Innføring av algebraisk notasjon

Et undervisningseksperiment der elever på 8.trinn blir introdusert for bokstaver som variabler gjennom en funksjonstilnærming til algebra.

MATTHIAS SOLGAARD HØYE

VEILEDERE
Jorunn Reinhardtsen og David Alexander Reid

Universitetet i Agder, 2022
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en spennende og lærerik videreutdannelse som lærerspesialist i matematikk. Det har vært et studieløp som har påvirket meg som lærer og som person. Jeg har fått nye innsikter og tanker om matematikkundervisning, møtt nye kunnskapsrike mennesker og utfordret min egen og kollegaers praksis, i prosessen.

Denne masterforskningen er gjennomført ved siden av full jobb som lærer, noe som har vært både givende og utfordrende. På den ene siden har det gitt meg mulighet til å teste ut nye ting underveis i prosessen, i mitt eget klasserom, og på den måten stadig oppdage nye interessante tanker om undervisning som jeg tar med meg videre. Det har også gjort at jeg har hatt mulighet til å adoptere elementer av andre medstudenters forskning til eget klasserom, når passende emner har blitt jobbet med. På den måten har prosessen med å jobbe og skrive masteroppgave bidratt til å utvikle meg som lærer. På den andre siden har kombinasjon full jobb, masteroppgave, to små barn på ett og tre år og en kone som også tar videreutdannelse, krevd god planlegging og kostet noen kvelder med hygge. For å sitere Lars Monsen fra en av hans lange, men inspirerende, reiser: «*Det skjer no' hele tida*, *vettu!*». Uten en støttende og tålmodig kone ved min side ville nok denne kabalen vært vanskelig å legge, og reisen vært vanskelig å gjennomføre.

Jeg vil også takke mine studiekamerater som har bidratt med gode samtaler og hjulpet med å roe stressnivået de gangene det har stått på som verst. Å begi seg ut på en masteroppgave var enda mer omfattende og krevende enn jeg hadde sett for meg, og det har kokt litt til tider. I prosessen med å utvikle denne oppgaven har jeg også fått veldig god hjelp og støtte fra mine to veiledere. Kloke råd og god innsikt har fått meg til å løfte blikket og oppdage ting som jeg ikke har vært i stand til å se på egenhånd. Deres veiledning har på så måte vært uvurderlig i min prosess.

Det har vært et lærerikt og spennende studieår, som nå er ved veis ende.

Matthias Solgaard Høye
Fredrikstad, Mai 2022.

Sammendrag

Denne masterforskningen er en kvalitativ studie av åttende-trinn elevers uttrykte forståelse for bokstaver som variabler. Forskningen dreier seg om å benytte funksjoner som tilnærming til algebra, gjennom et undervisningseksperiment, der elevene møter virkelighetsnære situasjoner og benytter sitt daglige språk for å bli kjent med variable størrelser. Elevene jobber med å representere situasjonene som funksjonsuttrykk med ord, tabeller og grafer, både analogt og digitalt, før de introduseres for bokstaver i formelle funksjonsuttrykk av typen y=ax+b.

Hensikten med oppbyggingen av undervisningseksperimentet har vært å ivareta prinsipper om at det naturlige språket har en viktig rolle i innlæringen av algebra, for at elevene skal skape en mening av konsepter før de blir eksponert for en ny og fremmed syntaks. Tradisjonelt starter ofte arbeidet med algebra i skolen med å introdusere bokstaver og forsøke å forklare betydningen av disse for elevene, samtidig som de lærer seg å operere på dem. Jeg har derfor vært interessert i å undersøke elevenes uttrykte forståelse for bokstaver om de heller lærer seg konseptet om lineære funksjoner og variable størrelser først, for så å bli eksponert for- og forsøke å adoptere bokstaver til dette arbeidet. Forskningen spisses inn på en strategisk forskningstime der elevene møter et formelt funksjonsuttrykk med bokstaver for første gang. I denne strategiske forskningstimen deltar seks elever i arbeidet med en gruppeoppgave om å spare til mopedsertifikat og skal forsøke å adoptere bokstavene til deres forståelse av variabler i funksjonsuttrykk. De seks elevene er videre intervjuet individuelt, der de har blitt eksponert for en oppgave om badetemperatur. I denne prosessen har jeg analysert elevenes arbeid og uttalelser opp mot teori om konverteringer mellom ulike representasjoner av et matematisk objekt. Jeg har sett på elevenes arbeid med konverteringer og deres uttalelser knyttet til bokstavenes betydning, og ut i fra det forsøkt å analysere og si noe om deres uttrykte forståelse for bokstaver som variabler i lineære funksjoner, opp mot et begrepsapparat om en operasjonell og strukturell forståelse (Sfard, 1991).

Ut ifra resultatene i denne forskningen mener jeg det foreligger en klar indikasjon om at utvalgte elever i denne konteksten uttrykker en forståelse for de variable størrelsene i lineære funksjoner, med begreper som avhengig- og uavhengig variabel, og høy grad av selvtillit knyttet til å omtale variable størrelser med sitt dagligdagse språk. Fire av seks elever uttrykker seg også på en overbevisende måte når de omtaler bokstavene som variabler, selv etter ett første møte med bokstaver. Implikasjonene for matematikkundervisning kan dermed sies å være at en funksjonstilnærming, der dagligspråket og reelle situasjoner fra virkeligheten er fremtredende, kan bidra til å gi elevene en strukturell forståelse for variabelkonseptet og lette overgangen til formell algebraisk notasjon. Det oppfordres samtidig til forskning i større skala på denne tilnærmingen.

Summary

This master thesis is a qualitative study of students in eight grade (thirteen years old) expressed understanding of letters as variables. The research builds on using a functional approach to algebra and is designed as a teaching experiment where the students meet situations that are relatable from their lives and where they use their natural language to get acquainted with variable sizes. The students work with representing situations as functional expressions with a natural language, as tables and as graphs, both analogue and digital (GeoGebra), before being introduced to letters in functional expressions with a formula of the type y=ax+b.

The teaching experiment is designed to include principals concerning the natural languages' important role in learning algebra, so that the students are given the opportunity to build an understanding for concepts before being exposed to a new syntax. Traditionally, algebra in school is introduced by starting with letters and explaining their meaning synchronously as learning to operate on them. I have therefore been interested in studying the students understanding of letters if they are first introduced to the concepts of linear functions and variables with their natural language, before being introduced to letters, and rather adopting these letters to their understanding. This research is focused around a strategic research lesson where the students meet letters in a functional formula for the first time. Six students participated in the strategic research lesson where they worked as a group on a task about saving money for a moped license. The six students were later interviewed individually where they worked on a task about water temperatures at a local swim-place. In this process I have analyzed the students work and their expressions, with theory about conversions of representations of a mathematical object. I have looked at the students' abilities to preform conversions and their expressed understanding of variables in linear functions to try and say something about a structural understanding of the variables, and their ability to adopt the use of letters as variables to this understanding.

The results in this study give a clear indication that the participating students in this context show an understanding of variable sizes in linear functions with expressions such as dependent and independent variables, and with great confidence connected to talking about variable sizes with their natural language. Four out of the six students address the letters as variables and connect them to their understanding, with high degree of confidence, after just one meeting with letters as variables. The implications for teaching mathematics can therefore be that a functional approach to algebra, with focus on the use of realistic situations and the student's natural language, could contribute to giving students a structural understanding of variables and ease the introduction of formal algebraic syntax. More comprehensive research is desired on the subject.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Etter innføring av ny læreplan (LK20) i norsk grunnskole har matematikkfaget gjennomgått flere store endringer, blant annet i form av at kompetansemål i faget er lagt opp etter trinn. Utdanningsdirektoratet [UDIR] begrunner denne endringen med at det legger til rette for at elevene skal få færre kompetanseområder å fokusere på per trinn, og dermed kunne få tid til å oppnå dybdelæring (Kunnskapsdepertementet, 2020b). Dybdelæring definerer UDIR som det å *«gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder»* (Kunnskapsdepertementet, 2020a). Seks av de elleve kompetansemålene som er satt opp på 8.trinn inneholder begreper som algebra, variabler, likninger eller funksjoner og det er dermed tydelig at det legges opp til dybdelæring innenfor algebra dette første året på ungdomsskolen.

Å legge opp til dybdelæring innenfor algebra på 8.trinn har mottatt blandede reaksjoner blant lærere i min omgangskrets. Flertallet av mine kolleger på egen-, og andre nærliggende ungdomsskoler i distriktet, har uttrykt en bekymring knyttet til elevenes modenhet og evne til å oppnå dybdelæring om algebra allerede på 8.trinn. Grønmo (2018) peker også på lignende bekymringer fra norske matematikklærere, generelt. Grønmo trekker frem hvordan norske matematikklærere tradisjonelt sett har organisert undervisning, innenfor LK06, med å plassere emnet algebra sent i undervisningsløpet på ungdomsskolen, da tidligere læreplan ga rom for å plassere emner fritt innenfor 8.- til 10.trinn (Grønmo, 2018). Grønmo trekker frem utsagn knyttet til at algebra oppfattes som abstrakt, og derfor vanskelig å forstå for elever før de er modne for det, som mye av grunnen til at norske lærere tradisjonelt sett har utsatt arbeid med algebra så lenge som mulig.

Som lærer på ungdomstrinnet, med snart ti års erfaring, kan jeg forstå noe av skepsisen mange av disse lærerne uttrykker. Samtidig føles det fornuftig å reflektere litt rundt om situasjonen er mer sammensatt enn bare at elevene er umodne. Faktorer som hvordan man definerer algebra, hvilken kompetanse læreren besitter om algebra og hvilken tilnærming man benytter med elevene i møte med algebra, kan også være med å påvirke inntrykket vi sitter med knyttet til elevenes ferdigheter.

I denne forskningen vil jeg ikke kunne gå i dybden og undersøke alle potensielle årsaker til lærernes nevnte skepsis, men jeg vil forsøke å utfordre min egen undervisningspraksis og legge opp til en undervisningsperiode der jeg gradvis presenterer elevene for algebraisk notasjon, gjennom å benytte funksjoner som tilnærming til algebra, med støtte av noen prinsipper og tanker fra en modelleringstilnærming. En slik tilnærming til algebra skiller seg nokså kraftig ut i forhold til en mer tradisjonell tilnærming, som man kan kjenne igjen i de fleste læreverk, der arbeid med å forkorte uttrykk og sette inn verdier for bokstaver (ofte referert til som algebra-kapittel) introduseres først, ofte etterfulgt av funksjonslære. Norske skoler har tradisjonelt sett vært preget av undervisning lagt opp etter lærebøker, og dermed også en slik rekkefølge på inngangen til algebra (Grønmo, Borge & Onstad, 2013).

Elevers arbeid med bokstaver i matematikken, og da spesielt deres problemer med å forholde seg til bokstaver som variabler, har blant annet Küchemann (1978) og Usiskin (1988) trukket frem som noe mange elever strever med. Kieran, Boileau og Garancon (1996) har i ettertid presentert resultater de mener tydeliggjør at elevers vanskeligheter knyttet til bokstaver, og spesielt variabler, kan reduseres ved å benytte en funksjonstilnærming til algebra. Elevene i deres forskning behandlet først bokstaver som variabler, for så å innføre situasjoner med bokstaver som ukjente, noe som viste seg å by på vesentlig mindre kognitive hinder enn en mer tradisjonell tilnærming i motsatt rekkefølge (Kieran et al., 1996). Både Kieran et al. (1996) og Heid (1996) trekker frem funksjoners mage representasjonsformer som en styrker å bygge på for å gi elevene en helhetlig forståelse av variabelbegrepet. Carraher og Schliemann (2018) og Pinto (2021) står for spennende nyere forskning knyttet til en funksjonstilnærming til algebra, som bygger blant annet på fordelene knyttet til å bli fortrolig med å konvertere mellom ulike representasjonsformer av en funksjon. Forskningen deres er gjennomført på elever på barneskolen, men tatt i betraktning lite presisering og fokus på algebra i læreplan på norsk barneskoletrinn, oppleves det meget relevant å undersøke denne forskningen nærmere på 8.trinn, der algebra for alvor gjør sitt inntog i norsk læreplan.

Jeg vil i min forskning være interessert i å undersøke elevenes forståelse for variabelbegrepet og deres evne til å forstå bokstaver som variabler, etter å ha gjennomført et designet undervisningseksperiment bygget på prinsipper om en funksjoner og modellering som tilnærming til algebra. Undervisningseksperimentet er designet med en varighet på åtte uker (vedlegg 2) der elevene i første fase skal jobbe med kjente situasjoner fra virkeligheten og benytte algebraisk tenking (Radford, 2010) til å utforme funksjonsuttrykk med sitt daglige språk. Disse funksjonsuttrykkene vil så danne grunnlaget for begrepsinnlæring av begreper som avhengig- og uavhengig variabel, stigningstall, konstantledd, definisjonsområde og verdimengde. Deretter vil elevene, i andre fase av eksperimentet, øve seg på å kunne representere funksjonsuttrykkene sine som tabeller og grafer, både for hånd og ved hjelp av dynamisk geometriprogram. Deretter innledes undervisningseksperimentets tredje og siste fase; introduksjon og arbeid med funksjonsuttrykk av formen y=ax+b.

I den første økten i denne siste fasen av undervisningseksperimentet vil jeg spisse min forskning, og samle inn data, gjennom en strategisk forskningstime der elevene blir eksponert for et formelt funksjonsuttrykk for første gang. Elevene vil ikke arbeide med formell algebraisk notasjon før den oppgaven, og jeg vil dermed være interessert i å undersøke elevenes evne til å forstå bokstavene opp mot variabelbegrepet som er jobbet med tidligere i undervisningseksperimentet.

1.1 Problemstilling

Hvilken forståelse uttrykker elever på 8.trinn om bokstaver som variabler i funksjonsuttrykk, etter et første møte med formell algebraisk notasjon, i et undervisningseksperiment der funksjoner er benyttet som tilnærming til algebra?

I denne forskningen har jeg benyttet en kvalitativ tilnærming, i form av en kasusstudie, med observasjon av en strategisk forskningstime og intervju med deltakerne, som metode for å undersøke min problemstilling. Jeg har gjennomført forskningen i mine egne klasser og har dermed arbeidet i en todelt rolle som både lærer og forsker.

2.0 Teori

I dette kapittelet vil jeg først presentere hva jeg legger i begrepene algebra og algebraisk tenking, og ut i fra dette presentere min forståelse av begrepene variabel og formell algebraisk notasjon. Jeg vil så presentere ulike måter å tilnærme seg algebra på, for å plassere funksjonstilnærmingen i en sammenheng med andre tilnærminger. Deretter vil jeg presentere teori om overganger mellom ulike representasjonsformer og hvordan dette kan henge sammen med læring og forståelse av variabler. Jeg vil også se nærmere på hva som menes med mestringsforventninger, da begrepet er med på å legge til rette for å kunne undersøke min problemstilling detaljert og muligens si noe om et videre arbeid med algebraisk notasjon i andre sammenhenger, etter endt undervisningseksperiment.

2.1 Hva er algebra?

Når det diskuteres om elevene er i stand til å håndtere et spekter av algebraiske regneregler og ha en forståelse for hva de driver med, har det først og fremst verdi å definere hva som legges i begrepet algebra.
Met et raskt søk i Det Store Norske Leksikon [SNL] får man en historisk gjennomgang av algebraens opprinnelse, fra de første historiske tegnene av algebra, og frem til i dag. Mye av algebraens historie er preget av arbeid som ikke inneholder et symbolspråk, og dreier seg mer om å uttrykke generelle sammenhenger eller utvikle metoder for å løse ulike problem. Algebraen har utviklet seg fra ulike deler av verden, og med hovedvekt på ulike matematiske kunnskapsområder, på veien mot å bli det vi betegner som algebra i dag, preget av symboler og bokstaver (Aubert, 2009). Den formelle algebraiske notasjonsformen slik vi kjenner den, der vi ofte bruker de første bokstavene i alfabetet for kjente størrelser (a, b, c) og de siste bokstavene for ukjente størrelser (x, y, z) ble innført først av René Descartes, men er altså bare en videreføring av allerede etablerte ideer om å bruke bokstaver eller symboler for å representere mengder (Aubert, 2009). Carraher og Schliemann (2018) oppsummerer algebraens historie i tre ulike faser; den retoriske-, synoptiske- og den symbolske fasen. Algebra beskrives som et verktøy som har eksistert lenge før formell algebraisk notasjon ble innført, der det naturlige språket, muligens støttet av enkle diagrammer, var grunnlaget for generalisering i matematikken (Carraher & Schliemann, 2018).

Et slikt historisk blikk på algebraen kan være nyttig for å forstå og anerkjenne at algebra er mer sammensatt enn å arbeide med teknikker for å manipulere uttrykk med bokstaver som *a,b,n* eller løse likninger med *x* og *y*. Det er samtidig viktig å belyse at bokstaver utvilsomt har tilført matematikken og naturvitenskapen en viktig dimensjon i form av å kunne bevise, generalisere og oppdage fenomener på en kortfattet og presis måte, og samtidig gjort det mulig å utføre manipulasjon av uttrykk og sammenhenger som ville vanskeliggjøres uten.

For elever kan nok bruk av formell algebraisk notasjon oppleves som intuitivt i noen sammenhenger, men med lite substans og mening i andre. Dette henger nok nøye sammen med bokstavenes mange ulike roller i matematikken; der bokstaver kan opptre som blant annet en ukjent verdi, variabler, parametere, forkortelser og plassholdere, for å nevne noe (Usiskin, 1988). Usiskin definerer begrepet "*variables*" som en samlebetegnelse brukt på engelsk for å omtale bruk av bokstaver i matematikken. På norsk benyttes ofte tilsvarende samlebetegnelse i form av ordet variabler. Usiskin beskriver at betegnelsen *variables* er så innarbeidet i kulturen at det ofte brukes blindt for å omtale " a *symbol for an element of a replacement set*" (Usiskin, 1988, s. 8). Usiskin problematiserer en slik forenklet samlet forståelse av algebra og argumenterer for dette gjennom eksempler på hvordan symboler og bokstaver som benyttes i matematikken ikke alltid representerer en verdi som skal settes i dens plass. Usiskin nevner blant annet bruk av bokstaver i geometri for å definere eller navngi punkter, linjestykker og figurer, eller symboler som (*f*) for å symbolisere en funksjon, uten at disse algebraiske notasjonene (*variables*) er ment som plassholder for en verdi som skal erstatte symbolet.

For å kartlegge elevers bruk og forståelse av bokstaver i matematikken utviklet Küchemann (1978) en matematikktest som ble gjennomført på 3000 ungdomsskoleelever. Küchemanns kategorisering av hvordan elever oppfatter og benytter bokstaver, belyser Usiskin (1988) sin problematisering av samlebegrepet «variables» ytterligere. Küchemann fant i sin forskning ut at elever i all hovedsak benytter bokstaver på seks ulike måter, der det å behandle bokstaver som variabler viser seg å være det flest elever strever med i skolematematikken. Küchemanns forskning viser til at nærmest alle elever behersker å behandle oppgavetyper der bokstaven er vurdert kjent (*«letter evaluated»(1)*). Det samme gjelder oppgavetyper der bokstaven kan ses bort i fra for å løse oppgaven (*«letter ignored»(2)*). Mange elever behersket å behandle bokstaver som objekter, i oppgavetyper der det for eksempel skal forkorte uttrykk eller produseres uttrykk for omkrets av figurer med sidelengder gitt ved bokstaver (*«letter as object»(3)*). Flere elever viste derimot tydelige tegn til å streve med å behandle bokstaver som representerer ukjente verdier, som i likninger, eller bokstaver som representerer generelle tall, som i ulikheter (*«letter as spesific unknown»(4), «letter as generalized number»(5)*). I Küchemanns forskning viser majoriteten av elevene store problemer med å behandle bokstaver som variable størrelser (*«letter as variable»(6)*) (Küchemann, 1978, s. 23).

Når man først får et innblikk i-, og gjør seg noen refleksjoner rundt, bokstavenes mange ulike roller, blir det enkelt å sette seg inn i hvorfor mange elever strever med å forstå algebra i skolematematikken. Ikke bare skal de lære en ny syntaks, men de skal også utvikle en forståelse for hvorfor like bokstaver kan ha ulik betydning ut i fra konteksten de er plassert i. Ta for eksempel bokstaven x. Gitt konteksten x + 5 skal elevene kunne forstå at x her representerer en variabel størrelse. Altså at bokstaven x kan være absolutt alle verdier, som så adderes med 5. Ser man på en lignende situasjon, der man legger til = 7, får vi x + 5 = 7. Bokstaven x har altså endret sin mening fra å være en variabel til å bli en bestemt ukjent verdi. Den observasjonen i seg selv er ikke det som er krevende å forstå, men det faktum at når x representerer en variabel størrelse, skal elevene forstå hva det faktisk innebærer, og kunne si noe om hva det forteller oss om x. Det kreves altså vesentlig mer enn bare å si at x er 2, slik de kan i sammenhengen x + 5 = 7. Å jobbe med bokstaver som variabler for elevene, innebærer en overordnet metaforståelse av hva en variabel faktisk er, for at de skal kunne adoptere og anvende formell algebraisk notasjon på en selvstendig og selvsikker måte.

Usiskin (1988) trekker, i likhet med Küchemann (1978), frem elevers problem med å forstå bokstaver som variabler, og peker i den sammenheng på diskusjonen om funksjoner sin rolle i arbeidet med algebra i skolematematikken. Tradisjonelt presenteres dette som et relativt lite emne i startfasen av arbeid med algebra og får først en større rolle i senere år (Usiskin, 1988). Usiskin presenterer et synspunkt på hvordan funksjoner bør ha en vesentlig større rolle i arbeidet med å introdusere algebra i skolematematikken (Fey & Good, 1985 i Usiskin, 1988) nettopp for å legge til rette for å gi elevene en konseptforståelse av variabelbegrepet og se på avhengig og uavhengige variabler og hvordan de påvirker hverandre med sin kovarians. Her argumenteres det for om funksjoner muligens bør være *«the major vehical through which variables and algebra are introduced.»* (Usiskin, 1988, s. 8). Carraher og Schliemann (2018) beskriver hvordan begrepet funksjoner kan knyttes til nærmest alt innenfor aritmetikken og stiller seg derfor undrende til funksjoners stadig fraværende rolle i matematikkopplæringen som foregår i tidlig alder. I den nye læreplan, LK20, er ordet funksjon nevnt én gang i kompetansemålene fra første til syvende trinn.

2.2 Algebraisk tenking

Tradisjonelt sett behandles altså begrepet algebra sammen med bruk av bokstaver, og mest fokus knyttet til algebraundervisning i skolen har dermed naturlig også vært å jobbe med bokstavene. Radford (2010) utfordrer derimot dette snevre synet på algebra, i likhet med andre tidligere forskere som Kaput (2000) og Mason (1996). Radford referer til det historiske perspektivet på algebra og belyser det faktum at bokstavene faktisk ikke hadde en plass i matematikken tidligere, når han snakker om algebraisk tenking.

En grunntanke bak algebraisk tenking er å benytte sitt daglige språk, kroppsspråk, skisser og andre semiotiske uttrykksformer for å forklare og formidle sammenhenger, og at dette kan være vel så hensiktsmessig for læring, spesielt i en fase der elevene enda ikke er eksponert for, eller erfarne brukere av de formelle algebraiske notasjonene (Radford, 2010). Ved å fokusere på at elevene utvikler det Radford omtaler som algebraisk tenking i en tidlig alder kan man legge til rette for å trene opp elevene til å oppdage og uttrykke generelle matematiske sammenhenger ved hjelp av de semiotiske uttrykksformer tilgjengelig for dem, og på så måte å bli dyktige brukere av den formelle algebraiske syntaksen gradvis og på sikt, via en oversettelse og adopsjon til deres algebraiske tenking.

2.3 Ulike tilnærminger til algebra

I boken "*Approches to algebra: Perspectives for research and teaching"* presenteres ulike måter å tilnærme seg algebra på, når man underviser. I boken presenteres fire hovedretninger innenfor introduksjon av algebra; Generalisering-, problemløsing-, modellering-, og funksjoner som tilnærming til algebra (C. Kieran, Lee & Bednarz, 1996). Jeg har i denne masterforskningen valgt å forholde meg til denne bokens inndeling av tilnærminger og har basert mitt undervisningsekseperiment på deler av innholdet i modellering som tilnærming, men i en sammenheng med funksjoner. Jeg vil først kortfattet presentere hovedtankene i de to tilnærmingene generalisering og problemløsing, før jeg utdyper noe mer rundt modellering og funksjoner, som er de relevante tilnærmingene i denne forskningen. Grunnen til at jeg velger å presentere de to andre tilnærmingene er for å skape et sammenligningsgrunnlag og muligens forstå modellering og funksjoner som tilnærminger på en enda bedre måte.

2.3.1 Generalisering som tilnærming til algebra

Å benytte generalisering som tilnærming til algebra vil si at man fokuserer på å oppdage, og uttrykke, generelle sammenhenger i matematikken man jobber med, uansett emne. Mason (1996) presenterer tanken om at generalisering må forekomme i en undervisningstime for at det i det hele tatt skal kunne kalles matematikkundervisning (Mason, 1996). Tanken om å drive med generalisering, uansett emne, handler om at elevene ikke skal bli frarøvet muligheten til å oppdage sammenhenger i det de jobber med, og dermed gå glipp av muligheten til å utvikle en forståelse for hvorfor ting er som de er (Mason, 1996).

2.3.2 Problemløsing som tilnærming til algebra

Å benytte problemløsing som tilnærming til algebra henger sammen med et historisk blikk på algebraen, der algebra oppstod blant annet som et nyttig verktøy for å kunne løse kompliserte matematiske problem (Bednarz, 1996). Hensikten med å planlegge innføring av algebra med utgangspunkt i problemløsing er for å bygge på elevenes kunnskaper innenfor aritmetikken og deres evner til å løse problemer ved hjelp av tall, logikk og andre ikke-algebraiske løsningsmetoder (Bednarz, 1996). Ved å fokusere på å innføre algebra i en prosess der elevene jobber med problemløsing, er tanken altså at man kan gjøre innføringen av formell algebraisk notasjon meningsfull for elevene (Bednarz, 1996).

2.3.3 Modellering som tilnærming til algebra

Å arbeide med modellering omtaler Blum (2015) som evnen til å sortere, forenkle og formalisere et bilde av virkeligheten, med mål om å forklare (descriptive models) eller forsøke å forutse noe, og skape deler av en virkelighet, matematisk (normative models) (Blum, 2015). Modelleringsoppgaver i matematikken har altså en nær tilknytting til virkeligheten og skiller seg dermed noe fra problemløsingsoppgaver som ofte har lite virkelig substans og baserer seg mer på en narrativ som vi kan forstå ut i fra virkeligheten. Betraktninger og elementer, som vanligvis ses bort i fra når man arbeider med matematikk, skal tas inn i betraktning når man modellerer situasjoner som er hentet direkte fra virkeligheten, eller som er virkelighetsnære (Blum, 2015). Om man ser videre på sammenligningen mellom modellering og problemløsing, kan man si at ulikheten mellom disse to ofte dreier seg om at problemløsing har et fokus på den matematiske løsningen av problemet, mens en modelleringsoppgave fokuserer på at man skal oppdage og utarbeide et problem selv, og at den matematiske løsningen skal gi mening og kunne overføres til virkeligheten (Pollak, 2011). Pollak (2011) forklarer også hvordan modelleringsoppgaver krever at man hele tiden er i en prosess der man overveier matematiske funn opp mot virkeligheten, og motsatt, om informasjon man finner gir matematisk mening (Pollak, 2011). Argumentet for å benytte modellering som tilnærming til algebra er blant annet at modelleringsoppgaver har en såpass sterk referanse til virkeligheten, og at elevene er så involvert i prosessen med å utvikle det matematiske problemet, at situasjonen som jobbes med eies av elevene. På den måten kan innføring av algebra oppleves som meningsfullt og noe som gagner deres egen prosess (Blum, 2015). Denne prosessen tydeliggjør Lamon (1998) gjennom sin forskning der hun presenterer det hun kaller formuleringsfasen. Det fokuseres på å strukturere og skape et problem ut i fra en situasjon og stille opp og formulere dette problemet med ord og begreper elevene kjenner. Gjennom å gradvis hjelpe elevene med å oversette disse formuleringene til algebraisk notasjon kan man legge til rette for at elevene skal oppdage nytteverdien og styrken til det algebraiske språket.

Mye av tanken i mitt undervisningseksperiment er inspirert av tanken til Lamon (1998) om å bruke algebraisk tenking i en formuleringsfase, der elevene formulere varierende størrelser med egne ord, for så gradvis hjelpe elevene med å oversette dette til den formelle algebraiske notasjonsformen. I prosessen der det legges opp til at elevene bruker sitt daglige språk vektlegges også tanken om å innarbeide en begrepsforståelse knyttet til variable størrelser og andre begrep knyttet til funksjoner, men da med sammenheng til elevenes egne formuleringer med ord og situasjoner fra virkeligheten.

2.3.4 Funksjoner som tilnærming til algebra

En funksjon i matematikken kan defineres som forholdet mellom endrende størrelser der hver verdi av en uavhengig variabel gir en, og kun én, ny verdi av den avhengige variabelen. Det er altså snakk om variable størrelser som påvirker hverandre, og er i et konstant samspill.
Ved å benytte funksjoner som en tilnærming til algebra velger man dermed, innledningsvis, å forholde seg til algebra i form av variable størrelser. Heid (1996) trekker her frem tanken om å jobbe med avhengig og uavhengig variabler og forstå deres samspill, og poengterer samtidig det som mer nyttig enn kun å akseptere at en bokstav representerer én størrelse som varierer (Heid, 1996). En funksjonstilnærming vil altså legge opp til å behandle bokstaver som det Küchemann (1978) betegner som den algebraformen flest elever sliter med å beherske.

Heid (1996) trekker frem funksjoners representasjonsformer som en sentral begrunnelse for å benytte funksjoner som tilnærming til algebra. Ved at elevene kan representerer funksjoner ved hjelp av tabeller, grafer, situasjonsbeskrivelser og funksjonsuttrykk, og behersker å bevege seg mellom disse representasjonene, kan dette virke som en styrke i å utvikle en forståelse for de variable størrelsene. Carraher og Schliemann (2018) forklarer fordelen med ulike representasjonsformer gjennom å sammenlikne det med innlæring av aritmetikk i de første årene på barneskolen; der barn ofte er avhengig av å oppleve og oppdage mengder og situasjoner for å kunne akseptere og adoptere dette til tall og andre matematiske symboler. Ved å telle med fingre, jobbe med konkreter, oppleve situasjoner og erfare sammenhenger vil de også gradvis etablere en aksept for å utføre disse tingene rent symbolsk. Ved at elevene kan jobbe med ulike representasjonsformer av en funksjon, kan de dermed erfare og utforske betydningen av funksjonen på ulike måter og bli bedre rustet til å forstå konseptet av de variable størrelsenes samspill.

Ofte knyttes en funksjonstilnærming til algebra sammen med bruk av teknologi i undervisningen, da teknologiske hjelpemidler kan effektivisere arbeidet med å produsere ulike representasjonsformer, og bidra til at man raskere og mer effektivt kan studere endringer i funksjoner eller sammenligne sett av funksjoner. Kieran et al. (1996) trekker også frem hvordan elever raskt og effektivt kan teste ut ulike spesialtilfeller av en situasjon og se etter mønster i de ulike representasjonene, på en måte som ville vært vanskelig, tidkrevende og dermed lite hensiktsmessig uten bruk av digitale hjelpemidler. I dag har teknologiske hjelpemidler som er tilgjengelig i matematikken tatt store steg, og det virker å ha blitt innarbeidet over tid at funksjonslære i norske skoler henger nøye sammen med bruk av dynamiske geometriprogram, som for eksempel GeoGebra. GeoGebra legger til rette for å arbeide med funksjoner slik Kieran, Boileau og Garancon beskriver; for å utforske og studere endringer, teste spesialtilfeller og effektivisere prosessen med å skifte representasjonsformer.

I tillegg til at innføring av algebra gjennom en funksjonstilnærming knyttes til arbeid med representasjonsformer og bruk av teknologi, benyttes også ofte kjente situasjoner fra virkeligheten, som elevene kan relatere til, slik at innføringen av algebra skal oppleves meningsfullt for elevene (Carraher & Schliemann, 2018; Heid, 1996; Kieran et al., 1996; Pinto, 2021). Dette fokuset på å bruke situasjoner fra virkeligheten, eller virkelighetsnære situasjoner elevene kan kjenne igjen og forholde seg til, minner altså mye om en modelleringstilnærming til algebra. Hovedforskjellen her blir derimot at oppgaver som benyttes innenfor funksjonstilnærmingen vil være styrt mot å behandle problemet eller situasjonen innenfor domenet funksjoner, mens en modelleringstilnærming vil gjøre dette åpent for elevene.

Pinto (2021) sin forskning er en kvalitativ studie med fokus på elevers evne til å uttrykke sammenhenger mellom avhengig- og uavhengige variabler med fokus på å benytte ulike representasjonsformer for å oppnå dette. I forskningsarbeidet indikeres det at en funksjonstilnærming til algebra, som er fokusert på en slik måte, kan være svært gunstig for å gi elevene en rik forståelse av konseptet variabler. Med en slik tilnærming antyder Pinto også at dette kan bidra til å forenkle overgangen til det algebraiske symbolspråket for elevene, da hun sier; «*…representations used in daily activities (natural language and numerical) could act as a useful scaffold for more symbolic representations» (Pinto, 2021, s. 17).*»

Carraher og Schliemann (2018) sin forskning tar også utgangspunkt i å benytte funksjoner som tilnærming til algebra på et tidlig tidspunkt i skolegangen (3. til 7.klasse), men da med et litt annet fokus, rettet mye mot å se aritmetiske emner som funksjoner og bygge en forståelse for algebraisk tenking mer generelt og ikke bare hovedsakelig virkelighetsnære problemer, slik Pinto (2021) fokuserer mest på. Carraher og Schliemann har i tillegg fulgt sin forskningsgruppe i lengre tid og undersøkt sine elevers evne til å adoptere mer formell tradisjonell skole-algebra på et senere tidspunkt, og viser da til forskningsresultater som indikerer at en funksjonstilnærming til algebra fra tidlig alder kan legge til rette for å gi elevene et solid utgangspunkt for å lære mer abstrakt tradisjonell skole-algebra, slik Pinto også antyder. Forskningsresultatene deres viser en markant forskjell i mestring på deres elever, sammenlignet med en kontrollgruppe, når elevene går i åttende klasse (5 år etter forskningens start) og løser tradisjonelle algebraoppgaver knyttet til læreplan, blant annet likninger og grafiske oppgaver.

2.4 Funksjoner og ulike representasjoner

I elevenes arbeid med funksjoner kreves en evne til å kunne skifte mellom ulike representasjonsformer av en funksjon. Janvier (1987) presenterer fire ulike representasjonsformer av funksjoner, der hver representasjon har sine styrker eller kvaliteter knyttet til ulike situasjoner eller formål de brukes i. Man kan for eksempel si at et matematisk

funksjonsuttrykk mest sannsynlig ikke vil gi en leser av en avis en like god forståelse av en situasjon, som for eksempel en grafisk fremstilling av den samme situasjonen.
Janvier (1987) benytter begrepene a) situasjon, verbal fremstilling, b) tabell, c) graf og d) formel, for å forklare de fire representasjonsformene.

To / From	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading off		Curve fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

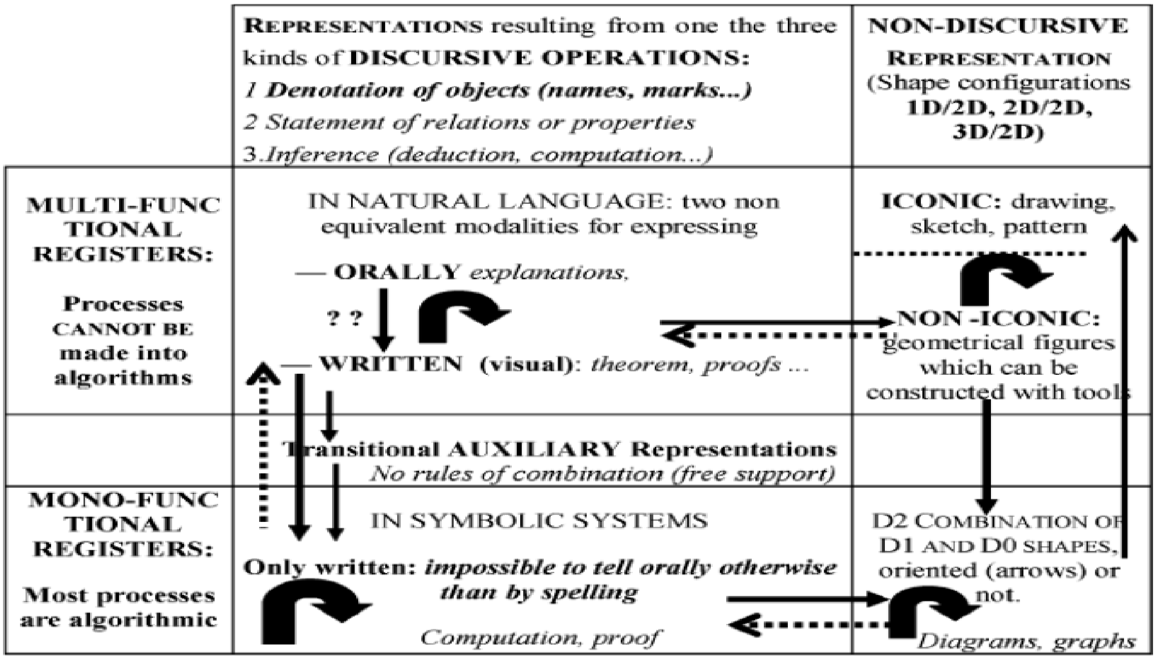
Figur 1*. Illustrasjon av overganger mellom ulike representasjoner fra (Janvier, 1987).*

Med verbal fremstilling menes en forklaring av funksjonen med dagligspråket, der sammenhengen mellom variablene kommer frem, men da uten å benytte formell algebraisk notasjon. Duval (1999) trekker frem det naturlige språket som essensielt for å bygge en forståelse og kognitiv kontroll av det matematiske objektet som skal læres, selv om andre matematiske representasjonsformer kan gi oss en mer teknisk utnyttelse av objektet.

Duval (2006) presenterer et mer generelt analyseverktøy (figur 2) for å studere og forstå elevers arbeid med å endre matematiske representasjonsformer. Denne tabellen kan man knytte til Janvier (1987) sine fire representasjonsformer av funksjoner (figur 1), for å få enda dypere forståelse av hvordan disse behandlingene og konverteringene kan oppleves og forstås. Duval bruker begrepet *behandle (treatments (Duval, 2006, s. 111))* for å snakke om endringer elevene gjør innenfor et register av representasjoner. Dette kan for eksempel være prosessen fra å snakke om og forstå en situasjon til en skriftliggjøring av sammenhengen med ord og dagligspråk. Da befinner man seg innenfor et register der man snakker om dagligspråk, men skifter representasjonsform fra muntlig tale til skriftlig fremstilling. Når dette så skal gjøres om til et en formel, vil man endre register og dermed gjennomføre en konvertering (*conversion (Duval, 2006, s. 111)*). Slike konverteringer oppleves ofte mer kompliserte for elever, sammenlignet med behandlinger innenfor samme register (Duval, 2006).

Duval deler inn matematiske objekt i 4 ulike representasjons-kategorier:

1. Multifunksjonelt-diskursivt register: dagligtale – både skriftlig og muntlig. Lite formelle representasjoner og lav grad av stringens.
2. Multifunksjonelt-nondiskursivt register: skisser, figurer, former. Ikke nøyaktig konstruerte geometriske figurer. Lav grad av stringens.
3. Monofunksjonelt-diskursivt register: formler og algoritmer. Formelt matematisk oppsett og høy grad av stringens.
4. Monofunksjonelt-nondiskursivt register: grafer, tabeller, diagrammer og presise geometriske figurer. Formelle matematiske regler og høy grad av stringens.



Figur 2. *Duval (2006) sin fremstilling av behandlinger og konteringer mellom register av representasjoner.*

De buede pilene i figur 2, symboliserer behandlinger innenfor samme register av representasjoner, heltrukne linjer viser til konverteringer mellom register, som elever ofte mestrer, mens stiplede linjer viser til konverteringer som ofte oppleves som vanskelig for elever. I denne forskningen vil det være spesielt interessant å se på konverteringer mellom monofunksjonelt-diskursivt register → multifunksjonelt-diskursivt register, det Janvier (1987) omtaler som formel → verbal fremstilling. Dette er en konvertering som Duval (2006) omtaler som problematisk for flere elever å gjennomføre, og en beherskelse av dette etter første møte med bokstaver i funksjonsuttrykk kan dermed gi en indikasjon på deres evne til å koble bokstaver i funksjonsuttrykk til en forståelse for variabler.

Anna Sfard poengterte at den eneste måten å få tilgang til et matematisk objekt, er via dens representasjoner (Sfard, 1991). Med dette menes at matematiske objekter ikke er fysiske ting, slik som ellers i verden, men altså bare fenomener som kan nås og forstås gjennom ulike representasjonsformer. For å forstå disse objektene poengterer Duval (1999, 2006) og Janvier (1987) samtidig at det er helt sentralt at elevene behersker å bevege seg begge veier i slike konverteringer av representasjoner. Om man som lærer kun fokuserer på en enveis-konvertering av representasjon risikerer man at elevene ender opp med en misforståelse og tro om at representasjonen de lærer å konvertere til er objekt i seg selv, ettersom de mister helhetsbildet av det egentlige matematiske objektet; i mitt tilfelle en funksjon. Duval (1999) argumenter for at mye av elevers misoppfattelser i matematikk stammer fra denne manglende forståelsen, og at mye skyldes at lærer ofte dedikerer for mye tid til de rent matematiske prosedyrene, fremfor å knytte innlæringen til dagligdagse, fysiske eller økonomiske problemer og på så måte bidra til å danne et helhetlige bilde av objektene som arbeides med (Duval, 1999).

Anna Sfard (1991) trekker også frem viktigheten med et samspill mellom å lære det hun omtaler som en operasjonelle forståelse (prosedyrer for å utføre bestemte operasjoner) og en strukturell forståelse (overordnet forståelse og visualisering av det matematiske objektet) (Sfard, 1991). Gjennom en prosess over tid mener Sfard at man i et samspill mellom en operasjonell- og strukturell forståelse vil gå gjennom en tredelt fase av matematisk forståelse; *interiorization*, *condensation* og *reification*, der det endelige målet med all læring er å oppnå reification (Sfard, 1991).

Interiorization beskriver Sfard som fasen der man blir kjent med det matematiske objektet gjennom ulike representasjonsformer, men enda ikke evner å se på det helhetlig som et objekt. Innenfor funksjoner kan det være evnen til å forstå at en funksjon inneholder variable størrelser og at man for eksempel har utviklet en forståelse for at man kan regne verdier av den avhengige variabelen ved å sette inn verdier for den uavhengige. Innenfor funksjoner er det også naturlig å forstå interiorization som prosessen knyttet til å lære og utvikle en operasjonell forståelse av behandlinger/konverteringer mellom ulike representasjonsformer.

Condensation forklarer Sfard som prosessen der elevene gradvis øver seg og blir mer flytende i sitt arbeid med det matematiske objektet, for eksempel ved at de ikke nødvendigvis behøver å gå i detalj for å utføre behandlinger og konverteringer av representasjonsformer. På den måten kan denne prosessen sees på som en modning mot at en operasjonell forståelse utvikler seg mot å bli en strukturell forståelse for det matematiske objektet.
Reification forklarer Sfard som skiftet fra å jobbe med matematikk til å ha etablert en forståelse for det matematiske som jobbes med som et objekt. Dette er på så måte et metakognitvt skifte. Man jobber ikke bare i mekaniske prosedyrer, men man innehar et overblikk som gjør at man kan skifte representasjonsformer og kjenne igjen det matematiske som et objekt. Når man har oppnådd reification på ett nivå kan en ny tredelt prosess starte slik at læringen kan utvides.

Sfard (1991) poengterer at man i matematikkopplæring ofte legger mest vekt på en operasjonell forståelse, før man bygger en strukturell forståelse, da man er avhengig av noen konkrete visualiseringer for å kunne se på helheten som et objekt. Samtidig presiserer hun at det bør være et konstant samspill mellom å gi elevene en operasjonell- og strukturell forståelse og at det å knytte matematikken til noe kjent kan bidra til at elevene oppnår en strukturell forståelse.

I den strategiske forskningsøkten i dette undervisningseksperimentet vil elevene ikke bli gitt noen operasjonelle øvelser for innlæring av bokstaver som variabler. De eksponeres for et funksjonsuttrykk med formell algebraisk notasjon, i en sammenheng med de tre andre representasjonsformene, og skal deretter prøve å forklare og anvende bokstavene ved hjelp av en strukturell forståelse. Elevene blir altså nødt til å knytte på sin etablerte forståelse for funksjoner og variabler for å forsøke å forklare og anvende bokstaver som variabler.

2.5 Rekursive og eksplisitte sammenhenger

I arbeidet med å analysere elevenes forståelse av variabler i tabell som representasjonsform for en funksjon vil det være veldig aktuelt å se etter uttrykte rekursive og eksplisitte sammenhenger. Med rekursive sammenhenger menes evnen til å se et mønster i form av hvordan verdien til en funksjon endrer seg i høyre kolonne, og at man basert på dette kan finne verdien til F(n+1) ut ifra verdien til F(n). Eksplisitte sammenhenger handler om å oppdage en sammenheng som gjelder for en hvilken som helst verdi av n, altså mellom verdiene i venstre kolonne og verdiene i høyre kolonne, der man ikke er avhengig av å vite den forrige (Lannin, Barker & Townsend, 2006). I analysen av elevenes arbeid med en tabell kan deres oppdagelser om rekursive sammenhenger i tabellen, altså «den øker med 2 for hver gang» direkte relateres til stigningstallet til funksjonen. Om elevene behersker å skifte til en eksplisitt sammenheng for å regne ut en hvilken som helst verdi av høyre kolonne i tabellen, uten å basere seg på en rekursiv sammenheng, kan dette indikere en evne til å forstå variablene på flere måter og dermed tegn til en strukturell forståelse av variablene. Det vil samtidig være interessant å se om elevene poengterer koblingen mellom den eksplisitte sammenhengen i tabellen og funksjonsuttrykket, gjennom at operasjonen for å regne ut hvilken som helst verdi n i tabellen tar utgangspunkt i formelen til funksjonsuttrykket. Om elevene er i stand til å se denne koblingen kan det indikere en evne til å utføre smidige konverteringer mellom disse representasjonsformene og også indikere en strukturell forståelse av variabler i lineære funksjoner.

2.6 Hvordan påvirkes læring av mestringsforventninger?

I denne forskningen vil jeg forsøke å si noe om elevenes forståelse og fortrolighet med å bruke variabler, i form av algebraisk notasjon. Hensikten med å kartlegge elevenes forståelse kan sees i sammenheng med mestringsforventninger knyttet til dybdelæring av algebra. Zimmerman (1995) benytter begrepet «self-efficacy» når det diskuteres elevers tro på egne ferdigheter knyttet til å løse ulike oppgaver (mestringstro). Zimmerman snakker om hvordan «self-efficacy» påvirker elevenes inngang til et faglig innhold de skal jobbe med, og dermed også læringsutbyttet de sitter igjen med (Zimmerman, 1995). Ettersom Zimmerman diskuterer «self-efficacy» som noe elevene innehar *før* et emne påbegynnes, synes jeg det på norsk er nærliggende å benytte begrepet mestringsforventninger, fremfor mestringstro. Videre i denne forskningen vil jeg dermed benytte begrepet mestringsforventninger, på norsk.

Zimmerman (1995) ser på begrepet mestringsforventninger i detalj og trekker frem mange ulike elementer som påvirker elevenes forventninger til mestring i skolearbeid. Dette er et sammensatt og komplekst felt, og noe man kunne dedikert en hel masterforskning alene til å undersøke, da faktorer som motivasjon, selvfølelse, tidligere erfaringer, sosiale spilleregler, selvtillit, relasjon til lærer (for å nevne noen) er sterkt knyttet til-, og har en innvirkning på mestring i skolearbeidet (Zimmerman, 1995). For å skille alle disse faktorene fra begrepet mestringsforventninger, vil jeg i denne forskningen forholde meg til følgende forklaring av «self-efficacy»:

> *"Self-efficacy is a context-related judgment of personal ability to organize and execute a course of action to attain designated levels of performance; whereas self-concept is a more general self-assessment that includes other self-reactions. Self-concepts do not focus on accomplishing a particular task but instead incorporate all forms of self-knowledge and self-evaluative feelings."* (English & English, 1958 i Zimmerman, 1995, s. 218).

Mestringsforventninger kan altså sees isolert sett som de forventningene man har knyttet til å oppnå noen innenfor et veldig bestemt område (emne), og involverer dermed ikke nødvendigvis alle andre selv-tanker, fordommer, sosiale faktorer osv. Slik jeg forstår det kan man med andre ord se på matematikk i sin helhet som noe eleven har en del tanker og opplevelser om og der de muligens underbevist kategoriserer seg selv og sine forventninger til faglig nivå og mestring. Mestringsforventninger vil jeg derimot beskrive som noe som kan være knyttet til et bestemt emne i matematikken, og som kan ha et eget sett med forventinger, som ikke blir påvirket av de generelle tankene om matematikk som helhet, på bakgrunn av ulike erfaringer eller tanker eleven har om det spesielle emnet.

Det som er interessant å ta med seg når det gjelder mestringsforventninger, i denne forskningen, er funnene om at elevers mestring innenfor et domene eller emne kan overføres til å bli mestringsforventning innenfor samme emne, selv om oppgavene endrer karakter (Zimmerman, 1995, s. 206). Det er dermed nærliggende å tenke at en solid forståelse av variabelbegrepet, og fortrolighet med å håndtere variabler med algebraisk notasjon, vil kunne ha overføringsverdi til arbeid med manipulasjon og utvidet algebraisk forståelse senere. Zimmerman (1995) viser til forskning gjennomført på matematikkelever og deres læringsutbytte i faget, der mestringsforventninger knyttet til det som skal læres viser seg å ha større effekt på læringsutbytte sammenlignet med andre faktorer som for eksempel tidligere erfaringer eller tanker om matematikkfaget (Meece, Wigfield, & Eccles, 1990; Randhawa, Beamer, & Lundberg, 1993 i Zimmerman, 1995). Om elevene oppfatter at de forstår hva variabler er og er fortrolig med å bruke algebraisk notasjon for variabler kan dette dermed gi en indikasjon på hvilke mestringsforventninger man kan forvente at de sitter med i videreføringen av arbeidet med algebra, etter innføringen av formell algebraisk notasjon i form av bokstaver som variabler.

3.0 Metode

I et forskningsarbeid er vi ute etter å undersøke et fenomen på en systematisk måte, gjennom en strukturert og transparent metode. Det er ikke kunnskapen eller sannheten som blir presentert som skiller forskning fra andre kunnskapskilder, men snarere måten vi søker etter sannheten på (Nyeng, 2012). I dette kapittelet vil jeg redegjøre for prosessen benyttet for å samle inn og analysere empiri i denne masterforskningen, for å legge til rette for en transparent forskning der leseren skal kunne forstå hvordan jeg har analysert og kommet frem til mine resultater.

Jeg vil starte med å presentere metodologien og forskningsdesignet benyttet og begrunne valgt metodologi. Deretter vil jeg presentere mitt undervisningseksperiment og noen sentrale momenter knyttet til den strategiske forskningstimen som er gjennomført. For å legge til rette for at leseren skal forstå denne forskningen på best mulig måte vil jeg videre gi en detaljert beskrivelse av rammer og konteksten som undervisningseksperimentet er gjennomført i, før jeg presenterer og redegjør for metodene observasjon og intervju, som er benyttet for å samle inn data. Jeg vil så presentere hvordan jeg har analysert dataen og kommet frem til mine resultater. Avslutningsvis vil jeg si noe om reliabiliteten og validiteten i denne forskningen og presentere hvilke etiske utfordringer og hensyn som er tatt i betraktning.

3.1 Metodologi og forskningsdesign

Ettersom min forskning fokuserer på å analysere et fåtall antall elevers oppfattelser i detalj blir det naturlig å kategorisere denne forskningen som en kvalitativ studie (Wellington, 2015). Når en bruker en kvalitative metode er *«intensjonen å forstå og beskrive hva spesifikke mennesker gjør i sitt hverdagsliv, og hvilken mening disse handlingene har for dem»* (Postholm & Jacobsen, 2021, s. 95). Overført til denne forskningen om undervisning og læring er altså hensikten med en kvalitativ metode her å forsøke å forstå og beskrive et utvalg elevers tanker om læring av algebraisk notasjon, og hvilken mening bokstavene har for de, etter at de er eksponert for de i en bestemt kontekst, på en detaljert og systematisk måte.

Jeg har valgt å benytte et undervisningseksperiment som forskningsdesign. Undervisningseksperimentet er designet på bakgrunn av min hypotese om at opplegget potensielt kan føre til økt forståelse for bokstaver som variabler og legge til rette for økt forståelse for arbeid med algebraiske symboler generelt. Hypotesen baserer jeg på min forståelse og kunnskap ut i fra tidligere forskning (Carraher & Schliemann, 2018; Heid, 1996; Lamon, 1998; Pinto, 2021; Radford, 2010; Usiskin, 1988), men jeg kan altså ikke forutse hvilke matematikkforståelse elevene vil ende opp med, ettersom undervisningseksperimentet ikke tidligere er gjennomført nøyaktig slik som jeg har planlagt det (Steffe & Ulrich, 2014). På så måte mener jeg derfor det er hensiktsmessig å benytte en kvalitativ tilnærming i denne forskningen og forsøke å få best mulig innsikt i noen få elevers uttrykte forståelse, ettersom det i dette undervisningseksperimentet nok vil være mange usikre momenter knyttet til elevenes læring, som jeg potensielt kan gå glipp av om jeg forsøker å se etter tendenser i større skala. Ved å benytte en kvalitativ tilnærming er jeg klar over at det medfører noen begrensninger knyttet til mine forskningsresultater, spesialet knyttet til muligheten å generalisere utover det begrensede utvalget i denne forskningen, men ettersom hensikten er å undersøke elevenes uttrykte forståelse mener jeg den kvalitative tilnærmingen vil la meg undersøke dette best mulig. I den kvalitative tilnærmingen er jeg samtidig åpen for å muligens gjøre oppdagelser som kan oppmuntre til en mer omfattende kvantitativ undersøkelse av disse på sikt (Wellington, 2015). Begrensningene knyttet til en kvalitativ tilnærming belyser jeg ytterligere delkapittelet som omhandler reliabilitet og validitet.

Et undervisningseksperiment er først og fremst ment som en forskningsmetode som er så nærliggende en ordinær klasseromssituasjon som mulig, der elever og lærer opprettholder en normal interaksjon, men der man kan teste ut og undersøker alternative kontekster og undersøke elevenes læring knyttet til disse kontekstene (Schorr, 2000). Et undervisningsekseperiment legger derfor til rette for å undersøke og se mulighetene for reformasjon på klasseromsnivå, ved at man kombinerer rollen som lærer og forsker og dermed opptrer som en «lærerforsker» i eget klasserom (Postholm & Moen, 2018, s. 54). Jeg mener at et undervisningseksperiment kan defineres inn under en større betegnelse som et kasusstudie, ettersom det fokuseres på én bestemt gruppes læring knyttet til en situasjon (case) (Wellington, 2015). Samtidig oppleves det noe forenklet å kategorisere denne forskningen som kun en kasusstudie uten en videre utdyping, ettersom forskningen omfavner en serie av undervisningsepisoder som dreier seg om mer enn bare ett bestemt case. Jeg har derfor valgt å benytte undervisningseksperiment som forskningsdesign for å undersøke min problemstilling best mulig, da jeg mener det gir meg mulighet til å følge elevene over en lengre periode på en naturlig måte i mitt eget klasserom, for så å forsøke å analysere deres matematikkforståelse etter en rekke påfølgende undervisningsepisoder (Steffe & Ulrich, 2014). De planlagte undervisningsepisodene, som er en del av undervisningseksperimentet, har dannet grunnlaget for å designe min strategiske forskningstime (vedlegg 1) og påfølgende intervjuer, der jeg har hatt som mål å analysere og forklare elevenes forståelse av bokstaver som variabler, ved å benytte Duval(1999, 2006) og (Sfard, 1991) som teoretisk rammeverk for analyse. Forskningen bygger på så måte på en sosial-konstruktivistisk tanke om læring, der læring oppstår som et resultat av sosial interaksjon, kombinert med en mental prosess i individet der tidligere kunnskap og forståelse danner grunnlaget for ny læring (Skott, 2018).

3.2 Undervisningseksperimentet

Undervisningseksperimentet i denne forskningen er designet ut i fra prinsipper om å benytte algebraisk tenking og virkelighetsnære situasjoner (modellerings-inspirerte oppgaver) som inngangsport for å introdusere en forståelse for variable størrelser. Ved å knytte dette opp mot lineære funksjoner har jeg samtidig hatt som hensikt å gi elevene flere konkrete representasjoner av situasjonene å benytte seg av, slik at de skal kunne visualisere det matematiske objektet funksjoner, og på den måten gradvis strekke seg mot en strukturell forståelse av variabelbegrepet knyttet til lineære funksjoner.

Undervisningseksperimentet er delt inn i tre ulike faser. Den første fasen har hatt en varighet på to uker og målet i denne fasen har vært å etablere en forståelse for variable størrelser knyttet til virkelighetsnære situasjoner og formulere funksjonsuttrykk med dagligspråket, samt sette opp tabeller til disse situasjonene. Ut i fra funksjonsuttrykkene med ord har det blitt jobbet med å knytte på matematikkbegrepene avhengig variabel og uavhengig variabel til størrelsene som varierer, og bli kjent med hvordan en endring i én størrelse medfører en endring i den andre. Innledningsvis kan man dermed si at målet har vært å legge til rette for at elevene skal kunne ha en strukturell inngang til variabler gjennom en tilknytting til virkelige hendelser.

Den første fasen er innledet med en oppgave der elevene jobbet i grupper av tre og fikk i oppgave; «*dere skal kjøpe en ny smart-phone*». De fikk benytte internett til å finne ulike telefoner. Som lærer ble min oppgave å stille kritiske spørsmål til elevenes valgte telefon. «*Har dere behov for en så dyr telefon?*», «*Hva er forskjellen på denne modellen og en rimeligere modell?*» osv. Målet med disse ikke-matematiske spørsmålene er å skape mest mulig engasjement og eieforhold til oppgaven for elevene for at det matematiske skal kunne kobles til noe de virkelig eier og har gjort et arbeid og reflektert rundt. Min viktigste oppgave for å lede denne modelleringsoppgaven mot domenet funksjoner ble derimot tanken om at elevene skulle betale for telefonen gjennom delbetaling. Når gruppene fant sine ulike tilbud gjennomførte vi en presentasjonsrunde og avstemning om hvilket tilbud klassen skulle benytte seg av. Dette ble så klassens telefon og utgangspunktet for innlæring av variabler i lineære funksjoner.

Den utvalgte telefonen ble en modell som kostet 211kr per måned i 24 måneder, pluss en engangsutgift på 500kr (denne engangsutgiften kunne elevene bestemme selv hvor stor skulle være på nettsiden). Videre ble denne informasjonen gradvis satt opp som et funksjonsuttrykk med dagligspråket gjennom at vi som klasse diskuterte hvordan vi mest mulig kortfattet kunne sette opp et regnestykke som ville vise oss hvor mye penger vi hadde et betalt etter et antall måneder. Vi kom dermed frem til «penger betalt = 211kr * antall måneder + 500». Den delen av undervisningseksperimentet var altså inspirert av formuleringsfasen til Lamon (1998). Dette funksjonsuttrykket med ord ble så grunnlaget for å knytte begrepene avhengig variabel til «penger betalt» og uavhengig variabel til «antall måneder», før det ble arbeidet med å sette opp en nedbetalingsplan i tabellform.

Den andre fasen av undervisningseksperimentet har hatt en varighet på tre uker og hovedsakelig dreiet seg om å øve på å representere funksjoner som tabeller og grafer, både analogt og digitalt i GeoGebra, knyttet til mobilen og flere andre virkelighetsnære situasjoner. I denne fasen har altså fokuset vært rettet mot å utvikle en operasjonell forståelse og forsøke å forklare hvorfor det kan sies å være ulike representasjoner av samme sak. For å belyse dette har jeg støttet meg mye til Carraher og Schliemann (2018) sin sammenlikning med innlæring av tallsymboler i tidlig alder, og ved hjelp av ulike representasjoner for tall har jeg synliggjort for elevene hva ulike representasjoner av tallmengder faktisk vil si. Dette ble gjort for å legge til rette for at elevene skulle kunne forstå og bli fortrolig med hva som menes med begrepet representasjoner.

Den tredje (og siste) fasen av undervisningseksperimentet har hatt en varighet på tre uker og ble innledet med den strategiske forskningsaktiviteten der elevene ble eksponert for et funksjonsuttrykk med formell algebraisk notasjon for første gang. I denne økten var hensikten at elevene skulle forsøke å forklare deres forståelse av bokstavene med utgangspunkt i deres grunnleggende forståelse for variabler og lineære funksjoner, og dermed kunne benytte dette for å skape en strukturell forståelse i introduksjon av bokstaver som variabler, kontra å eksponere de for operasjonelle øvelser i innledningsfasen.

3.2.1 Den strategiske forskningstimen – mopedoppgaven

Oppgaven som er benyttet har jeg designet ut i fra en tanke om et standardisert lineær-funksjonsuttrykk av typen y=ax+b, der vi har to variabler, et stigningstall og et konstantledd, og med bakgrunn i arbeidet som er gjort tidligere i undervisningseksperimentet. Mopedoppgaven er laget for å kunne relateres til elevenes virkelighet med realistiske summer ut i fra dagens kostnader for mopedsertifikat og med noen begrensninger som fører den mot en lineær funksjon.

Du oppretter en sparekonto til mopedsertifikatet på din 14-års bursdag, og setter da inn 1000kr som du fikk i gave. På den kontoen skal det være nøyaktig 7000kr den dagen du fyller 16 år. Du skal spare et like stort månedlig beløp hver måned i perioden.

a) Lag et funksjonsuttrykk med ord som viser hvor mye penger du har spart etter et antall måneder.
b) Forklare de ulike delene av funksjonsuttrykket. Hvordan fungerer det?
c) Representer funksjonsuttrykket som en verditabell. Tabellen settes inn i GeoGebra.
d) Representer funksjonen som en graf i GeoGebra.
e) Hva menes med at funksjonsuttrykket, tabellen og grafen er tre ulike representasjoner av samme funksjon? Argumenter og forklar.
f) Se på funksjonsuttrykket som kommer opp i GeoGebra når vi åpner regresjonsanalyse med 2 variabler.
   1. Alle på gruppen skal notere ned sine egne individuelle tanker om hvordan dere forstår bokstavene slik dere ser dem.
   2. Alle på gruppa presenterer sine tanker, uten avbrudd eller spørsmål.
   3. Felles diskusjon ut i fra de ulike tankene.

Figur 3. *Oppgaven benyttet i den strategiske forskningstimen.*

Oppgaver *a* til *e* (figur 3) er ment å representere type oppgaver som elevene skal være kjent med fra fase 1 og fase 2 av undervisningseksperimentet. De er dermed med i oppgaven som en måte å skape en konkret kontekst med ulike representasjoner til innføringen av bokstaver, med hensikt å legge til rette for en situasjon der elevene skal kunne oppleve en strukturell forståelse av bokstavene som variabler ved innføringen.
Denne strategiske forskningstimen ble gjennomført med en gruppe på seks elever på et grupperom, og sekvensen ble filmet og senere transkribert (vedlegg 3). Mopedoppgaven ble senere gjennomført i begge helklasser, som innføringen av bokstaver som variabler. Grunnen til at de seks elevene gjennomførte denne strategiske forskningsaktiviteten i forkant av

helklassene var for å sikre at ingen av deltagerne i forskningen skulle være eksponert for bokstaver som variabler før oppgaven og intervjuene ble gjennomført.

3.3 Kontekst og rammer

Undervisningseksperimentet er gjennomført synkront i to åttende klasser med 20 elever i hver klasse, på en større ungdomsskole på Østlandet. Klassen der intervjuobjekter er valgt ut er tilfeldig, og kun basert på alfabetisk rekkefølge, der den ene klassen er navngitt med en bokstav som er tidligere i alfabetet enn den andre klassens bokstav.

I begge klassene har det vært rettet fokus mot å etablere både sosiale og sosiomatematiske normer fra starten av skoleåret, som skal gjennomsyre undervisningstimene i klassene. De sosiomatematiske normene som er blitt fokusert på å innarbeide i begge gruppene dreier seg om å forsøke å bruke et matematisk presist språk og at «et svar er bare en mulig løsning», slik at elevene skal utfordre hverandres svar, ved å argumentere for eller mot ulike løsninger (Yackel & Cobb, 1996). Elevene i denne forskningen er dermed vant med å bli bedt om å bruke et matematisk presist språk og å argumentere for eller mot løsninger.

Begge klassene er også veldig vant med å arbeide i grupper; da oftest med 3 elever per gruppe, men av og til også i større grupper. Gruppene som benyttes i undervisningssituasjoner er tilfeldig satt sammen, med unntak om enkelte sosiale tilpasninger med elever som ikke bør arbeide sammen på gruppe. I gruppearbeid har klassene ofte arbeidet stående rundt en tavle (whiteboard) og er dermed blitt vant med å arbeide på en måte der de kan skrive opp ideer for så å viske ut eller endre underveis. De har også blitt drillet i å forsøke å rullere på hvem på gruppen som fører pennen på tavlen, for å få flest mulig deltakere aktive i arbeidet. Prinsippene bak denne arbeidsmåten er hentet fra Forrester (2017) sin forskningsartikkel om bruk av metoden *«vertical whiteboarding»*.

De representerte elevene i forskningen er en blanding av elever som er tilfeldig utvalgt. Alle elever i den ene klassen fikk med seg samtykkeskjema hjem, med beskjed om at de som kunne tenke seg å stille opp leverte det tilbake på skolen innen en gitt tid. Totalt fikk jeg inn 9 samtykkeskjema i en klasse på 20 elever. Av disse ble 6 elever tilfeldig trukket ut av en kollega, i form av at personen plukket ut 6 av 9 skjemaer uten å kikke på navn. På dagen da undervisningseksperimentet skulle gjennomføres var 3 av deltagerne borte fra skolen, og de 3 som ikke var valgt ut i utgangspunktet tredde derfor inn som erstattere. Utvalget bestod til slutt av 5 jenter og 1 gutt. Min kjennskap til elevenes tidligere matematikkprestasjoner innenfor andre matematikkemner tilsier at utvalget representerte både høyt- og lavt-presterende elever, karaktermessig.

Den strategiske forskningstimen ble gjennomført på et grupperom i direkte tilknytning til klasserommet, på en dag elevene vanligvis ikke har matematikk. Her var det rigget opp et webkamera og en ekstern mikrofon som var plassert på midten av et gruppebord. Elevene samarbeidet, alle 6, om gruppeoppgaven og brukte tavlen på grupperommet til å føre opp sine tanker og utregninger. De hadde en PC på deling til de digitale oppgavene. Varigheten på aktiviteten var 30 minutter, og oppgavens oppbygging tok utgangspunkt i en type oppgaveform som skulle være kjent for elevene. Da elevene ble eksponert for funksjonsuttrykket med formell algebraisk notasjon skulle de følge grunnleggende prinsipper for IGP (individuelt, gruppe, plenum). De ble bedt om å notere sine egne umiddelbare tanker om bokstavenes betydning på et ark, så leste alle i tur og orden sine umiddelbare tanker, uten avbrytelse eller spørsmål, før de til slutt skulle diskutere og forsøke å komme frem til en felles forståelse for hva bokstavene kunne være.

3.4 Observasjon

For å undersøke mitt forskningsspørsmål har jeg valgt å fokusere på 2 hoved-metoder for å innhente mest mulig nyttig data å analysere; observasjoner av elevenes arbeid med oppgaven i undervisningseksperimentet og intervju av hver enkelt elev i etterkant av gjennomføringen. I tillegg har jeg dokumentert noe av elevarbeidet fra mopedoppgaven i form av bilder av elevarbeidet.

Under selve gjennomføringen av den strategiske forskningstimen, fungerte jeg som en deltagende observatør, ved at jeg satt i gang elevene med oppgaven og ledet prosessen med sporadiske innspill og kommentar underveis. På så måte var jeg delaktig i den sosiale prosessen som ble studert, og dermed en deltagende observatør (Fuglseth & Skogen, 2006), samtidig som jeg opprettholdt en mest mulig normal lærer-elev relasjon og fungerte dermed som «lærerforsker» (Postholm & Moen, 2018, s. 54). Min hensikt med å opptre som deltagende observatør ble nøye vurdert i forkant av gjennomføringen. Jeg hadde bekymringer knyttet til å opptre i en slik rolle, med tanke på forskningsresultatene jeg ville sitte igjen med.

Bekymringen min var knyttet til om elevene muligens ville opptre passivt i arbeidet, om de møtte på usikkerhet, og heller vente på at jeg skulle lede de videre. Etter en vurdering valgte jeg derimot å gjennomføre forskningen som deltagende observatør, der jeg ville forsøke å forholde meg mest mulig anonym og passiv, for å legge til rette for at elevenes utsagn og tanker skulle kunne komme frem på en mest mulig autentisk måte, uten for mye forstyrrelser fra meg som lærer. Grunnen til at jeg landet på denne observatør-rollen var knyttet til relasjonsmønsteret mellom meg og elevene. Gjennom samtaler med en kollega konkluderte vi med at elevene er vant med at jeg ser og lytter til de mens de samarbeider om oppgaver, og at jeg kommer med innspill og spørsmål underveis i prosessen, og dermed at forskningssituasjonen muligens ville være mest nærliggende en ordinær klasseromssituasjon for elevene, og dermed kunne bidra til å normalisere konteksten og situasjonen for elevene, slik Fuglseth & Skogen (2006) beskriver.

I gjennomføringen av den strategiske forskningstimen benyttet jeg videoopptak av arbeidet til elevene. Ved å benytte videoopptak av elevenes arbeid ville jeg ha mulighet til å se og høre elevenes utsagn gjentatte ganger i ettertid av gjennomføringen, og dermed legge til rette for at ikke viktig momenter eller observasjoner skulle bli oversett eller forsvinne i selve gjennomføringen. Et videoopptak legger til rette for at man kan gjennomføre observasjonene på en mer systematisk og strukturert måte, ved å se ting flere ganger, fremfor å måtte foreta og forstå alle observasjoner underveis i en pågående undervisningsprosess. På den måten kan man se på et videoopptak som et tiltak for å bedre sjansen for å gjøre en mest mulig objektiv analyse av det som observeres (Fuglseth & Skogen, 2006). Ettersom jeg benyttet videoopptak hadde jeg ikke utviklet noen observasjonsguide til gjennomføringen av denne sekvensen, men ville opptre som en noe passiv lærer og heller bruke videoopptak som hovedmateriale for å tolke observasjoner.

3.5 Intervju

Ettersom mitt forskningsspørsmål omhandler elevenes forståelse av algebraisk notasjon etter et første møte med denne formelle symbolske notasjonsformen, var det helt avgjørende for meg å gjennomføre intervjuer så raskt som mulig etter den strategiske forskningstimen. Dette for å sikre at elevene faktisk bare hadde opplevd *ett* møte med symbolene x og y, og samtidig for å holde oppgaven og elevens tanker mest mulig friskt i minne før intervjuet. Intervjuene ble dermed avholdt samme dag med noen elever, og dagen etter for resterende elever.

I planlegging og gjennomføring av et forskningsintervju er det flere sentrale momenter å ta hensyn til for at alle parter skal oppleve situasjonen som trygg, og for å gi mest mulige korrekte opplysninger om den som blir intervjuet. I et forskningsintervju er det et klart asymmetrisk maktforhold mellom forskeren og den som blir intervjuet (Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge, 2015). I tillegg til at den som blir intervjuet i utgangspunktet har en underdannet rolle i et intervju, kan momenter som båndopptaker eller kamera oppleves som skremmende og påvirke den som blir intervjuet. I tillegg til dette maktforholdet og at jeg benytter lydopptak, opptrer jeg i en todelt rolle i denne forskningen, som både lærer og forsker, noe som potensielt kan føre til at elevene vil være nervøse for at svarene deres skal påvirke karakteren deres i faget, eller at de ikke vil gi kritiske ærlige svar i fare for å såre meg som læreren deres. Dette er alle momenter jeg har vært bevisst på i planleggingen og gjennomføringen av intervjuene.

Elevene som har deltatt i disse intervjuene har alle blitt nøye informert om min todelte rolle i denne forskningen, og at deres deltagelse ikke vil ha noen påvirkning på hverken relasjon mellom oss eller karakter i faget matematikk. Den strategiske forskningstimen og intervjuene ble gjennomført på skoledager der de ikke vanligvis har matematikk, for å skille den ordinære matematikkundervisningen og min posisjon som matematikklærer fra selve gjennomføringen av denne forskningen. Begge ble foretatt på et grupperom elevene er vant med å jobbe på, der elementer som kateter og andre tydelige asymmetriske maktsymboler ikke eksisterer. Dette grupperommet er et rom elevene eier mer enn læreren, og dermed en arena de forhåpentligvis skal føle seg komfortable i. Alle intervjuer ble innledet med en kort briefing om hensikten med både intervju og lydopptak, etterfulgt av et åpent spørsmål knyttet til mopedoppgaven, for å skape en mest mulig trygg ramme (Kvale et al., 2015).

Intervjuformen benyttet i denne forskningen er et semistrukturert intervju med en intervjuguide bygd opp av noen åpne- og noen lukkede spørsmål (vedlegg 4). Innledningsvis i intervjuet har jeg gitt meg selv rom til å følge opp situasjoner fra gjennomføringen av mopedoppgaven, eller forfølge interessante ting elevene selv trekker frem. Hensikten med intervjuene er samtidig å forsøke å undersøke elevenes forståelse for variabler i et funksjonsuttrykk, og det vil dermed være hensiktsmessig med et intervju som heller mot et begrepsintervju. Formålet med et begrepsintervju er en begrepsavklaring og en innsikt i den intervjuedes oppfatting av fenomener, i dette tilfellet variabler (Kvale et al., 2015, s. 180). For

å oppnå dette har jeg dermed utviklet en intervjuguide der elevene møter på noen nye situasjoner, som ligner på type situasjoner de er vant med å jobbe med tidligere, men der funksjonsuttrykk på formen y=ax+b er dominerende. Dette gjøres for å undersøke elevenes respons og sammenligne med responsen gitt under den siste oppgaven i arbeidet med mopedoppgaven, og for å ha konkrete spørsmål og situasjoner å analysere opp mot en begrepsavklaring av variabler. Det innledende spørsmålet der elevene møter en ny situasjon og et tilhørende funksjonsuttrykk med bokstaver vil legge opp til å undersøke om elevene er i stand til å utføre konvertering fra et multifunksjonelt- nondiskursivt til et monofunksjonelt-nondiskursivt register, en konvertering som Duval (2006) poengterer er strevsom for mange elever. Dette har jeg gjort for å se etter en indikasjon på en strukturell forståelse av bokstaver som variabler, ettersom de ikke har lært noen operasjonell metode for å utføre konverteringen og kun kan utføre denne om de behersker å koble bokstavene i funksjonsuttrykket til situasjonsbeskrivelsen med ord.
Elevene blir presentert for en tabell i løpet av intervjuet, der det er fylt ut x-verdier en, to, tre og der de skal fullføre tabellen. Videre skal elevene representere funksjonen som en graf, og jeg har derfor valgt å utelate x-verdi null fra tabellen, for å sjekke om elevene da henvender seg til situasjonsbeskrivelsen eller funksjonsuttrykket for å finne startpunktet til grafen.

I intervju med barn skal man være spesielt oppmerksom på bruk av ledende spørsmål, i form av å unngå å legge ord i munnen på barna. Dette tatt til betraktning er det også viktig å poengtere at bruke av ledende spørsmål aktivt for å bekrefte utsagn eller meninger underveis i intervjuet kan styrke reliabiliteten til intervjuet, da bestemt utsagn ikke blir hengende åpne for fortolkning men heller blir bekreftet eller avkreftet underveis (Kvale et al., 2015). Jeg har dermed fokus på å lese tilbake det elevene sier underveis, for å få bekreftelse om jeg forstod det korrekt.

3.6 Transkripsjon

Ettersom jeg har benyttet videopptak under gjennomføring av undervisningsekseperimentet, og lydopptak under intervjuene, har jeg valgt å transkribere alle sekvensene (vedlegg 3 og 5 til 10). Til sammen utgjør video, lyd og transkripsjoner materialet for meningsanalysen i denne forskningen (Kvale et al., 2015). Som leser av denne forskningen vil man ikke ha innsyn i video og lydopptak, og vil bare kunne basere sine egne tolkninger på tekstmaterialet av situasjonene. Det er dermed viktig å være klar over og overveie reliabiliteten til transkripsjonene, da mange elementer vil forsvinne i oversettelsen og kan tolkes ulikt ut i fra hvem som leser (Kvale et al., 2015). Validiteten til en transkripsjon må også nøye overveies da det er personen som oversetter den muntlige sekvensen til en skriftlig tekst som avgjør nøyaktig hvordan det blir seende ut (Kvale et al., 2015). Kvale trekker frem forskerens evne til å gjøre noen valg med transkriberingen ut i fra hva som er nyttig transkripsjon for å besvare forskningsspørsmålet. En transkripsjon kan gjøres på mange ulike måter der alt fra intonasjon, pauser, tonefall, sukk, latter, fnis og andre kroppslige bevegelser eller lyder legges inn, eller man kan utelate alt dette og formalisere noe av det muntlige språket til en mer skriftlig tekst (Kvale et al., 2015).

I denne forskningen har jeg valgt å gjennomføre transkripsjonene med noen enkle koder underveis, for å poengtere lyder, pauser eller kroppsspråk som jeg mener kan være vesentlig for leseren for å forstå elevenes utsagn eller tanker mest mulig presist. Ettersom forskningen er rettet mot å undersøke elevenes forståelse av variabler har jeg derimot utelatt en del lyder og kroppslige bevegelser underveis i sekvensene fra transkripsjonene, da jeg mener de ikke er essensielle for å tolke og forstå elevenes løsningsprosesser, opp mot mitt forskningsspørsmål. Kodene jeg har benyttet i mine transkripsjoner:

…	Indikerer en pause på under 2 sekunder
Ehm	Muntlig skriftspråk for lyd elevene lager når de tenker på et spørsmål
[*******]	Klammer brukes for å indikere at det kommer en forklaring på noe deltakeren gjør, som kan ha betydning for forståelsen av det som sies.

Figur 4. *Transkripsjonsnøkkel benyttet*

3.7 Dataanalyse

For å analysere innsamlet empiri i denne forskningen benyttes en konstant komparativ analysemetode, som er en pragmatisk abduktiv tilnærming til datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2021, s. 142). At analysemetodene er en abduktiv tilnærming vil si at det er en kombinasjon mellom en induktiv og deduktiv tilnærming, der analysen veksler mellom å gjenkjenne deler av empirien fra tidligere erfaringer og teori, og det å oppdage teori i empirien og undersøke det nærmere. Overført til praktisk betydning i mitt analysearbeid vil jeg si at video, lyd og transkripsjon er sett på med en tanke om å lete etter kjennetegn på noen elementer, og med åpenhet for å oppdage vinklinger som ikke var påtenkt på forhånd. Teori om konverteringer mellom representasjonsformer og om en operasjonell og strukturell forståelse av funksjoner og variabler har jeg benyttet for å lete etter slike kjennetegn. Samtidig er teori om rekursive og eksplisitte sammenhenger i tabeller et resultat av analyse fra elevintervjuene, der disse sammenhengene ble fremtredende i elevenes forklaringer og dermed verdt å undersøke nøyere, uten at dette var påtenkt før analysearbeidet.

Transkripsjonene er delt i 3 kolonner. I høyre kolonne dannes en beskrivelse av det som blir sagt med en oppsummerende kode, som så formaliseres i venstre kolonne i en overordnet kategori. Jeg har valgt å se på transkripsjonene med et analytisk blikk der jeg tar for meg setninger, eller avsnitt, av gangen, da jeg mener det er mest hensiktsmessig i denne forskningen å forsøke å forstå helheten av det som blir sagt, fremfor fragmentene av hver enkelt setning. Noen av kategoriene som oppstår er utformet med utgangspunkt i min tidligere erfaring, lesing av teori eller hypoteser (deduksjon) mens noen kategorier oppstår som resultat av det elevene selv sier, og som jeg ikke har forutsett på forhånd (induksjon). Som eksempel på koding og kategorisering av transkripsjon kan vi ta en nærmere titt på følgende utdrag fra intervju med Johanne (se vedlegg 5 for full tekst).

Kobler førkunnskap om variabler til x og y	00:03:08 **Johanne** Mhm... [Johanne pauser og tenker]. Fordi... ehm... Det er faktisk sånn vi har lært det, på en måte... 00:03:16 **Johanne** Og så, jeg husker ikke helt... Kan jeg se? [Johanne spør om å se på oppgavearket igjen. Studerer teksten.] Begge to er variabler. 00:03:21 **Lærer** Ja, ok begge to er variabler ja. Så y og x er variabler. For da kommer jeg inn på neste spørsmål... Her står det; Kan du forklare hvorfor det brukes to ulike bokstaver i funksjonsuttrykket? Hva er ulikt med de to?	Definerer at y og x er variabler basert på at det er slik vi har lært det (innlært med ord tidligere)
Kobler representasjoner	00:03:40 **Johanne** Ehm... Jeg tror det var y akse og x akse... Det står for y aksen og x aksen... For når man lager tabell så... Ja [Johanne fniser litt av usikkerhet]. 00:03:51 **Lærer** Ja, men bare si alt du tenker du... 00:03:54 **Lærer** Y akse, og x akse [lærer leser tilbake og noterer på intervjuskjema i 5 sekunder].	Kobler bokstavene x og y til aksene i et koordinatsystem.
Kobler førkunnskap om variabler til x og y	00:04:04 **Lærer** Hva er ulikt med... De to bokstavene på en måte? Er det noe som er ulikt med dem? Bortsett fra at de heter y og x da. 00:04:16 **Johanne** Y viser... på en måte... ehm... hva het det? [Johanne stopper litt opp for ord og virker usikker]	Forklarer y som produktet (svaret) til funksjonen og at x er leddet vi trenger å vite for å finne produktet.

Figur 5*. Utdrag fra elevintervju med Johanne for å eksemplifisere inndeling med koding og kategorisering.*

I midten av dokumentet er selve transkripsjonen. Delene av transkripsjonene jeg har valgt å samle for analyse er markert i en farge, for å lettere skille teksten fra det som er over og under, og dermed ikke en del av avgrenset analyse. Fargekodingen har ingen sammenheng utover at det skiller tekst fra hverandre på en tydelig måte. I venstre kolonne er det definert en kategori som formaliserer det som er analysert i transkripsjonen og blir dermed en slags knagg. Denne kategorien alene sier oss derimot ingenting om hva som faktisk kommer frem i sekvensen. Det beskrives kortfattet i form av en kode i høyre kolonne. På den måten er tanken at hver transkripsjon skal kunne leses og forstås i grove trekk i høyre kolonne, samtidig som man skal kunne kjenne igjen kategorier på tvers av observasjoner og lete etter sammenhenger. Vedlagte transkripsjoner (vedlegg 3 og 5 til 10) er resultatet av en innledende prosess med analyse. Disse er så skrevet ut og jobbet videre med i papirformat. Den fullstendige analysen med alle mine kommentarer kommer altså ikke frem i vedlagte transkripsjoner, men det jeg har valgt ut som mest vesentlig for å besvare mitt forskningsspørsmål presenteres som en del av mine resultater.

3.8 Reliabilitet og validitet

Forskningens validitet (gyldighet) og reliabilitet (pålitelighet) er viktige momenter å reflektere over og belyse, da de forteller noe om resultatenes mulige begrensninger og hvordan min forskerrolle og agering kan ha påvirket resultatene (Postholm & Jacobsen, 2021). Mange momenter knyttet til validitet og reliabilitet har jeg belyst underveis i metodekapittelet, men jeg finner det likevel naturlig å oppsummere og samle disse momentene i et eget delkapittel.

Innledningsvis er det viktig å poengtere at reliabiliteten i kvalitative studier må knyttes til hvordan forskeren kan ha påvirket resultatene i den presenterte studien, og ikke til studiens pålitelighet utover beskrevet utvalg (Postholm & Jacobsen, 2021). Dette undervisningseksperimentet er for eksempel gjennomført i en kontekst og med rammefaktorer som ikke vil kunne repliseres uten at en annen lærers subjektivitet og et annet klasseroms elevmasse påvirker resultatene på en slik måte at sammenligningsgrunnlaget i prinsippet ikke vil kunne rettes tilbake for å si noe om *denne* forskningens pålitelighet.
Resultatene i denne forskningen må derimot forstås i lys av en del momenter som kan ha hatt en påvirkning på resultatene jeg presenterer. Jeg har, for eksempel, arbeidet i nevnt «lærer-forsker» rolle, og en slik todelt rolle kan ha en påvirkning på elevenes svar. Jeg har presentert ulike farer knyttet til en slik rolle tidligere, og mener jeg har vært bevisst disse farene og forsøkt å legge til rette for at elevene skal opptre mest mulig normalt gjennom undervisningseksperimentet, i selve gjennomføringen av mopedoppgaven med videopptak og i intervjusituasjon. Elevene har blitt informert om at undervisningseksperimentet er en del av min forskningsoppgave, at jeg skal forske og undervise, samtidig som det har blitt presisert at deres arbeid og resultater knyttet til min forskning ikke vil påvirke deres forhold til meg som

lærer og min oppfattelse av de som matematikkelever. På den måten mener jeg elevene er godt informert om min situasjon og rolle og at dette er belyst og snakket om helt fra starten av skoleåret, før selve undervisningseksperimentet startet. Elevene har i denne prosessen også fått lov til å spørre meg og bli kjent med hva det vil si å forske og studere på masternivå. Gjennom en slik klargjøring og åpenhet rundt min delte rolle mener jeg å ha lagt til rette for at skillet ikke skal bli så stort og skummelt for elevene, og dermed at deres oppførsel ikke skal påvirkes markant av dette.

Forskningens kontekst er beskrevet nøye i et tidligere delkapittel for å styrke forskningens reliabilitet. Ved at leseren får mulighet til å forstå og få et detaljert innblikk i konteksten forskningen er foregått i mener jeg det bidrar til å skape en mest mulig transparent forskningsmetode og dermed også styrke reliabiliteten i forskningen.

Forskningens ytre validitet (overføringsverdi) er svekket i denne forskningen, da det er en kvalitativ studie med særdeles få utvalgte objekter (6 elever) og det vil dermed ikke være mulig å generalisere utover utvalget i denne forskningen. Den indre validiteten i forskningen forstås som hvor vidt det er samsvar mellom den virkeligheten vi mener vi studerer og de teoretiske begrepene vi benytter for å beskrive denne virkeligheten, og hvorvidt vi har grunnlag for å uttale oss om kausalitet ut fra den studien vi har gjort (Postholm & Jacobsen, 2021). Jeg mener jeg har forsøkt å styrke den indre validiteten i denne forskningen ved å benytte flere datainnsamlingsmetoder for å analysere elevenes arbeid. Ettersom jeg arbeider i nevnte «lærer-forsker» rolle har jeg vært bevisst på å kunne studere elevenes utsagn gjentatte ganger, for å forsøke å ikke bli farget av min kjennskap til elevene. Jeg har benyttet videoopptak, lydopptak og transkripsjon som en måte å se på dataen fra flere vinkler og kunne forstå elevenes utsagn på en best mulig måte. Jeg har også med noe innsamlet elevarbeid som hører til gruppeoppgaven de gjennomførte. En slik måte å arbeide med datainnsamling og analyse omtales som triangulering (Postholm & Jacobsen, 2021), og jeg mener det er en styrke i den indre validiteten i min forskning, knyttet til mine resultater. Det er samtidig viktig å poengtere at jeg mener at en kvalitativ studie som i all hovedsak bygger på å forstå og tolke elevhandlinger og utsagn ikke kan skrives objektivt. Det vil alltid foregå tolkning i et slikt arbeid, og ettersom hensikten er å forstå og få frem elevenes uttrykte forståelse mener jeg til og med det muligens ikke er hensiktsmessig å tilstrebe objektivitet, men snarere forsøke å ta et elevperspektiv og sette seg mest mulig i elevens sko.

3.9 Etiske utfordringer

Av etiske betraktninger i denne masterforskningen vil jeg først og fremst trekke frem det faktum at jeg har gjennomført min forskning på elever og dermed hatt ekstra fokus på å forsikre elevene om at deres rolle i forskningen ikke vil påvirke deres relasjon til meg eller deres matematikk-karakter. Jeg har hentet inn samtykke fra NSD til å gjennomføre forskningen, og alle deltagere har hatt med et informasjonsskriv hjem til signering av foresatte (vedlegg 11). I tillegg har jeg anonymisert arbeidet og benytter andre navn underveis i forskningsrapporten. Dette valget har jeg tatt da jeg mener det kan bidra til å oppleve mer flyt i lesingen, fremover å benytte elev1, elev2 osv. Navnene benyttet i oppgaven avslører kjønn på deltagerne, men utover dette er både klasse, skole og distrikt anonymisert. Jeg mener derfor det ikke foreligger noen fare for at noe av datamaterialet presentert i denne oppgaven skal kunne spores tilbake til enkeltpersoner.

I tillegg til å ta hensyn til deltagerne i forskningen har jeg også forsøkt å være kildekritisk og bevisst hvilke kilder jeg har benyttet i min forskning og hvordan disse er referert til. Dette for å sikre at leser skal kunne etterprøve kildene og finne frem til originalsitat.

4.0 Resultater fra analyse

I dette kapitlet vil jeg presentere resultater fra min analyse knyttet til elevenes arbeid med mopedoppgaven i gruppe, før jeg presenterer resultater fra analysene av de seks elevintervjuene. Avslutningsvis i kapittelet vil jeg forsøke å samle noen hovedfunn som vil danne grunnlaget for drøfting og konklusjon. Alle transkripsjoner er lagt ved i sin helhet som vedlegg 3, og 5 til og med 10.

I det elevene entret grupperommet for å delta i den strategiske forskningstimen var vi kommet til første økt i fase 3 av undervisningseksperimentet. Totalt 6 elever deltok og dannet grunnlaget for min empiri i denne forskningen. Frem til denne fasen av undervisningseksperimentet var min opplevelse som lærer at elevene i de to klassene generelt hadde etablert en forståelse av konseptene avhengig og uavhengig variabler, knyttet til virkelighetsnære situasjoner og ved å benytte sitt daglige språk. Jeg opplevde også at de fleste elever i klassene mestret å representere funksjoner som tabell og graf, og at mange var komfortable med å forklare hva en representasjon faktisk er for noe.

4.1 Den strategiske forskningstimen - Mopedoppgaven

I det gruppen fikk presentert situasjonen der de hadde tusen kroner i kontakt og skulle spare til de hadde syv tusen kroner totalt, over en periode på to år, satt de i gang med å plukke ut informasjon og formulere et funksjonsuttrykk med ord.

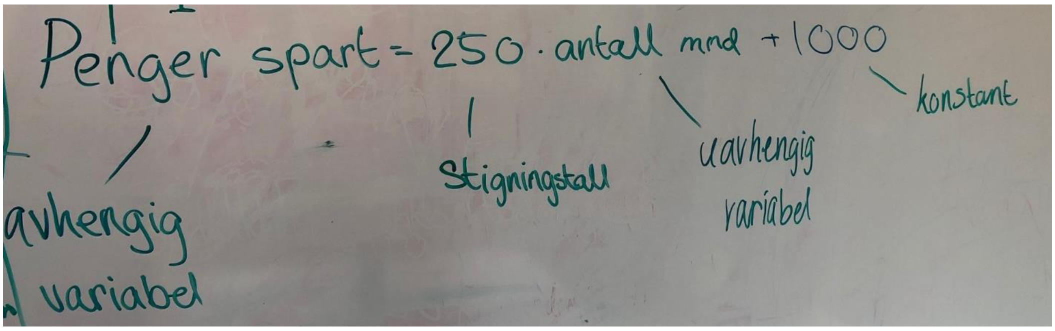
00:27 ***Johanne*** *: Vi har tusen fra før [Åse starter også å snakke samtidig som Johanne, men avslutter]… så det betyr seks tusen [peker på oppgaveteksten]*
00:31 ***Åse*** *: [tar over, før Johannes utsagn vurderes] Blir det ikke; penger spart er lik, også ett beløp? Seks tusen deler på... ehm, tjuefire måneder… Fordi hun har jo to år på seg… Og så... Ganger antall måneder, pluss.*
00:49 ***Johanne*** *: tusen [sies samtidig som Åse. Begge fniser litt]*

Elevene viser med dette evnen til å plukke ut viktig informasjon fra situasjonsbeskrivelsen og utføre en behandling til en skriftlig fremstilling av et funksjonsuttrykk med hverdagsspråk. Etter elevene kom frem til sitt funksjonsuttrykk gikk de i gang med neste deloppgave; å forklare de ulike delene av funksjonsuttrykket.

Her knyttet gruppen matematiske begreper til sitt funksjonsuttrykk og forklarte hva som menes med begrepene (figur 6). Det kom i den sammenheng ut et interessant utsagn om forholdet mellom den avhengig og uavhengig variablene:

03:48 ***Mia*** *: Ehm, penger spart varierer på antall måneder. Tror jeg [peker mellom «penger spart» og «antall måneder» i gruppens funksjonsuttrykk].*

Mia belyser variablenes kovarians, altså hvordan en endring i en variabel medfører en endring i den andre variabelen. Mias tanker ble derimot lagt til side mens gruppen fullførte deloppgaven med å forklare de ulike delene av funksjonsuttrykket.



Figur 6. *Bilde av elevenes utarbeidede funksjonsuttrykk med forklaringer.*

Etter gruppen hadde knyttet de matematiske begrepene til sitt funksjonsuttrykk ble de bedt om å forklare hvordan funksjonsuttrykket fungerer. I dette momentet fikk gruppen mulighet til å løfte frem Mias tanker om kovarians, fra tidligere.

04:58 ***Johanne*** *: Det fungerer. Ehm…*
05:02 ***Mia*** *: Penger spart er avhengig av den der [peker på antall måneder]. Ja, penger spart er avhengig av antall måneder.*
05:13 ***Kaia*** *: Når antall måneder endrer seg så endres også hvor mye penger vi har spart seg…*
05:16 [flere elever bekrefter samtidig. Utydelig hvem som snakker].

Elevene viser her evnen til å koble sin forståelse av situasjonen med å spare penger over tid, til en matematisk sammenheng der variabelen «antall måneder» påvirker den andre variabelen «penger spart». Elevene fremstår i denne sekvensen selvsikre med å omtale variable størrelser og hvordan den uavhengige variabelen har en direkte innflytelse på den avhengige variabelen.

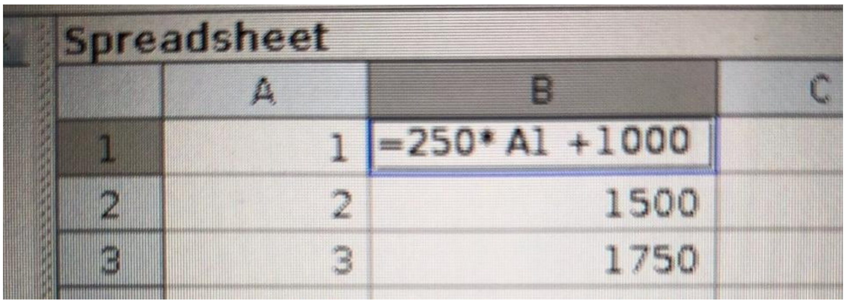
Når elevene så gikk i gang med å representere funksjonsuttrykket sitt som en tabell skrev de denne først opp analogt på gruppens tavle

06:27 ***Johanne*** *: Antall måneder... Og så var det… Penger spart? [skisserer opp 2 kolonner på tavlen]Antall måneder... Vi skal bare ta tjuefire måneder, ikke sant? Men vi kan bare ta tolv? Eller skal vi ta seks? Fordi da kan vi bare gange det på fire.*
07:13 ***Johanne*** *: På én måned, hvor mye var det vi har sparte da?*
07:16 ***Åse*** *: ett tusen to hundre og femti.*
07:23 ***Johanne*** *: to måneder er, ett tusen fem hundre.*
07:29 ***Åse*** *: Ett tusen syv hundre og femti.*
07:34 ***[flere elever svarer synkront]*** *To tusen.*
07:46 ***Åse*** *: To tusen to hundre og femti.*
07:50 ***Johanne*** *: To tusen fem hundre.*

Elevene samarbeidet i denne prosessen med å fullføre tabellens høyre kolonne ved å addere stigningstallet, 250, for hver rad nedover i tabellen. De fullførte altså tabellen ved hjelp av en rekursiv sammenheng der den nye verdien uttrykkes ved å bygge på den foregående verdien i raden over.

I det gruppen hadde representert situasjonen som en tabell på tavlen flyttet de seg over til den utdelte PCen og representerte tabellen digitalt i GeoGebras tabellverktøy.

08:20 ***Åse*** *: OK. Er lik , to hundre og femti, ganger [=250*]*
08:28 ***Johanne*** *: Den [peker til A1 - cellereferansen til variabelen x. Åse trykker på A1 med musepekeren]*
08:28 ***Johanne*** *: Pluss tusen. [«=250*A1+1000», trykker ENTER]*
08:33 ***Johanne*** *: Det ble ett tusen to hundre og femti ja.*
08:35 ***Åse*** *: Så drar vi ned sånn... [elevene bruker dra-funksjon i GeoGebra for å kopiere formelen nedover i kolonnene og fullføre tabellen].*



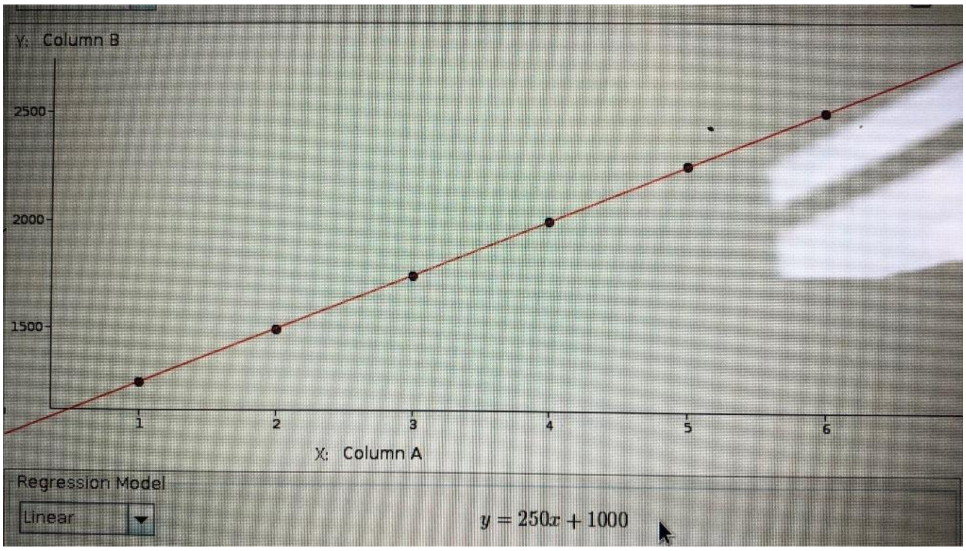
Figur 7. *Bilde av formelen elevene skrev inn i tabellen*

I skillet mellom en analog og digital fremstilling av tabellen kom det frem et interessant skille mellom en rekursiv og eksplisitt sammenheng i tabellen. Elevenes analoge fremstilling ble satt opp med to kolonner, der kolonnen for «penger spart» ble fullført ved at elevene adderte 250 for hver rad, nedover, altså en rekursiv sammenheng. Når elevene derimot skulle sette inn tabellen i GeoGebra benyttet de helt tydelig en eksplisitt sammenheng i den første cellen, for så å la GeoGebra fullføre tabellens høyre kolonne. I det analoge arbeidet kom ikke den eksplisitte sammenhengen tydelig frem i den første raden, slik den gjorde når elevene arbeidet digitalt i GeoGebra, ettersom de der var avhengig av en skriftliggjøring av den eksplisitte sammenhengen ved hjelp av en formel i regnearket, for at GeoGebra skulle kunne auto-fullføre kolonnen for elevene. Denne forståelsen av tabellen med en rekursiv og eksplisitt sammenheng blir løftet frem igjen på et senere tidspunkt i oppgaveløsingen ved at jeg som lærer spurte elevene direkte hvordan man finner ut «penger spart» i tabellen.

15:57 ***Åse*** *: Samme som i funksjonen. Du tar to hundre og femti ganger én. Som er to hundre og femti, pluss tusen. Som ble ett tusen to hundre og femti. Og så blir det bar med to. Det stiger med to hundre og femti hver gang.*
16:17 ***Johanne*** *: Ja, det er stigningstallet.*

Åses forklaring på hvordan man regner ut den avhengige variabelen i en tabell, samsvarer med observasjonene fra elevenes formelbruk fra tidligere i sekvensen, ved at hun forklarer muntlig både en eksplisitt sammenheng, og kobler representasjonen tabell til funksjonsuttrykket i den prosessen, og en rekursiv sammenheng når hun sier at den stiger med to hundre og femti for hver gang. Johanne fullfører den rekursive sammenhengen ved å belyse det faktum at denne sammenhengen har direkte kobling til stigningstallet i funksjonen. Evnen til å skifte mellom en rekursiv og eksplisitt sammenheng i tabellen, og se koblingen mellom den eksplisitte sammenhengen og funksjonsuttrykket, vitner om en helhetlig forståelse av variablenes betydning i tabellen, samt mer enn kun en enveis-konvertering fra en representasjon til en annen ved hjelp av en gitt prosedyre (operasjonell forståelse).

I den siste delen av gruppeoppgaven fikk elevene se et formelt funksjonsuttrykk med bokstaver for første gang, gjennom at jeg som lærer benyttet deres graf i GeoGebra og fikk frem en regresjonsanalyse med to variabler. Jeg skrev så funksjonsuttrykket y=250x+1000 på tavlen, ved siden av gruppens andre representasjoner. Videre fikk da elevene beskjed om å notere sine umiddelbare tanker om bokstavenes betydning, før de så skulle dele dette med gruppen og videre forsøke å diskutere seg frem til en slags felles forståelse.



Figur 8. *Regresjonsanalysen, og det formelle funksjonsuttrykket eleven fikk se.*

Av de seks elevene som deltok i denne forskningen presenterte to av seks elever en umiddelbar kobling mellom bokstavene i et funksjonsuttrykk og aksene i et koordinatsystem.

19:54 ***Siri*** *: Ok ,så du kan se den nederste linjen der [peker på x-aksen] jeg tenkte liksom det er x-aksen og den ved siden av er y aksen, og det står y aksen er lik to hundre og femti, så hvis det er to hundre og femti og... Nei der er x aksen… Og så er det pluss på tusen så... Det de mener er kanskje å plusse tusen og to hundre og femti hver gang? Jeg er ikke helt sikker. Det er det jeg tenkte...*
(…)
20:29 ***Åse :*** *Jeg tenkte at den nederste linjen er y-aksen og den opp er x-aksen. Og to hundre og femti er stigningstallet. Så når du tar to hundre og femti, og så er det en x, så er det to hundre og femti ganger noe, pluss tusen… Ja*

Både Siri og Åse koblet umiddelbart bokstavene til aksene (x-akse og y-akse) og forsøkte å forklare bokstavenes betydning ved hjelp av verdiene på aksene i en grafisk representasjon, uten å lykkes helt med denne forklaringen. De virket begge å se en umiddelbar kobling mellom bokstavene og funksjonen, men kom ikke helt i land med sin forklaring angående bokstavenes betydning som variabler.

Én av seks elever, Johanne, forsøkte umiddelbart å forklare bokstaven y med begrepet avhengig variabel, men hoppet raskt over på tabellen for å utdype:

22:09 ***Johanne :*** *Ja, jeg tenkte at y var... Eh, avhengig variabel. Som står på tabellen loddrett [peker på tabellens venstre kolonne] Nei, det er penger spart [retter seg selv til at y er det samme som «penger spart»]. Ehm og at to hundre og femti er x. Atter… *utydelig fnising* [Johanne ser mot Kaia og vil at hun skal ta over].*

Johanne trekker frem en forståelse for at y er det samme som den avhengige variabelen, men i et forsøk på å benytte en tabell for å utdype denne forklaringen blir hun usikker og kommer ikke helt i land.

Disse tre elevene gjorde altså et forsøk på å koble funksjonsuttrykket med formell algebraisk notasjon til en annen representasjon av funksjonen, for å forklare bokstavenes betydning. Det som er felles for de alle tre er at deres forsøk på å forklare bokstavene ved hjelp av en annen representasjonsform stopper opp og bokstavenes betydning som variabler dermed ikke blir tydelig formidlet. Dette kan indikere en noe manglende evne til å adoptere og koble bokstavene til variabelbegrepet, med utgangspunkt i en strukturell forståelse, på dette tidspunktet.

Mia forklarte bokstavene i lys av begrepene avhengig og uavhengig variabel

*21:51 **Mia** : Mhm, jeg tenkte at y er liksom den avhengige variabelen. Og at x er liksom at du skal gange, det som står først der med den uavhengige variabelen? [peker mot bokstaven x].*
[Mia sender ordet videre til Johanne selv]

Mias første tanker om bokstavene i funksjonsuttrykket indikerer en kobling mellom gruppens oppsatte forklaring av de ulike delene av funksjonsuttrykket, med begreper avhengig- og uavhengig variabel (figur 6). Mia viser altså tegn til å adoptere bokstavene til en forståelse av variable størrelser og dermed tegn til en strukturell innføring av bokstavene til noe kjent og visuelt.

Kaia forklarte bokstavene i lys av samme matematiske begreper som Mia, men også knyttet til konteksten av mopedoppgaven

*22:45 **Kaia** : Ja, jeg tenkte at y var en avhengig variabel, altså penger spart da og to hundre og femti er stigningstallet og x… Jeg tenkte at x representerer der "ganger antall måneder". Og så pluss tusen.*
[lærer takker og sender ordet til Karl].

Kaia uttrykker en tydelig sammenheng mellom deres funksjonsuttrykk med ord, forklaringen av de ulike delene av funksjonsuttrykket og funksjonsuttrykket med bokstaver. Kaia viser med dette solide tegn til å inneha en strukturell forståelse for de variable størrelsene og samtidig evnen til å adoptere bokstavene til denne forståelsen.

23:06 ***Karl*** *: Jeg tenkte at y var penger spart, og så x-en var antall måneder. Pluss tusen.*

Karl koblet bokstavene direkte til momentene «penger spart» og «antall måneder» i deres funksjonsuttrykk med ord, men da uten å benytte begrepene avhengig- og uavhengig variabel. Hans kortfattede svar indikerer samtidig en kobling mellom bokstavene i funksjonsuttrykket og de to variable størrelsene i mopedoppgaven, og muligens tegn til en strukturell forståelse av bokstavene som variable størrelser.

Da gruppen hadde hørt alle elevers umiddelbare tanker, ble de bedt om å forsøke å komme frem til en slags enighet av hvordan de vil forklare bokstavene etter dette første møtet.

23:18 ***Lærer*** *: Bra, nå har alle fått seg sagt sitt, vil dere bare prøve å liksom diskuteres som en gruppe hva dere på en måte skal bli enige om; Hva er betydningen av dette her da, hvis dere skal prøve for første gang.*
23:37 ***Åse*** *: Ja. Penger spart er y-en. Den avhengige.*
23:40 ***Johanne*** *: Ja det kan man si.*
23:43 ***Åse*** *: Fordi det er foran likhetstegnet, og det er den der også [peker mellom funksjonsuttrykket med ord og med symboler]*
23:50 ***Johanne*** *: Ja, og x er antall måneder...*
23:53 ***Åse*** *: Ja, ganger antall måneder, og så pluss tusen er jo pluss tusen da.*
24:00 ***Mia*** *: Så x er uavhengig variabel her.*

Åse tar til ordet først og knytter bokstaven y til begrepet avhengig variabel. Johanne fortsetter etter Åse og kobler bokstaven x sammen med antall måneder fra funksjonsuttrykket med ord, før Mia poengterer at bokstaven x derfor kan forklares som den uavhengige variabelen. Gruppen virket enige om at deres umiddelbare forståelse av bokstavene, som gruppe, knyttes til deres funksjonsuttrykk med ord, ved at de har substituert begrepene «penger spart» og «antall måneder» med bokstavene y og x. Som gruppe viser de altså tegn til å adoptere bokstavene som symboler for de variable størrelsene de har omtalt gjennom de tidligere deloppgavene av mopedoppgaven, og på så måte evnen til å tilegne seg formell algebraisk notasjon for variabler gjennom en strukturell innføring der de knytter bokstavene til noe kjent og visuelt.

For å undersøke gruppens uttalte forståelse av bokstavene nærmere presenteres nå resultater fra analysen av de seks elevintervjuene, der jeg har forsøkt å undersøke hver enkelt elevs forståelse i detalj. For de elevene som forholdt seg relativt passive i denne mopedoppgaven, starter elevintervjuet med et spørsmål om deres inntrykk av oppgaven og deres forståelse av bokstavene x og y etter oppgaven.

4.1 Johanne

Johanne uttaler i løpet av sitt intervju at hun ikke har noen tidligere erfaring fra å jobbe med bokstaver i matematikk, før den utførte mopedoppgaven. Johanne får i starten av intervjuet presentert en ny kontekstbeskrivelse som dreier seg om temperaturen i vannet på en badeplass, som øker jevnt med to grader per uke fra midten av mai, da temperaturen er tolv grader. Samtidig blir hun presentert for et funksjonsuttrykk med bokstaver som hører til konteksten. I den første oppgaven i intervjuet (vedlegg 4) blir hun bedt om å forklare hvordan funksjonsuttrykket hører til kontekstbeskrivelsen.

02:18 ***Johanne*** *: På en måte… Ok… [Johanne kikker frem og tilbake mellom funksjonsuttrykk og oppgavetekst].*
002:20 ***Johanne*** *: Så, det blir antall grader [Johanne fokuserer på y i uttrykket], er lik… to… ganger… [Johanne bruker nå lang tid på å se over oppgaveteksten og funksjonsuttrykket på nytt]*
02:37 ***Johanne*** *: Antall uker [Johanne fokuserer på x]…*
02:45 ***Johanne*** *: Pluss… ehmm… [Johanne bruker igjen lang tid på å se over oppgaveteksten på nytt]*
02:50 ***Johanne*** *: Pluss tolv? [spørrende tonefall]*

Johanne leser situasjonsbeskrivelsen og beveger seg frem og tilbake mellom funksjonsuttrykket og denne beskrivelsen. I prosessen bryter hun ned situasjonsbeskrivelsen og knytter begreper fra situasjonen til funksjonsuttrykket og viser dermed evnen til å utføre en konvertering fra et formelt funksjonsuttrykk til et funksjonsuttrykk med dagligspråk. Dette tilsvarer en konvertering fra et monofunksjonelt-diskursivt register, til et multifunksjonelt-diskursivt register. En slik konvertering omtales som noe som ofte er problematisk for elever å utføre.

I den innledende oppgaven av intervjuet viser Johanne altså en evne til å knytte bokstavene i funksjonsuttrykket til variable størrelser fra oppgaveteksten. I oppfølgende spørsmål blir Johanne så bedt om å forklare hvorfor hun knytter disse begrepene til bokstavene.

03:00 ***Lærer*** *: … Men hvorfor sa du at y… På en måte sa du at det er antall grader og så sa du at x var antall uker?*
03:08 ***Johanne*** *: Mhm… [Johanne pauser og tenker]. Fordi… ehm… Det er faktisk sånn vi har lært*

det, på en måte...
03:16 ***Johanne*** *: Og så, jeg husker ikke helt… Kan jeg se? [Johanne spør om å se på oppgavearket igjen. Studerer teksten.]. Begge to er variabler.*

Johanne uttrykker en kobling mellom funksjonsuttrykket med bokstaver og hva de har lært tidligere i undervisningseksperimentet med å strukturere opp funksjonsuttrykk med ord, ut i fra ulike oppgavetekster, før hun knytter variabelbegrepet til bokstavene y og x. Hun viser dermed en kobling mellom sin lærte forståelse av variabelbegrepet med algebraisk tenking, til den formelle algebraiske notasjonsformen hun nå jobber med. Denne uttrykte forståelsen utdypes ytterligere i neste sekvens av intervjuet der hun blir bedt om å forklare hva som er ulikt med de to bokstavene i funksjonsuttrykket.

04:16 ***Johanne*** *: Y viser... på en måte… ehm… hva het det? [Johanne stopper litt opp for ord og virker usikker]*
04:24 ***Johanne*** *: Produktet vi skal komme frem til… Mens x er det leddet vi trenger for å finne ut hva… produktet skal være, eller hva svaret skal være.*

For å forklare hva som er ulikt med de to bokstavene i funksjonsuttrykket trekker Johanne inn en forståelse av kovarians mellom de variable størrelsene i en lineær funksjon. Hun poengterer at y og x er størrelser vi ikke kjenner, og at ved å få vite verdien til x vil vi kunne finne ut produktet til funksjonen, altså y. Johanne uttrykker med dette en forståelse for at bokstavene opptrer som variable størrelser i funksjonsuttrykket.

Johanne blir i løpet av intervjuet bedt om å forklare hvorfor en gitt tabell er en representasjon av funksjonen, og videre representere funksjonen som en graf.

07:44 ***Lærer*** *: Hvorfor er dette en representasjon av den samme funksjonen?*
07:54 ***Johanne*** *: Fordi… Ehm… [eleven stopper opp i 4 sekunder og ser på tabellen]. Fordi to ganger én pluss tolv er fjorten...*
08:00 ***Johanne*** *: Og da viser det hvor mye temperaturen har blitt etter én uke, etter at du ganger det med én. Og det øker med to hver gang, så det skal være fjorten, seksten , atten [peker nedover i tabellen].*

Johannes umiddelbare forklaring på tabellen tar utgangspunkt i en eksplisitt sammenheng. Johanne forklarer verdien i den første raden i høyre kolonne i tabellen ved å sette inn verdien én og regne ut. Johanne fullfører så tabellen videre ved å bytte til en rekursiv sammenheng og øker med 2 for hver rad. Når Johanne videre skal representere funksjonen som en graf kobler hun inn funksjonsuttrykket og tar utgangspunkt i konstantleddet 12, før hun setter inn punkter som øker med to for hver x-verdi i koordinatsystemet. Hun benytter altså ikke verdiene i tabellen for å representere funksjonen som en graf. Med dette viser hun en fleksibilitet i sitt arbeid med å skifte representasjonsformer, og at hun innehar mer kompetanse enn kun en-til-en-konverteringer mellom ulike representasjonsformer.

Johanne viser høy grad av selvsikkerhet gjennom hennes arbeid med å utføre konverteringer og oversettelser av representasjoner som har vært jobbet med tidligere i undervisningseksperimentet, og viser på så måte tegn til en strukturell forståelse av variabelbegrepet. Hun viser også evnen til å koble bokstavene i det formelle funksjonsuttrykket til sin etablerte forståelse av variabler og de ulike representasjonsformene.

Som siste spørsmål i intervjuet blir Johanne spurt om sine tanker om videre arbeid med algebra.

11:04 ***Lærer*** *: Det er helt greit. Et siste spørsmål om veien videre etter denne første økten. Hvordan tror du at du kommer til å mestre videre arbeid med algebra?*
11:13 ***Johanne*** *: Ehm… [eleven fniser litt] jeg vet egentlig ikke [fniser litt til]. Eller jeg tror det går bra, bare jeg får litt mer tid, for jeg tror egentlig at jeg skjønner det.*

Johanne uttrykker noe usikkerhet rundt sine tanker om videre arbeid med algebra, men samtidig en tanke om at hun har forstått konseptet med bokstaver som variabler.

4.2 Åse

Åse forklarer i løpet av intervjuet at hun tidligere på barneskolen har blitt presentert for bokstaver i matematikken, gjennom blant annet å forkorte uttrykk. Ut i fra hennes beskrivelse virker det som hun har jobbet med å behandle bokstaver på nivå tre i Küchemann (1978) sin inndeling; bokstaver som objekter. Åse er derimot usikker på om hun har jobbet med bokstaver som variabler tidligere.

Når Åse blir presentert for oppgaven om badetemperaturen som stiger med to grader per uke fra midten av mai, og bedt om å forklare funksjonsuttrykket opp mot oppgaveteksten, viser hun evnen til å forstå et funksjonsuttrykk med bokstaver opp mot en ny situasjon.

01:37 ***Åse*** *: Ehm… [eleven pauser og ser på oppgaveteksten og funksjonsuttrykket på nytt.] to er fordi… Det er tolv der [peker på konstantleddet i funksjonsuttrykket] fordi den er konstant. Det er tolv grader fra før av. Og så to [peker på 2 i funksjonsuttrykket] fordi det stiger med to grader hver uke. Og så er det gange et antall uker. Og så y er, ehm… temperatur som stiger.*

Åse knytter bokstavene i funksjonsuttrykket til variable størrelser fra situasjonen, og forklarer de tolv gradene i vannet som konstant. Hun konverterer altså fra et funksjonsuttrykk med symboler til et funksjonsuttrykk med dagligspråk, med høy grad av selvstendighet.

Åse blir så bedt om å forsøke å forklare hva bokstavene i funksjonsuttrykket egentlig er for noe:

02:57 ***Lærer*** *: Men hvis vi skulle prøve å bruke matematikkspråket vårt og se litt bort fra oppgaveteksten, hva er egentlig x og y liksom?*
03:00 ***Åse*** *: Variabler. Det er avhengig [peker på y] og konstant [peker på 12]. X er uavhengig, og y er avhengig. Fordi y er avhengig av x-en.*

Åse viser her at hun behersker å omtale bokstavene i et funksjonsuttrykk som variabler, og trekker også inn en forståelse av at variablene er i et samspill i form av kovarians der y er avhengig av variabelen x. Åses selvsikkerhet og raske svar vitner om en forståelse av variabelbegrepet i funksjoner som hun har klart å overføre til bokstavene.

I prosessen med å forklare sammenhengen mellom funksjonsuttrykket og tabellene som representasjoner viser Åse en evne til å forklare de variable størrelsene i ulike representasjoner

05:19 ***Lærer*** *: Kan du prøve å forklare meg tabellen? Hvordan forstår du den tabellen her?*
05:24 ***Åse*** *: X er antall uker eller måneder. Og så y er hvor mye de stiger. Eller hvor mye det er. Ja ja.*
05:36 ***Lærer*** *: Så hva skjer egentlig nedover i tabellen, på en måte?*
05:41 ***Åse*** *: Det blir plusset med 2 hver gang. Eller verdien blir høyere.*
05:46 ***Lærer*** *: For hvis jeg sier her, eller jeg går inn her [peker på tabellen] også sier vi x - tre. Hvordan har jeg egentlig kommet frem til at det er atten? Hva har jeg gjort for noe?*
05:55 ***Åse*** *: Ehm… Ganget det med et annet tall kanskje? Ganget det med seks? [eleven er veldig nølende i tonefallet]*
06:01 ***Lærer*** *: Ja. Ja, altså den tabellen hører til samme oppgave altså.*
06:04 ***Åse*** *: Å ja! [eleven fniser litt i det hun oppdager at tabellen hører til samme oppgave].*
06:06 ***Åse*** *: Å ja, ja.*
06:09 ***Åse*** *: Da har du tatt. X. Ja. [eleven starter med forklaring men slutter og titter bare på arket].*
06:13 ***Lærer*** *: Kunne du fullført de to siste på tabellen da? Hvordan ville de sett ut? [eleven tar pennen og fullfører tabellen].*
06:27 ***Lærer*** *: Hva gjorde du nå?*

06:29 ***Åse*** *: Jeg tok… istedenfor at x er tre så ble den fire. Og så to ganger fire er åtte. Pluss tolv er tjue.*

Åse mestrer å representere funksjonen som en tabell gjennom å benytte en rekursiv sammenheng knyttet til stigningstallet, og en eksplisitt sammenheng der hun regner ut temperaturen i vannet ved å substituere variabelen x med verdier. Åse virker komfortabel med prosessen å forstå bokstaven x som noe som substitueres med en verdi, og at hun da vil kunne regne ut temperaturen basert på dette.

Åse benytter videre verditabellen sin til å sette opp punkter i et koordinatsystem. Åse blir så utfordret med spørsmålet om hvor grafen vil starte og hvorfor det. Hun beveger seg da uanstrengt vekk fra tabellen som representasjonsform og ser mot situasjonsbeskrivelsen for å svare på hvor grafen vil startet, ettersom tabellen laveste x-verdi er én. Hun mestrer også å kjenne igjen dette startpunktet til grafen i funksjonsuttrykket, ved å lokalisere konstantleddet.

07:18 ***Lærer*** *: Kunne du sette på funksjonsuttrykket også, uten å ha lest teksten.*
07:23 ***Åse*** *: Ja*
07:24 ***Lærer*** *: hvordan da?*
07:25 ***Åse*** *: Fordi det er pluss tolv og da er det en konstant.*

Åse viser gjennom intervjuet evnen til å forstå funksjonen ved hjelp av flere representasjonsformer samtidig, og konverterer mellom de tilsynelatende uanstrengt. På så måte viser hennes arbeid og uttrykte forståelse tegn til en strukturell forståelse for variabler i lineære funksjoner. Åse virker samtidig meget komfortabel med å adoptere og omtale bokstavene x og y som de variable størrelsene, altså å adoptere bruken av bokstaver til denne strukturelle forståelsen for variable størrelser.

Åse blir også spurt om sine tanker knyttet til videre arbeid med algebra.

09:49 ***Lærer*** *: [lærer skriver ned svaret og leser tilbake det eleven sier] Er det noe mer du vil si? [Eleven rister på hodet]. Et siste spørsmål. Hvordan tror du at det vil gå med videre arbeid med algebra?*
10:04 ***Åse*** *: Jeg tror det går bra! Jeg har jobbet litt med det før og føler jeg skjønner mye av funksjoner, så det tror jeg går fint [eleven smiler] så. Ja. [eleven fniser litt].*

4.3 Kaia

Kaia uttrykker at hun aldri tidligere har arbeidet med bokstaver i matematikken. Innledningsvis i intervju med Kaia fikk hun spørsmål om hva hun synes om arbeidet med gruppeoppgaven. Som observatør opplevde jeg henne ganske passiv i arbeidet og jeg var dermed interessert i å høre hennes tanker. Kaia presenterer som svar på dette en overraskende solid og selvsikker forklaring på y og x som variable størrelser i funksjoner

00:07 ***Lærer*** *: Sånn. Hva synes du om oppgaven du fikk å jobbe med? Var det noe som overraskaskelser, eller var det en kjent oppgave på en måte?*
00:15 ***Kaia*** *: Nei… Men det at x og y var variablene og sånt, det kunne man liksom skjønne seg til da og se på det stykket da.*
00:31 ***Lærer*** *: Ok, hva mener du med det?*
00:32 ***Kaia*** *: For eksempel fordi det står jo y er lik, så det må være liksom penger spart. Og x siden det ikke står noe, sånn antall måneder eller noe, så må det være x da.*
00:47 ***Lærer*** *: Så da, hva er y og x for noe da egentlig? Hvis vi skal ikke bruke penger spart eller antall måneder, men bare bruker matematikkspråket ditt. Hva vil du si at y og x er for noe?*
00:54 ***Kaia*** *: y [drar lenge på bokstaven mens eleven tenker] er… den avhengige variabelen, og x er den uavhengige variabelen, så det vil si er at y er avhengig av x.*
01:09 ***Lærer*** *: [noterer ned hva eleven har sagt] Ok, kan du forklare det litt mer? Hvordan de henger sammen? Hvordan påvirker den hverandre liksom?*
01:17 ***Kaia*** *: Så hvis x blir større, eller forandrer seg, da vil også y forandre seg. Fordi y er avhengig av x.*

I løpet av det første minuttet av intervjuet uttrykker Kaia en evne til å konvertere mellom et formelt funksjonsuttrykk og sitt daglige språk, og samtidig knytter hun forklarende begreper om variabler til bokstavene x og y og forklarer sammenhengen mellom de variable størrelsene i en lineær funksjon, ved å komme inn på kovarians mellom x og y.

For å undersøke denne uttrykte forståelsen nærmere blir Kaia videre presentert for den nye situasjonen med badetemperaturen. Kaia får opplest situasjonsbeskrivelsen før hun blir presentert for funksjonsuttrykket og bedt om å forklare hvordan de henger sammen.

02:28 **Lærer** : (…) *Kan du forklare hvorfor det funksjonsuttrykket her [peker på funksjonsuttrykket y=2x+12] hører til den oppgaven?*
02:48 ***Kaia*** *: Jo, fordi y er jo, for eksempel temperatur steget da? Og x er ganger antall uker.*
03:03 ***Lærer*** *: Hva blir tolv for noe her da?*
03:05 ***Kaia*** *: Tolv det er jo konstantleddet, for den er der fra før [lærer noterer ned det eleven sier]*

Nok en gang viser Kaia en selvsikkerhet knyttet til å forklare bokstavene i funksjonsuttrykket ved å knytte de til de variable størrelsene i situasjonsbeskrivelsen. Kaia benytter også begrepet konstantledd for å beskrive temperaturen som var i vannet ved situasjonens start.

Videre i intervjuet blir Kaia bedt om å forklare hvorfor den gitte tabell kan sies å være en representasjon av funksjonen som jobbes med.

04:49 ***Lærer*** *: (...) Snakker om tabell, så har jeg gjort klar en tabell her som hører til samme oppgaven. Si at x er en én, y er fjorten, x er to y er seksten, og så videre [peker på tabellen og tallene] Hvorfor kan jeg si at den tabellen er den samme funksjonen, bare en annen representasjon? Hva mener jeg med det?*
05:16 ***Kaia*** *: Ehm... At den blir representert på en ulik måte da. [eleven pauser i 4 sekunder før hun fortsetter] ehm... Den liksom... Her kan man jo se at x og y er der fra før [peker på kolonnene i tabellen]. Akkurat som i funksjonsuttrykket.*
05:35 ***Kaia*** *: Og det er tallene også, fordi man regner jo det [peker på 2x + 12 i funksjonsuttrykket] ut bare, hvis man viser regningen på den tabellen.*
05:43 ***Lærer*** *: Hvis jeg sier at x er ti, hvordan finner jeg ut hva y er i min tabell? Hva gjør jeg da?*
05:48 ***Kaia*** *: Da tar du to ganger ti pluss tolv [eleven peker mellom tabellen og funksjonsuttrykket for å forklare].*

Kaia forklarer altså hvordan tabellen er en representasjon av funksjonen ved å henvende til den eksplisitte sammenhengen i tabellen, og samtidig konvertere fra tabell til funksjonsuttrykk og tilbake. Når Kaia videre blir bedt om å representere funksjonen som en graf benytter hun en rekursiv sammenheng, i form av at hun tar utgangspunkt i konstantleddet og så øker med 2 for hver x-verdi.

06:41 ***Kaia*** *: Så ja, det var tolv grader fra før.*
06:46 ***Kaia*** *: Så da begynner vi her [eleven setter et punkt på koordinat (0,12)]. Jeg var på uke én så opp med to grader, så d[uklar tale] fjorten, seksten, atten, tjue, tjueto [eleven plasserer punkter].*
Hun setter altså ikke inn en ny verdi og utfører regnestykket for hvert punkt, men legger til 2 for hver plass hun flytter seg og representerer situasjonen som en graf ved å ta utgangspunkt i forståelsen om at «*tolv grader fra før*» viser til punkt (0,12) grafisk.

Ettersom Kaia viser selvtillit og mestring knyttet til å uttrykke en forståelse av bokstaver som variabler i funksjonsuttrykk ved å knytte de til andre representasjonsformer, og vise tegn til en strukturell forståelse av variabler i lineære funksjoner, gis hun avslutningsvis i intervjuet en utfordring i form av et tilfeldig funksjonsuttrykk, uten en konkret kontekst, som hun skal forsøke å forklare. Funksjonsuttrykket hun får presentert er y=3x+22:

08:48 ***Kaia*** *: Det at vi har to variabler her, er at det skal være svaret til funksjonen [peker til y i funksjonsuttrykket], som er y. Men her [peker til det som står etter likhetstegnet i funksjonsuttrykket] er det en regning, liksom, så vi kan ta for eksempel tre ganger to, eller noe fordi x er jo bare antallet noe.*
09:08 ***Kaia*** *: Og tjueto er konstantleddet, så det er der hele tiden, det det forandrer seg ikke.*
09:16 ***Lærer*** *: Så vi kan bare ta… X er jo på en måte noe, så vi kan bare sette inn for eksempel to? [leser tilbake for bekreftelse] Og hvis vi gjør det, så finner vi ut, hva for noe sa du?*
09:23 ***Kaia*** *: Du får hva svaret til funksjonsuttrykket er.*

I denne sekvensen av intervjuet uttrykker Kaia en overraskende god forståelse for bokstaver som variabler i lineære funksjoner og viser evnen til å overføre sine erfaringer knyttet til kontekster og virkelighetsnære situasjoner, til et funksjonsuttrykk uten kontekst, men likevel videreføre ideene om variablenes betydning. En slik abstraksjonsevne etter ett møte med bokstaver som variabler indikerer at hun muligens har mestret å innføre bokstaver gjennom en strukturell tilnærming, der hun har knyttet bokstavene til en etablert forståelse, og at hun med bakgrunn i dette også omtaler bokstavene med høy selvsikkerhet.

Kaia blir avslutningsvis spurt om sine tanker knyttet til videre arbeid med algebra.

09:29 ***Lærer*** *: Bra. Tror du at du kommer til å mestre videre arbeid med algebra?*
09:35 ***Kaia*** *: Jeg tror det, fordi det føles liksom greit. Så jeg tror det går bra.*

Kaia uttrykker at hun tror hun kommer til å mestre videre arbeid med algebra.

4.4 Siri

Siri uttrykker i løpet av intervjuet at hun tidligere har jobbet litt med bokstaver på barneskolen, men da i form av å forkorte uttrykk og behandle bokstaver som objekter, slik Küchemann definerer som nivå 3.

I innledende del av intervjuet med Siri løftes gruppeoppgaven frem for å undersøke hvordan hun vil forklare bokstavene x og y i den oppgaven nå, etter å ha diskutert som gruppe og fått litt tid til å bearbeide det. Siri var relativt passiv i arbeidet med mopedoppgaven og uttalte seg med usikkerhet de gangene hun bidro.

00:43 ***Lærer*** *: Husker du hva du sitter igjen med? Nå står jo funksjonsuttrykket foran oss her [peker på tavlen elevene jobbet med]. Det står det y er lik to hundre og femti x pluss tusen. Husker du noen hva du tenkte?*
00:56 ***Siri*** *: Ehm… Jeg tror jeg tenkte at nederst var x og oppe var y… [peker mot koordinatsystemet der grafen er tegnet] Det var bare de tingene jeg husker. Og så klarte jeg ikke helt å tenke helt...*

Siri er fremdeles nølende i sin forklaring av bokstavenes betydning, i intervjusituasjon, og forsøker å benytte x-aksen og y-akse for å forklare bokstavene i funksjonsuttrykket, slik hun også gjorde umiddelbart i mopedoppgaven.

Intervjuet beveger seg så videre til den nye situasjonen, med badetemperatur, der hun blir bedt om å forklare hvorfor funksjonsuttrykket med bokstaver er en representasjon av den gitt situasjonsbeskrivelsen. I denne prosessen bruker Siri lang tid og beveger seg mye frem og tilbake mellom det gitt funksjonsuttrykket med bokstaver og situasjonsbeskrivelse. Hun kommer omsider frem til en korrekt forklaring av bokstavene og funksjonsuttrykkets betydning, opp mot konteksten .

01:35 ***Lærer*** *: Kan du forklare det funksjonsuttrykket her? Her står det y er lik to x pluss tolv.*
01:42 ***Siri*** *: Ehm…. [leser oppgaven og ser på oppgavearket i 5 sekunder]*
01:47 ***Siri*** *: Kanskje y er… temperaturen stiger?*
02:03 ***Siri*** *: Og… [eleven pauser i 6 sekunder mens eleven studerer oppgaven videre] Og så to… For det er to…*
02:08 ***Siri*** *: For den stiger med to, ikke sant? Og så putter jeg ganger. to ganger x er… [drar på ordet er. Pauser 4 sekunder]*
02:20 ***Siri*** *: Ehm, det skal bare… [mumler litt mens hun studerer oppgaven]*
02:26 ***Siri*** *: Er ikke det antall… X er antall...*
02:32 ***Siri*** *: Antall uker?*
02:34 ***Lærer*** *: Ja.*
02:35 ***Siri*** *: Og så… Plusses på tolv.*
02:39 ***Lærer*** *: Ja. Ja, hvorfor plusser vi på tolv?*
02:39 ***Siri*** *: For at du starter på tolv.*

Siri uttaler seg meg usikkert og henvender seg ved flere anledninger til meg for bekreftelser for hennes tanker. For å kontrollere om Siri faktisk har forstått konverteringen mellom funksjonsuttrykket og sitt funksjonsuttrykk med dagligspråk blir hun bedt om å forklare bokstavenes betydning og hvorfor vi har 2 ulike bokstaver i funksjonsuttrykket.

03:11 ***Lærer*** *: Hva er da y og x da, hvis du skal prøve å forklare det med ord?*
03:15 ***Siri*** *: Y, er ikke det… Det. Er ikke begge to liksom, variabler?*
03:23 ***Lærer*** *: Jo, begge to er variabler… [noterer i skjema 3 sekunder] For da lurer jeg på… Kan du forklare hvorfor det brukes to forskjellige bokstaver i uttrykket? Hva er ulikt med de to? Du sier at*

begge to er variabler, jeg er helt enig, men hvorfor heter dem ikke da x og x? Hvorfor heter det y og x? Hvorfor bruke to forskjellige?
03:43 ***Siri*** *: Kanskje for å skille dem ut og… [pauser 2 sekunder] De er jo forskjellig, selv om de er variabel. En er uavhengig og andre er avhengig.*
03:57 ***Lærer*** *: Hva betyr det?*
03:59 ***Siri*** *: Ehm... uavhengig er at [pauser 2 sekunder] At den er uavhengig av liksom, og den andre avhengig av den andre, liksom… Den uavhengig bytter på, og da er den ene avhengig av den, sånn at den kan byttes på der og… [peker mellom x og y i funksjonsuttrykket].*
04:15 ***Lærer*** *: Ja, så hvis du bytter på antall uker, hva skjer da med temperaturen?*
04:22 ***Siri*** *: Da bytter temperaturen. Ja, sånn.*

Siri viser at hun gjør en kobling mellom begrepene uavhengig og avhengig variabel, som er arbeidet med tidligere i undervisningseksperimentet, og at hun har en forståelse for at de to variablene påvirkere hverandre. Hun trekker derimot ikke inn selve situasjonen for å forklare forskjellen på de to variablene, før jeg påpeker dette, noe som kan indikere en usikkerhet knyttet til koblingen mellom bokstavene, variabelbegrepet og den gitt konteksten, og dermed muligens en mangel på en strukturell forståelse for variablene.

Siri viser stor usikkerhet knyttet til sitt arbeid med å konvertere funksjonsuttrykket til en tabell og graf. Siris usikkerhet med konverteringer og behandlinger av representasjoner gir et inntrykk av at variabler, og det matematiske objektet funksjoner, er noe vanskelig å forholde seg til. Hun er i stand til å utføre konverteringer og viser forståelse for at en funksjon kan representeres på ulike måter, men viser gjennom intervjuet en mangel på selvsikkerhet og flyt knyttet til dette arbeidet. I sitt konverteringsarbeid og gjennom hennes uttrykte forståelse for variablene i ulike representasjonsformer viser Siri tendenser til å belage seg hovedsakelig på en operasjonell forståelse for variabler i lineære funksjoner. Siri viser at hun kan utføre enkle operasjoner i konverteringsarbeidet, men virker å mangle en helhetlig strukturell forståelse, noe som også virker å prege hennes selvsikkerhet med å behandle bokstaver som variabler, etter dette første møtet med formell algebraisk notasjon. Dette kan muligens forklares med at mopedoppgavens hensikt var å undersøke om elevene mestret å adoptere og uttrykke en forståelse for bokstavene uten å lære de gjennom prosedyrer (operasjonell forståelse) men ved å knytte de til en strukturell forståelse.

Avslutningsvis i intervjuet blir også Siri spurt om sine tanker om videre arbeid med algebra

12:19 ***Lærer*** *: Flott. Og helt til slutt så tenker jeg på at vi skal jobbe en del videre med algebra fremover nå. Og så lurer jeg på, hvordan tror du at det vil bli å jobbe med algebra? Når har vi jo brukt x og y litt som variabler.*
12:25 ***Siri*** *: Jeg vet ikke helt. Jeg tror jeg sikkert skjønner det, fordi jeg skjønner liksom funksjoner og sånn. Også har jeg jo jobbet litt med det før. Så det går sikkert bra.*

Siri uttrykker også her noe usikkerhet, men samtidig at hun tror det vil gå greit ettersom hun mener hun forstår funksjoner.

4.5 Mia

Mia uttrykker i løpet av intervjuet at hun aldri tidligere har jobbet med bokstaver i matematikken. Hun var tidlig ute med å knytte begrepene avhengig- og uavhengig variabel i funksjonsuttrykket med ord, til det formelle funksjonsuttrykket med bokstaver, i arbeidet med mopedoppgaven. Mia ble derimot noe passiv i gruppearbeidet, som var dominert av Johanne og Åse, og intervjuet innledes derfor med å snakke litt om hvordan oppgaven opplevdes, for å få et bedre innblikk i hennes uttrykte forståelse. Mia uttrykker da at bokstavene opplevdes som en forenkling av funksjonsuttrykket for henne, ettersom man da ikke måtte skrive så mye som i et funksjonsuttrykk med ord.

00:12 ***Lærer*** *: Ehm… Hva tenker du om oppgaven dere jobba med? Hvordan var det å jobbe med den oppgaven?*
00:18 ***Mia*** *: Emh, enklere fordi vi måtte ikke... Jeg vet ikke, hvis du bruker y og x behøver man ikke skrive like mye.*
00:27 ***Lærer*** *: Nei, ikke sant, så hvis du bruker y og x, må du ikke skrive så mye? [gjentar for bekreftelse. Mia nikker].*
00:32 ***Lærer*** *: Oppgaven i sin helhet da, var det sånn du kjente igjen? Lignet det på en måte på noe vi har jobbet med tidligere? [eleven nikker og bekrefter.]*
00:41 ***Lærer*** *: Jeg bare skriver det første du sa, for det kan jeg tenke litt på… [noterer på arket og leser tilbake det eleven sa tidligere] Hvis vi bruker x og y, må vi ikke skrive så mye.*
00:50 ***Lærer*** *: Hva mener du egentlig med det?*
00:52 ***Mia*** *: Du må ikke skrive sånn penger spart, og da skjønner du at det er det samme, på en måte, bare at du ikke må skrive alt.*

Gjennom sine uttalelser virker Mia å vise tegn til at innføringen av algebraisk notasjon har opplevdes som meningsfull og behjelpelig for hennes matematiske arbeid, ved at bokstavene faktisk har forenklet en prosess for henne. Når Mia videre får presentert den nye situasjonen med badetemperatur, og tilhørende funksjonsuttrykk med bokstaver, for å forklare sammenhengen mellom dem, fortsetter hun med høy grad av selvsikkerhet og lite nøling.

01:42 ***Lærer*** *: [avbryter eleven] Hvorfor ser funksjonsuttrykket til den teksten sånn ut, liksom?*
01:47 ***Mia*** *: Det der er [peker på bokstaven y] temperaturen. Y, tror jeg. Og det er avhengig variabel. Og to er... Hvor mye den stiger per uke. Og x er… Antall… Uker [drar lenge på ordet uker]. Også må du plusse på tolv fordi det var tolv grader fra før av.*

I møtet med den nye situasjonen viser Mia evnen til å konvertere fra funksjonsuttrykk med bokstaver til funksjonsuttrykk med ord ut i fra situasjonsbeskrivelse, med høy grad av selvsikkerhet, mens hun i tillegg knytter på matematiske begrep om funksjoner og variabler i sin forklaring. Hun viser dermed en tendens til å knytte bokstavene til en strukturell forståelse for variabler. Hun blir videre bedt om å forklare hvorfor det brukes 2 ulike bokstaver i funksjonsuttrykket og utdyper da ytterligere.

03:06 ***Mia*** *: Begge er variabler, men de er… brukes på forskjellige måter.*
03:11 ***Lærer*** *: [avbryter eleven] Oi, forklarer det!*
03:13 ***Mia*** *: Den ene er avhengig av den andre, for å liksom. [lærer noterer ned. Eleven stopper opp i 3 sekunder]*
03:20 ***Lærer*** *: Ja, hva mener du med det?*
03:23 ***Mia*** *: Liksom y er avhengig av x for at den skal forandre seg.*
03:32 ***Lærer*** *: Kunne du gitt et eksempel for å forklare det?*
03:35 ***Lærer*** *: Det er veldig interessant det du sier, altså «y er avhengig av x for å forandre seg».*
03:40 ***Mia*** *: Hvis det står to på x, så bytter svaret på y seg. Hvis det hadde vært tre så endrer det seg.*

Mia uttrykker seg stadig på en måte som jeg mener tyder på at hun har oppnådd en reification av variabelbegrepet, og adopterer bokstavene til sin forståelse med høy grad av selvsikkerhet og fortrolighet.

Mia blir videre i intervjuet bedt om å forklare hvorfor en gitt tabell kan sies å være en representasjon av den samme funksjonen som jobbes med. Mia viser i denne prosessen evnen til å konvertere tabellen til funksjonsuttrykket og regne ut verdier gjennom en eksplisitt sammenheng i tabellen, og direkte kobling til funksjonsuttrykket:

06:37 ***Mia*** *: Det som står der [peker på høyre kolonne i tabellen] er det du gjør der, liksom? [peker på 2x+12 i funksjonsuttrykket]*

Mia utfører altså nok en smidig konvertering av representasjonsform fra tabell til funksjonsuttrykk og viser med det nok et tegn til en strukturell forståelse av variabler i lineære funksjoner.

Mia får også avslutningsvis en uplanlagt utfordring om å forsøke å forklare et helt vilkårlig funksjonsuttrykk med bokstaver, for å sjekke hvordan hun reagerer om bokstavene tas ut av gitte kontekster og situasjonsbeskrivelser. Hun gis funksjonsuttrykket y=34x+8:

08:29 ***Lærer*** *: Hvis jeg spør deg nå da, sånn helt ut av det blå. Det går vi helt vekk fra en oppgavetekst, så får du for eksempel bare : y er lik trettifire x pluss åtte skriver jeg, hvordan vil du forklare hva y og x er for noe? [skriver ned et tilfeldig funksjonsuttrykk på arket].*
08:44 ***Mia*** *: Det der [peker på x i uttrykket] er hvor mange... X er hvor mange ganger du skal gange 34 med, og y er på en måte svaret, på liksom alt det som står der [peker til høyre side av likhetstegnet].*
08:58 ***Lærer*** *: Ja supert. Og hvis du får en enda større utfordring. Hvis du bare skal prøve å bruke så matematisk presist språk som mulig. Alt vi har snakket om og sånn. Alt du kan si om x og y, hva ville du sagt.*
09:15 ***Mia*** *: At y er en variab… eller at begge er variabler, men y er avhengig av x er uavhengig.*

Mia viser evnen til å forstå bokstavene som variabler utenfor en bestemt kontekst eller situasjon. Dette kan indikere evnen til å adoptere bokstavene til en strukturell forståelse for variabelbegrepet, og evnen til å forholde seg til bokstaver som variabler selv om oppgavene endrer karakter. Denne indikasjonen forsterkes så videre av Mias avslutningskommentar til intervjuet, der hun blir spurt om sine forventninger til videre arbeid med bokstaver matematikken

09:27 ***Lærer :*** *Flott. Helt, helt til slutt da. Hva tenker du om vårt videre arbeid med algebra fremover nå. Hvordan tror du det vil gå å lære seg algebra?*
09:34 ***Mia*** *: Jeg tror det kommer til å gå fint, fordi jeg forstår hvorfor det er x og y og variabler og sånn. Så ja. Jeg tror det går, bra.*

4.6 Karl

Karl mener at han ikke har jobbet med bokstaver i matematikken tidligere, men er noe usikker når han sier dette. Gjennom arbeidet med mopedoppgaven var Karl lite delaktig og fikk dermed ikke uttrykt mange tanker eller kommet med mange innspill. Innledningsvis i intervjuet løftes derfor mopedoppgaven frem for å sjekke om han har noen tanker som kan være interessante å ta tak i. Karl sier at han forstod mye av mopedoppgaven, men at det ble forvirrende når bokstavene ble introdusert.

00:30 ***Karl*** *: Jeg, jeg skjønte sånn førsten, men altså med det der bokstavene, så ble det litt mer forvirrende.*

I møte med den nye situasjonen med badetemperaturer, og med spørsmål om å forklare hvorfor det gitte funksjonsuttrykket med bokstaver kan sies å være en representasjon av situasjonen, behersker Karl å knytte situasjonsbeskrivelsen til funksjonsuttrykket, og på så måte utføre en konvertering mellom representasjonene. I likhet med Siri, utfører Karl denne konverteringen med stor grad av usikkerhet og med behov for oppklarende spørsmål fra lærer for å bekrefte om han er blitt forstått riktig.

01:27 ***Lærer*** *: Og så får du vite at funksjonsuttrykket som hører til den teksten er y er lik to x pluss tolv. Tror du klarer å forklare hvorfor det uttrykket hører til den teksten?*
01:42 ***Karl*** *: Ehm… e, hva… ehm.. [eleven lager lyder og ser på oppgaven i 6 sekunder]*
01:48 ***Lærer*** *: Hvordan stemmer det her? På en måte, kan du forklare dem ulike delene av funksjonen opp mot teksten som du har fått foran deg?*
01:58 ***Karl*** *: Ja. Y er gradene. Og så… Ehm… Jeg må bare huske på hva det var igjen… [pauser i 3 sekunder] så to… to ganger, antall måneder.*
02:19 ***Lærer*** *: Antall uker, ja?*
02:20 ***Karl*** *: Ja, antall uker. Og så pluss tolv.*
02:23 ***Lærer*** *: Hvorfor pluss tolv?*
02:25 ***Karl*** *: Fordi at det startet og var tolv grader i vannet fra før av*
02:28 ***Lærer*** *: Ja. Så y er antall grader? [noterer og leser tilbake det eleven har sagt]*
02:34 ***Lærer*** *: Og så sa du to, ganger antall uker, også pluss tolv, fra før? [elven bekrefter nikkende til det lærer leser tilbake].*

Når Karl så skal forsøke å forklare hva bokstavene egentlig er for noe, uttrykker han at han ikke vet hvordan han skal forklare dette.

02:51 ***Lærer*** *: Men hva kaller vi da… Hvis vi skal prøve å bruke matematikkspråket ditt liksom. Hva vil du kalle bokstaven y og x? Hva er det liksom?*
03:06 ***Karl*** *: [eleven pauser i 4 sekunder] Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal forklare det.*

Ettersom Karl virker usikker knyttet til bokstavenes betydning, rettes oppfølgingsspørsmålet mot det tidligere arbeidet i undervisningseksperimentet, for å undersøke om Karl har en forståelse for variabelbegrepet når han kan benytte sitt daglige språk, og om hans usikkerhet er mer knyttet til å akseptere bokstavene som representanter for de variable størrelsene

03:08 ***Lærer*** *: Hva ville du, Hvordan vil du forklarte hva antall grader og antall uker er da? Om vi hadde brukt de begrepene i funksjonsuttrykket.*
03:16 ***Karl*** *: Mener du sånn med variabler og sånn?*

03:18 ***Lærer*** *: Ja.*
03:21 ***Karl*** *: Å ja. Ja. Ja. Ja... Det er en variabel.*

Ved at jeg skifter representasjonsform fra funksjonsuttrykk med bokstaver til funksjonsuttrykk med ord virker Karl å koble på lærte begreper om variabler. Dette oppleves derimot som en operasjonell forståelse og ren mekanisk, fremfor en strukturell forståelse med innsikt i betydningen av det han uttrykker. Karl blir videre bedt om å forklare hvorfor det brukes to ulike bokstaver.

03:24 ***Lærer*** *: OK, kan du si noe… Ehm… for det neste spørsmålet er jo da om du kan forklare hvorfor vi har to forskjellige bokstaver?*
03:37 ***Karl*** *: Den ene er avhengig og den andre er uavhengig.*
03:41 ***Lærer*** *: Hvilken av de er hva? [peker til funksjonsuttrykket]*
03:43 ***Karl*** *: Den der er x én er uavhengig og y- en er avhengig.*
03:47 ***Lærer*** *: Kan du prøve å forklare hvordan du forstår hva det betyr?*
03:52 ***Karl*** *: Hvis x-en skiftes, eller hvis antall uker…. Hvis det blir mer av den [peker på x] så blir antall grader også høyere. Eller samme hvis det er mindre uker så blir det mindre der [peker til y i funksjonsuttrykket].*

Det som er en spennende observasjon i denne sekvensen er at når Karl får hjelp til å utføre konverteringen fra funksjonsuttrykk med bokstaver til funksjonsuttrykk med ord så virker han plutselig veldig raskt selvsikker med å omtale bokstavene som representanter for de variable størrelsene. Han bruker altså x og « antall uker» og y og «antall grader» om hverandre i det han forklarer forskjellen på uavhengig og avhengig variabel.

Når Karl videre blir bedt om å forklare hvorfor tabellen er en representasjon av den samme funksjonen benytter han sin forståelse av situasjonsbeskrivelsen til å forklare sammenhengen, og baserer seg videre på den rekursive sammenhengen i tabellens høyre kolonne, ved at den øker med 2 grader per uke. Når Karl videre får spørsmål om å regne ut verdien til y når x er 10, viser han evnen til å skifte til en eksplisitt sammenheng:

07:23 ***Lærer*** *: Ok, så hvis jeg sier at x hadde vært ti da, hvordan kunne jeg regne ut hvor mange grader det kommer til å være i vannet da? Hva hadde jeg gjort da.*
07:41 ***Karl*** *: Ehm… [pauser 2 sekunder] Gange to med ti.*
07:43 ***Lærer*** *: Ja to, ganger ti... noe mer? [skriver ned det eleven sier]*
07:49 ***Karl*** *: Ehm… Jeg er ikke helt sikker.*
07:53 ***Lærer*** *: Men to ganger ti. Hvorfor sa du ganger ti egentlig? Bare sånn for å få oppklart det.*
07:58 ***Karl*** *: Fordi det har gått ti uker, og du skal gange to med antall uker. Også bare plusser du på tolv [lærer noterer ned stikkord og leser tilbake]*

I denne uttrykte forståelsen av tabellen viser Karl tegn til å kjenne til en operasjonell forståelse knyttet til å sette opp en tabell som representasjonsform ut i fra en situasjonsbeskrivelse og funksjonsuttrykk, men han fremstår ikke trygg i sin forklaring. Nok en gang preges altså Karls uttalelser av stor grad av usikkerhet.

Mot slutten av intervjuet blir Karl bedt om å forklare hvordan han forstår hva y og x er for noe.

10:28 ***Karl*** *: Ehhh. La oss si at y er antall måneder eller uker eller dager, eller minutter. Og så er x… Det er det tallet som skal ganges med.*
10:41 ***Lærer*** *: Bra. Hvis jeg skal utfordret deg på å ikke sette det i en kontekst og ikke sette det i en oppgave som handler om minutter og sånt, men bare bruker matematikkspråket ditt. Klarer du å forklare hva y og x er for noe?*
10:56 ***Karl*** *: Y og x er variabler, og så y er en avhengig variabel, men x er en uavhengig variabel.*
11:06 ***Lærer*** *: Og det betyr?*
11:07 ***Karl*** *: At hvis [pauser i 3 sekunder]*
11:10 ***Karl*** *: Hvis det. [pauser i 4 sekunder]*
11:14 ***Karl*** *: Hvis x er blir mer eller mindre, så skifter det y er verdt.*

Karl virker utvilsomt å ha lært en del begreper om variabler i funksjoner i løpet av undervisningseksperimentet, og fra start til slutt av intervjuet oppfattes måten han omtaler bokstavene x og y som variabler på, som mer selvsikker. Samtidig kobler han begreper vi har benyttet for den uavhengige variabelen gjennom undervisningseksperimentet (antall måneder, uker, dager) til bokstaven y, i sin forklaring, og virker dermed muligens å mangle en helhetlig, strukturell, forståelse for variabler i lineære funksjoner på dette tidspunktet.

Avslutningsvis i intervjuet blir Karl spurt om sine forventninger til videre arbeid med algerba

11:28 ***Lærer*** *: Og så lurer jeg på… Nå skal vi jo jobbe videre med algebra. Hva tenker du om å jobbe videre med bokstaver i matematikken og lære regler for algebraregning fremover?*
11:33 ***Karl*** *: Det blir spennende. Og sikkert ganske vanskelig…*

Karl uttrykker også her noe usikkerhet knyttet til bokstaver i matematikken, men også en interesse i det han uttrykker at det blir spennende.

4.7 Noen sentrale funn i analyse

I intervjufasen av denne forskningen klarer samtlige elever å formulere en forklaring på hvordan funksjonsuttrykket med formell algebraisk notasjon og situasjonsbeskrivelsen i oppgaven med badetemperatur henger sammen. Samtlige elever plukker ut korrekte variable størrelser fra situasjonsbeskrivelsen, uttrykker et verbalt funksjonsuttrykk og knytter så bokstavene x og y i funksjonsuttrykket til situasjonen. Dette samsvarer på så måte med gruppens uttalte forståelse for bokstavene etter deres første møte i mopedoppgaven, der gruppen konkluderte med at bokstavene representerer de variable størrelsene i deres funksjonsuttrykk med ord. Elevene utfører dog denne konverteringen og toveis-forklaringen mellom representasjonene med ulik grad av selvsikkerhet, i intervjufasen, og elevene Karl og Siri er ganske avhengig av bekreftelser i prosessen.

Elevene viser gjennom sitt arbeid med badetemperatur-oppgaven å inneha noe ulike trygghet og forståelse i sine konverteringer mellom representasjonsformene av funksjonen. Dette kan tyde på at noen av elevene er kommet lenger i en condensation-fase av innlæringen av variabelbegrepet i lineære funksjoner, enn andre. Noen av elevene viser også såpass trygghetstegn i måten de uttaler seg om de variable størrelsene i ulike representasjoner på, at det vitner om at det muligens er i en reification-fase av variabelbegrepet. Siri og Karl viser tidvis tegn til at de støtter seg til en operasjonell forståelse når de utfører konverteringer mellom representasjonsformer, og samtidig tegn til at de mangler noe helhetlig og strukturelt overblikk over variabelbegrepet. Disse to elevene er også de to som virker mest usikre når de skal forklare hva bokstavene i funksjonsuttrykket er.

Selv om Siri og Karl fremstår noe usikre i sine uttalelser, viser de samtidig at de kan ganske mye om variabler i lineære funksjoner. De uttrykker en forståelse for de variable størrelsene i funksjonsuttrykket, men samtidig en manglende evne til å adoptere bokstavene med flyt og selvsikkerhet. De fire andre elevene viser derimot tegn til å inneha en relativt solid forståelse av variabelbegrepet gjennom sine konverteringer og forklaringer. Johanne, Kaia, Åse og Mia omtaler alle bokstavene med ganske høy grad av utstrålt selvsikkerhet, og virker å ha mestret å koble bokstavene på sin uttrykte strukturelle forståelse for variabler i lineære funksjoner.

Kaia og Mia blir begge utfordret til å forklare bokstavenes betydning i vilkårlige funksjonsuttrykk, uten tilknytting til en kontekst, og mestret begge godt å forklare og omtale bokstavene x og y som variable størrelser i denne prosessen. Dette kan indikere at elever som knytter bokstaver til en etablert forståelse kan bevege seg over i mer abstrakt arbeid med å behandle bokstaver uten store kognitive utfordringer.

Av de seks elevene uttrykker fem av de seg på en positiv måte angående videre arbeid med algebra i matematikken, etter dette første møtet med bokstaver. Karl uttrykker at han tror det kommer til å bli vanskelig, men spennende, og på så måte ikke direkte negativt til prosessen videre.

5.0 Drøfting og avslutning

I denne masterforskningen har jeg vært interessert i å undersøke elevers forståelse av bokstaver som variabler i funksjoner, etter et første møte med formell algebraisk notasjon. Jeg har designet et undervisningseksperiment der 40 elever, fordelt på to åttendeklasser, har deltatt. I undervisningseksperimentet har elevene gradvis blitt introdusert for variabelbegrepet i lineære funksjoner, knyttet til virkelighetsnære oppgaver som er formulert slik at elevene skulle kunne kjenne seg igjen i- og relatere til situasjonene, og ut i fra en tanke om å benytte algebraisk tenking i introduksjonsfasen. Forskningen min er inspirert av en tanke om å benytte funksjoner, støttet av modellering-, som tilnærming til algebra. For å besvare mitt forskningsspørsmål har jeg gjennomført en strategisk forskningstime og oppfølgende intervjuer med seks elever, og analysert deres aktivitet og utsagn via en kvalitativ metode. Jeg har presentert relevant teori som har bygd opp mitt teoretiske rammeverk. Dette har jeg så benyttet for å analysere elevenes uttrykte forståelse for bokstaver som variabler, i arbeidet med en gruppeoppgave om mopedsertifikat, og så senere i individuelt arbeid med en oppgave om badetemperatur. Ut i fra mine resultater fra analysen vil jeg nå forsøke å besvare mitt forskningsspørsmål ved å drøfte noen av resultatene mot teori og tidligere forskning.

Mitt forskningsspørsmål var:
Hvilken forståelse uttrykker elever på 8.trinn om bokstaver som variabler i funksjonsuttrykk, etter et første møte med formell algebraisk notasjon, i et undervisningseksperiment der funksjoner er benyttet som tilnærming til algebra?

5.1 Algebraisk tenking – språkets rolle i utvikling av forståelse

Duval (1999); Heid (1996); Lamon (1998) og Radford (2010) poengterer alle hvordan det dagligdagse språket kan være en hensiktsmessig bro til en mer formell algebraisk notasjon, ved at elevene trenes opp i å uttrykke seg presist, med de semiotiske uttrykksformene de er kjent med, for så å gradvis eksponeres for en oversettelse til formell algebraisk notasjonsform. I denne forskningen mener jeg det foreligger relativt klare indikasjoner på at elever på åttende trinn har dannet en forståelse for variable størrelser i lineære funksjoner, samt hvordan de henger sammen og påvirker hverandre, uten å benytte formell algebraisk notasjon. Elevene viser tegn til at de, ved hjelp av sitt daglige språk og representasjonsformene tabell og graf, har utviklet en konseptforståelse for variabelbegrepet i lineære funksjoner. Fire av seks elever viser solide tegn på at denne forståelsene er godt etablert, mens to av elevene viser tegn til forståelse men med noe usikkerhet.

Når den strategiske forskningstimen ble gjennomført og denne dataen ble samlet inn hadde vi jobbet med funksjoner, uten bruk av bokstaver, i seks uker. Det er derfor på sin plass å belyse tidsbruken i denne tilnærmingen til algebra. I den sammenhengen vil nok noen mene at elevene ville rukket å jobbe med flere oppgaver og fått til mer mengdetrening med en mer tradisjonell arbeidsform; spesielt mer tid med å jobbe med bokstaver som variabler, ettersom de ikke ble introdusert før det var gått seks uker. Noen elever ville nok også muligens lært mer i en slik prosess. I den forbindelse oppleves det likevel som at elevene i denne forskningen, gjennom å bruke god tid på oppgaver de har et forhold til og med sitt språk, har utviklet en forståelse for konseptet variabler som muligens ikke ville kunne oppnås gjennom en mer tradisjonell arbeidsmåte med funksjoner. Med et raskt blikk tilbake på min egen undervisningspraksis de siste ni årene kan jeg med hånden på hjertet si at jeg tidligere år har hatt mye mer fokus på å trene opp elevene i prosedyrer og utvikle en operasjonell forståelse. Mye av grunnen til dette er rettet mot at jeg har fulgt lærebøker, samt jobbet mot tidligere eksamensoppgaver der det har ligget forventninger om hvilke typer oppgaver elevene vil bli testet i. Aldri tidligere har jeg dedikert så mye tid på å legge til rette for å etablere en forståelse for konsepter, benytte det daglige språket i utformingen av funksjonsuttrykk og forsøkt å legge til rette for å danne en helhetlig strukturell forståelse av variabler i funksjoner for elevene.

Duval (1999) argumenter for at mye av elevers misoppfattelser i matematikk stammer fra denne manglende forståelsen med sitt daglige språk, og at mye skyldes at lærer ofte dedikerer for mye tid til de rent matematiske prosedyrene, fremfor å knytte innlæringen til dagligdagse, fysiske eller økonomiske problemer og på så måte bidra til å danne et helhetlige bilde av objektene som arbeides med (Duval, 1999). I læreplan, LK20, står dybdelæring sentralt, og er noe som skal prege undervisningen uansett fag og emne. I arbeid med funksjoner i matematikk opplevdes det da helt innlysende å sette av god tid til å jobbe med konkrete situasjoner fra virkeligheten og bli kjent med hvordan variable størrelser påvirker hverandre og henger sammen. Pinto (2021) sin forskning om en funksjonstilnærming til algebra bygger også på en tanke om å benytte mye ekte situasjoner fra virkeligheten til elevene og la elevene benytte de semiotiske uttrykksformene de har tilgjengelig, fremfor formell algebraisk notasjon. Pinto viser også til at hennes elever etablerer en konseptforståelse i denne prosessen, og antyder også at det oppleves som en potensiell solid bru til mer abstrakt arbeid med algebra, slik jeg også opplever ut i fra mine forskningsresultater. Heid (1996) viser til at det er fullt mulig å lære elever i tolv års alderen å formulere algebraiske sammenhenger om funksjoner, så lenge konteksten er gjenkjennbare for elevene og at det er tillatt å benytte sitt naturlige språk mens man beholder en presis formulering rettet mot funksjonsproblemet. Dette viser også elevene i denne forskningen tegn til, i sitt arbeid med mopedoppgaven på gruppe. I første fase i denne oppgaven skulle elevene formulere et funksjonsuttrykk ut i fra en situasjonsbeskrivelse, noe de utførte helt uproblematisk. Denne innledende oppgaven var designet ut i fra en måte elevene var vant med å jobbe på gjennom tidligere oppgaver i undervisningseksperimentet, og dermed en innlært prosedyre eller operasjonell forståelse. På så måte vil jeg argumentere for det Heid (1996) belyser, og mener det kommer tydelig frem i denne forskningen at elevene utvilsomt viser seg kapable til å formulere funksjonsuttrykk og omtale variable størrelser relativt problemfritt, når de får benytte sitt kjente daglige språk.

5.2 Rekursive og eksplisitte sammenhenger

Lannin et al. (2006) peker på viktigheten av at lærere legger til rette for at elever skal arbeide med og beherske å se rekursive og eksplisitte sammenhenger for å bedre forståelsen for fenomenet som jobbes med. I denne forskningen kommer det tydelig frem tegn til at elevene drar nytte av både rekursive og eksplisitte sammenhenger i sitt arbeid med tabell som representasjonsform. I den rekursive sammenheng ligger en direkte kobling til stigningstallet til funksjonen. I mopedoppgaven belyser Johanne denne sammenhengen selv, og gjennom de individuelle intervjuene viser flere elever tegn til å benytte seg av denne sammenhengen i arbeidet med tabell og graf som representasjonsformer. Gjennom bruken av den rekursive sammenhengen får elevene mulighet til å uttrykke og undersøke sammenhengen mellom stigningstallet, og dens påvirkning på endring i den avhengige variabelen. Elevenes evne til å skifte til en eksplisitt sammenheng har derimot vært mest interessant å undersøke i denne forskningen, for å lete etter tegn til uttrykt forståelse for variablenes samspill. Gjennom deres skifte til en eksplisitt sammenheng kommer det frem om elevene mestrer å sette inn verdier for den uavhengige variabelen og dermed regne ut funksjonsverdien. Slik Lannin et al. (2006) belyser er arbeidet med en bevisstgjøring rundt rekursive og eksplisitte sammenhenger viktig for å utvikle elevene forståelse, noe som også blir tydelig i arbeidet med variabler i lineære funksjoner.

I arbeidet med mopedoppgaven i gruppe skiftet elevene til en eksplisitt sammenheng i arbeidet med tabellen i digital form (GeoGebra), som en konsekvens av at de har lært å benytte en formel i tabellen for å kunne autofullføre tabellens høyre kolonne. Heid (1994) fant også i sin studie tegn til at elevene endret forståelse av tabellen fra en rekursiv til eksplisitt sammenheng når de skiftet fra analog til digital visning.

Åse og Mia uttrykker en direkte kobling mellom tabellen og funksjonsuttrykket, ved å belyse hvordan den eksplisitte sammenhengen i tabellen direkte knyttes til funksjonsuttrykket, og at man regner ut den avhengige variabelen ved å sette inn en verdi for den uavhengige variabelen i funksjonsuttrykket. En slik kobling bringer frem et interessant moment knyttet til å forstå funksjoner og å forstå variabler. Slik Sfard (1991) og Duval (1999) poengterer er matematiske objekter kun tilgjengelig via dens representasjoner, og det å benytte en eksplisitt sammenheng ved å skrive en formel i regneark for å sette opp representasjonen tabell, og koble dette til funksjonsuttrykket, kan være gunstig å belyse og gjøre elevene bevisst på i fremtidig arbeid med innlæring av objektet funksjoner via dens representasjoner. I denne forskningen viser altså to elever til denne sammenhengen, uten at det er belyst av meg som lærer i undervisningseksperimentet tidligere. Denne koblingen mellom representasjoner mener jeg potensielt kan være en solid tydeliggjøring av hvordan representasjonene faktisk er ulike visualiseringer av samme fenomen, og på den måten muligens også bidra til å styrke den strukturelle forståelsen for variabler og funksjoner ytterligere.

5.3 Forståelse av bokstaver som variabler

Pinto (2021) antyder i sine forskningsresultater at en funksjonstilnærming til algebra vil gjøre elevene bedre rustet til å senere kunne beherske symbolsk manipulasjon på en bedre måte enn motsatt inngang til algebra, noe Carraher og Schliemann (2018) også indikerer gjennom sine forskningsresultater. Det samme viser også Kieran et al. (1996) til gjennom å belyse hvordan elevene i deres forskning møtte på vesentlig mindre kognitive hinder når de først jobbet med bokstaver som variabler i en funksjonstilnærming, for så å behandle bokstaver som ukjente verdier. Alle disse forskningsresultatene belyser på så måte uttalelsene til Usiskin (1988) og Küchemann (1978) om at elever som mestrer å behandle bokstaver som variable størrelser vil lettere adoptere å behandle bokstaver som blant annet ukjente størrelser.

I denne forskningen viser samtlige seks elever tegn til å forklare variable størrelser i lineære funksjoner gjennom ulike representasjoner, og med beskrivelser av variable størrelser med matematiske begrep som uavhengig- og avhengig variabel. To av seks elever støtter seg tilsynelatende til en operasjonell forståelse av variabler i lineære funksjoner og virker noe usikre i sine uttalelser og konverteringer knyttet til et funksjonsuttrykk med bokstaver. De viser derimot tegn til å ha etablert en forståelse for variable størrelser i funksjonsuttrykk når de for lov til å benytte sitt daglige språk og konteksten av oppgaven, og deres usikkerhet kan muligens forstås i lys av at de behandler bokstaver for første gang, og ikke har vært i stand til å adoptere bokstavene til sin forståelse ved første møte, eller at de er svært avhengig av bekreftelser for å føle seg fortrolig med en helt ny syntaks.

Fire av seks elever viser klare tendenser til å prate med høy grad av selvsikkerhet om bokstavene, opp mot de variable størrelsene, etter et første møte med bokstaver som notasjonsform. Fire av seks elever viser altså tegn til at de muligens befinner seg i nærheten av det Sfard (1991) betegner som reification av sin forståelse for variabler i lineære funksjoner, og dermed evnen til å gjennomføre en strukturell innlæring av bokstaver som variabler. At elevene viser tegn til å befinne seg i, eller i nærheten av, et reification-nivå av forståelse begrunner jeg med elevenes måte å omtale de variable størrelsene med høy grad av fortrolighet på, og deres evne til å utføre konverteringer av representasjonsformer mellom ulike registre. Slik Duval (2006) poengterer er det kun elever som behersker å konvertere mellom ulike registre av representasjoner som evner å forstå det matematiske objektet som nettopp et objekt, og ikke forvirre det med de ulike representasjonsformene. På den måten mener jeg elevenes evne til å utføre konverteringer mellom ulike registre er med på å gi en indikasjon på om de har flere momenter å visualisere variablene opp mot, for å kunne danne en strukturell forståelse.

Om man kobler på Zimmerman (1995) sin forskning om mestringsforventninger er det nærliggende å tenke at i alle fall fire av seks elever i denne forskningen nok sitter med en solid mestringsforventning knyttet til videre arbeid med bokstaver og formell algebraisk notasjon generelt, etter kun ett møte med bokstaver som variabler. Dette kommer også frem i elevenes egne uttalelser om deres tanker knyttet til videre arbeid med algebra. Der svarer fem av elevene at de mener videre arbeid med algebra vil gå fint, mens Karl uttrykker at det nok blir vanskelig, men spennende.

Ser man dette i sammenheng med Kieran et al. (1996) og Carraher og Schliemann (2018) sine funn, og Pinto (2021) sine implikasjoner, etter lignende tilnærminger til algebra, peker dette i retning av et en funksjonstilnærming til algebra, med fokus på å etablere en forståelse for variabler med sitt daglige språk og kjente semiotiske representasjonsformer, virker å legge til rette for å gi elever en god forståelse for bokstaver som variabler, og et solid grunnlag å bygge videre på. Samtlige forskningsobjekter i denne studien mestrer faktisk å omtale og behandle variable størrelser i lineære funksjoner, og fire av seks elever omtaler også funksjonsuttrykk med bokstaver med høy grad av selvtillit, etter et første møte med bokstaver som variabler. Disse resultatene mener jeg er oppløftende, og har vært med på å endre mine tanker om dybdelæring av algebra på 8.trinn.

5.4 Avslutning

Ut ifra resultatene av analysen og drøftingene som er gjort mener jeg denne forskningen viser til at de utvalgte elevene uttrykker en generelt god forståelse for variabelbegrepet i lineære funksjoner. Dette kommer til uttrykk gjennom elevenes arbeid med å konvertere mellom ulike representasjonsformer av funksjoner, evnen til å benytte seg av rekursive og eksplisitte sammenhenger, og gjennom deres uttalte forståelse for variable størrelser med matematiske begrep og deres egne dagligdagse ord. I det bokstavene introduseres mener jeg resultatene tyder på at fire av seks elever knytter bokstavene til deres utviklede forståelse for variabler, mens to av seks elever behersker å uttrykke en sammenheng mellom bokstavene og deres forståelse for variabler, men da med noe mindre selvtillit og flyt enn de fire andre elevene.

Med den generelle forståelsen elevene i denne forskningen uttrykker om variable størrelser og fire av seks elevers evne til å knytte bokstaver til denne forståelsen så raskt, virker det naturlig å tenke at overgangen til mer abstrakt symbolmanipulasjon skal kunne oppleves noe mer problemfri for elevene, sammenlignet med tidligere erfaringer jeg har med innlæring av algebra. Slik Zimmerman poengterer kan mestring knyttet til et matematisk domene eller emne overføres til å bli mestringsforventning innenfor samme emne, selv når oppgavene endrer karakter (Zimmerman, 1995).

6.0 Implikasjoner om matematikkundervisning

Ut ifra resultater presentert i denne forskningen mener jeg det vises en tendens til at en funksjonstilnærming til algebra, med fokus på realistiske situasjoner fra virkeligheten og med bruk av dagligspråket til elevene, kan være en gunstig måte å skape en strukturell forståelse for variabelbegrepet. I denne forskningen viser flere av elevene tegn til å beherske å adoptere den formelle algebraiske symbolformen til sin forståelse av variable størrelser, allerede etter ett møte med bokstaver som variabler. Flere elever viser tegn til å være komfortable med å omtale bokstaver som variabler allerede etter ett møte, og man kan ut i fra dette anta at disse elevene muligens innehar en mestringsforventning knyttet til videre arbeid med bokstaver.

Opp mot tidligere forskning, som viser at elever opplever mindre kognitive problemer om de først lærer seg å behandle bokstaver som variabler før de behandler som blant annet ukjente verdier, kan denne forskningen dermed sies å peke mot at en slik tilnærming som benyttet i denne forskningen kan være en gunstig inngang til algebra for å legge til rette for elevers læring. En mer omfattende kvantitativ studie på emnet, og en oppfølgingsstudie på disse elevenes ferdigheter innenfor andre algebraiske domener enn funksjoner og bokstaver som variabler, hadde vært ønskelig for å kunne si noe mer konkret om undervisningseksperimentets overføringsverdi og faglige utbytte.

7.0 Egenvurdering av prosjektet

Denne masterforskningen har vært en meget spennende og lærerik erfaring og har bidratt til at jeg har utviklet meg som lærere. Gjennom mitt undervisningseksperiment har jeg våget å teste ut en helt ny måte å undervise på for egen del, basert på min forståelse av teori, og har fått med meg flere matematikklærere på min skole i prosessen. Jeg har hele tiden analysert mitt arbeid og hatt en nøye plan og et sluttmål og visjon med undervisningseksperimentet. Prosessen har krevd refleksjon opp mot valg i undervisningssammenheng og i forskningssammenheng, og denne dualiteten har vært både givende og krevende å balansere.

Sett tilbake er det endringer jeg ville gjort om jeg skulle startet denne prosessen på nytt. Først og fremst ville jeg gjort noen endringer på min intervjuguide for å legge til rette for å få et enda mer korrekt innblikk i elevenes arbeid med konverteringer av representasjoner. Her kunne det vært lagt opp til enda mer bevegelse på kryss av ulike representasjoner for å lokke frem en enda tydeligere forståelse for objektet funksjoner og konseptet variabler. Jeg mener det også kunne vært ønskelig å gjennomført forskningen over enda lengre tid med et oppfølgingsintervju av denne gruppen elever på et senere tidspunkt i opplæringen, etter de hadde blitt introdusert for andre deler av algebraundervisningen. Et slikt oppfølgingsintervju kunne fortalt mer om elevenes faktiske forståelse for bruken av formell algebraisk notasjon, sammenlignet med resultatene i denne forskningen som dreier seg om elevenes førsteinntrykk og implikasjoner om deres mestringsforventninger ut i fra dette. På grunn av tidsbegrensninger og behov for å samle inn data og starte analyse, var det derimot ikke mulig å få til et oppfølgingsintervju i denne forskningen. Jeg føler derimot uansett at jeg har fått frem mange resultater som er både interessante og lovende med tanke på elevenes faktiske læringsutbytte av undervisningseksperimentet.

Jeg sitter igjen med en følelse av stolthet og slitenhet etter et hektisk år med kombinasjon av full jobb og masterforskning, men samtidig med en sult etter mer. Personlig synes jeg resultatene jeg har fått ut av denne kvalitative forskningen er såpass interessante at jeg har lyst til å forfølge de videre. Muligens i form av en oppfølgingsstudie av elevene i denne forskningen, mot en kontrollgruppe, på et senere tidspunkt i undervisningsløpet deres. Dette for å undersøke om det er noen forskjell i deres og andres evner til å jobbe med mer abstrakte algebraoppgaver, som en indikasjon på om tilnærmingen til algebra og mestringsforventningene kan ha en påvirkning på elevenes læring innenfor domenet algebra.

Jeg sitter også med et ønske om å prøve ut denne tilnærmingen til algebra i en større kvalitativ skala, for å undersøke mer grundig om resultatene i min forskning vil kunne kjennes igjen i en større skala med mange flere elever og lærere.

Alt i alt føles prosjektet meningsfullt for min egen del. Jeg har utfordret meg selv som lærer og føler jeg har nærmet meg ny læreplan i prosessen, og ikke minst lagt opp til en undervisning jeg mener har truffet mange elever i klassene mine. Personlig opplever jeg masterforskningen som et spennende og vellykket prosjekt, og med resultater som skal kunne engasjere flere lærere til å prøve en lignende tilnærming til algebra i eget klasserom.

Kildehenvisning

Aubert, K. E. (2009, 23.06.2021). algebra. Hentet 10.01.2022 fra https://snl.no/algebra

Bednarz, N. J., Bernadette. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuites and Discontinuites With Arithmetic. I C. Kiernan, L. Lee & N. Bednarz (Red.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching* (bd. vol. 18, s. 115 - 136). Dordrecht: Kluwer.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? (s. 73-96): Springer International Publishing.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds : The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (1st ed. 2018. utg., s. 107-138). Cham: Springer International Publishing : Imprint: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 3-26).

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Forrester, T., Sandison, C. E. & Denny, S. (2017). Vertical whiteboarding: Riding the wave of student activity in a mathematics classroom. *Australian Mathematics Teacher, 73*(4), 3-8.

Fuglseth, K. r. & Skogen, K. (2006). *Masteroppgaven i pedagogikk og spesialpedagogikk*. Oslo: Cappelen akademisk.

Grønmo, L. S. (2018). The Role of Algebra in School Mathematics. I G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Red.), *ICME-13 Monographs - Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (1st ed. 2018. utg., s. 175-193). Cham: Springer International Publishing : Imprint: Springer.

Heid, K. M. (1996). A Technology -Intensive Functional Approach to the Emergance of Alegraic Thinking. I C. Kieran, L. Lee & N. Bednarz (Red.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching* (bd. vol. 18, s. 239-255). Dordrecht: Kluwer.

Janvier, C. (1987). *Translation proceccces in mathematics education*. Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Washington, DC: U.S. Dept. of Education, Office of Educational Research and Improvement, Educational Resources Information Center.

Kieran, Boileau, A. & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. I C. Kieran, L. Lee & N. Bednarz (Red.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching* (bd. vol. 18, s. 256-294). Dordrecht: Kluwer.

Kieran, C., Lee, L. & Bednarz, N. (1996). *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching* (bd. vol. 18). Dordrecht: Kluwer.

Kunnskapsdepertementet. (2020a, 13.03.2019). Dybdelæring. Hentet 20.01.2022 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Kunnskapsdepertementet. (2020b). Matematikk 1–10 (MAT01-05). Hentet 17.01.2022 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/30213397

Lamon, S. (1998). *Algebra: meaning through modelling*. Innlegg presentert ved 22nd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch.

Lannin, J. K., Barker, D. D. & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(4), 299-317. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.004

Mason, J. (1996). Expressing Generality and the roots of algebra. I C. Kiernan, L. Lee & N. Bednarz (Red.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching* (bd. vol. 18, s. 65 - 86). Dordrecht: Kluwer.

Nyeng, F. (2012). *N?kkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Bergen: Fagbokforl.

Pinto, E. C., M.C. Moreno, A. (2021). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *International journal of science and mathematics education*. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Pollak, H. O. (2011). What is Mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2*(1), 64. https://doi.org/https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.694

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2021). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen* (2.opplag. utg.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2018). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen : metodebok for l?rere, studenter og forskere* (2. utgave. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in mathematics education, 12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Schorr, R. Y. (2000). Research Designs in Mathematics and Science Education: Continuing the Dialogue. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 380-385. https://doi.org/10.2307/749812

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Skott, J. m. f. (2018). *Matematik for lærerstuderende : delta 2.0 : fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2. udgave. utg.). Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Steffe, L. P. & Ulrich, C. (2014). Constructivist Teaching Experiment. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 102-109). Dordrecht: Springer Netherlands.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I B. Moses (Red.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications (1999)* (s. 7-13). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Wellington, J. (2015). *Educational Research: Contemporary Issues and Practical Approaches* Bloomsbury Publishing.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Zimmerman, B. J. (1995). Self-efficacy and educational development. I(s. 202-231). Cambridge University Press.

Vedlegg

Mopedoppgave benyttet i strategisk forskningstime (vedlegg 1)

Du oppretter en sparekonto til mopedsertifikatet på din 14-års bursdag, og setter da inn 1000kr som du fikk i gave. På den kontoen skal det være nøyaktig 7000kr den dagen du fyller 16 år. Du skal spare et like stort månedlig beløp hver måned i perioden.

a) Lag et funksjonsuttrykk med ord som viser hvor mye penger du har spart etter et antall måneder.

b) Forklare de ulike delene av funksjonsuttrykket. Hvordan fungerer det?

c) Representer funksjonsuttrykket som en verditabell. Tabellen settes inn i GeoGebra.

d) Representer funksjonen som en graf i GeoGebra.

e) Hva menes med at funksjonsuttrykket, tabellen og grafen er tre ulike representasjoner av samme funksjon? Argumenter og forklar.

f) Se på funksjonsuttrykket som kommer opp i GeoGebra når vi åpner regresjonsanalyse med 2 variabler.

   1. Alle på gruppen skal notere ned sine egne individuelle tanker om hvordan dere forstår bokstavene slik dere ser dem.
   2. Alle på gruppa presenterer sine tanker, uten avbrudd eller spørsmål.
   3. Felles diskusjon ut i fra de ulike tankene.

	Undervisningsopplegg 8 uker (vedlegg 2)
Uke 1 1. + 2.time	Oppgave inspirert av modellering med mer enn kun matematiske momenter, men der jeg som lærer skal styre oppgaven inn mot funksjoner på sikt. Elevene blir delt i grupper av 3 og skal sammen bli enige om en smart-phone de på gruppen tenker er realistisk å kjøpe for en «vanlig» 13.åring. De bruker nettet og finner dagsaktuelle reelle tilbud. - Hvordan er det realistisk å få til å betale for telefonen? - Hvilke behov har vi egentlig i en telefon? (ledende spørsmål mot nedbetaling kontra å betale kontant blir vesentlig å få inn hos alle grupper i prosessen). Bruker småtavler. Klasseromsdiskusjon om de ulike alternativene med avstemning om hvilken telefon klassen skal gå for.
Uke 1 3. + 4.time	Vi løfter frem telefonen klassen landet på og får frem alle tall og fakta på tavlen igjen. Gruppene skal så sette opp en nedbetalingsplan i tabellform. Tabellen diskuteres for å undersøke hvordan den fullføres, hvilken sum den starter på, kan den ha en verdi når antall måneder er under 0? Hvorfor, hvorfor ikke? Hva er den høyeste verdien i tabellen? Osv. Strukturerer opp informasjonen på en måte som blir prisen betalt hittil = (sum)kr * antall måneder + (engangsutgiften) Ser de to mot hverandre og forsøker å se hvordan de er 2 av samme sak.
Uke 2 1. + 2.time	Spisser formuleringen av funksjonsuttrykket med ord enda mer pris betalt = sum * antall mnd + konstant Innfører begrepene uavhengig og avhengig variabel opp mot oppgaven og funksjonsuttrykket som er formulert. Gir elevene en lignende situasjon som telefonen som de skal forsøke å formulere et funksjonsuttrykk til og forklare de ulike leddene med begrepene vil har nå introdusert.
Uke 2 3. + 4.time	Løfter frem den andre situasjonen elevene ble introdusert for og representerer denne som en tabell. De skal begrunne hvorfor tabellen kun er en annen representasjon av funksjonsuttrykket sitt! Bruker småtavler. Introduserer graf som representasjon. Presenterer begrepene stigningstall og konstantledd og knytter de til funksjonsuttrykket og grafen.
Uke 3 1. + 2.time	Elevene får en gjennomgang av koordinatsystemet og vi har enkle øvelser med å plotte punkter i et koordinatsystem. Ser på navngiving av punkter, hvordan man forstår et punkt og begrepen x-akse og y-akse.
Uke 3 3. + 4.time	Ser på hvordan tallene i tabellene våre kan kjennes igjen i en graf jeg har forberedt på forhånd. Elevene utforsker hvordan de selv kan tegne en graf ved hjelp av fremstille en funksjon som en tabell. Repeterer og terper på innlæring av begreper og hva variabler er.
Uke 4 1. + 2.time	Elevene deles inn i smågrupper. Vi bruker småtavler. Elevene får en situasjon som de skal forsøke å sette opp som et funksjonsuttrykk med ord og forklare begrepene og hvordan de henger sammen. Videre skal funksjonen representeres som en tabell og som en graf, analogt. Vi diskuterer sammen som klasse ut i fra gruppenes ulike presentasjoner på tavlene sine.
Uke 4 3. + 4.time	Eleven blir introdusert for å sette opp tabell i GeoGebra. Vi fokuserer mye på å skrive inn formel i y-kolonnen for å belyse at tabellen viser en utregning av det funksjonsuttrykket sier. Elevene skal bli bevisst på tabellens tydelige sammenheng med funksjonsuttrykket. Begrepene og matematikkspråket er i fokus.

Uke 5 1. + 2.time	Elevene lærer seg å overføre tabellen sin i GeoGebra til å bli en graf. Videre gis de en ny situasjon som de skal representere på ulike måter og forsøke å forklare hvilke fordeler de ulike representasjonsformene har. Matematikkspråket og begrepsavklaring er sentralt-
Uke 5 3. + 4.time	Elevene øver seg på å få funksjonsuttrykk med ord og lage situasjoner som kunne passet til uttrykkene. De blir så utfordret til å presentere muntlig for hverandre i grupper hva de ulike delene av et funksjonsuttrykk heter, hvordan de henger sammen, og hva de betyr.
Uke 6 1. + 2.time **(undervisnings-eksperimentet i min forskning)**	Elevene får en ny situasjon i grupper der de møter alle de kjente representasjonsformene. Gjennom regresjonsanalyse i GeoGebra vil elevene nå møte funksjonsuttrykk med bokstaver og dermed oppleve deres første møte med algebraisk notasjon. Utforske, Hvorfor er dette uttrykket til funksjonen?
Uke 6 3. + 4.time	Diskutere som klasse hvilke tanker de har rundt denne representasjonsformen. Hvilke fordeler tenker dere denne har? Osv. Vis hvordan denne representasjonen gir oss mulighet til å taste inn i GeoGebra og dermed produsere en graf momentant og smidig! Gå tilbake til funksjoner vi har jobbet med gjennom perioden og prøv å representer de ved hjelp av funksjonsuttrykk med bokstaver, og så bruke GeoGebra til å effektivt produsere grafer som representasjonsform.
Uke 7 - 8	Arbeide med funksjonsoppgaver ved hjelp av ulike representasjoner, men nå hovedsakelig algebraisk funksjonsuttrykk. Oppgaver hentes fra oppgavebok (matematikk 8), Kikora og CampusMatte.

	Transkripsjon av Mopedoppgaven (vedlegg 3)	
	00:00:00 ***Lærer*** Du oppretter en sparekonto til mopedsertifikatet på fjorten-års bursdagen. Da setter du inn tusen kroner som du fikk i gave på den bursdagen… Så, de setter du inn på konto. På den kontoen skal det være nøyaktig syv tusen kroner den dagen du fyller seksten år. Du skal spare like stort månedlig beløp, hver måned i perioden… Så da er oppgaven for dere; lage et funksjonsuttrykk med ord som viser hvor mye penger du har spart etter et antall måneder. Vær så god…	Lærer introduserer aktiviteten for gruppen og gir de ordet til å diskutere
Forståelse av situasjon påvirker matematisk tenking.	00:00:27 ***Johanne*** : Vi har tusen fra før [Åse starter også å snakke samtidig som Johanne, men avslutter]… så det betyr seks tusen [peker på oppgaveteksten]	Johanne sier de har tusen kroner fra før og dermed mangler 6000kr som skal spares månedlig over 2 år.
Oversetting fra situasjon til funksjonsuttrykk med ord	00:00:31 ***Åse*** : [tar over før Johannes utsagn vurderes] Blir det ikke; penger spart er lik, også ett beløp? Seks tusen deler på... ehm, tjuefire måneder… Fordi hun har jo to år på seg… Og så... Ganger antall måneder, pluss. 00:00:49 ***Johanne*** : tusen [sies samtidig som Åse. Begge fniser litt]. Skal vi skrive det der? [peker på tavlen og reiser seg opp fra bordet. Lærer bekrefter.] Ok, hva er det jeg jeg skal først? 00:00:57 ***Åse*** : Penger spart… [Johanne begynner å skrive på tavlen]	Åse og Johanne tar føringen og bryter oppgaveteksten ned til et funksjonsuttrykk med ord
Forvirrende element	00:00:59 ***Kaia*** : Men dere huske at vi liksom, ehm, vi kommer til å bruke noen av pengene til noe? liksom hvor mye…	Kaia foreslår at gruppen skal bruke noe av pengene på andre ting også. Dette avfeies.
Forståelse av situasjonen fører til stigningstall	00:01:08 ***Johanne*** : Vi skal bare se på det vi har i måneden. 00:01:10 ***Åse*** : Ja, vi skal bare spare. Du tar seks tusen delt på tjuefire... Tror jeg… [Johanne skriver «penger spart =» på tavlen] 00:01:18 ***Åse*** : Skriv seks tusen delt på tjuefire under. Nei, vi må regne det ut... [Elevene samarbeider om å utføre divisjonsstykket på tavlen ved hjelp av divisjonsalgoritme. Denne delen av prosessen er klippet ut av transkripsjonen da den har lite relevans til oppgaven ellers.] 00:03:02 ***Åse*** : to hundre og femti… 00:03:05 ***Åse*** : Veldig fint.	Elevene samarbeider i omtrent 2 minutter med å utføre regnestykket 6000 delt på 24 på tavlen og kommer frem til 250 (månedlig sparebeløp).
Oversetting fra situasjon til funksjonsuttrykk med ord.	00:03:07 ***Johanne*** : Så hva skal vi ta? 00:03:08 ***Åse*** : To hundre og femti... Ganger, antall måneder [Johanne skriver på tavlen] 00:03:21 ***Åse*** : pluss tusen… Er dere enige? [Åse titter på de andre gruppemedlemmene]. 00:03:21 ***Siri :*** jaja [Siri og Mia svarer i munn på hverandre] 00:03:21 ***Mia:*** ja 00:03:22 ***Johanne*** : Ja, men skal jeg hviske ut det her nå? [lærer bekrefter at eleven kan hviske ut divisjonstykket. Gruppen står igjen med penger spart =	Gruppen setter inn 250 i funksjonsuttrykket med ord og fullfører det på tavlen «penger spart = 250 * antall måneder + 1000»

	250 * antall måneder + 1000] Hva er neste oppgave?	
Kovarians mellom variablene. Matematisk korrekt språk som forklaring	00:03:33 ***Åse*** : Forklare de ulike delene av funksjonsuttrykket. Hvordan fungerer det? 00:03:44 ***Johanne*** : Ja ok. Med variabel og sånt? [avslutter med spørrende høyt tonefall] 00:03:48 ***Mia*** : Ehm, penger spart varierer på antall måneder. Tror jeg [peker mellom «penger spart» og «antall måneder» i gruppens funksjonsuttrykk]. 00:03:51 ***Siri*** : Avhengig av... 00:03:52 ***Johanne*** : Avhengig variabel! [eleven skriver en pil fra ordet penger spart på tavlen] 00:04:07 ***Åse*** : Det er, to hundre og femti er stigningstall [peker mot gruppa sitt funksjonsuttrykk på tavlen. Johanne begynner å skrive stigningstall under 250] 00:04:12 ***Siri*** : Antall måneder er...	Først forklaring av funksjonsuttrykket peker mot definisjon av en funksjon, at variablene påvirker hverandre. Knytter forklaringer og matematiske begrep til de ulike delene av funksjonsuttrykket.
Forståelse av ulike deler av funksjonsuttrykk Matematisk korrekt språk som forklaring	00:04:13 ***Kaia*** : Øy, er ikke den der konstant? [peker mot 250 som Johanne skriver forklaring til] 00:04:15 ***Åse*** : Nei, det er stigningstall. Tusen er konstant. 00:04:20 ***Johanne*** : Den her er stigningstall fordi den stiger hele tiden. Ehm, ja… [virker noe usikker i kroppsspråket]. 00:04:26 ***Kaia*** : Å ja, stemmer det. 00:04:28 ***Johanne*** : Skal jeg skrive antall måneder? 00:04:30 ***Mia*** : Antall måneder er uavhengig variabel. [Johanne skriver forklaring på tavlen] 00:04:32 ***Johanne*** : Og det her er… ehm… 00:04:46 ***Åse*** : konstant [Johanne skriver på tavlen]	Kaia, Åse og Johanne oppklarer forskjellen på stigningstall og konstantledd Fullfører forklaringen av de ulike delene av funksjonsuttrykket
Kovarians mellom variablene Starter konvertering fra ord til tabell	00:04:55 ***Åse*** : Hvordan fungerer det? [leser neste del av oppgaveteksten for gruppen]. 00:04:58 ***Johanne*** : Det fungerer. Ehm… 00:05:02 ***Mia*** : Penger spart er avhengig av den der [peker på antall måneder]. Ja, penger spart er avhengig av antall måneder. 00:05:13 ***Kaia*** : Når antall måneder endrer seg så endrer også hvor mye penger vi har spart seg… 00:05:16 [flere elever bekrefter samtidig. Utydelig hvem som snakker] 000:05:19 ***Åse*** : Representerer funksjonsuttrykket som en verditabell. Tabellen settes opp i GeoGebra. 00:05:45 ***Johanne*** : Da skal vi lage tabell, ikke sant? [lærer plasserer en ChromeBook på pulten foran elevene. De samler seg rundt for å starte arbeidet] 00:05:51 ***Lærer*** : Dere må gjerne... Jeg har ikke skrevet i oppgaven, men diskuterer og skisser på tavla hvordan tabellen vil se ut, og så sette inn i GeoGebra. [Johanne reiser seg opp igjen og går til tavlen]	Påpeker nok en gang hvordan de uavhengige og avhengige variablene påvirker hverandre. Skisserer opp en tabell på tavlen for å representere funksjonen som en tabell.

Konverterer fra ord til tabell	00:06:27 ***Johanne*** : Antall måneder... Og så var det… Penger spart? [skisserer opp 2 kolonner på tavlen] Antall måneder... Vi skal bare ta tjuefire måneder, ikke sant? Men vi kan bare ta tolv? Eller skal vi ta seks? Fordi da kan vi bare gange det på fire. 00:07:13 ***Johanne*** : På én måned, hvor mye var det vi har sparte da? 00:07:16 ***Åse*** : ett tusen to hundre og femti. 00:07:23 ***Johanne*** : to måneder er, ett tusen fem hundre. 00:07:29 ***Åse*** : Ett tusen syv hundre og femti. 00:07:34 ***[flere elever svarer synkront]*** To tusen. 00:07:46 ***Åse*** : To tusen to hundre og femti. 00:07:50 ***Johanne*** : To tusen fem hundre. [Johanne går tilbake til gruppen som sitter ved Chrome Booken]	Gruppen blir enige om hvordan tabellen vil se ut for de første 6 månedene.
Konverterer fra funksjonsuttrykk til tabell	00:08:15 ***Lærer*** : Kan dere bare si hva dere skriver inn i GeoGebra, sånn så jeg får det på lyd også? [Elevene er i gang med å sette inn tabellen i GeoGebra gjennom regneark]. 00:08:20 ***Åse*** : OK. Er lik , to hundre og femti, ganger [=250*] 00:08:28 ***Johanne*** : Den [Peker til A1 - cellereferansen til variabelen x. Åse trykker på A1 med musepekeren.] 00:08:28 ***Johanne*** : Pluss tusen. [Altså «=250*A1+1000»] 00:08:33 ***Johanne*** : Det ble ett tusen to hundre og femti ja. 00:08:35 ***Åse*** : Så drar vi ned sånn... [elevene bruker dra-funksjon i GeoGebra for å kopiere formelen nedover i kolonnene og fullføre tabellen].	Elevene forklarer hvordan de får GeoGebra til å auto fullføre kolonnen for penger spart ved å oppgi inntastingen «=250*A1+1000»
Konvertering fra tabell til graf	00:08:46 ***Johanne*** : Hva er neste oppgave? 00:08:49 ***Åse*** : Representer funksjonen som en graf [leser neste del av oppgaveteksten for gruppen]. 00:09:05 ***Lærer*** : Når dere får den opp på GeoGebra så kan dere også lage en sånn liten skisse av grafen på tavla sånn så vi får det synlig foran oss. [Johanne går tilbake til tavlen og skisserer opp et koordinatsystem med positive verdier på x og y-aksen] 00:09:33 ***Johanne*** : Blir den her altfor liten? Fordi vi skal øke med to hundre og femti. Så da må vi starte på to hundre og femti? [henvender seg undrende til gruppen]. 00:10:02 ***Lærer*** : Så ta gjerne å kommentere, på en måte, det som skjer og sånn, så jeg får mest mulig ut. 00:10:08 ***Johanne*** : Ja, jeg har satt opp alle tallene bortover... Og så har jeg. 00:10:14 ***Åse*** : Du må passe på... [peker på avstand mellom verdiene på x-aksen]	Det tegnes opp et koordinatsystem på tavlen. Momenter som avstand mellom tallene på aksene poengteres slik at grafen blir korrekt. Hvilke verdier som skal benyttes på y-aksen

Forståelse av konstantledd	00:10:16 ***Johanne*** : Å ja! ja sant det. Det må være samme avstand på alle sammen ja! 00:10:27 ***Lærer*** : Hvorfor det? 00:10:29 ***Johanne*** : Ellers blir ikke streken rett... 00:10:32 ***Kaia*** : Da blir grafen bare løgn! 00:10:39 ***Åse*** : Bruk en del av lillefingeren din til å måle avstand mellom [viser til å bruke fingeren som redskap for å få tilnærmet lik avstand]. 00:10:59 ***Johanne*** : Er det her riktig? [Johanne skisserer opp koordinatsystemet på tavlen. Gruppen diskuterer hvilke verdier som skal være på y-aksen]. 00:11:18 ***Johanne*** : Så kan vi øke den med to hundre og femti. Mmm, eller skal vi ta fem hundre?	diskuteres av gruppen her. Åse påpeker at denne grafen vil starte på tusen da det er konstantleddet!
	00:11:23 ***Åse*** : Men den starter jo på tusen [peker på konstantleddet] og øker med to hundre og femti .	
Konvertering fra funksjonsuttrykk til graf.	00:11:37 ***Åse*** : Men vi kan ta fem hundre [Åse reiser seg og overtar pennen til gruppen ettersom Johanne ikke rekker opp på y-aksen]. 00:12:23 ***Johanne*** : tusen, to tusen. 00:12:26 ***Mia*** : to tusen fem hundre. 00:12:29 ***Johanne*** : Og så tre tusen [Åse fullfører koordinatsystemet og blir samtidig stående med penn til gruppa].	Punktene i koordinatsystemet settes inn ved at Åse beveger hånden 1 posisjon til høyre langs x-aksen, så opp 250 for hvert punkt.
Sammenhengen mellom representasjonene	00:12:34 ***Johanne*** : Ja den første skal være ett tusen to hundre og femti, så mellom tusen og ett tusen fem hundre [peker mot koordinatsystemet]. 00:12:43 ***Kaia*** : Må du ikke starte der? [peker på tavlen]. På én der? [peker på x=1 på x-aksen]. 00:12:49 ***Åse*** : Ja. Ja, her [Åse setter inn punktet (1,1250) ved å flytte hånden mot høyre langs x-aksen, så opp 250 i verdi langs y-aksen fra punkt (0,1000)] 00:12:53 ***Johanne*** : Å ja. Det ser bare feil ut her i fra… [ser på Kaia og tilbake på tavlen]. [elevene setter inn punktene i koordinatsystemet og trekker en graf. Flere elever sier tallene på likt og det er vanskelig å tyde hvem som snakker her].	Gruppen skal argumentere for hvorfor de kan si at funksjonsuttrykket, tabellen og grafen er 3 ulike representasjoner av samme ting. «Alle har samme verdi» «det er bare 3 forskjellige måter å vise samme funksjon på»
	00:14:00 ***Johanne*** : Nå skal vi lage graf i GeoGebra. 00:14:05 ***Åse*** : Nei, vi har gjort det… 00:14:09 ***Kaia*** : Hva menes med at funksjonsuttrykket, tabellen og grafen er 3 ulike representasjoner av samme funksjon, argumenter og forklar [leser neste del av oppgaveteksten for gruppen]. 00:14:18 ***Mia*** : Alle har samme verdi... 00:14:27 ***Åse*** : Ja, alle er samme funksjon men det er bare tre forskjellige måter å vise, ehm, samme funksjonen på.	

Konvertering mellom funksjonsuttrykk og tabell Introduksjon av oppgave	00:14:37 ***Johanne*** : Hva tenker dere? [henvender seg til Siri og Karl] 00:14:46 ***Karl*** : Enig 00:14:46 ***Siri*** : ja. 00:14:47 ***Åse*** : Har dere noen argumenter? [Åse setter seg på plassen sin igjen]. 00:14:54 ***Lærer*** : Jeg kan gi dere et sånn tips når dere skal argumentere noe, så prøv på en måte å se på funksjonsuttrykket deres først da, og så om det er noe vi kjenner igjen i tabellen som er likt, som gjør at dere kan si at den er lik fordi at du ser her og her. [peker mellom tabellen og uttrykket]. Eller i grafen da, hvis du ser på den grafen så kjenner dere igjen noe i funksjonsuttrykket, eller i tabellen deres, om det er likheter mellom dem? 00:15:22 ***Johanne*** : Vi ser antall måneder ligger vannrett mens penger spart... 00:15:30 ***Karl*** : Alt stiger med to hundre og femti! 00:15:35 ***Johanne*** : Ja, ikke sant. 00:15:40 ***Åse*** : Og på tabellen, så er det antall måneder og penger spart. 00:15:49 ***Lærer*** : Hvordan regner man ut penger spart i tabellen deres da? Hva har skjedd der? 00:15:57 ***Åse*** : Samme som i funksjonen. Du tar to hundre og femti ganger én. Som er to hundre og femti pluss tusen. Som ble ett tusen to hundre og femti. 00:16:14 ***Åse*** : Og så blir det bare med to. Det stiger med to hundre og femti hver gang. 00:16:17 ***Johanne*** : Ja, det er stigningstallet [elevene ser på hverandre og sier «mmhmm» til hverandre og fniser litt]. 00:16:21 ***Lærer*** : Ja og da kommer den siste delen. Oppgave f. Nå skal jeg gjøre en ting på GeoGebra. Så står det; se på funksjonsuttrykket som kommer opp i GeoGebra når vi åpner regresjonsanalyser med to variabler. Det har vi ikke gjort før… men det skjer nå... Og så står det; punkt én. Alle på gruppa skal notere ned sine egne individuelle tanker om hvordan dere forstår bokstavene slik *dere* [legges trykk på dette ordet] ser det… Og så skal vi gå runde der alle sier det dem tenker, uten at det er lov til å kommentere det andre tenker. Så alle setter ord på det dem tenker. Så det er litt viktig del av øvelsen her nå. 00:17:02 ***Lærer*** : Da skal jeg skrive noe på tavla, men dere kan komme og se. Skal vi se bare flytte PCen litt. [lærer flytter pc frem på bordet slik att har mulighet til å se. Åpner regresjonsanalyse og får frem grafen til funksjonen med funksjonsuttrykket y=250x+1000].	Lærer konkretiserer spørsmålet og vil at gruppen skal være mer presise i svaret sitt Funksjonsuttrykket og tabellen blir sterkt knyttet sammen og det blir eksemplifisert hvordan man regner ut y-kolonnen i tabellen ved å referere til funksjonsuttrykket. Lærer introduserer elevene for siste del av oppgaven og setter opp en regresjonsanalyse i GeoGebra for å få frem grafen og funksjonsuttrykket y=250x+1000 Elevene blir bedt om å tenke selv og notere ned umiddelbare tanker knyttet til funksjonsuttrykkets betydning.

Ufullstendig kobling 250x forstås som 250 ganger noe Konverterer fra algebra til ord Ufullstendig kobling Konvertering fra algebra til ord Konvertering fra algebra til ord Konvertering fra algebra til ord	00:17:25 ***Lærer*** : Og det jeg er interessert i at dere skal se nærmere på er det som kommer opp her. Her står det nå y er lik to hundre og femti x pluss tusen. 00:17:38 ***Lærer*** : Jeg bare skriver det på tavla også. [skriver funksjonsuttrykket på tavlen]. 00:17:40 ***Lærer*** : Det som kommer opp når vi kjører en analyse er at den funksjonen heter y er lik to hundre og femti x pluss tusen… Så jeg vil at dere skal se på den her og så gjøre opp deres egne tanker om hvordan vil dere forklare hva dere ser? Hva tenker dere? Det er første gangen dere ser det på den måten, men bare hvordan tenker dere om det her. 00:18:16 ***Kaia*** : Skal vi også tenk på hva x er? 00:18:19 ***Lærer*** : Ja. Hva er x, hva er y, og alt mulig dere kan tenke på opp mot det dere har lært tidligere. [elevene skriver ned noen tanker på hvert sitt ark. Lærer venter ca 1,5min før aktiviteten fortsetter]. 000:19:43 ***Lærer*** : Jeg starter her jeg. Nå tar vi en runde og dere sier alt dere har tenkt og notert, også selv om det er sagt av noen andre tidligere. Hva har du tenkt? [peker mot Siri]. 00:19:54 ***Siri*** : Ok ,så du kan se den nederste linjen der [peker på x-aksen] jeg tenkte liksom det er x-aksen og den ved siden av er y aksen, og det står y aksen er lik to hundre og femti, så hvis det er to hundre og femti og... Nei der er x aksen… Og så er det pluss på tusen så... Det de mener er kanskje å plusse tusen og to hundre og femti hver gang? Jeg er ikke helt sikker. Det er det jeg tenkte... [lærer takker og sender ordet videre til neste elev]. 00:20:29 ***Åse :*** Jeg tenkte at den nederste linjen er y-aksen og den opp er x-aksen. Og to hundre og femti er stigningstallet. Så når du tar to hundre og femti, og så er det en x, så er det to hundre og femti ganger noe, pluss tusen… Ja. [lærer takker og peker på neste]. 00:21:51 ***Mia*** : Mhm, jeg tenkte at y er liksom den avhengige variabelen. Og at x er liksom at du skal gange, det som står først der med den uavhengige variabelen? [peker mot bokstaven x]. [Mia sender ordet videre til Johanne selv] 00:22:09 ***Johanne :*** Ja, jeg tenkte at y var... Eh, avhengig variabel. Som står på tabellen loddrett [peker på tabellens venstre kolonne] Nei, det er penger spart [retter seg selv til at y er det samme som «penger spart»]. Ehm og at to hundre og femti er x. Atter… *utydelig fnising* [Johanne ser mot Kaia og vil at hun skal ta over]. 00:22:45 ***Kaia*** : Ja, jeg tenkte at y var en avhengig variabel, altså penger spart da og to hundre og femti er	Siri er ganske nølende i sine tanker og trekker frem x-akse og y-akse, og stigningstallet 250 som hennes umiddelbare kobling til y=250x+1000 Åse trekker frem x-akse og y-akse men trekker også frem at 250x betyr «250 ganger noe» Mia kobler sammen y=250x+1000 med de ulike delene av funksjonsuttrykket med ord Johanne starter selvsikker, peker mot feil kolonne i tabellen og klarer ikke å få frem budskapet sitt. Kaia peker selvsikkert mellom delene av funksjonsuttrykket med ord og y=250x+100 Karl trekker frem koblingen mellom y – penger spart og x – antall måneder Gruppen trekker frem parallellene mellom y og penger spart og x og antall måneder i sin konklusjon.

	stigningstallet og x… Jeg tenkte at x representerer der “ganger antall måneder”. Og så pluss tusen. [lærer takker og sender ordet til Karl]. 00:23:06 ***Karl*** : Jeg tenkte at y var penger spart, og så x-en var antall måneder. Pluss tusen. 00:23:18 ***Lærer*** : Bra, nå har alle fått seg sagt sitt, vil dere bare prøve å liksom diskuteres som en gruppe hva dere på en måte skal bli enige om; Hva er betydningen av dette her da, hvis dere skal prøve for første gang. 00:23:37 ***Åse*** : Ja. Penger spart er y-en. Den avhengige. 00:23:40 ***Johanne*** : Ja det kan man si. 00:23:43 ***Åse*** : Fordi det er foran likhetstegnet, og det er den der også [peker mellom funksjonsuttrykket med ord og med symboler] 00:23:50 ***Johanne*** : Ja, og x er antall måneder... 00:23:53 ***Åse*** : Ja, ganger antall måneder, og så pluss tusen er jo pluss tusen da. 00:24:00 ***Mia*** : Så x er uavhengig variabel her. [elevene blir ganske stille og vil ikke utdype/legge til noe. Aktiviteten avsluttes dermed der.]	De knytter begrepet avhengig variabel til bokstaven y og uavhengig variabel til bokstaven x. Konklusjonen fokuserer altså mest mot sammenhengen mellom gruppens funksjonsuttrykk med ord og y=250x+1000

Intervjuguide (vedlegg 4)

Intervjuene tar utgangspunkt i elevens tanker om oppgaven og gjennomføringen og løfter frem eventuelle uoppklarte utsagn eller involveringer i arbeidsprosessen.

Intervjuet går videre med planlagte spørsmål:

1. **Gitt følgende situasjon.**
   På Foten er det 12 grader i vannet i midten av mai. Etter dette stiger temperaturen med 2 grader per uke til vannet er 22 grader. Forklar følgende funksjonsuttrykk:

   $y = 2x + 12$
2. Kan du forklare hvorfor det brukes 2 ulike bokstaver i funksjonsuttrykket?
   Hva er ulikt med de?

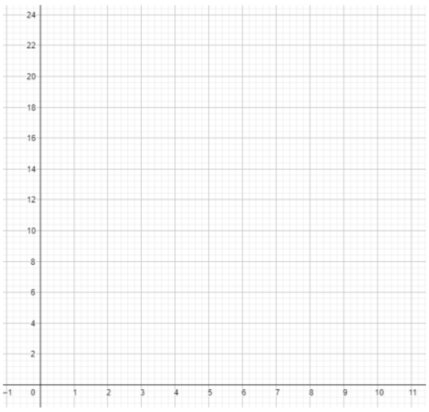
3. Om du får vite at **$x=3$,** hvordan ville du gått frem for å regne ut verdien til y?

4. Om du fikk vite at temperaturen i vannet var 18 grader (**$y=18$**), hvordan ville du da gått frem for å regne ut verdien til x?

5. Kan du forklare hvordan denne tabellen er en representasjon av denne funksjonen?
   Hvordan kommer man frem til verdiene i tabellen? Kan du fullføre de neste linjene?

x	Y
1	14
2	16
3	18

Kan du forklare hvordan funksjonen kan representeres som en graf? Bruk gjerne koordinatsystemet til å forklare.



6. Har du tidligere jobbet med bokstaver i matematikken? Hvordan/ i hvilken sammenheng?

7. Hvordan oppfatter du din egen forståelse for x og y etter denne første introduksjonen?
   Hva tenker du er hensikten med å bruke bokstaver på denne måten? Kan du forsøke å forklare hva x og y er for noe, slik du oppfatter det, etter dette første møte med bokstavene?

8. Hvordan tror du at du kommer til å mestre videre arbeid med algebra?

	Transkripsjon av intervju Johanne (vedlegg5)	
Elevens førkunnskaper	00:00:01 **Lærer** Bra. Da skal vi si se. Da har vi den der… [legger lydopptaker på bordet] 00:00:04 **Lærer** Sånn. Vi jobbet jo med den oppgaven på gruppe… stemmer? 00:00:11 **Lærer** Og da var jo du den som førte pennen mye, ikke sant? For du stod jo, så skrev du mye på tavla sånn for gruppa. Åssen følte du det var å jobbe med oppgaven? 00:00:22 **Johanne** Nei. E… Det var ikke så vanskelig, for vi har hatt mye om det. 00:00:25 **Lærer** Så du følte at det gikk greit? [Johanne svarer mhm utdyelig bekreftelse]	Oppgaven var ikke så vanskelig fordi vi har jobbet mye med det før.
Elevens førsteinntrykk av x og y	Ja, hvordan var det når dere ble presentert for; y er lik to hundre og femti X pluss tusen da? 00:00:33 **Johanne** Ehm… [nølende toneleie] Da ble jeg ganske usikker. 00:00:36 **Lærer** Du ble usikker? [Johanne bekrefter spørsmålet med et lavt «ja»]	Ganske usikker på y og x ved første møte.
Kobler representasjoner. Konvertering fra språk til algebra	Husker du… For når vi tok den runden, så skulle alle elevene si… Dere skulle jo tenke sjøl, og så skulle der si hva dere hadde tenkt… Også ble du veldig usikker, og så sa du… Du sendte ordet videre… Men husker du hva, på en måte, din umiddelbare tanke var da… Hvis du skal prøve å si det på nytt nå? Hva var det du tenkte når du så Y er lik to hundre og femti x pluss tusen? 00:01:00 **Johanne** Ehm… Jeg tenkte at O [Johanne retter opp O til Y raskt selv] stod for pengene spart?... Også… Ja, X stod for ganger antall måneder… Meeen… Jeg... Jeg skjønte liksom ikke hvorfor, disse stod der, på en måte? [peker mot bokstavene x og y] 00:01:14 **Lærer** Ja. Hvorfor det plutselig skal være sånn? 00:01:18 **Johanne** Ja… Ja, men så sa noen at det stod for x-akse og y-akse, og da skjønte jeg litt mer hvorfor, liksom… Jeg fikk bare ikke ordene ut… 00:01:26 **Lærer** Jeg skjønner… Bra… Jeg har med litt andre ting her nå også…. [tar frem intervjugide med oppgaven elevene skal se på] Jeg skal bare stille noen spørsmål. Det blir samme spørsmål til alle sammen, og det er bare for at jeg.. skal prøve å forstå litt mer av hva dere har forstått da… Her har vi en ny situasjon. Her har jeg skrevet; på Foten så er det tolv grader i vannet i midten av mai. 00:01:50 **Lærer** Du vet hva Foten er?... Badeplassen, Foten?... [Johanne bekrefter med utydelig «mhm»] 00:01:53 **Lærer**	Substituerer ord i funksjonsuttrykket med x og y, men er usikker.

	Ja. Så det er tolv grader i vannet i midten av mai, og etter det så stiger temperaturen med to grader per uke til vannet er tjueto grader... [Johanne bekrefter med «ehe»]	
Kobler representasjoner. Konvertering fra algebra, via situasjon, til dagligspråk.	00:02:03 **Lærer** Kan du forklare det funksjonsuttrykket her? Y er lik to x pluss tolv? 00:02:14 **Johanne** Så, vi skal finne… Ehm… [pauser i 3 sekunder mens Johanne ser på oppgaven] 00:02:18 **Johanne** På en måte… Ok… [Johanne kikker frem og tilbake mellom funksjonsuttrykk og oppgavetekst]. 00:02:20 **Johanne** Så, det blir antall grader [Johanne fokuserer på y i uttrykket], er lik… to… ganger… [Johanne bruker nå lang tid på å se over oppgaveteksten og funksjonsuttrykket på nytt] 00:02:37 **Johanne** Antall uker [Johanne fokuserer på x]… 00:02:45 **Johanne** Pluss… ehmm… [Johanne bruker igjen lang tid på å se over oppgaveteksten på nytt] 00:02:50 **Johanne** Pluss tolv? [spørrende tonefall] 00:02:51 **Lærer** Men hvorfor står det pluss tolv bakerst? 00:02:53 **Johanne** Fordi det var tolv grader fra før. 00:02:56 **Lærer** Ja. Husker du hva det heter for noe i… 00:02:59 **Johanne** konstantleddet 00:03:00 **Lærer** Konstantledd ja. Men hvorfor sa du at y… På en måte sa du at det er antall grader og så sa du at x var antall uker?	Formulerer et funksjonsuttrykk med ord ut i fra en kontekst og et gitt funksjonsuttrykk med algebraisk notasjon.
Kobler førkunnskap om variabler til x og y	00:03:08 **Johanne** Mhm… [Johanne pauser og tenker]. Fordi… ehm… Det er faktisk sånn vi har lært det, på en måte... 00:03:16 **Johanne** Og så, jeg husker ikke helt… Kan jeg se? [Johanne spør om å se på oppgavearket igjen. Studerer teksten.] Begge to er variabler. 00:03:21 **Lærer** Ja, ok begge to er variabler ja. Så y og x er variabler. For da kommer jeg inn på neste spørsmål… Her står det; Kan du forklare hvorfor det brukes to ulike bokstaver i funksjonsuttrykket? Hva er ulikt med de to?	Definerer at y og x er variabler basert på at det er slik vi har lært det (innlært med ord tidligere)
Kobler representasjoner	00:03:40 **Johanne** Ehm… Jeg tror det var y akse og x akse… Det står for y aksen og x aksen… For når man lager tabell så... Ja [Johanne fniser litt av usikkerhet]. 00:03:51 **Lærer** Ja, men bare si alt du tenker du… 00:03:54 **Lærer**	Kobler bokstavene x og y til aksene i et koordinatsystem.

Kobler y og x til forklaringene om avhengig- og uavhengig variabel.	Y akse, og x akse [lærer leser tilbake og noterer på intervjuskjema i 5 sekunder]. 00:04:04 **Lærer** Hva er ulikt med… De to bokstavene på en måte? Er det noe som er ulikt med dem? Bortsett fra at de heter y og x da. 00:04:16 **Johanne** Y viser... på en måte… ehm… hva het det? [Johanne stopper litt opp for ord og virker usikker] 00:04:24 **Johanne** Produktet vi skal komme frem til… Mens x er det leddet vi trenger for å finne ut hva… produktet skal være, eller hva svaret skal være. 00:04:37 **Lærer** Ok supert. [lærer noterer på intervjuskjema i 8 sekunder].	Forklarer y som produktet (svaret) til funksjonen og at x er leddet vi trenger å vite for å finne produktet.
Behandler funksjonen som en likning etter man får vite verdi til uavhengig variabel.	00:04:50 **Lærer** Hvis du får vite at det har gått tre uker. Etter at den situasjonen har startet. Hvordan ville du gått fram da for å regne ut hva y er for noe? 00:04:59 **Johanne** Ehm… Da hadde jeg tatt, antall grader er lik…. 00:05:04 **Johanne** to ganger tre pluss tolv. For da hadde det gått tre uker. Ikke sant? [bekreftende spørsmål. Lærer nikker.] 00:05:12 **Lærer** Ja. Så da hadde du. Hvis du skriver da; y er lik to x ganger 3 pluss tolv, Hva blir det for noe da. [lærer skisserer opp funksjonsuttrykket med tallet 3] 00:05:18 **Johanne** Da blir det… seks pluss tolv, som er atten.	Setter inn verdien 3 for x og regner ut funksjonens verdi, uanstrengt.
Behandler funksjonen som en likning etter man får vite verdien til funksjonen (y).	00:05:30 **Lærer** Hva hvis du fikk vite at temperaturen i vannet var atten grader. Hvordan ville du gått fram for å finne ut hvor mange uker det har gått? 00:05:38 **Johanne** Ehm… Jeg hadde tatt den… [ser etter funksjonsuttrykket på arket] 00:05:40 **Lærer** Den så jo sånn ut; y er lik to ganger x pluss tolv [lærer skriver opp funksjonsuttrykket på nytt for eleven] 00:05:45 **Johanne** Em… Jeg hadde... [Johanne stopper opp i 7 sekunder og ser på oppgaven og funksjonsuttrykket] 00:05:54 **Johanne** Jeg hadde tatt atten, deler på to. Og så minus tolv… Går det? 00:06:00 **Lærer** … Dele på to [leser tilbake og setter opp utregningen til eleven på arket] 00:06:01 **Johanne** Det går ikke an å ta minus tolv der da.	Jobber i en prosess med å finne en verdi for x når man får vite funksjonsverdien (y).
Kontekstforståelse påvirker matematisk løsning.	00:06:05 **Lærer** Hvorfor… Ehm, atten delt på to. Hva blir det her da? [ser på regnestykket på arket som eleven har uttrykt] 00:06:08 **Johanne**	Avbryter sitt eget forslag fordi svaret blir mindre enn 12.

Prøve og feile	Da blir det ni minus tolv, men det går ikke. 00:06:11 **Lærer** Nei, hvorfor sier du det? 00:06:12 **Johanne** Det fordi ni er mindre enn tolv. Så [lærer avbryter eleven] 00:06:16 **Lærer** Ja, hvorfor går ikke det i den sammenhengen her? 00:06:22 **Johanne** Det går ikke fordi det er ikke minustall som skal være svaret. 00:06:25 **Lærer** Nei, hvorfor skal det ikke være det? 00:06:30 **Johanne** Ehm… [eleven pauser og fniser litt i 3 sekunder] Fordi den temperaturen var mer enn tolv… Fra før.	Eleven forklarer at det ikke går da funksjonen starter på 12! Gjør om på regnestykket og kommer frem til et svar.
Evnen til å sette inn verdier for variabler og regne ut.	00:06:38 **Lærer** Supert… Men tenker du noe annet da, når du liksom innser at det her ikke fungerer? [peker på regnestykket på arket] 00:06:48 **Johanne** Kanskje. Ehm, atten minus tolv dele på to? 00:06:52 **Lærer** Atten minus tolv [leser tilbake og skriver opp]. Da får vi? 00:06:54 **Johanne** Seks! Delt på to… 00:06:56 **Johanne** Det er tre. Da får vi svaret. 00:06:59 **Lærer** Kunne du på en måte kontrollert om det stemmer? Nå har du regnet at det er tre uker. 00:07:05 **Lærer** Hva kunne du gjort da for å kontrollere om det stemmer da? 00:07:07 **Johanne** Vi kunne tatt to ganger tre pluss tolv for å finne ut om det blir atten. 00:07:13 **Lærer** Ja, og det… 00:07:15 **Johanne** Det ble det [eleven er fornøyd] 00:07:16 **Lærer** Ja supert.	Eleven kontrollerer om svaret er korrekt ved å sette inn utregnet svar for x og kommer frem til 18.
Kobler representasjoner. Funksjonsuttrykk til tabell.	00:07:19 **Lærer** Ehm… Kan du forklare, hvorfor denne tabellen er en representasjon av denne funksjonen? [peker på tabellen i intervjueguide]. Jeg har skrevet her en, ti, to, tolv, 3, fjorten [viser til tabellen på oppgavearket]. Men den er jo også blitt fjorten, seksten, atten. Unnskyld jeg har skrevet feil tall… [lærer bruker 13 sekunder på å rette opp feil tall i tabellen brukt med eleven] 00:07:44 **Lærer** Hvorfor er dette en representasjon av den samme funksjonen? 00:07:54 **Johanne** Fordi… Ehm… [eleven stopper opp i 4 sekunder og ser på tabellen].	Forklarer hvordan tabellen er en representasjon av funksjonen ved å koble regnestykket inn i tabellen for å gi verdien til y.

	Fordi to ganger én pluss tolv er fjorten... 00:08:00 **Johanne** Og da viser det hvor mye temperaturen har blitt etter én uke, etter at du ganger det med én. Og det øker med to hver gang, så det skal være fjorten, seksten , atten [peker nedover i tabellen]. 00:08:13 **Lærer** Så hvordan ville det ha sett ut, de to neste linjene der da? [peker på tomme rader i tabellen] 00:08:16 **Johanne** Ehm, tjue og tjueto.	
Kobler representasjoner. Funksjonsuttrykk via punkter i tabell til graf.	00:08:23 **Lærer** OK, kan du forklare hvordan denne funksjonen kan representeres som en graf? Og du kan bruke dette koordinatsystemet hvis du vil for å forklare [peker på koordinatsystemet på intervjuskjema]. 00:08:35 **Lærer** Hvordan ville du representert den funksjonen som en graf? På en måte hva ville du gjort? 00:08:39 **Johanne** Den måtte starta på tolv. 00:08:41 **Lærer** Hvorfor det? 00:08:44 **Johanne** Fordi det er sånn temperaturen var først. [eleven setter et punkt på koordinat (0,12)] 00:08:51 **Johanne** Ehm.. Og så øker den med to. Så etter en uke så har den blitt fjorten [setter et punkt på (1,14)] og så etter to uker så er det seksten [setter et punkt på (2,16)] etter tre, atten [setter et punkt på (3,18)] etter fire, tjue [setter et punkt på (4,20)] etter fem, tjueto [setter et punkt på (5,22)] og etter seks, tjuefire [setter et punkt på (6,24)]	Fremstiller funksjonen som en graf i et koordinatsystem gjennom å starte med 12 som er konstantleddet og så videre øke med 2 per uke. Setter inn punkter.
Ingen førkunnskap om bokstaver.	00:09:10 **Lærer** Supert. Så bra… Og så bare noen sånne spørsmål. Til slutt… Har du jobbet med bokstaver i matematikk før? 00:09:23 **Johanne** Ehm… Tror ikke det. [lærer noterer svar i skjema].	Eleven har ikke jobbet med bokstaver i matematikk tidligere
Elevens egen oppfattelse av forståelse for bokstaver som variabler.	00:09:29 **Lærer** Og så kommer det spørsmål om, hvordan oppfatter du din egen forståelse nå for bokstaver x og y etter at vi nå har sett det en gang, på en måte… Vi har møtt det én gang. Hvordan oppfatter du selv at du har forstått det? 00:09:44 **Johanne** Jeg, jeg tror jeg har forstått det bra fordi vi først lærte om funksjonen og sånt… Og så gjorde vi det om til algebra, så da var det enklere å forstå det. Men det er fortsatt litt sånn ehm… [eleven pauser]. 00:10:02 **Johanne** Confusing… [eleven fniser litt]	Eleven oppfatter at hen forstår bokstavenes betydning på bakgrunn av at hen har lært mye om funksjoner tidligere.
Forvirrende elementer.	00:10:05 **Lærer** Vet du hva som er confusing, på en måte? 00:10:10 **Johanne**	Uttrykker at det fortsatt er litt forvirrende med x og y og at visse ting som f.eks at det ikke er gangetegn mellom bokstaver og tall forvirrer litt.

Variabelbegrepets sammenheng med bokstaver.	Ehm… Det med x og y… Fordi først så skjønte jeg ikke hvorfor det bare sto x rett ved siden av to hundre og femti. Jeg skjønte ikke hvorfor det bare var x og to hundre og femti. 00:10:22 **Lærer** Ja, ikke sant? 00:10:23 **Johanne** Men så sa [bruker annen elevs navn] at hvis det ikke står noe der så betyr det ganging… 00:10:28 **Lærer** Ja, har du akseptert det liksom? 00:10.30 **Johanne** Ja… Ja… [eleven fniser og titter ned] 00:10:35 **Lærer** Men forstår du liksom… Hva er x og y for noe? Hvis du skulle prøvd å forklare det? 00:10:42 **Johanne** Ehm… Det. Det blir litt vanskelig. 00:10:46 **Lærer** Ja. Ok. For du klarer ikke å si hva, hva, hva de representerer, eller hva de står for? Hvis ikke du tenker på en sånn konkret oppgave som vi hadde nå, du bare ser det er en y og en x foran deg. Hva er det for noe liksom? 00:10:58 **Johanne** Nei, det klarer jeg ikke å forklare jeg…	Eleven er usikker og klarer ikke å avgi en egen forklaring på hva bokstavene x og y egentlig er for noe.
Mestrings - forventninger om veien videre.	00:11:04 **Lærer** Det er helt greit. Et siste spørsmål om veien videre etter denne første økten. Hvordan tror du at du kommer til å mestre videre arbeid med algebra? 00:11:13 **Johanne** Ehm… [eleven fniser litt] jeg vet egentlig ikke [fniser litt til]. Eller jeg tror det går bra, bare jeg får litt mer tid, for jeg tror egentlig at jeg skjønner det.	Eleven tror videre arbeid med algebra vil gå bra, fordi hen føler egentlig at hen kan det.

	Transkripsjon av intervju Åse (vedlegg6)	
Opplevde mestring med oppgaven.	00:00:00 **Lærer** Det er den i gang. Sjekker at den går. Ehm… [lærer sjekker lydopptaker] 00:00:03 **Lærer** Hva synes du om oppgaven? Hva tenker du om det dere fikk å jobbe med og? 00:00:11 **Åse** Liksom var det morsomt? Eller vanskelig eller sånn? 00:00:13 **Lærer** Men bare sånn om du kjente igjen noe, om det var greit. Føler at du mestret og at det var ok? 00:00:19 **Åse** Jeg følte at jeg mestret det ja. Det var litt enklere å lære på denne måten.	Intervjuet starter opp og Åse uttrykker at hun mestret oppgaven gruppen jobbet med.
Knytter begreper til funksjonsuttrykket	00:00:25 **Lærer** Ehm… så ble vi introdusert for første gang, her på åttende trinn i hvert fall, for at det står y er lik to hundre og femti x pluss tusen, og så tok vi en runde og fortalte hva vi tenkte. 00:00:37 **Lærer** Hvilke tanker hadde du om, hva er y og hva x på en måte? 00:00:41 **Åse** Mmm. Jeg hadde at y… var den y-aksen og så x var opp. [eleven peker oppover mens hun forklarer] og så y er penger spart, er lik to hundre og femti. Og så x er antall måneder. Så er det gange imellom der. Så pluss, tusen. [eleven trekker inn mye og snakker raskt].	Eleven gjør 2 observasjoner om bokstavene. Knytter de til aksene (feil akser) og til kontekstforståelse med y= penger spart og x=antall måneder
Konverterer fra språk til algebra	00:00:58 **Lærer** Ja, riktig. Så du bytta på en måte ut penger spart og antall måneder med bokstaven y og x? 00:01:01 **Åse** Ja [nikker bekreftende]	Eleven substituerer altså ord for variabler med bokstaver
Konverter funksjonsuttrykk til språk/situasjon.	00:01:04 **Lærer** Ja. Supert. Vi skal bare gå litt videre og så får du en ny situasjon. Så står det at på Foten så er det tolv grader i vannet i midten av mai og så etter det så stiger temperaturen med to grader per uke fram til den er tjueto grader. 00:01:19 **Lærer** Kan du forklare følgende… [fremhever funksjonsuttrykket for eleven på arket] 00:01:22 **Lærer** Funksjonsuttrykk. Da får du y er lik to x pluss tolv. Hvorfor ser det sånn ut? 00:01:37 **Åse** Ehm… [eleven pauser og ser på oppgaveteksten og funksjonsuttrykket på nytt.] to er fordi… Det er tolv der [peker på konstantleddet i funksjonsuttrykket] fordi den er konstant. Det er tolv grader fra før av. Og så to [peker på 2 i funksjonsuttrykket] fordi det stiger med to grader hver uke. Og så er det gange et antall uker. Og så y er, ehm… temperatur som stiger. 00:01:57 **Lærer**	Eleven blir presentert for et funksjonsuttrykk og en kontekst. Forklarer de ulike delene av funksjonsuttrykket opp mot konteksten.
	Ja. Så da kommer vi over på neste spørsmål med en gang. Kan du forklare hvorfor det brukes to ulike bokstaver? Hva er ulikt med dem? Altså [peker på funksjonsuttrykket] Her har vi	

Substituerer ord for variabel størrelser med bokstaver.	og en y og en x. Hvorfor har vi to forskjellige bokstaver i uttrykket? 00:02:13 **Åse** Istedenfor å skrive setninger eller tall, så kan du forkorte det med bokstaver. 00:02:17 **Lærer** Ja, så hva, hva er det bokstavene egentlig representerer da på en måte?... Hva er det for noe liksom? 00:02:24 **Åse** Funksjonen? [eleven fniser litt]. 00:02:25 **Lærer** Ja. Ja,ja, til sammen, så er jeg helt enig! Til sammen så er det funksjonen. Men hvis du ser på liksom bokstaven y og bokstaven x [lærer ringer rundt bokstavene i funksjonsuttrykket]. 00:02:34 **Lærer** Hvis du skal prøve å bruke matematikkspråket da, for å forklarer hva y-en og x-ener for noe, hvordan ville du gjort det? 00:02:41 **Åse** Litt sånn penger spart liksom, eller temperatur stiger? 00:02:45 **Lærer** Mhm… Da sa du at det var her; y [peker på bokstaven y i funksjonsuttrykket] temperatur stiger liksom? [eleven bekrefter med et «mhm» og nikker] og x er antar antall. [eleven fullfører setningen og tar over…] 00:02:47 **Åse** …x er antall måneder. Eller uker.	Eleven fremhever at bokstavene kan brukes som en forkortelse av ord eller setninger, som for eksempel penger spart og antall uker.
Funksjonsbegreper knyttes til bokstavene.	00:02:57 **Lærer** Men hvis vi skulle prøve å bruke matematikkspråket vårt og se litt bort fra oppgaveteksten, hva er egentlig x og y liksom? 00:03:00 **Åse** Variabler. Det er avhengig [peker på y] og konstant [peker på 12]. X er uavhengig, og y er avhengig. Fordi y er avhengig av x-en. 00:03:17 **Lærer** Ja. [lærer noterer noe av det eleven sier]. Supert. Det er variabler [leser tilbake sin egen skrift] 00:03:20 **Lærer** Uavhengig og avhengig [leser tilbake sin egen skrift]. 00:03:25 **Lærer** Altså, hvem var uavhengig sa du? [oppklarende spørsmål knyttet til notater]. 00:03:33 **Åse** Ehm, x.	Eleven forklarer bokstavene ved hjelp av begrepene avhengig og uavhengig variabel
Behandler y som ukjent verdi.	00:03:35 **Lærer** OK. Hvis du får vite nå at det har gått, eller at x er lik tre… Sier jeg til deg [lærer skribler ned på arket til eleven]. Hva gjør du for å regne ut verdien til y? 00:03:48 **Åse** Jeg ville tatt to ganger tre. Og så pluss tolv. [lærer setter opp det eleven har sagt] 00:03:56 **Lærer** Da får vi… ?	Eleven får vite verdien til x og behandler som en ukjent verdi og løser dette rett frem.

Kontekstforståelse påvirker matematikk	00:03:58 **Åse** Atten [lærer skriver ned] 00:04:02 **Lærer** Ja, hva hvis vi motsatt da… Jeg skriver opp uttrykket [lærer forteller mens han skriver opp uttrykket på nytt foran eleven]. Det var y er lik to x pluss tolv. Hvis du får vite at det er atten grader i vannet. Hva gjør du da for å regne ut verdien til x? 00:04:18 **Åse** Atten delt på to [lærer noterer det eleven sier]. Som er ni. Og da er det to ganger ni pluss tolv [lærer fortsetter å skrive det eleven sier]. 00:04:27 **Åse** Nei… nei… jeg. 00:04:30 **Lærer** Nei, jeg bare skriver ned men så sier du nei. Hvorfor sier du nei? 00:04:37 **Åse** Ehm… Fordi det blir atten pluss tolv, og da blir det feil. 00:04:41 **Åse** Så først må du ta atten min… Nei. Ja, atten minus tolv. [lærer skriver det eleven har sagt]. Som blir seks. Og så seks dele på to, som blir tre. Og da er x tre [lærer leser tilbake og skriver ned x=3].	Finner ukjent verdi for x når eleven får vite y. Korrigerer seg selv pga kontekstforståelse, og kommer så frem til svaret.
Misforståelse om oppgave. Konverterer fra funksjonsuttrykk til tabell.	00:05:04 **Lærer** Her har jeg skrevet opp starten på en tabell. 00:05:08 **Lærer** E... Kan du bare prøve å få forklare meg… unnskyld den skal være. Jeg har skrevet feil tall, skjønner du [lærer retter opp tallene i tabellen]. 00:05:19 **Lærer** Kan du prøve å forklare meg tabellen? Hvordan forstår du den tabellen her? 00:05:24 **Åse** X er antall uker eller måneder. Og så y er hvor mye de stiger. Eller hvor mye det er. Ja ja. 00:05:36 **Lærer** Så hva skjer egentlig nedover i tabellen, på en måte? 00:05:41 **Åse** Det blir plusset med 2 hver gang. Eller verdien blir høyere. 00:05:46 **Lærer** For hvis jeg sier her, eller jeg går inn her [peker på tabellen] også sier vi x - tre. Hvordan har jeg egentlig kommet frem til at det er atten? Hva har jeg gjort for noe? 00:05:55 **Åse** Ehm… Ganget det med et annet tall kanskje? Ganget det med seks? [eleven er veldig nølende i tonefallet] 00:06:01 **Lærer** Ja. Ja, altså den tabellen hører til samme oppgave altså. 00:06:04 **Åse** Å ja! [eleven fniser litt i det hun oppdager at tabellen hører til samme oppgave]. 00:06:06 **Åse** Å ja, ja.	Eleven misforstår noe i det hun skal forklare tabellen og får så påpekt at tabellen hører til samme oppgave som tidligere. Eleven kan fullføre en tabell ved å utføre regnestykket som er i funksjonsuttrykket.

	00:06:09 **Åse** Da har du tatt. X. Ja. [eleven starter med forklaring men slutter og titter bare på arket]. 00:06:13 **Lærer** Kunne du fullført de to siste på tabellen da? Hvordan ville de sett ut? [eleven tar pennen og fullfører tabellen]. 00:06:27 **Lærer** Hva gjorde du nå? 00:06:29 **Åse** Jeg tok… istedenfor at x er tre så ble den fire. Og så to ganger fire er åtte. Pluss tolv er tjue. 00:06:38 **Lærer**	
Konvertering fra funksjonsuttrykk til graf.	Da er det greit. Og så har jeg startet med et koordinatsystem. Og så spør jeg, kan du forklare hvordan den funksjonen kan representeres som en graf? 00:06:54 **Åse** På én så blir det fjorten. Og da setter du en prikk opp på fjorten [eleven plasserer et punkt på (1,14)] og to så blir det seksten [eleven setter et punkt på (2,16)]. 00:07:07 **Lærer** Hvor vil grafen vår starte, og hvorfor det? 00:07:11 **Åse** På tolv. 00:07:12 **Lærer** Ja hvorfor det? 00:07:13 **Åse** Fordi temperaturen i vannet var tolv grader fra før av, og da starter du på tolv. 00:07:18 **Lærer** Kunne du sette på funksjonsuttrykket også, uten å ha lest teksten. 00:07:23 **Åse** Ja 00:07:24 **Lærer** hvordan da? 00:07:25 **Åse** Fordi det er pluss tolv og da er det en konstant. 00:07:27 **Lærer** Ja. OK. Kjempefint…	Eleven setter opp punkter i et koordinatsystem ut i fra forståelse av funksjonen i kontekst og funksjonsuttrykket.
Førkunnskaper algebra.	Og så har jeg bare noen kontrollspørsmål til deg til slutt. Har du tidligere jobbet med bokstaver i matematikken? 00:07:40 **Åse** Ja. 00:07:42 **Lærer** Hva husker du på en måte av hva du har jobbet med av bokstaver? 00:07:48 **Åse** Jeg lærte at vi skulle… Man skulle, hvis det var sånn mange bokstaver bortover, så skulle man sette bokstaver på en side og så tall på en annen side eller noe? 00:07:59 **Lærer**	Eleven uttrykker at hun har jobbet noe med algebra tidligere på barneskolen, men husker ikke så mye av det.

Knytter variabelforståelse til algebra. Algebra forenkler å skrive med ord. Mestrings - forventninger	ja, for eksempel liksom a pluss a pluss a pluss a. Trekke sammen liksom [lærer skribler ned stykket foran eleven] fire a? [eleven bekrefter ved å nikke og mumle ja]. 00:08:07 **Lærer** Ja, så har du jobbet noen med noen mer enn. 00:08:11 **Åse** Jeg husker ikke nei. Det var ikke så mye. [Lærer skriver ned noe av det Åse sier og leser tilbake]. 00:08:18 **Åse** Men hvis jeg liksom får noen oppgaver, så husker jeg det sikkert. 00:08:23 **Lærer** Men husker du om du har jobba med bokstaver som variabler tidligere? Altså at du du bruker en bokstav for å representere et tall som endrer seg eller kan være forskjellige ting? 00:08:41 **Åse** Nei. Eller jeg tror kanskje jeg har jobbet med det på campus [Lærer noterer i intervjuskjema]. 00:08:50 **Lærer** Da skriver jeg, at du er usikker på om du har jobbet med bokstaver som variabler? [lærer leser tilbake mens svaret noteres]. 00:09:08 **Lærer** Ok. Supert. Og så. Hvordan oppfatter du din egen forståelse for x og y i et funksjonsuttrykk, etter den første introduksjonen vi nå har hatt. Kan du prøve å forklare liksom hva du tenker x og y er i den sammenhengen her, slik du oppfatter da. Hva er det for noe? 00:09:31 **Åse** Jeg tror y er ehm… [eleven tar 4 sekunders pause]. Den avhengige variabelen, og så x er den uavhengige variabelen. Bare uten å skrive ord, så bytter du det ut med en bokstav. 00:09:49 **Lærer** [lærer skriver ned svaret og leser tilbake det eleven sier] Er det noe mer du vil si? [Eleven rister på hodet]. Et siste spørsmål. Hvordan tror du at det vil gå med videre arbeid med algebra? 00:10:04 **Åse** Jeg tror det går bra! Jeg har jobbet litt med det før og føler jeg skjønner mye av funksjoner, så det tror jeg går fint [eleven smiler] så. Ja. [eleven fniser litt].	Eleven forklarer bokstavene i funksjoner som avhengig og uavhengige variabler og at de er forenklinger av å skrive ord. Eleven har god tro på videre arbeid med algebra

	Transkripsjon av intervju Kaia (vedlegg7)	
	00:00:01 **Lærer** Supert og det heter [uttaler navnet på opptaket for å bekrefte at det er startet] 00:00:07 **Lærer** Sånn. Hva synes du om oppgaven du fikk å jobbe med? Var det noe som overraskaskelser, eller var det en kjent oppgave på en måte?	
Elevens førsteinntrykk av bokstavene	00:00:15 **Kaia** Nei… Men det at x og y var variablene og sånt, det kunne man liksom skjønne seg til da og se på det stykket da. 00:00:31 **Lærer** Ok, hva mener du med det?	At x og y er variabler kunne man forstå seg frem til
Konvertering – språk til algebra	00:00:32 **Kaia** For eksempel fordi det står jo y er lik, så det må være liksom penger spart. Og x siden det ikke står noe, sånn antall måneder eller noe, så må det være x da.	Kobler y til venstre side av likhetstegnet og x til «antall måneder»
Kobler bokstavene til definisjon av variabler i funksjoner.	00:00:47 **Lærer** Så da, hva er y og x for noe da egentlig? Hvis vi skal ikke bruke penger spart eller antall måneder, men bare bruker matematikkspråket ditt. Hva vil du si at y og x er for noe? 00:00:54 **Kaia** Y [drar lenge på bokstaven men eleven tenker] er… den avhengige variabelen, og x er den uavhengige variabelen, så det vil si er at y er avhengig av x.	Definerer y som en avhengig variabel og x som uavhengig variabel.
Variablenes samspill	00:01:09 **Lærer** [noterer ned hva eleven har sagt] Ok, kan du forklare det litt mer? Hvordan de henger sammen? Hvordan påvirker den hverandre liksom? 00:01:17 **Kaia** Så hvis x blir større, eller forandrer seg, da vil også y forandre seg. Fordi y er avhengig av x.	Forklarer samspillet der en endring i x medfører en endring i y.
Variablenes samspill – gjensidighet.	00:01:29 **Lærer** Hva hvis y forandrer seg da? 00:01:33 **Kaia** Ehm… [eleven tenker i 3 sekunder]. Da forandrer ikke x seg, tror jeg. 00:01:41 **Lærer** Jeg bare skriver ned litt sånn. [lærer noterer i intervjuskjema] 00:02:02 **Lærer** Hvis x forandrer seg, så forandrer y seg; helt enig. Men hvis y forandrer seg så vil også x forandre seg! For de to henger sammen på en måte. 00:02:10 **Lærer** Det er bare at de ofte i sånne funksjonsuttrykk så er det liksom x-en man får vite. Det er den som vil forandre seg ut fra hva som skjer og da påvirker det den avhengige variabelen. Men noen ganger så får du vite at y har endret seg og da endrer også x seg. Begge to vil forandre seg.	Uttaler at en endring i y ikke vil medfører en endring i variabelen x. Lærer oppklarer så denne misoppfatningen.
Konvertering funksjonsuttrykk til språk (situasjon)	00:02:28 **Lærer** Her er en helt ny tekst. På Foten, badeplassen Foten, så er det målt tolv grader i vannet i midten av mai. Etter det så stiger temperaturen i vannet med to grader hver uke, fram til vannet er tjueto grader varmt. Kan du forklare hvorfor det funksjonsuttrykket her [peker på funksjonsuttrykket $y=2x+12$] hører til den oppgaven?	Forklarer betydningen av et funksjonsuttrykk opp mot en gitt sammenheng og hva y, x og 12 er opp mot konteksten.

Behandler bokstaven y som en ukjent og regner ut.	00:02:48 **Kaia** Jo, fordi jeg y er jo, for eksempel temperatur steget da? Og x er ganger antall uker. 00:03:03 **Lærer** Hva blir tolv for noe her da? 00:03:05 **Kaia** Tolv det er jo konstantleddet, for den er der fra før [lærer noterer ned det eleven sier]	Får vite verdien til x og bytter dermed ut med verdien 3. Regner ut og finner verdien til den ukjente y.
Bokstaven er oversett – trengs ikke for å se svaret.	00:03:14 **Lærer** Bra. Hvis jeg sier til deg i den funksjonen, eller i den oppgaven her, så sier jeg til deg at x er tre. Du får vite det. Hvordan regner du ut hva y er for noe da? 00:03:25 **Kaia** Ehm… Da må du ta. Tror jeg to… [drar lenge på tallet] x. Ehm… nei to ganger tre. Det pluss tolv. 00:03:39 **Lærer** Og da finner vi? 00:03:41 **Kaia** Da finner du hva y er.. 00:03:42 **Lærer** Det blir…? 00:03:44 **Kaia** Ehm… to ganger tre som er seks pluss tolv. Som er atten.	Får vite verdien til y og sier umiddelbart verdien til x.
Prøve og feile	00:03:51 **Lærer** Ja, hva hvis, hvis vi motsatt da. Hva hvis jeg sier deg at det er atten grader i vannet? Det er fortsatt samme funksjonsuttrykket y er lik to x pluss tolv [skribler ned funksjonsuttrykket foran eleven]. Så sier jeg, du får vite nå at atten grader i vannet. Kunne du regne ut, hvor mange uker har gått? 00:04:06 **Kaia** Ehm…. Det det har gått… tre uker? [eleven svarer sakte mens hun ser på oppgaven] 00:04:10 **Lærer** Kan du forklare hvordan du kunne regne det ut? 00:04:12 **Kaia** Man kunne ta to ganger antall uker. For eksempel, man kan bare ta tre uker, så pluss det med tolv sånn som vi gjorde i sta.	
Bruker tabell som representasjon for å finne verdien til x	00:04:24 **Lærer** Så det blir sånn prøve og feile. Men hva hvis jeg sier til deg at det, Okay, ikke atten grader, men vi sier at det er tjueåtte grader i vannet. 00:04:33 **Lærer** Kunne du regne du ut hvor mange uker det har gått da? 00:04:36 **Kaia** Man kunne jo lage en tabell da. 00:04:40 **Lærer** Ja OK, hva mener du med det? 00:04:41 **Kaia** Liksom man kan ta én uke er lik så mye, to det, tre det, [peker mellom en fiktiv tabell med venstre og høyre kolonner] så finner du det ut.	Endrer y til 28. Eleven velger å lage en tabell og lete etter y-verdien (28) for å finne hva x-verdien er da.
Konvertering mellom tabell og funksjonsuttrykk	00:04:49 **Lærer** Kan bruke tabell, ikke sant? [leser tilbake mens lærer noterer i intervjuskjema]. For da ser du etter hvor mange uker det har gått…	Eleven kobler tydelig sammen funksjonsuttrykkets høyre side av

– beveger seg begge veier	Når du kommer til 28 da har det gått så mange uker… Snakker om tabell, så har jeg gjort klar en tabell her som hører til samme oppgaven. Sier at x er en én, y er fjorten, x er to y er seksten, og så videre [peker på tabellen og tallene] Hvorfor kan jeg si at den tabellen er den samme funksjonen, bare en annen representasjon? Hva mener jeg med det? 00:05:16 **Kaia** Ehm… At den blir representert på en ulik måte da. [eleven pauser i 4 sekunder før hun fortsetter] ehm… Den liksom... Her kan man jo se at x og y er der fra før [peker på kolonnene i tabellen]. Akkurat som i funksjonsuttrykket. 00:05:35 **Kaia** Og det er tallene også, fordi man regner jo det [peker på 2x + 12 i funksjonsuttrykket] ut bare, hvis man viser regningen på den tabellen. 00:05:43 **Lærer** Hvis jeg sier at x er ti, hvordan finner jeg ut hva y er i min tabell? Hva gjør jeg da? 00:05:48 **Kaia** Da tar du to ganger ti pluss tolv [eleven peker mellom tabellen og funksjonsuttrykket for å forklare]. 00:05:57 **Lærer** [leser tilbake det eleven har sagt for bekreftelse] Så her setter jeg en verdi for x [peker på kolonnen i tabellen under x], så gjør jeg det som står der [peker på funksjonsuttrykket]. Og da finner jeg ut hva y er? [peker på kolonnen i tabellen til y-verdiene]. [eleven nikker og bekrefter]	likhetstegnet med prosessen som utføres for å finne verdier i kolononnen til y i tabellen.
Koordinatsystem og graf Konvertering funksjonsuttrykk til graf	00:06:06 **Lærer** Kunne du forklart meg hvordan jeg kan representere den funksjonen der som en graf? Hva ville du gjort? 00:06:13 **Kaia** Ehm… Det… Jeg, ville, gjort, først… Er… 00:06:19 **Kaia** Ehm… Det stiger jo opp med to grader, så det jeg ville gjort først er kanskje tatt sånn? 00:06:26 **Kaia** Ehm… seks ,tolv, atten også satt det i [skisserer opp et koordinatsystem og omtaler verider på y-aksen]. Fordi det må være lik avstand mellom alle… 00:06:35 **Lærer** [avbryter eleven] Jeg har gjort klart et forslag, med to, fire, seks, åtte, ti, tolv, fjorten, seksten, atten. 00:06:39 **Kaia** Ja vi kan gjøre det også…	Gjør klart et koordinatsystem for å representere funksjonen som en graf Plotter punkter i koordinatsystemet ut i fra funksjonsuttrykket
Konvertering fra graf til tabell.	00:06:41 **Kaia** Så ja, det var tolv grader fra før. 00:06:46 **Kaia** Så da begynner vi her [eleven setter et punkt på koordinat (0,12)]. Jeg var på uke én så opp med to grader, så d[uklar tale] fjorten, seksten, atten, tjue, tjueto [eleven plasserer punkter]. 00:07:01 **Kaia** Skal jeg lage strek mellom også eller bare?	Forklarer sammenhengen mellom tabellen og grafen.

Førkunnskaper om bokstaver Førsteinntrykk av bokstaver	00:07:02 **Lærer** Det går fint, det går fint. Ser du en sammenheng mellom grafen du lager og tabellen vi har der også [peker mellom grafen og tabellen]. 00:07:10 **Kaia** Fordi her er jo… Se man kan se fjorten, seksten, atten, og alt er her. [peker mellom høyre kolonne i tabellen og y-aksen i koordinatsystemet] De har bare ulike svar her [peker nedover i tabellen for å vise at det er endring]. Her er ukene liksom [peker til venstre kolonne i tabellen] det kan man se her [eleven peker mellom venstre kolonne i tabellen og x-aksen i koordinatsystemet].	Eleven har ikke jobbet med bokstaver i matematikk tidligere. Førsteinntrykket av bokstaver i matematikk er at «jeg forstår det, bare av å se på det».
	00:07:24 **Lærer** Supert. Og så er det noe sånn spørsmål til slutt. 00:07:29 **Lærer** Har du jobba med bokstaver i matematikk før? 00:07:34 **Kaia** Ingenting, nei.	
Kobler bokstavene til definisjon av variabler i funksjoner.	00:07:36 **Lærer** Hvordan oppfatter du din forståelse for x og y, i en funksjon da, etter at vi har blitt introdusert for det én gang? 00:07:45 **Kaia** Nei liksom, jeg forstår jo det liksom litt av å se på det liksom. Fordi er lik tegn og sånn, men framover det kan hende liksom at jeg sikkert må jobbe med det, for eksempel sånn hvis det kommer sånn abc.	Eleven forklarer y som avhengig variabel og x som uavhengig i et nytt og helt tilfeldig funksjonsuttrykk.
(evnen til å abstrahere) Kobler bokstavene til sin forklaring og forståelse av en funksjon.	00:08:02 **Lærer** Hvis vi bare forholde oss til funksjonen da, for det er jo det jeg fokuserer på. Så har du to ulike bokstaver. Y og en x. Kan du forsøke liksom å forklare det til slutt, hva tenker du hvis du bare får et tilfeldig uttrykk som heter y er lik tretten x pluss tjueto [skriver opp et tilfeldig uttrykk foran eleven]. Hvordan vil du forklare hva y og x er for noe? 00:08:26 **Kaia** Jeg vil da forklare liksom. At y er jo den avhengig variabelen og x er den uavhengig.	Y er funksjonsverdien, altså svaret til funksjonen. Det som står på høyre side av likhetstegnet er det vi skal regne ut for å finne svaret. X er bare antall noe, så der kan vi sette inne for eksempel 3.
Mestrings-forventninger for videre arbeid.	00:08:38 **Lærer** [noterer det eleven sier]. Så i det tilfeldige uttrykket her, som ikke handler om en tekstoppgave, men bare er et funksjonsuttrykk. Hvordan fungerer det her liksom? Hva? Hva betyr det at vi har to variabler? 00:08:48 **Kaia** Det at vi har to variabler her, er at det skal være svaret til funksjonen [peker til y i funksjonsuttrykket], som er y. Men her [peker til det som står etter likhetstegnet i funksjonsuttrykket] er det en regning, liksom, så vi kan ta for eksempel tre ganger to, eller noe fordi x er jo bare antallet noe. 00:09:08 **Kaia** Og tjueto er konstantleddet, så det er der hele tiden, det det forandrer seg ikke. 00:09:16 **Lærer** Så vi kan bare ta… X er jo på en måte noe, så vi kan bare sette inn for eksempel to? [leser tilbake for bekreftelse] Og hvis vi gjør det, så finner vi ut, hva for noe sa du? 00:09:23 **Kaia**	Tror videre arbeid med algebra kommer til å gå greit.

	Du får hva svaret til funksjonsuttrykket er. 00:09:29 **Lærer** Bra. Tror du at du kommer til å mestre videre arbeid med algebra? 00:09:35 **Kaia** Jeg tror det, fordi det føles liksom greit. Så jeg tror det går bra.	

	Transkripsjon av intervju Siri (vedlegg8)	
	00:00:00 **Lærer** Jeg skal ta… Et lite opptak… Og det er kun for at jeg skal høre på det, for at jeg rekker ikke å skrive så mye mens vi snakker. 00:00:09 **Lærer** Ja… Hva synes du om oppgaven dere hadde? 00:00:11 **Siri** Det var helt passe. 00:00:14 **Lærer**	Introduserer intervju og spør etter elevenes førsteinntrykk av oppgaven de har jobbet med. Helt passe, svarer eleven.
Førsteinntrykk. Bokstavene var ukjent	Helt passe? Var det kjent for deg, liksom på en måte, eller? 00:00:19 **Siri** Ja, det første var litt kjent, når vi gjorde det. Men den siste oppgaven og sånn, skjønte jeg ikke helt på førsten. 00:00:28 **Lærer** Nei, ikke på førsten? Hva mente du med at du ikke skjønte den på førsten? 00:00:34 **Siri** Lissom, den y og x og sånt. 00:00:36 **Lærer** Fikk du noe forståelse for det, på en måte, føler du eller? Underveis når dere snakket litt sammen og sånn, og hørte hva de andre tenkte? 00:00:41 **Siri** Eh, jaaaaa [drar lenge på ordet ja med lav stemme. Avslutter med høyt tonefall]	Oppgaven var kjent til å begynne med men siste del av oppgaven med y og x skjønte hun ikke helt på starten.
Bokstavene knyttes til aksene.	00:00:43 **Lærer** Husker du hva du sitter igjen med? Nå står jo funksjonsuttrykket foran oss her [peker på tavlen elevene jobbet med]. Det står det y er lik to hundre og femti x pluss tusen. Husker du noen hva du tenkte? 00:00:56 **Siri** Ehm… Jeg tror jeg tenkte at nederst var x og oppe var y… [peker mot koordinatsystemet der grafen er tegnet] Det var bare de tingene jeg husker. Og så klarte jeg ikke helt å tenke helt... [mumler *utydelig ord*] 00:01:10 **Lærer** Nei, men det er helt greit det. Da har vi på en måte bare frisket opp litt i oppgaven dere jobbet med, og så, og så sett på det.	Eleven uttrykker at førsteinntrykket av bokstavene er at de er knyttet til y og x aksene.
Konverterer funksjonsuttrykk til dagligspråk.	00:01:17 **Lærer** Men så tenkte jeg, hvis vi tar det steg videre, så sier jeg at her er en ny situasjon. Da står det; på Foten, badeplassen, Foten. [Lærer viser til oppgaven i intervjuskjema og leser den for Siri]. Der er det tolv grader i vannet i midten av mai, og etter dette så stiger temperaturen med to grader per uke til vannet er tjueto grader varmt. 00:01:35 **Lærer** Kan du forklare det funksjonsuttrykket her? Her står det y er lik to x pluss tolv. 00:01:42 **Siri** Ehm…. [leser oppgaven og ser på oppgavearket i 5 sekunder] 00:01:47 **Siri** Kanskje y er… temperaturen stiger? 00:02:03 **Siri** Og… [eleven pauser i 6 sekunder mens eleven studerer oppgaven videre] Og så to… For det er to…	Eleven resonerer seg frem til hva de ulike delene av funksjonsuttrykket betyr, opp mot konteksten av den nye oppgaven.

Begreper knyttet til funksjoner.	00:02:08 **Siri** For den stiger med to, ikke sant? Og så putter jeg ganger. to ganger x er… [drar på ordet er. Pauser 4 sekunder] 00:02:20 **Siri** Ehm, det skal bare… [mumler litt mens hun studerer oppgaven] 00:02:26 **Siri** Er ikke det antall… X er antall... 00:02:32 **Siri** Antall uker? 00:02:34 **Lærer** Ja. 00:02:35 **Siri** Og så… Plusses på tolv. 00:02:39 **Lærer** Ja. Ja, hvorfor plusser vi på tolv? 00:02:39 **Siri** For at du starter på tolv. 00:02:44 **Lærer** Ok, husker du hva det heter for noe når det står sånn bakerst pluss tolv. [elevene drar på «ehmmmm» og titter på oppgaven i 6 sekunder] 00:02:57 **Lærer** Det er ikke noe krise om ikke du husker altså. Men du husker ihvertfall at det derfor at vi starter på tolv grader, så vil da pluss tolv stå bakerst.	Eleven husker ikke begrepet konstantledd
Variabelforståelse knyttes til bokstaver.	00:03:03 **Lærer** Ja. Så da sier du at y er temperaturen og x er antall uker? [skriver ned og leser tilbake for bekreftelse. Eleven nikker og sier «mhm» for bekreftelse]. 00:03:11 **Lærer** Hva er da y og x da, hvis du skal prøve å forklare det med ord? 00:03:15 **Siri** Y, er ikke det… Det. Er ikke begge to liksom, variabler? 00:03:23 **Lærer** Jo, begge to er variabler… [noterer i skjema 3 sekunder] For da lurer jeg på… Kan du forklare hvorfor det brukes to forskjellige bokstaver i uttrykket? Hva er ulikt med de to? Du sier at begge to er variabler, jeg er helt enig, men hvorfor heter dem ikke da x og x? Hvorfor heter det y og x? Hvorfor bruke to forskjellige? 00:03:43 **Siri** Kanskje for å skille dem ut og… [pauser 2 sekunder] De er jo forskjellig, selv om de er variabel. En er uavhengig og andre er avhengig. 00:03:57 **Lærer** Hva betyr det? 00:03:59 **Siri** Ehm... uavhengig er at [pauser 2 sekunder] At den er uavhengig av liksom, og den andre avhengig av den andre, liksom… Den uavhengig bytter på, og da er den ene avhengig av den, sånn at den kan byttes på der og… [peker mellom x og y i funksjonsuttrykket]. 00:04:15 **Lærer** Ja, så hvis du bytter på antall uker, hva skjer da med temperaturen? 00:04:22 **Siri**	Eleven knytter forståelse av variabelbegrepet til bokstavene og utdyper ved å definere y som en avhengig variabel som varierer i det x, som er uavhengig, varierer.

Representerer funksjon som tabell for å finne ukjent verdi.	Da bytter temperaturen. Ja, sånn. 00:04:26 **Lærer** Ok, så hvis du får vite at det har gått tre uker, hvordan ville du gått fram for å regne ut hva y er for noe? [eleven leser oppgaven og pauser i 6 sekunder] 00:04:39 **Lærer** Nå får du vite at det har gått tre uker. Hvordan regner vi ut hva y er da? 00:04:47 **Siri** Å ja! [eleven titter opp fra oppgaven] 00:04:49 **Siri** Skal jeg regne det ut? 00:04:50 **Lærer** Ja, hva ville du gjort? 00:04:53 **Siri** Kanskje laget en tabell? 00:04:57 **Lærer** Og da tenker du? Så skriver jeg opp. 00:04:59 **Siri** Skal jeg skrive si… 00:05:01 **Lærer** [avbryter eleven] Du kan godt skrive opp tabellen hvis du vil? 00:05:04 **Siri** Ehm… Hvor skal jeg skrive? 00:05:06 **Lærer** Hvor som helst, det spiller ingen rolle [peker på ledige plasser på arkene foran oss]. 00:05:18 **Siri** [eleven skisserer opp en verditabell] OK, den første er… [peker på venstre kolonne i verditabellen] Er ikke det antall uker? 00:05:24 **Lærer** Jo. Kan du kalle det for noe annet enn antall uker, da? For å gjøre det litt enklere? 00:05:27 **Siri** Da kan jeg kalle den for x. 00:05:33 **Siri** Og den andre er y fordi, den er… [slutter å snakke og fullfører tabellen] 00:05:37 **Siri** OK da skriver jeg. Det har gått tre uker. 00:05:43 **Siri** Og det var. Men jeg skal regne ut? [utydelig tale i 11 sekunder mens eleven jobber med å fullføre tabellen] 00:06:00 **Siri** Å ja, blir det fjorten? 00:06:04 **Lærer** Hvorfor det? Det er riktig. Men hvorfor det? 00:06:06 **Siri** På grunn av at det stiger to hver uke, og du har først tolv og da blir det fjorten? 00:06:14 **Siri** Blir det feil? [eleven titter opp] 00:06:16 **Lærer**	Eleven velger å lage en tabell og regne ut fra og med x=1 til og med x=3 for å finne svaret på hva y er da. Ser ikke at hun kan sette inn 3 for x og regne ut svaret direkte.

Prøve og feile som metode når x er ukjent. Konverterer fra funksjonsuttrykk til graf.	Nei.. 00:06:18 **Siri** fjorten.. Og så steg med to igjen. 00:06:21 **Siri** Men da er du fjorten, og så en uke til da… [regner i tabellen 2 sekunder] 00:06:24 **Siri** Blir det seksten. [regner videre i tabellen] 00:06:28 **Siri** Og så blir atten [titter opp] tror jeg… 00:06:31 **Lærer** Supert. Da valgte du å bruke en tabell som en representasjon for å finne ut dette her da? Ja. 00:06:40 **Lærer** Bra, hva ville du gjort da, hvis du fikk vite at det var atten grader i vannet? Altså funksjonsuttrykket, så jo sånn ut [skriver opp funksjonsuttrykket på nytt] y er lik to x pluss tolv, og så får du vite at det er atten grader. Hva gjør du da for å finne ut hvor mange uker er gått? 00:06:54 **Siri** Hæ, hva sa du nettopp? 00:06:56 **Lærer** Du får vite at det er atten grader i vannet. Hvordan, eller hva gjør du for å regne ut hvor mange uker har gått, eller for å finne ut hva x er for noe? 00:07:10 **Siri** [eleven pauser i 3 sekunder] Jeg prøver liksom å ta et… Gange liksom! Hvis jeg sier to da, så da sier jeg to ganger to er fire, pluss tolv, og da får jeg… [eleven går gjennom regnestykket med utydelig tale] Det ble seksten. 00:07:29 **Siri** Og da tenker jeg liksom jeg mangler jo to til. Da plusser jeg, da plusser jeg på liksom to til. Og da kan jeg ta to ganger tre, og plusser på tolv. 00:07:39 **Lærer** Så du kjører som prøve og feile. Begynner med en verdi, og så bytter du til å prøve og feile så kommer du frem til… svaret til slutt. [lærer sjekker klokka. «utydelig tale»] 00:07:54 **Lærer** Tabellen har vi allerede tatt, for den forklarte du på en måte der på forrige når du tegnet opp [viser eleven oppsatt tabell i skjema og elevens skisse]… Så kan vi si at hvis det her er tabellen vår da, som du også lagde på forrige side… Si at det ene uke så er det fjorten grader, to uker, seksten grader, tre uker, atten grader. 00:08:11 **Lærer** Kunne du representerte den som en graf? 00:08:21 **Siri** Ehm… ehm… okkay så… Er ikke den her? [eleven mumler litt og ser på koordinatsystemet]. 00:08:32 **Siri** Den var X, ikke sant? Så… Hvor mange uker er det? 00:08:38 **Lærer**	Eleven velger å benytte en prøve og feile metode for å finne verdien til x når man får vite verdien til y. Setter inn punkter i koordinatsystemet ved å starte med 0,14 og deretter legge på 2 hver gang x økes.

Forståelse av kontekst fører til endring i matematikk.	Du kan godt starte på der den starter. Altså det var tolv grader til å begynne med da. Hvordan ville det sett ut? 00:08:45 **Siri** tolv grader til å begynne med? [eleven titter opp fra arket]. 00:08:46 **Lærer** Til å begynne med ja, så var det tolv grader. 00:08:49 **Siri** Og så stiger vi med to hver gang, så det blir fjorten. 00:08:52 **Siri** Jeg skriver i liksom [eleven setter inn punkter i koordinatsystemet (0,14) og (1,16)] 00:08:54 **Lærer** Ok ja, så du lager deg noen prikker... 00:08:58 **Siri** Og så blir det tjue… nei, nei, nei, nei. Sorry jeg skrev feil. 00:09:00 **Lærer** Ja det går fint. Det går helt fint. 00:09:04 **Siri** Og så blir atten fordi tre ,atten [setter inn punktet i koordinatsystemet mens eleven snakker]. Ehm... 00:09:09 **Lærer** Det holder det altså… Jeg bare tenkte… ehm… [drar på «ehm» i 3 sekunder] 00:09:17 **Lærer** Hvis du ser på tabellen din som du lagde, så sa du at når x er én så er y fjorten, x er to så er y seksten. Så ser du på grafen og hva du har plottet inn her nå [viser frem elevens tabell og punktene i koordinatsystemet]. 00:09:33 **Siri** Tolv… [eleven sammenlikner de to representasjonene]. Men er ikke… Starter ikke… Er ikke null, tolv? For du starter jo liksom med tolv den første uka og så	Lærer retter oppmerksomheten til eleven til å sammenlikne tabellen og grafen. Eleven oppdager at hun har satt inn feil punkter, og forklarer også dette opp mot oppgavens kontekst. Retter opp feilen.
Førkunnskaper om algebra.	00:09:45 **Lærer** [avbryter elevens tankeprosess etter 2 sekunder]… Så hvordan ville du da egentlig satt punktene da? Hvis du skulle satt de på nytt igjen? 00:09:48 **Siri** Da må jo liksom… null være her? [peker på punktet (0,12)].. Og da har jeg gjort feil, for da må vi være her [peker til punkt (1,14) og justerer punkter fra tidligere] 00:09:55 **Lærer** Ja, men nå gjør du det riktig… 00:09:58 **Siri** Og så opp sånn [fortsetter å korrigere punkter i koordinatsystem]. Jeg så ikke det… 00:10:01 **Lærer** Ja, men det går jo fint. 00:10:03 **Lærer** Det er supert. 00:10:05 **Lærer** Bra, og så lurer jeg på et par ting helt til slutt. Har du jobbet med bokstaver i matematikk tidligere? 00:10:12 **Siri**	Eleven har tidligere jobbet med algebra på barneskolen i form av å forkorte uttrykk.

Usikkerhet knyttet til forståelse av bokstaver	sånn algebra? 00:10:13 **Lærer** Ja? [eleven nikker] du har det? 00:10:14 **Siri** På barneskolen. 00:10:14 **Lærer** På barneskolen, ja? Husker du noe hvordan du jobbet med? Var det med funksjoner, eller var det på en annen måte, eller? 00:10:15 **Siri** På en annen måte 00:10:23 **Lærer** Ja, du husker ikke eksempel? 00:10:27 **Siri** Det var sånn [eleven tenker i 4 sekunder] 00:10:35 **Siri** y pluss y pluss a pluss a sånn… Og så skulle jeg liksom forkorte. 00:10:45 **Lærer** Riktig, så du har vært borti sånn at du kan forkorte uttrykket og sånn tidligere, med like bokstaver som vi kan plusse sammen og så videre. 00:10:55 **Lærer** Men ikke sånn med funksjoner som vi jobber med nå? [eleven rister på hodet og sier mm mm]	Eleven er usikker på sin egen forståelse for hva y og x er, når hun skal forsøke å forklare det.
Kovarians mellom x og y.	00:11:01 **Lærer** Hvordan oppfatter du din egen forståelse for x og y da, etter at vi har hatt ett møte med det? Hva, hva tenker du på en måte? Hva er y og X når vi jobber med funksjoner? 00:11:10 **Siri** Tall? 00:11:14 **Lærer** Tall. Hva mener du med det? 00:11:19 **Siri** Det er liksom… Forkortelser liksom… Tallforkortelse… Og det er liksom... [eleven sukker og hvisker «jeg vet ikke helt jeg»] 00:11:36 **Lærer** Det går helt fint det. 00:11:44 **Lærer** Hvis vi ser på funksjonsuttrykket som jeg lager det står det y er lik to hundre og femti x pluss tusen. Hvis du skal prøve å bruke matematikkspråket ditt, hvordan ville du forklart hva y er for noe og x er for noe? 00:11:53 **Siri** Å ja! Y er avhengig variabel. Ja. 00:11:59 **Lærer** Hva betyr det? 00:12:00 **Siri** At, den er avhengig av den andre «varbialen» for når x forandrer seg så følger y-en med og forandrer seg. [lærer noterer]	Når fokus rettes til funksjonsuttrykket som ble jobbet med i oppgaven knytter eleven begrepene avhengig og uavhengig variabel til bokstavene og utdyper med kovarians mellom de.
Mestrings - forventninger.	00:12:19 **Lærer** Flott. Og helt til slutt så tenker jeg på at vi skal jobbe en del videre med algebra fremover nå. Og så lurer jeg på, hvordan tror du at det vil bli å jobbe med algebra? Når har vi jo brukt x og y litt som variabler.	Tror det skal gå helt fint å jobbe med algebra videre.

	00:12:25 **Siri** Jeg vet ikke helt. Jeg tror jeg sikkert skjønner det, fordi jeg skjønner liksom funksjoner og sånn. Også har jeg jo jobbet litt med det før. Så det går sikkert bra.	

	Transkripsjon av intervju Mia (vedlegg9)	
	00:00:00 **Lærer** Ok. Det intervjuet handler rett og slett bare om den oppgaven dere jobbet med, og så stiller jeg litt mer spørsmål for å sjekke om forståelse, rett og slett da, OK? [eleven nikker]	
Bokstaver substituerer ord. Forenkler.	00:00:12 **Lærer** Ehm… Hva tenker du om oppgaven dere jobba med? Hvordan var det å jobbe med den oppgaven? 00:00:18 **Mia** Emh, enklere fordi vi måtte ikke... Jeg vet ikke, hvis du bruker y og x behøver man ikke skrive like mye. 00:00:27 **Lærer** Nei, ikke sant, så hvis du bruker y og x, må du ikke skrive så mye? [gjentar for bekreftelse. Mia nikker].	Synes bokstavene opplevdes som en forenkling ettersom man ikke måtte skrive så mye
Bokstaver substituerer ord. Forenkler.	00:00:32 **Lærer** Oppgaven i sin helhet da, var det sånn du kjente igjen? Lignet det på en måte på noe vi har jobbet med tidligere? [eleven nikker og bekrefter.] 00:00:41 **Lærer** Jeg bare skriver det første du sa, for det kan jeg tenke litt på… [noterer på arket og leser tilbake det eleven sa tidligere] Hvis vi bruker x og y, må vi ikke skrive så mye. 00:00:50 **Lærer** Hva mener du egentlig med det? 00:00:52 **Mia** Du må ikke skrive sånn penger spart, og da skjønner du at det er det samme, på en måte, bare at du ikke må skrive alt.	Eleven utdyper dette og knytter begrepene penger spart og antall uker til henholdsvis y og x.
Introduserer oppgave	00:01:05 **Lærer** Ja. Ok. ja vi går litt videre. Skal du få en ny situasjon. Nå skal jeg bare prøve å sjekke om. Det du føler at du har forstått gjelder i andre sammenhenger enn kun den dere jobbet med der da? 00:01:19 **Lærer** Så Foten. Badeplassen Foten, så er det målt tolv grader i vannet i midten av mai. Etter midten av mai, så stiger temperaturen med to grader hver uke, helt til det er tjueto grader. Kan du forklare dette funksjonsuttrykket her, ut fra oppgaven? Y er lik to x pluss tolv. 00:01:41 **Mia** Ehm… [eleven pauser 2 sekunder] skal jeg forklare hva….	Eleven blir introdusert for en ny situasjon og tilhørende funksjonsuttrykk.
Konvertering algebra til språk/situasjon Begrepsforklaring	00:01:42 **Lærer** [avbryter eleven] Hvorfor ser funksjonsuttrykket til den teksten sånn ut, liksom? 00:01:47 **Mia** Det der er [peker på bokstaven y] temperaturen. Y, tror jeg. Og det er avhengig variabel. Og to er… Hvor mye den stiger per uke. Og x er… Antall… Uker [drar lenge på ordet uker]. Også må du pluss på tolv fordi det var tolv grader fra før av. 00:02:17 **Lærer** Husker du hva det heter for noe det? 00:02:22 **Mia** Det var noe med ledd… 00:02:24 **Mia** Hvem da, tolv? Konstant… ledd… ? [drar lenge på begge ordene. Nøler]	Kobler på ord og kontekstforståelse på en korrekt måte til funksjonsuttrykket og bruker matematiske begrep i prosessen.

	00:02:27 **Lærer** Riktig. Ja, supert. Så y er temperaturen, altså den avhengige variabelen, to er hvor mye den stiger [leser tilbake for bekreftelse på at det er korrekt forstått] X er, hva sa du det var for noe? 00:02:38 **Mia** Ehm… Liksom antall uker. 00:02:45 **Lærer** Og tolv er den starter? 00:02:51 **Lærer** Temperaturene som var i vannet da.	
Avhengig og uavhengig variabel Kovarians	00:02:54 **Lærer** Supert. Kan du forklare hvorfor det brukes to bokstaver i det funksjonsuttrykket? Altså hvorfor har vi en y og én x? Hva er ulikt med de to liksom? 00:03:06 **Mia** Begge er variabler, men de er… brukes på forskjellige måter. 00:03:11 **Lærer** [avbryter eleven] Oi, forklarer det! 00:03:13 **Mia** Den ene er avhengig av den andre, for å liksom. [lærer noterer ned. Eleven stopper opp i 3 sekunder] 00:03:20 **Lærer** Ja, hva mener du med det? 00:03:23 **Mia** Liksom y er avhengig av x for at den skal forandre seg. 00:03:32 **Lærer** Kunne du gitt et eksempel for å forklare det? 00:03:35 **Lærer** Det er veldig interessant det du sier, altså «y er avhengig av x for å forandre seg». 00:03:40 **Mia** Hvis det står to på x, så bytter svaret på y seg. Hvis det hadde vært tre så endrer det seg. Tror jeg. 00:03:56 **Lærer** Jeg bare. Jeg får ikke skrevet ned alt, men jeg bare noterer litt her [lærer noterer noen stikkord]	Eleven forklarer hvorfor det er to variabler i et funksjonsuttrykk med at de brukes på forskjellige måter. Y er avhengig av x for å forandre seg.
Behandler y som en ukjent verdi.	00:04:03 **Lærer** Hvis du får vite nå at x er tre, i den samme oppgaven, hva gjør du for å regne ut y da? 00:04:15 **Mia** [eleven pauser 3 sekunder] Jeg tror jeg… [pauser 2 sekunder til og peker så på funksjonsuttrykket på arket] På den? Den som står der? [lærer bekrefter med et nikk. 00:04:29 **Mia** Du bytter ut x med tre. Altså du ganger to med tre. 00:04:38 **Lærer** to ganger tre [lærer skriver ned elevens forslag] 00:04:42 **Mia** Ja, også plusser du på tolv. [lærer noterer det eleven sier] 00:04:47 **Lærer** Men, hva kommer du fram til? 00:04:51 **Mia**	Behandler y som en ukjent verdi og regner ut ved å følge funksjonsuttrykkets regnestykke. Setter inn gitt verdi 3 for x.

Behandler x som en ukjent verdi.	Atten. 00:04:55 **Lærer** Ja, bra. Hvis du hadde fått vite motsatt da. Funksjonsuttrykket vårt er fortsatt y er lik to x pluss tolv. Men nå får du vite at temperaturen i vannet er atten grader. Hvordan går du fram da for å regne ut hvor mange uker det har gått? 00:05:12 **Mia** Da tar du… atten minus tolv [pauser i 2 sekunder] også tror jeg man kan dele på to 00:05:21 **Lærer** Ok [skriver opp det eleven sier] 00:05:27 **Lærer** Kunne du kontrollert det? Når du kommer fram til at x er lik tre. Kunne du kontrollerte på noe vis om det stemmer. 00:05:35 **Mia** Du kan gange to med tre og pluss på tolv.	Eleven behersker å behandle x som en ukjent ved å få vite verdien til y. Kan også sjekke om svaret er korrekt ved å reversere prosessen.
Konvertering funksjonsuttrykk til tabell Konvertering tabell til funksjonsuttrykk.	00:05:40 **Lærer** Supert. Ehm… Denne hører fortsatt til samme oppgave her nå [peker på tabellen] 00:05:50 **Lærer** Kan du forklare meg. Hvorfor kan jeg si at det er en representasjon av det som står her, altså det funksjonsuttrykket? [peker mellom tabellen og funksjonsuttrykket]. 00:06:02 **Mia** Ehm… [pauser 2 sekunder] Den viser hvor mange uker det har gått og hvor mange grader det er i vannet den også? 00:06:12 **Lærer** Ja. Kan du forklarer meg om hvordan jeg kom fram til at X to y seksten, X tre y atten og så videre da? Hva skjedde her? Hva har jeg gjort for noe? 00:06:19 **Mia** Mhm… Du har ganget to med to, og så plussa på tolv [peker på tabellen der x=2]. 00:06:28 **Lærer** Bra. Så lager verdier for den uavhengige variabelen. Og så regner vi ut hva som blir den avhengige variabelen. Hva er likheten mellom tabellen og funksjonsuttrykket da? 00:06:37 **Mia** Det som står der [peker på høyre kolonne i tabellen] er det du gjør der, liksom? [peker på 2x+12 i funksjonsuttrykket]	Forklarer tydelig kobling mellom tabell og funksjonsuttrykk og visa versa.
Konvertering fra funksjonsuttrykk til graf. Konvertering fra tabell til graf.	00:06:45 **Lærer** Flott. Hvordan kunne vi representert den funksjonen her som en graf? Hva ville du gjort da? [peker på koordinatsystemet]. 00:06:50 **Mia** Skal jeg tegne? 00:06:50 **Lærer** Ja, du må gjerne gjøre det. Forklarer meg også, hva gjør du for noe? 00:07:00 **Mia** Skal jeg være sånn? én uke… Som blir fjorten tror jeg [eleven setter inn punkter i koordinatsystemet. Mumler mens hun jobber]. 00:07:13 **Lærer** Så stiller jeg bare et spørsmål. Hvis du bare ser på funksjonsuttrykket her [peker til funksjonsuttrykket] Kan du	Bruker funksjonsuttrykket og tabellen for å sette inn punkter i et koordinatsystem og tegne en graf.

	fortelle meg om hvor funksjonen vil starte, på en måte? [peker mellom funksjonsuttrykket og koordinatsystemet]. 00:07:20 **Mia** Der [eleven peker på punktet (0,12) i koordinatsystemet]. 00:07:23 **Lærer** Hvorfor det? Altså, det er riktig, men hvorfor vet du det? 00:07:25 **Mia** Det var tolv fra før av. Det er konstantleddet der grafen starter.	
Førkunnskaper algebra.	00:07:31 **Lærer** Bra da har jeg noen kontrollspørsmål til deg. Jeg lurer på, har du tidligere jobbet med bokstaver i matematikken? 00:07:38 **Mia** Nei, aldri.	Eleven har aldri tidligere jobbet med bokstaver i matematikk.
Kunnskap om funksjoner med ord gjør det enkelt å forstå med bokstaver!	00:07:42 **Lærer** Ehm nå har vi jobba med funksjoner over lengre tid, og så har det blitt presentert for et funksjonsuttrykk som har en y og X i seg. Så har vi sagt en del om det nå, men hvordan oppfatter du din forståelse for x, og y etter det første møtet vårt da, hvordan oppfatter du at du har forstått der? 00:08:03 **Mia** Jeg tror det var enklere å forstå det siden jeg forstår veldig godt funksjonsuttrykk uten y og x. 00:08:11 **Lærer** Så du har forstått funksjonsuttrykket, og da føler du liksom, at det var enkelt å forstå det med y og x også [eleven nikker]	Eleven uttrykker at hun føler hun forstår bruk av bokstaver godt fordi hun hadde forstått funksjoner godt på forhånd (med ord).
Evnen til å abstrahere.	00:08:29 **Lærer** Hvis jeg spør deg nå da, sånn helt ut av det blå. Det går vi helt vekk fra en oppgavetekst, så får du for eksempel bare : y er lik trettifire x pluss åtte skriver jeg, hvordan vil du forklare hva y og x er for noe? [skriver ned et tilfeldig funksjonsuttrykk på arket]. 00:08:44 **Mia** Det der [peker på x i uttrykket] er hvor mange... X er hvor mange ganger du skal gange 34 med, og y er på en måte svaret, på liksom alt det som står der [peker til høyre side av likhetstegnet].	Får et tilfeldig funksjonsuttrykk uten kontekst tilknyttet og forklarer hva uttrykket betyr.
Knytter forklaringer av variabler til bokstaver.	00:08:58 **Lærer** Ja supert. Og hvis du får en enda større utfordring. Hvis du bare skal prøve å bruke så matematisk presist språk som mulig. Alt vi har snakket om og sånn. Alt du kan si om x og y, hva ville du sagt. 00:09:15 **Mia** At y er en variab… eller at begge er variabler, men y er avhengig av x er uavhengig.	Beskriver y og x som variabler, henholdsvis avhengig og uavhengig variabler.
Mestrings -forventninger.	00:09:27 **Lærer** Flott. Helt, helt til slutt da. Hva tenker du om vårt videre arbeid med algebra fremover nå. Hvordan tror du det vil gå å lære seg algebra? 00:09:34 **Mia** Jeg tror det kommer til å gå fint, fordi jeg forstår hvorfor det er x og y og variabler og sånn. Så ja. Jeg tror det går, bra.	Har god tro på videre arbeid med algebra!

	Transkripsjon av intervju Karl (vedlegg10)	
Elevens førsteinntrykk med bokstaver	00:00:00 **Lærer** En samtale, så jeg tar opp et lydopptak, og det intervjuet her handler bare om den oppgaven som dere jobbet med på gruppe og lignende oppgaver, og jeg vil bare få litt mere sånn kjøtt på beinet for å forstå litt mer hva du har forstått. 00:00:15 **Lærer** Ok. Først og fremst, hva synes du om oppgaven? Var det noe du var vant til å jobbe med liksom? 00:00:21 **Karl** Hvem av dem? 00:00:23 **Lærer** Hele oppgaven da, sånn, det var jo en stor oppgave… 00:00:30 **Karl** Jeg, jeg skjønte sånn førsten, men altså med det der bokstavene, så ble det litt mer forvirrende. 00:00:39 **Lærer** Ja, men du hang med i starten på en måte. Også ble det litt mer vanskelig? [eleven bekrefter med et nikk]. 00:00:43 **Lærer** Ok, ja, for da kom jo den, siste delen av oppgaven. Det er jo da dere ble presentert for den her fjerde representasjonen av en funksjon, i GeoGebra. Og det er jo den y er lik to hundre og femti x pluss tusen [viser til funksjonsuttrykket som står på tavlen].	Forstod innledende del av oppgaven gruppen jobbet med men ble litt forvirrende med y og x.
Introduksjon av ny oppgave	00:01:00 **Lærer** Og det vil jeg snakke litt mer om etterpå. Men jeg skal bare starte her. [peker på intervjuskjema] Hvis vi tar en litt annen oppgave… Så har jeg tatt et nytt scenario, så sier jeg at du er på Foten, badeplassen Foten? [titter på eleven som nikker tilbake]. 00:01:13 **Lærer** Da på Foten, så er det tolv grader i vannet i midten av mai. Da er målt temperaturen i vannet til tolv grader. 00:01:20 **Lærer** Etter det så stiger temperaturen med to grader hver uke helt til vannet er tjueto grader. 00:01:27 **Lærer** Og så får du vite at funksjonsuttrykket som hører til den teksten er y er lik to x pluss tolv. Tror du klarer å forklare hvorfor det uttrykket hører til den teksten? 00:01:42 **Karl** Ehm… e, hva… ehm.. [eleven lager lyder og ser på oppgaven i 6 sekunder]	Ny oppgave leses opp for eleven. Skal forsøke å forklare et funksjonsuttrykks betydning opp mot en kontekst.
Kobler bokstaver til kontekst	00:01:48 **Lærer** Hvordan stemmer det her? På en måte, kan du forklare dem ulike delene av funksjonen opp mot teksten som du har fått foran deg? 00:01:58 **Karl** Ja. Y er gradene. Og så… Ehm… Jeg må bare huske på hva det var igjen… [pauser i 3 sekunder] så to… to ganger, antall måneder. 00:02:19 **Lærer** Antall uker, ja? 00:02:20 **Karl** Ja, antall uker. Og så pluss tolv. 00:02:23 **Lærer** Hvorfor pluss tolv?	Kobler de ulike delene av funksjonsuttrykket til konteksten i oppgaveteksten.

Definere hva x og y er. Usikker	00:02:25 **Karl** Fordi at det startet og var tolv grader i vannet fra før av 00:02:28 **Lærer** Ja. Så y er antall grader? [noterer og leser tilbake det eleven har sagt] 00:02:34 **Lærer** Og så sa du to, ganger antall uker, også pluss tolv, fra før? [elven bekrefter nikkende til det lærer leser tilbake]. 00:02:51 **Lærer** Men hva kaller vi da? Hvis vi skal prøve å bruke matematikkspråket ditt liksom. Hva vil du kalle bokstaven y og x? Hva er det liksom? 00:03:06 **Karl** [eleven pauser i 4 sekunder] Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal forklare det.	Blir bedt om å forklare hva x og y er – usikker.
Knytter definisjon av variabel til dagligspråket	00:03:08 **Lærer** Hva ville du, Hvordan vil du forklarte hva antall grader og antall uker er da? Om vi hadde brukt de begrepene i funksjonsuttrykket. 00:03:16 **Karl** Mener du sånn med variabler og sånn? 00:03:18 **Lærer** Ja. 00:03:21 **Karl** Å ja. Ja. Ja. Ja... Det er en variabel.	Kan forklare grader og antall uker som variabler, ser ikke helt koblingen til bokstavene.
Konverterer forståelse av dagligspråk til algebra	00:03:24 **Lærer** OK, kan du si noe… Ehm… for det neste spørsmålet er jo da om du kan forklare hvorfor vi har to forskjellige bokstaver? 00:03:37 **Karl** Den ene er avhengig og den andre er uavhengig. 00:03:41 **Lærer** Hvilken av de er hva? [peker til funksjonsuttrykket] 00:03:43 **Karl** Den der er x én er uavhengig og y- en er avhengig.	Eleven overfører tanken til å forklare x og y som uavhengig og avhengig variabler
Kovarians	00:03:47 **Lærer** Kan du prøve å forklare hvordan du forstår hva det betyr? 00:03:52 **Karl** Hvis x-en skiftes, eller hvis antall uker…. Hvis det blir mer av den så blir antall grader også høyere. Eller samme hvis det er mindre uker så blir det mindre der [peker til y i funksjonsuttrykket]. [lærer noterer ned stikkord i skjema og leser tilbake det eleven har sagt]	Forklarer hvordan endring av den ene variabelen fører til endring i den andre.
Behandler y som en ukjent	00:04:22 **Lærer** Bra. Hvis du får vite av meg nå, så sier jeg at det er et x er lik tre i den oppgaven her. Hvordan regner du ut y da? [eleven pauser i 4 sekunder] 00:04:35 **Lærer** Jeg sier til at x er tre. [eleven pauser i 2 sekunder] 00:04:37 **Karl** Så det blir samme oppgaven, bare at det blir tre isteden? 00:04:40 **Lærer** Ja. Hva gjør du da?	Eleven får vite at x=3 og regner ut verdien til den ukjente y. Er litt usikker men utfører regnestykket ved å substituere x med 3 og regne ut

	00:04:42 **Karl** Antall grader er lik to. Nei tre, ganger x. Nei. Jo. [eleven pauser i 2 sekunder]. to ganger x. Eller nei x er… Å ja! X er jo tre. Da er det jo to ganger tre uker! 00:04:58 **Lærer** Ja og så. 00:05:01 **Karl** Pluss tolv… 00:05:02 **Lærer** Hva finner du ut da? [eleven pauser i 2 sekunder] Hva får du da? 00:05:08 **Karl** Ehm… atten grader.	
X er ukjent – Prøve og feile -metode.	00:05:16 **Lærer** Ehm… Hva hvis du hadde fått vite motsatt da, du fikk vite at det var atten grader? 00:05:23 **Lærer** Så funksjonsuttrykket er fortsatt det samme. Y er lik to x pluss tolv [skriver det ned på arket], men nå får du vite at det er atten grader. Hva kan du gjøre for å regne ut x? Eller hvor mange uker har gått? 00:05:39 **Karl** Ehm… Du finner hvor mange ganger du må plusse to med tolv fordi at det skal bli atten. 00:05:46 **Lærer** Ok, ser du en måte du kunne regnet det ut på også? 00:05:54 **Karl** Y er lik [pauser i 3 sekunder] 00:05:59 **Karl** Det er seks ganger… nei seks pluss tolv. 00:06:05 **Lærer** Ikke sant? Hva forteller det? Hva blir svaret ditt på en måte da? 00:06:09 **Karl** Atten. At y er lik atten! 00:06:12 **Lærer** Ja, og det fikk du vite i oppgaven, så nå skal du prøve å regne ut x da? 00:06:18 **Karl** Ahhhh. [pauser i 2 sekunder] det blir to ganger tre da. 00:06:22 **Lærer** to ganger tre… Og det fant du ved å se hvor mange ganger du må gange dem for å få atten totalt? [eleven bekrefter med nikking] 00:06:36 **Lærer** Så, prøve og feile metode.	Eleven benytter prøve og feile- metode for å finne verdien til x når han får oppgitt verdien til y.
Konvertering språk til tabell	00:06:39 **Lærer** Supert og så har jeg satt opp en tabell her som heter x én, to, tre og y fjorten, seksten, atten. 00:06:47 **Lærer** Den hører fortsatt til samme oppgavene. Men kan du forklare meg, hvorfor kan jeg si at den tabellen er den samme funksjonen? Den er bare den annen representasjon. Hva mener jeg med?	Kobler sammen verdiene i tabellen til konteksten i oppgaven.

Setter inn verdi for x og regner ut y i tabellen. Konvertering funksjonsuttrykk til graf Konvertering tabell til graf.	00:07:02 **Karl** Fordi… [eleven stopper opp litt] i starten… eller første uka så… Når det ikke har gått en uke anda så er det tolv grader, og så plusser du på to grader for hver uka som har gått etter det. 00:07:23 **Lærer** Ok, så hvis jeg sier at x hadde vært ti da, hvordan kunne jeg regne ut hvor mange grader det kommer til å være i vannet da? Hva hadde jeg gjort da. 00:07:41 **Karl** Ehm… [pauser 2 sekunder] Gange to med ti. 00:07:43 **Lærer** Ja to, ganger ti... noe mer? [skriver ned det eleven sier] 00:07:49 **Karl** Ehm… Jeg er ikke helt sikker. 00:07:53 **Lærer** Men to ganger ti. Hvorfor sa du ganger ti egentlig? Bare sånn for å få oppklart det. 00:07:58 **Karl** Fordi det har gått ti uker, og du skal gange to med antall uker. Også bare plusser du på tolv [lærer noterer ned stikkord og leser tilbake] 00:08:18 **Lærer** Kunne du forklart meg. Nå har jeg sånn koordinatsystem her nede [peker til koordinatsystemet på arket]. Hvordan kan man representere den funksjonen som en graf? Hvordan ville du tenkt da? Kan du prøve å vise hva du tenker da? 00:08:39 **Karl** Jeg…[pauser i 3 sekunder]. Jeg er ikke så god med graf enda, men jeg kan sikkert prøve. 00:08:44 **Lærer** Du kan bare fortelle meg hva du tenker du. 00:08:51 **Karl** Jeg husker ikke hvordan man gjorde med pluss tolv… Sånn, starter vi på tolv her? [peker til punktet (0,12) i koordinatsystemet] 00:08:54 **Karl** Her? Gjør man det? Er det riktig? [eleven titter opp gjentatte ganger og lærer nikker bekreftende] 00:08:56 **Karl** Ok. Går det ikke opp med to hver gang? 00:09:04 **Lærer** Ja riktig går opp med to, ja. 00:09:08 **Karl** [eleven setter inn punkter i koordinatsystemet]. helt til antall uker man vil ha [eleven har plassert (0,12) (1,14) (2,16) (3,18)] 00:09:10 **Lærer** Ja supert. Nå tegner du en graf sånn fordi at du sier at jeg starter på tolv og så går den opp med to hver uke. Det er helt supert. Kunne du brukt tabellen som en hjelp for å vite hvordan grafen skal se ut tror du? 00:09:25 **Karl** Ja 00:09:26 **Lærer**	Regner ut hvor mange grader i vannet etter 10 uker. Uttrykker han er usikker, samtidig som forklarer regnestykket korrekt. Skisserer opp en graf ut i fra opplysninger i oppgaven og funksjonsuttrykket. Eleven ser koblingen mellom tabellen og grafen

Førkunnskaper om algebra	Hvordan? 00:09:27 **Karl** Ehm… På én så skal du gå til fjorten. Siden det er etter én uke og så er det fjorten, også på to skal det stå på seksten [eleven peker mellom verdiene i tabellen og punktene i koordinatsystemet].	Eleven har ikke jobbet med bokstaver i matematikk tidligere, men kanskje sett det.
Knytte bokstaver til forklaring av variabel.	00:09:37 **Lærer** Bra. Ok, det er bra… Så skal jeg bare spille noen spørsmål til slutt. Har du jobbet med bokstaver i matematikken tidligere? 00:09:47 **Karl** Jeg tror ikke det. Jeg er ikke sikker. 00:09:51 **Lærer** Tror ikke det… [noterer ned det eleven sier] 00:09:53 **Karl** Jeg tror vi prøvde en gang, bare sånn for å vise. 00:10:02 **Lærer** For å vise ja. Ja.	Elevens forståelse for x og y er knyttet til en tanke om variabler, men blander inn uavhengige elementer for bokstaven y og virker noe usikker.
Avhengig og uavhengig variabel	00:10:09 **Lærer** Hvordan oppfatter du din egen forståelse for hva y og x er for noe etter at vi har hatt bare en introduksjon, og vi har bare sett y og x en gang. Hvordan kunne du forklart hva y og x er for noe i en funksjon? 00:10:28 **Karl** Ehhh. La oss si at y er antall måneder eller uker eller dager, eller minutter. Og så er x… Det er det tallet som skal ganges med.	Definerer y som avhengig variabel og x som uavhengig
Kovarians	00:10:41 **Lærer** Bra. Hvis jeg skal utfordret deg på å ikke sette det i en kontekst og ikke sette det i en oppgaver som handler om minutter og sånt, men bare bruker matematikkspråket ditt. Klarer du å forklare hva y og x er for noe? 00:10:56 **Karl** Y og x er variabler, og så y er en avhengig variabel, men x er en uavhengig variabel.	Forklarer at en endring i x medfører en endring av y.
Mestringsforventning til arbeid med algebra.	00:11:06 **Lærer** Og det betyr? 00:11:07 **Karl** At hvis [pauser i 3 sekunder] 00:11:10 **Karl** Hvis det. [pauser i 4 sekunder] 00:11:14 **Karl** Hvis x er blir mer eller mindre, så skifter det y er verdt.	Tror det blir spennende og sikkert ganske vanskelig med algebra.
	00:11:28 **Lærer** Og så lurer jeg på… Nå skal vi jo jobbe videre med algebra. Hva tenker du om å jobbe videre med bokstaver i matematikken og lære regler for algebraregning fremover? 00:11:33 **Karl** Det blir spennende. Og sikkert ganske vanskelig…	

Informasjonsskriv til elever og foresatte – samtykkeerklæring (vedlegg 11)

Vil du delta i forskningsprosjektet

Innføring av algebraisk notasjon på 8.trinn

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke et utvalg elever på 8.trinn sin forståelse av algebraiske symboler (variabler). I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Dette er en forskning på masternivå der formålet er å kartlegge elevers forståelse av variabler gjennom en planlagt undervisningsaktivitet. Aktiviteten som skal analyseres og som danner grunnlag for intervju, bygger på et lengre undervisningsforløp som alle elever i klassen er en del av.

Gjennom undervisningseksperimentet vil jeg forsøke å si noe om elevene som deltar virker å være fortrolig med begrepet variabel, og kan knytte innføringen av formell algebraisk notasjon (x og y) til tidligere forståelse av varierende størrelser innenfor emnet funksjoner.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Forskningsprosjektet er en del av studiet: master i matematikkdidaktikk for lærerspesialister, i regi av Universitetet i Agder. Det er klassens lærer; Matthias Solgaard Høye som utfører selve forskningen.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Deres barn får spørsmål om å delta ettersom hen er en del av klassen jeg underviser i. Det er ingen særegne kriterier benyttet i seleksjon av elever til denne forskningen.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i dette prosjektet innebærer det at du vil bli tildelt en matematikkoppgave som skal løses og diskuteres i gruppe med andre elever. Sekvensen vil bli filmet for at jeg skal kunne transkribere utsagn og analysere forståelse best mulig. Videopptak av sekvensen vil bli oppbevart på forsvarlig vis på en ekstern passordbeskyttet enhet, og videoopptaket vil kun benyttes av meg selv med formål å transkribere sekvensen. Du vil også bli bedt om å delta i et intervju i etterkant av gjennomføringen, der det benyttes lydopptak som oppbevares på samme vis som videoopptaket. Intervjuets formål er å undersøke elevens forståelse ytterligere og tar utgangspunkt i videoopptak fra arbeidet med oppgaven.

Som foresatte vil dere ha tilgang til å se intervjuguide på forhånd, ved å ta kontakt med meg.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Deltagelse vil på ingen måte påvirke elevens forhold til læreren eller matematikkarakteren til eleven.

Gjennomførelsen vil foregå utenfor selve matematikkundervisningen på et tidspunkt som avtales med andre faglærere. Deltagelse vil dermed ikke utløse fravær eller tapt arbeid i andre fag som må tas igjen på et senere tidspunkt.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Det er kun meg selv som vil ha tilgang til personopplysninger da jeg vil anonymisere transkriberingen og navn på samtykkeskjema erstattes med en kode som lagres på en egen navneliste adskilt fra øvrig data.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2022. Video og lydopptak vil da slettes.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Universitet i Agder ved Jorunn Reinhardtsen, jorunn.reinhardtsen@uia.no eller peronvernombud@uia.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Matthias Solgaard Høye / Jorunn Reinhardtsen

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Innføring av algebraisk notasjon på 8.trinn*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å *delta i forskningsprosjektet ved å arbeide med oppgave der videopptak benyttes*
- ☐ *å delta i intervju om arbeidet, der lydopptak benyttes*

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)