved.

Måten jeg har brukt kongruensbegrepet på i min analyse og drøfting, innebærer en forståelse av begrepet som *glidende* langs et spekter, ikke som noe som enten finnes eller ikke finnes. Det brukes formuleringer som *ulike grader* av kongruens. Dette skiller seg noe fra Duvals (2006, 2017) måte å omtale begrepet på, hvor man kan få inntrykket av at det er et mer definert skille mellom kongruente og ikke-kongruente konverteringer. Det er likevel usikkert hvorvidt jeg har tolket Duval riktig her. I analysene i dette prosjektet opplevdes det uansett mer hensiktsmessig å operere med ulike grader av kongruens, heller enn en absolutt klassifisering. Dette kan for eksempel illustreres med dialogen om situasjonen hvor en bil brukte en halv liter bensin, og hvor dette var representert algebraisk på to ulike måter. Dialogen med elevene viste nokså tydelig at det ene uttrykket opplevdes som nærere til teksten enn det andre, selv om andre «krav» til kongruens var oppfylt, som én-til-én korrespondanse mellom elementer i teksten og uttrykket. Ved å gjøre kongruensbegrepet mer nyansert, kunne det brukes til å beskrive hvorfor én representasjon opplevdes mer naturlig enn en annen variant fra samme register.

Det er imidlertid ikke et poeng å generalisere resultatene fra denne masteroppgaven til alt arbeid med representasjoner av funksjoner i ungdomsskolen. Som Duval (2017) poengterer, er kongruens mellom to gitte representasjoner noe som må vurderes i hvert enkelt tilfelle. Det betyr at eventuelle påstander som legges frem her om kongruens mellom to representasjoner ikke nødvendigvis kan overføres til to andre representasjoner fra henholdsvis samme registre. Det har blitt demonstrert hvor små justeringer som skal til i eksempelvis algebraiske eller verbale representasjoner for å endre på opplevd kongruens. Det viktigste poenget her blir å sette søkelyset på betydningen av denne faktoren i elevenes arbeid, og hvordan bevissthet rundt dette kan støtte opp om undervisning og forståelsen for elevers utfordringer.

7 Konklusjon

I dette siste og avsluttende kapittelet vil jeg oppsummere hovedfunnene i prosjektet, og gjennom det svare på forskningsspørsmålene. Jeg vil også reflektere over implikasjoner for matematikkundervisning og for videre forskning. Til slutt kommer jeg med noen egne tanker og refleksjoner omkring prosjektet.

7.1 Hovedfunn

Innledningsvis ble det presentert to forskningsspørsmål som har vært retningsgivende for arbeidet med masterprosjektet. De to spørsmålene var som følger:

I Hva karakteriserer ungdomsskoleelevers arbeid med å identifisere og gruppere kort med ulike representasjoner av funksjoner?

II Hvilke, hvis noen, preferanser for representasjoner og overganger mellom disse kan spores hos elevene i en slik aktivitet?

På mange måter kan man si at spørsmål to inngår som et ledd i å svare på det som fungerer som hovedspørsmålet her, nemlig hva som karakteriserer dette elevarbeidet. Det er derfor naturlig å omtale begge spørsmålene samlet.

Det som først og fremst karakteriserer arbeidet, er at det innebærer et stort tolkningsarbeid av representasjoner for funksjoner. Elevene må tolke egenskaper ved de ulike funksjonene, representert i ulike register, og gi mening til elementer i representasjonene for å kunne bestemme samsvar mellom dem. Det har blitt presentert eksempler på at det store antallet tolkninger av representasjoner i aktiviteten har resultert i tryggere og mer effektive tolkninger hos enkelte av elevene. Det har imidlertid også vist seg at det i den konkrete gjennomføringen gjøres mer av enkelte tolkninger enn andre. Lokale tolkninger av punkter og funksjonsverdier får større plass en globale tolkninger. Den observerte læringseffekten er dermed i størst grad knyttet til disse tolkningene. Her må det antas at designet av aktiviteten spiller en rolle, og det antas at det vil være mulig å påvirke hva elevene jobber med gjennom å endre på designet.

En annen sentral karakteristikk er at elevene ser ut til å ha noen preferanser for representasjoner og konverteringer i arbeidet. Elever ser ut til å foretrekke å jobbe med lokale konverteringer, og særlig representasjonen tabell foretrekkes. Tabellen egner seg til lokale tolkninger av punkter og den er lett å lese grunnet lav informasjonstettet (Bossé et al., 2011). Tidligere forskning har påpekt at lokale tolkninger er mindre krevende enn globale, og dette var derfor ingen stor overraskelse (Bossé et al., 2011; Leinhardt et al., 1990). Det later imidlertid til å være en annen viktig faktor som påvirker elevenes valg av representasjoner og konverteringer. Graden av kongruens mellom representasjonene trekkes frem som en mulig avgjørende faktor. Kongruens omhandler graden av gjennomsiktighet fra en representasjon til en annen (Duval, 2017). Dette forklarer blant annet hvorfor elever foretrekker algebraiske uttrykk fremfor grafer og tabeller når de skal plassere verbale beskrivelser av funksjonene, selv om det ville vært mulig å gjøre lokale beregninger og konvertering til tabell. En hypotese som kan beskrive elvers valg underveis er derfor at elever velger lokale konverteringer fremfor globale, *dersom* graden av kongruens er tilsvarende. Ved stor forskjell i kongruens velger elevene den mest kongruente konverteringen, selv om den viser seg å være av global karakter. Denne hypotesen karakteriserer elevenes arbeid i det konkrete datamaterialet. Det er dermed uvisst hvorvidt det samme vil kunne observeres i andre kontekster. Dette blir et spørsmål for videre forskning.

Aktiviteten ser også ut til å utløse et sorteringsbehov, som kommer til uttrykk ved at elevene kategoriserer representasjoner etter overordnede karakteristikker som stigende eller synkende trend. På denne måten er det mulig å argumentere for at denne aktiviteten oppmuntrer til «å løfte blikket» og gjøre globale tolkninger av representasjonene for å begrense utvalget av muligheter for en gitt type funksjon. Elevene gjør refleksjoner knyttet til hvorvidt verdier stiger eller synker, og om sammenhengen er lineær eller ikke. Dette er særlig interessant i forbindelse med konvertering mellom graf og tabell, som i litteraturen omtales som utelukkende lokalt tolkningsarbeid. Det observeres tilfeller hvor elevene analyserer utvikling i tabellverdier og grafer, og bruker dette i et eliminasjonsarbeid.

Enkelte av disse karakteristikkene er enklere å generalisere ut over den konkrete konteksten enn andre. Man kommer ikke utenom at elevene må gjøre et veldig stort antall tolkninger av representasjoner i denne typen aktivitet, sammenlignet med andre typer aktiviteter. Det er imidlertid mindre sikkert at andre elever vil gjøre de samme valgene underveis. Det er likevel interessant å ha pekt på noen trekk ved elevenes arbeid, som så kan undersøkes i andre elevgrupper. Under delkapittelet 7.3 vil jeg diskutere dette videre og komme med mer konkrete spørsmål som jeg tenker burde undersøkes nærmere.

7.2 Didaktiske implikasjoner

Det er som sagt vanskelig på dette tidspunktet å si noe sikkert om holdbarheten til alle karakteristikkene og hypotesene jeg har beskrevet i oppgaven. Dersom man likevel skulle anta at funnene her kan overføres til andre kontekster, gir det noen implikasjoner for undervisning i representasjoner generelt, og i emnet funksjoner spesielt.

Det har blitt trukket frem utfordringer elever opplever når de baserer seg for ensidig på lokale konverteringer. En bedre balanse mellom det globale og lokale kunne gjort elevene mer effektive i arbeidet og mindre utsatt for lokale feil i beregninger. Dersom elever får muligheten til å diskutere strategier i denne type arbeid, og dele sine erfaringer med andre grupper, vil antakeligvis dette kunne lede til en større bevissthet rundt arbeidet i denne type aktivitet. Basert på funnene i prosjektet vil gjennomføring og design av slike aktiviteter kunne styrkes av at lærer er bevisst på forskjellen mellom de lokale og globale tolkningene, og hvordan de komplimenterer hverandre. Dette vil være aktuelt i utformingen av aktiviteten, veiledningen underveis og i klassediskusjoner etter gjennomføring.

Det er flere eksempler på at elevene gjør globale tolkninger av representasjoner uten at de lykkes i å bruke dem til å identifisere samsvar mellom to representasjoner. Dette, sammen med overvekten av lokale tolkninger, indikerer at konvertering av globale egenskaper er vanskeligere enn de lokale. En implikasjon av dette er at det bør gis mye oppmerksomhet til hvordan globale egenskaper som stigning kan identifiseres fra en representasjon til en annen, på tvers av alle de fire representasjonene. Det vies ofte mye tid til sammenhengen mellom graf og algebraiske uttrykk, men konvertering på tvers av alle fire registre er viktig for fullstendig utvikling av funksjonsbegrepet (Nitsch et al., 2015).

Den viktigste didaktiske implikasjonen, slik jeg ser det, kommer imidlertid som en konsekvens av funnene knyttet til kongruensbegrepet. Det er usikkerhet knyttet til i hvilken grad disse funnene kan generaliseres, men *dersom* de kan det, bør det få merkbar innflytelse på matematikkundervisning generelt. I utgangspunktet vil det bare være med å underbygge det Duval (2017) allerede har uttrykt i sitt arbeid, men som matematikklærere flest ikke kjenner til. Det handler om viktigheten av kongruens mellom representasjoner. Bevissthet rundt problemer knyttet til ikke-kongruente konverteringer kan gi mer innsikt i flere problemstillinger i matematikkundervisning, som blant annet hvorfor elever strever med sammenhengen mellom brøk, prosent og desimaltall, men også hvorfor det er så vanskelig å koordinere grafer og verbalt beskrevne situasjoner. Det gir ingen umiddelbare løsninger på vanskelighetene, men det kan hjelpe lærere å sette fingeren på roten til problemet, slik at det kan løftes frem i undervisning og at det kan skapes bevissthet rundt dette. Man kan jobbe målrettet med konverteringsstrategier for ulike representasjoner. Det er nettopp dette Duval (2006) peker på som den viktigste oppgaven til matematikkundervisning.

7.3 Spørsmål til videre forskning

Arbeidet med masterprosjektet har pågått over et helt år. Underveis i arbeidet har min innsikt i det teoretiske, og det praktiske rundt gjennomføringen av aktiviteten, utviklet seg. Dette har ført til at det har dukket opp en rekke spørsmål som jeg anser som meget interessante å undersøke videre.

Det er beskrevet en rekke valg gjort underveis i utviklingen av aktiviteten og representasjonene elevene får jobbe med. Ved alle disse veivalgene, ville det vært mulig å gjøre ting annerledes. Jeg anser det som meget sannsynlig at resultatene kunne vært annerledes dersom designet hadde blitt endret. Her følger noen forslag til variasjoner jeg opplever som relevante og interessante:

- Hvilken effekt ville det ha å gjøre endringer i rekkefølgen kortene ble delt ut i? Jeg har vist at tabellene ble foretrukket. Det ville vært interessant å se om det også var tilfellet dersom tabellen *ikke* var en av de to første representasjonene.
- Hvordan vil elevene gå frem dersom de ikke hadde tabeller i det hele tatt?
- Å dele ut representasjoner fra alle fire register samtidig kunne vært interessant for å studere elevers valg og preferanser.
- Utvalget av typen funksjoner kunne vært annerledes. Man kunne tenke seg at det kun var lineære funksjoner, for å fokusere mer spesifikt på for eksempel tolkning av stigning i slike funksjoner.

Det har vært fruktbart å beskrive elevenes valg underveis gjennom å sammenstille konverteringer som enten lokale eller globale, og i tillegg som å ha ulik grad av kongruens. Dette arbeidet har gitt opphav til en hypotese angående hvilken rolle kongruens spiller for hvordan elevene jobber i denne aktiviteten. Hypotesen er allerede omtalt, og innebærer at *kongruens mellom representasjoner er den viktigste faktoren for valg av konvertering*, som impliserer at dette er viktigere enn skillet mellom det lokale eller globale. Dette masterprosjektet gir ikke grunnlag for å vurdere gyldigheten til denne hypotesen, og det behøves videre studier for å kunne ta stilling til dette.

I mitt forsøk på å analysere graden av kongruens mellom de ulike representasjonene, har jeg støttet meg til Duvals (2006, 2017) begreper og terminologi knyttet til dette. Det har dermed ikke vært brukt et utarbeidet analyseverktøy for å gjøre dette. I ettertid ser jeg at faktorene jeg har sett på i min analyse av kongruens kan artikuleres gjennom tre spørsmål. Disse tre spørsmålene utgjør et første utkast til det jeg ser på som en «test» for kongruens mellom to representasjoner. De tre spørsmålene er som følger:

I. I hvilken grad kan man, i to ulike representasjoner, *peke på* elementer med ekvivalent betydning?

II. I hvilken grad er korrespondansen mellom elementer *entydig*?

III. I hvilken grad kreves det *manipulasjon og/eller tolkning* av representasjonene for å påvise ekvivalent betydning?

Her må begrepet «peke på» forstås bokstavelig. Er det mulig å peke på to elementer slik de fremstår i to representasjoner, og hevde at de uttrykker det samme? Videre, er det entydig hvilke elementer som hører sammen, eller kan et element i den ene representasjonen vise til flere elementer i den andre? Begge de første to spørsmålene springer ut av begrepet «én-til-én-korrespondanse» som brukt av Duval (2006, 2017). Det tredje spørsmålet omhandler hvorvidt representasjonen kan konverteres «slik den står», eller om det må gjøres noen fortolkninger eller behandlinger innen samme register *før* en kan foreta en konvertering. I det innledende eksempelet som ble brukt for å forklare kongruensbegrepet, handlet det om å legge sammen tre og fem epler. En omformulering av den verbale representasjonen førte til lavere kongruens. Omformuleringen førte til at korrespondansen mellom elementene ikke lenger var like entydig (II) da man fikk ordene «summerer» og «og» som begge viste til symbolet «+». Samtidig ble det nødvendig med større grad av fortolkning (III), da kronologien ble endret slik at den ikke lenger passet med rekkefølgen i regnestykket.

I den aktuelle aktiviteten kan man se på konverteringen mellom tabell og funksjonsuttrykk, som ble klassifisert som ikke-kongruent, eller som å ha lav grad av kongruens. I det tilfelle ble det argumentert for at det i liten grad kunne pekes på elementer med ekvivalent betydning og at det ikke var en entydig korrespondanse mellom elementene. I tillegg er det nødvendig å gjøre tolkninger og/eller manipulasjoner for å påvise ekvivalens. Det er nødvendig å beregne stigning og y-verdi når x = 0 basert på tabellverdiene som er oppgitt dersom man ønsker å konvertere fra tabell → uttrykk. Andre veien, må man sett inn x-verdi og beregne funksjonsverdi for å konvertere fra uttrykk → tabell. Med andre ord, indikerer dette lav grad av kongruens på samtlige tre spørsmål.

Det jeg foreslår her anser jeg som et første steg i retning av et analyseredskap for å beskrive graden av kongruens mellom to representasjoner. Det vil kreve utprøving i videre studier for å undersøke anvendeligheten og nytteverdien av disse spørsmålene. Det vil være interessant å se i hvilken grad disse spørsmålene fanger essensen i kongruensbegrepet på en slik måte at det kan hjelpe oss å forstå hva som skiller ulike konverteringsprosesser.

7.4 Egne refleksjoner

Masterprosjektet har ført til at jeg har måttet jobbe med teorien om representasjoner, og særlig arbeidet til Duval. Den analysen av matematikklæring han presenterer i sitt arbeid har vært interessant å bli kjent med, samtidig som det har vært krevende. Likevel opplever jeg at arbeidet med teorien har beriket mitt syn på matematikkfaget, og det har farget min undervisning i perioden. Undervisningsdesignet ønsker jeg å fortsette og bruke også i andre emner, da jeg synes det skaper en interessant mulighet for å diskutere ulike konverteringsstrategier, samtidig som det likestiller representasjoner på en fin måte. Jeg opplever selv at masteroppgaven belyser noen interessante sider ved elevers arbeid med representasjoner, og jeg synes spesielt tematikken rundt kongruensbegrepet er interessant.

Dersom jeg skulle gjort noe annerledes, ville jeg forsøkt å få tid til mer enn én gjennomføring. Slik jeg ser det, ville det styrke oppgaven dersom det hadde blitt gjennomført minst én gang til i en annen klasse, eventuelt med revidering av rekkefølge på representasjonene. Dette ville gitt eventuelle funn mer tyngde. I tillegg ville jeg gjort videoopptak i stedet for lyd-opptak. Det er mulig at video ville kunne avsløre flere interessante karakteristikker ved oppgaven, da elevene sannsynligvis også peker på ulike deler av representasjonene underveis i arbeidet. Kanskje ville dette tilført analysene en interessant dimensjon. Min egen rolle i aktiviteten kunne også vært mer gjennomtenkt. Jeg fungerte som klasseleder for hele klassen under opptakene. Kanskje kunne det vært en idé å organisere meg slik at jeg kunne være mer til stede hos de to gruppene, og i større grad stilt utdypende spørsmål. Da ville det tatt mer form som et gruppeintervju, noe som kanskje ville gitt mer detaljer rundt arbeidet. På den annen side ville dette også påvirket arbeidet til elevene, og karakteristikken ville ikke på samme måte kunne være beskrivende for elevenes arbeid i en vanlig undervisningstime med et slikt undervisningsdesign. I alt er jeg fornøyd med de aspektene jeg har fått trukket frem, og så er det mulig å gå mer i dybden på hver enkelt av disse sidene ved aktiviteten i senere prosjekter.

De neste gangene jeg gjennomfører et slikt undervisningsopplegg vil jeg være mer bevisst på det som er kommet frem gjennom dette prosjektet, og det blir spennende å se om det kan ha innvirkning på læringsutbyttet til elevene.

Litteratur

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. *International journal of science and mathematics education, 15*(5), 915-938.

Adu-Gyamfi, K., Lynch-Davis, K., & Bosse, M. J. (2019). Three types of mathematical representational translations: Comparing empirical and theoretical results. *School science and mathematics, 119*(7), 396-404. doi:10.1111/ssm.12360

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the Effects of Different Multiple Representational Systems in Learning Primary Mathematics. *The Journal of the learning sciences, 11*(1), 25-61. doi:10.1207/S15327809JLS1101_2

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 5*(1), 7-31.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113-133.

Bryman, A. (2021). *Social Research Methods 6E*: Oxford University Press.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 208-233): National Council of Teachers of Mathematics.

de Freitas, E., Lerman, S., & Parks, A. N. (2017). Qualitative Methods. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 159-182): National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1/2), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*: Springer.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657. doi:10.1080/0144341042000262953

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning, 397*.

Grevholm, B. (1998). Teacher students' development of concepts in mathematics and mathematics education. *Theory into practices in Mathematics Education. Proceedings of Norma, 98*, 139-146.

Hansson, Ö. (2003). En studie i lärarstuderandes begreppsuppfattning:" Vi skriver y= x+ 5. Vad betyder det?". *Tsunami*(1).

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of mathematical behavior, 17*(1), 123-134. doi:10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (C. Janvier Ed.): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of educational research, 60*(1), 1. doi:10.2307/1170224

Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics and mathematics education. *Educational studies in mathematics, 20*(2), 211-223.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2015). Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education - epirical examination of a competence structure model. *International journal of science and mathematics education*, *13*(3), 657-682. doi:10.1007/s10763-013-9496-7

Persson, P.-E. (2013). Understanding relations between variables: Revisiting a 'node'in the development of algebraic thinking.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. C. (2018). Delta 2.0: Fagdidaktik 1-10 klasse. In: Samfundslitteratur.

Swan, M. (2008). A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1*(1).

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn*. (MAT01-05). Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Wellington, J. (2015). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches*: Bloomsbury Publishing.

Vedlegg 1 – Oppgavekortene

V1 Epler kjøpes til 24 kr pr. kilogram. Prisen (y) avhenger av antall kilo (x) man kjøper.	V2 En bil har 24 liter bensin i tanken. Når den kjører, bruker den en halv liter bensin per mil. Hvor mye bensin det er igjen på tanken (y) avhenger av hvor mange mil bilen har kjørt (x).
V3 Lille Synnøve får pante en pose med små tomflasker. Hun får da 2 kroner pr flaske. I bukselommen har hun allerede 5 kroner. Hvor mye penger hun har etter å ha pantet (y) er avhengig av hvor mange flasker det er i posen (x).	V4
V5 Det er kjøpt inn tre pizzaer med til sammen 24 pizzastykker til en fest. Hvor mange pizzastykker det blir per person (y) avhenger av hvor mange gjester som kommer (x).	V6 Arealet (y) til et kvadrat er avhengig av sidelengden (x).
V7 Sidelengden (y) i et kvadrat avhenger av arealet (x).	

U1 $y = 24x$	U2a $y = -0{,}5x + 24$
U3	U2b $y = 24 - \frac{x}{2}$
U4 $y = 5x + 2$	U5a $y = \frac{24}{x}$
U6 $y = x^2$	U5b $y = 3 \cdot \frac{8}{x}$
U7 $y = \sqrt{x}$	

T1

x	1	2	3	4
y		48	72	96

T2

x	5	10	15	20
y		19	16,5	14

T3

x	2	4	6	8
y	9		17	

T4

x	2	4	6	8
y	12	22		42

T5a

x	1	2	3	4
y		12	8	6

T5b

x	6	7	8	9
y	4		3	2,67

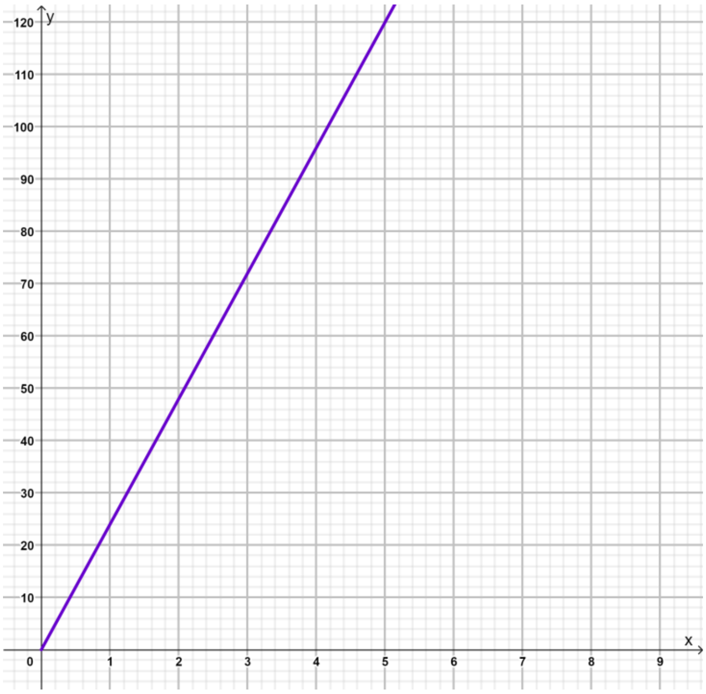
T6

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

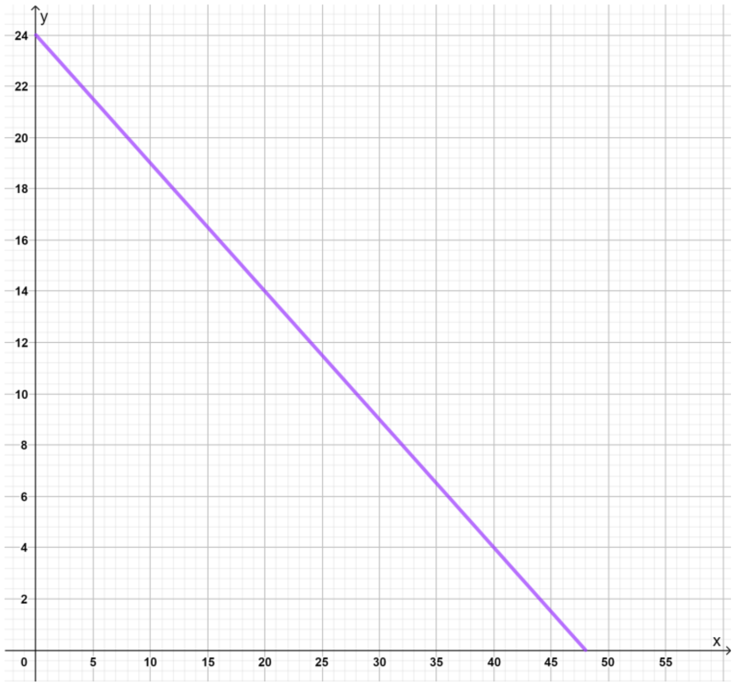
T7

x	1	2	3	4
y	1		1,73	2

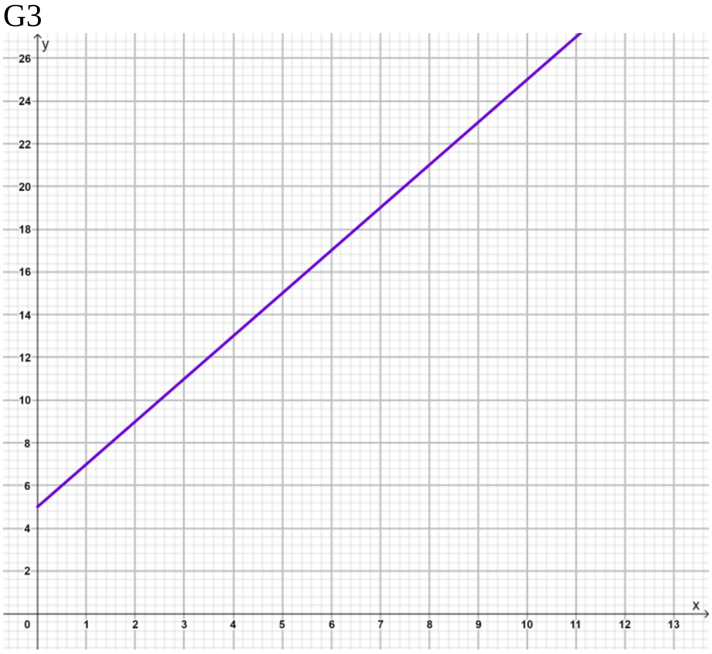
G1


y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120

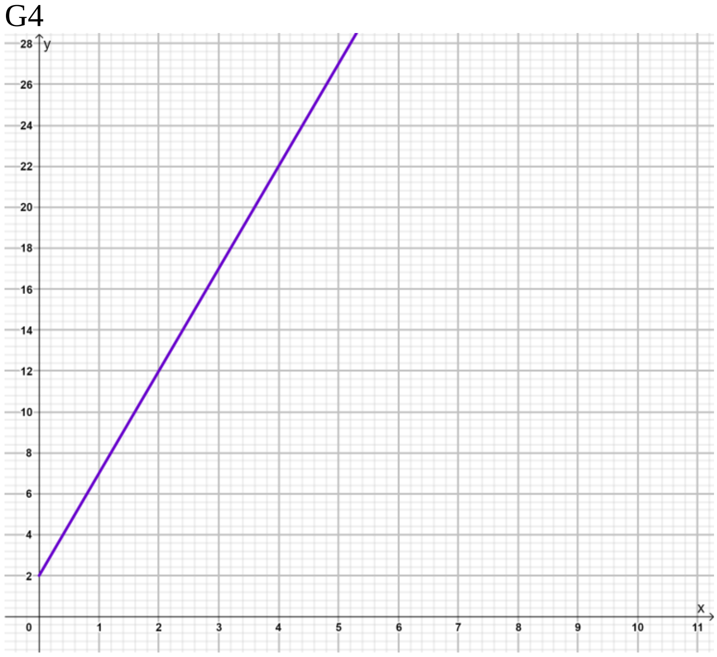
G2


y
x
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

G3


y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26

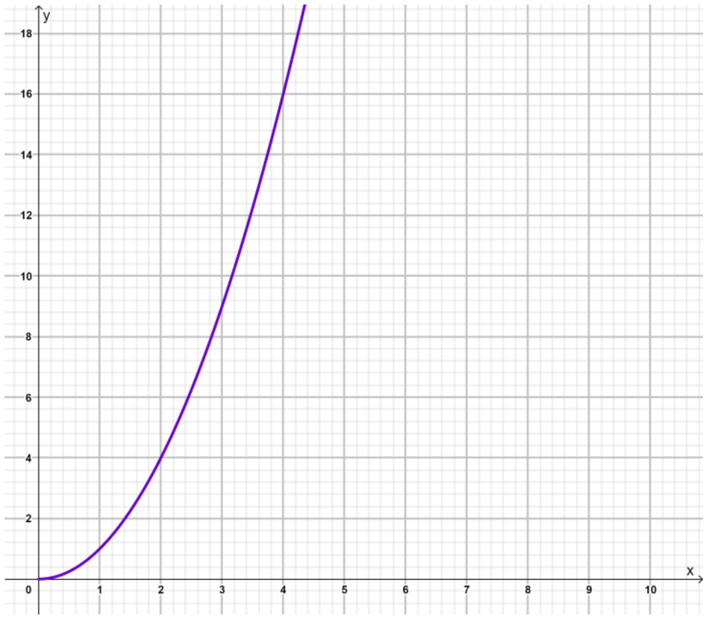
G4


y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28

G5


y
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

G6


y
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

G7


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

Vedlegg 2 – Godkjenning fra NSD

Meldeskjema / Masteroppgave Matematikkdidaktikk - Overganger mellom representasjoner av funksjoner / Vurdering

Vurdering

Referansenummer
300579

Prosjekttittel
Masteroppgave Matematikkdidaktikk - Overganger mellom representasjoner av funksjoner

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektperiode
22.09.2021 - 22.09.2022

Meldeskjema

Dato	**Type**
27.10.2021	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 27.10.2021 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 22.09.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Olav Rosness, rådgiver.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3 – Informasjonsbrev

Vil du delta i forskningsprosjektet *Oppgavedesign for målrettet arbeid med overganger mellom representasjoner av funksjoner*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å studere elevers arbeid med en spesifikk oppgavetype designet med hensikten å skape forståelse for ulike representasjoner av funksjoner i matematikk. I dette skrivet får du informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Dette forskningsprosjektet har som formål å undersøke hva som karakteriserer elevers arbeid med en konkret oppgavetype designet for å utvikle forståelse for det matematiske emnet i fokus: *funksjoner*. En funksjon i matematikken kan beskrives på ulike måter; med ord, som en graf, som verdier i en tabell eller ved et algebraisk uttrykk. Det finnes teorier som hevder at nøkkelen til gode ferdigheter og forståelse av konseptet *funksjoner*, er å fleksibelt kunne oversette mellom disse ulike måtene å beskrive en funksjon på – funksjonens *representasjonsformer*. Spørsmålet i dette forskningsprosjektet er om den aktuelle oppgavetypen kan sies å stimulere til utvikling av en slik kompetanse hos elevene.

For å gjennomføre dette vil det bli gjort opptak av samtalen mellom elever i grupper når de arbeider med oppgaven i en matematikktime. Oppgaven går i korte trekk ut på at elevene får utdelt ferdige kort med grafer, tabeller, algebraiske uttrykk og tekst. Elevenes oppgave er å identifisere hvilke kort som beskriver samme funksjon, gruppere disse, og begrunne hvorfor.

Elever som ikke deltar i studien må også delta i undervisningen, men elevene blir plassert i grupper, slik at kun grupper av elever som har akseptert å bli med i studien vil bli gjort opptak av. Resten av klassen vil ikke bli registrert på opptaket, og er derfor ikke en del av datagrunnlaget i studien. Det er også slik at ikke alle elevene nødvendigvis blir gjort opptak av, selv om du sier ja til å delta.

Dette er et masterstudium i matematikkdidaktikk som skal avsluttes i juni 2022

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Agder, med veileder Hans Kristian Nilsen er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du er elev i min matematikk-klasse, og det er derfor naturlig at jeg forsker på deres arbeid og kommunikasjon.

Hva innebærer det for deg å delta?

For deg innebærer deltagelse i denne studien at du bidrar med informasjon til mitt forskningsprosjekt om oppgavedesign i matematikk. Ved å svare ja gir du meg tillatelse til å ta opp din samtale med andre klassekamerater mens dere løser en matematikkoppgave.

Du skal gjøre det samme som alle andre i denne timen, uavhengig om du svarer ja eller nei til å delta i prosjektet, og alle elevene skal være i klasserommet. Det vil være en mikrofon på pulten din om du blir tatt opptak av, ellers vil timen være akkurat som andre mattetimer du er vant med.

Deltakelse i prosjektet innebærer altså *ikke* at du skal gjøre noe spesielt annet enn å delta i matematikktimen akkurat som vanlig. Det er også slik at ingenting av det du gjør i disse timene vil brukes for å vurdere din kompetanse i matematikkfaget, og det har derfor ikke noe med din fremtidige karakter i matematikk å gjøre.

Opptakene av samtalene deres brukes kun for at å undersøke hvordan elever arbeider med en slik oppgavetype, for å kunne si noe om hvilket læringsutbytte oppgaven kan tenkes å gi. Samtalen blir tatt opp og transkribert til tekst av meg. Hvis noen av det du sier i den samtalen blir brukt i tekstform i selve prosjektoppgaven, vil det være anonymisert til kjønn og alder (jente 14, gutt 15), eller ved bruk av pseudonym (falskt navn).

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine data vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dersom du ønsker å trekke tilbake samtykket kan du ganske enkelt si det til meg på skolen, eller du eller foresatte kan sende meg en e-post.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Opplysningene behandles konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun jeg, Roar Storegraven, som vil ha tilgang til opptakene.
- Etter at opptakene er tatt vil jeg transkribere og anonymisere opptakene. Opptakene vil beholdes inntil prosjektet avsluttes våren 2022.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent. Opptakene vil bli slettet innen september 2022. Grunnen til at opptakene blir beholdt til dette tidspunktet er muligheten for å gå tilbake til opptakene så lenge prosjektet varer, samt å ha dem tilgjengelig skulle oppgaven ikke bli godkjent og det blir nødvendig å gjøre endringer i løpet av sommeren 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitet i Agder* har NSD – Norsk Senter for Forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved veileder Hans Kristian Nilsen, eller meg selv, Roar Storegraven, Kannik Skole.

Kontaktopplysninger til UiAs personvernombud

- Ina Danielsen, personvernombud UIA: ina.danielsen@uia.no +47 452 54 401

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Student
Roar Storegraven
roar.storegraven@stavangerskolen.no

Samtykkeerklæring

På vegne av mitt barn har jeg mottatt og forstått informasjon om prosjektet og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at mitt barn deltar i lydopptak av samtale med medelever i maksimum to matematikktimer.

På vegne av (sett inn ditt barns fornavn og etternavn) ________________________________

samtykker jeg at opplysninger om barnet behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatt til prosjektdeltaker, dato)