UNIVERSITETET I AGDER

Utfordringer i matematikkoppgaver på 10.trinn

En komparativ studie av to 10.trinns oppgavebøker og eksamensoppgaver i perioden 2010-2014, med hensyn på hvordan og i hvor stor grad elevene blir utfordret.

Siri Ovedal Anfinsen

Veileder
Per Sigurd Hundeland

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2015
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Som en avslutning på seks fine, lærerike, nyttige, travle, spennende og opplevelsesrike år vil jeg levere denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk. De siste seks årene har jeg fått erfare Universitetet i Agder, på godt og vondt, og ikke minst den flotte studentbyen Kristiansand med alt den har å tilby. Min rolle i klasserommet er langt fra over, jeg bytter bare side av kateteret. Jeg er utrolig spent på å ta fatt på en hverdag som lærer, samtidig har jeg lært utrolig mye i denne perioden som jeg kommer til å ta med meg videre i livet.

Jeg vil først og fremst takke veileder Per Sigurd Hundeland. Gode bemerkninger og gode veiledningstimer har vært til stor nytte. Jeg har satt pris på all hjelp jeg har fått med å finne faglitteratur som passer med studien min og at du gladelig har lånt meg alle bøkene du har på kontoret. (PS. De blir snart returnert og jeg håper jeg slipper purregebyr?)

En stor takk går også til mine største fans Fliid og Andy. Uten konkurranse om å komme først på skolen eller frokost/lunsj/middag i kantina hadde ikke denne oppgaven blitt levert i tide. Dere har hjulpet meg med å finne motivasjonen de gangene den har forsvunnet i et sort hull. I tillegg har dere alltid en artig funfact eller bare en fact som lyser opp min hverdag.

Til sist, men ikke minst vil jeg takke hele familien og et nesten-familiemedlem. Å få korrekturlesing av en norsklærer er ikke verst. Dere har i tillegg støttet meg når jeg har vært lei, trøtt, sulten, grinete og sur. Hyttene har blitt stilt til disposisjon, sommer som vinter, noe jeg har satt enormt stor pris på. Ingenting er som å tilbringe noen dager borte fra byens kjas og mas.

Kristiansand, mai 2015
Siri Ovedal Anfinsen

Sammendrag

Denne studien har som formål å gå i dybden på ulike utfordringer elever i 10.trinn får i oppgavebøker og på eksamen. Matematikk er ofte i media, og ofte i den forbindelse med at elever scorer dårlig på eksamen eller er umotiverte fordi de får for lite utfordringer. Jeg ville derfor se nærmere på hvordan lærebøkene gir utfordringer til de faglig sterke elevene og om det er ekstra vanskelige oppgaver på eksamen.

Dette er en komparativ studie, der jeg sammenligner oppgaver i to oppgavebøker, Faktor 3 oppgavebok og Sirkel 10B oppgavebok og eksamensoppgaver i perioden 2010-2014. Jeg har tatt utgangspunkt i allerede eksisterende analysemodeller (Brändström, 2005; Li, 2000) og utviklet en modell som passer til mitt forskningsspørsmål. Det jeg ønsket å finne mer ut om var:

Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?

Resultatene viser at ulike lærebøker gir utfordringer i forskjellig grad. Sirkel 10B gir flere utfordringer totalt sett, enn det elevene kan forvente å få i Faktor 3. Likevel har Faktor 3 en oppgave-profil som passer veldig fint med det elevene kan forvente å møte av utfordringer på eksamen etter 10.trinn.

I denne studien blir man som lærer bevisst på hvilke utfordringer man har når man skal velge læreverk for elevene. Velger man et verk som har fokus på å gi utfordringer til elevene, eller velger man et verk som har fokus på at elevene skal mestre eksamen på en god måte?

Abstract

The main goal of this study is to figure out what type of challenges and to what extent pupil can expect to get challenged when they are working in textbooks from school and on the exam after 10th grade. Mathematics is often sees in the media, and often in a negative context. Pupils are bored at school because they don't get challenges enough or people are complaining about the bad score on the exam in mathematics in the 10th grade. That's some of the reason why I wanted to figure out more about what kind of challenges pupils get in textbooks and to what extent they get challenges. My research question is therefore;

What types of challenges and to what extent do pupils with high performance in mathematics get challenged in mathematical textbooks in 10th grade?

This is a comparative study where I compare two textbooks, Faktor 3 oppgavebok and Sirkel 10B oppgavebok, and selected tasks from previous exams in the period 2010-2014. To be able to do the comparison I have used excising analyzing models created by Anna Brändström (2005) and Yeping Li (2000). To be able to answer my research question I have worked to improve the model in a way that it fits my study.

The results from this study show that one of the textbooks, Sirkel 10B, have more tasks that challenges the pupils that the other book Faktor does. On the other side, Faktor 3 is designed in a way that matches the tasks given on the exam. As a teacher it is important to be aware of the difference in textbooks to be able to choose tasks that fits the pupils in the best way.

1.0 Introduksjon

I denne studien vil jeg sammenligne matematikkoppgaver gitt i oppgavebøker beregnet på 10.trinn for å se på hvor utfordrende disse er. Jeg vil også se hvordan disse oppgavene er i forhold til eksamensoppgaver gitt de siste fem 5 årene. For å kunne gjennomføre denne studien var det noen valg og begrensninger som måtte foretas. Jeg vil derfor presentere bakgrunn for valg av tema (1.1) og matematiske emner (1.2) før jeg presenterer forskningsspørsmålet mitt (1.3). I introduksjonen kan man også finne en oversikt over hvordan jeg har valgt å strukturere denne oppgaven (1.4) før jeg presenterer tidligere forskning innen samme emne denne studien bygger på (1.5).

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Fan, Zhu og Miao (2013) gjennomførte en studie som kartla tidligere studier av analyser av lærebøker, her vises det at det er lite forskning på lærebøker før 1980-tallet. Det trekkes fram i denne studien at selv om lærebøker i matematikk har eksistert lenge, er ikke forskning på området like utbredt. Bruk av lærebøker er dominerende i matematikkundervisningen, derfor bør det gjennomføres mer forskning på hvordan lærebøkene lages og hensikten med å bruke disse i undervisningen. De tre områdene innenfor lærebokanalyse det har blitt forsket mest på er bruken av lærebøker, generell lærebokanalyse og sammenlikninger av lærebøker. Fan, Zhu og Miao foreslår at det bør forskes mer på begreper og teorier som er underliggende i matematikkbøkene, og rollen til læreboken i forhold til andre virkemidler som blir brukt i undervisningen.

I Stavanger Aftenblad (15.02.2013)[1] kan man lese at flere foreldre henvender seg til Kommunalt Foreldreutvalg (KFU) fordi elevene «kjeder» seg på skolen. Det antydes at skolen ikke tilbyr nok utfordringer. Jeg tror mange lærere bruker mye av tiden til å gi tilpasset undervisning for de faglig svake elevene, og i mange tilfeller overlater de faglig sterke elevene til seg selv. På bakgrunn av disse hypotesene vil de faglig sterke elevene i store deler av skoledagen være overlatt til å løse oppgaver i lærebøkene på egenhånd. Dersom dette skjer i skolen, er de faglig sterke elevene avhengige av lærebøker som inneholder gode og utfordrende oppgaver.

For å skape læring i skolen finnes det flere faktorer som spiller inn, og lærebøker er en av disse. Det er vesentlig at elevene forstår lærebøkene, de er nemlig en av hovedkildene til den kunnskapen elevene skal tilegne seg. Lærebøkene er ressurser som elevene kan ta i bruk for å utvikle sin egen kunnskap og forståelse. I mange klasserom er lærebøkene det fysiske verktøyet elevene forbinder med læring og undervisning (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002).

Valverde et al. gjennomførte en undersøkelse av 418 lærebøker på tvers av flere land. Dette var i hovedsak en analyse som gikk på TIMSS landene[2]. De fant ut at lærebøkene i matematikk ikke er like, det er forskjeller på landende, karakternivå og

---

[1] Artikler hentet fra Stavanger Aftenblad: http://www.aftenbladet.no/nyheter/lokalt/stavanger/--Skolen-forsommer-de-flinke-3123472.html Hentet: 12.02-2015
http://www.aftenposten.no/meninger/sid/Ingen-tilbud-til-faglig-sterke-elever-7827748.html Hentet: 12.02-2015

[2] Oversikt over TIMSS-land: http://www.timss.no/r_3_95_deltaker.html

innhold. Dette synes jeg var veldig interessant, og ville derfor ta utgangspunkt i noen norske bøker for å se på forskjeller og likheter i disse. Jeg ville også se hvordan disse bøkene er oppbygd med tanke på utfordringer til elever som er faglig sterke og hvordan oppgavene i bøkene skiller seg fra oppgavene som blir gitt på avgangseksamen i 10.trinn.

De siste årene har det vært relativt lave resultater på eksamen og standpunktkarakterer til elever som går ut av grunnskolen etter 10.trinn[3]. Man kan se at i løpet av de siste seks årene er det en synkende tendens i elevers prestasjoner på eksamen som blir gitt i 10.trinn. Da jeg kom over disse resultatene fikk jeg lyst å se litt nærmere på hva som kan være årsakene til at elevenes resultater på eksamen har denne tendensen.

Eksamens- og standpunktkarakterer, utvalgte fag, etter fag, eigeforhold, tid og statistikkvariabel

	2009	2010	2011	2012	2013	2014
	Gjennomsnittlig karakter	Gjennomsnittlig karakter	Gjennomsnittlig karakter	Gjennomsnittlig karakter	Gjennomsnittlig karakter	Gjennomsnittlig karakter
Matematikk, standpunkt						
I alt	3,5	3,6	3,6	3,5	3,5	3,5
Matematikk, skriftlig eksamen						
I alt	3,4	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0

Figur 1: Oversikt (fra SSB[4]) over eksamens- og standpunktkarakter etter 10.trinn i perioden 2009-2014.

Som man ser på tabellen ovenfor har elevenes resultater på skriftlig eksamen i matematikk etter 10.trinn sunket fra 3.4 til 3.0 på seks år. Kan dette ha sammenheng med at elevene ikke får nok utfordringer på skolen?

All opplæring og skolegang (grunnskole og videregående skole) er bundet av opplæringsloven. Denne loven inneholder plikter og rettigheter forbundet med skolegang i Norge. Alle elever (på grunnskole og i videregående skole) har i følge denne loven krav på tilpasset opplæring; *«§ 1-3. Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen og lærekandidaten»*.[5] Dette gjelder elever som er faglig svake, middels og sterke.

Nåværende kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen har tidligere uttrykt at retten om tilpasset opplæring ikke er mindre viktig for de flinke elevene6. En gammel myte som svever rundt i samfunnet vårt er at «de flinke klarer seg alltid». Isaksen uttalte videre at det er grunn til å tro at en del evnerike elever faller ut av skolen og blir en del av frafallsstatistikken. Det er nemlig ikke slik som den gamle myten om at de faglig

[3] og [4] Resultater fra SSB; standpunkt og eksamenskarakter etter 10.trinn: https://www.ssb.no/statistikkbanken/selectvarval/saveselections.asp

[5] Opplæringsloven: https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61#KAPITTEL_1
[6]Talen til Torbjørn Røe Isaksen om at skolen er for alle kan man lese her: https://www.regjeringen.no/nb/aktuelt/En-skole-for-alle--ogsa-de-flinkeste/id761114/ Hentet 02.05.2014.

sterke alltid klarer seg stemmer. Når de faglig sterke eller evnerike elevene har innlært det ordinære lærestoffet er det viktig at de får utfordringer og aktiviteter som ikke bare er preget av drill og repetisjon. I følge Idsøe og Skogen (2011) må oppgavene gi anledning til dypere forståelse av det lærte stoffet eller til å lære nye elementer som ligger i utkanten av tidligere lært stoff.

I følge Idsøe og Skogen (2011) finnes det på enhver skole elever som ønsker å lære, ønsker å utfordre seg selv, ønsker å forstå og å oppdage. I tillegg er det svært vanlig at disse elevene har en energi som kan være krevende for lærerne å håndtere. Disse elevene er nysgjerrige, stiller spørsmål, er interessert i mange ulike ting, har en ekstrem hukommelse og en evne til å se sammenhenger.

På bakgrunn av disse faktorene som nå er nevnt, vil jeg i denne oppgaven se nærmere på hvordan og i hvilken grad faglig sterke elever blir utfordret i skolen. Dette vil jeg gjøre ved å analysere to oppgavebøker som er beregnet på 10.trinn; Faktor 3 oppgavebok og Sirkel 10B oppgavebok (heretter omtalt som Faktor og Sirkel). Jeg vil også se nærmere på eksamensoppgaver fra perioden 2010-2014. Er det slik at eksamen blir vanskeligere og vanskeligere, eller er det bøkene som ikke gir elevene nok utfordringer?

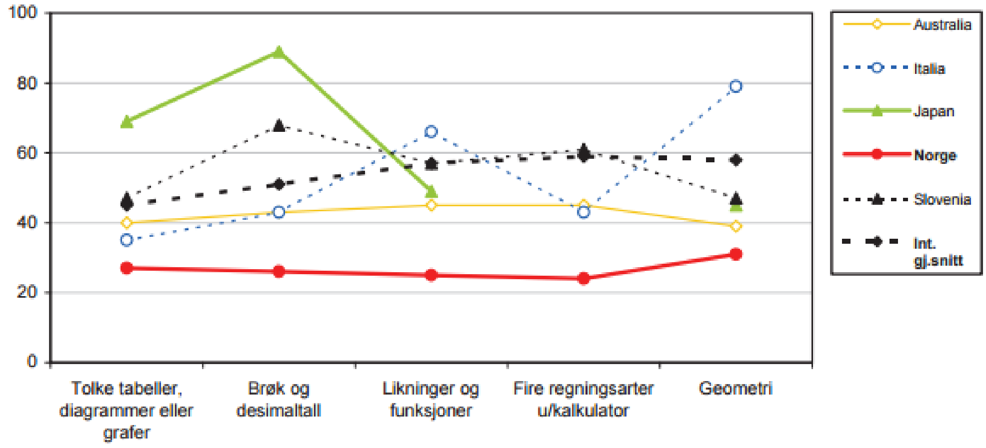
1.2 Bakgrunn for valg av matematisk emne

Rammene for denne studien tillater ikke at jeg gjennomgår alle emner i bøkene, det var derfor nødvendig å begrense til noen matematiske emner. Mitt valg falt på «funksjoner» og «likninger og ulikheter». Det var flere grunner til dette, den ene er at gjennom matematikkdidaktikk-studie har vi lært mye om hva elever synes er utfordrende i algebra, og jeg ville derfor se om dette kan ha noen sammenheng med oppgavene gitt på eksamen og i oppgavebøkene. Jeg valgte området likninger og ulikheter innen algebra, fordi dette er sentralt med tanke på tidligere eksamensoppgaver. En grunn til at jeg valgte funksjoner er fordi det er spennende å se nærmere på hvordan bøkene fremstiller funksjonsbegrepet.

Vi har alle hørt at det er en «realfagskrise»[7] i Norge . Det har vært flere oppslag i aviser og andre tidsskrifter om dårlige resultater på PISA- og TIMSS[8]-undersøkelsene som har blitt gjennomført på norske elever. I studien til Bergem og Grønmo (2009, s.119) ble figur 2, som man kan se under, presentert. Denne var innvirkende for valg av de matematiske emnene «Likninger og funksjoner».

[7] Utdanningsminister Torbjørn Røe Isaksen kan bekrefte dette: https://www.utdanningsforbundet.no/upload/Tidsskrifter/Bedre%20Skole/BS_2_2014/UTD-BedreSkole-0214-WEB_Sinnes_og_Eriksen.pdf

[8] Kan lese mer om resultater i TIMSS og PISA her: http://www.timss.no/publications/timss_2013_materie_web.pdf og http://www.vg.no/nyheter/innenriks/skole-og-utdanning/derfor-er-norske-15-aaringer-saa-daarlige-i-matte/a/10148310/



Figur 2: Elever som er med i TIMSS undersøkelsen har blitt bedt om å anslå hvor mye de arbeider med de ulike emnene i matematikktimene på 8.trinn. Figuren viser svarene til elevene i ulike land. (Bergem & Grønmo, 2009, s.119)

I TIMMS-undersøkelsen har elevene blitt bedt om å anslå hvor mye det arbeides med de ulike faglige emnene i matematikktimene på 8.trinn. Svaralternativene var; «Hver eller nesten hver time», «Omtrent halvparten av timene», «Noen timer» eller «Aldri». Av figuren ovenfor kan man se at elever i Norge anslår at de arbeider under det internasjonale gjennomsnittet med alle matematiske emnene som er listet opp. Der «likninger og funksjoner» er de emnene elevene tror de arbeider nest minst med. Denne figuren gjorde meg mer interessert i emnene «likninger og funksjoner» og var en av grunnene til at jeg valgte å fordype meg i nettopp disse.

I innledningen på emnet «Likninger og ulikheter» i Faktor 3 Grunnbok (Hjardar & Pedersen, 2007) kan man lese hva man kan bruke likninger til og hvordan man kan løse likninger: «Vi kan bruke likninger når vi skal løse praktiske problemer. Vi bruker ofte x for den ukjente i en likning, men vi kan også bra andre bokstaver, som for eksempel a, y eller z. Vi kan løse en likning grafisk eller ved regning» (Hjardar & Pedersen, 2007, s.139). Likninger forbindes ofte med uttrykket «Algebra», det er fordi den eldste og enkleste forståelsen av algebra defineres som læren om likninger og regning med tall og variable[9]. Algebra er noe de fleste av oss har et forhold til. Det er flere som synes det er vanskelig «å finne X». Algebra er noe man jobber med gjennom hele skolen. Fra småskolen kan man se oppgaver som ser slik ut: _ + 5 = 10. Etter hvert blir oppgavene mer avanserte, og man lærer «regler» for hvordan man skal løse likninger eller arbeide med algebra på andre måter. Ryan & Williams (2007) forklarer at aritmetikk kan sees på som «tidlig algebra», der det handler om å se på numeriske mønstre, former og rom. Aritmetikken sees ofte på som en bro over til selveste algebraen, med det menes at elevene får en overgang fra det kjente til det mer abstrakte de kan mestre. Begynnende algebra handler om å generalisere disse mønstrene som man ser. Å generalisere definere i noen tilfeller forskjellen på aritmetikk og algebra. Når elever blir introdusert for algebra er det viktig å ha fokus på forståelse. Det kan være kontekst, modeller og metaforer som støtter opp om forståelsen. Jeg valgte algebra, fordi det er et tema som flere elever ser på som utfordrende. Jeg ville derfor se hvilke type utfordringer elever på 10.trinn kan forvente å få fra lærebøker og på eksamen.

[9] I følge store norske leksikon defineres algebra slik: https://snl.no/algebra

«Funksjoner» er det andre matematiske emnet jeg valgte å se nærmere på. En funksjon defineres av Gulliksen, Hashemi og Hole (2013) slik: *«En funksjon f definert fra en mengde A til en mengde B er en regel som til hvert element x i A gir oss et entydig bestemt element f (x) i B»* (Gulliksen, Hashemi, & Hole, 2013, s.47). Eller som det forenklet blir forklart til elevene i innledningen i kapittelet om funksjoner i Faktor 3 Grunnbok: *«En funksjon viser hvordan en verdi forandrer seg på grunnlag av en annen verdi»* (Hjardar & Pedersen, 2007, s. 105). Mange elever forstår begrepet funksjoner med flere ulike representasjoner; grafisk, verbal, numerisk og analytisk. Funksjoner kan være et vanskelig begrep for flere elever å forholde seg til alene, fordi det som oftest blir presentert med forskjellige representasjonene. Hartter (2009) poengterer viktigheten av at læreren legger til rette for variasjon i aktivitetene i undervisningen, for å utvikle et mer robust begrepsbilde av funksjoner for elevene. Dette synes jeg var interessant, og vil derfor se nærmere på hvordan det forventes at elevene arbeider med oppgaver om funksjoner i oppgavebøker og hva det forventes at elevene skal kunne på eksamen i 10.trinn.

Jeg valgte Faktor og Sirkel fordi disse bøkene var nivådifferensierte med tre nivåer. Ettersom jeg har fokus på hvilke utfordringer de faglig sterke elevene får, analyserer jeg kun oppgaver fra nivå tre, noe jeg kommer tilbake til i kap.3.4. Jeg valgte også ut oppgaver fra eksamensperioden 2010-2014 innenfor samme matematiske emne som fra bøkene. Dette ble gjort fordi jeg ville sammenligne utfordringene som blir gitt på eksamen med oppgavene gitt i bøkene.

1.3 Forskningsspørsmål

På bakgrunn av de elementene som er omtalt i kapittel 1.1 og 1.2 har dette ledet meg til å finne svar på følgende spørsmål:

Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?

Jeg ønsker altså å se på hvordan elevene blir utfordret i to utvalgte oppgavebøker og eksamensoppgavene i perioden 2010-2014. Har det noen sammenheng med at elevene ikke får nok utfordringer i lærebøkene, og derfor gjør det dårligere på eksamen? Kan det være andre faktorer som spiller inn på den synkende tendensen i elevenes resultater på eksamen i 10.trinn har? Er det lite variasjon i oppgavene som blir gitt til elevene i oppgavebøkene, som resulterer i at de «kjeder» seg i undervisningen, eller kan det være en annen forklaring til dette? Dette er noe av det jeg ønsker å finne svar på i min studie, og som jeg tror kan være viktig for meg som fremtidig lærer å være bevisst på når jeg skal undervise i matematikk.

I forskningsspørsmålet legges det vekt på utfordringer som blir gitt til de faglig sterke elevene. Jeg vil ikke primært omtale de faglig sterke elevene i denne studien. Det er fordi valg av lærebøker, henholdsvis Faktor og Sirkel, er nivådifferensierte med tre ulike nivåer. Det legges da til grunn at elever som velger å gjøre oppgaver tilhørende nivå tre er faglig sterke.

1.4 Strukturen i oppgaven

Denne oppgaven er delt inn i seks overordnede deler. Den første delen inneholder bakgrunn for valg av tema og matematisk emne, forskningsspørsmål og presentasjon av tidligere forskning innen analyse av lærebøker. Her vil det bli presentert studier som er gjort på tvers av landegrenser, og innenfor samme land, slik jeg har gjort.

Del to inneholder en teoretisk bakgrunn. Her vil jeg presentere ulike syn på læring, deriblant behaviorisme, konstruktivisme og sosiokulturell læringsteori. Jeg vil også presentere hva det betyr å ha kunnskap og forståelse innen matematikk og hvilke kognitive krav en oppgave kan inneholde.

I metodekapittelet presenteres metodikken bak å analysere en lærebok, deretter hvordan jeg har gått fram for å analysere oppgavene i de utvalgte læreverkene og på eksamensoppgavene. Jeg vil presentere den modellen jeg brukte da jeg analyserte oppgavene og hvilke kriterier denne modellen innehar. Her vil man også kunne lese en presentasjon av de ulike læreverkene jeg har brukt, samt eksamensoppgavene.

Resultater og analysedelen inneholder en presentasjon av de resultatene som kom fram ved å gjennomføre analyse på de utvalgte matematikkoppgavene. Her kombineres konkrete resultater med teori, for så å sette det inn i en sammenheng. Jeg har også en egen diskusjonsdel, i denne delen trekker jeg fram de viktigste funnene fra resultatene mine.

Som en avslutning på denne studien vil jeg fatte en konklusjon på bakgrunn av resultatene. Jeg vil også trekke fram hvilke pedagogiske implikasjoner man som lærer kan dra nytte av når man skal være med i utvelgelse av lærebøker til ungdomsskolen, samt bevissthet rundt valg av oppgaver man ønsker elevene skal gjøre. Helt til slutt presenterer jeg hva som kan gjøres videre med denne studien for å trekke bredere konklusjoner og utarbeide mer informasjon om analyse av lærebøker.

1.5 Tidligere forskning

Som tidligere nevnt, er ikke analyse av lærebøker særlig utbredt enda. Det er likevel gjennomført studier med hensyn til bruken av lærebøker, sammenlikning av lærebøker og hvilken rolle læreboken skal ha i skolen.

Pepin & Haggarty (2001) har undersøkt hvordan lærebøker i matematikk blir brukt i de ulike landende England, Frankrike og Tyskland. Fokuset er å se på hvordan lærebøkene i matematikk fungerer som representanter for pensumet og hvilken rolle lærebøkene har som en forbindelse mellom teori og pedagogikk. Et annet aspekt i denne studien er måten lærebøkene blir brukt på av læreren og hvordan dette påvirker læringskulturen i klassen. Resultatene av undersøkelsen viser at både i Frankrike, England og Tyskland har læreboken en viktig posisjon, men strukturen på lærebøkene er forskjellig. De engelske lærebøkene er enkle, med mye fokus på spørsmål som elevene kunne svare direkte på. Oppgavene bar preg av rutiner, og det var få oppgaver som krevde en dypere forståelse og tenkning fra elevene. Lærerne i England bruker i hovedsak lærebøkene som kilde til matematikk og de stoler i stor grad på lærebøkene. I Frankrike er også bruken av lærebøker utstrakt. Lærerne bruker i hovedsak lærebøkene til å finne oppgaver og aktiviteter. Alle elevene har samme lærebok som de skal bruke ett skoleår. Lærerens rolle er å finne passende oppgaver til elevene på det nivået de er på. Det var flere lærere i Frankrike som brukte andre ressurser enn læreboken for å finne mer kognitivt krevende oppgaver til elevene. I Tyskland finnes det tre ulike typer grunnskoler, likheten er at alle skolene har tre lærebøker som er rettet mot det forventede prestasjonsnivået til elevene. Lærebøkene er hovedsakelig delt inn i to deler, den ene som introduserer et tema og oppgaver tilhørende dette og den andre delen er en seksjon med flere oppgaver til dette temaet. Lærebøkene i

Tyskland er relativt komplekse og har høyt nivå, men kan kanskje virke litt ensformige. Konklusjonen i denne studien viser at klasseromskulturene er formet av minst to faktorer, nemlig at en lærers pedagogiske prinsipper som er synlige i skole- og klassekulturen. Den andre er undervisnings- og kulturelle tradisjoner som har utviklet seg over tid.

Yeping Li (2000) har også sett på lærebøker på tvers av landegrenser. Hun har sett på likheter og forskjeller i forventninger blant elevers matematiske opplevelse i USA og Kina. Hun har òg sett på problemer knyttet til addisjon og subtraksjon i flere læreverk, for å kunne analysere problemene har hun brukt en analysemodell som ser slik ut:

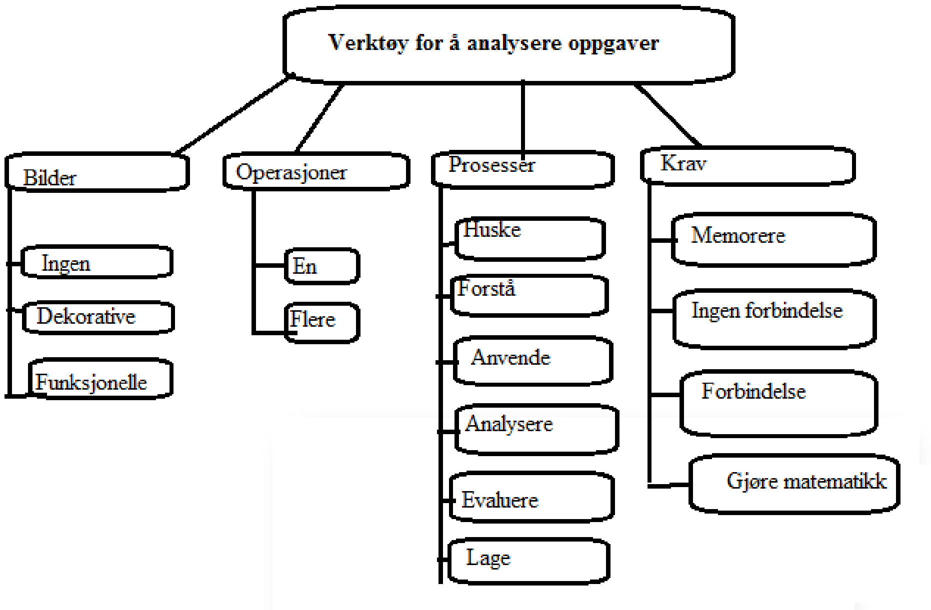
Dimensions of Problem Requirements

1. Mathematical Feature	• single computation procedure required (S) • multiple computation procedures required (M)
2. Contextual Feature	• purely mathematical context in numerical or word form (PM) • illustrative context with pictorial representation or story (IC)
3. Performance Requirements	
(1) Response type:	• numerical answer only (A) • numerical expression only (E) • explanation or solution required (ES)
(2) Cognitive requirement:	• procedural practice (PP) • conceptual understanding (CU) • problem solving (PS) • special requirement (SR)

Figur 3: Analysemodell brukt i en studie som sammenlikner lærebøker i Amerika og Kina (Li, 2000, s.237).

Resultatene fra undersøkelsen viste at amerikanske lærebøker varierte problemene i større grad og hadde mer fokus på begrepsforståelse enn kinesiske lærebøker. Lærebøkene var like i forhold til krav til beregninger og begrepsmessige funksjoner. Likevel hadde kinesiske lærebøker flere oppgaver med brøker og desimaltall, og av den grunn regnes disse som oppgaver med høyere matematisk innhold.

En annen måte man kan sammenligne lærebøker på, er å ta utgangspunkt i flere bøker innenfor samme land, og dette har blant annet Brändström gjort. Basert på tre matematikkbøker fra Sverige har Brändström analysert oppgaver i lærebøker for å se på hvilken vanskelighetsgrad oppgavene har. Det er i utgangspunktet ønskelig at alle elever skal bli utfordret og stimulert gjennom undervisningen i grunnskolen. For å undersøke om dette faktisk skjer har Brändström, i likhet med Li, utviklet en modell for å gjennomføre analysene av oppgavene i bøkene. Modellen som ble brukt i denne analysen kan sees i figuren under.



Figur 4: Verktøy for å analysere oppgaver, hentet fra Brändström sin studie om vanskelighetsgrad i oppgaver i Sverige(Brändström, 2005, s. 47, egen oversettelse).

Resultatene fra denne studien viser at det finnes differensiering i lærebokoppgavene. På høyere kognitivt nivå (se kap. 2.3) var disse oppgavene varierende og utfordrende, men på lavere kognitivt nivå (kap.2.3) var det i stor grad fokus på prosedyrer og oppgaver det forventes lite av elevene.

På lavere kognitivt nivå vil elevene få lite utfordringer utenom å lære seg prosedyrer. Studien viser også at det finnes få oppgaver som befinner seg på det høyeste kognitive nivået.

2.0 Teoretiske perspektiver

I denne delen vil jeg belyse teori som er aktuell i forbindelse med min studie. Jeg vil først se på ulike læringsteorier i lys av matematikk og læring (2.1): Dette for å kunne relatere ulike lærebokoppgaver til disse teoriene. Deretter vil jeg diskuterer ulike aspekter ved kunnskap og forståelse av matematikk (2.2). Deretter går jeg inn på ulike kognitive krav (2.3) og kognitive prosesser (2.4) knyttet til læring av matematikk. I tillegg presenteres ulike dimensjoner matematiske problemer kan inneholde, som kan brukes til å analyse av matematikkoppgaver (2.5), før jeg ser på arbeidsmetoden «inquiry» (2.6) og oppgavetypen «problemløsing» (2.7).

2.1 Læringsteorier

Læringsteorier belyser ulike måter i å tilnærme seg læring på. Basert på teorienes forutsetninger argumenteres det for prinsipper for læring. Jeg har i min studie utviklet en analysemodell som jeg har anvendt på ulike typer matematikkoppgaver fra to ulike læreverk for ungdomstrinnet og tidligere eksamensoppgaver. Ut i fra oppgavetypene kan man noen ganger gjenkjenne ulike læringsteorier, derfor er det viktig med kunnskap om hvilken teori som gjenspeiles i de ulike oppgavene.

2.1.1 Behaviorisme

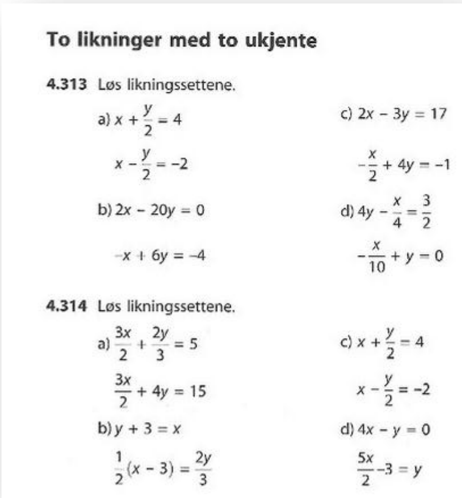
Behavioristiske læringsideer er synlige på flere måter i matematikkundervisningen i skolen. Ofte vil en behavioristisk forståelse av læring inspirere til en bestemt type oppgave. Før dette utdypes blir begrepet behaviorisme presentert og definert.

Behaviorisme er vanskelig å definere, grunnen til dette er fordi forskere bruker ulike definisjoner, i tillegg forandrer definisjonen seg med tiden. Behaviorisme er opprinnelig en atferdsteori, men den har gjennom historien også blitt anvendt som prinsipp for læring. En definisjon som blir brukt i forbindelse med læring, er *«the belief that learning takes place through stimulus-response connections»* (Orton, 2004, s. 28). I en klasseromskontekst kan dette eksemplifiseres ved at en passende stimulus, som for eksempel at en lærer stiller et spørsmål, eller spørsmålet (stimuli) blir presentert i en bok eller et software-program. Dette fører til en respons av eleven, for eksempel i form av et korrekt svar (respons). For at stimulusen skal ha best effekt, er eleven avhengig av tilbakemelding på hans respons, gjennom en forsterking. Dette skjer gjennom en positiv forsterkning (belønning) eller i negativ forsterkning (straff). Belønning kan være i form av rask tilbakemelding fra læreren eller fasiten, slik at eleven vet at det han gjør er riktig. Dermed kan neste sekvens av stimuli begynne.

B.F Skinner anvendte behavioristisk teori knyttet til hva han kalte «programmert læring». Dette programmet handler om læring gjennom små steg. Det ble bygget læringsmaskiner, som var konstruert slik at elevene leste en tekst (stimulus), deretter avga svar på et spørsmål (respons), og fikk deretter umiddelbar tilbakemelding på om svaret var rett (forsterkning) eller i den grad det var galt ingen tilbakemelding (manglende forsterkning). Erlwanger (1973) gjennomførte en studie med fokus på «Individually Prescribed Instruction (IPI)» som er et matematikkprogram der elevene blir overlatt til å utvikle sin egen matematiske forståelse ved å gjøre oppgaver. Elevene kan ta tester når de føler de har mestret oppgavene på ett nivå, der de må ha 80% riktig for å komme over i neste nivå. IPI er et progresjonsbasert program og testene som elevene må gjennomføre for å komme til neste nivå inneholder kun et rett alternativ. I studien følger Erlwanger en elev som har gode resultatet fra IPI-matematikken. Erlwanger konkluderer med at å følge et slikt program i matematikken kan føre til misoppfatninger og fokus på å finne og følge regler framfor forståelse. Behaviorismen bygger på ideen at kunnskap finnes utenfor individet, det er bare om å dele denne kunnskapen opp i små biter slik at det er mulig for elever å ta til seg dette. Disse bitene kan anses som byggeklosser, på den måten at elevenes kunnskap gradvis byggers opp (Säljö, 2001).

Dette synet på læring kan knyttes til lærebøker som er preget av øvingsoppgaver hvor målet er å få innøvd teknikker og algoritmer og komme fram til det riktige svaret. Fasit til oppgavene fins ofte bak i boka. Da er det slik at oppgavene som elevene løser fungerer som stimulus, svaret elevene avgir er respons, og hvis de ønsker en tilbakemelding på om det de har gjort er rett, er det bare å bla opp bakerst på fasiten. Fasiten fungerer da som en forsterkning (belønning/straff) dersom elevene har rett, eller som en manglende forsterkning dersom svaret er galt.

Oppgaver som kan antas å promotere et behavioristisk syn på læring av matematikk, er oppgaver som bygger på repetisjon. Det innebærer at elevene gjør flere oppgaver som er tilnærmet like for å gradvis bygge opp en bedre forståelse. I figur 5 vises det to oppgaver som er hentet fra Faktor. Dette er oppgaver som har to likninger med to ukjente. Det forventes at elevene skal gjøre samme regneoperasjon i åtte deloppgaver etter hverandre.



To likninger med to ukjente

4.313 Løs likningssettene.

a) $x + \frac{y}{2} = 4$, $x - \frac{y}{2} = -2$

b) $2x - 20y = 0$, $-x + 6y = -4$

c) $2x - 3y = 17$, $-\frac{x}{2} + 4y = -1$

d) $4y - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$, $-\frac{x}{10} + y = 0$

4.314 Løs likningssettene.

a) $\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 5$, $\frac{3x}{2} + 4y = 15$

b) $y + 3 = x$, $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{2y}{3}$

c) $x + \frac{y}{2} = 4$, $x - \frac{y}{2} = -2$

d) $4x - y = 0$, $\frac{5x}{2} - 3 = y$

Figur 5: To oppgaver man kan kople til behavioristisk syn på læring, her med repetisjon av samme emne (Hjardar & Pedersen, 2008, s.118).

Det forventes at elevene bruker samme teknikk gjentatte ganger når de løser disse oppgavene. Her testes ikke elevene i forståelse, men om de kan bruke metoden de har lært til å løse denne typen oppgaver. Man kan også se at uttrykkene øker i vanskelighetsgrad fra første til siste deloppgave. Det ser vi eksempelvis i oppgave 4.314 b) der det ene uttrykket er $\frac{1}{2}(x-3) = \frac{2y}{3}$ sees på som vanskeligere enn uttrykket man finner i 4.313 a) $x + \frac{y}{2} = 4$, som er det aller første uttrykket elevene skal løse. Shephard (i Dysthe, 2001) skriver at *«Læring må organiserast sekvensielt og hierarkisk»*. Denne oppgaven kan sees på som et eksempel på dette.

2.1.2 Konstruktivisme

Konstruktivisme er et filosofisk perspektiv på kunnskap og læring. Det innebærer at det enkelte individ konstruerer sin egen forståelse av verden rundt seg. Den objektive sanne kunnskap eksisterer ikke. Kunnskap blir ikke sett på som en kopi av noe som er sett og gjort, det må oppleves selv (Jaworski, 1994). I forbindelse med min studie kan man identifisere oppgaver hvor elevene gjennom utforskning og problemløsingsoppgaver skal konstruere sin egen forståelse av matematiske sammenhenger.

Konstruktivismen bygger i stor grad på ideer fra Jean Piaget. Piaget var opptatt av at barn og elever skal få utforske og oppdage selv. *«Each time one prematurely teaches a child something he could have discover himself , the child is kept from inventing it and consequently from understanding it completely»*, (Piaget i Jaworski, 1994, s.15). Med dette menes at eleven blant annet skal manipulere objekter, og gjennom slike prosesser skapes det en relasjon mellom barnet og objektene. Dette kan relateres direkte til ulike typer oppgaver man kan engasjere elever med. I matematikken kan utforsknings-, åpne- eller problemløsingsoppgaver være eksempler på oppgaver der elevene ikke får svaret med en gang. Dette kan være med på å fremme elevenes egne tanker og resonnementer innenfor matematikken.

Matematikk blir ofte innført ved hjelp av konkreter for elever, for så å bli gradvis mer abstrakt. Da er det viktig at elevene har gode opplevelser og god forståelse av matematikken på lavere nivå, slik at de kan trekke logiske slutninger og kunne forstå den matematikken som ikke lenger er konkret (Säljö, 2001).

Som tidligere nevnt handler konstruktivisme om å konstruere sin egen forståelse. Von Glaserfeld har laget en definisjon av konstruktivisme ved hjelp av to påstander:

1. Kunnskap mottas ikke passivt, men bygges aktivt opp av den som tilegner seg kunnskapen (mottakeren av denne kunnskapen er eleven).
2. Kunnskap tilegnes som en tilpassing, altså kunnskap har som funksjon å organisere måten elevene oppfatter verdensbildet på.

(Von Glaserfeld, i Jaworski 2004, s.16, egen oversettelse).
I denne definisjonen ligger det at elevene i skolen ikke bare fungerer som passive observatører, men de må aktivt delta for å tilegne seg kunnskap. Det er ikke slik at elever som observerer et samfunn og dets tilhørende normer og regler tilegnes denne kunnskapen bare ved å passivt være tilstede, eleven må aktivt delta for å få utbytte av det samfunnet man er en del av.

For å gi elevene mulighet til å utvikle sin egen forståelse, er det essensielt at læreren har kunnskap om hvilket nivå hver enkelt elev befinner seg på i matematikken. Her er ideen om tilpasset opplæring og differensiert undervisning sentral. Hvis en lærer legger til rette for hver enkelt elev, på det stadiet den befinner seg på, er muligheten for at hver enkelt elev utvikler og konstruerer sin egen kunnskap være større.

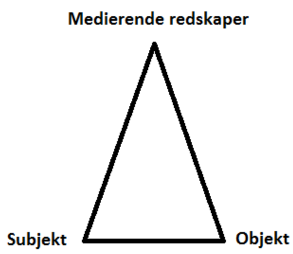
2.1.3 Sosiokulturell læringsteori

En sentral tanke innenfor sosiokulturell læringsteori er at læring blir konstruert gjennom samhandling, interaksjon og i en kontekst. Språk er en viktig faktor, fordi gjennom språket blir kunnskapen og læringen uttrykt (Dysthe, 2001). Modellen jeg brukte for å analysere oppgaver (som blir presentert i kap.3.3) inneholder blant annet kriteriet «forventet responsuttrykk». Denne responsen kan være et tallsvar (for eksempel 17), et uttrykk (2x-2), grafisk tolkning (eksempel finne sammenheng mellom likning, tabell og graf) eller at eleven med egne ord skal produsere en forklaring som respons på oppgaven han arbeider med. Kategorien «forklaring» kan i noen tilfeller sees i sammenheng med sosiokulturell læringsteori, grunnen til dette er at flere oppgaver i elevenes lærebøker krever at elevene skal forklare sin tankegang. I disse tilfellene bruker elevene språket til å konstruere sin mening av den aktuelle oppgaven – gjerne i samspill med andre og ved hjelp av medierende verktøy.

Lev Vygotski ila begrepene verktøy eller redskap en spesiell betydning innenfor sosiokulturell læringsteori. Verktøy eller redskaper kan sees på som ressurser som tas i bruk når vi forstår verden rundt oss. Det kan være språklige ressurser eller mer fysiske ressurser som en penn, bil eller kalkulator. Språket kan være behjelpelig med å delta i samspill med andre mennesker og dermed være med på å utvikle kunnskapen vår. Ved å ha muligheten til å delta i diskusjoner og høre at andre diskuterer, vil man få en større forståelse for omverdenen. De mer fysiske redskapene kan hjelpe oss å utvikle praktiske prosjekter som en del av et samfunn. De fysiske ressursene har blitt utviklet over lang tid, og å vite når man bør ta i bruk eller videreutvikle en slik ressurs er en måte å utvikle sin egen kunnskap (Säljö, 2001).. De fysiske ressursene omtales ofte som artefakter. Säljö definerer et artefakt slik: «*Artefakt vil si gjenstander eller produkter fremstilt av mennesker. Med artefakt menes i denne sammenheng måleverktøy (vekt, linja), hammer, kam, datamaskiner, sykler osv. Artefakter lages for å fungere som redskaper for menneskene når de skal løse problemer, bearbeide informasjon osv.*» (Säljö, 2001, s.31).

Eksamensoppgaver som blir gitt på eksamen til 10.trinn er i dag delt inn i to kategorier. Del 1 er en del uten hjelpemidler og del 2 er det tillatt med hjelpemidler. På del 2 er det oppgaver som anbefaler bruk av data, spesielt programmene som Excel og Geogebra. Intensjonen med hjelpemidlene er at elevene kan spare tid og legge gode strategier for valg av fremgangsmåte[10].

Mediering er et annet begrep som blir mye brukt i sosiokulturell læringsteori. Säljö skriver at *"Begrepet mediering (…) antyder at mennesker ikke står i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen"* (Säljö, 2001, s. 83). Mediering, som for eksempel språklige tegn, er forbindelsen som finnes mellom stimulering og handling. Det aller viktigste medierende redskapet er språket (Wathne, 2008; Säljö, 2001; Dysthe, 2001).

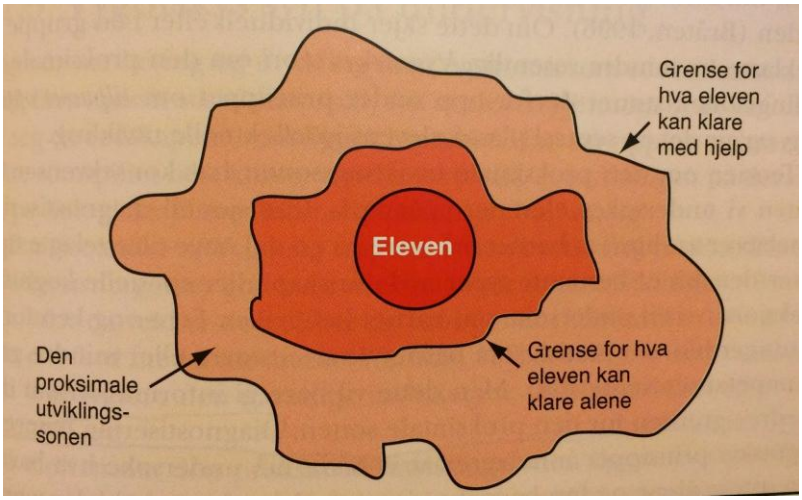


[10] Kan lese mer om eksamen her: http://matematikk.net/res/eksamen/10-kl/V14_Del2.pdf

Figur 6: Samspillet mellom subjekt, objekt og medierende redskaper (Wathne, 2008, s.55)

«Det kan dermed sies at mediering er betegnelsen som blir brukt for å beskrive menneskers samspill med kulturelle redskaper» (Wathne, 2008, s. 55). Ser man på hvordan mennesker utvikler seg og kunnskapen sin sammen med artefaktet, kan man ikke skille artefaktet og mennesket, disse må sees i sammenheng med hverandre (Säljö, 2001). I denne studien vil subjektet være elevene, objektene være oppgavene og bearbeidelsen av oppgavene er de medierende redskapene, som kan være både fysiske og språklige.

Vygotsky beskriver læring og utvikling gjennom begrepet «den nærmeste utviklingssone» (proksimale utviklingssom jf. Imsen, 2005). Tanken om at mennesker hele tiden forandrer seg og utvikler seg er sentral her. Säljö (2001) forklarer at mennesker befinner seg i utallige situasjoner sammen med andre i løpet av livet, da kan man velge om man vil overta eller ta til seg den kunnskapen man får gjennom medmenneskene. I motsetning til behaviorismen, som hevder at kunnskap er iboende, ser sosiokulturell læringsteori mer på hvordan man kan lære og utvikle seg i samspill med andre mennesker.



Figur 7: Den nærmeste utviklingssonen (Imsen, 2005, s. 259)

Oppnådd kompetanse er de utfordringene og den kunnskapen som hver og enkelt har oppnådd gjennom ulike sosiale samspill. «Den nærmeste utviklingssone» kan defineres som « *«avstanden» mellom det et individ kan prestere på egenhånd og uten støtte, og det individet kan prestere under ledelse av en voksen eller i samarbeid med mer kapable andre*» (Vygotsky i Säljö, 2001, s.123). Vygotsky mener det er i den nærmeste utviklingssonen læring skjer. Eleven må være villige til å bevege seg ut fra det han kan, for å delta i samtaler eller veiledning med mer kompetente, for å utvikle læring. Etter slike samtaler kan elevene utvikle en indre samtale og dermed har læring oppstått.

Elever skal utvikle sin matematiske kompetanse i undervisningen. I følge sosiokulturell læringsteori vil det da være slik at læreren legger nivået litt høyere enn det han vet at elevene mestrer, så skal elevene få veiledning og hjelp til å klare å utvikle egen kompetanse på området. I skolen fungerer ofte lærer eller en faglig sterkere elev som veileder. Læreren og faglig sterke elever sees på som mer kompetente personer i dette tilfellet, og vil derfor være med på utviklingen av de andre elevenes kunnskap. Når elevene arbeider med matematikkoppgaver kan denne veiledningen skje både muntlig og skriftlig, slik at de ved hjelp av disse tilbakemeldingene utvikler en dypere matematisk forståelse.

Ordet kommunikasjon er sentralt i både sosiokulturell læringsteori og i matematikken. Det er blant annet viktig at elevene kan formidle sine tanker omkring løsninger, læreren må formidle hva han/hun vil at elevene skal gjøre, matematikkoppgavene må være tydelige og elevene må kunne formidle hvor/når han står fast i en oppgave. Kunnskapsløftet presenterer fem grunnleggende ferdigheter som representeres i alle fag[11]; å uttrykke seg muntlig, skriftlig, regning, IKT og å kunne lese. Jeg vil her trekke fram to av dem, nemlig å kunne uttrykke seg muntlig og kunne regne.

Å kunne regne er for mange en selvfølge i matematikkundervisningen, men det er noe som presiseres innenfor den grunnleggende ferdigheten «å kunne regne», det er at elevene skal kunne kommunisere ved hjelp av regning. «*Kommunisere innebærer å kunne uttrykke regneprosesser og resultater på ulike måter. Kommunisere innebærer også å kunne begrunne valg, formidle arbeidsprosesser og presentere resultater til en mottaker*»[12] Å kunne uttrykke seg muntlig handler òg i stor grad om å kunne kommunisere. Når oppgavene krever en forklaring av elevene handler dette om at de kan kommunisere hva de tenker, for å komme fram til en løsning. «*Kommunisere omfatter det å utrykke meninger, drøfte problemstillinger og strukturere og tilpasse egen muntlig tekst til mottakere, innhold og formål*»[13].

2.2 Kunnskap og forståelse i matematikk

Forskningsspørsmålet mitt omhandler hvilke typer utfordringer elevene får ved å bruke de to utvalgte lærebøkene. For å kunne svare på dette, er det relevant å se på hva lærebokforfatterne har fokus på når det kommer til å både bygge opp kunnskapen og å skape forståelse i matematikk gjennom oppgavene fra lærebøkene. I dette kapittelet vil jeg først belyse ulike former for kunnskap før jeg omtaler begrepet forståelse.

Den klassiske definisjonen av kunnskap spores gjerne tilbake til Platon og antikken, den lyder som følgende: «*Den klassiske definisjonen definerer kunnskap som en begrunnet sann oppfatning. Ifølge en slik definisjon vet et subjekt noe p hvis, og bare hvis: (1) p faktisk er sant, (2) han eller hun tror at p er sant og (3) han eller hun har fullverdig grunn til å tro at p er tilfelle*»[14]. Kunnskap handler altså om å vite. Kunnskap i matematikk er å vite noe om matematikk. Det er to typer kunnskap jeg vil gå i dybden på i denne studien, den ene er begrepskunnskap og den andre er prosedyre kunnskap. Begrepskunnskap kan i følge Miller og Hudson (2007) sees på som forståelse for prinsipper og forhold mellom biter av kunnskap i hjernen. Begrepskunnskap utvikles ved at man klarer å se sammenhenger mellom de bitene med kunnskap som allerede befinner seg i hjernen. Har en elev, for eksempel,

[11] Rammeverk for fem grunnleggende ferdigheter: http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no

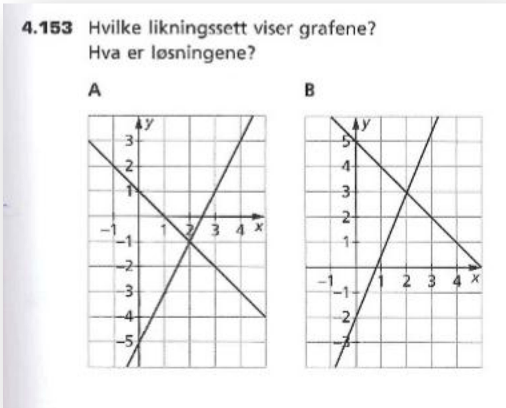
[12] http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no S.12

[13] http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no s.8

[14] Kan lese mer om definisjonen av kunnskap her: https://snl.no/teorier_om_kunnskap

kunnskap om addisjon og i etterkant introdusert for subtraksjon, så vil elevens begrepskunnskap utvikles med at eleven klarer å se sammenheng mellom addisjon og subtraksjon. For å komme med et konkret eksempel på denne sammenhengen kan man si at en elev låner 13 kroner av en medelev for å kjøpe brus i kantina. Denne medeleven hadde bare med seg 20 kroner totalt. Eleven må deretter få tilbake 13 kroner for å ha totalt 20 igjen. Regnestykket blir da: 20–13=7 og 7+13=20.

En annen måte begrepskunnskap kan utvikles på er hvis elevene klarer å skape forhold med eksisterende og nye begreper. Begrepskunnskap innebærer en dyp forståelse av meningen med matematikk. Hvis elever har utviklet en god begrepsforståelse, kan de lettere generalisere og lære i ulike situasjoner. Innehar elevene en god begrepsforståelse har de større muligheter for å tilegne seg kunnskap både på og utenfor skolen, fordi de klarer å finne sammenhenger i nye sitasjoner (Miller & Hudson, 2007). I figur 8 vises et eksempel på en oppgave som kan bygge på begrepskunnskap. I dette tilfellet skal elevene knytte sammen begrepene likninger og funksjoner.

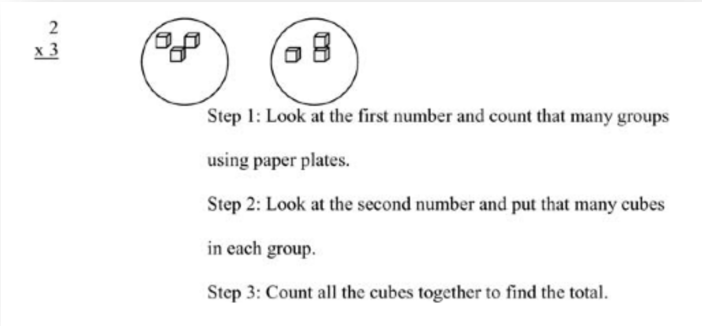


Figur 8: Oppgave fra Sirkel som omhandler begrepskunnskap (Torkildsen & Maugesten, 2008, s.27).

I oppgaven blir elevene bedt om å finne likningssettet til grafene og løse likningssettene. Her må elevene først finne likningene til to grafer, altså sette sammen begrepene graf og likning forstå hvordan disse er knyttet sammen. En slik oppgave er med på å utvikle elevene begrepskunnskap fordi de må knytte sammen begrepene likninger og funksjoner for å skape forståelse av oppgaven.

Miller og Hudson skriver*: "the second type of knowledge that students must acquire to become competent in mathematics is called procedural knowledge"* (Miller & Hudson, 2007, s. 50). Prosedyrekunnskap må elever inneha for å utvikle gode matematikkferdigheter. Med prosedyrekunnskap menes evnen elevene har til å følge flere steg i en matematisk utregning for å komme fram til en løsning. Ofte kan dette være en rekke med sekvenser som inneholder flere prosedyrer, som elevene må benytte seg av for å mestre oppgaven. Selv om elevene kan følge disse prosedyrene, er det verd å merke seg at det ikke nødvendigvis kreves at elevene forstår den underliggende matematikken bak disse innlærte stegene, men at de mestrer utførelsen (Miller & Hudson, 2007).

En grunn til at mange lærere velger å fokusere på å gi elevene slike klare prosedyrer og algoritmer, er for å gjøre det lettere for elevene. De tror også at emnet de underviser i da blir klarere for elevene. Flere lærere vil at elevene skal mestre disse prosedyrene fordi det er dette elevene blir testet i under eksamener og andre prøver. Det er ikke alltid nødvendig å forstå den underliggende matematikken da enkelte elementer i vil være for avansert til at elevene drar nytte av å vite grunnen til at det er slik (Boaler, 1997). Et eksempel på en oppgave som kan bygge på prosedyrekunnskap kan sees på figur 9. Her presenteres det en stegvis framgangsmåte som elevene kan benytte seg av. Oppgaven er om multiplikasjon, og den er beregnet på elever som har liten erfaring med multiplikasjon fra før.



Figur 9:.Denne oppgaven kan være med på å bygge opp elevenes prosedyrekunnskap (Miller & Hudson, 2007, s.52)

Dette en oppgave som bygger på prinsippet om å gi elevene ulike steg som de skal følge. I eksempelet er ikke hovedvekten på det matematiske emne multiplikasjon, selv om det er dette som på sikt som er hensikten med oppgaven. Intensjonen bak denne oppgaven er gjentatt addisjon, som er en måte å tilnærme seg begrepet multiplikasjon på.

Å inneha kunnskap om et emne eller begrep i matematikken er i seg selv ikke nok. Elevene må også ha forståelse for kunnskapen. Begrepet forståelse stammer også til bake til antikken, og gjerne i forbindelse med Aristoteles. Han hevdet at *«forståelse kommer forutfor, eller er en forutsetning for sann, praksis erkjennelse»*[15]. Skemp (1976) foreslo to typer forståelse som elevene kan ha. Disse to typene kalles relasjonell og instrumentell forståelse. I begrepet relasjonell forståelse legger Skemp at du forstår hva du skal gjøre og hvorfor. Innehar man denne typen kunnskap i matematikk har man en forståelse for når og hvorfor man kan bruke ulike formler.

Instrumentell forståelse betyr «regler uten grunn», altså at elevene blir presentert for noen regler og tror selv at de forstår den. Elevene kan bruke denne regelen og som oftest komme fram til rett svar, men han vet ikke hva som er den underliggende matematikken bak selve regelen eller hvordan den har sammenheng med andre matematiske begreper. Et eksempel er areal av rektangel. Hvis elevene lærer at A= L × B, altså man finner lengden på arealet og bredden, hvis man multipliserer dette, vil man få arealet. Det er veldig mange elever som klarer å bruke denne formelen i de rette tilfellene, og alltid få korrekt svar. Det som kan være tilfellet er at selv om

[15] Kan lese mer om definisjon av forståelse her: https://snl.no/forst%C3%A5else

elevene klarer å bruke denne formelen nøyaktig og korrekt, er det ikke sikkert at begrepet areal gir noen mening (Skemp, 1976).

2.3 Kognitive krav

Matematikkoppgaver i læreverk stiller ofte ulike krav til kognisjon. Store norske leksikon bruker ordene tankeprosesser, erkjennelse og oppfatning om begrepet kognisjon[16]. Matematikkoppgavene setter krav til ulike nivåer i elevers kognisjon. Oppgavene kan være lite kognitivt krevende eller kognitivt utfordrende, noe som blir forklart senere. Jeg har fokusert på hvor krevende oppgavene som blir gitt til elever er, i den forbindelse har jeg hatt fokus på å se på hvilke kognitive krav som stilles til elevene. Stein og Smith (1998b) utviklet en modell som kan være til hjelp når en skal avgjøre hvor kognitivt krevende en oppgave er. Denne modellen deles inn i to hoveddeler, de oppgavene som har lavere kognitive krav og de oppgavene som har høyere kognitive krav.

2.3.1 Lavere kognitivt nivå

På lavere kognitivt nivå er det to underkategorier. Den ene er oppgaver som krever «å memorere», og den andre er oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse». I følge Stein og Smith (1998b) er disse kategoriene oppbygd hierarkisk, altså er oppgaver som inneholder «prosedyrer uten forbindelse» mer kognitivt krevende enn oppgaver i kategorien «å memorere».

Eksempel på en oppgave i kategorien «å memorere» kan se slik ut:

Skriv brøkene om til desimaltall og prosent.

½ og ¼
Det forventede svaret er slik: ½ = 0,5 = 50 % og ¼ = 0,25 =25 %
(Smith & Stein, 1998a, s.269)

Oppgaver som havner i kategorien «å memorere» krever liten kobling med tidligere kunnskap, fakta, formler eller definisjoner fra hukommelsen. Disse oppgavene kan ikke løses ved hjelp av prosedyrer. Det er fordi elevene enten ikke har kunnskap til prosedyrer eller fordi tidsrammen til å løse en slik oppgave ikke tillater at slike tas i bruk. Oppgaveteksten inneholder ingen tvetydighet, det betyr at elevene ser en slik oppgave, og vet med en gang hva som kreves for å komme fram til et svar. Responsen på denne typen oppgaver er reproduksjon av tidligere lært fakta (Smith og Stein, 1998b).

Eksempel på en oppgave «med prosedyre uten forbindelse»:
Omform brøken 3/8 til desimaltall og prosent.
Det forventes at elevene svarer slik:
Brøk: 3/8
Desimaltall: 8:3.000 =0,375
24
60
56
40
40
Prosent: 0,375=37,5%. (Smith & Stein, 1998a, s.269)

[16] Kan lese mer om definisjon av kognisjon her https://snl.no/kognitiv

Oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» krever litt mer tenking og resonering enn de i kategorien memorering. Denne typen oppgaver er algoritmiske. I oppgaveteksten kommer det tydelig fram hvilke prosedyrer som skal brukes eller så bygger oppgaven på instruksjoner som nylig er gjennomgått av eksempelvis lærer eller i lærebok. Det kreves begrensede kognitive krav for å mestre oppgaven, og oppgaven inneholder lite tvetydighet om hva som skal gjøres. I likhet med oppgavene innenfor kategorien å memorere, har heller ikke disse oppgavene noe underliggende sammenheng med matematiske begreper eller prosedyrer. Fokuset i oppgaven er å komme fram til rett svar, og de kreves ingen forklaring på hvordan eleven har tenkt for å komme fram til svaret (Smith og Stein, 1998b).

2.3.2 Høyere kognitivt nivå

På høyere kognitivt nivå finner man også to hierarkiske inndelinger. Den første er ifølge Stein og Smith (1998b) oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» og den andre er kategorien som heter «å gjøre matematikk».

Eksempel på en oppgave med «prosedyre med forbindelse»:
Ved å bruke et rutenett på 10 x 10, identifiser desimaltallet og prosenten til brøken 3/5.
Det forventes at elevene svarer slik:
Bilde:

x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*				

Brøk:	*Desimaltall:*	*Prosent:*
60/100 = 3/5	*60/100=0,6*	*0,6=60 %*

(Smith & Stein, 1998a, s.269)

Oppgaver som er med «prosedyrer med forbindelse» har fokus på å bruke prosedyrene til å utvikle en dypere matematisk forståelse. Det blir foreslått, direkte eller indirekte, tilnærmingsmåter som er generelle prosedyrer, disse har tett sammenheng med underliggende begreper. Oppgavene har flere representasjoner, eksempler er visuelle diagrammer, symboler og ulike problemsituasjoner. Grunnen til at de har flere representasjoner kan være med på utvikle en dypere forståelse. Det kreves en grad av kognitiv innsats, at elevene kan følge prosedyrer, men ikke ukritisk. Elevene må ta i bruk underliggende begreper for å fullføre oppgaven (Smith og Stein, 1998b).

Eksempel på en oppgave i kategorien «å gjøre matematikk»:

Fargelegg 6 ruter i et 4 x 10 rektangel. Bruk rektangelet til å forklare og avgjøre a) prosentandelen som er fargelagt, b) desimaltallet av arealet som er fargelagt og c) brøkdelen av rektangelet som er fargelagt.

En måte elevene kan gjøre dette på:

x									
x									
x	*x*								
x	*x*								

a) *En kolonne vil være 10% siden det er 10 kolonner. Derfor vil 4 ruter være 10 %, og 2 ruter vil være halvparten av 10 %, som er 5 %. Så derfor vil 6 ruter være 10 % pluss 5 %, altså 15 %.*
b) *En kolonne vil være 0,10, siden det er 10 kolonner. Den andre kolonnen har bare to ruter som er fargelagt, så det vil være halvparten av 0,10, som er 0,05. Derfor vil 6 fargelagte ruter være 0,10 pluss 0,05, altså 0,15.*
c) *6 fargelagte ruter av 40, vil være 6/40, som kan reduseres til 3/20.*

(Smith & Stein, 1998a, s.269)

Det som regnes som det høyeste kognitive kravet er oppgaver som krever at man «gjør matematikk». Denne typen oppgaver krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Oppgaveteksten sier ikke stort om hvilken retning man skal ta for å komme fram til en løsning. Elevene må derfor gå bort fra tankegangen om å følge prosedyrer. Disse oppgavene krever at elevene utforsker og forstår matematiske prosesser, begreper og forhold. Siden oppgaven i seg selv ikke foreslår hvilken vei man skal gå, må elevene ta i bruk relevant kunnskap for å komme fram til en løsning. Da må elevene kunne ta matematiske valg, altså må velge hvilken relevant kunnskap som er nødvending i den enkelte situasjonen (Smith og Stein, 1998b).

2.4 Kognitive prosesser

Kognitive prosesser er de tankene som skjer hos hver enkelt elev når han, i dette tilfellet, skal utføre en matematisk oppgave. Brändström (2005) er inspirert av Blooms taxonomy (Bloom, 1956) som igjen er revurdert av Anderson og Krathwohl (2001). Anderson og Krathwohl (2001) har laget en hierarkisk oversikt over hvilke kognitive prosesser som skjer når man arbeider med oppgaver.

Kognitive prosesser
Huske
Forstå
Anvende
Analysere
Evaluere
Gjøre

Tabell 1: Oversikt over de kognitive prosessene (Brändstrøm, 2005, s. 30)

Å huske innebærer at man har evnen til å hente informasjon fra langtidshukommelsen. Innenfor denne kategorien klarer også elevene å gjenkjenne og identifisere elementer fra oppgaver de har sett før (Anderson & Krathwohl, 2001).

Å forstå innebærer at man har mulighet til å konstruere mening fra instruktive beskjeder. Dette betyr at man kan ta imot beskjeder både skriftlig, muntlig og grafisk. Elevene kan tolke, eksemplifisere, oppsummere, sammenligne og trekke slutninger ut fra det beskjeden sier. Det vil si at elevene kan lese en matematisk oppgave og prøve å gjøre seg opp en mening om hva de skal gjøre (Anderson & Krathwohl, 2001).

Anvendelse betyr at elevene kan bruke en prosedyre i en gitt situasjon. Elevene kan gjennomføre det oppgaven ber dem om, og de kan implementere kunnskap de allerede har på nye oppgaver (Anderson & Krathwohl, 2001).

Når elevene kan dele informasjon opp i biter og bestemme hvordan disse bitene henger sammen, innehar de den kognitive prosessen *å analysere*. Elevene mestrer differensiering, organisering og finne hensikten bak det materiale de blir presentert for (Anderson & Krathwohl, 2001).

Å evaluere sitt eget arbeid innebærer at elevene kan sjekke, bevise og kritisere. De kan sjekke om svaret virker logisk ut fra oppgaveteksten. De kan bevise at de valgene de har gjort stemmer og kritisere eget arbeid dersom de ser at noe er galt (Anderson & Krathwohl, 2001).

Å lage handler om evnen til å samle eller omorganisere biter til en helhet. Elever som ser mønstre og klarer å sette sammen biter til nye mønstre innehar denne kognitive prosessen. De kan også lage design eller en hypotese å teste ut om denne stemmer (Anderson & Krathwohl, 2001).

2.5 Ulike dimensjoner for å analysere matematikkoppgaver

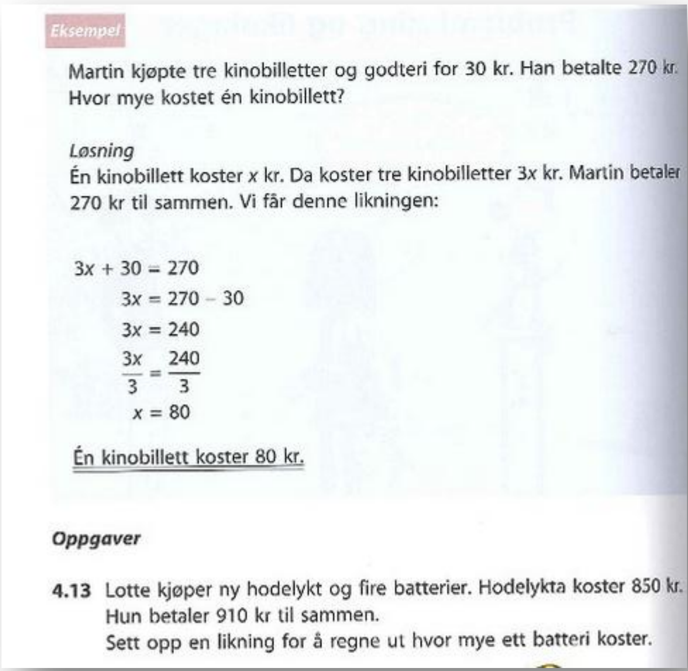
Det eksisterer mange ulike innfallsvinkler når man skal analysere matematikkoppgaver. I denne delen av oppgaven vil jeg legge vekt på syv ulike måter å analysere oppgavene på. Disse ulike analysene er sentrale i forskningsspørsmålet mitt, og særlig fordi jeg ønsker å finne ut på hvilke måter matematikkoppgavene utfordrer elevene. For å komme fram til en modell som kan brukes for å analysere ulike matematikkoppgaver er det hensiktsmessig å få oversikt over ulike måter man kan kategorisere oppgaver som finnes i læreverk på.

Før jeg går inn på de ulike måtene å analysere matematikkoppgaver på vil jeg først forklare hva jeg legger i en matematisk oppgave. En matematisk oppgave er en aktivitet, der meningen er at elevene skal fokusere på en bestemt matematisk ide. En oppgave inneholder forventninger til hva elevene skal produsere, hvordan det er forventet at de skal produsere det og med hvilke ressurser de skal produsere det (Stein, Grover & Henningsen, 1996).

Zhu og Fan (2006) beskriver syv måter å analysere oppgaver på i matematikken. De har utført en studie der de lister opp ulike kjennetegn en kan se etter for å karakterisere matematikkoppgaver;

1. *Rutineproblemer eller ikke-rutineproblemer.*

Kjennetegn på et rutineproblem er at eleven kan bruke tidligere kjente algoritmer, formler og prosedyrer til å komme fram til rett svar. Man kan si at et rutineproblem kjennetegnes ved at oppgaveteksten inneholder en metode, prosedyre eller algoritme og utfordringen kommer rett etter den. Et ikke-rutineproblem er en oppgave der eleven må reflektere over relevant stoff for å komme fram til en løsning (Zhu & Fan, 2006).



Eksempel

Martin kjøpte tre kinobilletter og godteri for 30 kr. Han betalte 270 kr. Hvor mye kostet én kinobillett?

Løsning
Én kinobillett koster x kr. Da koster tre kinobilletter $3x$ kr. Martin betaler 270 kr til sammen. Vi får denne likningen:

$$
\begin{aligned}
3x + 30 &= 270 \\
3x &= 270 - 30 \\
3x &= 240 \\
\frac{3x}{3} &= \frac{240}{3} \\
x &= 80
\end{aligned}
$$

Én kinobillett koster 80 kr.

Oppgaver

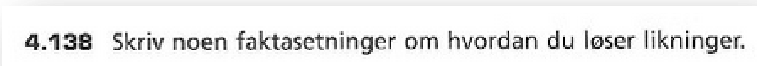
4.13 Lotte kjøper ny hodelykt og fire batterier. Hodelykta koster 850 kr. Hun betaler 910 kr til sammen. Sett opp en likning for å regne ut hvor mye ett batteri koster.

Figur 10: Et eksempel med en påfølgende oppgave (Hjardar & Pedersen, 2007, s. 150)

Man kan se i figur 10 at blir elevene forklart i eksempelet hvordan man trekker ut informasjon fra en likning, deretter kommer selve utregningen. Etter eksempelet får elevene en oppgave som er tilsvarende. Dette er eksempel på et rutineproblem.

2. *Tradisjonelle problemer eller ikke-tradisjonelle problemer.*

Ikke-tradisjonelle problemer kan gjenkjennes på 4 måter (innehar oppgaven ett av disse kjennetegnene regnes det som et ikke-tradisjonelt problem). Det første er at elevene må lage egne spørsmål ved å bruke de gitte opplysningene som er gitt i oppgaven. Det andre kjennetegnet er «puzzle-problems» der elevene engasjerer seg i berikende matematikk. Den tredje handler om oppgaver som én eller en serie av oppgaver som involverer at elevene skal samle data, analysere, identifisere, observere, måle, se etter mønster og liknende. Den siste typen handler om at elevene skal reflektere over hva som er vanskelig og hva som gir ny lærdom (Zhu & Fan, 2006).



4.138 Skriv noen faktasetninger om hvordan du løser likninger.

Figur 11: Et eksempel på ikke-tradisjonelt problem (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24)

Figur 11 viser eksempel på et ikke-tradisjonelt problem. Her blir elevene bedt om å skrive ned noen faktasetninger om hvordan man løser likninger.

3. *Åpne oppgaver eller ikke-åpne oppgaver.*

En åpen oppgave er en oppgave med mer enn én riktig fremgangsmåte og løsning. Her får elevene mulighet til å bruke egne ideer og framgangsmåter til å komme fram til en løsning. En oppgave som ikke er åpen, har én løsning som er rett (Zhu & Fan, 2006).

4.143 Lag tekst til ulikheten $5x + 35 > 70$.

Figur 12: Eksempel på en åpen oppgave (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.25)

Oppgaveteksten i figur 12 ber elevene om å lage tekst til en ulikhet. Dette er en åpen oppgave, der elevene må bruke sin egen kunnskap for å komme fram til en løsning. Det finnes utallige måter å lage tekst til en slik oppgave på, noe som gjør denne oppgaven svært åpen.

4. *Oppgaver hentet fra elevenes hverdag*

Et problem eller en oppgave kan inneholde elementer fra elevenes hverdag, denne type oppgaver bygger på kjente problemstillinger. En annen måte er å fjerne seg fra det som er kjent for elevene. Denne typen oppgaver har ingen elementer som elevene kan relatere seg til (Zhu & Fan, 2006).

3.303 Lotte og Simen har to forskjellige mobilabonnementer. Lotte betaler 150 kr i fast avgift per måned i tillegg til 0,95 kr per melding. Simen betaler 50 kr i fast avgift per måned i tillegg til 1,20 kr per melding.

a) Sett opp to funksjonsuttrykk som viser de to mobilabonnementene.

b) Framstill funksjonene grafisk.

c) Hvor mange meldinger må de sende for at de begge skal betale det samme?

Figur 13: Eksempel på en oppgave med elementer hentet fra elevenes hverdag (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 91).

3.308 a) Hvilken vinkel danner grafene til funksjonene

$y_1 = 2x + 1$ og $y_2 = -\frac{1}{2}x + 1$

med hverandre?

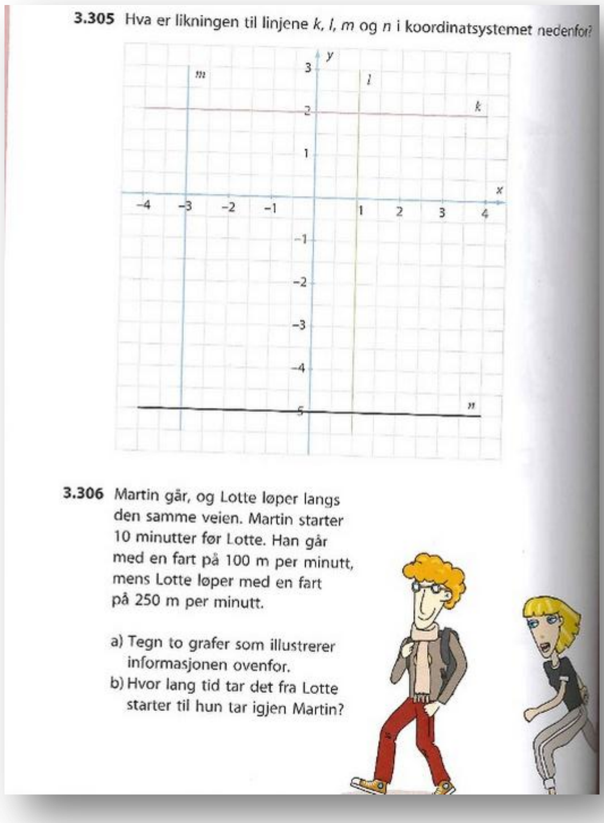
b) Multipliser stigningstallene med hverandre. Hvilken sammenheng finner du?

Figur 14: Eksempel på en oppgave uten elementer fra elevenes hverdag (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 93).

Figur 13 og 14 viser at det er forskjell i hvordan oppgavene relateres til elevenes hverdag. Oppgaven i figur 13 viser tydelig til elementer som elevene kan gjenkjenne fra egen hverdag, mens oppgaven i figur 14 inneholder ingen elementer som elevene kan kjenne seg igjen i.

5. *Oppgaver med en operasjon eller oppgaver med flere operasjoner.*

Oppgaver i lærebøker kan bli fremstilt med kun én regneoperasjon eller flere regneoperasjoner for å komme fram til svaret. Oppgaver som krever kun én regnes i mange tilfeller som mindre krevende enn oppgaver med flere (Zhu & Fan, 2006). Man kan legge to betydninger i oppgaver som krever flere regneoperasjoner; den ene er at dette er en oppgave som krever flere regneoperasjoner for å komme fram til ett svar, mens den andre måten å tolke dette på er at det kreves flere regneoperasjoner for å komme fram til flere svar innen samme oppgave.



Figur 15:Eksempel på en oppgave (3.305) det forventes én regneoperasjon, og en oppgave (3.306) det forventes flere regneoperasjoner (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 92).

Oppgave 3.305 som er vist i figur 15 ber elevene om å finne likningene til linjene. Dette er en oppgave som krever en regneoperasjon, altså at elevene skal finne en likning. Oppgave 3.306 ber elevene om å tegne to grafer basert på informasjon fra oppgaveteksten og deretter skal elevene bruke denne grafen til å hente ut informasjon for å svare på deloppgave b. Dette er et eksempel på en oppgave som ber elevene om å bruke flere regneoperasjoner for å komme fram til svaret, og der de har delt informasjonen inn i to deloppgaver, for å gjøre det oversiktlig for elevene.

6. *Oppgaver med nok informasjon, manglende informasjon og for mye informasjon.*

Oppgavetekstens innhold kan variere. Oppgaveteksten kan inneholde nøyaktig det en trenger av informasjon for å komme i mål. Oppgaven kan inneholde for mye informasjon, slik at elevene må bruke tid på å se hva som faktisk er viktig. Oppgaven kan også inneholde for lite informasjon, da må elevene bruke tid på å finne de opplysningene de trenger før de kan komme fram til en løsning (Zhu & Fan, 2006).

7. *Representasjonsform*

Når man skal analysere oppgaver er det hensiktsmessig å se på hvordan oppgaven blir presentert for elevene. Er oppgaven fremstilt i ren matematisk form, altså med formler og uttrykk kalles det et problem på ren matematisk form. Er oppgaven en tekstoppgave er kalles det en verbal form. Er oppgaven fremstilt rent grafisk eller visuelt kalles det en oppgave på visuell form. Det som er mest vanlig er å blande alle disse representasjonene, og da kalles oppgaven for en oppgave på kombinert form (Zhu & Fan, 2006).

2.6 Inquiry

Inquiry kan sees på som en metode innenfor pedagogikken der det vektlegges at elevene stiller spørsmål og søker svar, gjenkjenner problemer og søker løsninger, utforsker og undersøker hva som må gjøres for å komme videre. Det skal stilles kritiske spørsmål, elevene skal gå dypere inn i et emne, reflektere over nye aspekter og utfordre egen kunnskap for å utvikle dypere forståelse. Man kan se på inquiry som et redskap i undervisningen (Berg, 2012). I forbindelse med mitt forskningsspørsmål som omhandler hvordan og i hvor stor grad elevene blir utfordret, kan oppgaver som baserer seg på inquiry være aktuelle.

Wells (1999) definerer dialogisk inquiry som*"A willingness to wonder, to ask questions, and to seek to understand by collaborating with others in the attempt to make answers to them. At the same time, the aim of inquiry is not ''knowledge for its own sake'' but the disposition and ability to use the understandings so gained to act informedly and responsibly in the situations that may be encountered both now and in the future " (Wells, 1999, s.121).*

Når elever blir gitt inquiry-baserte oppgaver kan elevene utfordre seg selv på en utradisjonell måte. Med tanke på inquiry dreier dette seg om at elevene skal undre og resonnere seg fram til en løsning, i motsetning til tradisjonelle læringssituasjoner der læreren gir elevene svaret. Når læreren skal bruke inquiry-baserte oppgaver er det viktig at det legges til rette for dette i klasserommet. Læreren må være med på å skape et miljø som er åpent for forskning, kritiske spørsmål og utfordringer. Det bør åpnes for at undervisningen skal basere seg på elevenes nysgjerrighet, tidligere kunnskap skal få komme fram, det skal være rom for flere måter å kunne ting på og det skal være rom for kreativitet og nye perspektiver for å komme fram til læring. Det må være rom for utforskning og utprøving for elevene slik at de kan konstruere egen kunnskap (Chapmann, 2011; Berg, 2012).

2.7 Problemløsingsoppgaver

Alan Schoenfeld definerer problemløsingsoppgaver som: *«For any student, a mathematical problem is a task (a) in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and (b) for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution"* (Schoenfeld, 1993, s.71). Denne definisjonen presiserer viktigheten av engasjement hos elevene når de skal arbeide med problemløsing, og det faktum at en oppgave i seg selv ikke nødvendigvis er et problem, det er avhengig av hvilken bakgrunnskunnskap elevene har. Å løse problemer er viktig for å lære nye begreper, oppdage ny kunnskap, praktisere beregningsferdigheter, stimulere intellektuell nysgjerrighet og en måte å lære å overføre begreper og ferdigheter til nye situasjoner (Orton, 2004). Flere av oppgavene jeg analyserer bygger på konseptet problemløsing.

Å lære matematikk gjennom problemløsing er en tilnærming der hovedmålet er at elevene utvikler en dypere matematisk forståelse for begreper og metoder. Det er viktig å vite at elevene engasjeres i problemer der matematikken som skal læres er innebygd for å skape forståelse. Problemet må også bygge på elementer som elevene har mulighet for å forstå, dette gjør problemene mer engasjerende og oppnåelige for elevene. Utfordringen i skolen er å finne problemer som alle elevene har en mulighet for å mestre. Elevenes tankegang blir mer kompleks og robust når de skal løse problemer som tvinger dem til å tenke dypere, finne sammenhenger, utvide og utdype deres tidligere kunnskap (Lester & Lambdin, 2002).

Utforske, oppdage og drive med problemløsing kan være viktig for å utvikle sin egen matematiske forståelse. Gjennom oppdagelse kan matematikk læres på en mer grundig og fullstendig måte, enn bare ved at elevene blir forklart begrepet. Det finnes tilfeller der læreren må hjelpe elevene i gang, slik at de kan hjelpe å oppklare tanker og utfordringer for elevene (Orton, 2004). En oppgave som bygger på konseptet problemløsing kan man se i figur 16. Denne oppgaven krever at elevene tenker over hvilke type likninger som ikke har noen løsning, og hva det innebærer at en likning ikke har noen løsning.


4.132 Lag en likning som ikke har noen løsning.

Figur 16: Eksempel på oppgave som bygger på konseptet med problemløsing (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24)

Det finnes flere måter å komme fram til en løsning på oppgaven i figur 16 og løsningene kan variere i vanskelighetsgrad. Ved å bruke problemløsing i undervisningen blir elevene aktive i prosessen med å utvikle og konstruere sin egen kunnskap. Med det menes at de gir utfordringer som elevene kan mestre og som inneholder viktig matematikk.

3.0 Metode

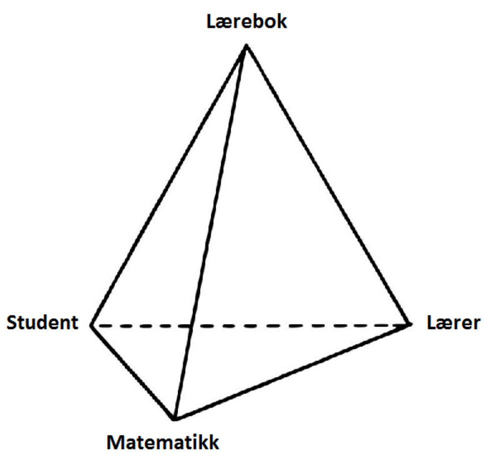
Denne studien har som formål å besvare spørsmål knyttet til hva slags og i hvilken grad matematiske utfordringer lærebøker og eksamensoppgaver gir elevene. For å gjennomføre en slik analyse har jeg blitt inspirert av studiene til Brändström (2005) og Li (2000). De har analysert matematikkoppgaver ved hjelp av en modell bestående av et sett kriterier. Jeg har bygget videre på deres modeller for å få den passende til min studie. Fokuset i denne studien er matematikkoppgaver som tilbys i læreverk for 10.trinn og utvalgte oppgaver gitt på eksamen. Jeg har analysert to lærebøker, Faktor og Sirkel, i tillegg til eksamensoppgaver gitt til 10.trinn i perioden 2010-2014. Utvalgte oppgaver hentet fra disse læreverkene og tidligere eksamener er analysert ved hjelp av en modell jeg har utviklet og fungerer som mitt analyseverktøy (3.2). Selve modellen presenteres i avsnitt 3.3. Læreverkene jeg har analysert er presentert i avsnitt 3.4 og jeg kommenterer fremgangsmåten som har blitt brukt i denne studien i avsnitt 3.5. Før jeg beskriver modellen videre vil jeg minne om forskningsspørsmålene og forklare hvilken type studie dette er.

Forskningsspørsmålet knyttet til min studie er:

> *Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?*

3.1 Studien

Lærebøker sees på som viktige verktøy i matematikkundervisningen. I min studie har jeg hatt fokus på innholdet i oppgavene som finnes i lærebøkene. Som Fan et.al. (2013) påpekte er det fremdeles forholdsvis lite forskning som er gjort på lærebøker, særlig innen metode for å analysere lærebøker, likevel vil jeg trekke fram noe av det som gjort innen metode for gjennomføre denne typen analyse. Rezat og Strässer (2012) laget en oversikt over ulike innfallsvinkler man kan ta i bruk når man skal analysere lærebøker. Dette har de fremstilt i et tetraeder med 4 faktorer; lærebok, student, lærer og matematikk. Ved å ta utgangspunkt i dette tetraederet når man skal analysere lærebøker, kan man velge hvilke av disse faktorene man ønsker å ha fokus på i analysen (Rezat & Strässer, 2012).



Figur 17: Det didaktiske tetraeder. (Rezat & Strässer, 2012, s.471).

I min analyse har jeg valgt å fokusere på lærebok og matematikk. Læreboken fungerer som et artefakt (kap.2.1.3) eller som et hjelpemiddel i undervisningen for å skape sammenheng mellom de andre faktorene i tetraederet; lærer, elev og matematikken. For å se på hvordan matematikken blir presentert i lærebøkene og hvordan lærebøkene velger å gi utfordringer til elevene, har jeg hatt fokus på innholdet i lærebøkene og eksamensoppgavene. Dette kalles for en innholdsanalyse. Jeg har analysert to lærebøker og utvalgte eksamensoppgaver i perioden 2010-2014, med hensyn på hvilke utfordringer man kan se i oppgavene.

3.2 Bakgrunn og innhold i modellen

For å analysere oppgavene utviklet jeg en modell som bygger på tidligere forskning. Modellen belyser utvalgte elementer jeg så på som formålstjenlige ut fra forskningsspørsmålet mitt. Jeg tok utgangspunkt i to modeller, den ene er laget av Anna Brändstöm (2005) og den andre er laget av Yeping Li (2000), se kapittel 1.5. Begge modellene har flere elementer jeg ville se nærmere på i min analyse, derfor har jeg satt sammen en modell som både bygger videre på, og kombinerer de to modellene. De ulike dimensjonene en matematikkoppgave kan inneholde (kap.2.5) er basert på studien til Zhu og Fan (2006) er også faktorer som spilte inn på hvordan modellen til slutt ble utformet.

Modellen har tre overordnede kategorier; «antall operasjoner» som kreves for å løse oppgavene, «forventet responstype» og «kognitive krav». Navnene på de tre kategoriene er hentet direkte fra Brändströms modell, men jeg har lagt til flere elementer for å tilpasse modellen min studie. For å få en oversikt over hva jeg legger i de ulike kategoriene kommer en forklaring for den enkelte. Modellen i sin helhet presenteres i kapittel 3.3.

3.2.1 Antall operasjoner

Kategorien «antall operasjoner» bygger på Brändström (2005) og Li (2000) sine modeller. Denne kategorien er i følge Zhu og Fan en av dimensjonene som ofte blir brukt når en skal analysere matematikkoppgaver. I modellen jeg har bruk er oppgavene delt inn i oppgaven som krever én eller flere regneoperasjoner. Det anses som mer utfordrende om elevene må bruke flere operasjoner for å komme fram til svaret enn om det kun er én regneoperasjon som kreves (Biggs & Collis, 1982).

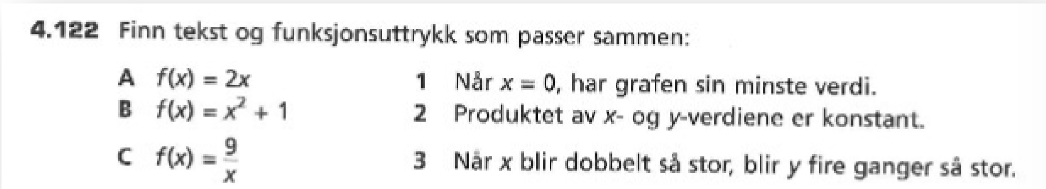
I min analyse legger jeg to betydninger av denne kategorien til grunn; den ene er oppgaver som krever flere regneoperasjon for å komme fram til et svar, den andre er om oppgaven krever flere regneoperasjoner i samme oppgave, og disse nødvendigvis ikke leder til ett svar, men flere svar på en oppgave. Jeg har valgt å beholde samme inndeling som i modellene til Brändström, Li og Zhu og Fan, med «én» regneoperasjon eller «flere» regneoperasjoner. Det var hensiktsmessig å ha med denne kategorien i modellen for å se hvor krevende oppgavene var, og om det var en sammenheng med at flere regneoperasjoner hører til oppgaver som er mer utfordrende.

3.2.2 Responstype

Denne kategorien bygger på modellen til Li (2000) og har elementer fra de ulike dimensjonene til Zhu og Fan. Responstyper har jeg valgt å dele inn i underkategoriene «tallsvar» (for eksempel 13), «uttrykk» (eksempel «2x-4»), «grafisk tolkning» (for eksempel knyttet til funksjonsuttrykket y=2x-4 med tilhørende graf) og «forklaring» (for eksempel begrunnelse på et tekstproblem: «Per må har 4 epler, fordi Tone hadde 6, og tilsammen hadde de 10»).

Responstyper er organisert hierarkisk. «Tallsvar» er svar i tallform og regnes som den enkleste responstypen. Er oppgaven mer krevende kan den spørre etter et «uttrykk». Dette er oppgaver der elevene enten skal komme fram til et uttrykk, eksempelvis x + 2 = 4, eller oppgaver der elevene skal komme fram til et svar i form av x =… «Grafisk tolkning» innebærer tolkning av grafer, noe som ofte betyr at elevene må forstå uttrykket som ligger til grunn og hva som ligger bak selve grafen. De mest krevende oppgavene spør etter en forklaring (Li, 2000).

«Grafisk tolkning» var en kategori jeg valgte å legge til i modellen min i etterkant. Li har ikke med dette som en forventet respons. Da jeg hadde valgt ut hvilke matematiske emner jeg skulle analysere fra lærebøkene, altså funksjoner, likninger og ulikheter var det flere oppgaver som ikke fikk sin «plass» ved å bruke de originale kategoriene. «Grafisk tolkning» ble plassert over tallsvar og uttrykk i hierarkiet. Grunnen til det er at når man tolker noe grafisk, må man ofte først gå gjennom et tallsvar og et uttrykk for å ha muligheten til å legge mening til en grafisk representasjon. Figur 18 viser et eksempel på en oppgave som er kategorisert innenfor



4.122 Finn tekst og funksjonsuttrykk som passer sammen:

A	$f(x) = 2x$	**1**	Når $x = 0$, har grafen sin minste verdi.
B	$f(x) = x^2 + 1$	**2**	Produktet av x- og y-verdiene er konstant.
C	$f(x) = \frac{9}{x}$	**3**	Når x blir dobbelt så stor, blir y fire ganger så stor.

denne kategorien.

Figur 18: Eksempel på en oppgave med blant annet «grafisk tolkning» som forventet respons (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.22)

Figuren 18 viser en oppgave der elevene blir bedt om å finne tekst og funksjonsuttrykk som passer sammen. Jeg har kategorisert den forventede responsen som «grafisk tolkning». Elevene skal finne en sammenheng mellom uttrykk og tekst, og i teksten er det egenskaper som denne grafen har. De må derfor se for seg (skissere opp eller regne på) grafen til uttrykkene som er vist for å komme fram til en løsning.

Oppgaver som krever en forklaring fra elevenes tankegang kan i noen tilfeller kobles til sosiokulturell læringsteori. Som Säljö forklarer: «Å lese, produsere og bruke skrift (…) er altså sosiokulturelle aktiviteter som innebærer at en benytter seg av praktiske og intellektuelle teknikker» (Säljö, 2001, s. 190). Ofte må elevene forklare framgangsmåte eller begrunne sine valg av arbeidsmetoder. Elevene må sette ord på begreper, noe som kan være med på både å utvikle begrepsforståelse og begrepskunnskap. I denne typen oppgaver kan man se at det er en form for kommunikasjon mellom lærer og elev. Elevene må kommunisere til læreren hvordan de tenker og hvilke fremgangsmåte de har tatt i bruk.

3.2.3 Kognitive krav

Dette er en kategori som bygger videre på modellen til Brändström (2005) og de ulike dimensjonene Zhu og Fan (2006) bruker til å analysere oppgaver. Brändström skiller mellom kognitive prosesser og kognitive krav i sin studie. Med kognisjon menes blant annet de tankeprosessene, oppfatningene, gjenkjennelsesevnen elevene har. Kognitive krav i matematikken er derfor blant annet hvilke krav som stilles til elevene innen oppfatninger, tankeprosesser og gjenkjennelse når de skal løse oppgaver. Kognitive prosesser er de prosessene som foregår i hjernen når elevene skal løse oppgaver i matematikken. Jeg har valgt å slå disse to kategoriene sammen fordi det er enkelte prosesser som hører sammen med kognitive krav på lavere nivå, og andre som hører sammen med kognitive krav på høyere nivå (blir presentert i hver enkelt kategori under). Jeg velger å beholde navnene Brändström bruker innenfor kategorien «kognitive krav». Underkategoriene som jeg bruker er; «å memorere», «ingen forbindelse», «forbindelse» og «å gjøre matematikk». For å forstå hvilke krav og prosesser som kreves for at en oppgave skal tilhøre den ene eller andre kategorien vil jeg presentere alle underkategoriene hver for seg.

Memorere

For å forklare hvilke kriterier en oppgave innehar for å plasseres i denne underkategorien vil jeg først oppsummere det som står om å memorere i teorikapittel 2.3. Å memorere er en kognitiv utfordring som, i følge Stein og Smith (1998b), befinner seg på lavere kognitivt nivå. Oppgaver i denne kategorien innebærer liten kobling med tidligere lært kunnskap og har fokus på å reprodusere fakta, formler eller definisjoner fra hukommelsen. Tidsrammene for slike oppgaver er for kort til at elevene skal ta i bruk prosedyrer, eller så har ikke elevene lært noen prosedyrer om det aktuelle emnet. Et eksempel på en slik oppgave kan man se på figur 19.

Oppgave 1 (2 poeng)

Regn ut

a) $831+1196=$ ________ b) $987-789=$ ________

Figur 19: Oppgave 1, del 1 fra eksamen 2014. Et eksempel på en oppgave i kategorien «å memorere».

Figur 19 inneholder en oppgave der elevene blir bedt om å addere og subtrahere. Dette er noe de fleste elever husker hvordan de gjør når de går i 10.klasse. Elevene bør ikke bruke nevneverdig med tid på å løse en slik oppgave og heller ikke ta i bruk noen spesifikke prosedyrer, da dette ikke kreves for å finne svaret på denne oppgaven.

Innenfor «å memorere» finner man den kognitive prosessen «å huske». Det innebærer at elevene gjenkjenner eller identifiserer oppgavetypen fra tidligere erfaringer, og vet derfor hva som skal gjøres for å komme fram til en løsning (Anderson & Krathwohl, 2001). I denne typen oppgaver er det ingen ny informasjon eller fremgangsmåte. Alle operasjoner som skal utføres er kjent for elevene og de er ikke i tvil om hvordan de skal gå frem for å komme til en løsning.

Ingen forbindelse

Kognitive krav har to nivåer, det er lavere kognitivt nivå og høyere kognitivt nivå. «Å memorere» er lavest av de kognitive nivåene. Oppgaver med prosedyrer uten forbindelse, altså kategorien «ingen forbindelse» befinner seg også på lavere kognitivt nivå, men over «å memorere». Jeg vil her gjengi deler av det man kan finne i teorikapittel 2.3. Oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» er oppgaver der elevene skal ta i bruk prosedyrer for å komme fram til et svar. Disse prosedyrene presiseres i oppgaveteksten, slik at elevene vet hvilke prosedyrer de skal ta i bruk. Oppgavene i denne kategorien har ingen underliggende matematisk mening, som betyr at det er fokus på at elevene skal kunne gjennomføre de prosedyrene det bli bedt om og lære seg når de skal ta i bruk disse prosedyrene. Det er ikke fokus på hvilken matematikk som ligger bak selve prosedyren, men at elevene mestrer den. Fokuset i oppgavene er at elevene skal komme fram til rett svar. Det kreves ingen forklaring på hvorfor elevene kom fram til svaret (Smith & Stein, 1998b).

Oppgaver som plasseres i denne kategorien utvikler elevenes prosedyrekunnskap og instrumentelle forståelse (se teorikap. 2.2). Elevene får øvelse i å følge en oppskrift eller fremgangsmåte. Som Miller og Hudson (2007) påpeker, er det ikke alltid slik at elevene egentlig forstår hva som ligger bak denne «oppskriften», men de klarer å følge den og vil oftest ende opp med rett svar.

Oppgaver i denne kategorien kan innebære at elevene skal kunne konstruere mening fra instruktive beskjeder, som inkluderer både muntlig, skriftlig og grafisk kommunikasjon. I tillegg skal elevene kunne endre fra en representasjon til en annen (Anderson & Krathwohl, 2001).

«Rutineproblemer», «ikke-åpne oppgaver» og «problemer med nok informasjon» er ofte oppgavetypene som går igjen i denne kategorien. Under vises det to oppgaver som er henter fra Sirkel. Disse oppgavene kategoriseres som «rutineproblemer» og «ikke-åpne oppgaver».

4.140 Løs ulikhetene:

a $5x - 8 + 3x > 10 - x$

b $9 - (6x - 3) < 5x + 8$

c $(x + 1)^2 > 2x + 5$

d $(a - 1)^2 + (a - 3)^2 > (a + 2)^2 + (a + 1)$

4.141 Løs ulikhetene grafisk og ved regning:

a $4x - 3 > 2x + 5$

b $(5x - 2) < (7x + 4)$

Figur 20: Eksempler på oppgaver som er preget av rutine og som ikke er åpne (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.25).

Rutineproblemer, som man eksempelvis kan se på figuren ovenfor, bygger på at elevene får oppgaver der de tar i bruk tidligere kjente algoritmer, prosedyrer og formler for å komme fram til svaret. I figur 20 skal elevene løse ulikheter både grafisk og ved regning. Ser man oppgaven i sammenheng med grunnboken er det en prosedyre som har blitt tydelig forklart. Ikke-åpne oppgaver har ofte ett rett svar og det er ikke noen tvil om hvilken framgangsmåte de skal ta i bruk for å komme fram til en løsning. Som man kan se på figuren ovenfor er dette en oppgave der elevene vil komme fram til x <… eller x >…

Oppgaveteksten kan inneholde for mye, for lite eller nøyaktig den informasjonen elevene trenger for å komme fram til en løsning. I kategorien «ingen forbindelse» er det mest sannsynlig å se oppgavetekster som inneholder nøyaktig den informasjonen som er nødvendig for å komme fram til en løsning. Figur 21 viser eksempel på en slik oppgave.

3.301 Faren til Hanna har kjøpt bil til 320 000 kr. Han regner med at den vil tape seg i verdi med gjennomsnittlig 20 000 kr per år. Når bilen er x år gammel, er den verdt y kr.

a) Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hvor mye bilen er verdt etter x år.
b) Framstill funksjonen grafisk.
c) Hvor mange år går det før bilen ikke er verdt noe?

Figur 21: Eksempel på en oppgave som inneholder nøyaktig den informasjonen elevene trenger for å komme fram til en løsning (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 91).

Som man kan se i figur 21 er dette et eksempel på en oppgave der elevene blir bedt om å lage et funksjonsuttrykk som viser hvor mye bilen er verdt etter x år. Dette uttrykket skal lages på bakgrunn av den informasjonen elevene får i oppgaveteksten. Der får elevene den informasjonen de trenger for å lage et uttrykk. Det er ingen tvil om hvilke tall elevene skal ta i bruk for å komme fram til en løsning i dette tilfellet.

Forbindelse

Oppgaver som befinner seg i kategorien oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» retter elevenes oppmerksomhet mot bruken av prosedyrer for å utvikle en dypere matematisk forståelse for begreper. Oppgaveteksten inneholder vanligvis ulike representasjoner, som diagrammer, symboler og problemsituasjoner, der det er opp til elevene å skape en sammenheng mellom disse ulike representasjonene for å utvikle sin egen forståelse (Smith & Stein, 1998b).

I denne kategorien finner man prosessene «å anvende» og «å analysere». Med «å anvende» menes det at elevene skal kunne utføre en prosedyre på ukjente oppgaver. «Å analysere» innebærer å dele innhold inn i mindre biter og avgjøre hvordan disse bitene relateres til hverandre. Det innebærer også å kunne skille relevant fra irrelevant informasjon, organisere den slik at den gir mening og bestemme hensikten bak det materiale som blir presentert (Anderson & Krathwohl, 2001).

Begrepskunnskap og relasjonell forståelse er sentralt innenfor oppgaver med «prosedyrer med forbindelse». Her skal elevene knytte sammen kjente prosedyrer med ukjente oppgaver. Elevene skal vite hvilke prosedyrer de skal benytte seg av til enhver tid. Det er avgjørende å se sammenhenger mellom begreper og de oppgavene som skal løses (Skemp, 1976; Miller & Hudson, 2007).

«Åpne oppgaver», som er oppgaver der det er mer enn én riktig framgangsmåte og løsning, og oppgaver «med manglende informasjon» eller «for mye informasjon» kan være oppgaver som ofte passer kriteriene i denne kategorien. Figur 22 viser en oppgave som kan sees på som «åpen», den har også elementer av litt lite informasjon for å komme med en løsning til alle deloppgavene.

4.135 **a** Løs likningen $4(x - 1) - 8(x + 1) = -4(x + 3)$.

b Forklar hva svaret betyr.

c Hvordan tror du løsningen til denne likningen vil se ut i et koordinatsystem?

Figur 22: Eksempel på en oppgave som kan kategoriseres som «åpen» og med « for lite informasjon» (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24).

Deloppgave a) er ikke åpen, der skal elevene løse en konkret likning, men oppgave b) og c) kan sees på som åpne. Her skal elevene forklare hva de mener svaret i oppgave a) betyr, og i oppgave c) skal elevene forklare hvordan de tror løsningen til denne likningen vil se ut i et koordinatsystem. Sannsynlig vil de svare noe likt om de har forstått hva svaret i likningen betyr og vil dermed få et likt koordinatsystem, men det kan være elevene tenker på ulike ting når de skal i gang med denne oppgaven. Deloppgavene b) og c) finnes det ingen hint til i oppgaven. Det vil si, at hvis elevene ikke vet hva svaret til a) er, så vil de også ha problemer med å finne gode forklaringer på oppgave b) og c).

Gjøre matematikk

Kategorien med høyest kognitive krav heter «å gjøre matematikk». Oppgaver på dette nivået innebærer at elevene utforsker og forstår matematiske begreper, prosesser og forhold. Det krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Samtidig skal elevene kunne overvåke sine egne kognitive prosesser. Oppgavene er gjerne åpne, der elevene selv må finne prosedyre, fremgangsmåte og begrense oppgavens løsning. Disse oppgavene krever en betydelig kognitiv innsats fra elevene, og kan virke stressende for enkelte elever, siden det ofte ikke finnes en tydelig fremgangsmåte (Smith & Stein, 1998b).

Oppgaver i denne kategorien inkluderer de kognitive prosessene «å evaluere» og «å gjøre». «Å evaluere» bygger på å ta avgjørelser basert på kriterier og standarder. Man skal sjekke, overvåke, påvise og teste. Det innebærer å påvise uoverensstemmelser eller tankefeil innen en prosess og i tillegg å kritisere og bedømme om det er en sammenheng mellom ulike elementer i en oppgave og hvordan man skal komme til en løsning. «Å gjøre», innebærer å sette sammen deler til en helhet og omorganisere elementer til nye mønstre eller strukturer. Denne typen oppgaver kan inneholde å lage hypoteser for å se om det man har antatt stemmer (Anderson & Krathwohl, 2001).

I denne kategorien finner man følgende problem; Åpne oppgaver, der det ikke finnes en konkret framgangsmåte og elevene må søke i sine egne matematiske begreper og forståelse eller ikke-tradisjonelle oppgaver, som er oppgaver der elevene selv må egne spørsmål, samle inn data, se etter mønster eller skrive ned sine tanker om refleksjoner eller ny lærdom. Ikke-rutineoppgaver, er oppgaver der elevene må tenke utenfor den kunnskapen de allerede har for å komme fram til en løsning Problemløsingsoppgaver, som skal engasjere elevene til å undre og utforske. Det skal være problemer som innebærer at elevene lærer nye begreper, oppdager ny kunnskap, praktiserer beregningsferdighetene og stimulerer intellektuell nysgjerrighet (Orton, 2004). Et eksempel på en oppgave som kategoriseres som «åpen», «problemløsende» og «ikke-rutine-problem» kan sees på figur 23.

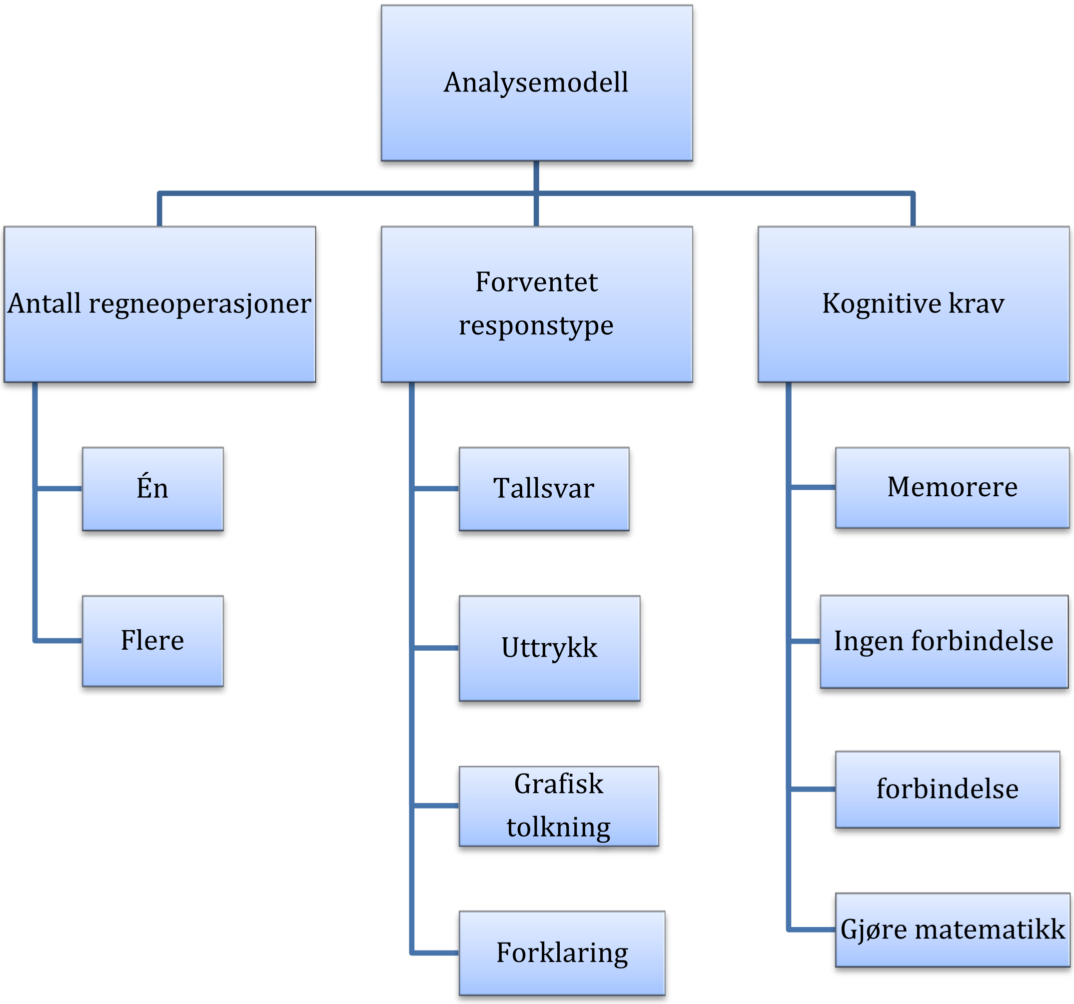
4.137 Lag en tekst til likningen $(a + 3)^2 - (a + 1)^2 = 8$.

Figur 23: Eksempel på en oppgave som er «åpen», «problemløsende» og «ikke-rutine» preget, (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24).

Elevene blir bedt om å lage en tekst til en bestemt likning. Dette er en oppgave som krever at elevene forstår hva denne likningen representerer og klarer å knytte denne til en tekst som gir mening.

3.3 Modellen

På bakgrunn av kategoriene som er forklart i kapittelet over, kan vi sette opp følgende analysemodell.



Figur 24: Modellen brukt i min analyse av oppgavene.

3.4 Læreverkene

Jeg har valgt å analysere læreverkene Faktor og Sirkel. Begge læreverkene er nivådelte med tre ulike nivåer. I og med at jeg har fokus på å se på hvilke måter elevene blir utfordret på, valgte jeg å ha fokus på nivå 3, altså det vanskeligste nivået i begge bøkene. I tillegg til oppgavebøkene har jeg analysert et utvalg av oppgaver gitt på eksamen i 10.trinn i perioden 2010-2014.

3.4.1 Faktor

Faktor er et læreverk beregnet på 8.-10. trinn. Det er skrevet av Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen og utgitt av Cappelen Damm. Verket har en tydelig gjenkjennelig struktur og progresjon i rolig tempo. Alle kapitlene i grunnboka avslutter med «Prøv deg selv»- test og «Noe å lure på»-oppgaver. Alle kapitlene i grunnboka har lik struktur på presentasjon av fagstoffet. Det blir først presentert en problemstilling som elevene kan diskutere, deretter blir lærestoffet presentert. Eventuelle regler, blir presentert og til slutt kommer det noen oppgaver som går på det aktuelle temaet.

Faktor 3 oppgavebok ble utgitt i 2008, og er nummerert med tallet 3, fordi Faktor 1 er beregnet på 8.trinn, Faktor 2 er beregnet på 9.trinn, og Faktor 3 er dermed beregnet på 10.trinn. Faktor har nivåinndeling merket med fargekoder i hvert kapittel. Blå er nivå 1, grønn er nivå 2 og rød er nivå 3. Nivå 1 inneholder oppgaver som skal være enkle og gi trening i det grunnleggende lærestoffet. Nivå 2 består av mer sammensatte og varierte oppgaver for videre utvikling. Nivå 3 er det mest krevende nivået. Oppgavene her byr på større utfordringer for elevene. Hvert kapittel i oppgaveboken avsluttes med «Litt av hvert»-oppgavesett, som bygger på varierte oppgaver på tvers av kapitlene.

3.4.2 Sirkel

«Sirkel» er også et læreverk som er beregnet på trinn 8-10. Bøkene er forfattet av Svein H. Torkildsen og Marianne Maugesten og utgitt av Aschehoug forlag. Bøkene har fokus på å tankegangen til elevene. Lærebøkene har klare mål for hvert kapittel og eksempler på fremgangsmåter. Grunnboken presenterer først noen emner innenfor et tema med tilhørende oppgaver, deretter finnes en sekvens som heter «Hvor går du nå?». Dette er en «test» som elevene skal gjennomføre, og på bakgrunn av hvor mange oppgaver de klarer, velger de startpunkt 1, 2 eller 3 videre. Startpunktene, eller nivåinndelingen er fargekodet i grunnboka, men ikke i oppgaveboka.

Oppgaveboken er utgitt i 2008 og er også delt inn i de samme tre nivåene. Øverst på sidene i oppgaveboka kan man se hvilke sider i grunnboka som behandler liknende oppgaver. Oppgaveboka har en avslutning på hvert kapittel som heter «Selvplukk» der elevene kan velge i varierte oppgaver. Intensjonen bak «Selvplukk» er at elevene kan vurdere og velge ut de oppgavene som passer sitt nivå og det emne de trenger mer øvelse i.

3.4.3 Tidligere eksamensoppgaver[17]

Eksamenene er utgitt av Utdanningsdirektoratet i årene 2014, 2013, 2012, 2011 og 2010. I motsetning til eksamen i norsk og engelsk, har ikke matematikkeksamenen forberedelseshefte. Eksamen bygger på kompetansemålene i læreplanen for faget, og det legges opp til at dette er en individuell test av elevenes kompetanse i matematikk. Elevene skal gjennom denne eksamenen løse nye og ulike typer oppgaver, der det legges opp til at elevene skal vise sin kunnskap i faget. Hver eksamen består av to deler, som blir delt ut på likt.

Oppgavene i del 1 skal løses uten hjelpemidler, bortsett fra skrivesaker, gradskive, linjal og passer, elevene har to timer til rådighet. Del 2 må leveres i løpet av de fem timene elevene har til rådighet, og på denne delen er alle hjelpemidler (utenom internett og andre kommunikasjonsmidler) tillatt. Det legges til rette for at elevene skal kunne bruke regneark (som Excel) og grafisk program (for eksempel Geogebra) på datamaskinen ved løsning av noen av oppgavene i del 2.

3.5 Gjennomføring og begrensinger

Prosessen med å besvare forskningsspørsmålet i denne studien startet med å få en oversikt over tidligere forskning som var gjort innenfor området. Det var flere lignende studier som var gjort både på tvers av landegrenser og innenfor samme land. Tidligere forskning viste at det var lite som var gjort på dette temaet i Norge, noe som gjorde det hele mer spennende.

Jeg gjorde meg deretter kjent med flere oppgavebøker som ble brukt på 10.trinn i ungdomsskolen. Som tidligere nevnt falt valget mitt på oppgavebøkene i serien «Faktor» og «Sirkel». Hovedgrunnen til dette var at disse læreverkene var

---

[17] Alle eksamener er hentet herfra: http://matematikk.net/side/Ungdomstrinn_Hovedside

nivådifferensierte, noe som gjorde utvelgelsen av oppgaver enklere. I og med at jeg har fokus på hvilke utfordringer de faglig sterke elevene får, var det naturlig at jeg kun valgte oppgaver fra kategori 3 i begge oppgavebøkene. For å ha muligheten til å se på hvor utfordrende oppgaver elevene kan forvente å få på eksamen, valgte jeg ut eksamensoppgaver fra de siste fem årene. Eksamensoppgavene som ble med i analysen ble valgt på bakgrunn av tema, jeg valgte samme tema i oppgavebøkene som på eksamen, altså «funksjoner og likninger». Dette valget ble gjort av to grunner; den ene er at rammen for denne oppgaven ikke tillater at jeg analyserte alle delene i oppgavebøkene eller alle oppgavene i eksamenssettene, og den andre grunnen er at likninger og funksjoner er emner vi vet flere elever ser på som mer utfordrende enn andre.

Analysemodellen jeg bruker består av tre hovedkategorier: «Antall regneoperasjoner», «forventet responstype» og «kognitive krav». De to siste kategoriene er hierarkisk organisert (se figur 24). Jeg valgte å klassifisere hver enkelt oppgave kun i én av underkategoriene, tilhørende hver hovedkategori. Eksempel; en oppgave som har både «uttrykk» og «grafisk tolkning» som forventet responstype vil bli plassert i kategorien «grafisk tolkning». Da jeg plasserte denne oppgaven i «grafisk tolkning» var det fordi jeg alltid valgte det høyeste nivået i hierarkiet. Dette ga også en mer oversiktlig framstilling over oppgavene totalt sett. Den siste hovedkategorien er «antall regneoperasjoner». Her vil oppgaven enten kreve én eller flere regneoperasjoner, og det er derfor bare mulig at oppgaven plasseres i en av kategoriene.

Jeg brukte god tid på å utarbeide en analysemodell som var funksjonell i forhold til forskningsspørsmålet mitt. Brändström (2005) sin analysemodell bestod blant annet av en kategori som heter «bilder». Hun bruker underkategoriene «ingen», «dekorative» og «funksjonelle». Etter å ha gjennomført analysen på de utvalgte oppgavene fant jeg denne kategorien som lite hensiktsmessig i min studie. Li (2000) har hovedkategorien «responstype» med underkategoriene «tallsvar», «uttrykk» og «forklaring». Da jeg hadde gjennomgått analysen med disse forventede responstypene synes jeg det var mange oppgaver som ikke fikk «sin plass», derfor valgte jeg å legge inn kategorien «grafisk tolkning» som en egen underkategori. Etter litt prøving og feiling fikk jeg tilslutt modellen som vises i figur 24. Ved å utforske, trekke fra og legge til både underkategorier og hovedkategorier gjennomgikk modellen en form for kvalitetssikring slik at den passer med studien jeg ønsker å gjennomføre.

4.0 Resultater og analyse

I dette kapitlet skal jeg redegjøre de resultatene som synliggjøres i analysene mine i forhold til forskningsspørsmålet mitt. Forskningsspørsmålet er:

> *Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?*

For å få en oversiktlig framstilling av resultatene og analysen vil jeg først presentere resultatene fra Faktor (4.1), deretter Sirkel (4.2), før resultatene på eksamensoppgavene i perioden 2010-2014 (4.3) og til slutt vil jeg presentere resultatene samlet sett (4.4).

4.1 Faktor

Faktor er inndelt i 3 nivåer basert på vanskegrad. På bakgrunn av forskningsspørsmålet har jeg kun analysert oppgaver fra nivå tre. De utvalgte oppgavene tilhører kapitlene «Funksjoner» og «Likninger og ulikheter». Det er totalt 46 oppgaver i disse to kapitlene. Som beskrevet i metodekapittelet har jeg delt inn analysemodellen min i tre hovedkategorier; «antall operasjoner», «responstype» og «kognitive krav». Jeg vil først gå dypere inn i hver enkelt hovedkategori, før jeg presenterer og kommenterer en samlet oversikt.

4.1.1 Antall operasjoner

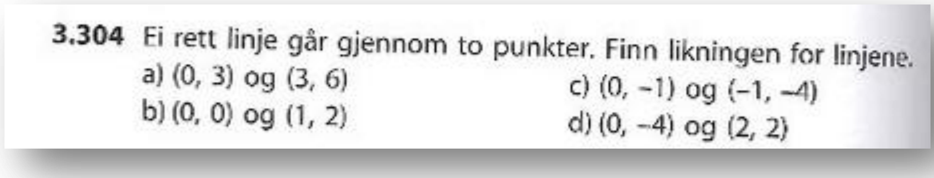
Oppgaver som krever én regneoperasjon kan ofte være mindre krevende enn en oppgave som krever flere regneoperasjoner. I min analyse kan antall regneoperasjoner ha to betydninger; den ene er oppgaver som krever flere regneoperasjoner for å komme fram til ett svar og den andre er oppgaver som krever flere regneoperasjoner for å komme frem til flere svar. Dette kan eksempelvis være oppgaver med flere deloppgaver, der det ene svaret skal være en tabell og det andre en grafisk fremstilling av tabellen. For å se hvordan oppgavene i Faktor er bygd opp i forhold til dette, er ett av elementene fra analysemodellen antall regneoperasjoner.

Tabellen 2 viser sammenhengen mellom antall oppgaver som krever én eller flere regneoperasjoner i Faktor. For å få en helhetlig oversikt viser tabellen også hvor mange prosent det enkelte antallet utgjør.

Antall operasjoner:	**Antall (n=46):**	**Prosent:**
Én	10	21,7 %
Flere	36	78,3 %

Tabell 2: Forventet antall regneoperasjoner i Faktor fremstilt i antall og prosent.

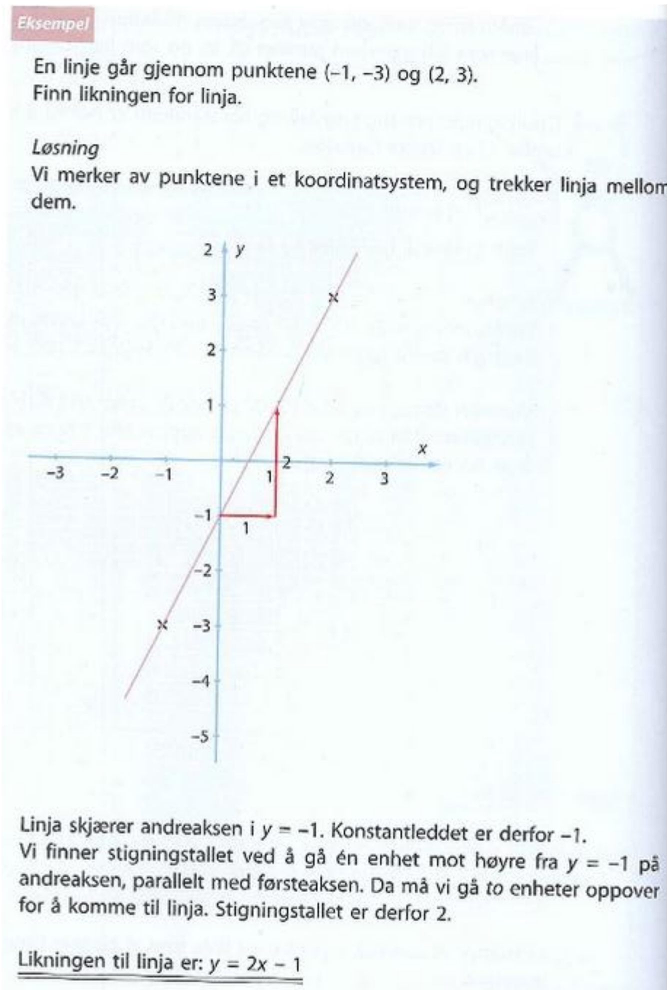
Tabellen viser at det er en betydelig forskjell i antall regneoperasjoner. Majoriteten av oppgavene i Faktor bygger på flere regneoperasjoner, mens omtrent 20 % krever én. Figur 25 er eksempel på en oppgave med én regneoperasjon fra Faktor. Denne oppgaven er et eksempel på en oppgave med forventing om én regneoperasjon.



3.304 Ei rett linje går gjennom to punkter. Finn likningen for linjene.
a) (0, 3) og (3, 6)
b) (0, 0) og (1, 2)
c) (0, −1) og (−1, −4)
d) (0, −4) og (2, 2)

Figur 25: Eksempel på en oppgave som inneholder én regneoperasjon (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 92).

Oppgaven som vises i figuren 25 er fra kapittelet «funksjoner» i Faktor. Elevene får informasjon om det går ei rett linje gjennom to punkter. Deretter blir elevene bedt om å finne likningene for linjene i fire deloppgaver. Denne oppgaven bygger på gjentatt øving av samme tema. Et behavioristisk syn på læring, omhandler å dele kunnskapen opp i små biter, og repetere disse små bitene til man mester det. Man kan derfor trekke en parallell mellom behavioristisk læring og oppgaven som blir presentert over. Det forventes at elevene gjentatte ganger skal gjennomføre liknende utregninger på tilnærmet like oppgaver. Dette er en prosedyre som allerede er forklart og gjennomgått i grunnboka. Grunnforklaringen vises i figur 26.



Eksempel

En linje går gjennom punktene (−1, −3) og (2, 3).
Finn likningen for linja.

Løsning
Vi merker av punktene i et koordinatsystem, og trekker linja mellom dem.

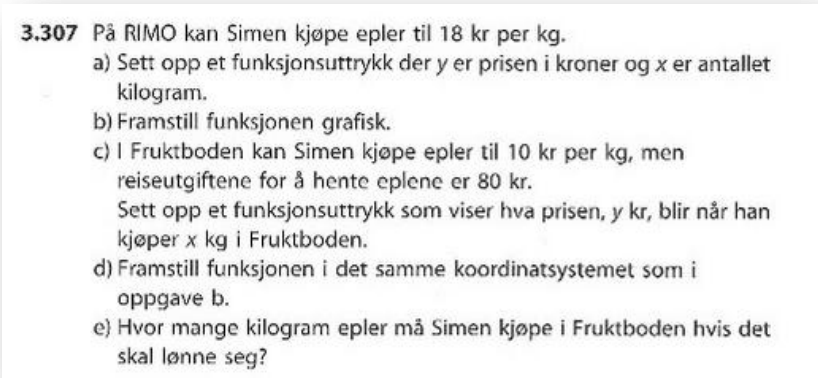
Linja skjærer andreaksen i $y = -1$. Konstantleddet er derfor −1.
Vi finner stigningstallet ved å gå én enhet mot høyre fra $y = -1$ på andreaksen, parallelt med førsteaksen. Da må vi gå *to* enheter oppover for å komme til linja. Stigningstallet er derfor 2.

Likningen til linja er: $y = 2x - 1$

Figur 26: Eksempel på fremgangsmåte for å finne likning til ei linje i Faktor 3Grunnbok (Hjardar & Pedersen, 2007, s.116).

I noen tilfeller kan man se en sammenheng med oppgaver som krever én regneoperasjon og oppgaver som bygger på tidligere lærte prosedyrer. I figur 25 blir elevene bedt om å finne en likning. Denne oppgaven bygger på instrumentell forståelse (Skemp, 1976) og prosedyrekunnskap (Miller & Hudson, 2007). Det innebærer at læreren eller grunnboka gjennomgår en fremgangsmåte, deretter skal elevene repetere denne. Ved å bruke en bestemt fremgangsmåte som er vist av læreren eller en lærebok, er det viktig å huske at elevene ikke nødvendigvis forstår den underliggende matematikken, men at de klarer å gjennomføre prosedyren og ende opp med riktig svar.

Oppgaver det forventes mer enn én regneoperasjon har størst oppslutning i Faktor. I figur 27 kan man se eksempel på en slik oppgave.



3.307 På RIMO kan Simen kjøpe epler til 18 kr per kg.
a) Sett opp et funksjonsuttrykk der *y* er prisen i kroner og *x* er antallet kilogram.
b) Framstill funksjonen grafisk.
c) I Fruktboden kan Simen kjøpe epler til 10 kr per kg, men reiseutgiftene for å hente eplene er 80 kr.
Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hva prisen, *y* kr, blir når han kjøper *x* kg i Fruktboden.
d) Framstill funksjonen i det samme koordinatsystemet som i oppgave b.
e) Hvor mange kilogram epler må Simen kjøpe i Fruktboden hvis det skal lønne seg?

Figur 27: Eksempel på en oppgave det er forventet at elevene bruker mer enn én regneoperasjon (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 93).

Figuren ovenfor viser oss en oppgave der elevene skal innom flere regneoperasjoner, dette inkluderer:

- Lage funksjonsuttrykk der y er prisen i kroner og x er antallet kilogram,
- framstille funksjonen grafisk,
- lage nytt funksjonsuttrykk basert på annen informasjon,
- framstille det nye funksjonsuttrykket grafisk i samme koordinatsystem og
- se på sammenhengen mellom disse to grafene for å finne ut hvor mange kilogram epler Simen må kjøpe i Fruktboden hvis det skal lønne seg.

Man kan se at elevene skal mestre flere regneoperasjoner for å kunne komme fram til svar på alle deloppgavene i denne oppgaven. I noen oppgaver er det en sammenheng mellom oppgaver som krever flere regneoperasjoner og begrepskunnskap og relasjonell forståelse. Relasjonell forståelse er at elevene vet hva de skal gjøre og hvorfor de gjør som de gjør i den aktuelle situasjonen (Skemp, 1976), mens begrepskunnskap innebærer evnen elevene har til å bruke de begrepene de allerede har og sette disse sammen med nye begreper (Miller & Hudson, 2007). I oppgaven vist i figur 27 ovenfor skal elevene kunne lage et funksjonsuttrykk og framstille dette uttrykket grafisk, se sammenhenger mellom to grafer og finne ut når noe lønner seg ut fra tidligere beregninger. Dette krever at elevene har forståelse og kunnskap om begrepene funksjonsuttrykk, graf og lese av graf.

4.1.2 Responstype

Forventet responstype baserer seg på hvilke svar man antar at forfatteren av læreboken vil elevene skal komme fram til. Underkategoriene er; «tallsvar», «uttrykk», «grafisk tolkning» og «forklaring», i hierarkisk orden. «Tallsvar» er rene tall, eksempelvis 17, «uttrykk» kan være 3X-2, «grafisk tolkning» baserer seg på oppgaver der elevene blir enten bedt om å knytte sammen påstander med funksjonsuttrykk eller tegne/skissere en graf, mens «forklaring» går ut på at elevene selv må uttrykke med ord, hvilke valg de tar underveis og hvorfor de velger å bruke de begrepene eller prosedyrene som de gjør.

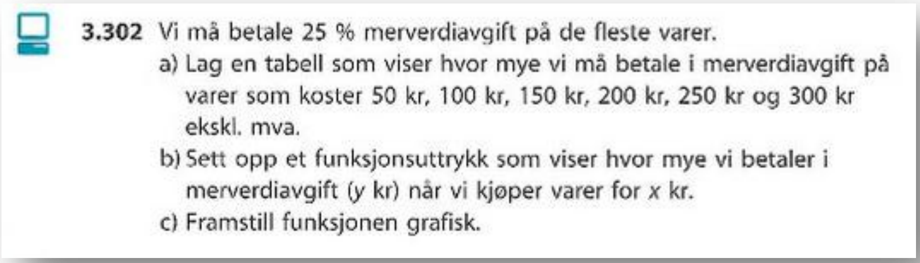
Tabell 3 viser en oversikt over resultatene fra Faktor. Resultatene inneholder analyse fra begge emnene, både funksjoner og likninger og ulikheter. Tabellen fremstiller, antall og prosentvis, en oversikt over hvor mange oppgaver som krever «tallsvar», «uttrykk», «grafisk tolkning» og «forklaring».

Forventet respons:	**Antall (n=46) :**	**Prosent:**
Tallsvar	4	8,7 %
Uttrykk	20	43,5 %
Grafisk tolkning	15	32,6 %
Forklaring	7	15,2 %

Tabell 3: Oversikt, fremstilt med antall og i prosent, over forventet responstype (tallsvar, uttrykk, grafisk tolkning og forklaring) i Faktor.

Lærebokforfatterne i Faktor har forventet flest «uttrykk» og «grafisk tolkning» som svar på oppgavene. Hele 76,1 % av oppgavene har «uttrykk» eller «grafisk tolkning» som forventet respons. «Tallsvar», som er den enkleste responsen er den kategorien det forventes minst av fra lærebokforfatterne. «Forklaring» som kategoriseres som den mest krevende responsen er det 15,2 % av oppgavene som krever.

Underkategorien «grafisk tolkning» innebærer blant annet de oppgavene der elevene blir bedt om å tegne/skissere grafer og se sammenhenger mellom uttrykk og graf. Oppgaven som blir presentert i figur 28 er eksempel på en oppgave som har «grafisk tolkning» som forventet respons.

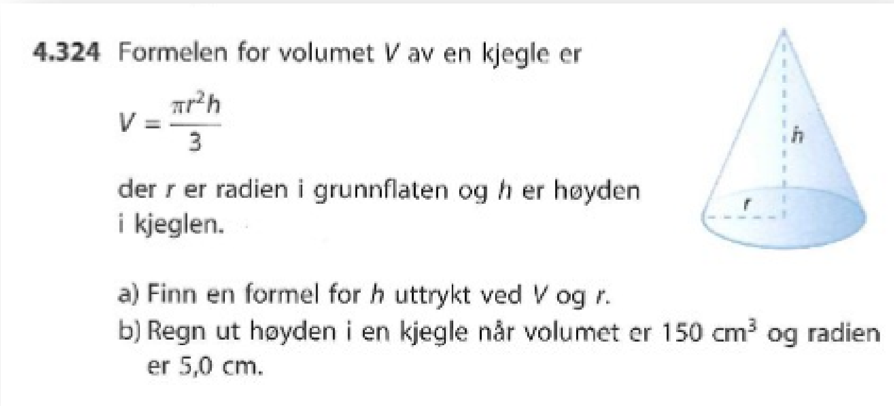

3.302 Vi må betale 25 % merverdiavgift på de fleste varer.
a) Lag en tabell som viser hvor mye vi må betale i merverdiavgift på varer som koster 50 kr, 100 kr, 150 kr, 200 kr, 250 kr og 300 kr ekskl. mva.
b) Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hvor mye vi betaler i merverdiavgift (y kr) når vi kjøper varer for x kr.
c) Framstill funksjonen grafisk.

Figur 28: Oppgave 3.302 fra Faktor som har grafisk tolkning som forventet respons (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 91).

Oppgaven i figur 28 ber elevene om å lage en tabell som representerer merverdiavgift man må betale på varer til utvalgte priser. Når dette er gjort, skal elevene sette opp et funksjonsuttrykk, og deretter framstille funksjonen grafisk. Den forventede responsen er kategorisert som «grafisk tolkning» av den grunn at elevene her skal lage en tabell, deretter funksjonsuttrykk og til slutt framstille funksjonen grafisk. «Grafisk tolkning» er organisert høyere enn «tallsvar» og «uttrykk» og siden oppgaven krever både «tallsvar», «uttrykk» og «grafisk tolkning», blir alltid oppgavene plassert i den kategorien som er mest krevende.

Flere av oppgavene i kategorien «grafisk tolkning» innebærer at elevene skal lage et funksjonsuttrykk, deretter en tabell og tilslutt en grafisk framstilling av dette. Enkelte av denne typen oppgaver kan man se at elevene skal være med på å konstruere sin egen forståelse av et uttrykk eller en graf. Noen ganger skal de bruke uttrykket til å sette inn i en tabell eller lage en grafisk framstilling av dette uttrykket. Andre ganger skal de ta utgangspunkt i en grafisk framstilling og tolke denne. Når elever arbeider med ulike representasjonsformer er de aktivt med på å forme sin egen kunnskap. Denne typen kunnskap mottar ikke elevene passivt, de går inn i de enkelte oppgavene og arbeider med grafer slik at de skal gi mening. Man kan trekke en parallell til et konstruktivistisk syn på læring i enkelte av disse oppgavene av den grunn at elevene er med på å omforme uttrykk til tabeller og grafer, og de skal aktivt arbeide med disse ulike representasjonene slik at de gir mening for den enkelte elev (Jaworski, 2004).

«Uttrykk» er den andre underkategorien av forventet respons som fikk stor oppslutning i Faktor. Når det forventes at elevene skal svare med et uttrykk, kan det være oppgaver der elever skal finne likningen til en funksjon eller graf, omgjøring av formler eller at de skal løse likninger som gir svar x=… Figur 29 viser en oppgave fra kapitlet «Likninger og ulikheter» som er et eksempel der den forventede responsen er «uttrykk».



4.324 Formelen for volumet V av en kjegle er

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

der r er radien i grunnflaten og h er høyden i kjeglen.

a) Finn en formel for h uttrykt ved V og r.
b) Regn ut høyden i en kjegle når volumet er 150 cm^3 og radien er 5,0 cm.

Figur 29:Eksempel på en oppgave der «uttrykk» er forventet respons (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 120).

I Faktor har 20 av 46 (43,5 %) oppgaver «uttrykk» som forventet respons. I figur 29 foreligger det en oppgave der elevene får vite formelen for volum av kjegle. De blir bedt om å gjøre om på denne formelen slik at det er høyden i kjegla som skal være uttrykt med V (volum) og r (radien). Fordi elevene skal omforme en eksisterende formel, blir denne oppgaven kategorisert innen «uttrykk». I deloppgave b) blir elevene bedt om å regne ut høyden til en bestemt kjegle, i og med at responsen «uttrykk» regnes som mer krevende enn «tallsvar» er denne oppgaven kategorisert som «uttrykk».

Ser man nærmere på den forventede responsen innen hvert kapittel, «funksjoner» og «likninger og ulikheter», ser man at innad i samme bok er det store forskjeller. Funksjonskapittelet, som består av 20 oppgaver, inneholder kun to oppgaver med «uttrykk» som forventet respons. Ti av oppgavene forventer «grafisk tolkning». «Likninger og ulikheter» har totalt 26 oppgaver. Det er 18 av disse som forventer respons i form av «uttrykk», mens fem forventer «grafisk tolkning». Det er altså en markant forskjell på den forventede responsen innen hvert kapittel. Det er ikke unaturlig at oppgavene innen emnet «Funksjoner» vil forvente mer «grafisk tolkning», da dette er en naturlig del av dette emnet. Det samme ser man i «Likninger og ulikheter», nemlig at de fleste oppgavene forventer et «uttrykk».

4.1.3 Kognitive krav

Kognitive krav innebærer hva som kreves av elevene i form av tankeprosesser, begrepskunnskap og tidligere erfaringer for å løse oppgaver. Kategorien er delt inn i underkategoriene; «å memorere», «ingen forbindelse», «forbindelse» og «å gjøre matematikk», se kap.3.2 for utfyllende informasjon. Disse underkategoriene er plassert hierarkisk. Kategorien «å memorere» er det laveste kognitive nivået, mens «å gjøre matematikk» er den kategorien som krever at elevene bruker mest tidligere kunnskap og tenker utenfor boksen, altså det høyeste kognitive nivået.

Tabell 4 viser hvor mange av oppgavene fra Faktor som klassifiseres innen hver av underkategoriene. Jeg har valgt å fremstille dette i en tabell der man får oversikt over hvilke kognitive krav som er med i analysen, antall oppgaver i hver underkategori og hvor mange prosent antall oppgaver utgjør i hver enkelt underkategori.

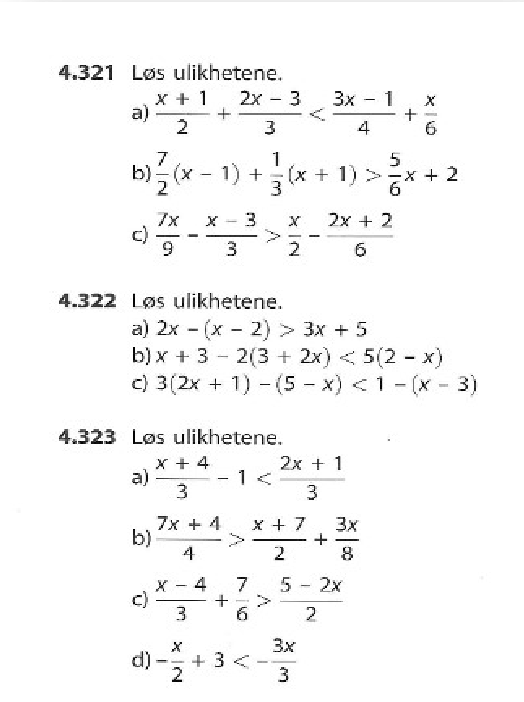
Kognitive krav:	**Antall (n=46):**	**Prosent:**
Memorere	0	0 %
Ingen forbindelse	24	52,2 %
Forbindelse	19	41,3 %
Gjøre matematikk	3	6,5 %

Tabell 4: Oversikt over oppgaver innen de ulike kognitive kravene fra Faktor.

I Faktor er om lag 50 % av oppgavene på det lavere kognitive nivået og om lag 50 % av oppgavene er på høyere kognitivt nivå. Dette kan tyde på at Faktor legger vekt på både oppgaver som krever at elevene skal arbeide med problemløsing og tenke seg fram til løsninger selv («med forbindelse»), samtidig som om de har oppgaver der elevene skal lære seg prosedyrer uten nødvendigvis å forstå matematikken som ligger bak («uten forbindelse»).

Tabell 4 viser at majoriteten, 93,5 %, av oppgavene krever «ingen forbindelse» eller «forbindelse». Noen få oppgaver, 6,5 %, befinner seg på det mest kognitivt krevende nivået «å gjøre matematikk». For å forklare hva dette innebærer vil jeg vise noen eksempler på oppgaver i de tre kategoriene og utdype hvilke oppgavetyper som ligger i kategoriene.

I tabell 4 kan man se at flest oppgaver (52,2 %) kategoriseres innenfor «ingen forbindelse». Dette er oppgaver som har «prosedyrer uten forbindelse». Denne typen oppgaver krever litt mer tenking og resonnering enn oppgavene i kategorien «å memorere». Det kommer enten tydelig frem i oppgaveteksten hvilke prosedyrer elevene skal ta i bruk, eller bygger oppgaven på prosedyrer som nettopp har blitt presentert. Fokuset i oppgaven er at elevene skal komme fram til riktig svar, framfor å utvikle elevenes matematiske forståelse (Stein & Smith, 1998b). Oppgavene under er hentet fra kapitlet «Likninger og ulikheter» i Faktor. Dette er eksempler på oppgaver der elevene skal gjennomføre en tidligere kjent prosedyre på flere like oppgaver.



4.321 Løs ulikhetene.

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-3}{3} < \frac{3x-1}{4} + \frac{x}{6}$

b) $\frac{7}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x+1) > \frac{5}{6}x + 2$

c) $\frac{7x}{9} - \frac{x-3}{3} > \frac{x}{2} - \frac{2x+2}{6}$

4.322 Løs ulikhetene.

a) $2x - (x-2) > 3x + 5$

b) $x + 3 - 2(3 + 2x) < 5(2 - x)$

c) $3(2x+1) - (5-x) < 1 - (x-3)$

4.323 Løs ulikhetene.

a) $\frac{x+4}{3} - 1 < \frac{2x+1}{3}$

b) $\frac{7x+4}{4} > \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{8}$

c) $\frac{x-4}{3} + \frac{7}{6} > \frac{5-2x}{2}$

d) $-\frac{x}{2} + 3 < -\frac{3x}{3}$

Figur 30: Eksempler på oppgaver med «prosedyre men uten forbindelse» (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 120).

Det er totalt 24 av 46 (52,2 %) oppgaver i Faktor som klassifiseres som oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse», figur 30 viser tre eksempler på slike oppgaver. Oppgavene utfordrer elevene i å løse ulikheter. Det er totalt ti deloppgaver, der alle forventer at elevene skal bruke samme prosedyre for å komme fram til et svar. Oppgavene har fokus på at elevene skal komme fram til rett svar og det forventes ikke at elevene kan begrunne eller forklare de matematiske valgene som er gjort for å komme fram til den aktuelle løsningen. Skinner brukte begrepet programmert læring, som innebærer læring gjennom små steg (Säljö, 2001). I eksemplene kan man se tendenser til at elevene skal repetere og øve på biter av et pensum for å utvikle sin matematiske forståelse. Det er derfor mulig at enkelte av oppgavene innen kategorien «ingen forbindelse» kan være påvirket av et behavioristisk syn på læring.

Skemp (1976) brukte begrepet instrumentell forståelse om regler som elevene kan uten at de nødvendigvis har forståelse av den matematikken som ligger bak. I oppgavene som er presentert i figur 30 forventes det at elevene skal bruke prosedyrer de kjenner fra før for å komme fram til et svar. Det kreves ikke eksplisitt at elevene skal forstå den matematikken som ligger bak.

Underkategorien med nest flest oppgaver (41,3 %) er «forbindelse». Totalt 19 av 46 oppgaver krever «prosedyrer med forbindelse», som er det nest mest krevende kognitive nivået. Oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» har fokus på å bruke prosedyrer til å utvikle en dypere matematisk forståelse. Oppgaveteksten kan ofte være åpen, slik at elevene må ta valg på hvilke prosedyrer de skal ta i bruk for å komme fram til et svar (Stein & Smith, 1998b). Figur 31 viser eksempel på en oppgave som inneholder «prosedyrer med forbindelse». Elevene må der ta i bruk det de tidligere har lært om gjennomsnitt og likninger for å komme fram til et svar.

4.307 I ei gruppe med 25 elever er gjennomsnittsalderen 15 år. Hvis vi tar med læreren, blir gjennomsnittsalderen 16 år.
Sett opp en likning for å finne ut hvor gammel læreren er.

Figur 31: Eksempel på en oppgave som krever «prosedyrer med forbindelse» (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 117)

Oppgave 4.307 er hentet fra kapittelet «Likninger og ulikheter». Elevene får vite at det er ei gruppe med 25 elever, der gjennomsnittsalderen er 15 år. Hvis man regner med læreren blir gjennomsnittsalderen 16 år. Elevene blir bedt om å sette opp en likning for å finne ut hvor gammel læreren er. For å kunne løse denne oppgaven må elevene kjenne til begrepet gjennomsnittsalder, vite hvordan man finner gjennomsnittsalderen, de må kjenne til begrepet likninger, og hvordan likningen skal uttrykkes for å representere lærerens alder. En oppgave som er formulert på denne måten kan være med på å utvikle elevers begrepskunnskap og sin relasjonelle forståelse. Skemp (1976) hevder at elever som innehar relasjonell forståelse vet hvordan de skal løse en oppgave og hvorfor. I denne oppgaven må elevene vite hvilken tidligere kunnskap de skal ta i bruk og hvordan denne skal settes sammen for å komme fram til en løsning. Dette kan også være med på å utvikle elevenes begrepskunnskap. Begrepskunnskap utvikles ved at man klarer å knytte sammen allerede eksisterende kunnskaper med ny (Miller & Hudson, 2007).

Oppgaven i figur 31 en ikke-åpen oppgave. Med det menes at oppgaven legger opp til at elevene skal bruke det de allerede vet om likninger for å komme fram til det ene rette svaret (Zhu & Fan, 2006). Likevel kan man si at denne oppgaven bygger på konseptet problemløsing. Dette er en oppgave som krever at elevene skal bruke tidligere kunnskap om likninger for å finne den rette fremgangsmåten. Schoenfeld (1992) definerer problemløsingsoppgaver som oppgaver som engasjerer og interesserer elevene, der de har lyst å komme fram til en løsning, i tillegg til oppgaver der elevene ikke allerede har tilstrekkelig matematisk kunnskap for å komme fram til en løsning. I denne oppgaven er det flere veier elevene kan trå, de må gjerne derfor undre og gruble for å komme inn på rett spor.

De mest kognitivt utfordrende oppgavene plasseres i kategorien «å gjøre matematikk», i Faktor klassifiseres tre av 46 (6,5 %) oppgaver i denne kategorien. Hvilken matematisk vei elevene skal gå for å komme fram til en løsning kommer her ikke tydelig fram i oppgaveteksten. Det vil si at elevene må, i enda større grad enn i oppgaver med «prosedyrer med forbindelser», lete gjennom tidligere kunnskap og knytte denne sammen med informasjonen som blir gitt i oppgaven for å vite hvilken retning de skal ta. Elevene må kunne arbeide selvstendig, og være kritiske til sitt eget arbeid (Smith og Stein, 1998b).

Åpne-, problemløsende-, ikke-tradisjonelle- og ikke-rutineoppgaver kan være eksempler på oppgavetyper som gir elevene utfordringer på høyt kognitivt nivå. i figur 32 ser man eksempel på en oppgave kategorisert på det mest kognitivt krevende nivået.

3.318 *a*, *b* og *c* er tre positive tall slik at $a < b < c$.

a) Velg tall for *a*, *b* og *c*, og tegn grafen til funksjonene

$$y = \frac{a}{x},\ y = \frac{b}{x} \text{ og } y = \frac{c}{x}$$

i det samme koordinatsystemet.

b) Hvilken betydning for grafen har størrelsen på *a*, *b* og *c*?

Figur 32: Eksempel på en oppgave som kategoriseres som høyt kognitivt krevende innenfor kategorien «å gjøre matematikk» (Hjardar & Pedersen, 2008, s. 119).

Oppgaven som er vist i figuren ovenfor er kategorisert som «å gjøre matematikk». Teksten i oppgaven ber elevene om å velge tall for a, b og c, der det allerede er gitt at a < b < c. Deretter skal elevene tegne grafen til funksjonene inn i samme koordinatsystem. I deloppgave b, blir elevene bedt om å fortelle hvilken betydning valg av størrelse på a, b og c har for grafen. Intensjonen med oppgaver er at elevene skal legge merke til at jo mindre telleren er, desto brattere blir grafen langs andreaksen. For at elevene skal se denne sammenhengen må de være bevisste i valg av a, b og c. Hvis de kun prøver med ett eller to tall, vil de kanskje ikke forstå sammenhengen i oppgaven. Av den grunn er denne oppgaven plassert i den høyest kognitivt krevende kategorien «å gjøre matematikk».

Flere av oppgavene som er plassert i kategorien «å gjøre matematikk» forventer at elevene skal være delaktige i å skape sin egen kunnskap. Som i eksempelet i figur 32 skal elevene forklare hvilken betydning valg av teller har for grafen. Dette krever at elevene setter seg inn i problemstillingen og utforsker ulike verdier og hvilken betydning dette vil ha. Man kan se sammenheng mellom slike oppgaver og konstruktivistisk syn på læring. Tanken om at kunnskap ikke mottas passivt, men bygges aktivt opp av den som tilegner seg kunnskapen (Von Glaserfeld, i Jaworski, 2004) er sentral i dette synet.

4.1.4 Oppsummering av resultatene i Faktor

For å få en helhetlig oversikt over resultatene i Faktor, har jeg valgt å sette alle resultatene inn i et diagram. Diagrammet under presenter en prosentvis oversikt over alle bokas resultater.

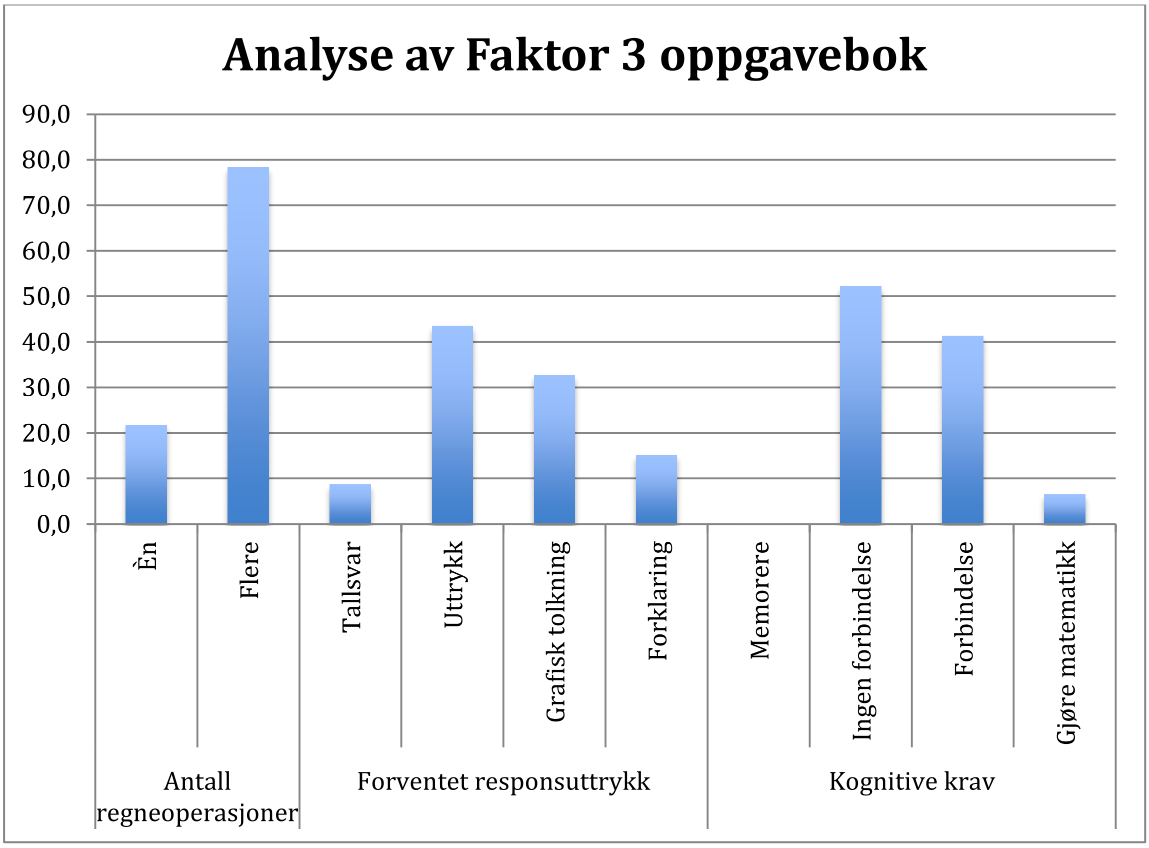


Diagram 1: Prosentvis oversikt over alle resultatene fra Faktor.

Av diagrammet over kan man se at lærebokforfatterne har hovedvekt på å lage oppgaver som krever flere enn én regneoperasjon. Oppgavene jeg har analysert er fra nivå 3, nivået har fokus på å gi elevene mest utfordringer. Da er det ikke unaturlig at flesteparten av oppgavene krever flere regneoperasjoner før elevene kommer fram til et svar eller at elevene må gjennomgå flere regneoperasjoner i samme oppgave for å komme fram til flere svar.

Diagram 1 viser at responsen det forventes i flest oppgaver er «uttrykk» og «grafisk tolkning». Emnene som er analysert fra Faktor er «Funksjoner» og «Likninger og ulikheter». Det er ikke urimelig å anta at dette har en innvirkning på resultatene i forventet respons. Færrest av oppgavene forventer respons i form av «tallsvar» og «forklaring». «Tallsvar» kan ofte være det som forventes i oppgaver som krever mindre enn andre forventede responstype, mens forklaring ofte kreves i de oppgavene som er mer utfordrende.

Oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» og «prosedyrer med forbindelse» dominerer innen hovedkategorien kognitive krav. Det er et godt tegn at ingen av oppgavene krever «å memorere», på nivå 3 bør oppgavene være mer kognitivt utfordrende enn det som kreves av oppgaver i kategorien «å memorere». I Faktor kan man se at om lag halvparten av oppgavene klassifiseres på lavere kognitivt nivå, altså «ingen forbindelse» og den andre halvparten klassifiseres på høyere kognitivt nivå med hovedvekt på kategorien oppgaver med «prosedyrer med forbindelse».

4.2 Sirkel

Sirkel er i likhet med Faktor inndelt i 3 nivåer. Jeg har kun analysert oppgaver fra nivå 3. Sirkel har samlet emnene «Funksjoner» og «Likninger» i ett kapittel som består av totalt 49 oppgaver. Jeg har analysert alle oppgavene i henhold til modellen (figur 24). Analysemodellen består av hovedkategoriene «antall regneoperasjoner», «forventet responstype» og «kognitive krav». Resultatene fra analysen i dette kapitlet vil bli presentert både enkeltvis og sammen, i likhet med måten det ble gjort på i Faktor.

4.2.1 Antall operasjoner

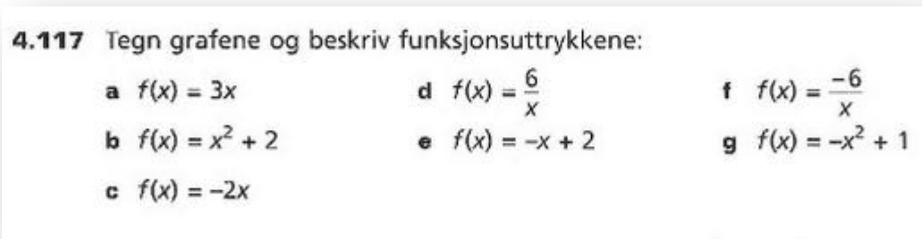
Antall operasjoner har to underkategorier; «én» eller «flere» operasjoner. Denne kategorien bygger på lærebokforfatternes forventninger og intensjoner bak oppgavene. Dersom intensjonen er at elevene skal bruke én regneoperasjon vil dette ofte være en oppgave som er mindre krevende enn en oppgave som forventere flere regneoperasjoner. Som tidligere nevnt kan kategorien «flere regneoperasjoner» i denne sammenheng sees på to måter; Den ene måten er at det kreves flere regneoperasjoner for å komme fram til et svar, den andre er at det kreves flere regneoperasjoner for å komme fram til flere svar, eksempelvis hvis det er flere deloppgaver og hver deloppgave krever ett svar.

I tabell 5 kan man se en oversikt over antall operasjoner som forventes i Sirkel. Jeg har valgt å dele denne tabellen inn i antall oppgaver i de to underkategoriene, samt en prosentvis oversikt for å få et helhetlig overblikk på resultatene.

Antall operasjoner:	**Antall (n=49):**	**Prosent:**
Én	19	36,7 %
Flere	31	63,3 %

Tabell 5: Antall regneoperasjoner som forventes i Sirkel.

Tabell 5 viser at flere oppgaver forventer flere regneoperasjoner (63,3 %) enn én (36,7 %). Oppgaver som baseres på at elevene må gjennom flere regneoperasjoner før de kan svare, kan være oppgaver som bygger på både begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. Begrepskunnskap innebærer at man har forståelse for flere begreper og kan knytte allerede kjente begreper sammen med nye, mens prosedyrekunnskap består av at man klarer å følge en «oppskrift» på fremgangsmåte i oppgaver (Miller & Hudson, 2007). Figur 33 viser en oppgave som krever flere regneoperasjoner for å komme fram til et svar.


4.117 Tegn grafene og beskriv funksjonsuttrykkene:

a $f(x) = 3x$

b $f(x) = x^2 + 2$

c $f(x) = -2x$

d $f(x) = \frac{6}{x}$

e $f(x) = -x + 2$

f $f(x) = \frac{-6}{x}$

g $f(x) = -x^2 + 1$

Figur 33: Eksempel på oppgave som inneholder flere regneoperasjoner (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.21).

I oppgaveteksten i figur 33 blir elevene bedt om å tegne grafer og beskrive funksjonsuttrykkene. For å ha mulighet til å tegne grafer, må elevene forstå hva funksjonsuttrykkene betyr og hvordan man kan overføre fra uttrykk til graf. Når elevene skal beskrive funksjonsuttrykkene må de ha kunnskap om hvilke elementer som er vesentlige å nevne i denne sammenheng, og hvilke elementer som er unyttige. Som sagt, blir elevene bedt om å beskrive funksjonsuttrykkene, for å ha mulighet til å gjennomføre dette må elevene bruke tidligere lært kunnskap om funksjonsuttrykk. Det finnes ikke en tidligere lært algoritme eller en prosedyre som kan hjelpe elevene med å beskrive disse (Rittle-Johnsen & Alibali, 1999).

I motsetning til Faktor er det større andel av oppgavene det forventes én regneoperasjon av i Sirkel, med henholdsvis 21,7 % i Faktor og 36,7 % i Sirkel. Figur 34 viser et eksempel på en oppgave, hentet fra Sirkel, som inneholder én regneoperasjon.

4.149 Lag en likning som inneholder brøk og har løsningen $x = 4$.

Figur 34: Eksempel på en oppgave det er forventet at elevene bruker «én regneoperasjon» (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.26).

Oppgaveteksten ber elevene om å lage en likning som inneholder brøk og har løsningen x = 4. Flere av oppgavene som er klassifisert i kategorien «én regneoperasjon» krever at elevene har kontroll på ulike begreper og kan sette disse sammen slik at det gir mening. I oppgaven ovenfor må elevene lage en likning som inneholder en brøk og har en bestemt løsning. Dette kan være overkommelig for elever som har utviklet en god begrepskunnskap, men kan være problematisk for de elevene som har hatt mest fokus på prosedyrer. Denne oppgaven, og flere liknende i samme kategori, kan være med på å utfordre elevenes evne til å knytte sammen kjente og ukjente begreper, samt arbeide med stille spørsmål til hva en kan fra før, og hvordan en skal begynne for å komme til en løsning. Vi kan kalle dette en åpen oppgave fordi er ikke bestemt hvilken fremgangsmåte elevene skal benytte for å komme fram til en bestemt likning.

4.2.2 Responstype
Forfattere bak lærebøker har alltid en forventning om hvilken responstype de ulike oppgavene skal føre til. I min modell er de aktuelle forventede responstypene; «tallsvar», «uttrykk», «grafisk tolkning» og «forklaring». Underkategoriene av responstype er organisert hierarkisk, der «tallsvar» antas å være minst krevende og «forklaring» antas å være mest krevende.

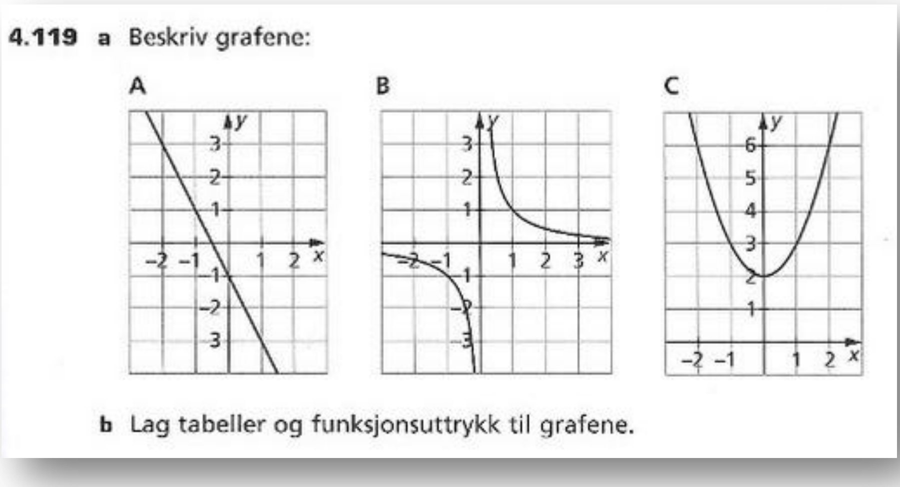
Tabell 6 viser, både antall og prosentvis, en oversikt over forventet respons i Sirkel. Oppgavene er fra kapittelet «Funksjoner og likninger» med totalt 49 oppgaver.

Forventet respons:	**Antall (n=49):**	**Prosent**
Tallsvar	2	4,1 %
Uttrykk	16	32,7 %
Grafisk tolkning	7	14,3 %
Forklaring	24	49 %

Tabell 6: Resultater på forventet responstype («tallsvar», «uttrykk», «grafisk tolkning» og «forklaring») i oppgaver fra Sirkel.

I tabell 6 kan man se at underkategoriene «Uttrykk» og «Forklaring» tilsammen har 81,7 % oppslutning. «Tallsvar» er den underkategorien færrest (4,1 %) oppgaver forventer, mens «Grafisk tolkning» har en oppslutning på 14,3 %.

Underkategorien «forklaring» innebærer at elevene skal formidle sine fremgangsmåter og matematiske valg. I denne kategorien må elevene ofte vise at de har forstått den matematikken som ligger til grunn i oppgaven. Eksempel på en oppgave innen kategorien «forklaring» kan man se på figur 35.



Figur 35: Eksempel på en oppgave i Sirkel som krever «forklaring» (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.21).

I figur 35 ser man at oppgaveteksten ber elevene om å bruke ord til å beskrive grafene. Man kan se at deloppgave b ber elevene om å lage tabeller og funksjonsuttrykk til grafene. Denne oppgaven fyller også kravene til kategoriene «uttrykk» og «tallsvar». Siden jeg avgrenset til ett svar per kategori (kap. 3.5), og siden kategoriene er organisert slik at «forklaring» krever mer av elevene enn de andre underkategoriene, blir denne oppgaven kategorisert med «forklaring» som forventet respons.

«Forklaring» kan i noen sammenhenger forbindes til et sosiokulturelt syn på læring. Flere tilhengere av sosiokulturell læringsteori mener at læring utvikles i samhandling med andre og i en kontekst (Dysthe, 2001). I samhandling med andre er språk en sentral faktor. Gjennom språket kan man utvikle egen læring og kunnskap. I oppgaver som i eksempelet ovenfor, og flere oppgaver som krever en forklaring, kan skriftspråket være en faktor for å utvikle læring. Når det forventes at elevene skal forklarer det de tenker og begrunne sine valg, vil elevene bli mer bevisste på sin egen læring og sin egen kunnskap (Säljö, 2001). Jeg nevnte tidligere at elevene i norsk skole skal mestre 5 grunnleggende ferdigheter. Der er å kunne regne og uttrykke seg muntlig trukket frem. Å kunne regne innebærer mer enn å kunne pluss, minus, gange og dele. Det innebærer også å kunne uttrykke regneprosesser, begrunne valg og presentere resultater til en mottaker[18]. Noe de fleste oppgavene som har «forklaring» som forventet respons krever.

Oppgaver som forventer «uttrykk» som svar har høyest oppslutning i Sirkel (32,7 %). Oppgaver med en forventet respons i form av uttrykk består i hovedsak av oppgaver som ber elever lage eller løse en likning eller ulikhet. Figur 36 er eksempel på en oppgave med forventet respons i form av «uttrykk».


4.136 Lag en likning som har løsningen $x = 3$ eller $x = -3$.

Figur 36: En oppgave med «uttrykk» som forventet respons (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24).

Oppgaven man ser i figur 36 ber elevene om å lage en likning som har løsning x = 3 eller x = -3. Denne oppgaven er ikke fullstendig uten et uttrykk, siden det er det som er løsningen på oppgaven. For å kunne løse denne typen oppgave må elevene ta i bruk tidligere lærte kunnskaper om likninger. De kan ikke bruke en prosedyre som er innlært, men må koble sammen flere begreper for å få en løsning som gir 3 eller -3.

4.2.3 Kognitive krav

Kategorien kognitive krav har 4 underkategorier; «å memorere», «ingen forbindelse», «forbindelse» og «å gjøre matematikk». Som tidligere nevnt er disse underkategoriene oppstilt hierarkisk, se kap.3.2 for mer informasjon om hva de ulike kategoriene innebærer. «Å memorere» regnes som det laveste kognitive nivået, mens det høyeste kognitive nivået er «å gjøre matematikk».

Kapittelet «funksjoner og likninger» i Sirkel inneholder totalt 49 oppgaver. I tabell 7 kan man se en oversikt, som viser både antall og prosent, fordelingen på kognitive krav i dette kapittelet.

Kognitive krav:	**Antall (n=49):**	**Prosent:**
Memorere	0	0
Ingen forbindelse	12	24,5 %
Forbindelse	29	59,2 %
Gjøre matematikk	8	16,3 %

Tabell 7: Oversikt over resultatene av analysen i kategorien «Kognitive krav» fra Sirkel.

Man kan se i tabell 7 at ingen av oppgavene havner i kategorien «å memorere». I og med at jeg har valgt oppgaver som tilhører nivå 3 i oppgaveboken, skal dette være oppgaver som byr på ekstra utfordringer til elevene. Derfor er det positivt at ingen av oppgavene klassifiseres som det laveste kognitive nivået. Det er høyest oppslutning av oppgaver i kategoriene oppgaver med «prosedyrer med forbindelse», hele 29 av 49 oppgaver er i denne kategorien. Kategoriene oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» og «å gjøre matematikk» har henholdsvis 24,5 % og 16,3 % oppslutning.

[18] Rammeverk for grunnleggende ferdigheter: http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no

Jeg vil kommentere eksempler og typiske kjennetrekk ved de ulike oppgavene i underkategoriene i avsnittene under.

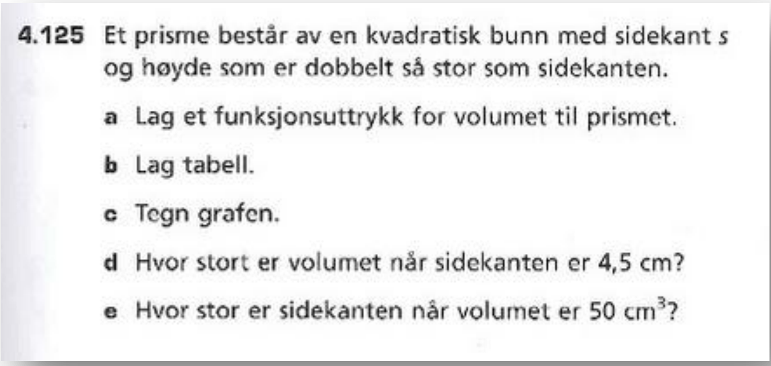
Oppgaver i underkategorien «prosedyrer med forbindelse» har fokus på å gi elevene en dypere forståelse av matematiske begreper og ideer. De inneholder ofte flere representasjonsformer, som eksempelvis diagrammer, symboler og problemsituasjoner der sammenhengen mellom disse representasjonene skal skape mening for elevene (Smith og Stein, 1998b). I Sirkel er det 59,2 % av oppgavene som kategoriseres som oppgaver med «prosedyrer med forbindelse». Figur 37 viser eksempel på en slik oppgave.

4.143 Lag tekst til ulikheten $5x + 35 > 70$.

Figur 37: Eksempel på oppgave med «prosedyre med forbindelse» (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.25).

Oppgave 4.143 er plassert i underkategorien «prosedyrer med forbindelse» fordi oppgaveteksten ber elevene om å lage en tekst til ulikheten 5x + 35 > 70. En slik oppgave ber elevene om å forbinde tidligere kunnskap om ulikheter med dette konkrete tilfellet. For å ha muligheten til å lage en tekst som passer til ulikheten som er vist i figur 37, må elevene ha forståelse for hva en ulikhet er. Elevene må aktivt gå inn for å skape forståelse for denne ulikheten. Denne oppgaven, og flere innenfor samme kategori («med forbindelse») krever at elevene arbeider med både forståelse av begreper og utvikler evne til å skape mening med den underliggende matematikken som finnes i denne type oppgaver. Man kan se en sammenheng med slike oppgaver og et konstruktivistisk syn på læring. Et konstruktivistisk syn på læring innebærer at elevene får mulighet til å arbeide med oppgaver der de skal undre og stille spørsmål for å konstruere sin egen kunnskap (Jaworski, 1994). I denne forbindelse vektlegges det at elevene må selv være delaktige i å utvikle kunnskaper, de kan ikke passivt motta kunnskapen og deretter benytte seg av denne i andre sammenhenger, noe som ofte må til i oppgaver med «prosedyrer med forbindelse».

I Sirkel består 16,3 % av oppgavene av utfordringer på det høyeste kognitive nivået, «å gjøre matematikk». Oppgavene innen denne kategorien krever at elevene utforsker og forstår matematiske begreper, prosesser og forhold mellom disse. Oppgaveteksten er ofte åpen slik at elevene skal ta egne matematiske valg og må tolke og evaluere hvilke fremgangsmåter som er hensiktsmessige (Smith og Stein, 1998b). Eksempel på en oppgave i «å gjøre matematikk» kan man se i figur 38.



4.125 Et prisme består av en kvadratisk bunn med sidekant *s* og høyde som er dobbelt så stor som sidekanten.

a Lag et funksjonsuttrykk for volumet til prismet.

b Lag tabell.

c Tegn grafen.

d Hvor stort er volumet når sidekanten er 4,5 cm?

e Hvor stor er sidekanten når volumet er 50 cm^3?

Figur 38: Eksempel på en oppgave som er klassifisert i den kategorien som har høyest kognitive krav, nemlig «å gjøre matematikk» (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.23).

Oppgaveteksten i figur 38 forklarer hvordan et prisme ser ut. Her angir oppgaveteksten at det har både kvadratisk bunn med sidekant s og at høyden er dobbelt så stor som sidekanten. Elevene skal lage et funksjonsuttrykk for volumet til prisme, deretter en tabell med tilhørende graf. I tillegg får elevene beskjed om å finne volumet når det er en bestemt sidekant, og helt til slutt hvor stor sidekanten er når de får oppgitt et bestemt volum. Denne oppgaven inneholder mange begreper, prisme, kvadrat, sidekant, tabell, graf, volum og funksjonsuttrykk. Det er opp til elevene å skape sammenheng mellom disse begrepene og forstå hvilke prosesser man skal gjennomgå for å komme fram til en løsning. Elevene må forstå at funksjonsuttrykket i denne oppgaven blir en potensfunksjon. På bakgrunn av at denne oppgaven krever sammenheng mellom så mange forskjellige begreper blir denne oppgaven kategorisert i kategorien «å gjøre matematikk».

Oppgavene som havner i kategoriene «prosedyrer med forbindelse» og «å gjøre matematikk», bygger ofte på konseptet problemløsing. Det innebærer at elevene kjenner til prosedyrene som skal tas i bruk, men det er lagt til nye elementer som gjør at elevene må tenke i nye baner og utvikle sammenheng mellom begreper og fremgangsmåter. Gjennom denne typen oppgaver utvikler elevene sin egen matematiske forståelse (Orton, 2004).

I oppgaven som er vist ï figur 38, og flere oppgaver innen samme kategori, kreves det at elevene må skape en forståelse for hva som skal gjøres ut fra teksten. Det blir ikke forslått en «vei» elevene kan følge for å lage et uttrykk for volumet til prisme eller hvilke verdier elevene skal inkludere i tabellen. Elevene må, i dette tilfelle, aktivt gå inn for å finne formel for et prisme og skape en forståelse av hvordan denne ser ut, og i tillegg skape forståelse for sammenhengen mellom selve figuren, funksjonsuttrykket og grafen. Man kan se at flere av oppgavene i kategorien «å gjøre matematikk» bygger på at elevene skaper sin egen forståelse for enkelte begreper og prosedyrer. Dette kan i noen tilfeller sees i sammenheng med et konstruktivistisk syn på læring. Konstruktivismen bygger på ideen om at kunnskap må oppleves og skapes, det er ikke noe som bare finnes (Säljö, 2001). Noe som kreves i flere oppgaver innenfor denne kategorien.

4.2.4 Oppsummering av resultatene i Sirkel 10B oppgavebok

Før jeg kommenterer resultatene fra eksamensoppgavene, vil jeg oppsummere hovedfunnene fra Sirkel. Diagrammet under viser, i prosent, hvordan oversikten innenfor de ulike hovedkategoriene er. Hovedkategoriene, er som nevnt flere ganger tidligere, «antall regneoperasjoner», «forventet responsuttrykk» og «kognitive krav».

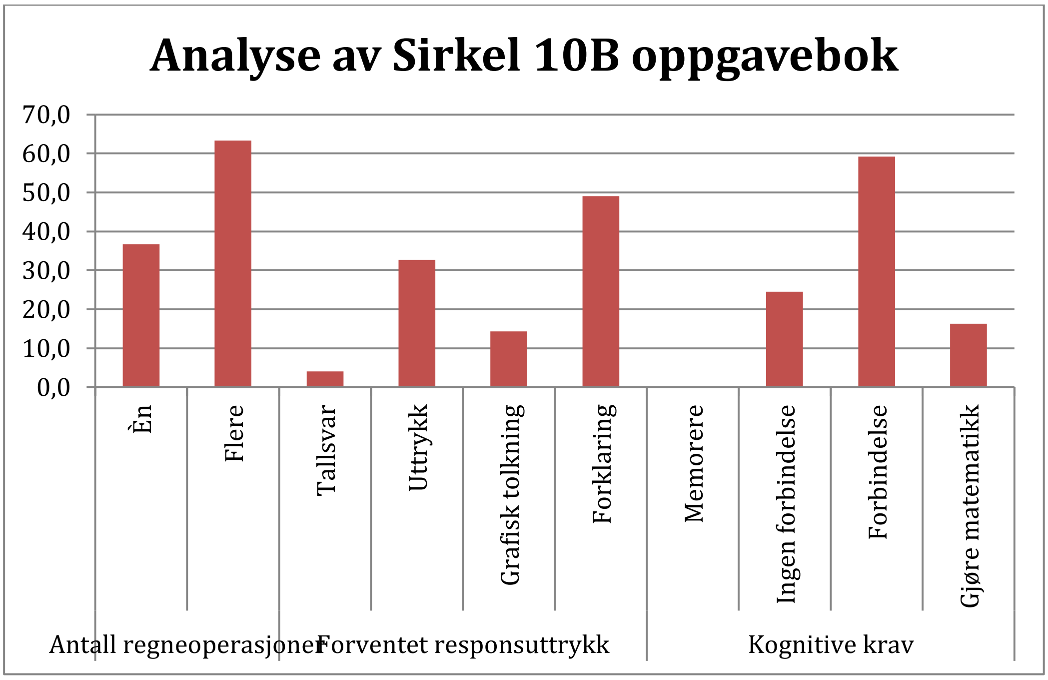


Diagram 2: Oversikt over analyseresultatene fra Sirkel fremstilt i prosent.

Diagrammet ovenfor viser at det er flest oppgaver som forventer at elevene skal gjennom mer enn én regneoperasjon før de kommer frem til svaret eller svarene. Dette kan ha en sammenheng med at oppgavene som er valgt ut fra Sirkel er hentet fra nivå tre. Nivå tre er det nivået som skal by på utfordringer til elevene, og det kan være mer krevende å måtte bruke flere regneoperasjoner for å komme fram til ett eller flere svar.

Man kan se av diagrammet at de hyppigst forventede responsene i Sirkel er «uttrykk» og «forklaring». Kapittelet jeg har analysert er «Funksjoner» og «likninger», det er derfor plausibelt å anta at dette stemmer. I det matematiske emne «funksjoner» er det 12 oppgaver, og emne «likninger» er det 37 oppgaver. Derfor er også den forventede responsen «uttrykk» relativt høy sammenliknet med «grafiske tolkninger». En grunn til dette kan være at oppgaver i emnet «funksjoner» vil ha en forventet respons i form av «grafisk tolkning», mens oppgaver knyttet til emnet «likninger» ofte vil forvente et svar i form av «uttrykk». Det er positivt at 49 % av oppgavene forventer «forklaring», da dette ansees som å være den mest krevende forventede responsen.

Den siste hovedkategorien er «kognitive krav». I denne kategorien finner man flest oppgaver med «prosedyrer med forbindelser». Dette er ofte oppgaver som bygger på problemløsing og konstruksjon av egen kunnskap. Det krever også at elevene kan forstå kjente og ukjente begreper, samt knytte disse sammen og utvikle sin egen begrepskunnskap.

4.3 Eksamensoppgaver

Som tidligere nevnt, har jeg valgt å inkludere eksamensoppgaver fra tidligere år i min analyse. Grunnen til dette er at eksamensoppgavene er en test på om elevene har forstått og kan regne på ulike prosedyrer og begreper fra læreplanen. Vi vet fra media[19] og andre aktører[20] at resultatet på 10.trinns eksamener er relativt lavt. Det er derfor spennende å se om dette er fordi oppgavene som blir gitt på eksamen er for utfordrende eller om dette kanskje kan ha en annen forklaring. Jeg har derfor valgt å analysere og klassifisere eksamensoppgaver innen emnene «funksjoner og likninger» for å se disse i sammenheng med resultatene fra de utvalgte lærebøkene.

Eksamensoppgavene er hentet fra årene 2010, 2011, 2012, 2013 og 2014, totalt har jeg analysert 40 oppgaver. Eksamen består som tidligere nevnt av del 1 og del 2, fra del 1 har jeg gjennomgått og analysert 25 oppgaver og fra del 2 har jeg analysert 15 oppgaver. Jeg har valgt å presentere resultatet i del 1 og del 2 separat og deretter sammen. Grunnen til det er at del 1 skal gjøres uten hjelpemidler og på del 2 er alle hjelpemidler tillatt. På del 1 har elevene likevel lov å bruke passer, linjal og gradskive, men ingen digitale hjelpemidler eller kalkulator. Del 2 er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av kommunikasjonsverktøy. Del 1 og del 2 leveres ut samtidig. Del 1 må leveres innen 2 timer og del 2 innen 5 timer.

4.3.1 Del 1

Del 1 er den delen av eksamenen elevene skal gjennomføre uten hjelpemidler. Jeg har kun valgt å ta med oppgaver innenfor temaene funksjoner, likninger og ulikheter. I motsetning til de foregående analysene av Faktor og Sirkel vil jeg presentere alle hovedkategoriene («antall regneoperasjoner», «responstype» og «kognitive krav») i samme tabell. Dette er av den enkle grunn at disse delene inneholder færre oppgaver per del enn lærebøkene. Tabell 8 viser hvordan oppgavene del 1 er analysert og klassifisert:

Kategori:		**Antall oppgaver (n=25):**	**Prosent:**
Antall regneoperasjoner:			
	Én	3	12 %
	Flere	22	88 %
Responstype:			
	Tallsvar	7	28 %
	Uttrykk	14	56 %
	Grafisk tolkning	4	16 %
	Forklaring	0	0 %
Kognitive krav:			
	Memorere	0	0 %
	Ingen forbindelse	23	92 %
	Forbindelse	2	8 %
	Gjøre matematikk	0	0 %

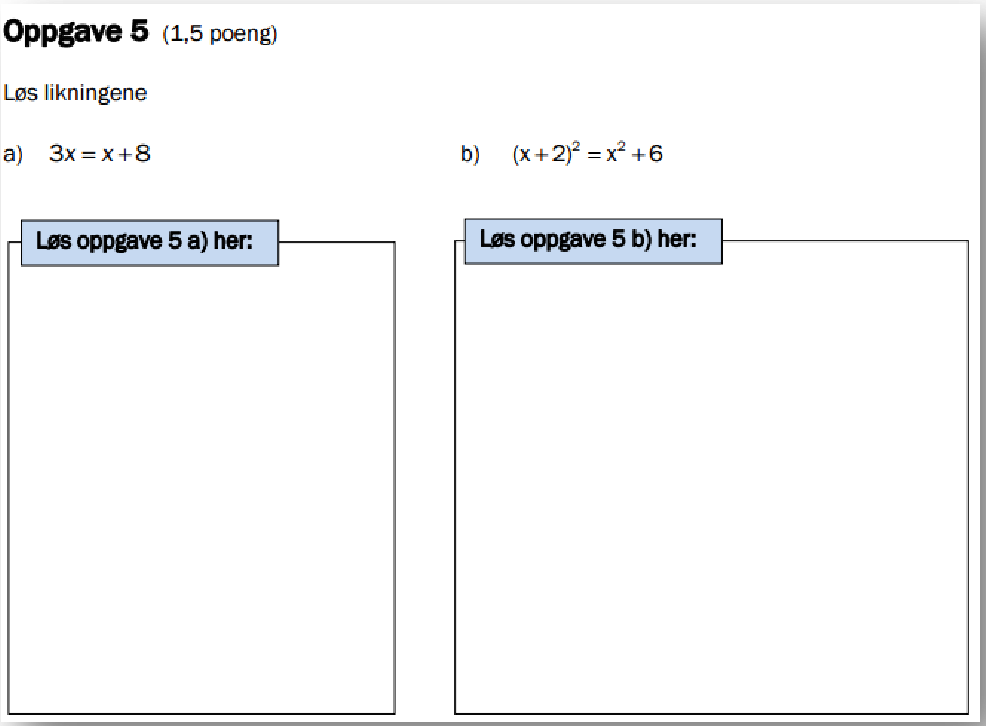
Tabell 8: Oversikt over analysen på del 1 på ordinær eksamen fra 2010-2014.

[19] Se eksempelvis denne lenken: http://www.vg.no/nyheter/innenriks/skole-og-utdanning/to-av-fem-faar-bunnkarakterer-i-matte/a/10117890/

[20] Andre aktører kan være Udir, se for eksempel denne lenke: http://www.udir.no/Tilstand/Analyser-og-statistikk/vgo/Karakterer/Forelopig-karakterstatistikk-eksamen-varen-2014/

Tabell 8 viser at flere regneoperasjoner dominerer i kategorien «antall regneoperasjoner». Den hyppigst forventede responsen er «uttrykk» (56 %) og innen kognitive krav er det oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» (92 %) som har størst oppslutning.

Del 1 på eksamen er preget av oppgaver som skal teste elevenes grunnleggende ferdigheter. Emner som addisjon, subtraksjon, divisjon, multiplikasjon, brøk, potenser, likninger, prosent og sannsynlighet er gjennomgående. Oppgavene er laget slik at elevene skal kjenne til fagstoffet som blir presentert i denne delen og de legger opp til relativt enkle utregninger uten bruk av lommeregner. Figur 39 er eksempel på en oppgave der elevene skal løse likninger.


Oppgave 5 (1,5 poeng)

Løs likningene

a) $3x = x + 8$

b) $(x+2)^2 = x^2 + 6$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Figur 39: Oppgave 5 fra del 1 av eksamen gitt vår 2014. Elevene skal i denne oppgaven løse likninger.

I oppgave 5, del 1 fra 2014 blir elevene bedt om å løse likninger. Denne oppgaven inneholder «flere regneoperasjoner». I deloppgave b) må elevene kjenne til første kvadratsetning for å komme fram til en løsning, i tillegg må elevene finne hva x er. Oppgaven er derfor kategorisert med «uttrykk» som forventet respons. Det er mulig at intensjonen bak denne oppgaven er at elevene skal vise kunnskapen de innehar i emnet «likninger». Dette er en oppgave som bygger på emner elevene skal ha arbeidet med i løpet av skolegangen og som derfor er kategorisert som en oppgave på lavere kognitivt nivå, i kategorien «ingen forbindelse».

Det er rimelig å anta at del 1 bygger på elementer som elevene skal ha vært innom i løpet av skolegangen, og at det derfor er 23 av 25 oppgaver som kategoriseres på lavere kognitivt nivå i kategorien «prosedyrer uten forbindelse». Oppgavene som blir gitt i del 1 er relativt like i alle eksamensheftene jeg har gått gjennom. Man kan se av tabellen at det ikke er noen av oppgavene som kategoriseres som «å gjøre matematikk». Dette er fordi disse oppgavene bygger på grunnleggende ferdigheter som 10.klasse elever skal kunne. Det er ingen av oppgavene der elevene må tolke eller analysere.

4.3.2 Del 2

Del 2 av eksamensoppgavene består av færre, men større oppgaver enn del 1. I motsetning til del 1 består denne delen av oppgaver som ofte har flere deloppgaver. Disse er gjerne innen sammen emne, og det er ofte slik at a og b oppgavene er laget slik at de aller fleste skal få de til. Etter a og b oppgavene blir det mer krevende for elevene å komme fram til en løsning. På del 2 har elevene mulighet til å bruke programmer som for eksempel Excel og Geogebra for å komme fram til løsninger. Jeg har analysert totalt 15 oppgaver fra del 2 i perioden 2010-2014. Jeg har brukt tre oppgaver fra hver eksamen. Tabell 9 viser resultatet av analysen.

Kategori:	**Underkategori:**	**Antall oppgaver (n=15):**	**Prosent:**
Antall regneoperasjoner:			
	En	0	0 %
	Flere	15	100 %
Responstype:			
	Tallsvar	6	40 %
	Uttrykk	1	6,7 %
	Grafisk tolkning	6	40 %
	Forklaring	2	13,3 %
Kognitive krav:			
	Memorere	0	0 %
	Ingen forbindelse	7	46,7 %
	Forbindelse	8	53,3 %
	Gjøre matematikk	0	0 %

Tabell 9: Oversikt over analysen på del 2 på ordinær eksamen fra 2010-2014.

Av tabellen ovenfor kan man se at 100 % av oppgavene krever mer enn én regneoperasjon, noe som var et forventet resultat fordi eksamensoppgavene som tilhører del 2 består av oppgaver med flere deloppgaver. Oppgaver det forventes flere regneoperasjoner av, vil i mange tilfeller være mer krevende enn oppgaver som består av én regneoperasjon. Siden oppgavene er delt inn i flere deloppgaver som inneholder samme emnet, og ofte bygger på hverandre, kan dette bære preg av prosedyrekunnskap. Altså at elevene får steg for steg hvordan de skal sette sammen informasjonen de får og denne er avgjørende for helheten i siste deloppgave. Figur 40 er en oppgave bestående av flere deler som bygger videre på hverandre.

Oppgave 6 (4 poeng)

Du kan spare mye tid og arbeid ved å bruke en digital graftegner.

Et alpinanlegg har to ulike heiskort.

- Sesongkortet koster 3 600 kroner.
- Dagskortet koster 295 kroner.

Kari kjøper et sesongkort og står på slalåmski x dager i løpet av vinteren.

Når Kari bruker sesongkortet, er prisen per dag gitt ved funksjonen

$$f(x) = \frac{3600}{x}$$

a) Tegn grafen til funksjonen f når $1 \leq x \leq 30$.

b) Bestem grafisk hvor mange hele dager Kari må bruke sesongkortet for at dette kortet skal lønne seg sammenliknet med dagskortet.

Figur 40: Oppgave 6 hentet fra eksamen vår 2013, del 2. Oppgaven har 2 deloppgaver som bygger på samme emnet.

Oppgaveteksten ber elevene om å regne grafen til en gitt funksjon og lese informasjon ut fra denne grafen. Man kan se at oppgavene bygger på hverandre, og dersom elevene ikke mestrer deloppgave a) vil de mest sannsynlig ikke mestre deloppgave b). Oppgaven som er vist ovenfor krever flere regneoperasjoner, slik som alle andre oppgaver i del 2. Denne oppgaven er klassifisert med forventet respons i form av «grafisk tolkning», som er en kategori med 40 % oppslutning av de oppgavene jeg har analysert.

Kategorien responstype har en jevnere spredning enn de andre kategoriene. Likevel kan man se av tabellen ovenfor at underkategoriene «tallsvar» og «grafisk tolkning» skiller seg ut. Som tidligere nevnt, har jeg hatt fokus på oppgaver innen emnene funksjoner og likninger. Av den grunn er det naturlig at «grafisk tolkning» er fremtredende. Jeg ville antatt på forhånd at også «uttrykk» ville vært sterkere representert. En grunn til at denne underkategorien ikke gjør det, kan være at elevene ofte blir testet i likninger i del 1, mens del 2 handler i større grad om emnene geometri og funksjoner.

Man kan også se at det, i likhet med Faktor, er jevnt fordelt mellom oppgaver som krever «ingen forbindelse» og de som krever en «forbindelse». Eksamenen er bygd opp slik at den skal sjekke om elevene har forstått elementer som har blitt gjennomgått i fagplanen. Den skal også legge til rette for at elever som har forstått mye av tidligere undervisning skal få noen oppgaver som er utfordrende. Dette kan være grunnen til at det er jevnt fordelt mellom oppgavene som krever «prosedyrer med forbindelse» og oppgaver som krever «prosedyrer uten forbindelse». Kategorien som krever høyest grad av kognitive krav, «å gjøre matematikk», er det ingen av oppgavene som forventer. En årsak til dette kan være at oppgavene som elevene får på eksamen skal være en test i elevenes ferdigheter der det sjekkes hva elevene har lært. Hvis elevene skal få oppgaver som introduserer nye emner eller prosedyrer som elevene aldri har sett før, kan dette være litt uheldig for utfallet på eksamenen.

4.3.3 Oppsummering av resultater på eksamen

Jeg vil i dette delkapitlet oppsummere resultatene fra eksamensoppgavene som en helhet. Etter å ha sett enkeltvis på del 1 og del 2, er det også viktig å sette disse sammen. Del 1 og del 2 utgjør et eksamenssett, og av den grunn er det hensiktsmessig å se på disse også samlet. En helhetlig grafisk framstilling av resultatene blir fremstilt i diagram 3.

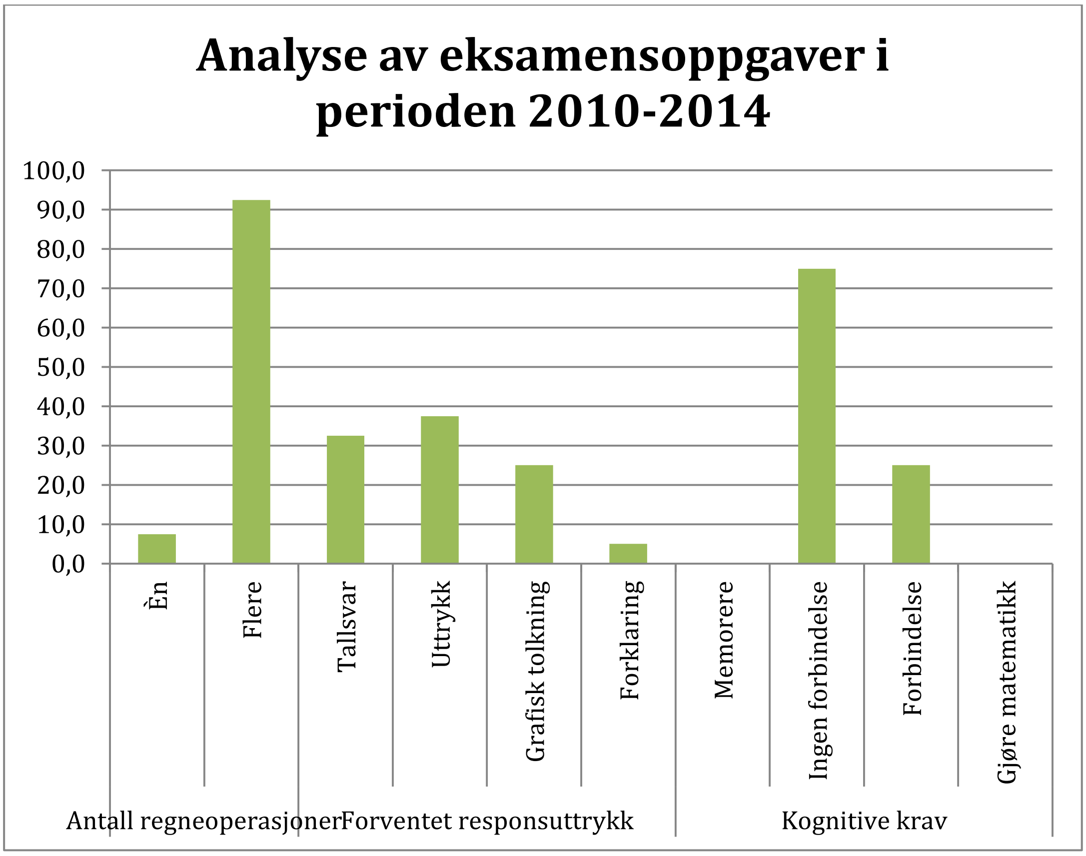


Diagram 3: Oversikt over alle kategoriene på del 1 og 2 fra ordinær eksamen i perioden 2010-2014.

Det ble kommentert at både del 1 og del 2 hadde mange oppgaver som krevde flere regneoperasjoner for å komme fram til en løsning. Når man setter sammen begge delene ser man at over 90 % av oppgavene krever mer enn én regneoperasjon.

Neste kategori, «forventet responsuttrykk», er en kategori med mer spredning blant underkategoriene. Den kategorien med minst oppslutning er «forklaring». Man kan se at 37,5 % av oppgavene sammenlagt forventer «uttrykk». Som jeg forklarte, er det få oppgaver tilhørende del 2 som har «uttrykk» som forventet respons, siden jeg har analysert flere oppgaver fra del 1 er det derfor logisk at denne responsen forventes i størst grad.

Innen «Kognitive krav» er det bare 2 av 4 kategorier det klassifiseres oppgaver i. Dette er kategoriene oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» og oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse». Av diagrammet over kan man se at oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» har 75 % oppslutning, mens oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» har 25 % oppslutning. Det vil si at eksamensoppgavene legger opp til oppgaver på kognitivt lavere nivå, mens enkelte av oppgavene også befinner seg et høyere kognitivt nivå.

4.4 Faktor, Sirkel og eksamener

Etter en gjennomgang av resultatene enkeltvis, vil jeg nå se på resultatene i lærebøkene og eksamensoppgavene samlet. I dette delkapittelet vil det være fokus på likheter og forskjeller i de to oppgavebøkene og eksamensoppgavene. Totalt har jeg analysert 46 oppgaver i Faktor, 49 i Sirkel og 40 eksamensoppgaver. Dette gir et samlet antall på 135 oppgaver. I de kommende delkapitlene vil jeg følge samme framgangsmåte som jeg har brukt i analysene av lærebøkene, først presentere resultatene innen hver av de 3 hovedkategoriene «antall regneoperasjoner», «forventet responstype» og «kognitive krav», før jeg kommer med en samlet oppsummering.

4.4.1 Antall regneoperasjoner

Analysemodellen min inneholder en kategori som innebærer hvor mange regneoperasjoner som forventes før elevene kommer fram til ett eller flere svar. Tabell 10 viser en oversikt over hvor mange av oppgavene i henholdsvis Faktor, Sirkel og eksamensoppgavene som krever én eller flere regneoperasjoner.

Regneoperasjoner:	**Prosent i Faktor (n=46)**	**Prosent i Sirkel (n=49)**	**Prosent på eksamen (n=40)**
En	21,7	36,7	7,5
Flere	78,3	63,3	92,5

Tabell 10: Antall regneoperasjoner i Faktor, Sirkel og på eksamen fremstilt i prosent.

Man kan se av tabell 10 at det er en likhet i Faktor og Sirkel med henholdsvis 21,7 % og 36,7 % av oppgavene som krever «én regneoperasjon», og 78,3 % og 63,3 % som krever «flere regneoperasjoner». Man kan se av tabellen at det er flere av oppgavene som er gitt på eksamen som legger opp bruk av «flere regneoperasjoner». Alt i alt er det «flere regneoperasjoner» som dominerer både innen eksamen og i oppgavebøkene, med Sirkel som lavest oppslutning i denne kategorien.

4.4.2 Responstype

Lærebokforfattere har en forventet responstype til alle oppgaver de lager. I min analyse har jeg brukt underkategoriene; «tallsvar», «uttrykk», «grafisk tolkning» og «forklaring». Jeg har tidligere påpekt at disse er hierarkisk oppstilt, slik at en oppgave som krever «tallsvar» i utgangspunktet sees på som mindre krevende enn en oppgave som kategoriseres i «forklaring». Jeg har fremstilt resultatene i hovedkategorien «responstype» i tabell 11.

Responstype:	**Prosent i Faktor (n=46)**	**Prosent i Sirkel (n=49)**	**Prosent på eksamen (n=40)**
Tallsvar	8,7	4,1	32,5
Uttrykk	43,5	32,7	37,5
Grafisk tolkning	32,6	14,3	25
Forklaring	15,2	49	5

Tabell 11: Resultater i kategorien «responstype» i Faktor, Sirkel og på eksamen fremstilt i prosent.

Underkategorien «tallsvar», kan man se av tabellen over, har ulike prioriteringer fra de som lager oppgavene. På eksamensoppgavene er det 32,5 % av oppgavene som forventer denne responsen, mot 4,1 % i Sirkel og 8,7 % i Faktor. Som tidligere nevnt skal eksamensoppgavene være en test på at elevene har forstått og kan anvende kunnskaper de tidligere har erfart i sin skolegang. Derfor inneholder eksamenene oppgaver på alle nivåer. Faktor og Sirkel har en nivåinndeling hvor jeg har valgt å fokusere på nivå 3, det er derfor i noen tilfeller mer vekt på større utfordringer som krever annen responstype enn «tallsvar».

Kategorien «uttrykk» har i likhet med «tallsvar» ulik oppslutning fra lærebøkene og eksamensoppgavene. Det er hele 43,5 % av oppgavene i Faktor som forventer respons i form av «uttrykk», mot 32,7 % og 37,5 % på henholdsvis eksamensoppgavene og Sirkel. Eksamensoppgavene og Sirkel har relativt like forventninger til hvor mange oppgaver som skal ende opp i et «uttrykk», mens Faktor skiller seg ut med nesten dobbelt så mange slike oppgaver.

Den underkategorien man kan se størst forskjell på i lærebøkene og eksamensoppgavene, er «forklaring». I Sirkel er det 49 % av oppgavene som har dette som forventet respons, mot 15, 2 % i Faktor og 5 % på eksamensoppgaver. Matematikk skiller seg fra andre fag i skolen på flere måter, den ene måten er at matematikken har sitt eget språk. Som Orton (2004) påpeker er det slik at matematikk ofte forbindes med tall og symboler. Et typisk problem for elever er å knytte disse symbolene sammen med ord. Når elevene får oppgaver der de må forklare hva de har tenkt eller beskrive hva de ser vil det være lettere for læreren å oppdage slike misforståelser som kan ha oppstått.

Oppgaver som krever en forklaring vil i større grad ha fokus på begrepskunnskap framfor prosedyre kunnskap. Det vil si at oppgavene krever at elevene skal finne forbindelser mellom begreper, istedenfor å nyttiggjøre seg av prosedyrer som er lært. Det er viktig, som Rittle-Johnsen og Alibali (1999) påpekte, at som oftest skiller man ikke mellom oppgaver som krever prosedyre og begrepskunnskap, det bør være en blanding av disse to for å oppnå god og varig kunnskap hos elevene. Det er rimelig å anta at oppgavene i Sirkel har størst fokus på å knytte sammen kjente og ukjente begreper og i tillegg lar elevene formulere kunnskapen sin og sine matematiske valg skriftlig i større grad enn det som forventes på eksamensoppgavene og i Faktor.

4.4.3 Kognitive krav

Denne kategorien innebærer hvilke kognitive utfordringer og hvor utfordrende oppgavene er på ulike kognitive nivå. Som tidligere nevnt har jeg brukt underkategoriene; «å memorere», «ingen forbindelse», «forbindelse» og «å gjøre matematikk». Denne inndelingen bygger på Brändström (2005) sin studie og er organisert hierarkisk. Tabell 12 er en oversikt over hvor kognitivt krevende oppgavene fra Faktor, Sirkel og de utvalgte eksamensoppgavene i perioden 2010-2014 er.

Kognitive krav:	**Prosent i Faktor (n=46):**	**Prosent i Sirkel (n=49):**	**Prosent på eksamen (n=40):**
Memorere	0	0	0
Ingen forbindelse	52,2	24,5	75
Forbindelse	41,3	59,2	25
Gjøre matematikk	6,5	16,3	0

Tabell 12: Fordeling av kognitive krav som forventes i Faktor, Sirkel og på eksamen i perioden 2010-2014.

Som man kan se av tabellen ovenfor er det ingen av oppgavene som er i kategorien «å memorere». Dette er positivt fordi oppgavene som er hentet fra oppgavebøkene er fra nivå 3 og eksamensoppgavene gir både tid og mulighet for at elevene skal ta i bruk tidligere lærte prosedyrer. Oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse», altså kategorien «Ingen forbindelse», er det splittet oppfatning om i følge oppgavene. Sirkel har lavest oppslutning i denne kategorien (24,5 %), mens Faktor ligger i midten med 52,2 % og eksamensoppgavene baserer seg i stor grad på oppgaver i denne kategorien (75 %).

Sirkel har størst fokus på oppgaver som ligger på høyere kognitivt nivå. Det er 75,5 % av alle oppgavene i Sirkel som ligger i kategoriene «forbindelse» og «å gjøre matematikk». Faktor har en samlet prosent på 47,8 og eksamensoppgavene har 25 % av oppgavene på høyere kognitivt nivå. Faktor og Sirkel har om lag halvparten av oppgavene i kategorien «forbindelse», mens eksamensoppgavene har 25 %. Både Faktor og Sirkel har noen oppgaver som er høyst kognitivt krevende, med henholdsvis 6,5 % og 16,3 % av oppgavene i kategorien «å gjøre matematikk». Eksamensoppgavene legger ikke opp til noen oppgaver i denne kategorien. Som tidligere nevnt skal eksamen teste og sjekke elevenes ferdigheter innen matematikk. Det kan være grunnen til at ingen av oppgavene er på det høyeste kognitive nivået.

4.4.4 Samlet oversikt over alle resultatene

Som man kan se i diagram 4, er dette resultatene fra både Faktor, Sirkel og eksamensoppgavene i perioden 2010-2014. Faktor er representert i fargen blå, Sirkel i rød og eksamensoppgavene i grønn.

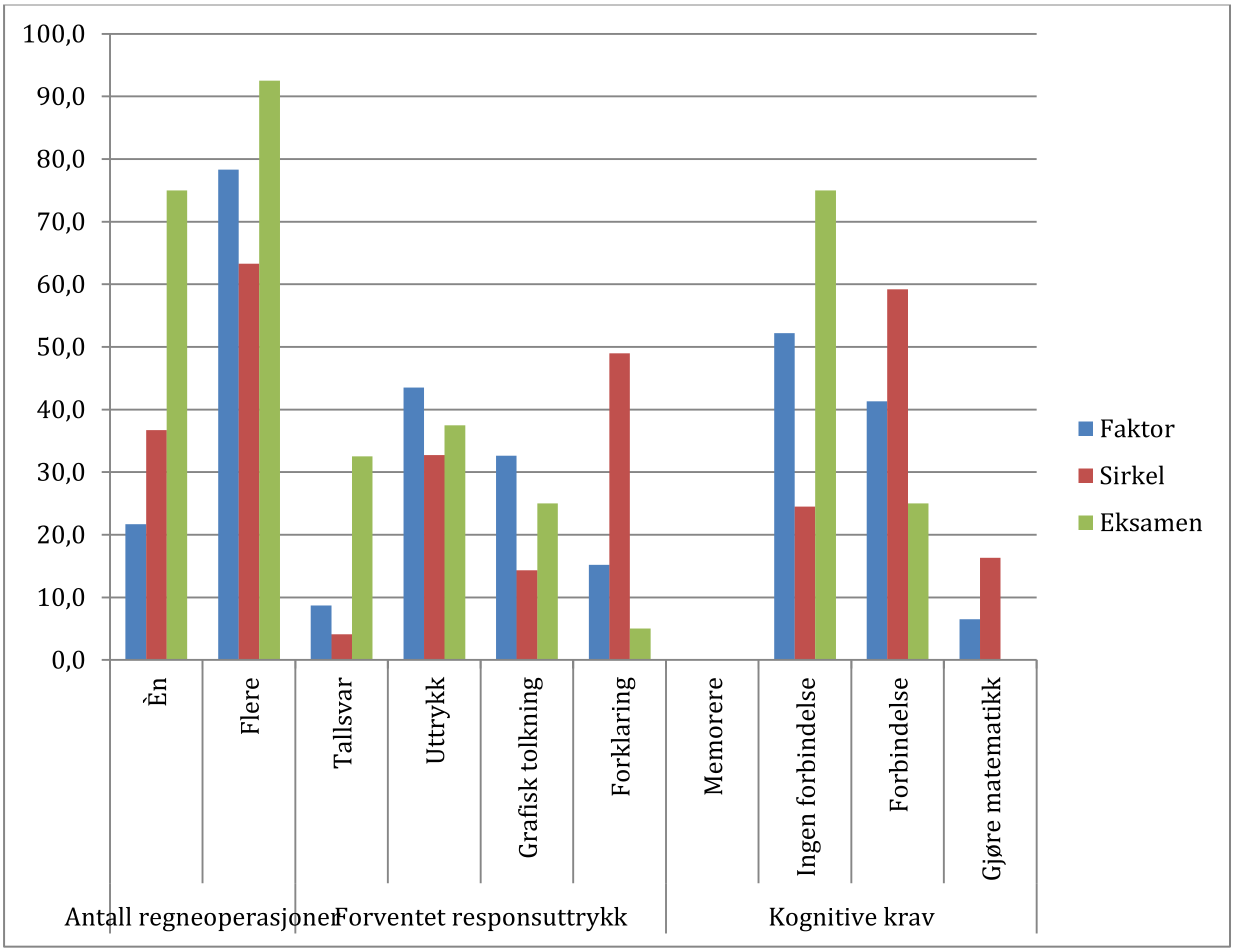


Diagram 4: En samlet oversikt over resultatene fra Faktor, Sirkel og eksamensoppgavene i perioden 2010-2014.

Man kan se at både i Faktor, Sirkel og eksamensoppgavene er det hovedfokus på oppgaver der det forventes «flere regneoperasjoner». På eksamensoppgavene er dette ekstra tydelig, da hele 92,5 % av oppgavene forventer at elevene tar i bruk flere regneoperasjoner. I Sirkel kan man se at det er noe jevnere, der er det 63,3 % av oppgavene som forventer flere regneoperasjoner. Faktor ligger midt mellom Sirkel og tidligere eksamensoppgaver innen denne kategorien.

«Responsuttrykk» har noe mer delte forventinger ut i fra diagram 4. I Faktor og på eksamensoppgavene er det flest oppgaver som forventer «uttrykk», man kan se at Faktor har en oppslutning på 43,5 % i denne underkategorien, mens på eksamensoppgavene er 37,5 %. Man kan se at hele 32,5 % av eksamensoppgavene forventer at elevene skal komme med «tallsvar» som respons. I lærebøkene er «tallsvar» den responstypen færrest oppgaver forventer. Sirkel består av flest oppgaver som forventer «forklaring» som responstype. «Forklaring» som scorer både Faktor og eksamensoppgavene relativt lavt på i forhold.

I hovedkategorien «kognitive krav» kan man se at Faktor og eksamensoppgavene har relativt like resultater. De har fokus på oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse», mens Sirkel har fokus på oppgaver med «prosedyrer med forbindelse». I underkategorien «uten forbindelse» ligger eksamensoppgavene med en oppslutning på hele 75 % og Faktor med 52,2 %, i motsetning har Sirkel en oppslutning på 24,5

%. Man kan se at Sirkel har hovedvekt av oppgaver på høyere kognitivt nivå. Det er 59,2 % av oppgavene som befinner seg i kategorien «forbindelse» og 16,3 % i kategorien «å gjøre matematikk».

I oppgavebøkene til Faktor og Sirkel finnes det en fasit. I hovedsak består denne kun av tallsvar på de oppgavene som krever dette men man kan også finne korte forklaringer til oppgaver som krever dette. Det finnes ikke utregninger som viser hvordan elevene kan komme fram til svaret. Intensjonen bak dette er at elevene skal kunne sjekke om det de har gjort stemmer. I fasiten vil elevene få en umiddelbar respons på om svaret er riktig eller galt. Dette kan sees i sammenheng med behavioristisk syn på læring. Elevene får en oppgave (stimuli), så skal de komme fram til et svar (respons). De får en umiddelbar tilbakemelding (belønning) på om svaret er rett eller galt, ved å se på fasiten. For enkelte elever kan fasit fungere som en belønning på at de har gjort oppgaven riktig. Det kan også virke mot sin hensikt å ha denne fasiten. Om noen elever sliter med å komme fram til rett svar, kan de bare skrive av svaret i oppgaven og dermed ikke ha noe læringsutbytte fra oppgavene.

5.0 Diskusjon

I denne delen av studien vil jeg diskutere hovedfunnene fra resultat og analyse. Dette er for senere å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt.

> *Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?*

5.1 Forklaring som responstype

I Sirkel var det omtrent 50 % av oppgavene som krevde en forklaring, i motsetning til Faktor og på eksamensoppgavene der resultatet var henholdsvis 15,2 % og 5 %. Oppgaver med forventet respons i form av «forklaring» innebærer i de fleste tilfeller at elevene skal formidle hvordan de har løst oppgaven og hvorfor de har valgt å løse oppgaven på en bestemte måte.

Oppgaver med forventet responstype i form av en «forklaring» kan sees i sammenheng med kommunikasjon. Elevene skal kommunisere framgangsmåten og de matematiske tankene sine til en mottaker. Som tidligere nevnt blir det i Kunnskapsløftet lagt vekt på fem grunnleggende ferdigheter. I denne sammenheng vil jeg trekke fram ferdigheten «å kunne regne». «Å kunne regne» innebærer mer enn bare å utføre algoritmer og prosedyrer, det innebærer også at elevene kan begrunne sine valg av metoder, formidle sine arbeidsprosesser og presentere resultatene sine til en mottaker[21]. For å kunne mestre dette vil det være hensiktsmessig å arbeide med oppgaver som krever en form for forklaring av egen tankeprosess, som mange av oppgavene i Sirkel gjør.

Når elevene arbeider med oppgaver som krever «forklaring» er elevene med på å bevisstgjøre den matematikken de arbeider med. Et konstruktivistisk syn på læring, som innebærer at elevene skal være aktive framfor passive i undervisningen kan man se har likhetstrekk med denne responstypen (Jaworski, 2004). Det forventes ofte at elevene knytter sammen begreper de tidligere har lært med en bestemt hendelse eller tilfelle i matematikken. I slike tilfeller må elevene aktivt gå inn for å skape forståelse for det arbeidet de gjør i matematikken.

Dersom elevene har utviklet gode evner til å forklare sine matematiske valg, vil oppgaver som krever mest sannsynlig være med på å utvikle den relasjonelle forståelsen. Dette er evnen elevene har til å vite hva de skal gjøre og hvorfor de tar de valgene de gjør (Skemp, 1976). Ved å bruke skriftlig eller muntlig forklaring kan elevene bli mer bevisste på de matematiske valgene de tar underveis. Som Rittle-Johnsen & Alibali (1999) påpekte, er det vesentlig å huske at de fleste oppgavene ikke kun legger vekt på enten relasjonell eller instrumentell forståelse, men at oppgaver som oftest legger opp til en blanding. Det kan være lurt å huske på at for å ha forståelse i matematikk trengs det både rasjonell forståelse og instrumentell forståelse.

Med tanke på at alle oppgavene jeg har gjennomgått i Faktor er hentet fra nivå 3 og at «forklaring» i mange tilfeller krever mer av elevene enn de andre forventede responstypene, ville jeg trodd at Faktor og eksamensoppgavene hadde flere oppgaver

---

[21] Rammeverk for grunnleggende ferdigheter: http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no

som hadde forventet respons i form av «forklaring» enn det som viste i analysen. Siden det er lav oppslutning av denne typen oppgaver på eksamen er det ikke nødvendigvis en sammenheng med at de elevene som arbeider i Sirkel vil gjøre det bedre på eksamen.

5.2 Problemløsingsoppgaver

Jeg har tidligere nevnt problemløsingsoppgaver i både teori og analyse. Dette er oppgaver som krever engasjement hos elevene, de skal utforske og ønske å finne en løsning og det skal i tillegg være oppgaver der elevene ikke nødvendigvis har den matematikkunnskapen som kreves når de begynner å utforske problemet. Flere av oppgavene jeg har analysert bygger på konseptet problemløsing.

Jeg vil trekker fram en oppgave som jeg brukte i teoridelen for å kommentere rundt dette med problemløsing:

4.132 Lag en likning som ikke har noen løsning.

Figur 41: Eksempel på en problemløsingsoppgave fra Sirkel (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.24).

Oppgaven man kan se i figur 41 er en god problemløsingsoppgave. Grunnen til dette er fordi den forutsetter at elevene skal forstå hva som kreves for at en likning ikke skal ha noen løsning, dette kan være ny kunnskap for flere av elevene. Den kan stimulere til intellektuell nysgjerrighet og er en oppgave der elevene kanskje må overføre begreper og ferdigheter i en ny situasjon. Hadde denne oppgaven blitt gitt til elever isolert sett slik vi ser den ovenfor ville det vært en god problemløsingsoppgave. I lærebøker kan man finne gode oppgaver som bygger på problemløsing, men et gjennomgående problem er at disse oppgavene blir presentert i sammenheng med liknende oppgaver eller rett etter presentasjon av framgangsmåte som kan brukes. Ved å presentere disse oppgavene i en slik sammenheng, vil ikke problemløsingsoppgaven lenger ha samme funksjon. Det gode problemet mister sin problemløsingsfunksjon ved at de står i en sammenheng som gjør at det ikke lenger kan kategoriseres som et problem (Schoenfeld, 1993). Oppgaven som er vist i figur 41 ser vi i den faktiske sammenhengen slik den blir presentert i læreboken i figur 42.

4.131 **a** Løs likningen $(x + 3) - (x + 2) = 0$.

b Forklar hvordan vi kan se at denne likningen ikke har noen løsning.

c Likningen kan også skrives slik: $x + 3 = x + 2$.
Hvordan vil en grafisk løsning se ut?

4.132 Lag en likning som ikke har noen løsning.

Figur 42: Oppgave 4.132 slik den står i boken (Torkilsen & Maugsesten, 2008, s.21).

Figur 42 viser at oppgave 4.131 en oppgave som omhandler en likning som ikke har noen løsning. Man kan anta at elevene vil se på denne oppgaven når de skal løse oppgave 4.132. Oppgave 4.132 mister derfor litt av hensikten og vil ikke nødvendigvis bli sett på som et like godt problem når den kommer etter oppgave 4.131. I min analyse har jeg ikke tatt høyde for rekkefølgen på oppgavene, derfor vil eksempelvis oppgave 4.132 sees på som en problemløsingsoppgave. Selv om rekkefølgen gir at det ikke er en slik oppgave.

Måten problemløsingsoppgaver blir presentert på til elevene kan være avgjørende for om elevene får utbytte av å arbeide med dem. Det kan være hensiktsmessig at læreren tar i bruk inquiry-basert undervisning når han skal skape engasjement og motivere elevene. Det er også viktig å huske at selv om oppgavene er gode isolert sett, kan det være lurt å trekke ut enkelte oppgaver å bruke mer tid på å løse disse. På den måten kan elevene utforske, stille spørsmål, undre og finne løsninger, noe som er hensikten med problemløsingsoppgaver.

5.3 Oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse»

Rett over 50 % av oppgavene i Faktor er oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse». Blant eksamensoppgavene var det 75 % av oppgavene som ble plassert i denne kategorien. Det er rimelig å anta at det er hensiktsmessig å lage oppgaver innenfor denne kategorien på eksamen, da dette er en test for hvor mye elevene kan og har forstått i løpet av hele grunnskolen. Jeg ville trodd at flere av oppgavene i Faktor var mer kognitivt krevende enn det som var det faktiske resultatet av analysen.

Oppgaver av denne typen er i hovedsak det vi gjenkjenner som drilloppgaver. Undervisning i matematikk handler ofte om å presentere et emne eller en prosedyre, for at elevene deretter skal gjøre oppgaver som er av samme type men med andre tall. Oppgavene kan også bygges videre med å gi vanskeligere tall, men med samme prosedyre. Behavioristisk syn på læring kan i noen tilfeller sammenlignes med slike oppgaver. Det er av den grunn at oppgavene inneholder små biter av ny kunnskap, som elevene deretter skal bruke for å løse mange tilnærmet like oppgaver (Orton, 2001).

Oppgaver som har «prosedyrer uten forbindelse», kan sees i sammenheng med prosedyrekunnskap og instrumentell forståelse. Prosedyrekunnskap handler om at elevene skal kunne ta i bruk en «oppskrift» for å komme fram til et svar. Selv om elevene har mulighet til å følge disse prosedyrene er det viktig å merke seg at de ikke nødvendigvis har forståelse for den underliggende matematikken bak disse prosedyrene (Miller & Hudson, 2007). Instrumentell forståelse og prosedyrekunnskap henger sammen. Instrumentell forståelse er «regler uten grunn», altså at elevene kan og bruker en regel (Skemp, 1976). Oppgaver i kategorien «prosedyrer uten forbindelse» krever ikke at elevene forstår hvilken matematikk som ligger bak prosedyrene, det er fokus på at elevene skal komme fram til riktig svar.

Det er 75 % av eksamensoppgavene som krever «prosedyrer uten forbindelse». Man kan derfor anta at eksamensoppgavene har fokus på å sjekke om elevene kan gjennomføre oppgaver som baseres på prosedyrer. Det er rimelig å anta at forfatterne av eksamensoppgavene ser disse prosedyrene som kjent for elevene, og at det derfor skal sjekkes om elevene innehar kunnskapen til å bruke dem.

I Sirkel er det i motsetning 24,5 % av oppgavene som angivelig krever gjengivelse av kjente prosedyrer. Ut i fra lave resultater på eksamen de siste årene, kan det være at elevene skal kunne for mange slike prosedyrer. De elevene som har arbeidet med oppgaver i Sirkel, der flere av oppgavene bygger på problemløsing og inquiry vil derfor ikke ha samme muligheten til å gjøre det bra på eksamen, da dette er en oppgaveform som ikke er like kjent for disse elevene.

5.4 Oppgaver med «prosedyrer med forbindelse» og «å gjøre matematikk»

Sirkel har flest oppgaver innenfor de høyeste nivåene på kognitive krav. Hele 75,5 % av oppgavene jeg har analysert i Sirkel er på de kognitive nivåene «prosedyrer med forbindelse» eller «å gjøre matematikk». Faktor har 47,8 % av oppgavene på høyere kognitivt nivå, mens eksamensoppgavene kun har 25 % av oppgavene på høyere nivå, der ingen av oppgavene krever «å gjøre matematikk».

Oppgaver som kategoriseres på de høyest kognitivt krevende nivåene bærer preg av å være problemløsingsoppgaver, inquiry-baserte oppgaver, ikke-tradisjonelle oppgaver, ikke-rutine oppgaver og oppgaver som krever at elevene knytter sammen både kjente og ukjente begreper. Jeg hadde forventet at de fleste oppgavene som ble valgt ut fra oppgavebøkenes nivå 3 skulle havne i disse kategoriene. Det er fordi Faktor skriver som forklaring på nivå 3 at dette er oppgaver som skal gi elevene en utfordring. Når man ser på resultatet fra de utvalgte eksamensoppgavene, der 25 % av oppgavene ligger i kategorien «oppgaver med prosedyrer med forbindelse» og ingen av oppgavene ligger i kategorien «å gjøre matematikk», viser det at begge oppgavebøkene gir utfordringer utover det som er forventet på eksamen.

Det kan tenkes at Faktor, som har om lag 50 % av oppgavene på høyere kognitivt nivå vil gjøre elevene mer rustet til oppgavetypene de møter på eksamen. Man kan se ut fra resultatene at Faktor legger vekt på oppgaver der elevene skal arbeide med utforskning og problemløsing i tillegg til å arbeide med prosedyrer. Ut i fra resultatene fra analysen på eksamensoppgavene kan det virke som om eksamen vil ha mest fokus på oppgaver med tidligere kjente prosedyrer, og derfor kan elever som arbeider på nivå tre i Faktor kanskje kjenne igjen denne typen oppgaver fra oppgaveboka.

Sirkel har hele 75,5 % av oppgavene på høyere kognitivt nivå. En av fordelene elevene kan ha med dette er at de er bedre rustet til å løse eksamensoppgaver. Elever som jobber kontinuerlig med kognitivt utfordrende oppgaver vil kanskje se på eksamensoppgavene som gjennomførbare i forhold til den type utfordringer de får i oppgaveboken. Oppgaver som krever at elever kan sette sammen kjente og ukjente begreper i flere sammenhenger vil kanskje være overførbare til de kunnskapene som kreves på eksamensoppgaver. Elevene drar nytte av de begrepene de har opparbeidet seg gjennom å bli utfordret når de skal løse eksamensoppgaver. Det kan også være en mulighet at elever som bruker mye tid på problemløsing, ikke har innarbeidet like gode prosedyrer og fremgangsmåter som de elevene som har arbeidet mye med dette.

Ut fra mine resultater, vil Sirkel være det læreverket som gir elevene størst utfordringer. Denne oppgaveboken inneholder flest oppgaver som bygger på problemløsing. Sirkel har også størst fokus på å forvente «forklaring» som respons på fleste oppgavene. Er det likevel slik at oppgaver som bygger på problemløsing alltid vil gi best resultater på eksamen? Ut i fra de oppgavene jeg har analysert på eksamen vil det ikke være slik at eksamensoppgavene bygger i stor grad på problemløsing eller oppgaver som er på kognitivt høyere nivå. Flere av oppgavene hentet fra eksamen ligger i kategorien oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse», det vil altså si at flere av disse oppgavene bygger på tidligere kjente prosedyrer og oppgaver der elevene ikke trenger å utforske i særlig stor grad på egenhånd. Skal man ha eksamen i bakhodet når man underviser kan derfor Faktor være et bra alternativ. I Faktor er det omtrent delt på midten av oppgaver som befinner seg på lavere og høyere kognitive utfordringer. Skal man undervise «for» eksamen, eller for å skape best mulig kunnskaper og ferdigheter i matematikk?

6.0 Avslutning

Denne siste delen av studien min har jeg valgt å kalle avslutning av den grunn at jeg vil fatte en konklusjon på det arbeidet som er gjort, jeg vil også kommentere hvordan man ut fra en læreres perspektiv kan dra nytte av denne studien, før jeg kommer med oppfordringer til videre arbeid. Delkapitlene som hører til denne delen er (6.1) «konklusjon», (6.2) «pedagogiske implikasjoner» og (6.3) «videre arbeid».

6.1 Konklusjon

Gjennom denne oppgaven har jeg forsøkt å finne svar på følgende spørsmål:

> *Hvordan og i hvor stor grad gir læreverk i matematikk på 10.trinn utfordringer til de faglig sterke elevene?*

Ved å gjennomgå flere oppgaver i forbindelse med analysen kom jeg over flere oppgaver som fikk min oppmerksomhet. Dette var spennende oppgaver jeg vil anta utfordrer elevene. Jeg fant ut at oppgaver i emnene funksjoner og likninger byr på særlige utfordringer innen problemløsing og inquiry.

Oppgaver som byr på utfordringer bærer preg av oppgavetekster som vil knytte sammen nye og gamle begreper, altså utvikle elevenes relasjonelle forståelse og begrepskunnskaper. Det er oppgaver der elevene ikke kan finne svaret utelukkende i teksten, men må grave i sin egen matematiske kunnskap for å finne sammenhenger og skape forståelse. Det er også oppgaver der elevene må gjennom flere regneoperasjoner for å komme fram til en løsning.

De fleste oppgavene er preget av mer enn én regneoperasjon. Dette gjelder for både Faktor, Sirkel og eksamensoppgavene. Det som overrasket meg, var at Sirkel har flest oppgaver som krever én regneoperasjon, har flest oppgaver som krever «forklaring» og har flest oppgaver på de høyeste kognitive nivåene. Jeg kan derfor ikke konkludere med at oppgaver som krever flere regneoperasjoner vil være mer kognitivt krevende enn oppgaver som krever én regneoperasjon.

Forventet responstype er en kategori som fikk blandede resultater. Oppgavene i Sirkel er preget av «forklaring», Faktor og eksamensoppgavene har flest oppgaver som forventer «uttrykk». En kan derfor anta at oppgavene i Sirkel krever mest refleksjon og at elevene her må kunne begrunne egne valg av fremgangsmåte i større grad enn i Faktor og eksamensoppgavene. Basert på resultatene i denne studien kan det være en sammenheng mellom forventet responstype og oppgaver som er kognitivt krevende. Man kan se at Sirkel som har flest oppgaver med forventet respons i form at «uttrykk» også har flest oppgaver som er på høyt kognitivt nivå.

Kognitive krav er også en kategori med blandede resultater. Det som er felles for alle verkene jeg har analysert er at ingen har fokus på det laveste kognitive kravet «å memorere». Dette var en positiv overraskelse, fordi på dette nivået krever det ikke at elever tar i bruk prosedyrer eller kobler sammen oppgaven med kunnskap de har lært tidligere. I Faktor og på eksamensoppgavene er det oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» som dominerer, mens i Sirkel er det flest oppgaver med «prosedyrer med forbindelse». «Å gjøre matematikk» var den kategorien jeg synes virket mest spennende å undersøke, og det viser seg at ingen av eksamensoppgavene krever det høyeste kognitive nivået. Igjen er der Sirkel som har flest oppgaver i denne kategorien, med 16,3 %, mens Faktor har 6,5 % av oppgavene i denne kategorien. Jeg ville trodd og håpet at flere oppgaver fra både Faktor og Sirkel ville ligge på dette nivået, siden oppgavene er hentet fra nivå 3. Nivå 3 skal tross alt være oppgaver som er utfordrende for elevene.

Alt i alt, er det Sirkel som byr på flest kognitivt krevende oppgaver. Ser man resultatene fra Faktor opp mot eksamensoppgavene, vil Faktor likevel ligge over kravene som eksamensoppgavene setter. Det er rimelig å anta at dersom man arbeider med oppgaver på nivå 3, både fra Faktor og Sirkel, vil man ha gode forutsetninger for å kunne gjøre det godt på eksamen og vil få utfordringer som er i varierende grad.

6.2 Pedagogiske implikasjoner

Resultatene fra denne studien viser at det er forskjeller i hvor kognitivt krevende oppgavene i ulike læreverk er. Ulike lærebøker har også ulikt fokus på hvilke responstype det forventes mest av. Det er viktig å være bevisst på dette når man skal undervise i matematikk på ungdomsskolen. Valg av lærebøker kan være avgjørende på hvor mange utfordringer de sterkeste elevene i skolen får. Velger man en bok som er mindre kognitivt krevende er det viktig å supplere med oppgaver som gir utfordringer til elever som mestrer kognitivt krevende oppgaver, og velger man en bok som inneholder mange kognitivt krevende oppgaver, er det viktig å supplere med oppgaver som er mindre kognitivt krevende. I følge opplæringsloven §1-3 står det at: «Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen og lærekandidaten»[22]. Denne loven påpeker at alle elever skal ha en opplæring som passer den enkeltes nivå. Derfor er det viktig å være klar over hvilke utfordringer læreboken en gir elevene.

Innen det kognitive nivået oppgaver med «prosedyrer uten forbindelse» er det viktig å være klar over at denne typen oppgaver ikke nødvendigvis skaper forståelse. Disse oppgavene bygger i hovedsak på prosedyrer. Å pugge prosedyrer er ikke nødvendigvis negativt, men det er viktig å være klar over at elevene bør få en balanse mellom prosedyrer for prosedyrenes skyld, og de prosedyrer der elevene vet hvilken matematikk som ligger bak.

Dersom læreren skal ha fokus på problemløsingsoppgaver er det viktig å se i hvilken sammenheng disse oppgavene blir presentert i. Det kan være lurt å trekke ut enkelte oppgaver fra bøkene å gi dem isolert, ikke nødvendigvis slik de blir presentert i bøkene. Det kan være lurt å se på dette fordi flere problemer presentert i lærebøker mister sin hensikt når de står sammen med liknende oppgaver eller prosedyrer.

6.3 Videre arbeid

For å komme i mål med denne studien ble det bestemt noen begrensninger. Den ene er at jeg kun har analysert 2 læreverk. Det finnes mange flere læreverk som blir brukt i norsk skole i dag, og det kan derfor være en mulighet å se på flere for å få en bredere forståelse av hvor kognitivt krevende lærebøker egentlig er. Den andre begrensningen min var innen tema. Rammene for denne oppgaven tillot ikke at jeg kunne analysere hele oppgavebøkene, men måtte velge ut noen tema som jeg ville se nærmere på. Jeg valgte funksjoner og likninger, men om jeg hadde valgt ut hele bøker ville jeg fått et bredere grunnlag til å konkludere på. Dette er derfor noe som kan gjøres for å se om konklusjonene blir annerledes om man analyserer hele bøker framfor utvalgte tema.

[22] Opplæringsloven kan man finne her: https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#KAPITTEL_1

Jeg valgte å lage en modell som bygger på antall regneoperasjoner, forventet responsuttrykk og ulike kognitive nivåer. Det finnes flere måter å analysere oppgaver og lærebøker enn denne som jeg har valgt. Innen forventet responsuttrykk valgte jeg å ha med tallsvar, uttrykk, grafisk tolkning og forklaring. Her kan man se på flere ulike elementer litt avhengig av hvilke tema man velger å undersøke.

Det er også verdt å merke seg at våren 2015 blir det endringer på eksamensformen i matematikk. De nye endringene innebærer obligatorisk bruk av digitale verktøy for alle, og timefordelingen blir annerledes. Nå har elevene inntil 3 timer på del 1, men totalt 5 timer på hele eksamenssettet som er uforandret. Faktor skal også komme med en revidert utgave av Faktor 3. Denne boka skal være klar i august 2015. Det kan være interessant å se på om eksamenskarakterene blir forandret når det kommer obligatorisk bruk av digitale verktøy samt se på hvordan oppgavene i den reviderte utgaven av Faktor blir.

En siste ting som er verdt å merke seg i min analyse er at den baserer seg på min tolkning av intensjonen bak oppgavene. Det er ikke nødvendigvis slik at elevene kommer til å løse oppgavene slik det er forventet at de skal gjøre det. En mulighet man har er derfor å se på elevbesvarelser i sammenheng med analysemodellen for å se om elevene faktisk gjennomfører oppgavene slik det er forventet at de skal gjøre. Det kan også være spennende å finne ut hvor mange av elevene som arbeider på de ulike nivåene i bøkene.

7.0 Kilder

Anderson, L.W., & Krathwohl, D.R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing*. New York: Longman.

Berg, C. V. (2012). Introducing an inquiry-based approach in mathematics teacher education: focus on student teachers' reflections. I B. Grevholm, P.S. Hundeland , K. Juter, K. Kislenko, & P. E. Persson (Eds.), *Nordic research in mathematics education, past, present and future*. Oslo: Cappelen Damm

Bergem, O. K., & Grønmo, L.S. (2009). Undervisning i matematikk. I L.S. Grønmo & T. Onstad (Red.), *Tegn til bedring Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007* (s.113-138). Oslo: Unipub år 2009

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning : the SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. New York: Academic Press

Boaler, J. (1997). *Experiencing School Mathematics, Teaching styles, sex and setting*. Buckingham; Philadelphia: Open University Press.

Brändström, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty*. Sverige: Luleå University of Mathematics

Chapmann, O. (2011). Elementary school teachers´growth in inquiry-based teaching of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 43: 951-963

Collins, A. (1986). Different goals of inquiry teaching. Technical Report No. 6458, Bolt, Beranek and Newman Laboratories, Inc., Cambridge, MA.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring.* Oslo: Abstrakt forlag.

Erlwanger, S.H. (1973). Benny's conception if rules and answers in IPI mathematics. *JCMB,* 1(2), 7-26.

Gulliksen, T., Hashemi, A. M., & Hole, A. (2013). *Matematikk i praksis*. Oslo: Universitetsforlaget.

Hartter, B. J. (2009). A Function or Not a Function? That Is the Question. *The Mathematics Teacher*, 103 (3), 200-205.

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2007). *Faktor 3 Grunnbok*. Oslo: Cappelen Damm AS

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2008). *Faktor 3 Oppgavebok*. Oslo: Cappelen Damm AS

Imsen, G. (2005). *Elevenes Verden Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching, A constructivist Enquiry*. London; Washington D.C: Falmer Press.

Lampert, M.(1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowledge and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63

Lester, F.K. & Lambdin, D.V. (2002). Teaching Mathematics through Problem Solving. I B. Clarke et al. (Eds), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s.189-203). NCM: Göteborg University.

Li, Y. (2000). A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234-241

McCormic, R. (1997). Conceptual and procedural knowledge. *International Journal of Technology and Design Education,* 7, 141-159.

Miller, S.P., & Hudson, P.J.(2007). Using Evidence-Based Practices to Build Mathematics Competence Related to Conceptual, Procedural, and Declarative Knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice,* 22(1), 47-57.

Olson, S., & Loucks-Horsley, S. (2000). *Inquiry and the National Science Education Standards: A Guide for Teaching and Learning*. Washington D.C: National Academic Press.

Orton, A. (2004*). Learning mathematics, Issues, theory and classroom practice 3rd edition.* London: Continuum.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) 33 (5), 158-175.

Rezat, S., & Strässer, R. (2013). Methodologies in Nordic Research on Mathematics Textbooks. I B. Grevholm, P.S. Hundeland, K. Juntner, K, Kislenko & P.-E. Persson (Red.), *Nordic Research in mathematics; past, present and future* (s.469-482). Oslo: Cappelen Damm AS.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M, W. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*, 91 (1), 175-189.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics, 4-15 : Learning from Errors and misconceptions*. Maidenhead: McGraw-Hill/Open University Press

Säljö. R. (2001). *Læring i praksis, Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: J.W Cappelens forlag a.s.

Schoenfeld, A.H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. *Sånn, Ja! Rapport fra en konferanse om matematikkdidaktikk og kvinner i matematiske fag.* (Arbeidsmotat 2/93, s.67-89), Oslo: Norges forskningsråd, Avd. NAVF Sekretariatet for kvinneforskning.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.I D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370. New York: Macmillan.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and conceptual understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Skogen, K., & Idsøe, E., C. (2011). *Våre evnerike barn-en utfordring i skolen*. Kristiansand: Høyskoleforlaget AS.

Smith, M.S, & Stein, M. K.(1998a). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268-275.

Smith, M.S, & Stein, M. K.(1998b). Reflections on Practice: Selecting and Creating mathematical Tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (5), 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2010). *Sirkel 10B Grunnbok*. Ukjent: Aschehoug.

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2008). *Sirkel 10B Oppgavebok*. Ukjent: Aschehoug.

Valverde, G., Bianchi, L.J., Wolfe, R., Schmidt, W.H.,Houang, R.T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy Into Practice Through the World of Textbooks.* Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Wathne, U. (2008). *Barns tilnærming til analogiske og kombinatoriske resonnement- en longitudinell studie av samspill i smågrupper*. Kristiansand: Trykkeriet, Universitetet i Agder.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Sociocultural Practice & Theory of Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4 (4), 609-626

8.0 Vedlegg

8.1 Analyseresultater

Faktor

	A	B	C	D	E	F	G
2	Funksjoner				Likninger og ulikheter		
3	N= 20				N=26		
4	Antall regneoperasjoner	Èn	5		Antall regneoperasjoner	Èn	5
5		Flere	15			Flere	21
6	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1		Forventet responsuttrykk	Tallsvar	3
7		Uttrykk	2			Uttrykk	18
8		Grafisk tolkning	10			Grafisk tolkning	5
9		Forklaring	7			Forklaring	0
10	Kognitive krav	Memorere	0		Kognitive krav	Memorere	0
11		Ingen forbindelse	10			Ingen forbindelse	14
12		Forbindelse	7			Forbindelse	12
13		Gjøre matematikk	3			Gjøre matematikk	0
14							
15							
16							
17	Faktor totalt						
18	N=46						
19	Antall regneoperasjoner	Èn	21,7	10			
20		Flere	78,3	36			
21	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	8,7	4			
22		Uttrykk	43,5	20			
23		Grafisk tolkning	32,6	15			
24		Forklaring	15,2	7			
25	Kognitive krav	Memorere	0	0			
26		Ingen forbindelse	52,2	24			
27		Forbindelse	41,3	19			
28		Gjøre matematikk	6,5	3			

Sirkel

A	B	C	D	E	F	G
Sirkel						
Funksjoner				Likninger		
N=12				N=37		
Antall regneoperasjoner	Èn	4		Antall regneoperasjoner	Èn	14
	Flere	8			Flere	23
Forventet responsuttrykk	Tallsvar	0		Forventet responsuttrykk	Tallsvar	2
	Uttrykk	2			Uttrykk	14
	Grafisk tolkning	3			Grafisk tolkning	4
	Forklaring	7			Forklaring	17
Kognitive krav	Memorere	0		Kognitive krav	Memorere	0
	Ingen forbindelse	3			Ingen forbindelse	9
	Forbindelse	8			Forbindelse	21
	Gjøre matematikk	1			Gjøre matematikk	7
Totalt Sirkel						
N=49						
Antall regneoperasjoner	Èn	36,7	18			
	Flere	63,3	31			
Forventet responsuttrykk	Tallsvar	4,1	2			
	Uttrykk	32,700	16			
	Grafisk tolkning	14,300	7			
	Forklaring	49,000	24			
Kognitive krav	Memorere	0	0			
	Ingen forbindelse	24,500	12			
	Forbindelse	59,200	29			
	Gjøre matematikk	16,300	8			

Eksamner

	A	B	C	D	E	F	G
1	Eksamen						
2							
3	2014				2013		
4	Del 1, n=5				Del 1, n=5		
5	Antall regneoperasjoner	Èn	0		Antall regneoperasjoner	Èn	1
6		Flere	5			Flere	4
7	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	2		Forventet responsuttrykk	Tallsvar	2
8		Uttrykk	2			Uttrykk	2
9		Grafisk tolkning	1			Grafisk tolkning	1
10		Forklaring	0			Forklaring	0
11	Kognitive krav	Memorere	0		Kognitive krav	Memorere	0
12		Ingen forbindelse	5			Ingen forbindelse	5
13		Forbindelse	0			Forbindelse	0
14		Gjøre matematikk	0			Gjøre matematikk	0
15							
16	Del 2, n=3				Del 2, n=3		
17	Antall regneoperasjoner	Èn	0		Antall regneoperasjoner	Èn	0
18		Flere	3			Flere	3
19	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1		Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1
20		Uttrykk	0			Uttrykk	0
21		Grafisk tolkning	1			Grafisk tolkning	2
22		Forklaring	1			Forklaring	0
23	Kognitive krav	Memorere	0		Kognitive krav	Memorere	0
24		Ingen forbindelse	2			Ingen forbindelse	1
25		Forbindelse	1			Forbindelse	2
26		Gjøre matematikk	0			Gjøre matematikk	0
27							
28	Totalt, del 1				Totalt, del 2		
29	Del 1,n=25				Del 2, n=15		
30	Antall regneoperasjoner	Èn	3		Antall regneoperasjoner	Èn	0
31		Flere	22			Flere	15
32	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	7		Forventet responsuttrykk	Tallsvar	6
33		Uttrykk	14			Uttrykk	1
34		Grafisk tolkning	4			Grafisk tolkning	6
35		Forklaring	0			Forklaring	2
36	Kognitive krav	Memorere	0		Kognitive krav	Memorere	0
37		Ingen forbindelse	23			Ingen forbindelse	7
38		Forbindelse	2			Forbindelse	8
39		Gjøre matematikk	0			Gjøre matematikk	0

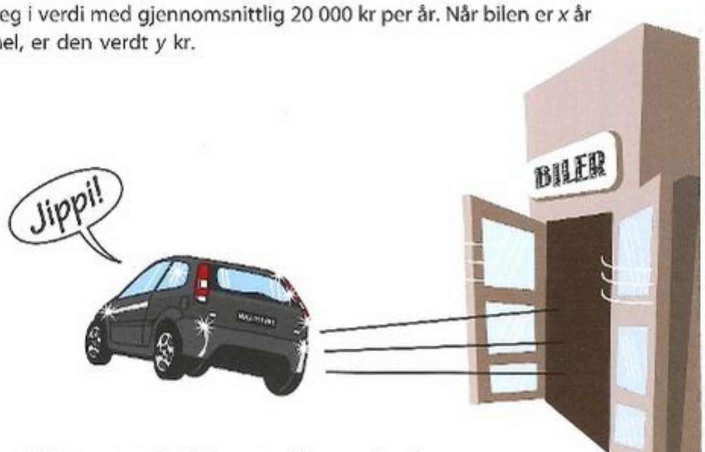
2012			2011			2010		
Del 1, n=5			Del 1, n=5			Del 1, n=5		
Antall regneoperasjoner	Èn	2	Antall regneoperasjoner	Èn	0	Antall regneoperasjoner	Èn	0
	Flere	3		Flere	5		Flere	5
Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1
	Uttrykk	3		Uttrykk	3		Uttrykk	4
	Grafisk tolkning	1		Grafisk tolkning	1		Grafisk tolkning	0
	Forklaring	0		Forklaring	0		Forklaring	0
Kognitive krav	Memorere	0	Kognitive krav	Memorere	0	Kognitive krav	Memorere	0
	Ingen forbindelse	4		Ingen forbindelse	5		Ingen forbindelse	4
	Forbindelse	1		Forbindelse	0		Forbindelse	1
	Gjøre matematikk	0		Gjøre matematikk	0		Gjøre matematikk	0
Del 2, n=3			Del 2, n=3			Del 2, n=3		
Antall regneoperasjoner	Èn	0	Antall regneoperasjoner	Èn	0	Antall regneoperasjoner	Èn	0
	Flere	3		Flere	3		Flere	3
Forventet responsuttrykk	Tallsvar	2	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1	Forventet responsuttrykk	Tallsvar	1
	Uttrykk	0		Uttrykk	1		Uttrykk	0
	Grafisk tolkning	1		Grafisk tolkning	1		Grafisk tolkning	1
	Forklaring	0		Forklaring	0		Forklaring	1
Kognitive krav	Memorere	0	Kognitive krav	Memorere	0	Kognitive krav	Memorere	0
	Ingen forbindelse	2		Ingen forbindelse	1		Ingen forbindelse	1
	Forbindelse	1		Forbindelse	2		Forbindelse	2
	Gjøre matematikk	0		Gjøre matematikk	0		Gjøre matematikk	0
Totalt totalt								
N=40								
Antall regneoperasjoner	Èn	3	0,075					
	Flere	37	0,925					
Forventet responsuttrykk	Tallsvar	13	0,325					
	Uttrykk	15	0,375					
	Grafisk tolkning	10	0,25					
	Forklaring	2	0,05					
Kognitive krav	Memorere	0	0					
	Ingen forbindelse	30	0,75					
	Forbindelse	10	0,25					
	Gjøre matematikk	0	0					

8.2 Faktor 3 oppgavebok

Kategori 3

Funksjoner i dagliglivet

3.301 Faren til Hanna har kjøpt bil til 320 000 kr. Han regner med at den vil tape seg i verdi med gjennomsnittlig 20 000 kr per år. Når bilen er x år gammel, er den verdt y kr.



a) Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hvor mye bilen er verdt etter x år.
b) Framstill funksjonen grafisk.
c) Hvor mange år går det før bilen ikke er verdt noe?

3.302 Vi må betale 25 % merverdiavgift på de fleste varer.
a) Lag en tabell som viser hvor mye vi må betale i merverdiavgift på varer som koster 50 kr, 100 kr, 150 kr, 200 kr, 250 kr og 300 kr ekskl. mva.
b) Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hvor mye vi betaler i merverdiavgift (y kr) når vi kjøper varer for x kr.
c) Framstill funksjonen grafisk.

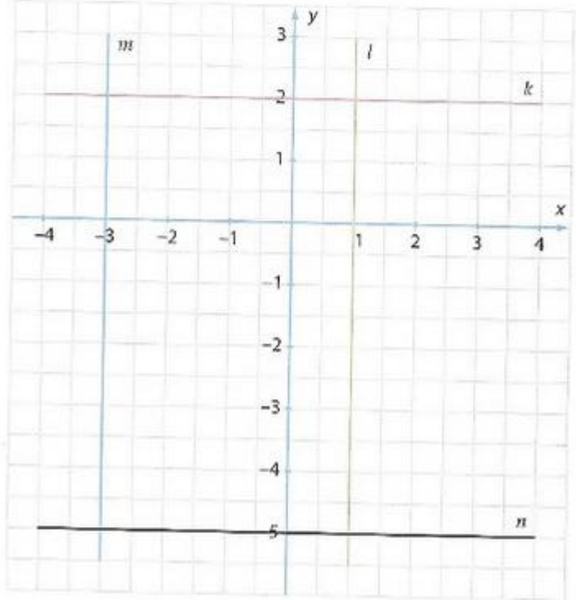
3.303 Lotte og Simen har to forskjellige mobilabonnementer. Lotte betaler 150 kr i fast avgift per måned i tillegg til 0,95 kr per melding. Simen betaler 50 kr i fast avgift per måned i tillegg til 1,20 kr per melding.
a) Sett opp to funksjonsuttrykk som viser de to mobilabonnementene.
b) Framstill funksjonene grafisk.
c) Hvor mange meldinger må de sende for at de begge skal betale det samme?

Lineære funksjoner

3.304 Ei rett linje går gjennom to punkter. Finn likningen for linjene.

a) (0, 3) og (3, 6)
b) (0, 0) og (1, 2)
c) (0, −1) og (−1, −4)
d) (0, −4) og (2, 2)

3.305 Hva er likningen til linjene *k*, *l*, *m* og *n* i koordinatsystemet nedenfor?



3.306 Martin går, og Lotte løper langs den samme veien. Martin starter 10 minutter før Lotte. Han går med en fart på 100 m per minutt, mens Lotte løper med en fart på 250 m per minutt.

a) Tegn to grafer som illustrerer informasjonen ovenfor.
b) Hvor lang tid tar det fra Lotte starter til hun tar igjen Martin?

Funksjoner 3

92

3.307 På RIMO kan Simen kjøpe epler til 18 kr per kg.

a) Sett opp et funksjonsuttrykk der y er prisen i kroner og x er antallet kilogram.

b) Framstill funksjonen grafisk.

c) I Fruktboden kan Simen kjøpe epler til 10 kr per kg, men reiseutgiftene for å hente eplene er 80 kr.
Sett opp et funksjonsuttrykk som viser hva prisen, y kr, blir når han kjøper x kg i Fruktboden.

d) Framstill funksjonen i det samme koordinatsystemet som i oppgave b.

e) Hvor mange kilogram epler må Simen kjøpe i Fruktboden hvis det skal lønne seg?

3.308 a) Hvilken vinkel danner grafene til funksjonene

$$y_1 = 2x + 1 \text{ og } y_2 = -\frac{1}{2}x + 1$$

med hverandre?

b) Multipliser stigningstallene med hverandre.
Hvilken sammenheng finner du?

Grafen til kvadratiske funksjoner

3.309 a) Tegn grafen til funksjonen: $y = -2x^2 + 3$
Hva er

b) y når $x = 1$ c) x når $y = -5$

3.310 a) Tegn grafen til funksjonene i ett koordinatsystem.

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 1 \text{ og } y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$$

b) Hvilken betydning har størrelsen på konstantleddet?

c) Hvilken betydning har det at faktoren foran x^2 er negativ eller positiv?

3.311 a) Tegn grafen til funksjonene

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ og } y = \frac{3}{4}x + 2$$

i det samme koordinatsystemet.

b) Finn koordinatene til skjæringspunktene mellom parabelen og linja.

c) Parallellforskyv linja så den akkurat berører parabelen.
Hva er koordinatene til berøringspunktet?

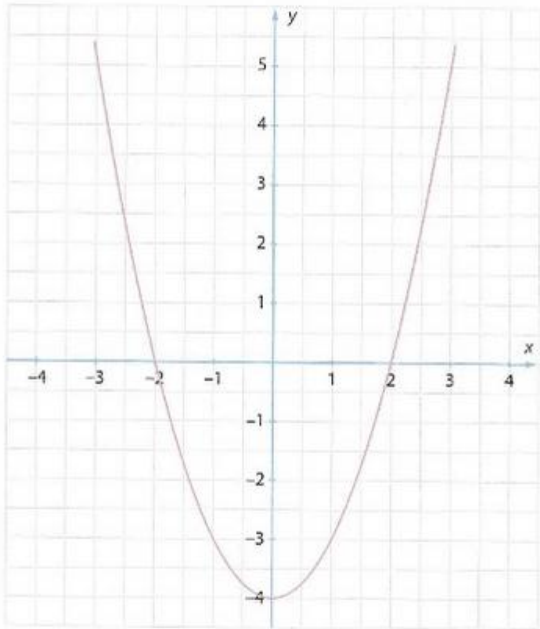
d) Hva blir likningen til den nye linja?

3.312 a) Tegn grafen til funksjonen: $y = \frac{1}{2}x^2$

b) Tegn to linjer i det samme koordinatsystemet. De skal gå gjennom origo, stå vinkelrett på hverandre og danne 45° med aksene.

c) Finn koordinatene til skjæringspunktene mellom parabelen og disse to linjene.

3.313 Grafen til funksjonen $y = x^2 - 4$ ser slik ut:



Hvordan går grafen til funksjonen $y = -x^2 + 4$?

Proporsjonale størrelser

3.314 Sara regner ut hva y er for forskjellige verdier av x i et funksjonsuttrykk. Resultatet setter hun opp i en tabell.

x	1	2	4	8	16	32
y	$\frac{1}{2}$	2	8	32	128	512

a) Er x og y proporsjonale størrelser? Begrunn svaret.
b) Sara setter opp en ny tabell som ser slik ut:

x^2	1	4	16	64	256	1024
y	$\frac{1}{2}$	2	8	32	128	512

Er y proporsjonal med x^2? Begrunn svaret.

c) Sett opp det funksjonsuttrykket som Sara har brukt i oppgave b.

3.315 Butikkeier H. Andel veier opp to ulike typer epler og pakker de ferdig i poser. De to typene epler har forskjellig pris per kilogram.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	G
Vekt i kg	1,25	1,65	3,2	1,5	2,05	1,75	1,9
Pris i kr	15,31	17,74	34,40	18,38	25,11	18,81	20,43

a) Finn ut hvilke poser som inneholder samme type epler.
b) Hva var prisen per kilogram for hver av eplesortene?

3.316 Hvilke påstander er riktige?
A) Renten er proporsjonal med pengene du setter i banken.
B) Tallet på trafikkulykker er proporsjonalt med økningen i antallet biler på veiene.
C) Prestasjoner til eksamen er proporsjonal med den tida du bruker til lekser.
D) Skatten er proporsjonal med inntekten.
E) Brevportoen er proporsjonal med vekten på brev.
F) Prisen du betaler for druer, er proporsjonal med mengden du kjøper.

Omvendt proporsjonale størrelser

3.317 Tegn grafen til funksjonene

$$y = \frac{3}{2x} \text{ og } y = \frac{1}{2x}$$

i det samme koordinatsystemet. Bruk bare positive verdier for x.

3.318 a, b og c er tre positive tall slik at $a < b < c$.

a) Velg tall for a, b og c, og tegn grafen til funksjonene

$$y = \frac{a}{x},\ y = \frac{b}{x} \text{ og } y = \frac{c}{x}$$

i det samme koordinatsystemet.

b) Hvilken betydning for grafen har størrelsen på a, b og c?

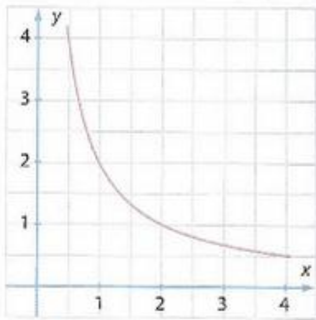
3.319 Sammenhengen mellom tiden t, veilengden s og hastigheten v kan uttrykkes i et funksjonsuttrykk slik:

$$t = \frac{s}{v}$$

a) Forklar hvorfor tiden er omvendt proporsjonal med hastigheten.

b) Framstill funksjonen t grafisk når $s = 300$ km og $v = 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ km/h.

3.320 En hyperbel ser slik ut:



a) Sett opp et funksjonsuttrykk på grunnlag av grafen.

b) Hvorfor kan vi ikke sette $x = 0$?

Funksjoner 3

Kategori 3

Å løse likninger

4.301 Løs likningene.

a) $3(x - 1) = 9 - (x - 1)$

b) $23x - 17 = -2x + 33$

c) $15x - 41 = 30x + 16$

4.302 Løs likningene og sett prøve på svaret.

a) $(x - 4) = 2x - (2x - 7) - 1$

b) $\frac{3x}{2} - 2(x - 1) = \frac{x}{2} - 2$

c) $3(2x + 1) - \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{19}{12}$

d) $2(2x - 3) - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = x(3 - 2x)$

4.303 Løs likningene og sett prøve på svaret.

a) $2\left(\frac{15}{2} - x\right) + 7 = 13 - 9(x + 6)$

b) $\frac{5x}{2} - 4(2 - x) = 3\left(\frac{x}{6} - 1\right) + 1$

c) $2(x - 3) = 3\left(2 - \frac{1}{3}x\right)$

d) $x(2x + 3) + 4 = 2(x + 1)(x - 1)$

Problemløsing og likninger

4.304 Simen, Hanna og Herman arbeider i det samme kjøpesenteret. Simen og Hanna har begge 80 kr per time i lønn. Når de har jobbet 15 timer hver, får de tre utbetalt 3825 kr til sammen.
Hvor stor timelønn har Herman?

4.305 Langviseren til Big Ben er 4,3 m lang.
Hvor mange prosent av urskiva har langviseren gått over i løpet av 12 minutter?

En mann vasker klokkeskiven på Big Ben i London, 1930.

4.306 a) Summen av tre partall som følger etter hverandre, er 102.
Bruk en likning til å finne tallene.
b) Summen av tre oddetall som følger etter hverandre, er 117.
Finn tallene.

4.307 I ei gruppe med 25 elever er gjennomsnittsalderen 15 år. Hvis vi tar med læreren, blir gjennomsnittsalderen 16 år.
Sett opp en likning for å finne ut hvor gammel læreren er.

4.308 Et tall er 5 mer enn et annet tall. Når du multipliserer det største tallet med 4 og det minste tallet med 8, får du det samme produktet.
Sett opp en likning for å finne ut hvilke to tall det er.

Grafisk løsing av likninger

4.309 Løs likningene grafisk.

a) $2x + 1 = -x - 8$

b) $\frac{1}{2}x - 3 = -\frac{3}{2}x + 1$

c) $-2x - 1 = \frac{1}{2}x - 4$

d) $-2x + 5 = -1{,}5x + 8$

4.310 Løs likningene grafisk.

a) $\frac{3}{2}x + 2 = -1{,}5x + 2$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -0{,}5x + \frac{3}{2}$

4.311 Prisen på en genser er 625 kr inkludert 25 % merverdiavgift. Forretningen setter prisen ned med 10 %.
a) Sett opp en likning for å regne ut hvor mange kroner merverdiavgiften utgjør nå.
b) Regn ut hvor mange kroner merverdiavgiften utgjør nå.

4.312 Det renner vann fra to slanger ned i hver sin beholder. I den første beholderen er det fra før 25 liter vann, og det kommer 8 liter vann per minutt fra slangen. I den andre beholderen er det 50 liter vann fra før, og det kommer 3 liter vann per minutt fra slangen.
Sett opp en likning for å finne ut hvor mange minutter det går før det er like mye vann i beholderne.

To likninger med to ukjente

4.313 Løs likningssettene.

a) $x + \frac{y}{2} = 4$

$x - \frac{y}{2} = -2$

b) $2x - 20y = 0$

$-x + 6y = -4$

c) $2x - 3y = 17$

$-\frac{x}{2} + 4y = -1$

d) $4y - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

$-\frac{x}{10} + y = 0$

4.314 Løs likningssettene.

a) $\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 5$

$\frac{3x}{2} + 4y = 15$

b) $y + 3 = x$

$\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{2y}{3}$

c) $x + \frac{y}{2} = 4$

$x - \frac{y}{2} = -2$

d) $4x - y = 0$

$\frac{5x}{2} - 3 = y$

4.315 Oda og Bror er til sammen halvparten så gamle som tante Tonje. For to år siden var Oda dobbelt så gammel som Bror. Tante Tonje er 68 år.
a) Sett opp to likninger ut fra opplysningene ovenfor.
b) Løs likningssettet for å finne ut hvor gamle Oda og Bror er.

4.316 Herman og Sara teller pengene sine. Herman sier: «Hvis jeg får 8 kr av deg, har vi like mye. Men hvis jeg gir deg 2 kr, har du tre ganger så mye som meg.»
Hvor mange kroner har hver av dem?

Likninger og ulikheter 3

4.317 Løs likningssettene grafisk.

a) $y - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ b) $2y - 2x = 4$ c) $y + \frac{1}{2}x + 3 = 0$

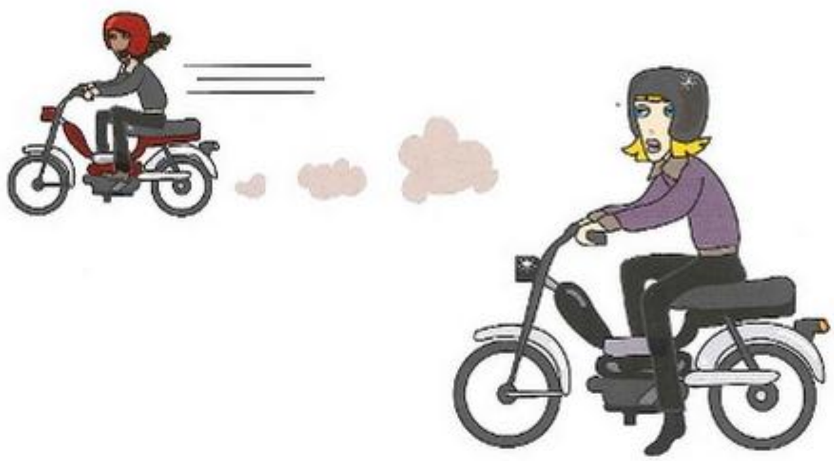
$y - 4 = -2x$ $y = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$ $2y + 3x = 4$

4.318 Løs likningssettene grafisk.

a) $y = -\frac{3}{2}x - 1$ b) $3x + 4y = 5$

$x = 2y + 4$ $x - 3y = 1$

4.319 Sara og Lotte kjører på hver sin moped. Kl. 12.00 er Sara 5 km fra skolen, mens Lotte er 7,5 km fra skolen langs den samme veien. Sara fortsetter med en gjennomsnittshastighet på 30 km/h, og Lotte fortsetter samme veien med en gjennomsnittshastighet på 25 km/h. Etter x timer har de begge kommet y km fra skolen.



a) Sett opp to likninger med to ukjente ut fra opplysningene ovenfor.
b) Løs likningene grafisk.

Ulikheter

4.320 Løs ulikhetene.

a) $5(x - 1) > x + 2(x + 2)$
b) $3 - 2(x - 1) < -3x + 2$
c) $3(2 + 5x) + 21 < 3(x + 1) + 8(-x + 2)$

Likninger og ulikheter 3

4.321 Løs ulikhetene.

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-3}{3} < \frac{3x-1}{4} + \frac{x}{6}$

b) $\frac{7}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x+1) > \frac{5}{6}x + 2$

c) $\frac{7x}{9} - \frac{x-3}{3} > \frac{x}{2} - \frac{2x+2}{6}$

4.322 Løs ulikhetene.

a) $2x - (x-2) > 3x + 5$

b) $x + 3 - 2(3 + 2x) < 5(2 - x)$

c) $3(2x+1) - (5 - x) < 1 - (x - 3)$

4.323 Løs ulikhetene.

a) $\frac{x+4}{3} - 1 < \frac{2x+1}{3}$

b) $\frac{7x+4}{4} > \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{8}$

c) $\frac{x-4}{3} + \frac{7}{6} > \frac{5-2x}{2}$

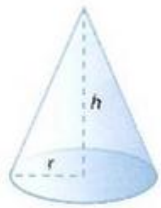
d) $-\frac{x}{2} + 3 < -\frac{3x}{3}$

Omforming av formler

4.324 Formelen for volumet V av en kjegle er

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

der r er radien i grunnflaten og h er høyden i kjeglen.



a) Finn en formel for h uttrykt ved V og r.

b) Regn ut høyden i en kjegle når volumet er 150 cm^3 og radien er 5,0 cm.

4.325 Formelen for arealet A av overflaten av en sylinder er

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

der r er radien i grunnflaten og h er høyden i sylinderen.

a) Finn en formel for h uttrykt ved A og r.

b) Bruk formelen i a til å finne høyden når arealet av overflaten er 200 cm^2 og radien er 5,0 cm.

4.326 Sara må betale 200 kr i fast avgift og 0,49 kr for hver melding hun sender fra mobiltelefonen sin.
Prisen y kr for x meldinger i en måned er da:

$$y = 200 + 0{,}49x$$

a) Finn en formel for x uttrykt ved y.

b) Hvor mange meldinger har hun sendt hvis regningen var på 246,55 kr?

8.3 Sirkel 10B oppgavebok

Sammenhengen mellom graf, tabell og uttrykk

4.117 Tegn grafene og beskriv funksjonsuttrykkene:

a $f(x) = 3x$

b $f(x) = x^2 + 2$

c $f(x) = -2x$

d $f(x) = \frac{6}{x}$

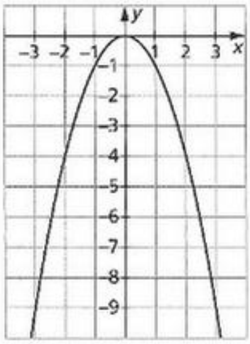
e $f(x) = -x + 2$

f $f(x) = \frac{-6}{x}$

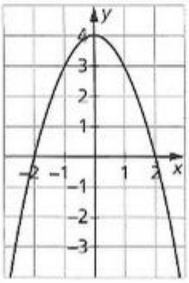
g $f(x) = -x^2 + 1$

4.118 Lag tabeller og funksjonsuttrykk til grafene:

A

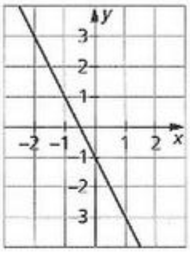


B

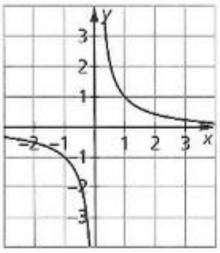


4.119 **a** Beskriv grafene:

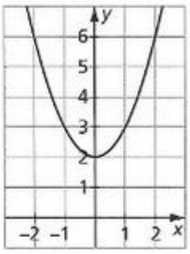
A



B



C



b Lag tabeller og funksjonsuttrykk til grafene.

4.120 Lag tekstoppgaver til funksjonsuttrykkene:

a $f(x) = 16x^2$

b $f(x) = \frac{1000}{x}$

c $f(x) = 12x$

d $f(x) = 6x + 25$

4.121 **a** Finn funksjonsuttrykk og tabell som passer sammen:

A $f(x) = x^2 - 4$

B $f(x) = \frac{-4}{x}$

C $f(x) = -0{,}5x + 2$

b Tegn grafene.

1

x	y
–4	1
–2	2
–1	4
1	–4
2	–2
4	–1

2

x	y
–2	0
–1	–3
0	–4
1	–3
2	0

3

x	y
–2	3
0	2
2	1
4	0

4.122 Finn tekst og funksjonsuttrykk som passer sammen:

A $f(x) = 2x$

B $f(x) = x^2 + 1$

C $f(x) = \frac{9}{x}$

1 Når $x = 0$, har grafen sin minste verdi.

2 Produktet av x- og y-verdiene er konstant.

3 Når x blir dobbelt så stor, blir y fire ganger så stor.

4.123 Lag funksjonsuttrykk til tabellene:

A

x	y
–2	9
–1	3
0	1
1	3
2	9

B

x	y
–2	5
–1	3
0	1
1	–1
2	–3

C

x	y
–5	–3
–3	–5
–1	–15
1	15
3	5
5	3

4.124 **a** Forklar ordene og gi et eksempel på hvert av dem.

b Er en lineær funksjon en proporsjonalitet?

c Er en proporsjonalitet en lineær funksjon?

lineær funksjon
proporsjonalitet
omvendt proporsjonalitet
kvadratfunksjon

Potensfunksjoner

4.125 Et prisme består av en kvadratisk bunn med sidekant s og høyde som er dobbelt så stor som sidekanten.

a Lag et funksjonsuttrykk for volumet til prismet.

b Lag tabell.

c Tegn grafen.

d Hvor stort er volumet når sidekanten er 4,5 cm?

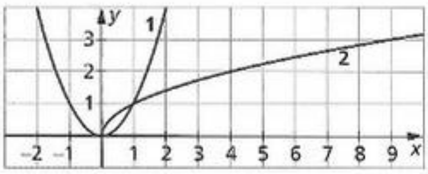
e Hvor stor er sidekanten når volumet er 50 cm^3?

4.126 Her bør du bruke et graftegningsprogram.

a Tegn $f(x) = x^3$ og $f(x) = x^4$.

b Beskriv grafene både for positive og negative verdier av x.

4.127 **a** Hvilke funksjonsuttrykk viser grafene?



b Beskriv grafene.

c Hva viser skjæringspunktet?

4.128 **a** Finn uttrykk og situasjon som passer sammen:

A $y = 100\,000 \cdot 1{,}06^x$ **B** $y = 100\,000 \cdot 0{,}94^x$

1 Et bankinnskudd på 100 000 kr økte med 6 % per år.

2 Verdien til aksjer verdt 100 000 kr minket med 6 % per år.

b Hvor mange år gikk det før bankinnskuddet var dobbelt så stort som aksjeverdien?

Likninger og ulikheter

4.129 Løs likningene og sett prøve:

- **a** $3(x + 2) - 2(x - 1) = 7(x - 2) - 2(3 + x)$
- **b** $7s - 12(4 - 3s) = 5(2s - 3)$
- **c** $(t - 1) + 2(t - 1) = -3(t - 1) - 6$
- **d** $3x - 1 - (2x - 1) = 0$
- **e** $3(n - 1) + 3(n + 3) = -6(n + 1)$
- **f** $(2x + 3) - (x + 1) = 0$

4.130 Løs likningene og sett prøve:

- **a** $(x - 3)(x + 3) = 5$
- **b** $4(x + 2)^2 - 16(x + 1) = 0$
- **c** $x^2 - 5x + 8 - (x + 1)^2 = 10 - 8x$
- **d** $x(x + 3) - (x - 2)^2 = 10$

4.131 **a** Løs likningen $(x + 3) - (x + 2) = 0$.

- **b** Forklar hvordan vi kan se at denne likningen ikke har noen løsning.
- **c** Likningen kan også skrives slik: $x + 3 = x + 2$.
  Hvordan vil en grafisk løsning se ut?

4.132 Lag en likning som ikke har noen løsning.

4.133 Lag en likning som har uendelig mange løsninger.

4.134 Lag en likning som har løsningen $x = -1$.

4.135 **a** Løs likningen $4(x - 1) - 8(x + 1) = -4(x + 3)$.

- **b** Forklar hva svaret betyr.
- **c** Hvordan tror du løsningen til denne likningen vil se ut i et koordinatsystem?

4.136 Lag en likning som har løsningen $x = 3$ eller $x = -3$.

4.137 Lag en tekst til likningen $(a + 3)^2 - (a + 1)^2 = 8$.

4.138 Skriv noen faktasetninger om hvordan du løser likninger.

4.139 Summen av et tall og en åttedel av tallet er 6 mindre enn halvannen ganger tallet.
Finn tallet.

4.140 Løs ulikhetene:

a $5x - 8 + 3x > 10 - x$

b $9 - (6x - 3) < 5x + 8$

c $(x + 1)^2 > 2x + 5$

d $(a - 1)^2 + (a - 3)^2 > (a + 2)^2 + (a + 1)$

4.141 Løs ulikhetene grafisk og ved regning:

a $4x - 3 > 2x + 5$

b $(5x - 2) < (7x + 4)$

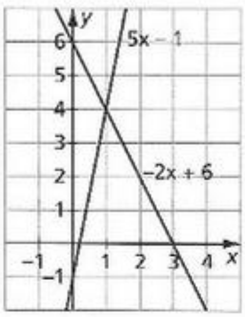
4.142 Skriv noen viktige regler for å løse ulikheter.

4.143 Lag tekst til ulikheten $5x + 35 > 70$.

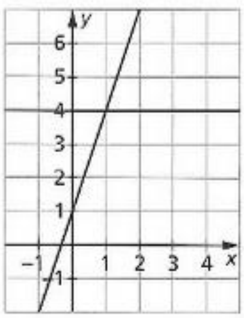
4.144 **a** Lag en ulikhet ut fra grafene på figur **A**.

b Løs ulikheten.

A



B



4.145 **a** Hvilke ulikheter kan vi lage ut fra figur **B**?

b Svar på spørsmålet til læreren.

Likninger med brøk

4.146 Løs likningene og sett prøve:

a $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

b $2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c $\frac{2}{3} - \frac{5}{6n} = -\frac{3}{4n} + \frac{1}{2n}$

d $\frac{x+3}{2} + \frac{x-2}{3} = 5$

e $\frac{2(x-1)}{5} - \frac{x+2}{10} = 4$

f $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{x+3}{3}$

4.147 Lag et forslag til framgangsmåte for å løse likninger med brøk.

4.148 Løs likningene og sett prøve:

a $\frac{2}{x} = \frac{2}{3x} + \frac{4}{3}$

b $\frac{3+x}{x} = \frac{5}{2}$

c $\frac{5}{x+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x+1}$

d $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x-1)$

e $1 + \frac{x}{5} = -\frac{1}{3} + \frac{3x}{5}$

f $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{6}$

4.149 Lag en likning som inneholder brøk og har løsningen $x = 4$.

4.150 Løs likningene og sett prøve:

a $\frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-3} = 4 - \frac{3}{x^2-9}$

b $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-4} = \frac{2}{x+2}$

c $\frac{2}{x-4} + \frac{4}{x^2-16} = 1 + \frac{4}{x-4}$

Likninger med to ukjente

4.151 Løs likningssettene grafisk og ved regning:

a 1 $5x + y = 8$
2 $2x + 3y = 11$

b 1 $4x + 3y = 12$
2 $x + 2y = 8$

c 1 $\frac{2}{3}x + \frac{y}{2} = 3$
2 $2x - y = 1$

d 1 $\frac{x}{4} + 2y = 3$
2 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{5}{3}$

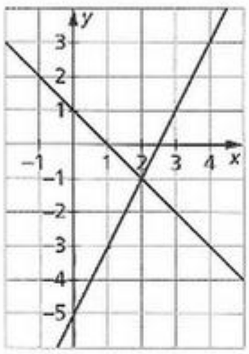
4.152 Velg løsningsmetode og løs likningssettene.
Sett prøve på løsningene:

a 1 $y = 40x$
2 $y = 60x + 40$

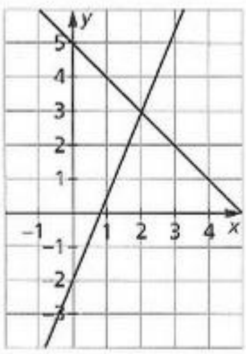
b 1 $4y = 2x - 1$
2 $3x - 2 = 2y + 1$

4.153 Hvilke likningssett viser grafene?
Hva er løsningene?

A



B



4.154 Lag en tekstoppgave til likningssettet:

1 $x + y = 5$
2 $5x - 2y = 4$

4.155 Løs likningssettet:

1 $10^x \cdot 10^y = 10^{18}$
2 $10^x \cdot 10^{-y} = 10^8$

Forklar hvordan du tenker.

4.156 Summen av to tall er 47.
Differensen mellom de samme tallene er 3.
Finn de to tallene.

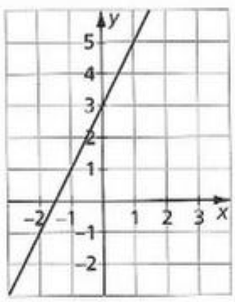
4.157 Til en teaterforestilling var 300 voksenbilletter og 200 barnebilletter til salgs.
Det ble solgt 225 voksenbilletter og 175 barnebilletter for til sammen 33 000 kr.
Resten av billettene var verdt 9000 kr.
Hva var prisen for en voksenbillett og en barnebillett?

4.158 Hanne og Mari er til sammen 72 år.
Aldersforskjellen mellom dem er 27 år.
Hvor gamle er Mari og Hanne?

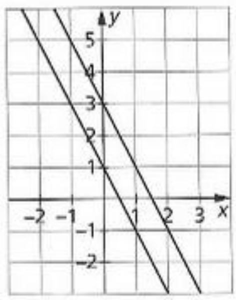
4.159 Lag en oppgave om alderen til en av foreldrene dine og deg selv.

4.160 Emre løste likninger med to ukjente grafisk.
Figurene **A** og **B** viser to av løsningene.
Hvordan kan likningssettene ha vært?

A



B



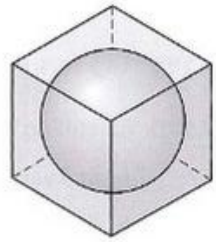
4.161 Harald og Hans er til sammen 87 år.
Harald mangler tre år på å være dobbelt så gammel som Hans.
Hvor gamle er de to?

Likninger, funksjoner og uttrykk

4.162 **a** En pyramide har kvadratisk grunnflate med side lik 5 cm.
Høyden i pyramiden er 8 cm.
Ei kule skal ha samme volum.
Hvor stor radius må kula ha?

b Ei kule skal ha samme overflate som pyramiden.
Hvor stor radius må denne kula ha?

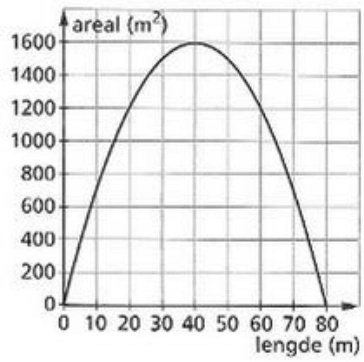
4.163 I en terning med sidekant s er ei kule plassert slik at sideflatene tangerer kula.



a Hvor mange prosent er kulas volum av terningens?

b Får du like mange prosent dersom du regner på overflaten til de to figurene?

4.164 Omkretsen til et rektangelformet område er 160 m.



a Lag et uttrykk for bredden uttrykt ved omkretsen og lengden.

b Lag et uttrykk for arealet til området.

c Forklar hvorfor arealet er en funksjon av lengden.

d Grafen viser sammenhengen mellom lengden og arealet til området.
Beskriv grafen.

4.165 Løs likningene.
Gjør uttrykkene enklere.
Tegn grafene til funksjonsuttrykkene:

a $5t + 8(t - 7) = 6t - 56$

b $f(x) = x^2 - 1$

c $3n^2 + 8 = 2n^2 + 17$

d $(a + b)^2 - (a - 3ab) + 5(a + b)^2$

e $(x - y)^2 + (x + y)^2$

f $y = \frac{12}{x}$

8.4 Eksamensoppgaver

2014

Del 1

Oppgave 3 (1 poeng)

a) Skriv på standardform

$62000 =$ ________________

b) Regn ut

$((-3)^2)^2 - 3^0 =$ __________

Oppgave 5 (1,5 poeng)

Løs likningene

a) $3x = x + 8$

b) $(x+2)^2 = x^2 + 6$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Oppgave 7 (1,5 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\dfrac{6a^3}{2a^2}$

b) $\dfrac{6a-6}{12b^2} : \dfrac{a-1}{4b^3}$

Løs oppgave 7 a) her:

Løs oppgave 7 b) her:

Oppgave 12 (1,5 poeng)

Vi beregner skostørrelse etter denne formelen:

$$\boxed{S = \frac{3F+5}{2}}$$

- S er skostørrelse
- F er fotlengde (cm)

Håkons fot er 25 cm lang.

a) Hvilken skostørrelse bruker han? Svar: ___________

Kathrine bruker skostørrelse 37.

b) Hvor lange er føttene hennes? Svar: ___________ cm

Oppgave 13 (2,5 poeng)

a) Fyll ut det som mangler i verditabellen for funksjonene f og g gitt ved

$f(x) = 2x - 1$

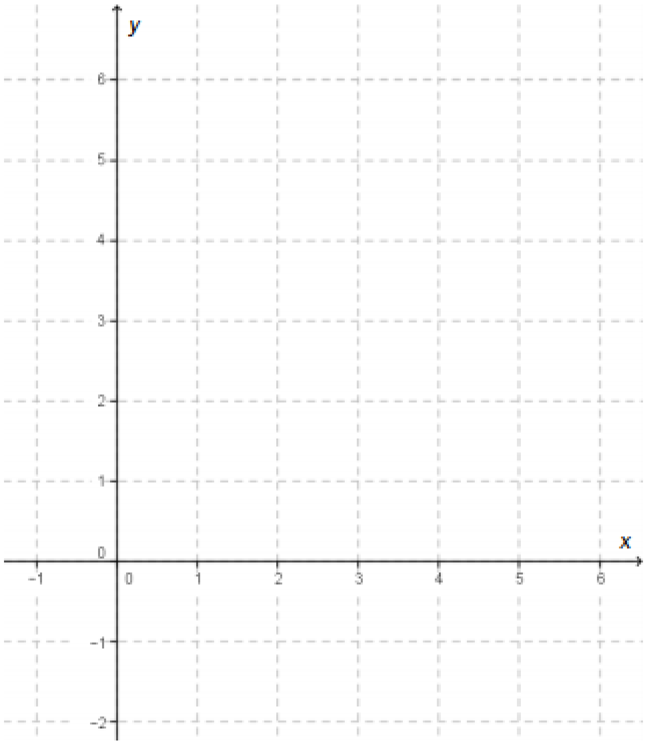
$g(x) = \frac{6}{x}$

x	$f(x)$	Koordinater
0	-1	$(0, -1)$
1		
2	3	
3		

x	$g(x)$	Koordinater
1		$(1, 6)$
2	3	
3		
4		$(4,\ 1{,}5)$
5	1,2	

b) Tegn grafene til f og g i koordinatsystemet nedenfor.

c) Skjæringspunktet mellom grafene til f og g er (___ , ___)



Del 2

Oppgave 1 (4 poeng)

Inngangsbilletter	Enkeltbillett	Klippekort	
Alder	Pris (i kroner)	Pris (i kroner) 10 klipp	Pris (i kroner) 25 klipp
Voksen (fra 16 år)	125	1 150	2 665
Ungdom (10–15 år)	105	910	2 060
Barn (3–9 år)	95	710	1 485
Barn (0–2 år)	50		

Anne (18 år), Eva (15 år) og Charles (14 år) går sammen til Badeland. Alle kjøper enkeltbillett.

a) Hvor mye må Anne, Eva og Charles betale til sammen?

For å spare penger vil Anne kjøpe klippekort.

b) Regn ut hvor mange prosent Anne sparer dersom hun kjøper klippekort (25 klipp) i stedet for 25 enkeltbilletter.

I løpet av et år kjøpte Charles ett klippekort med 25 klipp og ett klippekort med 10 klipp.
I tillegg kjøpte han 12 enkeltbilletter.

c) Regn ut hva Charles betalte i gjennomsnitt hver gang han var i svømmehallen dette året.

Oppgave 3 (6 poeng)

Oppgave 3 skal løses ved hjelp av regneark. Vis hvilke formler du har brukt. Ta utskrift.

I tabellen nedenfor ser du besøkstallet hos Badeland for hver måned i 2013.

Måned	**2013**	**2014**
Januar	12 235	
Februar	12 470	
Mars	13 325	
April	11 313	
Mai	10 582	
Juni	8 790	
Juli	15 781	
August	9 303	
September	9 509	
Oktober	11 779	
November	11 126	
Desember	8 312	
Totalt besøkstall		
Gjennomsnittlig besøkstall per måned		

a) Lag en tilsvarende tabell i et regneark. Regn ut totalt besøkstall for 2013. Regn ut gjennomsnittlig besøkstall per måned for 2013.

b) Framstill besøkstallet for hver måned i 2013 i et linjediagram.

Badeland må spare penger. Derfor skal de holde stengt hver mandag i 2014. De regner med at stengingen vil redusere besøkstallene med 5 % fra 2013 til 2014.

c) Lag en ny kolonne for 2014 med nye besøkstall for hver måned, totalt besøkstall og gjennomsnittlig besøkstall per måned.

Oppgave 5 (6 poeng)

I oppgave 5 kan du spare tid og arbeid ved å bruke en datamaskin med graftegner.

Svømmebassenget i Badeland på 645 000 L skal tømmes for vann. Det tappes ut 18 000 L per time.

a) Forklar at antall liter $V(x)$ som er igjen i svømmebassenget etter x timer, kan beskrives av funksjonen V gitt ved

$$V(x) = -18000x + 645000$$

b) Bestem ved regning når svømmebassenget er tomt for vann.

c) Tegn grafen til V.

d) Bestem grafisk når det er 285 000 L igjen i svømmebassenget.

2013

Del 1

Oppgave 3 (1 poeng)

Regn ut

a) $(4-2)^2+2^3=$ ________ b) $\dfrac{-2^2\cdot(-2)\cdot 2^0}{2^2}=$ ________

Oppgave 5 (1,5 poeng)

Løs likningene

a) $4x-1=3x$ b) $\dfrac{4}{5}(x-1)=1+\dfrac{x}{2}$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Oppgave 9 (1,5 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $a-(a-2a)$

b) $\dfrac{x^2y^2+xy^2}{xy^2}$

Løs oppgave 9 a) her:

Løs oppgave 9 b) her:

Oppgave 13 (0,5 poeng)

En bil kjører med farten 60 km/h. På 2,5 h kjører bilen

54 km	90 km	125 km	150 km
○	○	○	○

Oppgave 14 (2,5 poeng)

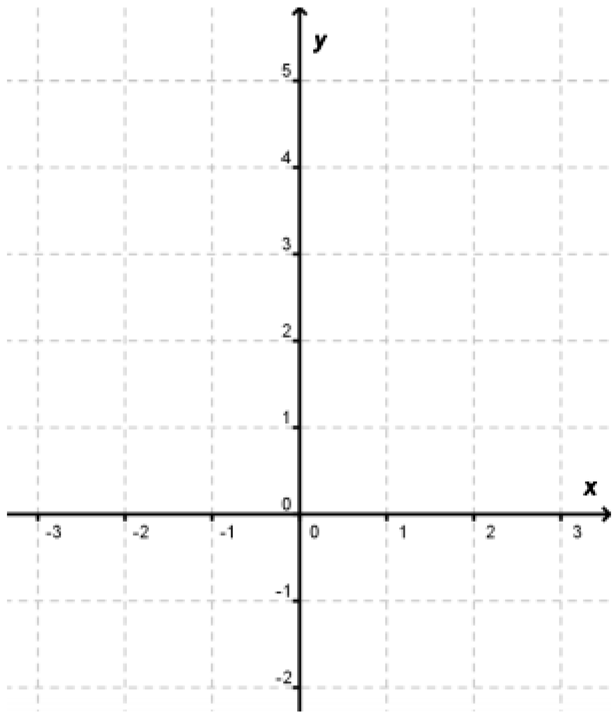
a) Fyll ut det som mangler i verditabellen for funksjonene $f(x)=x+2$ og $g(x)=x^2$

x	$f(x)$	Koordinater
-2		
-1	1	$(-1, 1)$
0	2	$(0, 2)$
1		
2	4	$(2, 4)$

x	$g(x)$	Koordinater
-2		
-1		
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$

b) Tegn grafene til f og g i koordinatsystemet nedenfor.

c) Skjæringspunktene mellom grafene til f og g er $(\_\_\_ , \_\_\_)$ og $(\_\_\_ , \_\_\_)$



Del 2

Oppgave 1 (3 poeng)

Live trenger denne behandlingen hos tannlegen:

Behandlingen til Live
Undersøkelse
Bedøvelse
Røntgen (4 bilder)
3 tannfyllinger

Nedenfor ser du prisene (i kroner) for de ulike behandlingene hos tannlegen. Live får 75 % rabatt fordi hun er mellom 18 og 20 år.

Behandling	Pris
Undersøkelse	480
Bedøvelse	145
Røntgen (per bilde)	95
1 tannfylling	550
2 tannfyllinger	750
3 tannfyllinger	950

Regn ut hvor mye Live må betale totalt for behandlingen hos tannlegen.

Oppgave 5 (7 poeng)

Oppgave 5 skal løses ved hjelp av regneark. Vis hvilke formler du har brukt.

Live skal få satt inn en ny tann. Behandlingen koster 10 000 kroner. Hun får tilbud om et lån som skal nedbetales i løpet av 10 måneder med avdrag på 1 000 kroner per måned. Renten er 2 % per måned. Alle beløp er i kroner.

	A	B	C	D	E
1	**Lån**	**10000**			
2	**Rente per måned**	**2 %**			
3	**Antall måneder**	**10**			
4					
5	**Måned**	**Restlån**	**Avdrag**	**Rentebeløp**	**Terminbeløp**
6	1	10000	1000	200	1200
7	2	9000	1000	180	1180
8	3				
9	4				
10	5				
11	6				
12	7				
13	8				
14	9				
15	10				
16		**Sum**			

a) Bruk formler og lag ferdig nedbetalingsplanen for Live. Ta med formelutskrift.

b) Framstill terminbeløpene for lånet i et stolpediagram.

En annen bank tilbyr Live et lån med en rente på 1,5 % per måned. Lånene er ellers like.

c) Hvor mye sparer Live totalt på å velge dette lånet? Du trenger ikke ta ny formelutskrift.

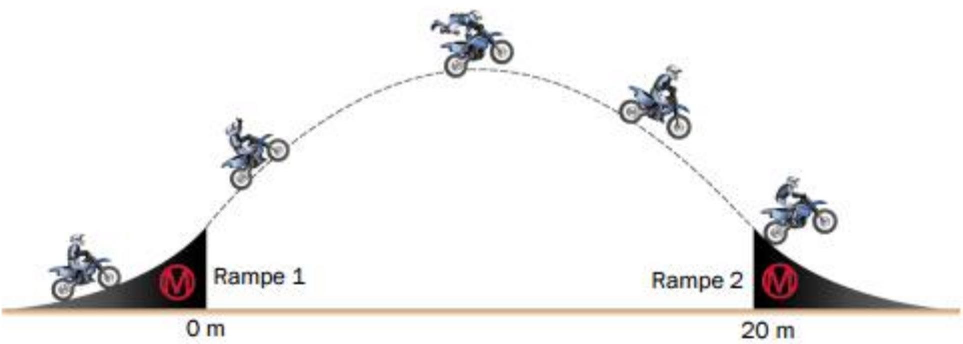
X-Fighters

Oppgave 6 (6 poeng)

I X-Fighters hopper motorsykkelen fra rampe 1 til rampe 2. En forenklet modell som beskriver et slikt hopp, er funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0{,}05x^2 + x + 2$$

Her viser $h(x)$ hvor mange meter motorsykkelen er over bakken når den er x meter fra rampe 1, målt langs bakken. Se skissen av hoppet nedenfor.



a) Motorsykkelen er høyest over bakken 10 m fra rampe 1, altså når $x = 10$.
Bruk funksjonsuttrykket, og vis ved regning at motorsykkelen da er 7 m over bakken.

b) Tegn grafen til h når $0 \le x \le 20$

c) Bestem grafisk hvor langt motorsykkelen har flyttet seg fra rampe 1, målt langs bakken, når motorsykkelen er 4 m over bakken.

2012

Del 1

Oppgave 3 (1 poeng)

Regn ut

a) $3+3(3-2)^2=$ __________

b) $-3^2(-3+2)^2=$ __________

Oppgave 5 (2 poeng)

Løs likningene

a) $9x-13=6x+2$

b) $2(x-1)=1+\dfrac{x}{2}$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Oppgave 9 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $4a-(a+2a)$

b) $\dfrac{x^2y+xy^2}{xy}$

Løs oppgave 9 a) her:

Løs oppgave 9 b) her:

Oppgave 11 (0,5 poeng)

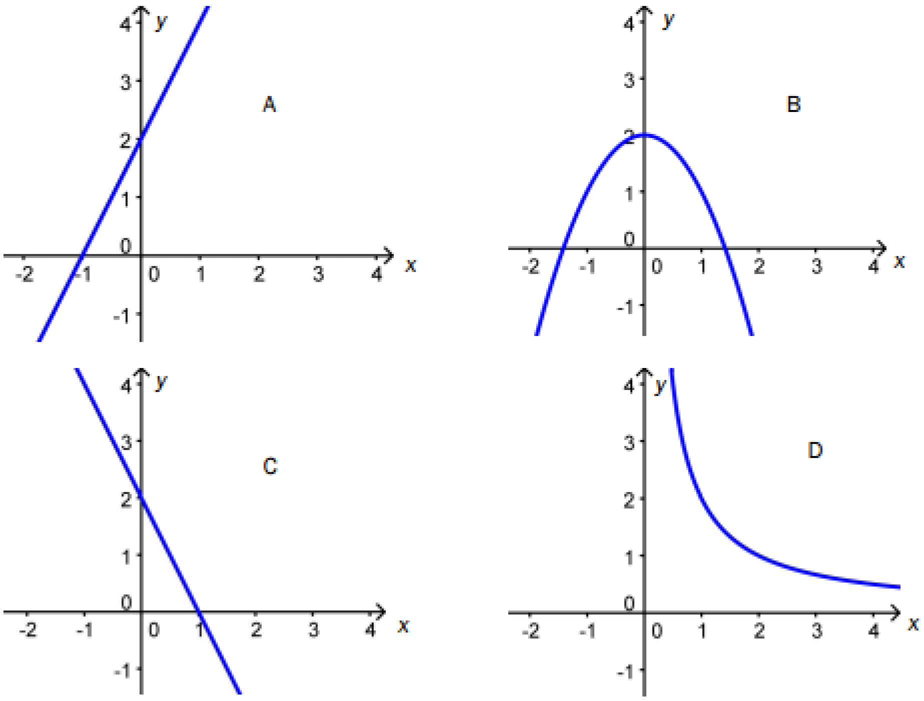
Formelen fra grader fahrenheit $(°F)$ til grader celsius $(°C)$ er $C=\dfrac{F-32}{1,8}$

Formelen fra grader celsius $(°C)$ til grader fahrenheit $(°F)$ blir da

$F=1,8C-32$	$F=\dfrac{C-1,8}{32}$	$F=\dfrac{C-32}{1,8}$	$F=1,8C+32$
○	○	○	○

Oppgave 17 (1 poeng)

Bestem hvilken funksjon nedenfor som passer til hver av grafene A, B, C og D.



$y = -x^2 + 2$ passer til graf ________

$y = 2x + 2$ passer til graf ________

$y = \frac{2}{x}$ passer til graf ________

$y = -2x + 2$ passer til graf ________

Del 2

Oppgave 2 (4 poeng)

Frisøren lager et blekemiddel når kundene skal bleke håret. Blekemiddelet består av 2 deler blonderingspulver og 3 deler vannstoff (hydrogenperoksid).

For én behandling bruker frisøren 40 g blonderingspulver.

a) Regn ut hvor mange gram vannstoff frisøren må tilsette for å få riktig blandingsforhold.

Frisøren har igjen 0,25 kg blonderingspulver og 240 g vannstoff.

b) Hvor mange behandlinger med hårbleking kan frisøren gi?

Oppgave 4 (5 poeng)

**Oppgave 4 skal løses ved hjelp av regneark. Ta utskrifter.
Vis hvilke formler du har brukt. Ta formelutskrift.**

En frisørsalong skal lage et lønnsbudsjett for juni 2012 for sine seks frisører. Alle seks frisører trekkes 36 % i skatt. Alle beløp er i kroner.

	A	B	C	D	E	F
1	**Lønnsbudsjett juni 2012**					
2						
3	**Skattetrekk**	36 %				
4						
5	**Frisør**	**Antall timer**	**Timelønn**	**Månedslønn før skatt**	**Beregnet skatt**	**Månedslønn etter skatt**
6	Maria	78	125,00	9750,00	3510,00	6240,00
7	Mikkel	150	150,00			
8	Vilde	150	200,00			
9	Nikki	150	200,00			
10	Robbie	89	200,00			
11	Kai	60	80,00			
12	**Sum**		XXXXXXXXX			

a) Lag ferdig lønnsbudsjettet til frisørsalongen for juni 2012, og ta en utskrift.

Endre skattetrekket til 38 %, og finn nå ny total månedslønn etter skatt. Ta en ny utskrift.

b) Framstill fordelingen av månedslønn før skatt for den enkelte frisør i et passende diagram.

c) Bestem gjennomsnittlig månedslønn før skatt for de seks frisørene.

Oppgave 5 (5 poeng)

Kilde: Utdanningsdirektoratet

Robbie stabler bokser med hårvoks. Antall bokser i hver etasje er et kvadrattall. For eksempel er det $5^2 = 25$ bokser i første etasje av stabelen på bildet ovenfor.

a) Regn ut totalt antall bokser i stabelen på bildet ovenfor.

For å regne ut totalt antall bokser N med n etasjer i en slik stabel kan vi bruke denne formelen:

$$N = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

b) Bruk denne formelen til å regne ut totalt antall bokser i stabelen på bildet ovenfor.

Robbie har laget en ny stabel med 11 etasjer. Etter noen dager har kundene kjøpt alle boksene i de fem øverste etasjene av stabelen.

c) Regn ut totalt antall bokser som er igjen i denne stabelen.

2011

Del 1

Oppgave 3 (1 poeng)

Regn ut:

a) $3+2\cdot 5+2^3 =$ __________

b) $-3^2\cdot(-3)^2 =$ __________

Oppgave 5 (1,5 poeng)

Løs likningene:

a) $3x-5=19$

b) $4(x+3)=7x+3$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Oppgave 10 (2 poeng)

Løs likningssettet ved regning. Sett prøve på svaret.

$$-2x + y = 7$$
$$y = 5x - 5$$

Løs oppgave 10 her:

Oppgave 13 (1,5 poeng)

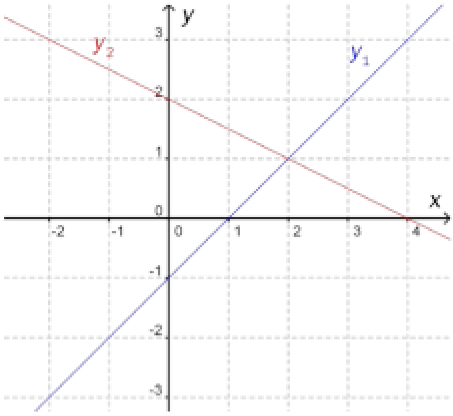
a) Hva er koordinatene til skjæringspunktet til grafene?

Svar: (___ , ___)

b) Skriv funksjonsuttrykket til y_1 og y_2

$y_1 =$ ______________

$y_2 =$ ______________



Oppgave 14 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig:

a) $2(b+4a)-(b+a)$

b) $\dfrac{4a^2-2a}{2a}$

Løs oppgave 14 a) her:

Løs oppgave 14 b) her:

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Kilde: www.foreignaffairsauto.com/images/vectrix-girl.jpg (05.09.2010)

Hanne kjøpte en scooter som kostet 26 990 kroner i 2009. Prisen på scooteren økte med 12 % fra 2009 til 2010.

a) Hva kostet scooteren i 2010?

En dag kjørte Hanne 10 km med scooteren. Gjennomsnittsfarten var 30 km/h.

b) Hvor mange minutter tok turen?

I juni kjørte Hanne 600 km med scooteren. Scooteren brukte ca. 0,2 L bensin per mil.

c) Hvor mange liter bensin brukte scooteren i juni?

Oppgave 3 (3 poeng)

Oppgave 3 skal løses ved hjelp av regneark. Vis hvilke formler du har brukt.

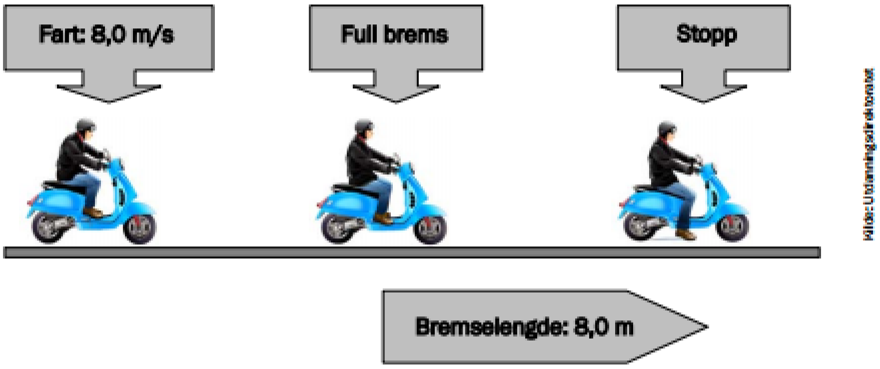
Synne kjøper ny motorsykkel og får et serielån i banken. Lånebeløpet er 200 000 kroner. Hun betaler ned lånet med én termin per år i 10 år. Renten er 8 % per år. Nedenfor ser du begynnelsen på betalingsplanen fra banken.

Fullfør betalingsplanen i et regneark.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (i kroner)	200000			
2	Rente per år	8 %			
3	Antall terminer (år)	10			
4					
5					
6	**Termin**	**Restlån**	**Rentebeløp**	**Avdrag**	**Terminbeløp**
7	1	200000	16000	20000	36000
8	2	180000	14400	20000	34400
9	3	160000			
10	4				
11	5				
12	6				
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17					
18			**Sum rente**	**Sum avdrag**	**Sum innbetalt**

Oppgave 6 (8 poeng)

En scooter blir kjørt med farten 8,0 m/s. Så bremser føreren maksimalt til scooteren står stille.
I løpet av oppbremsingen beveger scooteren seg 8,0 m. Dette kaller vi bremselengden.



Under ellers like forhold gjelder dette om fart og bremselengde:

1) Hvis farten blir dobbelt så stor, blir bremselengden fire ganger så stor.
2) Hvis farten blir tre ganger så stor, blir bremselengden ni ganger så stor.

a) Skriv av tabellen nedenfor. Bruk opplysningene 1) og 2) i ruten ovenfor til å fylle ut de tomme rutene i tabellen.

Fart (m/s)	4,0	8,0	12,0
Bremselengde (m)	2,0		

Vi skriver sammenhengen mellom fart og bremselengde slik:

$$y = k \cdot x^2$$

x: fart (m/s)
y: bremselengde (m)
k: et tall for veiforholdene

b) Sett inn $x = 4{,}0$ og $y = 2{,}0$ i formelen ovenfor, og vis at $k = 0{,}125$

c) Tegn grafen til funksjonen $y = 0{,}125x^2$ for x-verdier fra og med 0 til og med 12.

d) Finn grafisk og ved regning farten på scooteren når bremselengden er 10,0 m

2010

Del 1

Oppgave 3 (1 poeng)

Regn ut:

a) $3^2 + 2(5-4) =$ __________

b) $-1^2 \cdot 3(-2)^3 =$ __________

Oppgave 5 (1,5 poeng)

Løs ligningene:

a) $4x + 7 = 47$

b) $\frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 1$

Løs oppgave 5 a) her:

Løs oppgave 5 b) her:

Oppgave 9 (1,5 poeng)

Løs ligningsettet ved regning:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 3 \\ \text{II} & 2x + 3y = 8 \end{array}$$

Løs oppgave 9 her:

Oppgave 21 (1 poeng)

Faktoriser uttrykkene:

a) $6a + 3b =$ ______________________

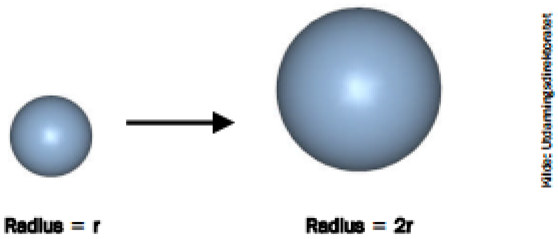
b) $a^2 + 2ab + b^2 =$ ______________________

Oppgave 22 (1 poeng)

Hvor mange ganger større blir volumet av en kule når radien fordobles fra r til $2r$?

Vis med formelregning.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



Løs oppgave 22 her:

Del 2

Oppgave 2 (4 poeng)

Kilde: http://www.gsmdome.com/wp-content/uploads/2009/02/nokia-5800-nam.jpg (18-05-2009)

Med størrelsen på en mobilskjerm mener vi lengden av diagonalen på skjermen, målt i tommer. Se diagonalen **d** på bildet ovenfor.

a) Mobiltelefonen ovenfor er avbildet i målestokk 1:2. Mål diagonalen **d** på bildet og regn ut den virkelige lengden av diagonalen på skjermen. Oppgi lengden i centimeter med én desimal.

b) Gjør om den virkelige lengden av diagonalen fra centimeter til tommer.
1 tomme = 2,54 cm.

Mobiltelefonen på bildet nedenfor har en kvadratisk skjerm. Bildet er forminsket. Diagonalen på denne skjermen er 2,5 tommer.

Kilde: www.unwiredview.com/wp-content/uploads/2007/09/samsung-sgh-i780blackjack-2.jpg (18-05-2009)

c) Finn arealet av skjermen. Oppgi svaret i cm^2.

Oppgave 3 (9 poeng)

PRISOVERSIKT FOR MOBILABONNEMENT

PRISER *	Snakkis	Talkis	Pratis
Pris per måned (kroner)	49	139	229
Pris per ringeminutt (kroner)	0,99	0,29	0 **

* Vi ser bort fra oppstartspris på samtalene i denne oppgaven.

** Gjelder inntil 500 ringeminutter i måneden.

Nikolai har ett av de tre abonnementene ovenfor. Han betaler 49 kroner per måned og 0,99 kroner per ringeminutt.

a) Hvilket abonnementet har Nikolai?

b) x er antall ringeminutter per måned, og y er samlet kostnad per måned målt i kroner.

1) Forklar at funksjonsuttrykket for samlet kostnad per måned til Snakkis-abonnementet er

$$y = 0{,}99x + 49$$

2) Sett opp funksjonsuttrykket for samlet kostnad per måned til Talkis-abonnementet.

c) Tegn grafene til de to funksjonsuttrykkene i oppgave b) i samme koordinatsystem.

d) Hvor mange ringeminutter må Nikolai ha hver måned for at det skal lønne seg å bytte abonnement fra Snakkis til Talkis?

e) Alexandra har et Pratis-abonnement. Det betyr at jo mer Alexandra ringer, jo lavere blir samlet kostnad per ringeminutt.

Skriv av tabellen nedenfor og fyll inn det som mangler.

Antall ringeminutter per måned	10	50	150	250	350	500
Samlet kostnad per ringeminutt	22,90					0,46

f) Hvor mange ringeminutter må Alexandra ha i løpet av en måned for at samlet kostnad per ringeminutt skal bli 0,79 kroner?

Oppgave 4 (6 poeng)

Oppgave 4 a), b) og c) skal løses ved hjelp av regneark. Vis hvilke formler du har brukt.

Kilde: Utdanningsdirektoratet. Brukt etter tillatelse.

Hver av de tre vennene June, Christoffer og Hanna har et mobilabonnement. Christoffer har disse ringeminuttene fra januar til juni:

Måned	Januar	Februar	Mars	April	Mai	Juni
Ringeminutter	254,5	220,9	208,3	204,7	205,4	223,2

a) Lag et passende diagram over Christoffers ringeminutter fra januar til juni.

b) Hvor mange ringeminutter har Christoffer i gjennomsnitt per måned fra januar til juni?

June har i gjennomsnitt 281,2 ringeminutter per måned, mens Hanna har i gjennomsnitt 124,5 ringeminutter per måned. Se tabellen nedenfor.

Navn	Ringeminutter i gjennomsnitt per måned	Samlet kostnad (kroner)		
		Snakkis	Talkis	Pratis
Christoffer				229,00
June	281,2			229,00
Hanna	124,5			229,00

c) Lag tabellen ovenfor i et regneark. Sett inn svaret fra oppgave 4 b) i tabellen. Bruk opplysningene fra oppgave 3 og regn ut hva abonnementene Snakkis og Talkis vil koste for hver av de tre vennene. Vis hvilke formler du har brukt i regnearket.

d) I dag har Christoffer abonnementet Talkis, June har abonnementet Snakkis, og Hanna har abonnementet Pratis.

Kan noen av vennene spare penger på å skifte abonnement?