Elevers kompetanse i brøk – med og uten konkretiseringsmateriell

Anders Haugen og Ola Morset

VEILEDER
Niclas Larson

Universitetet i Agder, 2020
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår tid som studenter i Kristiansand ved Universitetet i Agder. Tiden fra vi begynte på grunnskolelærerutdanningen høsten 2015 til i dag har vært både lærerik og krevende, og vi er begge enige i at det har vært en tid vi vil komme til å savne.

Å samarbeide om å skrive en masteroppgave har vært en interessant og gøy prosess. Vi har vært både høyt oppe og langt nede ved ulike anledninger, men ser tilbake på det siste halvåret som et høydepunkt i vårt utdanningsløp.

Vi vil begynne med å rette en takk til de to skolene som har åpnet sine dører for at vi skulle få gjennomføre våre undersøkelser. Mottakelsen og mulighetene dere ga oss har vært avgjørende for masterprosjektet som en helhet. Vi må selvfølgelig også takke alle informanter som frivillig har stilt opp og bidratt til vår forskning.

Videre ønsker vi å rette en stor takk til vår veileder, Niclas Larson, som har bidratt med gode tilbakemeldinger i alle faser av prosjektet, til alle døgnets tider.

Til slutt ønsker vi å takke alle som har støttet og hjulpet oss underveis i oppgaveskrivingen. Våre nærmeste, familie, samboere, venner og medstudenter på masterprogrammet. Deres råd, oppmuntring og støtte ville vi ikke vært foruten.

Anders Haugen og Ola Morset

Kristiansand, juni 2020

Sammendrag

Brøk er et emne som kan være utfordrende for elever, og framstår som sentralt i forståelsen av algebra (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Neagoy, 2017; Wu, 2001). Formålet med denne oppgaven er å se hvordan elevers matematiske kompetanse kommer til syne i arbeid med brøkoppgaver, med og uten konkretiseringsmateriell. Studien vil ta for seg følgende forskningsspørsmål:

Hvilke likheter og ulikheter kommer til syne når elever på 8. trinn arbeider med brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell?

For å besvare forskningsspørsmålet har vi tatt i bruk et kvalitativt forskningsdesign, hvor metoden er en flerkasusstudie. Det ble gjort totalt åtte oppgavebaserte intervjuer fordelt på fire grupper, bestående av to eller tre elever. Hver gruppe gjennomførte to intervjuer, ett intervju med konkretiserings-materiell, og ett uten.

Dataanalysen er gjort med et teoretisk grunnlag i Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder for matematisk kompetanse. For å belyse likheter og ulikheter mellom de oppgavebaserte intervjuene, har vi analysert elevenes diskusjoner, resonnementer og svar, og vurdert i hvilken grad matematisk kompetanse kommer til syne.

Resultatene i denne studien viser at elevenes matematiske kompetanse kom mer til syne i arbeid uten konkretiseringsmateriell enn med, og vi har sett at bruk av konkretiseringsmateriell ikke garanterer umiddelbar suksess. I undervisning er det som lærer sentralt å gjøre seg kjent med de mulighetene konkretene har til å belyse de ulike matematiske sidene i et emne.

Abstract

Although the topic of fractions is central to the field of mathematics, it can be challenging for students (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Neagoy 2017; Wu, 2001). What is the impact of providing appurtenant manipulatives with fraction math exercises on the ability of Norwegian 8th grade students to understand and solve such exercises? This thesis makes clear the significance of manipulatives in bringing forth the mathematical proficiency of Norwegian 8th grade students working in groups.

In this multiple-case study, a qualitative research methodology was used to conduct a total of eight task-based interviews on four groups consisting of 2–3 students. Each group undertook interviews with and without manipulatives.

The resulting dataset was analyzed using the five strands of mathematical proficiency described in Kilpatrick, Swafford and Findell (2001). To shed light on the difference between the interview results with and without provided manipulatives, this involved evaluating the degree of mathematical ability shown by the students based on an analysis of the discussions among students in each group, as well as their collective reasoning and answers.

No significant effect of providing manipulatives with the exercises was found. The students fraction mathematics ability was, in fact, shown to be most evident without manipulatives. The authors suggest that teachers should familiarize themselves with the possibilities of manipulatives in visualizing fraction mathematics to lower secondary school children, but at the same time be aware that providing such material is not guaranteed to lift the student’s ability on its own.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Siden år 2000 har PISA-undersøkelsen blitt gjennomført hvert tredje år i en rekke land verden over og måler 15-åringers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag. Disse fagområdene blir testet og målt ved hver undersøkelse, hvor én av disse tillegges et ekstra fokus på. Eksempelvis har matematikk blitt ekstra vektlagt i undersøkelsene i 2003 og 2012, og står nok en gang for tur ved den kommende undersøkelsen i 2021 (Utdanningsdirektoratet, 2019). I 2015 kunne Utdanningsdirektoratet meddele at norske elever skåret bedre enn gjennomsnittet i matematikk og viste en positiv utvikling i faget. Ved neste PISA-undersøkelse (2018) var resultatene for matematikk uendret. Selv om PISA-undersøkelsen ikke fokuserer på brøk isolert sett, brukes likevel brøk, prosent og desimaltall som et kjennetegn på prestasjonsnivåene som beskriver elevenes matematiske kompetanse. Nivåene strekker seg fra "under nivå 1" til "nivå 6", hvor nivå 6 er høyeste måloppnåelse. Kjærnsli og Olsen (2013) skriver dette i beskrivelsen av nivå 3: "...de er til en viss grad fortrolige med prosent, desimaltall og brøk, og kan arbeide med proporsjonale størrelser" (s. 54). Om vi ser på da matematikk sist var hovedfagområdet, i 2012, kan vi se at 46 % av norske elever lå på nivå 2 eller lavere, noe som kan være en indikasjon på hvor mange som har problemer med brøk, prosent og desimaltall (Kjærnsli & Olsen, 2013).

Kunnskap og ferdigheter innenfor regning med brøk og desimaltall er avgjørende for å lære mer avansert matematikk. I tillegg er det mange yrker og hverdagssituasjoner som krever denne kunnskapen. Det er derfor problematisk at denne typen regning byr på mange utfordringer for barn og voksne (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015). Som et pilotprosjekt bestemte regjeringen i 2015 at det skulle innføres en nasjonal deleksamen i matematikk for grunnskolelærerutdanningen (Kunnskapsdepartementet, 2015). Forskriftsendringen ble vedtatt og institusjonene ble dermed pålagt å gjennomføre denne deleksamenen samme år (Tokstad & Hamberg, 2017). I denne deleksamenen ble grunnskolelærerstudentene testet i undervisningskunnskap i brøk, desimaltall og prosentregning. I 2016 ble den nasjonale deleksamenen avholdt for andre gang på grunnskolelærerutdanningen, og var på hele 37 % (NOKUT, 2017). Disse tallene skulle vise seg å være én av faktorene for vårt valg av tema i denne masteravhandlingen.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Høsten 2019 begynte planene for vår masteroppgave som skulle ferdigstilles våren 2020. Vi har gjennom vår tid som studenter ved Universitetet i Agder tatt med oss erfaringer fra praksisperioder og som vikarlærere, og opplevd at brøk ofte byr på spesielle utfordringer. For eksempel vil ikke operasjoner innen de fire regneartene lenger gjelde på lik måte i kalkulasjoner med brøker som med heltall og tall på desimalform. På bakgrunn av disse erfaringene ble vi raskt enige om at vi ønsket å forske på elever innenfor temaet brøk. Dette temaet er omfattende, og det finnes utallige måter å forske innenfor de rammene emnet gir oss. Etter mye diskusjon falt valget etter hvert på konkretiseringsmateriell. Vi er nysgjerrige på hvilken betydning konkrete gjenstander, som elever kan ta og føle på, har for elever når de arbeider med brøk.

1.2 Oppgavens formål og forskningsspørsmål

Formålet med oppgaven er å se hvordan elevers matematiske kompetanse kommer til syne når de i samhandling med hverandre arbeider med brøkoppgaver, med og uten konkretiseringsmateriell. Gjennom to intervjuer fordelt på to dager vil elevene arbeide med brøkoppgaver, én dag med konkretiseringsmateriell, og en dag uten. Som framgangsmåte for å skaffe oss innsikt i elevers matematiske kompetanse, vil vi kontrastere de likheter og ulikheter som kommer til syne i elevenes arbeid innenfor temaet brøk. Vår nysgjerrighet rundt konkretiseringsmateriells betydning for elever i arbeid med brøk, samt formålet med oppgaven, bidro til formuleringen av følgende forskningsspørsmål:

- Hvilke likheter og ulikheter kommer til syne når elever på 8. trinn arbeider med brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell?

Likhetene og ulikhetene vil avdekkes med utgangspunkt i Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder for matematisk kompetanse, som vi kommer vil presentere i kapittel 2.4. Her er det viktig å poengtere at begrepet *matematisk kompetanse* er en direkte oversettelse av det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som *mathematical proficiency*, og må derfor alltid ses i denne betydning. Kompetansebegrepets øvrige betydning i det norske språk er dermed ikke relevant eller meningsfullt i denne oppgaven. Dette begrepets betydning samt øvrig teoretisk grunnlag for oppgaven vil bli presentert i det påfølgende kapittelet.

2 Teoretisk rammeverk

Teoridelen har som hensikt å danne oppgavens faglige plattform, og tar for seg relevant forskning for vårt valgte tema, brøk og konkretiseringsmateriell. I det først delkapittelet vil det gjøres rede for det sosiokulturelle perspektivet for læring, hvor temaene den proksimale utviklingssonen, mediering og artefakter vil bli presentert. I de to påfølgende delkapitlene vil det bli gjort rede for de sentrale begrepene i vår problemstilling, brøk (2.2) og konkretiseringsmateriell (2.3). Her vil det også implementeres tidligere forskning som er gjort innen disse temaene. Det siste delkapittelet (2.4) presenterer teorien som er selve grunnlaget for vår analyse av data, nemlig Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder for matematisk kompetanse.

2.1 Læringsteoretisk ståsted

Ettersom denne studien ser på hvilke forskjeller og likheter som kommer til syne når elever, i samhandling med hverandre, løser brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell, var det et naturlig valg med et sosiokulturelt perspektiv på læring. Menneskers samspill med slike fysiske redskaper er sentralt i et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling (Säljö, 2000). Det sosiale samspillet mellom elevene vil i stor grad påvirke forskningen, og konkretiseringsmateriellets rolle som verktøy i læringen vil stå i fokus. I denne delen vil vi derfor presentere teori som omhandler mediering og artefakter, da konkretiseringsmateriell som verktøy er viktig med tanke på hvordan elever tilegner seg ny kunnskap.

2.1.1 Sosiokulturell læringsteori

Lev Vygotsky er et sentralt navn innenfor det sosiokulturelle perspektivet på læring og utvikling. Fundamentet i Vygotskys studier er hvordan menneskers mentale prosesser må tas i betraktning i forhold til forhistorien og den framtida mennesket utvikler seg mot (Wertsch, 1985). Vygotsky (1978) skriver blant annet at når en skal forske på et individs utvikling over tid, må en ta høyde for alle faser og forandringer som oppstår i denne tiden og at det kun er i bevegelse at et individ viser hva det er. Vygotsky sier videre at barnets utvikling skjer med utgangspunkt i det sosiale samspillet mellom individet og omgivelsene hvor språket som redskap spiller en sentral rolle.

2.1.2 Den proksimale utviklingssonen

En av Vygotskys teorier omhandler det han kaller "The zone of proximal development" (oversatt: Den proksimale utviklingssonen). Læring bør tilpasses elevenes utviklingsnivå, hvor det første nivået kalles *det faktiske utviklingsnivået*, som er det stadiet som sier hva eleven er i stand til å utføre alene. Det andre nivået, *det potensielle utviklingsnivået*, er det stadiet som sier hva den samme eleven er i stand til å utføre i samhandling med voksne eller andre med mer kunnskap. Gapet mellom disse nivåene kalles *den proksimale utviklingssonen* (Vygotsky, 1978).

2.1.3 Mediering

Når mennesker blir født, blir de født inn i en sosial ramme og utvikler samspill og erfaringer med de mennesker som de omgir seg med. Säljö (2000) skriver at "... kunskapstraderingen sker genom att omvärlden *förtolkas* – eller för att använda det begrepp som är grunden för ett sociokulturellt perspektiv: *medieras* …" (s. 66). Med andre ord skjer overføringen av kunnskap gjennom at vi tolker, eller *medierer*, omverdenen. Vygotsky (1978) setter inn et kognitivt redskap som fungerer som et bindeledd mellom stimulus og respons. Dette redskapet kaller han for *tegn*:

> ... the structure of sign operations requires an intermediate link between the stimulus and the response. This intermediate link is a second order stimulus (sign) that is drawn into the operation where it fulfills a special function; it creates a new relation between S and R. The term "drawn into" indicates that an individual must be actively engaged in establishing such a link. (s. 39)

For at et tegn skal skape en ny relasjon mellom stimulus og respons, krever det altså at mennesket aktivt engasjerer seg i prosessen. Språklige tegn og symboler må gis mening, og dette lærer mennesket gjennom sosiale handlinger. Ord og språk medierer dermed omverdenen for oss slik at den framstår som meningsfull (Säljö, 2000). Selv om Vygotsky fremmer språket som vårt viktigste medierende redskap, er også fysiske redskap – artefakter – sentrale.

2.1.4 Artefakter

Säljö (2000) sier at en grunnleggende tanke i det sosiokulturelle perspektivet er at fysiske, såvel som intellektuelle og språklige, redskap medierer virkeligheten for mennesker i konkrete virksomheter. "Gjennom historien har flere menneskelige funksjoner og kompetanser flyttet ut i fysiske gjenstander – artefakter" (s. 75). Med dette menes det at mennesker håndterer omverdenen ved hjelp av fysiske og intellektuelle redskaper som en integrert del av den sosiale praksisen. Säljö påpeker videre at man må se det helhetlige bildet mellom artefakter, som er de fysiske redskaper som omgir oss, og menneskelig tankegang når en skal prøve å forstå læring som en del av sosiale praksiser, og ikke analysere artefaktene for seg selv og deretter menneskenes tankegang. I denne studien vil konkretiserings-materiellet fungere som de fysiske redskapene elevene brukte til å løse brøkoppgavene.

2.2 Brøk

Det første begrepet i problemstillingen vi ønsker å belyse er brøk. Begrepet kan gjerne forklares enkelt som "et tall delt på et annet tall", men brøk er også et komplekst begrep med flere ulike betydninger avhengig av kontekst. Denne kompleksiteten gjør at det stilles et større krav til forståelse av brøk om en skal lykkes i arbeid med det, noe som kan være spesielt krevende for elever. Neagoy (2017) går så langt som å omtale brøk som en nøkkelfaktor for elevers forhold til matematikk, og beskriver brøk som den første matematiske "snublestein" til elever. Med en gang forståelsen for matematikk uteblir og den kun omhandler meningsløs memorering, vil elever begynne å mislike matematikk (Neagoy, 2017). På bakgrunn av dette vil vi i først vise hvordan brøk ofte blir presentert, før vi vil då dypere inn i brøkbegrepets funksjon. Videre vil vi se på hvorfor brøk kan være utfordrende for elever, og hvorfor brøk er viktig.

2.2.1 Introduksjon av brøk

Om en slår opp ordet brøk i ulike fora vil en se at det introduseres på ulike måter. Lærebøker, forskere og institusjoner kan synes å ha sine foretrukne formuleringer til spørsmålet: "Hva er en brøk?". Det kan være vanskelig å definere brøk kort, presist og forståelig, og samtidig ta hensyn til kompleksiteten begrepet innehar. Det er dessuten nærliggende å tro at pedagogiske og didaktiske vurderinger blir gjort i utforming av definisjoner (spesielt i læringsmateriell) og at dette er grunnen til at brøk introduseres relativt ulikt. Under gir vi tre eksempler på hvordan brøk introduseres på ulike læringsplattformer:

- "En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek er det samme som deletegn. En brøk er en del av noe." (Matematikk.net, u.å.).

- "Helt grunnleggende er en brøk et matematisk uttrykk som innebærer at vi deler et tall på et annet tall". (MatteMestern, u.å.).

- "A fraction simply tells us how many parts of a whole we have. You can recognize a fraction by the slash that is written between the two numbers. We have a top number, the numerator, and a bottom number, the denominator." (Alcocer, 2014).

Som Matematikk.net (u.å.), velger flere andre å ha fokus på å introdusere de ulike delene av en brøk, og selve notasjonen (teller, nevner og brøkstrek). Når brøk introduseres er det for elever en helt ny måte å skrive tall på som er forskjellig fra tidligere heltallsnotasjon, og derfor en naturlig måte å begynne utforskning av emnet.

Videre er det flere som, i stedet for notasjon, velger å ha fokus på at en brøk er en operasjon og det samme som divisjon. Her utnyttes det at brøk kan kobles opp mot noe elevene allerede kan, divisjon, altså at $\frac{a}{b}$ er det samme som $a : b$.

Det går også igjen i flere definisjoner at en brøk er 'en del av noe' eller 'en del av en hel', ofte supplert av pizza- eller kakeeksempler. Disse type definisjoner har fokus på å innføre brøk som noe konkret, i motsetning til innføring av abstrakt brøknotasjon. Sirkeleksemplene visualiserer hva som er helheten i en brøk og hvor mange deler vi har av den.

Om vi derimot slår opp i et matematikkleksikon, blir brøk definert slik: "Et uttrykk av formen $\frac{a}{b}$. Streken kalles brøkstrek; a kalles teller og b nevner. Eksempel: $\frac{5}{6}$, $\frac{x+1}{x-1}$" (Thompson, 2006, s. 57).

2.2.2 Ulike aspekter ved brøk

Som vi har vært inne på har brøk flere betydninger og det er ulike måter en kan forstå eller tolke brøk på ut ifra konteksten. Vi velger å omtale dette som ulike aspekter ved brøk. Van de Walle, Karp og Bay-Williams (2015) deler aspektene inn i fem ulike kategorier som vi skal presentere under.

En del av en hel
Denne måten å forstå brøk på er, som vi har vært inne på, vanlig i introduksjonen av brøk. Nevneren sier hvor mange like deler noe er delt opp i, og telleren hvor mange av delene vi har. Brøk som en del av en hel passer godt inn i praktiske kontekster og kan enkelt visualiseres gjennom deler av et område.

Måling
Når brøk forstås gjennom måling handler det for eksempel om å bruke en del av en bestemt lengde til å måle den. For eksempel kan brøken $\frac{4}{5}$ måles opp i et antall biter på $\frac{1}{5}$, eller mindre biter på $\frac{1}{10}$.

Divisjon
Dette er heller ikke en uvanlig måte å forklare brøk, og refererer til brøken som et divisjonsstykke. En slik forståelse blir også kalt *kvotient* (svaret i et divisjonsstykke). Vi leser brøken $\frac{a}{b}$ som $a : b$. Når en skal gjøre en brøk om til desimaltall ($\frac{3}{4}$ = 0,75), eller en uekte brøk til blandet tall ($\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$) er det nødvendig med en slik forståelse.

Operator
Når en brøk indikerer en operasjon, for eksempel $\frac{4}{5}$ av en skoleklasse på 20 elever var tilstede, eller $\frac{1}{3}$av en kake ble spist. Forståelsene her handler altså om å kunne operere med en brøk som en del av et helt tall.

Forholdstall
Dette dukker opp når vi bruker brøk til å forklare et forhold, ofte mellom to ulike grupper. For eksempel er forholdet mellom ansatte som drikker kaffe på skolen, og de som ikke drikker kaffe er $\frac{6}{10}$. Dette betyr at av 16 personer er det seks som drikker kaffe og ti som ikke drikker kaffe. Dette kan også skrives som "6 : 10". På en saftflaske kan det stå at blandingsforholdet skal være "1 : 3", hvilket betyr én del saft til tre deler vann, som gir fire deler totalt.

2.2.3 Brøk i undervisning

Når vi nå har sett på de ulike betydningene av brøk er det ikke vanskelig å forstå hvorfor det finnes så mange ulike måter å introdusere det på. Pedagogisk sett er det usannsynlig å kunne foreta seg alle sider av brøk ved introduksjonen av begrepet. Når det kommer til undervisning av brøk generelt er det derimot mye som tyder på at enkelte grep vil gi klare fordeler. Clarke, Roche og Mitchell (2008) anbefaler å ha fokus på brøkens betydning framfor arbeid med prosedyrer og regning i brøk med de fire regneartene som ofte blir det store målet i undervisning. Dette støttes av Siegler og Pyke (2013) som trekker fram begrepsmessig forståelse (som vil bli forklart i delkapittel 2.4) av brøk og innlæring av hva brøk "egentlig er" som avgjørende; at brøk er tall som befinner seg i uendelig negativ og positiv retning, at mellom to brøker finnes det et uendelig antall andre brøker, at relasjonen mellom teller og nevner avgjør størrelsen, ikke hvert tall for seg selv, at brøken blir større når telleren blir større og mindre når nevneren blir større, at brøk kan bli representert på tallinja, osv. (Siegler & Pyke, 2013). Van de Walle et al. (2015) ser på forståelse av brøk som det å forstå alle de mulige måtene brøk kan representeres, relatert til de ulike aspektene. Oppsummert er det altså anbefalt med en helhetlig tilnærming til brøk i undervisning ettersom ensidig instruksjon av brøkbegrepet naturlig nok vil føre til en smalere forståelse. Regning med brøk er viktig, men bør ikke være hovedmålet.

2.2.4 Brøk i læreplanverket

Det er utarbeidet ny læreplan for barne- og ungdomstrinnet som trer i kraft fra høsten 2020 for 1.–9. trinn og 2021 for 10. trinn. Vi vil presentere både den gamle læreplanen, Læreplanverket for kunnskapsløftet, kalt LK-06, og den nye læreplanen kalt fagfornyelsen 2020. Informantene i denne studien har fulgt LK-06 til nå, og vi vil gi en oppsummering av hva de skal ha lært fram til de deltok i gjennomføring av datainnsamlingen i denne oppgaven. Den nye læreplanen med nye kompetansemål innen brøk sier noe om hvilken retning norsk skole peker seg ut framover.

2.2.5 Brøk i LK-06

Brøk er å finne under hovedområdet "tall og algebra" og emnet forekommer i kompetansemålene i LK-06 etter endt 4. trinn, 7. trinn og endt 10. trinn. Tidlig på barneskolen skal det jobbes med enkle brøker i praktiske sammenhenger, og en skal kunne uttrykke tallstørrelser på varierte måter. Etter 7. trinn skal elever kunne plassere brøker på tallinja, finne fellesnevner, og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøker. I kompetansemålene for 10. trinn kommer brøk hyppigere fram. Elevene skal kunne regne mellom ulike representasjoner av tall (bl.a. brøk), og vurdere i hvilken situasjon en skal bruke de ulike representasjonene. Elevene skal også kunne: «rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk» (Utdanningsdirektoratet, 2013).

2.2.6 Brøk i ny læreplan

Den nye læreplanen, fagfornyelsen 2020, har som LK-06 en overordnet del (generell del), samt en beskrivelse av fagenes oppbygning. Den største forskjellen fra LK-06 er at det i fagfornyelsen er kompetansemål for hvert enkelt skoletrinn fra og med 2. trinn. Ordet "brøk" blir ikke nevnt før 5. trinn, men på dette spesifikke alderstrinnet kommer det derimot fram i seks av ti punkter. Elevene skal kunne representere brøk på ulike måter, utvikle strategier for regning og forklare tenkemåten. De skal også kunne formulere og løse problemer med brøk fra egen hverdag og diskutere brøk og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner. Eleven skal kunne "beskrive brøk som del av ein heil, som del av ei mengd og som tal på tallinja og vurdere og namngi storleikane" (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det eksplisitte fokuset på brøk forsvinner i denne læreplanen etter 5. trinn, og ordet "brøk" blir senere kun nevnt én gang, i kompetansemål for 8. trinn.

De nye kompetansemålene for brøk understreker på mange måter Utdanningsdirektoratets utgangspunkt for fagfornyelsen som vektlegger relevans, forståelse, refleksjon og dybdelæring. Fokuset i LK-06 på spesifikke operasjoner og regning med brøk, er byttet ut med nøkkelord som "utvikling av strategier", "diskusjon" og "praktiske situasjoner". Det nesten totale fraværet av ordet “brøk” i kompetansemålene etter 5. trinn kan tyde på et ønske om at brøk skal inngå naturlig i andre deler av matematikken, og fungere som et grunnlag for videre læring i matematikk. I fagfornyelsens beskrivelse av faget under det som kalles *kjerneelementer* finnes det støtte til dette, der det blant annet står “elevane må tidleg få eit godt talomgrep og få utvikle varierte reknestrategiar” (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Brøk inngår i elevenes tallforståelse og er slik et viktig grunnlag for blant annet dybdelæring og god forståelse på tvers av ulike temaer i matematikk.

2.2.7 Brøk som forberedelse til algebra

National Mathematics Advisory Panel (NMAP) ble stiftet i USA i 2006 med hensikt å sikre landets konkurransedyktighet i verdensøkonomien. Ved hjelp av forskning skulle de forbedre undervisningen og læring av matematikk i landet (U.S. Department of Education, 2009). I 2008 kom NMAP med sin fullførte rapport. Blant flere av punktene som kom fram, beskrev den blant annet emnet brøk som en del av det kritiske fundamentet for algebra (National Mathematics Advisory Panel, 2008, s. xvii). Rapporten vektla også brøkferdigheter som den viktigste grunnleggende matematiske egenskapen amerikanske studenter ikke hadde tilstrekkelig kunnskaper i.

Når en går fra aritmetikk til algebra beveger man seg fra det spesielle til det generelle. Konkrete tall og spesielle tilfeller byttes ut med symboler og generelle løsninger som gjelder for alle tall til enhver tid (Wu, 2001). Wu trekker også fram undervisning av brøk som et springbrett fra aritmetikk til algebra. Dette fordi arbeid med brøk gir muligheter til en flytende overgang fra numeriske notasjon til symbolsk notasjon, som ikke kommer naturlig kun ved arbeid innen heltallsaritmetikk. “Beyond computational facility with specific numbers, the subject of fractions, when properly taught, introduces students to the use of symbolic notation and the concept of generality, both being integral parts of algebra (National Mathematics Advisory Panel, 2008, s. 18). Et eksempel er når elever blir vant til brøknotasjon så klarer de etter hvert å se på for eksempel $\frac{2}{5}$ som et tall man ikke behøver å regne ut. Da har man også bedre forutsetninger for å forstå at en variabel a eller uttrykket $\frac{b}{5}$ ikke behøver ytterligere beregning, men kan stå som det er.

Wu (2001) presiserer også at selv elever som tilsynelatende besitter begrepsmessig forståelse til bruken av symboler (f.eks. brøk), ikke nødvendigvis klarer å gjøre korrekte beregninger med disse symbolene. Det er derfor viktig å ikke kun jobbe med forståelsen av symboler, men også at elever blir i stand til å gjøre ulike operasjoner på brøker uten å tenke nevneverdig over det. Ferdigheter og teknikker innen brøk som å forkorte og utvide en brøk, finne fellesnevner og sette brøker under samme brøkstrek, er overførbart og strengt nødvendig i arbeid med andre matematiske emner, for eksempel når en jobber med rasjonale uttrykk i algebra.

2.2.8 Utfordringer med brøk

Arbeid med brøk kan for mange elever by på ulike utfordringer. Brøk skrives på en helt spesiell måte og introduserer oss derfor for helt ny notasjon, henholdsvis teller, nevner og brøkstrek, og notasjon i oppgaveløsing for eksempel ved utviding og forkorting. Brøk har også mange ulike egenskaper som elevene må bli kjent med for å forstå hva en brøk egentlig er, som vi har forklart tidligere under “Hva er en brøk?”.

I introduksjonen av brøk vil elever ofte for første gang gå fra å arbeide med heltall til rasjonale tall. Ifølge McNamara og Shaughnessy (referert i Van de Walle et al., 2015) kan dette være utfordrende fordi elever overgeneraliserer sine tilegnede heltallskunnskaper. Tidligere erfaringer som har blitt gjort med heltall kan være at alle tall kan skrives som et spesifikt tall (f.eks. 3, 14 eller 240), eller at multiplikasjon gjør at et tall blir større, og divisjon gjør et tall mindre (Siegler & Pyke, 2013). I møte med brøk vil ikke disse oppfatningene lenger gjelde. Misoppfatninger kan ofte oppstå, for eksempel når eleven ser på teller og nevner som to separate tall og ignorerer at de må ses i forhold til hverandre, eller ikke klarer å se at hele brøken er ett spesifikt tall på tallinja. Kilpatrick et al. (2001) trekker fram viktigheten av å forstå at de to tallene en brøk består av er relatert gjennom multiplikasjon og divisjon, ikke addisjon, noe som kan være utfordrende i det rasjonale tall skal integreres i elevers matematiske kompetanse.

Lortie-Forgues et al. (2015) beskriver også hvordan elevers overgeneralisering av heltallskunnskaper kan by på utfordringer når elever skal løse problemer med brøk innen de fire regneartene. Multiplisering av brøker kan løses ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner, noe som er mer eller mindre direkte overførbart fra aritmetikk med heltall. Addisjon og subtraksjon av brøker krever derimot lik nevner, og divisjon krever multiplikasjon med den motsatte brøken. Prosedyrer innen de fire regneartene som elevene tidligere har lært kan derfor, i noen tilfeller, gi korrekte utregninger, og i andre tilfeller ikke. Slik kreves det en dypere forståelse av brøkbegrepet for at elever skal kunne overføre tidligere kunnskap.

Nye tankesett må også utvikles når det kommer til det vi omtaler som enheter. Når elever først lærer å telle, har de muligheten til å sette et tall som navn på hvert objekt som skal telles, og enheten “én” vil alltid være navnet på et enkelt objekt (Lamon, 2012). Denne måten å tenke på vil ikke nødvendigvis være tilstrekkelig i møte med brøkoppgaver. Når vi nå behandler enheter er det hva vi definerer som en enhet som avgjør størrelsen, og ikke det spesifikke antallet objekter eller det som kan se ut som “mangler”. Om vi for eksempel arbeider med sirkler, kan to sirkler være én enhet; en sammensatt enhet. En sirkel vil i dette tilfellet være en halv enhet, og fire sirkler vil være to enheter osv. Om enheten i to tilfeller er ulik, kan også to tilsynelatende like store deler ha ulikt navn. For eksempel kan en halv sirkel ha navnet $\frac{1}{2}$ fordi enheten er 1, og en annen halv sirkel få navnet $\frac{1}{4}$ fordi enheten er 2.

Bildet av brøk som en pizza eller kake er mye brukt i undervisning, men kan føre til at forståelsen av brøkbegrepet begrenses til å omhandle ett element, altså én pizza eller én kake. Elever på et høyere nivå av forståelse trenger å forstå brøk i forhold til enheter bestående av både én og flere elementer (Bjerke & Pettersen, 2012). Forståelse av brøk som enheter krever at en klarer å se at brøk har forskjellige betydninger i ulike situasjoner. Eleven må derfor være i stand til å knytte begrepet opp mot situasjonen og se hva som til enhver tid er delen og helheten. Vi gir et par eksempler:

Et tog har kjørt $\frac{1}{5}$ av en av en strekning, og kjører deretter $\frac{1}{10}$ av strekningen. Eleven skal finne ut hvor langt toget har kjørt og han velger å summere brøkene som han løser ved å finne fellesnevner: $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$.

I en annen situasjon har en ishockeyspiller scoret 3 mål på 15 skudd i en kamp, og 1 mål på 10 skudd i andre kamp. Totalt har ishockeyspilleren altså scoret 4 mål på 25 skudd, som representert i brøk blir $\frac{4}{25}$. Om eleven igjen velger å skrive som summen av to brøker vil utregningen bli feil ($\frac{3}{15}+\frac{1}{10}\neq\frac{4}{25}$). I eksempelet står teller og nevner i et forhold som endres i takt med antall skudd, og “helheten” endres derfor også i takt med antall skudd. De to brøkene i uttrykket ($\frac{3}{15}$ og $\frac{1}{10}$) forholder seg altså til ulike helheter.

Eksemplene understreker at kontekst kan være svært avgjørende for hvordan en brøk skal forstås. Overgeneralisering av heltall innen de fire regneartene kan bli overført til arbeid med brøk som gjør at eleven ser på de to tallene i brøken (teller og nevner), og feilaktig drar slutningen “teller kan adderes med teller, og nevner med nevner”. Samtidig kan det også oppstå situasjoner hvor dette gir korrekt svar (som i ishockeyeksempelet). Lamon (2012) trekker fram at kompleksiteten til brøkbegrepet gjør at vi må ta noen “hopp” i begrepsforståelsen for å mestre det, og at dette er medvirkende til at elever støter på vanskeligheter med å lære brøk.

2.3 Konkretiseringsmateriell

Vi vil nå belyse det andre begrepet i vår problemstilling, konkretiseringsmateriell. Først vil vi ta for oss det mer overordnede begrepet *konkretisering*, og deretter vil vi se på begrepet *konkretiseringsmateriell* ved å presentere ulike definisjoner og se hva tidligere forskning sier om bruken av, og hensikten med konkretiseringsmateriell.

2.3.1 Konkretisering – mer enn bare konkretiseringsmateriell

Konkretisering skal bidra til å gi forståelse og bygge opp ny kunnskap ut fra de erfaringer en allerede besitter (Löwing, 2006). Matematikkundervisningen kan konkretiseres på flere ulike måter. Ifølge Kirfel (2010) er det fire sentrale aspekter ved konkretisering: Materialisering, eksemplifisering, kontekstualisering og visualisering.

Ved *materialisering* gjør man det abstrakte konkret ved å bruke fysiske gjenstander som man kan ta og føle på. Alt av materiale som kan representere noe abstrakt i matematikken kan brukes som konkretiseringsmateriell, som for eksempel tellebrikker, klosser, brøksirkler, litermål o.l. Dette er gjenstander elever kan ta på, flytte på, manipulere og ordne. Dette vil være med på å gi elever et bilde på noe som ellers er abstrakt. Ved å ta utgangspunkt i det konkrete, er formålet å forstå den abstrakte matematikken bak disse konkrete materialene, selv om denne overgangen viser seg å være utfordrende (Kirfel, 2010).

Andre ganger er ikke konkrete materialer utgangspunktet, men derimot regler og formler. I disse sammenhengene benytter man seg gjerne av *eksemplifisering*. For elever kan det være vanskelig å nyttiggjøre regler og formler i matematikken uten at de har sett eksempler på hvordan man kan bruke de. Formler og regler vil få bekreftelse gjennom at de konkretiseres ved hjelp av eksempler (Kirfel, 2010).

Det tredje aspektet ved konkretisering, *kontekstualisering*, handler om å gi matematikken en kontekst. Det kan være vanskelig for elever å skille mellom regnearter og andre matematiske uttrykk, og det vil derfor være hensiktsmessig å finne meningsfulle situasjoner der regneartene er aktuelle slik at det blir enklere for elevene å skille dem. Det at elevene kjenner seg igjen i konteksten rundt matematikken vil være sentralt for at elevene skal finne mening i det de gjør, opprettholde motivasjonen og gjennomføre oppgaven (Kirfel, 2010).

Det siste aspektet kaller Kirfel (2010) *visualisering*. Ved å bruke bilder og tegninger kan elever få hjelp til å fatte en lang tankerekke. Kirfel skriver videre at kompliserte matematiske fenomener kan avbildes i en tegning, men om de samme fenomenene skulle blitt forklart med ord, ville det blitt alt for omfattende og komplisert for mottaker.

2.3.2 Definisjon av konkretiseringsmateriell

Det finnes en rekke definisjoner på konkretiseringsmateriell i litteraturen. Hynes (1986) definerer konkretiseringsmateriell på denne måten: "Manipulative materials are concrete models that incorporate mathematical concepts, appeal to several senses, and can be touched and moved around by students" (s. 11). Hynes sier videre at definisjonen impliserer at konkretiseringsmaterialet er tilgjengelig for elevene og poengterer at det ikke er nok at elevene observerer en demonstrasjon på hvordan det skal brukes. Swan og Marshall (2010) mener derimot at Hynes' definisjon i hovedsak kun tar for seg hvordan elevene fysisk kan ta i bruk materialet, uten å omfatte hvordan bruken av materialet skal stimulere til matematisk tenkning. Av den grunn så de seg nødt til å formulere en ny definisjon av begrepet for å inkludere dette aspektet: "A mathematics manipulative material is an object that can be handled by an individual in a sensory manner during which conscious and unconscious mathematical thinking will be fostered" (Swan & Marshall, 2010, s. 14).

Matematikksenteret (u.å.) omtaler konkretiseringsmateriell som “utstyr som er laget for å hjelpe elevene til å forstå nye begreper, og logikken begrepene er bygd opp rundt”. Det legges også vekt på at konkretiseringsmateriell ikke er materiell som er laget for å vise matematikk anvendt i praksis, noe det lett kan tolkes som.

Denne studiens forståelse av begrepet *konkretiseringsmateriell* vil ta utgangspunkt i Swan og Marshalls (2010) definisjon da denne studien også legger vekt på at konkretiseringsmateriell skal stimulere til matematisk tenkning.

2.3.3 Bruken av konkretiseringsmateriell

“Matematik handlar på alla nivåer om att abstrahera. När man har gjort det har man skaffat sig en mental bild och ett effektivt språk som kan användas till att snabbt och effektivt lösa nya matematiska problem.” (Löwing, 2006, s. 130). Bruk av konkretiseringsmateriell eller andre former for konkreter er altså et hjelpemiddel på veien mot abstrakt matematikk fylt med symbolikk og notasjon. Baroody (1989) hevder at bruk av konkretiseringsmateriell i matematikkundervisning ikke garanterer suksess. Som alt annet må konkretiseringsmateriell brukes klokt og forsiktig for å oppnå gode resultater. Videre hevder Baroody at ukritisk bruk av konkretiseringsmateriell i undervisningen i verste fall kan gjøre det verre for elever. Elever ser ikke nødvendigvis på konkretiseringsmateriellet på samme måte som voksne, og det kan være utfordrende for dem å oppfatte de matematiske ideene i materiellet. Når elever arbeider med konkretiseringsmateriell, trenger de derfor hjelp til å forstå disse ideene (Kilpatrick et al., 2001). Som lærer er det derfor viktig å tenke gjennom om bruken av konkretiseringsmateriell kan bygge videre på kunnskap elevene allerede har i tillegg til at det må være meningsfullt for dem. Dette understreker også Fennema (1973) når hun sier: “The most important reason for using manipulatives in teaching is to make the abstract world of mathematics meaningful” (s. 350). Videre sier hun når elever demonstrerer matematiske ideer ved hjelp av konkretiserings-materiell kan det hjelpe lærerne å gi innsikt i elevenes tankegang.

Moyer (2001) gjorde undersøkelse på hvordan og hvorfor lærere brukte konkretiseringsmateriell slik de gjorde. Hun hevder videre at lærere ofte bruker ordet ‘gøy’ om bruk av konkretiseringsmateriell for å undervise matematikk, og hun stiller derfor spørsmål til om bruken av konkretiseringsmateriell er motivert av dette eller av å representere abstrakte matematiske begreper. Löwing (2006) understreker også selv at hensikten med konkretiseringsmateriellet er at de skal belyse matematiske begreper.

Butler, Miller, Crehan, Babbitt og Pierce (2003) gjennomførte en undersøkelse som så på effekten av å undervise elever med lærevansker i matematikk ved å bruke CRA-modellen (Concrete-Representational-Abstract) eller RA-modellen (Representational-Abstract) innenfor brøk. Elevene ble fordelt i to grupper, CRA-gruppen og RA-gruppen. Gjennom ti skoletimer innenfor dette temaet var forskjellen på gruppene at CRA-gruppen benyttet seg av konkretiseringsmateriell de tre første undervisningstimene, mens RA-gruppen benyttet seg av representasjonstegninger. De resterende syv timene var lik for begge gruppene. Her er det viktig å understreke at begge gruppene benyttet seg av konkretisering ved at RA-gruppen brukte representasjonstegninger, som går under hva Kirfel (2010) kaller *visualisering*, mens CRA-gruppen brukte fysiske gjenstander, noe Kirfel kaller *materialisering*. Konkretiseringsmateriellet som ble brukt var brøksirkler, små bønner og elevlagde brøkkvadrater av papir. Gjennom en før- og ettertest ble elevene testet med oppgaver i forhold til brøk, men også deres holdninger til matematikk og brøk. Dataanalysen indikerte at begge gruppene forbedret sin forståelse for brøk fra førtesten til ettertesten. Likevel kunne man se at CRA-gruppen hadde en høyere gjennomsnittsscore i alle kategoriene på ettertesten, noe forskerne syntes var interessant da den eneste forskjellen mellom disse gruppene var de tre første undervisningstimene. Begge gruppene hadde en nøytral til en viss positiv holdning til matematikk og brøk, og det var ingen forskjell mellom gruppene. CRA-gruppen følte seg ikke mer barnslig og mindre kompetent enn den andre gruppa, og det virket heller ikke som de syntes matematikk var mer gøy enn elevene som arbeidet uten konkretiseringsmateriell (Butler et al., 2003).

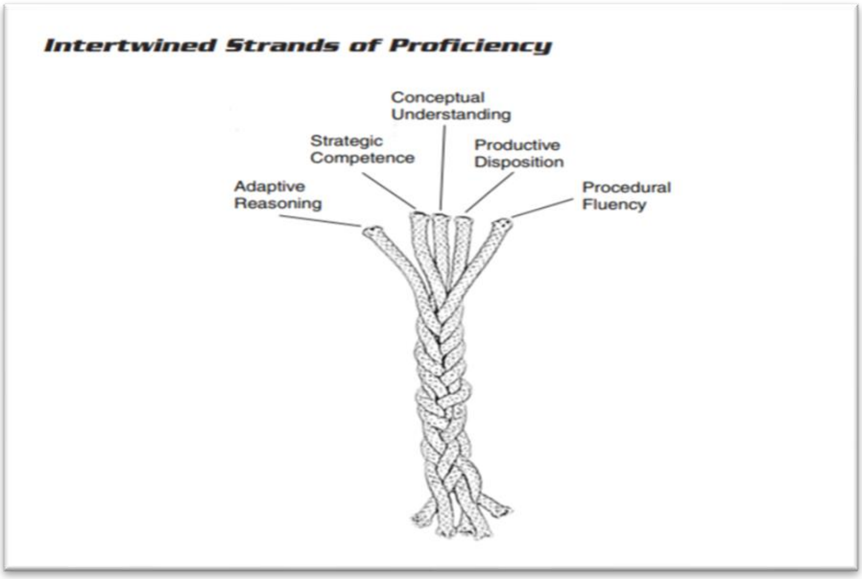
I Suydam og Higgins' (1977) rapport undersøkte de 23 studier som sammenlignet undervisningstimer hvor konkretiseringsmateriell ble brukt, mot undervisningstimer hvor det ikke hadde blitt brukt. Studiene ble gjort på varierende årstrinn, fra 1. trinn til 8. trinn, og ulike matematiske temaer var i fokus. Av de 23 studiene som er gjennomført, viser denne rapporten at ved to studier var resultatet bedre når konkretiseringsmateriell ikke hadde blitt brukt (her var rasjonale tall tema i én av studiene); ved 11 studier var resultatet bedre når konkretiseringsmateriell hadde blitt brukt (her var brøk tema i tre av studiene); og ved 10 studier var det ikke noen signifikant forskjell på resultatene (her var brøk tema i én av studiene). Rasjonale tall var altså tema i en av studiene da resultatene var bedre for ikke-bruk av konkretiseringsmateriell. Driscoll (1984) sier derimot at forskning har vist at fornuftig bruk av konkretiseringsmateriell er effektivt når en skal undervise i rasjonale tall. I det store bildet kan det altså se ut til at bruk av konkretiseringsmateriell kan ha både positive og negative virkninger.

2.4 De fem trådene av matematisk kompetanse

I denne oppgaven vil resultatene analyseres ved hjelp av Kilpatrick et al. (2001) sin modell for matematisk kompetanse, *de fem trådene*. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) består matematisk kompetanse av fem komponenter som vi har valgt å skrive på norsk etter Nosrati og Wæges (2018) oversettelser (originaltekst i parentes):

- Begrepsmessig forståelse (conceptual understanding)
- Prosedyrekunnskap (procedural fluency)
- Strategisk tankegang (strategic competence)
- Resonnering (adaptive reasoning)
- Metakognisjon og selvregulering (productive disposition)

Trådene danner et sammenvevd tau som representerer matematisk kompetanse, hvor hver tråd er gjensidig avhengig av hverandre, og må ses i sammenheng med hverandre (Kilpatrick et al., 2001). De matematiske ferdighetene elever skaffer seg gjennom grunnskolen skal gjøre de i stand til å møte matematiske problem i hverdagen samtidig som den skal utruste de til å kunne fortsette å studere matematikk på videregående skole og ved høyere utdanning. Videre kommer vi til å presentere de trådene vi har valgt for å analysere funnene fra datainnsamlingen ut fra.



Figur 1: Sammenvevd tau som representerer matematisk kompetanse. Fra Adding it up: Helping children learn mathematics (s. 5), av J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, 2001, Washington, DC: National Academy Press.

Begrepsmessig forståelse
Konseptuell forståelse omhandler den matematiske kunnskapen elever tilegner seg som er mer enn isolert kunnskap som regler, fakta og metoder. Her ser vi heller på dybden i selve forståelsen av det elevene kan. En elev med konseptuell forståelse vil ifølge Kilpatrick et al. (2001) ha organisert kunnskapen sin i en «sammenhengende helhet». Denne helhetlige organiseringen gir eleven mulighet til å koble sin kunnskap til nye emner og begreper ut ifra hva de allerede vet. "Knowledge that has been learned with understanding provides the basis for generating new knowledge and for solving new and unfamiliar problems." (Kilpatrick et al., 2001, s. 119).

Koblinger av kunnskap er sentralt i begrepsmessig forståelse. Matematikk er et fag hvor emner og begreper i større eller mindre grad henger sammen, og elever som klarer å koble det de kan med nye deler av matematikken kan dra flere fordeler av det. Ikke er det bare enklere å lære noe nytt fordi koblingene gir en basis for ny kunnskap. Det gir også selvtillit når en møter nye utfordringer og det kan føre til at de ser nytteverdien av matematikken de gjør. Forståelsen av at begreper henger sammen gjør også at begrepene lettere huskes og overføres til langtidsminne. Det som eventuelt blir glemt kan også lettere tas opp igjen, og har mindre risiko for å bli husket feil siden forståelsen av det har ligget til grunn tidligere.

Elever med begrepsmessig forståelse kan i møte med matematiske utfordringer kunne evaluere sine løsningsstrategier og svar, og vurdere om de kan være riktige. Vurderinger blir da gjort ut ifra den kunnskapen de besitter fra før, som kan være bekreftende eller avkreftende på om noe er riktig. Vi ser på et eksempel der en elev skal summere to brøker: $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$, og fått $\frac{4}{7}$. Eleven ser at svaret umulig kan være riktig, siden både $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{5}$ er større enn eller lik "en halv". Eleven resonnerer seg da fram til at summen må være minst lik 1. Slike resonnementer tyder på begrepsforståelse. Eksempler som dette hvor eleven vurderer sine egne svar, kan ifølge Kilpatrick et al. (2001) gjøre at de unngår større feil.

Det er viktig å være klar over at elever kan ha begrepsmessig forståelse av begreper før de klarer å ordlegge seg. Om en søker etter verbale tegn til at en elev forstår noe, og ikke finner det, kan det altså være at eleven innehar nødvendig forståelse likevel.

Kilpatrick et al. (2001) argumenterer for at om forståelsen av et begrep er tilstrekkelig god, vil det gjøre at annen kunnskap ligger innen rekkevidde fordi det følger som en konsekvens av forståelsen av dette begrepet. For eksempel vet en elev at "$4 \cdot 5$" og "$5 \cdot 4$" er det samme. Videre vil forståelse av kommutativitet i multiplikasjon føre til at en elev ser at det gjelder for alle andre heltall på formen $a \cdot b$. Ny kunnskap kan altså oppstå i det en elev ser at noe følger som en konsekvens av noe annet. Dette skiller seg fra det å lære oppskrifter på hvordan man skal gjøre noe. Mer om dette skillet kan forstås i neste tråd, prosedyrekunnskap.

Prosedyrekunnskap
Prosedyrekunnskap er kunnskapen om prosedyrer, når og hvordan de skal brukes og ferdighetene i å utføre disse. Denne kunnskapen er viktig som støtte til begrepsmessig forståelse innen tallære som plassverdi i titallsystemet og rasjonale talls mening. I tillegg til dette handler prosedyrekunnskap om å kunne se likheter og forskjeller mellom beregningsmetoder. Disse metodene, i tillegg til skriftlige regneprosedyrer, inkluderer mentale metoder, og metoder som bruker kalkulator, datamaskiner eller konkretiseringsmateriell (Kilpatrick et al., 2001).

Elever med god prosedyrekunnskap vil kunne vite hvilke metoder som er hensiktsmessig å benytte i ulike situasjoner basert på hva som er mest nøyaktig og effektivt (Kilpatrick et al., 2001). Ved enkle regnestykker må elever være i stand til å løse disse uten å alltid måtte benytte seg av andre hjelpemidler. Gjennom god begrepsmessig forståelse av verdien til plasseringen av tallene i titallssystemet vil elevene enklere kunne utvikle teknikker for å løse flersifrede regnestykker. Kilpatrick et al. (2001) sier videre at det ikke er like kritisk som før at elevene utvikler hurtighet og effektivitet i å regne med større tall for hånd, da man i dagens samfunn har hjelpemidler til slike regneoperasjoner lett tilgjengelig. Likevel oppstår det matematiske problemer i hverdagen spesielt hvor det kreves ferdigheter innen mentale kalkulasjoner, som gjør hoderegning til en viktig del av matematikken. Teknikker en tilegner gjør at en for eksempel kan summere $399 + 56$ eller finne produktet av $43 \cdot 7$, kun ved kognitive prosesser. Nivået på slike ferdigheter ligger i om de gjennomføres effektivt og om de er presise og korrekte, og kan med fordel forbedres med trening og repetisjon.

Elever må videre kunne se at prosedyrene de lærer og utvikler kan brukes på flere problemer og ikke bare ett individuelt problem. Dette innebærer forståelse av prosedyrene en lærer (Kilpatrick et al., 2001). Elever med forståelse for prosedyrer de bruker vil lettere kunne bygge videre på den prosedyrekunnskapen de allerede har, samtidig som sannsynligheten for å glemme kritiske steg i prosedyrer minker. På den andre siden vil elever uten forståelse for prosedyrene de lærer ha behov for mer øving og flere repetisjoner, og har lettere for å glemme hvordan prosedyren gjennomføres.

Strategisk tankegang

Strategisk tankegang handler ifølge Kilpatrick et al. (2001) om evnen til å identifisere matematiske problem, representere dem, og løse dem. I matematikkfaget blir elever ofte presentert for spesifiserte problem de skal løse hvor prosedyren er mer eller mindre gitt, mens utenfor skolen kan det oppstå vanskeligheter med å finne ut hva problemet er. Denne tråden er særlig knyttet opp mot problemløsning (Nosrati & Wæge, 2018). Dette fører til at de blir nødt til å formulere problemet så de kan bruke matematikk for å løse det, og en elev med strategisk tankegang vil kunne bruke én eller flere strategier for å komme nærmere en løsning eller finne en løsning. Denne tråden skiller seg fra prosedyrekunnskap da det ikke er en gitt prosedyre til problemet, men eleven må ta i bruk andre strategier for å finne løsninger, for eksempel ved å benytte seg av heuristikk som er en teknikk som skal være til hjelp for å forstå et matematisk problem og for å finne en løsning til den (Schoenfeld, 1985). Strategisk tankegang kan komme til syne ved å la elevene lage et matematisk problem ut fra et tema. De blir da nødt til å formulere et problem, for deretter å representere det matematisk ved å ha med relevante opplysninger. For å kunne identifisere og representere et matematisk problem krever det at eleven har et mentalt bilde på essensielle komponenter i problemet. Gjennom flere tilnærminger vil en elev med strategisk tankegang fleksibelt kunne velge mellom forskjellige måter å løse en oppgave best mulig på.

Strategisk tankegang spiller en viktig rolle når eleven utvikler sin prosedyrekunnskap, som for eksempel i prosessen fra eleven lærer seg å bruke en gitt algoritme til elevene bruker mer kompakte og effektive metoder.

Resonnering

Resonnering handler om å argumentere og rettferdiggjøre de konklusjoner man gjør innenfor matematikken (Kilpatrick et al., 2001). Denne resonneringen brukes til å gå gjennom fakta, prosedyrer, konsepter og løsningsmetoder for å se om konklusjoner en har gjort er riktig. Ved å se tilbake på prosedyrene og valgene som er gjort, kan elever argumentere og rettferdiggjøre for de svarene de har gitt. På denne måten kan elever også avgjøre om svar er feil kun ved å sjekke om resonneringen er gyldig, i stedet for å være avhengig av en lærer eller andre enn seg selv. Rettferdiggjøring av en konklusjon behøver ikke å være et fullstendig matematisk bevis, selv om dette også er en form for rettferdiggjøring. "We use justify in the sense of «provide sufficient reason for»" (Kilpatrick et al., 2001, s. 130). Resonnering beskrives også som limet som holder alt sammen. Med dette menes at god resonnering innebærer at en klarer å se hvordan de ulike delene av matematikk henger sammen, og videre at det gir mening og er logisk.

Nosrati og Wæge (2018) beskriver resonnering med at elever kan forklare hvordan de tenker og er i stand til å vurdere gyldigheten av de valgene de tar. Slik henger også resonnering tett sammen med strategisk tankegang. I situasjoner hvor en må prøve seg fram, og kanskje formulere og teste en hypotese, blir resonnering viktig både i vurderingen av framgangsmåten, testing av hypotesen og rettferdiggjøring av svaret.

Forskning viser at tre faktorer er essensielle for at elever skal kunne vise god resonnering. Eleven må for det første ha en tilstrekkelig kunnskapsbase i det emnet resonneringen skal skje. For det andre så må oppgavene som blir gitt være motiverende, og til sist så må konteksten i oppgaven være kjent og trygg (Kilpatrick et al., 2001).

Metakognisjon og selvregulering

Den siste tråden innen matematisk kompetanse omhandler blant annet det å se matematikk som noe nyttig og verdifullt og at en kan benytte seg av det man lærer, å se at matematikk gir mening, og å se at god innsats og flittig arbeid med matematikk lønner seg (Kilpatrick et al., 2001). Begreper som motivasjon og engasjement er naturlig nok viktige faktorer for mestring og utvikling av matematisk kompetanse. Slik er også denne tråden et viktig grunnlag og gjerne en forutsetning for å utvikle de øvrige fire trådene.

Nosrati og Wæge (2018) trekker fram evnen til å reflektere over egen læring som sentralt i denne tråden. Metakognisjon og selvregulering handler om å "... kunne reflektere over hensikten med det man lærer, hva man har lært, og hvordan man lærer." (Nosrati & Wæge, 2018, s. 6).

For mange elever kan målet med matematikk på skolen være å prestere og levere resultater. Slik tankegang fører gjerne til at matematikken blir knyttet til rutinearbeid og memorering, som igjen kan føre til at en mister motivasjon og ikke opplever nødvendig mestring. Det er ønskelig at elever skal kunne se på sitt eget arbeid som en læringsprosess som er betydningsfull, og samtidig se at en evner å utvikle sin egen matematiske kompetanse. Kilpatrick et al. (2001) trekker fram viktigheten av at elever møter utfordrende oppgaver som ikke er rutinebaserte, fordi det vil føre til de får mer positive holdninger til egen læring. Når en elev er kommet dit at den anerkjenner sine egne evner og muligheter til å forstå matematikk, vil det gi motivasjon og selvtillit.

Metakognisjon og selvregulering som tråd utvikles også i takt med at de andre trådene for matematisk kompetanse utvikles. Om en elev for eksempel lærer og forstår flere begreper og strategier, vil den også på sikt kunne se matematikken i et større bilde, som igjen fører til at matematikken gir mer mening for eleven. Utvikling av den siste tråden for matematisk kompetanse gjør altså at eleven vil se matematikk som noe logisk, og har derfor tro på at det er mulig å løse oppgaver om man jobber hardt, og at det igjen vil betale seg (Kilpatrick et al., 2001).

3 Metodologi

Metoden vi velger har som hensikt å belyse vårt forskningsspørsmål på best mulig måte. Samtidig må vi holde oss innenfor de rammene og muligheten studien gir oss med tanke på tid og omfang. I denne delen av oppgaven vil vi først presentere et sammendrag av de metodiske grep vi har gjort, før vi beskriver de ulike delene mer grundig med støtte i metodeteori. Videre vil vi presentere analyseverktøy og hvordan analyseprosessen har foregått, og til slutt ta for oss våre vurderinger rundt studiens kvalitet og etiske ståsted.

For å besvare forskningsspørsmålet "hvilke likheter og ulikheter kommer til syne når elever på 8. trinn arbeider med brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell?", har vi valgt en kvalitativ tilnærming gjennom oppgavebaserte intervjuer på elevgrupper bestående av to til tre elever. Likheter og ulikheter i oppgaveløsingen vil da bli belyst gjennom diskusjoner, samtaler, resonnementer, svar og bevegelser informantene foretok seg. For å analysere denne dataen har vi utviklet et analyseverktøy basert på Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder.

3.1 Forskningsdesign

Forskningen gjennomføres med en kvalitativ tilnærming. Kvalitative studier søker etter dybde og forståelse av fenomener gjennom et lite antall forskningsenheter (Dalland, 2017). En slik metode passer godt da vi ønsker å se på elevers kompetanse i det spesifikke emnet brøk, og vår innsikt i elevers forståelse innen dette emnet er avgjørende for å besvare forskningsspørsmålet. Forskningsdesignet i denne oppgaven kan kategoriseres som en flerkasusstudie, og vil bli presentert i det påfølgende delkapittelet.

3.1.1 Flerkasusstudie

"Casestudier er intensive kvalitative studier av én eller noen få undersøkelsesenheter" (Andersen, 2013, s. 14). Ordet "case" kommer fra latinske "kasus", som betyr tilfelle. En kasus er altså et enkelt tilfelle, og kan for eksempel være en organisasjon, en del av organisasjon, en skole, en klasse, en gruppe, et individ o.l. Felles for disse eksemplene er at de ligger innenfor en klart definert kontekst, noe som er sentralt i denne metoden. I vårt tilfelle, hvor kasusene er flere elevgrupper gjelder dette avklaringer som tid, sted, gruppestørrelse, rammefaktorer o.l.

Vi har i denne oppgaven sett på fire kasuser, altså de fire ulike gruppene som har arbeidet med og uten konkretiseringsmateriell. Vi velger derfor å omtale metoden som en flerkasusstudie. Mills, Durepos og Wiebe (2010) beskriver dette som en kasusstudie hvor en foretar seg flere kasuser. Mills et al. (2010) vektlegger at flerkasusstudie er en mer omfattende metode enn en kasusstudie fordi en her vil analysere på tvers av flere ulike kasuser. De ulike kasusene har som hensikt å gi oss bedre forståelse i en bredere kontekst. En stor fordel med å ha flere kasuser er at det gir oss muligheten til å sammenligne dem. Slik kan vi enklere vurdere om ulike faktorer eller betingelser i intervjusituasjonene kan ha hatt betydning for funnene i hver enkelt kasus. Mills et al. (2010) ser på flerkasusstudie som fordelaktig nettopp fordi den foretar seg kauser i ulike omstendigheter. Postholm og Jacobsen (2018) ser også at innsikten kan bli styrket med flere kasuser, men understreker samtidig at det kan hemme forskningen fordi det er mer krevende. Forskning vil som regel være begrenset av tid og ressurser, også i vårt tilfelle, noe som kan gjøre at bredden av kasuser kan gå utover den dybden vi ønsker i studien.

I vår studie grunnes valget av flere ulike kasuser i at vi ønsker å synliggjøre ulike resultatpåvirkende faktorer som kan forekomme i ulike grupper og på ulike skoler. Dette vil fremme kvaliteten i studien ved å gjøre den mer reliabel, som vi kommer til å si mer om i delkapittel 3.8 om kvalitet i forskningen.

3.2 Metode for datainnsamling

3.2.1 Oppgavebasert intervju

Maher, Sigley og Davis (2014) definerer et oppgavebasert intervju som et intervju hvor et subjekt eller en gruppe subjekter snakker mens de jobber med en matematisk oppgave eller et sett med oppgaver. De sier videre at oppgavebasert intervju har blitt brukt av forskere i kvalitativ forskning i matematikkutdanning for å få kunnskap om et individ eller en gruppe av studenters tilstedeværelse og utvikling av matematikkunnskap og ferdigheter innen problemløsning.

Intervjuene våre kan klassifiseres som semi-strukturerte intervjuer. Her kan enkelte spørsmål eller temaer være klar på forhånd, men de skal kun bringes fram i intervjuet der det er naturlig (Postholm & Jacobsen, 2018). Det viktige her er å rette spørsmål inn mot det som blir sagt for å gripe inn i informantenes handlinger og tanker. Slik sett er ikke det å følge en gitt struktur det viktige, men heller å gjøre gode forberedelser inn mot intervjuene.

Hvilke spørsmål vi skal eller kan stille, hva vi kan svare på av spørsmål fra informantene og hvordan vi skal være som intervjuere, er punkter vi har drøftet nøye før gjennomføringen. Majoriteten av spørsmålene som ble stilt i intervjuene er innen det Postholm og Jacobsen (2018) beskriver som inngående spørsmål. Dette er spørsmål som retter seg mot at elevene skal utdype det de har sagt, som i vårt tilfelle søker dybde i det elevene sier. Vi ønsker å forsikre oss om hva elevene har sagt og at de tydeliggjør sine svar slik at våre konkusjoner blir så presise som mulig. Eksempler på slike spørsmål er: “Kan du gi flere eksempler på dette?”, “Kan du utdype det det du sa?”, “Kan du forklare hvordan du kom fram til det svaret?” e.l.

Kommunikasjon og språkbruk påvirker situasjonen og kan ved bevisst bruk være positive virkemidler for å styre et intervju i riktig retning (Kvernmo, 2010). Informantene ble informert på forhånd at vi kom til å framstå så nøytral som mulig under datainnsamlingen, og at vi derfor ikke kom til å nikke, smile eller komme med andre nonverbale uttrykk så vel som verbale uttrykk.

3.2.2 Observasjon

Selv om vi i vår studie brukte oppgavebasert intervju som metode ble elevene også observert. Det er derfor hensiktsmessig å presentere de ulike observatørrollene vi hadde underveis i intervjuene som i hovedsak var “observatør som deltaker” og “fullstendig observatør” (Gold, 1958). Ved å innta disse rollene kunne vi være mer tilbaketrukne og observere det elevene foretok seg uten å påvirke elevene i noen retning. Likevel kunne vi be elever forklare hva de tenkte, eller hjelpe dem med å forstå oppgavene.

3.3 Oppgavesettet

Vi har utviklet to oppgavesett til intervjuene. Ett som er tilpasset arbeid uten konkretiseringsmateriell og ett som er tilpasset arbeid med konkretiseringsmateriell. Oppgavesettene besto av i alt åtte ulike oppgaver (se vedlegg 3 og 4), men vi så tidlig at å gjengi samtlige oppgaver i resultatdelen ikke vil være hensiktsmessig med tanke på studiens omfang. Vi har derfor valgt å presentere oppgave 2 og oppgave 4. Dette er oppgaver som stimulerte til fruktbare diskusjoner blant elevene, og inneholder de viktigste funnene til senere drøfting. På neste side presenteres oppgavene:

Oppgave 2U
Skriv/representer $\frac{3}{8}$ på så mange måter som mulig.

Oppgave 2M

Representer $\frac{4}{6}$ på så mange måter som mulig, ved å bruke konkreter.

Oppgave 4U

a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{3}$

b) Finn tre brøker som er lik $\frac{2}{3}$

c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{2}{5}$

Oppgave 4M

a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{4}$

b) Finn tre brøker som er lik $\frac{1}{2}$

c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{3}{4}$

Som vi ser er oppgavene like i oppbygningen, men med ulike brøker.
Ellers er oppgavene formulert til å passe i arbeid med eller uten konkretiseringsmateriell, for eksempel der "skriv" er byttet ut med "representer".

3.4 Konkretiseringsmateriellet

Det ble valgt ut tre typer konkretiseringsmateriell som elevene kunne benytte i deres oppgaveløsing. Disse ble valgt fordi vi har sett at de er vanlig inventar ved flere norske skoler, og alle innehar mulighet til å representere brøk på forskjellige måter. Konkretiseringsmateriellet som ble brukt var:

- Brøksirkler
- Brøkstaver (disse hadde også brøken representert som desimaltall og prosent på sidene)
- Centikuber

Figur 2: Brøksirkler

Figur 3: Brøkstaver

Figur 4: Centikuber

3.5 Studiens informanter

Vi har valgt å intervjue elever på ungdomsskolen, mer spesifikt 8. trinn. Dette er først og fremst fordi vi med stor sannsynlighet kommer til å undervise på ungdomsskole i framtiden, og denne studien kan da bidra til å gi oss nyttige erfaringer.

Elever på 8. trinn skal i henhold til LK-06 ligge på et passende ferdighetsnivå i brøk til den vanskelighetsgraden vi har satt oppgavene til. Informantenes individuelle ferdighetsnivå var derimot ukjent i det vi valgte intervjuobjekter. Det viktigste for oss var å velge informanter som kunne samarbeide, diskutere og som kunne holde en dialog. Intervjuene har blitt gjennomført i grupper, og det er elevenes diskusjoner, svar, resonnement og bruk av konkretiseringsmateriell som er hovedkilden for vårt datamateriale. Til sammen har utvalget vårt bestått av 11 elever, fordelt på fire ulike grupper. To grupper fra en skole, og to grupper fra en annen.

3.5.1 Gruppestørrelser

Det finnes fordeler og ulemper med å velge et spesifikt antall elever til gruppeintervjuer. Vi valgte gruppestørrelser på to til tre elever. Ved å være flere elever per gruppe kan det oppleves tryggere, og en intervjusituasjon med to intervjuere og kun én elev kan oppleves som skummelt og truende. Samtidig kan en gruppe med flere elever også føre til at enkelte dominerer eller "tøffer seg" for medelever, men det kan også bidra til gode diskusjoner mellom elevene (Kvernmo, 2010).

3.5.2 Gruppesammensetninger

Vi hadde kontakt med én lærer fra hver skole som fikk i oppgave å sette sammen grupper på 2-3 elever basert på våre kriterier for samarbeid og diskusjon. Tre av gruppene besto av både gutter og jenter, mens én gruppe besto av to gutter. De to gruppene ved den første skolen vi gjennomførte datainnsamling var mer tilfeldig sammensatt, da det kun var fem elever som ville være med på forskningsprosjektet. Dette førte til at vi fikk to grupper hvorav den ene gruppa besto av to jenter og én gutt, og den andre gruppa besto av to gutter. På den andre skolen var ikke utvalget like tilfeldig, og læreren kunne velge elever ut fra våre premisser.

For å gjøre det lettere for leseren å ha oversikt, har vi valgt å bruke forkortelser i presentasjonen av data. Skolene er delt inn i skole 1 og skole 2, og de fire ulike gruppene er delt inn i A, B, C og D. Informantene er gitt pseudonymer som er valgt ut ifra hvilken gruppe de tilhører. Informantene i gruppe A har navn på "A", informantene i gruppe B har navn på "B" osv. Nedenfor har vi laget en tabell som forklarer gruppene:

Skole 1		Skole 2	
Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C	Gruppe D
Aksel	Beate	Caroline	Dag
Are	Berit	Celine	Didrik
	Bjørn	Christer	Dina

Selv om vi er to intervjuere til stede under intervjuene har vi valgt å omtale begge som "intervjuer" i resultatdelen, da det vil gjøre teksten lettere å lese. Å skille mellom intervjuerne er heller ikke av betydning for oppgaven.

3.6 Datainnsamling

Dette delkapittelet tar for seg planleggingen og praktiske valg knyttet til gjennomføringen av datainnsamling. Det ble gjennomført pilotstudie i forkant av datainnsamlingen, og påfølgende intervjuer på to ulike skoler.

3.6.1 Pilotstudie

Som forberedelse til prosjektet bør man, om det er mulig, gjøre en pilotstudie for å teste forskningsmetoden (Bryman, 2012). Vi gjennomførte en pilotstudie på tre 7. trinnselever. Formålet var å se om oppgavene våre lå på et passende i nivå, var forståelige, og der deling av tanker og diskusjon oppsto naturlig. Det var også viktig for oss å bli trygge på hvordan vi skulle være som intervjuere under elevenes oppgaveløsing.

Elevene ble informert om hva en pilotstudie er og videre hensikten med den. For å gjøre situasjonen så lik datainnsamlingen som mulig satte vi opp, med elevenes samtykke et videokamera. Slik kunne vi også bli kjent med utstyret. Etter hver økt fikk elevene se at vi slettet videoopptakene umiddelbart.

3.6.2 Justeringer etter gjennomført pilot

Piloten ga oss indikasjoner på at oppgavene var godt tilpasset. Vi gjorde derfor minimalt med justeringer på oppgavearket. Vi fikk reflektert rundt rammefaktorer og intervjuets gang. Elevene kunne bli opphengt i sin individuelle tankegang, og arbeidet i enkelte tilfeller individuelt. Denne observasjonen var interessant, og fikk oss til å diskutere hva som var ønskelig i forhold til vår forskning. Grunnet oppgavens sosiokulturelle perspektiv på læring, ønsket vi at elevene samarbeidet i størst mulig grad. Det må være åpent for individuelle resonnementer, men i det gruppa skal nærme seg en løsning ønsker vi at alle fokuserer på det samme, og at vi slik får konstruktive samtaler og diskusjoner.

3.6.3 Intervjustruktur

Det ble gjennomført totalt åtte oppgavebaserte intervjuer; to intervjuer på to grupper som tilhørte én skole, og to intervjuer på to grupper som tilhørte en annen skole. I det ene intervjuet skulle gruppene løse oppgaver med konkretiseringsmateriell, og i det andre intervjuet skulle de løse oppgaver med penn og papir. To av gruppene brukte konkretiseringsmateriell på dag én, og arbeidet uten på dag to. De to andre gruppene arbeidet uten konkretiseringsmateriell på dag én, og brukte konkretiseringsmateriell på dag to. Vi kunne ikke utelukke at det første intervjuet ville påvirke det andre, og så det derfor som fordelaktig å variere rekkefølgen av intervju med og uten konkretiseringsmateriell slik at vi kunne avdekke en eventuell feilkilde.

3.6.4 Rammefaktorer og praktiske vurderinger

Intervjuene ble gjennomført i grupperom på elevenes respektive skoler for at elevene skulle føle seg trygge i kjente omgivelser og oppleve trygge rammer rundt intervjuet. I intervjuene ble elevene plassert rundt én pult for å gjøre det enklere å filme arbeidsområdet, og det inviterte elevene til å arbeid tett sammen som en gruppe. De fikk utdelt én penn og ett oppgaveark for at fokuset skulle være på samme plass, og for å unngå at elevene arbeidet individuelt. Intervjuerne satt ved to pulter overfor informantene for å ha oversikt over situasjonen, og kunne observere det som skjedde. I intervjuene med konkretiseringsmateriell fikk elevene ett sett konkretiseringsmateriell; brøkstaver, brøksirkler og tellebrikker.

3.7 Beskrivelse av analyseverktøy

For å analysere data fra intervjuene har vi utviklet et analyseverktøy basert på Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder for matematisk kompetanse. Analyseverktøyet skal hjelpe oss å belyse de ulike matematiske ferdighetene elevene viser i de oppgavebaserte intervjuene, og i hvilken grad de kommer fram i de to ulike intervjuene, med konkretiseringsmateriell og uten.

3.7.1 Begreper

I prosessen med å utvikle analyseverktøyet har vi hatt fokus på å trekke ut det vi ser på som de viktigste aspektene ved hver enkelt tråd for matematiske kompetanse (Kilpatrick et al., 2001). I det legger vi, først og fremst, at aspektene er relevante for vårt tema, brøk. Videre er det en forutsetning at de er observerbare i vår metode. På bakgrunn av dette har vi har vi definert ulike begreper som danner underkategorier for hver enkelt matematisk tråd. Vi mener disse begrepene generaliserer de viktigste og mest relevante aspektene ved hver enkelt tråd for vår problemstilling.

De ulike begrepene beskriver også mer konkret hva vi ser etter i de ulike intervjuene, og hva vi legger vekt på når vi skal konkludere med informantenes matematiske kompetanse. Begrepene vil dessuten brukes som begrunnelse for hvorfor vi knytter de spesifikke trådene til gitte hendelser og utsagn i intervjuene. Begrepene fungerer altså som støtte til de konklusjonene vi trekker, og vil gjøre det mulig for oss å se på likheter og ulikheter mellom de to intervjuene av hver gruppe i etterkant.

3.7.2 Analyseverktøyet

Analyseverktøyet er utviklet med utgangspunkt i tidligere presentert teoridel med grunnlag i Kilpatrick et al. (2001), supplert av Nosrati og Wæge (2018), og har tatt inspirasjon fra Slettens (2019) analyseverktøy i sin masteravhandling. I Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) siste tråd, som er oversatt til metakognisjon og selvregulering, har vi valgt å bruke ordet *selvtillit*. Forhold som datainnsamlingens korte tidsforløp gjorde det vanskelig for oss å forske på elevenes generelle holdninger til matematikkfaget eller evne til å reflektere over matematikkens nytteverdi. Vi har derfor sett det nødvendig å avgrense denne matematiske tråden.

I enkelte tilfeller i intervjuene kan det oppstå situasjoner hvor også elevenes begrensninger i matematisk kompetanse kommer tydelig fram. Dette vil også bli presentert i lys av trådene og begrepene. For eksempel kan en elev bruke en algoritme, metode eller framgangsmåte feil, eller til feil tid, eller at eleven viser tegn til lav selvtillit. Analyseverktøyet vi utviklet vil bli presentert under:

Begrepsmessig forståelse

- **Koblinger -** Eleven kobler eller ser koblinger mellom ulike begreper og representasjoner, og bruker dette hensiktsmessig. Eleven ser relasjoner eller mønster mellom problemet og noe den vet fra før. Eksempler på dette kan være at eleven skifter hensiktsmessig mellom representasjoner som brøk, prosent og desimaltall, ser brøk som en størrelse og klarer å sammenligne størrelser, bruker tallinja, lager en historie av tall eller kobler begreper til dagligdagse situasjoner o.l.

- **Konsekvenstenkning -** Eleven vurderer en påstand, en løsning eller en framgangsmåte den tar i bruk, som gjeldende fordi det følger som en konsekvens av noe annet. Elevens forståelse til begrepet brøk (eller andre begrep koblet til brøk) fører til et resonnement som for eksempel kan være "det må være sånn fordi…".

Prosedyrekunnskap

- **Algoritmebruk -** Eleven benytter seg av en innlært algoritme, metode eller framgangsmåte på korrekt vis og til riktig tid. Eksempler på dette er:
  - Utviding og forkorting av brøk
  - Summere brøker
  - Finne fellesnevner o.l.

- **Hoderegning -** Eleven gjør rask hoderegning på nødvendig kalkulasjon. Dette kan være mellomregninger eller andre nødvendige operasjoner på veien til korrekte svar, som elevene gjør i hodet. For eksempel summere brøker, doble eller halvere dem, gjøre de mindre eller større o.l.

Strategisk tankegang

- **Valg av strategi -** Eleven viser tydelig valg av strategi ved problemløsning. Eleven ser ikke løsningen på problemet direkte og ser ikke nødvendigvis veien til løsningen, men benytter seg av strategier for å nærme seg løsningen.

- **Selektering -** Eleven plukker ut essensielle komponenter i problemet og skiller mellom viktig og uviktig informasjon i oppgaven eller oppgaveteksten

- **Forenkling -** Eleven jobber med å forstå oppgaven, og forenkler eller omformulerer problemet på sin egen måte for å gi mening til det.

Resonnering

- **Rettferdiggjøring -** Eleven gir tilstrekkelig begrunnelse for gyldigheten til svaret og løsningsmetoden. Eleven gir et generelt svar, eller nærmer seg en generalisering av løsningen til oppgaven. Eleven viser for eksempel at spesifikke egenskaper til brøker gjør at de havner under en gitt kategori.

- **Evaluering -** Eleven vurderer/evaluerer et svar, og ser at det enten må stemme eller at det må være feil, eller gjort en feil underveis.

Selvtillit

- **Selvtillit -** Eleven har tro på seg selv og viser selvsikkerhet i oppgaveløsingen og i avgivelse av svar. Elevene viser gode holdninger og vilje til å løse oppgaven. Eleven viser engasjement underveis og ønsker å komme fram til gode svar.

3.7.3 Analyseprosessen

I dataanalysen har vi sett på videomaterialet og transkripsjonen av intervjuene parallelt. Her har vi tatt for oss én matematisk tråd om gangen, men det vil presenteres kronologisk slik det utspilte seg. Vi har vurdert alle utsagn, diskusjoner, samtaler, avgitte svar på ark og med konkretiseringsmateriell, samt all bruk av konkretiseringsmateriell underveis i intervjuet, opp mot hver enkelt tråd. Siden det er vi som forskere som gjør disse vurderingene er det umulig å unngå at de blir farget av vår subjektivitet. Vi har derfor hatt fokus på å alltid begrunne våre tolkninger gjennom analyseverktøyet, og vært nøye med å framstille de valgte situasjonene slik de faktisk forspilte seg. Mer om slike vurderinger forstås i neste delkapittel.

3.8 Forskningens kvalitet

Kvalitet i en studie innebærer en kritisk drøfting rundt forskningsprosessen slik at det kan vurderes om konklusjonene er gyldige og til å stole på (Jacobsen, 2005). Vi vil i denne delen presentere begrepene gyldighet og pålitelighet, og beskrive hvordan vi har forholdt oss til dem i vår forskning.

3.8.1 Gyldighet

Gyldigheten (validiteten) til en studie handler om hvorvidt studien har dekning for de tolkninger som er gjort av funn og resultater. En kan skille mellom den *indre* og den *ytre* gyldigheten (Postholm & Jacobsen, 2018).

Den indre gyldigheten handler om i hvilken grad konklusjonene vi kommer fram til er gyldige for det vi har studert. Først må vi stille oss spørsmålet: «Måler den metoden vi bruker faktisk det vi ser etter?». Oppgavene i vår studie er utformet med hensikt å gi elevene mulighet til å vise sin matematiske kompetanse i brøk, og Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder har vært sentrale her. Videre må vi vurdere om det foreligger kausalitet i det vi har sett, for eksempel om det virkelig er konkretiseringsmateriellet som forklarer de ulikheter vi finner i intervjuene. Her gjelder det for oss eliminere mulige feilkilder og øvrige årsaker som kan påvirke forskningsresultatet og konklusjonene våre. Intervjuene er som nevnt gjort på to forskjellige skoler. De er da i lik kontekst, men ikke innenfor helt identiske rammer, noe vi mener gjør forskningen mer representativ. Dette kan også forstås gjennom vurderinger gjort i forhold til oppgavens ytre gyldighet.

Den ytre gyldigheten går ut på i hvilken grad, og med hvilken sikkerhet vi kan påstå at et funn fra en kontekst også er gyldig i en annen kontekst (Posthold & Jacobsen, 2018). At intervjuer er gjort på to ulike skoler styrker dette. Videre må vi vurdere om for eksempel utvalget er representativt. Valg av informanter er gjort tilfeldig, men innenfor rammene av det spesifikke alderstrinnet, og elevenes evne til diskusjon og samarbeid i gruppe.

3.8.2 Pålitelighet

Pålitelighet handler rett og slett om studien er pålitelig, og om leseren kan stole på at forskerne har gjort de forberedelser som er nødvendige samtidig som datainnsamling, analyse og framstilling av funn er gjort på en nøyaktig måte (Postholm & Jacobsen, 2014). Påliteligheten kan bli målt i om det er mulig å reprodusere resultatene av andre forskere. Dette kan være utfordrende i kvalitative studier fordi det vil være ulikheter i møtet mellom forsker og forskningsfeltet i hver enkelt studie (Postholm & Jacobsen, 2018). Dette fremmer viktigheten av at vi som forskere kritisk vurderer vår framstilling av data, og at det tydelig fram hvordan våre konklusjoner er konstruert. I analysedelen vil vi være nøye med å beskrive hva som ligger til grunn for våre slutninger. Ved å utførlig beskrive analysemetoden øker undersøkelsens transparens, og det bidrar til å øke påliteligheten.

Merriam (referert i Postholm & Jacobsen, 2014) har listet opp flere punkter for å reflektere over påliteligheten til en studie, blant annet at hensikten med studien må være klart formulert, at temaet er plassert i en teoretisk kontekst eller rammeverk, hvordan datamaterialet er samlet inn og analysert på osv. Vi har hatt fokus på å være tydelig på hvordan våre data har blitt innhentet og framstilt. I vår studie ble det også gjort videoopptak av alle intervjuer. Dette stiller store krav til personvern som vi vil presentere i neste delkapittel.

3.9 Etiske aspekter

I Norge skal all forskning skje i henhold til regelverket som Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) og Forskningsetikkloven har utarbeidet. Christoffersen og Johannessen (2012) skriver at dersom personopplysninger registreres ved hjelp av elektroniske hjelpemidler, i vårt tilfelle videokamera, så er prosjektet melde- og konsesjonspliktig. Derfor søkte vi om godkjenning av prosjektet fra NSD før prosjektstart (se vedlegg 1). Det finnes forskningsetiske retningslinjer som er vedtatt av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Nerdrum (referert i Christoffersen & Johannessen, 2012) skriver at disse retningslinjene kan deles i tre hensyn som forskere må tenke gjennom. Disse hensynene er:

1. Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi
2. Forskerens plikt til å respektere informantens privatliv
3. Forskerens ansvar for å unngå skade

Siden punkt 3 i hovedsak er relatert til medisinsk forskning, er punkt 1 og 2 mest relevant for vår forskning. Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi handler om at informanten skal kunne bestemme over sin egen deltakelse. Informantene skal få nok informasjon om forskningen og frivillig samtykke til å delta. I tillegg skal informantene på et hvilket som helst tidspunkt ha mulighet til å trekke seg fra forskningsprosjektet uten begrunnelse og uten noen form for negative konsekvenser. For å ivareta dette hensynet utformet vi et informasjonsskriv om prosjektet ved å bruke NSDs informasjonsskrivmal (se vedlegg 2). Kvernmo (2010) sier en bør tilrettelegge intervjusituasjonen slik at den innbyr til best mulig informasjon, og skape en situasjon der elevene føler seg trygge og ikke sier det han/hun tror intervjuerne vil høre, men heller svarer ut fra egen referanseramme. I tillegg sier Kvernmo at det er viktig å informere hva informasjonen skal brukes til, at elevene skal hjelpe oss med å gi bakgrunn for oppgaven vår, og at vi anonymiserer elevene. Selv om all nødvendig informasjon sto på informasjonsskrivet valgte vi å informere alle elevgruppene muntlig før datainnsamlingen. Samtlige informanter som har deltatt i denne forskningen har frivillig samtykket om å delta, både skriftlig og muntlig, og ettersom informantene er barn har foreldre/foresatte skrevet under på informasjonsskrivet at informanten vil og kan delta på prosjektet.

Når det gjelder punkt 2 har vi valgt å ivareta informantenes sikkerhet ved å lagre sensitiv data på UiAs lagringssky, OneDrive, i tillegg til å kode informantenes navn og skole ved å gi de pseudonymer. Disse pseudonymene har vi lagret adskilt fra øvrige data.

4 Resultater

I resultatdelen av oppgaven vil vi presentere funnene som ble gjort under datainnsamlingen og gjennom analyseverktøyet vi har utarbeidet. Flere av oppgavene ga interessante funn, men på grunn av studiens tid og omfang har vi som nevnt begrenset oss til å ta for oss funnene fra oppgave 2 og 4.

Som nevnt finnes hver av oppgavene i to versjoner, én hvor elevene skulle bruke konkretiseringsmateriell og én hvor de kun brukte penn og papir. Vi bruker forkortelsene U og M til oppgavene (uten og med konkretiseringsmateriell).

4.1 Oppgave 2

Uten konkreter (2U)
Skriv/representer $\frac{3}{8}$ på så mange måter som mulig.

Med konkreter (2M)
Representer $\frac{4}{6}$ på så mange måter som mulig, ved å bruke konkreter.

4.1.1 Gruppe 1A

Gruppe 1A besto av guttene Aksel og Are.

Oppgave 2U

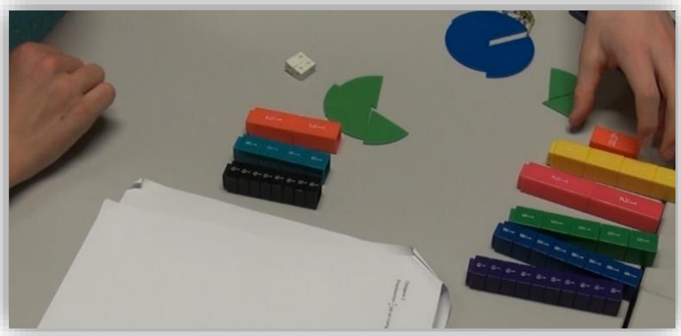
I prosessen med å forstå oppgaven spurte Aksel om de kunne skrive "tre deler av en pizza som er delt i åtte deler". Are omformulerte deretter oppgaven til egne ord da han spurte: "Vi skal finne ut andre måter å skrive den brøken på?". Denne omformuleringen av oppgaven går under tråden strategisk tankegang, da elevene jobber med å forstå oppgaven.

Aksel utvidet brøken med tierpotenser, "$\frac{30}{80}$, $\frac{300}{800}$" og ga uttrykk for at det kunne fortsette slik i det uendelige. De viste god prosedyrekunnskap da de utvidet brøken på forskjellige måter. De forklarte at man kunne utvide brøken med to og fire, "det er jo egentlig bare å utvide flere ganger, så får du samme verdi", og kom senere med flere tilfeldige talleksempler. Det ble altså gitt en forklaring på at brøken kunne utvides med en hvilken som helst faktor og fortsatt få samme verdi som $\frac{3}{8}$. Å se likhet mellom størrelsene på de ulike brøkene tyder her på begrepsmessig forståelse. Vi kan også se guttenes begrepsmessige forståelse gjennom koblingen mellom brøk og pizza, som de også tegnet på oppgavearket.

De nevnte også at det ikke var mulig å forkorte brøken, men de ga ikke en tilstrekkelig begrunnelse for hvorfor, De argumenterte for at det hadde vært mulig å forkorte den om brøken for eksempel var $\frac{3}{9}$, som viser tegn til resonnering.

Oppgave 2M

Etter guttene hadde lest oppgaven var de raske med å representere brøken ved hjelp av de tre ulike konkretiseringsmaterialene de hadde tilgjengelig. I første omgang fant de $\frac{6}{6}$-brøkstaven og $\frac{6}{6}$-brøksirkelen i tillegg til seks centikuber, hvor de la fram fire deler av hver av dem. Deretter lette de etter flere måter å representere brøken på ved å se på flere brøkstaver, og de endte opp med $\frac{2}{3}$ og $\frac{8}{12}$ i tillegg til de svarene de hadde fra før (se figur 5).



Figur 5: Gruppe 1A, oppgave 2M

Intervjuer ba dem forklare svarene de hadde kommet fram til med ord og ga dem dermed mulighet til å rettferdiggjøre svarene sine (resonnering). Are forklarte med ord hva de hadde funnet ut, og poengterte at disse hadde lik verdi som $\frac{4}{6}$, blant annet ved å si at $\frac{8}{12}$ var en utvidelse av $\frac{4}{6}$. Han nevnte derimot ikke at $\frac{2}{3}$ er en forkortet brøk av $\frac{4}{6}$.

Etter hvert som elevene så ut til å være ferdige med oppgaven spurte intervjueren om de hadde flere måter de kunne representere brøken på. Are fant fram fire deler av $\frac{6}{6}$-brøkstaven, som han delte i $\frac{2}{6}$ og $\frac{2}{6}$. Han laget deretter tegnet "+" ved hjelp av centikubene som han plasserte mellom de to brøkene slik at det sto "$\frac{2}{6} + \frac{2}{6}$". Han viste at han ser koblingen mellom $\frac{4}{6}$ og summen av to brøker, noe som tyder på begrepsmessig forståelse.

Likheter og ulikheter

Ved å se på funnene i denne oppgaven dukker det opp flere likheter og ulikheter. Guttene viste begrepsmessig forståelse både i 2M og 2U, gjennom det vi har kalt *koblinger*. I tillegg viste de evnen til å resonnere da de rettferdiggjorde svarene sine i begge oppgavene, selv om de ikke ga en tilstrekkelig begrunnelse for hvorfor det ikke var mulig å forkorte $\frac{3}{8}$ i oppgave 2U.

Vi kan se at både strategisk tankegang og prosedyrekunnskap kommer til syne da de arbeidet uten konkretiseringsmateriell, men ikke da de arbeidet med. Are viste strategisk tankegang da han omformulerte oppgaven for å forenkle det, men dette gjorde de ikke i oppgave 2M. Prosedyre-kunnskapen til guttene kom tydelig fram da de utvidet brøken effektivt på forskjellige måter i 2U, men også dette uteble i 2M. I begge intervjuene var informantene raske til å si seg fornøyd med svarene, og viste høy selvtillit.

4.1.2 Gruppe 1B

Denne gruppen besto av elevene Beate, Berit og Bjørn.

Oppgave 2U

I det første utdraget ser vi hvordan gruppa diskuterte etter Bjørn hadde lest oppgaven:

Bjørn	Tre åttedeler på så mange måter som mulig. Er det når man har en pizza for eksempel, også tar man tre åttedeler?

Beate	Ja. Hvis han spiser tre av stykkene. Av åtte pizzastykker.
Bjørn	Ja, er det liksom det som representerer tre åttedeler?

Utdrag 1: Gruppe 1B oppgave 2U

Her kan vi se at gruppa jobbet med å forstå oppgaven, og Bjørn viste strategisk tankegang da han forenklet problemet ved å benytte et pizza-eksempel. Selv om eksempelet var et svar i seg selv var det også et mentalt bilde som Bjørn brukte for å forstå oppgaven og for å komme med flere representasjoner.

Gruppa diskuterte oppgaven videre slik:

Berit	Men er ikke det sånn at to firedeler er det samme som én todel? Eller er det noe annet?
Beate	Ja, to firedeler er det samme som én todel.
Berit	Ja, fordi det er halvparten.
Bjørn	Hva mener dere egentlig nå?
Beate	Nei, vi prøver bare å snakke oss til et svar.
Bjørn	*Leser oppgaven* Skriv, representer på så mange måter som mulig.
Beate	Det betyr at vi må representere tre åttedeler på mange ulike måter da?
Berit	Ja, det er jo det det jeg sa. Det med at to firedeler representerer det samme som én todel.

Utdrag 2: Gruppe 1B oppgave 2U

Berit forklarte at $\frac{2}{4}$ var det samme som $\frac{1}{2}$ og mente derfor at $\frac{3}{8}$ kunne representeres på en annen måte. Her viste hun tegn til begrepsmessig forståelse gjennom konsekvenstenkning. Ettersom $\frac{1}{2}$ kunne representeres som forskjellige brøker måtte også $\frac{3}{8}$ kunne representeres som forskjellige brøker. I tillegg viste Berit en tydelig strategi for å finne en løsning på problemet (strategisk tankegang) men hun manglet tilstrekkelig prosedyrekunnskap for å bygge videre på denne tankegangen.

Videre fortsatte samtalen slik:

Berit	Er det ikke sånn at man kan gjøre om det til prosent?
Beate	Jo, men det kan ikke jeg.

Berit	Men det er kanskje ikke innenfor brøk.
Beate	Jojo, det har vi gjort med *navnet til læreren*, tror jeg.
Berit	Er ikke det med prosent i stedet for brøk?
Beate	Nei, vi kan regne brøk om til prosent eller prosent om til brøk.
Berit	Ja, det er sant.

Utdrag 3: Gruppe 1B oppgave 2U

I dette utdraget ser vi at Berit stilte spørsmål til om det var mulig å gjøre om brøken til prosent, men ble tydelig usikker. Gjennom diskusjon med Beate kom de fram til at dette var mulig, og at det var noe de hadde gjort med læreren, men de gikk raskt bort fra det. Senere i oppgaven ønsket Berit på nytt å representere brøken som prosent: "Okei. Vi må gjøre det til prosent. Hvordan gjør vi det da? Husker noen av dere det?". Hun fikk lite respons fra gruppa, og supplerte selv at hun trodde det hadde noe med divisjon å gjøre. Igjen viste elevene tegn til begrepsmessig forståelse da de visste at det fantes koblinger mellom brøk og deling, og brøk og prosent, men manglet tilstrekkelig prosedyrekunnskap til å kunne gjennomføre operasjonene som kreves.

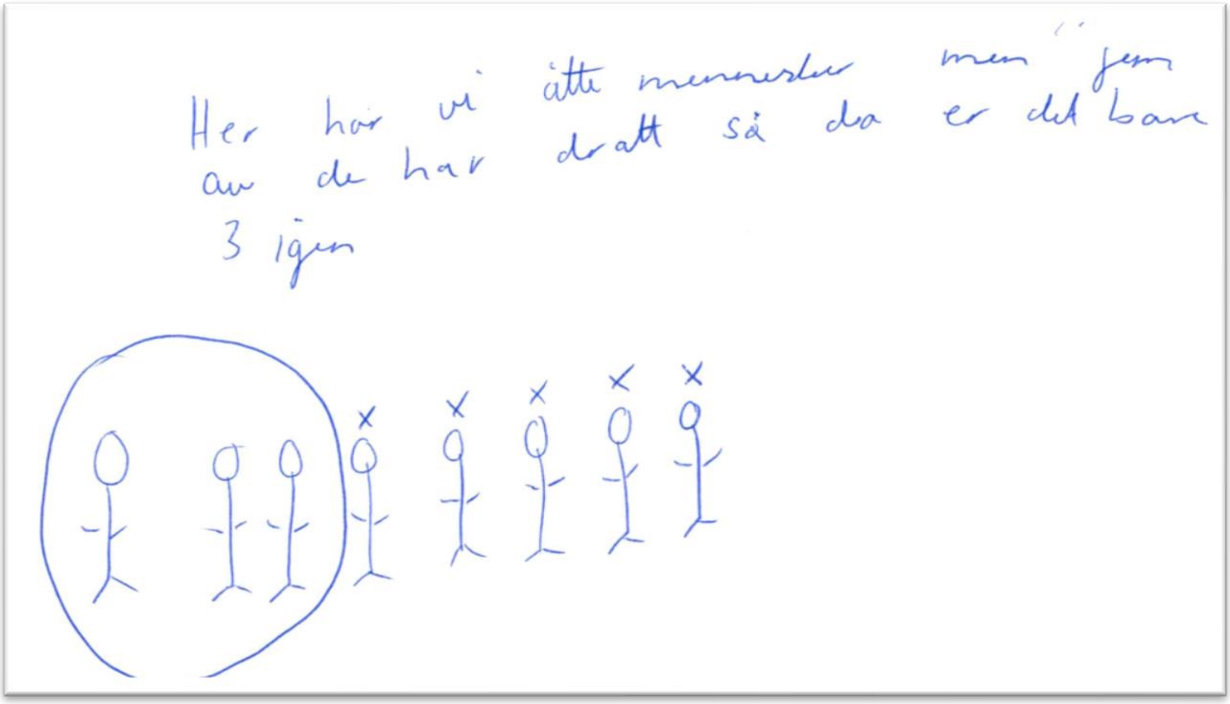
Et annet eksempel på hvor gruppen viste mangel på prosedyrekunnskap kom til syne da Beate spurte om de måtte finne "likheten" mellom teller og nevner. Selv om oppgaven kun handlet om én brøk, benyttet de seg av framgangsmåten for å finne fellesnevner, og brukte telleren og nevneren til dette. På denne måten kom de fram til 24, som har både 3 og 8 som faktor. Dette viser mangel på prosedyrekunnskap da de benyttet en metode til feil tid. Etter å ha kommet fram til tallet 24 som "likheten" mellom teller og nevner, multipliserte de telleren (3) med 8 og nevneren (8) med 3, og fikk brøken $\frac{24}{24}$. Gruppa evaluerte deretter dette svaret og innså at det ikke kunne være riktig da $\frac{24}{24}$ er det samme som 1, og 1 ikke er det samme som $\frac{3}{8}$. Denne vurderingen kan ses under tråden resonnering.

Gruppa lagde så en historie for å representere $\frac{3}{8}$, noe som også går under *koblinger* i begrepsmessig forståelse. Her følger et utdrag fra det Berit sa:

Berit	Det skulle vært åtte mennesker, men så har fem av de gått. Da er det tre åttendedeler igjen.

Utdrag 4: Gruppe 1B oppgave 2U

Beate tegnet deretter åtte mennesker, satte ring rundt tre av dem og et kryss over de fem som hadde gått. Se figur 6 nedenfor.



Figur 6: Gruppe 1B, oppgave 2U

Senere i oppgaveløsingen la Berit fram $\frac{6}{16}$ som en mulig løsning. Hun forklarte til gruppa at hun fant ut dette ved å doble både tre og åtte. Det er grunn til å tro at dette bygger videre på det hun viste i et tidligere utdrag (utdrag 2); at $\frac{1}{2}$ er det samme som $\frac{2}{4}$. Svaret $\frac{6}{16}$ viser da begrepsmessig forståelse gjennom konsekvenstenkning. Hun brukte ikke begrepet "utvide", men så likevel at om man dobler oppe og nede så er brøken like stor.

Gruppa viste vilje til å løse oppgaven, spesielt Berit og Beate. Likevel ser vi at gruppa ikke hadde helt troen på seg selv og sine forslag. $\frac{6}{16}$ for eksempel aldri skrevet ned og slått fast som et endelig svar. På bakgrunn av dette kan vi konkludere med at gruppa viste selvtillit gjennom deres vilje og engasjement til å løse oppgaven, men samtidig viste liten selvsikkerhet i forslagene de kom med.

Oppgave 2M

I dette utdraget kan vi se dialogen mellom Beate og Berit da de leste oppgaveteksten:

Beate	Representer fire sjettedeler på så mange måter som mulig, ved å bruke konkreter. Altså disse brikkene. Fire sjettedeler.
Berit	Da må vi finne en sjettedel. Bare så har vi den oppe. Da har vi den sånn *tar $\frac{6}{6}$-brøkstaven og legger $\frac{4}{6}$ på pulten*. Og så kan vi bruke fire sjettedeler på noen av disse da (brøksirklene).
Beate	Ja, for fire brikker. Og så er det... seks deler. Du legger sammen de øverste så blir det fire sjettedeler.

Berit	Ja
Beate	Fordi du endrer ikke telleren.
Berit	Se her er det en hel en (viser med $\frac{6}{6}$-brøksirkel). Og siden det er seks deler... Når jeg tar vekk to stykk, da er det fire sjettedeler igjen på den.

Utdrag 5: Gruppe 1B oppgave 2M

Først leste Beate oppgaven, og gjennom det hun sa og gjorde peker dette på en strategisk tankegang gjennom at hun jobbet med å forstå oppgaven, selekterte viktig informasjon og formulerte oppgaven på sin egen måte da hun sa "altså disse brikkene" (her viste hun til alt konkretiseringsmateriell som lå foran henne bordet).

Videre tok Berit fram $\frac{6}{6}$-brøkstaven og la fram fire av disse slik at de hadde $\frac{4}{6}$ på bordet. Beate rettferdiggjorde svaret ved å forklare at de la sammen de øverste tallene i hver brøk. I argumentasjonen blandet hun begrepene teller og nevner, men det er tydelig at hun i dette tilfellet så at nevner står uforandret når brøkene legges sammen. Forklaringen til Beate viser til tråden resonnering, men viser også tegn til prosedyrekunnskap da hun forklarer hvordan de skal summere de fire delene av brøkstaven.

Etter dette tok Beate fram centikubene og prøvde å komme fram til en løsning, men klarte ikke å representere brøken på denne måten. Dette førte til at de gikk tilbake for å lese oppgaven på nytt:

Beate	*Leser oppgaven* Forklar… representer fire sjettedeler på så mange…
Berit	For nevneren er jo seks, så vi må jo ha sånn seks der. Eller så må vi ha... husker du det der med to firedeler eller noe sånt som en todel?
Beate	Ja
Berit	Ja, jeg tror det er sånn vi må gjøre det. Fordi det er halvparten, og det er like mye. To firedeler er like mye som en todel. Vi må bare finne det.

Utdrag 6: Gruppe 1B oppgave 2M

I dette utdraget fra jentene kan vi se at de leste oppgaven på nytt, og at Berit ikke var helt sikker på hvordan de kunne representere brøken på en annen måte. Likevel ser vi at Berit valgte å ta i bruk en strategi ved at hun benyttet seg av noe hun kjente til fra før – at $\frac{2}{4}$ er det samme som $\frac{1}{2}$. Som i intervjuet uten konkreter, viser hun strategisk tankegang ved at hun mente dette kunne være veien til en løsning. Etter Berit hadde forklart denne tankegangen er det tydelig at Beate også var med på tanken, da hun også forklarte det samme med egne ord.

Videre la de merke til at brøkstavene viste prosent i tillegg til brøk, og de ville bruke dette til å finne en løsning. De fant ut ved hjelp av konkretiseringsmateriellet at $\frac{4}{6}$ var det samme som 66,4 % (egentlig 66,7 %, men brøkstavene viste at ⅙ er 16,6 % som førte til en feil da elevene summerte). Jentene så at $\frac{12}{12}$-brøkstaven viste at hver brikke var 8,3 %, og Berit så at 8,3 var halvparten av 16,6. De konkluderte dermed med at de måtte ha dobbelt så mange $\frac{1}{12}$-brikker for å få 66,4 % som er $\frac{4}{6}$. Jentene klarte derimot ikke å oppgi svaret som brøk da intervjueren ba om det. Dette viser til dels mangel på begrepsmessig forståelse da jentene ikke klarte å koble prosent tilbake til brøk. De klarer å summere prosenttallene på brøkstavene, men ikke brøkene. Gruppa viser også mangel på selvtillit i denne fasen av oppgaveløsingen da de var svært nær et svar, men ikke har nok tro på seg selv til å forsøke å summere brøkene.

Likheter og ulikheter

Gruppe 1B viste i oppgave 2U begrepsmessig forståelse ved flere anledninger, blant annet ved konsekvenstenkning hvor svaret gruppa oppga kom som en konsekvens av kunnskap de allerede besatt. I tillegg viste gruppa antydninger til begrepsmessig forståelse på flere områder, men mangel på prosedyrekunnskap gjorde at de ikke kom seg videre. Dette kom til syne da Berit visste at en brøk kunne utvides eller forkortes og fortsatt beholde samme verdi, men gruppa visste ikke hvordan de skulle utføre operasjonen. I oppgaven med konkretiseringsmateriell ble ikke deres begrepsmessige forståelse veldig synlig, og de viste tvert imot mangel på dette da ikke klarte å koble at de kunne bytte representasjoner mellom prosent og brøk da de skulle oppgi svaret som brøk.

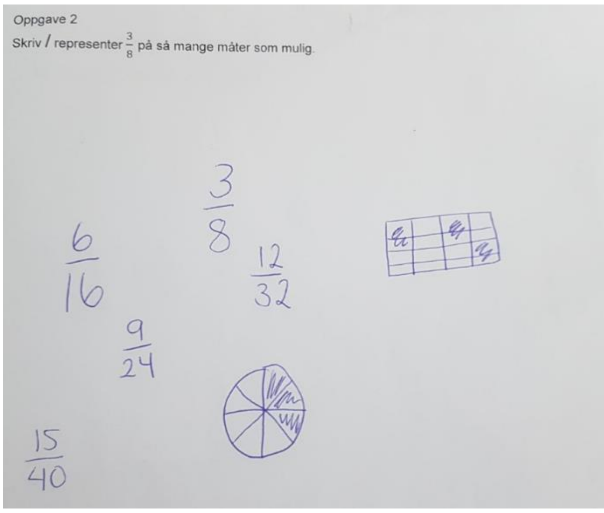
Vi kan se at gruppa benyttet seg av en tydelig strategi i begge oppgavene, hvor Berit benyttet kunnskap som hun besatt fra før til å prøve å løse oppgaven. I tillegg kommer den strategiske tankegangen tydelig fram i begge oppgavene da de jobbet med å forstå hva oppgavene spurte om. Bjørn tegnet et pizza-eksempel i 2U for å forstå oppgaven ytterligere, og Beate forklarte oppgave 2M med egne ord til seg selv for å forstå oppgaven. Resonnering forekom enkelte ganger i form av evaluering, både i 2U og 2M da de så at svarene ikke kunne stemme. Selvtillit kom fram i lik grad i begge intervjuene hvor de viser viljen til å løse begge oppgavene, men lite selvsikkerhet i avgivelsen av svar.

4.1.3 Gruppe 2C

Denne gruppen besto av elevene Caroline, Celine og Christer.

Oppgave 2U

Elevene begynte med å se om brøken kunne forkortes, men konkluderte med at den kun kunne utvides. De brukte på denne måten kunnskap de allerede besatt om utvidelse og forkorting av brøker som strategi for å nærme seg en løsning. De ga sitt første svar, $\frac{6}{16}$, og skrev også $\frac{3}{8}$ ved siden av. Like etter representerte de $\frac{3}{8}$ ved å tegne et rektangel (kake) delt i åtte biter og fargela tre. Christer forklarte at de kunne dele inn den samme kaka på nytt, slik at det ble 16 biter, der seks av de var fargelagt (se figur 7). Gruppa viste her god begrepsmessig forståelse. De representerte brøken på varierte måter ved tegne et rektangel, ved å utvide brøken, og ved at de sammenlignet de ulike løsningene. De illustrerte også utvidelsen av brøken $\frac{3}{8}$ til $\frac{6}{16}$, og viste at de er like store. Dette rettferdiggjør (resonnering) også utvidelsen av brøken. De forklarte senere at kaka også kunne deles opp i enda flere biter, slik at de fikk $\frac{12}{32}$ osv.



Figur 7: Gruppe 2C, oppgave 2U

Gruppa ga flere ulike svar der de utvidet brøken med ulike faktorer. Selv om de ikke gjorde utregninger på arket, viste de at deres prosedyrekunnskap var tilstrekkelig nok til å utvide brøkene ved rask hoderegning. Mot slutten av oppgaven nevnte Celine at de kunne gjøre om brøken til desimaltall, men de valgte å ikke gå videre med dette. De viste god selvtillit gjennom oppgaveløsingen, og ønsket å løse oppgaven på flere forskjellige måter.

Oppgave 2M

Celine fant fram $\frac{3}{3}$-brøkstaven, delte den opp, og pekte på $\frac{2}{3}$: "Da er det fire sjettedeler". Like etterpå gjorde hun det samme med $\frac{6}{6}$- og $\frac{12}{12}$-brøkstaven ($\frac{4}{6}$ og $\frac{8}{12}$) og la de ved siden av hverandre. Oppgaveløsingen gikk veldig fort, og intervjuer spurte derfor om de kunne forklare svarene sine:

Celine	Hvis man utvider den *peker på $\frac{2}{3}$-brøkstaven* slik at nevneren blir seks, så utvider man med samme tall på telleren…
Caroline	Ganger med to? Blir ikke det to?
Celine	Ja da blir den to, og den to (begge 1/3-brøkstavdelene)

Utdrag 7: Gruppe 2C oppgave 2M

Celine viste god begrepsmessig forståelse. Hun benyttet matematiske begreper som "utvide", "teller" og "nevner", og brukte de riktig og hensiktsmessig. Da hun senere forklarte hvorfor $\frac{8}{12}$ er det samme som $\frac{4}{6}$, brukte hun også begrepet "forkorte". Celine viste god selvtillit, og virket trygg i svarene hun ga. De kom raskt og uten forklaring, men da intervjuer ba henne om å utdype, rettferdiggjorde (resonnering) hun svarene godt.

Christer la så fram $\frac{4}{6}$ av $\frac{6}{6}$-brøksirkel og sa at man kunne gjøre det samme med $\frac{3}{3}$-brøksirkelen. Han poengterte at det var det samme som de gjorde med brøkstavene. Celine viste så med centikubene at seks kuber kunne representere en kake, og tar man vekk to stykk, så har man $\frac{4}{6}$. Den begrepsmessige forståelsen kom tydelig fram da elevene benyttet ulike konkreter og klarte å sammenligne de ulike løsningsforslagene.

Likheter og ulikheter

I disse intervjuene ser vi få ulikheter i hvilken grad matematisk forståelse kommer til syne. I begge intervjuene viste elevene god begrepsmessig forståelse særlig med tanke på koblinger mellom representasjoner. I begge intervjuene ga elevene også kakeeksempler, enten ved å tegne eller ved å bruke centikuber. De var nøye med å ikke endre helheten, slik at de ulike representasjonene av brøken til enhver tid hadde samme verdi. I oppgave 2M så vi dette da elevene lot de øvrige centikubene i en brøk ligge igjen ved siden av, og ikke tok de vekk (f.eks. to av de seks centikubene i $\frac{4}{6}$). I 2U så vi dette da elevene ikke endret størrelsen på "kaka" da de endret tegningen av $\frac{3}{8}$ til $\frac{6}{16}$.

Elevenes resonnering var god i 2M da intervjuer ba om forklaring. Dette ble ikke gjort i 2U, men illustrasjonen (ref. figur 7) rettferdiggjør utvidelse av brøk ved at vi ser at størrelsen ikke endres selv om man deler inn i flere like biter. Elevene viste høy selvtillit i begge intervjuene, og kom med flere ulike svar. Elevene gjorde nødvendig hoderegning for utviding og forkorting av brøkene, men utover dette kom ikke prosedyrekunnskapen fram i særlig stor grad i verken oppgave 2M eller 2U.

Gruppas strategiske tankegang kom til syne i 2U ved at de så om brøken kunne forkortes. De viste derimot ikke noen form for strategiske tankegang i 2M da det virket som de hadde løsningen med en gang, uten å benytte seg av noen form for strategi for å komme fram til svaret.

4.1.4 Gruppe 2D

Gruppe 2D besto av elevene Dag, Didrik og Dina.

Oppgave 2U

Dina leste oppgaven, og etter litt betenkningstid sa Didrik at de kunne begynne med å multiplisere telleren og nevneren med to slik at de fikk $\frac{6}{16}$. I likhet med gruppe 2C viste Didrik strategiske tankegang da han begynte å utvide brøken. Videre sa Didrik at dette kunne de fortsette å gjøre, noe Dag sa seg enig i og kom med eksempler på hva den neste brøken ville bli om de fortsatte å doble telleren og nevneren. Som en oppsummering av denne tanken skrev gruppa at ved å multiplisere telleren og nevneren med samme tall så ville man få en ny brøk med samme verdi. Med dette viste gruppa resonnering. Prosedyrekunnskapen knyttet til dette kom ikke fram eksplisitt.

Elevene viste en god begrepsmessig forståelse da de kom med et eksempel på en utvidet brøk, $\frac{6}{16}$, i tillegg til å skrive en generell løsning på problemet. De gav kun en representasjon av $\frac{3}{8}$, men selvtillit synliggjøres gjennom deres trygghet i svaret som blir gitt på generell form.

Oppgave 2M

Etter Dag hadde lest oppgaven tok gruppa fram både $\frac{6}{6}$-brøksirkelen og $\frac{6}{6}$-brøkstaven, la til side to brikker fra hver av disse og presenterte det som et svar. Videre sa Didrik at brøken kunne forkortes ved å bruke ord som “krympe” og “forminske”. Dina anerkjente det Didrik sa, og la fram $\frac{2}{3}$ ved hjelp av $\frac{3}{3}$-brøksirkelen. Ved å vise hvordan de forkortet brøken viste de prosedyrekunnskap. Didrik begrunnet hvordan de forkortet brøken ved å presisere at både telleren og nevneren kunne divideres på to. Her ser vi hvordan Didrik rettferdiggjorde svaret ved å gi en begrunnelse til svaret og løsningsmetoden (resonnering). Didrik sa deretter at det fantes flere løsninger på svaret:

Didrik	Det er vel flere også? Det er jo egentlig veldig mange.
Dina	Vi kan vel gjøre det med den også? *Tar fram $\frac{12}{12}$-brøkstaven*
Didrik	Ja!
Dina	Da blir det åtte. *Deler brøkstaven til $\frac{8}{12}$*

Utdrag 8: Gruppe 2D oppgave 2M

Dag observerte det Didrik og Dina gjorde, og supplerte med å forklare hva de gjorde:

Dag	Fordi da ganger du det, i stedet for å dele det.
Didrik	Jepp. Nettopp.

Utdrag 9: Gruppe 2D oppgave 2M

Ved å forklare hva de gjorde, rettferdiggjorde Dag løsningsmetoden til gruppa, noe som går under resonnering.

Didrik gjentok at brøken kunne representeres på mange forskjellige måter, blant annet ved å benytte seg av centikubene. Intervjuer ba derfor gruppa om de kunne vise hvordan man kunne ta i bruk centikubene. Didrik plukket deretter ut 24 centikuber fra boksen og plasserte de på bordet:

Didrik	*Teller centikuber* Sånn! Tjuefire.
Dag	Ja. Da blir det... Hmm, tjuefire. Da skal det være seksten igjen da.
Didrik	Ja, stemmer. *Tar 16 centikuber til siden*
Didrik	Sånn! Da har vi fire seksdeler.
Dag	Ja, eller enda større. Siden vi ganga med fire.

Utdrag 10: Gruppe 2D oppgave 2M

Ved å legge 16 centikuber til siden, fra en gruppe på totalt 24, kunne han representere $\frac{4}{6}$ som en del av en mengde. Gruppa viste begrepsmessig forståelse gjennom å se koblinger mellom forskjellige representasjoner ved at de først utvidet og forkortet brøken med brøksirkler og brøkstaver, og til slutt representerte brøken som en del av en mengde ved hjelp av centikuber.

Didrik var tydelig på å ta ansvar og viste selvtillit gjennom sine svar og framtoning. Gruppedynamikken var god da han lot de andre på gruppa komme til med sine innspill og forslag, og de utfylte hverandre ved å forklare hvordan de kom fram til svarene.

Likheter og ulikheter

I oppgave 2U kom begrepsmessig forståelse til syne da de utvidet brøken og i tillegg formulerte en generell løsning på problemet. Likevel hadde de færre representasjoner av brøken enn i 2M, så de fikk ikke vist sin begrepsmessige forståelse i like stor grad i denne oppgaven. Gruppa viste lite engasjement i oppgavene 2U da de sa seg fornøyd med én løsning.

I 2M viste de begrepsmessig forståelse da de representerte brøken på flere forskjellige måter. Vi kan også se at gruppas prosedyrekunnskap kom til syne da de forkortet og utvidet brøken, samtidig som de representerte verdien av brøken som en del av en mengde. De resonnerte gjennom å rettferdiggjøre svarene sine, og viste et større engasjement i 2M (selvtillit) enn i 2U. Didrik viste strategisk tankegang da han begynte å utvide brøken og argumenterte videre at dette ville gi flere svar.

4.2 Oppgave 4

I likhet med forrige oppgave bruker vi forkortelsene 4U og 4M (uten og med konkretiserings-materiell). Oppgavene var slik:

Uten konkreter (4U)

a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{3}$
b) Finn tre brøker som er lik $\frac{2}{3}$

c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{2}{5}$

Med konkreter (4M)

a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{4}$

b) Finn tre brøker som er lik $\frac{1}{2}$

c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{3}{4}$

4.2.1 Gruppe 1A

Oppgave 4U

Etter å ha lest oppgaven (a) var guttene raske med å komme med flere svar. Aksel nevnte først $\frac{1}{4}$, i tillegg til $\frac{7}{100}$ som han forklarte hørtes ut som et mer profesjonelt svar. De skrev ikke ned disse forslagene, men Are noterte $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ og $\frac{3}{100}$. Aksel var enig i at dette var mindre enn $\frac{1}{3}$ og presiserte at det var mye mindre. I det Are leste opp neste deloppgave fikk Aksel lyst til å komme med et mer utdypende svar. Først utvidet han $\frac{1}{3}$ til $\frac{10}{30}$ før han forklarte at han ville ha nevneren så nærme hundre som mulig. Han utvidet deretter $\frac{10}{30}$ til $\frac{30}{90}$. I neste steg gjorde han overslagsregning hvor han sa at telleren ble omtrent 35 hvis nevneren var 100. Han skrev $\frac{27}{100}$ på arket og sa at alle brøker som var mindre enn $\frac{35}{100}$ også var mindre enn $\frac{1}{3}$, men presiserte at $\frac{35}{100}$ ikke var en nøyaktig kalkulasjon. I denne deloppgaven kom flere av Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder til syne. Guttene viste begrepsmessig forståelse gjennom koblinger, hvor de klarte å sammenligne størrelsene på brøkene. Gjennom overslagsregning viste Aksel både god prosedyrekunnskap og en tydelig strategi for finne flere løsninger (strategisk tankegang). I tillegg gav Aksel gyldighet til svaret sitt ved å presisere at det var overslagsregning han hadde gjort, noe som går under tråden resonnering.

I neste oppgave (b) skulle de finne tre brøker som var lik $\frac{2}{3}$.

Aksel	*Leser oppgaven* Tre brøker som er lik
Aksel	Hvis vi utvider det så er det fortsatt likt. To tredjedeler, så hvis vi utvider den så får vi seks nideler.
Are	Vi kan jo sjekke det lett da. Om vi lager noe med ni deler.
Aksel	Lage en sirkel med ni deler?
Are	Tror det blir litt vanskelig da.
Aksel	Ja det tror jeg blir sykt vanskelig.

Utdrag 11: Gruppe 1A oppgave 4U

I dette utdraget sa Aksel at en brøk fortsatt ville være lik om den ble utvidet. Han utvidet $\frac{2}{3}$ til $\frac{6}{9}$ ved å multiplisere teller og nevner med tre, men ble usikker på om det stemte. Are ville rettferdiggjøre svaret ved å visualisere det, men innså at de ikke fikk til å tegne en nøyaktig sirkel med ni deler. Likevel valgte de å skissere to sirkler hvor de fargela $\frac{2}{3}$ og $\frac{6}{9}$ for å vise at det var like mye. De neste to svarene fant de ved å tilsynelatende velge to tilfeldige tall å utvide brøken med, 2 og 4, slik at de fikk brøkene $\frac{4}{6}$ og $\frac{8}{12}$. Guttene brukte kort tid på denne oppgaven og brukte verken tid på å rettferdiggjøre svarene sine eller evaluere de. Dette kan tyde på selvtillit ved at de stoler på seg selv og sin egen prosedyrekunnskap.

I den siste deloppgaven (c) skulle de finne tre brøker som var større enn $\frac{2}{5}$. Aksel viste strategisk tankegang da han poengtere at 2,5 er halvparten av 5, og argumenterte for at $\frac{2}{5}$ er mindre enn en halv. Videre forklarte han at alle brøker som var mer enn en halv derfor ville være større enn $\frac{2}{5}$. Aksel skrev $\frac{4}{6}$ på arket. Are virket å være enig i argumentene og skrev deretter $\frac{1}{2}$ på arket. Da Are skrev dette var det tydelig at Aksel ble usikker: "Ja, men det er ikke akkurat… det ($\frac{2}{5}$) er veldig nær halvparten, men den ($\frac{1}{2}$) skal egentlig være større". Selv om Aksel først ble usikker da Are skrev $\frac{1}{2}$, var det tydelig at han viste begrepsmessig forståelse gjennom konsekvenstenkning – altså at $\frac{1}{2}$, som er en halv, må være større enn $\frac{2}{5}$ siden $\frac{2}{5}$ er nær halvparten, men ikke lik.

Oppgave 4M

Da Aksel leste oppgaven (a) hadde guttene hver sin måte å gå fram på for å finne svar:

Aksel	*Leser oppgaven* Finn tre brøker som er mindre enn én firedel.
Are	Én firedel er jo 25 prosent cirka. Ja, 25 prosent, ja.
Aksel	Ja, det er bare å ta de som er mindre enn den og den. *Legger fram $\frac{1}{4}$-brøkstav og $\frac{1}{4}$-brøksirkel*

Utdrag 12: Gruppe 1A oppgave 4M

Selv om Are nevnte prosent var det brikkene Aksel la fram som fikk fokuset hos guttene, og de fant fram forskjellige brikker som var fysisk mindre enn $\frac{1}{4}$-brikkene Aksel la fram. Are plukket ut $\frac{1}{1}$-, $\frac{2}{2}$- og $\frac{3}{3}$-brøkstavene og sa at alle brøkstavene utenom disse tre ville gi riktig svar, avhengig av hvor mange brikker de ville ta av hver. For å gi et eksempel på dette tok han fram $\frac{2}{5}$ fra brøkstavene og sa at dette var 40 prosent og ville derfor være mer enn $\frac{1}{4}$ som var 25 prosent. Aksel valgte på sin side å finne flere brikker fra én brøkstav som til sammen fortsatt ville være mindre enn $\frac{1}{4}$. Han tok fram $\frac{2}{10}$ og sa at 20 prosent var mindre enn 25 prosent. Guttene viste begrepsmessig forståelse ved at de så koblinger mellom brøk og prosent. Deres strategiske tankegang kom til syne ved at Aksel la fram brikker som representerte $\frac{1}{4}$ på bordet, og de ønsket å finne brikker som var fysisk mindre enn de brikkene.

I neste deloppgave (b) hvor de skulle finne tre brøker som er lik $\frac{1}{2}$ var Are rask med å finne forskjellige brøkstaver og brøksirkler som han delte i to like deler og presenterte det som et svar. Intervjuer spurte om de kunne forklare hvorfor det de hadde funnet var lik $\frac{1}{2}$. Are forklarte at om han forkortet brøkene han hadde funnet ville de bli $\frac{1}{2}$ og ga et eksempel på dette. Aksel supplerte med et annet eksempel. Her viste guttene evnen til å rettferdiggjøre svarene sine, noe som går under resonnering.

Til slutt, i oppgave (c), skulle de finne tre brøker som er større enn $\frac{3}{4}$. Nok en gang var Are raskt ute med å si at det var 75 prosent. Aksel fant fram $\frac{12}{12}$-brøkstaven og $\frac{4}{4}$-brøkstaven. Han sammenlignet deretter $\frac{10}{12}$ med $\frac{3}{4}$ ved å legge de ved siden av hverandre og konkluderte med at $\frac{10}{12}$ var større. I tillegg la de fram $\frac{1}{1}$-brøkstaven som et svar, og de blandet noen brøkstaver slik at verdien til sammen ble større enn $\frac{3}{4}$. Disse brøkene hadde altså sum som var større enn $\frac{3}{4}$, men elevene oppga aldri svarene som én brøk, og viste dermed ikke at de hadde nødvendig prosedyrekunnskap for å summere brøkene. Deres strategiske tankegang kom derimot synlig fram i det de valgte å sammenligne fysiske størrelser på konkretiseringsmateriellene for å komme fram til et svar.

Likheter og ulikheter

I oppgave 4 av gruppe 1A ser vi få ulikheter i forekomst av hver tråd. Begrepsmessig forståelse, strategisk tankegang og resonnering kom til syne i både 4U og 4M. I 4U (deloppgave b) viste elevene at de klarte å utvide brøk, og i 4M (deloppgave b) viste de at de kunne forkorte brøk. Selv om elevene ikke summerte brøkene i deloppgave *c*, er det tydelig at elevene gjorde hoderegning ellers i både 4U og 4M, og viste på denne måten prosedyrekunnskap.

Vi ser at elevene søker til det konkrete i begge intervjuene. I oppgave 4U ønsket elevene blant annet å tegne og dele opp sirkler, og brukte "en halv" som en størrelse å sammenligne brøker med. Disse teknikkene var mer effektive i 4M da de hadde fysiske konkreter de kunne bruke, men elevenes begrepsmessige forståelse av brøk kom likevel fram i relativt lik grad i begge intervjuene.

I 4M brukte elevene brøkstavene til å sammenligne størrelser fysisk, og de brukte prosent (som står på brøkstavene) som førte til at de enkelt klarte å skille mellom hva som var størst, minst eller likt. Slik kom både deres strategiske tankegang og resonnering mer fram i 4M enn i 4U, ved at de hadde tydelige framgangsmåter og rettferdiggjorde svarene sine visuelt. Elevene viste selvtillit i like stor grad i begge intervjuene.

4.2.2 Gruppe 1B

Oppgave 4U

Beate tok fram begrepet "uekte brøk" i begynnelsen av oppgaveløsingen, og foreslo at de hadde et svar på oppgaven om telleren var større enn nevneren. Bjørn kom så med påstanden: "$\frac{1}{4}$ er jo mindre enn $\frac{1}{3}$". Dette stemte ikke overens med hva Beate akkurat hadde sagt, men hun ble raskt enig.

Beate	Én firedel?
Berit	Ja
Beate	Ja, for hvis du har en svær pizza og du deler den i fire stykker.
Berit	Ja, for da...
Beate	Da får du mindre... Ja...

Utdrag 13: Gruppe 1B oppgave 4U

Beate klarte å se at hennes første resonnement var feil ved hjelp av å visualisere problemet som "en pizza". Bjørn tegnet opp to sirkler som var delt i tre og fire deler, og fargela en av delene, som viste hva de tenkte. Selv om Beates første forslag var feil, klarte hun ved hjelp av gruppa og strategisk tankegang å forenkle problemet.

Da de hadde sett at $\frac{1}{4}$ måtte være mindre enn $\frac{1}{3}$, nærmet Beate og Bjørn seg en generell løsning på problemet og konkluderte med at så lenge telleren fortsatt var lik 1, og nevneren økte, så ville brøken være mindre enn $\frac{1}{3}$. De ga derfor svarene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{6}$. Gjennom resonnering rettferdiggjorde de svarene sine med tegninger av pizza og forklaringer. Deres begrepsmessige forståelse kom også delvis til syne da de koblet representasjonene (brøk og pizza), og gjennom konsekvenstenkning så at brøkene ville bli mindre når nevneren stadig ble større.

I oppgave *b* kom det tydelig fram at elevene i gruppa manglet prosedyrekunnskap til utviding av brøk. Etter mye prøving og feiling jobbet de seg mot å se at teller og nevner er relatert gjennom multiplikasjon. Bjørn la først fram svarene $\frac{4}{6}$ og $\frac{6}{9}$, og resonnerte slik:

Bjørn	For nå tenkte jeg, her er to tredeler. Da plusser vi de sammen og det blir fire seksdeler, også plusser vi de sammen igjen med to tredeler.

Utdrag 14: Gruppe 1B oppgave 4U

Å addere brøkene er ikke riktig ($\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \neq \frac{4}{6}$), men her tolker vi at Bjørn forsøkte å rettferdiggjøre at svarene kom som et resultat av gjentatt addisjon på både teller og nevner ($\frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6}$). Han fikk støtte fra Berit i sin resonnering, og selv om begge var delvis usikre, valgte de å stole på at det var riktig fordi de syntes det hørtes logisk ut. Senere foreslo Berit også $\frac{8}{12}$ som et svar, og rettferdiggjorde dette med at hun doblet teller og nevner i $\frac{4}{6}$. Dette viser begrepsmessig forståelse av brøkbegrepet som samtidig er begrenset av mangelen på prosedyrekunnskap. De klarte å se brøk som en størrelse, og klarte å sammenligne størrelsene av brøkene, men ble usikre fordi framgangsmåten ikke var godt innøvd.

I oppgave *c* forsøkte Bjørn å representere $\frac{2}{5}$ på ulike måter, i et forsøk på å forenkle problemet (strategisk tankegang). Først prøvde han å tegne $\frac{2}{5}$ som en pizza, men han klarte ikke å dele inn pizzaen i fem like deler. Deretter prøvde han å gjøre om $\frac{2}{5}$ til prosent, og skrev at $\frac{2}{5}$ var lik 20 %. Bjørn tegnet så fem små baller som han satte ring rundt, og så en mindre ring rundt to av ballene, og sa: "Vi må finne noe som er større enn dette". Bjørn viste svakheter i begrepsmessige forståelse da han forsøkte å bytte mellom ulike representasjoner, og ikke klarte å utføre dette korrekt eller å gjøre det på en hensiktsmessig måte. Gruppas strategiske tankegang hjalp de til å finne to brøker som var større enn $\frac{2}{5}$ like etterpå, blant annet ved å se på pizzategningene fra tidligere.

Oppgave 4M

I oppgave a så de raskt at flere av de ulike brøkstavene hadde deler som var mindre enn $\frac{1}{4}$, og la fram $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{12}$ i brøkstaver. Her ser vi resonnering når de sammenligner fysiske størrelser på brøkstavene. Gruppa hadde nå løst oppgaven på flere måter enn det den spurte om, før Berit kom med utsagnet: "Vi kan jo ta mer enn det". Hun tok en del av $\frac{4}{4}$-brøkstaven og begynte å sammenligne den fysiske størrelsen med andre brøkstaver. Med en gang fant hun at $\frac{3}{12}$ og $\frac{1}{4}$ hadde samme størrelse, men hun var usikker på om det faktisk stemte, og om det kunne brukes til oppgaven. Berit viste vilje og engasjement til å løse oppgaven på flere og mer komplekse måter, men viste ikke høy grad av selvtillit i svarene hun kom med.

Beate satte sammen 19 blå centikuber, og la én grønn centikube ved siden av. "Dette er én nittendel, og det er mindre enn én firedel". Det riktige hadde vært $\frac{1}{20}$, men hun oppsummerte etterpå at så lenge nevneren er større enn fire, så er brøken mindre. Beate viste dermed litt av sin begrepsmessige forståelse av brøk, og noen av begrensningene hun har i forståelsen av begrepet.

Da gruppa leste neste deloppgave (b), uttrykte Beate: "Hater når de skal finne noe som er lik". Beate viste lav selvtillit til å løse oppgaven. Berit så derimot raskt at $\frac{1}{2}$ var det samme som "halvparten", og gjennom strategiske tankegangen la hun derfor fram halvparten av brikkene i $\frac{4}{4}$-, $\frac{8}{8}$-, og $\frac{12}{12}$-brøkstavene på bordet.

I siste deloppgave (c) la Berit først fram $\frac{3}{3}$-brøksirkelen og sa at den var større enn $\frac{3}{4}$. Videre fant de $\frac{3}{4}$ i brøkstav og brøksirkel, og prøvde å legge til andre brøkstaver/sirkler for å finne noe som var større. Det oppsto problemer for jentene da de måtte navngi brøkene de hadde funnet. De så at om de f.eks. la til $\frac{1}{6}$ til $\frac{3}{4}$-brøksirkel så ville brøken bli større, men de hadde ikke den nødvendige prosedyrekunnskapen til å kunne summere brøkene, og dermed avgi et svar.

De forsøkte deretter å gjøre om til prosent for å finne en løsning og fant ut at "større enn $\frac{3}{4}$" var det samme som "større enn 75 %". Hun gjorde en riktig kobling mellom begrepene (begrepsmessig forståelse), men da hun la fram 85 % som et svar i en kombinasjon av brøkstav og brøksirkel, klarte hun fortsatt ikke å gjøre om til brøk. Berit tok så fram $\frac{10}{10}$-brøkstaven og fant ut at ni stykk tilsvarte 90 % og derfor $\frac{9}{10}$ i brøk. Med tydelig valg av strategi klarte Berit å jobbe seg fram til en løsning (strategisk tankegang).

Likheter og ulikheter

I den første deloppgaven i 4U (deloppgave *a*) ser vi at elevene først prøvde å tenke matematisk for å løse oppgaven, og at de ikke klarte å løse den før de tegnet sirkler (pizzaer) og visualiserte problemet. I 4M løste de oppgaven betydelig raskere enn i 4U, da elevene sammenlignet de fysiske størrelsene. Resonnering kom slik tydeligere fram i oppgaveløsingen i 4U, da de i 4M kun rettferdiggjorde svarene ved å sammenligne konkretenes fysiske størrelser. Dette viser også til elevenes selvtillit som framsto lavere i svarene i 4U. Gruppa viste manglende prosedyrekunnskap i både 4M og 4U, særlig da de skulle finne summen av brøker. Både i 4M og 4U ser vi gruppas konsekvenstenkning (begrepsmessig forståelse) da de prøvde å nærme seg et svar ut ifra noe de visste fra før (f.eks. at $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Denne måten å nærme seg et svar på er også strategisk tankegang, og forekom også både i 4M og 4U.

4.2.3 Gruppe 2C

Oppgave 4U

Her gikk oppgaveløsingen relativt fort. Elevene avga tre korrekte svar i hver deloppgave, men vi ser lite til ingen eksplisitt resonnering. Det er grunn til å tro at svarene kommer raskt og korrekt på grunn av god begrepsmessigforståelse og prosedyrekunnskap. Elevene klarer å sammenligne størrelsen på brøk effektivt, og viste at de også behersker dette når teller og nevner i to brøker er ulik, da de svarte at $\frac{3}{10}$ er mindre enn ⅓ i oppgave *a*. Hoderegning ble gjort da de utvidet brøker med ulike faktorer i oppgave *b*. I *c* ser de at brøken ($\frac{2}{5}$) er mindre enn “en halv”, og benytter seg av det.

Vi ser at elevene avga enklere svar til å begynne med og mer avanserte løsninger til slutt. Det var en del latter da de kom med forslag til svar, som trolig kom av at de følte at det ble litt for lett, for eksempel at ¼ og ⅕ er mindre enn ⅓. De viste selvtillit i svarene, og gode holdninger da de ikke sa seg fornøyd med kun enkle svar, men ville vise noe av det de kan.

Oppgave 4M

I første deloppgave benyttet gruppa seg kun av brøkstaver. De begynte med $\frac{12}{12}$-brøkstaven, tok av en del av den, og jobbet seg nedover til $\frac{5}{5}$-brøkstaven.

Caroline	Og denne. Denne er også litt mindre enn fire. *tar av $\frac{1}{5}$ av $\frac{5}{5}$-brøkstaven*

Utdrag 15: Gruppe 2C oppgave 4M

Caroline så på nevneren på brøkstavene, og sammenlignet de med $\frac{1}{4}$. Selv om det ikke kommer eksplisitt fram, tolker vi det slik at hun ser at så lenge telleren er lik én, så vil en økende nevner gjøre brøken mindre. De har altså jobbet seg ned mot $\frac{1}{4}$. Gruppa viser begrepsmessig forståelse når de sammenligner størrelsene på brøkene, men også strategisk tankegang ved at de begynner enkelt med å se på $\frac{1}{12}$, som definitivt er mindre enn $\frac{1}{4}$, og jobber seg mot $\frac{1}{5}$ som er så vidt mindre enn $\frac{1}{4}$. Gruppa viste godt engasjement (selvtillit) og avga langt flere enn tre svar.

I deloppgave *b* leste Christer $\frac{1}{2}$ som “en halv”, og ikke “én todel”. Gruppa la så fram tre svar, og intervjuer ba elevene forklare hva de hadde kommet fram til. De rettferdiggjorde (resonnering) svarene ved å vise at tellerne i brøkene de fant var halvparten så stor som nevnerne. De konkluderte med at alle brøkstavene foruten $\frac{3}{3}$- og $\frac{5}{5}$-brøkstaven kunne deles i to, og dermed gi “halvparten”.

I siste deloppgave kom strategisk tankegang tydelig fram når de umiddelbart begynte å sammenligne den fysiske størrelsen til $\frac{3}{4}$ i brøkstav. De la fram flere brøkstaver på bordet som var større enn $\frac{3}{4}$.

Caroline festet $\frac{1}{10}$ til $\frac{3}{4}$, og sa at brøken nå var større enn $\frac{3}{4}$. Ved hjelp av hoderegning (prosedyrekunnskap) klarte gruppa å summere brøkene ved å finne fellesnevner og deretter forkorte til $\frac{17}{20}$.

Likheter og ulikheter

Gruppas begrepsmessige forståelse kom godt fram i både oppgave 4M og oppgave 4U. De svarte riktig på alle deloppgaver, og gav både enkle og mer avanserte løsninger. Det ble gjort mye hoderegning (prosedyrekunnskap) i begge intervjuene, og det ble aldri behov for å skrive noe ned på papir eller å bruke kalkulator. Resonnering forekom kun da de ble spurt om å utdype svarene. Mye av dette grunnet nok i elevenes høye selvtillit i svarene de ga i både 4U og 4M hvor de ikke følte det var nødvendig å gi utdypende forklaringer.

Strategisk tankegang kommer kun til syne i 4M, der elevene brukte konkretene aktivt til å finne løsninger på oppgavene blant annet ved å sammenligne fysiske størrelser. I 4U løser elevene oppgavene raskt og relativt enkelt, men viste ingen tydelig strategi i veien til svarene.

4.2.4 Gruppe 2D

Oppgave 4U

I deloppgave *a* skrev elevene først $\frac{1}{100}$, før Didrik sa: "Så lenge telleren er én, og nevneren er større enn tre, så vil brøken være mindre enn $\frac{1}{3}$". Utsagnet viser både begrepsmessig forståelse da de avga et generelt svar, og resonnering gjennom rettferdiggjøring. Deretter skrev de ned to nye brøker som hadde mindre verdi enn $\frac{1}{3}$, uten å gi noe mer forklaring til svarene sine.

Da de i deloppgave *b* skulle finne tre brøker som var lik $\frac{2}{3}$ foreslo Didrik $\frac{6}{9}$ som et svar. Dag sa seg enig og begrunnet det med at de da hadde utvidet brøken med tre (resonnering). Gruppa var raske med å nevne to nye brøker som de skrev på arket uten videre utdyping.

Til slutt, i deloppgave *c*, skulle de finne tre brøker som var større enn $\frac{2}{5}$. Didrik foreslo først $\frac{2}{3}$, før Dina nevnte at man bare kunne gjøre telleren større, og skrev ned $\frac{3}{5}$. Avslutningsvis skrev Didrik $\frac{99}{100}$ og forklarte at det var nesten en hel.

Gruppa brukte kort tid på denne oppgaven og alle svarene de skrev ned var korrekte. De hadde ingen problemer med å sammenligne størrelsene på brøkene noe som vitner om begrepsmessig forståelse. De viste prosedyrekunnskap gjennom effektiv hoderegning, som da de skulle finne brøker som var lik $\frac{2}{3}$.

Oppgave 4M

I første deloppgave (a) var gruppa raske med å finne fram flere svar ved hjelp av brøkstaver. De viste strategisk tankegang da deres strategi for å finne flere løsninger var å sammenligne brøker med lik teller. For eksempel var det lettere for de å se at $\frac{1}{6}$ er mindre enn $\frac{1}{4}$ enn å se at $\frac{2}{12}$ er mindre. I tillegg til dette kom Didrik med en mer generell løsning – så lenge nevneren er større og telleren forblir den samme, vil brøken være mindre. Dette vitner om en begrepsmessig forståelse da han greier å se på brøk som en størrelse og hva nevnerens betydning er. Deres begrepsmessige forståelse kom også til syne gjennom konsekvenstenkning da gruppa argumenterte at $\frac{1}{8}$ må være mindre enn $\frac{1}{4}$, siden $\frac{2}{8}$ er like mye som $\frac{1}{4}$. Rettferdiggjørelsen av svarene går også under tråden resonnering. Konkretiseringsmateriellet ble kun brukt for å oppgi svarene de kom fram til.

I deloppgave *b*, hvor de skulle finne tre brøker som var lik $\frac{1}{2}$, sa Didrik at alle brøkstavene som besto av partall (i nevneren) kunne deles på to og dermed få samme verdi som $\frac{1}{2}$, som de også avga som svar. Dag tok fram $\frac{3}{3}$-brøkstaven og prøvde å representere $\frac{1}{2}$ med disse, men innså at det ikke var mulig.

I siste deloppgave, hvor de skulle finne tre brøker som er større enn $\frac{3}{4}$, fant Didrik fram $\frac{3}{3}$-brøkstaven, delte den i $\frac{2}{3}$ og presenterte det som et svar. Han spurte deretter gruppa om de var enige, og de nikket anerkjennende til det Didrik sa. Gruppa viser mangel på evaluering og rettferdiggjøring av svar, noe som resulterte i at svaret de oppga var feil. I tillegg viste de ingen tydelig strategi for hvordan de ville løse oppgaven, som for eksempel ved å bruke konkretiseringsmateriellet til å sammenligne størrelsene. I motsetning til det første svaret viste de en tydelig strategi for å finne en ny brøk. De la fram $\frac{3}{4}$ på bordet ved hjelp av $\frac{4}{4}$-brøksirkelen, og la én og én brikke fra $\frac{8}{8}$-brøksirkelen oppå for å se når disse brikkene dekket mer areal enn $\frac{3}{4}$. Etter de hadde lagt ned syv brikker kunne de se at de hadde mer enn $\frac{3}{4}$, og de svarte derfor $\frac{7}{8}$. Strategisk tankegang kom her til syne ved at de sammenlignet størrelsene med konkretiseringsmateriellet og brukte dette som for å finne løsninger.

Likheter og ulikheter

Nok en gang kan vi se at denne gruppa viste evnen til å resonnere både i oppgaven med konkretiseringsmateriell og uten, hovedsakelig ved at Dag rettferdiggjorde svarene Didrik gav. De viste også begrepsmessig forståelse i begge oppgavene da de gjentatte ganger klarte å sammenligne størrelsen på forskjellige brøker. Den strategiske tankegangen kom ikke like tydelig fram i oppgave 4U som i oppgave 4M. Det var tydelig at de brukte konkretiseringsmateriellet til å sammenligne størrelsene på brøkene ved å legge oppå hverandre og ved siden av hverandre. Når det gjelder gruppas prosedyrekunnskap kom den mest til syne i oppgave 4U da de utvidet brøkene ved effektiv hoderegning, noe som ikke kom like tydelig fram i 4M. Gruppa viser selvtillit på lik linje i begge intervjuene hvor de blant annet velger å svare med brøker som har ulike tellere og nevnere, i både 4U og 4M.

5 Diskusjon

Formålet med denne oppgaven er som tidligere nevnt å se hvordan matematisk kompetanse kommer til syne når elever arbeider med brøk. Med dette har vi ønsket å avdekke hvilke likheter og ulikheter som oppsto da elever på 8. trinn arbeidet med brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell. I resultatdelen ble elevgruppenes arbeid i fire oppgaver (2U, 2M, 4U og 4M) presentert, samt hvilke likheter og ulikheter som kom til syne ved å benytte oss av analyseverktøyet vi utarbeidet fra Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder for matematisk kompetanse. Dette kapittelet vil ta for seg resultatene, hvor vi vil sammenligne disse med tidligere forskningsresultater og diskutere dem i lys av utvalgt teori.

5.1 Begrepsmessig forståelse

Om vi tar for oss den første tråden, begrepsmessig forståelse, ser vi at tre av gruppene viste dette i alle fire oppgavene, selv om gruppe 2D viste færre representasjoner av brøken i oppgave 2U enn 2M. Hos gruppe 1B var ikke den begrepsmessige forståelsen like synlig i 2M som i 2U, og de viste mangel på dette da de ikke klarte å gjøre om svaret sitt fra prosent til brøk. Dette er en motsetning fra det Butler et al. (2003) beskriver i sin forskning, der gruppen som jobbet med konkretiseringsmateriell hadde bedre resultater enn de uten. Vår forskning er for snever til å kunne trekke noen slutninger basert på dette, men det er likevel interessant å merke seg denne forskjellen. Gruppe 1B’s mangel på begrepsmessig forståelse i sitt arbeid med konkretiseringsmateriell kan sees i likhet med det Baroody (1989) sier om at konkretiseringsmateriell ikke garanterer suksess. Én av grunnene til at gruppa ikke klarte å oppgi svaret som brøk kan være at de fant det lettere å summere prosent enn å summere brøker, ettersom brøkstavene viste prosent. En mulig årsak til dette kan være at elever synes det er lettere å addere heltall eller tall på desimalform enn brøk. Dette kan også sees i sammenheng med det Lamon (2012) trekker fram med tanke på kompleksiteten til brøkbegrepet, og at forståelse av brøk gjerne ligger på et høyere nivå hos elever. Det som likevel er påfallende, er at elevene viste begrepsmessig forståelse da de arbeidet med oppgavene uten konkretiseringsmateriell. Som vi tidligere har skrevet i delkapittel 2.2.8, “Utfordringer med brøk”, har mange elever problemer knyttet til brøk og de fire regneartene fordi de ifølge McNamara og Shaughnessy (referert i Van de Walle et al., 2015) overgeneraliserer heltallskunnskapene sine. Erfaringer de har med at dette i noen tilfeller vil gi rett svar, og noen ganger ikke, kan være en årsak til at de arbeider med prosent i stedet for brøk, da de her kan forholde seg til heltall eller tall på desimalform.

Til tross for at gruppe 1B’s begrepsmessige forståelse var mer framtredende i oppgave 2U, kunne vi ikke se noen markant forskjell innad i de andre gruppene i oppgave 2, da deres begrepsmessige forståelse kom til syne både med og uten konkretiseringsmateriell. Selv om gruppene ikke hadde konkretiseringsmateriell i 2U, valgte flere av gruppene å konkretisere $\frac{3}{8}$ ved å representere det med tegninger. På denne måten uttrykte gruppene et abstrakt uttrykk på en konkret måte, og elevene gir representasjonstegningene mening ved at de belyser matematikken som ligger bak uttrykket $\frac{3}{8}$ (cf. Fennema, 1973). Selv om en tegning ikke er et konkretiseringsmateriell, så kan man i alle fall se det som en type konkretisering ved at de visualiserte brøken (Kirfel, 2010). Dette kom også til syne da elevene skulle benytte seg av konkretiseringsmateriell. Alle gruppene representerte brøken ved å bruke konkretiseringsmateriell og klarte på denne måten å belyse det matematiske begrepet ved å bruke artefaktene.

I oppgave 4 viste derimot alle gruppene begrepsmessig forståelse i begge oppgavene. To av gruppene, 1A og 1B, valgte blant annet å konkretisere ved å benytte seg av representasjonstegninger da de ikke hadde konkretiseringsmateriell tilgjengelig. I Suydam og Higgins’ (1976) metastudie framkommer det at effekten av konkretiseringsmateriell i undervisning var positiv eller nøytral i en overvekt av studiene, noe som harmonerer med disse funnene.

5.2 Prosedyrekunnskap

Ikke overraskende ble det i enkelte deler av analysen problematisk å se prosedyrekunnskap hos gruppene. Tråden innebærer kognitive prosesser som hoderegning (Kilpatrick et al., 2001), og kommer ikke nødvendigvis fram eksplisitt, selv ikke i en slik muntlig intervjusetting. Resultatene viser at prosedyrekunnskap kom sjeldnere til syne i oppgavene med konkretiseringsmateriell enn uten. Dette kan ha sammenheng med at punktet om algoritmebruk kommer mer til syne når elevene skriver ned framgangsmåten sin på et ark. Det er likevel interessant å se at gruppe 1B viste mangel på prosedyrekunnskap i både oppgave 2 og 4 ved at de ikke visste hvordan de skulle gjøre brøk om til prosent (2U) og da de benyttet metoden for å finne fellesnevner til feil tid (2U). Til tross for dette kunne vi se antydning til gruppens prosedyrekunnskap i 2M, da Berit la fram $\frac{4}{6}$ på bordet med brøkstaver, og Beate tilsynelatende innså hvordan man summerer brøker med lik nevner ved å la nevneren stå urørt (se utdrag 5). Dette var også det eneste tilfelle hvor gruppa viste prosedyrekunnskap i 2U og 2M. Ved hjelp av brøkstaven konkretiserte de framgangsmåten for å finne summen av brøker med lik nevner. I likhet med det elevene gjorde da de laget representasjonstegninger, kan vi se hvordan elevene uttrykte matematiske konsepter ved hjelp av konkretiseringsmateriell. Som Löwing (2006) sier, handler matematikk om å abstrahere. Når elever har et mentalt bilde på matematikken, vil de raskt og effektiv kunne løse nye problemer. Det er grunn til å tro at gruppas bruk av brøkstaver bidro til å forstå mer av hvordan man summerer brøker, og konkretiseringsmateriellet ble på denne måten et medierende redskap for Beate, slik at hun nærmet seg en forståelse av konseptet (Säljö, 2000).

5.3 Strategisk tankegang

Strategisk tankegang handler om evnen til å identifisere matematiske problem, representere dem, og løse dem (Kilpatrick et al., 2001). Dette var gjennomgående for alle gruppene i både oppgavene uten og med konkretiseringsmateriell, og flere grupper benyttet seg av de samme metodene. Gruppe 1A, 2C og 2D brukte blant annet konkretiseringsmateriellet til å sammenligne størrelser for å komme fram til svar, mens konkretiseringsmateriellet hjalp Berit i gruppe 1B til å innse hvilke brøker som er lik $\frac{1}{2}$. Konkretiseringsmateriellet gjorde det i disse tilfellene enklere for gruppene å få en forståelse for verdien brøkene har, altså et eksempel på at fornuftig bruk av konkretiseringsmateriell er effektivt i arbeid med rasjonale tall (Driscoll, 1984).

Det er også interessant å se hvordan gruppene bruker visualisering som en strategi for å komme fram til svar. Dette kan vi se i oppgave 4U, da Beate ga en kontekst til Bjørns påstand om at "$\frac{1}{4}$ er mindre enn $\frac{1}{3}$" ved å visualisere dette i form av noe virkelighetsnært som et pizzaeksempel. Å gi denne påstanden en kontekst kan ha vært avgjørende for at Beate kunne si seg enig i påstanden (cf. Kirfel, 2010). Funnene i oppgave 2U viser at gruppe 1A og 1B brukte denne strategien for å gi oppgaven en kontekst og mening, mens gruppe 2C og 2D ikke benyttet seg av denne strategien. Gruppe 2C brukte likevel en tegning av ei kake for å representere brøken i form av en illustrasjon, men illustrasjonen ble brukt som et svar i seg selv og dermed ikke som en strategi for å forstå oppgaven. Ulikhetene mellom gruppene kan ha sammenheng med at gruppe 1A og 1B hørte til den ene skolen, mens 2C og 2D hørte til den andre, og at de dermed kan ha hatt ulikt fokus i undervisning av brøk. En annen årsak kan være at gruppe 2C og 2D arbeidet med oppgave 2M i første intervju, og oppgave 2U i andre intervju, mens gruppe 1A og 1B gjorde det motsatt. Dermed hadde gruppene 2C og 2D løst en lignende oppgave med konkretiseringsmateriell dagen før, noe som kan ha gitt de den konteksten de behøvde. Det er uansett interessant å se at begge gruppene fra skole 1 benyttet seg av denne strategien for å forstå og forenkle problemet.

5.4 Resonnering

Denne tråden var til dels synlig i alle intervjuer. Resonnering som forekom da elevene hadde konkretiseringsmateriell tilgjengelig kom imidlertid som oftest i det elevene følte seg ferdig med oppgaven og intervjuer ba om forklaring. Slik sett ligger det ulikhet i at elevene rettferdiggjorde svarene sine uoppfordret langt hyppigere i oppgaveløsing uten konkreter. Elevene så gjerne på konkretiseringsmateriellets fysiske størrelser som en rettferdiggjøring i seg selv. Å sammenligne fysiske størrelser og peke på hva som er størst og minst kan ha blitt opplevd som for enkelt og banalt. En mulig forklaring på manglende resonnering kan være at oppgavene ikke opplevdes motiverende nok, noe som er en essensiell faktor for resonnering (Kilpatrick et al., 2001). Her møter vi et kjent problem der konkretiseringsmateriellene blir et mål i seg selv i arbeid med det. I forståelsen av konkretiseringsmateriell som et hjelpemiddel på veien mot abstraksjon (Löwing, 2006) ser vi at det kan være kort vei til å miste koblingen mellom det konkrete og det abstrakte.

Ved flere anledninger i oppgaveløsingen viste elevene til forståelsen av brøk som 'en del av en hel' (Van de Walle et al., 2015). Dette ser vi særlig i det elevene søker til pizza- og kakeeksempler, forstått både gjennom tråden resonnering og strategisk tankegang. En mulig forklaring til dette kan være at elevene har hatt slik brøkintroduksjon i skolen, som Bjerke og Pettersen (2012) påpeker er svært vanlig. Det kan også se ut til at elevenes oppfatning av brøkbegrepet som 'en del av en hel' har hatt betydning for deres valg av strategi i oppgavene og resonnering rundt svarene i både oppgaveløsing med og uten konkretiseringsmateriell.

5.5 Selvtillit

Under denne tråden så vi at gruppe 1B ikke viste et like stort engasjement i oppgave 4M som i 4U. Gruppas oppgaveløsing i 2U og 2M viser imidlertid ingen skarpe ulikheter. De øvrige gruppene viste også gjennomgående stor vilje til å løse oppgavene i intervjuene, og de framsto motiverte og engasjerte både med og uten konkretiseringsmateriell. Dette samsvarer med studien til Butler et al. (2003) hvor det ikke ble opplevd at matematikken var gøyere for elevene som arbeidet med konkretiseringsmateriell, enn de som arbeidet uten. Ettersom elevene deltok frivillig kan det også spekuleres i om de likte matematikk i utgangspunktet, og at engasjementet deres derfor ikke framsto ulikt i oppgavene med og uten konkretiseringsmateriell. Ellers i denne tråden ser vi hverken store utslag i ulikheter eller markante likheter vi ønsker å belyse. Begrepet selvtillit ble som nevnt i analysedelen definert gjennom kun en liten del av Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) siste tråd, metakognisjon og selvregulering, som kan være opphav til snever data innen denne tråden.

5.6 Elevenes matematiske kompetanse

Som nevnt i teoridelen er det trådene samlet som danner elevers helhetlige matematiske kompetanse (Kilpatrick et al., 2001), og vi vil derfor belyse disse i sammenheng med hverandre. Elevenes begrepsmessige forståelse viste seg nokså likt hos gruppene i begge intervjuer. Prosedyrekunnskap, strategiske tankegang og resonnement kom derimot tydeligere fram da de arbeidet uten konkretiseringsmateriell enn med. Totalt sett kom altså elevenes matematiske kompetanse mer til syne da de arbeidet uten konkretiseringsmateriell enn med. Dette er et interessant funn sammenlignet med Suydam og Higgins' (1976) metastudie som viste at en overvekt av forskningsresultater konkluderer med at det ikke er noen signifikant forskjell, eller at resultatene var bedre når konkretiseringsmateriell ble brukt. Det samme gjelder om en sammenligner med Butler et al. (2003) sin studie som viste at gruppen som hadde fått undervisning med konkretiseringsmateriell hadde bedre resultater enn gruppen uten.

Samtidig er det viktig å påpeke at vår oppgave handler om hvorvidt elevenes matematiske kompetanse kommer *til syne* i deres arbeid med brøk, og ikke hvilken grad av kompetanse elevene besitter. Med dette i bakhodet må vi ta høyde for at elevene kan inneha matematisk kompetanse i større grad enn de viste i våre intervjuer, og faktorer som konkretiseringsmateriell og oppgavenes utforming kan påvirke i hvor stor grad elevene fikk vist sin kompetanse.

5.7 Andre betraktninger

Vygotsky (1978) fremmer språket som menneskets viktigste medierende redskap, og dette kom til syne da elevene, ved hjelp av språket, diskuterte og samarbeidet om å løse oppgavene. Ved hjelp av mediering tolket elevene oppgavene som ble gitt dem, og på denne måten kunne de utveksle kunnskap seg imellom. Et eksempel på dette kan vi se fra utdrag 1 da Bjørn og Beate prøvde å tolke oppgave 2U som handlet om å representere $\frac{3}{8}$ på så mange måter som mulig. I dette utdraget brukte Bjørn et pizzaeksempel for å forenkle problemet og fikk bekreftelse på forslaget fra Beate. Gjennom språklig kommunikasjon og samhandling kan vi se at gruppa etter hvert klarte å tolke hva oppgaven spurte om. At språk blir brukt som et medierende redskap kommer fram i alle gruppene gjennom diskusjoner og samarbeid.

Om en ønsker å bruke konkretiseringsmateriell til å stimulere til matematisk tenkning (Swan & Marshall, 2010) og utvikle forståelse for brøk gjennom det Van de Walle et al. (2015) mener handler om å forstå flere sider ved brøk, ser vi blant annet at det ligger flere potensielle løsningsmuligheter i oppgavene enn det denne undersøkelsens data viser. En kan for eksempel avgi svar som har noe annet enn 'én' som enhet (Lamon, 2012) både med penn og papir og ved å bruke centikuber eller flere brøksirkler og brøkstaver. Dette så vi ikke ved noen tilfeller i oppgaveløsing med konkreter og det forekom kun sporadisk uten konkreter. At oppgavene ikke ble løst på måter som tar for seg slike sider av brøk, kan ha en mulig forklaring i elevenes brøkforståelse og oppfatningen av brøk som 'en del av en hel', som isolert sett kun tar for seg én del av brøkens kompleksitet. I oppgaveløsingen med konkretiseringsmateriell kan en annen årsak være at elevene ikke var godt nok kjent med konkretene. Elevene behøver hjelp til å bruke konkretiseringsmateriell om de skal klare å se de underliggende matematiske ideene i dem (Kilpatrick et al., 2001).

6 Konklusjoner, implikasjoner og avsluttende refleksjoner

Avslutningsvis vil vi trekke fram de konklusjoner som vi har betraktet, diskutere studiens didaktiske implikasjoner og til slutt reflektere over vårt eget arbeid.

6.1 Konklusjoner og implikasjoner

Likhetene og ulikhetene vi har sett på i vår forskning har gitt oss mulighet til å vurdere hvordan elevenes matematiske kompetanse kom til syne gjennom Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) fem tråder. Dette ga oss flere interessante funn som vi vil oppsummere i det følgende. For å komme til en konklusjon, trekker vi fram forskningsspørsmålet til oppgaven:

- Hvilke likheter og ulikheter kommer til syne når elever på 8. trinn arbeider med brøkoppgaver med og uten konkretiseringsmateriell?

En interessant oppdagelse var at en av gruppenes begrepsmessige forståelse ikke kom like godt til syne med konkretiseringsmateriell til tross for at de hadde denne tråden på plass da de jobbet uten konkretiseringsmateriell. Dette kan forklares gjennom at konkretiseringsmateriell ikke garanterer suksess (Baroody, 1989). Det er grunn til å tro at det ligger mer naturlig for enkelte elever å løse problemer ved å følge regler og prosedyrer, enn ved å utforske med konkretiseringsmateriell. Elevenes undervisning har vært styrt gjennom LK-06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) hvor prosedyrer og operasjoner med brøk også har et større fokus enn i den kommende læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Antakelsen styrkes dessuten i at vi så gruppenes prosedyrekunnskap komme tydeligere til syne i oppgavene uten konkretiseringsmateriell enn i oppgavene med konkretiseringsmateriell. En må likevel ta i betraktning at det kan være enklere for elever å vise sin prosedyrekunnskap når penn og papir er tilgjengelig.

Videre har vi sett at elevene benyttet seg av konkretisering for å gi oppgavene mening (cf. Kirfel, 2010) både i arbeidet med og uten konkretiseringsmateriell. I oppgavene uten konkretiseringsmateriell konkretiserte de ved visualisering og ved å gi oppgavene en kontekst da dette gjorde det enklere for gruppene å se verdien av brøkene. Med konkretiseringsmateriellet tilgjengelig kunne elevene se brøkenes verdi ved at de kunne sammenligne de fysiske størrelsene på brøkene.

Ved flere situasjoner i intervjuene så vi at informantene var motiverte og engasjerte, og de sa seg ikke fornøyd før de hadde avgitt flere varierte svar. Likevel ser vi at det ligger et større potensial i oppgavesvar om en ønsker å nå flere sider ved brøk. Ser vi dette opp mot bruk av konkretiserings-materiell, er det igjen viktig å alltid være bevisst hva som er formålet med å ta det i bruk i undervisning. Det skal gi matematikkens abstrakte verden mening (Fennema, 1973) og stimulere til bevisst og ubevisst matematisk tenking (Swan & Marshall, 2010). Om en videre har som hensikt å bruke konkretiseringsmateriell for at elever skal forstå brøk og videreutvikle sin matematiske kompetanse i emnet, spiller vi som lærere en sentral rolle. Elever trenger hjelp og støtte til å bruke konkretiseringsmateriell slik at de berører de underliggende matematiske ideene i dem (Kilpatrick et al., 2001). Slik sett er det også viktig å gjøre seg kjent med hvilke muligheter konkretiseringsmateriellene gir til å kunne utforske ulike sider ved brøk.

I oppgave 2U så vi hvordan gruppe 1B brukte prosenten som sto på brøkstavene for å komme fram til et svar. På denne måten unngikk de å regne med brøk. I undervisning er det her viktig å fremme formålet, som ikke nødvendigvis er å komme fram til et korrekt svar, men å arbeide med, og håndtere brøker. Vi vet at elevers brøkforståelse kan ha stor betydning for deres senere resultater i matematikk generelt og særlig algebra (Wu, 2001). Om formålet med undervisning er å utvikle elevenes kompetanse i brøk, er det derfor svært uheldig om fokuset forblir på kalkulasjoner av heltall og tall på desimalform på grunn av at konkretiseringsmateriell blir tatt i bruk.

Det har vært interessant å se hvordan elevenes matematiske kompetanse kommer til syne i de forskjellige intervjuene, og at det på tross av individuelle forskjeller mellom elever og grupper er mulig å se noen fellestrekk. Gjennom de likheter og ulikheter resultatene viser, kommer elevenes matematiske kompetanse mer til syne i oppgaveløsingen uten konkretiseringsmateriell. En må likevel ta høyde for at denne studien ikke nødvendigvis viser den faktiske graden av matematisk kompetanse elevene besitter. Resultatene kan ikke besvare hvorvidt konkretiseringsmateriell er positivt eller negativt med tanke på elevers læring og forståelse av brøk, men de har vist oss ut fra vårt forskningsspørsmål, at elevenes matematiske kompetanse kommer tydeligere fram i arbeid uten konkretiseringsmateriell.

6.2 Refleksjon over eget arbeid

Å jobbe et halvt år med én oppgave har vært krevende, men lærerikt og interessant. Vi har gjennom denne prosessen lært mye og erfart nytten av et godt samarbeid. Når vi ser tilbake på det vi har gjort i forhold til forberedelser, gjennomføring og analyse av resultatene er det situasjoner og valg vi er fornøyde med, men også noen vi kunne gjort annerledes. I prosessen hvor vi så gjennom videoopptakene og etter hvert analyserte funnene, så vi blant annet flere situasjoner hvor vi skulle ønske vi ikke inntok en så passiv observatørrolle som vi gjorde. Vi kunne med fordel ha stilt elevene flere spørsmål om hvorfor de gjorde som de gjorde, eller hva de tenkte i enkelte situasjoner. På denne måten kunne vi fått mer innblikk i deres tankegang. Dette var noe vi hadde planlagt å gjøre i større grad enn hva vi faktisk gjorde. Noe av grunnen til dette kan ha vært at vi ikke ønsket å forstyrre elevene da de var fokuserte i oppgaveløsingen. Vår rolle som "fullstendig observatør" (Gold, 1958) gjorde samtidig at vi ikke påvirket elevene i en retning som var av vår egen interesse, noe vi ser på som en styrke for oppgaven. Alternativt kunne vi her for eksempel gjort nye intervju, individuelt eller i gruppe, hvor vi kunne spurt elevene om interessante situasjoner som oppsto og slik gi de mulighet til å utdype.

Vårt valg av metode har naturlig nok styrt oppgavens form og innhold i stor grad. Ved å benytte oss av en flerkasusstudie har vi fått en dypere forståelse for elevenes matematiske kompetanse og hvordan den kom til syne i arbeid med brøk, med og uten konkretiseringsmateriell. Vi har vært klar over at valget av en slik metode gjør at vi ikke har mulighet til å generalisere våre funn. Dette har heller ikke vært formålet med vår oppgave, som hele tiden har hatt fokus på å gjøre et dypdykk i de kasusene vi har forsket på. Som en forlengelse av vår forskning kunne det i den forbindelse vært interessant å se hvilken betydning konkretiseringsmateriell har i det større bildet. Vårt inntrykk er at bruken av konkretiseringsmateriell i undervisning varierer veldig på ulike skoler på Sørlandet. Det kan spekuleres i hvordan resultater fra en lignende studie ville sett ut om den for eksempel hadde blitt gjort på en skole som har hatt et tydelig fokus på dette. En større oversikt over bruk og effekt av konkretiseringsmateriell i skolene kunne gitt gode didaktiske implikasjoner, og ville vært spesielt interessant i den overgangen norske skole nå skal gjennom. Den nye læreplanen i matematikk stiller krav til at elevene skal få mulighet til å utforske ulike representasjonsformer, diskutere bruk og valg av dem, og omsette mellom matematiske representasjoner og dagligspråk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Hvordan vi som lærere velger å arbeide for å oppnå dette er mer fritt. Her har læreren mulighet til å lage kreative undervisningsopplegg med formål om dybde i et bestemt matematisk emne. Så gjenstår det å se om konkretiseringsmateriell vil spille en sentral rolle i undervisning av brøk de kommende årene.

Litteraturliste

Alcocer, Y. Y. (2014). What is a fraction? - Definition and Types. Hentet fra https://study.com/academy/lesson/what-is-a-fraction-definition-and-types.html

Andersen, S. S. (2013). *Casestudier: Forskningsstrategi, generalisering og forklaring* (2. utg. ed.). Bergen: Fagbokforlaget.

Baroody, A. (1989). ONE POINT OF VIEW: Manipulatives Don't Come with Guarantees. *The Arithmetic Teacher*, *37*(2), 4-5. Hentet fra www.jstor.org/stable/41193747

Bjerke, A. H., & Pettersen, N. (2012). Brøk med brikker. *Tangenten*, *23*(3), 26-32.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th ed.). Oxford: Oxford University Press.

Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B. & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(2), 99-111.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Clarke, D. M., Roche, A. & Mitchell, A. (2008). Ten practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13(*7), 373–380.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Driscoll, M. (1984). What research says. *The Arithmetic Teacher*, *31*(6), 34-46.

Fennema, E. (1973). Manipulatives in the classroom. *The Arithmetic Teacher, 20*(5), 350-352. Hentet fra www.jstor.org/stable/41188284

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. doi: 10.2307/2573808

Hynes, M. (1986). Selection Criteria. *The Arithmetic Teacher*, *33*(6), 11-13. Hentet fra www.jstor.org/stable/41192834

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (2. utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kirfel, C. (2010). Leder. *Tangenten, 21*(1), 52-53. Hentet fra http://www.caspar.no/artikkel_pdf/1c_t2010-1.pdf

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012. Oslo: Universitetsforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Høring om nasjonale deleksamener.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/horing-om-nasjonale-deleksamener/id2365449/?expand=horingsbrev

Kvernmo, G. (2010). Intervju som metode: Barn/unge som informanter. I E. Arntzen & J. Tolsby (Red.), *Studenten som forsker i utdanning og yrke: Vitenskapelig tenkning og metodebruk* (s. 61-80). Lillestrøm: Høgskolen i Akershus.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201-221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman: Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur AB.

Maher, C. A., Sigley, R., & Davis, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 579-582. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_147

Matematikksenteret. (u.å.). Konkretiseringsmateriell. Hentet 14. mai 2020 fra https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/konkretiseringsmateriell

Matematikk.net. (u.å.). Brøkregning. Hentet 12. mars 2020 fra https://matematikk.net/side/Br%C3%B8kregning

MatteMestern. (u.å.). Hva er en brøk? Hentet 12. mars 2020 fra https://www.mattemestern.no/lessons/hva-er-en-broek--50

Mills, A. J., Durepos, G. & Wiebe, E. (2010). *Encyclopedia of case study research*. Thousand Oaks, California: SAGE Publications, Inc.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet?: How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 175-197.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Neagoy, M. (2017). *Unpacking fractions: Classroom-tested strategies to build students' mathematical understanding*. Alexandria, Virginia: ASCD.

NOKUT. (2017). *Færre lærerstudenter strøk på nasjonal deleksamen i matematikk*. Hentet fra https://www.nokut.no/nyheter-2016/Farre-larerstudenter-strok-pa-nasjonal-deleksamen-i-matematikk/

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). *Dybdelæring i matematikk*. Realfagsløyper. Trondheim: NTNU. Hentet fra http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/MN%20KW%20dybdel%C3%A6ring%2015.04.18_0.pdf

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2014). *Læreren med forskerblikk*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv* (1. utg.). Stockholm: Bokförlaget Prisma.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental psychology, 49*(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Sletten, M. (2019). *En designstudie av rike oppgaver med utgangspunkt i autentiske broer i Agder*. (Mastergradsavhandling). Universitetet i Agder, Kristiansand.

Suydam, M. N. & Higgins, J. L. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research.* Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Swan, P. & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Association of Mathematics Teachers, 15*(2), 13-19.

Thompson, J. (2006). Brøk. *Matematikkleksikon* (2. utg.).

Tokstad, K. & Hamberg, S. (2017). *Nasjonal deleksamen: Et pilotprosjekt og en mulighetsstudie*. Hentet fra https://www.nokut.no/globalassets/nokut/rapporter/nasjonal-deleksamen7/nasjonal_deleksamen_et_pilotprosjekt_og_en_mulighetsstudie_2017.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag (MATI-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2019, 3. desember). PISA. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/pisa/

Utdanningsdirektoratet. (2020). Læreplan i matematikk 1. –10. trinn (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

U.S. Department of Education. (2009, 30. januar). National Math Panel. Hentet fra https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-factsheet.html

Van de Walle, J., Karp, K. & Bay-Williams, J. (2015). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (9. utg.). Upper Saddle River, New Jersey: Pearson.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator, 25*(2), 10-17.

Vedlegg

Vedlegg 1

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Masteroppgave om konkretiseringsmidler i matematikkundervisning

Referansenummer

541061

Registrert

12.12.2019 av Anders Haugen - andha15@student.uia.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Niclas Larson, niclas.larson@uia.no, tlf: 38142404

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Anders Haugen, anders.haug1@gmail.com, tlf: 46840452

Prosjektperiode

06.01.2020 - 01.06.2020

Status

16.01.2020 - Vurdert

Vurdering (1)

16.01.2020 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 16.1.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 1.6.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Håkon J. Tranvåg

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2

Vil du delta i forskningsprosjektet

Masteroppgave om bruken av konkreter i matematikk?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å forske på elevers bruk av konkretiseringsmidler ved arbeid med matematikkoppgaver. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å forske på elevers bruk av konkretiseringsmidler ved arbeid med matematikkoppgaver på 8. trinn.

Forskningsspørsmålet er som følger: "*Hvordan kan konkretiseringsmidler i arbeid med brøk bidra til en økt forståelse for elever på 8. trinn?"*

Dette forskningsprosjektet er en del av vårt masterprogram.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder – avdeling for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å være med i dette forskningsprosjektet da du er innenfor målgruppen vi ønsker å forske på, sammen med flere i din aldersgruppe.

Hva innebærer det for deg å delta?
I dette prosjektet kommer du til å få utdelt et oppgaveark som du skal jobbe med. Etter du har jobbet med oppgavene, kan du bli plukket ut til et oppgavebasert intervju, hvor du skal jobbe med liknende oppgaver. Det kan også bli stilt spørsmål knyttet til oppgavene underveis i arbeidet.

Arbeidet med oppgavene vil ta ca 45 min, i tillegg til et oppgavebasert intervju på ca 30 min.

Det vil bli gjort video- og lydopptak av arbeidssekvensen og intervjuene.

Vi tar forbehold om små forandringer i arbeids- og intervjusekvensene, men det vil du bli informert om på forhånd.

Deres foresatte kan få se spørreskjema/intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun oss studentene, Ola og Anders, samt vår veileder Niclas Larson som vil ha tilgang til opplysningene.

- Navnet og kontaktopplysningene dine vil vi erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.

Du vil ikke kunne bli gjenkjent ved publikasjon, da alt anonymiseres.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juni 2020. Ved prosjektets slutt, vil alle personopplysninger og opptak slettet og fjernet fra databaser.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Niclas Larson, mob. 38 14 24 04, epost: niclas.larson@uia.no.
- Vårt personvernombud: Ina Danielsen
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anders Haugen og Ola Morset

Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Eventuelt student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Masteroppgave om bruken av konkreter i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i gruppeintervju m/ video- og lydopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 1. juni 2020.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3

Oppgavesett 1 (uten konkretiseringsmateriell)

Oppgave 1
Hva er en brøk?

Oppgave 2
Skriv / representer $\frac{3}{8}$ på så mange måter som mulig.

Oppgave 3
a) Finn to brøker som har summen 1
b) Finn tre brøker som har summen 1

Oppgave 4
a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{3}$
b) Finn tre brøker som er lik $\frac{2}{3}$
c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{2}{5}$

Oppgave 5
Legg sammen to brøker slik at summen blir $\frac{3}{4}$.
Finn så mange par dere klarer.

Oppgave 6
En sjåfør kjører $\frac{1}{5}$ runde av en bilbane på ett minutt.
a) Hvor langt har sjåføren kjørt i løpet av fire minutter?
b) Hvor langt har sjåføren kjørt i løpet av et halvt minutt?
c) Hvor langt har sjåføren kjørt i løpet av 14 minutter?

Oppgave 7
Jarle, Henrik og Ada kjøper hver sin pose med smågodt.
Jarle sin smågodtpose veier $\frac{1}{3}$ av Henrik sin, mens Ada sin smågodtpose veier $\frac{7}{5}$ av Henrik sin.

Henrik sin smågodtpose veier 240 gram.

Hvor mye veier Jarle og Ada sin pose?

Oppgave 8
I en pose med nonstop er det fire forskjellige typer

$\frac{1}{18}$ er gule nonstop

$\frac{7}{36}$ er grønne nonstop

$\frac{1}{4}$ er blå nonstop

36 er røde

Finn ut hvor mange nonstop det er i posen, og hvor mange er det er av hver type.

Vedlegg 4

Oppgavesett 2 (med konkretiseringsmateriell)

Oppgave 1
Vis med konkreter hva en brøk er.

Oppgave 2
Representer $\frac{4}{6}$ på så mange måter som mulig, ved å bruke konkreter.

Oppgave 3

a) Finn to brøker hvor summen blir 1
b) Finn tre brøker hvor summen blir 1

Bruk brøkstaver

Oppgave 4

a) Finn tre brøker som er mindre enn $\frac{1}{4}$
b) Finn tre brøker som er lik $\frac{1}{2}$
c) Finn tre brøker som er større enn $\frac{3}{4}$

Oppgave 5
Legg sammen to brøker slik at summen blir $\frac{5}{6}$.
Finn så mange dere klarer.

Oppgave 6
På ett minutt har en skiheis gått $\frac{1}{4}$ av en runde.

a) Hvor langt har skiheisen gått i løpet av fire minutter?
b) Hvor langt har skiheisen gått i løpet av et halvt minutt?
c) Hvor langt har skiheisen gått i løpet av 14 minutter?

Oppgave 7
Erling, Ali og Ruth skal gå så langt de klarer på ski i løpet av én time. Erling går $\frac{2}{5}$ av turlengden til Ali. Ruth går $\frac{8}{5}$ av turlengden til Ali.

a) Vis med brøkstaver hvor langt hver av de går på ski.

   Ali gikk 15 km.

b) Hvor langt gikk Erling og Ruth?

Oppgave 8
I en pose med nonstop er det fire forskjellige typer

$\frac{3}{32}$ er gule nonstop

$\frac{1}{4}$ er grønne nonstop

$\frac{5}{32}$ er blå nonstop

48 er røde

Vis hvor mange av hver nonstop-type som finnes i posen ved å bruke brikkene. Hvor mange nonstop er det totalt?