Universitetet i Agder

Master

MATEMATISK MODELLERING

En studie av hvilke kognitive barrierer elevene møter i en modelleringsprosess

TOVE GRANMO

VEILEDER

John David Monaghan
Niclas Larson

Universitetet i Agder, Mai 2022
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på masterstudiet ved Universitetet i Agder. Det har vært en krevende men lærerik tid som student. Det aller viktigste for meg har vært møtene med nye mennesker og inspirasjon til å prøve nye ting og utvikle meg som pedagog. Det har også vært fint og nyttig å kjenne på hvordan det er å være elev, sitte med mange spørsmål, kjenne på utfordringer og mestring. Kanskje burde alle lærere med jevne mellomrom erfare hvordan det kan være å sitte på andre siden, oppleve utilstrekkelighet og stress. Jeg tror jeg har fått en bedre forståelse for hvordan elever opplever sin hverdag på skolen. Det har vært nyttig å kjenne på hvordan det føles å stå fast og måtte løse utfordringer, få kritikk og bli stilt krav til.

Jeg har mange å takke for at jeg kom i mål med denne oppgaven. Først og fremst mine to veiledere John David Monaghan og Niclas Larson, som tålmodig, men direkte har kommet med konstruktive tilbakemeldinger hele veien. Deres ekspertise og klokskap har vært til uvurderlig hjelp for å gi meg framdrift i prosjektet og finne en retning. Fra å flakke litt rundt med mange ustrukturerte ideer i starten, har jeg ved hjelp av deres råd funnet en retning på oppgaven og lært veldig mye på veien. Jeg vil også gjerne takke min tålmodige mann Bjørn for støtte og gode råd og for å heie på meg hele veien, spesielt på tunge dager. Takk også til Gunnar-André for interessante diskusjoner og Håvar og Endre for at dere har vært tålmodige med en av og til stressa mamma.

Til sist vil jeg gjerne også takke min gode kollega Hanna Stapnes Bøgwald for sparring, tålmodighet, raushet og gode råd, og Kristine Fjelldal Sunde for å gå gjennom kodene mine og sikre en pålitelig prosess. Jeg vil også gjerne takke min arbeidsplass for fleksibilitet slik at jeg kunne gjennomføre studiet og familie og venner som har kommet med oppmuntringer og støttende ord underveis.

Tusen takk!

Kristiansand, 11.mai 2022

TOVE GRANMO

Sammendrag

I ny læreplan (LK20), er modellering og anvendelse et av kjerneelementene. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Det innebærer å ta en problemstilling fra virkeligheten, omformulere den til en matematisk modell og tolke modellen i lys av den opprinnelige situasjonen. Formålet med denne studien er å undersøke hvordan elever på 8.trinn jobber med modelleringsoppgaver, hvilke kognitive barrierer de møter i prosessen og hvordan de eventuelt løser disse. Kilden til empiriske data er videoopptak av fem elever fordelt på to grupper mens de løser modelleringsoppgaver. Elevene løser en oppgave hver uke i fem uker. Elevenes modelleringsprosess analyseres i forhold til modelleringssyklusen til Blum & Leiss (2007).

Funnene i denne studien kan tyde på at oppgavene har mye å si for hvilken modelleringsprosess elevene går gjennom. Prosessene til begge grupper har mange likheter i forhold til hver oppgave. Noen oppgaver gir rike modelleringsprosesser hos elevene, det vil si at de er innom de fleste stegene i modelleringssyklusen. Andre oppgaver gir mer ufullstendige prosesser. Elevene har få protester til oppgaveformen, de lager antakelser helt naturlig. Resultatene i studien indikerer at matematisering er vanskelig for elevene. Det er her de møter flest kognitive barrierer. De strever med å lage modeller ut fra virkelige situasjoner og å uttrykke sammenhenger for å lage virkelig modell og matematisk modell. Det kan virke som elevene tar med seg få erfaringer om modeller fra oppgave til oppgave. Elevene har liten variasjon i sine anstrengelser eller handlinger for å komme videre i modelleringsprosessen når de møter kognitive barrierer. De bruker mye samarbeid, diskusjon og resonnement, men noterer lite og lager ingen situasjonsskisser eller matematiske skisser. Videre forskning på dette anbefales.

Nøkkelord: Matematisk modellering, kognitive barrierer, modelleringssyklus modelleringsprosess, kvalitetsundervisning.

Summary

In the new curriculum (LK20), modeling and application is one of the core elements. Students will have insight into how models in mathematics are used to describe daily life, working life and society in general. It involves taking an issue from reality, reformulating it into a mathematical model and interpreting the model in the light of the original situation. The purpose of this study is to investigate how students in 8th grade work with modeling tasks, what cognitive barriers they encounter in the process and how they possibly solve these. The source of empirical data is video recordings of five students divided into two groups while solving modeling tasks. Students solve a task every week for five weeks. The students' modeling process is analyzed in relation to the modeling cycle of Blum & Leiss (2007).

The findings in this study may indicate that the tasks have a lot to say for which modeling process the students go through. The processes of both groups have many similarities in relation to each task. Some assignments provide rich modeling processes for the students, i.e., they go through most of the steps in the modeling cycle. Other tasks result in more incomplete processes. The students have few protests to the form of the assignment, they make assumptions quite naturally. The results of the study indicate that mathematics is difficult for students. This is where they face the most cognitive barriers. They strive to create models based on real-life situations and to express connections in order to create a real model and mathematical model. It may seem that the students bring with them little experience of models from task to task. Students have little variation in their efforts or actions to move forward in the modeling process when they encounter cognitive barriers. They use a lot of collaboration, discussion and reasoning, but note little and make no situation sketches or mathematical sketches. Further research on this is recommended.

Keywords: Mathematical modeling, cognitive barriers, modeling cycle, modeling process, quality teaching.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I ny læreplan (LK20) er modellering og anvendelser et av kjerneelementene. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Dette innebærer å ta en problemstilling fra virkeligheten, omformulere den til en matematisk modell og tolke modellen i lys av den opprinnelige situasjonen. Elevene skal kritisk vurdere om modellene er gyldige, hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og om de kan brukes i andre situasjoner.

Siden modellering er nytt i norsk skole, ser jeg et behov for å øke min kompetanse om hvordan elever jobber med slike oppgaver og hvordan jeg som lærer kan hjelpe elevene å nå målene i læreplanen. Selv om det har vært mye forskning de siste tiårene på matematisk modellering, er det lite fokus på dette i klasserom verden over. Niss og Blum (2020) poengterer at læreren spiller en avgjørende rolle for å få til undervisning som gjør elevene gode til å lage modeller. Det kreves systematisk anstrengelse over tid og læreren må være i stand til å veilede elevene uten å overta utfordringene i oppgavene. Å lære å modellere passer ikke inn i det tradisjonelle matematiske klasserommet der en har fokus på oppgaveløsning og å trene på spesifikke algoritmer for så å teste disse. Modellering kan læres som et resultat av høykvalitets og målorientert undervisning med et nøye planlagt læringsmiljø. Nærmere beskrivelse av slik kvalitetsundervisning vil komme i teoridelen, kapittel 2. Jeg ser denne studien som et viktig bidrag til å utvikle gode oppgaver og god undervisning for elevene på min skole, og håper å bidra til å implementere modellering og anvendelser i undervisningen etter ny Læreplan (LK20) på en god måte for elever og lærere.

1.1 Formål og forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å undersøke elevers matematiske modelleringsprosess, hvordan de løser modelleringsoppgaver og hvor de møter motstand i den kognitive prosessen. Dette er et viktig bidrag for å kunne utvikle gode oppgaver og god matematikkundervisning.

Forskningsspørsmål:

I. Hvilke steg i modelleringssyklusen går elever på 8.trinn gjennom når de løser matematiske modelleringsoppgaver?

II. Hvilke *kognitive barrierer* oppstår hos elever på 8.trinn i arbeid med matematiske modelleringsoppgaver?

III. Hva gjør elevene for å komme videre når de møter *kognitive barrierer* i modelleringsprosessen?

1.2 Avgrensninger

Studien er gjort på fem elever på 8.trinn fordelt på to grupper og undersøker hvordan de løser modelleringsoppgaver. Oppgavene ble valgt slik at det ikke skulle være spesifikke matematiske kunnskaper ut over grunnleggende kunnskap fra barnetrinnet som skulle til for å løse dem. Flere studier viser at evnen til å beherske matematisk modellering ikke direkte er en konsekvens av at en har høy kompetanse i intra-matematiske ferdigheter (Niss & Blum, 2020, s.190) Denne studien er begrenset til det kognitive arbeidet elevene gjør mens de modellerer, og tar ikke hensyn til andre sosiale samspill, uro eller barrierer som oppstår i gruppedynamikken. Studien fokuserer heller ikke spesielt på de digitale verktøyene elevene bruker. I utgangspunktet er det bare elevene i de to gruppen som er i fokus, men analysen viser at enkelte faktorer hos læreren kan ha betydning for elevenes utvikling i modellering. Disse blir kommentert i resultat og diskusjon fordi forskning viser at læreren er en avgjørende faktor for å utvikle elevene i modellering (Niss & Blum, 2020). Denne studien fokuserer på hva elevene gjør i modelleringsprosessen i forhold til modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007), hvilke kognitive barrierer som oppstår underveis og hvordan elevene eventuelt kommer seg videre i prosessen etter å ha støtt på en barriere. Begrepet kognitive barrierer vil bli operasjonalisert i teoridelen.

1.3 Strukturen i oppgaven

Denne oppgaven består av seks kapitler. Kapittel to beskriver det teoretiske rammeverket for studien. I dette kapittelet blir det presisert hva matematisk modellering er og sentrale begreper som matematisering og kognitive barrierer operasjonaliseres. Modelleringssyklusen og tidligere funn av utfordringer i modellering blir også presentert. Kapittelet avsluttes med en beskrivelse av kvalitetsundervisning, quality teaching, som ut fra tidligere forskning presentert av Niss og Blum (2020) viser seg å være avgjørende for suksessfull undervisning i modellering.

Det tredje kapittelet beskriver metode brukt i studien. Her presenteres forskningsdesign, begrunnelser for utvalg og oppgaver og analyseverktøy. Det vil også bli presentert etiske overveielser og vurdering av pålitelighet for metoden. Kapittel fire vil presentere resultatene for analyse av dataene. Resultatene er organisert kronologisk etter oppgavene, og hver av de to gruppene presenteres for seg. Resultatene av dataanalysen presenteres så systematisk og nøytralt som mulig da tolkning av resultatene presenteres i drøftingsdelen, kapittel fem. Her organiseres funnene etter forskningsspørsmålene. Først presenteres ulike modelleringsruter, deretter kognitive barrierer elevene møter i modelleringsprosessen og til sist hvilke verktøy elevene bruker for å komme videre i når de står fast. I kapittel seks avsluttes oppgaven med oppsummering av funn, og diskusjon med bakgrunn i forskning rundt hvilke tiltak som bør gjøres for å heve elevenes kompetanse i modellering. Her trekkes også inn lærerens rolle. Selv om læreren ikke er et hovedfokus i denne studien, viser forskningslitteratur at lærerens valg av undervisningsmetoder har stor betydning for hvordan elevene utvikler modelleringskompetanse (Niss & Blum, 2020)

2 Teoretisk perspektiv og tidligere forskning

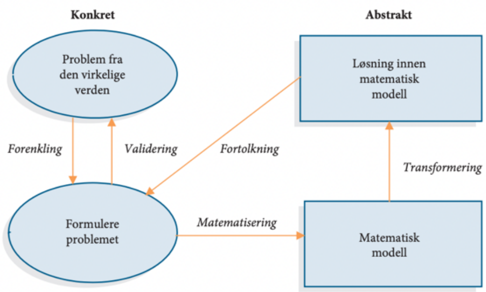
I denne delen av oppgaven vil jeg presentere det teoretiske grunnlaget for min forskning. Jeg vil først gi en introduksjon til relevant forskningslitteratur og hvilken forskning jeg har lagt til grunn for mitt arbeid med denne problemstillingen. Deretter vil jeg gi en oversikt over hva matematisk modellering er, hva modellering i skolen innebærer, og ulike syn forskere har på dette. Til slutt vil jeg trekke fram ulike utfordringer i forbindelse med modellering, både hos elever og lærere, og presentere noen punkter som har vist seg å være suksessfulle for å oppnå kvalitetsundervisning.

2.1 Oversikt over relevant forskningslitteratur og bakgrunn for studien

Modellering er et velkjent felt innenfor internasjonal matematikkdidaktisk forskning og det er internasjonal enighet om at modellering skal spille en viktig rolle i matematikkundervisningen (Greefrath & Vorhölter, 2016). Organisasjonen ICTMA, *The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*, presenterer annet hvert år status for forskning og utvikling innen området. I tillegg har ICMI, *The International Commission of Mathematical Instruction*, en egen studie, *Modelling and Applications in Mathemathics Education,* som viser den internasjonale utviklingen innen modellering i skolen (Greefrath & Vorhölter, 2016). Konferansen i Dortmund i 2004 og arbeidet ledet av blant annet Werner Blum og Hans-Wolfgang Henn har blitt en standard og referanse for læring og undervisning av modellering og anvendelser (Stillman, 2008)

Det eksisterer ikke et homogent syn på hva matematisk modellering er blant dagens forskere. Kaiser og Sriraman (2006) presenterer forskeres ulike tilnærmingene til modellering, både historisk og i nyere tid. De har laget et klassifiseringssystem for ulike tilnærminger som forskere har på modellering, med utgangspunkt i publikasjoner gjort av ICMI og ICTMA. De ulike perspektivene på modellering presentert i deres oversikt er kategoriene *realistisk*, *kontekstuell*, *pedagogisk*, *sosio-kritisk*, *epistemologisk/teoretisk* og *kognitiv modellering*. Det siste perspektivet, *kognitiv modellering*, er beskrevet som et slags meta-perspektiv. Dette er analyser av kognitive prosesser som oppstår under en modelleringsprosess og forståelsen av disse kognitive prosessene. Kognitiv modellering beskrives også som å fremme matematiske tankeprosesser ved å bruke modeller som mentale eller fysiske bilder og å fremheve abstraksjon og generalisering som en mental prosess. Jeg vil ikke gå detaljert inn i klassifiseringssytemet og de ulike tilnærmingene til modellering som Kaiser og Sriraman beskriver, kategoriseringen er ikke av direkte relevans til denne studien. Min studie vil ha et kognitivt fokus, forsøke å se hvordan elevene tenker i modelleringsprosessen, og samtidig se på hvilke *kognitive barrierer* de møter i denne prosessen. Analyse av modelleringsprosessen med et kognitivt fokus er av nyere dato, og en slik kognitiv tilnærming er gjort blant annet av Borromeo Ferri (2006) og Blum og Leiss (2005). Denne forskningen med et deskriptivt perspektiv, vil søke å rekonstruere individuelle modelleringsruter og individuelle barrierer og vanskeligheter elevene har mens de driver med modelleringsaktiviteten. Forskere i Danmark og tysktalende land har de siste årene bidratt mye til forskning innenfor feltet modellering og anvendelser, og jeg har valgt å legge noen av deres funn som grunnleggende i mitt teoretiske rammeverk for denne studien. Jeg vil spesielt bruke modelleringssyklusen utviklet av Blum og Leiss (2007) som grunnlag for analyse av elevenes prosess i arbeidet med modelleringsoppgavene, og bruke denne og artikkelen til Blum og Ferri (2009) som hovedinspirasjon for studien min. I tillegg vil jeg bruke funnene i en studie presentert av Jankvist og Niss (2020) i *International Journal of mathematical education in science and technology* som sammenligningsgrunnlag for mine funn. Studien deres på 315 elever fra videregående skole viser en rekke vansker elever har med å løse modelleringsoppgaver.

Den enkeltes behov for matematikk i dagliglivet og som aktivt deltakende samfunnsborger har vært framhevet i både læreplaner og studier de siste tiårene. Den internasjonale studien PISA *Programme for International Student Assessment*, måler elever på ungdomstrinn i det de kaller *mathematical litteracy* eller på norsk, matematisk allmenndannelse (Grønmo & Hole, 2010). Det dreier seg i hovedsak om å teste elevenes evne til å analysere, resonnere og kommunisere matematiske ideer når de løser og tolker matematiske problemer i ulike situasjoner. Hvert tredje år testes 15-åringer i evnen til å løse kontekstuelle oppgaver ved hjelp av skolematematikk. Studien bruker en modell som illustrasjon for å beskrive den matematiske kompetansen de tester elevene i. Oppgavene i



Figur 2-1 Modellen beskriver hvilken matematisk kompetanse oppgavene i PISA-undersøkelsen tester elevene i. Figuren beskriver sammenhengen mellom ren og anvendt matematikk. (Kilde: NCMT, 1989; Grønmo & Hole)

PISA dekker hele syklusen i figur 1 (Grønmo & Hole, 2010), og beskriver sammenhengen mellom ren og anvendt matematikk. TIMSS er en internasjonal studie i naturfag og matematikk som gjennomføres hvert fjerde år. I TIMSS testes elevene i både oppgaver uten og med noen kontekst fra den virkelige verden. Resultatene fra OECDs PISA-undersøkelser (2003 og 2015) og TIMSS (1998 og 2008) viser at norske elever både i grunnskolen og videregående skole ligger langt under flere andre land det er naturlig å sammenligne seg med når det gjelder å forklare svarene sine og pugge formler. De ligger på høyde når det gjelder å løse oppgaver som ligner på eksempler i læreboka (Grønmo et al., 2017). Dette er interessant i forhold til funnene i denne studien. Jeg vil komme tilbake til dette i diskusjonsdelen. I det følgende vil jeg gjøre rede for hva matematisk modellering er, forklare begrepet modelleringskompetanse og presentere en modelleringsprosess.

2.2 Matematisk modellering

Matematisk modellering har fått større plass i læreplanen i flere land de siste tiårene på bakgrunn av resultater fra TIMSS, PISA og allerede nevnt forskning. Bakgrunnen for fagfornyelsen (LK20) er blant annet at elevene skal henge med i den raske utviklingen som skjer i samfunnsliv, arbeidsliv og teknologi. Kunnskapsdepartementet (2017) trekker fram kritisk tenking, refleksjon, utforsking og kreativitet som viktige faktorer for å klare dette, og i matematikkfaget kan arbeid med matematisk modellering bidra til å utvikle disse kompetansene. Matematisk modellering handler om å bruke matematikk til å løse virkelige problem. Å jobbe med modellering kan koble matematikkfaget til ikke-matematiske situasjoner, slik at elevene ser den praktiske nytten av faget. De øver opp evnen til å være kritisk til svar de får fra matematiske modeller, relatere disse svarene til problemer fra virkeligheten og kommunisere i og med matematikk (Berget & Bolstad, 2019).

En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk (Kunnskapsløftet, 2020). En matematisk modell viser sammenhengen mellom ulike størrelser. Blum & Ferri (2009) beskriver matematisk modellering som prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikk i begge retninger. Å modellere virkeligheten er å ta i bruk matematikk for å beskrive den. Vi tar tak i et eller flere aspekter ved virkeligheten og prøver å uttrykke sammenhenger matematisk. En matematisk modell kan lages for å forenkle og forstå utvalgte deler av virkeligheten eller forutse en fremtidig utvikling. Matematisk modellering stammer alltid fra et problem fra virkeligheten. Problemet trenger ikke nødvendigvis være en del av elevenes virkelighet, men bør være realistisk og slik utformet at elevene kan sette seg inn i problemstillingen. I en løsningsprosess blir problemet forenklet slik at det kan håndteres, det gjøres om til en matematisk modell og løses ved å bruke denne modellen. Hele denne prosessen kalles modellering (Greefrath & Vorhölter, 2016). Slik kan en se på matematikk som et verktøy til å forstå og mestre hverdagssituasjoner bedre. Grunnen til å innføre matematisk modellering i læreplaner og undervisning vil variere ut fra hvilket syn en har på matematikk. Blum & Ferri (2009) påpeker at det er viktig å forberede elevene på et ansvarlig medborgerskap, og da kan matematisk modellering bidra ved å hjelpe de til å forstå verden bedre, lære matematikk bedre, bidra til å utvikle varierte matematiske kompetanser og få et bedre og mer nyansert bilde av matematikk. Disse punktene samsvarer med Blum (2015) i (Berget & Bolstad, 2019) Oppsummert presenterer Blum fire hovedgrunner til å drive med matematisk modellering i skolen::

- *Pragmatisk: For å mestre hverdagssituasjoner må elevene være i stand til å omforme hverdagslige problem til matematikk.*
- *Formativ: For å kunne utvikle matematiske kompetanser som modelleringskompetanse og argumentasjonskompetanse.*
- *Kulturell: En må se bruken av matematikk i samfunnet for å få et bilde av hva matematikk som vitenskap er.*
- *Psykologisk: Eksempel hva hverdagslivet kan bidra til at elevene blir mer interesserte i matematikk.*

Modellering kan jobbes med i klasserommet på ulike måter og med ulike formål. Barbosa (2006) beskriver tre ulike perspektiver på modellering ut fra målet med aktiviteten (Berget & Bolstad, 2019, s.82-85).

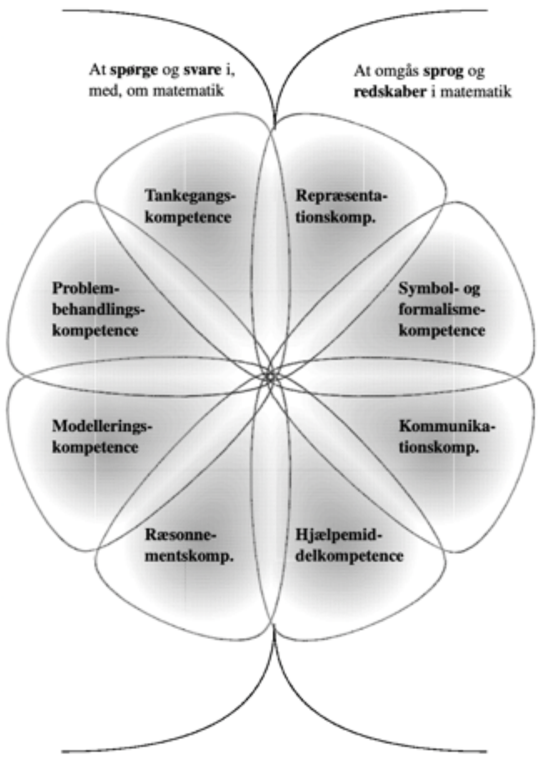
- *Modellering som innhold* der målet er modelleringen i seg selv. Ved å løse problemer som i utgangspunktet ikke er matematiske, ved hjelp av matematikk, vil elever utvikle modelleringskompetanse. Det vil si at de også kan koble den matematiske løsningen tilbake til konteksten. Dette svarer til de to første grunnene til Blum (2015), pragmatisk og formativ. Å kunne bruke matematikk i hverdagen og å utvikle matematisk kompetanse. Jeg vil i denne oppgaven ha fokus på modellering som innhold.

- *Modellering som fartøy* er når modelleringen blir brukt til å lære noe annet enn modellering i seg selv, for eksempel få erfaringer innenfor et matematisk tema. Her kan en bruke modellering for å motivere til matematisk læring, altså Blums psykologiske grunn til modellering. Galibraith et al. (2010) argumenterer for at regresjon i arbeid med kurvetilpasning, altså at en lager en funksjon ut fra gitte verdier bare er en avgrenset forståelse av modellering, mens Borromeo Ferri (2017) mener at å utføre regresjon ut fra oppstilte verdier ikke er modellering dersom en selv ikke må forenkle og gjøre avgrensninger for å komme fram til modellen. Det vil si at dersom tall og framgangsmåte er oppgitt i oppgaven er det ikke en modelleringsoppgave.

- *Modellering som kritikk* er når en vurderer modeller en møter i samfunnet. Dette er ifølge Jensen (2009) en viktig del av modelleringskompetansen (Berget & Bolstad, 2019). Å tenke kritisk vil være en viktig del av utdanningen til elever i grunnskolen.

2.3 Modellering som kompetanse

Modelleringskompetanse består i å kunne av-matematisere matematiske modeller og å kunne utføre aktiv modelbygging i en gitt sammenheng. Niss og Jensen (2002) presenterer åtte matematiske kompetanser i sin rapport fra KOM-prosjektet i Danmark, *Kompetencer og matematikklæring 2000-02*, under ledelse av Mogens Niss. Der beskriver de modelleringskompetanse som *å kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter utenfor matematikken selv* (Niss et al., 2002, s.52). Jensen (2009) beskriver senere denne kompetansen som å kunne håndtere matematikkbeskrivelser av noe som i

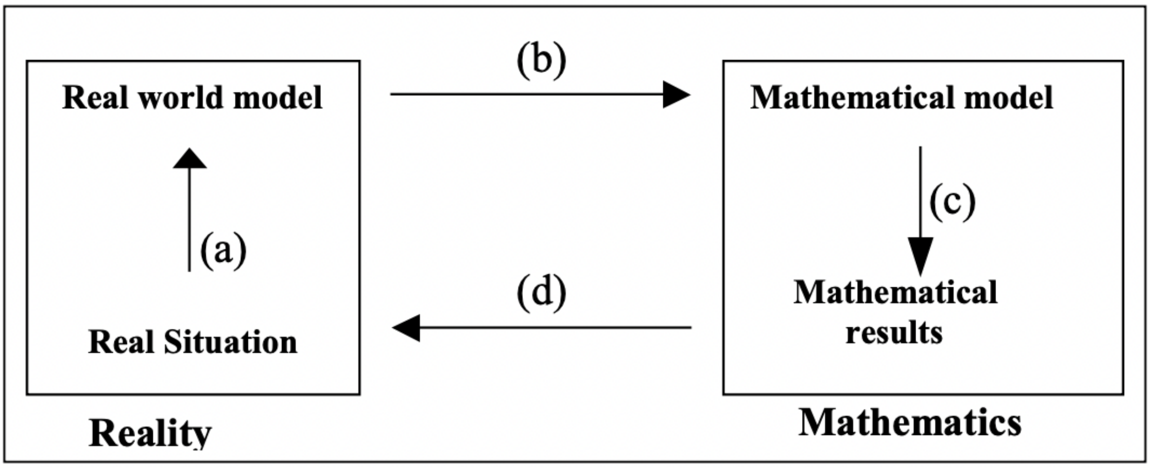


Figur 2-2 Matematiske kompetanser (Niss & Jensen, 2002)

utgangspunktet ikke er matematikk. Aktiv modelbygging inneholder en rekke ulike elementer, i hovedsak å både ha en undersøkende side og en produktiv side; Å kunne *strukturere* det området som skal modelleres, å kunne gjennomføre en *matematisering*, det vil si en oversettelse av objekter, relasjoner, problemstillinger til et område av matematikken som resulterer i en matematisk modell. Deretter kunne *behandle* modellen og kunne løse de matematiske problemer den måtte gi, samt å kunne *validere* den ferdige modellen, vurdere dens holdbarhet (Berget & Bolstad, 2018). Niss (2003) skriver videre at modelleringskompetanse også innebærer å kunne analysere modellen kritisk, også i forhold til alternative modeller, og kunne kommunisere med andre om modellen og dens resultater. I tillegg å ha overblikk over og kunne styre den samlede modelleringsprosessen. I rapporten understreker de også at modelleringskompetanse inneholder mange elementer som ikke primært er av matematisk art, for eksempel betraktninger, vurderinger og relevans for stilte spørsmål. I følge Blomhøj og Jensen (2003), Blum & Ferri (2009) og Borromeo Ferri (2017) er modelleringskompetanse definert som å kunne utføre alle deler av modelleringsprosessen, og kritisk vurdere det andre har gjort. I det følgende vil jeg presentere de ulike delene av modelleringsprosessen og spesifikt ha fokus på Blum og Leiss (2007) sin modell av en modelleringsprosess.

2.4 Modelleringsprosesser

En del forskning beskriver matematisk modellering gjennom en modelleringssyklus (Niss & Blum, 2020) I følge Vos og Frejd (2022) er en modelleringssyklus en skjematisk fremstilling av matematisk modellering som en syklisk prosess. Den består av ulike faser. Det finnes ulike modelleringssykluser og de ulike tilnærmingene til modellering gjenspeiles i måten modelleringsprosessen betraktes. De fleste sykluser har en kognitiv tilnærming, og beskriver hvordan elever tenker når de løser en modelleringsoppgave. Det finnes flere mer eller mindre ulike modelleringssykluser. De fleste er undervisningsrettet og har en kognitiv tilnærming, er sykliske og søker å illustrere stegene i prosessen på en oversiktlig måte.

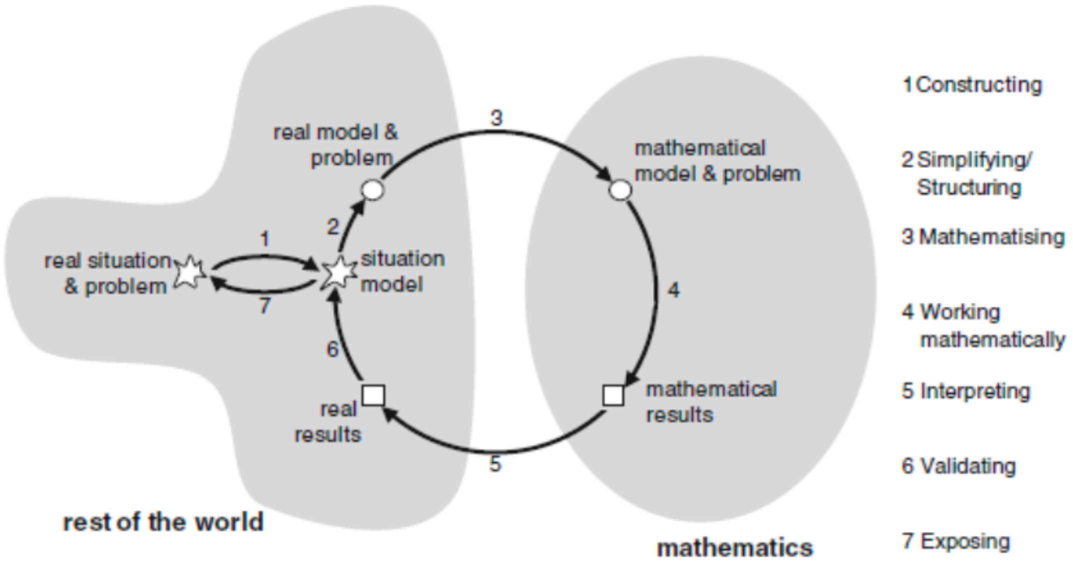


Figur 2-3 Enkel framstilling av modelleringsprosessen illustrert av Kaiser (2015). Figuren illustrerer de fire hoveddelene i modellering og skiller mellom matematikk og den virkelige verden utenfor matematikk.

Figur 2-3 er en enkel men beskrivende framstilling av en modelleringssyklus, fordi den illustrerer de fire hoveddelene i modellering: Med utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden forenkles problemet (a) slik at det kan lages en virkelig modell. Det vil si som tidligere nevnt å *strukturere* problemstillingen, gjøre antakelser og gi en enklere og løsbar framstilling av problemet. Deretter oversettes den virkelige modellen til et område i matematikken, lager en matematisk modell (b). Dette beskriver vi som å *matematisere*. Se også seksjon 2.4.2 for nærmere forklaring av begrepet *matematisering*. I modellen til Kaiser må man deretter kunne *behandle* modellen og løse de matematiske oppgavene den måtte gi (c), for til slutt se hva disse resultatene vil bety i den virkelige situasjonen, altså *validere* de matematiske resultatene (d). Framstillinger av modelleringssykluser er ofte sykliske fordi en viktig del av modelleringsprosessen er å vurdere de resultatene en får opp mot det virkelige problemet og deretter vurdere justeringer i antakelser eller modeller for å få et resultat som gir mening. De uthevede begrepene vil bli grundigere forklart i neste avsnitt.

2.4.1 Modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007)

Analysen av datamaterialet i denne studien vil ta utgangspunkt i modelleringssyklusen (MS) til Blum & Leiss (2007). Vos og Frejd (2022) peker på flere studier (Frejd (2015), Kaiser, Schukajlow og Stillman (2018) og Stillman (2019)), som viser til at et stort antall studier benytter MS som et teoretisk rammeverk for å analysere data i deres forskning. MS ble først presentert i DISUM prosjektet, *Investigating quality mathematics teaching*, og er fortsatt et viktig verktøy i analyse av hva som kognitivt skjer hos elevene når de løser modelleringsoppgaver.



Figur 2-4: Modelleringssyklusen (MS), utarbeidet av Blum & Leiss (2007), revidert utgave (Blum, 2015)

MS er mer orientert mot det problemløsende individet enn andre versjoner og blir beskrevet av Blum & Leiss (2007) som veldig hjelpsom for å undersøke hvilke *kognitive barrierer* elever støter på når de løser modelleringsoppgaver. De peker på at det er en interessant oppgave å studere hvilke individuelle modelleringsruter elever har når de jobber med slike oppgaver og beskriver hvert steg i syklusen som en potensiell *kognitiv barriere.* På denne måten er modelleringssyklusen et godt analyseverktøy fordi det forutser vansker i modelleringsprosessen. En *kognitiv barriere* vil i denne sammenhengen si at eleven støter på en hindring eller en slags ufullstendig handling mens han/hun er på et steg eller mellom to steg i modelleringsprosessen. Eleven vil oppfatte dette som en ekstra innsats eller anstrengelse for å fullføre en prosess eller oppgave, og i noen tilfeller vil disse ikke bli fullført i det hele tatt. Prosessen stopper opp midlertidig eller helt. Noen ganger kan eleven støte på kognitive barrierer uten å være klar over det selv. Det kan for eksempel være hvis eleven strever med å lage en matematisk modell for et virkelig problem, og tror modellen er brukbar mens den egentlig ikke stemmer med virkeligheten. Konkrete tegn på at eleven har støtt på en *kognitiv barriere* vil bli forklart og beskrevet nærmere i avsnitt 2.4.2 og i analyseverktøyet.

Denne modellen av en mulig modelleringsprosess legger vekt på skillet mellom den matematiske verden og den virkelige verden. Under punktvis vil jeg forklare denne modelleringssyklusen ut fra Blum & Leiss (2007) sin beskrivelse av de syv stegene, og jeg presenterer det med min egen oversettelse av begrepene.

(1) Konstruere (constructing): I versjonen av modellen fra 2007 blir begrepet *understanding* brukt i det første steget mellom real situation & problem, og situation model. Jeg velger å heller å bruke begrepet fra den reviderte utgaven fra 2015 her, *konstruere* (constructing), fordi steget beskriver hvordan eleven går fra en virkelig og ofte rotete situasjon og problem til en mental forestilling av situasjonen. I dette steget lager eleven en mental representasjon av modellen (Borromeo Ferri, 2006) og med det en forståelse av situasjonen. Dette er kanskje det viktigste steget i modelleringsprosessen, da det lager grunnlaget for resten av løsningsprosessen. Som nevnt tidligere vil det være viktig at *den virkelige situasjonen* er en situasjon elevene kan sette seg inn i. Det betyr ikke at det må være en del av elevenes virkelighet, men det kan være en situasjon eller en fantasiverden elevene har forutsetninger for å kunne leve seg inn i og konstruere et mentalt bilde av problemet. Tegn på at eleven har konstruert et slikt mentalt bilde kan være at de tegner, forklarer eller begynner å jobbe med problemet på en slik måte at det er tydelig at de har skjønt hva problemet dreier seg om.

(2) Forenkle/strukturere (Simplifying/structuring): Her må problemløseren gjøre noen antakelser og ta noen avgjørelser på hvilken informasjon man kan se bort fra, og hvilken som er viktig å ta hensyn til. Det dreier seg i hovedsak om å strukturere problemet slik at det blir en forenklet modell av virkeligheten. Det er også nødvendig å være så presis som mulig her, slik at det er mulig å gå videre med å matematisere problemet. Problemløseren må vurdere hvor mange og hvilke antakelser man må ta hensyn til for at det kan være mulig å lage en forenklet modell som gjør at problemet lar seg løse.

(3) Matematisere (mathematising): Gjøre om modellen av problemet til en matematisk modell. Dette innebærer å bruke matematiske begreper for å beskrive modellen. Matematisering er aktiviteten med å organisere emner fra virkeligheten med matematikk, å gå fra en verden med liv til en verden med symboler. Eleven gjør den virkelige modellen

om til matematikk eller lager en matematisk modell av det virkelige problemet. Begrepet matematisering blir ytterligere beskrevet i neste avsnitt, 2.4.2.

(4) Jobbe matematisk (working mathematically): Å jobbe matematisk gir matematiske resultater. Dette kan innebære å telle, kalkulere, løse ligninger eller gjøre beregninger for å få et matematisk resultat. Eleven bruker de matematiske modellene til å få et matematisk resultat som kan brukes til å løse problemet.

(5) Tolke (interpreting): Å tolke matematiske resultater kan vise at det er nødvendig å gå gjennom sirkelen en gang til for å ta hensyn til flere faktorer eller fordi en ser at resultatene ikke gir mening i den virkelige verden. Her går eleven fra den matematiske verden og over i den virkelige verden.

(6) Validere (validating): Vurdere om resultatene er gyldige for den situasjonen som beskrives fra virkeligheten. Om resultatene ikke er gyldige må eleven gjøre justeringer i sine beregninger eller endre forutsetninger for modellen.

(7) Presentere/formidle (exposing): Modelleringsprosessen ender med en presentasjon av løsning på problemet. Dette kan for eksempel være en anbefaling av hva man bør gjøre i det gitte problemet. Det kan være flere løsninger ut fra ulike forutsetninger tatt i betraktning.

I analysen vil jeg operasjonalisere disse begrepene og gi en presis beskrivelse av hvordan datamaterialet blir analysert og kategorisert i forhold til disse syv stegene. Det er viktig å presisere at MS ikke er ment å være en beskrivelse av hvilke steg elever må gjøre for å løse en modelleringsoppgave skikkelig, det er mer en analytisk rekonstruksjon av de prinsipielle stegene som en nødvendig å være innom i enhver modelleringsprosess. Noen av disse stegene kan være usynlige på overflaten eller byttet ut i prosessen, og enkelte ganger kan eleven utføre noe i et seg uten å være klar over det (Jankvist & Niss, 2020).

2.4.2 Matematisering

Å gjøre virkelighet om til noe som kan løses matematisk, kalles å *matematisere.* Begrepet ble først brukt av Hanz Freudenthal som betegnelse for aktiviteten med å organisere emner fra virkeligheten med matematikk (Lerman, 2020). Freudenthal påpekte at matematikk ikke er et ferdig system, men en aktivitet som veksler mellom å finne opp nye ting og organisere det man har oppfunnet. Freudenthal introduserte begrepet i forbindelse med at han ledet et prosjekt som løftet RME, *Realistic Mathematics Education*, som en mer moderne og involverende måte for elevene å lære matematikk på tidlig 70-tall, og et alternativ til prosedyrekunnskap der elevene lærer steg for steg hvordan de skal løse et problem (Lerman, 2020). RME beskriver viktigheten av at elever jobber med *realistiske problemer*, det kan være virkelige problem eller problem konstruert i en fantasiverden. Kriteriet for at det er *realistiske problemer* er at elever har mulighet til å sette seg inn i eller skape et mentalt bilde av situasjonen. På den måten har de forutsetninger for å knytte matematiske begreper til den situasjonsmodellen de lager, og denne prosessen kalles *horisontal matematisering*. Freudenthal deler begrepet *matematisering* opp i to deler, horisontal og vertikal. I *horisontal matematisering* bruker elevene matematiske verktøy som begreper, symboler og sammenhenger til å organisere og løse problemer fra virkeligheten. *Horisontal matematisering* er å gå fra en forestillingsverden til matematikk, fra en verden med liv til en verden med symboler (Lerman, 2020). *Vertikal matematisering* er prosessen med å reorganisere innenfor det matematiske systemet ved å bruke forbindelser mellom konsepter og strategier. Det vil si å bevege seg innenfor verden av symboler. I en *vertikal matematisering* ender ofte eleven opp på et nytt nivå når det gjelder forståelse, fordi han/hun reorganiserer, forkorter og lager koblinger innenfor symboler slik at han/hun utvikler en dypere forståelse i matematikken. I følge Freudenthal ligger matematikken for alvor i å systematisere egne og andres løsninger på et problem som har reel omverdenskarakter for elevene. I denne oppgaven og i modellen jeg bruker for å analysere modelleringsstegene til elevene, vil det som regel være snakk om *horisontal matematisering* når jeg bruker begrepet *matematisering*.

2.5 Utfordringer i modellering

De siste tiårene er matematisk modellering et av emnene i matematikkundervisning som er blitt mest diskutert blant forskere i matematikkdidaktikk. Likevel spiller modellering en liten rolle i klasserom verden over. Grunnen til dette kan være mange, men flere studier (Stillman, (2015), (2018), (2019) og Kaiser, (2017)) viser at dette er en kompleks aktivitet både for elever og lærere (Blum & Ferri, 2009). I det følgende vil jeg gi en mer grundig forklaring på begrepet *kognitive barrierer* og deretter gi eksempler fra forskning på hva som viser seg å være vanskelig for elevene i en modelleringsprosess.

2.5.1 Kognitive barrierer

Matematisk modellering er kognitivt krevende for elever siden flere kompetanser må aktiveres og det kreves både matematisk og kunnskap og kunnskap om virkeligheten. I denne sammenhengen beskrives virkeligheten som verden utenfor matematikk. Empiriske studier viser at hvert steg i modelleringssyklusen kan være en mulig barriere for elevene (Niss og Blum, 2020) Sistnevnte påpeker også at kunnskap om funn fra slike studier vil være til hjelp for lærere som på best mulig vis skal hjelpe elever til å øke sin modelleringskompetanse. Flere studier viser at spesielt matematiseringsprosessen er den vanskeligste for elevene. (Jankvist & Niss, 2020). Jankvist og Niss påpeker i sin rapport at i denne prosessen må elevene forutse en rekke ting slik at de velger antakelser som kan gi matematiske resultater som kan tolkes inn i den virkelige problemstillingen og gi meningsfulle resultater eller anbefalinger. Dette er krevende, fordi å forutse slike ting krever både kunnskap om en kompleks virkelighet, oversikt over de matematiske verktøy som er hensiktsmessige å bruke for å løse oppgaven slik at en får meningsfulle svar når en de-matematiserer de matematiske resultatene. Å modellere krever oversikt på mange nivåer. Galibraith & Stillman (2010) viser til at hvert steg i modelleringssyklusen representerer en krevende prosess for eleven, og de er krevende på ulike måter. Jankvist & Niss (2020) peker på flere studier (Maas (2018), Ikeda & Stephens, (2002)) som viser at til og med elever med utmerkede ferdigheter i matematikk strevde med matematiseringsprosessen fordi de ikke klarte å forenkle situasjonen. Selv når modelleringsoppgavene bare krevde enkel matematikk ble dette vanskelig. Jankvist og Niss (2020) konkluderer med at pre-matematisering er en barriere i modellering og dette fører ofte til at matematisering også er en stor barriere. Studien deres viste at disse stegene i modelleringsprosessen var vanskelig for mange elever:

- Å lage forenklende antakelser
- Å klargjøre et mål med den virkelige modellen og å velge en modell
- Å finne en relevant variabel

- Å ta hensyn til mange nok aspekter i den virkelige situasjonen
- Manglende algebraferdigheter
- Manglende selvtillit. Åpne oppgaver krever en viss selvtillit og selvstendighet, ellers famler eleven i blinde. Dette kan gjelde elever som har rutiner med en mer tradisjonell tilnærming og oppgaveløsing.
- Å engasjere seg i oppgaven

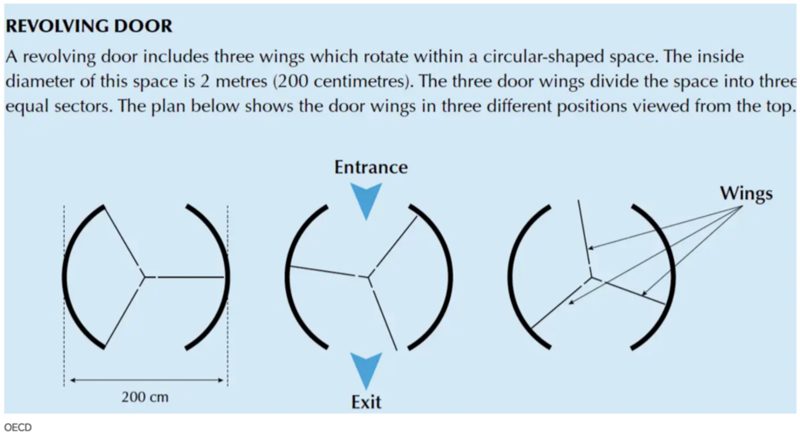
Alle disse vil være mulige *kognitive barrierer* fordi eleven vil oppfatte det som en hindring for å få fullført modelleringsprosessen. Det kreves en anstrengelse eller handling for å komme videre.

2.5.2 Hvorfor er modellering vanskelig for elever og lærere?

Til tross for flere tiår med forskning er det fortsatt et stort gap mellom mål for matematikkopplæringen og det som praktiseres i klasserommene når det kommer til modellering. Dette gjelder ikke bare i Norge, men i hele verden (Blum & Ferri, 2009). Grunnen til dette kan være mange, men modellering er en kompleks aktivitet for elever og vil dermed være utfordrende også for lærere. Ifølge Blum og Ferri (2009) er modellering vanskelig både for elever og lærere fordi:

- Modelleringsoppgaver har høy grad av kognitiv kompleksitet
- I modelleringsprosessen jobber elever med mange ulike ferdigheter samtidig
- Å konstruere, forenkle og validere er vanskelig for elever
- Elevene har ikke et bevisst forhold til valg av problemløsningsstrategi, og dette er vesentlig i modellering.
- Modellering er ikke en isolert ferdighet
- Modellering er også utfordrende for lærere å praktisere i undervisningen:
    - Det stilles krav til lærerens støtte og elevers selvstendighet
    - Det krever at læreren kan veilede eleven i deres vei mot selvstendig tenking
    - Det er utfordrende å ikke veilede eleven mot lærerens eget løsningsforslag
    - På grunn av kompleksiteten er det ikke mulig å beskrive modellering med en teori eller en metode

2.5.3 Eksempel fra forskning



Figur 2-5 PISA-oppgave «Revolving door». (Kilde: Innsider, 13.12.2013)

Det viser seg i de siste PISA-undersøkelsene at et betydelig antall elever fra alle deltakende land har problemer med å overføre ren matematisk kunnskap til situasjoner i virkeligheten. De eksemplifiserer dette med PISA-oppgaven, *Revolving door* (figur 2-5), der elevene får bilde av en svingdør fra tre ulike vinkler, informasjon om at diameteren er 2 meter og at disse dørene er delt i tre helt like sektorer. Spørsmålet er da hvor stor en sektor er. Niss påpeker at de fleste 15-åringer både vet at en sirkel er 360 grader og hvordan de deler 360 på 3. Likevel er det bare 57 % av elever i OECD-landene som klarer å bruke sin matematiske kunnskap til å løse denne oppgaven (Niss & Blum, 2020). Det viser seg også i studier at elever har vansker med å overføre kunnskap fra en modelleringssituasjon til en annen. I DISUM-prosjektet (Blum & Leiss, 2007), viser dette seg da elever løser en modelleringsoppgave om hvor det er hensiktsmessig å fylle diesel. Elevene hadde problemer med å ta med seg kunnskap fra den matematiske modellen de lagde i diesel-oppgaven til andre lignende modelleringsoppgaver; om det er hensiktsmessig å kjøre for å plukke bær i naturen i stedet for å dra på nærbutikken og kjøpe dem. Det viser seg i studien at elevene konsekvent hadde de samme problemene i starten av disse to oppgavene som i den første, selv om de allerede hadde løst den første. Niss og Blum (2020) påpeker at en slik strukturell likhet mellom oppgaver blir synlig bare når den virkelige modellen eller den matematiske modellen er konstruert og elevene blir gjort oppmerksomme på denne likheten. Vi kan forvente at elever som er mer erfarne i modellering vil se denne likheten ganske raskt fordi de vil være i stand til å konstruere den virkelige modellen med en gang. Vi vet fra tidligere forskning om *situated cognition* (Anderson et al., 1996) at det er mulig at elever overfører denne kunnskapen fra en modelleringssituasjon til en annen hvis de blir gjort bevisste på denne strukturelle likheten. Det blir imidlertid fort spekulasjoner, da en ikke vet noe om hvorfor elevene kjenner igjen en modell. Men det er grunn til å tro at hvis elevene blir bevisste på likheten mellom modeller, kan de dra nytte av erfaringer til andre oppgaver med lignende problemstilling.

2.6 Quality teaching

Ut fra flere empiriske studier av for eksempel Hattie (2009) (Niss & Blum, 2020), ser man hvilke undervisningsformer som gir klare læringseffekter og hvilke som ikke gir det. Ut fra disse kan forskere trukket ut noen punkter som vil gjelde for modellering. Blum & Ferri (2009) påpeker at for å oppnå kvalitetsundervisning er det avgjørende at læreren behersker kunsten å veilede eleven til å tenke selv. Gjennom spørsmål som får eleven til å tenke videre på problemet, kan læreren hjelpe eleven til å bli selvstendig. Dette samsvarer med Peter Liljedahl sine resultater fra forskningen *Building thinking classrooms* (Liljedahl, 2020), der en av faktorene som var avgjørende for å gjøre elevene selvstendige og få de til å fortsette sitt arbeid var såkalte *keep thinking questions*. Læreren burde bare gi hint og utvidelser for å holde elevene i flyt, besvare elevenes spørsmål som får de til å tenke videre på den oppgaven de jobber med. Det vil si spørsmål som gir elevene hint på et meta-nivå, for eksempel: *Forestill deg situasjonen ..., hvor langt har du kommet?* eller *hva mangler?* Dette refererer Niss og Blum (2020) til som strategisk innblanding i kontrast til innblanding i matematisk innhold, som oftest er for å hindre at misforståelser oppstår. Ved strategisk innblanding fratar man eleven den erfaringen det er å oppdage feil og sammenhenger på egen hånd, og en risikerer at eleven blir lært opp til hjelpeløshet. I kontrast til tradisjonell undervisning og elevens forventning om at læreren rydder vei for eleven i oppgavene, er det i arbeid med modellering forventet at eleven jobber med denne pre-matematiseringen selv og på denne måten skaffer verdifulle erfaringer. Besser, Blum og Leiss (2020) understreker at elevene ikke må jobbe alene med dette, men med strategisk innblanding fra læreren på et meta-nivå, ikke på innhold. Niss og Blum (2020, s.123-125) lister opp essensielle punkter for å sikre kvalitet i undervisningen når man underviser modellering. Tre av disse presenteres i det følgende.

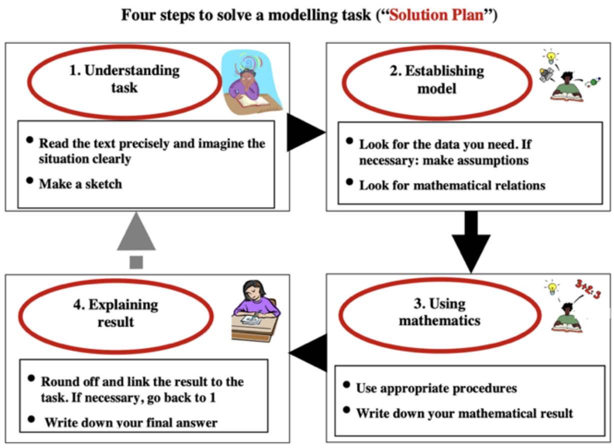
2.6.1 Klasseromsledelse og elevorientert undervisning

Det er viktig i all undervisning at læreren har et klart mål og en struktur for timen. I modellering har det vist seg at å jobbe i grupper frembringer mye mer læring for hver enkelt elev enn å jobbe individuelt. I hverdagslig undervisning er det ikke uvanlig for lærere å favorisere løsninger som ligger nær deres egen tilnærming til oppgaven, uten å engang legge merke til dette selv. Dette fører ofte til at mange av elevene bruker samme tilnærming og får de samme resultatene som læreren. Ved å oppmuntre elevene til å finne flere løsninger på modelleringsoppgaver har det vist seg at de har et større læringsutbytte av modelleringsprosessen. Hvis læreren søker varierte tilnærminger hos den enkelte, vil en utvikle en kultur i klasserommet for varierte tilnærminger selv om flere kommer fram til samme svar. Elevene vil dermed hjelpe hverandre til å utvikle en rikere verktøykasse for løsning av oppgaver.

2.6.2 Kognitiv aktivering

For å aktivere elevers mentale aktivitet, slik at de lage sine egne mentale strukturer, er det viktig å la de jobbe så uavhengig som mulig. Det understrekes at å jobbe selvstendig vil si å jobbe med lærerens støtte, og at å la elevene jobbe alene bare vil føre til frustrasjon og at eleven ikke lærer noen ting. Lærerens støtte bør være av en slik art at når elever møter en kognitiv barriere skal støtten få eleven til å fortsette sitt selvstendige arbeid. DISUM prosjektet (Schukajlow et al., 2012) lister opp flere støttende kommentarer fra læreren som vil styrke elevens evne til å jobbe selvstendig videre i en modelleringsprosess, for eksempel: *Lag en skisse, hva mangler her, gir dette resultatet mening for den virkelige situasjonen, les teksten nøye,* i tillegg til andre nevnt over. Niss og Blum (2020) trekker også fram at å lage skisse av situasjonen vil klargjøre problemet for eleven, og at denne sammen med en matematisk skisse av modellen kan føre til dypere forståelse og løsning hos elevene. Strategier som å bryte ned problemet i delproblemer, utforske ekstreme tilfeller eller kombinere et spesielt tilfelle med et generelt tilfelle kan være innblandinger fra lærer som får eleven til å komme over en kognitiv barriere og fortsette modelleringsprosessen.

2.6.3 Meta-kognitiv aktivering



Figur 2-6 DISUM Solution plan (Blum & Leiss, 2020)

Et annet viktig kriterium for kvalitetsundervisning er meta-kognitiv aktivering, det vil si aktivering av elevenes bevissthet rundt hvordan de løser en modelleringsoppgave og hvilke løsningsstrategier de bruker. Et eksempel på et strategisk instrument for modellering er solution plan for modelling tasks, se figur 2-6.

2.7 Den didaktiske kontrakt

Jankvist og Niss (2020) refererer til *Den didaktiske kontrakt,* et begrep opprinnelig presentert av Brousseau rundt 1980 og beskriver en didaktisk situasjon med gjensidige forventninger mellom elev og lærer som blir opparbeidet gjennom erfaring og vaner over lang tid. I klasserom er det særlig en mengde av forventninger som er spesifikke for det innhold som det undervises i og for måten det gjøres på. Kontrakten er implisitt, det betyr at den kommer først til syne når den blir brutt. Det vil for eksempel si at hvis en elev ikke er i stand til å løse et problem som læreren forventer løst, kan eleven føle at læreren har brutt kontrakten ved å gi han en for vanskelig oppgave. Den innebygde konflikten i Den didaktiske kontrakt er slik at læreren i sin bestrebelse etter å undervise, altså oppfylle sin del av kontrakten, fratar eleven muligheten til å lære. Hvis det er forventet at læreren i henhold til kontrakten viser eleven svarene, vil eleven ikke oppnå noe og dermed ikke lære matematikk (Stillman et al., 2013, kap.11). Hvis elever bare har blitt presentert for tradisjonelle matematiske oppgaver med bare ett riktig svar, der det er forventet at de skal bruke nylig ervervet kunnskap, metoder og prosedyrer, vil de oppfatte oppgaver som krever egne antakelser og valg, og som har flere mulige svar som et brudd på den didaktiske kontrakten (Jankvist & Niss, 2020). Studien av 315 elever fra videregående skole som løste modelleringsoppgaver, presentert av Jankvist og Niss, viser at et signifikant antall elever har vansker med å akseptere eller forstå modelleringsoppgaver som synes å bryte med den didaktiske kontrakten i dansk undervisning. Fortsatt drives det matematikkundervisning i mange norske klasserom der elevene er mottakere av *ferdiglaget matematikk*, det vil si oppgaver som inneholder den matematikken som trengs for å løse den. Elevene blir trent i å bruke den informasjonen som er gitt, på en måte en ferdigtygd oppgave eller et slags byggesett der eleven skal sette sammen tallene på riktig måte for å kunne regne ut et riktig svar. Matematisering ble i følge Lerman (2020) lansert av Freudenthal som en motvekt til den tradisjonelle måten å lære matematikk på. Det ble argumentert for at matematikk ikke burde læres i et lukket system, men at elevene burde være deltakere i undervisningsprosessen. Også at elevene burde utvikle matematiske verktøy og innsikt på egen hånd ved å matematisere virkeligheten. Matematikk blir lært på best måte ved å gjøre matematikk.

2.8 Tekstoppgaver og problemløsningsoppgaver vs. modelleringsoppgaver

Blum og Leiss (2007) påpeker at elevenes matematiske kompetanser utvikles når de jobber med gode oppgaver. De argumenterer med at nøkkelen til å øke elevers matematiske kompetanse er gjennom *New culture of tasks*, det vil si oppgaver som ikke bare krever tekniske kunnskaper, men modelleringskompetanse og argumentasjon. De påpeker også at analyse av elevers modelleringsforløp når de løser oppgaver er viktig informasjon for å utvikle bedre oppgaver og bedre undervisning. En modelleringsoppgave skal være konstruert slik at det er et problem fra virkeligheten som må løses ved hjelp av matematikk. En tekstoppgave er en spesifikk modelleringsoppgave, der deler av pre-matematiseringen allerede er gjort. I en tekstoppgave må eleven forstå oppgaven, forsøke å finne en passende matematisk behandling av problemet og evaluere resultatet opp mot det opprinnelige problemet. Tekstoppgaver er ofte tatt ut av kontekst og mange representerer en oppkonstruert virkelighet. I tillegg har de ofte bare en matematisering som passer med problemet, og problemet er ofte konstruert rundt denne måten å løse det på. Mange elever i norsk skole møter denne typen oppgaver mye oftere enn modelleringsoppgaver.

Dette kapittelet har presentert teori som danner grunnlaget for min studie. Jeg vil i kapittel 5 og 6 diskutere funn fra analyse av datamaterialet i lys av denne teorien, og diskusjonen vil inneholde en rekke referanser til avsnitt i dette kapittelet. Før denne diskusjonen vil jeg presentere metode og resultater av datainnsamling og transkripsjon.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for forskningsdesign, kriterier for utvalg og metode for datainnsamling. Jeg vil deretter fortelle litt om pilotering av oppgaver og gi en begrunnelse for valg og utvikling av disse. Videre vil jeg gi en oversikt over empiriske data og gi en grundig redegjørelse for hvilken metode og analyseverktøy jeg har brukt for dataanalyse. Til slutt vil jeg reflektere rundt validitet og reliabilitet, og forklare hvilke grep jeg har gjort for at troverdigheten av undersøkelsen skal bli så høy som mulig. Samtidig vil jeg reflektere over etiske problemstillinger i forbindelse med studien.

3.1 Oversikt og planlegging av studien

I denne studien har jeg valgt å se på hvordan elever på 8.trinn jobber når de løser modelleringsoppgaver, hva de kognitivt strever med i modelleringsprosessen og hva de gjør for å komme videre når de står fast. Jeg ønsket å undersøke dette for å få et bilde av hva elever trenger å jobbe mest med for å utvikle sin kompetanse i modellering og anvendelser, og hvordan vi som lærere på best mulig måte kan lage oppgaver og legge opp undervisning for å bidra til dette. For å undersøke elevenes modelleringsprosess filmet jeg fem elever fra 8.trinn fordelt på to grupper mens de modellerte, transkriberte dataene og brukte modelleringssyklusen (MS) til Blum og Leiss (2007) for å analysere dataene i forhold til hvilke modelleringsruter elevene hadde og hvor de møtte motstand i prosessen. Hver gang elevene møter kognitiv motstand i modelleringsprosessen kaller jeg det kognitive barrierer. Begrepet ble forklart i teoridelen, og vil bli ytterligere operasjonalisert i dette kapittelet. For å finne ut hva elevene gjør for å komme videre i modelleringsprosessen når de møter en kognitiv barriere, har jeg brukt empirien til å plukke ut utsagn, handlinger eller verktøy elevene har brukt. Disse blir beskrevet nærmere i analyseverktøyet, avsnitt 3.6. Før jeg samlet inn data, lagde jeg en plan for datainnsamling, analyse og tolkning ut fra forskningsspørsmålene i min studie. Denne planen er oppsummert i tabellen under:

Forskningsspørsmål	Datainnsamling	Dataanalyse	Datatolkning
(I) Hvilke steg i modelleringssyklusen går elever på 8.trinn gjennom når de løser matematiske modelleringsoppgaver?	To grupper med elever (2 jenter og 3 gutter i samme klasse) i 8. klasse løser en oppgave i uken i fem uker. Filme mens de løser oppgaven og ta inn eventuelle notater.	Identifiser hvilke steg i modelleringssyklusen elevene er innom når de modellerer. Kategoriser i de 7 trinnene til Blum & Leiss (2007), som defineres av dem som mulige kognitive barrierer:	Se på hvilke modelleringruter elevene tar. Tolke ut fra resultatene av analysen og med bakgrunn i teori fra Blum & Leiss (2007), Niss (et al., 2002) og Blum & Ferri (2009) hvilken

		(1) Konstruere (2) forenkle/strukturere (3) matematisere (4) jobbe matematisk (5) tolke (6) validere (7) Presentere/formidle.	modelleringskompetanse elevene har. Se etter progresjon fra første til siste oppgave.
(II) Hvilke kognitive barrierer oppstår hos elever på 8. trinn i arbeid med matematiske modelleringsoppgaver?	Film hva elevene snakker om, og hva de skriver når de modellerer. Også ansiktsuttrykk. Forsker bør være så anonym observatør som mulig.	Identifiser når elevene står fast og hvilke steg i syklusen de er på når de sitter fast. Tell opp og se på hvilke steg i modelleringssyklusen de oftest møter kognitive barrierer.	Analyser opp mot teori hvilke typiske kognitive barrierer elever har i arbeid med modelleringsoppgaver. Ut fra teorien til Blum & Leiss (2007), Blum & Ferri (2009) og studien til Jankvist & Niss (2019) si noe om hvilke kognitive barrierer som er mest fremtredende hos elevene.
(III) Hva gjør elevene for å komme videre når de møter kognitive barrierer i modelleringsprosessen?	Film både elever og lærer, også start og oppsummering av undervisningsøkt. Fange opp fra video og transkripsjon hva de gjør for å løse kognitive barrierer som oppstår skriftlig, muntlig og med eventuell annen kommunikasjon (mimikk, kroppsspråk og praktisk problemløsning)	Kategoriser hva elevene gjør for å komme videre når de møter en barriere. For eksempel: Bruker de matematisk kompetanse, prøver ut praktiske øvelser, ber læreren løse oppgaven, får hint fra læreren, diskuterer med en annen gruppe, gjør antakelser eller andre kategorier som kommer frem når jeg analyserer datamaterialet.	Sammenlikne hvilke redskaper elevene har for å komme videre fra kognitive barrierer og om det er tydelige mangler i deres modelleringskompetanse. Se på om elevene har mange ulike kategorier av slike redskaper, eller de har et ensidig utvalg. Knytte dette til den modelleringskompetansen de to foregående punktene viser at elevene har og hvordan undervisningen bør legges opp for å øke elevenes modelleringskompetanse. Se etter tegn på quality teaching.

Tabell 3-1 Planlegging av datainnsamling, dataanalyse og datatolkning ut fra forskningsspørsmålene i studien.

I følge Niss & Blum (2020) bør MS forstås som en analytisk rekonstruksjon av stegene i matematisk modellering og et instrument for å forstå modelleringsprosessen. Vos og Frejd (2022) hevder at MS er et verktøy for forskere for å forstå, analysere og kjenne igjen viktige deler av modellering, uavhengig av om det er gjort av en ekspert eller en nybegynner. De argumenterer også for at MS er mye brukt av forskere for å analysere hvilke steg elever er på i hvilken fase av modelleringen, hvilken modelleringskompetanse de har og om de er i stand til å gå over fra ett steg til et annet i prosessen. Dette er grunnen til at jeg velger å bruke MS, jeg anser den som godt gjennomarbeidet og trygg å bruke som analyseverktøy. Ifølge Vos og Frejd (2022), beskriver standard MS kognitive aktiviteter som en forsker kan observere eller utlede fra den som modellerer. Generelt involverer kognitive aktiviteter mental innsats for å gjøre informasjon meningsfull, dette kan læres gjennom erfaring eller undervisning. Slike kognitive aktiviteter er for eksempel snakke, lytte, lese, skrive, huske, løse problem, ta avgjørelser eller få noe til å gi mening. Vos og Frejd (2022) peker på flere dimensjoner ved modellering som ikke nødvendigvis blir fanget opp når en bruker standard MS. Vellykket modellering krever også meta-kognitive strategier. Bruk av verktøy, som digitale verktøy, papir og blyant og konkreter, og sosiale normer; samspill på gruppa, konkurranse mellom elevene er dimensjoner ved modellering som en MS ikke nødvendigvis vil fange opp ved kognitiv analyse. Jeg har likevel kommet inn på noen av disse dimensjonene i tredje del av min analyse, der jeg har sett etter hva elevene gjør for å komme videre når de står fast. Min analyse har fokus på (I) kognitive aktiviteter for å fange opp hvilke steg elevene er innom i MS, (II) hvilke steg de er på når de møter *kognitive barrierer* og (III) hva elevene gjør for å komme videre i den fasen de er i eller til en annen fase i MS når de står fast.

3.2 Forskningsdesign

Arbeid med modellering er en kompleks aktivitet (Kaiser, 2017), og for å kunne gå grundig inn i hver enkelt elev sine resonnement og steg i modelleringssyklusen, valgte jeg en kvalitativ studie. Jeg har en nærhet til de jeg forsker på og forsøker å forstå hvordan elevene tenker og jobber. Kvalitative studier har mer vekt på en induktiv (eksplorerende og empiridrevet) framgangsmåte, forholder seg gjerne til et fortolkende paradigme, og er ofte preget av samspillet mellom empiri og teori (Tjora, 2017, s.24-28). Kvalitative metoder framhever innsikt og kvalitativ forskning søker forståelse. I mitt tilfelle vil det være samspill mellom induktiv og deduktiv framgangsmåte, fordi jeg bruker teorien og en modell (MS) som grunnlag for analyse av elevenes modelleringsarbeid samtidig som jeg trekker ut utsagn og tegn elevene viser på at de har møtt barrierer i prosessen. En deduktiv tilnærming betyr at analysen tar utgangspunkt i den teorien som er lagt fram, mens en induktiv tilnærming vil si at analysekategoriene lages ut fra datamaterialet (Bryman, 2016) og (Tjora, 2017). Jeg vil bruke en modell fra teorien (MS) som analyseverktøy, og vil operasjonalisere hvert steg i syklusen med utgangspunkt i både det teorien sier om hvilke steg elever tar når de modellerer og mulige *kognitive barrierer* de møter på underveis. Jeg vil også ut fra empirien utlede analysekategorier for hvordan elevene kommer seg videre i prosessen når de møter en *kognitiv barriere*. I en kvalitativ undersøkelse som dette har forsker et interpretivistisk perspektiv, det vil si at forsker skal fortolke observasjoner og vurdere disse og at all kunnskap om virkeligheten er en sosial konstruksjon All form for forståelse henger sammen med den kontekst eller situasjon det forstås innenfor (Bryman, 2016). Analysen i studien har et hermeneutisk perspektiv, det vil si at jeg som forsker forsøker å fortolke observasjoner og forsøke å forstå hvorfor det er slik, samtidig som jeg er bevisst min egen rolle og betydning for fortolkningsprosessen. Jeg har valgt å gjøre en case study, det er ifølge Bryman (2016) forskning på et enkeltsamfunn, en gruppe eller en person for å forstå og få bedre innsikt. Bryman argumenterer for at enkeltforskere i en case study får muligheten til å studere enkelte aspekter ved et problem i dybden. Min studie er på to grupper med 5 elever over en tidsperiode på 8 uker. Jeg samlet inn data 5 ganger med minst en uke mellom hver gang, men på grunn av Covid-19 ble det noen utsettelser slik at vi fikk juleferie mellom de fire første og den siste observasjonen.

3.3 Utvalg og kriterier for utvalg

Jeg har samlet inn data fra to grupper av elever i samme klasse og fra lærerens introduksjon og oppsummering av oppgavene i klassen. Prosjektet hadde godkjenning fra NSD før jeg søkte etter elever som ville være med. De fem elevene som har deltatt i studien, meldte seg frivillig til å være med og har fått samtykke fra foresatte. I alt var det 9 elever som meldte seg, og fem ble valgt fordi deres lærer vet at de jobber greit sammen og er aktive muntlige i klasserommet. Dette er ikke en studie på samarbeid, så jeg vurderte det til at det ville ha liten innvirkning på hvordan de jobber med modellering. Det kan være at en unngår noen sosiale barrierer ved å velge å gruppere elevene slik, men de sosiale barrierene er ikke hovedfokus i min studie. Jeg har likevel kommentert samspillet mellom elevene dersom det har betydning for hvor de befinner seg i modelleringssyklusen. Elevene ble også valgt fordi de har rimelig gode matematiske ferdigheter og jeg vurderte det til at det ga et godt grunnlag for å få fram hvilke utfordringer de opplevde med å løse modelleringsoppgaver. Jeg ønsket at de matematiske ferdighetene ikke først og fremst skulle stå i veien for evnen til å kunne modellere. Tidligere forskning har som nevnt også vist at det ikke nødvendigvis er de matematiske ferdighetene som er den viktigste faktoren for om elever blir dyktige i modellering (Jankvist & Niss, 2020), se også avsnitt 2.5.1. Elevene ble gruppert av læreren i en gruppe på to og en gruppe på tre. Noen dager var en av elevene fraværende, da ble elevene gruppert om slik at ingen skulle jobbe alene. Det vil ikke være noe ytterligere fokus på kjønn i studien. Det blir kun kommentert for å kjenne igjen gruppene fordi jeg ikke bruker navn på elevene, men J1, J2, G1, G2 og G3. Jeg valgte 8.trinn fordi de ikke har jobbet med modellering før, og ville se på hvordan de naturlig gikk løs på slike typer oppgaver uten for mye føringer fra lærer. Jeg ville også se på hvilke steg i modelleringsprosessen som syntes å være vanskelig for elevene og hvordan de eventuelt kom seg videre fra de kognitive barrierene de støtte på underveis. En annen årsak til at valget falt på 8.trinn var at jeg ikke underviser i noen klasser på trinnet selv. Jeg underviser på 9.trinn. På den måten var jeg ukjent for elevene, og de hadde ingen relasjon til meg. Skolen er en relativt stor ungdomsskole med over 400 elever organisert i baser for hvert trinn. Dermed er trinnene fysisk atskilt fra hverandre i det daglige, og de møter ikke så mange andre lærere enn deres egne. Jeg vil komme tilbake til valg av klasse i avsnitt 3.7, der jeg ser på forskningsetiske problemstillinger.

3.4 Begrunnelse for valg av oppgaver og pilotering

Galbraith (2007) lister opp seks prinsipper for å finne potensielle situasjoner som kan brukes til å lage passende modelleringsproblem for elever i ungdomsskolen (Galbraith et al., 2010) Jeg har brukt disse som utgangspunkt for å velge oppgaver som kunne passe i min studie. (Prinsippene er fritt oversatt fra Galbraith et al., 2010, s.135)

- Prinsipp 1: *Relevans og motivasjon.* Det bør være en naturlig tilknytning til den virkelige verden som elevene er en del av.
- Prinsipp 2: *Tilgjengelighet*. Det bør være mulig å identifisere og spesifisere matematiske håndterbare spørsmål fra den generelle problemstillingen.
- Prinsipp 3: *Gjennomførbarhet*. Formulering av en løsningsprosess er gjennomførbar, dette involverer (a) Bruk av matematikk som er tilgjengelig for studenter, (b) gjøre nødvendige antakelser og (c) sammenstilling av nødvendige data.
- Prinsipp 4: *Mulighet for resultat.* Det er mulig for studentene å finne en løsning på det matematiske problemet og å tolke resultatene.
- Prinsipp 5: *Validering*. Det må være mulig å gjennomføre en evalueringsprosedyre som sjekker om løsningen(e) er (a) matematisk nøyaktige og (b) hensiktsmessig i forhold til konteksten.
- Prinsipp 6: *Didaktisk fleksibilitet.* Problemet kan struktureres i flere spørsmål som beholder integriteten til den virkelige situasjonen.

Ut fra disse kriteriene valgte jeg to oppgaver fra heftet *Reality-based tasks for school*, en booklet utarbeidet i det internasjonale LEMA-prosjektet (Mass & Gurlitt, 2011, LEMA 2009). Prosjektets formål var å lage et profesjonelt kurs for modellering, der oppgaver ble designet, pilotert og evaluert. Disse oppgavene er derfor gjennomarbeidet og jeg anser de som trygge å bruke. Jeg piloterte to av oppgavene på min egen klasse. Oppgavene jeg landet på å bruke i datainnsamlingen ble derfor (Lister opp kortversjonene av oppgavene her, oppgavene i sin helhet finnes i resultatkapittelet.

1) *Menneskepyramider*. Hvor mange mennesker trengs for å lage en menneskepyramide?
2) *Rubiks kube*. Hvor mange brikker trengs for å lage en 4 x 4 Rubiks kube?
3) *Kaffeavtale*. Hvilken kaffeavtale vil dere anbefale til lærer og hvorfor?
4) *Julenissen på julekvelden*. Hvor mange sekunder per barn har julenissen på julekvelden når han skal levere gaver?
5) *Steinheller mellom hytte og utedo*. Beskriv mønsteret på steinhellene som blir lagt mellom hytta og utedoen, og lag en formel for hvor mange steinheller Espen legger etter n timer. Når hele stien er lagt har Espen brukt 954 steinheller. Hvor langt omtrent kan det være mellom hytta og utedoen?

Oppgaven om menneskepyramider og Rubiks kube er hentet fra LEMA-heftet. Julenisseoppgaven ble laget i samarbeid med klassens lærer underveis fordi det passet bra rett før jul for å få elevene engasjerte, og fordi læreren hadde en idé til oppgave. Jeg anså det som enda mer naturlig at læreren presenterte oppgaver hun hadde et forhold til selv, slik ble økten enda mer naturlige enn de øktene der jeg hadde laget oppgaver som hun skulle presentere i klassen. Oppgave 5 ble valgt fordi elevene hadde begynt med pre-algebra og figurtall. De hadde jobbet en del med å lage eksplisitte og rekursive formler den siste uken før den siste oppgaven. Oppgave 5 er laget av Skage Hansen, lærer ved Engebråten ungdomsskole i Oslo og forfatter av flere lærebøker i matematikk.

I piloteringen av oppgavene så jeg etter om oppgavene tilfredsstilte prinsippene til Galbraith (2010). I de tilfellene de ikke gjorde det byttet jeg dem ut. Av tidsmessige årsaker kunne jeg ikke pilotere alle oppgavene. Hovedhensikten var dessuten å se hvordan det var å samle inn datamateriale, og om dette kunne brukes for å analysere elevenes modelleringsprosess og identifiser hindringer. Jeg piloterte oppgaver om menneskepyramider og røykeslutt i egen klasse. Oppgaven om røykeslutt, hvor mye penger en røyker kunne spare på å slutte virket lite engasjerende for elevene, det er veldig få ungdommer i dag som røyker. Denne oppgaven tilfredsstilte ikke prinsipp 1 tilstrekkelig og ble byttet ut med kaffeavtalen. Oppgave 3 - Kaffeavtale hadde jeg gjort i en litt annen versjon i min egen klasse i fjor da vi jobbet med funksjoner på 8.trinn. Da fungerte den veldig bra, elevene var engasjerte og viste god forståelse for modellene de lagde. På høsten i 8.trinn har elevene enda ikke jobbet med variabler, så jeg forventet ikke at de skulle lage funksjonsuttrykk. Men det var interessant å se hvordan de løste oppgaven likevel.

Rekkefølgen på oppgavene var ikke helt tilfeldig. Jeg valgte å starte med en praktisk oppgave om menneskepyramider der de kunne bruke seg selv for å gjøre noen antakelser. Elevene skulle finne ut hvor mange mennesker som trengs for å lage en menneskepyramide, og i oppgaven fikk de bilder av to typer pyramider. Dette er kanskje ikke et reelt problem man nødvendigvis trenger svar på i virkeligheten, men likevel en praktisk situasjon som har lav inngangsterskel for elevene og en situasjon som er lett for de å sette seg inn i. Tanken her var at oppgaven skulle kunne engasjere alle, selv om de ikke hadde gjort modelleringsoppgaver før. Den neste oppgaven var 2 - Rubiks kube, en oppgave der elevene kunne telle på bildet og tegne selv. Denne oppgaven var mer konkret fordi elevene ikke trengte å gjøre mange antakelser, og slik sett veldig ulik den første. Jeg så i ettertid at denne oppgaven var krevende å lage en generell modell for elever på dette trinnet, fordi de fleste ikke har jobbet med algebra før. Det hadde vært naturlig å lage en algebraisk formel for en kube med hvilket som helst antall klosser. Den tredje oppgaven var et problem fra virkeligheten som kanskje var lettere for voksne å relatere seg til fordi den handlet om kaffeavtaler. Det er likevel et reelt problem fra virkeligheten, en veldig åpen oppgave som også hadde lav inngangsterskel. I ettertid ser jeg at oppgaven med kaffeavtaler var lett å løse uten for mye matematikk, og slik ble det en oppgave som gikk litt på tomgang. Elevene gikk fort lei, og brukte det meste av tiden på å finne veien til butikkene eller google helt andre ting enn de som var relevante. Den fjerde oppgaven ble laget siden det var jul, og i samarbeid med læreren. Man kan relatere dette til virkeligheten siden julenissen er en godt innarbeidet historie som alle kjenner til. En konkret oppgave med mange hensyn å ta for å lage en virkelig modell. Oppgave 5 om steinheller var kanskje den mest konkrete. Dette er modellering, men en mye mindre åpen oppgave enn de andre. Et kriterie for valg av oppgaver var at de skulle være så varierte som mulig, da det er vanskelig å vite på forhånd hvilke typer oppgaver som vil være engasjerende og motiverende for elevene slik at de får en lærerik modelleringsprosess. Jeg ville også at alle oppgavene skulle kunne gjøres uten forkunnskaper om modellering, og at det skulle være lav inngangsterskel for engasjement hos alle typer elever. Jeg valgte oppgaver som kunne løses uten å bruke veldig kompliserte matematiske ferdigheter, definert for 8.trinn. Dette for å ha fokus på å utvikle modelleringsferdigheter, og at ikke matematisk tekniske ferdigheter skulle stå for mye i veien for å øve på prosessen med å modellere.

3.5 Datainnsamling

Jeg filmet de to gruppene mens de løste oppgavene. Elevene satt på sine plasser i klasserommet for å få et mest mulig autentisk resultat. De hadde et kamera foran seg slik at jeg både fikk med ansiktsuttrykkene og det de skrev på arkene sine. I tillegg hadde jeg et kamera som bare tok opp lyd ved siden av som sikkerhet i tilfelle teknisk svikt. Jeg satte på kameraene i starten av timene, og trakk meg deretter tilbake slik at de skulle jobbe mest mulig uforstyrret. Jeg snakke litt med de andre gruppene som ikke var med i studien hvis de hadde oppklarende spørsmål, for å gli inn i klasseromsmiljøet på en best mulig måte. Jeg hjalp også til med å dele ut oppgavene, og elevene var klar over at det var jeg som hadde laget oppgavene. Når lærer snakket til hele klassen, filmet jeg henne og tavla. Dette for å få et helhetlig bilde av klasseromssituasjonen og konteksten elevene fikk presentert oppgaven i. Selv om læreren ikke er i hovedfokus i min studie, vil det være av betydning hvilken veiledning og undervisning elevene får både før og etter jobbeøktene sine. To av øktene ble kortere i klasserommet enn jeg hadde tenkt. Elevene fikk ikke fullført resonnementene sine mens de jobbet med oppgavene og ble avbrutt i prosessen av lærerens oppsummering. I disse tilfellene hadde jeg et semistrukturert intervju med hver av gruppene på et rom ved siden av rett etter at læreren hadde avsluttet arbeidet med modelleringsoppgaven i klassen. Dette for å sikre at gruppene fikk fullført resonnementene sine i oppgaven, og ikke måtte stoppe før de følte seg ferdig med den. Å ta gruppene ut av klassen vil gi en mer kunstig situasjon enn i klasserommet, dette blir kommentert ytterligere under forskningsetiske problemstillinger, avsnitt 3.9.

Det er verdt å nevne at denne klassen i enkelte seanser er urolig, og det forekommer en del støy. Læreren har god autoritet i klassen, og når det blir gitt beskjeder og tavleundervisning er det rimelig rolig og de fleste følger med. Når elevene jobber selvstendig er det mange som jobber 5-10 minutter, for så å snakke om andre ting og begynne å vandre litt i klasserommet. Dette kan av og til være årsaken til at lærer avbryter seanser der elevene jobber i grupper, selv om elevene ikke har fått tid nok til å tenke. Det er også grunnen til at elevene som er med i denne studien tidvis blir avbrutt av støy eller blir distrahert av elever rundt seg.

Opptak ble gjort i klassen i fire matematikktimer i samme klasse med en ukes mellomrom. Den siste timen ble flere uker etter de andre på grunn av juleferie. Ut fra de 300 minuttene med videoopptak som er gjort har jeg transkribert nesten alt. Jeg har utelatt sekvenser der elevene eller lærer snakker om helt andre ting enn det som er relevant for oppgaven og har i stedet kommentert i parentes hva som skjer i grove trekk for å beholde en oversikt over helheten i sekvensen. Sekvensene der læreren introduserer oppgaven for hele klassen, stopper alle for å gi beskjeder eller oppsummerer oppgaven i plenum har jeg transkribert i sin helhet.

3.6 Analyseverktøy

Her vil jeg beskrive verktøyet jeg bruker for analyse av datamaterialet og hvilke valg jeg har gjort i denne prosessen. Jeg vil redegjøre for rekkefølge og analyseprosessen, og hvilke valg og hensyn jeg har tatt underveis. Jeg beskriver også hvordan jeg testet ut analyseverktøyet for å øke sikkerheten for at resultatene er til å stole på.

3.6.1 Valg av metode for analyse

Kvalitativ analyse har som mål å gjøre det mulig for en leser av forskningen å få økt kunnskap om saksområdet uten selv å måtte gå gjennom alle dataene (Tjora, 2017 s.195-199). Første steg i dataanalyse er koding. Jeg har valgt å analysere med inspirasjon fra SDI-modellen, Stegvis-deduktiv induktiv metode (Tjora, 2017, s.19-22). Tilnærmingen er induktivt empirisk drevet og har nysgjerrighet som utgangspunkt og generaliserbar forståelse som mål. Modellen går i hovedtrekk ut på at de empiriske dataene danner grunnlaget for kodene. Ved å gå gjennom transkripsjonen kategoriserer man dataene og grupperer dem deretter i hensiktsmessige kategorier. I denne studien vil det si at jeg analyserte transkripsjonen og lette etter tegn på når elevene var i de ulike delene av modelleringssyklusen, møtte en kognitiv barriere eller kom videre i modelleringsprosessen etter en kognitiv barriere. Disse tegnene ble notert ned og kategorisert i forhold til stegene i modelleringssyklusen. Tegnene ble testet ut for å kvalitetssikre at de fungerte. Slik lagde de empiriske dataene et grunnlag for kodene og kategoriene det ble analysert etter. I SDI-modellen er målet med koding tredelt: å få ut essensen av det empiriske materialet, redusere materialets volum og legge til rette for idégenerering på basis av detaljer i empirien. Slik kan man unngå for mye påvirkning av teorien og magefølelse i første fase av analysen, og dermed sikre høyere reliabilitet av studien. Et kjennetegn på SDI-modellens induktive empirinære koding er at en tar utgangspunkt i begreper og utsagn som allerede fins i datamaterialet og bruker disse til å lage koder. Jeg gikk gjennom materialet for å lage en liste over utsagn eller situasjoner som viser at eleven er i ulike deler av modelleringssyklusen, og også utsagn eller tegn på at eleven er frustrert eller står fast. For å finne tegn på at elevene kommer seg videre etter å ha møtt kognitive barrierer, brukte jeg også empirien som grunnlag. I sammenheng med teori, lagde jeg et analyseverktøy og fikk to voksne, uavhengig av hverandre, til å teste det ut på en liten del av datamaterialet. Resultatet er nærmere beskrevet i avsnitt 3.8.1.

3.6.2 Analysestrategi og analyseverktøy

I det følgende vil jeg presentere hvordan jeg analyserte datamaterialet og hvilket verktøy jeg brukte. Tidligere forskning der en har brukt modelleringssyklusen som teoretisk rammeverk, har vist at studenter har blokader i modelleringsprosessen, og at disse var av kognitiv natur (Vos & Frejd, 2022). *Kognitive barrierer* kan være ulike blokkeringer elever møter når de jobber i de forskjellige delene av modelleringssyklusen (Blum, 2015). Vos og Frejd (2022) peker på at studentenes problemer også kan være blokader som kommer av sosiale normer, og at en beriket modelleringssyklus kan brukes for å fange opp metakognitive og sosiale blokader som hindrer elever progresjon i modelleringsprosessen. I min studie velger jeg å se bort fra slike sosiale utfordringer, samarbeidsproblemer eller utfordringer i tilknytning til uro fra klassen eller forstyrrelser fra andre. Jeg velger å konsentrere meg om de *kognitive barrierene* elever møter, det vil si blokader mellom eller i steg i modelleringsprosessen. Dette er grundigere beskrevet i teoridelen. Jeg vil nå gi en oversikt over det analytiske verktøyet jeg har brukt for å analysere datamaterialet. Jeg velger å analysere i tre trinn med utgangspunkt i de tre forskningsspørsmålene.

3.6.3 ANALYSETRINN 1:

Tabellen under viser ulike tegn på at elevene er i de ulike stegene i modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007). Noen av tegnene er hentet fra forklaringen til modellen, se teoridel avsnitt 2.4.1. De andre kodene er hentet etter fra datamaterialet og viser åpenbart at elevene er på det steget det refereres til her.

Steg i modelleringssyklusen:	**Tegn på at elevene er i dette steget:**
(1) Konstruere	○ Eleven leser oppgaven ○ Eleven peker på oppgaven eller kommenterer den. ○ Eleven viser at de forstår hva oppgaven handler om ○ Eleven går rett til et av de andre stegene i syklusen og viser med dette at han/hun har forstått hva oppgaven handler om og har laget en mental representasjon av den uten å si det.

(2) Forenkle/ strukturere	○ Eleven gjør noen antakelser slik at problemet lar seg løse.
	○ Eleven starter setninger med
	    ○ *Det kommer an på ...*
	    ○ *Vi kan anta at ...*
	    ○ *Hvis ...*
	○ Eleven forenkler det virkelige problemet til et enklere problem eller et problem som kan gjelde for alle lignende situasjoner.

(3) Matematisering	○ Eleven bruker matematiske begreper for å beskrive den virkelige modellen. Matematisering er å gå fra en verden med liv til en verden med symboler. ○ Matematisering er aktiviteten med å organisere emner fra virkeligheten med matematikk. Eleven gjør den virkelige modellen om til matematikk eller lager en matematisk modell av det virkelige problemet.

(4) Arbeider matematisk	○ Elevene bruker matematikk til å løse matematiske oppgaver. Dette kan være ligninger, beregninger, målinger, regnestykker eller andre. ○ Eleven får et matematisk resultat som han/hun kan bruke til å løse det opprinnelige problemet med.
(5) Tolking	○ Eleven tolker det matematiske resultatet og vurderer om han/hun må gjøre andre antakelser for at resultatet skal gi mening. ○ Elevene vurderer svaret og forenkler det eller kutter ut noe for at det skal gi mening. ○ Setningene inneholder både noe fra matematikkens verden og noe fra virkelighetens verden.
(6) Validerer	○ Eleven bruker de matematiske resultatene til å se hva de har å si for resultater i den virkelige verden. ○ Elevene finner en løsning, men den kan være gal. De vurderer om løsningen lar seg gjøre. Setninger elevene kommer med på dette steget kan for eksempel være: ○ *Noe er ikke riktig her ...* ○ *Det kan ikke stemme ...* ○ Elevene går tilbake til det opprinnelige problemet og sjekker om det kan være mulig at det har funnet en løsning på problemet.
(7) Eksponering	○ Eleven presenterer en løsning eller en anbefaling til løsning på det virkelige problemet.

Tabell 3-2 Operasjonalisering av de 7 stegene i modelleringssyklusen (MS) til Blum & Leiss (2007)

I analysetrinn 1 brukte jeg steg 1-7 og alle disse punktene som kjennetegn for å analysere datamaterialet i forhold til forskningsspørsmål *I - Hvilke steg i modelleringssyklusen går elever på 8.trinn gjennom når de løser matematiske modelleringsoppgaver?* Jeg analyserte i denne rekkefølgen:

1.1. Registrerte hvilke steg i modelleringssyklusen (Blum & Leiss, 2007) eleven til enhver tid var på i modelleringsprosessen. Brukte fargekoder i transkripsjonen, en farge for hvert av de syv stegene i modelleringssyklusen, se tabell 3-2. All transkripsjon som viste at eleven er på dette steget i MS ble markert med tilhørende farge. De ulike kjennetegnene ble ikke markert, men ble kommentert i en oppsummering i resultatdelen der det var spesielle kjennetegn som gjentok seg.

Eksempel 3-1: Eksempel på markering i transkripsjonen, analysetrinn 1.1

J2: (Leser oppgaven høyt) Hvor mange mennesker trengs det for å lage en pyramide som er tolv meter.
J1: Mmmm...
J2: Det kommer an på hvordan de gjør det da..
J1: Hvis de gjør det sånn.. (peker på den første pyramiden).
J2: Ja..
J1: Så trenger de en, to tre fire, fem seks syv..(teller menneskene på bildet.)

1.2. Lagde en tabell ut fra fargekodene for gruppa i hver oppgave. Jeg viste hele gruppa i samme tabell så langt det lot seg gjøre. Dette fordi gruppene samarbeidet godt, og kom stort sett fram til løsninger sammen. De gangene elevene var uenige innad i gruppa og befant seg på ulike steg, har jeg kommentert det. Tabellen viser en oversikt over hvilke steg i modelleringssyklusen (MS) elevene var innom i kronologisk rekkefølge fra venstre mot høyre. Tabellen tar ikke ut over det hensyn til hvor mange minutter eller sekunder elevene ble værende i hvert steg. Dette fordi de mange ganger gjentok seg selv eller brukte tid på helt andre ting enn modellering mens de var i samme steg. Dette er kommentert i transkripsjonen. Hvis de skiftet fokus innenfor ett steg i MS eller jobbet med flere ulike ting innenfor samme steg ble dette markert med en rute for hvert fokusskifte eller en rute for hver ting de jobbet med. Tabellen er ment å være en oversikt over elevenes modelleringsrute i forhold til modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007), og viser hvor mange ganger elevene er innom hvert steg og i hvilken rekkefølge. Tabellen er til stor hjelp for å få et overblikk av analysen i hver oppgave.

KODER									Totalt
(1) Konstruere									3
(2) Forenkle									0
(3) Matematisere									4
(4) Jobbe matematisk									1
(5) Tolke									0
(6) Validere									0
(7) Eksponering									0

Eksempel 3-2 Tabell med modelleringsprosessen til en gruppe

1.3. Plukket punktvis ut sekvenser fra transkriberingen som var viktige for å forstå gangen i elevenes prosess. Dette er vist i en egen tabell i kap.4 – Resultater, Tabell 4-2 Beskrivelse av modelleringsprosessen og forklaring på hva elevene gjør i hvert steg i modelleringsprosessen: Oppgave 1 - Pyramideoppgave. Gruppe 1 med elevene J1 og J2.
1.4. Så etter likheter og forskjeller mellom gruppene for samme oppgaver, og for hver gruppe på de ulike oppgavene. Så etter mønster i modelleringsprosessen til elevene.
1.5. Så etter utvikling for hver oppgave. Tegn for utvikling:
    1.5.1. At de var innom flere steg i modelleringssyklusen for hver oppgave
    1.5.2. At de fant en løsning som kunne valideres

3.6.4 ANALYSETRINN 2:

Hva vil det si å møte en *kognitiv barriere* eller å stå fast i modelleringsprosessen? Her er det viktig å gjøre noen avgrensninger. Når står en elev fast i en oppgave? Er det når han/hun ikke finner en umiddelbar løsning? Er det når han/hun ikke kommer videre til neste steg i syklusen etter en viss tid? Tabell 3-3 nedenfor viser hvilke tegn jeg så etter for å identifisere *kognitive barrierer* når elevene modellerte. Enkelte av disse tegnene er hentet fra teoridelen, mange fra datamaterialet. Etter analysen lagde jeg en oversikt over hyppigheten av de ulike kognitive barrierene.

Steg i modelleringssyklusen:	**Tegn på at eleven møter en *kognitiv barriere* i dette steget:**
(1) – (7) Tegnene kan forekomme I alle stegene i MS	A. Eleven stopper opp uten å gjøre noe i mer enn 2 min B. Eleven ser oppgitt ut, uttrykker oppgitthet verbalt eller fysisk C. Eleven sier at han/hun ikke vet eller forstår D. Eleven sier at han/hun de sikkert har gjort feil
(1) Konstruere	E. Eleven kommer ikke i gang med oppgaven. F. Eleven uttrykker at hun/han ikke forstår oppgaven.

	G. Eleven viser at hun/han har misforstått oppgaven ved å sette i gang med noe som ikke gir mening for oppgaven.
(2) Forenkle/ strukturere	H. Eleven lager ingen antakelser. I. Eleven lager antakelser som ikke er relevante for oppgaven. J. Eleven tar ikke hensyn til essensielle aspekter ved det virkelige problemet.
(3) Matematisering	K. Eleven har problemer med å beskrive modellen med matematiske begreper. L. Eleven har problemer med å lage en matematisk modell som er riktig i forhold til det virkelige problemet. Eleven lager en modell som er feil.
(4) Arbeider matematisk	M. Eleven strever med matematiske utregninger, eller stopper opp i regneprosessen på grunn av at han/hun ikke klarer å løse oppgaven. N. Eleven regner feil O. Eleven bruker tall uten å tenke over hva tallene egentlig står for. De får da et regnestykke uten mening.
(5) Tolking	P. Eleven får et matematisk resultat, men forstår ikke hva han/hun har regnet ut. Q. Eleven har problemer med å de-matematisere
(6) Validerer	R. Eleven vet ikke hva det matematiske resultatet har å si for den virkelige modellen.
(7) Eksponering	S. Eleven er ikke i stand til å presentere en løsning på det virkelige problemet.

Tabell 3-3 Tegn på når elevene møter en kognitiv barriere på de ulike stegene i modelleringssyklusen (MS)

I analysetrinn 2 brukte jeg punkt A-S som koder for å analysere datamaterialet i forhold til forskningsspørsmål *II - Hvilke kognitive barrierer oppstår hos elever på 8.trinn i arbeid med matematiske modelleringsoppgaver?* Noen tegn kan gjelde for alle steg i modelleringssyklusen, andre dukker opp på spesifikke steg i MS. Mange av tegnene er plukket ut fra datamaterialet. Dette for at ikke forsker skal være forutinntatt og se seg blind på data.

(Tjora, 2017). Det er viktig å ha et så åpent blikk som mulig når forsker analyserer. I analysetrinn 2 registrerte jeg *kognitive barrierer* (KB) i modelleringsprosessen, og hvilke steg i modelleringssyklusen de var på når de stod fast, på følgende måte:

- Satte (KB-stor bokstav) med sort skrift etter transkriberingen for hvilket tegn som viser at eleven har møtt en kognitiv barriere. Fargen fra analysetrinn 1 viser hvilket steg i syklusen eleven er i.
- Kommenterte begrunnelser for kodingen, slik at jeg kunne ta det med i diskusjon.
    - ⇒ Eksempel 2-1: (KB-F) for kognitiv barriere fordi (F) eleven uttrykte at han/hun ikke forstod oppgaven.
    - ⇒ Eksempel 2-2: (KB-B) for kognitiv barriere fordi (B) eleven så oppgitt ut og viftet med armene.
- Så etter utvikling for hver oppgave, om de stod fast på samme trinn i modelleringssyklusen gjentatte ganger. Kodingen for dette ble lagt inn i tabellen fra analysetrinn 1, slik at man kunne se hvor i modelleringsprosessen man støtte på de kognitive barrierene.

Grunnen til at jeg bare brukte store bokstaver og ikke lengre bokstavkoder på tegnene for kognitive barrierer, er at det var vanskelig å forenkle flere av de lange forklaringene til en kort kode.

Eksempel 3-3: Eksempel på markering i transkripsjonen av Kognitive barrierer, analysetrinn 2

J2: Ja vi sier 70.
J1: Såååå...mm..skal vi lage en sånn pyramide eller en sånn? (peker på bildene i oppgaven.)
J2: Ehh.. vi tar den (peker på den første) For det er veldig usikkert å lage den (peker på den andre som ligner på Eiffeltårnet.)
J1: Men..hvis vi trenger...Hva er 70 ganger...12? (KB – M)

Forsøker å finne ut hva 70 ganger 12 er. Hvorfor er usikkert, men de har funnet et tall, 70 (som egentlig er høyden på en gjennomsnittsperson når an står på alle fire), og så multipliserer de dette med 12. Fordi det står i oppgaven at det skal være 12 meter høyt? Det blir et regnestykke uten mening(jfr. Skoen til Blum & Ferri)

3.6.5 ANALYSETRINN 3:

I analysetrinn 3 skulle jeg analysere i forhold til forskningsspørsmål *III - Hva gjør elevene for å komme videre når de møter kognitive barrierer i modelleringsprosessen?* Det vil si å registrere når elevene kommer videre i modelleringsprosessen etter en kognitiv barriere. Det kan være at elevene kommer videre fra ett steg i MS til et annet eller kommer videre og jobber konstruktivt innenfor ett steg i prosessen. Det er viktig å presisere at modelleringssyklusen bare er en modell, og at det er ikke naturlig å følge stegene slavisk i rekkefølge. Elevene kommer videre i modelleringsprosessen når de går fra ett steg til et annet uavhengig av rekkefølgen, eller løser en kognitiv barriere de har i samme steg.

De stedene i transkripsjonen dette skjedde ble markert med V-nummer på det som gjør at elevene kommer seg videre og en kommentar i sidefeltet, se eksempel 3-4. Det elevene gjør for å komme videre etter en kognitiv barriere ble registrert i en tabell for alle oppgavene for begge grupper, se Tabell 4-22 s.4-92. Hva som gjør at elevene kommer videre etter en kognitiv barriere kan være:

- V-1 Spørre en lærer
- V-2 Bruke digitale verktøy for å finne opplysninger
- V-3 Spørre hverandre, diskuterer og jobber sammen
- V-4 Lage en skisse
- V-5 Lage en oversikt over informasjon
- V-6 Eleven står på samme steg men endrer språk eller følelser
- V-7 Endrer retning på det han/hun jobber med i det steget eleven er på
- V-8 Finner en løsning på problemet ved å tenke seg om eller regne i hodet

Noen av disse kjennetegnene er hentet fra teori (Vos & Frejd, 2022) og (Jankvist & Niss, 2020), andre hentes fra empirien. Jeg lagde en liste over de ulike og registrerte om noen gikk igjen flere ganger.

Eksempel 3-4: Eksempel på markering i transkripsjonen, analysetrinn 3

G2: Nei, men skal vi liksom regne ut hvor mange... da må vi se på bildet..(Studerer bildet) Det er ganske uklart. (KB-F)
G1: Men hvor mange mennesker er det sånn rett opp?
G2: Rett opp..? Jeg vet ikke, det står jo liksom her..her står det.. to og der står det tre, og der står det...fire og der står det..Nei...jeg skjønner ikke. Skal vi regne..
G1: Her står de jo sånn (teller på bildet)
G2: Ja, vi må kanskje bare regne det da..
G1: Vi må jo bare regne hvor mange mennesker vi trenger for å lage en sånn pyramide.. (V-3 og 8)

3.7 Forskningsetiske problemstillinger

Jeg valgte som nevnt å spørre elever jeg ikke kjenner fra før av om å delta i studien, for at resultatet skulle påvirkes så lite som mulig av min tilstedeværelse. Selv om vi er på samme skole, er trinnene atskilt og jeg har ikke vært i denne klassen før hverken som vikar eller hatt kontakttid i pauser på det trinnet. Jeg tenkte det da ville være så tilnærmet likt å få inn en forsker utenfra skolen som mulig. Jeg valgte også å delta så lite som mulig i timene de jobbet med oppgavene, bare holde meg i bakgrunnen og sette opp kameraene. Samtidig var det viktig for meg å ha en vennlig og positiv tone i det lille jeg sa i klassen, slik at de ikke skulle la negativt inntrykk påvirke deres innsats i oppgaveløsningen. Likevel vil det alltid være et skjevt maktforhold mellom lærer og elev. Det er alltid en fare for at elevene føler de må prestere ekstra når de blir tatt opp på video, selv om det er gjort kjent for dem at materialet blir slettet etterpå. Det vil også være en forstyrrende faktor at de vet at de gjør oppgavene delvis fordi jeg skal samle inn datamateriale, selv om de har blitt gjort kjent med at dette er en del av pensum i LK20. I en intervjusituasjon vil den som intervjuer ha makten fordi den stiller spørsmålene. Det kan være en fare for at elevene leter etter de svarene de tror intervjueren vil høre, selv om intervjueren ikke har en nær relasjon til elevene.

Det er en asymmetrisk maktrelasjon i ethvert kvalitativt forskningsintervju (Kvale et al., 2015, s.52). Intervjuet er ikke en dagligdags samtale mellom likestilte partnere. Intervjueren stiller spørsmålene og har en vitenskapelig kompetanse. Kvale (et al., 2015) påpeker også at et kvalitativt intervju kan være manipulerende og er en enveisdialog der intervjuerens rolle er å spørre og har kontroll på hvilke spørsmål som han eller hun vil følge opp eller utdype, og er den som avslutter samtalen. Denne asymmetrien er sterkere når det er snakk om et intervju mellom lærer og elev fordi læreren fra før av har et maktovertak på eleven i form av stillingen sin. Dette maktforholdet kan minkes dersom man stiller åpne spørsmål og lar eleven snakke så fritt som mulig. I to tilfeller i datainnsamlingen tok jeg elevene ut av klasserommet for å få de til å fullføre sine resonnementer i oppgaven, fordi de ble avbrutt av oppsummeringen i klassen. Poenget var å få elevene til å fortsette sine resonnement i forhold til oppgaven. Det sier deg selv at de ble forstyrret fordi arbeidssekvensen ble avsluttet i klasserommet og mentalt har de avsluttet tankegangen de hadde. I den ene oppgaven der de uttrykte i klasserommet at de ønsket å jobbe videre med oppgaven på egen hånd, viste de et engasjement i intervjuet og tegnet og snakket. Likevel var samtalen preget av at elevene var litt nervøse for å svare feil, eller at de var usikre på egne evner i forhold til forsker. De så på hverandre og sa ofte *vet ikke.* Dette kommer jeg tilbake til i analysen, men det er viktig å presisere at disse intervjuene var av nysgjerrighet for å se om elevene var interessert i å løse oppgaven ferdig eller de fant på et svar for høflighetens skyld.

Jeg kjenner læreren fra før, har nylig studert sammen med henne og har også hatt vært hennes øvingslærer. Likevel vil jeg si at vårt maktforhold er likeverdig fordi vi er kollegaer, og hun har nettopp avsluttet sin mastergrad. I tillegg vil jeg si at vi begge har prøvd ut modellering i skolen i liten grad og er begge nysgjerrig på hvordan vi kan implementere denne oppgaveformen i skolen på en så god måte som mulig.

3.8 Reliabilitet

For å tilstrebe at en kvalitativ studie har så høy reliabilitet som mulig, er det viktig at analysen er gjennomført på en pålitelig måte. For å sjekke at analyseverktøyet er solid nok, har jeg gjennomført en inter-coder reliablity (ICR) med to andre voksne. Det vil si at de setter seg inn i det analyseverktøyet jeg har laget og forsøker å kode en liten del av datamaterialet etter disse instruksjonene. For at min studie skal ha høy reliabilitet, det vil si ha høy pålitelighet og kvalitet, må den ha funn som er gyldige. Det vil si at andre forskere skal kunne analysere dataene med det samme analyseverktøyet og få de samme funnene som jeg har fått. Slik kan funnene i forskning ha høy troverdighet. Reliabilitet, eller pålitelighet, handler om sammenheng gjennom hele forskningsprosjektet. Ved at forsker redegjør så transparent som mulig for forskningsprosessen, kan reliabilitet sikres. ICR bør ha en enighetsprosent over 85% hvis man skal kunne si at analyseverktøyet er pålitelig. Hvis en forsker finner at en forskjell eller sammenheng er signifikant, vil det bety at funnet er reliabelt. Samme forskjell eller sammenheng vil med høy sannsynlighet observeres hvis undersøkelsen gjennomføres på nytt med et annet utvalg fra samme populasjon (Svartdal 2022).

3.8.1 Inter coder reliability (ICR)

For å sjekke inter-coder reliability (ICR), det vil si reliabiliteten til analyseverktøyet jeg hadde laget, fikk jeg to frivillige voksne (F1 og F2) til å kode 5 minutter av transkripsjonen for den første oppgaven, pyramideoppgaven. ICR-prosessen tok omtrent tre timer for hver av personene, vi gjorde det helt separat og på ulike dager. Jeg vil nå beskrive kort prosessen for ICR i begge tilfellene og resultatene av disse. F1 er en bygningsingeniør som modellerer hver dag i sitt arbeid. Likevel var det viktig at han satte seg inn i forklaringene på de ulike analysetrinn, og hvordan jeg hadde definert hvordan hvert trinn i modelleringssirkelen skulle avkodes i elevenes arbeide. Han hadde egne meninger om definisjoner på de ulike stegene i MS ut fra hvordan han selv modellerer, og måtte legge disse til side for å sette seg inn i analyseverktøyet. Likevel fikk vi på forhånd en god og nyttig diskusjon om hvilke steg som er i den virkelige verden og hvilke som er i den matematiske. Som nevnt i teoridelen, finnes det flere ulike modeller for hvordan modelleringsprosessen kan beskrives, men jeg har valgt å bruke Blum og Leiss sin modell fra 2007, og da må vi forholde oss til den i analysen også.

F1 leste gjennom analyseverktøyet og fikk i tillegg en muntlig forklaring på hvordan jeg analyserte transkripsjonen i tre steg. Så satt han for seg selv i nærmere en time for å kode linje 20-79 i transkripsjonen av første oppgave fra jentegruppa. Til slutt gikk vi gjennom og sammenlignet hvor vi hadde kodet likt, og hvor det var forskjellig. I første analysesteg brukte han tegnene a-p som hjelp til å fargekode transkripsjonen slik at de ulike fargene sto for hvilke steg i MS de befant seg på til enhver tid. Stegene og fargene er som vist i tabellen. Etterpå registrerte jeg hvilke linjer i teksten vi hadde på de ulike stegene i MS slik at vi kunne sammenlikne hva som var likt og ulikt. Resultatet vises i tabellen under.

Steg i modelleringssyklusen:	**Tegn på at elevene er i dette steget:**	**Tove sin analyse (Linje nr.)**	**F1 sin analyse (Linje nr.)**	**F2 sin analyse (linje nr.)**
(8) Konstruere	○ Eleven leser oppgaven ○ Eleven peker på oppgaven eller kommenterer den. ○ Eleven viser at de forstår hva oppgaven handler om ○ Eleven går rett til et av de andre stegene i syklusen og viser med dette at han/hun har forstått hva oppgaven handler om og har laget en mental representasjon av den uten å si det.	20, 21, 22 43, 44, 45	20, 21, 22 43, 44, 45	20, 21, 22 43, 44, 45
(9) Forenkle/ strukturere	○ Eleven gjør noen antakelser slik at problemet lar seg løse. ○ Eleven starter setninger med	23, 24, 25 27, 28, 29, 30, 31	23, 24, 25 27, 28, 29, 30, 31	23, 24, 25 27, 28, 29, 30, 31

	○ *Det kommer an på ...* ○ *Vi kan anta at ...* ○ *Hvis ...* ○ Eleven forenkler det virkelige problemet til et enklere problem eller et problem som kan gjelde for alle lignende situasjoner.	38, 39, 40, 41, 42	38, 39, 40, 41, 42	38, 39, 40, 41, 42
(10) Matematisering	○ Eleven lager en matematisk modell av det virkelige problemet. ○ Eleven bruker matematiske begreper for å beskrive modellen. ○ Eleven gjør den virkelige modellen om til matematikk.	33	33 67, 68, 69, 70 73, 74	33 46 64
(11) Arbeider matematisk	○ Elevene bruker matematikk til å løse matematiske oppgaver. Dette kan være ligninger, beregninger, målinger, regnestykker eller andre. ○ Eleven får et matematisk resultat som han/hun kan bruke til å løse det opprinnelige problemet med.	46 (andre halvdel av setningen) 47, 48, 49, 50, 51, 52 55, 56 58 60, 61, 62, 63, 64 66, 67, 68, 69, 70 73, 75, 77	46 (Andre halvdel av setningen) 47, 48, 49, 50, 51, 52 55, 56 58 60, 61, 62, 63, 64 75, 77	34-35 47, 48, 49, 50, 51, 52 55, 56 58 66, 67, 68, 69, 70 73, 75
(12) Tolking	Eleven tolker det matematiske resultatet og vurderer om han/hun må gjøre andre antakelser for at resultatet skal gi mening.	57 59 65	54 57 59 65	53 (Halv setning) 57 59 65 60, 61, 62, 63
(13) Validerer	○ Eleven bruker de matematiske resultatene til å se hva de har å si for resultater i den virkelige verden. ○ Elevene går tilbake til det opprinnelige problemet og	26 53, 54 65 (Andre halvdel av setning)	26 53 65 (andre halvdel av setning), 66	26 53, 54

	sjekker om det kan være mulig at det har funnet en løsning på problemet.	77, 78, 79	77, 78, 79	77,78,79
(14) Eksponering	Eleven presenterer en løsning eller en anbefaling til løsning på det virkelige problemet.	Ingen	Ingen	Ingen
Ingen farge	Hvis elevene snakker om helt andre ting enn oppgaven, eller transkripsjonen beskriver noe som skjer i klasserommet.	34-37 71, 72 76	34-37 71, 72 76	36-37 71, 72 76

Tabell 3-4 Resultat fra inter-coder reliability (16.012022 og 21.01.2022)

Oppsummert har F1 kodet 60 setninger og det viser seg at 8 av disse er kodet annerledes enn på min analyse. Det vil si 13% (=8/60 * 100%). På 5 minutters transkripsjon er vi 87% (=52/60*100%) enige om koding i forhold til hvilke steg i MS elevene er på.

F2 er en kollega som også er lærer i matematikk. Hun leste gjennom analyseverktøyet på forhånd før vi møttes, og hadde også kodet linje 20-79 før vi møttes ut fra analyseverktøyet beskrevet i oppgaven. Vi diskuterte kodingen hennes og hun hadde noen oppklaringsspørsmål. Det viser seg at 7 av F2 sine setninger er kodet annerledes enn på min analyse. Det vil si 11,6% (=7/61 * 100%). På 5 minutters transkripsjon er vi 88 (=53/60*100%) enige om koding i forhold til hvilke steg i MS elevene er på.

3.8.2 Kommentarer til uenighet i ICR

I linje 53-54 sier elevene: *Så det er 840 opp? Men det blir litt mange personer, blir det ikke? Hmmm ... da trenger vi 12 stk da... Nei, vi trenger 14.* F1 kodet at elevene er i steg (5), tolker det matematiske resultatet og jeg kodet at eleven er i steg (6), går tilbake til det opprinnelige problemet og sjekker om de har funnet en løsning på problemet. Disse to stegene glir over i hverandre det kan være vanskelig å skille de fra hverandre. En kan si at de både tolker resultatet og tenker over hva det har å si for løsningen på det virkelige problemet. I en tankeprosess der elevene grubler på et problem vil det være vanskelig å kategorisere alle tanker og utsagn. En må også ta hensyn til hele prosessen eleven er inni. I en ICR vil det bli litt mer teknisk enn ønsket, fordi de som koder ikke tar nok hensyn til hele løsningsprosessen til elevene. Jeg vil derfor i analysen kommentere når det er uklart hvilket steg elevene er på, og om det kan virke som de er på flere steg samtidig. Dette for at kodingen skal bli så riktig som mulig.

Videre kan vi se ut fra ICR tabellen at F1 hadde mest uklarheter mellom stegene (3) matematisering og (4) arbeide matematisk. Han forklarte at i hans jobb bruker de matematiske standarder for å tolke og validere resultatene de får. Han hadde heller ikke lest teorien om matematisering og de mer dyptgående definisjonene. Vi diskuterte dette litt, og i etterkant for videre analyse la jeg til flere kjennetegn og grundigere forklaring på begrepet.

F2 hadde mest uklarheter mellom stegene (3) matematisering og (5) tolkning. F2 argumenterte for at hun hadde lagt til grunn for analysen at når de lagde et regnestykke, så matematiserte de. Noen av disse setningene hadde jeg og F1 tolket som (4) arbeide matematisk. Når elevene diskuterer om de skal runde av høyden på en av personene til 65 eller 70, tolket hun det som om de tolket et matematisk resultat, mens jeg og F1 tolket det som om de jobbet matematisk. Når de diskuterer en slik avveining kan en jo si at de jobber med å avklare en forutsetning for modellen sin, men samtidig er en slik justering en ren matematisk vurdering. Når de lager regnestykker jobber de også matematisk, så lenge de ikke endrer på den opprinnelige modellen de allerede har beskrevet med matematiske begreper. F2 hadde heller ikke lest teorien der begrepet matematisering blir grundigere forklart ut fra Freudenthal sine beskrivelser. For å forsterke analyseverktøyet ut fra de uklarhetene det tydeligvis hadde, lagde jeg flere kjennetegn for videre koding både i steg 3, 4, 5 og 6. Jeg brukte det forsterkede analyseverktøyet for min koding av resten av datamaterialet.

3.9 Validitet

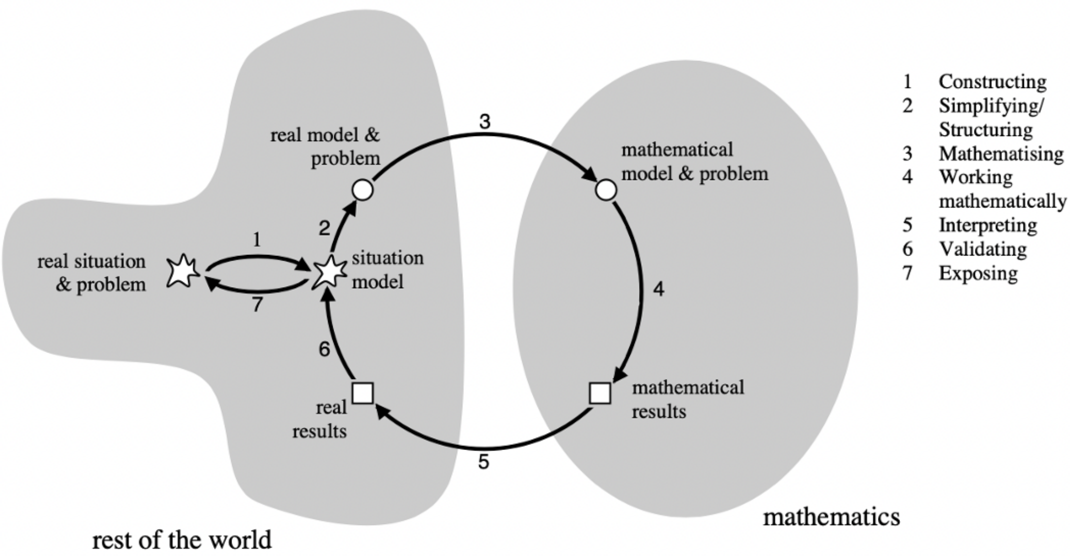
Validitet, eller gyldighet, handler om en logisk sammenheng mellom prosjektets utforming og funn, og de spørsmålene man søker å finne svar på (Tjora, 2017, s.231). Validitet betyr i hvilken grad man ut fra resultatene av en studie kan trekke slutninger om det man har satt seg som mål å undersøke. Det er tolkningene av dataene som valideres, ikke selve målemetodene. I en kvalitativ studie vil det være en utfordring med etterprøvbarhet fordi forskeren er subjektiv og funnene settes ofte inn i en sammenheng. Det er vanskelig å trekke bastante slutninger fordi det alltid vil foreligge en viss usikkerhet om hva elevene tenker siden dette er en kognitiv studie. For at funnene likevel skal kunne generaliseres til en viss grad, er det viktig at dataene er samlet inn på en pålitelig måte og at eventuelle slutninger er godt begrunnet. I denne undersøkelsen vil det være en utfordring å kunne trekke generelle slutninger fordi utvalget er lite. Likevel har jeg brukt et godt og mye utprøvd analysemateriale, og vil sammenligne minne funn med funn fra tidligere forskning med lignende analyseverktøy.

4 Resultater fra analyse av innsamlede data

I dette kapittelet vil resultater fra analyse av datamaterialet for hver oppgave presenteres i form av en oversiktstabell, eksempler fra transkripsjon som er relevante for analyse og diskusjon, og beskrivelse av sekvenser under modelleringsprosessen til elevgruppene som har betydning for denne undersøkelsen. Jeg vil presentere resultatet fra arbeidet med oppgavene i den rekkefølgen de ble gjort av klassen. I utgangspunktet er det en gruppe med to elever, og en gruppe med 3 elever.

Først presenteres en oversikt over modelleringsprosessen elevene hadde (tabell 4-1), og så en forklaring på de ulike stegene i modelleringssyklusen (MS) de var innom og i hvilken rekkefølge (tabell 4-2). I tabell 4-2 blir det også presentert når elevene møtte kognitive barrierer, om de eventuelt løste disse og på hvilken måte. Ut fra transkripsjonene av elevenes oppgaveløsning og koding av disse, har jeg trukket ut de seansene der elevene jobber i ulike steg i modelleringssyklusen (MS), møter en kognitiv barriere eller forsøker å løse en kognitiv barriere. Jeg framstiller løsningsprosessen kronologisk etter den rekkefølgen de faktisk hadde, og utelater de seansene der elevene holder på med andre ting, eller gjentar seg selv i prosessen. Dette gjør jeg fullstendig og grundig for gruppe 1 i oppgave 1. For de andre oppgavene velger jeg ut de viktigste sekvensene, men kommenterer ikke alle detaljene. Til slutt framstiller jeg resultat for alle oppgavene og begge gruppene i en samlet oversiktstabell, Tabell 5-8, som grunnlag for diskusjon i kapittel 5. Målet med denne måten å framstille resultatene på er at leseren skal få et overblikk over elevenes modelleringsprosess for hver oppgave, slik at det dannes et grunnlag for diskusjon. Jeg plottet kodene i et regneark for å gi god oversikt over modelleringsrutene til gruppa. Jeg vurderte det til at det ble mer oversiktlig enn å lage piler i modelleringssyklusen, slik det har blitt gjort i noen lignende studier. Hvor lang tid elevene jobber i de ulike stegene i MS vil ikke vises i oversiktstabellen (tabell 4-1), men bli kommentert i den utdypende tabellen (tabell 4-2). Tabell 4-1 vil derfor ikke gi et riktig bilde på hvor lenge de faktisk jobbet i hvert steg, bare vise rekkefølgen i modelleringsprosessen som de hadde. Jeg anser det som vesentlig for denne studien å presentere rekkefølgen i modelleringsprosessen til elevene, og utdype med ord og eksempler fra transkripsjon der det er interessante funn og der elevene diskuterer ulike ting innenfor ett steg i syklusen. Jeg vil kommentere der de bruker lang tid i ett steg i prosessen. Designet på oversiktstabellen over hvilke steg elevene er på i MS er inspirert av en annen masteroppgave om modellering (Singstad, 2020).

Gjentar modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007) og de 7 stegene oversatt til norsk her for at tabellene under skal bli lettere å lese. (Fargene er de som ble brukt i transkripsjonsanalysen):



Figur 4-1 Modelleringssyklusen (Blum & Leiss, 2007)

(1) Konstruere – Skape et mentalt bilde av hva oppgaven handler om, og hva det spørres etter.

(2) Forenkle – Gjøre noen antakelser eller forenklinger slik at oppgaven lar seg løse.

(3) Matematisere – Bringe matematikk til den virkelige verden. Uttrykke virkelighet ved hjelp av matematikk.

(4) Jobbe matematisk – Bruke matematikk til å løse matematiske oppgaver.

(5) Tolke – Tolke det matematiske resultatet og vurdere om det må gjøres andre antakelser.

(6) Validere – Se hva resultatene har å si for den virkelige verden.

(7) Eksponering – Presentere en løsning på det virkelige problemet.

Koder for kognitive barrierer (KB):

- A. *Eleven stopper opp uten å gjøre noe (>2 min)*
- B. *Eleven ser oppgitt ut, uttrykker oppgitthet verbalt eller fysisk*
- C. *Eleven sier at han/hun ikke vet eller forstår*
- D. *Eleven sier at de sikkert har gjort en feil*
- E. *Eleven kommer ikke i gang med oppgaven*

F. Eleven uttrykker at han/hun ikke forstår oppgaven
G. Eleven viser at han/hun har misforstått oppgaven ved å sette i gang med noe som ikke gir mening for oppgaven
H. Eleven lager ingen antakelser.
I. Eleven lager antakelser som ikke er relevante for oppgaven.
J. Eleven tar ikke hensyn til essensielle aspekter ved det virkelige problemet.
K. Eleven har problemer med å beskrive modellen med matematiske begreper.
L. Eleven har problemer med å lage en matematisk modell som er riktig i forhold til det virkelige problemet. Eleven lager en modell som er feil.
M. Eleven strever med matematiske utregninger, eller stopper opp i regneprosessen på grunn av at han/hun ikke klarer å løse oppgaven.
N. Eleven regner feil
O. Eleven bruker tall uten å tenke over hva tallene egentlig står for. De får da et regnestykke uten mening.
P. Eleven får et matematisk resultat, men forstår ikke hva han/hun har regnet ut.
Q. Eleven har problemer med å de-matematisere
R. Eleven vet ikke hva det matematiske resultatet har å si for den virkelige modellen.
S. Eleven er ikke i stand til å presentere en løsning på det virkelige problemet

Tegn på at elevene kommer videre fra en kognitiv barriere:

V-1 Spørre en lærer
V-2 Bruke digitale verktøy for å finne opplysninger
V-3 Spørre hverandre, diskuterer og jobber sammen
V-4 Lage en skisse
V-5 Lage en oversikt over informasjon
V-6 Eleven står på samme steg, men endrer språk eller følelser
V-7 Endrer retning på det han/hun jobber med i det steget eleven er på
V-8 Finner en løsning på problemet ved å tenke seg om eller regne i hodet

4.1 Fremstilling av resultater for oppgave 1 – Menneskepyramider

Denne økta er det første gang elevene møter en modelleringsoppgave. Jeg valgte oppgaven med å lage menneskelige pyramider som den første for elevene fordi den er praktisk, og det kan være kort vei fra virkelig problem til matematikk.

Oppgave 1 - Menneskepyramider

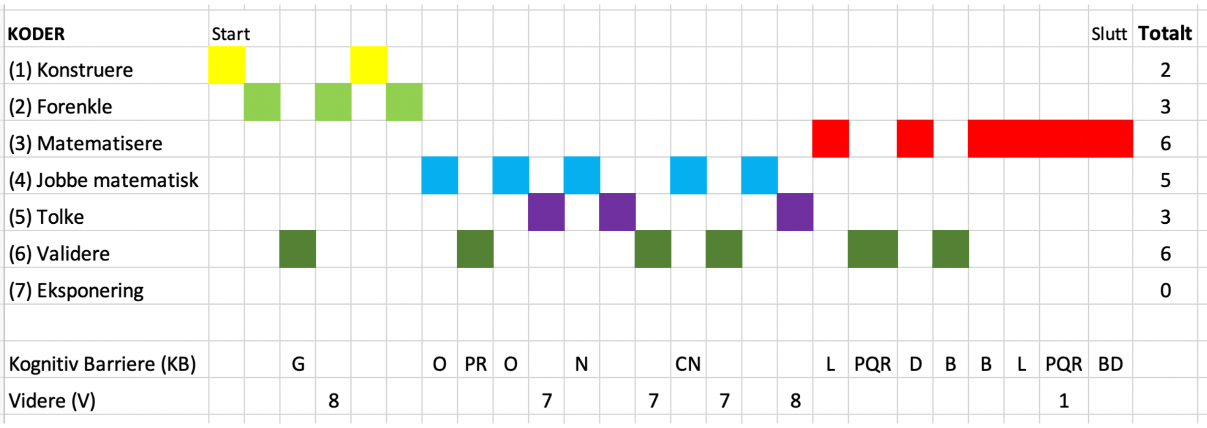
Bildene viser to ulike måter å lage pyramider av mennesker.

Hvor mange mennesker trengs det for å lage en pyramide som er ca. 12 m høy?

4.1.1 Gruppe 1 (J1 og J2)

Gruppe 1 består av to jenter som jobber godt sammen og er relativt glad i matematikk. De snakker mye og godt sammen, så det meste av kommunikasjonen dem imellom foregår muntlig. I noen få tilfeller skriver eller tegner de litt. Begge bidrar like mye, og de samarbeider godt. Derfor har jeg valgt å framstille modelleringsprosessen deres sammen, de følger hverandre stort sett i sine resonnement. I tilfeller der det er ulikt hvordan de oppfatter situasjonen har jeg kommentert det.

Tabell 4-1 under gir en oversikt over hvilke steg i modelleringsprosessen elevene er innom i løpet av den tiden de jobber med oppgaven. I tabellen har jeg markert stegene i MS med farger, det er en rute med farge for hver gang elevene jobber i det steget i MS eller diskuterer noe nytt i det samme steget. Rutene med farger viser at elevene er i det steget i MS. Tabell 4-1 viser hvilke steg elevene tar, kronologisk fra venstre mot høyre. De store bokstavene under fargene i tabell 4-1 viser til hvilke koder for kognitive barrierer elevene møter når de jobber med oppgaven. Tegn på at elevene kommer seg videre fra en kognitiv barriere er markert med tall ut fra oversikten på side 53. Både bokstavene og tallene står under det aktuelle steget i MS som eleven er på når de møter barrieren eller kommer videre fra den.



Tabell 4-1 Oversikt over koder gruppe 1 brukte i modelleringsprosessen (Oppgave1 - Pyramide). Tabellen viser kronologisk fra venstre mot høyre i hvilken rekkefølge elevene jobber i de ulike stegene. Bokstavene viser hvilken type kognitiv barriere elevene møter (A-S) og en kan lese av tabellen hvilket steg i syklusen de møter en slik barriere. Tallene 1-8 viser koden for hvordan de kommer videre fra en barriere (se også forklaring på kodene på side 38-44 og 52-53).

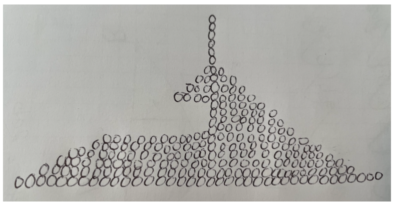
Tabell 4-1 viser at jentene i denne oppgaven jobber flest ganger i stegene (3) matematisering, (4) jobbe matematisk og (6) Validere. De konstruerer raskt et bilde av oppgaven og kommer i gang med å gjøre sentrale antakelser. Deretter går de over til å jobbe matematisk, og tolker og validerer de resultatene de får. De regner matematisk med tall de ikke er helt sikre på hva betyr før de kommer til en diskusjon om hvordan pyramiden egentlig er bygget opp. Elevene er også usikre på måleenheter og må mange ganger sjekke dette ved å jobbe matematisk. De strever med å finne en riktig matematisk modell for den første pyramiden på bildet. De tegner en modell av pyramiden ut fra matematiske resultater, men modellen stemmer ikke med den virkelige modellen. Vi ser av tabellen at de møter flest kognitive barrierer under matematisering, men at de også strever når de validerer og jobber matematisk. Mot slutten blir de frustrert fordi de bruker mye tid og krefter på modellen for så å oppdage at den ikke fungerer. Det kommer ikke i mål med en modell som de er fornøyde med.

Tabell 4-2 under går dypere inn i utvalgte sekvenser av modelleringsprosessen. Den første kolonnen beskriver utvalgte situasjoner og eventuelt hva som blir sagt og gjort, og den andre kolonnen viser hvilke koder som er brukt og gir en forklaring på hvordan situasjonen ble tolket. Sitater fra elevene presenteres i svakt uthevet kursiv.

Tabell 4-2 Beskrivelse av modelleringsprosessen og forklaring på hva elevene gjør i hvert steg i modelleringsprosessen: Oppgave 1 - Pyramideoppgave. Gruppe 1 med elevene J1 og J2.

Beskrivelse av modelleringsprosessen:	**Koder og tolkning:**
Starter med å lese oppgaven høyt. *Det kommer an på hvordan de gjør det da..,* velger ut den første typen pyramide av de to på bildet.	(1) *Konstruere.* Det virker som de kjapt konstruerer et mentalt bilde av oppgaven fordi de ser at det er forskjell på de to pyramidene og at hvor mange mennesker som trengs avhenger av hvilken pyramide man vil lage. *(2) Forenkler* og velger pyramide 1.
Teller hvor mange mennesker som trengs for å lage den ene pyramiden på bildet.	*(6) validere.* De teller menneskene i den ene pyramide, for å se hvor mange mennesker som trengs der. Her hopper de rett til det de kanskje tror er en løsning på det virkelige problemet *(KB-G).* Ved å gjøre dette kommer de videre i prosessen *(V-8).* De skjønner at de må gjøre flere antakelser.
Kommer på at de må gjøre noen antakelser; *... det kommer an på hvor høye folk er.* Måler og diskuterer hvilket tall de skal bruke for høyden på en person som står på alle fire.	*(2) Forenkle.* De finner fort ut at de må gjøre en antakelse fordi de skal finne ut hvor mange som skal til for å lage en pyramide som er 12 meter høy. Etter litt diskusjon kommer de fram til 70 cm. De måler den ene på gruppa som står på alle fire og runder av fra 64 til 70, for at det skal være lettere å regne med.
Bestemmer seg for å velge den pyramiden til venstre på bildet, fordi den andre er veldig vanskelig å lage og det er ikke lett å se konstruksjonen.	*(1) Forstå* og *(2) Forenkle.* De viser her at de forstår oppgaven fordi de gjør noen fornuftige avgrensninger.
De regner 70 ganger 12 og får 840.	*(4) Jobbe matematisk (KB-O).* Elevene bruker de to tallene i et regnestykke uten å tenke over hva de egentlig står for.
Forsøker å finne ut hva tallet 840 betyr i virkeligheten. Vurderer at det er litt for mange mennesker, det kan ikke stemme. Tenker at de trenger 12 personer.	*(5) Tolke matematiske resultat (KB-P).* Strever med å finne ut hva de egentlig har regnet ut. Finner fort ut at det ikke er et realistisk svar med 840 personer.

J1: Hmmm ... Da trenger vi 12 stk da. Nei, vi trenger …14 *J2: Vi ganger 60 ... Hvis vi ganger 12 ganger 60, hva er det? ...60, 720. Det er 720. Og så 4, så da ganger du 12 med 4, 48 pluss 112 ...120 ... ehhh..* *J1: Hva er det du driver med?* *J2: Nei ... jeg regner!* *(...)* *J2: Så må vi ta 12 ganger 65 ... nei 60 ...* *J1: Vi må egentlig ikke det, for vi må bare ha 12 meter. Vi trenger ikke 12 mennesker.*	*(6) Validere. (KB-R)* Eleven strever med å se hva de tallene de jobber med har å si for den virkelige verden. Her deler de to jentene seg litt. J2 *(4) jobber matematisk* og prøver å justere antakelsen på 70 cm slik at det passer inn. Men forstår ikke helt hva det betyr *(KB-O).* J1 tenker for seg selv før hun setter sammen forståelse av oppgaven og de tallene de har jobbet med og skjønner at tallet 12 ikke er mennesker, men meter oppover i pyramiden *(V-7).* Ved å *(5) tolke og (6) validere*, finner hun en ny retning på hvilket regnestykke hun må jobbe med for å finne hvor mange mennesker som trengs oppå hverandre for at det skal bli 12 meter.
De jobber for å finne ut hvor mange centimeter 12 meter er.	*(4) Jobbe matematisk. (KB-N)* Elevene strever litt med å finne ut hvor mange cm 12 meter er. Finner til slutt ut at det er 1200. *(V-8)*
J2: Ja … Så vi må egentlig bare gange da, så det bli 65 opp. Så vi kan ta det derfra og ned. Liksom etterpå. *J1: Ja … mmm..* *Jennifer: Ser fjern ut I blikket, mister litt fokus.* *J1: Ja, en må først gange 65 til 12 ... nei 1200, og så dele det på ...* *J2: Kan vi … (snakker litt i munnen på hverandre)* *J1: Ok, så først så må vi gange 65..* *J2: Nei du må ta 1200 og dele på det. Så får du liksom svaret.* *J1: (Skriver ned et delestykke. 1200: 65)18 ...18 og en halv da...* *J2: (ler) 18 og en halv? Mennesker? 19 da..19 mennesker.* *J1: Ja! 19 mennesker*	Elevene jobber matematisk, men egentlig strever de for å finne en matematisk modell for hvordan antakelsen gjennomsnittshøyde skal brukes for å finne antall personer slik at det blir 12 meter. J2 løser det ved å lage et delestykke. Og de kommer fram til 19 mennesker i høyden. En kan si her at de *(4) jobber matematisk* og kommer fram til et matematisk resultat. De går fra *(KB-N og C)* til *(V-7)* og *(V-8)* via *(6) Validering* og *(5) tolkning* av det matematiske resultatet.

J1: Vi har først regnet hvor mange det er sånn. Hva heter det … oppover. Så kom vi til 19(...)Og liksom lage en figur. Og så bare tegne. *J2: (...) og så tegner vi hvor mange vi får rundt liksom..* *J1: Eller først regnet vi ut hvor mange som trengs liksom ...* *J2: Men så blir det ikke 18 på bunnen uansett. Eller..* *(...)*	Finner ikke helt ut hva tallet 19 er. *(3) Matematiserer og (6) Validerer*. Uttrykker pyramiden ved hjelp av en tegning, systematiserer. *(KB - L, P, Q, R)* De har problemer med å lage en riktig modell. De tegner alle sirklene oppover over hverandre, mens i den opprinnelige pyramiden står hver person med knærne og hendene på to ulike personer under seg.
J1: Det er sikkert en enklere måte å gjøre det på ... *J2: Vi har jo liksom begynt på det da. … det tar syyykt lang tid å tegne ...*  *Figur 4-2 Gruppe 1 sin skisse av pyramide*	Elevene ser at modellen ikke er helt perfekt, men orker ikke lage en ny, for de bruker veldig lang tid på å tegne sirkler. De lurer også på hvorfor de egentlig skal løse dette problemet. *(KB-B og D)*
J2: kan det være sånn ...? *J1: Ja, hvis ikke ... (Mumler litt, vanskelig å høre hva som blir sagt) Jeg tenker at den skal være stabil også. Den figuren.* *J2: Den er jo stabil! Se på den her! (viser tegningen) Jeg gidder jo ikke lage en ny figur nå!* *J2: Jeg tror dette er en dårlig ide egentlig..* *J1: Men hva skal man egentlig med en slik, en som er så høy?* *J2: Vet ikke, ass... Det er bare turnere som gjør det..*	Elevene prøver å få hjelp av lærer. Lærer ber dem forklare hva de har gjort. Av og til kan dette være oppklarende, men her ender de opp med å lure på om de skal tegne streker i stedet for sirkler. Fortsatt forsøker de å lage en modell og se hva denne kan gi dem av svar på hvor mange mennesker de trenger. *(KB-P, Q, R)* Her veksler de mellom *(3) matematisere og (5) tolke og (6) validere.*
J2: Jeg tror vi har gjort litt feil ... Jeg gidder ikke tegne flere sirkler nå! (...) vi tenkte sikkert helt feil! *J1: Jeg tenkte sånn at det var 34 her nede ... at vi kunne plusse på to sirkler hver gang ...* *(...)* *J1: ... så vi liksom slapp å telle alle.. Men så ble det liksom feil da vi kom til toppen, for da stod det liksom at det ikke var noen igjen.. når vi kom på toppen.. skjønner du hva jeg mener? (...)*	Elevene tenker at det må være 34 mennesker nederst. Hvorfor er litt vanskelig å få tak i, for det sier de ikke. Men de kommer fram til at de kunne legge til 2 sirkler hver i hver linje oppover i 19 linjer. Når de har tegnet sirkler opp så er det mange sirkler igjen. Så de teller først fra 34 og trekker fra 2 hver gang, og finner ut at da blir det 0 på toppen. Så starter de på 1 på toppen, legger til 2 hver gang og når de har gjort dette 19 ganger kommer til 37. *(KB-L)*

J1: Men så når vi kom på bunnen, så står det at det er 37 på bunnen, men det er det jo ikke.. *Lærer: Hva tror du kan være feil her da?* *J2: At mine sirkler er dårlige, at jeg hadde tegnet for dårlig..* *Lærer: At du hadde tegnet feil?* *J2: Ja. Jeg vet ikke..* *Lærer: Dere har tegnet mange sirkler, så det kan fort være at det ble en liten feil..* *J2: Skal jeg tegne streker da. …?*	*(3) Matematisere*. Elevene sjekker ikke hvordan den virkelige modellen egentlig ser ut, de finner ikke systemet i hvordan personene står oppå hverandre. De har også kommentert at konstruksjonen på den pyramiden de har tegnet, der alle står oppå hverandre en og en er veldig ustabil. *(KB-P).* På dette tidspunktet er de ganske lei. De har brukt veldig lang tid på å tegne og telle sirkler. *(3) Matematisere (KB-Q, R).* De forsøker å finne et mønster for å telle sirkler, men det kan virke som de ikke har verktøyet som skal til for å lage formel eller uttrykke mønsteret algebraisk. De foreslår å tegne streker isteden, fordi det kan være sirklene det er noe galt med. Elevene stopper opp i dette steget og kommer ikke videre.
Lærer foreslår at de skal tenke at hver person er 2 meter høye. Da protesterer jentene fordi ingen mennesker er så høye, i hvert fall ikke så mange som pyramiden krever.	*(V-1)* Læreren forsøker å stille spørsmål som skal få dem til å gjøre en utregning med enklere tall, men de synes ikke forslaget på antakelsen er realistisk nok. Her viser de at de vurderer godt hva som kan være mulig i virkeligheten og ikke. Det kan virke som både elever og lærer er fornøyde med denne løsningen på problemet, selv om de ikke har funnet svaret på spørsmålet om hvor mange mennesker som trengs for å lage en pyramide.

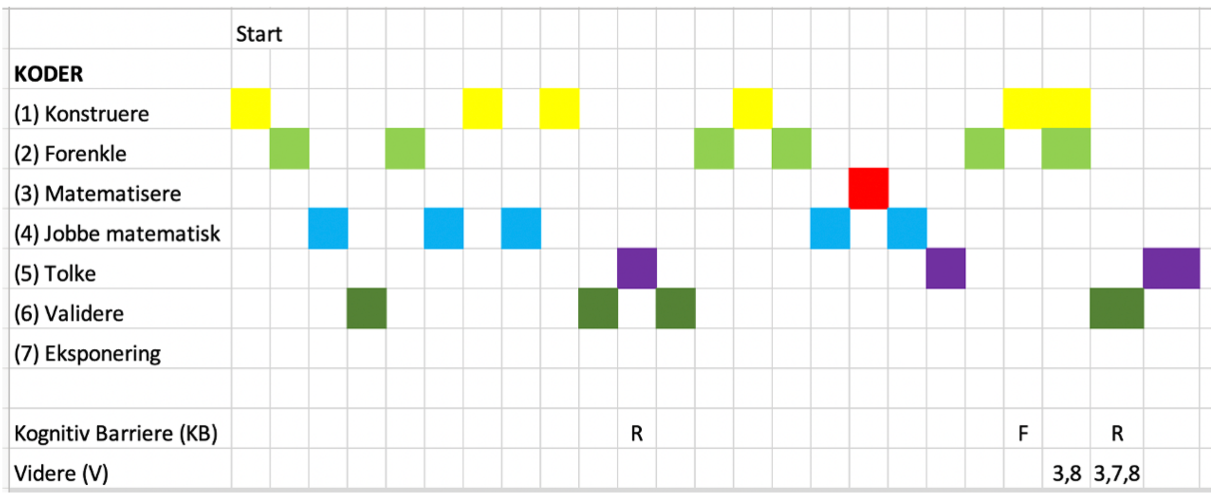
Elevene kommer ikke noe videre i sin løsning på problemet. De har funnet ut at det er 19 mennesker oppå hverandre, altså 19 rader med mennesker. Men de finner ikke ut hvor mange mennesker som trengs til sammen for å lage en pyramide som er 12 meter høy. De lager en konstruksjon på en tegning som ikke er lik noen av de på bildet. Dette kunne i utgangspunktet gå, men som de sier selv*; det går ikke i virkeligheten for den er altfor ustabil. Elevene* virker til slutt trøtt og lei fordi de har brukt mye krefter på å tegne en modell som de skjønner ikke er god nok, men som de likevel ikke forstår hvorfor ikke fungerer for å finne en løsning.

I oppsummeringen i klasserommet får læreren fram flere ulike svar på hvor mange rader eller mennesker som må være oppover for å få 12 meters høyde. Ut fra antakelsen om gjennomsnittshøyde når man står på alle fire, finner elevene svar med små variasjoner fra 18 til 21. Læreren tegner på tavla pyramider med 19 eller 21 mennesker i høyden. Det blir ikke kommentert om de skal stå oppå hverandre en og en eller lage et mønster som den første pyramiden på bildet. Jentene har tidligere kommentert at dette må bli en ustabil konstruksjon siden det er så mange mennesker som skal stå oppå hverandre. Læreren avslutter med å be elevene snakke sammen om hvilken av de to pyramidene på bildet de tror det trengs flest mennesker til for å bygge. Dette blir ikke diskutert noe mer i plenum. Mange spørsmål henger i lufta og elevene er trøtte og føler seg ferdig med oppgaven.

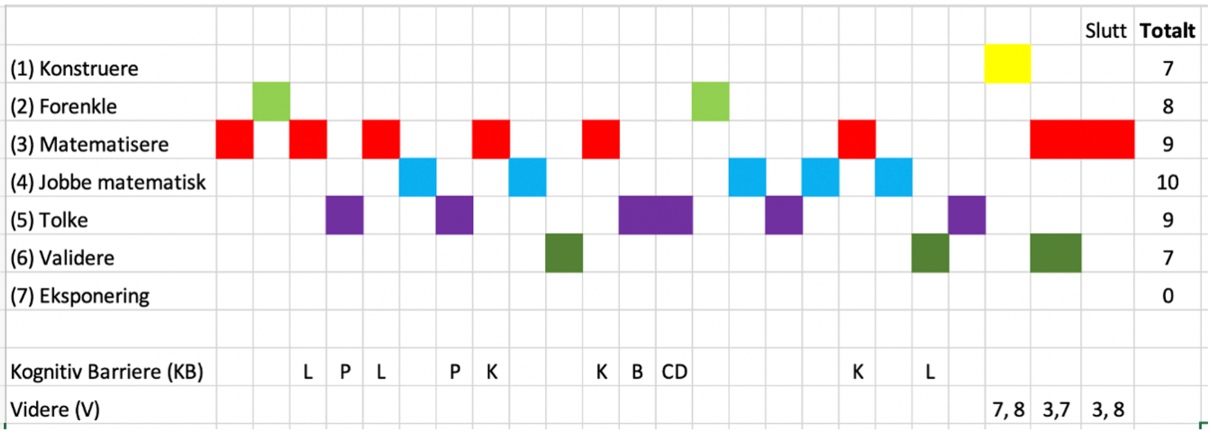
4.1.2 Gruppe 2

Gruppe to består av tre gutter: G1, G2 og G3. De er relativt glade i matematikk, jobber godt sammen, men har en annen gruppedynamikk enn jentene. G1 er lavmælt og tenker mer enn han prater. G2 styrer gruppa, snakker mye og virker som om han er komfortabel i den rollen. Han tenker som regel at det er han som har oversikten og kommer med de riktige svarene. G3 sier ikke så mye, men tenker for seg selv og kommer med noen innspill innimellom når han synes de andre kommer til kort. Han lar imidlertid de andre snakke mest. Han strever en del med å holde fokus, og er den som lar seg distrahere litt av at det står et kamera foran dem.

Tabell 4-3 viser en oversikt over hvilke steg i modelleringssyklusen guttene er innom når de modellerer. Tabellen er delt i to fordi de var innom så mange steg at tabellen ble for lang og måtte deles i to. Ved å følge stegene som guttene tar i MS, kan en følge deres modelleringsprosess. Jeg vil gå nærmere inn på hva de gjør i hvert steg i tabell 4-4.



	Start																							
KODER																								
(1) Konstruere																								
(2) Forenkle																								
(3) Matematisere																								
(4) Jobbe matematisk																								
(5) Tolke																								
(6) Validere																								
(7) Eksponering																								
Kognitiv Barriere (KB)											R									F		R		
Videre (V)																					3,8	3,7,8		



Tabell 4-3 Oversikt over guttenes modelleringsrute når de løser oppgave 1 (Pyramideoppgaven).

Elevene jobber (4) jobber matematisk flest ganger. Mot slutten av prosessen (3) matematiserer de og møter her kognitive barrierer (KB) flest ganger. De møter også noen kognitive barrierer når de tolker. De strever med å lage en modell som stemmer med virkeligheten, og finner til slutt et riktig mønster. Likevel beskriver de ikke hvordan den egentlige pyramiden er bygget opp, hvordan menneskene står oppå hverandre. De løser kognitive barrierer (V) flest ganger ved å jobbe sammen og finne løsning på problemet selv. Tabell 4-4 går dypere inn i utvalgte sekvenser av modelleringen som gruppa hadde og forsøker å gi en grundigere oversikt over guttenes modelleringsprosess og hvor de fikk problemer. Tabellen er noe kortere og har kun et utvalg av sekvenser i forhold til oversiktstabellen (Tabell 4-3).

Tabell 4-4 Beskrivelse av modelleringsprosessen i oppgave 1 - Pyramideoppgave. Guttegruppe, G1, G2 og G3.

Beskrivelse av modelleringsprosessen:	**Koder og tolkning:**
G1 sier med en gang at det er lett å regne ut.	*(1) Konstruere.* Han har allerede konstruert et bilde av oppgaven i hodet, og er klar for å måle det som trengs for å løse oppgaven.
Elevene definerer at en av de kan være et gjennomsnittsmenneske. G1 står på alle fire og viser hvordan han kan måle høyden. De måler og runder av til 70 cm for at det skal være lett å regne med.	*(2) Forenkle.* Elevene gjør noen valg her, og en antakelse om at et gjennomsnittsmenneske er ca. 70 cm høy på alle fire.
Leter etter hvor mange 70 cm oppå hverandre som gir 12 meter. Prøver med 7 ganger 20. Ser at det blir 14 som er for høyt. Justerer antakelsen om høyde til 60	*(4) Matematisere.* Bruker gjentatt addisjon i stedet for divisjon her. Tenker først 20 ganger. *(6) Validere*. Vurderer det resultatet de får og tenker at det blir et

for å få det til å passe inn, at det skal være lett å gange opp til 1200.	for høyt tårn. *(2) Forenkle.* De justerer antakelsen om høyde ned til 60 cm for å få det til å passe med 20 mennesker i høyden slik at det skal bli 12 meter.
Dobbeltsjekker med kalkulator om det kan stemme at 20 ganger 60 er 1200.	*(4) Jobber matematisk.* Tenker en del for å være sikker på at det er 1200 cm i 12 meter.
Føler seg ferdig med den første pyramiden, og hopper til den andre på bildet. Diskuterer hvordan de forstår figuren, hvor mange mennesker de trenger. Kommer fort til at det er vanskelig å se hvordan den er bygd opp, og vil heller jobbe med pyramide 1.	*(1) Konstruere.* Prøver å danne seg et bilde av hvordan denne pyramiden er bygd opp og hva det egentlig spørres etter. *(6) Validere*. Vurderer resultatet fra forrige pyramide, og finner ut at det ikke passer inn her. De må gjøre en ny antakelse om høyde. Finner det for vanskelig, og går til pyramide 1.
G1: Vi må jo bare regne hvor mange mennesker vi trenger for å lage en sånn pyramide … (...) *G1: Men den der, det var 20 mennesker man trengte ...? (Peker på pyramide 1)*	*(1) Konstruere*. Lager et mentalt bilde av hva oppgaven egentlig handler om. *(6) Validere. (KB-R)* G1 tenker at man trengte 20 personer i pyramide 1.
G2: Men hakke vi ...vi har jo regnet ut helt feil. (ler). Her står det (ser på oppgaven) 4 her står det 3 her står det 2 (Peker på hver rad på pyramide 1) *G1: Ja, det er 12 sånne (viser med hendene oppover)* *G3: Ja, vi tenkte hvor mange oppover* *G2: Ja, vi har ikke gjort oppgaven ferdig.*	*(V-3, 7 og 8)* Her går det opp for G2 at de har tenkt feil på løsning av pyramide 1. *(6) Validere.* Her går det opp for alle at de ikke er ferdig med oppgaven, at de ikke har funnet ut hvor mange til sammen som trengs for å lage pyramiden. Et slags vendepunkt i prosessen.
Guttene forsøker å finne en matematisk modell for å beskrive pyramide 1 slik at de kan finne ut hvor mange mennesker som trengs til sammen for bygge pyramiden. De har allerede funnet ut at det trengs 20 personer (rader) oppover.	*(3) Matematisere*. De finner først et system der det minker med 1 for hver rad oppover. De sliter med å forstå hvordan figuren utvikler seg. *(KB-K)*
G2 har hørt at i slike pyramider er det like mange oppover som til siden nederst. Han vil gjerne tegne opp og bevise dette. G1 ser på figuren på bildet og finner at det er fire bortover og bare tre opp. Han regner ut at den på bildet må være 2,40 m høy og at de må ha fire sånne.	*(3) Matematisere*. Elevene er godt på vei her til å beskrive en modell av pyramiden som er riktig. De tenker alle at de må finne ut først hvor mange mennesker det skal være på bunnen, og så trekke fra en på hver rad oppover. *(3) Matematisere (KB-L).* G2 finner ut at de kan ha fire av den trekanten som det

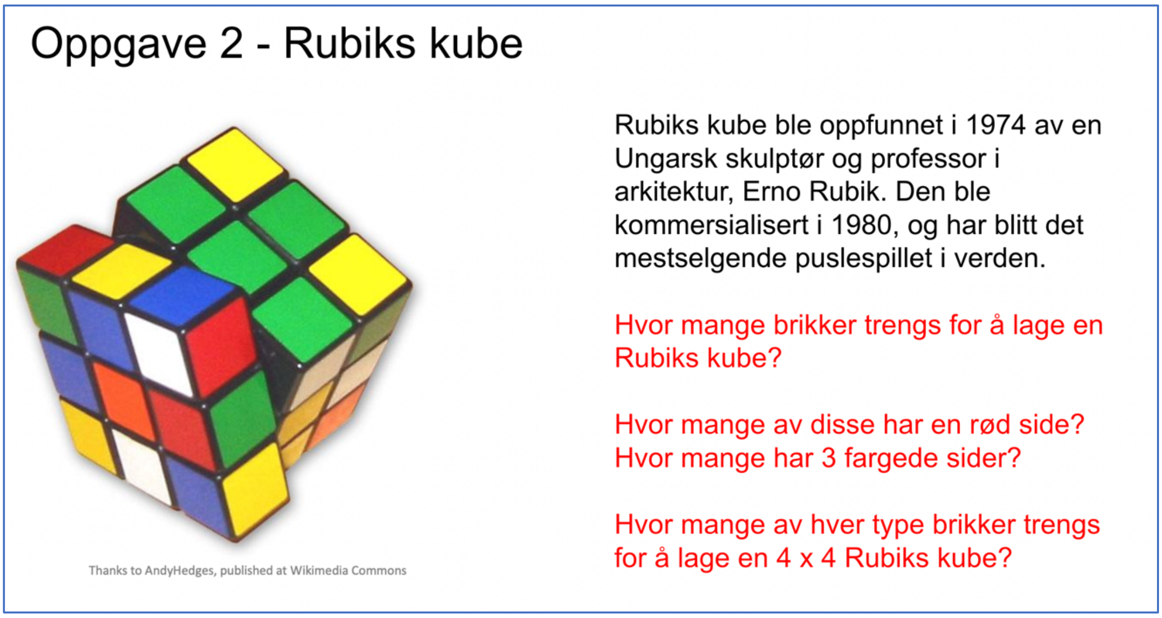
G3 våkner litt og sier de bør prøve en figur med 5 bortover for å se hvor mange det blir. Elevene jobber med hver sin teori, og sliter med å forstå hverandre. Tiden går og de blir litt frustrerte.	er bilde av oppå hverandre for å få 12 meter. Men det blir ikke en pyramide. *(KB-B, C, D, P)* De tror de har gjort feil, og er frustrerte fordi de ikke forstår hvordan de andre tenker.
G2 kikker en siste gang på oppgaven og finner ut at de står med en fot på hver av de under. G1 finner at det er minus én hver gang. Og at det må være 20 nederst hvis det skal være 20 rader oppover.	*(1) Konstruere* og *(6) Validere.* Elevene ser hele bilder av oppgaven. *(3) Matematisere*. De lager endelig en riktig modell og forstår hverandres tankegang. *(V3, 7 og 8)*

Som jentene, finner gruppa ut etter hvert hvor mange mennesker som skal til i høyden for å lage et 12 meter høyt tårn. Men de strever mye for å finne ut hva dette tallet betyr for pyramiden og antall mennesker. Elevene jobber godt og lenge i prosessen med å lage en matematisk modell. Selv om de misforstår hverandre og blir frustrerte, gir de ikke opp og kommer til slutt i mål med å beskrive en modell som stemmer med den virkelige modellen. Dette gjør de ved å tenke høyt og jobbe sammen. Noen elevers utsagn og frustrasjon er forløsende for andres klarsyn på hva oppgaven egentlig spør etter eller hvordan modellen kan beskrives. Gruppa får ikke presentert den fullverdige matematiske modellen i klassen. Måten menneskene står oppå hverandre i pyramiden blir aldri tegnet eller diskutert felles i klassen.

4.2 Fremstilling av resultater for oppgave 2 – Rubiks kube

Denne økta er det andre gang elevene møter en modelleringsoppgave. Det er en uke siden de jobbet med pyramide-oppgaven. Rubiks kube ble valgt som nummer to fordi den er mer teknisk og har flere konkrete spørsmål enn den første. Det kan være kort vei i denne oppgaven fra virkelighet til modell og en modell kan være til stor hjelp for å telle på større kuber enn den på tegningen. I denne oppgaven vil det kanskje være mer naturlig for elevene å lage en modell eller tegne et mønster, altså finne et system i stedet for å telle manuelt. Noen elever fikk låne terninger i denne oppgaven for å lettere kunne se for seg hvordan den ser ut i virkeligheten, hvor mange sider en slik kube har og hvordan de ulike terningene i kuben vil se ut hvis en demonterer en slik kube. Flere av elevene hadde vanskeligheter med å forstille seg kuben i 3D bare ut fra tegningen.

Denne dagen var en av jentene, J1, borte fra skolen slik at J2 jobbet med G2 (gruppe 1) og G1 og G3 samarbeidet (gruppe 2). Først vises resultatene for gruppe 1, og så gruppe 2. Lærer introduserte først oppgaven til klassen og elevene fikk litt tid for seg selv før de satte seg sammen to og to.



Etter kort tid brøt læreren av med en oppsummering av hvor mange brikker som trengs for å lage en Rubiks kube. Da var begge gruppene midt inne i resonnementene sine. Lærer oppsummerte også de to andre spørsmålene ganske raskt før guttegruppa var ferdig. Da klassen ble bedt om å jobbe med andre ting, valgte jeg derfor å ta gruppe 2 ut for at de skulle få fullføre resonnementene sine. Dette er grunnen til at det er det to tabeller med oversikt over modelleringsprosesser på gruppe 2.

4.2.1 Gruppe 1 (J2 og G2)

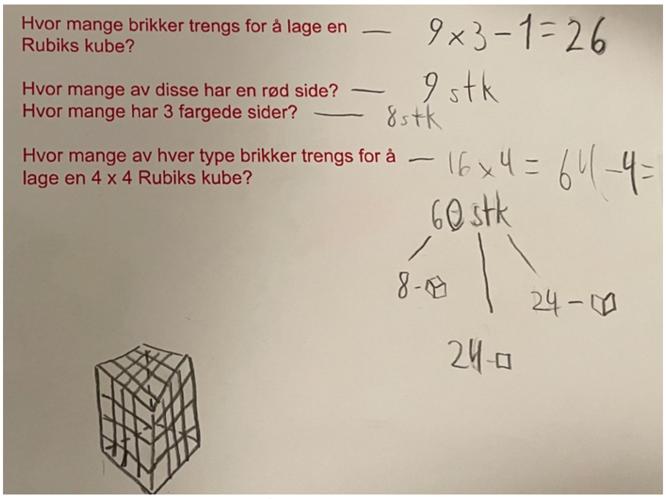
Tabell 4-5 viser modelleringsprosessen til gruppe 1 mens de jobbet i klasserommet.

KODER									Totalt
(1) Konstruere									3
(2) Forenkle									0
(3) Matematisere									4
(4) Jobbe matematisk									1
(5) Tolke									0
(6) Validere									0
(7) Eksponering									0
Kognitiv Barriere (KB)							D		
Videre (V)								7	

Tabell 4-5 Oversikt over modelleringsprosessen til Gruppe 1 oppgave 2 - Rubiks kube.

Tabell 4-5 viser at gruppa går rett på å konstruere en matematisk modell. De finner også fort ut at det er 9 brikker med rødt merke på. Så bruker de modellen til å finne hvor mange brikker det er i en 4 x 4 kube, men ser at dette ikke stemmer helt. De leser oppgaven flere ganger for å være sikker på at de har forstått den riktig, så forsøker de å konstruere en riktig modell. De går videre til hvor mange brikker det er av hver type og leser oppgaven noen ganger for å finne ut hva hver type betyr. Så forsøker de å beskrive hvordan en modell av 4 x 4 Rubiks vil se ut. Ved å bruke samme modell som i 3 x 3 kube får de først 63, så justerer de til 60. Tabell 4-6 under viser utvalgte sekvenser fra modelleringsprosessen til gruppe 2.

Beskrivelse av modelleringsprosessen:	**Koder og tolkning:**
G2: Ehhh ... jeg tenkte 9 ganger 3, at vi liksom har etasjer på 9 siden det er tre etasjer på kuben ... Minus den ene i midten ... siden det er jo ingenting i midten. *J2: Jeg tenkte sånn ... det er sikkert helt feil ...at den forsvinner da, fordi de henger sammen ... (peker på den i midten)* *G2: Ja, det er jo ingen brikker som henger sammen med hverandre ... Hvis man tenker på det som hele blokker, liksom hele sider ... så er det en der og en der og 9 minus en i den midterste etasjen. Så da må man ha minus der. Men ... du bare telte eller ...? Det går an det og.*	*(3) Matematisering*. Elevene lager en matematisk modell for å beskrive hvor mange brikker det er i en kube. Begge elevene tenker, forteller og skriver at det må være 3 x 3 – 1 brikker i en vanlig Rubiks kube.
J2 skriver 16 x 4 – 1 og får 63	*(3) Matematisere og (4) Jobbe matematisk.* Bruker modellen til å regne ut et matematisk

G2 forklarer hvorfor han også tenker at det blir 63: *G2: Jeg tenkte litt det samme som det her ... At det er 9 ganger 3 minus 1. Ehmmm ... og på en 4 ganger 4 så er det 16 på hver etasje. Og så er det fire etasjer. Og så minus den ene i midten. Eller, nei ... minus de fire i midten.*  *Figur 4-3 G2 sine notater på oppgave 2*	resultat. Justerer modellen etter hvert, og får et nytt resultat. De rekker ikke å reflektere over hvordan den ser ut i midten for at det skal kunne gå an å vri på alle sidene før lærer bryter av.

Tabell 4-6 Utvalgte sekvenser i modelleringsprosessen for gruppe 1 (J2 og G2)

Gruppa rekker akkurat å lage en modell for 4 x 4 kube, men ikke å validere resultatet og tenke hvordan en slik kube er konstruert inni midten.

4.2.2 Gruppe 2 (G1 og G3)

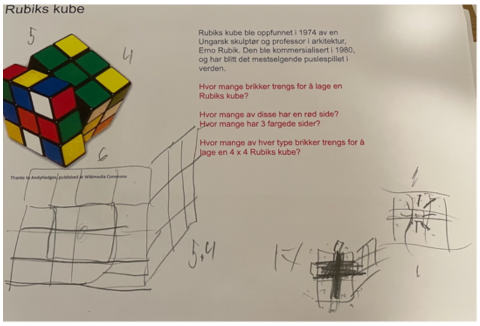
Tabell 4-7 viser modelleringsprosessen til guttene mens de jobbet i klasserommet.

KODER	Start										Slutt		**Totalt**
(1) Konstruere	■												1
(2) Forenkle													
(3) Matematisere		■		■		■		■		■		■		6
(4) Jobbe matematisk			■		■		■		■		■		■	6
(5) Tolke														
(6) Validere														
(7) Eksponering														
Kognitiv Barriere (KB)				L	N				L				L	
Videre (V)														

Tabell 4-7: Oversikt over modelleringsprosessen til gruppe 2, oppgave 2 – Rubiks kube.

Som tabellen viser veksler elevene mellom å jobbe matematisk og forsøke å konstruere en modell som kan gi svar på hvor mange brikker det er i en 4x4 Rubiks kube. Som vi ser av KB, strever de med å lage en riktig modell slik at antallet på brikkene blir riktig. Også når de fortsetter med prosessen ute med forsker, strever de med å lage en modell som tar hensyn til at noen brikker brukes på to sider i kuben samtidig. Den ene eleven har et par regnefeil underveis. Tabell 4-8 nedenfor viser utvalgte steg i modelleringsprosessen for gruppe 2, oppgave 2.

Beskrivelse av modelleringsprosessen:	**Koder og analyse:**
G1: Nå må vi bare tenke her: Hvor mange brikker trengs for å lage en Rubiks kube?	*(1) Konstruere.* Eleven har helt tydelig forstått hva oppgaven dreier seg om og de setter i gang med å telle.
Elevene diskuterer hvordan en Rubiks kube i prinsippet er bygget opp. Hvor mange lag og hvor mange brikker i hvert lag. De tenker 27 brikker til sammen. G1 tenker seg om og sier plutselig 26.	*(3) Matematisere* og *(4) Jobbe matematisk*. De prøver å finne et system for hvordan kuben er laget. Og de teller brikkene. G1 skjønner at han skal trekke fra en i midten, men rekker ikke forklare det før lærer bryter av med en oppsummering på spørsmål 1.
I oppsummeringen i klassen spør læreren hvordan de tenkte for å få 26 brikker. G1 svarer 3 x 3 – 1	*(3) Matematisere*. Eleven har laget en modell for denne typen kuber.
Etter oppsummeringen i klassen jobber elevene videre: G3 lurer på hvorfor det blir 26, han finner ikke det tallet noe sted i gangetabellen. G1 forklarer at det er fordi det går vekk en i midten.	*(3) Matematisere. (KB-L)* G3 har ikke helt skjønt modellen for kuben. Det virker ikke som han helt skjønner det etter forklaringen heller, for han virker fjerne og kikker uti lufta.
G1: 18 da (teller på tegningen). 17 av de er ikke rød *(...)* *G1: Jeg kan tegne, det blir litt lettere. Disse er fast røde. Så er det noen som har farger på de andre sidene. I hjørnene er det fire brikker som har to andre farger på de andre sidene. Gir det mening?* *G3: Nei ... (...)*	Her er spørsmålet hvor mange av de 26 brikkene som har en rød side. Og hvor mange som har tre fargede sider. Usikker på hva G1 mener her når han sier 18. Han forklarer eller skriver ikke noe. *(3) Matematisere*. Det kan virke som G1 definerer en rød brikke som den som er *fast rød*, fordi resten av dette resonnementet stemmer. G3 følger ikke resonnementet til G1.

 *Figur 4-4 Tegningen til G1 når han forklarer G3 hvor mange røde brikker det er. (Tegningen til høyre).*	Han konstruerer ikke på dette tidspunktet et mentalt bilde av modellen. *(KB – L)*
G3 spør etter en terning som han kan tegne etter. På dette tidspunktet virker begge guttene litt oppgitte. De har et opphold på 5 minutter der de tuller med andre og er ukonsentrerte. Lærer oppsummerer spørsmål 2, altså hvor mange brikker som har en rød side og hvor mange som har 3 fargede sider. Samtidig med oppsummeringen teller G3 på terningen og forsøker å løse oppgaven. *G3: (Visker mens lærer snakker) Er det ikke 24 da?* *G1: Hvordan kan det være 24?* *G3: Det kan være 24.* *G1: Nei, det kan ikke være 24!* *G3: (Viser på terningen, peker på en side om gangen.) To, fire, seks, åtte ... (Tenker seg om. Peker på nytt på hver side av terningen) Tre, seks, ni, tolv ...*	Det kan virke som eleven prøver å forstå hvordan terningen ser ut i 3D. *(3) Matematisere* og *(4) jobbe matematisk.* Eleven teller og forsøker å lage et bilde av systemet i brikkene, men klarer det ikke helt. Det er litt vanskelig å få tak i hvordan han tenker, men det virker ikke som han har funnet ut av systemet. *(KB-L)*
Lærer forklarer at når Rubiks kube er løst, er en hel side rød, hvit, gul osv. Derfor kan det være bare et rødt klistermerke på hver kloss. Hun ber elevene tenke på hvordan Rubiks kube blir med 4 ganger 4 klosser. *G3: Kan vi fortsette litt til? Vi kan bygge en Rubiks kube* *(...)* Læreren spør hvordan de tenker det blir i midten på en slik terning, men elevene får ikke nevneverdig tid til å reflektere eller diskutere dette. Seansen i klassen avsluttes, og elevene får beskjed om å gjøre noe annet.	Læreren har oppsummering på tavla og forklarer hvordan fargene henger sammen på kuben. G3 tenker tydeligvis på oppgaven fortsatt, og er gira på å lage en modell. Det er en del uro i klassen på dette tidspunktet, det kan være noe av grunnen til at lærer snakker mest selv og velger å avslutte seansen tidlig.

Tabell 4-8 Beskrivelse av modelleringsprosessen i oppgave 2 – Rubiks kube til gruppe 2, som på grunn av fravær denne dagen kun består av G1 og G2

Jeg tar elevene med inn på naborommet for at de skal få fortsette sine resonnement her. Jeg er klar over at dette blir en mer kunstig situasjon, og at jeg som forsker blir et mer forstyrrende element enn i klasserommet. Likevel så jeg det som interessant å høre hvordan de ville løst denne oppgaven og G3 er tydelig inne i en grublemodus. Det er en fare for at jeg leder an deres tankegang, og slik vil dette ikke være deres naturlige modelleringsprosess. Dette er diskutert i seksjon 3.7, 3.8 og 3.9. Jeg vil også komme tilbake til dette i kapittel 5. Tabell 4-9 viser modelleringsprosessen til gruppe 2 når de forklarer forsker hvordan de tenker.

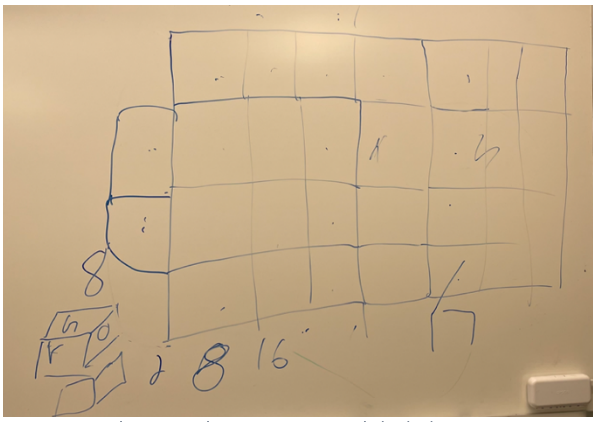
Ute med forsker:														**Totalt**
KODER	Start							Slutt						
(1) Konstruere														1
(2) Forenkle														
(3) Matematisere														4
(4) Jobbe matematisk														2
(5) Tolke														
(6) Validere														
(7) Eksponering														
Kognitiv Barriere (KB)			N	L		L								
Videre (V)														

Tabell 4-9 G1 og G3 fortsetter modelleringsprosessen ute av klassen sammen med forsker.

Guttene bruker mest tid på (3) matematisere, forsøke å konstruere en modell (tegner og forklarer) for hvordan en 4 x 4 Rubiks kube ser ut, altså det tredje og siste spørsmålet i oppgaven. De regner litt feil og glemmer å ta hensyn til at noen brikker brukes på to sider samtidig. De kommer aldri helt i mål med en modell som stemmer med virkeligheten.

Tabell 4-10 Forklaring på utvalgte seanser oppgave 2 - Rubiks kube for gruppe 2 ute med forsker etter oppgaveløsning i klassen.

Beskrivelse av modelleringsprosessen:	**Kode og analyse:**
Forsker: Vil dere fortelle hvordan dere tenkte på de ulike spørsmålene? *G1: Ja, skal vi starte på det første da? Den første tenkte vi egentlig bare at de to ytterste lagene var 9 og den i midten var 8. Og så den røde siden, da tok vi bare den ene siden i et kryss, at det var 5 røde i midten på en måte.*	Jeg forsøkte å styre de så lite som mulig, men stilte spørsmål for å få de inn på det samme sporet som de var i klasserommet. Det er en fare her likevel for at de svarer og tenker at de skal stå til rette for meg. Så dette blir en helt

G3: Den siste fikk vi ikke egentlig begynt på. *G1 Den må vi vel egentlig bare legge en ekstra på hver side.* *Forsker: Vil dere tegne og snakke høyt om hvordan dere tenker?*	annen setting enn i klasserommet der de jobber for seg selv.
G3 leser oppgaven.	*(1) Konstruere.* Frisker opp hva som var spørsmålet.
Guttene tegner modell av kuben på tavla. De regner hvor mange av hver type brikke de trenger i kuben. De tenker at de trenger 8 hjørnebrikker med 3 sider. De med to sider diskuterer de slik: *G1: Og av den andre typen, den med to blir det … (teller på figuren på hver kant) åtte på hver side gange seks. Det blir … Kan du åttegangen? (Ser på G3)* *G3: 49 … 48 …* *G1: 32 …* *G3: Du sa 32 siden det er 8 pluss 32, det er 40 …* *G1: Ja … 40 da. Tror jeg … jeg vet ikke jeg …*	*(3) Matematisere. (KB-L)* I starten diskuterer de hvordan figuren ser ut, at det er 8 på hver side ganger 6. Glemmer de at noen brikker på denne måten blir talt to ganger fordi to sider har felles kanter? *(4) Jobbe matematisk.* De bruker litt tid på å finne ut hvor mye 6 x 8 er og regner feil. *(KB-N)*
G1: De som er på sidene har to farger. Vi må finne ut hvor mange det er, det er to på hver side. *G3: (…)Hvis vi teller alle på bunnen og bare ganger de..* *G1: Jaaa. Da må vi legge på tre oppover, da har vi liksom hele. Du har 16 sånne med to sider. Og 8 sånne med 3 sider.* *(Guttene tegner først på tavla, og så bygger de med terninger mens de snakker.)*  *Figur 4-5 Elevenes skisse av 4 x 4 Rubiks kube*	*(4) jobber matematisk og (3) matematiserer. (KB-L)* Guttene bygger en modell for å telle og  kommer fram til 16 terninger med to sider. Mulig de glemmer toppen på kuben, som er vanskelig å bygge. *Figur 4-6 Elevenes modell av 4 x 4 Rubiks kube.*

4.3 Fremstilling av resultater for oppgave 3 – Kaffeavtale

Denne økta er det tredje gang elevene møter en modelleringsoppgave. Tanken er at oppgaven er lett for elevene å forstå og relatere til sitt hverdagsliv. Denne gangen snakket lærer litt om modellering først for å bevisstgjøre elevene på hva de gjør og hvilke steg som er naturlige å ta når en modellerer. Hun brukte kognitiv aktivering og presenterte DISUM Solution Plan (se avsnitt 2-33) og fokuserte på fire steg: forstå oppgaven – lage en modell – bruke matematikk – forklare resultatene.

Oppgave 3 - Kaffeavtaler

Siri er glad i kaffe. Ulike bensinstasjoner tilbyr kaffeavtaler.

Undersøk hvilken kaffeavtale som er den beste for henne.

Lag forslag til en kaffeavtale som passer til deg og din favorittkafè.

I denne oppgaven er det snakk om å anbefale læreren hvilken kaffeavtale hun burde velge. Gruppene brukte mye tid på å google opplysninger om hvilken rute læreren kjører til jobb, hvor hun bor og hvilke bensinstasjoner og kafeer som er i nærheten av kjøreruta. I dette arbeidet ble alle opphengt i mange små detaljer og lærer valgte bryte av underveis for å få elevene videre i modelleringsprosessen. Det er tydelig ut fra kroppsspråk og uttalelser at begge gruppene går lei og mister litt gløden underveis fordi de bruker mer tid på mindre konkrete ting. De lurer på hvorfor de må gjøre dette og hvorfor hun ikke bare kan finne ut av det selv. En elev sier: *Du kan jo bare lage kaffen hjemme!* Selv om oppgaven også ber de finne en avtale som passer dem selv best, så går mange lei før de kommer så langt.

4.3.1 Gruppe 1 (J1 og J2)

Tabell 4-11 viser modelleringsprosessen til gruppe 1 når de løser oppgave 3. De bruker digitale verktøy gjennom hele oppgaven for å finne kjøreruten til læreren og hvilke bensinstasjoner som ligger langs veien. De bruker også google til å finne ut hva kaffe koster og hva som følger med de ulike typer kaffeavtaler.

KODER	Start									Slutt	**Totalt**
(1) Konstruere											
(2) Forenkle											6
(3) Matematisere											0
(4) Jobbe matematisk											1
(5) Tolke											0
(6) Validere											1
(7) Eksponering											2
Kognitiv Barriere (KB)		B		C							
Videre (V)						8					

Tabell 4-11 Gruppe 1 sin modelleringsprosess når de løser oppgave 3 – Kaffeavtalen

I denne oppgaven vekslet elevene mellom å jobbe selv og å diskutere i hel klasse. De er innom mange antakelser før de lander på noen konkrete. Etter kort matematisk jobbing foreslår de en løsning. Tabell 4-12 viser utvalgte sekvenser i modelleringsprosessen til gruppe 1.

Tabell 4-12 Utvalgte sekvenser fra modelleringsprosessen til gruppe 1, oppgave 3. vises med transkripsjon og kort forklaring.

Steg i modelleringsprosessen:	**Koder og analyse:**
J1: Du må tenke mer økonomisk, du kan ikke drikke kaffe hver dag. (...) *J2: Men koster ikke en kopp kaffe 20 kroner sånn cirka? (...) Vi sier 15 da. (...)*	*(2) Forenkle.* Elevene gjør noen antakelser etter at de har googlet mange opplysninger.
J1: Da må hun kjøpe ... hva er 15 ganger 10 ... cirka 20 kopper kaffe. Eller 16, vi sier 16 ... eller 17 da. 17 kopper kaffe for samme pris som kaffeavtalen.	(4) Jobbe matematisk. Dette er den eneste matematiske jobbingen de gjør i denne oppgaven.
J1: Vi antar at hun drikker en ekstra stor kopp kaffe hver morgen. (...)	*(2) Forenkle.*
J1: Okei ... (gjesper) ... så hvor mange kopper kaffe må hun kjøpe? ... det vet vel ikke jeg! ... Jeg bryr meg ikke om det her sånn skikkelig ... (Ligger ut over bordet og ser lei seg ut)	*(KB – B, C)* Elevene går lei. På et ganske tidlig tidspunkt i

J2: Det er sikkert en oppgave som hun burde gjøre selv, men som hun ikke gidder å gjøre. *J1: Hvis du velger YX, så kan du kjøpe kaffe på to steder på vei til jobb. (...)* *J2: Du får gratis kaffe på skolen. (...)* *J2: Vi fant ut at hvis du drikker sånn 17 kaffe, så har du tatt igjen kaffeavtalen. Den koster 249.* *J1: Hvis du ikke har kaffeavtalen så kan du kjøpe sånn 17 kopper cirka. Skjønner du hva jeg mener? Men hvis du har kaffeavtalen, så kan du kjøpe en hver dag.*	prosessen. De føler ikke oppgaven angår dem. *(7) Eksponering.* Elevene presenterer løsninger i plenum. Det er også andre løsninger som kommer fram fra andre grupper.

4.3.2 Gruppe 2 (G1 og G3)

Tabell 4-13 viser modelleringsprosessen til gruppe 2. De hadde en veldig kort prosess og gikk lei fort. Mye av tiden brukte de på å søke på andre ting eller tulle med opplysningene de fant om kaffe og kopper på bensinstasjoner.

KODER											**Totalt**
(1) Konstruere											
(2) Forenkle											3
(3) Matematisere											
(4) Jobbe matematisk											
(5) Tolke											
(6) Validere											1
(7) Eksponering											2
Kognitiv Barriere (KB)			C								
Videre (V)											

Tabell 4-13 Modelleringsprosessen til gruppe 2 under løsning av oppgave 3 – kaffeavtalen

Steg i modelleringsprosessen:	**Kode og analyse:**
Etter noen google søk på ulike bensinstasjoner og læreren har vist på kartet hvor hun bor har de kontroll på noen av forutsetningene.	*(2) Forenkle.*
G3: Det er jo ikke vits at du blir med i YX kaffeavtale i 2021 *G1: Du må jo ikke ha en kaffeavtale.* (...)	*(6) Validere.* De utelukker noen løsninger fordi det ikke vil lønne seg.

De googler videre og finner veldig mange ulike valg. På et tidspunkt utbryter G3: *Jeg er lei av kaffe! (Legger hodet på pulten)*	*(KB- C)* Eleven er frustrert og tydelig lei av oppgaven.
Gruppa kommer med to løsninger: *G1: Jeg tror Esso er det beste stedet. Det koster bare 199. Det er rett ved der hun bor.* *(Til læreren) G3: Jeg anbefaler deg å vente til 2022.*	*(7) Eksponering.* Gruppa presenterer løsninger, men begrunner de ikke matematisk.

Tabell 4-14 Forklaring til utvalgte sekvenser i tabell 4-13.

4.4 Fremstilling av resultater for oppgave 4 – Julenissen

Dette er fjerde gang elevene møter en modelleringsoppgave. Denne oppgaven ville lærer gjerne prøve siden det var i desember.

Lærer starter med å lese oppgaven høyt. Det er noen spørsmål som kommer med en gang, det er et tydelig engasjement rundt julekvelden hos elevene. På dette tidspunktet er det bare to uker til juleferie. Jeg velger å ta med noen utsagn og spørsmål her som kommer i plenum, fordi de kan ha betydning for diskusjonen i kapittel 5. Det er tydelig at noen av elevene er litt tryggere i oppgaveformen på dette tidspunktet, de forstår med en gang at de må gjøre noen avgrensninger for å kunne løse oppgaven.

1: Men hvordan kan vi vite når kvelden starter og slutter?

2: Vi må gjøre noen antakelser..

3: Vi må bruke standardform hvis vi får et veldig stort tall!

4: Det er dumt med at vi åpner gavene 24.desember på kvelden, for da er vi jo der allerede. Vi ser jo at han kommer!

5: Det er jo noen ... i USA og sånn, de pleier å være på mårran. Og da er det jo dritlett for julenissen og bare tjop-tjop løpe ned pipa og ... (Latter fra klassen, mange vil si noe)
6: Han sier at nissen kommer på julaften når vi sitter der, men han kommer jo på lille julaften for når vi våkner på julaften er det jo masse gaver der.

4.4.1 Gruppe 1 (J1 og J2)

Denne gangen blir det noe teknisk feil med halve opptaket til jentene. Det er mulig en av de andre elevene har kommet borti en av knappene på kameraet. Jeg velger likevel å ta med starten av oppgaven fordi det viser interessante funn.

KODER	start									slutt	**Totalt**
(1) Konstruere											
(2) Forenkle											2
(3) Matematisere											2
(4) Jobbe matematisk											
(5) Tolke											2
(6) Validere											1
(7) Eksponering											
Kognitiv Barriere (KB)					N	P					
Videre (V)							3				

Tabell 4-15 Oversikt over starten av modelleringsprosessen til gruppe 1 (J1 og J2)

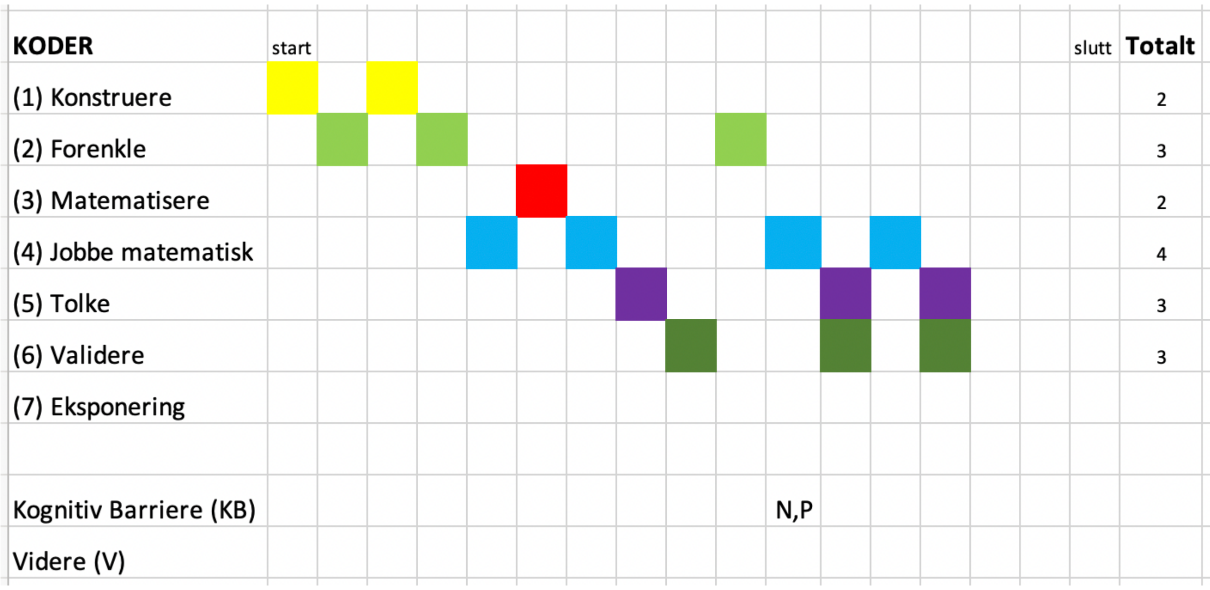
Steg i modelleringsprosessen:	**Koder og analyse:**
Elevene søker opp hvor mange barn det er i verden. Finner at det er 21 millioner. Justerer det senere til 30 millioner	*(2) Forenkle.*
J2: Vi må ta 60 ganger 6. Finner ut hvor mange minutter julenissen har. *J2: (..) Hvordan kan han nå sånn 3 millioner barn? Han må ha sånn 3-5 sekunder på hver da...*	*(2) Forenkle og (4) jobber matematisk.* Har antatt at julekvelden er 6 timer. *(6) Validerer.* Før de har regnet ut et konkret resultat vurderer de at dette er vanskelig å få til i praksis.
J2: Hvor mange nuller er det i 33 millioner? Er det syv? *J1: Seks. Seks nuller.* *J2: Det blir 1527,777*	*(4) Jobbe matematisk. (KB-N)* Vet ikke helt hvor stort tallet er. Blir justert av en på gruppa. Av svaret ser vi

	at elevene har regnet hvor mange sekunder det er i 6 timer. De har delt 33 millioner barn på 21600 sek.
J1: Men hvordan kan det bli så mange sekunder? Er det 15 sekunder? Skal vi bare si at det er 15 sekunder? *J2: Nei ... det er jo barn ...*	*(5) Tolke. (KB-P)* Eleven vet ikke helt hva hun har regnet ut. Får det justert av J2 (V-3) men fortsatt er det uklart om de skjønner at hele tallet er antall barn per sekund.

Tabell 4-16 Utdyper steg i starten av modelleringsprosessen for gruppe 1, oppgave 4.

Vi får aldri vite hvordan de løste dette, men kan ut fra transkripsjonen se at de strever med å sette ord på hva de har regnet ut etter at de har jobbet med tall.

4.4.2 Gruppe 2 (G2 og G3)



Tabell 4-17 Modelleringsprosessen til gruppe 2 (G2 og G3) i oppgave 4 - Julenissen.

Her er det viktig å kommentere at gruppa ikke rakk å presentere resultatet fordi lærer avbrøt for oppsummering i klassen. I plenum legger gruppa fram sitt svar i klassen, og slik kan vi si at de også er innom (7) eksponering til slutt i prosessen. Vi ser av tabellen at her begynner guttene å få en god prosess når de modellerer. De har få kognitive barrierer og går nye runder med forenkling og jobber matematisk etter å ha validert resultater de får. Jeg vil diskutere i seksjon 5 om dette skyldes oppgaven eller progresjon, en kombinasjon eller andre ting. Tabell 4-18 utdyper stegene gruppe 2 tar i prosessen med å løse oppgave 4.

Tabell 4-18 Forklaring på utvalgte steg i modelleringsprosessen til gruppe 2, oppgave 4 - Julenissen.

Steg i modelleringsprosessen:	**Koder og analyse:**
Leser oppgaven og finner ut at de mangler noen opplysninger.	*(1) Konstruere.* Ser at de trenger antakelser for å løse oppgaven.
Diskuterer en antakelse: *G2: Vi må bare anta hvor mange barn det er ... (...)* *G3: Men da sier vi at det er 33 millioner da...* *G2: Kan det være så lite?* *G3: Men det var i 2018* *G2: Blir det flere av oss ...? ja..* *G3: Men det er jo ikke sånn at noen barn forsvinner ...* *G2: Jo, men noen barn blir voksne, og da tells de ikke som barn lenger. (...)* *G3: Ja, men hvis en av disse var 4 år i 2018, så er de ikke 18 år nå!* *G2: Neeei, men de som er 17 ...* *G3: Ja, men det er kanskje en million av dem..* *G2: Ikke en million.* *G3: En halv da...* *G2: Kan vi ikke bare si 30 millioner for det er lettere tall å regne med?*	*(2) Forenkle.* Guttene har en interessant diskusjon om hvordan antall barn i verden utvikler seg. De lander likevel på et antall som er lett å regne med. Selv om guttene bruker litt tid på denne antakelsen, er det samme antakelse de diskuterer, og den er derfor markert med en rute i tabell 4-17.
G2: (leser på oppgaven) Hvor mange sekunder per barn.	*(1) Konstruere.* Ser at de trenger å definere hvor lang julekvelden er.
De har en god diskusjon når barn legger seg lille julaften og når de står opp på julaften. De lander på at natten er 10 timer for det er lett å regne med.	*(2) Forenkle.*
De lager en modell der de vil dele antall barn på antall sekunder.	*(3) Matematisere.*
Regner ut hvor mange sekunder det er i 10 timer. *G2: 3600. Så tar du 3600 ganger 10 ... det er en time ... det er 36000 … Det er ganske lett! Det er ikke så vanskelig regnestykke. Altså 36000 sekunder. Hvis vi har regna feil, så går det fint …de forventer ikke så mye av oss … (begge ler)* *G3: Men ... 36 000 timer? (...)* *G3: Hvor mange nuller er det i millioner? Er det syv?*	*(4) Jobbe matematisk.* G2 synes dette er et lett regnestykke. Men G3 henger ikke helt med på hva tallene står for, og er ikke helt sikker på nuller i millioner. (KB-P).

G3: *Da må du være 10 millisekunder hos et barn, og så må du være rett etterpå hos et annet barn..(Begge ler) Du kan jo ikke bruke tid på å gå opp av pipa også da..* G2: Det blir jo veldig lite.. G3: Jeg tror barna må ha mer enn 10 timers søvn.. (ler)	*(6) Validerer.* Tenker at natten må være litt lengre. *(2) Forenkle.*
G2: *Det blir 36 000 delt på 30 millioner. (...) Hvis han ikke bruker noe tid på å komme seg fra sted til sted, men bare er med ungene, så bruker han 0,012. (...) Hvis han skal bruke halvparten av tiden på å komme seg fra sted til sted, så blir det 0,06.*	*(4) Jobbe matematisk.* Tolker og vurderer resultatet og justerer i forhold til virkeligheten. Det er tydelig at de forstår hva dette betyr, men uttaler ikke benevning på tallene. De har funnet antall sekunder per barn.
Elevene får presentert sin løsning i plenum i klassen under oppsummering.	*(7) Eksponering.*

Elevene tar ikke hensyn til eller diskuterer tidssoner, men velger å ta utgangspunkt i barn som feirer jul som vi gjør i Norge. I starten synes de det er litt stress å måtte finne opplysninger selv, men det setter i gang interessante diskusjoner og de blir engasjerte etter hvert.

4.5 Framstilling av resultater for oppgave 5 – Steinheller mellom hytte og utedo

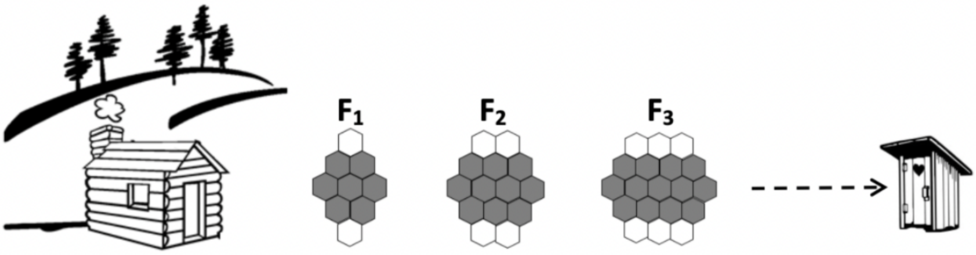
Dette er femte, og siste oppgave elevene jobber med i min studie. Det er fire uker siden sist oppgave fordi det har vært juleferie. Denne oppgaven var ikke med i min opprinnelige plan, men det er flere grunner til at jeg valgte å ta med denne oppgaven. Jeg fikk færre resultater for oppgave 4 enn jeg planla på grunn av tekniske problemer med ett av kameraopptakene. Etter å ha studert resultatene for de andre fire oppgavene, ønsket jeg å prøve en oppgave som var så konkret som mulig, men som samtidig fylte kriteriene for å være en modelleringsoppgave (se seksjon 3.4) Elevene hadde også nettopp startet med figurtall og hadde bedre forutsetninger enn før til å lage en modell. Denne oppgaven styrer elevene en del, og i starten kan den tenkes å være en problemløsningsoppgave. Men etter hvert (oppgave 5 d) må de gjøre antakelser for å løse oppgaven. Læreren ønsket sterkt å bruke en oppgave som passet til det emnet de holdt på med, det var en viktig grunn til å velge denne oppgaven. Jeg presenterer først oppgaven, så kommer modelleringsrutene til gruppe 1 og 2 med forklaringer til.

OPPGAVE 5:

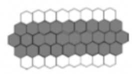
Steinheller mellom hytte og utedo

Espen har en hytte i Moltudal. Fra hytta til utedoen går det en sti, og han skal legge steinheller på denne stien. Noen av hellene er mørke og noen er lyse. Han begynner med å legge hellene i et mønster. Stien er like bred hele veien og følger en rett linje bort til utedoen. Se illustrasjon under.

F_1 viser hvor langt han har kommet etter én time. Etter to timer har han totalt lagt 14 heller, altså F_2. Helleleggingen fortsetter etter samme mønster og dekker hele stien fram til utedoen.



Etter ca åtte timer vil stien se omtrent slik ut:



a) Hvor mange heller består figurnr. 4 (F_4) av?
Tegn F_4 på eget ark. Se vedlegg siste side.

b) Beskriv utviklingen av mønsteret med ord.

c) Lag en modell (formel) for hvor mange steinheller Espen legger etter n timer.

d) Espen bruker 954 steinheller til hele stien fra hytta til utedoen. Hvor langt omtrent kan det være mellom hytta og utedoen?

4.5.1 Gruppe 1 (J1 og J2)

KODER	start																					slutt	Totalt
(1) Konstruere																							5
(2) Forenkle																							4
(3) Matematisere																							6
(4) Jobbe matematisk																							6
(5) Tolke																							3
(6) Validere																							
(7) Eksponering																							
Kognitiv Barriere (KB)	F	L										K	F,C		K	B	O						
Videre (V)	1					5						8		1, 5	8			8		8	1	8	

Tabell 4-19 Oversikt over modelleringsprosessen til gruppe 1 på oppgave 5 – steinheller

Vi ser av oversikten at jentene på gruppa har en fin flyt i arbeidet selv om de møter kognitive barrierer underveis. De løser de fleste opp selv ved å tenke og regne, og et par ganger spør de læreren. Den siste gangen J1 spør lærer om å få bekreftet at det hun har regnet er riktig, setter lærer i gang med å vise hvordan man regner ligning. Dette kommenteres ytterligere i kapittel 5, men er et klassisk eksempel på at læreren forklarer ut fra sin egen tankegang i stedet for å lytte til eleven og hennes løsningsmetode. Ellers er jentene flest ganger innom stegene (3) Matematisere og (4) jobbe matematisk. De veksler mellom å finne en modell og uttrykke denne ved hjelp av matematiske begreper, og å regne ut svar på det oppgaven spør om. I denne oppgaven er det stor forskjell på engasjement hos J1 og J2. I praksis er det J1 som løser oppgaven. J2 er ukonsentrert store deler av seansen.

Tabell 4-20 Oversikt over utvalgte seanser fra modelleringsprosessen til gruppe 1 oppgave 5 - Steinheller.

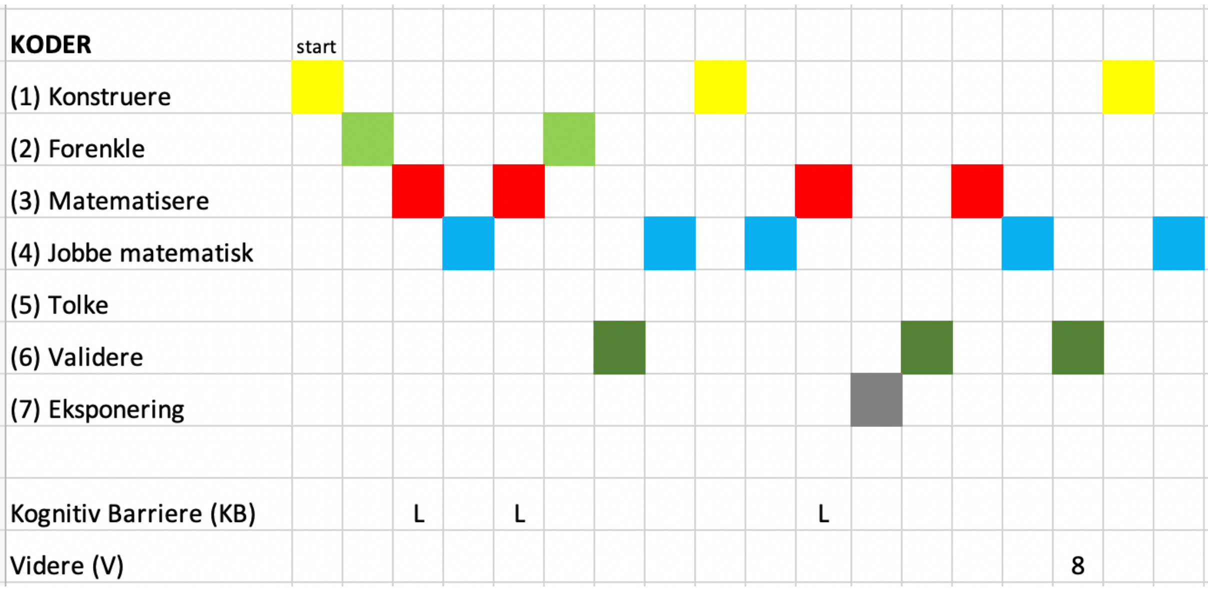
Utvalgte steg i modelleringssyklusen:	Kode og analyse:
Leser oppgaven og må få forklart hva en helle er.	*(1) Konstruere.* For å forstå oppgaven helt må J2 få forklart begrepet «heller».
Forklarer modellen med ord. J1 glemmer å ta hensyn til de lyse hellene. Justerer modellen og finner ut ved å få oversikt over informasjonen hvor mange heller som er i den neste figuren.	*(3) Matematisere.* Justerer antakelser (at de «tomme rutene er heller de også». *(4) jobber matematisk* for å få et svar.
Leser oppgaven igjen og lager en modell for figur n. Lager først en følgeformel, så en direkte formel.	*(1) konstruere og (3) Matematisere.* Forklarer systemet i formelen riktig, men uttrykker det feil først. *(KB-K)* Justerer dette. *(V-8)* Får bekreftelse av lærer. *(V-1)* Bruker notater fra tidligere timer til å se etter mønster *(V-5)* og lager en direkte formel med feil uttrykk. *(KB-K)* Justerer dette og uttrykker formelen riktig. *(V-8)*
J1: Hvor lang er den kanskje? *J2: Du kan gange opp denne slik at det blir ... Det er smart, det er bare å gjøre det!* *J1: Ok, vi skal ta ...43 ...* J2: Og plusse på 5. Skal vi ikke det da?	(4) Jobbe matematisk (KB-O). Arbeidet med å finne ut hvor langt det er fra hytta til utedoen jobber de først med gjentatt addisjon for å komme opp til 954. Men finner fort ut at det er tungvint. J2 teller, men vet ikke

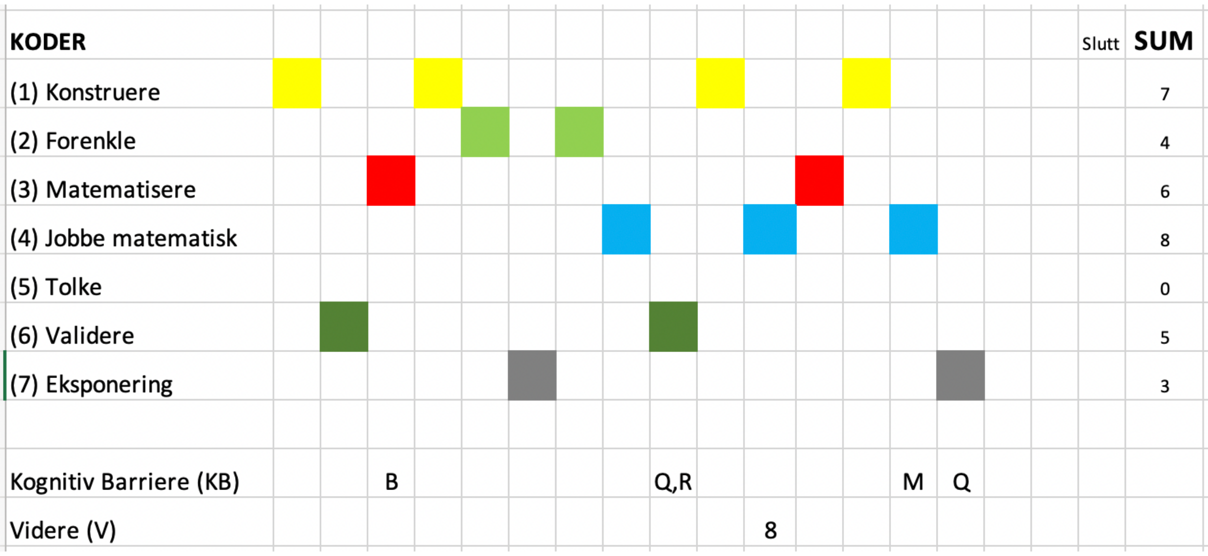
J1: Vet ikke ... J2: Vi tar halvparten ...440 ...450 ...475 ... J1: 43 gange ... nei pluss ...5 eh ja ... J2: Jeg kan finne det ut! Figur nummer 10!	helt hva hun teller. Hun finner at det er figur nummer 10.
J1: Men burde vi ikke finne ut hvilken figur det er? Mens læreren oppsummerer de første delene av oppgaven i klassen, jobber J1 videre med å finne en direkteformel. $F_n = n * 5 + 4$ Hun bruker denne til å finne figurtallet som gir 954 steinheller ved å dele på 5 og trekke fra 4.	Eleven finner ut at hun kan jobbe baklengs ut fra modellen hun lagde og så finne ut hvilket figurtall som gir 954 steinheller. Elevene spør lærer om bekreftelse på at det er riktig, lærer svarer med å vise hvordan man regner likning.
J1: Ok, jeg har funnet ut at de greiene er figur nummer 190. Men vi skal finne ut hvor lang den er. Så hvis ...	*(5) Tolke.* Forstår hva de har funnet ut og at de må gjøre en antakelse til for å finne lengden. De kommer ikke lengre før lærer oppsummerer i klassen.
På dette tidspunktet tar lærer en oppsummering i klassen. Elevene får ikke fullført resonnementet.	

Det er verdt å merke seg at KB-K vil si å ha forståelse for en riktig modell, men ha problemer med å uttrykke den med riktige matematiske begreper. Til forskjell fra KB-L, der elevene da har konstruert en modell, i hodet, verbalt eller skriftlig, som er feil i forhold til virkeligheten. I denne prosessen viser J1 tydelig KB-K et par ganger.

4.5.2 Gruppe 2 (G1, G2 og G3)

Gruppe 2 jobber veldig godt med oppgave 5 og er innom mange steg i modelleringssyklusen. De har mye humor mens de løser denne oppgaven, og presenterer løsninger som ikke nødvendigvis er seriøse, men de må tas med likevel fordi de viser en forståelse hos elevene og er konstruktive praktiske løsninger en ville vurdert i virkeligheten. De foreslår for eksempel at man bare kan legge inn do i hytta eller legge avlange steinheller slik at han ikke trenger så mange. Eller at man kan tisse ute isteden, fordi det blir for lang vei til utedoen ut fra opplysningene. De ender med en løsning som forutsetter at steinhellene er en meter på tvers, og da mener de at stien blir 954 meter lang. Her tar de ikke hensyn til at hellene legges i et mønster og ikke alle ligger etter hverandre. G2 ser dette og starter på et tellesystem for å lage en modell som kan brukes, men rekker ikke å bli ferdig med dette før lærer bryter av for felles oppsummering.





Tabell 4-21 Oversikt over modelleringsprosessen til gruppe 2 på oppgave 5 - Steinheller. Prosessen inneholdt så mange steg at tabellen måtte deles i to. Leses fra venstre mot høyre i begge tabeller.

I denne oppgaven veksler elevene i gruppe 2 så hurtig mellom stegene i modelleringssyklusen at jeg har valgt å forklare modelleringsprosessen deres som en kommentar til tabell 4-21 i stedet for å lage tabell med utvalgte sekvenser. Tabellen ville blitt for lang og oppstykket. I kapittel 5 har jeg valgt ut sekvenser fra prosessen deres for å illustrere funn. Guttene veksler mellom å lese oppgaven, anta at de lyse hellene skal være med og forsøke å lage en formel for antall steinheller etter n timer. De beskriver mønsteret feil 3 ganger (KB-L) før de finner en rekursiv formel den fjerde gangen de forsøker. De strever ikke med å uttrykke det de ser, men ser feil mønster de tre første gangene. Med jevne mellomrom tenker de hvordan denne veien fungerer i praksis og foreslår hva de heller ville gjort. Ved å lese oppgaven og gjøre flere antakelser kommer de til slutt fram til en eksplisitt formel. De rekker ikke å bruke den til å løse den siste oppgaven før læreren avbryter for oppsummering, men antar ut fra opplysningene hvor lang veien blir. G2 på gruppa ser at de må ta hensyn til at det er mange steinheller av de 954 som ikke ligger i lengderetningen, og er i ferd med å se en modell til løsning på oppgave d) når de blir avbrutt av lærerens oppsummering i klassen.

4.6 Intervjuresultater

Jeg har bare ett semistrukturert intervju med en av gruppene. Dette skjer i etterkant av en seanse med oppgaveløsning. Det er alltid en fare i slike intervjuer at elevene sier det intervjuer ønsker å høre, så det må vi ta hensyn til også her. For å få så ærlige svar som mulig forsøker jeg å stille spørsmålene så åpne som mulig. I intervjuet uttrykker de to elevene at de liker å jobbe med modellering av tre grunner: At det er sosialt, at de får diskusjoner med de andre og får høre hva andre tenker og at de ikke har en fasit. De tenker at det bra å mangle en fasit fordi *... da vet man ikke hva som er riktig. Da kan man jobbe evig på det.* og *... man kan bare si at det er slik, så er det slik.* Det kommer spontant at de synes det er utfordrende å bli enig. Dette er interessante utsagn fra elevene som jeg vil diskutere i kapittel 5.

4.7 Lærerens rolle

Læreren introduserer alle oppgavene muntlig til klassen, men har ellers en tilbakeholden rolle i forhold til gruppene når de arbeider selvstendig. I enkelte tilfeller spør elevene om hjelp, det er som regel for å få bekreftet at det de tenker er riktig. Læreren bruker som regel spørsmål som svar for å få elevene til å tenke selv. I oppstart av sekvensene har lærer hatt litt fokus på forenklinger og antakelser, og at dette er en viktig del av modellering. I oppsummering har lærer brukt litt tid til å høre hva noen av gruppene har tenkt. Det har blitt presentert få modeller i oppsummeringen. I forkant av oppgave 2 gikk lærer gjennom løsningsplan for modelleringsoppgaver, slik at elevene skulle bli bevisste på hvilke steg de burde være gjennom når de løser modelleringsoppgaver. Ut fra forskningsspørsmålene i denne studien er det ikke planlagt at lærerens rolle skal diskuteres inngående. Gjennom analyse av materialet dukker det likevel opp noen funn som gjør at dette likevel må nevnes. Jeg har valgt å transkribere introduksjon og oppsummering i klassen for å få en helhet på det som skjer i klasserommet. Jeg vil komme tilbake til lærerens rolle i drøftingsdelen i kapittel 5, og mer grundig i implikasjoner, avsnitt 6.2 s.6-122 der jeg drøfter hva som er viktig å strebe etter i en undervisning som har som mål å få elevene gode i modellering.

4.8 Oppsummering og sammenligning av elevresultater

Tabell 4-22 under viser et sammendrag av hvilke anstrengelser eller handlinger elevene brukte for å komme seg videre etter kognitive barrierer og hvor hyppig de ulike ble brukt i de forskjellige oppgavene. Kodene vil bli gjentatt og ytterligere kommentert i avsnitt 5.4 s.5-117. Tabell 4-23 nedenfor viser et sammendrag av alle steg som er tatt i modelleringssyklusen for de ulike gruppene i de ulike oppgavene. G og J indikerer hvordan gruppa var satt sammen. Isolert sett er det kanskje ikke så interessant hvor mange ganger elevene er innom hvert steg i modelleringssyklusen, men helheten sier noe om aktiviteten til elevene i hver oppgave. Vi kan også se på antall kognitive barrierer elevene møter i forhold til hvor mange steg de tar, og se hvordan dette utvikler seg i de ulike oppgavene. Jeg vil diskutere dette og andre sammenhenger ut fra denne tabellen i neste kapittel. Tabellen vil bli gjentatt i sin helhet og mer inngående forklart i avsnitt 5.3 s.5-107. Oppsummering av hva elevene gjør for å komme videre etter kognitive barrierer blir presentert i Tabell 5-9 s.5-118 sammen med drøfting av dette i avsnitt 5.4 s.5-117.

Tegn på at elever kommer videre fra en kognitiv barriere		Pyramide Gr.1	Pyramide Gr.2	Rubiks Gr.1	Rubiks Gr.2	Kaffeavtale Gr.1	Kaffeavtale Gr.2	Julenisse Gr.1	Julenisse Gr.2	Steinheller Gr.1	Steinheller Gr.2	Totalsum
V-1	*Spørre en lærer*	1								3		4
V-2	*Bruke digitale verktøy for å finne opplysninger*											0
V-3	*Spørre hverandre, diskuterer og jobber sammen*		4					1				5
V-4	*Lage en skisse*											0
V-5	*Lage en oversikt over informasjon*									2		2
V-6	*Eleven står på samme steg, men endrer språk eller følelser*											0
V-7	*Endrer retning på det han/hun jobber med i det steget eleven er på*	3	3	1								7
V-8	*Finner en løsning på problemet ved å tenke seg om eller regne i hodet*	2	4			1				5	2	14

Tabell 4-22 Sammendrag av ulike handlinger eller anstrengelser som gjør at elevene kommer videre etter å ha møtt kognitive barrierer i modelleringsprosessen.

		OPPGAVE	Oppg.1 - Gr.1 (JJ)	Oppg.1 - Gr.2 (GGG)	Oppg.2 - Gr.1 (GJ)	Oppg.2 - Gr.2 (GG)	Oppg.3 - Gr.1 (JJ)	Oppg.3 - Gr.2 (GG)	Oppg.4 - Gr.1 (JJ)	Oppg.4 - Gr.2 (GGG)	Oppg.5 - Gr.1 (JJ)	Oppg.5 - Gr.2 (GG)	TOTALSUM	Gjennomsnitt
		OPPSUMMERING												
	Steg i modelleringsprosessen	(1) Konstruere	2	7	3	2				2	5	7	28	2,8
		(2) Forenkle	3	8			6	3	2	3	4	4	33	3,3
		(3) Matematisere	6	9	4	10			2	2	6	6	45	4,5
		(4) Jobbe matematisk	5	10	1	8	1			4	6	8	43	4,3
		(5) Tolke	3	9					2	3	3		20	2
		(6) Validere	6	7			1	1	1	3		5	24	2,4
		(7) Eksponering					2	2				3	7	0,7
Koder for kognitive barrierer i de ulike stegene av modelleringsprosessen		SUM Steg i MS	25	50	8	20	10	6	7	17	24	33	200	20
		SUM Kognitive Barrierer (KB)	21	14	1	8	2	1	2	2	8	8	67	6,7
	Generell frustrasjon	A											0	
		B	3	1			1				1	1	7	
		C	1	1			1	1			1		5	
		D	2	1	1								4	
	Konstruere	E											0	
		F		1							2		3	
		G	1										1	
	Forenkle	H											0	
		I											0	
		J											0	
	Matematisere	K		3							2		5	
		L	2	3		6					1	3	15	
	Jobbe matematisk	M										1	1	
		N	2			2			1	1			6	
		O	2								1		3	
	Tolke	P	3	2					1	1			7	
		Q	2									2	4	
	Validere	R	3	2								1	6	
	Eksponere	S											0	

Tabell 4-23 Sammendrag av elevresultater for modelleringsprosess og kognitive barrierer.

5 Drøfting

Dette kapittelet presenterer funn i studien som diskuteres opp mot teori presentert i kapittel 2. Jeg vil se tilbake på forskningsspørsmålene og systematisk diskutere disse i forhold til teori, tidligere forskning og de funnene jeg har gjort. Først repeteres forskningsspørsmålene slik at de er friskt i minne for videre diskusjon. Deretter diskuteres elevenes modelleringsruter i de ulike oppgavene, elevenes kognitive utfordringer i modelleringsprosessen og hvilke anstrengelser eller handlinger elevene bruker for å komme videre i modelleringsprosessen etter å ha møtt kognitive barrierer. En oppsummering av og tanker om videre arbeid med modellering følger i kapittel 6.

5.1 Repetisjon av forskningsspørsmål

Formålet med studien har vært å undersøke hvordan elever på 8.trinn jobber med modelleringsoppgaver, hvilke kognitive utfordringer de møter og hvordan de løser disse. Disse tre forskningsspørsmålene ble derfor lagt til grunn for studien:

I. Hvilke steg i modelleringssyklusen går elever på 8.trinn gjennom når de løser matematiske modelleringsoppgaver?
II. Hvilke *kognitive barrierer* oppstår hos elever på 8.trinn i arbeid med matematiske modelleringsoppgaver?
III. Hva gjør elevene for å komme videre når de møter *kognitive barrierer* i modelleringsprosessen?

Jeg vil i det følgende oppsummere elevenes modelleringruter og tolke ut fra analysen og med bakgrunn i teori hvilken modelleringskompetanse elevene har. Jeg vil også forsøke å se etter progresjon fra første til siste oppgave. Jeg anser det ikke som nødvendig å repetere modelleringssyklusen til Blum og Leiss (2007) her, men leseren kan friske opp modellen og de ulike stegene i avsnitt 2.4.1 om ønskelig. I avsnitt 5.3 vil jeg trekke fram hvilke typiske *kognitive barrierer* som er mest fremtredende hos elevene i modelleringsprosessen, og sammenligne og diskutere disse opp mot tidligere forskning. Til sist i avsnitt 5.4 vil jeg sammenlikne hvilke anstrengelser eller handlinger elevene gjør for å komme videre fra kognitive barrierer og om de har et rikt eller ensidig utvalg av disse. Jeg vil også kommentere funn i forhold til oppgavene og lærerens rolle og undervisning. Selv om det sistnevnte ikke er et direkte fokus i studien, viser analysen tydelige tegn på at det har betydning hvilke oppgaver elevene jobber med og hvordan læreren legger opp øktene for at elevene skal få best mulig utbytte av å jobbe med modellering. Forskning viser at også lærerens rolle og hvilke oppgaver elevene jobber med har stor betydning (se quality teaching i avsnitt 2.6). Derfor velger jeg også å sette fokus på dette i tanker om videre arbeid i kapittel 6, der det presenteres noen tanker om hvordan undervisningen kan legges opp for å øke elevenes modelleringskompetanse.

5.2 Elevenes modelleringruter

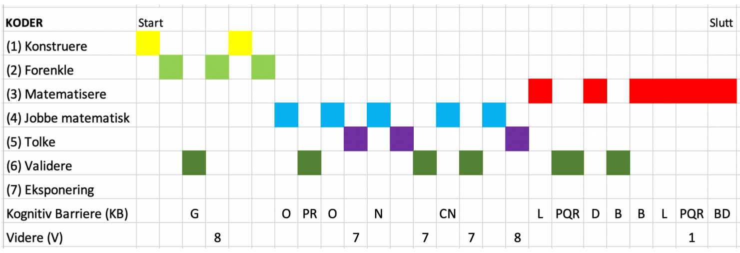
Som tidligere nevnt (se avsnitt 2.4 om modelleringsprosesser) er modelleringssyklusen (MS) et verktøy for å forstå, analysere og kjenne igjen hvilke steg elever er på i modelleringsprosessen og analysere hvilken modelleringskompetanse elevene har (Vos & Frejd, 2022). Modelleringskompetanse er blant annet av Niss og Jensen (2002) definert som å kunne utføre alle deler av modelleringsprosessen og kritisk vurdere det andre har gjort. Elevenes modelleringruter i de fem oppgavene i studien er veldig forskjellige. Det er også noen mindre forskjeller i modelleringsprosessen mellom gruppene i samme oppgave. Forskjellene på hvilke prosesser elevene har når de løser de ulike oppgavene viser tydelig at oppgaven har betydning for hvor fullstendig og rik modelleringsprosessen blir for elevene. Med rik menes her at elevene jobber i så mange ulike deler av modelleringsprosessen som mulig, og dermed, ifølge teorien, får styrket sin modelleringskompetanse. I følge Blum og Leiss (2007) utvikles elevenes matematiske kompetanse når de jobber med gode oppgaver. En analyse av elevers modelleringsforløp når de løser oppgaver gir viktig informasjon for å utvikle bedre oppgaver og undervisning (se også teori om modelleringskompetanse og modelleringssyklusen i avsnitt 2.3). Ut fra oppgavene brukt i denne studien kan det se ut som det ikke er likegyldig hvilke oppgaver som blir brukt for å få elevene til å øke sin modelleringskompetanse. De oppgavene som er kommentert i kapittel 5.2.1 vil være gode oppgaver på den måten at de trener elevene i å jobbe i så mange deler av MS som mulig. Elevene vil da sannsynligvis utvikle sin kompetanse på de områdene de jobber med. Barbosa (2006) argumenterer for at elevene utvikler modelleringskompetanse ved å løse problemer som i utgangspunktet ikke er matematiske ved hjelp av matematikk. Når elevene må kommunisere i og med matematikk, og argumenterer for svar fra matematiske modeller vil de øve opp evnen til å være kritisk (Berget & Bolstad, 2019). Niss & Blum (2020) poengterer at det ikke finnes lange nok studier til å gi oss ett opplegg som sikrer at elevene lærer modellering, men at å jobbe med modelleringsoppgaver i grupper i opplegg med kvalitetsundervisning vil øke elevenes kompetanse på området (se også avsnitt 2.6).

Det vil være flere tilfeller der elevene er innom flere deler av MS uten å uttrykke det muntlig eller skriftlig. Selv om analysen viser en modelleringsprosess der elevene har vært innom få steg i MS, kan elevene har jobbet seg gjennom flere steg enn transkripsjonen har fanget opp. Det vil også være slik at selv om de er innom steg i syklusen, betyr det ikke at de nødvendigvis behersker dette steget. Blum & Ferri (2009) poengterer at modellering er å oversette mellom den virkelige verden og matematikk i begge retninger. Analysen av oppgaver som oppgave 2 - Rubiks kube og oppgave 3 - kaffeavtalen viser at elevene gjør dette selv om dataene viser en mangelfull modelleringsprosess. De diskuterer og utvikler modelleringskompetanse selv om de ikke jobber i alle steg i MS.

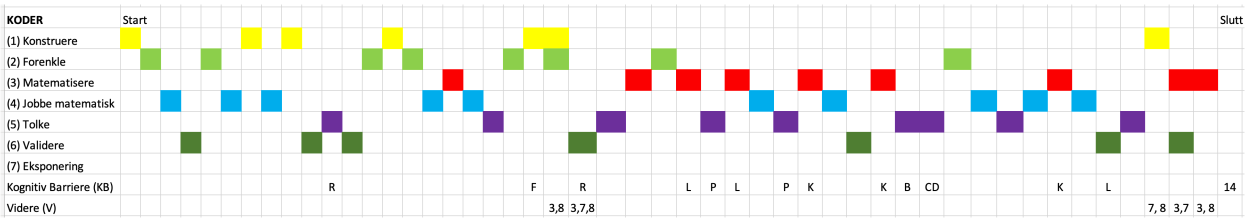
Tabell 4-23 s.4-93 viser en oversikt over hvor mange ganger elevene er innom de ulike stegene i MS for hver oppgave. Tabellen viser også hvor mange kognitive barrierer elevene har møtt på for hver oppgave, og i hvilket steg av MS. Denne er tatt med for å se på antall kognitive barrierer i forhold til aktivitet, altså hvor mange steg i MS elevene har tatt samtidig som vi ser hvor mye trøbbel de har støtt på underveis. Tabellen viser at det er ingen av oppgavene der en gruppe er innom alle stegene i modelleringssyklusen. Vi kan imidlertid gå inn i tallene og se at oppgave1 - menneskepyramider, oppgave 5 - steinheller og til en viss grad oppgave 4 - julenissen fører til at elevene har rike modelleringsprosesser der de jobber i de fleste deler av modelleringssyklusen. Oppgave 3 - kaffeavtalen skiller seg ut som en oppgave der elevene knapt er innom matematikk før de kommer til en løsning. I pyramideoppgaven jobber elevene i mange runder og har mange utfordringer underveis. Gruppe 1 strever med mange barrierer her, men har bedre flyt i siste oppgave. Det siste gjelder også Gruppe 2, men her er forskjellen mindre fra første til siste oppgave. Generelt er det vanskelig å trekke noe entydig ut fra denne totaloversikten fordi det ligger så mange ulike ting bak tallene, men det er interessant å se oversikten i sammenheng med en grundigere analyse av det som ligger bak. Jeg vil i det følgende kommentere elevenes modelleringsprosesser i forhold til de ulike oppgavene.

5.2.1 Rike modelleringsprosesser

Som tidligere nevnt er det noen oppgaver der elevene er innom neste alle stegene i modelleringssyklusen (MS) en eller flere ganger. Dette har jeg kalt for *rike* modelleringsprosesser fordi oppgaven tydelig får elevene til å reflektere og argumentere i de fleste deler av modelleringsprosessen. I dette avsnittet presenteres de modelleringsprosessene som ifølge analysen var rike.



Tabell 5-1 Modelleringsprosess oppgave 1- Menneskepyramide, gruppe 1



Tabell 5-2 Modelleringsprosess oppgave 1 – Menneskepyramide, gruppe 2

I litteraturen er det et tegn på god modelleringskompetanse dersom elevene behersker de ulike stegene i MS (Niss & Jensen, 2002). Vi ser både av tabell 5-1 og 5-2 at elevene jobber i nesten alle deler av modelleringsprosessen i denne oppgaven selv om de ikke kommer fram til en endelig løsning på problemet. Likevel støter de på såpass mange kognitive barrierer underveis at det vil være feil å konkludere med at de behersker alle stegene i MS godt. Gruppe 2 kommer fram til en løsning, men får ikke tid til å fortelle om den og klarer heller ikke å lage en riktig modell. Dette er den første modelleringsoppgaven elevene gjør, så det vil ikke være unaturlig å streve litt, noe også antall registrerte koder for kognitive barrierer viser. Disse kommer jeg tilbake til i neste del av kapittelet. Elevenes aktivitetsnivå viser at de jobber i nesten alle deler av prosessen og får dermed nyttig trening i modellering. I den forenklede versjonen av en modelleringsprosess (Figur 2-4 s.2-24) illustrert av Kaiser (2015), går man fra en virkelig situasjon, forenkler til en virkelig modell for så å gå over i matematisk verden og lage en matematisk modell som kan gi matematiske resultater. Til slutt skal man i en modelleringsprosess gå tilbake til den virkelige situasjonen for å validere og se hva resultatene har å si i den virkelige verden. Figuren illustrerer hva som skjer i en fullstendig modelleringsprosess, men det trenger ikke nødvendigvis skje i den rekkefølgen. Elevene gjør alle disse stegene i oppgave 1, bare ikke i den rekkefølgen. De kommer fort i gang, finner matematiske løsninger som de validerer, men jobber mye for å få til en matematisk modell og strever med dette. Begge gruppene lager en modell som ikke vil fungere i virkeligheten. Elevene er klar over at noe ikke stemmer, men finner ikke helt ut hva. Dermed kommer de heller ikke fram til en løsning og en modell som fungerer. Slik kan man si at de er gjennom prosessen i MS uten å finne et endelig svar som kan presenteres (steg 7 – eksponering). Gruppe 2 er på sporet av en løsning som kan fungere, men blir avbrutt av lærerens oppsummering. Modelleringsprosessene viser engasjement og utvikling utover i oppgaven fordi elevene beveger seg mellom stegene i søken etter å løse problemet, og selv om de støter på utfordringer underveis fortsetter de. Dette er en god trening i å holde ut, øve argumentasjon og tenke kritisk.

Blum og Leiss (2007) skriver at nøkkelen til å øke elevers matematiske kompetanse er gjennom modelleringskompetanse og argumentasjon. Modelleringskompetanse innebærer mange elementer som ikke er av matematisk art, som betraktninger, vurderinger, relevans for spørsmålet. Jensen (2009) (Berget & Bolstad, 2019) beskriver modelleringskompetanse som å kunne håndtere matematikkbeskrivelse av noe som i utgangspunktet ikke er matematikk. Oppgave 1 er første gang elevene løser en modelleringsoppgave. De forenkler problemet og regner matematisk. Men fordi de ikke har laget en matematisk modell som fungerer, kommer de ikke i mål med en løsning som fungerer i praksis heller. Likevel kan vi si at oppgaven fungerer for begge gruppene. Elevene drives framover i søken etter en løsning, de argumenterer for sine løsninger og validerer svarene opp mot den virkelige situasjonen. De utvikler sin modelleringskompetanse, men den er selvsagt ufullstendig siden dette er første gangen de modellerer.

Det virker imidlertid ikke som funnene i denne studien samsvarer med Jankvist og Niss (2020) sin undersøkelse der et signifikant antall elever hadde vansker med å akseptere eller forstå modelleringsoppgaver som synes å bryte med den didaktiske kontrakten (se avsnitt 2.7). Jeg finner ikke noe i analysen som tyder på at elevene blir forvirret av denne oppgaveformen selv om de ikke har modellert tidligere. Elevene uttrykker også i intervju etter oppgave 2 (se avsnitt 4.6), at de liker at oppgavene ikke har en fast løsning, og at det er det mer engasjerende at en kan gjøre antakelser selv og slik sett skape sin egen versjon av oppgaven. Det kan tenkes at å skape sin egen versjon av oppgaven minker presset på å ikke gjøre noen feil, slik mange er redde for i dette faget. Oppgavene gir rom for at alle elevers resonnementer er interessante, og dermed er det argumentasjon og forståelse av hvordan hver elev eller gruppe tenker som er i fokus i stedet for å finne en korrekt løsning på oppgaven.

Elevene har rike modelleringsprosesser også i oppgave 4 - julenissen for gruppe 2 og oppgave 5 - steinheller for begge grupper. De mangler i noen tilfeller her også å komme til steget eksponering, men noen av gruppene presenterer i en oppsummering selv om de ikke gjør det i diskusjonen innad i gruppa.

KODER	start														slutt			**Totalt**
(1) Konstruere																		2
(2) Forenkle																		3
(3) Matematisere																		2
(4) Jobbe matematisk																		4
(5) Tolke																		3
(6) Validere																		3
(7) Eksponering																		
Kognitiv Barriere (KB)											N,P							2
Videre (V)																		

Tabell 5-3 Modelleringsprosess oppgave 4 - Julenissen, gruppe 2

KODER	start																						slutt
(1) Konstruere																							
(2) Forenkle																							
(3) Matematisere																							
(4) Jobbe matematisk																							
(5) Tolke																							
(6) Validere																							
(7) Eksponering																							
Kognitiv Barriere (KB)	F	L										K	F,C		K	B	O						
Videre (V)	1					5						8		1, 5	8			8		8	1	8	

Tabell 5-4 Modelleringsprosess oppgave 5 - Steinheller, gruppe 1

KODER	start																																Slutt
(1) Konstruere																																	
(2) Forenkle																																	
(3) Matematisere																																	
(4) Jobbe matematisk																																	
(5) Tolke																																	
(6) Validere																																	
(7) Eksponering																																	
Kognitiv Barriere (KB)			L		L						L										B						Q,R					M	Q
Videre (V)															8														8				

Tabell 5-5 Modelleringsprosess oppgave 5- Steinheller, gruppe 2

Tabell 5-4 viser en ryddig og god prosess, der elevene ganske raskt lager en modell de bruker til å jobbe matematisk. Deretter validerer de svarene de får til de får et resultat de ser kan brukes. Gruppa presenterer en løsning i plenum, selv om dette ikke vises i tabellen da den kun er basert på det gruppa jobber med på egen hånd. Dette er oppgave 4, og prosessen kan tyde på at elevene har utviklet modelleringskompetansen sin på dette tidspunktet. De møter også få kognitive barrierer underveis. Grunnen til at de jobber såpass sømløst kan også skyldes at oppgaven er enkel eller at de engasjerer seg i problemstillingen slik at de yter maks av det de er gode for. I en så liten studie som dette er disse antakelsene vanskelig å spikre som sannheter, og vi vil aldri få vite om utviklingen skyldes progresjon, oppgaven i seg selv eller engasjement. Uansett grunn viser resultatet at dette er en oppgave som får diskusjonen i gang i gruppa og refleksjon over både antakelser og matematiske resultater. Det er et godt eksempel på å knytte matematikk til ikke-matematiske situasjoner og øve opp evnen til å kommunisere i og med matematikk. TIMSS og PISA har vist at norske elever ligger under gjennomsnittet når det gjelder å forklare svarene sine (Grønmo & Hole, 2010). Gjennom argumentasjon og økt modelleringskompetanse kan elevene bli bedre på dette. Blum og Leiss (2007) skrev i sin rapport fra DISUM og SINUS at elevenes matematiske kompetanser utvikles når de jobber med oppgaver, og at det er av stor betydning at elevene jobber med oppgaver som krever modelleringskompetanse og argumentasjon. Dette er en nøkkel til å øke elevers matematiske kompetanse.

En studie av modelleringsprosessen (tabell 5-6), og transkripsjonen til gruppe 2 i den siste oppgaven om steinheller viser at elevene utfører alle deler av modelleringsprosessen. Ved å gå rett fra å gjøre en antakelse eller jobbe matematisk til å validere, altså å se hva dette resultatet har å si for virkeligheten, har de flere ganger tolket svaret uten å si eller uttrykke dette på andre måter. De er da innom steget tolking selv om det ikke er markert i tabellen. Utsnittet av transkripsjonen nedenfor viser hvilket fint driv det er i diskusjonen mellom guttene, og denne leder til at en av elevene ser konturene av en riktig løsning. Elevene uttrykker sammenhenger matematisk, resonnerer, gjør antakelser, vurderer hva forslagene har å si for virkeligheten og endrer svarene sine når de ser at det ikke gir praktisk mening. I tillegg har de en god porsjon humor mens de holder på:

G1: $F_n = F_n$-1 + 5 (...)

G2: (...) Espen bruker 954 steinheller til hele stien fra hytta til utedoen. Hvor langt ... (leser oppgaven). Vi må gjøre en sånn derre antakelse. For de sier jo ikke noe om hvor store de er ... de kan være en meter i diameter (slår ut med armene) og de kan være 5 centimeter.

G3: Men hvor langt er det til doen?

G1: Jeg hadde bare lagt ut heller slik at jeg kan stå og pisse.. (...)

G2: Kan vi bare si sånn ... en meter for å gjøre jobben enklere ...

G1: Ja, men det er jo veldig stort for en hytte..

G2: Jeg vet det, men veldig lett å regne med. … Det er første prioritet når du skal løse en oppgave (...)

G3: Det er 44 heller der!

G1: Ja, men i helsike! Da er det jo 900 meter bortover der ... (Peker på hele strekningen)

G3: 954 steinheller! Da er det ganske langt til dassen da.

G1: Bare tenk på det her ... (ler) du står opp om mårran og tar på deg crocsene ... og så må du ta på deg tjukke sokker og gønne på for å komme til dassen (ler). Hvor langt er det? En mil, nei ... en kilometer ...

G2: Ja, en kilometer ... (...) Men (leser oppgaven en gang til) ... Dette er en, to, tre heller (teller på figur 1 som har 3 heller i midten) (teller videre i midten på de andre eksemplene).. Så vi lager et mønster med hvor mange ...

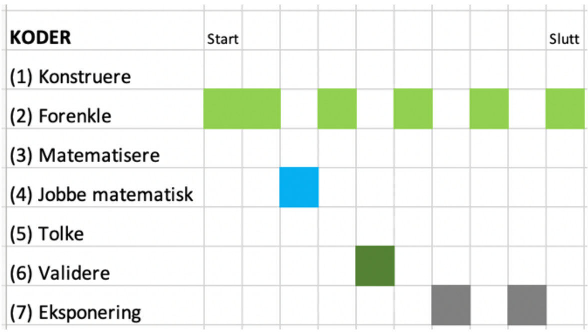
G1: Det gidder jeg ikke, det får du tegne selv ...

G2: Jeg har funnet ut noe! (lærer avbryter for delvis oppsummering)

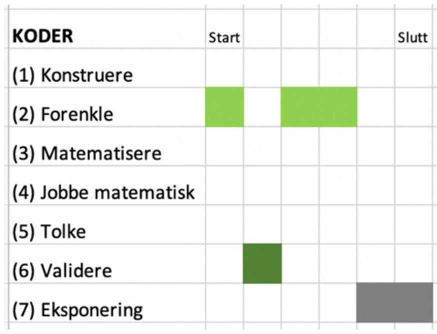
G2 utarbeider senere en generell formel selv om han ikke rekker å bruke den. Han er på sporet av en riktig løsning. På dette tidspunktet virker det som at å gjøre antakelser er helt naturlig for elevene og de virker komfortabel i oppgaveformen.

5.2.2 Mangelfulle modelleringsruter

De mest mangelfulle modelleringsrutene er ifølge analysen når elevene jobber med oppgave 3 – Kaffeavtale. Tabell 5-7 under viser at begge gruppene bruker mye tid på å avgrense oppgaven for å kunne anbefale en kaffeavtale, og mens de gjør dette blir fokuset fort på helt andre ting enn matematikk.



Tabell 5-7 Modelleringsprosess oppgave 3, gruppe 1



Tabell 5-8 Modelleringsprosess oppgave 3, gruppe 2

Transkripsjonen viser at elevene i begge grupper sjeldent gir uttrykk for at de jobber matematisk i denne oppgaven, men det er sannsynlig at de gjør det ubevisst fordi de sammenligner de ferdige kaffeavtalene de finner. De kommer fram til en anbefaling til løsning i begge gruppene, men dette er ikke en veloverveid løsning. De tenker litt hva de liker best og velger det. Denne oppgaven er et godt eksempel på at elevene finner en praktisk løsning og at oppgaven ikke i stor nok grad krever matematikk for å løse det virkelige problemet. Det krever en viss vurderingsevne å avgjøre hvilken bensinstasjon læreren burde velge kaffeavtale på, men siden prisene er ganske like krever det lite matematikk for å komme fram til en løsning. En av gruppene anbefaler læreren å lage kaffe hjemme, og har regnet ut at dette er billigere i forhold til en eventuell kaffeavtale. Flere presenterer en løsning der de viser at de har jobbet matematisk, men ikke snakket om det underveis i prosessen. Slik kan vi se at modelleringsrutene til elevene nok er mindre mangelfulle enn modelleringsprosessen viser, fordi det har foregått matematisk arbeid som var vanskelig å fange opp på lyd, bilde eller i notater.

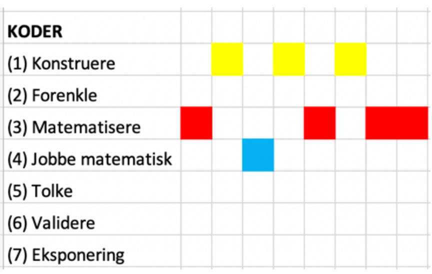
J1: I året koster det 200 kroner. Hvis du drikker ekstra stor kaffe hver dag, så koster det 8395 kroner i året. (...)
G1: Coop prix. Kjøpe en pakke der som koster sånn 80 kroner, og så koke kaffen selv. (...)
J2: Ja, du får gratis kaffe på skolen!
J2: Vi fant ut at hvis du drikker sånn 17 kaffe, så har du tatt igjen kaffeavtalen. Den koster 249.
J2: Vi fant ut at hvis du drikker sånn 17 kopper cirka. Skjønner du hva jeg mener? Men hvis du har kaffeavtalen så kan du kjøpe hver dag.

Ideelt sett skulle elevene ha sammenlignet grafer for de ulike avtalene her for å se hvilken som lønner seg i forhold til hvor mange kopper hun drikker. Elever på dette tidspunktet på 8.trinn har ikke jobbet hverken med funksjoner eller generell algebra enda. Dermed man kan ikke forvente at de lager algebraiske modeller på dette tidspunktet. Engasjementet daler fort i arbeidet med denne oppgaven og det kommer flere utsagn som bekrefter at dette ikke er en oppgave som fenger interessen.

J1: Okei ... (gjesper) ... så hvor mange kopper kaffe må hun kjøpe ... Det vet vel ikke jeg! ... Jeg bryr meg ikke om det her sånn skikkelig.. (Ligger utover bordet og ser lei ut)
J2: Det er sikkert en oppgave som hun burde gjøre selv, men som hun ikke gidder å gjøre. (...)
G3: Jeg er lei av kaffe! (Legger hodet på pulten)

Det må understrekes at elevene har et godt forhold til læreren, og engasjementet i starten av oppgaven handlet mye om at de ville finne ut hvor hun bor og hvilke vaner hun har om morgenen på vei til jobb. Likevel ble dette en øvelse i å gjøre avgrensninger i en oppgave slik at den lot seg løse. I oppsummeringen felles i klassen blir det også et engasjement i å argumentere for de ulike løsningene. Selv om noen av argumentene var mindre saklige enn andre, skapte dette et tydelig engasjement og god stemning i klassen. Dette viser at elevene kan ha utbytte av modelleringsprosessen, selv om den i en analyse som her synes å være mangelfull. Elevene kan ha fått god øvelse i å tenke kritisk og vurdere svarene sine opp mot virkeligheten, og dermed fått trening i viktige faktorer som refleksjon, utforsking og kreativitet. Disse er sentrale punkter i læreplanen for norsk skole (Kunnskapsdepartementet, 2020).

Enkelte ganger blir en god arbeidsprosess hos elevene avbrutt av lærerens trang til å oppsummere. Dette skjedde i arbeidet med oppgave 3 – rubiks kube. Vi ser av modelleringsprosessene til de to gruppene (tabell 5-7 og 5-8 nedenfor) at de er korte og ufullstendige, men at de jobber for å få til en matematisk modell.



Tabell 5-6 Modelleringsprosess oppg.3, gruppe 1

Tabell 5-7 Modelleringsprosess oppg.3, gruppe 2

Oppgaven har korte og konkrete spørsmål i starten, dette kan være grunnen til at elevene ikke gjør noen antakelser. Gruppe 1 lager en modell for hvor mange brikker det er i en 4 x 4 Rubiks kube, men rekker ikke å validere resultatet de får og tenke hvordan en slik kube egentlig ser ut inni og hvordan den er konstruert. Gruppe 2 er i ferd med å lage en virkelig modell med klosser og er tydelig inne i et resonnement da lærer bryter av.

G3: Kan vi fortsette litt til? Vi kan bygge en Rubiks kube..

Han uttrykker dette samtidig som han fortsetter å jobbe med sin modell mens læreren oppsummerer. Gruppa er så engasjert og uferdige med oppgaven at jeg velger å ta de med ut av klassen for at de skal få fullføre sine resonnement. Seansen i klasserommet er et klassisk eksempel på at elevene får for liten tid til egne resonnementer og at læreren i en oppsummering gir elevene sine egne resonnement uten at elevene får forklare skikkelig hvordan de tenkte. Blum og Ferri (2009) peker på dette som et av fire punkter som er utfordrende for læreren i veiledningen av elever mot gode modellerere. Det er utfordrende å ikke veilede eleven mot lærerens eget løsningsforslag. Det stilles krav til lærerens støtte og elevers selvstendighet og krever at læreren kan veilede eleven i deres vei mot selvstendig tenking (Blum & Ferri, 2009). Det krever både tid og stor kapasitet av en lærer for å klare å fange opp elevers tankegang rundt en modelleringsoppgave, og det kan ofte være fristende å ta snarveien om egen forklaring. Uro i klassen kan også bidra til at en lærer velger å presentere egen tankegang som et grep for å få klassen til å lytte. Det er krevende å trene elevene i å lytte til hverandre. Niss og Blum (2020) understreker også at det ikke er uvanlig for lærere å favorisere løsninger som ligger nær deres egen tilnærming til oppgaven. Det krever grundig forarbeid og intens oppmerksomhet for å fange opp helt andre tankemåter hos elevene enn de læreren har vært gjennom selv. For å rette på dette bør læreren søke varierte tilnærminger hos elevene slik at det blir en kultur for slik variasjon i klassen. Ved å ha fokus på at det er ønskelig med varierte tilnærminger og løsninger på modelleringsproblemet har det vist seg at elevene har større læringsutbytte av modelleringsprosessen. (Niss & Blum, 2020)

I enkelte situasjoner trenger elevene at læreren påpeker strukturelle likheter mellom modeller fra ulike modelleringsoppgaver for at elevene skal oppdage disse. Niss og Blum (2020) skriver om funn fra studier som viser at strukturelle likheter mellom modelleringsoppgaver bare blir synlig når den virkelige modellen er konstruert og elevene blir gjort oppmerksom på denne likheten. For å rette på resultatene fra PISA, der norske elever scorer lavt på å se likheter mellom lignende problemstillinger, kan en anta at en trening i å se etter likheter mellom modeller i lignende oppgaver vil utvikle deres evner til modellering. Teorien forteller oss altså at læreren bør jobbe både på et meta-nivå for å gjøre elevene oppmerksomme på hvordan de jobber med modellering, og vise de modeller som ligner hverandre i struktur for at elevene selv etter hvert skal trene seg opp selv i å se denne likheten. Dette er et av tegnene på kvalitetsundervisning (Blum & Ferri, 2009) som vil hjelpe eleven å bli bedre i modellering. Jeg vil diskutere dette nærmere i avsnitt 5.3 der fokuset er på hvorfor elevene sjelden kommer til siste steg i modelleringssyklusen; eksponering.

5.2.3 Generelle funn i modelleringsprosessene

Analysen viser at det er kjappere bytter mellom stegene i MS etter hvert som elevene får erfaring med å løse oppgaver. De henger ikke igjen så lenge i hvert steg før de kommer seg videre til et annet. Dette kan være tegn på at elevene vet mer om hvordan de kommer seg videre, at de blir mer trent i for eksempel å lage fornuftige antakelser eller vurderer svarene de får opp mot det virkelige problemet. Det kan også være et tegn på at oppgavene er enklere enn i starten, men elevene viser progresjon både i å lage antakelser og å lage formler og da kan vi anta at trening utvikler kompetansen deres slik beskrevet i teori. Elevene jobbet med figurtall og tallrekker uka før oppgave 5, de har dette friskt i minne når de lager en modell og har noe å sammenligne med. Det kan også være at det er lettere å få de til å lage en formel eller modell når de spesifikt blir bedt om å gjøre det. Blum & Ferri (2009) påpeker viktigheten av å kognitiv og meta-kognitiv aktivering, det vil si trene elevene opp til å tenke selv og bli klar over hvilke trinn som skal til for å løse en modelleringsoppgave. Vi kan ut fra dialogene høre at elevene etter hvert blir ganske flinke til å gjøre antakelser, og dette er da også mye snakket om i både starten og oppsummeringene av timene. Generelt blir antakelser og avgrensninger godt ivaretatt i oppsummeringene. Elevene har mange gode forslag og disse blir listet opp på tavla. Lærer snakker om viktigheten av å gjøre antakelser hver time både i forkant og etterkant. Dette kan være en medvirkende årsak til at elevene etter hvert virker bevisste på å forenkle det virkelige problemet og gjøre viktige avgrensninger.

Elevene er som nevnt flest ganger innom (3) matematisering og (4) jobbe matematisk. En forklaring på dette er at det er her de strever mest og dermed vender de ofte tilbake for å forsøke å løse barrierene i disse stegene. Spesielt ser vi av Tabell 4-23 s.4-93 at elevene jobber mange ganger i disse to stegene i oppgave 1, 2 og 5. Både i oppgave 2 og 5 lager de gode modeller, men strever også. Hva de spesifikt strever med kommer jeg nærmere tilbake til i avsnitt 5.3.2 og 5.3.3 når kognitive barrierer blir diskutert. Sjelden eller aldri kommer elevene til det siste steget; (7) Eksponering. Dette kan ha flere grunner. Noen ganger tenker de at de har en løsning, men at den er feil eller ufullstendig. Andre ganger mangler de å lage en modell eller modellen er feil slik at de ikke kommer fram til en løsning som fungerer i virkeligheten. Det kan virke som elevene famler litt med å uttrykke sammenhenger matematisk. Oppsummering i klassen kommer flere ganger litt for tidlig i prosessen for gruppene fordi mange i resten av klassen er veldig urolige og lager mye støy. Det er flere i klassen som ikke jobber mer enn 5-10 minutter før de tuller og finner på andre ting. Elevene i gruppe 1 og 2 liker faget og jobber godt til tross for forstyrrelser rundt seg. I en oppsummering er mange elever i klassen engasjerte de første minuttene, etter hvert blir det krevende for mange å holde fokus. Likevel er en skikkelig oppsummering avgjørende for at elevene skal komme videre og lære av hverandre når det gjelder å lage modeller og komme med gode løsninger, men en slik dialog er veldig krevende for både lærer og elever.

5.3 Elevenes kognitive utfordringer i arbeidet med modellering

En kognitiv barriere er en hindring eller en ufullstendig handling i eller mellom steg i modelleringssyklusen (MS). I følge Blum & Leiss (2007) er MS et godt analyseverktøy fordi det forutser vansker i modelleringsprosessen. Det er jo da også et verktøy som er orientert mot det problemløsende individet, og derfor egner det seg godt til å undersøke kognitive barrierer. Hvert steg i MS er en potensiell kognitiv barriere. Derfor vil jeg dele diskusjonen rundt de kognitive barrierene elevene møter i modelleringens fire hoveddeler; forstå og strukturere, matematisere, jobbe matematisk, og tolke, validere og eksponere. Innenfor de fire kategoriene vil jeg se på hvilke kognitive barrierer som var mest fremtredende hos elevene i denne studien, og sammenligne med tidligere forskning. Jeg vil først repetere oppgavenes innhold for leseren slik at materialet i tabell 5-9 nedenfor blir lettere å lese. For ytterligere utdyping av innhold i oppgavene, se avsnitt 3-4. Tabell 5-8 er en kopi av tabell 4-23. Den presenteres på nytt her for å ha nærhet til de funnene som diskuteres.

Oppgave 1 – Menneskepyramider

Oppgave 2 – Rubiks kube

Oppgave 3 – Kaffeavtale

Oppgave 4 – Julenissens pakkelevering på julekvelden

Oppgave 5 – Steinheller mellom hytte og utedo

Repeterer også kjennetegn på kognitive barrierer brukt i analysen. Kjennetegnene har bokstaver A-S som kan kjennes igjen i oversiktstabell 5-8, s.5-118. Det er verdt å merke seg at noen av disse barrierene møter elevene i andre deler av modelleringsprosessen enn det steget i MS de «tilhører». Dette gjelder spesielt A-D som kan dukke opp som en frustrasjon i alle deler av prosessen. Koder og kjennetegn for kognitive barrierer (KB) som brukes i analysen og som presenteres i oversiktstabell 5-8, s.5-118:

A. *Eleven stopper opp uten å gjøre noe (>2 min)*
B. *Eleven ser oppgitt ut, uttrykker oppgitthet verbalt eller fysisk*
C. *Eleven sier at han/hun ikke vet eller forstår*
D. *Eleven sier at de sikkert har gjort en feil*
E. *Eleven kommer ikke i gang med oppgaven*
F. *Eleven uttrykker at han/hun ikke forstår oppgaven*
G. *Eleven viser at han/hun har misforstått oppgaven ved å sette i gang med noe som ikke gir mening for oppgaven*
H. *Eleven lager ingen antakelser.*
I. *Eleven lager antakelser som ikke er relevante for oppgaven.*
J. *Eleven tar ikke hensyn til essensielle aspekter ved det virkelige problemet.*
K. *Eleven har problemer med å beskrive modellen med matematiske begreper.*
L. *Eleven har problemer med å lage en matematisk modell som er riktig i forhold til det virkelige problemet. Eleven lager en modell som er feil.*
M. *Eleven strever med matematiske utregninger, eller stopper opp i regneprosessen på grunn av at han/hun ikke klarer å løse oppgaven.*
N. *Eleven regner feil*
O. *Eleven bruker tall uten å tenke over hva tallene egentlig står for. De får da et regnestykke uten mening.*
P. *Eleven får et matematisk resultat, men forstår ikke hva han/hun har regnet ut.*
Q. *Eleven har problemer med å de-matematisere*
R. *Eleven vet ikke hva det matematiske resultatet har å si for den virkelige modellen.*
S. *Eleven er ikke i stand til å presentere en løsning på det virkelige problemet*

		OPPGAVE	Oppg.1 - Gr.1 (JJ)	Oppg.1 - Gr.2 (GGG)	Oppg.2 - Gr.1 (GJ)	Oppg.2 - Gr.2 (GG)	Oppg.3 - Gr.1 (JJ)	Oppg.3 - Gr.2 (GG)	Oppg.4 - Gr.1 (JJ)	Oppg.4 - Gr.2 (GGG)	Oppg.5 - Gr.1 (JJ)	Oppg.5 - Gr.2 (GG)	TOTALSUM	Gjennomsnitt
	Steg i modelleringsprosessen	**OPPSUMMERING**												
		(1) Konstruere	2	7	3	2				2	5	7	28	2,8
		(2) Forenkle	3	8			6	3	2	3	4	4	33	3,3
		(3) Matematisere	6	9	4	10			2	2	6	6	45	4,5
		(4) Jobbe matematisk	5	10	1	8	1			4	6	8	43	4,3
		(5) Tolke	3	9					2	3	3		20	2
		(6) Validere	6	7			1	1	1	3		5	24	2,4
		(7) Eksponering					2	2				3	7	0,7
Koder for kognitive barrierer i de ulike stegene av modelleringsprosessen		SUM Steg i MS	25	50	8	20	10	6	7	17	24	33	200	20
		SUM Kognitive Barrierer (KB)	21	14	1	8	2	1	2	2	8	8	67	6,7
	Generell frustrasjon	A											0	
		B	3	1			1				1	1	7	
		C	1	1			1	1			1		5	
		D	2	1	1								4	
	Konstruere	E											0	
		F		1							2		3	
		G	1										1	
	Forenkle	H											0	
		I											0	
		J											0	
	Matematisere	K		3							2		5	
		L	2	3		6					1	3	15	
	Jobbe matematisk	M										1	1	
		N	2			2			1	1			6	
		O	2								1		3	
	Tolke	P	3	2					1	1			7	
		Q	2									2	4	
	Validere	R	3	2								1	6	
	Eksponere	S											0	

Tabell 5-8 Oversikt over modelleringssyklusene og kognitive barrierer i de ulike oppgavene for begge grupper.

Tabell 5-8 viser en oversikt over hvilke kognitive barrierer elevene møter i de ulike oppgavene, og hvor hyppig disse oppstår hos elevene. Den viser også stegene i modelleringsprosessene i de ulike oppgavene. Av tabellen kan vi se at det er flest kognitive barrierer i den første oppgaven, der elevene også er innom flest steg i modelleringssyklusen. Det viser seg at matematisering er det steget i modelleringsprosessen som er vanskeligst for elevene (KB - K og L). Hele seks av kodene fordelte på KB - B, C og D (generell frustrasjon) er også relaterte til arbeid med matematisering og frustrasjon over utfordringer knyttet til forsøk på å lage en matematisk modell. Disse funnene samsvarer med funn fra tidligere studier (Jankvist & Niss, 2020) som viser til at også elever med utmerkede ferdigheter i matematikk strevde med matematiseringsprosessen. Siden hvert steg ifølge Niss og Blum (2020) er en potensiell kognitiv barriere er det ikke unaturlig at elevene støter på mange hindringer i denne modelleringsprosessen. Det er i tillegg første gang de modellerer. Det blir færre KB etter hvert som elevene løser flere oppgaver, men det er likevel mange av de samme barrierene som går igjen. Jeg vil i det følgende gå gjennom hovedpunktene i en modelleringsprosess og trekke fram eksempler på hva elevene sliter med når de modellerer i denne studien.

5.3.1 Konstruere og forenkle

Det er generelt få kognitive barrierer knyttet til den første delen av modelleringsprosessen som omhandler å forstå oppgaven, danne seg et mentalt bilde av hva de skal finne ut og gjøre forenklinger for at oppgaven skal kunne løses. Studien til Jankvist og Niss (2020) konkluderer med at pre-matematisering er en barriere i modellering og at manglende antakelser er en vesentlig faktor for dette. En kan kanskje si at elevene sliter med forenklinger fordi de stadig må vende tilbake til dette steget i prosessen. Tre av de generelle frustrasjonene er også knyttet til steg (2) forenkle. Å avgjøre hvordan kan vi vurdere at det er kvalitet i forenklingene elevene gjør og om de mangler forenklinger selv om de har gjort noen, er ikke lett. En indikator på kvalitet kan være at de kommer relativt kjapt videre i prosessen, slik de gjorde i oppgave 4. Forenklinger som dette kan for eksempel være:

G2: Vi må bare anta hvor mange barn det er ... Hvor mange barn er det i verden?

G2: Og så må vi lage hva «julekvelden» er ... (...) Vi må bare bestemme når det er natt, når alle sover. (...) Skal vi bare si 10 timer, for da er det lettere å regne med?

G2: Jeg skriver: Antakelse: Hver helle er 1 meter. (...) Det er lett å regne med.

G2: Da er vi de, da kaller vi oss for mennesker liksom da. … da må vi ta gjennomsnittshøyden på mennesker. (...) Det er vel ikke noe som er riktig eller feil for hvor høye disse menneskene er. (...) Vi må måle.
J2: Det kommer an på hvor høye folk er. (...) Vi må stå på alle fire og hente en linjal.
J2: Vi sier at det koster 15 kroner for en kopp kaffe.
J2: Vi antok at hun drikker en kopp kaffe hver morgen. (...) Og at du kjøper uten lokk.

I datamateriale for denne studien kunne jeg ikke finne noen steder der elevene møtte kognitive barrierer fordi de manglet sentrale forenklinger. Dette kan tyde på at disse elevene til en viss grad behersket å gjøre antakelser. Eksemplene viser at det er to elever som går igjen i å gjøre gode antakelser. Likevel er det vanskelig fra et så lite datamateriale å utelukke at de andre på gruppene også kan dette. G2 viste seg å være en elev som snakker mye, og som kjapt kommer med innspill. Det virket som de andre på gruppa hang ganske godt med, men brukte mer tid på å tenke uten å snakke. Dette er noe av grunnen til at jeg valgte å framstille resultatene gruppevis, da det også mange ganger viste seg at samspillet på gruppa var det som drev løsningsprosessen framover. Jeg vil kommentere dette ytterligere i 5.4 når vi ser på hva som bringer gruppa videre etter KB.

Flere av oppgavene i studien er delt opp i flere deloppgaver og forutsetter at en gjør antakelser også underveis i løsningsprosessen. Funnene viser lite frustrasjon hos elevene over at de må finne opplysninger for å avgrense oppgaven selv, de virker komfortable med å gjøre avgrensninger. Bare i de tilfellene der oppgaven er for «løs», som i oppgave 3 – kaffeavtalen, ble elvene litt lei. De brukte mye tid på å finne mange lignende avgrensninger fordi oppgaven var veldig åpen. KB knyttet til denne oppgaven var kun B og C, altså generell frustrasjon. Det ble mange detaljerte forenklinger og selve problemet var for lite utfordrende. Funn av kognitive barrierer ellers i dette steget er stort sett knyttet til at en på gruppa sier han/hun ikke forstår når de leser oppgaven, og har dermed ingen direkte tilknytning til det å gjøre en antakelse. Det løser seg ofte ved at en annen på gruppa forklarer og de hjelper hverandre til forståelse.

5.3.2 Matematisere

Hele 20 kognitive barrierer er direkte knyttet til det å matematisere (KB-K og L) (se tabell 5-8 for oversikt over de ulike barrierene.) Kjennetegn på 5 av barrierene er at *eleven har problemer med å beskrive modellen med matematiske begreper*. 15 av barrierene kjennetegnes ved at e*leven har problemer med å lage en matematisk modell som er riktig i forhold til det virkelige problemet. Eleven lager en modell som er feil.* Det er verdt å merke seg forskjellen på disse to kjennetegnene. I de fleste, altså her i 15 tilfeller, strever elevene med å lage en matematisk modell som er riktig (KB-L). Mer presist vil det som oftest si at de strever med å forstå systemet eller se mønsteret i den virkelige modellen, slik at de kan lage en matematisk modell. Som i oppgave 1 - pyramideoppgaven, da begge gruppene forklarte en modell som ikke stemte med den på bildet og heller ikke var stabil nok i virkeligheten. Etter hvert så den ene gruppa hva som ble feil og forklarte muntlig hvordan pyramiden burde være, men klarte ikke å uttrykke den riktige modellen med matematikk (KB-K). Episoden beskrives mer grundig på neste side. Det er naturlig at elevene sliter med å uttrykke en modell med matematiske begreper fordi de ikke har jobbet med algebra enda. Likevel kan modellen uttrykkes med tall eller tegning i tillegg til muntlig beskrivelse. I oppgave 2 uttrykker elevene en modell for hvor mange brikker det er i en 3 x 3 Rubiks kube, men har problemer med å overføre denne modellen til en 4 x 4 kube. Elevene beskriver modeller bedre i oppgave 5, da har de akkurat jobbet med figurtall. I tillegg til KB-K og L er som nevnt noen av de generelle frustrasjonene KB-B, C og D også knyttet til matematisering. Disse kjennetegnes ved at *elevene uttrykker oppgitthet, sier de ikke forstår eller at de sikkert har gjort noe feil* i forbindelse med matematisering. Funnene i studien til Jankvist & Niss (2020) viste steg i modelleringsprosessen som var vanskelig for elevene, og flere av disse samsvarer godt med funnene i denne studien: Elevene sliter med å finne en relevant variabel, klargjøre mål med den virkelige modellen og å velge en modell. De sliter også med manglende selvtillit og naturlig nok manglende algebraferdigheter.

La oss se på et par eksempler for å beskrive disse funnene. I oppgave 1 – menneskepyramider bruker begge grupper relativt kort tid på å komme fram til at de vil lage en type pyramide som vist på bildet, og at de må anta at alle menneskene har en gjennomsnittshøyde når de står på alle fire. Etter en tid finner de også ut hvor mange som må stå oppå hverandre på alle fire for å få 12 meters høyde. Men for å finne ut hvor mange mennesker som trengs for å lage en slik pyramide, må elevene konstruere en modell som beskriver hvordan en slik type pyramide er bygget opp. Dette strever begge gruppene med. På dette tidspunktet har de ikke jobbet med figurtall eller algebra, så mye kan forklares her. Samtidig kan vi merke at de ikke er trent i å se etter mønster og beskrive dette. Selv om det er ganske konkret og tydelig på bildet hvordan menneskene står oppå hverandre, strever elevene med å uttrykke dette matematisk eller beskrive mønsteret med ord. G2 ser til slutt mønsteret der han sammenligner antall mennesker i høyden med antall mennesker på bunnen av pyramiden. Dette er primært fordi han husker at *noen har fortalt han en gang at i slike trekanter er det like mange bortover i bunnen som oppover i høyden.* Han prøver å huske en regel i stedet for å se på mønsteret på bildet og forsøke å beskrive dette med tall og/eller variabler.

G1: (...)Først må vi jo se på grunnen hvor mange mennesker det er og hvor høy den blir. Og så må vi bare minuse folk nedover, så må vi regne hvor mange det blir ...
(...)
G1: Hvis vi regner ut da 10 sånne (peker på pyramide 1), nei 4 sånne. Det er 10 stk. Og hvis en som står på toppen når det er 2 meter og 40 centimeter, hvis du da ganger det med 5 da blir det nøyaktig 1200.
G2: Så ... 10 ganger 5?
G1: Ja, 10 ganger 5. Det blir 50.
(...)
G2: (...) Ser du her står de jo to, og så står de oppå imellom (...)
G1: Det er minus en hver gang!
G2: (...) Det blir jo 20, 19, 18, det kan vi jo tenke! Kan vi det? (...) og så må man gjøre det helt til man kommer til 1. Hvor mange ganger må du ta minus 1?

Eleven er først inne i riktig tankegang, men mangler matematisk språk for å uttrykke det slik at det blir en modell som kan brukes. Så tenker de bare hvor mange som er i høyden og glemmer at fire småpyramider oppå hverandre vil gi en dårlig konstruksjon. Etter mye fram og tilbake leser G2 oppgaven en gang til og oppdager mønsteret i hvordan de står på bildet. Dette blir et vendepunkt for gruppa. De andre to på gruppa har sett dette mønsteret lenge, men har ikke selvtillit nok eller matematisk språk for å uttrykke det.

Niss og Blum (2020) påpeker at matematisering ofte krever at man formaliserer verbale utsagn og at flere empiriske undersøkelser viser at dette er vanskelig for mange elever. Det er vanskelig å lære en strategi for matematisering fordi det er en så kompleks aktivitet. De skriver videre at elever på alle nivå som strever med en begrepsmessig forståelse av divisjon vil ha problemer med å lage ligninger der en uttrykker forholdet mellom variabler. (Niss og Blum, 2020, s.119) Gjentakende for elevene i begge grupper i min studie er at elevene bruker gjentatt addisjon i stedet for divisjon når de skal finne forholdet mellom tall. I pyramideoppgaven bruker begge grupper multiplikasjon og addisjon for å finne hvor mange gjennomsnittsmennesker som må stå oppå hverandre for å bygge 12 meters høyde. Det kan virke som de ikke er så godt trent i å finne forholdet mellom tall. Da vil det også bli utfordrende å uttrykke forholdet mellom variabler.

I oppgave 2 – Rubiks kube lager begge gruppene en formel for hvor mange brikker det trengs for å lage en slik kube. Begge kommer fram til 3 x 3 – 1. Selv om de uttrykker formelen med et tretall for lite viser regneresultatene at de har tenkt riktig. I arbeidet med å finne ut hvor mange som trengs for å lage en 4 x 4 kube sliter de mer. Gruppe 1 bruker formelen fra den første kuben og legger inn 4 i stedet for 3. De regner ut og får 63. Justerer dette til 60 fordi det sikkert går bort fire i midten i stedet for 1. De rekker ikke å sjekke dette eller ha en formening om hvordan en slik kube ser ut i midten. Gruppe 1 klarer ikke bruke formelen de lagde i starten av oppgaven for å finne ut hvor mange det er i en 4 x 4 kube. De strever veldig med matematisering i denne oppgaven og ender opp med å telle uten å ha et skikkelig system. Studien til Jankvist og Niss (2020) viste at å finne en relevant variabel og manglende algebraferdigheter var gjentakende barrierer i elevenes modelleringsprosesser.

5.3.3 Jobbe matematisk

10 av de kognitive barrierene registrert i datamaterialet er mens elevene jobber matematisk. Det er hovedsakelig to typer som gjentar seg: *Eleven regner feil (KB-N,)* eller *eleven bruker tall uten å tenke over hva tallene egentlig står for. De får da et regnestykke uten mening (KB-O).* Det er også verdt å ta med her at det er 7 registrerte tilfeller av at *eleven får et matematisk resultat, men forstår ikke hva han/hun har regnet ut (KB-P).* Selv om det siste kjennetegnet er knyttet til tolking, er det grunn til å tro at disse barrierene henger sammen med at elevene ikke helt forstår hva tallene står for når de lager regnestykkene.

Flere ganger i løpet av modelleringsprosessene strever elevene med at de regner feil eller mangler grunnleggende matematisk kunnskap. Eksempler på dette er at de for eksempel lurer på om det er tusen centimeter i en meter eller om det er syv nuller i en million. Et klassisk eksempel på et regnestykke uten mening er når gruppe 1 jobber med oppgave 1 – menneskepyramider. Oppgaven spør etter hvor mange mennesker som skal til for å bygge en pyramide som er 12 meter høy. De har funnet at et gjennomsnittsmenneske som står på alle fire er omtrent 70 centimeter høy. De multipliserer 70 med 12 og får 840. Elevene tar tallet 12 som står i oppgaven uten å tenke på hva det egentlig betyr og får da et regnestykke uten mening. De finner etter hvert ut at det er alt for mye med 840 mennesker og at noe ikke stemmer her. Eksemplet ligner på det klassiske eksemplet fra Blum & Ferri (2009) der elever skal finne hvor høy mann som skal til for å passe verdens største sko som er 2,37 m vid og 5,29 m lang. Elevene multipliserer tallene og tenker at mannen må være 12,5373 meter høy. Det kan tenkes at oppdragelsen elevene får i klasserommet gir slike misforståelser fordi elevene gjennom *Den didaktiske kontrakt* (se avsnitt 2.7) blir lært opp til at matematikk læres i et lukket system der en får servert oppgaver med opplysninger som hører til. Selv om LK20 legger opp til utforskende undervisning vet vi at mange klasserom fortsatt domineres av oppgaveløsning med «ferdigtygd» matematikk, det vil si at elevene forventes å behandle tallene som er gitt i oppgaven for å løse den. Hvor mye slik undervisning elevene i denne klassen har hatt vites ikke, men måten de håndterte forenkling og antakelser på kan tyde på at de har jobbet med utforskende oppgaver tidligere. De hadde ingen forventninger om at læreren skulle komme og gi de løsninger eller forenkle oppgaven for dem. Modellering er en kompleks aktivitet nettopp fordi det kreves både at elevene kan hente fram grunnleggende matematikkunnskaper fra hvilket emne som helst og holde system på hvilke opplysninger som er relevante og ikke.

5.3.4 Tolke, validere og eksponere

Kognitive barrierer i de tre stegene i modelleringssyklusen, tolke, validere og eksponere, er i hovedsak knyttet til to oppgaver i denne studien; Oppgave 1 - menneskepyramider og oppgave 5 – steinheller. Av tabell 5-9 ser vi at elevene er innom disse stegene i modelleringsprosessen få ganger, og dette kan være en naturlig årsak til at det er registrert få kognitive barrierer i de andre oppgavene. Det kan også være en forklaring at oppgave 2, 3 og

4 er av en slik art at de er mindre krevende å løse. Tabell 4-1 og tabell 4-3 viser at de kognitive barrierene knyttet til oppgave 1 oppstår i forbindelse med prosessen med å lage en modell. Elevene validerer resultatene de får, ser at dette ikke ble riktig og går tilbake til modellen for å forsøke å justere på denne. De strever både med å forstå det matematiske resultatet de har regnet ut, og å forstå hva resultatet har å si for den virkelige modellen. For den ene gruppa er dette hovedsakelig fordi at de har brukt tall uten å tenke over hva de står for. I begge gruppene strever elevene med å forstå hva som gjør at modellen ikke blir riktig. Gruppe 2 finner til slutt ut hvordan modellen bør være, men rekker ikke å beskrive den riktige modellen matematisk. I oppgave 5 er det noen få tilfeller der enkeltelever på gruppa ikke skjønner helt hva det matematiske resultatet har å si for den virkelige verden. Dette løser seg ved at andre på gruppa forklarer. I min studie har jeg valgt å analysere modelleringsprosessen mellom elevene på de to gruppene som er valgt ut. Selv om jeg har transkribert og til en viss grad tolket det som skjer i klasserommet før og etter oppgaveløsningen, er dette ikke med i tabellene. Hvis vi ser på helheten, får flere av gruppene presentert løsninger på modelleringsoppgavene i oppsummering i klasserommet. Disse er ikke registrert i analysen. Data over hvor mange ganger elevene er innom steget eksponering i MS vil derfor være mangelfull i forhold til det som skjedde i klasserommet. Jeg vil diskutere i kapittel 6 om dette var et godt valg eller ikke.

Tiden som ble brukt i klasserommet til oppsummering og presentasjon og refleksjon over løsningene de ulike gruppene kom fram til var kort. Det var få eller noen ganger ingen modeller som ble presentert i plenum. I oppgave 1 ble det i full klasse presentert ulike løsninger på hvor mange personer som må stå oppå hverandre hvis pyramiden skulle bli 12 meter høy. Løsningen på den opprinnelige problemstillingen, altså hvor mange personer som trengs for å lage en slik pyramide ble ikke belyst i oppsummeringen. Det ble ikke presentert hva en modell er og hvilke modeller som kunne tenkes å være hensiktsmessige for å finne dette antallet. Det var dette elevene strevde mest med på gruppene. Det er en utfordring for læreren å ha en oppsummering uten at noen av gruppene har kommet fram til en løsning. I dette tilfellet hadde egentlig den ene gruppa funnet en løsning på modell, men strevde med å uttrykke dette matematisk. Da var det heller ikke lett for lærer å fange opp gruppas forslag til modell. For at elevene skal bli gode til å modellere er det viktig at læreren veileder eleven mot selvstendig tenking. Det er utfordrende å samtidig ikke veilede eleven mot lærerens eget løsningsforslag (Blum & Ferri, 2009). I en oppsummering er det fristende å gi elevene en løsning som læreren selv har tenkt på som den mest geniale, hvis ikke noen av elevene selv kommer med en løsning. Det er ikke uvanlig at læreren favoriserer løsninger som ligger nær deres egen tilnærming til oppgaven. (Niss & Blum, 2020) Det er en fare for at elevene ikke henger med på lærerens tankegang dersom denne ikke bygger på elevenes egne innspill. Hvis læreren søker variert tilnærminger til løsninger, vil elevene utvikle en verktøykasse som vil hjelpe dem i videre arbeid. For at elevene skal bli bevisste på hvordan man lager modeller, er det viktig å vise ulike modeller i oppsummering av modelleringsarbeid (se meta-kognitiv aktivering s.2-33). Det er usikkert om elever klarer å overføre en type modell fra en oppgave til en annen lignende, men å se varierte løsninger vil likevel trolig ha en bevisstgjørende effekt.

5.4 Hva gjør elevene for å komme videre når de står fast?

En kognitiv barriere er en hindring for å få fullført modelleringsprosessen eller løst oppgaven. Når elevene møter en kognitiv barriere i sitt arbeid med en modelleringsoppgave er det ikke nødvendigvis slik at modelleringsprosessen stopper opp permanent. Det kreves en anstrengelse eller en handling for å komme videre. Noen ganger strevde elevene en stund før det løsnet og de kom seg videre i prosessen. Siden hvert steg, ifølge empiriske studier presentert av Niss og Blum (2020), er en potensiell kognitiv barriere, er det naturlig at elevene møter en del motstand i arbeidet med modelleringsoppgaver (se også avsnitt 2.5.1 om kognitive barrierer). Mange ganger kom elevene videre i prosessen fra det de strevde med relativt raskt, jobbet videre i samme steg i modelleringssyklusen (MS) eller gikk videre til et annet. Tabell 5-9 på neste side viser en oversikt over kodene V1-V8, de beskriver hva som gjorde at elevene fortsatte i modelleringsprosessen etter en kognitiv barriere. Kodene ble plukket fra datamaterialet i analyseprosessen (se analysetrinn 3, avsnitt 3.6.5). En kan tenke seg at dette er et verktøy eller en strategi, men disse to begrepene er omfattende og kan inneholde så mye mer enn de gjør her. Det mest beskrivende vil kanskje være å kalle de nøkler, siden de åpner opp muligheten for å jobbe videre i prosessen med å løse et problem. Se ellers kapittel 3 for grundigere beskrivelse av analyseverktøy og metode.

Tegn på at elever kommer videre fra en kognitiv barriere		Pyramide Gr.1	Pyramide Gr.2	Rubiks Gr.1	Rubiks Gr.2	Kaffeavtale Gr.1	Kaffeavtale Gr.2	Julenisse Gr.1	Julenisse Gr.2	Steinheller Gr.1	Steinheller Gr.2	Totalsum
V-1	*Spørre en lærer*	1								3		4
V-2	*Bruke digitale verktøy for å finne opplysninger*											0
V-3	*Spørre hverandre, diskuterer og jobber sammen*		4					1				5
V-4	*Lage en skisse*											0
V-5	*Lage en oversikt over informasjon*									2		2
V-6	*Eleven står på samme steg, men endrer språk eller følelser*											0
V-7	*Endrer retning på det han/hun jobber med i det steget eleven er på*	3	3	1								7
V-8	*Finner en løsning på problemet ved å tenke seg om eller regne i hodet*	2	4			1				5	2	14

Tabell 5-9 Oversikt over hva som får elevene til å komme videre i modelleringsprosessen etter å ha møtt en kognitiv barriere.

Tabellen viser at elevene de fleste gangene finner en løsning på problemet ved å tenke seg om eller regne i hodet. Dette betyr ikke at elevene sitter stille og tenker i hele modelleringsprosessen. De snakker sammen stort sett hele tiden i alle oppgaver. Også når de søker informasjon andre steder enn i oppgaven, diskuterer de sine funn og kommer sammen fram til hva de velger ut. Det er en styrke å jobbe sammen i grupper og analysen viser også dette. Elevene kommer videre i prosessen ved å diskutere, dele frustrasjoner, lytte til andres løsninger og bruke dette til å reflektere over problemet selv. Grunnen til at det ikke er registrert noen tilfeller av at de bruker digitale verktøy for å finne opplysninger, er at de aldri bruker dette for å komme videre fra en barriere. De bruker det bare i den vanlige arbeidsprosessen, men står ikke fast. Dermed blir det ikke registrert som en nøkkel for å komme seg videre. Som beskrevet i resultatdelen, (kapittel 4) kommer elevene seg ofte videre fra en kognitiv barriere ved å tenke seg om og/eller regne i hodet i tilknytning til dialog med de andre på gruppa. Et godt eksempel på dette er når gruppe 2 har strevd lenge med hvordan de skal finne ut hvor mange mennesker som trengs for å lage en menneskepyramide:

G2: Rett opp? Jeg vet ikke, det står jo liksom her ... her står det ...to og der står det tre, og der står det.. fire og der står det ... Nei ... jeg skjønner ikke. Skal vi regne ...

G1: Her står de jo sånn (teller på bildet)

G2: Vi må jo kanskje bare regne det da...

G1: Vi må bare regne hvor mange mennesker vi trenger for å lage en sånn pyramide..

G2: Ja, på den nederste står det jo sikkert hundre stykker (...) Du ser jo på bildet, det er jo ikke så tydelig. Her er det jo mye mer oversiktlig! (Peker på pyramide 1)

G1: Men her var det 20 mennesker man trengte ...? (Peker på pyramide 1)

G2: Men hakke vi ... vi har jo regnet helt feil! (ler) Her står det (ser på oppgaven) 4, her står det 3, her står det 2 (Peker på hver rad i pyramide 1)

G1: Ja, det er 12 sånne (viser med hendene)

G3: Ja, vi tenkte hvor mange oppover

G2: Ja, vi har ikke gjort oppgaven ferdig.

G1: Vi fant hvor mange mennesker det skulle være rett opp.

G2: (Ser på G1 og smiler) Nå fikk du endelig sagt det du ville si!

G1: NÅ fikk jeg endelig sagt det!

Utsnittet viser et vendepunkt i modelleringsprosessen til denne gruppa. De har strevd en stund med å løse oppgaven. Først har de trodd at de har løst den, men så ser de at noe ikke stemmer helt og oppdager hva de egentlig har regnet ut. G1 har sett dette en stund, men ikke vært i stand til å uttrykke det han ikke får til å stemme. Elevene bruker både diskusjon og samarbeid, endrer retning på det de jobber med og tenker seg om hver for seg og regner i hodet (Kode V-3, V-7 og V-8). Disse anstrengelsene eller handlingene går igjen de fleste gangene elevene kommer videre fra en kognitiv barriere.

Det kan diskuteres om det er positivt eller negativt at elevene relativt sjeldent spør lærer om hjelp. Det kan virke som elevene er innstilt på at de skal løse oppgavene selv. De aksepterer modelleringsoppgavene uten å stille spørsmål ved typen oppgave eller at det er stress å finne informasjon selv. Her virker det ikke som det er en forventning til læreren om å gi dem oppgaver de klarer å løse, slik det beskrives i Den didaktiske kontrakt (Blum et al., 2013), se også avsnitt 2.7). Det virker ikke som elevene forventer at læreren skal komme og forklare hvis de står fast, de virker forberedt på at de må jobbe litt selv for å få framdrift i løsningsprosessen. Elevene holder ut med å streve med oppgavene ganske lenge. Det kan også være at de vet at de er med i et forskningsprosjekt og at de derfor lettere godtar de uvante oppgavetypene. De fleste gangene elevene spør er det for å få bekreftelse på om det de har tenkt er riktig. Læreren svarer som regel med spørsmål for å få elevene til å tenke over sitt eget arbeid slik at de kan komme videre ved egen refleksjon i stedet for å bekrefte eller avkrefte om det de har gjort er riktig. Hun behersker her kunsten i å få elevene til å tenke selv, som i quality teaching (Blum & Ferri, 2009) er et viktig virkemiddel til å gjøre elevene selvstendige. DISUM prosjektet (Schukajlow et al.2012) listet opp en rekke slike kommentarer som ville få elevene til å jobbe selvstendig i en modelleringsprosess (se avsnitt 2.8.2), blant annet vil tilbakemelding fra lærer som for eksempel: *Gir dette resultatet mening for den virkelige situasjonen*, *lag en skisse* eller *les teksten nøye.* Slike kommentarer vil hjelpe elevene på sporet av å komme videre i oppgaven fordi det gir de et konkret oppdrag slik at de må tenke selv. Læreren tar ikke byrden fra elevene, men hjelper dem å sette fokus på noe som kan få dem videre i løsningsprosessen.

Det er verdt å merke seg at elevene ingen ganger benytter seg av å lage en oversikt over informasjon eller tegne en skisse som nøkkel til å komme videre fra en kognitiv barriere. De forsøker å lage tegning av en modell et par ganger i løsningsprosessen, men ikke fordi de står fast. Tegningen blir ikke riktig og fører til en kognitiv barriere. Datamaterialet viser generelt at elevene for det meste snakker sammen og tenker, men skriver og tegner lite. I komplekse problemstillinger vil det være til stor hjelp at elever har et rikere utvalg av representasjoner enn det elevene har vist i denne studien. Niss og Blum (2020, s.126) refererer til en undersøkelse av Rellensmann et al. (2017) der elever hadde positive effekter av å lage tegninger for å løse modelleringsoppgaver. Både situasjonstegninger og matematiske tegninger hjalp elevene videre fra kognitive barrierer. Ved å lage slike tegninger vil elevene aktiveres kognitivt og skissene vil klargjøre problemet for eleven og mulig føre til en dypere forståelse og løsning (se også beskrivelse av tidligere forskning i avsnitt 2.6.2). Elevene i denne studien går ofte «rundt grøten» før de blir bevisste på hvilke opplysninger de har fått oppgitt og hva de mangler for å finne en løsning. Det kan tenkes at å lage en skisse eller en oversikt over oppgaven raskere vil få elevene inn i problemstillingen og bevisste på hva de leter etter for å løse oppgaven.

6 Avslutning

I dette avsluttende kapittelet følger en kort oppsummering av de viktigste funnene i studien, refleksjon rundt hva disse funnene kan ha å si for mitt arbeid med matematikkundervisning og til sist en refleksjon rundt prosjektet der jeg ser tilbake på eventuelle forbedringer jeg kunne gjort.

6.1 Konklusjon

Matematisk modellering kan bare læres grundig hvis undervisningen oppfyller spesielle kvalitetskriterier. Det vil i praksis si en perfekt balanse mellom lærerens guiding og elevens uavhengighet (Blum & Ferri, 2009). Det er godt mulig at elever kan lære modellering på egen hånd i enkelte tilfeller, men for å bli dyktig kreves det mye trening og helst under veiledning i kvalitetsundervisning, viser altså forskningen. Denne studien viser at matematisering er vanskelig for elevene og at oppgavene har mye å si for hvilken modelleringsprosess elevene får når de jobber. Elevene har lite protester i forhold til oppgaveformen, de lager antakelser helt naturlig. Elevene har et lite repertoar av anstrengelser eller handlinger de kan ty til for å komme seg videre i modelleringsprosessen når de står fast (se avsnitt 5.4). Det kan virke som det er uvant for elevene i denne studien å bruke skisse både for å lage oversikt og matematisk modell, og å øke elevenes kompetanse i dette vil støtte dem både i arbeid med modellering og andre problemløsningsoppgaver. Elevene bruker og tolker tall noe ukritisk. Det er tydelig at oppgaveformen er uvant for dem, de er usikre på hvilke regnestykker de skal lage og tyr ofte til kjente framfor mer effektive, som for eksempel gjentatt addisjon isteden for divisjon. Elevene tar også med seg få erfaringer om modeller fra oppgave til oppgave. Blum og Ferri (2009) trekker fram at modelleringsoppgaver har høy grad av kompleksitet og at arbeidet med å løse slike oppgaver krever at elevene bruker mange ulike ferdigheter samtidig. Det er ikke mulig å beskrive modellering med en teori eller en metode, derfor vil ikke elevene ha et bevisst forhold til en problemløsningsstrategi når de modellerer. Det krever mye trening for å bli selvstendig i å løse modelleringsoppgaver. Bevisstgjøring gjennom kvalitetsundervisning, både av løsningsmåter og ulike typer modeller som kan brukes vil være til hjelp for elevene for både øke sin kompetanse om modellering på et meta-nivå og å lære varierte måter å lage modeller på. Gjennom å lytte til hverandre og under gjennomtenkt veiledning av lærer kan de utvikle en forståelse for hvordan modelleringsoppgaver kan angripes og hvilke modeller som er mulige å lage.

6.2 Implikasjoner

Etter å ha jobbet med modellering og analysert elevers modelleringsprosesser i ulike typer oppgaver ser jeg mange positive effekter av å jobbe med modelleringsoppgaver. Effekten av å jobbe i grupper er stor, datamaterialet viser at de fleste gangene elevene løser sine kognitive barrierer er det ved hjelp av å tenke, reflektere og jobbe sammen om problemet. Når elevene på gruppa deler sine tanker og spørsmål, utfordres de andre på gruppa og samspillet driver arbeidet med oppgaven framover. Flere studier viser også at å jobbe alene kan resultere i at elevene tidligere i prosessen går seg fast i problemet og får et mye mindre læringsutbytte enn om de jobber sammen (DISUM; Blum & Niss, 2020). I sistnevnte litteratur påpekes det også at det har vist seg at å jobbe i grupper genererer mye mer læring for hver enkelt elev enn å jobbe individuelt I streben etter å bygge det Liljedahl (2021) kaller *et tenkende klasserom,* ser jeg at arbeid med modellering fyller alle kriterier (se avsnitt om quality teaching, 2.6). Å jobbe med modelleringsoppgaver løfter elevene sine resonnement som genuint viktige fordi gruppene på grunn av sine antakelser og modeller skaper sin egen versjon av oppgaven. Dette var det noen av elevene i testgruppa uttrykte var en fordel og en motivasjon for å jobbe med modellering. I en oppsummering blir det ikke et rollespill at alle grupper sine løsninger er interessante, men man er faktisk nødt til å følge resonnementene for å forstå hvordan gruppa har løst oppgaven. Jeg ser også viktigheten av oppsummering av gruppenes løsninger på oppgavene, både for motivasjon, deling av ideer og ikke minst utvikle måter å lage modeller på. Elevene i denne studien har ikke en rivende utvikling i å lage modeller. Det er heller ikke å forvente etter bare fem oppgaver løst, men det er mulig de hadde plukket med seg flere erfaringer om hvordan lage en modell og blitt mer bevisste på hva en modell er om det hadde vært mer fokus på dette i oppsummeringene. Det er essensielt at læreren i en oppsummering er forberedt på ulike løsninger fra elevene og klarer å holde sin egen løsningsmetode i bakgrunnen. Strategiske hjelpespørsmål fra læreren er viktig for å gjøre elevene i stand til å reflektere over sine løsninger og utvikle disse videre. For å lage tenkende klasserom må vi forsøke å aktivere elevene kognitivt i så stor grad som mulig. Bare da utvikler de sine resonnement i stedet for å bli passive mottakere av andres tanker og argumentasjoner.

I denne studien var oppsummeringene i klassen av en slik art at elevene ikke fikk vist eller presentert modeller som ble knyttet til situasjonen og som viste ulike løsninger som fungerte. Når elevene sitter og strever lenge med et problem slik som i disse modelleringsoppgavene, er det avgjørende for videre utvikling at de ender opp med forslag til løsning fra andre elever og fra lærer. For å få elevene bevisste på strukturelle likheter mellom modeller, slik at de kan konstruere lignende modeller i oppgaver med situasjoner som ligner på hverandre, må de bli gjort oppmerksom på denne likheten. Det er vanskelig å finne ut hvor mye elever tar med seg av erfaringer fra oppgave til oppgave. Lærere og elevene selv må konstruere modeller og bli bevisste på hvordan disse fungerer, slik at elevene har mulighet til å ta med seg erfaringen videre for lignende problemstillinger. Et meta-kognitivt fokus som dette er avgjørende for at elevene skal utvikle verktøy til å bli selvstendige modellerere. Begrepet modell kan være vanskelig å forstå fordi det er abstrakt og elevene har ofte lite trening i å lage disse. Det er viktig å understreke at dette ikke er det samme som å vise en fasit slik at elever skal lete etter oppgaver der de kan gjøre det likt. En oppsummering bør ta utgangspunkt i elevenes tankemønstre, men dette er krevende både for elever og lærer. For å spare tid og energi hos begge ender ofte læreren opp med å presentere sin løsning og tankegang, og da når man ikke inn til mange av elevene. Anderson (et al., 1996) stadfester i sin forskning at det er mulig elever overfører kunnskap om modeller fra en modelleringssituasjon til en annen hvis de blir gjort bevisste på denne strukturelle likheten.

For å gjøre elevene i bedre stand til å overføre ren matematisk kunnskap til situasjoner fra virkeligheten er det viktig å ha fokus på denne overføringen i arbeid med modellering. Vi må gjøre elevene oppmerksom på hvilken matematikk vi benytter oss av når vi løser modelleringsoppgaver. Samtidig tror jeg effekten av å jobbe med ulike modelleringsoppgaver og få erfaring med dette er stor. Det har vist seg i denne studien at ved å gjøre et lite antall oppgaver over en periode på 5 uker, utviklet elevene en større trygghet for å takle slike oppgaver og med dette et grunnlag for å jobbe med både fokus på matematisk kunnskap og hvordan konstruere modeller.

Jeg underviser i matematikk på 9.trinn og ønsker å basere min undervisning på prinsippene for *quality teaching* som Blum & Leiss (2020) lister opp. Det innebærer å ta på alvor kjerneelementene i læreplanen i matematikk, LK20, og bruke disse som grunnlag for hvilken måte jeg underviser på. Det innebærer også å ikke gjøre modelleringsoppgaver som en «happening», men gjøre det til en del av den daglige undervisningen. Ved å veksle mellom fokus for øktene i modellering kan vi opparbeide rutiner og erfaring hos elevene som gjør de selvstendige i arbeidet med matematikk, og også øke selvtillit og interesse for faget ut over skoletimene. Jeg må sammen med mine kollegaer løfte fokus og jobbe med modelleringsoppgaver for å skaffe oss den erfaringen som er nødvendig for å ta modellering i bruk som en metode. For å være trygge i klasserommet bør læreren ha nok erfaring med modellering til å kunne sette seg inn i de ulike elevers tankemønstre og løsninger.

Skolen har en viktig oppgave i å bidra til at elevene utvikler et rikt repertoar av strategier og verktøy for å komme videre når de står fast i en problemløsningsprosess, enten det gjelder modellering eller andre problemløsningsoppgaver. Ved å kunne uttrykke matematiske sammenhenger ved ulike representasjoner vil elevene være i stand til å se ting fra ulike synsvinkler og kanskje også se flere løsninger eller mulige sammenhenger. Elevene vil utvikle selvtillit etter hvert som de blir mer selvstendige i dette arbeidet. Etter inspirasjon fra studien til Reilensmann (et al., 2017, presentert i Blum og Niss (2020)) vil jeg strebe etter å lære elevene å lage situasjonstegninger av den virkelige situasjonen og matematiske tegninger for å illustrere den matematiske modellen når elevene jobber med både modelleringsoppgaver og andre problemløsningsoppgaver. På denne måten vil de bli bevisste på informasjon og matematiske sammenhenger og lage et sterkere repertoar for å løse andre komplekse oppgaver. Det anbefales videre forskning på hvordan å lage situasjonsskisser og matematiske skisser kan være med på å øke elevenes evne til å løse oppgaver av problemløsende art. Det hadde også vært nyttig med mer kunnskap om hvordan systematisk arbeid med modellering over tid med kvalitetsundervisning vil ha effekt på elevenes evne til å lage modeller.

6.3 Egen vurdering av prosjektet

Denne studien kunne med fordel hatt flere elever, og gjerne fra ulike klasser. Dette kunne gjort at slutningene ble mer generelle. Innsamling og transkripsjon av data krever imidlertid mye tid, og det var hovedgrunnen til at det ble to grupper i samme klasse. Hvis gruppene hadde vært fra ulike klasser ville sammenligningsgrunnlaget mellom gruppene blitt mer robuste fordi de hadde kommet fra ulike miljøer. Fordelen med å ha gruppene i samme klasse er at læreren er den samme og gruppene har fått samme instruksjon både før og etter oppgaveløsning. I en kvalitativ case-studie som denne er det uansett ikke mulig å trekke generelle slutninger da datamaterialet blir for lite for dette. I ettertid av prosjektet ser jeg også flere funn i forhold til samspillet mellom lærer og elev, som kunne vært interessant å utforske videre. Dette ville gitt et annet fokus på studien. Jeg tenker spesielt på innledning og oppsummering av øktene. Dette har blitt diskutert flere ganger i oppgaven, så jeg utdyper ikke mer om det her. Funnene oppdages så sent i studien, at det var for sent å endre på problemstillingen.

Jeg er fornøyd i forhold til eget utbytte av studien. Erfaringene vil kunne brukes både i egen undervisning og i fagsamarbeidet på egen skole. Det er interessant, ikke bare i matematikkfaget, men som en filosofi generelt i undervisning, at elevene gjør erfaringer gjennom å løse problemer nært knyttet opp mot virkeligheten. Det er en kjent sak i norsk skole at undervisningen er for teoretisk og ofte ligger på siden av elevenes kontekst, elevene uttrykker også dette i elevundersøkelser. Vi har ikke heller lykkes å integrere matematikkfaget i en større helhet, men dette er et større samfunnsoppdrag og får ikke plass i et lite prosjekt som dette.

7 Bibliografi

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). Situated learning and education. *Educational researcher*, *25*(4), 5-11.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *Zdm*, *38*(3), 293-301.

Berget, I. K. L., & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, *13*(1), 83–97.

Besser, M., Leiss, D., & Blum, W. (2020). Who participates in which type of teacher professional development? Identifying and describing clusters of teachers. *Teacher Development*, *24*(3), 293-314.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, *22*(3), 123-139.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*.

Blum, W., Brown, J. P., Kaiser, G., & Stillman, G. A. (Red.). (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (1st ed. 2013). Springer Netherlands : Imprint: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5

Blum, W., & Leiss, D. (2005). „Filling Up "-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxois: FUNDEMI IQS–Universitat.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA*, *12*, 222.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95.

Ferri, R. B. (2017). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

Frejd, P., & Vos, P. (2022). A commentary on the Special Issue "Innovations in measuring and fostering mathematical modelling competencies". *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 455-468.

Galbraith, P. L., Stillman, G., & Brown, J. (2010). Turning ideas into modeling problems. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 133-144). Springer, Boston, MA.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9

Grønmo, L. S., Onstad, T., Pedersen, I. F., & Trends in International Mathematics and Science Study. (2010).
Grønmo, L. S., Hole, A., Onstad, T., Borge, I. C., Stedøy, I. M., Draagen, M. V., ... & Hagen, T. E. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken*. Nordic Open Access Scholarly Publishing.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *51*(4), 467-496.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M., & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Gyldendal akademisk.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, *38*(3), 302-310.

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In *Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 129-149). Springer, Cham.

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In *Compendium* (Vol. 267, pp. 267-291).

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020*

Kunnskapsdepartementet (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Lerman, S. (Red.). (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Press.

Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole. Unipub.

Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA–Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 629-639.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. (1 utg.) Routledge.

Niss, M., Højgaard Jensen, T., Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsen, & Undervisningsministeriet. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Niss, M. (2003, January). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational studies in mathematics*, *79*(2), 215-237.

Stillman, G. (2008). Blum, W., Galbraith, PL, Henn, HW., & Niss, M.(eds)(2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. Springer Science & Business Media.

Singstad, J. L. (2020). *Math Trails og modellering* (Master's thesis).

Svartdal, Frode: *reliabilitet* i *Store norske leksikon* på snl.no. Hentet 11. mai 2022 fra https://snl.no/reliabilitet

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Gyldendal Akademisk.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – Godkjenningsbrev fra NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

475347

Prosjekttittel

Hva gjør elever på 8.trinn når de løser modelleringsoppgaver i matematikk?

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Niclas Larson, niclas.larson@uia.no, tlf: 38142404

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Tove Granmo, tovegr@uia.no, tlf: 41202325

Prosjektperiode

27.09.2021 - 22.06.2022

Vurdering (2)

30.09.2021 - Vurdert

NSD har vurdert endringen registrert 26.09.2021.

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 30.09.2021. Behandlingen kan fortsette.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til videre med prosjektet!
Kontaktperson hos NSD: Karin Lillevold

8.2 Vedlegg 2 - Samtykkeskjema til foresatte for elever

UiA University of Agder Norway

27.09.2021

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Hva gjør elever når de løser modelleringsoppgaver i matematikk?»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hva elever gjør når de løser modelleringsoppgaver i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med denne studien er å analysere hva elever på 8.trinn gjør i forhold til skriftlig og muntlig kommunikasjon når de løser modelleringsoppgaver i matematikk. Formålet med studien er også å se på hvilken utvikling elever på 8.trinn har over en kort periode på fire uker med fire ulike problemløsningsoppgaver.

Elevenes muntlig og skriftlige kommunikasjon skal analyseres med bakgrunn i modellen fra Blum & Ferri (2007) og vi vil i tillegg se på rekkefølgen av de stegene elevene tar i prosessen med å løse oppgavene. Vi vil også se hvilken progresjon elevene gjør over en tidsperiode på 4 uker der de løser en modelleringsoppgave hver uke.

Dette er en masteroppgave der forskningsspørsmålene som skal analyseres er:

Forskningsspørsmål 1:
Hva gjør elever på 8.trinn når de løser modelleringsoppgaver i par? Hva slags skriftlig og muntlig kommunikasjon skjer når de løser oppgavene?

Forskningsspørsmål 2:

Hvilke skritt i modellerings syklusen til Blum & Ferri (2007) er elevene innom når de løser oppgavene og i hvilken rekkefølge gjør de dette? Hvilke funn kan man gjøre i forhold til progresjon etter hvert som de løser flere oppgaver over en periode på fire uker?

Opplysningene skal brukes i masteroppgaven som blir publisert via UiA. Alle deltakere og skolen blir anonymiserte.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder, Institutt for matematiske fag, ved veileder Niclas Larson er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Utvalget vil være av tilfeldig fra de elevene som ønsker å delta. To klasser på trinnet vil bli forespurt, utvalget av klasser gjøres ut fra hva som passer på timeplan for forsker og mattelærer.

UiA University of Agder Norway

27.09.2021

Hva innebærer det for deg å delta?
Hele klassen blir som en del av matematikkundervisningen bedt om å løse et modelleringsproblem hver uke. Dette sier Kunnskapsløftet at elevene skal jobbe med. Alle jobber i par. Du som skal delta blir tatt opp på video mens du løser oppgaven sammen med en medelev. Deretter skal dere se videoen og forklare hva dere tenkte og eventuelt hvorfor mens dere ser. Det hele vil ta cirka 60 minutter, og vil være i en matematikktime som klassen uansett har.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det du gjør vil ikke ha noen betydning for vurdering i faget.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg og mine to veiledere som vil ha tilgang til videoene. Navn og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Alle opplysninger anonymiseres i masteroppgaven, og vil ikke kunne spores til deg.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke. På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Universitetet i Agder, institutt for matematiske fag.
Veileder: Niclas Larson, Mail: *niclas.larson@uia.no*
Masterstudent Tove Granmo, Mail: *tovegr@uia.no*
Vårt personvernombud: Ina Danielsen, Mail: *ina.danielsen@uia.no*

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

27.09.2021

Med vennlig hilsen

Niclas Larson
(Forsker/veileder)

Tove Granmo
(Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet: *Hva gjør elever på 8.trinn når de løser modelleringsoppgaver i matematikk?,* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- ☐ delta i videoopptak
- ☐ delta i intervju

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet:

(Navn på elev) (Signatur foresatt til prosjektdeltaker, dato)