UNIVERSITETET I AGDER

En meningsfull tilnærming til logaritmer

En designstudie om introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon

Børge Espedal

Veileder

Pauline Vos

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2015

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematikk

Forord

Arbeidet med denne oppgaven har vært krevende, men lærerikt. Det har fått meg til å reflektere nøye didaktisk over elevenes problemer ved innlæringen av logaritmer. Jeg er spesielt fornøyd med at emnet masteroppgaven handler om er praksisnært til det jeg daglig jobber med. Mange har vært involvert i prosjektet og noen av disse fortjener en spesiell takk.

Takk til min arbeidsgiver, Vest-Agder Fylkeskommune, som de to siste årene har godkjent at jeg har deltatt i videreutdanningsprogrammet og dermed fått redusert undervisning i sluttperioden av disse studiene.

Takk til kollegaene mine som har bidratt ved å komme med konstruktiv kritikk av og utprøve undervisningsmateriellet, dele prøvebesvarelser og bruke tid til å la seg intervjue. Jeg er også takknemlig for alle elevene som uten å nøle har sagt seg villig til å delta i prosjektet fra pilotprosjekt til fullskala-klasser.

Takk til professor Pauline som introduserte meg for ideen om å forfølge dette emnet. Hun har møtt meg med et smil og oppmuntrende kommentarer selv når arbeidet mitt ikke har vært så godt som det burde ha vært. Jeg er takknemlig for tydelige og presise tilbakemeldinger i arbeidet med å veilede meg i skriveprosessen.

Spesielt vil jeg takke til min kone og mine barn som har vært tålmodige og gitt meg muligheten til å arbeide med studier, hvorav mange av tidspunktene burde vært brukt på familieliv.

Sammendrag

Denne studien handler om å finne en mer effektiv metode for å introdusere logaritmer. Som en del av studien har jeg utviklet et undervisningsmateriell. Definisjonen av logaritmer i det nye læremateriellet baserer seg på repetert divisjon på samme måte som potenser kan oppfattes som repetert multiplikasjon.

Jeg har følgende forskningsspørsmål:

1) Hva er karakteristisk for en effektiv metode for innlæring av logaritmer med tanke på begrepsforståelse?
2) Er metoden hvor elever blir introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon bedre enn introduksjon gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?

Litteraturdelen fokuserer først på norske læreverks tilnærming til logaritmer. Deretter behandles logaritmer som del av algebraen. Spesielt behandles litteratur om elevers tendens til å produsere ugyldige algebraiske transformasjoner, såkalte «visually salient rules» (Sleeman, 1986). Denne typen feil og andre typer feil elever begår i regning med logaritme, blir også beskrevet. Kilpatricks «intertwined strands of mathematics» (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) blir brukt som basis for begrepet «begrepsforståelse». Dessuten brukes Anna Sfards beskrivelse av matematiske begrepers *prosess-objekt*-dualitet (Sfard, 1991). Til sammen utgjør dette mitt teoretiske rammeverk.

Masteroppgaven er et resultat av «mixed-methods»-forskning hvor jeg designet, utviklet og implementerte en intervensjon i logaritmeundervisningen ved en videregående skole. Det ble brukt intervju, observasjon, feltnotater, lydopptak og tester (inkludert «retention»-test tre måneder senere) for å evaluere intervensjonen.

Funnene mine peker i retning av at repetert divisjon er lettere å forholde seg til enn den tradisjonelle tilnærmingen, spesielt for de svakere elevene. Den prosess-orienterte tilnærmingen ser ut til å fortone seg mer meningsfull slik at elevene lett kan gjengi innholdet i definisjonen selv etter et stykke tid. Elevene klarer lettere å svare på hvorfor $lg1=0$ og $lg10=1$. Elevene må ikke memorere reglene som separate fakta (som regler uten grunn). I stedet kan de alltid rekonstruere denne kunnskapen ved hjelp av metoden med repetert divisjon. Dette reduserer mengde fakta som må memoreres. Disse karakteristikkene ser ut til å være viktige egenskaper for en effektiv metode for innlæringen av logaritmer. Induktive oppgaver ble brukt i eksperimentelle materiellet. Denne typen oppgaver viste seg utilstrekkelig for å bygge bro mellom repetert divisjon og logaritmereglene. «Visually salient rules» var å finne blant elevene som brukte dette materiellet, på lik linje med funnene fra elever i kontrollgruppen. Funnene spriker om effekten av applikasjon av logaritmer i læremateriellet. Studien min viser at elever som har brukt det nye undervisningsopplegget skårer signifikant bedre på likningen lg(2x+3)=1 enn kontrollgruppen etter 7 uker. Den nye tilnærmingen sammen med «Cover-up»-metoden ser ut til å ha spilt en avgjørende rolle i dette testresultatet. Ellers fant jeg ingen signifikante forskjeller i testskåre.

Summary

This study is about finding a more effective method of introducing logarithms. As part of my study, I developed a new teaching material. The definition of logarithms in the new material is based on repeated division in the same way powers can be viewed as repeated multiplication.

I have formulated the following research questions:

1) What are the characteristics of an effective method of teaching logarithms with regard to conceptual understanding?
2) Is the method where students are being introduced to logarithms through repeated division better than through the definition the Norwegian teaching materials to the greatest extent use?

First, my literature review focuses on the approach Norwegian teaching materials use to introduce logarithms. A view of logarithms as part of algebra is then presented. In particular, I present literature describing student's tendency to produce invalid algebraic transformations, so-called "visually salient rules" (Sleeman, 1986). These errors and other kinds of errors students make in logarithms are also described. Kilpatrick "intertwined strands of Mathematics" (Kilpatrick, 2001) is used to describe the term "conceptual understanding". In addition, Anna Sfard's description of mathematical concepts through the *process-object duality* (Sfard, 1991) is used. Together this constitutes my theoretical framework.

As part of my Master's thesis, I carried out a mixed-methods research, in which I designed, developed, and implemented an intervention on the teaching of logarithms in a Norwegian high school. I used interviews, observations, field notes, audio-recordings and tests (including a retention test three months later) to describe and evaluate the intervention.

My findings indicate that repeated division is easier for students to relate to than the traditional approach, especially when it comes to the weaker students. The process-orientated approach seems to give logarithms more meaning, which makes it easier for them to reproduce the content of the definition. Students are better able to answer why $\lg 1 = 0$ and $\lg 10 = 1$. Students don't have to memorize the rules as separate facts (as rules without reason). Instead, they can always reconstruct this knowledge using the repeated division-method. This reduces the amount of facts which must be memorized. These characteristics seem to be important features of an effective method of teaching logarithms. Inductive tasks were used in the experimental material. These tasks proved insufficient to bridge the gap between repeated division and logarithmic rules. "Visually salient rules" were found among students using the new materiel, in the same way they were found among students in the control group. The findings diverge about the effect of application of logarithms in the material. My study shows that students who were subject to the teaching approach score significantly better when asked to solve the equation $\lg(2x + 3) = 1$ than the control group after 7 weeks. The new approach combined with the "cover-up"-method appears to have played a crucial role in this test result. Otherwise, I found no significant differences in test scores.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studiet

Som lærer søker man hele tiden etter nye måter å legge opp undervisningen på for å oppnå optimalt læringsutbytte. Med 17 års erfaring som lærer og sensor i videregående skole har jeg opplevd svært mange elever, både egne og andres, som viser tydelige tegn på at logaritmebegrepet ikke er forstått. Erfaringene er fra flere situasjoner, alt fra uformelle muntlige samtaler til formelle skriftlige eksamener. Problemet finner man blant elever på kurs av både høyeste og laveste vanskelighetsgrad i videregående skole.

Samtidig leser vi at den norske skolen skårer dårligere på internasjonale tester i matematikk (PISA-undersøkelsen og TIMSS) enn de land vi ønsker å sammenligne oss med. Resultatene av fra TIMSS Advanced-undersøkelsen fra 2008 er analysert og publisert under den dekkende tittelen «Matematikk i motvind». Denne rapporten beskriver ikke bare at « norske elever har hatt en klar og signifikant tilbakegang fra1998 til 2008» (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010, pp 17). Rapporten viser at Norge har svært få elever på «avansert» og «høyt» nivå. For å nå de høyeste nivåene beskrevet i rapporten må blant annet eleven henholdsvis «vise begrepsforståelse» og «løse logaritmiske likninger», og «bruke sin kjennskap til matematiske begreper og prosedyrer i algebra, kalkulus, geometri og trigonometri for å analysere og løse både rutinepregede og ikke-rutinepregede flertrinnsoppgaver» og «analysere en foreslått løsning av en enkel logaritmelikning» (Grønmo et al., 2010, pp 17). Ettersom Norge kun har 1 % på avansert nivå og cirka 10 % på avansert og høyt nivå til sammen, blir inntrykket jeg har fra egen erfaring bekreftet.

Som en liten test i forkant av studiet mitt, samlet jeg i skoleåret 2013/2014 to sett med data fra to klasser på vg1-nivå ved skolen jeg jobber. Det første datasettet ble hentet fra besvarelsene til de oppgavene som var knyttet til logaritmeregning gitt til en heldagsprøve i matematikk 9. desember 2013. Det andre datasettet ble samlet inn 11 uker senere. Da ble de samme elevene gitt oppgaver som var en kopi av oppgavene gitt til første datainnsamling. På den måten forsøkte jeg å få et innblikk i hvor mye av kunnskapene som ble sittende igjen i minnet til disse elevene.

Dataene fra vår skole i dette skoleåret viser at også våre lærere har problemer med å nå elevene når det gjelder dette emnet, selv på elementært nivå. Av $n = 42$ elever var det kun 5 som klarte å forenkle uttrykket $\frac{lg4+lg9}{2+lg1}$ matematisk riktig, hvorav kun 1 gjorde dette perfekt. I

14 av feilsvarende går det tydelig fram at elevene tror at $lg4 + lg9$ er identisk med $lg13$ etter tankegangen $lga + lgb = \lg(a + b)$. Dataene viste også at elevenes evne til å holde kunnskapen i minnet over tid var foruroligende. Antallet som viser at de forstår at lg1 = 0 avtok fra 29% til 19% etter to måneder når den nøyaktig samme oppgaven ble gitt på ny. Dette gav seg også utslag i at tallet på elever som klarte å løse likningen $\lg(2\mathrm{x} + 3) = 1$ falt fra 38 % til 16 % i løpet av samme periode.

Gjennom utdanningsdirektoratets videreutdanningsprogram «Kompetanse for kvalitet» har jeg fått anledning til å bli delvis frikjøpt fra undervisningssituasjonen for å skrive en masteroppgave i matematikk didaktikk ved UiA. Jeg ønsket å fordype meg i et emne som er nært knyttet til min arbeidssituasjon. I samtale med veilederen min, Pauline Vos, kom samtalen inn på emnet logaritmer via en presentasjon hun hadde hatt om emnet (Vos, 2013). Hun skissert en ny innfallsvinkel til emnet. Jeg tente på ideen. Denne oppgaven er et resultat av dette møtet, og jeg håper å bidra til å øke forståelsen for hvordan logaritmer bedre kan undervises.

1.2 Målet med studien

Målet med studien er på overordnet plan å gjøre matematikkundervisningen når det gjelder logaritmer bedre. Mer spesifikt ønsker jeg å utvikle undervisning som bedre fremmer begrepsforståelsen hos elevene. Dette håper jeg både skal føre til at elevene bedre beholder kunnskapen over tid og at antall typiske feil av typen $\lg(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \mathrm{lga} + \mathrm{lgb}$ reduseres.

De norske læremidler som er mest i bruk, bruker følgende måte å definere logaritmer: *«Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet»* (NDLA, 2014). Umiddelbart etter gis definisjonen med symboler $10^{lga} = a$.

Denne definisjonen baserer seg på at logaritmefunksjoner og eksponentialfunksjoner er inverse funksjoner. Jeg ønsket å undersøke om elevene viser tegn til bedre begrepsforståelse av logaritmer ved å introdusere logaritmer ved en definisjon som baserer seg på repetert divisjon. Undervisningen som baserer seg på repetert divisjon bruker følgende definisjonen: *«Vi teller antall ganger vi må dividere et tall a med 10 før vi når tallet 1. Dette antallet kaller vi logaritmen til a og skrives lg a»*. Denne undervisningen introduserer ikke definisjonen med symboler. Hvis man imidlertid velger å formulere denne definisjonen med symboler, ville det blitt

$$\frac{a}{10^{\lg a}} = 1$$

Venstre side av likhetstegnet kan tolkes slik: «du starter med *a* og dividerer gjentatte ganger med 10 inntil kvotienten er lik høyre side: 1. Antall ganger du måtte dividere med 10 er: lg a.» Dermed er det åpenbart at den nye definisjonen og den tradisjonelle er likeverdige med hensyn til innhold. Samtidig ser vi at logaritmer kan oppfattes som repetert divisjon på samme måte som potenser kan oppfattes som repetert multiplikasjon.

2 Gjennomgang av litteratur

2.1 Introduksjonen av logaritmer i norske skole

Logaritmer i norsk skole blir introdusert for elever i videregående skole på vg1 eller vg2, avhengig av hvilket matematikk-kurs eleven velger (matematikk 1T eller S1). På det tidspunktet mine datainnsamlinger vil bli gjennomført, er målet for opplæringen i begge kurs i følge læreplanen at eleven skal kunne « regne med logaritmer og bruke dem til å forenkle uttrykk» og «løse eksponentiallikninger og logaritmelikninger» (Utdanningsdirektoratet, 2014).

Man kan se at læreplanen i norsk skole knyttet til logaritmer i norsk skole, har de sterk fokus på det regnetekniske («computational skill»), og i liten grad vektlegger begrepsforståelsen («conceptual understanding»).

NDLAs definisjon på den briggske logaritmen er: «Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet» (NDLA, 2014). Når man ser til de andre norske læremidlene som anvendes i størst grad, bruker også de en definisjon som på linje med denne definisjonen (Heir, 2006; Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2009; Sandvold, Skrindo, Thorstensen, Thorstensen, & Pettersen, 2006). Ikke bare brukes denne definisjonen, men hele den pedagogiske presentasjonen i de dominerende læreverkene tar utgangspunkt og bygger på denne definisjonen. Lærere rundt om har selvsagt mulighet til å introdusere logaritmer langs andre alternative baner. Man kan eksempelvis ta utgangspunktet i bruksperspektivet eller et historisk perspektiv. Likevel vil undervisningsmateriellet i det minste i en viss grad fungere som pedagogisk rammefaktor i følge didaktisk relasjonstenkning (Bjørndal, 1978).

2.2 Logaritmer som del av algebra

Tilgangen til lett tilgjengelig forskning relatert til elevers problemer med logaritmer er svært begrenset. Hvis man imidlertid velger å se på logaritmer som en del av algebraen, er det mange forskningsartikler som beskriver elevers problemer med elementær algebra (Banerjee & Subramaniam, 2012; Booth, 1988; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Lannin, Barker, & Townsend, 2006). En slik tilnærming kan forsvares hvis man betrakter algebra fra perspektivene: generalisert aritmetikk, studie av prosedyrer, relasjon mellom størrelser og studie av strukturer (Usiskin, 1988). Jeg vil beskrive tre av disse som jeg mener har betydning for min studie.

I. Algebra kan betraktes som generalisert aritmetikk i den forstand at 3 + 5 = 5 + 3 kan generaliseres til a + b = b + a. Tilsvarende kan man innen logaritmer generalisere fra $\lg 15 = \lg 3 + \lg 5$ til $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$. I denne sammenhengen betraktes de variable som symbolske plassholdere for et vilkårlig tall.

II. Når Usiskin beskriver algebra som studie av prosedyrer, betraktes de variable som ukjente. Elever møter imidlertid sjelden på problemer hvor det er nødvendig å omsette en tekstoppgave til en likning som involverer logaritmer på denne måten. På den annen side, kan en oversettelse i motsatt retning være aktuell når man for eksempel skal forklare innholdet i likningen $\log(x+3) = 2$. Denne oversettelsen vil ende i likningen $x + 3 = 10^2$ som igjen kan løses prosedyremessig. For at eleven skal mestre denne omformingen over tid og ikke føles som meningsløs, er det en klar fordel hvis logaritmebegrepet er forstått.

III. Elever i norsk skole blir i introduksjonsfasen av logaritmer bedt om å forenkle uttrykk av typen $lg(a^2) + \lg(2a) - lg2$. Oppgaver av denne typen representerer ikke et mønster som skal bli generalisert og heller ikke en likning hvor *a* representerer en ukjent som skal finnes. Variabelen *a* representerer kun et vilkårlig objekt som skal manipuleres etter logisk utledede regler for logaritmer. På den måten kan mange av resultatene fra forskning knyttet til elevers problemer med algebra være relevant også i sammenheng med innlæring av logaritmer. Derfor bør man ikke undervurdere rollen algebra spiller i denne innlæringen og funn fra forskning knyttet til elevers vansker med algebra kan derfor være relevant for introduksjonen logaritmer.

Mange elever har vanskelig for å utnytte kunnskapen om regnerekkefølge i algebraoppgaver fordi de fortsatt har fokus på prosedyren, mens for å lykkes i algebra må du være i stand til å sette disse operasjonene på vent. I hvert steg i algebra er det nødvendig å håndtere «prosess-produkt»-dualiteten, og tenke på hvilke egenskaper uttrykket har som kan brukes til for å forenkle det (Sfard, 1991). Tilsvarende tankegang må utnyttes når elever blir bedt om å forenkle logaritmiske uttrykk av typen $2\lg 5 - 3\lg 2$. I fravær av en velutviklet forståelse for transformasjoner av aritmetiske uttrykk, vil noen elever ofte bruke tilfeldige prosedyrer til å forenkle algebraiske uttrykk (Linchevski & Livneh, 1999). Spørsmålet er om dette funnet er overførbart til konteksten med logaritmer.

Tilsvarende er det funnet at elever, i evalueringen av det endelige svaret i algebra, har problemer med å akseptere svar i algebra av typen $3+5x$ (Booth, 1988). Fenomenet blir omtalt som «accepting lack of closure». Elevene har vanskeligheter med å la plusstegnet bli stående fordi de oppfatter det som en operasjon som må fullføres på samme måte som man ville forvente hvis oppgaven var å regne ut $3+5\cdot 6$. Elevene er fra aritmetikken vant med et numerisk svar, og et svar som $3+5x$ vil for mange elever fortone seg som at det finnes gjenstående operasjoner som må utføres. Tilsvarende kan svar av typen lg 6 og $\lg 2+\lg 3$ fortone seg som ufullstendige for elever.

2.3 «Visually salient rules»

Den tradisjonelle tilnærmingen til algebraen i skolen har erfaring med at elever har en sterk tendens til å produsere mønstre av ugyldige algebra transformasjoner. Disse feilaktige reglene har fått betegnelsen «mal-rules» (Sleeman, 1986).

Correct rules	**Mal-rules**
$(a+b)c = ac+bc$	$(a+b)^c = a^c + b^c$
$a^{m+n} = a^m a^n$	$a^{mn} = a^m a^n$
$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}$	$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b+c}$
$\lg a+\lg b=\lg(ab)$	$\lg(a+b)=\lg a+\lg b$

Tabell 1. Tabellen viser eksempler på feilaktige regler for algebra transformasjoner med betegnelsen «visually salient rules» eller «mal-rules».

Det er gjort funn som støtter at elevene responderer spontant til de visuelle mønstrene i notasjonen uten hensyn til hvilket deklarativt innhold reglene beskriver, og at disse vedvarende feilene derfor ikke nødvendigvis er et resultat av manglene evne til å kunne håndtere innholdet (Kirshner & Awtry, 2004). Disse feilene refereres derfor også som «visually salient rules». I mangel på en god norsk oversettelse av begrepet ser jeg meg nødt til å bruke det engelske begrepet i fortsettelsen.

2.4 Kilpatricks «Intertwined strands of mathematics proficiency»

Ingen begreper favner fullstendig alle aspekter av kompetanse og kunnskap som er nødvendig for å lære matematikk med suksess i følge Kilpatrick. Han valgte derfor å beskrive denne kompetansen med begrepet «mathematical proficiency» (Kilpatrick et al., 2001). I følge ham hviler kunsten å beherske matematikk på at man utvikler fem sammenvevde kompetanse-komponenter. Disse beskrives som «the five strands of mathematics proficiency»:

- conceptual understanding
- procedural fluency
- strategic competence
- adaptive reasoning
- productive disposition

Hans begrep «conceptual understanding» vil jeg omtale som begrepsforståelse. Med det menes en integrert og funksjonell forståelse av matematiske ideer, som gjør det mulig for elevene å lære nye ideer ved å koble disse ideene til det de allerede vet. Fordelene ved å bygge begrepsforståelse er i følge Kilpatrick, at det gjør tilegnede matematiske kunnskaper mer varig og hindrer vanlige feil.

«Procedural fluency» (prosedyreflyt) defineres som ferdighet i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Det betyr at man har evne til å utføre en handlingssekvens for å løse matematiske problemer. I skoleverket har prosedyredrill vært gjenstand for mye kritikk og blitt beskyldt å gå på bekostning av begrepsforståelse. Riktignok kan det diskuteres om drillen har blitt tillagt for mye vekt, men det trenger ikke være et motsetningsforhold. Ettersom komponentene i Kilpatriks «mathematical proficiency» er sammenvevde, kan det å øve på prosedyreflyt underbygge begrepsforståelsen og frigjøre mental kapasitet til å håndtere mer komplekse problemstillinger. Dessuten kan prosedyrer utvikles til å løse en hel klasse av problemer og ikke bare enkeltproblemer. Ved å studere algoritmer og generelle løsningsmetoder kan derfor elever oppdage strukturene i matematikk og dermed bedre begrepsforståelsen.

De fleste teoriene om utvikling av begrepsforståelse og prosedyrekunnskap har fokusert på hvilken type kunnskap som utvikles først innen et gitt område. I følge «begrepet først»-teoriene utvikler barn først, eller er født med, begrepsforståelse innen et område for deretter å generere og selektere prosedyrer til å løse problemene (Geary, 1995; Gelman, 1978). Innen matematikk er det gjort funn som er i tråd med at begrepsforståelsen utvikles først innen flere felt i matematikken (Byrnes, 1992; Hiebert & Wearne, 1996; Siegler & Crowley, 1994; Wynn, 1992). Samtidig er det funn som støtter at det er mulig for barn å lære prosedyrene i matematikk innen begrepene er på plass (Briars & Siegler, 1984; Byrnes & Wasik, 1991; Frye, Braisby, Lowe, Maroudas, & Nicholls, 1989; Fuson, 1988; Hiebert & Wearne, 1996).

Mest utbredt er likevel oppfatningen at det ikke er fruktbart å foreslå at det ene foreligger før det andre, men at utviklingen skjer etter «hånd over hånd» -prinsippet (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001) hvor økt forståelse for prosedyrer gir økt forståelse for begreper og motsatt. Dette prinsippet er forenlig Kilpatricks tanke om at matematikk må utvikles på flere områder parallelt i sin beskrivelse av «the five strands of mathematics proficiency».

2.5 Begrepsinnlæring gjennom prosess eller objekt

Matematiske begrep som tall eller funksjoner kan oppfattes på to fundamentalt forskjellige måter: strukturelt – som objekt, og operasjonelt – som en prosess (Sfard, 1991). Dette kommer tydeligere fram når man sammenligner forskjellige måter å definere matematiske begreper på. I matematikk er det ikke uvanlig at det er mulig å definere et begrep på ulike måter, både som et objekt og som en prosess. Eksempler på dette finner du i tabellen under.

	Strukturelt – som objekt	Operational – som prosess
Funksjon	Mengde av ordnede par	Regneprosess eller veldefinert metode for å komme fra det ene systemet til det andre
Naturlig tall	Egenskap til en mengde	0 eller hvilket som helst tall som fås fra et annet naturlig tall ved å legge til 1. [resultatet av telling]
Sirkel	Det geometriske sted til alle punkter med samme avstand fra et gitt punkt	[en kurve som fremstår ved å] rotere en passer rundt et fiksert punkt

Tabell 2. Tabellen viser eksempler på strukturelle og operasjonelle beskrivelser av matematiske begreper.

Sfard hevder at de fleste matematiske begreper har hatt sitt utspring i prosesser og ikke begreper som objekt. Med unntak av geometriske begreper som for eksempel sirkel, har historisk sett strukturell begrepsformasjon vært en lang og smertefull utvikling hvor *prosesser* har gått forut for begrepsdannelsen. Hun trekker fram dannelsen av funksjonsbegrepet og de ulike tallmengdene som eksempler. Derfor ser hun det som naturlig at elever starter med innlæring av prosessen med telling før begrepsdannelsen av de naturlig tallene, i tråd med rekkefølgen som de historisk sett utviklet seg. Tilsvarende har subtraksjon gått forut for negative tall, divisjon gått forut for rasjonale tall og rotutdragning gått forut for reelle og imaginære tall. Denne prosessen beskriver hun at foregår gjennom tre faser beskrevet som «interiorization», «condensation» og «reification». «Interiorization» er fasen hvor eleven blir kjent med prosessen som leder til begrepet (for eksempel slik prosessen telling leder til begrepet naturlige tall og subtraksjon leder til negative tall). «Condensation» er fasen hvor eleven klarer å vurdere prosessen i sin helhet uten å måtte gjennomføre den (for eksempel å kunne vurdere om svaret er positivt eller negativt hvis et større tall subtraheres fra et mindre tall). Den siste fasen, «reification», er fasen hvor begrepet er blitt en statisk og hel konstruksjon uavhengig av prosessen på samme måten som vi betrakter tallet $5+2i$ som et objekt og ikke et resultat av prosessen av å løse en algebraisk likning med ikke-reelle røtter.

2.6 Feil elever begår relatert til logaritmer

I en tidligere studie om elevers problemer med logaritmer, refereres det til flere kilder som alle har gjort funn av samme type feil under navnet «linear extrapolation error» (Liang & Wood, 2005). En av feilene elevene begår er at de betrakter logaritmefunksjonen som et objekt og ikke funksjon. Dette fører til at elevene for eksempel tenker at $\lg(7x-12)$ er ekvivalent $\lg(7x)-\lg 12$ ut fra tanken om lg kan distribueres over 7x og 12. Tilsvarende rapporteres det om feil av typen $\frac{lga-lgb}{lgc}=\frac{a-b}{c}$, som klart indikerer at elevene betrakter lg som en faktor som kan forkortes. I denne studien ble det gitt en mulig forklaring på opphavet til denne misforståelsen. I situasjoner av typen $\lg x=\lg 2 \Rightarrow x=2$ brukte læreren formuleringen: «Når logaritmen til to tall er lik, er tallene like». Elevene i sin tur mistolket dette til at lg var en felles faktor som var mulig å forkorte. Andre vanlige feil elever begår er i følge denne studien av typen $\lg_2 7=2.807 \Rightarrow \lg_2 14=2\lg_2 7$, trolig med tanken om at $\lg_a xy=x\lg_a y$ er et gyldig utsagn.

Liangs og Woods egen studie med 81 elever i videregående skole i Singapore tok også for seg feil elever gjorde når de jobbet med logaritmer. Spørsmålene de brukte var utformet for å teste elevene på forskjellige kognitive nivåer. En modifisert versjons av Blooms teori (Bloom, 1956) ble brukt til å sortere spørsmålene i tre kategorier: *kunnskap eller utregning*, *forståelse* og *applikasjon*. Kategorien *kunnskap eller utregning* besto av rutineoppgaver som krevde direkte bruk av definisjonen av logaritmer eller logaritmesetningene. Enkel manipulasjon av disse ville gi svaret i løpet av to eller tre steg med utregning. Spørsmålene i kategorien *forståelse* krevde i tillegg forståelse for det underliggende konseptet av logaritmer. Oppgavene i kategorien *applikasjon* var av typen elevene ikke hadde møtt i læreboka si og krevde at eleven utviklet sine egne metoder for å løse dem. Fra oppgavene går det fram at elevene hadde jobbet med logaritmer med vilkårlige grunntall, og på den måten illustrerte at kravene til kunnskaper om logaritmer er høyere det som forventes av norske elever i tilsvarende skolesituasjon. Ikke uventet falt total suksessrate i besvarelsene med økende kognitivt nivå fra 86 % i kategorien *kunnskap eller utregning* til 39 % i kategorien *applikasjon*. Til tross for den relativt høye skåren på *kunnskap eller utregning*, svarte 28 % at lg100 var 10. Det betyr at noen elever klarte å håndtere rutinespørsmål til tross for at de ikke hadde forstått konseptet logaritmer.

Man kan stille seg spørsmålet hvorfor mange studenter ikke klarer å se at $\lg(a + b) = lga + lgb$ er feil, og heller ikke klarer å finne moteksempler på dette. En doktorgradsstudie konkluderte med at svaret på dette spørsmålet ligger i innlæringsfasen (Kenney & Kastberg, 2013). Ikke på noe tidspunkt kunne studentene i denne studien forklare hvorfor formlene som ble brukt, fungerer. I mangel på en logisk basis ble formlene de adopterte og brukte ekstremt vanskelig å gjenkalle korrekt. De hadde derfor ikke noen verktøy for å kontrollere om regelen de brukte var korrekt eller ikke.

2.7 Forskningsspørsmål

Med bakgrunn i denne litteraturen og bakgrunnskunnskapen har jeg jeg valgt å utvikle undervisningsmateriell og en undervisning til introduksjon av logaritmer som legger vekt på:

- En definisjon basert på en prosess – repetert divisjon.
- Bruk av oppgaver hvor elevene selv skal generalisere logaritmeregler etter en induktiv prosess, heretter betegnet som «induktive oppgaver»

- Bruk av «*cover-up*» – metoden der det er naturlig. Dette pedagogiske virkemidlet beskrives i detalj i *3.5.1 Designprinsipper*.
- En mer omfattende beskrivelse av applikasjon av logaritmer innen vitenskapen enn norske læremidler på emnet i øyeblikket inneholder.

Ut fra disse valgene velger jeg å forsøke å finne svar på følgende forskningsspørsmål:

1) Hva er karakteristisk for en effektiv metode for innlæring av logaritmer med tanke på begrepsforståelse?
   a) I hvilken grad hjalp repetert divisjon elevene i innlæringen av logaritmer?
   b) I hvilken grad hjalp «cover-up»-metoden elevene i innlæringen av logaritmer?
   c) I hvilken grad hjalp induktive oppgaver elevene i innlæringen av logaritmer?
   d) I hvilken grad hjalp applikasjon av logaritmer elevene i innlæringen av logaritmer?

2) Er metoden hvor elever blir introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon bedre enn introduksjon gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?
   a) Vil elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon skåre høyere på test enn elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?
   b) Vil elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon skåre høyere på «retention»-test enn elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?

3 Metode

3.1 Designstudier og «ADDIE»

Prosjektet er en designstudie hvor målet er å avdekke karakteristikker for å forbedre undervisningspraksis knyttet til begrepsforståelse innen logaritmer. Designstudie er å oppfatte som den systematiske studien av utvikling og evaluering av utdannings-intervensjoner (Plomp & Nieveen, 2007). Det inkluderer undervisningsmateriell og læringsstrategier, samt produkter og systemer som løsning på slike problemer. Alt har som mål å videreutvikle vår kunnskap om karakteristikker av intervensjonene og prosessen med å utvikle dem. Denne typen forskning har vært motivert fra to hold. På den ene siden har det vært et ønske om studier utført under virkelighetsnære omstendigheter med mål om å skaffe mer relevant og brukbar kunnskap. På den andre siden har det vært et ønske om en mer vitenskapelig tilnærming til praksisen med å designe undervisningsressurser. Selv om metoden i økende grad har blitt brukt innen utdanningsvitenskap siden 1960-tallet, kan ikke designstudier sies å være fullstendig anerkjent ettersom metoden ikke en gang ble nevnt i boka som var basis i UiA-kurset om metoder masterstudentene gjennomgår (Bryman, 2012).

Tradisjonelt har metoden for design av undervisningsmateriell vært beskrevet gjennom et ord: «ADDIE». «ADDIE» er bygd opp av forbokstavene i «Analysis», «Design», «Development», «Implementation» og «Evaluation». Ordene representerer fasene i en guide for hvordan man skal utvikle undervisningsmateriell. Metoden har imidlertid blitt kritisert for å fragmentere prosessen og på den måten være til hinder for god designutvikling (Hokanson, Miller, & Hooper, 2008). På sammen måte som mesterkokker kun bruker en oppskrift som et *utgangspunkt* for matlagingen, tar artikkelen til ordet for en mer holistisk metode hvor alle aspekter ved god design av undervisningsmateriell blir bedre ivaretatt gjennom prosessen. Dessuten er et av hovedpoengene deres at det er mange aspekter ved designutvikling som må ivaretas. Derfor argumenter de for et rolle-basert design hvor romaniserte versjoner av yrker («instructional engineer, instructional manufacturer, instructional craftsman, instructional architect» og «instructional artist») skal representere de viktige aspektene. Tas ikke hensyn til alle aspektene, risikerer man begrensede pedagogiske fremskritt i designutviklingen. Eksempelvis har teknologiske nyvinninger som Powerpoint, videoundervisning og interaktive ofte den samme pedagogiske tilnærmingen som tidligere undervisning. I så fall gir dette muligens økt *kvantitet*, mens *kvalitet* er i beste fall konstant. I et slikt tilfelle kan vi dermed si at manufakturrollen i denne modellen er ivaretatt, men ingen av de andre aspektene. Målet bør, i følge artikkelen, være en pedagogisk håndverker som har innsikt i og overblikk over alle aspektene.

3.2 Designers rolle i forskningen

Metoden som er brukt er av etnografisk type i og med at jeg som forsker i et lite tidsrom observerte og tok datainnsamling av elevene «i feltet». Samtidig var rollen min i de to skoleårene som datainnsamlingen foregikk, forskjellig i henhold til Golds klassifisering av obervatørrollen (Gold, 1958). I første skoleår var jeg svært distansert fra deltakerne i og med at jeg hentet data fra allerede avtatte prøver av elever jeg ikke hadde undervist. Jeg var kun i møte med elevene i forbindelse med informasjon om prosjektet og posttesten. I andre skoleår hadde jeg større grad av involvering ettersom jeg underviste den ene av gruppene som var involvert dette skoleåret. Derfor har jeg, forfatteren av denne oppgaven, hatt dobbeltrollen som både forsker og lærer i deler av prosjektet. Om enn utilsiktet, er det åpenbart at det kan ha påvirket denne forskningen. Nettopp dette at den som forsker er designeren og ofte personen som evaluerer listes som et av de største dilemmaene med denne type forskning (Plomp & Nieveen, 2007). Derfor bruker jeg triangulering av data. Med blant annet kvantitative data og en kollegas deltagelse mener jeg objektiviteten er ivaretatt.

3.3 Deltakere

Deltakerne som er med i prosjektet er elever ved en videregående skole i Norge, Vika videregående skole[1]. Elevene er hentet fra to klasser på studieforberedende programområde i vg1 i hvert av skoleårene 2013/2014 og 2014/2015. Deltakerne fra skoleåret 2013/2014 ble utelukkende valgt fordi det var mulig å få tak i data fra innleverte besvarelser fra desember 2013. Alle elevene i klassene ble informert om prosjektet og forespurt om å delta. I dette skoleåret valgte alle elever med unntak av en å takke ja til deltakelse. I skoleåret 2014/2015 takket alle forespurte ja til å delta. Data fra alle som hadde anledning til å delta på både pre- og posttest ble brukt. I forkant var bruk av disse dataene godkjent av Norsk Samfunnsvitenskapelige Datatjeneste AS, NSD (se vedlegg

[1] Dette er ikke skolens virkelige navn.

7.6 Godkjenning fra NSD). Alt i alt var det data fra 42 elever fordelt på to klasser med tjueen elever i hver klasse i skoleåret 2013/2014, og 45 elever fordelt på to klasser skoleåret 2014/2015.

I forbindelse med utviklingen av læremateriellet, ble det opprettet en pilotgruppe. Denne pilotgruppen besto av en gutt og ei jente. En klasse i samme fag som ikke deltok i prosjektet for øvrig, ble informert med forespørsel om det var noen som frivillig kunne tenke seg å delta som pilotelever. Fire elever meldte interesse, og to av disse ble valgt etter loddtrekning. Dessuten deltok en kollega, Ole Nilsen[2], i denne oppgaven. Han sa seg villig til å sette seg inn i og bruke det nye undervisningsmateriellet i en av de eksperimentelle klassene.

3.4 Oppgavene

Oppgavene er hentet fra del 1 av en heldagsprøve i matematikk 1T gitt til elever desember 2013 ved Vika videregående skole. Del 1 består av oppgaver som skal løses uten hjelpemidler. De oppgavene som var knyttet til logaritmeregning ble valgt ut og brukt i nøyaktig samme form i alle kommende datainnsamlinger i dette prosjektet. Oppgavene kan finnes i sin helhet i *7.1 Oppgavene gitt i test og «retention»-test om logaritmer.* Det er verdt å merke seg at jeg i samråd med min veileder ble enig om å bruke disse oppgavene fra denne heldagsprøven før jeg faktisk kjente til hvilke oppgaver dette var. Av den grunn er oppgavene på ingen måte designet til å favorisere elever som følger et bestemt undervisningsopplegg.

3.5 Utarbeiding av nytt lærematerieII

Det nye læremateriellet som ble brukt på to grupper elever i matematikk 1T i skoleåret 2014/2015 er utarbeidet av forfatteren av denne oppgaven i samråd med veileder, med innspill fra kollegaer og tilbakemeldinger fra en pilotgruppe av elever. Inspirasjonen til innfallsvinkelen i læremateriellet er et møte med veilederen etter et seminar hun hadde om temaet (Vos, 2013). Etter det har materiellet utviklet seg etter flere runder med utkast og innspill til forbedringer. I startfasen kom innspillene utelukkende fra veileder. I forkant av utprøvingen på fulle klasser ble innspill fra elever i pilotgruppen og kollega også tatt imot. Etter utprøvingen på fulle klasser ble materiellet på ny evaluert.

[2] Dette er ikke hans virkelige navn.

3.5.1 Designprinsipper

Designet av læremateriellet har hatt fokus på begrepsforståelse i håp om at kunnskapen skal feste seg over tid og tone ned innlæring av metoder for å løse oppgaver. For å få dette til har jeg introdusert logaritmer ved å definere logaritmebegrep på en alternativ måte. Tradisjonelt har norske læremidler definert logaritmer etter en definisjon som i innhold er identisk med NDLAs definisjon: «Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet» (NDLA, 2014). I det alternative undervisningsmateriellet som er utviklet definerer jeg logaritmebegrepet ved hjelp av repetert divisjon: «*Vi teller antall ganger vi må dividere et tall a med 10 før vi når tallet 1. Dette antallet kaller vi logaritmen til a og skrives lg a*». Undervisningsmateriellet i sin helhet finnes i kapittel *7.2 Rapport fra utprøving på pilotgruppe.*

Tanken er at prosedyren med repetert divisjon skal lede til en bedre forståelse av logaritmebegrepet. Dette er på linje med Sfards tankegods om at innlæring gjennom prosess går forut for begrepsutviklingen. Derfor starter innlæringen med prosessen repetert divisjon og ikke definisjon med symboler. Videre bryter opplegget med tradisjonell metode ved at vi forsøker å gjøre eleven i stand til å avgjøre mellom hvilke to heltall logaritmen til et tall er uten å måtte gjennomføre divisjonen. Dette gjør vi i håp om at eleven skal kunne vurdere prosedyren uten faktisk å måtte gjennomføre den, som i Sfards terminologi blir omtalt som «condensation». Først etter dette ser vi det som mulig at eleven skal kunne klare å behandle logaritmeuttrykk som statiske objekt løsrevet fra prosedyren («reifikasjon»). På den måten håper vi at antall klassiske feil elever begår i forbindelse med logaritmer (beskrevet i kapitel *2.6 Feil elever begår relatert til logaritmer*) blir redusert.

Materiellet toner ned prosedyrer for løsning av oppgaver som for eksempel logaritmelikninger. Som erstatning har jeg brukt «*cover-up*»-metoden (Kilpatrick et al., 2001) som kan brukes i oppgave av typen $\lg(4x + 5) = 0$. Det betyr at man bruker en pedagogisk teknikk hvor man dekker til deler av regnestykket for å løse oppgaven i stedet for å behandle regnestykket ut fra formelle regneregler. I dette eksemplet betyr det å dekke til uttrykket i parentesen, $4x + 5$. Man kan da spørre eller argumentere for elevene at det tildekkede uttrykket har den egenskapen at man må dividere det med 10 null ganger før man når tallet 1. Dermed må uttrykket være tallet 1 og man får konkluderer at $4x + 5 = 1$. Dette skiller seg fra løsning med formelle regneteknikker hvor en vanlig innfallsvinkel vært å opphøye 10 i begge sider av likhetstegnet.

For å få variasjon i oppgavene har jeg brukt metoden om å reversere spørsmål. Det betyr at for eksempel et spørsmål om å regne ut $lg100$ kan reverseres spørre etter x i likningen $lgx = 2$. Dessuten er en del oppgaver laget etter tanken om at eleven selv skal generalisere etter en induktiv prosess. De fleste læremidler velger å presentere logaritmeregler, og deretter føre formelle bevis for disse. Dette er bevist utelatt i undervisningsmateriellet jeg har utviklet, noe jeg vil anta mange lærere vil stille seg skeptisk til. Dette er erstattet med oppgaver hvor elevene selv gjennom flere eksempler skal oppdage, formulere og argumentere for gyldigheten av logaritmereglene som oppdages. Dessuten legges det opp til at elevene skal argumentere for hvorfor visse regler *ikke* er gyldige til tross for at de er visuelt tilfredsstillende («visual salient rules»).

3.5.2 Utviklingen av de forskjellige versjonene av læremateriellet

Bakgrunnen for denne oppgaven og det nye læremateriellet knyttet til logaritmer er et møte mellom veileder og forfatteren av denne oppgaven 23. januar 2014. Ideene er basert på tanker presentert av Pauline Vos i et seminar (Vos, 2013) et halvt år før møtet. Etter dette møtet startet utviklingen av forskjellige versjoner av læremateriellet. Et første og ufullstendig utkast ble levert i mars 2014. Utkastet hadde notasjon og eksempler likt det som var presentert i seminaret. Dette ble forkastet i sin helhet med bakgrunn i at læreplan i kurset det skal brukes i kun regner med logaritmer med base 10 og at tidsrammen krevde at materiellet går direkte på korrekt notasjon. Et nytt utkast ble levert veileder i slutten av april 2014. Denne gangen fikk jeg blant annet innspill til endring av oppbyggingen av logaritmereglene gjennom flere deltrinn. Dessuten fikk jeg flere tips til oppgaver etter prinsippene beskrevet over. Et tredje utkast ble vurdert i starten av juni 2014. Her ble påpekt at definisjonen av logaritmebegrepet ved repetert divisjon burde komme etter eksemplene på prosessen med utførelsen av divisjonen. Dessuten ble rekkefølgen på introduksjon endret slik at logaritmen til en potens kom før logaritmen til en kvotient. I tillegg ble oppgaver og tekst forbedret ved å endre formuleringer og innføre flere eksempler før generaliseringsprosessen startet. Dette utkastet ble også sendt til en kollega for kommentarer. Før han rakk å komme med kommentarer til dette utkastet ble det gjort en del endringer etter møtet med veileder juni 2014. Derfor ble et utkast til versjon 4 sendt ham for vurdering 20. juni.

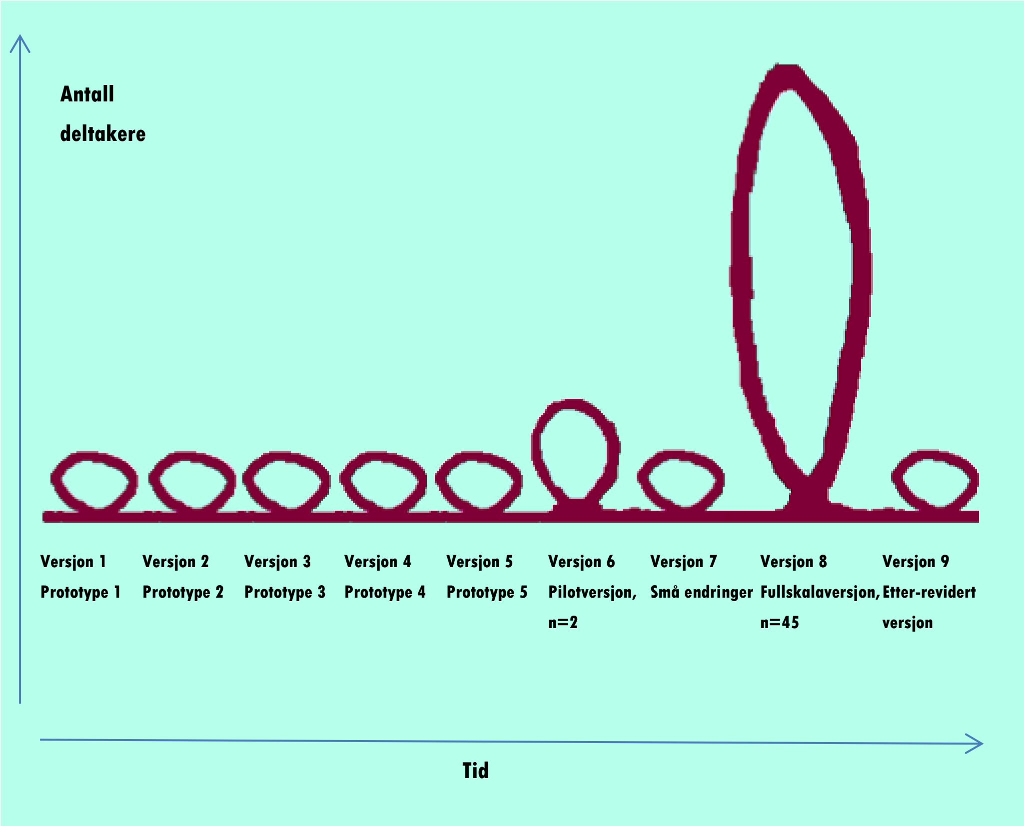
Kollegaen min, Ole Nilsen, hadde innspill som resulterte i en versjon 5 av undervisningsmateriellet. Dette skjedde etter at vi satt ned sammen med undervisningsmateriellet og jeg gjorde feltnotater av innspillene hans. I tillegg til korreksjoner av skrivefeil, hjalp innspillene hans til å øke presisjonsnivået i formuleringene i undervisningsmateriellet. Han kom også med innspill som ikke ble tatt til følge. Dette gjaldt blant annet ønsket om mer kompliserte eksponentiallikninger hvor den ukjente forekom i flere ledd med eksponenter. Dette ble avvist som følge av læreplanens formulering om at eleven skal kunne løse «*enkle*» eksponentiallikninger. I tillegg har ikke tidligere eksamensoppgaver vist slike oppgaver, noe som jeg tok som en bekreftelse på at min tolkning var rett og at avvisningen derfor var riktig.

Materiellet i den utgaven som forelå i august (versjon 6) ble testet ut på pilotgruppen. Undervisningsmateriellet forutsetter at potenser med negative eksponenter er kjent. På det tidspunktet pilotgruppen var i drift, var dette ikke gjennomgått i matematikk-kurset de var en del av. Derfor var det nødvendig med en økt hvor disse potensene ble behandlet før undervisningen med logaritmer startet. Totalt var undervisningen på 6 økter av 1,5 timer, hvorav den første økten dreide seg om potenser og resten om logaritmer og eksponentiallikninger. I hver økt tok jeg feltnotater hvor jeg noterte meg hvordan elevene responderte på undervisningsmetoden og oppgavene. Etter annenhver økt gjennomførte jeg et semi-strukturert intervju. Intervjuet ble tatt opp på lydopptaker. I intervjuet var begge elevene til stede, begge elevene besvarte og følgende spørsmål var utgangspunkt:

1. Hvordan likte du stoffet?
2. Var stoffet lett?
3. Hvilke oppgaver likte du best?

Tilbakemeldingen, intervjuene og feltnotatene mine førte blant annet til endringer i figuren i oppgave 5.6.12 og at noen overflødige oppgaver ble fjernet. På dette grunnlaget forelå versjon 7 i oktober 2014. Denne endelige versjonen som ble utprøvd på elevene (versjon 8), har kun små kosmetiske endringer fra forrige versjon. Arbeidet med utviklingen av et slikt materiell er imidlertid en kontinuerlig prosess som ikke tar slutt. Materiellet kan alltid forbedres. Erfaringene fra utprøvingen av versjon 8 vil derfor føre til en ny versjon 9 som ikke er ferdig på det tidspunktet denne oppgaven skrives.

En utvidet og mer detaljert beskrivelse av erfaringene fra pilotgruppen og utviklingen som følge av dette finnes i *7.2 Rapport fra utprøving på pilotgruppe*.



Figur 1. Figuren illustrerer fasene i utviklingen av læremateriellet.

3.6 Datainnsamling

Datainnsamling har foregått i flere faser og med forskjellige involverte. Både før studien, i perioden da materiellet ble utviklet, under utprøving og etter utprøving av materiellet ble data samlet inn. En oversikt er gitt i tabellen under.

		Innsamlingsmetode			
		Test og «retention»-test	Felt-notater	Semi-strukturert intervju	Lydopptak av arbeidssituasjon
Tidspunkt	**Personer involvert**				
Før studien	Kontrollgruppe 1T *n = 42*	***X***			
Utviklingsfasen	Veileder				
	Kollega		***X***		
	Pilotgruppe		***X***	***X***	
Samtidig med utprøving av materiellet	Eksperimentell gruppe 1T. *n = 45*		***X***		
	Samarbeidende par fra 1T - eksperimentell gruppe. *n = 2*				***X***
Etter utprøving av materiellet	Utvalg av elever 1T - eksperimentell gruppe. *n = 3*			***X***	
	Eksperimentell gruppe 1T. *n = 45*	***X***			
	Kollega			***X***	

Tabell 3. Tabellen viser datatype samlet inn i studien sammenholdt med personer involvert og tidspunkt for innsamlingen.

3.6.1 Observasjoner

Jeg har observasjoner fra to faser i dette prosjektet. Fra utviklingsfasen av materiellet har jeg observert hvordan elevene i pilotgruppen responderte på det nye materiellet og undervisningsmetodene beskrevet i forskningsspørsmålene, samt min kollegas mottakelse av materiellet. Samtalen med min kollega angående utkastet til undervisningsmateriellet ble kun dokumentert gjennom feltnotater. I begge situasjonene ble det benyttet ustrukturert observasjon i den forstand at jeg ikke på forhånd hadde bestemt meg for hva jeg skulle se etter. I fasen hvor undervisningsopplegget ble testet ut fulle klasser, laget jeg feltnotater fra observasjon av den ene av disse. Erfaringene fra undervisningen i pilotgruppen og undervisningen i full klasse ble dokumentert gjennom feltnotater av ustrukturert karakter. Kun observasjoner jeg vurderte av interesse for forskningsspørsmålene mine ble notert. I en av undervisningsøktene observerte veilederen min, Pauline Vos, og tok egne feltnotater. Disse kan du finne i sin helhet i og vedlegg *7.4 Rapport fra klasseromsbesøk av Pauline Vos*.

3.6.2 Intervjuer

Det har blitt gjennomført to runder med intervjuer i forbindelse med studien. I første runde intervjuet jeg elevene i pilotgruppen i utviklingsfasen av materiellet. Dette intervjuet er beskrevet i kapitel *3.5.2 Utviklingen av de forskjellige versjonene av læremateriellet*. Neste intervjurunde ble gjennomført innen en uke etter undervisningen med logaritmer gjennom repetert divisjon var sluttført. I denne runden ble kollegaen Ole Nilsen og tre elever intervjuet individuelt. Elevene som ble intervjuet var valgt ut slik at elever på flere nivåer ble representert. En lavtscorende, en middelsscorende og en høytscorende var valgt ut til intervjuene, basert på tidligere prøveresultater. Utgangspunktet for intervjuet med kollegaen og disse elevene var spørsmålene gjengitt i vedlegg *7.5.1 Intervjuspørsmål til elever i eksperimentell gruppe*.

Intervjuene som inngår i studien er med andre ord:

- Pilotgruppe – Hilde og Gard
- Kollega – Ole Nilsen
- 3 elever – Hedvig, Anine og Fredrik

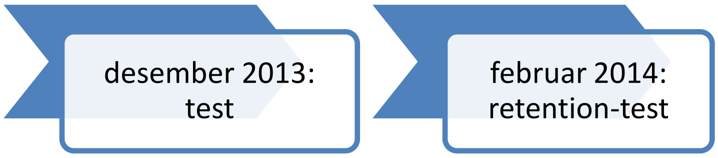
Ingen av navnene er deltakernes reelle navn.

3.6.3 Lydopptak

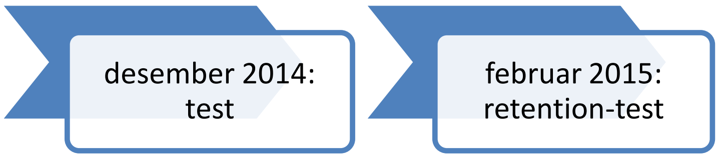
Fra fasen hvor undervisningsmateriellet og undervisningsmetodene ble testet ut på fullklassene ble det foretatt lydopptak. Lydopptaket var av det ene elevparets samarbeid om oppgavene i undervisningsmateriellet. Elevparet besto av to jenter (Helle og Andrea)[3] som til vanlig sitter sammen i klasseromsituasjonen. Paret ble valgt utelukkende ut fra håp og forventning om å få lydopptak med samtaler av fruktbar karakter for prosjektet mitt. Ingen av disse jentene var blant høytskårende elevene fra tidligere prøver, med tidligere resultater som lå henholdsvis like under og like over medianen for gruppen.

3.6.4 Tester

Elever fra to grupper i matematikk-kurset 1T ble testet i oppgavene beskrevet i kapitel *3.4 Oppgavene* i hvert av skoleårene 2013/2014 og 2014/2015. Oppgavene i sin helhet finnes i vedlegg *7.1 Oppgavene gitt i test og «retention»-test om logaritmer*. Elevgruppene er beskrevet i kapitel *3.3 Deltakere*. Elevene i prosjektet fra skoleåret 2013/2014 hadde fulgt ordinært læremateriell (Oldervoll et al., 2009), mens elevene fra skoleåret 2014/2015 brukte lærემateriell beskrevet i vedlegg *7.3 Undervisningsmateriell – logaritmer ved repetert divisjon*. Begge gruppene ble testet med oppgavene på to ulike tidspunkt. Figurene under illustrerer denne delen av datainnsamlingen.



Figur 2. Tidslinje for elever som har fulgt undervisning etter ordinært lærematerieLL



Figur 3. Tidslinje for elever som har fulgt undervisning etter lærematerieLL basert på logaritmeinnføring med repetert divisjon.

[3] Dette er ikke jentenes virkelige navn

Oppgavene var nøyaktig like begge skoleårene, og hadde ikke blitt gitt ut til elevene i forkant. Testene som ble gjennomført i februar begge årene, hadde som hensikt å måle om kunnskapen ble bevart over tid. Derfor blir disse omtalt som «retention»-test. «Retention-testen» ble gjennomført med de samme elevene 80 dager etter de ble testet første gang. I perioden mellom testene hadde ikke emnet blitt undervist og elevene hadde heller ikke blitt oppfordret til å arbeide med emnet.

3.7 Metode for analyse av resultatene

Man ser fra kapitel *3.6 Datainnsamling* at det er innsamlet mange forskjellige datasett. Innledningsvis vil jeg derfor forsøke å gi et overblikk over hvilke datasett som skal brukes til å besvare de ulike forskningsspørsmålene.

Forskningsspørsmål	**Datasett**
1	Alle datasett
1a, 1b, 1c, 1d	Alle datasett
2	Alle datasett
2a	Test
2b	«Retention» -test

Tabell 4. Tabellen viser hvilke datasett som blir benyttet for å besvare de forskningsspørsmålene.

Feltnotater fra observasjonene og lydopptakene fra intervjuer og elever arbeidssituasjon ble analysert med henblikk på om de inneholdt noe som kunne belyse forskningsspørsmålene mine. Spørsmål 2a og 2b analyseres ved en ren statistisk analyse. Jeg har jeg i første omgang undersøkt antall som klarte å besvare testoppgavene korrekt. For å avgjøre om det er en signifikant forskjell mellom gruppene som fulgte det nye læremateriellet og gruppene som fulgte det tradisjonelle læremateriellet, vil disse dataene bli analysert ved en Student-t-test. I tillegg har jeg som mål på begrepsforståelsen valgt å se om elevene kan evaluere lg 0 og hvordan elevene håndterer uttrykket $lg4 + lg9$. I de andre forskningsspørsmålene vil alle datasett bli brukt. Ved å sammenligne informasjonen fra de ulike datasettene, undersøker jeg hvor dataene peker i samme retning og hvor dette ikke er tilfellet. Det faktum at flere ulike datakilder ble brukt for å besvare forskningsspørsmålene mine, håper jeg vil styrke troverdigheten til funnene mine.

4 Funn og resultater

4.1 Observasjoner

4.1.1 Observasjoner fra utprøving på pilotgruppe

I pilotgruppen observerte jeg at introduksjonen av logaritmebegrepet via repetert divisjon, var lite tidkrevende. Jeg noterte meg at innen 20 minutter av første leksjon var gjennomført, hadde elevene selv vært i stand til å vurdere lg1 og lg10. Innen ti nye minutter hadde gått, etter et eksempel med en logaritmelikning som ble løst med «*cover-up*»-metoden, noterte jeg at de kunne håndtere de resterende logaritmelikningene uten å ty til løsningsforslag eller lærerhjelp først. På den måten la jeg merke til at det var kort vei fra introduksjonen av logaritmer startet til de elevene var i stand til å løse sin første logaritmelikning av typen $\lg(3x - 5) = 1$. Jeg la også merke til at elevene i pilotgruppen uten problemer kunne gjengi og anvende definisjonen korrekt ved oppstart på kommende leksjoner, selv om det noen ganger var 7 dagers opphold mellom leksjonene. Etter kort tid ble vurdering av størrelsesorden på logaritmen til tall også uproblematisk for disse elevene uten at elevene hadde behov for å gå gjennom stegene med repetert divisjon.

Jeg så at elevene hadde liten øvelse i å føre svarene sine formelt riktig, og var ikke i stand til å bevise identiteter av typen $\lg 4x - \lg 4 = \lg x$. Samtidig som elevene ba om å få slippe å finne et tallpar til å bekrefte regelen om logaritmen til et produkt fordi de allerede hadde sett sammenhengen, var de ikke i stand til å formulere hvorfor lg(a·b) ikke er lik lg a · lg b eller senere hvorfor $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ ikke er lik $\frac{lga}{lgb}$. Det er bemerkelsesverdig at de ikke tenkte på at et moteksempel ville være tilstrekkelig i dette tilfellet, men selv foreslo å velge en bestemt verdi for x for å bevise at $\lg 4x - \lg 4 = \lg x$. Ettersom elevene gav uttrykk for at de forsto innholdet i logaritmereglene og jeg ikke gjennomførte tester på dem, valgte jeg ikke å gjøre store endringer opplæringsmateriellet på dette området etter utprøving på pilotgruppen.

De to elevene i pilotgruppen viste stor interesse for applikasjonen av logaritmer, og spurte på eget initiativ om bruken av dem i slutten av en leksjon. Elevene hadde arbeidet iherdig med oppgavene jeg hadde gitt dem, slik at det var uproblematisk å sette av litt ekstra tid til dette. Det førte til at slutten av denne av leksjonen ble viet litt ekstra tid til applikasjon av logaritmer, inkludert en kort innføring i hvordan det historisk ble brukt til multiplikasjon og divisjon.

Når det gjaldt eksponentiallikninger og overgangen fra for eksempel $3^x = 17$ til $lg3^x = lg17$, kunne jeg bruke resonnementet om at hvis uttrykkene på hver side av likhetstegnet er like, er antall ganger vi må dividere med 10 før vi når 1 også likt. Jeg noterte meg at det virket som om elevene hadde lettere for å henge med på denne overgangen med den nye definisjonen av den grunn. Dette baserer jeg kun på min oppfattelse av elevenes reaksjon på resonnementet, uten at jeg har direkte observasjon på at dette falt lettere enn tradisjonelt resonnement.

4.1.2 Observasjon fra eksperimentell 1T-gruppe

Observasjonene er fra fire økter i logaritmeregning. Økt 3 var på 45 min, men de tre andre var på 2 x 45 minutter med 10 minutts pause mellom. I økt 2 var også veilederen min, Pauline Vos, tilstede. Hun skrev en rapport fra dette besøket. Dette er gjengitt i sin helhet i

7.4 Rapport fra klasseromsbesøk av Pauline Vos.

Ved introduksjonen i eksperimentell 1T-gruppe, observerte jeg av mye av det samme som jeg observerte i pilot-gruppen. Feltnotatene mine fra timene 20. november 2014 viser: *«Definisjonen, lg10 og lg1 går lett» og «5.6.1+5.6.2 – ferdige etter kort tid. Ingen spørsmål».* Samtidig har jeg notert at noen enkelte klarer enkle logaritmelikninger uten å ha å ha sett «*cover-up*»-metoden, men mange elever har behov for å se et eksempel først.

Elevene har ikke problemer med å vurdere logaritmen til størrelsesorden på logaritmen til positive tall større en 1, men en del har problemer med å vurdere logaritmen til tall mellom 0 og 1. Når elevene skal vurdere mellom hvilke heltall disse verdiene ligger, viser feltnotatene at en del elever har «problemer med lg $0{,}005$ og spesielt lg $0{,}25$.» I et samarbeid mellom to sterke elever hvor den ene påstår at lg $0{,}001 = -3$, observerer jeg at partneren velger å kontrollere dette på kalkulator. Dette er i samsvar med observasjonene til P. Vos.

> *«The question whether the values for lg (4231) and lg (347) are "rimelig" (reasonable) is easy for them»*

Observasjonene viser samtidig at jeg som lærer ikke lyktes med å bygge bro fra det kjente med repetert divisjon til logaritmereglene med undervisningsopplegget. Utdrag fra rapporten til Pauline Vos bekrefter dette:

> *"When they work on lg ($738{\cdot}10^5$) they use the pocket calculator for finding $738{\cdot}10^5$. When they see the many zeros, they move with their fingers covering one-by-one the zeros to do the repeated division by 10 and counting the steps. In this way they see that the answer must be larger than 8. They don't see the addition»*
>
> --------
>
> *«I see them do lg 2 + lg5 with the pocket calculator: 0,3 + 0,7=1 (not by reasoning that $2\cdot 5 = 10$)»*
>
> --------
>
> *«Finding lg($4231\cdot 347$) is then a multiplication $4231\cdot 347$, pressing the log button and reasoning whether the answer is reasonable. The addition lg(4231) + lg(347) is not seen»*

Som i pilot-gruppen, var det også elever her som betrakter det som bevis hvis det finner eksempler på at $\lg 4x - \lg 4 = \lg x$ er riktig for bestemte verdier av x. Jeg observerte også en elev som oppfattet oppgaven som en likning, endte med $\lg x = \lg x$ og spurte *«hva så?»*.

På de induktive oppgavene har jeg notert at det falt dem vanskelig. Det var vanskelig i den forstand at elevene ikke selv klarte å oppdage og formulere for eksempel $\lg(ab) = lga + lgb$. En elev begrunnet dette med at det var «for åpenbart». En annen formulerte det slik: *«Jeg visste ikke at det var det du spurte etter.»* Tilsvarende observasjon ble gjort av Pauline Vos:

> *«They keep on hanging on the question about the "sammenhengen" in 5.7.1. The word "sammenhengen" suggests maybe something deep. They are disappointed that it is just a formula lg (ab) = lga + lgb».*

I ettertid innser jeg at dette problemet bør adresseres gjennom endringer i undervisningsopplegget, noe jeg ikke innså tidligere til tross for relativ lik mottakelse i pilotgruppen.
Ingen av elevene i gruppen jeg var i samtale med i timene viste interesse for applikasjoner av logaritmer. Noen av elevene spurte jeg direkte i samtale ved pulten deres, og alle svarene var i disse tilfellene skuldertrekkene likegyldighet til emnet. Et av disse tilfellene ble også observert av min veileder når hun beskriver situasjonen:

> *«Børge asks them to read the contextual text (about decibels etc). They read it, at first somewhat reluctantly.»*

4.1.3 Oppsummering av funn fra observasjoner

En syntese av funnene mine fra observasjonene gir følgende:

- Ved introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon ble definisjonen av logaritmer værende i minnet over tid, og kunne enkelt vurdere størrelsesorden til logaritmen til tall. Spesielt gjaldt dette logaritmen til tall større enn 1.
- Introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon gav kort vei fra «prosess» til «objekt» i Sfards terminologi.
- «Cover-up»-metoden er effektiv på logaritmelikninger når definisjonen av logaritmer var kjent.
- Undervisningsopplegget klarte ikke gjennom de induktive oppgavene å bygge bro til logaritmereglene og var på den måten ineffektiv.
- Elevene klarte ikke å formulere og anvende logaritmeregler etter induktive oppgaver i innlæringen, til tross for at de selv mener at innholdet i reglene er enkelt.
- Elevene i eksperimentell gruppe uttrykte liten interesse og signaliserte i stor grad likegyldighet for applikasjon av logaritmer. Elevene i pilotgruppen viste interesse for

applikasjon av logaritmer og fungerte derfor positivt for dem gjennom økt motivasjon for disse elevene.

4.2 Intervjuer

4.2.1 Intervju med elever i pilotgruppe

Intervjuene med elevene i pilotgruppen gav først og fremst informasjon om hvilke oppgavetyper de selv synes var mest effektive for innlæring av logaritmebegrepet. For det første gav de begge uttrykk for at de likte oppgavene hvor de måtte reflektere over hvorfor logaritmen til 0 og negative tall gav feilmelding på kalkulatoren. De beskriver det selv slik:

> *Hilde: «..den oppgaven hvor en skulle forsøke på en måte forsøke med minus og med 0, synes jeg det var veldig greit å kunne se sammenhengen på hvorfor det ikke fungerte.»*

Her referer hun til oppgavene 5.6.8 og 5.6.9 som er gjengitt under.

Oppgave 5.6.8

a) *Bruk digitale verktøy til å forsøke å finne logaritmen til minst fire forskjellige negative verdier, f.eks log (-18).*
b) *Forklar hvorfor resultatet er rimelig ut fra definisjonen av logaritmen til et tall.*

Oppgave 5.6.9 

Bruk hodet ditt til å vurdere lg 0.

Uten å vite det, oppgir medeleven samme oppgaver som mest givende:

> *Gard: «Jeg likte den hvor du fikk error på kalkulatoren».*
>
> *Lærer: «Det er den samme som Hilde refererer til, 5.6.8 og 5.6.9»*
>
> *Gard: « Den likte jeg. Det var egentlig…de oppgavene du klarte å fatte sjøl, at enten noe var galt eller at noe ikke helt stemte eller at noe stemte… se en sammenheng – de likte jeg.»*

Jenta i pilotprosjektet gav uttrykk for at hun var positiv til å se applikasjonen av logaritmer.

Hun uttrykte det slik:

> *Hilde: « Jeg likte emnet. Man kan jo bruke det til alt. Da skjønner du litt bedre hvordan ting henger sammen.»*
>
> *Hilde: «Jeg likte overgangen fra likninger til sånn hverdagsting, holdt jeg på å si, sånn at man kan se hvordan man kan bruke likningene.»*

Begge gav uttrykk for at de ikke hadde problemer med definisjonen gjennom repetert divisjon. Det var likninger og anvendelse av logaritmereglene som bød dem på de største utfordringene.

> *Hilde: «Noen av de likningene, hvor du skulle finne x var vanskeligere»*

Gutten i pilotprosjektet gjør det tydelig at logaritmeregningen er problematisk og overhodet ikke er intuitiv for ham.

> *Gard: «Emnet i seg sjøl er vanskelig»*
>
> *Gard: « Jeg svarer ut i fra hvor lett det er å fange opp, hvis du forstår hva jeg mener. Det er mange regler som krysser med meg her, eller krasjer med meg her… som den der likninga. Det er litt regler som krasjer.»*

Her refererer han til en likning han startet med å løse på følgende feilaktige måte:

$$10 = 3 + 1{,}15^x$$
$$\lg 10 = \lg 3 + \lg 1{,}15^x$$

4.2.2 Intervju med lærerkollega

Lærerkollegaen min, Ole Nilsen, prøvde også ut det eksperimentelle undervisningsmateriellet i full klasse. Han gav uttrykk for at han synes metoden med repetert divisjon gav en glattere overgang fra kjent til ukjent stoff.

> *Ole Nilsen: «Det er i hvert fall greit at de ser noe som de er vant til fra før fordi ofte har jeg følt at logaritmer er noe helt nytt, som de da har vanskelig med å begynne på og skjønne hvor logikken er. Men her tok de det relativt greit synes jeg.»*
>
> *Intervjuer: «Det å finne logaritmer til tall, hvordan følte du det gikk i forhold til det tradisjonelle opplegget vi har kjørt?»*

Ole Nilsen: «Jeg følte det gikk bedre og de hadde lettere for å vurdere hvor svaret lå. Om det lå mellom 4 og 5 eller 6 og 7, tok de ganske bra. Det viste seg gjennom hele prosessen, at det klarte de ganske bra.»

Samtidig gav han også uttrykk for at det ikke var helt uproblematisk for elevene å håndtere logaritmen til hvilke som helst tall.

«… men når vi gikk over til litt andre tall, ble det litt vanskeligere for dem».

Han omtalte også «*cover-up*» -metoden som effektiv og virkningsfull når han beskrev hvordan elevene hans håndterte logaritmelikninger:

«Når det ble litt parentesbruk, trengte de bare å se et eksempel på tavla, hvor vi resonnerte oss fram med sånn «cover-up»-metode, og etter at de hadde sett et eksempel gikk det veldig bra».

Han beskrev at elevene opplevde at de så mønstrene, men var uvante med å formulere matematiske sammenhenger på egenhånd.

«De så sammenhengen, men de synes det var vanskelig å formulere reglene eller sammenhengen med egne ord. De forsto det, sa de, men det var åssen de skulle prøve å formulere det matematisk».

Han er påfallende samstemt med Pauline Vos beskrivelse når han videre beskriver:

«Men det var som de sa, de ser logikken og de ser det, men de klarte ikke alltid nødvendigvis å formulere det med ord. Og av til når de da hadde prøvd å formulere det, sa de bare "Å, er det det de egentlig skal ha?" når jeg skrev det ned for dem og viste det. De var der, men de hadde bare ikke forstått og skjønt, nødvendigvis, at det var måten en skrev en regel på.»

Han beskriver at det virker som om det er nytt og vanskelig for dem å måtte formulere matematiske regler som logaritmereglene til tross for at de mener å ha sett mønsteret blant de mange eksemplene de studerte. Dette gjaldt ikke bare enkeltelever, mente han, men var gjennomgående for hele klassen.

På spørsmål om effekten av «cover-up»-metoden, sa han at den fungerte godt og at etter et eksempel fikk mange tak på metoden. Om utforskende oppgaver sa han:

«Jeg synes det var positivt at det var mulighet for dem å se sammenhengen i logaritmeregningen. Den så de aller fleste, de var problemet med å formulere de reglene som de sleit med.»

Han beskrev metoden med å introdusere logaritmer ved hjelp av repetert divisjon på denne måten:

> *«Dette er en god måte å introdusere logaritmeregning som er helt nytt som jeg vet at alle har litt vanskeligheter med å ta. Det har jeg i alle fall opplevd at dette har vært noe helt nytt, vært litt vanskelig, og når vi skal repetere er det mange som har sagt: «Åh, det var det der greiene, ja». Så de husker det egentlig ikke. Det har blitt en metode for dem».*

Han kunne ikke komme på noe som taler for introduksjonsmetoden når han ble spurt om ulemper med metoden.

På spørsmålet om hvordan applikasjon av logaritmer og bruken av logaritmisk skala ble mottatt, var svaret at det var en delt mottakelse. De fleste viste likegyldighet, noen få synes det var interessant. Samtidig gav han uttrykk for at noen av elevene hans ble forvirret av enheten lux, som var helt ukjent og fremmed for dem.

4.2.3 Intervju med elever fra eksperimentell 1T-gruppe

Alle ble intervjuene foregitt separat, og deltakerne i intervjuene var en høytpresterende elev (Hedvig), en middelspresterende elev (Anine) og en lavtpresterende elev (Fredrik). I løpet av intervjuene med elevene fra den eksperimentelle 1T-gruppen ble alle tre på et tidspunkt bedt om de kunne gjengi definisjonen av logaritmer. Alle elevene var i stand til å gjøre dette uten noen form for hjelp eller ledetråder.

> *Hedvig: «Nei, det synes jeg var ganske lett. For det var jo lissom bare hvor mange ganger man må dele på 10 for å få 1. Det var jo egentlig ganske lett å forstå.»*

Alle ble spurt om cover-up metoden også og om de kunne skissere hvordan man bruker den til å løse likninger av typen $\lg(4x+5)=0$. Her var det stort sprik i svarene. Hedvig kunne både gjøre rede for «cover-up»-metoden og løse likningen ved hjelp av den. Anine husket ikke hva som lå i begrepet, men klarte å gjøre rede for hvordan likningen kunne løses når jeg som lærer først hadde frisket opp hvordan man kunne bruke hånden til å dekke over deler av regnestykket. Fredrik kunne verken huske eller bruke metoden. Her er et utdrag fra samtalen:

> *Lærer: «Jeg har brukt en annen metode for å løse likninger av denne typen her: lg(4x+5)=0 … hvor jeg dekket til med hånda… husker du det?»*
>
> *Fredrik: «Nei»*
>
> *Lærer: «Kan du løse den likningen, da?»*
>
> *Fredrik: «I hodet?»*
>
> *Lærer: «Ja, eller kan du skissere hvordan du ville gått fram for å løse den»*

Fredrik: «lg 4 + lg x + lg 5

Lærer: «ok, men det er jo en likning?»

Fredrik: «Åh, ja… Da ville jeg, nei,… da kommer jeg ikke på hva jeg ville gjort.»

Elevenes kommentarer til emnet i heftet som omhandlet applikasjon av logaritmer ble svært forskjellig mottatt. Fredrik uttalte det gjorde stoffet mer innviklet og vanskelig for ham, og han så det som en forbedring hvis det hadde vært fjernet.

Fredrik: «det synes jeg bare gav et inntrykk av at det ble vanskeligere»

Lærer: «kunne du med fordel ha tenkt deg at vi ikke hadde hatt det med?»

Fredrik: «Ja.»… «for det ble for innviklet.»

Lærer: « … det var jo et forsøk på å få det nærmere bruken i dagliglivet. Men det hadde ikke gjort deg noe om dette hadde vært fjernet, og dermed ikke hadde gitt denne linken til dagliglivet?»

Fredrik: «Det betydde ikke så mye for meg, nei.»

Begge de to andre elevene som ble intervjuet så mer positivt på dette stoffet og uttalte at de ble mer motiverte av det.

Anine: «forstår bedre hvorfor man bruker det, at det er ikke bare for gøy på en måte. Det er for å forstå store tall bedre.»

Lærer: «Ble det mer motiverende da?»

Anine: «Ja, man gjør det ikke bare for å regne på en annen måte. Det blir lissom brukt.»

Hedvig: «Etter at jeg hadde lest, det var da jeg skjønte hvorfor vi hadde lært det, på en måte. For i begynnelsen skjønte jeg ikke poenget med å vite hvor mange ganger et tall kunne deles på 10, men så skjønte jeg at det var for å slippe å ha så store og små tall. Da fikk jeg mye mer forståelse for hvorfor vi lærte det.»

Lærer: «Synes du det var motiverende?»

Hedvig: «Ja, det hjalp jo på en måte.»

Lærer: «Hvis vi hadde fjernet dette delkapitlet, hadde du blitt mindre motivert da fordi du ikke så bruksområdet?»

Hedvig: «Ja, kanskje litt. Fordi jeg skjønt ikke helt vitsen med å lære det… men når jeg så det, skjønte jeg mer vitsen med det.»

Bruken av induktive oppgaver var det også delte oppfatninger om. Fredrik fant måten å jobbe på vanskelig og pekte spesielt på at logaritmen til en kvotient ble problematisk. Jentene i intervjuene var mer positive.

> *Anine: «Jeg synes det var greit fordi da måtte du forstå det selv for å komme fram til svaret. Jeg synes det var en grei måte å jobbe på.»*
>
> -----
>
> *Lærer: «Ellers var det jo slik at dette oppgavesettet hadde en del oppgaver hvor du selv måtte formulere noen regler, slik som her. Hvordan synes du vanskelighetsgraden ved dette var?»*
>
> *Hedvig: «Det synes jeg var ganske lett, egentlig. Men jeg, …, først synes jeg det var vanskelig fordi jeg trodde svaret var vanskeligere enn det egentlig var. Siden vi hadde jo på en måte allerede laget en sånn der formel, så jeg trodde det skulle være noe annerledes. Men det var jo egentlig bare det samme.»*

Hedvig gir altså uttrykk for at det å formulere en regel er det samme som det å komme med eksempler på regelen.

4.2.4 Oppsummering av funn fra intervjuer

Funnene fra intervjuene samsvarer i stor grad med funnene fra observasjonene og er oppsummert dette:

- Ved introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon ble definisjonen av logaritmer værende i minnet over tid, og kunne enkelt vurdere størrelsesorden til logaritmen til tall. Spesielt gjaldt dette logaritmen til tall større enn 1.
- «Cover-up»-metoden er effektiv for de som får med seg metoden, men noen elever gjør ikke det.
- Undervisningsopplegget klarte ikke gjennom de induktive oppgavene å bygge bro til logaritmereglene og var på den måten ineffektiv.
- Det er ukjent for elever å formulere matematisk regler på egenhånd og elevene klarte ikke å formulere og anvende logaritmeregler. De induktive oppgavene i undervisningsmateriellet fungerte derfor ikke, til tross for at noen selv mener at innholdet i reglene er enkelt.
- Delkapitlet om applikasjon av logaritmer gav ulik effekt på ulike elever. Noen elever signaliserte likegyldighet til applikasjon av logaritmer, noen få ble motivert av dette.

En elev beskrev kapitlet som forvirrende og forstyrrende, og mente det med fordel kunne fjernes.

4.3 Lydopptak

4.3.1 Lydopptak fra timer i eksperimentell gruppe

Det kan virke som båndopptakerens tilstedeværelse til tider hemmer deres naturlige oppførsel og diskusjoner. I lydopptakene er mulig å høre at det er betydelig mer diskusjoner blant medelevene enn blant paret som hadde lydopptakeren hos seg. Likevel var det deler av lydopptakene som vitner om at elevene finner definisjonen uproblematisk og har få problemer med å vurdere logaritmen til positive tall større eller lik 1. Svaret kom raskt da de skulle vurdere lg1.

Helle: «Det er jo ingen nuller bak her, så det må jo være 0.

Tilsvarende var det uproblematisk å vurdere logaritmen til tall. I vurderingen av $lg\ 70$ fant følgende dialog sted.

Helle: «Det er jo enkelt å tenke det, men skal vi skrive det?»

Andrea: «Det ligger jo mellom 1 og 2»

Senere løser de en oppgave hvor de blir bedt om å forklare hvorfor verdien 3,64 er en rimelig verdi for $lg\ 4365$.

Helle: «Nå skal vi forklare hvorfor verdiene er rimelige.»

Andrea: «Hva skriver vi her?

Helle: «Fordi å dividere 3 ganger er for lite og 4 ganger er for mye.»

I den induktive oppgave 5.7.4 skulle elevene først finne logaritmen til tall i en tabell som inneholdt både tierpotenser og tall som ikke var tierpotenser. De gav følgende ordveksling:

Helle: «Vi må ta det på kalkulator, ikke sant?»

Andrea: «Noen av dem kan du ta i hodet.»

Helle: «Ja, ja. Tror du jeg er dum, eller?»

Dermed fikk jeg flere bekreftelser på at å vurdere størrelsesorden på logaritmen tierpotenser ikke bød på store problemer.

Mer problematisk ble det da de matematisk skulle formulere og begrunne egne regler. I samme oppgave skulle elevene forklare hvorfor lg(a·b) ikke er lik lg a · lg b og selv finne sammenhengen mellom lg(ab), lg a og lg b. Blant annet blir paret i tvil om det er behov for å finne et uttrykk for lg a · lg b. Av lydopptakene går det fram at mange elever har store behov for assistanse på disse oppgavene. Det gjør at læreren ser det som nødvendig å behandle spørsmålene i fellesskap i klassen. Dette undergravde samtidig ideen bak denne induktive oppgaven, og oppgaven fikk ikke på den måten ikke ønsket utfall. Tilsvarende skjebne fikk den induktive oppgaven med logaritmen til et produkt.

Den ene av elevene får likevel med seg ideen bak sammenhengene fra lærerens gjennomgang i fellesskap. Dette går fram når hun omtaler logaritmen til produkt og potens som *«den der er det pluss og den der så er det gange.»* Hun forklarer partneren sin hvordan hun vurderer $lg631^4$.

> *Andrea: «631 i fjerde betyr at du skal gange med 4.»*
>
> *Helle: «Hæ?»*
>
> *Andrea: «Der. Så har du 631 i fjerde, og da skal du jo gange det med fire. Du skal jo plusse de $lg631$ fire ganger.»*

I en annen oppgave om sammenhengen mellom $lg6$, $lg600$ og $lg60\ 000$ fant følgende samtale sted:

> *Helle: «Kan vi skrive sånn som dette? «Tallet foran komma avhenger av hvor mange nuller tallet har. Det hadde vært det samme tallet som hvis tallet 6 hadde vært tallet 1. Tallet får likevel like desimaler fordi alle tallene starter med samme tallet 6»».*

Lydopptakene viser at de diskuterer kun hvordan setningen skal formuleres med ord og det er ingen snakk formulering med symboler. De skiller heller ikke mellom beskrivelsen av sammenhengen og begrunnelsen for sammenhengen fordi når Helle i neste oppgave leser at hun skal begrunne sammenhengen utbryter hun: *«Hæ. Har vi ikke gjort dette i b) da?»*.

I diskusjonen om logaritmer til tall mellom 0 og 1 ($lg10^{-n}$), finner jeg også at de forsøker å formulere setninger med ord og ikke med symboler. Selv etter at lærer har gått langt i å hinte til hva løsningen kan være, forble det vanskelig.

> *Helle: «Hvis vi skriver null komma n er lik minus n…»* $(-0,n = -n)$
>
> *Andrea: «… er lik minus n?»*

Helle: «Ja, ... må skrive lg da.»

Andrea: «Du skriver null komma n?

Helle: «Ja, men blir ikke det veldig rart?»

Andrea: «Ja, men det er det som er rett. Er det ikke det?»

Logaritmelikninger ble introdusert for elevene i oppgavene allerede første undervisningstime uten at «cover-up»-prinsippet var blitt nevnt eller brukt. Dette elevparet fant selv ut av «cover-up»-prinsippet selv om de ikke gjorde selve tildekkingen. Da de diskuterte løsningen av $\lg(4x + 5) = 0$, kan følgende dialog høres:

Helle: «Åh, ja. Vi må jo bare få dette til å bli 1, siden det står 0 på andre siden. Så vi må bare få dette til å bli 1»

Andrea: «Hvordan gjør vi det?»

Helle: «Det vet jeg ikke helt. Vi skal få det til å bli 1. Kan vi få det til å bli det på noen måte? Ja. Det kan vi jo, gange det med minus 1. Fire ganger minus en blir minus fire, og så pluss fem er lik 1.»

Imidlertid viser opptakene at de var svært usikre på hvordan de skulle føre dette resonnementet formelt, og konfererte med en annen medelev for å få hjelp til dette.

Lydopptakene inneholder ikke noe som kan belyse effekten av applikasjoner av logaritmer.

4.3.2 Oppsummering av funn fra lydopptak

En syntese av funnene mine fra observasjonene gir følgende:

- Elevene det ble gjort lydopptak av kunne enkelt vurdere størrelsesorden til logaritmen til tall kort tid etter introduksjonen av logaritmer gjennom repetert divisjon. Spesielt gjaldt dette logaritmen til tall større enn 1.
- Elevene det ble gjort lydopptak av brukte intuitivt «cover-up»-metoden på enkle logaritmelikninger etter introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon.
- Elevene klarte ikke å formulere, begrunne og anvende logaritmeregler etter induktive oppgaver i innlæringen.
- Elevene klarte ikke å skille mellom å finne en sammenheng og begrunnelsen for sammenhengen i induktive oppgaver.

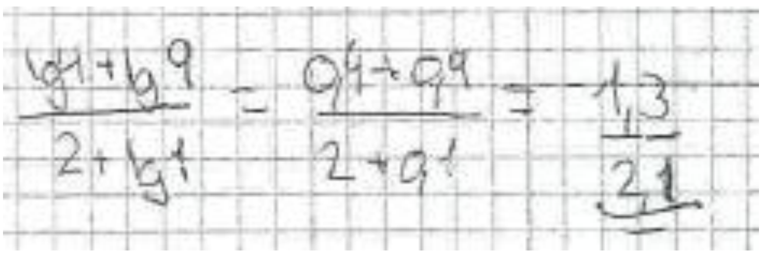
- Materialet belyser ikke forskningsspørsmålet om applikasjon av logaritmer.

4.4 Tester

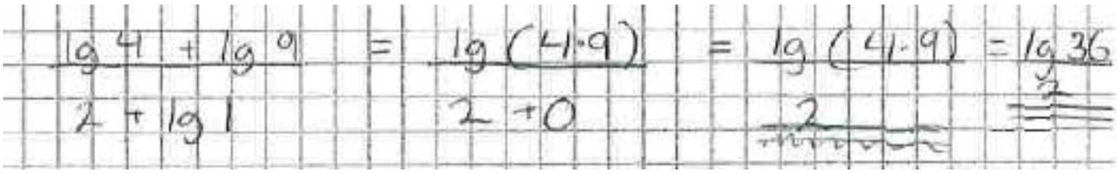
Jeg vil først gi et overblikk over antall elever som besvarte test-oppgavene korrekt. Deretter vil jeg presentere resultatene som jeg mener er av størst betydning for å avgjøre elevenes begrepsforståelse av logaritmebegrepet gjennom å se om elevene kan evaluere $lg0$ og hvorvidt elevene ser på uttrykkene $lg9 + lg4$ og $lg13$ som ekvivalente.

4.4.1 Besvarelser på oppgave 1

Oppgaven besto i å skrive uttrykket $\frac{lg4+lg9}{2+lg1}$ så enkelt som mulig. Andelen av elever som klarte å løse denne oppgaven riktig var svært lav. Faktisk var det kun en elev i kontrollgruppen og en elev i den eksperimentelle gruppen som klarte å besvare oppgaven helt korrekt. Det var de to samme som svarte korrekt både i den første testen og «retention-testen». Svarene som ble godkjent som korrekte var $lg6$ og $lg2 + lg3$ uten at det var feil i mellomregningen. I begge gruppene var det hele spennet fra dem som ikke viste noe tegn til begrepsforståelse for logaritmer til dem som så ut tegn å ha god forståelse for begrepet. Dette gjaldt både i testene og «retention»-testene. Det bør bemerkes at blant de svarene som jeg kategoriserte som ikke-korrekte, var det likevel stor forskjell. Eksempler på ytterpunktene i dette spennet kan ses gjennom besvarelsene gjengitt under.



Figur 1. Figuren viser en besvarelse blant de ikke-korrekte svarene hvor eleven ikke viser tegn til forståelse for logaritmebegrepet. Besvarelsen er fra elev i fra eksperimentell gruppe.



Figur 2. Figuren viser en besvarelse hvor eleven viser tegn til forståelse for logaritmebegrepet til tross for at besvarelsen er kategorisert som ikke-korrekt. Besvarelsen er fra elev i fra eksperimentell gruppe.

Dette spennet fant jeg ved alle de fire testtidspunktene, og ingen av gruppene med besvarelsene så ut til å skille seg ut i så måte.

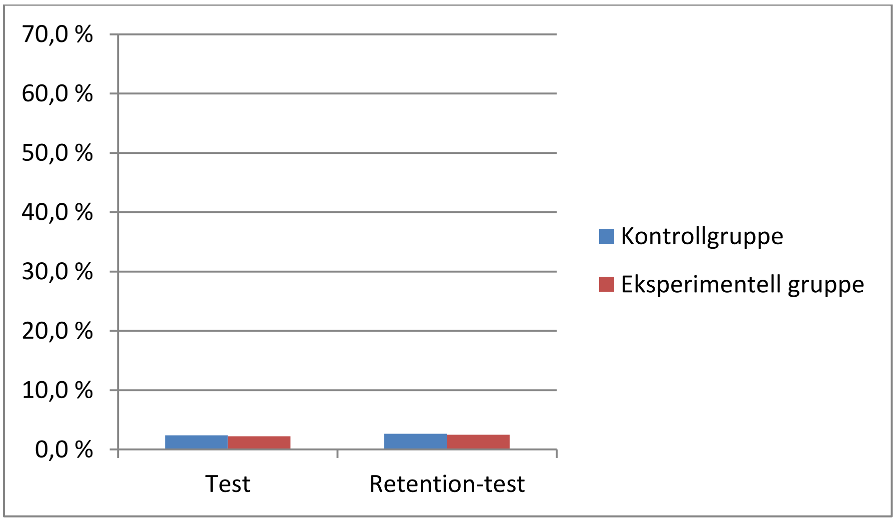


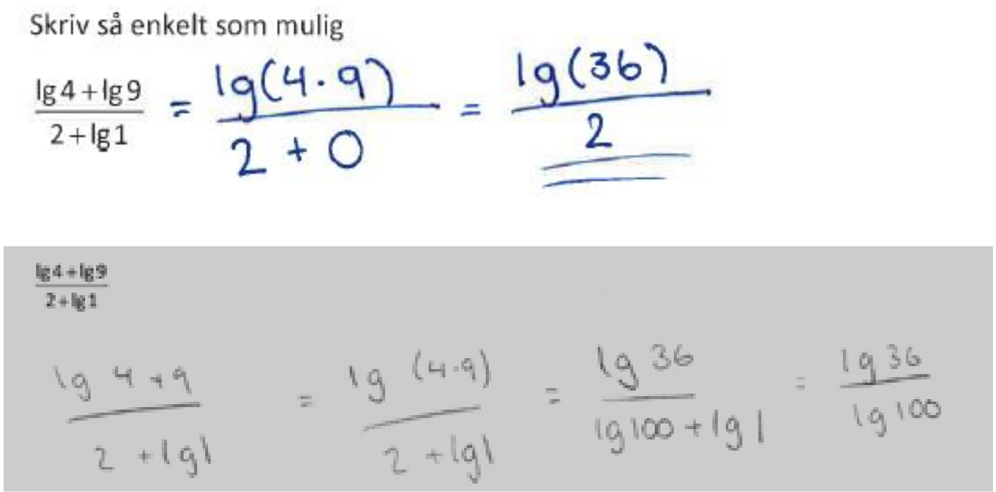
Diagram 1. Diagrammet viser andel elever som svarer korrekt på testoppgave 1.

Når man ser på antall prosent som besvarte oppgaven korrekt, ble resultatene som vist grafisk over og i tabellen under. De små avvikene i prosent mellom testen og «retention»-testen skyldes at noen elever var fraværende dagen for «retention»-testen og fikk derfor ikke tatt denne. Med hensyn til score viste Student-t testen naturligvis heller ingen forskjell mellom gruppene.

	Test	Retention-test
Kontrollgruppe	2,4 %	2,6 %
Eksperimentell gruppe	2,2 %	2,5 %
t-verdi	0,961	0,971

Tabell 5. Tabellen viser prosentandelen som besvarte testoppgave 1 korrekt, samt t-verdi ved Student-t på dette datamaterialet.

Til denne oppgaven fant jeg besvarelser som ikke ble bedømt som riktige til tross for at eleven både kjente til at $\lg 1 \; = \; 0$ og kunne bruke logaritmeregelen $\lg(ab) = lga + lgb$. Dette kunne for eksempel være at eleven ikke klarte å skrive lg36 som 2lg6, og dermed ikke klarte å forkorte.



Figur 4. Figuren viser to besvarelser som er kategorisert som ikke-korrekt til tross for at eleven både behersker $\lg 1 \; = \; 0$ og logaritmeregelen $\lg(ab) = lga + lgb$. Begge eksemplene er fra eksperimentell gruppe.

Jeg registrerte derfor hvor mange besvarelser det går fram at $lg1 = 0$ og hvor mange besvarelser hvor eleven håndterer $lg4 + lg9$ riktig. Med det siste mener jeg at eleven enten gjør uttrykket om til $lg36$ eller $2lg2 + 2lg3$. Data på dette finner du i diagrammene og tabellene under.

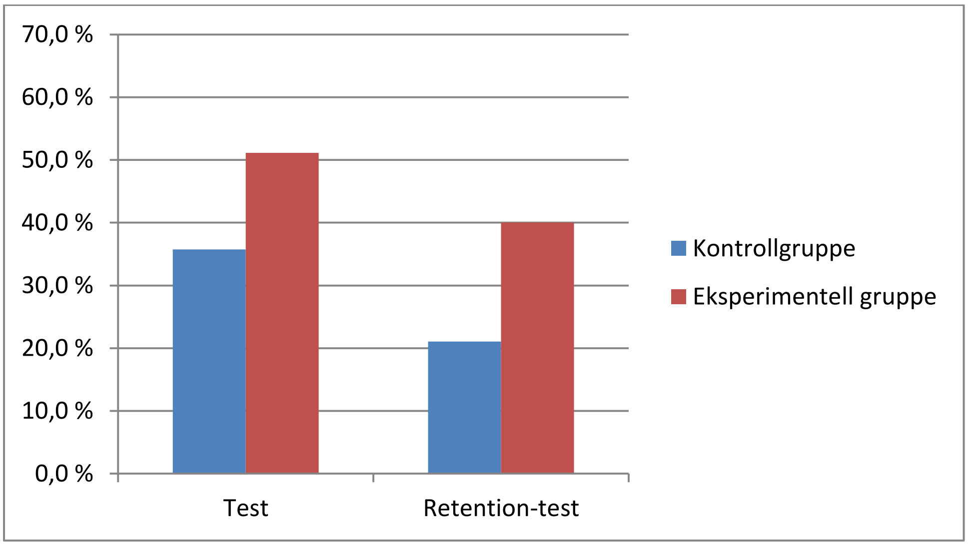


Diagram 2. Diagrammet viser andel besvarelser det går fram at $lg1 = 0$ på testoppgave 1.

	Test	Retention-test
Kontrollgruppe	**35,7 %**	**21,1 %**
Eksperimentell gruppe	**51,1 %**	**40,0 %**
t-verdier	**0,151**	**0,070**

Tabell 6. Tabellen viser prosentandel av besvarelser det går fram at $lg1 = 0$ på testoppgave 1, samt t-verdi ved Student-t på dette datamaterialet.

Fra dette datamaterialet er det altså ikke grunnlag for å hevde at gruppene presterer ulik til tross for ulik skåre. Et mer nyansert bilde av hvordan hele oppgave 1 ble besvart, kan ses i diagrammet under.

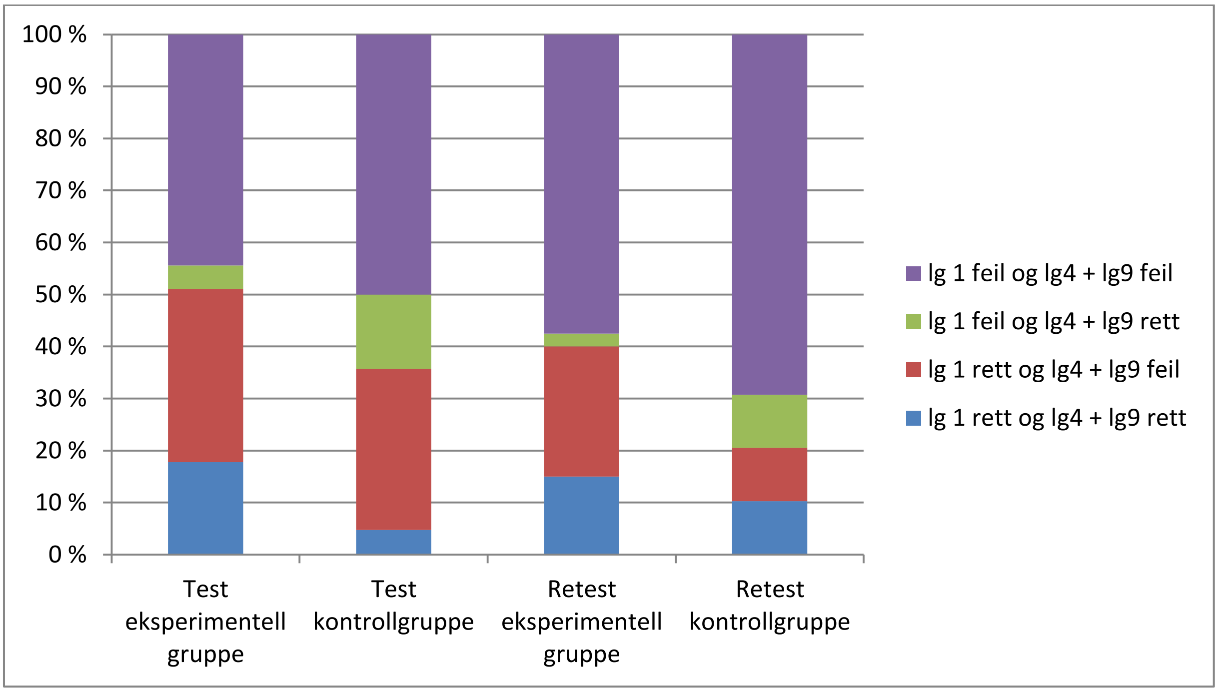


Diagram 3. Diagrammet viser fordelingen i av besvarelser det går fram at $lg1 = 0$ og håndteringen av $lg4 + lg9$ i oppgave 1.

4.4.2 Besvarelser på oppgave 2

I denne oppgaven skulle likningen $\lg(2x + 3) = 1$ løses. Andelen av elever som besvarte oppgaven korrekt kan ses i diagrammet under og tabellen under.

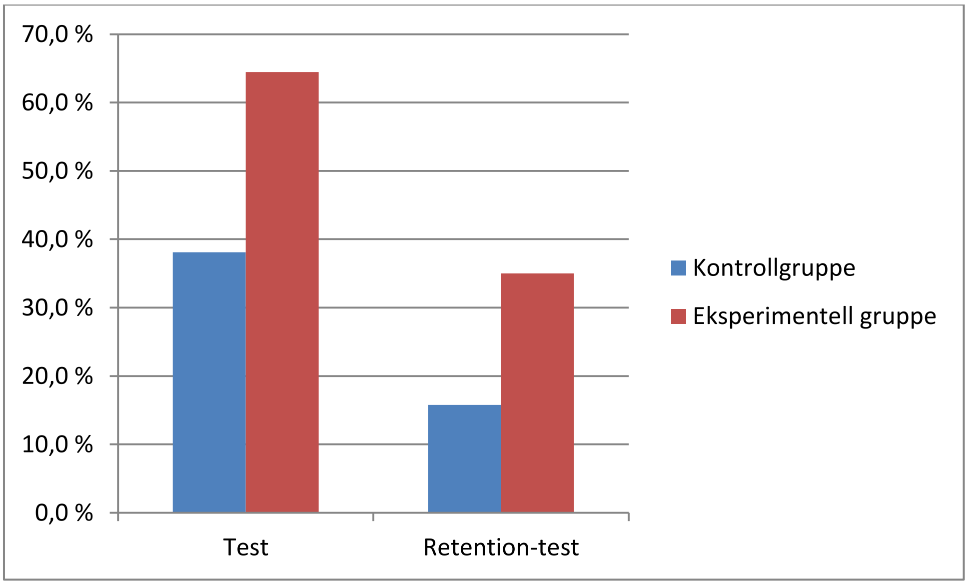


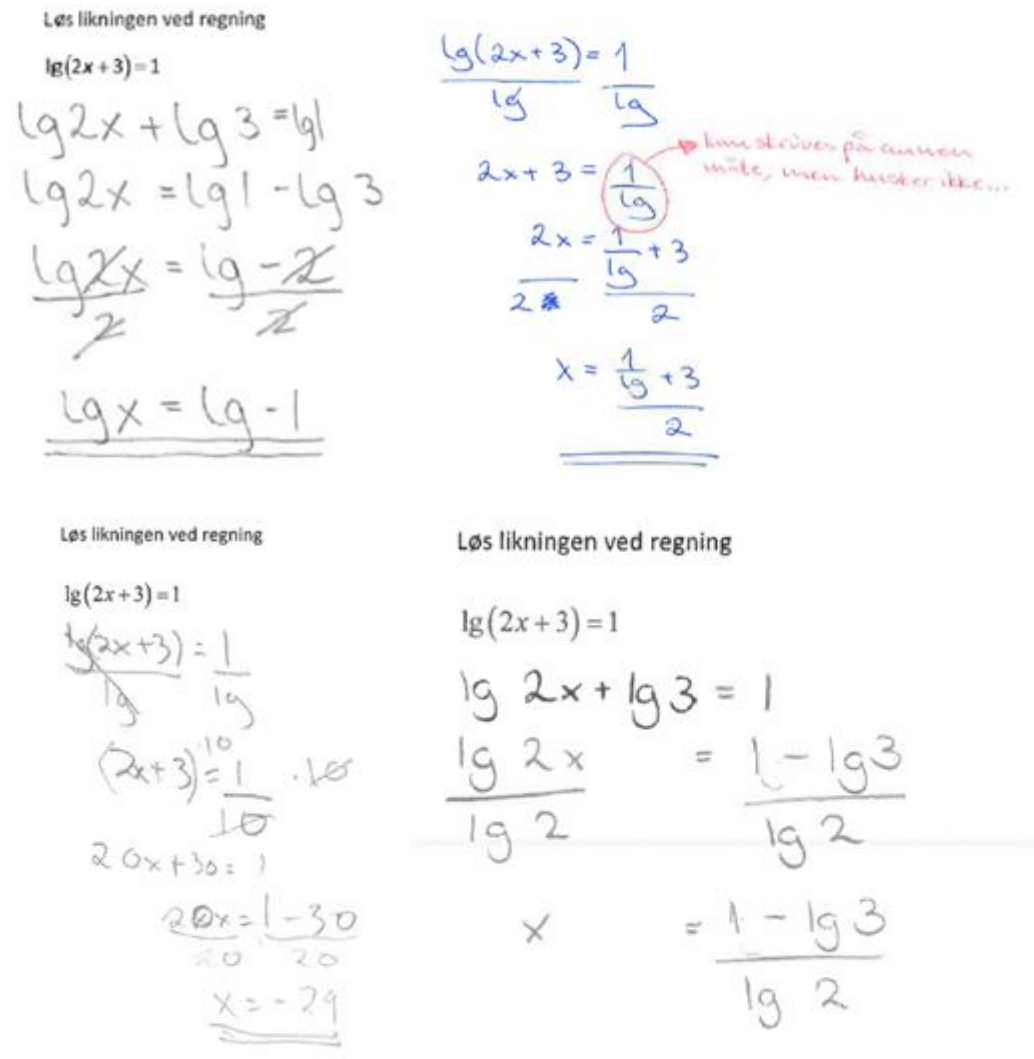
Diagram 4. Figuren viser andel elever som svarer korrekt på testoppgave 2.

	Test	Retention-test
Kontrollgruppe	38,1 %	15,8 %
Eksperimentell gruppe	64,4 %	35,0 %
t-verdi	0,117	0,005

Tabell 7. Tabellen viser prosentandelen som besvarte testoppgave 2 korrekt, samt t-verdi ved Student-t på dette datamaterialet.

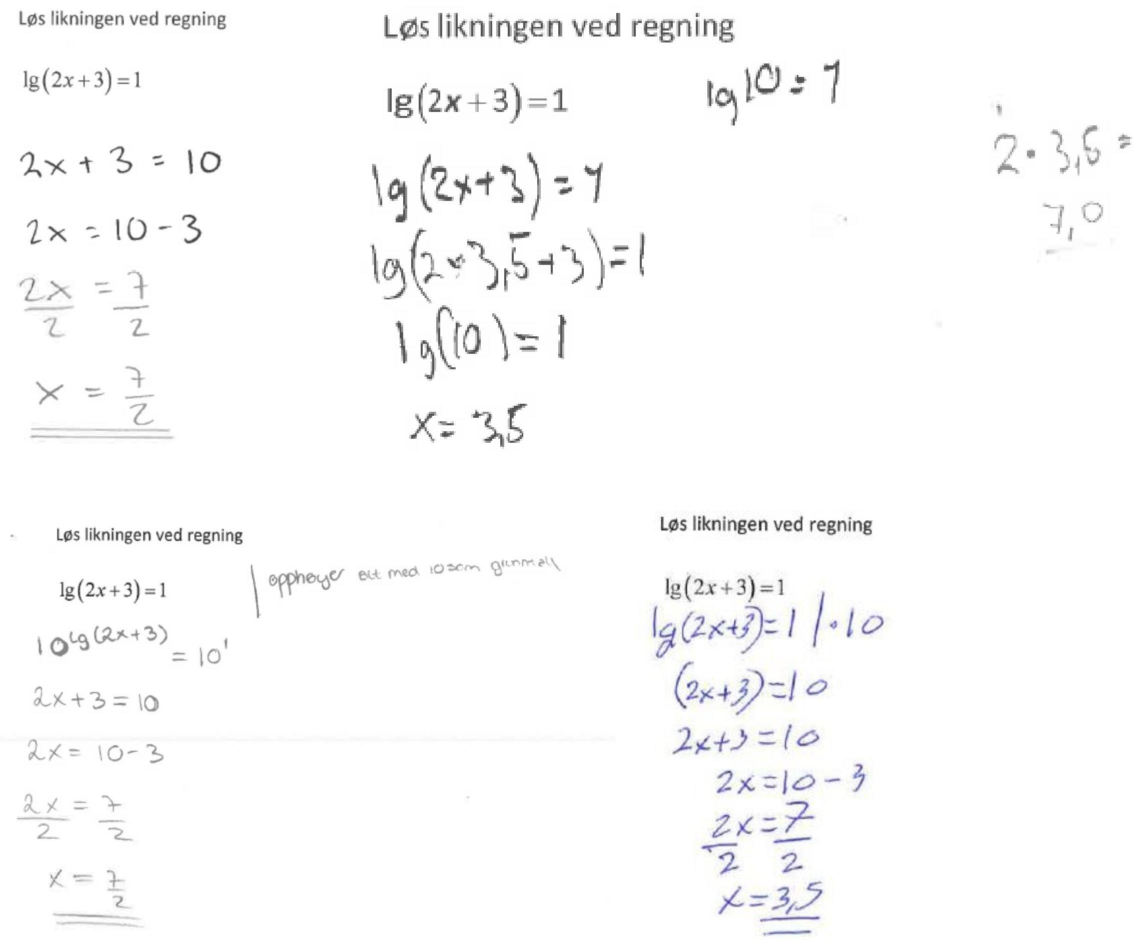
Elevene i den eksperimentelle gruppen besvarte med andre ord signifikant bedre på oppgaven i «retention»-testen enn elevene i kontrollgruppen når man bruker signifikansnivå på 0,05. Til tross for at prosentandelen med korrekte svar er høyere på første testen, er den ikke signifikant bedre ved bruk av samme signifikansnivå.

På denne oppgaven ble åpenbart kun det korrekte svaret $x = \frac{7}{2}$ akseptert. Blant de ikke-korrekte besvarelsene på denne oppgaven, pekte ingen forsøk på løsning i retning av bedre forståelse for logaritmebegrepet enn andre.



Figur 5. Figuren viser 4 besvarelser fra oppgave 2 blant de ikke-korrekte svarene. De to øverste er fra eksperimentell gruppe og de to nederste er fra kontrollgruppen.

En vanlig feil var å erstatte venstre side av likningen med lg $2x + lg3$, mens de besvarelsene som ble vurdert som korrekte var nesten utelukkende av typene man ser til venstre i figur 6. Både kontrollgruppen og den eksperimentelle gruppen inneholdt regnestykker med svak og/eller feil formell føring. Regnestykkene på høyre side i figur 6 er eksempler på dette. Jeg har valgt å kategorisere disse som korrekte svar til tross for svakheter i den formelle føringen av regnestykket.



Figur 6. Figuren viser tre besvarelser som kategorisert som korrekte på oppgave 2. De to øverste besvarelser er fra eksperimentell gruppe. De to nederste besvarelsene er fra kontrollgruppen.

4.4.3 Besvarelser på oppgave 3

Oppgaven besto i å løse likningen $2^{x+1} - 3 = 5$. Andelen av elever som besvarte oppgaven korrekt kan ses i diagrammet under og tabellen under.

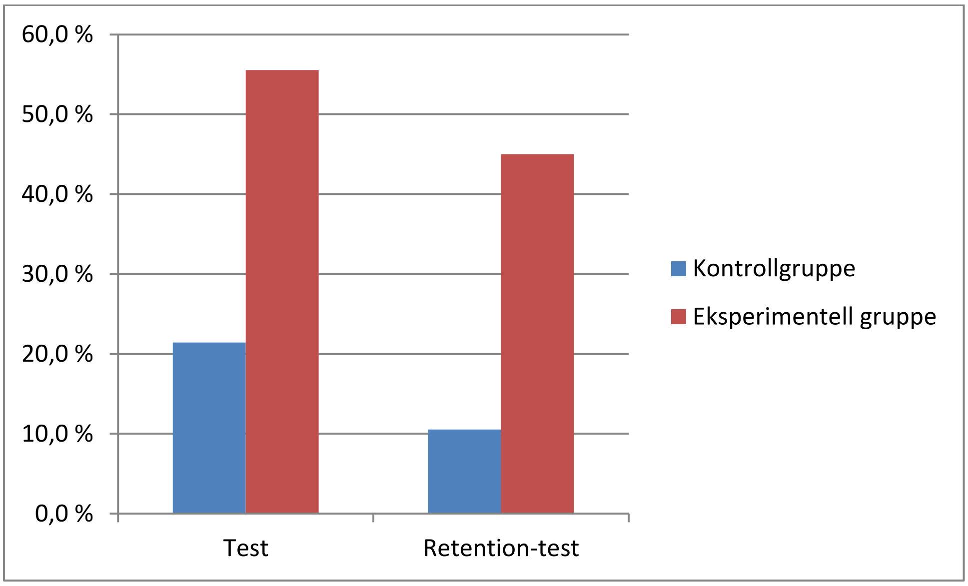


Diagram 5. Figuren viser andel elever som svarer korrekt på testoppgave 3.

	Test	Retention-test
Kontrollgruppe	21,4 %	10,5 %
Eksperimentell gruppe	55,6 %	45,0 %
t-verdier	0,00085	0,00074

Tabell 8. Tabellen viser prosentandelen som besvarte testoppgave 2 korrekt, samt t-verdi ved Student-t på dette datamaterialet.

Resultatet viser at elevene i den eksperimentelle gruppen besvarte signifikant bedre på oppgaven enn elevene i kontrollgruppen både i test og «retention»-test. Besvarelsene viser imidlertid at elevene i svært liten grad bruker logaritmer for å løse oppgavene. Eksemplene på neste side illustrerer dette.

$2^{(x+1)}-3=5$

$2^{(x+1)}-3=5$

$2^{(x+1)}=5+3$

$2^{(x+1)}=8$

Cover-up metoden

$x+1=3$

$x=3-1$

$\underline{\underline{x=2}}$

$2^{(x+1)}-3=5$

$2^{(x+1)}=8$

$x+1=3$ fordi $2^3=8$

$\underline{\underline{x=2}}$

$2^{(x+1)}-3=5$

$2^{(2+1)}-3=5$

$2^3-3=5$

$(2\cdot 2\cdot 2)-3=5$

$8-3=5$

$\underline{\underline{x=2}}$

$x-3=5$

↳ x må ha verdi lik 8

Figur 7. Figuren viser 3 besvarelser som kategorisert som korrekte på oppgave 3, alle fra den eksperimentelle gruppen..

Både i den eksperimentelle gruppen og kontrollgruppen var det slik at elevene som valgte denne strategien var suksessfulle, mens elever som brukte logaritmeregning i mindre grad kom i mål. Logaritmeregningen førte i noen tilfeller til at eleven endte med svaret $\frac{lg8}{lg2}-1$. I kontrollgruppens test og «retention»-test gjaldt dette henholdsvis 5 og 2 elever, mens for i den eksperimentelle gruppen gjaldt dette kun 1 elev i første test. Jeg valgte å inkludere disse svarene blant de korrekte.

4.4.4 Oppsummering av funn fra tester

Resultatene fra testene kan oppsummeres i tabellen under.

Oppgave	**Test**	**Retention-test**
$\frac{lg4 + lg9}{2 + lg1}$	Ingen signifikant forskjell	Ingen signifikant forskjell
$lg(2x + 3) = 1$	Ingen signifikant forskjell	Signifikant bedre
$2^{x+1} - 3 = 5$	Signifikant bedre	Signifikant bedre

Tabell 9. Tabellen viser hvilke oppgaver elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon besvarer signifikant forskjellig sammenliknet med kontrollgruppen.

4.5 Konklusjon

Spørsmålene jeg forsøker å besvare i denne studien er følgende:

1) Hva er karakteristisk for en effektiv metode for innlæring av logaritmer med tanke på begrepsforståelse?
   a) I hvilken grad hjalp repetert divisjon elevene i innlæringen av logaritmer?
   b) I hvilken grad hjalp «cover-up»-metoden elevene i innlæringen av logaritmer?
   c) I hvilken grad hjalp induktive oppgaver elevene i innlæringen av logaritmer?
   d) I hvilken grad hjalp applikasjon av logaritmer elevene i innlæringen av logaritmer?

2) Er metoden hvor elever blir introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon bedre enn introduksjon gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?
   a) Vil elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon skåre høyere på test enn elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?
   b) Vil elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon skåre høyere på «retention»-test enn elever som har blitt introdusert for logaritmer gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker?

4.5.1 Konklusjon forskningsspørsmål 1

Det mest karakteristiske med metoden som er benyttet i innlæringen av logaritmer, er definisjonen gjennom repetert divisjon. Funnene mine peker entydig i retning av at definisjonen gjennom repetert divisjon er lettere å forholde seg til enn den som tradisjonelt blir brukt. Med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* og deretter telling av antall steg har en prosess-orientert mening som også er tilgjengelig for svakere elever. Telling og divisjon med 10 er kjent fra barneskolen, mens den tradisjonelle definisjonen er objekt-orientert og baserer seg på potensregning. Hvis elevene klarer å svare på hvorfor $lg1=0$ og $lg10=1$, blir dette utsagn som er mye lettere å huske. Elevene må ikke memorere dette som separate fakta (som regler uten grunn). I stedet kan de alltid rekonstruere denne kunnskapen ved hjelp av metoden med repetert divisjon. Dette reduserer mengde fakta som må memoreres. Disse karakteristikkene ser ut til å være viktig egenskaper for en effektiv metode for innlæringen av logaritmer. «Cover-up»-metoden ser ut til å være et effektivt pedagogisk «triks», og gir i kombinasjon med den nye definisjonen gode resultater med hensyn til elevers evne til å løse enkle logaritmelikninger. Alle mine data indikerer dette. Disse elevene skårer også signifikant bedre på en enkel eksponentiallikning. Til en viss grad ser dette ut til å kunne tilskrives «cover-up»-metoden.

Undervisningsopplegget som ble konstruert i forbindelse med denne studien inneholdt noen induktive oppgaver hvor tanken var at elevene selv skulle oppdage og formulere logaritmeregler. Disse var ikke effektive i den form de ble brukt på den eksperimentelle gruppen. Elevene hadde problemer med å formulere, begrunne og anvende logaritmeregler etter opplæringen. Oppgavene var utilstrekkelige til å bygge bro fra repetert divisjon til logaritmereglene. De ikke-intuitive logaritmereglene skapte derfor fortsatt problemer for elevene og bruk av feilaktige regler («mal-rules») var fortsatt å finne i den eksperimentelle gruppen på lik linje med kontrollgruppen.

I forsøk på å gjøre logaritmeregningen virkelighetsnær inneholdt opplæringsmateriellet et delkapittel om applikasjon av logaritmer. I den grad kapitlet om applikasjon av logaritmer har hatt noen effekt, har det vært på motivasjonen. Funnene mine på dette feltet spriker. De fleste så på dette kapitlet med likegyldighet. Noen få uttrykte at det var motiverende, mens en elev synes det var forvirrende og med fordel kunne fjernes. På den måten må dette virkemidlet sies å ha begrenset effekt til tross for den økte motivasjonen hos noen.

4.5.1 Konklusjon forskningsspørsmål 2

Alt i alt indikerer funnene mine at metoden hvor elever blir introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon er bedre enn introduksjon gjennom definisjonen norske læremidler i størst grad bruker. Funnene tyder på at definisjonen av logaritmer gjennom repetert divisjon var tettere knyttet til kjent kunnskap og ga dermed bedre grunnlag for at definisjonen av logaritmer ble værende i minnet over tid. Definisjonen som bygger på en prosess gjorde den lettere tilgjengelig, spesielt for de svakere elevene. Elevene klarte lett å gjengi innholdet i denne definisjonen, selv over tid. Dette ga seg utslag i bedre evne til å vurdere størrelsesorden til logaritmen til tall enn hos elever som har blitt introdusert til logaritmer gjennom tradisjonell definisjon. Å begrunne hvorfor $lg1=0$, $lg10=1$ og hvorfor $lg80$ er et tall mellom 1 og 2 bydde på få problemer for elevene i disse gruppene. Man kan åpenbart ikke komme til 1 gjennom repetert divisjon med utgangspunkt i et negativt tall eller null. Dermed ble det innlysende at logaritmefunksjonen ikke kunne brukes på slike tall. Metoden ga altså mening til logaritmer og reduserte mengden med fakta om logaritmer som måtte memoreres.

En definisjon gjennom repetert divisjon kombinert med «cover-up»-metoden viste seg spesielt effektiv med tanke på evne til å løse logaritmelikninger. I testen som målte langtidslæringen, besvarte elevene som hadde brukt disse innlæringsmetodene signifikant bedre på likningen $\lg(2x+3)=1$ enn kontrollgruppen i en måling 7 uker etter emnet er undervist. Besvarelsene på oppgaven med eksponentiallikning er signifikant bedre for elevene som ble introdusert for logaritmer gjennom repetert divisjon enn for elevene i kontrollgruppen, både når jeg testet elevene like etter emnet hadde blitt undervist og etter 80 dager. Dette bør imidlertid ikke tilskrives introduksjonsmetoden med repetert divisjon. Oppgavens utforming viser i større grad om elevene forstår hva en likning er eller ikke, og besvarelsene bekrefter i større grad at «cover-up»-metoden er effektiv. På andre områder var jeg ikke i stand til å påvise signifikante forskjeller i besvarelsene.

5 Diskusjon

5.1 Tilbakeblikk

Ettersom denne studien har vært skrevet over et lengre tidsrom enn det som er normalt for denne typen oppgaver, gav det meg mulighet til å sammenlikne grupper over to skoleår. For å ivareta denne muligheten måtte jeg bruke besvarelser og oppgaver som var gitt til prøve desember 2013 ved skolen studien foregår. Utformingen av disse oppgavene var derfor utenfor min kontroll og ikke optimale med hensyn til å vurdere begrepsforståelsen hos elevene.

I ettertid ser jeg at jeg med fordel kunne ha gjort større endringer som følge av pilotgruppens problemer med å håndtere de induktive oppgavene. På den måten kunne jeg muligens klart å forbedre undervisningsopplegget på dette området. Samtidig har jeg fortsatt ikke et godt svar på hvordan man skal bygge broen til logaritmereglene fra definisjonen, uansett hvilken definisjon man tar utgangspunkt i. Jeg er klar over andre innfallsvinkler til logaritmer, for eksempel gjennom eksponentiell vekst (Webb, van der Kooij, & Geist, 2011), gjennom historisk perspektiv (Panagiotou, 2011) eller andre metoder (Hammack & Lyons, 1995). Logaritmereglene ser likevel ut til foreløpig å forbli et vedvarende problem for mange elever, og mer forskning på hvordan dette best kan tilnærmes er nødvendig.

5.2 Begrensninger i funn og resultater

Til tross for at jeg har tilstrebet å være nøytral, er det ikke til å stikke under stol at min egen deltakelse som lærer i en av gruppene i studien kan utilsiktet ha påvirket alt fra undervisningen til måten spørsmålene i intervjuene er stilt. Det faktum at funn og resultat fra begge de eksperimentelle gruppene var overraskende like var derfor tilfredsstillende.

I analysen av testene ble det brukt Student t-test. Det skal bemerkes at gruppene som er involvert ikke er ekte randomisert, men kun et klusterutvalg ettersom gruppene er identiske med gruppene slik de er fordelt av skoleadministrasjonen ved skolen. Designet er på ingen måte «blindt». Man må også ta høyde for resultatene kan ha blitt påvirket av elevene holdning til prosjektet og av at elevene blir observert. Endringer i introduksjonsmetode for logaritmer er implisitt til det bedre, og skaper forventning om bedrede resultater. Denne implisitte antagelsen kan også ha påvirket resultatene.

5.3 Pedagogiske implikasjoner

Til tross for at jeg har funnet svakheter i det utviklede materiellet med hensyn til innlæringen av logaritmereglene, mener jeg ideen om å bruke repetert divisjon i innlæringen kombinert med «cover-up»-metoden er en forbedring fra det alle store norske læreverk legger opp til i dag. Selv uten en løsning på hvordan overgangen til logaritmereglene bedre skal utformes, kan introduksjonsmetoden og definisjonen brukes. Uansett er det mulig å introdusere logaritmer gjennom repetert divisjon. Innen logaritmereglene kan man utlede den tradisjonelle definisjonen av logaritmer og derfra bruke tradisjonelt løp. Jeg ser ikke på dette som en optimal løsning, men det viser at denne veien uansett er farbar som en introduksjonsmetode.

Funnene mine viser at «Cover-up»-metoden er en virkningsfull teknikk i matematikkundervisningen. Samtidig er teknikken underkommunisert i didaktikk-opplæringen. Selv var jeg riktignok kjent med teknikken, men ikke fra didaktikk-kursene fra universitetet. Jeg har trolig lært teknikken gjennom å ha sett andre lærere bruke teknikken eller gjennom egenerfaring. Hvilken av disse husker jeg ikke. Denne studien har imidlertid vist at miljøet for matematikkdidaktikk i Norge har behov for å få på plass vokabular for å utvikle oss bedre på denne fronten. Miljøet ved UiA foreslo at jeg kunne bruke «overdekningsmetoden» for «cover-up»-metoden. Problemet er det ikke er innarbeidet som begrep. Et google-søk på «overdekningsmetoden» og «matematikk» gir få treff, og ingen av dem relatert til emnet her under diskusjon. Søker man imidlertid på den engelske varianten, får man millioner av treff og alle topp-resultatene handler om emnet vi her diskuterer. Samme problemstilling gjelder for «retention» og «retention»-test. En kollega av meg foreslo «langtidslæring», men jeg er fortsatt usikker på om det er fullstendig dekkende. Poenget er at vi ikke har fullgode ord for å beskrive dette, noe som er en nødvendighet for fruktbare diskusjoner mot bedre løsninger.

5.4 Videre forskning

I forskning på matematikk didaktikk kan metoden med repetert divisjon beskrives gjennom distinksjonen mellom prosess på den ene siden og objekt på den andre siden. Denne distinksjonen ble først beskrevet av Anna Sfard (Sfard, 1991), en professor innen matematikk utdanningen i Haifa i Israel. Historisk sett er det et faktum at de fleste begreper innen algebra har utviklet seg fra en prosess til objekt og har vært den avgjørende tankegangen bak utviklingen av læremateriellet. Til tross for at metoden har vist seg lovende på noen områder, er det et behov for å forbedre overgangen fra repetert divisjon til logaritmereglene. Jeg fant fortsatt mange eksempler på «visual salient rules» eller «mal-rules» (Kirshner & Awtry, 2004). Som lærer og sensor i mer enn 16 år vet jeg at dette er et problemområde i undervisningen i videregående skole. Jeg har etter hvert opparbeidet meg mer erfaring med å tilnærme seg logaritmer gjennom repetert divisjon. Eksempelvis forsøkte jeg nylig å bruke metoden som del av repetisjon av logaritmelikninger før eksamen i en gruppe matematikk S1. Denne type erfaringer, kombinert med funnene i denne studien, gjør meg mer og mer overbevist om at denne tilnærmingen er bedre enn tilnærmingen vi bruker i dag. Jeg håper derfor at min workshop på Matematikksenterets novemberkonferanse 2015 vil vekke interesse hos andre. Forhåpentligvis kan dette være starten på en utbredelse og forbedring av tilnærmingen. Jeg håper noen videreutvikler konseptet med logaritmer gjennom repetert divisjon og kanskje klarer å designe en prosess-orientert metode for innlæringen av logaritmereglene. Uansett ønsker jeg en videre forskning på dette problemet, velkommen.

6 Referanser

Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 351-367.

Bjørndal, B. (1978). *Nye veier i didaktikken?: en innføring i didaktiske emner og begreper*. Oslo: Aschehoug.

Bloom, B. (1956). *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals: 1: Cognitive domain*. New York: McKay.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of algebra, K-12: 1988 yearbook* (pp. 299-306). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Briars, D. & Siegler, R. S. (1984). A Featural Analysis of Preschoolers' Counting Knowledge. *Developmental Psychology, 20*(4), 607-618.

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7*(2), 235-257.

Byrnes, J. P. & Wasik, B. A. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology, 27*(5), 777-786.

Carraher, D. W, Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C. & Nicholls, J. (1989). Young Children's Understanding of Counting and Cardinality. *Child Development, 60*(5), 1158-1171.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Geary, D. C. (1995). Reflections of Evolution and Culture in Children's Cognition: Implications for Mathematical Development and Instruction. *American Psychologist, 50*(1), 24-27.

Gelman, R. (1978). The child's understanding of number. In C. R. Gallistel (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223.

Grønmo, L. S, Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole*. [Oslo]: Unipub.

Hammack, R. & Lyons, D. (1995). Sharing Teaching Ideas: A Simple Way to Teach Logarithms. *Mathematics Teacher, 88*(5), 374-375.

Heir, O. (2006). *Matematikk 1T*. Oslo: Aschehoug.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction, 14*(3), 251-283.

Hokanson, B., Miller, C. & Hooper, S. (2008). Role-Based Design: A Contemporary Perspective for Innovation in Instructional Design. *TechTrends: Linking Research and Practice to Improve Learning, 52*(6), 36-43.

Kenney, R. & Kastberg, S. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal, 27*(1), p 12-20.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Liang, C. B. & Wood, E. (2005). Working with logarithms: students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator, 8(2),53-70.*

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

NDLA. (2014). Logaritmer - NDLAs nettside. Retrieved 19. april 2014, from http://ndla.no/nb/node/120128?fag=54

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A. , Hanisch, F. & Hals, S. (2009). *Sinus 1T: matematikk for Vg1: studieforberedende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Panagiotou, E. N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education, 20*(1), 1-35.

Plomp, T. & Nieveen, N. (2007). *An introduction to Educational Design Research.* Paper presented at the conference on educational design research, East China Normal University, Shanghai.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362.

Sandvold, K. E., Skrindo, K., Thorstensen, R., Thorstensen, A., & Pettersen, B. (2006). *Sigma matematikk : Studieforberedende*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Siegler, R. S. & Crowley, K. (1994). Constraints on Learning in Nonprivileged Domains. *Cognitive Psychology, 27*(2), 194-226.

Sleeman, D. (1986). Introductory algebra: A case study of student misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 5(1)*, 25-52.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & M. National Council of Teachers of (Eds.), *The Ideas of algebra, K-12: 1988 yearbook* (pp. 8-19). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Utdanningsdirektoratet. (2014). Læreplan matematikk S1 - kompetansemål. Retrieved 19. april 2014, from http://www.udir.no/kl06/MAT4-01/Hele/Kompetansemaal/Matematikk-S1/?read=1

Vos, P. (2013). *Mathematics Teachers are from Mars, Mathematics Education Researchers are from Venus.* Paper presented at the "Linking theory and practice in mathematics teacher education", University of Agder, Kristiansand.

Webb, D., van der Kooij, H. & Geist, M. (2011). Design research in the Netherlands: introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2*(1).

Wynn, K. (1992). Addition and Subtraction by Human Infants. *Nature, 358*(6389), 749.

7 Vedlegg

7.1 Oppgavene gitt i test og «retention»-test om logaritmer

Du skal besvare 3 spørsmål. *Besvar på oppgavearket*
Navn: ………..

Oppgave 1

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{\lg 4 + \lg 9}{2 + \lg 1}$$

SNU!

Oppgave 2

Løs likningen ved regning

$\lg(2x+3)=1$

Oppgave 3

Løs likningen ved regning

$2^{(x+1)}-3=5$

7.2 Rapport fra utprøving på pilotgruppe

To elever har deltatt i pilotgruppe for utprøving av undervisningsmetoden som er utviklet. Elevene ble rekruttert fra en klasse i samme fag, men som ikke deltar i prosjektet ellers. Klassen ble informert om prosjektet med forespørsel om det var frivillige som kunne tenke seg å delta i prosjektet. Fire elever meldte interesse, og to av disse ble valgt etter loddtrekning. Gruppen besto av en gutt og ei jente.

Undervisningsmateriellet forutsetter at potenser med negative eksponenter er kjent. På det tidspunktet pilotgruppen var i drift, var dette ikke gjennomgått i matematikk-kurset de var en del av. Derfor var det nødvendig med en økt hvor disse potensene ble behandlet før undervisningen med logaritmer startet. Totalt var undervisningen på 6 økter av 1,5 timer, hvorav den første økten dreide seg om potenser og resten om logaritmer og eksponentiallikninger. I hver økt tok jeg feltnotater hvor jeg noterte meg hvordan elevene respondert på undervisningsmetoden og oppgavene. Etter annenhver økt i om logaritmer gjennomførte jeg et semi-strukturert intervju. Intervjuet ble tatt opp på audio-opptaker. I intervjuet var begge elevene til stede, begge elevene besvarte og følgende spørsmål var utgangspunkt:

1. Hvordan likte du stoffet?
2. Var stoffet lett?
3. Hvilke oppgaver likte du best?

Første økt med logaritmer startet med en aktivitet hvor elevene ble bedt om å vurdere hvor mange ganger må man dividere 1000 med 10 før vi når tallet 1 og tilsvarende for tallet 1000000. Ettersom divisjon med 10 fortonet seg som enkelt, kom svarene uten anstrengelser og skrivearbeid. For å introdusere skrivemåten lg 1000 og lg 1000000 og få tydeligere frem den repeterte divisjonen, valgte jeg å gjennomgå og skrive denne regningen på tavla. Deretter lot jeg elevene gjøre oppgave 5.6.1 og 5.6.2. Deretter ble definisjonen formulert ut fra repetert divisjon og elevene fortsatte på oppgave 5.6.3 og 5.6.4. Etter dette brukte vi repetert divisjon til å avgjøre mellom hvilke heltall lg 7323 ligger og brukte kalkulator som kontroll. Resten av økten jobbet elevene med oppgaven 5.6.5-5.6.13.

Elevene gav tilbakemelding om at de synes stoffet var «*veldig interessant*». Det skal bemerkes at elevene som meldte seg frivillig på prosjektet i utgangspunktet er interessert og positivt innstilt til matematikk, og at det i en slik situasjon foreligger betydelig sosialt press i favør av positive tilbakemeldinger.

Motivasjonen for prosjektet ligger i at logaritmer er et problemfelt for mange elever. Dette ble elevene informert om da de ble introdusert for prosjektet. Derfor gikk pilotgruppen trolig inn med forventninger om at stoffet skulle være vanskelig. Gutten i pilotgruppen utbryt med en viss lettelse etter å ha gjort de syv første oppgavene da utbryt: «*Det var egentlig ikke så vanskelig*». I intervjuet kom jenta i prosjektet med en mer nyansert beskrivelse:

> *«Noe var lett og noe var vanskelig. Jeg synes noen av likningene, der du skulle finne x, var vanskeligere».*

På spørsmålet om hvilke oppgaver de likte best svarte hun:

> *«Den oppgaven hvor du skulle på prøve minus og null* (5.6.8 og 5.6.9 red. anmerkning)*, så synes jeg det var veldig greit å kunne se sammenhengen på hvorfor det ikke fungerte.»*

Som lærer ble jeg fasinert at det faktum at disse elevene, som var fullstendig ukjente med logaritmer på forhånd, lett var i stand til å vurdere lg 1, lg 10 og finne løsningen på likningen lg(4x-5) = 1 allerede 20 minutter etter at undervisningen om logaritmer hadde startet. Jeg ble oppmerksom på at jeg måtte formulere opp 5.6.12 mer presist slik at det ble forståelig at linjal skulle brukes, og forbedre figurens skala. Jeg oppdaget også flere forhold knyttet til oppgavene i kap 5.7. For det første var 5.7.1 og 5.7.5 veldig like. Jeg vil derfor vurdere å fjerne en av disse, samt endre på rekkefølgen av oppgavene 5.7.1 -5.7.6. Elevene ba om å få slippe å finne et tallpar til å bekrefte regelen om logaritmen til et produkt fordi de allerede hadde sett sammenhengen. Samtidig så jeg at elevene hadde liten øvelse i å føre svarene sine formelt riktig. Dette gjaldt eksempelvis opp 5.7.6 og 5.7.4. I 5.7.4 trodde elevene at det var tilstrekkelig å velge en bestemt verdi for x. Dessuten fant elevene svært vanskelig å skulle formulere hvorfor $\lg(ab)$ikke er lik $\lg a \cdot lgb$ og hvorfor $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ ikke er lik $\frac{lga}{lgb}$. Jeg ser det også som nødvendig å lage en oppgave hvor logaritmeregelen $\lg(a^x) = xlga$ blir generalisert. Jeg stiller meg også spørsmålet om i hvilken grad undervisningsopplegget er fullstendig tilfredsstillende når ingen av logaritmereglene på noen tidspunkt blir bevist.

Når det gjelder eksponentiallikninger, noterte jeg meg kun en sak av interesse. Det virket det som om elevene hadde lettere for å henge med på overgangen fra $3^x = 17$ til $lg3^x = lg17$ ved den nye definisjonen. Dessuten opplevde jeg at det var unødvendig mange rene eksponentiallikninger som skulle løses uten hjelpemidler (5.8.2 og 5.8.3). Disse vurderer jeg å sette opp som ekstraoppgaver i slutten av undervisningsmateriellet.

7.3 Undervisningsmateriell – logaritmer ved repetert divisjon

Logaritmer

Innhold

Kompetansemål – logaritmer 1T

I læreplanen er målet uttrykt på denne måten:

«Etter opplæringen er målet at eleven skal kunne:

- omforme uttrykk og løse likninger, ulikheter og likningssystem av første og andre grad og enkle likninger med eksponential- og logaritmefunksjoner, både med regning og med digitale verktøy

Symbolbruk i heftet

Noen oppgaver har symbolet . Disse skal løses uten hjelpemidler.

5.6 Logaritmer og repetert divisjon

Mål:

- **forstå hva som menes med logaritmen til et tall**
- **kunne anslå hva logaritmen til et tall er**

Eksempel 1

Vi bruker repetert divisjon. Hvor mange ganger må man dividere 1000 med 10 før vi når tallet 1?

Løsning:

1000
:10
100
:10
10
:10
1

<u>3 ganger må vi dividere 1000 med 10 før vi når tallet 1</u>

Vi skriver

<u>lg 1000 = 3</u>

Eksempel 2

Hvor mange ganger må man dividere 100 000 med 10 før vi når tallet 1?

Løsning:

100 000

:10

10 000

:10

1000

:10

100

:10

10

:10

1

5 ganger må vi dividere 100 000 med 10 før vi når tallet 1

Vi skriver

lg 100 000 = 5

Oppgave 5.6.1 

Bruk repetert divisjon med 10 til du når tallet 1 til å finne

a) lg 100
b) lg 1000 000
c) lg 10
d) lg 1

Oppgave 5.6.2 

Finn verdien av x.

a) lg x = 3
b) lg x = 18
c) lg x = 1
d) lg x = 0

Definisjon:
Vi teller antall ganger vi må dividere et tall a med 10 før vi når tallet 1.
Dette antallet kaller vi logaritmen til a og skrives lg a.

Vi vet derfor allerede at:

$$\lg 1 = 0$$
$$\lg 10 = 1$$

Oppgave 5.6.3
Finn verdien av x.

a) lg (4x + 5) = 0
b) lg (3x – 5) = 1
c) lg 1 = x^2
d) lg 10 = x+4

Oppgave 5.6.4
Finn verdien av x.

a) Hvor mange ganger må du dele 10^8 med 10 før du når 1?
b) Hvor mange ganger må du dele 10^{27} med 10 før du når 1?
c) Hvor mange ganger må du dele 10^n med 10 før du når 1?
d) Lag en regel for å finne lg 10^n.

Eksempel 3

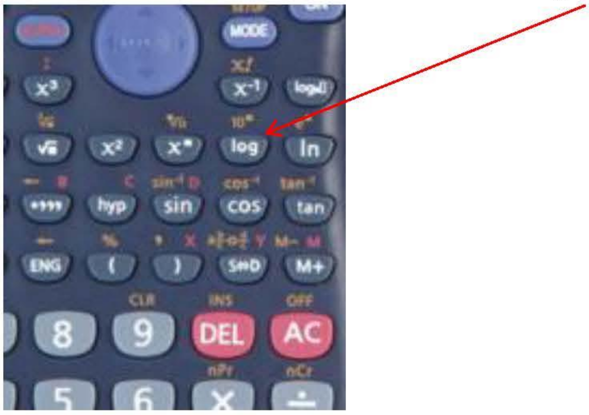
Bruk repetert divisjon med 10 til å finne mellom hvilke to heltall lg 80 000 ligger.

Løsning:

80 000	
	:10
8000	
	:10
800	
	:10
80	
	:10
8	
	:10
<1	

Vi nådde aldri nøyaktig tallet 1 ved repetert divisjon her. 4 steg med divisjon med 10 var for få, mens 5 steg var for mange for å nå tallet 1.
<u>lg 80 000 er derfor et tall mellom 4 og 5.</u>

På kalkulatorer kan du finne eksakt verdi ved å bruke log-knappen.



Kalkulatoren gir verdi lg 80 000 = 4,90.

På samme måten som på kalkulatoren, vil du kunne møte skrivemåten «log» i stedet for «lg».

Oppgave 5.6.5 

Mellom hvilke to heltall er verdien av

a) lg 70
b) lg 353
c) lg 6214
d) lg 6

Oppgave 5.6.6

Bruk digitalt verktøy til å kontrollere svarene på 5.6.1 og 5.6.5.

Oppgave 5.6.7

a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene lg 6, lg 600 og lg 60 000
b) Finn sammenhengen mellom tallene lg 6, lg 600 og lg 60 000
c) Forklar denne sammenhengen

Oppgave 5.6.8

a) Bruk digitale verktøy til å forsøke å finne logaritmen til minst fire forskjellige <u>negative</u> verdier, f.eks lg (-18).
b) Forklar hvorfor resultatet er rimelig ut fra definisjonen av logaritmen til et tall.

Oppgave 5.6.9 

Bruk hodet ditt til å vurdere lg 0.

Oppgave 5.6.10

a) Bruk digitale verktøy til å regne ut
   1) lg 0,1
   2) lg 0,01
   3) lg 0,001

b) Bruk definisjonen til å gi en tolkning av disse resultatene.
c) Lag en regel for å finne lg 0,00…1
   n tall etter komma (alle nuller, bortsett fra det siste som er 1)
d) Lag en regel for lg 10^{-n}.

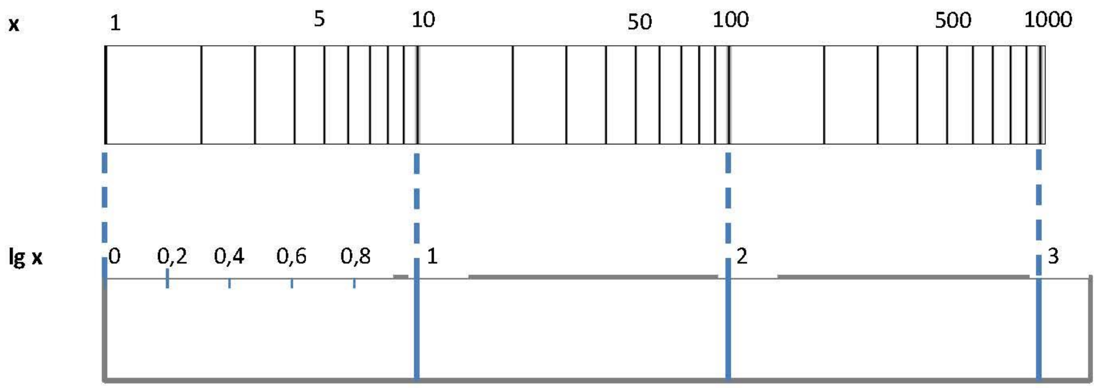
Oppgave 5.6.11 

Mellom hvilke to heltall er verdien av

a) lg 0,25
b) lg 0,005
c) lg 0,0002

Oppgave 5.6.12 

I figuren under vises verdien *x* i logaritmisk skala[1] samtidig med *lg x*.



a) Bruk linjal og mål på figuren for å finne en verdi for lg 2 og lg 50.

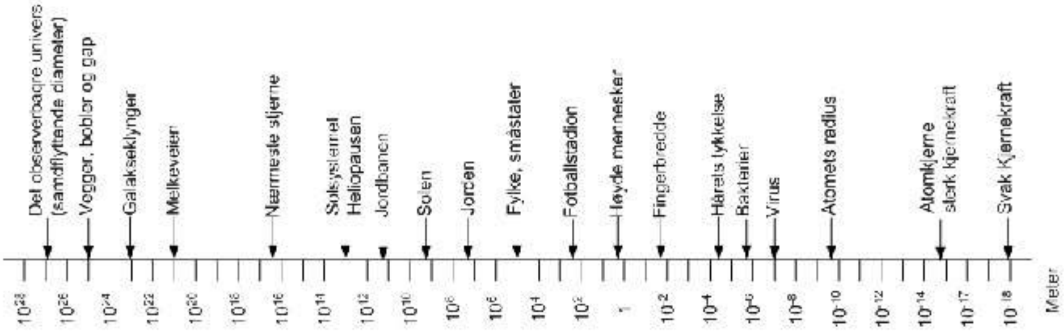
b) Finn lg 50 + lg 2 ved hjelp av de målte verdiene fra figuren. Sammenlign med lg 100.
Finn lg 20 + lg 30 ved å måle på figuren. Sammenlign med lg 600.
Finn lg 80 + lg 5 ved å måle på figuren. Sammenlign med lg 400.

c) Lag en regel for lg a + lg b. Bruk figuren til å se om sammenhengen gjelder for andre verdier av a og b.

Hvorfor bruker vi logaritmisk skala?

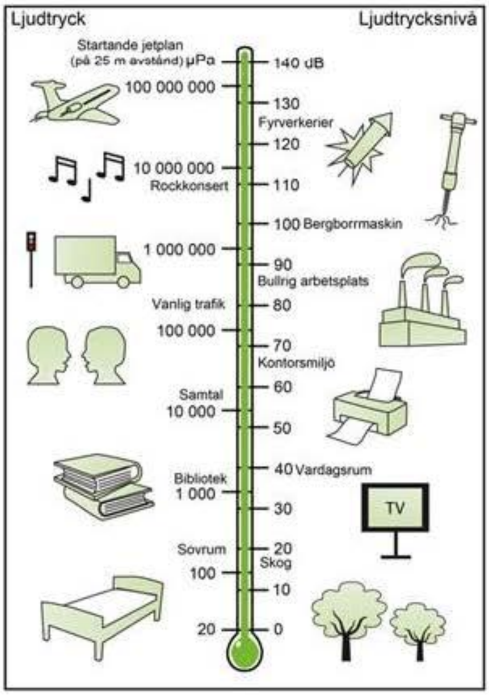
Fordelen med logaritmer er at man kan få størrelser som inneholder svært store og/eller svært små tall mer forståelige og lettere håndterbare. I naturvitenskap er dette vanlig. Eksempelvis er mengden lys i direkte sollys omtrent 100 000 lux, som er en milliard ganger sterkere enn lyset fra den mest lyssterke stjernen på nattehimmelen med sine 10^{-5} lux. Det er altså et ekstremt spenn i vidden på mengde lys øyet kan oppfatte.

[1] Skalaen her er logaritmisk med 5 cm mellom hver 10'er-potens. Derfor er linjene slik at avstanden fra 1 til et tall *a* er 5 cm·lg *a*. Det betyr for eksempel at avstanden fra 1til 100 er 5 cm·lg 100 = 5 cm·2 = 10 cm og avstanden fra 1 til 20 er 5 cm·lg 20 = 6,5 cm.



Figur 1. Størrelser i universet i logaritmisk skala.

Slik er det også med lyd. Logaritmer brukes derfor for å beskrive lydintensitet i desibel (dB). Laveste lydintensitet som øret kan oppfatte $I_{min} = I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Denne lydintensiteten er definert som 0 dB. Lyd opp mot smertegrense er i størrelsesorden $I_{max} = 1,1\ W/m^2$, en størrelse som er 1000 milliarder ganger større enn laveste lydnivået øret kan oppfatte. Derfor er det mer hensiktsmessig med logaritmisk skala for lydmålinger. Skalaen er laget slik at for hver gang intensiteten økes med en faktor 10, økes desibelskalen med 10. For eksempel er lydintesiteten fra en støvsuger på 80 dB ti ganger intensiteten til lyden fra biltrafikk på 70 dB. Lyden ved hvisking er 20 dB, mens normal tale er 60 dB. Siden økningen er på 40 (4 tiere), er lydintensiteten $10^4 = 10\ 000$ ganger høyere ved hvisking en normal tale.



Bruken av logaritmer gjør at desibelskalaen normalt gir verdier mellom 0 dB og 120 dB, og blir derfor langt lettere håndterbart for folk flest enn en skala hvor tall som 10^{-12} inngår og som har en spennvidde på 1000 milliarder.

Andre skalaer som tar i bruk logaritmer av samme grunn er Richters skala for jordskjelv, Beaufords skala for vindstyrke og pH for surhetsgrad i løsninger.

Oppgave 5.6.13 

Finn verdien av x

a) $\lg x = -5$

b) $\lg x = -27$

c) $\lg(3x - 5) = 1$

d) $\lg(2x) = -5$

e) $\lg 0{,}01 = \dfrac{x}{1000}$

Likninger som du nettopp løste, inneholder logaritmefunksjonen. Derfor kalles de **logaritmelikninger**.

Oppgave 5.6.14

a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene lg 7, lg 0,7 og lg 0,0007

b) Finn sammenhengen mellom tallene lg 7, lg 0,7 og lg 0,0007

c) Forklar denne sammenhengen

Oppgave 5.6.15

a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene

1) lg 50 og $\lg\left(\dfrac{1}{50}\right)$

2) lg 10 og $\lg\left(\dfrac{1}{10}\right)$

3) lg 100 og $\lg\left(\dfrac{1}{100}\right)$

4) lg 2 og $\lg\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b) Finn tre egne tallpar etter etter samme mønster.

c) Skriv sammenhengen mellom tallparene.

d) Lag en regel for sammenhengen mellom $\lg\left(\dfrac{1}{x}\right)$ og $\lg x$

5.7 Logaritmeregler

Mål:

- **forstå hvordan man kan finne logaritmen til**
  - **en potens**
  - **et produkt**
  - **en kvotient**

Vi repeterer:

Vi teller det antall ganger vi må dele et tall a med 10 før vi når 1. Dette tallet kaller logaritmen til a, og skrives lg a.

I eksemplene som følger bruker vi logaritmen til de tilfeldig valgte tallene 631 og 50. Vi ser ved hjelp av digitalt verktøy at lg 631 = 2,80. Det er rimelig fordi deler vi med 10 to ganger er resultatet fortsatt over 1, mens deler vi med 10 tre ganger havner vi under 1. På samme måte kan vi finne at lg 50 = 1,70 og vurdere svaret som rimelig. Gjør selv denne vurderingen før du leser videre.

Logaritmen til et produkt

Eksempel 4

Gitt at lg 631 = 2,80

Finn $\lg(631 \cdot 10)$

Løsning:

Vi må dele $10 \cdot 631$ med 10 en gang mer enn 631 før vi når 1.

Derfor må $\lg(10 \cdot 631) = 1 + \lg(631) = 1 + 2,80 = \underline{\underline{3,80}}$

Eksempel 5

Gitt at lg 631 = 2,80 og lg 50 = 1,70

Finn $\lg(631 \cdot 50)$

Løsning:

631 må deles 2,80 ganger med 10 før vi når 1 og 50 må deles 1,70 ganger før vi når 1.

Total må vi derfor dele 2,80 + 1,70 = 4,50 ganger før vi når 1.

Derfor må

$\lg(631 \cdot 50) = \lg 631 + \lg 50 = 2,80 + 1,70 = \underline{\underline{4,50}}$

Oppgave 5.7.1

a) Velg to positive heltall.
   1. Bruk digitalt verktøy til å regne ut logaritmen til hvert av tallene
   2. Bruk digitalt verktøy til å regne ut logaritmen til produktet av tallene

b) Gjenta prosessen a) for fire andre tallpar.

c) Hvilke sammenheng ser ut til å gjelde?

Oppgave 5.7.2 

Gitt at lg 738 = 2,87

a) Finn $\lg(738 \cdot 100)$

b) Finn $\lg(738 \cdot 10^{5})$

c) Finn $\lg(738 \cdot 10^{-3})$

Oppgave 5.7.3 

lg 4365 = 3,64 og lg 347 = 2,54

a) Forklar hvorfor disse verdiene er rimelige.

b) Finn $\lg(4231 \cdot 347)$

Oppgave 5.7.4

a) Fyll ut tabellen

a	b	lg a	lg b	lg (a·b)
100	1000			
1000	100 000			
1	10 000			
10	59			
1	78			
28	257			

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og b større enn 0.

c) Forklar hvorfor $\lg(a \cdot b)$ ikke er lik $\lg a \cdot \lg b$

d) Finn sammenhengen mellom lg(ab), lg a og lg b

Oppgave 5.7.5 

Bevis hvorfor følgende identiteter er riktige ved å bruke resultatet fra oppgave 5.7.4d

a) $\lg 25 + \lg\ 4 = 2$

b) $\lg\ 2 + \lg\ 5 = 1$

c) $\lg 4x - \lg\ 4 = \lg x$

d) $\lg 2x\ +\ \lg\ 5\ =\ 1 + \lg x$

e) $\lg 20x\ -\ \lg\ 2\ =\ 1 + \lg x$

Oppgave 5.7.6 

Gitt at lg 3 = 0,477

La x være et vilkårlig tall større enn 0.

a) Hvor mye større er lg(3x) enn lg x?
b) Finn lg(3x) – lgx

Bruk av eksakte svar

Det kan kanskje virke merkelig at vi noen ganger oppgir svar som $\lg\ 6$, $2 + \lg 6$ eller $\lg 2 + \lg 3$. Det er mulig å bruke kalkulator til å finne tilnærmingsverdier for disse svarene. Samtidig ønsker vi ofte å oppgi eksakte svar. På samme måten som vi lar uttrykk av typen $\sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$ og $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ som eksakte svar uten at de kan forenkles, lar vi også $\lg\ 6$, $2 + \lg 6$ eller $\lg 2 + \lg 3$ stå uten at de kan forenkles. I praktiske oppgaver brukes desimaltall selv om svaret kan skrives eksakt.

Logaritmen til en potens

Eksempel 5

Gitt at lg 631 = 2,80

Finn $\lg\left(631^4\right)$

Løsning :

$\lg\left(631^4\right) = \lg\left(631 \cdot 631 \cdot 631 \cdot 631\right)$

For hver av faktorene må vi dele 2,80 ganger før vi når 1.

Derfor må $\lg\ \left(631^4\right) = \lg 631 + \lg 631 + \lg 631 + \lg 631 = 4 \lg 631 = 4 \cdot 2{,}80 = \underline{\underline{11{,}20}}$

Oppgave 5.7.7 

Gitt at lg 199 = 2,30

Finn $\lg\left(199^3\right)$

Oppgave 5.7.8

a) Fyll ut tabellen

a	x	$\lg a^x$	$x \lg a$
2	3		
5	4		
3,2	7,1		

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og x, a > 0.

c) Formuler sammenhengen som ser ut til å gjelde ut fra b).

d) Forklar hvorfor denne sammenhengen er rimelig.

Oppgave 5.7.9 

Bruk blant annet $\lg(300^2)$ til å bekrefte at $2 < \lg 300 < 2,5$

Logaritmen til en kvotient

Eksempel 6

Gitt at lg 631 = 2,80

Finn $\lg\left(\frac{631}{100}\right)$

Løsning:

Vi må dele $\frac{631}{100}$ to ganger mindre enn 631 før vi når 1.

(Det er jo allerede delt med 10 to ganger siden 100 = 10^2)

Derfor må $\lg\left(\frac{631}{100}\right) = \lg 631 - 2 = 2,80 - 2 = \underline{\underline{0,80}}$

Eksempel 7

Gitt at $\lg 631 = 2,80$ og $\lg 50 = 1,70$

Finn $\lg\left(\dfrac{631}{50}\right)$

Løsning :

$$\lg\left(\frac{631}{50}\right) = \lg\left(631 \cdot \frac{1}{50}\right) = \lg 631 + \lg\left(\frac{1}{50}\right) = \lg 631 + (-\lg 50) = 2,80 - 1,70 = \underline{\underline{1,10}}$$

Oppgave 5.7.10 

Gitt at lg 738 = 2,87

a) Finn $\lg\left(\dfrac{738}{10}\right)$

b) Finn $\lg\left(\dfrac{738}{10^3}\right)$

c) Vurder om svaret i b) er rimelig

Oppgave 5.7.11 

Gitt at lg 4365 = 3,64 og lg 347 = 2,54

Finn $\lg\left(\dfrac{4365}{347}\right)$

Oppgave 5.7.12

a) Fyll ut tabellen

a	b	$\lg a$	$\lg b$	$\lg\left(\frac{a}{b}\right)$
1000	10			
100	1000			
1	100			
82	10			
581	100			
359	257			

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og b større enn 0.

c) Forklar hvorfor $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ ikke er lik $\frac{\lg a}{\lg b}$

d) Forklar sammenhengen mellom lga, lgb og $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$

Oppgave 5.7.13 

Gitt at lg 7 = 0,845.

La x være et vilkårlig tall større enn 0.

a) Hvilket tall er størst av $\lg\left(\frac{x}{7}\right)$ og $\lg x$?

b) Hvor mye større er det største tallet enn det minste tallet?

Oppgave 5.7.14

b) Fyll ut tabellen. Velg egne positive verdier for a i de tomme feltene i første kollonne.

a	$10^{\lg a}$
1000	
100	
1	
82	
581	
359	

b) Formuler en regel som ser ut til å gjelde ut resultatene fra tabellen.

c) Bruk symboler til å formulere definisjonen av logaritmen til et tall.

d) Bevis c) til å bevise setningen du formulerte i b).

Vi samler nå de viktigste resultatene vi nå har funnet om logaritmer.

Oppsummering

$\lg(a)$ betegner hvor mange ganger man må dividere tallet a med 10 før man når tallet 1

Merk: a > 0, jfr oppgave 5.6.9

Da er

1. $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$
2. $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg(a) - \lg(b)$
3. $\lg(a^x) = x\lg(a)$

og

$10^{\lg a} = a$

5.8 Eksponentiallikninger

Mål:

- **kunne løse eksponentiallikninger**

Eksponentiallikninger er likninger hvor den ukjente forekommer som eksponent. Et eksempel på dette kan være $12\,000 \cdot 1{,}03^{x} = 20\,000$. Med logaritmer er det mulig å løse ved regning.

Eksempel 8

Løs likningen ved regning

Mellom hvilke to heltall er det rimelig at svaret ligger?

$3^{x} = 98$

Løsning:

Ettersom uttrykkene på hver side av likhetstegnet er like, må begge divideres like mange ganger med 10 før vi når 1. Det betyr at

$\lg 3^{x} = \lg 98$

I kapitel 5.6 fant vi at

$\lg a^{x} = x \lg a$

Dette gir at

$x \lg 3 = \lg 98$

NB: lg 3 og lg 98 er tall, slik at likningen har formen 0,477x = 1,99

$$x = \frac{\lg 98}{\lg 3} \approx 4{,}17$$

Vi bruker den samme tankegangen i de neste eksemplene når vi løser andre eksponentiallikninger.

Eksempel 9

Hvor mange år må 12 000 kr stå i banken til 3 % rente før beløpet er vokst til 20 000 kr?

Løsning:
Vekstfaktoren er

$$1+\frac{3}{100}=1,03$$

Beløpet i banken etter *x* år er derfor

$$12000\cdot 1,03^x$$

Det gir likningen

$$12000\cdot 1,03^x=20000$$
$$1,03^x=\frac{20000}{12000}$$
$$1,03^x=\frac{5}{3}$$
$$\lg 1,03^x=\lg\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$x\lg 1,03=\lg\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$x=\frac{\lg\left(\frac{5}{3}\right)}{\lg 1,03}$$
$$x=17,3$$

<u>Etter 18 år passerer beløpet 20 000 kr</u>

Eksempel 10

Verdien på en bestemt bil er 200 000 kr i øyeblikket og forventes å falle med 12% i årene fremover. Hvor mange år går det til bilens verdi under 50 000 kr ifølge denne modellen?

Løsning:
Vekstfaktoren er

$$1-\frac{12}{100}=0,88$$

Bilens verdi etter *x* år er derfor

$$200000\cdot 0,88^{x}$$

Det gir likningen

$$200000\cdot 0,88^{x}=50000$$
$$0,88^{x}=\frac{50000}{200000}$$
$$0,88^{x}=\frac{1}{4}$$
$$\lg 0,88^{x}=\lg\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$x\lg 0,88=\lg\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$x=\frac{\lg\left(\frac{1}{4}\right)}{\lg 0,88}$$
$$x=10,8$$

<u>Etter 11 år er bilens verdi under 50 000 kr etter denne modellen.</u>

Oppgave 5.8.1
Løs likningene

a) $2^x = 41$

b) $3^{2x} = 11$

c) $5^{x+1} = 33$

Oppgave 5.8.2 (NDLA 1.9.7) 

Løs likningene når du får oppgitt at $\dfrac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,63$

a) $3^{2x-2} = 4$

b) $2\left(3^{3x} - 4\right) = 8$

Oppgave 5.8.3 (NDLA 1.9.9)
Martin kjøpte en scooter for 10 000 kroner i begynnelsen av 2011. Vi regner med at verdien synker med 15 % per år.

a) Hva vil scooterens verdi være når den er tre år gammel?

b) Finn ved regning når scooterens verdi er 3 000 kroner.

Oppgave 5.8.4 (NDLA 1.9.10)
Temperaturen T °C i et kjøleskap de første x timene etter et strømbrudd er gitt ved $T = 3 + 1,15^x$.

a) Hva var temperaturen i kjøleskapet ved strømbruddet?

b) Hvor lang tid går det før temperaturen er $10\,°\mathrm{C}$ i kjøleskapet?

c) Er det realistisk å bruke denne modellen dersom strømmen er borte over en lengre periode (mer enn 1 døgn)? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 5.8.5 (NDLA 1.9.11)

Vi antar at hummerbestanden øker med 2,5 % i året. Hvor mange år tar det før bestanden er doblet?

Ekstraoppgaver

Oppgave 5.8.100 (NDLA 1.9.8) 

Løs likningene når du får oppgitt at $\frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,6$

a) $5^{2x} - 4 = 121$

b) $3(2^{3x} - \frac{2}{3}) = 79$

c) $\frac{2^x}{3} = 9$

Oppgave 5.8.101 (NDLA 1.9.13)

Verdien av en bolig var 950 000 kroner i begynnelsen av 2002. I begynnelsen 2010 var verdien 1 500 000 kroner.

a) Hvor stor var den prosentvise veksten per år fra 2002 til 2010?

b) Hva vil verdien av boligen være i begynnelsen av 2014 dersom verdistigningen er den samme de neste årene?

c) Hvor lang tid tar det før verdien av boligen har økt til 3 000 000 kroner.
(Bruk samme vekstfaktor som ovenfor.)

Oppgave 5.8.102 (NDLA 1.9.16)

Lydintensitet måles i watt per kvadratmeter (W/m^2). Lydstyrke måles i desibel, dB

Laveste lydintensitet som øret kan oppfatte er $I_{min} = I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 .

Høyeste lydintensitet som øret kan oppfatte er $I_{max} = 1{,}1$ W/m^2 (smertegrense).

Det er altså et stort sprang mellom I_{min} og I_{max}, og tallene er ubehagelige å regne med.
Vi ønsker oss en mer hensiktsmessig skala.
Dette får vi til med et såkalt **intensitetsnivå** eller **desibelskala**.

For en gitt intensitet I W/m^2 defineres lydstyrken L dB ved

$$L = 10 \lg I + 120$$

For vårt høreområde (fra 10^{-12} W/m^2 til $1{,}1$ W/m^2) får vi da en skala som går fra 0 dB til 120 dB.

a) Sett I_{min} og I_{max} inn i formelen ovenfor og vis at vi får en skala som går fra 0 dB til 120 dB.

Et rop kan ha en lydintensitet på 10^{-4} W/m^2 .

b) Hvor mange desibel svarer det til?

Undersøkelser i barnehager viser at det gjennomsnittlige lydnivået ligger på over 85 dB.
c) Hvor stor er lydintensiteten ved en lydstyrke på 85 dB?

d) Hvor stor er lydintensiteten ved en lydstyrke på 88 dB?

e) Sammenlign svarene i oppgave c) og d). Hva oppdager du?

Fasit/løsning

Oppgave 5.6.1 

Bruk repetert divisjon til å finne

a) lg 100

100
:10
10
:10
1

Etter 2 **steg** med divisjon med grunntallet 10, nådde vi tallet 1.
lg 100 = 2

b) lg 1000 000

1 000 000
:10
100 000
:10
10 000
:10
1 000
:10
100
:10
10
:10
1

Etter 6 **steg** med divisjon med grunntallet 10, nådde vi tallet 1.
lg 1000 000 = 6

c) lg 10

10
:10
1

Etter 1 **steg** med divisjon med grunntallet 10, nådde vi tallet 1.
lg 10 = 1

d) lg 1

Vi er allerede ved tallet 1

Etter 0 **steg** med divisjon med grunntallet 10, nådde vi tallet 1.
lg 1 = 0

Oppgave 5.6.2 
Finn verdien av x.

a) lg x = 3
Vi må finnes et tall som må deles 3 ganger med 10 før vi når 1.
Dette tallet må være $10^3 = 1000$.

b) lg x = 18
Vi må finnes et tall som må deles 18 ganger med 10 før vi når 1.
Dette tallet må være 10^{18}.

c) lg x = 1
Vi må finnes et tall som må deles 1 gang med 10 før vi når 1.
Dette tallet må være 10.

d) lg x = 0
Vi må finnes et tall som må deles 0 ganger med 10 før vi når 1.
Dette tallet må være 1.

Oppgave 5.6.3 

Finn verdien av x.

a) lg (4x + 5) = 0

b)

$$\begin{aligned} \lg(4x+5) &= 0 \\ 4x+5 &= 1 \\ 4x &= 1-5 \\ 4x &= -4 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -1}} \end{aligned}$$

Uttrykket (4x + 5) må deles 0 ganger med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 1.

c) lg (3x – 5) = 1

$$\begin{aligned} \lg(3x-5) &= 1 \\ 3x-5 &= 10 \\ 3x &= 10+5 \\ 3x &= 15 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 5}} \end{aligned}$$

Uttrykket (3x - 5) må deles 1 ganger med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 10

d) lg 1 = x^2

$$\begin{aligned} \lg 1 &= x^2 \\ 0 &= x^2 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

e) lg 10 = x+4

$$\begin{aligned} \lg 10 &= x+4 \\ 1 &= x+4 \\ 1-4 &= x \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -3}} \end{aligned}$$

Oppgave 5.6.4 

Finn verdien av x.

a) Hvor mange ganger må du dele 10^8 med 10 for nå 1?
   10^8 består at åtte 10-tall som er multiplisert, og må derfor deles 8 ganger med 10 før vi når 1.
b) Hvor mange ganger må du dele 10^{27} med 10 for nå 1?
   10^{27} består at 27 10-tall som er multiplisert, og må derfor deles 27 ganger med 10 før vi når 1.
c) Hvor mange ganger må du dele 10^n med 10 for nå 1?
   10^n består at n 10-tall som er multiplisert, og må derfor deles n ganger med 10 før vi når 1.
d) Lag en regel for å finne lg 10^n.
   Siden lg 10^n betyr å finne antall ganger vi må dele med 10 før vi når 1, må

   lg $10^n = n$

Oppgave 5.6.5 

Mellom hvilke to heltall er verdien av

a) lg 70

   lg 10 = 1 (10 må deles 1 gang med 10 før vi når 1)
   lg 100 = 2 (100 må deles 2 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 70 må derfor være et tall mellom 1 og 2.

b) lg 353

   lg 100 = 2 (100 må deles 2 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 1000 = 3 (100 må deles 3 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 353 må derfor være et tall mellom 2 og 3.

c) lg 6214

   lg 1000 = 3 (1000 må deles 3 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 10000 = 4 (10000 må deles 4 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 6214 må derfor være et tall mellom 3 og 4.

d) lg 6

   lg 1 = 0 (1 må deles 0 ganger med 10 før vi når 1)
   lg 10 = 1 (10 må deles 1 gang med 10 før vi når 1)
   lg 6 må derfor være et tall mellom 0 og 1

Oppgave 5.6.6
Bruk digitalt verktøy til å kontrollere svarene på 5.6.1 og 5.6.5.

Digitalt verktøy gir

Oppgave 5.6.1
a) lg 100 = 2
b) lg 1000 000 = 6
c) lg 10 = 1
d) lg 1 = 0

Oppgave 5.6.5
a) lg 70 = 1,845
b) lg 353 = 2,548
c) lg 6214 = 3,793
d) lg 6 = 0,778

Oppgave 5.6.7
a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene lg 6, lg 600 og lg 60 000

Digitalt verktøy gir
lg 6 = 0,778
lg 600 = 2,778
lg 60 000 = 4,778

b) Finn sammenhengen mellom tallene lg 6, lg 600 og lg 60 000

lg 600 = 2 + lg 6
lg 60 000 = 4+ lg 6

c) Forklar denne sammenhengen

lg 600 = 2 + lg 6 fordi 600 må deles med 10 to ganger mer enn tallet 6 før vi når 1 (når vi har dividert 600 to ganger er vi jo ved tallet 6)

lg 60 000 = 4 + lg 6 fordi 60 000 må deles med 10 fire ganger mer enn tallet 6 før vi når 1 (når vi har dividert 60 000 fire ganger er vi jo ved tallet 6)

Oppgave 5.6.8
a) Bruk digitale verktøy til å forsøke å finne logaritmen til minst fire forskjellige negative verdier, f.eks log (-18).

Digitalt verktøy gir feilmelding når vi forsøker å ta logaritmen til negative tall

b) Forklar hvorfor resultatet er rimelig ut fra definisjonen av logaritmen til et tall.

Med utgangspunkt i et negativt tall vil vi aldri nå tallet 1 uansett hvor mange ganger vi dividerer (eller multipliserer) med 10. Derfor er det ikke mulig å finne logaritmen til negative tall.

Oppgave 5.6.9 

Bruk hodet ditt til å vurdere lg 0.

Uansett hvor mange ganger vi dividerer (eller multipliserer) 0 med 10, vil vi aldri nå tallet 1. Derfor er det ikke mulig å finne logaritmen til 0. lg 0 eksisterer derfor ikke.

Oppgave 5.6.10

a) Bruk digitale verktøy til å regne ut

1) lg 0,1
   lg 0,1 = -1
2) lg 0,01
   lg 0,01 = - 2
3) lg 0,001
   lg 0,001 = -3

b) Bruk definisjonen til å gi en tolkning av disse resultatene.

Vi når ikke tallet 1 ved å dividere med 10, uansett hvor mange ganger det gjentas. Hvis vi derimot *multipliserer* med 10 en gang når vi tallet 1. Det vil si at hvis vi reverserer prosessen 1 steg, når vi tallet 1. Derfor er det rimelig at lg 0,1 = -1.

Tilsvarende må vi *multipliserer* med 10 to ganger før når vi tallet 1. Det vil si at hvis vi reverserer prosessen 2 steg, når vi tallet 1. Derfor er det rimelig at lg 0,01 = -2.

0,001 må *multipliseres* med 10 tre ganger før når vi tallet 1. Det vil si at hvis vi reverserer prosessen 3 steg, når vi tallet 1. Derfor er det rimelig at lg 0,001 = -3.

c) Lag en regel for å finne lg 0,$\underbrace{00\ldots1}_{n}$
tall etter komma (alle nuller bortsett fra det siste som er 1)

Ved å følge mønsteret, ser vi at

lg 0,$\underbrace{00\ldots1}_{n}$ = - n
tall etter komma (alle nuller bortsett fra det siste som er 1)

d) Lag en regel for lg 10^{-n}.

lg 10^{-n} er skrivemåten for lg $0,\underbrace{00...1}_{\text{n tall etter komma (alle nuller bortsett fra det siste som er 1)}}$

Dermed blir regelen

$\underline{\underline{\lg 10^{-n} = -n}}$

Oppgave 5.6.11 

Mellom hvilke to heltall er verdien av

a) lg 0,25

lg 0,1 = - 1 (0,1 må *multipliseres* 1 gang med 10 før vi når 1)

lg 0,01 = - 2 (0,01 må *multipliseres* 2 ganger med 10 før vi når 1)

lg 0,25 må derfor være et tall mellom - 2 og - 1.

b) lg 0,005

lg 0,001 = - 3 (0,001 må *multipliseres* 3 ganger med 10 før vi når 1)

lg 0,0001 = - 4 (0,0001 må *multipliseres* 4 ganger med 10 før vi når 1)

lg 0,005 må derfor være et tall mellom - 4 og - 3.

c) lg 0,0002

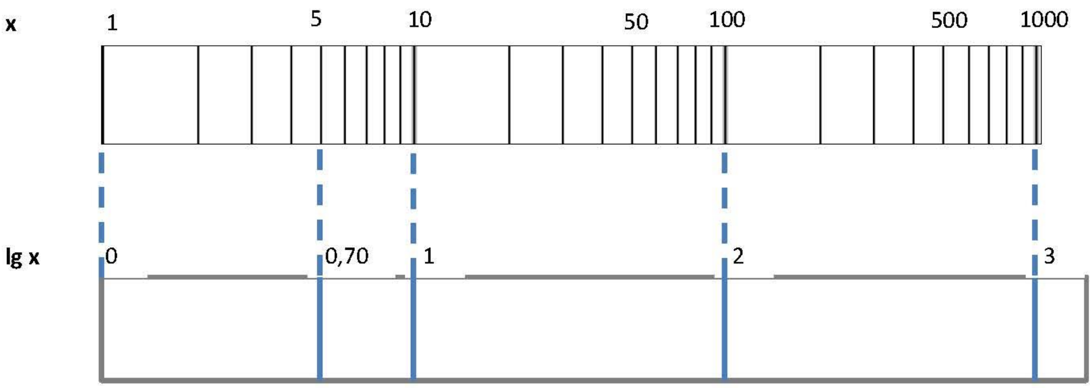
lg 0,0001 = - 4 (0,0001 må *multipliseres* 4 ganger med 10 før vi når 1)

lg 0,00001 = -5 (0,00001 må *multipliseres* 4 ganger med 10 før vi når 1)

lg 0,0002 må derfor være et tall mellom -5 og -4.

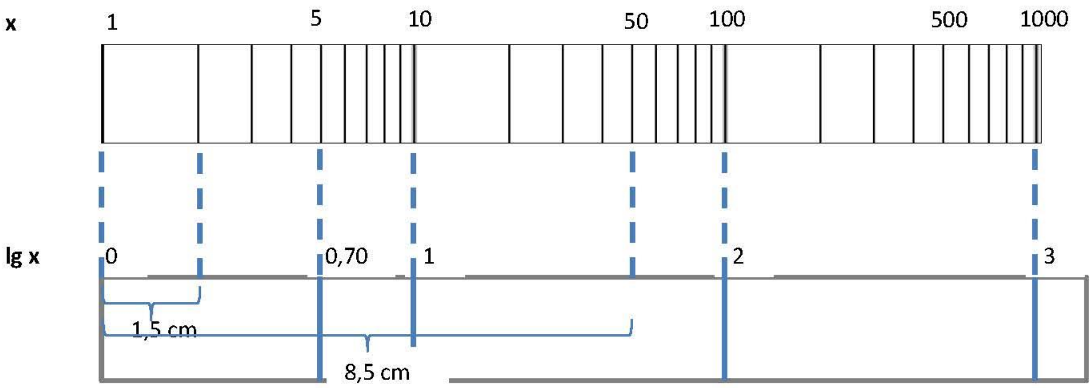
Oppgave 5.6.12 

I figuren under vises verdien *x* i logaritmisk skala samtidig med *lg x*.



a) Mål på figuren for å finne en verdi for lg 2 og lg 50.

Se figur. De målte avstandene er henholdsvis 1,5 cm og 8,5 cm.



Ettersom 1 enhet er 5 cm, blir

$$\underline{\underline{\lg 2}} = \frac{1,5}{5} = \underline{\underline{0,30}}$$

$$\underline{\underline{\lg 50}} = \frac{8,5}{5} = \underline{\underline{1,7}}$$

b) Finn lg 5 + lg 2 ved å måle på figuren. Sammenlign med lg 10.
Finn lg 20 + lg 30 ved å måle på figuren. Sammenlign med lg 600.
Finn lg 80 + lg 5 ved å måle på figuren. Sammenlign med lg 400.

lg 50 + lg 2 ≈ 1,7 + 0,30 = 2,0
lg 100 = 2,0
lg 100 = lg 50 + lg 2

Ved å bruke samme metode som over finner vi at
lg 20 + lg 30 ≈ 1,3 + 1,5 = 2,8
lg 600 ≈ 2,8
lg 600 = lg 20 + lg 30

lg 80 + lg 5 ≈ 1,9 + 0,70 = 2,6
lg 400 ≈ 2,6
lg 600 = lg 20 + lg 30

c) Lag en regel for lg a + lg b. Bruk figuren til å se om sammenhengen gjelder for andre verdier av a og b.

Vi finner sammenhengen lg(ab) = lg a + lg b .
Sammenhengen gjelder for hvilke som helst verdier av a og b større enn 0

Oppgave 5.6.13 

Finn verdien av x

a) $\lg x = -5$

$\lg x = -5$

$x = 10^{-5} = 0,00001$

x er et må multipliseres 5 ganger med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 0,00001 = 10^{-5}.

b) $\lg x = -27$

$\lg x = -27$

$x = 10^{-27}$

x er et må multipliseres 27 ganger med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 0.00001 = 10^{-27}.

c) $\lg(3x-5)=1$

$$3x-5=10$$
$$3x=10+5$$
$$x=\frac{15}{3}$$
$$\underline{\underline{x=5}}$$

Uttrykkes (3x -5) må deles 1 gang med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 10.

d) $\lg(2x)=-5$

$$\lg(2x)=-5$$
$$2x=10^{-5}$$
$$2x=0,00001$$
$$\underline{\underline{x=0,000005=5,0\cdot 10^{-6}}}$$

Uttrykkes (2x) må multipliseres 5 ganger med 10 før vi når 1, og må derfor være lik 10^{-5}.

e) $\lg 0,01=\frac{x}{1000}$

$$-2=\frac{x}{1000}$$
$$-2\cdot 1000=x$$
$$\underline{\underline{x=-2000}}$$

Oppgave 5.6.14

a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene lg 7, lg 0,7 og lg 0,0007

Digitalt verktøy gir

lg 7 = 0,845
lg 0,7 = -0,155
lg 0,0007 = -3,155

b) Finn sammenhengen mellom tallene lg 7, lg 0,7 og lg 0,0007

lg 0,7 = lg 7 - 1
lg 0,0007 = lg 7 - 4

c) Forklar denne sammenhengen

lg 0,7 = lg 7 – 1 fordi $\frac{7}{10}=\mathbf{0,7}$ og er dermed delt m 10 en gang mer enn tallet 7.

lg 0,0007 = lg 7 – 4 fordi $\frac{7}{10^4}=\mathbf{0,0007}$ og er dermed delt med 10 fire ganger mer enn tallet 7.

Oppgave 5.6.15

a) Bruk digitalt verktøy til å finne tallene

1) $\lg 50$ og $\lg\left(\frac{1}{50}\right)$

2) $\lg 10$ og $\lg\left(\frac{1}{10}\right)$

3) $\lg 100$ og $\lg\left(\frac{1}{50}\right)$

4) $\lg 2$ og $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$

Digitalt verktøy gir

1) $\lg\ 50 = 1{,}699$ og $\lg\left(\frac{1}{50}\right) = -1{,}699$

2) $\lg\ 10 = 1$ og $\lg\left(\frac{1}{10}\right) = -1$

3) $\lg\ 100 = 2$ og $\lg\left(\frac{1}{50}\right) = -2$

4) $\lg\ 2 = 0{,}301$ og $\lg\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}301$

b) Finn tre egne tallpar etter etter samme mønster.

–

c) Skriv sammenhengen mellom tallparene.

1) $\lg\ 50 = -\lg\left(\frac{1}{50}\right)$

2) $\lg\ 10 = -\lg\left(\frac{1}{10}\right)$

3) $\lg\ 100 = -\lg\left(\frac{1}{50}\right)$

4) $\lg\ 2 = -\lg\left(\frac{1}{2}\right)$

d) Lag en regel for sammenhengen mellom $\lg\left(\frac{1}{x}\right)$ og $\lg x$

$\lg\left(\frac{1}{x}\right) = -\lg x$

Oppgave 5.7.1

a) Velg to positive heltall.
   1. Bruk digitalt verktøy til å regne ut logaritmen til hvert av tallene
   2. Bruk digitalt verktøy til å regne ut logaritmen til produktet av tallene

   Eksempelvis $a = 13$ og $b = 47$.
   1. $lg\ 13 = 1{,}114$ og $lg\ 47 = 1{,}672$
   2. $lg\ (13 \cdot 47) = 2{,}786$

b) Gjenta prosessen a) for fire andre tallpar.

   Som a)

c) Hvilke sammenheng ser ut til å gjelde?

   Sammenheng:

   $lg\ (a \cdot b) = lg\ a + lg\ b$

Oppgave 5.7.2

Gitt at lg 738 = 2,87

a) Finn $\lg(738 \cdot 100)$

   $\lg(738 \cdot 100) = \lg 738 + 2 = 2{,}87 + 2 = \underline{\underline{4{,}87}}$

b) Finn $\lg(738 \cdot 10^5)$

   $\lg(738 \cdot 10^5) = \lg 738 + 5 = 2{,}87 + 5 = \underline{\underline{7{,}87}}$

c) Finn $\lg(738 \cdot 10^{-3})$

   $\lg(738 \cdot 10^{-3}) = \lg 738 - 3 = 2{,}87 - 3 = \underline{\underline{-0{,}13}}$

Oppgave 5.7.3

lg 4365 = 3,64 og lg 347 = 2,54

a) Forklar hvorfor disse verdiene er rimelige.

   lg 1000 = 3 og lg 10 000 = 4. Derfor er lg 4365 mellom 3 og 4.
   <u>lg 4365 = 3,64 er derfor rimelig.</u>
   lg 100 = 2 og lg 1000 = 3. Derfor er lg 347 mellom 2 og 3.
   <u>lg 347 = 2,54 er derfor rimelig.</u>

b) Finn lg(4231·347)

lg(4231·347) = lg 4231 + lg 347 = 3,64 + 2,54 = 6,18

Oppgave 5.7.4

a) Fyll ut tabellen

a	B	lg a	lg b	lg (a·b)
100	1000	2	3	5
1000	100 000	3	5	8
1	10 000	0	4	4
10	59	1	1,770	2,770
1	78	0	1,892	1,892
28	257	1,447	2,410	3,857

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og b større enn 0.

-

c) Forklar hvorfor lg(a·b) ikke er lik lg a · lg b

lg a er antall ganger vi må dele *a* med 10 før vi når 1, mens *lg b* er antall ganger vi må dele *b* med 10 før vi når 1. Antall ganger vi må dele *ab* med 10 før vi når 1, blir derfor summen av disse og ikke produktet. Derfor er ikke lg(a·b) lik lg a · lg b.

d) Finn sammenhengen mellom lg(ab), lg a og lg b

lg(a·b) = lg a + lg b

Oppgave 5.7.5

Forklar hvorfor følgende identiteter er riktige ved å bruke resultatet fra 5.7.5d

a) $\lg 25 + \lg 4 = 2$

$\lg 25 + \lg 4 = \lg(25 \cdot 4) = 2$

b) $\lg 2 + \lg 5 = 1$

$\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = 1$

c) $\lg 4x - \lg 4 = \lg x$

$\lg 4x - \lg 4 = \lg 4 + \lg x - \lg 4 = \lg x$

d) $\lg 2x + \lg 5 = 1 + \lg x$

$\lg 2x + \lg 5 = \lg 2 + \lg x + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) + \lg x = \lg 10 + \lg x = 1 + \lg x$

e) $\lg 20x - \lg 2 = 1 + \lg x$

$\lg 20x - \lg 2 = \lg 20 + \lg x - \lg 2 = \lg(2 \cdot 10) + \lg x - \lg 2 = \lg 2 + \lg 10 + \lg x - \lg 2 = 1 + \lg x$

Oppgave 5.7.6 

Gitt at lg 3 = 0,477

La x være et vilkårlig tall større enn 0.

a) Hvor mye større er lg(3x) enn lg x?

lg (3x) = lg x + lg 3

lg (3x) er derfor lg 3 = 0,477 større enn lg x

b) Finn lg(3x) – lgx

lg (3x) – lg x = lg x + lg 3 – lgx = lg 3 = 0,477

Oppgave 5.7.7 

Gitt at lg 199 = 2,30

Finn $\lg\left(199^3\right)$

$\lg\left(199^3\right) = 3\lg 199 = 3 \cdot 2{,}30 = \underline{\underline{6{,}90}}$

Oppgave 5.7.8

b) Fyll ut tabellen

a	x	$\lg a^x$	xlga
2	3	0,903	0,903
5	4	2,796	2,796
3,2	7,1	3,587	3,587

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og x, a > 0.

Alle verdier vil gi samme resultat i begge kolonner.

c) Formuler sammenhengen som ser ut til å gjelde ut fra b).

$\lg a^x = x \lg a$

d) Forklar hvorfor denne sammenhengen er rimelig.

$\lg a$ er antall ganger vi må dividere a med 10 før vi når tallet 1. a^x består av x faktorerer som hver må divideres lga ganger med 10 før vi når 1. Det totale antall ganger vi må dividere a^x med 10 før vi når 1, er derfor ($\lg a + \lg\ a + ... + \lg a$) hvor antall ledd er x. Dermed blir $\lg a^x = x \lg a$.

Oppgave 5.7.9 

Bruk blant annet $\lg(300^2)$ til å bekrefte at $2 < \lg 300 < 2,5$

$2 < \lg 300$ fordi $\lg 100 = 2$

$\lg\left(300^2\right) = \lg 90000$

$4 < \lg 90000 < 5$ fordi $\lg 10000 = 4$ og $\lg 100000 = 5$

$\lg\left(300^2\right) < 5$

$2\lg 300 < 5$

$\lg 300 < 2,5$

$\underline{\underline{2 < \lg 300 < 2,5}}$

Oppgave 5.7.10 

Gitt at lg 738 = 2,87

a) Finn $\lg\left(\frac{738}{10}\right)$

$\lg\left(\frac{738}{10}\right) = \lg 738 - \lg 10 = 2,87 - 1 = \underline{\underline{1,87}}$

b) Finn $\lg\left(\frac{738}{10^3}\right)$

$\lg\left(\frac{738}{10^3}\right) = \lg 738 - \lg\left(10^3\right) = 2,87 - 3 = \underline{\underline{-0,13}}$

c) Vurder om svaret i b) er rimelig

$\lg 1 = 0$ og $\lg 0,1 =$ -1. Derfor må $\lg\left(\frac{738}{10^3}\right) = \lg 0,738$ ligger mellom 0 og -1.

Svaret er derfor rimelig.

Oppgave 5.7.11 

Gitt at lg 4365 = 3,64 og lg 347 = 2,54

Finn $\lg\left(\frac{4365}{347}\right)$

$$\lg\left(\frac{4365}{347}\right)=\lg 4365-\lg 347=3{,}64-2{,}54=\underline{\underline{1{,}10}}$$

Oppgave 5.7.12

a) Fyll ut tabellen

a	b	$\lg a$	$\lg b$	$\lg\left(\frac{a}{b}\right)$
1000	10	3	1	2
100	1000	2	3	-1
1	100	0	2	-2
82	10	1,91	1	0,91
581	100	2,76	2	0,76
359	257	2,56	2,41	0,15

b) Utvid tabellen med 4 egne verdier for a og b større enn 0.

–

c) Forklar hvorfor $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ ikke er lik $\frac{\lg a}{\lg b}$

$\lg a$ er antall ganger vi må dele a med 10 før vi når 1,
mens $\lg b$ er antall ganger vi må dele b med 10 før vi når 1.

Antall ganger vi må dele $\frac{a}{b}$ med 10 før vi når 1, blir derfor differansen.

Derfor er ikke $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ lik $\frac{\lg a}{\lg b}$

d) Forklar sammenhengen mellom lga, lgb og $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\underline{\underline{\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a-\lg b}}$$

Oppgave 5.7.13 

Gitt at lg 7 = 0,845.

La x være et vilkårlig tall større enn 0.

a) Hvilket tall er størst av $\lg\left(\frac{x}{7}\right)$ og $\lg x$?

$\lg x$ er større enn $\lg\left(\frac{x}{7}\right)$

b) Hvor mye større er det største tallet enn det minste tallet?

$\lg\left(\frac{x}{7}\right)=\lg x-\lg 7$. $\underline{\underline{\text{Differansen mellom tallene er derfor } \lg 7=0{,}845}}$

Oppgave 5.7.14

a) Fyll ut tabellen. Velg egne positive verdier for a i de tomme feltene i første kollonne.

a	$10^{\lg a}$
1000	1000
100	100
1	1
82	82
581	581
359	359
	Egne verdier
	Egne verdier
	Egne verdier

b) Formuler en regel som ser ut til å gjelde ut resultatene fra tabellen.

Vi ser at regelen som ser ut til å gjelde er

$10^{\lg a} = a$

c) Bruk symboler til å formulere definisjonen av logaritmen til et tall.

Med symboler blir definisjonen av logaritmen til et tall slik:

$$\frac{a}{10^{\lg a}} = 1$$

d) Bruk resultatet fra c) til å bevise setningen du formulerte i b).

Ved å multiplisere begge sider av likhetstegnet med $10^{\lg a}$, får vi

$a = 10^{\lg a}$

Oppgave 5.8.1

Løs likningene

a) $2^x = 41$

$$2^x = 41$$
$$\lg 2^x = \lg 41$$
$$x \lg 2 = \lg 41$$
$$\underline{\underline{x = \frac{\lg 41}{\lg 2} \approx 5{,}36}}$$

b) $3^{2x}=11$

$$3^{2x}=11$$
$$\lg 3^{2x}=\lg 11$$
$$2x\lg 3=\lg 11$$
$$\underline{\underline{x=\frac{\lg 11}{2\lg 3}\approx 1{,}09}}$$

c) $5^{x+1}=33$

$$5^{x+1}=33$$
$$\lg 5^{x+1}=\lg 33$$
$$(x+1)\lg 5=\lg 33$$
$$x+1=\frac{\lg 33}{\lg 5}$$
$$\underline{\underline{x=\frac{\lg 33}{\lg 5}-1\approx 1{,}17}}$$

Oppgave 5.8.2 (NDLA 1.9.7) 

Løs likningene når du får oppgitt at $\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0{,}63$

a) $3^{2x-2}=4$

$$3^{2x-2}=4$$
$$(2x-2)\cdot\lg 3=\lg 4$$
$$2x-2=\frac{\lg 4}{\lg 3}$$
$$2x-2=\frac{\lg 2^2}{\lg 3}$$
$$2x-2=\frac{2\lg 2}{\lg 3}$$
$$2x-2\approx 2\cdot 0{,}63$$
$$2x\approx 2\cdot 0{,}63+2$$
$$x\approx\frac{2(0{,}63+1)}{2}=\underline{\underline{1{,}63}}$$

b) $2\left(3^{3x}-4\right)=8$

$$2\left(3^{3x}-4\right)=8$$
$$\frac{2\left(3^{3x}-4\right)}{2}=\frac{8}{2}$$
$$3^{3x}-4=4$$
$$3^{3x}=8$$
$$3x=\frac{\lg 8}{\lg 3}$$
$$3x=\frac{\lg 2^3}{\lg 3}$$
$$3x=\frac{3\lg 2}{\lg 3}$$
$$x=\frac{\lg 2}{\lg 3}$$
$$x\approx \underline{\underline{0,63}}$$

Oppgave 5.8.3 (NDLA 1.9.9)

Martin kjøpte en scooter for 10 000 kroner i begynnelsen av 2011. Vi regner med at verdien synker med 15 % per år.

a) Hva vil scooterens verdi være når den er tre år gammel?

Vi finner først vekstfaktoren

$$1-\frac{15}{100}=0,85$$

Vi får

$$10\,000\cdot 0,85^3\approx \underline{6\,141}$$

<u>Verdien etter tre år er ca. 6 140 kroner.</u>

b) Finn ved regning når scooterens verdi er 3 000 kroner.

Vi setter opp likningen

$10\,000\cdot 0,85^x=3\,000$, der x er antall år.

Vi løser likningen for hånd (kan også løses digitalt)

$$10\,000\cdot 0,85^x=3\,000$$
$$0,85^x=\frac{3000}{10000}$$
$$\lg 0,85^x=\lg 0,30$$
$$x\lg 0,85=\lg 0,30$$
$$x=\frac{\lg 0,30}{\lg 0,85}$$
$$x\approx 7,41$$

<u>Etter nesten syv og et halvt år er scooterens verdi redusert til 3 000 kroner.</u>

Oppgave 5.8.4 (NDLA 1.9.10)

Temperaturen T °C i et kjøleskap de første x timene etter et strømbrudd er gitt ved $T = 3 + 1{,}15^x$.

a) Hva var temperaturen i kjøleskapet ved strømbruddet?
Når strømbruddet skjer, er $x = 0$.
Vi setter inn i uttrykket og får

$$T = 3 + 1{,}15^0 = 3 + 1 = \underline{4}$$

Temperaturen i kjøleskapet ved strømbruddet er 4°C.

b) Hvor lang tid går det før temperaturen er $10\,°\mathrm{C}$ i kjøleskapet?
Vi setter $T = 10\,°\mathrm{C}$ og får likningen

$$3 + 1{,}15^x = 10$$

Vi løser likningen

$3 + 1{,}15^x = 10$

$1{,}15^x = 7$

$\lg 1{,}15^x = \lg 7$

$x \lg 1{,}15 = \lg 7$

$x = \dfrac{\lg 7}{\lg 1{,}15}$

$x \approx 13{,}9$

Det går nesten 14 timer før temperaturen har steget til 10°C.

c) Er det realistisk å bruke denne modellen dersom strømmen er borte over en lengre periode (mer enn 1 døgn)? Begrunn svaret ditt.

Vi setter $x = 30$ timer og finner temperaturen i kjøleskapet.

$T = 3 + 1{,}15^{30} \approx \underline{69}$

Temperaturen i kjøleskapet vil nærme seg romtemperaturen på kjøkkenet dersom strømmen er borte over en lengre periode. Det er ikke realistisk at romtemperaturen er så høy som $69\,°\mathrm{C}$.

Modellen er ikke realistisk å bruke dersom strømbruddet er over en lengre periode.

Oppgave 5.8.5 (NDLA 1.9.11)

Vi antar at hummerbestanden øker med 2,5 % i året. Hvor mange år tar det før bestanden er doblet?

Vi setter hummerbestanden lik H.

Vekstfaktoren blir $1+\frac{2,5}{100}=1,025$.

Når hummerbestanden er *H* vil en dobling være $2 \cdot H$.

$$H \cdot 1,025^x = 2 \cdot H$$

$$1,025^x = \frac{2 \cdot H}{H}$$

$$\lg 1,025^x = \lg 2$$

$$x \lg 1,025 = \lg 2$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,025}$$

$$x \approx 28,1$$

<u>Det vil ta 28 år før bestanden er dobbelt så stor med denne økningen.</u>

Ekstraoppgaver

Oppgave 5.8.100 (NDLA 1.9.8) 

Løs likningene når du får oppgitt at $\dfrac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,6$

a) $5^{2x} - 4 = 121$

$$5^{2x} - 4 = 121$$
$$5^{2x} = 121 + 4$$
$$5^{2x} = 125$$
$$2x \lg 5 = \lg 125$$
$$x = \frac{\lg 125}{2\lg 5}$$
$$x = \frac{\lg 5^3}{2\lg 5}$$
$$x = \frac{3\lg 5}{2\lg 5}$$
$$x = \underline{\underline{1,5}}$$

b) $3(2^{3x} - \dfrac{2}{3}) = 79$

$$2^{3x} - \frac{2}{3} = \frac{79}{3}$$
$$2^{3x} = \frac{79}{3} + \frac{2}{3}$$
$$2^{3x} = \frac{81}{3}$$
$$3x \lg 2 = \lg 27$$
$$x = \frac{\lg 3^3}{3\lg 2}$$
$$x = \frac{3\lg 3}{3\lg 2}$$
$$x \approx \underline{\underline{1,6}}$$

c) $\dfrac{2^x}{3} = 9$

$$2^x = 9 \cdot 3$$
$$x \lg 2 = \lg 27$$
$$x = \frac{3\lg 3}{\lg 2}$$
$$x \approx 3 \cdot 1,6$$
$$x \approx \underline{\underline{4,8}}$$

Oppgave 5.8.101 (NDLA 1.9.13)
Verdien av en bolig var 950 000 kroner i begynnelsen av 2002. I begynnelsen 2010 var verdien 1 500 000 kroner.

a) Hvor stor var den prosentvise veksten per år fra 2002 til 2010?
Vi setter først opp en likning og finner vekstfaktoren

$$950\ 000 \cdot x^8 = 1\ 500\ 000$$
$$x^8 = \frac{1\ 500\ 000}{950\ 000}$$
$$x = \sqrt[8]{\frac{1\ 500\ 000}{950\ 000}}$$
$$x = 1{,}0588$$

Vi finner en vekstfaktor på 1,0588.
Den prosentvise veksten per år blir da

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}0588$$
$$100 + p = 105{,}88$$
$$p = 105{,}88 - 100$$
$$p = \underline{\underline{5{,}88}}$$

b) Hva vil verdien av boligen være i begynnelsen av 2014 dersom verdistigningen er den samme de neste årene?
Vi tar utgangspunkt i verdien i 2010 og finner

$$1\ 500\ 000 \cdot 1{,}0588^4 \approx \underline{1\ 885\ 155}$$

Verdien i begynnelsen av 2014 blir da ca. 1 890 000 kroner.

c) Hvor lang tid tar det før verdien av boligen har økt til 3 000 000 kroner. (Bruk samme vekstfaktor som ovenfor.)
Vi tar utgangspunkt i verdien i 2010 og finner

$$1\ 500\ 000 \cdot 1{,}0588^x = 3\ 000\ 000$$
$$1{,}0588^x = \frac{3\ 000\ 000}{1\ 500\ 000}$$
$$\lg 1{,}0588^x = \lg 2$$
$$x \lg 1{,}0588 = \lg 2$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}0588}$$
$$x \approx 12{,}1$$

Omtrent 12 år fra 2010 dvs. i år 2022 har verdien av boligen økt til 3 000 000 kroner.

Oppgave 5.8.102 (NDLA 1.9.16)

Lydintensitet måles i watt per kvadratmeter (W/m^2). Lydstyrke måles i desibel, dB

Laveste lydintensitet som øret kan oppfatte er $I_{\min} = I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

Høyeste lydintensitet som øret kan oppfatte er $I_{\max} = 1{,}1\ W/m^2$ (smertegrense).

Det er altså et stort sprang mellom $I_{\min}$ og $I_{\max}$, og tallene er ubehagelige å regne med.
Vi ønsker oss en mer hensiktsmessig skala.
Dette får vi til med et såkalt **intensitetsnivå** eller **desibelskala**.

For en gitt intensitet $I\ W/m^2$ defineres lydstyrken L dB ved

$$L = 10\lg I + 120$$

For vårt høreområde (fra $10^{-12}\ W/m^2$ til $1{,}1\ W/m^2$) får vi da en skala som går fra 0 dB til 120 dB.

a) Sett $I_{\min}$ og $I_{\max}$ inn i formelen ovenfor og vis at vi får en skala som går fra 0 dB til 120 dB.

$L_{\min} = 10 \cdot \lg\left(10^{-12}\right) + 120 = \underline{\underline{0}}$

$L_{\max} = 10 \cdot \lg(1.1) + 120 = 10 \cdot 0{,}04 + 120 = 120{,}4 \approx \underline{\underline{120}}$

Et rop kan ha en lydintensitet på $10^{-4}\ W/m^2$.

b) Hvor mange desibel svarer det til?

$L = 10 \cdot \lg\left(10^{-4}\right) + 120 = \underline{80}$

Et rop kan ha en lydstyrke på 80 dB.

Undersøkelser i barnehager viser at det gjennomsnittlige lydnivået ligger på over 85 dB.

c) Hvor stor er lydintensiteten ved en lydstyrke på 85 dB?

$$10 \cdot \lg I + 120 = 85$$
$$\lg I = \frac{85-120}{10}$$
$$\lg I = -3,5$$
$$I = 10^{-3,5} \approx \underline{\underline{0,00032}}$$

d) Hvor stor er lydintensiteten ved en lydstyrke på 88 dB?

$$10 \cdot \lg I + 120 = 88$$
$$\lg I = \frac{88-120}{10}$$
$$\lg I = -3,2$$
$$I = 10^{-3,2} \approx \underline{\underline{0,00063}}$$

e) Sammenlign svarene i oppgave c) og d). Hva oppdager du?
<u>Ved en økning av lydstyrken på 3 dB dobles lydintensiteten.</u>

7.4 Rapport fra klasseromsbesøk av Pauline Vos

Topic «Logaritmer»

Lesson series taught by Børge Espedal (Vågsbygs Videregaende Skole, Kristiansand)

Report classroom visit 26.11.2014

by Pauline Vos

The lesson is from 13:40-15:15 (with a 10 minutes break in between)
This is the second lesson, after the Logarithms have been introduced in the previous week.
13 girls, 7 boys.

Børge introduces the guest and starts centrally with a repeat from the previous lesson. He is leading the students by questioning. Students sit in pairs (with two exceptions). They all copy what is written on the board.
The students are able to produce the definition of logarithms as a repeated division until you reach one. They raise their hand to volunteer the definition (but not all raise their hand).
Børge writes the definition as a sentence on the board.

The following seem to be very easy:

lg 100 lg 10 lg1 lg 0 lg (-17)

Børge can always ask «*fordi?*» and students can in all cases produce a reason for the answer, based on the repeated division.

Log of a decimal is more complicated:

lg 0,1 lg 0,01

Børge needs to assist with the explaination that it is a process of "*et steg tilbake*" (a step backwards).

Approximating goes very well:

lg 50 lg 31 000

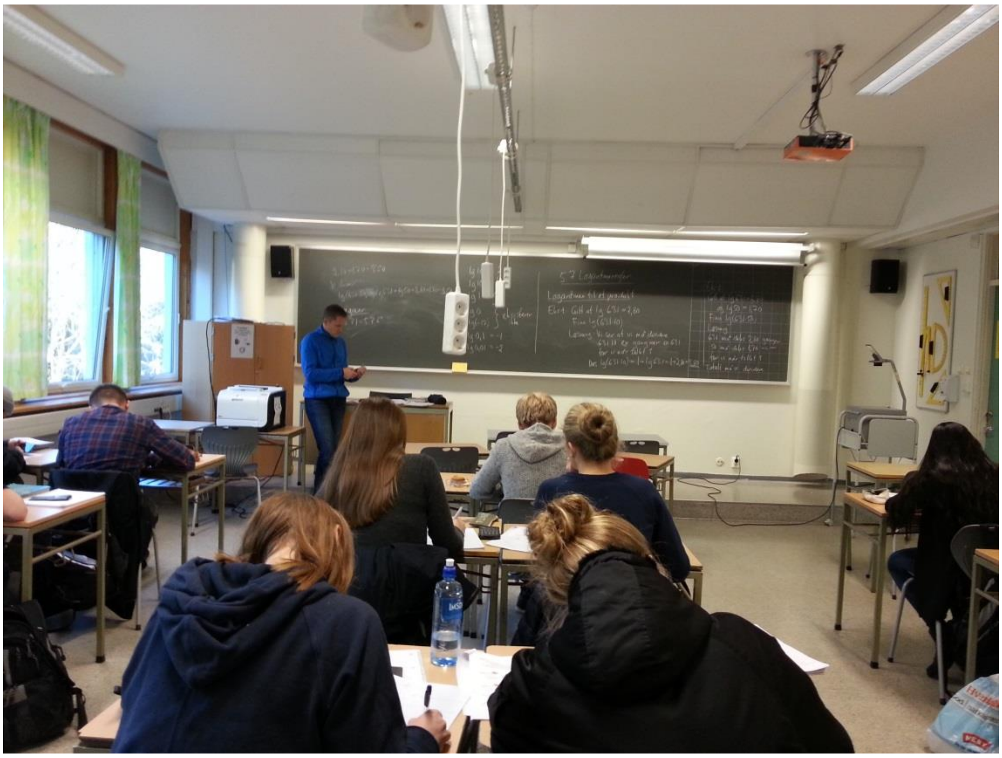
Students are very good at reasoning why it should be more than 1 (respectively 4) and less than 2 (respectively 5).

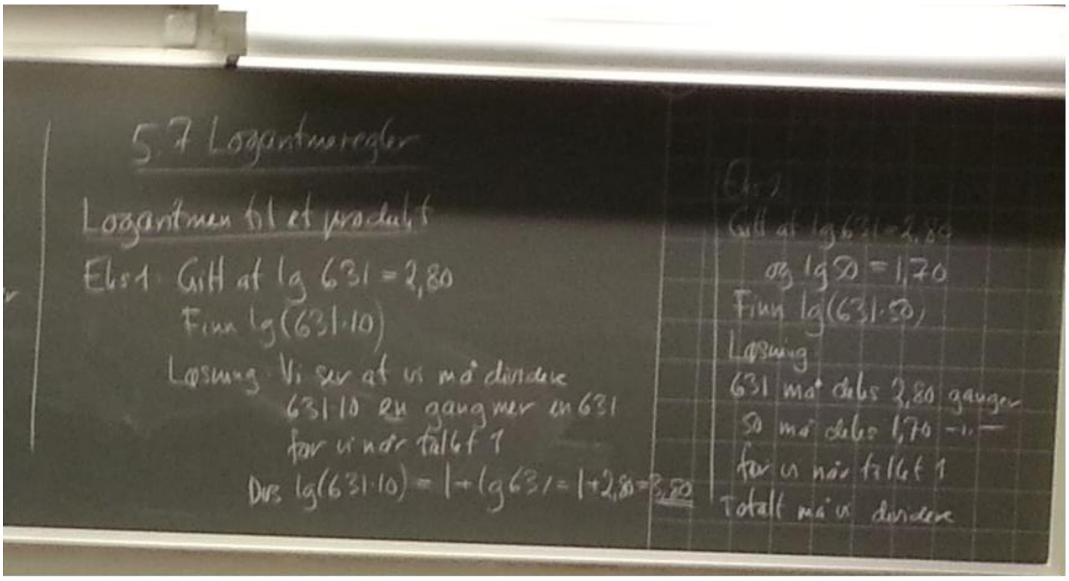
The exercise

log (50 · 631)

is done on the board but not understood. They seem not to be surprised that 2,80 and 1,70 are *added*.
The final answer 4,50 makes sense to them (they could approximate), but the process of getting to that answer (adding) has nothing to do with the repeated definition any more.

Thereafter the students start on working through the exercises. Notebooks are neat. I don't see them often go to the *fasit*.
Here is a picture taken at that moment with a zoom on the white board.





I observe two pairs of students. Two girls in front of me, and a boy/girls pair to my left side.

The boy/girls pair to my left side work fast. They sometimes explain to each other and I hear them refer to the definition of repeated addition. When they have gone so much further that the rest of the class, Børge asks them to read the contextual text (about decibels etc). They read it, at first somewhat reluctantly. But after some time they start discussing something on sound (I could not hear it well).

The girls in front of me:
They keep on hanging on the question about the "*sammenhengen*" in 5.7.1. The word "*sammenhengen*" suggests maybe something deep. They are disappointed that it is just a formula lg (ab) = lga+lgb

(I don't think they see that the formula means that a multiplication is coupled to an addition)
(I don't think they see a connection to the repeated division)

When they work on

$\lg(738 \cdot 10^5)$

they use the pocket calculator for finding $738 \cdot 10^5$. When they see the many zeros, they move with their fingers covering one-by-one the zeros to do the repeated division by 10 and counting the steps. In this way they see that the answer must be larger than 8. They don't see the addition

When they work on

$\lg(4231 \cdot 347)$

The question whether the values for lg (4231) and lg (347) are "rimelig" (reasonable) is easy for them. They really grasp that. Finding lg (4231 · 347) is then a multiplication 4231 · 347, pressing the log button and reasoning whether the answer is reasonable. The addition lg (4231) + lg (347) is not seen.

The question whether log(ab) is not equal to lga x lgb remains unclear. They cannot answer it and leave some white lines so they can fill it in later.

They write "lg25 + lg4 =2 fordi" and then leave the remainder of the line blank. It tells me, that they have no clue about the product rule. It is not connected to what they can (repeated division, approximating a log value)

I see

$\lg 4x - \lg 4 = \lg -16x$

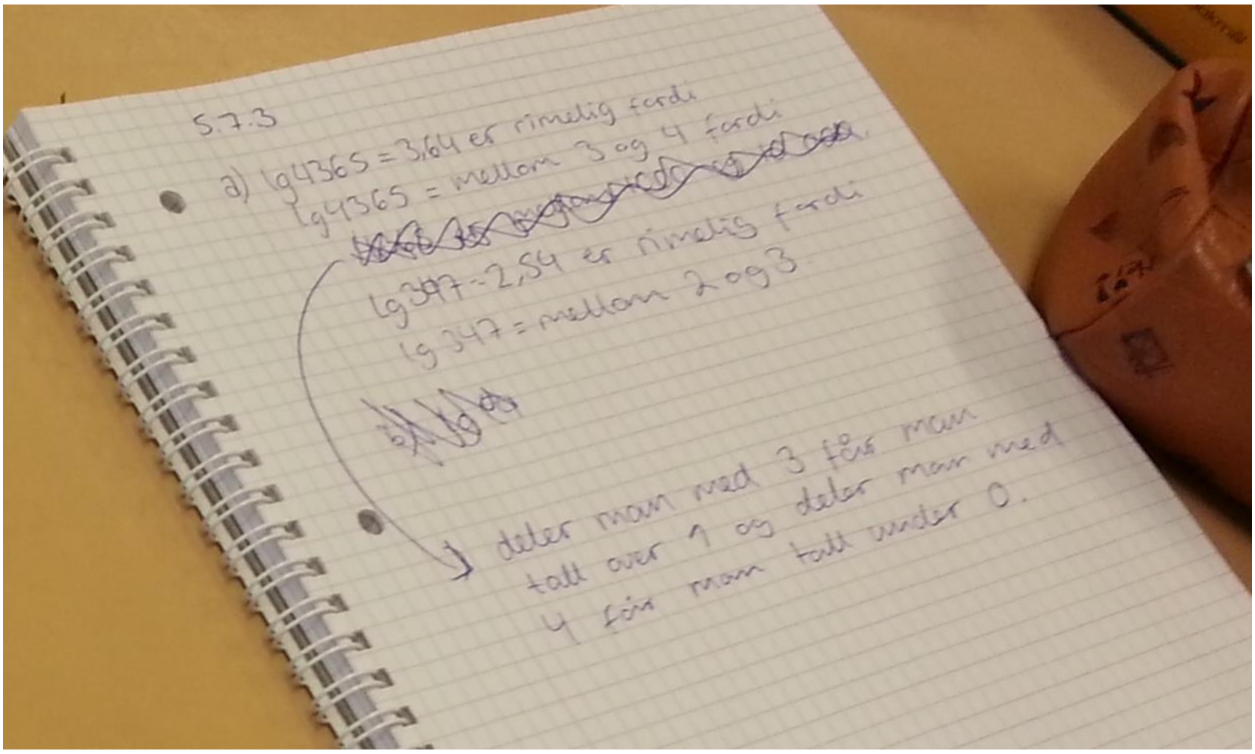
I see them do

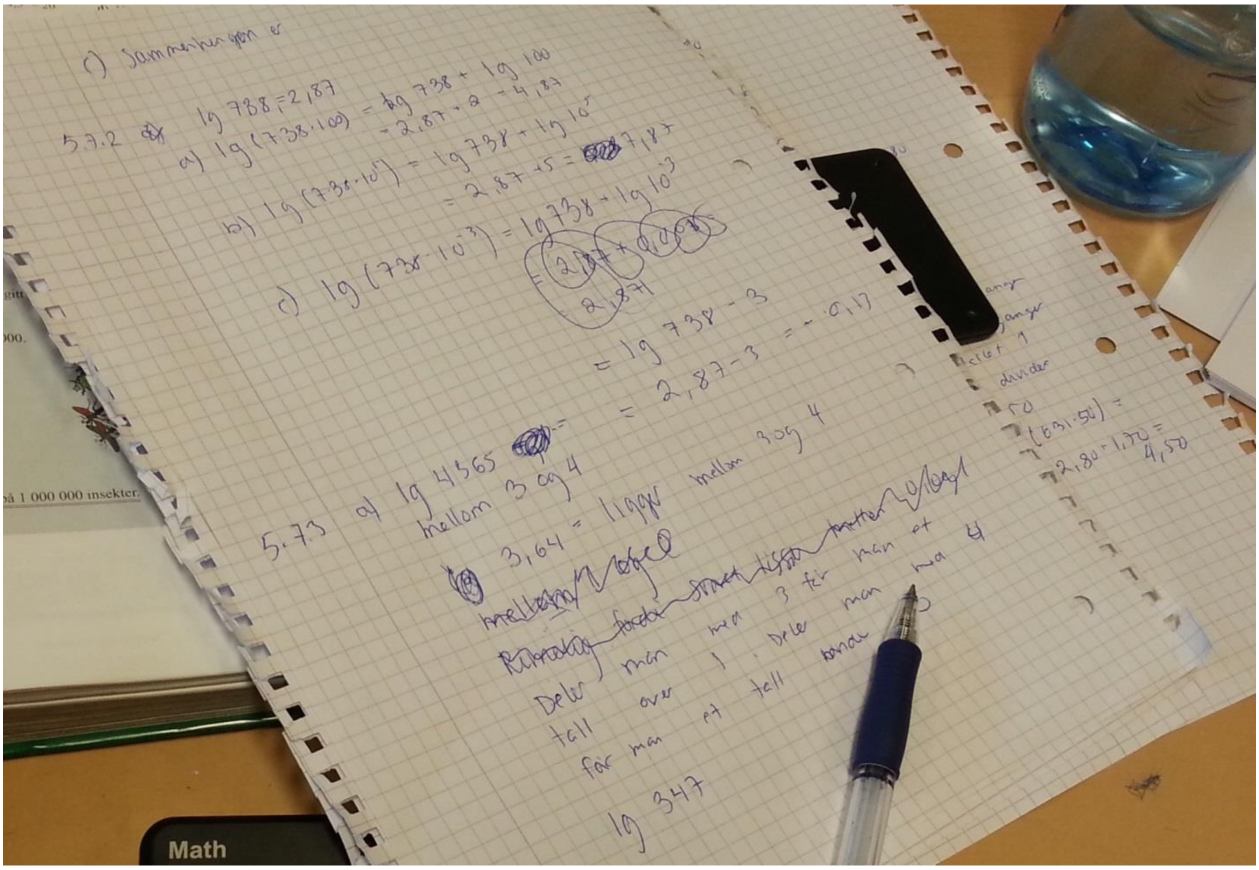
$\lg 2 + \lg 5$

with the pocket calculator : 0,3 + 0,7=1 (not by reasoning that 2 . 5 = 10

I see

$\lg 20 + \lg x - \lg 2 = \lg 18 + \lg x$ which they then cancel out and write


5.7.3
a) lg4365 = 3,64 er rimelig fordi
lg4365 = mellom 3 og 4 fordi
lg347 = 2,54 er rimelig fordi
lg 347 = mellom 2 og 3
deler man med 3 får man tall over 1 og deler man med 4 får man tall under 0.


5.7.2 a) lg 738 = 2,87
lg(738·100) = lg 738 + lg 100 = 2,87 + 2 = 4,87
b) lg(738·10^5) = lg 738 + lg 10^5 = 2,87 + 5 = 7,87
c) lg(738·10^-3) = lg 738 + lg 10^-3
= lg 738 − 3
= 2,87 − 3 = −0,13
5.7.3 a) lg 4365
mellom 3 og 4
3,64 = ligger mellom 3 og 4
lg 347
Math

7.5 Intervjuspørsmål etter gjennomført eksperimentell undervisning

7.5.1 Intervjuspørsmål til elever i eksperimentell gruppe

1. Hvordan likte du stoffet med logaritmer?
2. Hvordan vil du beskrive vanskegraden på de forskjellige delene av dette stoffet? a) Repetert divisjon b) Metoden med å dekke deler av regnestykket med hånden c) Utforskende oppgaver
3. Lærematerielllet har et delkapitel knyttet til hvorfor vi bruker logaritmisk skala. Hvilken tanker gjør du deg om dette delkapitelet?

Tabell 10. Tabellen viser intervjuspørsmålene gitt til elever etter gjennomført undervisning av logaritmer gjennom repetert divisjon.

7.5.2 Intervjuspørsmål til kollega

1. Hvordan vil du vurdere effekten av å bruke • metoden med å introdusere logaritmer gjennom repetert divisjon? • «*cover-up*» - metoden • de utforskende oppgavene i lærematerielllet • delkapitelet om bruken av logaritmisk skala
2. Opplevde du noen av punktene over som en forbedring i forhold til å nå elevene med logaritmebegrepet?

Tabell 11. Tabellen viser intervjuspørsmålene gitt til lærer etter gjennomført undervisning av logaritmer gjennom repetert divisjon.

7.6 Godkjenning fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

MELDESKJEMA

Meldeskjema (versjon 1.4) for forsknings- og studentprosjekt som medfører meldeplikt eller konsesjonsplikt
(jf. personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter).

1. Prosjekttittel

Tittel	Introduksjonsmetoder til logaritmer	

2. Behandlingsansvarlig institusjon

Institusjon	Universitetet i Agder	Velg den institusjonen du er tilknyttet. Alle nivå må oppgis. Ved studentprosjekt er det studentens tilknytning som er avgjørende. Dersom institusjonen ikke finnes på listen, vennligst ta kontakt med personvernombudet.
Avdeling/Fakultet	Fakultet for teknologi og realfag	
Institutt	Institutt for matematiske fag	

3. Daglig ansvarlig (forsker, veileder, stipendiat)

Fornavn	Pauline	Før opp navnet på den som har det daglige ansvaret for prosjektet.Veileder er vanligvis daglig ansvarlig ved studentprosjekt. Veileder og student må være tilknyttet samme institusjon. Dersom studenten har ekstern veileder, kan biveileder eller fagansvarlig ved studiestedet stå som daglig ansvarlig.Arbeidssted må være tilknyttet behandlingsansvarlig institusjon, f.eks. underavdeling, institutt etc. NB! Det er viktig at du oppgir en e-postadresse som brukes aktivt. Vennligst gi oss beskjed dersom den endres.
Etternavn	Vos	
Akademisk grad	Doktorgrad	
Stilling	Professor	
Arbeidssted	Universitetet i Agder	
Adresse (arb.sted)	Gimlemoen 46	
Postnr/sted (arb.sted)	4604 Kristiansand	
Telefon/mobil (arb.sted)	38142332 / 45400738	
E-post	pauline.vos@uia.no	

4. Student (master, bachelor)

Studentprosjekt	Ja ● Nei ○	NB! Det er viktig at du oppgir en e-postadresse som brukes aktivt. Vennligst gi oss beskjed dersom den endres.
Fornavn	Børge	
Etternavn	Espedal	
Akademisk grad	Høyere grad	
Privatadresse	Blørstadkollen 23	
Postnr/sted (privatadresse)	4626 Kristiansand	
Telefon/mobil	97768681 / 97768681	
E-post	bola1@vaf.no	

5. Formålet med prosjektet

Formål	Vurdere effekten av å introduksjonen av logaritmeregning til elever på vg1 i videregående skole ved hjelp av en ny innfallsvinkel.	Redegjør kort for prosjektets formål, problemstilling, forskningsspørsmål e.l. Maks 750 tegn.

6. Prosjektomfang

Velg omfang	● Enkel institusjon ○ Nasjonalt samarbeidsprosjekt ○ Internasjonalt samarbeidsprosjekt	Med samarbeidsprosjekt menes prosjekt som gjennomføres av flere institusjoner samtidig, som har samme formål og hvor personopplysninger utveksles.
Oppgi øvrige institusjoner		
Oppgi hvordan samarbeidet foregår		

7. Utvalgsbeskrivelse

Side 1

Utvalget	2 skoleklasser i kurset matematikk 1T ved Vågsbygd vgs skoleåret 2013/2014 og 2 skoleklasser i samme kurs skoleåret 2014/2015	Med utvalg menes dem som deltar i undersøkelsen eller dem det innhentes opplysninger om. F.eks. et representativt utvalg av befolkningen, skoleelever med lese- og skrivevansker, pasienter, innsatte.
Rekruttering og trekking	Utvalget er elever av lærerne som blir involvert i prosjektet i det to nevnte skoleårene	Beskriv hvordan utvalget trekkes eller rekrutteres og oppgi hvem som foretar den. Et utvalg kan trekkes fra registre som f.eks. Folkeregisteret, SSB-registre, pasientregistre, eller det kan rekrutteres gjennom f.eks. en bedrift, skole, idrettsmiljø, eget nettverk.
Førstegangskontakt	Jeg (masterstudent og lærer) inviterer elevene til å delta i prosjektet i forbindelse med undervisning i matematikk-kursene 1T ved Vågsbygd vgs.	Beskriv hvordan førstegangskontakten opprettes og oppgi hvem som foretar den. Les mer om dette på våre temasider.
Alder på utvalget	□ Barn (0-15 år) ■ Ungdom (16-17 år) □ Voksne (over 18 år)	
Antall personer som inngår i utvalget	41 i 2013/2014 og 40-50 i 2014/2015	
Inkluderes det myndige personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse?	Ja ○ Nei ●	Begrunn hvorfor det er nødvendig å inkludere myndige personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse. Les mer om Pasienter, brukere og personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse
Hvis ja, begrunn		

8. Metode for innsamling av personopplysninger

Kryss av for hvilke datainnsamlingsmetoder og datakilder som vil benyttes	■ Spørreskjema ■ Personlig intervju □ Gruppeintervju □ Observasjon □ Psykologiske/pedagogiske tester □ Medisinske undersøkelser/tester □ Journaldata □ Registerdata □ Annen innsamlingsmetode	Personopplysninger kan innhentes direkte fra den registrerte f.eks. gjennom spørreskjema, intervju, tester, og/eller ulike journaler (f.eks. elevmapper, NAV, PPT, sykehus) og/eller registre (f.eks. Statistisk sentralbyrå, sentrale helseregistre).
Annen innsamlingsmetode, oppgi hvilken		
Kommentar		

9. Datamaterialets innhold

Redegjør for hvilke opplysninger som samles inn	Elevbesvarelser i logaritmeregning, samt kort intervju om samme emne.	Spørreskjema, intervju-/temaguide, observasjonsbeskrivelse m.m. sendes inn sammen med meldeskjemaet. NB! Vedleggene lastes opp til sist i meldeskjema, se punkt 16 Vedlegg.
Samles det inn direkte personidentifiserende opplysninger?	Ja ● Nei ○	Dersom det krysses av for ja her, se nærmere under punkt 11 Informasjonssikkerhet. Les mer om hva personopplysninger er NB! Selv om opplysningene er anonymiserte i oppgave/rapport, må det krysses av dersom direkte og/eller indirekte personidentifiserende opplysninger innhentes/registreres i forbindelse med prosjektet.
Hvis ja, hvilke?	□ 11-sifret fødselsnummer ■ Navn, fødselsdato, adresse, e-postadresse og/eller telefonnummer	
Spesifiser hvilke	Navn	
Samles det inn indirekte personidentifiserende opplysninger?	Ja ○ Nei ●	En person vil være indirekte identifiserbar dersom det er mulig å identifisere vedkommende gjennom

Hvis ja, hvilke?		bakgrunnsopplysninger som for eksempel bostedskommune eller arbeidsplass/skole kombinert med opplysninger som alder, kjønn, yrke, diagnose, etc.
Samles det inn sensitive personopplysninger?	Ja ○ Nei ●	
Hvis ja, hvilke?	□ Rasemessig eller etnisk bakgrunn, eller politisk, filosofisk eller religiøs oppfatning □ At en person har vært mistenkt, siktet, tiltalt eller dømt for en straffbar handling □ Helseforhold □ Seksuelle forhold □ Medlemskap i fagforeninger	
Samles det inn opplysninger om tredjeperson?	Ja ○ Nei ●	Med opplysninger om tredjeperson menes opplysninger som kan spores tilbake til personer som ikke inngår i utvalget. Eksempler på tredjeperson er kollega, elev, klient, familiemedlem.
Hvis ja, hvem er tredjeperson og hvilke opplysninger registreres?		
Hvordan informeres tredjeperson om behandlingen?	□ Skriftlig □ Muntlig □ Informeres ikke	
Informeres ikke, begrunn		

10. Informasjon og samtykke

Oppgi hvordan utvalget informeres	■ Skriftlig ■ Muntlig □ Informeres ikke	Vennligst send inn informasjonsskrivet eller mal for muntlig informasjon sammen med meldeskjema. NB! Vedlegg lastes opp til sist i meldeskjemaet, se punkt 16 Vedlegg. Dersom utvalget ikke skal informeres om behandlingen av personopplysninger må det begrunnes. Last ned vår veiledende mal til informasjonsskriv
Begrunn		
Oppgi hvordan samtykke fra utvalget innhentes	■ Skriftlig □ Muntlig □ Innhentes ikke	Dersom det innhentes skriftlig samtykke anbefales det at samtykkeerklæringen utformes som en svarslipp eller på eget ark. Dersom det ikke skal innhentes samtykke, må det begrunnes.
Innhentes ikke, begrunn		

11. Informasjonssikkerhet

Direkte personidentifiserende opplysninger erstattes med et referansenummer som viser til en atskilt navneliste (koblingsnøkkel)	Ja ○ Nei ●	Har du krysset av for ja under punkt 9 Datamaterialets innhold må det merkes av for hvordan direkte personidentifiserende opplysninger registreres. NB! Som hovedregel bør ikke direkte personidentifiserende opplysninger registreres sammen med det øvrige datamaterialet.
Hvordan oppbevares navnelisten/ koblingsnøkkelen og hvem har tilgang til den?		
Direkte personidentifiserende opplysninger oppbevares sammen med det øvrige materialet	Ja ● Nei ○	
Hvorfor oppbevares direkte personidentifiserende opplysninger sammen med det øvrige datamaterialet?	Besvarelsene blir lagret på skolen på lik linje med alle andre elevbesvarelser i skolesammenheng og vil bli destruert når oppgaven leveres mai 2015. Opplysningene blir anonymisert i masteroppgaven	
Oppbevares direkte personidentifiserbare opplysninger på andre måter?	Ja ○ Nei ●	
Spesifiser		

Hvordan registreres og oppbevares datamaterialet?	□ Fysisk isolert datamaskin tilhørende virksomheten □ Datamaskin i nettverkssystem tilhørende virksomheten ■ Datamaskin i nettverkssystem tilknyttet Internett tilhørende virksomheten □ Fysisk isolert privat datamaskin □ Privat datamaskin tilknyttet Internett □ Videoopptak/fotografi ■ Lydopptak ■ Notater/papir □ Annen registreringsmetode	Merk av for hvilke hjelpemidler som benyttes for registrering og analyse av opplysninger. Sett flere kryss dersom opplysningene registreres på flere måter.
Annen registreringsmetode beskriv		
Behandles lyd-/videoopptak og/eller fotografi ved hjelp av datamaskinbasert utstyr?	Ja ● Nei ○	Kryss av for ja dersom opptak eller foto behandles som lyd-/bildefil. Les mer om behandling av lyd og bilde.
Hvordan er datamaterialet beskyttet mot at uvedkommende får innsyn?	passordbeskyttet pc med brukernavn og passord og skolens alarmsystem knyttet til alarmsentral	Er f.eks. datamaskintilgangen beskyttet med brukernavn og passord, står datamaskinen i et låsbart rom, og hvordan sikres bærbare enheter, utskrifter og opptak?
Dersom det benyttes mobile lagringsenheter (bærbar datamaskin, minnepenn, minnekort, cd, ekstern harddisk, mobiltelefon), oppgi hvilke	bærbar pc	NB! Mobile lagringsenheter bør ha mulighet for kryptering.
Vil medarbeidere ha tilgang til datamaterialet på lik linje med daglig ansvarlig/student?	Ja ○ Nei ●	
Hvis ja, hvem?		
Overføres personopplysninger ved hjelp av e-post/Internett?	Ja ○ Nei ●	F.eks. ved bruk av elektronisk spørreskjema, overføring av data til samarbeidspartner/databehandler mm.
Hvis ja, hvilke?		
Vil personopplysninger bli utlevert til andre enn prosjektgruppen?	Ja ○ Nei ●	
Hvis ja, til hvem?		
Samles opplysningene inn/behandles av en databehandler?	Ja ○ Nei ●	Dersom det benyttes eksterne til helt eller delvis å behandle personopplysninger, f.eks. Questback, Synovate MMI, Norfakta eller transkriberingsassistent eller tolk, er dette å betrakte som en databehandler. Slike oppdrag må kontraktsreguleres Les mer om databehandleravtaler her
Hvis ja, hvilken?		

12. Vurdering/godkjenning fra andre instanser

Søkes det om dispensasjon fra taushetsplikten for å få tilgang til data?	Ja ○ Nei ●	For å få tilgang til taushetsbelagte opplysninger fra f.eks. NAV, PPT, sykehus, må det søkes om dispensasjon fra taushetsplikten. Dispensasjon søkes vanligvis fra aktuelt departement. Dispensasjon fra taushetsplikten for helseopplysninger skal for alle typer forskning søkes Regional komité for medisinsk og helsefaglig forskningsetikk
Kommentar		
Søkes det godkjenning fra andre instanser?	Ja ○ Nei ●	F.eks. søke registereier om tilgang til data, en ledelse om tilgang til forskning i virksomhet, skole, etc.
Hvis ja, hvilke?		

13. Prosjektperiode

Prosjektperiode	Prosjektstart:15.02.2013 Prosjektslutt:31.05.2015	Prosjektstart Vennligst oppgi tidspunktet for når førstegangskontakten med utvalget opprettes og/eller datainnsamlingen starter. Prosjektslutt Vennligst oppgi tidspunktet for når datamaterialet enten skal anonymiseres/slettes, eller arkiveres i påvente av oppfølgingsstudier eller annet. Prosjektet anses vanligvis som avsluttet når de oppgitte analyser er ferdigstilt og resultatene publisert, eller oppgave/avhandling er innlevert og sensurert.
Hva skal skje med datamaterialet ved prosjektslutt?	■ Datamaterialet anonymiseres □ Datamaterialet oppbevares med personidentifikasjon	Med anonymisering menes at datamaterialet bearbeides slik at det ikke lenger er mulig å føre opplysningene tilbake til enkeltpersoner.NB! Merk at dette omfatter både oppgave/publikasjon og rådata. Les mer om anonymisering
Hvordan skal datamaterialet anonymiseres?	Rådata slettes og masteroppgaven inneholder ingen navn på deltagere	Hovedregelen for videre oppbevaring av data med personidentifikasjon er samtykke fra den registrerte. Årsaker til oppbevaring kan være planlagte oppfølgningsstudier, undervisningsformål eller annet. Datamaterialet kan oppbevares ved egen institusjon, offentlig arkiv eller annet. Les om arkivering hos NSD
Hvorfor skal datamaterialet oppbevares med personidentifikasjon?		
Hvor skal datamaterialet oppbevares, og hvor lenge?		

14. Finansiering

Hvordan finansieres prosjektet?	Trenger ingen finansiering	

15. Tilleggsopplysninger

Tilleggsopplysninger		

16. Vedlegg

Antall vedlegg	3	