Dynamisk geometriprogram på ungdomsskolen

Analyse av matematisk læringspotensial i to opplæringsmateriell i GeoGebra

MALENE SVANE

VEILEDERE
Anne Berit Fuglestad

Ingvald Erfjord

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Takk til Anne Berit Fuglestad som var veilederen min da jeg begynte på denne masteroppgaven våren 2016. Takk for gode ideer og tilbakemeldinger.

Jeg ble dessverre ikke ferdig med masteroppgaven i 2016. Så kom livet med sine utfordringer og overraskelser. Jeg fødte mitt andre barn, en nydelig sønn, Aron. Han lærte ikke å puste selv, av grunner legene ikke forsto. Et år etter kom Eva til verden, og den som vil kan søke opp betydningen av dette nydelige navnet. I løpet av disse årene døde også Anne Berit Fuglestad. Jeg måtte dermed få ny veileder, og var da så heldig å få Ingvald Erfjord som veileder da jeg skulle fortsette på masteroppgaven.

Takk til Ingvald Erfjord som har vært veileder for meg i 2019. Takk for gode innspill og tilbakemeldinger.

Jeg vil takke familien min, og alle som har støttet meg og vært med å be for meg og familien i denne prosessen. Takk til mamma og pappa som har hjulpet meg med barnepass og gode middager. Jeg vil takke de to jentene mine Elise og Eva for gode klemmer og oppmuntring, og gutten min Aron som lærte meg at livet er for kort til å gi opp. Spesielt vil jeg takke mannen min Karl Ivar for kjærlighet, støtte og arbeidstid. Takk alle sammen!

Sammendrag

I denne studien har jeg analysert to læreverk sine opplæringsmateriell som er laget for opplæring i GeoGebra på 8. trinn. Jeg har undersøkt potensialet for læring for elever, og jeg har også analysert det matematiske innholdet som behandles, hvilke komponenter i GeoGebra det jobbes med og hvordan det legges opp til at elevene skal jobbe med det. Jeg har hatt ett forskningsspørsmål med to underspørsmål.

Hvordan gir opplæringsmateriellet i dynamisk geometriprogram utfordringer som har potensiale til å stimulere læring i matematikk for elever i ungdomsskolen?

1. Hvilke verktøymessige valg og matematiske begreper vektlegger opplæringsmateriellene?
2. Hvordan er opplæringsmateriellene tilrettelagt slik at de gir utfordringer til både sterke og svake elever i ungdomsskolen?

Masteroppgaven begynner med en innledning der jeg presenterer hvorfor jeg har valgt dette temaet og hvordan dynamisk geometri er integrert i læreplanene i matematikk på ungdomstrinnet. Jeg presenterer forskningsspørsmålene og noen sentrale begreper i denne masteroppgaven, slik som dynamisk, konstruksjon og tradisjonelle verktøy.

Jeg har teori om hva det betyr å lære matematikk og forskning på lærebøker og dataprogram. Her kommer jeg inn på læringsteorier, motivasjon, undersøkelseslandskaper, induktiv og deduktiv metode, black-box og white-box og analyse av lærebøker.

Det har vært interessant å lære litt om historisk utvikling av dynamiske geometriprogram, og spesielt GeoGebra. De to opplæringsmateriellene i læreverkene Nummer 8 og Maximum 8 blir introdusert.

I det fjerde kapittelet presenteres og begrunnes forskningsdesignet opp mot forskningsspørsmål, og tilnærming til dataanalysen av opplæringsmateriellene.

Å lage et analyseverktøy har vært en viktig del av denne masteroppgaven. Analyseverktøyet er tredelt med hovedoverskriftene «design av oppgaven», «dynamisk geometriprogram» og «læringspotensial». Så blir det fulgt opp med et stort kapittel der jeg bruker analyseverktøyet til å analysere de to opplæringsmateriellene. Nummer 8 blir analysert først og Maximum 8 blir analysert etterpå. Deretter har jeg et kapittel der jeg har diskutert og sammenlignet de to opplæringsmateriellene. Så avslutter jeg masteroppgaven med en konklusjon og noen tanker om bruken av analyseverktøyet og veien videre.

Noe av det jeg har funnet ut, er at de to opplæringsmateriellene er ulike og vektlegger ulike ting. De har hver sine ting i fokus, både med tanke på opplæringen av programmet GeoGebra og på matematikken som blir presentert. Samtidig er det noen likheter mellom dem, som at begge klarer å utnytte det dynamiske med GeoGebra. Begge begynner også med enkle oppgaver i starten for at flest mulig skal få det til. Jeg har funnet fordeler og ulemper med begge opplæringsmateriellene. Samtidig kan ofte det som er ulikt mellom dem, slik som størrelsesforskjellen, være både en fordel og ulempe på samme tid, alt ettersom hvordan man ser på det.

Abstract

In this study, I have analyzed two teaching packages in two textbooks designed for initial training in use of GeoGebra at Grade 8 in lower secondary school. I have explored the packages' potential of learning for students, and I have also analyzed the mathematical content being processed, what components of GeoGebra are being worked on and how it is planned for students to work with it. My study is guided by one main research question and two additional sub-questions.

How do the teaching packages in the dynamic geometry software GeoGebra present challenges that have the potential to stimulate learning in mathematics for students in lower secondary school?

1. What choices of tools and mathematical concepts are made in the training packages?
2. How are the training packages designed to present challenges to both strong and weak pupils in secondary school?

The master thesis begins with an introduction where I present why I have chosen this topic and how dynamic geometry is integrated into the curricula in mathematics at the lower secondary school level. I present the research questions and some key concepts in this master's thesis, such as dynamic, construction and traditional tools.

I present theory that offers explanations on what it means to learn mathematics and I include some research on textbooks and computer software's. I discuss learning theories, motivation, landscapes of discovery, inductive and deductive methods, black-box and white-box models and analysis of textbooks.

I give a brief presentation about the historical development of dynamic geometry software's, and especially GeoGebra. The two training packages selected for my empirical study is from the textbooks Number 8 and Maximum 8.

In the fourth chapter, the research design is presented and justified against research questions, and the approach to the data analysis of the training packages.

Creating an analytical tool has been an important part of this master's thesis. The analysis tool is divided in three parts with the main headings «design of the task», «dynamic geometry software» and «learning potential». Then a large chapter is followed up where I use the analysis tool to analyze the two training packages. The package from Number 8 is analyzed first and Maximum 8 is analyzed afterwards. Afterwards I have a chapter where I have discussed and compared the two training materials. Then I end the master thesis with a conclusion and some reflections on the use of the analytical tool and the way forward.

One of the things I have found is that the two teaching packages are different and emphasize different things. They each have their own focus, both with regard to the training of the GeoGebra software and the mathematics presented. At the same time, there are some similarities between them, such that both manage to bring out the dynamic with GeoGebra. Both also start with simple tasks in the beginning to get as many students as possible. I have found pros and cons of both teaching packages. At the same time, often what is different between them, such as the size difference, can be both an advantage and disadvantage at the same time, depending on how you look at it.

Innhold

1 Innledning

I denne studien studeres og analyseres to ulike opplæringsmateriell til opplæring i dynamisk geometriprogram. Disse er laget i tilknytning til læreverk. Da kan jeg se om de for eksempel har samme eller ulik tilnærming til opplæringen, hvilke valg de gjør og hva de fokuserer på. Dette kan være interessant for lærere som skal velge hva som er best for sin klasse, eller for videre forskning på dette, når det nå kommer nye læreplaner. Lærebøker brukes mye, og slikt tilhørende materiell som jeg har valgt å studere brukes derfor trolig av mange lærere i undervisningen. Dermed er det interessant å studere læringspotensialet i disse opplæringsmateriellene.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Hva er vitsen med å gjøre matematikk med dataverktøy om det ikke tilfører noe nytt eller annerledes? Jeg ønsker å undersøke om opplæringsmateriellene legger opp til at matematikken angripes på andre måter enn det som kan skje med de tradisjonelle verktøyene passer, linjal og blyant. Utnyttes det dynamiske i GeoGebra?

Jeg tenker også at det å bruke dataverktøy kan gjøre at flere opplever mestring, men det kan også være vanskelig for noen. Klarer opplæringsmateriellene å legge til rette for at alle skal kunne få en mestringsfølelse av å få det til, og at det også gir utfordringer for de sterke? At det ikke bare blir «plankekjøring» og detaljerte oppskrifter. Legger opplæringsmateriellene opp til at elevene skal undre seg over sammenhenger i matematikken, eller hvordan matematikken kan brukes i dagliglivet?

For å presentere litt av min egen interesse, så har jeg alltid likt former og figurer, sirkler og sortering. Da jeg var liten satt jeg hos mormor og sorterte knapper. Jeg sorterte etter farge og form, og etter hvert som jeg har blitt eldre har fortsatt fasinasjonen over former og mønster holdt seg. Geometri er blitt et av temaene i matematikken som jeg liker best og jeg storkoste meg med faget «Geometri» som omhandlet Euklidsk geometri første året på universitetet. Samtidig har jeg en fasinasjon over å kunne konstruere og endre på disse konstruksjonene ved hjelp av dataprogrammet GeoGebra. Jeg brukte programmet første gang på videregående. Da først for funksjoner, men geometribiten har jeg også brukt.

Jeg trives med å bruke papir og blyant når jeg regner og skriver. Mest fordi jeg husker og forstår bedre når jeg bruker hendene og mine egne skriblerier. Jeg holder meg helst til de tradisjonelle verktøyene dersom ikke det digitale kan tilføre noe vesentlig som ikke papir og blyant kan. Et «hjemmeeksempel» der det digitale har tilført noe nyttig, er at vi har begynt å bruke ei handleliste på mobilen her hjemme. Jeg synes fortsatt det er enklere å skrive på papirlista på kjøleskapet, men siden det ofte er mannen som handler inn, og det er lett å glemme å ta med lista, så bruker vi nå en felles handlelisteapp som oppdaterer seg slik at det ikke er noe problem med å glemme handlelappen lenger.

Læreverkene i skolen er ikke bare lærebøker på papir lenger. Det blir utviklet digitale ressurser i tilknytning til bøkene, og bøkene kan også gjerne kjøpes digitalt. Elevene har gjerne stor tilgang på nettbrett eller datamaskiner. Jeg har valgt ut to læreverk og studerer i denne masteroppgaven deres tilhørende opplæringsmateriell til GeoGebra, og synes det vil være interessant å se hvordan disse er laget.

1.2 Digitale verktøy i læreplanen

Fra læreplanen i matematikk kan man lese om formålet til faget blant annet at *«Både det å kunne bruke og vurdere ulike hjelpemiddel og det å kjenne til avgrensinga deira er viktige delar av faget.»* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2) Det er dermed viktig for elevene å lære å bruke program som for eksempel GeoGebra eller andre dynamiske geometriprogram som kan være gode hjelpemiddel i matematikken. Digitale ferdigheter er en av fem grunnleggende ferdigheter som er integrert i kompetansemålene og som elevene skal lære å bruke til blant annet beregninger og utforskning. Om hovedmålet geometri som elevene skal lære, står det at *«Geometri i skolen handlar mellom anna om å analysere eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og gjere konstruksjonar og berekningar. Ein studerer dynamiske prosessar som spegling, rotasjon og forskyving. Hovudområdet omfattar òg å beskrive plassering og forflytting i rutenett, kart og koordinatsystem.»* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 3)

Nåværende læreplan (LK06) har kompetansemål etter 7. og 10. trinn. For min studie av opplæringsmateriell på 8. trinn, er det derfor relevant å se dette i lys av kompetansemål etter 10. trinn. Kompetansemål etter 10. trinn for hovedområdet geometri presenteres nedenfor og man kan legge merke til at dynamisk geometriprogram nevnes eksplisitt i ett av punktene og digitale verktøy i to av punktene:

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- *undersøkje og beskrive eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og bruke eigenskapane i samband med konstruksjonar og berekningar*
- *utføre, beskrive og grunngje geometriske konstruksjonar med passar og linjal og dynamisk geometriprogram*
- *bruke og grunngje bruken av formlikskap og Pytagoras' setning i berekning av ukjende storleikar*
- *tolke og lage arbeidsteikningar og perspektivteikningar med fleire forsvinningspunkt, med og utan digitale verktøy*
- *bruke koordinatar til å avbilde figurar og utforske eigenskapar ved geometriske former, med og utan digitale verktøy*
- *utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement ved hjelp av geometriske idear og gjere greie for geometriske forhold som har særleg mykje å seie i teknologi, kunst og arkitektur* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8-9)

Når denne oppgaven skrives, er vi i innspurten på utvikling av en helt ny læreplan for norsk skole, kalt «Fagfornyelsen». Det utvikles nye læreplaner i alle fag som skal tas i bruk fra skolestart 2020. I forslagene til nye læreplaner i matematikk kan man under digitale ferdigheter se at dynamisk geometriprogram blir nevnt som et av flere digitale verktøy som elevene skal lære. *«Digitale ferdigheiter i matematikk inneber å kunne bruke grafteiknar, rekneark, CAS, dynamisk geometriprogram og programmering til å utforske og løyse matematiske problem.»*(Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 3) I de nye læreplanene blir det egne kompetansemål etter hvert trinn, og i forslaget som er i ferd med å bli vedtatt av Kunnskapsdepartementet blir kompetansemål i geometri, på ungdomsskolen, primært målt etter 9. trinn. Ett av målene etter 9.trinn er *«utforske og argumentere for korleis det å endre føresetnader i geometriske problemstillingar påverkar løysingar»*(Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 11). I arbeidet med å skaffe seg denne kompetansen, vil bruk av et dynamisk geometriprogram være nyttig.

1.3 Forskningsspørsmål

I min studie ønsker jeg å undersøke opplæringsmateriell og spesielt potensialet i materiellet for læring for elevene, samt at jeg analyserer det matematiske innholdet som behandles, hvilke komponenter i GeoGebra det jobbes med og hvordan det legges opp til at elevene skal jobbe med det.

Hvordan gir opplæringsmateriellet i dynamisk geometriprogram utfordringer som har potensiale til å stimulere læring i matematikk for elever i ungdomsskolen?

For å besvare dette har jeg utviklet to underspørsmål som belyser ulike deler av spørsmålet. Først har jeg et underspørsmål der jeg studerer valg av verktøykomponenter og utnyttelse av dynamiske muligheter i GeoGebra som elevene introduseres for og hvordan det knyttes til et matematikkfaglig innhold og læring.

1. Hvilke verktøymessige valg og matematiske begreper vektlegger opplæringsmateriellene?

Hvilke verktøy som er lov å bruke og hvor detaljert elevene blir ledet gjennom oppgavene, er noe som blir berørt. Det er også interessant å se hvilke valg som er tatt med tanke på om oppgavene kan løses kun digitalt eller om de også kan løses på papir, og om det dynamiske i programmet blir utnyttet og hvordan. Er det noen verktøy som blir fremhevet som spesielt viktige? Det kan være ulikheter for hvordan matematiske begreper skal vektlegges, slik som hvilke ord som blir valgt eller valgt bort. Hvilken struktur oppgavene får og hvilke bilder som blir brukt, er også valg som må bli tatt og som vil være interessant å se på.

Det andre underspørsmålet er knyttet opp mot læringspotensialet i opplæringsmateriellet.

2. Hvordan er opplæringsmateriellene tilrettelagt slik at de gir utfordringer til både sterke og svake elever i ungdomsskolen?

Det første jeg tenker på her er om oppgavene er tilgjengelige for alle, slik at alle har noen oppgaver å begynne på. Da blir det hensiktsmessig å undersøke vanskelighetsgraden til oppgavene og se om det er en sammensetning av oppgaver med ulik vanskelighetsgrad. Hvilke matematiske læringsmiljø kan elevene bevege seg inn i? Er oppgavene varierte med tanke på at elevene skal få oppleve ulike matematiske læringsmiljø? Er det noen metoder som er mer fremtredende enn andre? Jeg vil også tenke på hvordan det er for læreren å bruke opplæringsmateriellene. Slik som om de krever stor eller liten lærermedvirkning, eller om det er noe spesielt å ta hensyn til.

1.4 Noen sentrale begreper i denne masteroppgaven

Dynamiske geometriprogram blir ofte forkortet og omtalt som DGS, som på engelsk står for "Dynamic Geometry Software". GeoGebra og Cabri er eksempler på slike program. Blant slike program har det etterhvert skjedd en utvikling. Mange program, slik som GeoGebra, har nå innebygd flere verktøy som graftegner, CAS og regneark. Det er dermed blitt vanligere å omtale disse som dynamiske matematikkprogram. Man kan dermed si at GeoGebra er et dynamisk matematikkprogram, som blant annet inneholder et dynamisk geometriprogram. Siden opplæringsmateriellene og denne masteroppgaven kun bruker denne ene delen av GeoGebra, så er det hovedsakelig begrepet dynamisk geometriprogram som blir brukt i denne masteroppgaven.

1.4.1 Dynamisk og interaktivt

At noe er dynamisk, handler om bevegelse. ("Dynamisk," 2009, 14. februar) I dynamiske geometriprogram kan man blant annet bevege på punkt og linjer slik at figuren beveger på seg. Bevegelse får man også ved å bruke glider for å for eksempel se hva som skjer dersom man endrer lengden på et linjestykke.

Dynamiske geometriprogram er også interaktive, siden det er et samspill mellom bruker og program. ("Interaktivitet," 2009, 14. februar) Et eksempel på et slikt samspill kan være en elev som skal tegne et kvadrat. Eleven bruker ulike verktøy, og programmet viser det som eleven gjør. Så vil eleven sjekke om han har gjort det riktig, og drar derfor i et av hjørnene på kvadratet. Figuren beveger seg dermed slik som programmet er programmert til at den skal gjøre i den situasjonen. Nå ser eleven at han har gjort en feil, fordi figuren beveger seg ikke slik som han trodde den ville gjøre. Det han trodde var et kvadrat, er nå blitt et rektangel, og han kan nå prøve å fikse dette.

1.4.2 Tegne og konstruere

Fra nettutgaven av Store norske leksikon kan man blant annet lese dette om konstruksjon:

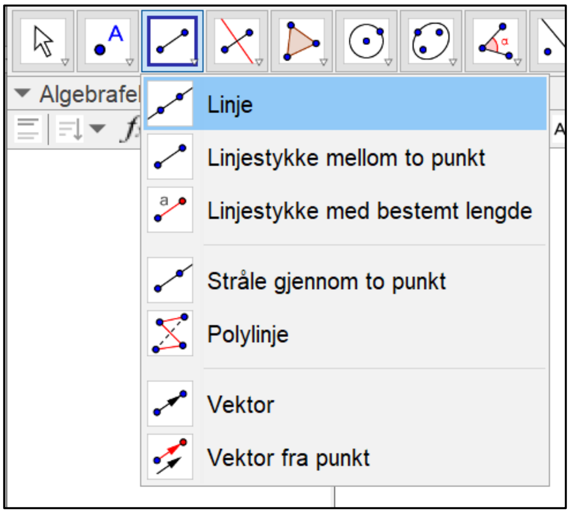
> *I geometrien en tegnemessig bestemmelse av figurer med gitte egenskaper ut fra gitte størrelser og figurer. I alminnelighet antas det at konstruksjoner skal utføres bare med passer og linjal, med den spesielle forutsetningen at passeren skal brukes til å slå sirkler med gitt radius og sentrum, og linjalen bare skal brukes til å trekke rette linjer gjennom to gitte punkter. (Aubert, 2009, 14. februar)*

Her kan man altså se at ved konstruksjon er det sirkler og rette linjer med verktøyene passer og linjal som er lovlig. Dersom man bruker gradskive (eller lengdemålet på linjalen uten å sette av med passeren), kan man ikke si at man konstruerer, men må si at man tegner. Hvordan skal dette tolkes dersom man bruker et dynamisk geometriprogram i stedet for? Enten kan man kalle alt for tegning, fordi man bruker jo ikke passer og linjal, men et dataprogram. Eller så kan man tenke at man kan kalle det konstruksjon dersom man kun bruker verktøyene for sirkler og linjer (tilsvarende passer og linjal), og at man kaller det tegning dersom man bruker flere verktøy enn dette.

1.4.3 Tradisjonelle verktøy og verktøy i GeoGebra

Euklid bygger sin geometri på bruken av passer og linjal. Det er også det som er blitt brukt i skolen oppgjennom årene. Når jeg dermed henviser, i masteroppgaven, til tradisjonelle verktøy i geometrien er det altså passer og linjal, og selvfølgelig papir og blyant jeg henviser til. Dersom man ikke konstruerer, men tegner, vil også gradskive være med blant de tradisjonelle verktøyene.

Med det tradisjonelle verktøyet linjal kan man tegne linjer, stråler, linjestykker og linjestykker med bestemt lengde. Bruker man GeoGebra er disse fire typene linjer man kan tegne med linjalen, fire ulike verktøy som er gruppert sammen i samme kategori. I GeoGebra har man også verktøy som tilsvarer en kombinert bruk av både passer og linjal, slik som for eksempel normal linje, midtnormal, parallell linje og halveringslinje for vinkel. Det er dermed mange verktøy i GeoGebra å bli kjent med for elevene, men disse kan samtidig forenkle en del tegne- og konstruksjonsprosesser. Bruker man for eksempel det ene verktøyet «midtnormal» i GeoGebra og klikker på et linjestykke så får man fram midtnormalen med en gang, men det krever den rette kombinasjonen av både passer og linjal om man vil finne midtnormalen til ei linje på papir.



Figur 1: Linjeverktøy i GeoGebra

1.5 Kort oversikt over resten av masteroppgaven

I kapittel 2 presenterer jeg teori om hva det betyr å lære matematikk og forskning på lærebøker og dataprogram.

I kapittel 3 presenterer jeg datamateriale som undersøkes. Det begynner med litt historisk utvikling av dynamiske geometriprogram generelt og GeoGebra spesielt. De to opplæringsmateriellene i læreverkene Nummer 8 og Maximum 8 blir introdusert.

I kapittel 4 presenteres og begrunnes forskningsdesignet opp mot forskningsspørsmål, og tilnærming til dataanalysen av opplæringsmateriellene.

I kapittel 5 presenteres selve analyseverktøyet med en tredeling med overskriftene «design av oppgaven», «dynamisk geometriprogram» og «læringspotensial».

I kapittel 6 analyserer jeg de to opplæringsmateriellene. Dette er et stort kapittel der jeg bruker analyseverktøyet på Nummer 8 først og Maximum 8 etterpå.

I kapittel 7 diskuterer jeg og kommer med en sammenligning av de to opplæringsmateriellene.

I kapittel 8 har jeg en avslutning med konklusjon og kritisk blikk på analyseverktøyet.

2 Teori

Dette kapittelet begynner med et delkapittel om hva det betyr å lære matematikk. Etterpå er det et delkapittel om forskning på lærebøker og dataprogram.

2.1 Hva betyr det å lære matematikk?

Det er mange ulike læringsteorier med relevans for å undersøke læring av matematikk i skolen, litt om det i første delkapittel. Etterpå har jeg et delkapittel om motivasjon, siden det er grunnleggende å ha en form for motivasjon for å kunne jobbe med og lære seg nye ting. I tredje delkapittel skriver jeg litt om matematisk læringsmiljø, mens induktiv og deduktiv metode kommer i siste delkapittel.

2.1.1 Læringsteorier

Man vil gjerne at elevene skal lære på en bra og effektiv måte. Dette har vært med på å skape et behov for å forstå læring, og dermed er det blitt laget læringsteorier for hvordan dette skjer. Et viktig mål med en læringsteori er både å forstå og å kunne støtte opp om læringsprosessene. Det vil ofte være glidende overganger mellom mange av de ulike læringsteoriene, fordi de er enige om noen ting, men samtidig vektlegger de ulike ting som gjør dem til separate teorier.

Konstruktivistiske teorier har et fokus på at eleven skal være aktiv i sin egen læringsprosess. Elevene lærer gjennom å gjøre ting selv og å konstruere sin egen kunnskap. Det blir viktig å legge til rette for at elevene skal få tenke selv og gjerne få ro til å fordype seg på egenhånd. Det elevene kan fra før påvirker hvordan elevene lærer. Ofte kan ny og gammel kunnskap komme i konflikt med hverandre, og dette kan skape mye læring. Gode spørsmål og oppgaver som trigger nysgjerrighet og undring hos elevene vil skape motivasjon hos elevene til å arbeide med lærestoffet. (Imsen, 2005; Ma, 2008)

De sosiokulturelle læringsteoriene berører noe av det samme som de konstruktivistiske teoriene, men retter oppmerksomheten mot det sosiale samspillet. Det er her læringen skapes, for så å bli bearbeidet av hver enkelt. Sosiokulturelle læringsteorier har fokus på dialog, og her er dialogbegrepet mer enn bare muntlig samtale. Det er relasjonen mellom ulike grupper i klasserommet som er viktig for læringsprosessen, og at dialogen er åpen og gir rom for ettertanke og refleksjon. Her må læreren stille åpne spørsmål til elevene, spørsmål uten fasitsvar, og det er viktig å ta tak i elevenes svar og la disse få rom videre i dialogen. (Imsen, 2005; Ma, 2008)

I min oppgave har jeg læringsteorier med i det siste punktet i analyseverktøyet, og på slutten av hver av analysene til opplæringsmateriellene sier jeg noe om hvilket perspektiv som er mest framtredende av det jeg har sett, og hvordan det eventuelt kan brukes i en sosiokulturell kontekst.

2.1.2 Motivasjon

For at voksne og barn skal jobbe med noe og bruke energi på noe, så handler det ofte om motivasjon. Dersom man også opplever at noe er gøy så er det lett å holde på i lang tid i motsetning til dersom noe er kjedelig. Mange vil synes det er mest motiverende å jobbe med oppgaver som er middels vanskelige, da de får utfordringer som de klarer. Andre igjen vil da føle på en redsel for å mislykkes på noe de tenker de bør få til, og vil trives bedre med oppgaver som er så lette at de vet at de får det til, eller oppgaver som er så vanskelige at det ikke gjør noe om de ikke får det til, fordi det ikke er forventet. Mange synes det kan være motiverende å gjøre noe som er litt annerledes enn hva man pleier å gjøre til vanlig. Og her kommer man inn på matematikken og temaet geometri og spesielt konstruksjon som ofte kan være litt annerledes enn vanlig regning, og dermed kan gi litt ekstra motivasjon til en del elever. Andre ting som kan motivere elever, er om de får se og erfare hvordan matematikken blir brukt i virkeligheten, slik som for eksempel i hverdagsliv og jobb. Dette kan gjøre at det blir mer meningsfullt og relevant for elevene å jobbe med. Oppgaver i matematikken som er basert på reelle anvendelser av matematikk og som viser til virkeligheten kan hjelpe elevene til å erfare at matematikk er nyttig, at de kan bruke matematikk til å løse problemer og utvikler også kritisk kompetanse. (Imsen, 2005; Pierce & Stacey, 2011)

2.1.3 Læringsmiljø i matematikkundervisning

Skovsmose (2001) presenterer en matrise med seks ulike typer læringsmiljøer som oppgaver og aktiviteter i matematikk kan plasseres inn i. Han introduserer med dette begrepet undersøkelseslandskap som et supplement til en undervisning preget av «trening» på oppgaveregning og lukkede oppgaver. Botten (2009) mener at den mest utviklende og engasjerende undervisningen vil skje dersom klassen vandrer mellom alle de seks ulike læringsmiljøene som Skovsmose presenterer, og at dette skjer som et samspill mellom lærer, elev og hele klassen. For at elevene skal vandre inn i et undersøkelseslandskap, forutsettes det at elevene blir engasjerte og aktive. Det vil si at ei oppgave som for en elevgruppe fører til at de går inn i et undersøkelseslandskap, for en annen elevgruppe ikke nødvendigvis vil føre til det samme.

	Tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar	Undersøkelseslandskaper
"Ren" matematikk, uten noen praktisk anvendelse	(1)	(2)
"Semi"-anvendelser av matematikken	(3)	(4)
Ekte, reelle anvendelser av matematikken	(5)	(6)

Tabell 1: Seks typer matematisk læringsmiljø

Jeg vil begynne med å beskrive hva som kan kjennetegne det vi kan kalle for en tradisjonell undervisning i det som gjerne omtales som «oppgaveparadigmet», områdene 1, 3 og 5. En undervisningstime i oppgaveparadigmet begynner gjerne med en repetisjon og kanskje en gjennomgang av leksa. Så kommer det en gjennomgang av nytt stoff og til slutt skal elevene jobbe med oppgaver tilknyttet det nye stoffet som nettopp ble gjennomgått. Det er tydelig at læreren vet svaret og det er lite rom for undring og utforsking. Oppgavene som elevene jobber med, har et entydig fasitsvar. Elevene blir gjerne ledet gjennom oppgavene og bruker alle opplysningene i oppgavene, gjerne i den rekkefølgen de står.

Undersøkelseslandskapet, områdene 2, 4, og 6, er annerledes enn i oppgaveparadigmet. Læreren har ikke en ferdig definert framgangsmåte og bestemmer ikke hva elevene skal komme fram til, men kommer med spørsmål og undrer seg sammen med elevene. Elevene jobber med stor frihet og undersøker og utforsker oppgavene. Oppgavene er gjerne åpne, eller blir det, og selve læringsprosessen er viktigere enn å finne fasiten. Både lærer og elever kan komme med spørsmål som «hva hvis …?» og «hvorfor det?».

Hvis vi ser på forskjell på områdene 1 og 2, vil barneskoleoppgaver fra område 1 i «ren» matematikk typisk inneholde «regn ut» oppgaver som «34-21=__». Fra område 2 vil de «rene» matematikkoppgavene se annerledes ut, som for eksempel ei oppgave der elevene skal utforske tallene fra 1 til 100 i et rutenett og prøve å finne mønster eller sammenhenger for grupper av tall.

«Semi»-anvendelser av matematikken (områdene 3 og 4) kommer ofte til uttrykk i tekstoppgaver i lærebøkene som gir seg ut for å være praktiske. Et eksempel fra område 3, er «Ola har fem bananer og gir bort to, hvor mange bananer har Ola igjen?». En oppgave som kan plasseres i område 4 er en oppgave om frimerker. «Tenk deg at vi har bare to typer frimerker, et på 3 kroner og et på 4 kroner, hvilke portotakster kan vi ha da? Hva skjer dersom vi har frimerker på 3 kroner og 5 kroner?» Selv om frimerker er reelt, så er ikke problemstillingen det, og det blir en «semi»-anvendelse av matematikken.

Reelle anvendelser, område 5 og 6, inneholder oppgaver der elevene for eksempel må bruke ekte bussruter, værkart, eller kvitteringer for å finne svar på spørsmål, eller det kan være prosjektoppgaver der elevene finner matematikk ute i naturen.

2.1.4 Induktiv og deduktiv metode

Den induktive og den deduktive metoden kan referere til både hvordan læreren underviser, men også hvordan elevene lærer, og i praksis vil det dreie seg om begge deler, skriver Bueie (2011). Han beskriver den induktive metoden slik: *«Den induktive prosessen starter med at elevene får presentert en del konkrete situasjoner, før de så på bakgrunn av disse abstraherer og generaliserer. Elevene kan så forsøke å formulere en regel.»* (Bueie, 2011, s. 16) Videre nevner han noen fordeler og ulemper med denne metoden. Noen av fordelene er at elevene får være aktive, og at de får oppleve å møte problemer og finne ut av problemene selv. Den første ulempen han nevner med metoden, er at det er viktig at det settes av god tid til prosessen. En annen ulempe er at det ofte bare er de flinkeste elevene som kommer fram til og klarer å formulere «regelen» som man vil fram til, mens de andre elevene kanskje ikke skjønner hva det er snakk om. Den deduktive metoden presenteres slik: *«Den kjennetegnes ved at den har sitt utgangspunkt der den induktive metoden slutter, nemlig med formulering av regelen. Deretter er det vanlig å gi elevene en del oppgaver og eksempler på hvordan regelen brukes, før elevene så selv får bruke den på konkrete tilfeller.»* (Bueie, 2011, s. 16-17) Han nevner også både fordeler og ulemper med denne metoden. Noen av fordelene er at denne metoden er mindre tidkrevende, og at læreren lettere kan tilpasse den verbale formidlingen til effektiv læring. Men noe av det negative med metoden er at det lett kan bli pugging uten forståelse for elevene, og at disse mister motivasjon og spenning, og blir passive tilskuere. En annen ting han nevner, er at prosesser der den induktive metode er blitt brukt først, ofte blir fulgt opp av den deduktive metode etterpå. For å forklare dette kan man si at den induktive metoden kan bli brukt først til å finne en regel, og etterpå kan elevene ved deduktive prosesser jobbe med eksempler og oppgaver der denne regelen blir brukt. Dermed kan vi si at disse to prosessene ofte følger hverandre.

Induktiv og deduktiv metode er med i siste del av analyseverktøyet, delkapittel 5.3.4, og dermed også siste del av analysen til både Nummer 8 og Maximum 8.

2.2 Forskning på lærebøker og dataprogram

Dette delkapittelet er todelt. Først er det en del om analyse av lærebøker, og så en del om ulike måter å bruke dataprogram.

2.2.1 Analyse av lærebøker

Brändström (2005) har i sin studie av lærebøker i matematikk spesielt undersøkt differensieringen for ulike elever. For å undersøke differensieringen utviklet hun et analyseverktøy som fokuserer på vanskelighetsgraden til oppgavene i lærebøkene. Jeg har brukt flere deler av hennes analyseverktøy i mitt eget analyseverktøy som blir presentert i kapittel 5.

To andre studier av lærebøker er Svenning (2013) og Jopperud (2015), som begge har analysert lærebøkene med tanke på algebra på 8. trinn. Svenning har analysert fire lærebøker og deres introduksjon av algebra med tanke på hvor kognitivt krevende oppgavene er og med tanke på det syntaktiske og semantiske aspekt. Jopperud har analysert to lærebøker med tanke på kunnskapsnivå og relasjonell og instrumentell forståelse og har også intervjuet to lærere som bruker bøkene.

2.2.2 Ulike måter å bruke dataprogram

Dataprogram kan bli brukt til drill og trening. Det er enkelt å lage program der elevene skal øve på gangetabellen for eksempel. Eller program der regnestykker kommer flygende inn på skjermen og det gjelder å velge rett svar fortest mulig.

Det er mer krevende å lage program og oppgaver som er utforskende. Både åpen og styrt utforsking er mulig med dataprogram.

Når man lærer rutiner (også på papir), så vet man ikke nødvendigvis hvorfor noe skjer eller hva som ligger bak, og da blir dette en form for black-box. Dette kan være lite motiverende og gjøre ting vanskeligere å huske enn hva som er nødvendig. Det er dermed hensiktsmessig å hjelpe elevene til å prøve å forstå og å lære hva som skjer.

For å forklare forskjellen på black-box og white-box kan vi se på et eksempel med vekter. Med gamle mekaniske vekter kan man se hva som skjer, man ser loddene og mekanismene, og dette fungerer dermed som en form for white-box. I nye digitale vekter kan man på ingen måte se hva som skjer, man bare setter noe på og får et tall, dette er dermed en form for black-box. (Strässer, 2007)

Elever ønsker ofte å finne ut hva som ligger bak, hva som skjer. Det er noe som Kieran og Drijvers (2006) opplever. De skriver om elever som bruker kalkulatorer med CAS (Computer Algebra System) under læring av algebra. Elevene ønsker etter hvert å finne ut hva kalkulatoren gjør og hvordan man kan gjøre det samme ved hjelp av papir og blyant. De ønsker å avdekke hva som skjer i black-box-en og gjøre den om til en white-box.

Elever kan også utforske ved hjelp av black-box. Et eksempel er ei ferdiglaget oppgave med firkanter. Alle firkantene er tilsynelatende kvadrater til å begynne med, men når man drar i punktene ser man at de har ulike egenskaper, og det viser seg at noen er kvadrat og andre rektangel eller parallellogram osv. Det er oppgaver der det er meningsfullt for elevene å finne ut hva som ligger bak.

Forskjellen på black-box og white-box er noe jeg har hatt i bakhodet når jeg har jobbet med masteroppgaven. Det er ikke noe jeg har hatt eksplisitt med i analyseverktøyet i utgangspunktet, men likevel kommer jeg tilbake til det i analysen, og spesielt slutten av analysen til Nummer 8 når jeg analyserer med tanke på induktiv og deduktiv metode.

3 Presentasjon av datamateriale som undersøkes

I dette kapittelet vil jeg først presentere ulike dynamiske geometriprogram, blant annet GeoGebra som blir brukt i opplæringsmateriellene, og andre aktuelle program. Jeg presenterer litt historisk utvikling for de dynamiske geometriprogrammene. Senere har denne utviklingen fortsatt og mange program som startet som rene geometriprogram er nå integrerte matematikkprogram. Etterpå i kapittelet vil jeg presentere de to opplæringsmateriellene som jeg skal analysere.

3.1 Dynamiske geometriprogram

Her vil jeg først presentere ulike dynamiske geometriprogram som kan være aktuelle å vite noe om, og litt om den historiske utviklinga. Etterpå vil jeg først gi en presentasjon av GeoGebra som opplæringsmateriellene legger opp til å bruke.

3.1.1 Noen ulike dynamiske geometriprogram og litt historisk utvikling

De første dynamiske geometriprogrammene som kom, var Cabri-Géomètre i 1989, og så kom Geometer's Sketchpad i 1991. Etter hvert har disse programmene utviklet seg, og nye er kommet til skriver Mackrell (2011). Hun har studert designvalg ved programmene Cabri II Plus, Cabri 3D, Geometer's Sketchpad, Cinderella og GeoGebra, og hun ser at utviklerne av programmene har tatt ulike valg i oppbyggingen av programmene. En forskjell kan være om man skal velge objekt før man velger handlingen som skal utføres, eller om handlingen skal velges først og så objektet, og hun ser at det kan være fordeler og ulemper med begge deler.

Utviklinga av dynamisk geometri skjøt fart på 1990 tallet skriver Goldenberg, Scher og Feurzeig (2008). De skriver om den historiske utviklingen til slike dynamiske geometriprogrammer. Grunnleggende er dette programmer som lar brukeren lage konstruksjoner og endre disse i etterkant. Det dynamiske med programmene er at man kan dra i ulike deler av figurene for å se hvordan det endrer figurenes egenskaper. De er spesielt interessert i denne utviklinga av konseptet med å dra i figurer, og ser spesielt på dette.

Det finnes også flere programmer til å utforske geometrien. Bueie (2011) nevner i tillegg til Cabri programmene «The Geometer's Sketchpad, GeoExplorer, Geometrix, GeoNext, The Geometry Supposer-serien, Wingeom og GeoGebra».

Cabri er et av de eldste dynamiske geometriprogrammene som ble utviklet. Laborde og Laborde (2008) skriver om prosessen med å utvikle programmet. De skriver også om hvordan det ble mottatt av lærere og andre og hvordan det ble videreutviklet.

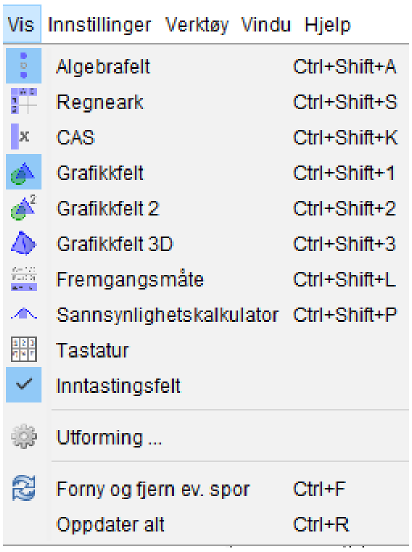
Cabri er utviklet i Frankrike, og målet var å lage et program til elevene slik at disse kunne undersøke sammenhenger mellom geometriske objekter. Programmet er blitt brukt i undervisningen ifra grunnskolen og opp til universitetsnivå. (Bueie, 2011) Det er kommet ulike varianter av programmet og Cabri II Plus, Cabri 3D, New Cabri, 123… Cabri og Cabri Express er variantene man nå kan finne på nettsiden www.cabri.com.

I Norge var nok Cabri mer populært tidligere, før GeoGebra tok over populariteten.

3.1.2 GeoGebra

GeoGebra er den dynamiske programvaren som har markert seg sterkest i Norge de senere årene. Mye av grunnen er nok her at programmet er gratis og lett tilgjengelig. Men også at det er holdt en rekke kurs i programmet, og at det finnes opplæringsmateriell på norsk på geogebra.no. Programmet er også oversatt til mange språk, blant annet både nynorsk og bokmål. Det er også lett å komme i gang å bruke programmet for både lærere og elever. (Bueie, 2011)

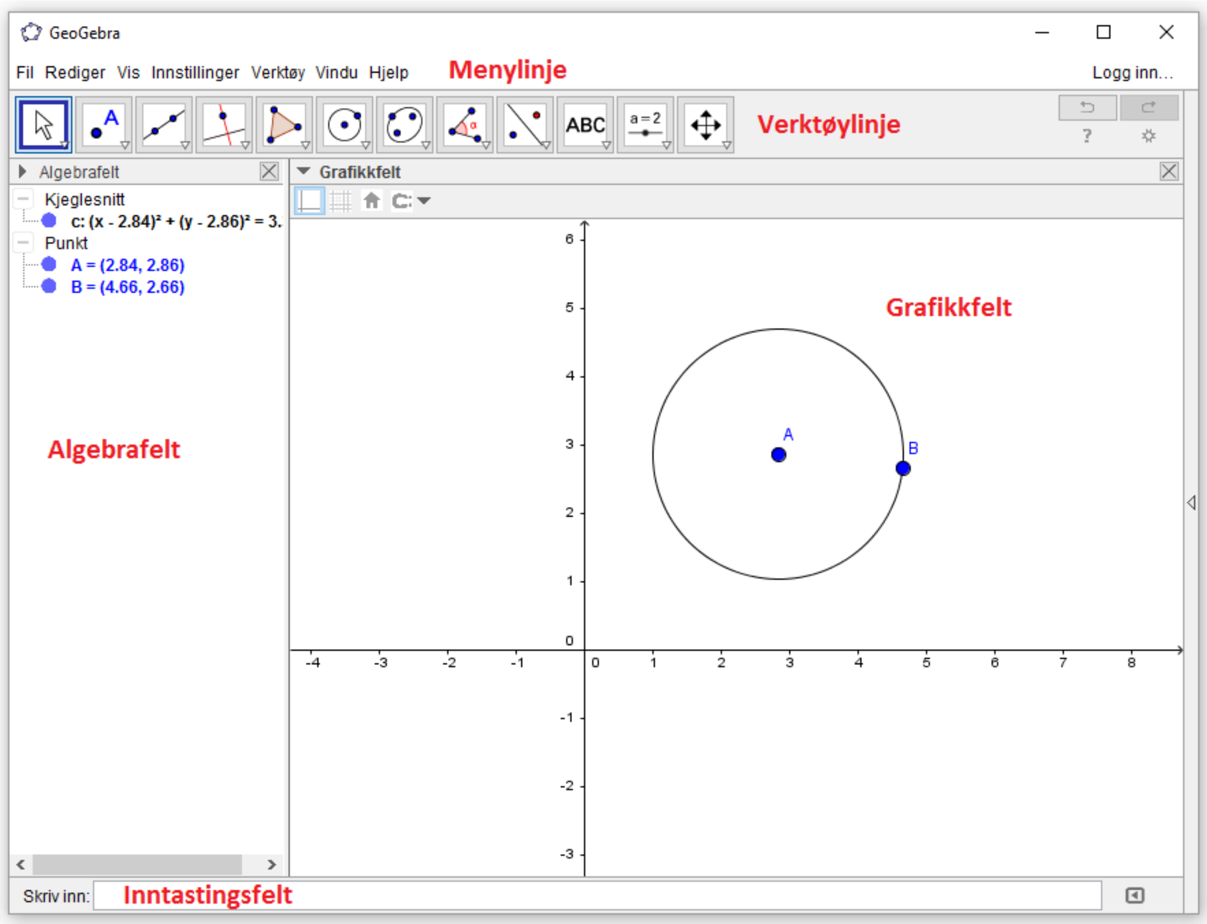
Opprinnelsen til GeoGebra er et masterprosjekt av Markus Hohenwarter i 2002. Programmet har en åpen kildekode slik at det er åpent for alle, og både Hohenwarter og mange andre programmerere og oversettere over hele verden har utviklet programmet videre. Målet med programmet var å lage et program som kombinerte egenskaper til program for **geo**metri og program for al**gebra**, og derav navnet GeoGebra. Programmet er nå utviklet til å dekke enda flere behov innen matematikken. Som man kan se fra Vis-menyen til høyre dekker nå programmet flere områder innen matematikken, og gir dermed mulighet til å se og utforske matematikken på flere måter samtidig. GeoGebra kan nå lastes ned, med ulike operativsystem, til datamaskiner, nettbrett og nå også mobil. (Bueie, 2011; geogebra.org; Hohenwarter & Lavicza, 2011)



Figur 2: Vis-meny i GeoGebra

Noe som GeoGebra har lykkes med er muligheten til å lage egne interaktive nettsider. For eksempel kan Anne lage et kvadrat som hun vil at elevene sine skal utforske, og legger dette ut på nett til elevene sine. Denne sida kan hun også dele med andre lærere på delingssida GeoGebraTube (tube.geogebra.org). Her finner Trond dette kvadratet, og synes dette var bra laga. Han laster ned kvadratet til Anne og legger også til et rektangel før han ber sine elever utforske disse to figurene. Denne delingsmuligheten er nok noe av grunnen til at besøkstallet til geogebra.org steg i fra 50 000 i 2004 til over 5 millioner i 2010. (Hohenwarter & Lavicza, 2011)

Jeg bruker GeoGebra når jeg analyserer opplæringsmateriellene. Dermed vil jeg presentere kort hvordan GeoGebra ser ut. Dette er ingen opplæring i bruk av programmet, bare en forklaring til hva jeg mener med ulike ord. Skjermbildet til GeoGebra vises i «Figur 3».



Figur 3: GeoGebra

Menylinja er den øverste linja, og her kan man blant annet lagre, skrive ut, endre antall desimaler, endre hvilke deler av programmet som skal vises (se «Figur 2») og flere andre muligheter. *Verktøylinja* inneholder mange knapper som lar oss bruke ulike verktøy, som for eksempel å tegne linjer eller sirkler. Dersom man trykker i den lille trekanten nederst i høyre hjørne på verktøyknappen så vil man kunne velge mellom enda flere verktøy i samme kategori. *Algebrafeltet* viser egenskapene til objektene i grafikkfeltet. Det er en oversikt over alle objektene som finnes i grafikkfeltet, også de som eventuelt er gjort usynlige. *Grafikkfeltet* viser det vi lager av punkter, sirkler, linjer, grafer og lignende. Her kan vi ofte dra i ulike punkt eller andre objekter for å få figuren til å endres. I *inntastingsfeltet* kan vi skrive inn formler, tall, utregninger, kommandoer og mer. Det er også mulig å trykke på den lille trekantpila til høyre for inntastingsfeltet for å få en oversikt over mulige kommandoer.

3.2 Opplæringsmateriell til to læreverk

Her vil jeg gi en overordnet presentasjon av opplæringsmateriellene og hvorfor jeg har valgt nettopp disse. Jeg har valgt to opplæringsmateriell laget for GeoGebra og som tilhører læreverkene Maximum og Nummer, og jeg presenterer disse her.

3.2.1 Nummer 8

Nummer 8-10 er et læreverk for ungdomsskolen utgitt av forlaget Aschehoug. Da jeg begynte på masteroppgaven i 2016 var det ferdig for 8. klasse og 9. klasse og skulle bli ferdigstilt senere samme år for 10. klasse. Det at det var så nytt var noe av grunnen til at jeg valgte dette opplæringsmateriellet, og valget falt naturlig på 8. trinn siden det var det som var tilgjengelig da (Aschehoug, 2016). Verket består av lærebøker, lærerveiledninger og digitale ressurser for både lærer og elev. Den digitale elevressursen er gratis og ligger fritt tilgjengelig på nett på lokus.no. Jeg tar utgangspunkt i 8. klasse, og på nettressursen for 8. klasse finnes det et opplæringsmateriell for GeoGebra. Dette inneholder både forklaringer og oppgaver til bruk i GeoGebra, og har også henvisninger til oppgaver i boka. Disse henvisningsoppgavene tar jeg ikke hensyn til i analysen, da det er nok oppgaver i selve opplæringsmateriellet, og jeg ser på disse oppgavene som et supplement til opplæringsmateriellet, heller enn en vesentlig del av det.

Jeg valgte dette opplæringsmateriellet fordi det var nytt og fordi jeg syntes det virket spennende å se hvordan de bruker det dynamiske aspektet med GeoGebra.

For 10. klasse kan man nå i tillegg finne kapitler i verktøyopplæringen som også handler om speiling, rotasjon, parallellforskyvning og perspektivtegning, som er tema som ikke er med i 8.klasse varianten.

3.2.2 Maximum 8

Maximum er et læreverk i matematikk for ungdomsskolen utgitt av forlaget Gyldendal. Det består både av trykte læremidler for både elever og lærer, men også av digitale læreverktøy. Det er flere digitale ressurser, og et av disse er læreverktøyet «Smart Tavle», som er et undervisningsverktøy som kan enkelt brukes opp mot digitale tavler. Læreverket ønsker å enkelt kunne fungere i et godt samspill mellom både det trykte og det digitale. Læreverket var nytt opp mot revidert læreplan i 2013.

På nettsidene til Gyldendal som var tilknyttet Maximum fant jeg i 2016 et kurs i GeoGebra for 8.trinn som man fritt kunne laste ned (Gyldendal, 2016). Det er dette opplæringsmateriellet jeg har tatt utgangspunkt i og analysert i masteroppgaven min. Dessverre er dette kurset blitt fjernet eller flyttet når jeg fortsatte med masteroppgaven i 2019. Jeg har lagt det til som vedlegg i slutten av masteroppgaven slik at andre kan finne det, og der har jeg også lagt til Nummer 8 sitt opplæringsmateriell.

4 Metode

Dette kapittelet er firedelt. Den første delen handler om hvordan jeg har valgt de to opplæringsmateriellene. Andre del handler om metode og troverdighet. Tredje del handler om gjennomføringen og hvordan jeg har jobbet med å utvikle et analyseverktøy for så å analysere to opplæringsmateriell. Den siste delen handler om validitet og reliabilitet.

4.1 Utvalg

Da jeg begynte på masteroppgaven, fant jeg de to opplæringsmateriellene fritt tilgjengelig på internett. Begge er til bruk i ungdomsskole, for 8.klasse, og begge bruker GeoGebra som dynamisk geometriprogram. Målgruppen fremstår dermed som den samme. Opplæringsmateriellene er knyttet til læreverk og har dermed potensielt mange brukere. De er tenkt for elever og som en støtte eller en del av lærerens undervisning. De fremstår likevel ganske forskjellig, i størrelse og omfang, og utseendemessig med bildebruk osv. Jeg vurderte tidligere i prosessen også noen litt eldre opplæringsmateriell laget for programmet Cabri. Det er også andre opplæringsmateriell ute på andre forlag sine sider, og jeg kunne valgt en av disse som et tredje opplæringsmateriell. (Noen av disse er bare manual med eksempeloppgaver og ikke oppgaver som elevene skal gjøre selv.)

Det ene opplæringsmateriellet er fra læreverket Nummer 8 og er laget for elevene på åttende trinns første møte med det dynamiske matematikkprogrammet GeoGebra. Dette er stort og omfattende og inneholder det meste av det elevene vil trenge av verktøyopplæring på ungdomstrinnet i forhold til tegning av figurer. Det andre opplæringsmateriellet tilhører læreverket Maximum 8. Dette er laget for at elevene skal få lære å bruke GeoGebra i tilknytning til det de ellers jobber med i læreboka, og er lagt opp etter de samme temaene som i geometrikapittelet i læreboka.

4.2 Metode og troverdighet

Dette er en studie basert på kvalitativ metode. Det er et relativt lite utvalg av tekst som blir grundig undersøkt. Bryman (2012) skriver om «content analysis» og «qualitative content analysis» og hvordan dette kan gjennomføres. Han skriver om innsamling av data, ordtelling, koding, fordeler og ulemper og mye mer. Dette studiet er basert på en analyse av tilgjengelige dokumenter, nemlig to opplæringsmateriell. Disse opplæringsmateriellene består av tekst og oppgaver og det vil dermed ligne veldig på lærebokanalyse. Det kan ligne på å velge et kapittel eller et tema i ei lærebok som utgangspunkt for analyse.

Her har jeg kun basert meg på dokumenter, nemlig opplæringsmateriellene, og jeg har ingen elever eller andre lærere som jeg observerer eller intervjuer. Analysen blir dermed hva jeg som lærer tenker om opplæringsmateriellene basert på analyseverktøyet som blir presentert i kapittel 5, og ikke hva elever vil tenke og gjøre. Ser man på de etiske betraktningene her, så er det ingen andre personer å ta hensyn til, det er kun meg og de skriftlige kildene. Det er altså ikke behov for å anonymisere noen personer.

Noen fordeler med å basere seg på dokumenter på denne måten er at det er lett for andre å gjøre det samme, det inkluderer ikke andre deltakere, og det er en fleksibel metode som kan brukes på mange typer tekster. Noen ulemper med å gjøre det på denne måten, er at det kun er basert på de dokumentene som analyseres, og ikke har tillegg med intervju eller observasjoner i klasserom. Det er også basert kun på de personene som utfører analysen, som i dette tilfellet er meg. Dette vil i stor grad påvirke utfallet, og dersom andre hadde utført analysen, kunne resultatene blitt annerledes. (Bryman, 2012)

Jeg har jobbet med oppgaven i to omganger. Dette har påvirket oppgaven på den måten at jeg begynte på oppgaven og gjorde store deler av blant annet analysen i et Excel-ark 2016 og så gjorde ferdig oppgaven i 2019.

4.3 Gjennomføring

Når jeg har jobbet med denne oppgaven har jeg først jobbet med å utvikle et analyseverktøy og så jobbet med å analysere to opplæringsmateriell.

Analyseverktøyet jobbet jeg mye med i starten. Jeg lagde spørsmål og utviklet disse, og lagde ulike kategorier å plassere oppgavene innenfor eller ulike punkter å tenke på eller legge merke til. Jeg prøvde altså å finne spørsmål som jeg kunne få svar på og finne kategorier å plassere de ulike oppgavene under. Ved noen av spørsmålene er kategoriene slik at ei oppgave bare vil passe i én kategori. Andre spørsmål er slik at oppgavene kan passe i flere eller ingen kategorier. Så har jeg også spørsmål der jeg ser mer på teksten og strukturen og ikke så spesifikt på hver oppgave. Analyseverktøyet er basert på lærebokanalyse og egne interesser og ideer og blir presentert i neste kapittel.

Jeg lagde et tilhørende Excel-ark der jeg kunne plassere de ulike oppgavene i tilhørende kategorier for hvert spørsmål i analyseverktøyet, og med plass til å skrive kommentarer dersom det var noe jeg ville huske til de ulike oppgavene og deloppgavene. Jeg analyserte hver oppgave og deloppgave ved å lese oppgavene og gjøre oppgavene på GeoGebra og så føre resultatene inn i Excel-arket. Etter analysen skrev jeg ut Excel-arket og kunne få en litt bedre oversikt på papir i stedet for å bla opp og ned på en pc-skjerm. Da kunne jeg også markere, og sortere og lettere se hva jeg hadde funnet ut.

Etter at jeg hadde laget analyseverktøyet, begynte jeg med analysen av opplæringsmateriellet til Nummer 8, og etter hvert fant jeg likhetstrekk mellom ulike oppgaver og kalte disse for ulike oppgavetyper. Disse oppgavetypene er presentert i analysen av Nummer 8. Ved analysen av opplæringsmateriellet til Maximum 8 var det ikke så lett å finne slike oppgavetyper på samme måte, så dette er presentert under fem tema som er tilstede.

4.4 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet kan gjerne oversettes med pålitelighet, og handler om studiens materiale, innsamlingsmetode, bruk og bearbeidelse. God reliabilitet vil gi stabilitet og sannsynliggjøre at andre som eventuelt vil analysere dataene vil kunne finne samme funn som meg. Tiltak jeg har gjort for å sannsynliggjøre høy reliabilitet er å utvikle et analyseverktøy. Store deler av dette er utviklet og basert på andres arbeid og jeg presenterer analyseverktøyet i kapittel 5. Ved å presentere og bruke analyseverktøyet er det åpent og synlig hva jeg gjør, og det øker sannsynligheten for at andre kan finne samme funn som meg. Avslutningsvis i oppgaven gir jeg et kritisk blikk på bruken av analyseverktøyet. (Bryman, 2012)

Validitet kan gjerne oversettes med gyldighet, og handler om at dataene jeg bruker kan brukes til å besvare forskningsspørsmålene mine, og om å knytte det opp mot relevant teori og tidligere forskning. God validitet gir andre grunn til å tro på mine svar. Forskningsspørsmålet mitt er: *Hvordan gir opplæringsmateriellet i dynamisk geometriprogram utfordringer som har potensiale til å stimulere læring i matematikk for elever i ungdomsskolen?* Jeg ser på potensialet for læring, ved bruk av opplæringsmateriellene, og ikke læring som faktisk har skjedd eller vil skje. Dermed vil jeg kunne få svar på spørsmålet ved å bruke analyseverktøyet på dataene som er opplæringsmateriellene. (Bryman, 2012)

5 Analyseverktøyet

Analyseverktøyet er bygd opp av spørsmål under ulike tema, med tilhørende kategorier, punkter eller aspekter å ta hensyn til. Det er hovedsakelig basert på en blanding av Brändström, Skovsmose og meg selv. Dersom det ikke står noe annet er det meg selv som har hatt ideen, og dette gjelder spesielt det som har med GeoGebra å gjøre. Analyseverktøyet er tredelt. Først er det designet av oppgavene og opplæringsmateriellene som er i fokus. Deretter kommer det dynamiske. Til slutt kommer læringspotensialet i oppgavene. Tabellen viser strukturen på analyseverktøyet i tillegg til hva som har vært inspirasjonskilder til de ulike delene.

Tabell 2: Oversikt over analyseverktøyet

Analyseverktøyets struktur	Inspirasjonskilder
Design av oppgaven	
Bilder	Brändström
Tekst	Meg selv. Tegne og konstruere.
Dynamisk geometriprogram	
Dynamisk	Meg selv. Dynamisk potensiale
Annerledes passer og linjal	Meg selv. Kan tradisjonelle verktøy brukes?
Guide og begrensninger til verktøybruk	Meg selv. Verktøybruk
Opplæring i hva?	Meg selv. Matematikk og programopplæring
Læringspotensial	
Vanskelighetsgrad	Brändström, Blooms taksonomi
Læreren	Meg selv. Lærerens rolle og forberedelse
Læringsmiljø	Skovsmose, Pierce og Stacey
Syn på læring	Læringsteorier, Induktiv og deduktiv metode

5.1 Design av oppgaven

Her vil jeg se på hvordan oppgavene og opplæringsmateriellene er designet. Er det noe som går igjen i mange eller flere av oppgavene? Kan man finne ulike oppgavetyper? Hva er typisk for opplæringsmateriellet?

5.1.1 Bilder

Brändström (2005) undersøker hvordan bilder brukes i lærebøkene som hun analyserer. Hun kategoriserer i tre kategorier. Jeg har valgt å dele de funksjonelle bildene i to kategorier; en kategori for matematikken og en for programmet.

I opplæringsmateriellene er det bilder både direkte tilknyttet oppgavene og til forklaringer og lignende i teksten. De ulike bildene kan ha ulike funksjoner. Er det kanskje noen forskjell på hvilken funksjon bildene har som er direkte tilknyttet oppgavene i motsetning til de bildene som er ellers i teksten?

Spørsmål: Hvilken funksjon har eventuelle bilder som er knyttet til oppgaven?
- Ingen bilder
- Dekorasjon, bildene er bare til pynt og har ingen betydning for oppgaven
- Funksjonelle bilder i tilknytning til matematikk
- Funksjonelle bilder tilknyttet geometriprogrammet

Funksjonelle bilder er bilder som er viktige for å kunne løse oppgaven eller gjør det lettere å forstå oppgaven.

5.1.2 Tekst

Her vil det i stor grad være hensiktsmessig å se på hele oppgavesettet under ett, da mye vil avhenge av forfatterens preferanser og ikke endres fra oppgave til oppgave.

Spørsmål: Hvilke av ordene nedenfor brukes i oppgaven?

- Tegne
- Konstruere
- Figur
- Tegning
- Konstruksjon

På hvilken måte brukes de ulike ordene ovenfor? Er ordene forklart, begrunnet eller beskrevet i opplæringsmateriellene?

Jeg har også følgende spørsmål som er generelt til hele opplæringsmateriellet sett under ett:

Spørsmål: Hvordan er oppdelinga av delspørsmål?

- Ingen oppdeling, alt i en tekst
- Avsnitt
- Delspørsmål markert med a), b), c) osv.

Spørsmål: Hvordan er strukturen på oppbyggingen av opplæringsmateriellet?

- Her vil jeg se på for eksempel sammensetningen av forklarende tekst og oppgaver.

5.2 Dynamisk geometriprogram

Her vil jeg se på ulike ting som har med det dynamiske geometriprogrammet og bruken av dette å gjøre, og hvordan dette er forskjellig fra tradisjonell bruk av passer og linjal.

5.2.1 Dynamisk

Her vil jeg se på det dynamiske i oppgavene. Jeg vil se hvordan dette potensialet blir brukt eller ikke blir brukt. Er det for eksempel opp til eleven selv å dra i hjørner for å sjekke om figuren henger sammen slik som antatt, eller kanskje det står i oppgaven at eleven skal gjøre det.

Spørsmål: På hvilken måte blir det dynamiske aspektet ved programmet brukt i oppgaven?

- Ikke noe dynamisk med oppgaven
- Dra i punkter/linjer for å sjekke at konstruksjonen holder
- Dra i punkter/linjer for å oppdage sammenhenger eller løse andre deler av oppgaven
- Bruk av andre dynamiske aspekter ved programmet, som for eksempel bruk av glider

5.2.2 Annerledes passer og linjal

Jeg vil se hvilke valg som er tatt med tanke på hvordan oppgavene er laget. Er oppgavene laget slik at de like gjerne kunne stått i ei vanlig lærebok og bli gjort på papir, eller er oppgavene så annerledes og rettet mot GeoGebra at man er nødt til å bruke dataprogrammet?

Spørsmål: Hvordan skiller oppgavene i opplæringsmateriellet seg fra oppgaver med tradisjonelle verktøy? Er det noen tendenser som går igjen i opplæringsmateriellet med tanke på nøyaktighet, effektivitet, forståelse eller løsningsmetode.

Spørsmål: Hva må til for at oppgaven skal kunne løses med tradisjonelle verktøy?

- Kan gjøres direkte på papir (teksten kan brukes direkte)
- Må endres (noen ord/bilder må byttes ut, eller teksten må omformuleres noe)
- Kan ikke endres til å bli gjort på papir (dynamisk eller lignende)

5.2.3 Guide og begrensninger til verktøybruk

Jeg vil se hvilke valg som er tatt med tanke på hvordan elevene blir guidet eller begrenset i opplæringsmateriellene med tanke på hvilke verktøy de skal bruke.

Når jeg går gjennom oppgavene, vil jeg markere der det forekommer:

- Marker med tall antall åpenbart **direkte henvisninger** til verktøy. Dette kan være om navnet på verktøyet er brukt, gjerne i uthevet skrift, eller om det er brukt et bilde av verktøyet.
- Marker dersom det står at noen verktøy **ikke er lov** å bruke, altså et forbud mot utvalgte verktøy. Dette er gjerne sjelden, men marker dersom det skjer.

Spørsmål: Hvor tydelig blir elevene guidet gjennom oppgavene?

- Deloppgavene kategoriseres i en av disse tre kategoriene:
    - «Direkte guide», alt som elevene skal gjøre er beskrevet. F.eks.: *Avsett to punkt, A og B. Tegn en sirkel med sentrum i A og med B på sirkelperiferien.*
    - «Hull i guiden», elevene må tenke eller gjøre noe selv som ikke er beskrevet. F.eks.: *Tegn en trekant ABC der AB er 6, $\angle A$ er 22,5° og $\angle B$ er 90°.* (Her må elevene i tillegg finne punkt C og gjerne markere trekanten. Det er også valgfritt om man lager $\angle B$ med vinkelverktøyet eller bruker en normal)
    - «Spørsmål», deloppgaven passer ikke i kategoriene over og består av et spørsmål uten noe som direkte må gjøres med figuren. F.eks.: bare observere figuren uten å bruke pil for å flytte på punkter
- Oppgavene kan kategoriseres etterpå på den måten at man summerer deloppgavene slik:
    - Kun «direkte guide» og eventuelle «spørsmål» i kategorien «direkte guide»
    - Kun «hull i guiden» og eventuelle «spørsmål» i kategorien «hull i guiden»
    - Blanding av både «direkte guide» og «hull i guiden» i kategorien «blanding»

5.2.4 Opplæring i hva?

Det vil være interessant å se på hvor generell oppgaven er i forhold til hvilket program som blir brukt og i forhold til fokuset på matematikk eller opplæring i programmet.

Spørsmål: Hva er det oppgaven fokuserer på at eleven skal lære?
- Lære å bruke dataprogrammet
- Lære matematikk
- Begge de to over (eller ikke et tydelig fokus på én av de)

Spørsmål: I hvilken grad er oppgaven knyttet til et spesielt dataprogram?
- Spesifikt knyttet til GeoGebra
- Må bruke et dynamisk geometriprogram eller annet passende dataprogram
- Trenger ikke bruke noe dataprogram, kan gjøres på papir

5.3 Læringspotensial

Her er fokuset læringspotensialet i oppgavene. Jeg begynner med vanskelighetsgraden til oppgavene, så går fokuset over på læreren. Etterpå er det hvilket matematisk læringsmiljø oppgavene har potensiale for, og til slutt er det forfatterens syn på læring.

5.3.1 Vanskelighetsgrad

Brändström (2005) fokuserer i sin lærebokanalyse på vanskelighetsgraden til oppgavene, og hun undersøker dette på flere ulike måter. Jeg vil bruke dette som utgangspunkt og velger noen av disse aspektene når jeg ser på vanskelighetsgraden i oppgavene.

Antall krevde operasjoner.

Antallet krevde operasjoner handler om å se på hvor mange operasjoner som må gjøres for å løse oppgaven. Med operasjoner menes blant annet algoritmer, men også ulike verktøy i geometriprogrammet må regnes med. Brändström (2005) finner det hensiktsmessig å dele inn i to kategorier 'uni' (0-1 operasjoner) og 'multi' (flere operasjoner), fordi hun ser på hver deloppgave for seg selv (altså ser på 4a og 4b som to ulike oppgaver). Jeg har også valgt å se på de ulike deloppgavene hver for seg, men har i tillegg lagt til en tredje kategori.

- Få operasjoner: 0-1 operasjoner
- Noen operasjoner: 2-3 operasjoner
- Mange operasjoner: 4 eller flere operasjoner

Ved bruk av verktøy i det dynamiske geometriprogrammet teller jeg på den måten at dersom et verktøy blir brukt gjentatte ganger etter hverandre på samme måte, så teller jeg dette som bare en operasjon. Det vil si at dersom elevene må tegne to linjestykker, så kaller jeg dette én operasjon, siden det er identiske handlinger som blir gjort etter hverandre. Dersom elevene derimot skal bruke verktøyet «vinkel med fast størrelse», og den ene vinkelen skal være 50 grader og den neste skal være 70 grader, så teller jeg dette som to operasjoner. Dette gjør jeg fordi at selv om elevene også her bruker samme verktøy to ganger på rad, så er handlingen ikke identisk, fordi vinklene er ulike (og kanskje må de roteres ulik vei også), og elevene må endre dette når de igjen bruker verktøyet.

Kompetanse og kognitive prosesser

Denne kategorien handler om å se på hvilke kognitive prosesser som må til for å løse oppgaven. Her har Brändström (2005) basert seg på både Blooms taksonomi og den reviderte Blooms taksonomi. Jeg bruker dette som utgangspunkt og kombinerer disse til tre kategorier, lav, middels og høy vanskelighetsgrad. Dette gjør jeg av to grunner. Den første er at jeg ikke har behov for en mer detaljert inndeling i oppgaven min. Den andre er fordi Brändström (2005) selv syntes dette var det vanskeligste punktet i sin analyse, og jeg gjør det nok dermed litt lettere for meg selv ved å velge bare tre kategorier. I sin bok «Variert undervisning – mer læring» presenterer Repstad og Tallaksen (2011) en oversikt med ord som er basert på Blooms taksonomi for kunnskap og Simpsons taksonomi for ferdigheter. Denne oversikten er tredelt, og jeg tar dermed utgangspunkt i denne når jeg analyserer oppgavene. I tillegg supplerer jeg med å sammenligne litt med eksempelspørsmål og –oppgaver og noe beskrivelse ifra dokumentet «Taksonomier» som jeg fant på fylkesmannen.no sine sider, og som er tilpasset skolesammenheng ("Taksonomier,"). Alt dette har jeg plassert inn i en tabell som jeg bruker som et arbeidsverktøy i analysen av oppgavene. Man kan finne tabellen som vedlegg A: Kompetanse på nederste, mellomste og øverste trinn.

5.3.2 Læreren

Spørsmålene som kommer her, har læreren i fokus og spesielt lærerens forberedelse av undervisningen.

Spørsmål: Hva må læreren tenke på under forberedelsen av undervisningen?

- Finnes lærerveiledning eller lignende?
- Skrive ut eller finne opplæringsmateriellene på datamaskin/internett?
- Noen oppgaver som krever mer enn andre?
- Hva er viktig at læreren gjør for at undervisningen skal bli vellykka?
    - For at elevene skal se helheten
    - For at det skal gi mening for elevene
- Tydeliggjøre variasjon, sammenhenger og ulike representasjonsformer?
- Tilknytning til læreplanen

Spørsmål: Hva må læreren huske på under forberedelsen av oppgavene?

- Forberede eksterne filer
- Prøve ut oppgaven på forhånd
- Tilleggsutstyr
- Tidsplan – trengs mye eller lite tid?

Spørsmål: Hva må læreren huske på under gjennomføringen?

- Vanskelige eller nye ord
- Oppfølging underveis eller etterpå
- Forklaring til oppgaver eller teori
- Oppsummering for å samle trådene

5.3.3 Læringsmiljø

Her er målet å finne ut hvor i Skovsmoses (2001) læringsmiljøtabell oppgavene kan plasseres. Den norske oversettelsen av tabellen under er hentet fra Botten (2009):

	Tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar	Undersøkelseslandskaper
"Ren" matematikk, uten noen praktisk anvendelse	(1)	(2)
"Semi"-anvendelser av matematikken	(3)	(4)
Ekte, reelle anvendelser av matematikken	(5)	(6)

Tabell 3: Seks typer matematisk læringsmiljø

- For å se om oppgavene er tradisjonelle eller har potensiale for å bli undersøkelseslandskap kan jeg se etter aspektene under:
    - Styrt
    - Lukkede

    - Tydelig fasitsvar
    - Åpne
    - Utforskende
    - Åpner for undring
    - Åpner for diskusjon
    - Oppdagelsesspørsmål – styrt utforskning
- Det vil ofte være motiverende for elevene å jobbe med oppgaver som bruker reelle anvendelser av matematikken. Dette skriver Pierce og Stacey (2011) mye om.
- Datamaskinen og geometriprogrammet er et verktøy, slik som papir og blyant, og vil dermed ikke påvirke oppgavenes plassering på «ren», «semi» eller «ekte»-skalaen. Det vil si at oppgaver med «ren» programopplæring inngår i boksen med «ren» matematikk.

5.3.4 Syn på læring

Her blir målet å se etter spor på forfatterens syn på læring, og hva forfatteren tenkte om læring, forfatterens pedagogiske intensjon. Her vil jeg se hele opplæringsmateriellet under ett og ikke fokusere på hver enkelt oppgave. Hvilke tanker sitter jeg igjen med etter hvert opplæringsmateriell?

- Hvordan påvirker syn på læring oppgavene?
- Ser jeg noen spor av konstruktivistiske eller sosiokulturelle læringsteorier?
- Legges det tydelig opp til induktiv eller deduktiv metode?

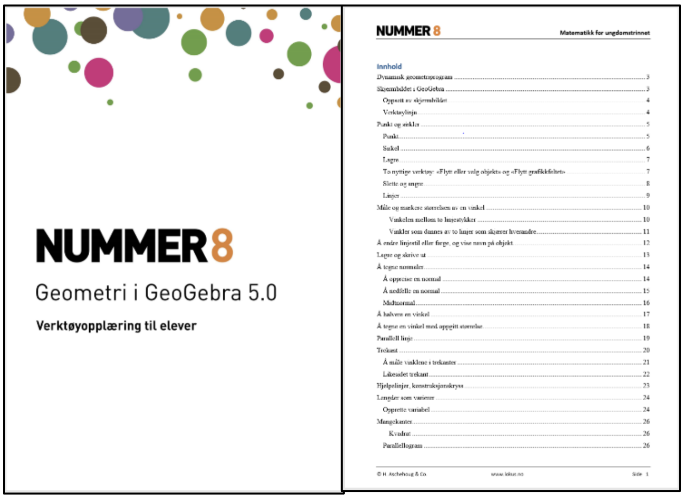
6 Analyse av to opplæringsmateriell

I dette kapittelet vil jeg presentere funn jeg har gjort i analysen av de to opplæringsmateriellene. Jeg presenterer funn for opplæringsmateriellet til Nummer 8 først og etterpå opplæringsmateriellet til Maximum 8. For hvert av opplæringsmateriellene presenterer jeg først generelle funn og etterpå funn og analyse ved bruk av analyseverktøyet.

Gjennom analysen tenker jeg og forutsetter at lærerne kan programmet, iallfall sånn noenlunde. Dette er spesielt viktig i forhold til opplæringsmateriellet til Maximum 8, men vil være noe mindre viktig i forhold til opplæringsmateriellet til Nummer 8. Jeg forutsetter også at elevene (8.trinn) har lite kjennskap til programmet fra før av. Det vil si at dette er første møte med programmet, iallfall bruk av programmet på egenhånd, men læreren kan for eksempel ha brukt programmet i klasserommet på tavla, slik at elevene har sett programmet, men ikke brukt det selv enda.

6.1 Nummer 8

Dette er et rimelig stort opplæringsmateriell på 34 sider med oppgaver nummerert fra 1 til 48. Det er en detaljert «verktøyopplæring til elever», som det står på framsida. Hvert verktøy blir presentert og har tilhørende oppgaver sånn at eleven skal få prøve alle verktøyene selv. Det er ei innholdsliste til å begynne med, slik at elevene lettere kan finne fram dersom det er et spesielt verktøy de vil finne informasjon om.



Figur 4: De to første sidene i verktøyopplæringsheftet til Nummer 8

Det er 47 oppgaver som er analysert, og ikke 48 oppgaver. Dette er fordi oppgave 45 er tom/blank, så den tar jeg ikke med i den videre analysen. Det er i tillegg henvisninger til oppgaver i boka til Nummer 8, og disse er heller ikke med i noen analyse her.

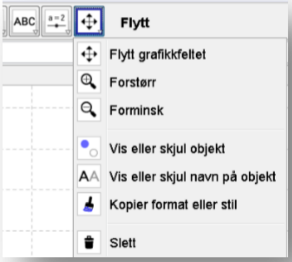
Jeg har funnet ut at en del av oppgavene i opplæringsmateriellet følger bestemte mønster i utformingen. Dette kaller jeg for ulike oppgavetyper, og jeg presenterer disse nedenfor med det jeg har funnet ut og observert om det som kjennetegner denne typen.

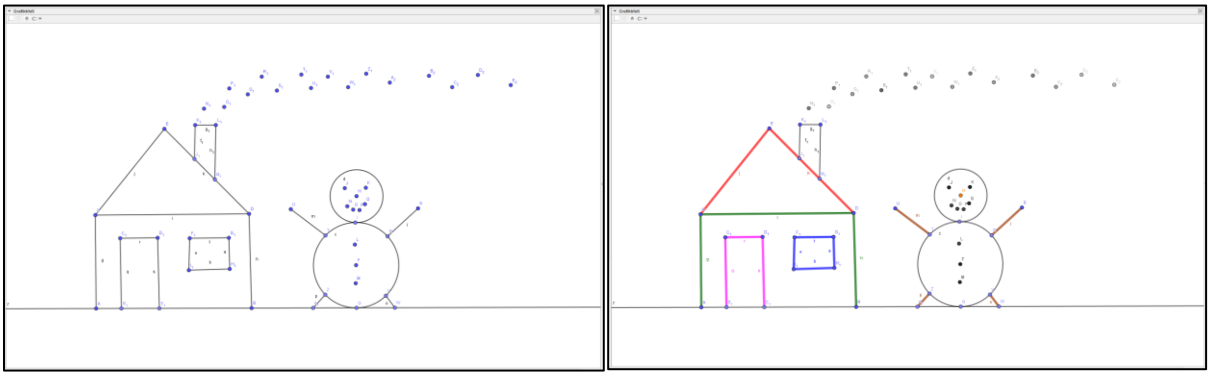
6.1.1 Oppgavetype: Tegneoppgave

Dette er en oppgavetype som var tilstede i begynnelsen av opplæringsmateriellet. Her spør oppgaven elevene om å tegne noe, for eksempel et hus, en snømann, et bestemt mønster eller lignende. Hensikten med oppgavene er tydelig at elevene skal få prøve ut og bli vant med noen av verktøyene i GeoGebra. Samtidig lærer de også noen av programmets egenskaper og valgmuligheter. Oppgave 11 og 13 er tydelige eksempler på denne oppgavetypen. Oppgave 11 er presentert under. I oppgaveteksten her er det også tips om forstørring og forminskning som ikke er beskrevet på forhånd, men kun blir beskrevet i oppgaven.

Oppgave 11

Bruk sirkler, linjer og punkt og tegn en snømann og et hus.Forstørre og forminske tegningen
Vi kan forstørre eller forminske tegningen ved å holde ctrl-tasten nede mens vi klikker på henholdsvis + eller –. Det fins også verktøy til å forstørre eller forminske.





Figur 5: oppgave 11 med to løsninger

Den venstre tegningen er en løsning på oppgaven, og det er tegningen til høyre også. Tegningen til høyre har fått litt ekstra farge og litt tykkere linjer, som er beskrevet i teksten som kommer før selve oppgaveteksten. Denne oppgavetypen gir mulighet for at elevene kan få bli litt mer kjent med programmet samtidig som mange vil kose seg med å tegne bilder av hus og lignende.

6.1.2 Oppgavetype: Tegn figur - Bruk pil - Hva skjer?

Denne oppgavetypen er gjennomgående i hele opplæringsmateriellet, men er spesielt tydelig i starten. De fleste oppgavene har en a, b, c struktur. Oppgavene begynner med at elevene skal tegne en figur. Det kan være figurer som består av bare ei linje (oppgave 6), eller mer sammensatte figurer som et rektangel med bestemte sidelengder (oppgave 39). Etterpå blir elevene bedt om å bruke pila for å flytte på linjer og punkter og observere hva som skjer og hvordan figuren henger sammen. Til slutt kommer det ett eller flere spørsmål som eleven må svare på. Et eksempel på et ganske typisk spørsmål er «Hva skjer når du flytter punkt A?»

Ei oppgave i starten av opplæringsmateriellet som kan illustrere denne oppgavetypen er oppgave 6 som kan sees i Figur 6. I deloppgave a skal elevene tegne ei linje. Så gjelder det å utforske egenskapene til denne linja og hvordan programmet fungerer ved å bruke pila og dra i streken og etterpå dra i punktene. Gjennom slike oppgaver kan elevene bli kjent med programmet og de ulike verktøyene. Dette vil også hjelpe elevene til å få en vane med å bruke pila for å dra i linjer og punkter. Det er noe som vil være spesielt nyttig senere når elevene skal lage mer komplekse tegninger og konstruksjoner, for å se at figuren henger sammen på den måten som er intensjonen.

Oppgave 6

a Avsett to punkt *A* og *B*. Tegn ei linje som går gjennom de to punktene.

b Velg verktøyet  og flytt på linja ved å dra i streken, ikke et av de to punktene. Hvordan beveger den seg?

c Flytt på punktet *A*. Hva skjer nå med linja? Flytt punkt *B*. Hva skjer med linja?

Figur 6: Oppgave 6

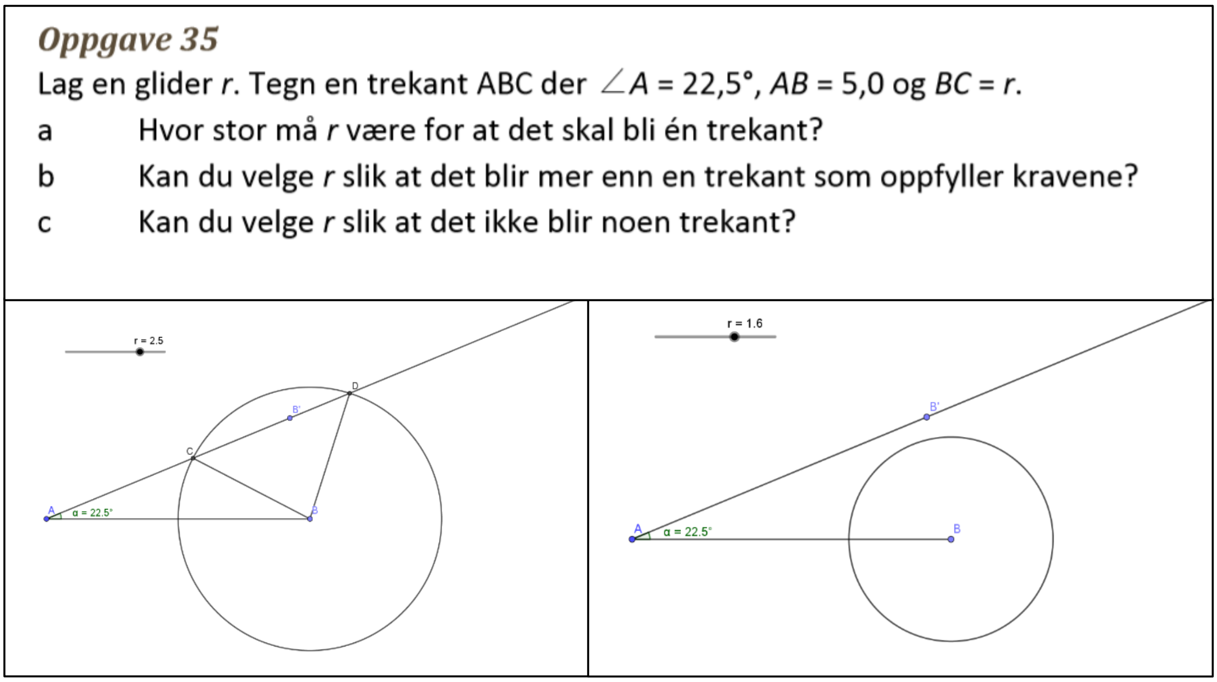
Disse oppgavene er gjerne opptatt av at elevene skal se hvordan programmet fungerer, og å prøve ut aspekter ved programmet og programmets geometri. Altså hvordan programmet oppfører seg, og å oppdage noe av geometrien og sammenhengene som ligger bak og gjøre det litt mindre black-box. Elevene vil etter hvert få en forståelse av egenskapene til ulike normaler ol.

Elevene vil fort bli kjent med oppgavetypen, slik at de vet noe på forhånd hvordan oppgaven er strukturert og hva den antakelig ber om. Disse oppgavene ønsker at elevene skal få en vane med å bruke pila og flytte på ting for å se hva som skjer. De introduserer ofte et nytt verktøy i beskrivelse på forhånd, som så skal brukes i den aktuelle oppgaven. Dette er også oppgaver der elevene skal bli kjent med matematiske egenskaper til objekter, som ulike normaler, halveringslinje, parallell osv.

6.1.3 Oppgavetype: Presentasjon – bruk – oppdag

Denne oppgavetypen kjennetegnes ved at elevene blir presentert for et nytt verktøy eller matematisk tema i en forklaring først, så kommer oppgaven der elevene skal bruke dette som nettopp er blitt presentert, og når de gjør det så er målet at de skal få oppdage ting med matematikken på en eller annen måte. Gjerne ting som de kanskje ikke vet eller har tenkt på før. Det blir mer av denne oppgavetypen til lenger ut i opplæringsmateriellet man kommer. Den tar på en måte over for «Tegn figur - Bruk pil - Hva skjer?»-oppgavetypen. Det er en glidende overgang i opplæringsmateriellet mellom disse to oppgavetypene.

Et eksempel på ei oppgave i denne kategorien er oppgave 35. Det begynner med en presentasjon av verktøyet «glider». Det sies at det er en variabel som vi kan bruke til å angi lengder med. Så blir det vist og forklart hvordan elevene kan lage en selv. I oppgaven blir elevene bedt om å lage en slik glider. De skal altså bruke og gjøre selv det som er blitt

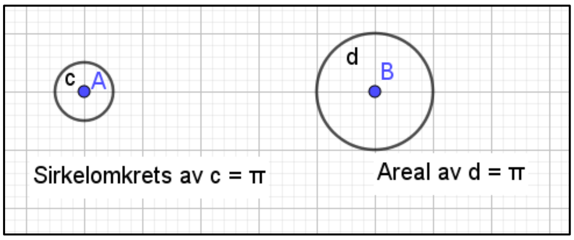


Figur 7: Oppgave 35 med løsninger

presentert. Så kommer de ulike deloppgavene, med spørsmål som får elevene til å utforske og oppdage matematikken, og egenskaper til en trekant ved hjelp av denne glideren som de nettopp har lært å bruke.

6.1.3.1 Oppdag π

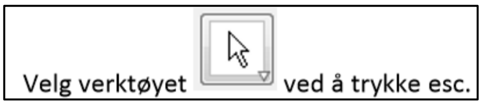
Oppgave 42 og 44 skiller seg litt ut og de handler om π. Oppgavene går ut på å måle omkrets eller areal av en utvalgt sirkel. Det som er spesielt, er at når elevene gjør dette blir svaret π. Det er altså symbolet π og ikke tallet 3,14… som blir brukt her i GeoGebra for å vise at det er nøyaktig π som er resultatet.



Figur 8: Resultatet av to π-oppgaver

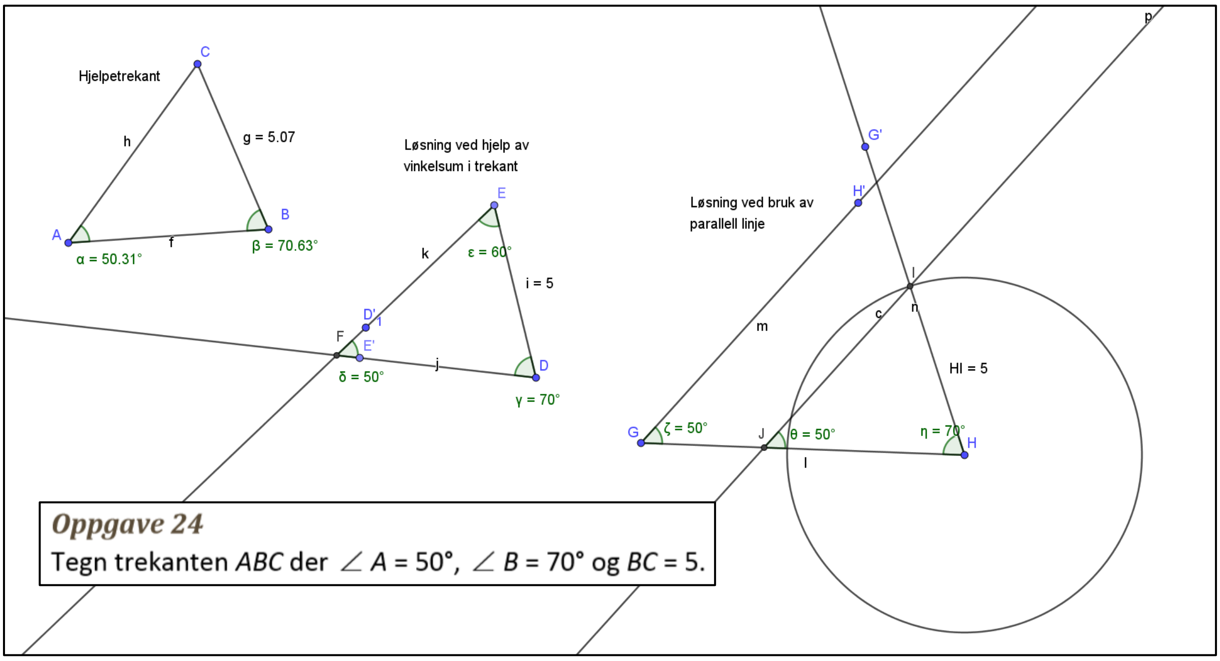
6.1.4 Interessante oppgaver

Opplæringsmateriellet gir også tips om hurtigtaster i tillegg til verktøy og menyer. Her kan det nevnes som et eksempel at det blir forklart at dersom man trykker på Escape, så er det det samme som å velge «flytt eller velg objekt»-verktøyet som blir mye brukt i opplæringsmateriellet. I oppgave fire skal også elevene selv øve på å velge dette verktøyet ved å trykke esc.



Figur 9:Utdrag fra oppgave 4

De fleste oppgavene er relativt lette med tydelige beskrivelser av hvert steg og/eller henvisninger til verktøy. Oppgave 23 hadde potensiale til å la elevene bryne seg litt og tenke selv, men ødelegger dette ved å legge ved et tips som i realiteten er en ganske detaljert oppskrift på hvordan man løser oppgaven. Oppgave 24 er derimot mye vanskeligere. Her er det ingen tips, så plutselig må elevene tenke selv. Denne oppgaven kan løses på flere måter. I figuren har jeg løst oppgave 24 med en hjelpetrekant og to ulike løsninger. Det er antakelig løsningen med hjelp av ei parallell linje som forfatterne ser for seg at elevene skal bruke, siden det er «parallell linje»-verktøyet som er blitt presentert rett før. Vinkelsum i trekant er i fokus i oppgave 28 som kommer litt senere.



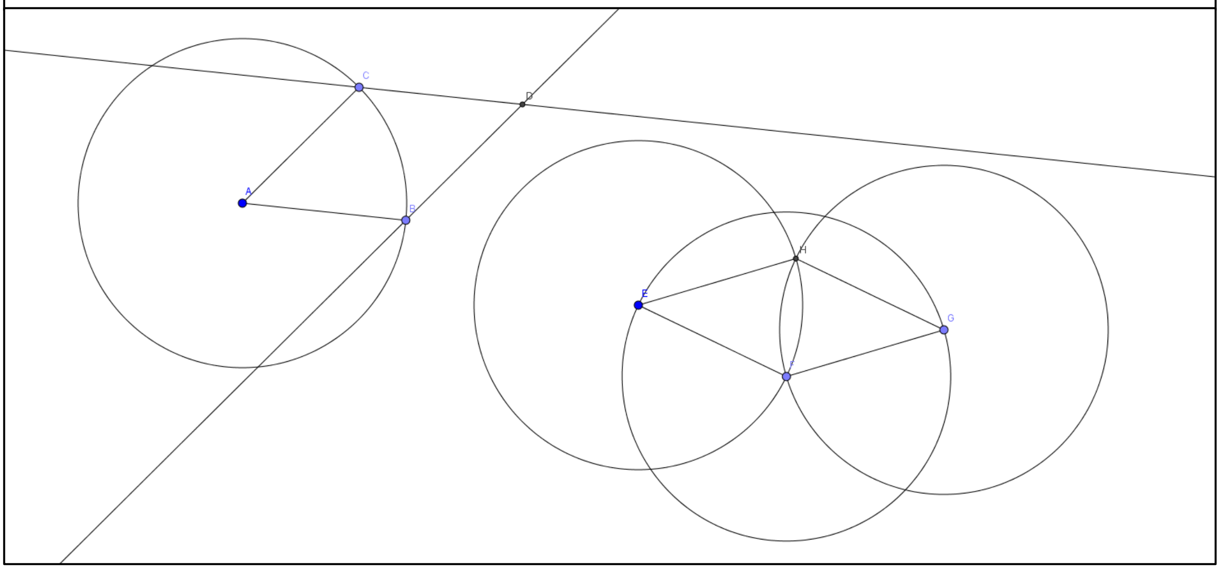
Figur 10: Oppgave 24

Oppgave 40 er interessant fordi den er ei åpen oppgave. Fokuset her er ikke på å gjøre ting riktig eller å finne et fasitsvar. Det er heller et mål om å være nysgjerrig og utforskende. Her kan elevene finne ulike løsninger og løsningsmetoder til oppgaven og oppdage ulike egenskaper til figurene de lager. Ved å dra i punkter og linjer på figurene vil elevene undersøke hvordan figurene henger sammen.

Oppgave 40

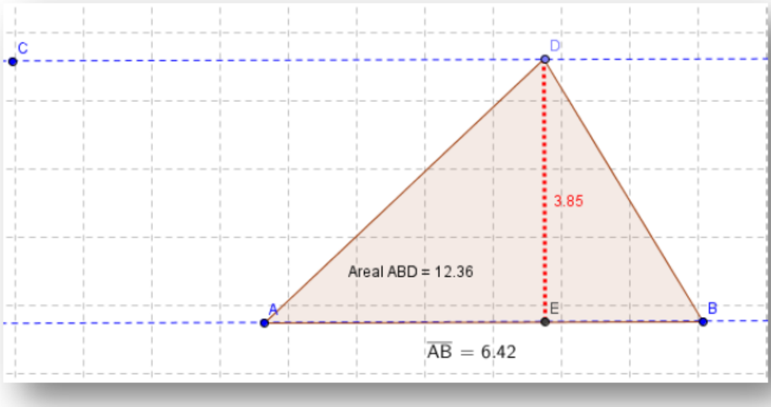
a Tegn to romber som har én side felles. Kan dette gjøres på flere måter, slik at du får ulike figurer?

b Undersøk hva som skjer med rombene om du prøver å flytte på sider og hjørner.



Figur 11: Oppgave 40. To måter å begynne oppgaven på, med parallelle linjer eller kun sirkler

Generelt er oppgavene i opplæringsmateriellet nå mot slutten blitt vanskeligere med mer å gjøre og færre bilder og direkte henvisninger til verktøy.



Flytt punktet *D* fram og tilbake.

a Endrer trekanten form?
b Endrer grunnlinja seg?
c Endrer høyden seg?
d Endrer arealet seg?
e Stemmer arealet GeoGebra beregner med det du regner ut?
f Hva skjer når du flytter *D* til venstre for *A* eller til høyre for *B*?
g Hva er høyden i trekanten nå?

Figur 12: Oppgave 47 - Hvordan figuren ser ut når den er ferdig, og spørsmålene som følger.

Oppgave 47 syntes jeg var interessant. Den begynner med en lang tegneprosess av en trekant, som kan være vanskelig for noen. Det er mange ulike verktøy man må bruke, og endringer på figuren som må gjøres. Alt er tydelig beskrevet slik at flest mulig skal klare oppgaven. Likevel blir elevene bedt om å for eksempel gjøre ei linje usynlig, noe som ikke er beskrevet tydelig tidligere i opplæringsmateriellet, bare nevnt at er mulig, og som dermed kan være helt nytt for eleven. Ellers er oppgaven en fin «test» for hva eleven har lært om bruken av GeoGebra. Etter den lange tegneprosessen kommer oppgaver som vil at eleven skal utforske trekanten ved å flytte frem og tilbake på punktet D, toppunktet til trekanten. Disse oppgavene er ment å skulle være utforskende, at eleven skal få oppdage sammenhenger og egenskaper ved trekanten selv. Dessverre er oppgavene for det meste ja/nei-spørsmål eller andre spørsmål som enkelt kan besvares med få ord. Dermed kan det være lett at eleven bare svarer på spørsmålene for å bli ferdig og for å gå videre til neste oppgave, uten å reflektere over hva som skjer. Her burde det vært minst ett tydelig refleksjonsspørsmål for å utnytte potensialet i oppgaven. Her blir læreren viktig i læringsprosessen, for oppgaven kan i seg selv løses uten særlig grad av læring. Læreren må tenke over hvordan hun vil "tvinge" elevene til å reflektere, siden oppgaven er laget slik at "alle skal få være med" slik at den i seg selv kan være ganske overflatisk. Det kan være lurt å supplere med kontrollspørsmål og åpne spørsmål til elevene når de jobber, og det vil bli viktig med en oppsummering av hva elevene har lært eller funnet ut.

Oppgave 48 er den siste oppgaven i opplæringsmateriellet og den oppgaven jeg selv har slitt mest med. Denne er ganske ulik de andre oppgavene i opplæringsmateriellet. Det blir som en vanskelig overraskelse til slutt. Den er nok ikke tenkt at skal være så vanskelig, men den er veldig sensitiv med tanke på hvilke bokstaver man bruker når man kommer til beregningsdelen av oppgaven. Målet med oppgaven er å se Pytagoras setning visuelt, å se at arealet av de to minste kvadratene er til sammen det største.

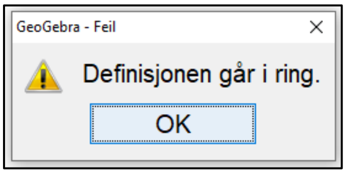
Oppgave 48

Tegn en rettvinklet trekant. Tegn deretter et kvadrat på hver av de tre sidene slik at siden i kvadratet er lik siden i trekanten. Mål arealet av alle kvadratene.
Bruk beregning til å sjekke om det er noen sammenheng mellom størrelsene på kvadratene.
Endre størrelsen på trekanten. Hva skjer med den sammenhengen du fant?

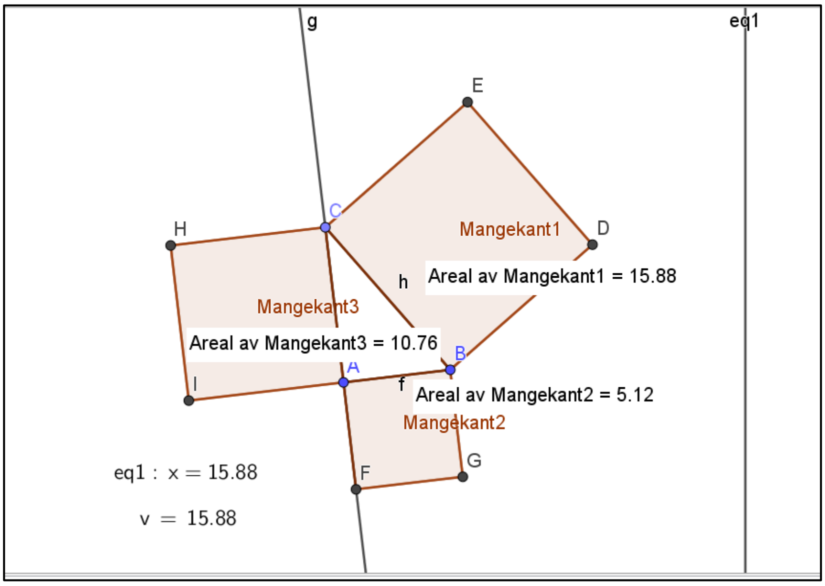
Figur 13: Oppgave 48

Det kan gjerne være vanskelig å skjønne hva oppgaven mener med beregning, og hvordan man skal gjøre det. Da vil det være naturlig å gjøre eksempelet før oppgaven først. Dette eksempelet handler om en sirkel, og å sammenligne lengder (omkrets og radius). Det går gjerne greit å følge eksempelet. Både omkrets og lengde dukker opp i algebrafeltet som tall, og disse kan dermed brukes til å finne forholdet ved å bruke bokstaven f (for forhold).

Her vil jeg vise litt av hvordan jeg har strevd med oppgaven. Eksempelet er gjennomført og jeg føler meg litt klokere og går i gang med oppgaven. Jeg tegner trekanten med tilhørende kvadrater på sidene, og dette går greit. Det går også greit å måle arealet av kvadratene. Så er det beregningen som gjenstår og jeg klør meg i hodet, fordi arealene av mangekantene dukker opp kun som tekst i algebrafeltet, og ikke som tall slik det gjorde med lengdene i eksempelet. Jeg finner fort ut at tekst ikke kan brukes ved beregning. Derimot kan selve mangekantene brukes som tall. Det mest naturlige blir da å bruke f for forhold slik som i eksempelet og skrive inn f=Mangekant2+Mangekant3 og trykke Enter. Da kommer det opp en feilmelding. Dett skjer fordi bokstaven f er brukt som ei av linjene i trekanten og kan dermed ikke brukes til beregning også. Så ser jeg i algebrafeltet og ser om det er en bokstav som ikke er i bruk. Det ser ut som p (for pluss) ikke er brukt og prøver denne. Det kommer på ny en feilmelding. Dette skjer fordi p er ei linje den også, men den viste ikke i algebrafeltet fordi den er et hjelpeobjekt og var usynlig til jeg trykte på knappen som gjør disse synlige (øverst til venstre over algebrafeltet). Jeg må altså bruke en annen bokstav og prøver med x. Dette virker, men jeg har i realiteten lagd ei rett linje (som får navnet eq1) gjennom x-aksen. På ny prøver jeg å finne en egnet bokstav og skriver v=Mangekant2+Mangekant3 og trykker Enter. Endelig går det slik som tenkt. Jeg får v=15.88 som et tall (like stort som arealet av Mangekant1), og kan dra dette over i grafikkfeltet. Oppgaven kan fullføres etter mye slit.



Figur 15: Feilmelding ved bruk av bokstaven f



Figur 14: Løsning på oppgave 48. Med linja x og med tall v

6.1.5 Design av oppgavene

Hvordan oppgavene er designet er egentlig ganske godt beskrevet i de ulike oppgavetypene som er blitt presentert. Men her kommer litt beskrivelse av hvordan bilder og tekst er brukt i opplæringsmateriellet og oppgavene.

6.1.5.1 Bilder

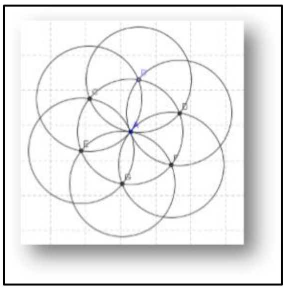
Bilder er brukt aktivt i hele opplæringsmateriellet, både i forklaringer og oppgaver. Alle bildene er funksjonelle bilder, og disse kan deles inn i tre typer.

Figur 16: Utsnitt av programmet

Den første typen er *utsnitt av programmet* for å vise blant annet hvor elevene kan finne verktøy eller menyer for å tegne figurer eller endre på tegningen sin. I figuren til høyre er det et utsnitt som viser hvor elevene kan skru av og på akser. Denne bildetypen er mest brukt i forklaringer og ikke noe særlig i selve oppgavene.

Figur 17: Bilde av verktøy

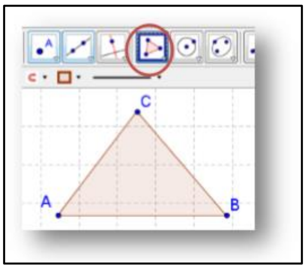
Den andre typen bilder er små *bilder av verktøy* som elevene skal bruke. Dette er mye brukt i oppgavene, men også en del i forklaringer utenom oppgavene. I figuren til høyre ser man hvordan et slikt verkøybilde er brukt i første steg i en forklaring til hvordan elevene skal nedfelle en normal. Dette gjør det lettere å velge riktig verktøy, men det blir vanskelig å lese oppgaven høyt. Det blir ferre slike bilder inni teksten utover mot slutten av opplæringsmateriellet.



Figur 18: Resultatet av oppgaven

Den tredje måten å bruke bilder på er å vise utsnitt av det elevene skal lage, altså *resultatet av oppgaven* eller forklaringen. Bildet til høyre viser hva elevene skal lage i oppgave 2 i opplæringsmateriellet.

Det er også noen ganger at man finner bilder som er en kombinasjon av de ulike bildetypene. Til høyre ser vi hvordan det blir vist hvor elevene kan finne verktøy for mangekant og hvordan en slik mangekant kan se ut.



Figur 19: Kombinasjon av ulike bildetyper

Bilder som er brukt i opplæringsmateriellet har altså alltid en funksjon. Det er ingen bilder som bare er til pynt. De er der for gjøre det enklere for elevene å lære programmet.

Det er 26 oppgaver som har bilder direkte tilknyttet oppgaven. 6 oppgaver har ikke bilder til selve oppgaven, men har en stor fordel av å benytte bildene til forklaringen rett forran. Bare 15 oppgaver har ikke bilder til oppgaven eller er såpass annerledes forklaringen forran at denne bare hjelper på litt av oppgaven.

6.1.5.2 Tekst

Opplæringsmateriellet går skritt for skritt gjennom verktøyene og tegning av ulike figurer i GeoGebra. Dette blir presentert sammen med tilhørende verktøy og eksempler før det kommer tilhørende oppgaver. Det veksler altså mellom nytt stoff, eksempler og oppgaver. Oppgavene er oftest delt inn i to eller tre deloppgaver (a, b, c), men det er også oppgaver med flere deloppgaver og det er hele 16 oppgaver som ikke er delt inn i deloppgaver (altså bare ei deloppgave).

Verbet å tegne er det enkeltordet som forekommer oftest av de ordene jeg har undersøkt. Jeg har funnet ut at det er brukt 53 ganger i oppgavene. I oppgavene blir ikke ordene konstruksjon eller konstruere brukt. Ordet figur blir brukt seks ganger i oppgavene, og tegning blir brukt to ganger. Det er ikke noe fokus på at elevene skal lære å konstruere på GeoGebra på samme måte som på papir, og dette gjenspeiles i ordbruken. Elevene skal altså lære å *tegne* figurer med de verktøyene som er mulig, og at konstruksjon med passer og linjal skal foregå på papir.

Dersom man ser på hvor ofte disse ordene forekommer i hele opplæringsmateriellet (utenom ord i innholdslista siden disse kommer igjen i overskriftene) og ikke bare i selve oppgavene vil man få Tabell 4. Variantene i kursiv er med i totalsummen for ordet, men har også fått sin egen sum i kursiv, for å lettere se hvor stor del av variantene disse utgjør.

Ord	Antall ganger i opplæringsmateriellet
Tegn(e)(er)(es)(et)*(eflaten)*	143 *(2)*
Konstruer(e)(er)	4
Figur(en)(er)(ene)	14
Tegning(en)*(geometri-er)*	6 *(1)*
Konstruksjon*(skryss)*	2 *(2)*

Tabell 4: Hvor ofte ulike ord forekommer i opplæringsmateriellet til Nummer 8

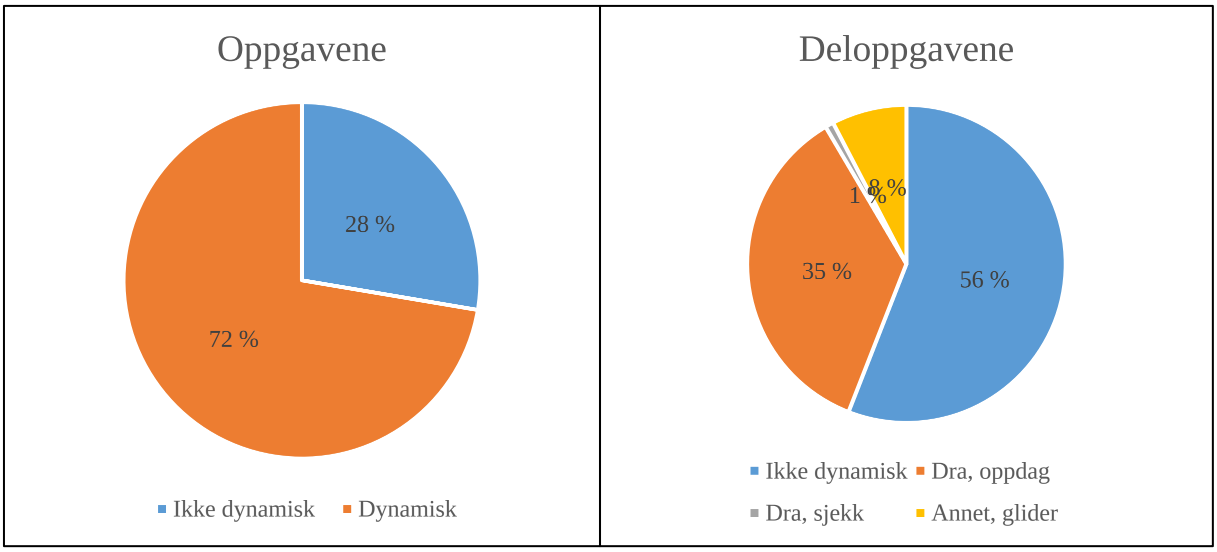
Igjen blir det tydelig at det er å tegne som er i fokus i opplæringsmateriellet.

6.1.6 Dynamisk geometriprogram

I denne delen kommer analysen av Nummer 8 til de fire delene «dynamisk», «annerledes passer og linjal», «guide og begrensninger til verktøybruk» og til slutt «opplæring i hva?»

6.1.6.1 Dynamisk

Det er 52 deloppgaver som har noe dynamisk ved seg. Dette utgjør 44% av alle deloppgavene i opplæringsmateriellet. Ser man på hvor mange oppgaver som har ei eller flere dynamiske



Figur 20: Fordeling av dynamiske oppgaver og deloppgaver hos Nummer 8

deloppgaver, så er det altså noe dynamisk med 72% av oppgavene. Dette er en ganske stor del av oppgavene i opplæringsmateriellet og det er tydelig at det har vært et fokus for forfatterne at de fleste oppgavene skal ha noe dynamisk ved seg. De fleste oppgavene som er dynamiske er det på den måten at elevene blir bedt om å dra i noe for å oppdage noe. 36% av deloppgavene er i denne kategorien. Det er kun ei deloppgave, altså mindre enn 1% av deloppgavene, som ber elevene om å dra i figuren for å sjekke om den fortsatt beholder egenskapene sine. Så er det 8% av deloppgavene som er dynamiske på en annen måte, slik som blant annet bruk av glider.

6.1.6.2 Annerledes passer og linjal

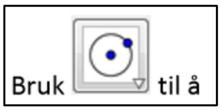
Det er 87% av oppgavene som helt eller delvis ikke kan løses på papir. Mange av disse kan ikke løses på papir fordi ei eller flere av deloppgavene er dynamiske. Selv om noen av deloppgavene til disse kan løses på papir, så er det en så sterk sammenheng med de dynamiske deloppgavene at oppgaven totalt sett ikke går an å løses på papir. Mange oppgaver har også bilder av verktøy fra GeoGebra eller andre henvisninger til programmet. Det er bare fem av oppgavene som direkte kan løses på papir med den teksten som er brukt og ei sjette som kan løses på papir dersom man bytter ut ordet «vindu» med «ark». Disse oppgavene bruker gjerne ordet «tegn» slik at på papir vil det dermed være mulig å bruke gradskive i tillegg til passer og linjal.

En ting som i mange oppgaver er annerledes er at oppgavene legger opp til at elevene skal få en annerledes forståelse av programmet og matematikken når de får gjort oppgaver som er dynamiske. Dette går igjen i veldig mange oppgaver. Her er det en del oppgaver som også fokuserer på at elevene skal lære hvordan programmet virker og fungerer og hvordan det dynamiske er integrert. Noen ganger blir det utnyttet at programmet er mer nøyaktig enn å tegne for hånd. Så er det også det at man utnytter hurtigheten til programmet og i tillegg at man kan få prøvd flere figurer på en gang. Altså for å gi et eksempel, i stedet for å tegne fire trekanter med ulike mål på vinkel α på papir, så kan man tegne en trekant i GeoGebra og bare dra i et punkt og endre denne vinkelen på denne måten, som er mye raskere siden man slipper å tegne alle fire trekantene fra bunnen av. Det er også noen oppgaver som presenterer og bruker snarveier og hurtigtaster i programmet og lærer elevene dette.

6.1.6.3 Guide og begrensninger til verktøybruk

Det er for det meste tydelig beskrevet hvilke verktøy elevene skal bruke. I starten av opplæringsmateriellet er det veldig tydelig, og så blir det litt mer opp til eleven selv å huske hvor de ulike verktøyene er etter hvert. I begynnelsen av opplæringsmateriellet er det gjerne markert med et bilde av verktøyet som elevene skal bruke. Så går det over til en detaljert guide med ord. På slutten av opplæringsmateriellet finner man flere oppgaver der elevene må huske mer selv. Det er glidende overganger mellom disse måtene å presentere oppgaver på, men det er en tydelig progresjon i løpet av opplæringsmateriellet til hva man forventer at elevene skal klare selv.

Det er aldri en begrensning til hvilke verktøy elevene får bruke, på den måten at noen verktøy ikke er lov å bruke i noen oppgaver. Elevene får altså bruke alle tilgjengelige verktøy til enhver tid.



Figur 21: Eksempel på verktøyhenvisning i ei oppgave

Jeg har sett på hvordan det er blitt brukt direkte henvisninger til verktøy i oppgavene. Her er det hovedsakelig et bilde av verktøyet som er blitt brukt inni og som en del av teksten. Jeg har også sett navnet på verktøyet bli brukt i fet tekst, men dette blir oftere brukt i tillegg til bilde i forklarende tekst eller eksempler utenom oppgavene. Det er 43 slike direkte verktøyhenvisninger i oppgavene. Fordeler man det på de 47 analyserte oppgavene så blir det nesten en gang på hver, eller 0,91 for å være nøyaktig.

Men disse henvisningene er ujevnt fordelt, og dersom man deler oppgavene i tre og sammenligner, så blir det tydeligere hvordan de er fordelt. Man kan se i tabellen til høyre at disse direkte henvisningene preger de to første tredelene av opplæringsmateriellet, men så blir de nesten fraværende i siste del av oppgavene i opplæringsmateriellet.

	Antall	På hver
16 første	19	1,19
15 midterste	20	1,33
16 siste	4	0,25

Tabell 5: Fordeling av verktøyhenvisninger i oppgavene fordelt på tre deler

Hvordan oppgavene og deloppgavene er fordelt i forhold til hvor mye guide elevene får i oppgavene kan man se i tabellen under.

	Direkte guide	Hull i guiden	Spørsmål
Antall deloppgaver	80 (68%)	31 (26%)	7 (6%)
	Direkte guide	Hull i guiden	Blanding
Antall oppgaver	26 (55%)	14 (30%)	7 (15%)

Tabell 6: Guide i oppgavene og deloppgavene til Nummer 8

Man ser at det er veldig mange deloppgaver med «direkte guide». Omtrent to tredjedeler av deloppgavene er i denne kategorien. Elevene blir altså ledet gjennom de fleste oppgaver uten å måtte vurdere hvilke verktøy som er passende, eller om de må bruke flere verktøy enn det som er åpenbart. Det er bare å gjøre det som står at skal gjøres i den rekkefølgen det står. Det er gjerne brukt korte setninger, slik at det ikke er nødvendig å lese hele deloppgava en gang, før man går i gang med å tegne med GeoGebra. Dersom man går opp på oppgavenivå ser man at «direkte guide» oppgavene er dominerende her også. Det er fortsatt over halvparten av oppgavene som er av denne typen. Man kan se at det bare er sju oppgaver som er en blanding av de to andre typene oppgaver. Det ville vært lett å tenke at denne kategorien skulle vært større, siden det skal bare ei deloppgave (sett bort i fra spørsmålene) som skiller seg ut fra de andre for å komme her i denne kategorien. Dette har også sammenheng med at de oppgavene som er i kategorien «hull i guiden» ofte ikke er delt inn i deloppgaver, men ofte er bare ei enkelt deloppgave. 12 av de 14 oppgavene som er i oppgavekategorien «hull i guiden» er slike oppgaver som ikke er delt inn i deloppgaver. For å sammenligne med de 26 oppgavene med «direkte guide», så er det bare fire av disse som er uten deloppgaver. Det er altså en sammenheng mellom hvor detaljert guiden er med hvordan oppgavene er delt inn i deloppgaver.

6.1.6.4 Opplæring i hva?

Opplæringsmateriellet er jo et kurshefte med et mål om å lære elevene å bruke GeoGebra, altså en programopplæring i GeoGebra. Dette ser man tydelig at det er, og at oppgavene gradvis utvikler seg i takt med hva elevene lærer. Det er også en del fokus på å lære hvordan programmet oppfører seg og hvordan figurer reagerer på samspillet med «flytt»-pila. Samtidig så lærer elevene matematikk, og det er gjerne matematiske sammenhenger og egenskaper til figurer. Opplæringsmateriellet er sterkt knyttet til programmet GeoGebra med spesielt bilder (verktøy, skjermbilder, menyer, osv.) og også en del tekst (hurtigtaster, verktøy, menyvalg, osv.). Samtidig er det noen oppgaver som er mer nøytrale i utformingen og ordvalget og som antakelig vil kunne gjøres med andre dynamiske geometriprogram også. Det er flest av disse nøytrale oppgavene på slutten av opplæringsmateriellet. Så kan man se i tabellen at det også er noen oppgaver som kan gjøres på papir også, og disse ligner gjerne på oppgaver elevene antakelig tidligere har gjort på papir, men nå får gjøre på data også.

	Tilknyttet GeoGebra	Må bruke et passende dataprogram	Kan gjøres på papir
Antall oppgaver	28	12	7

Tabell 7: Fordeling av oppgaver: GeoGebra, dataprogram eller papir

6.1.7 Læringspotensial

I denne delen kommer analysen av Nummer 8 til de fire delene «vanskelighetsgrad», «læreren», «læringsmiljø» og «syn på læring».

6.1.7.1 Vanskelighetsgrad

Når jeg analyserer med tanke på vanskelighetsgrad, er det først antall krevde operasjoner jeg har sett på og vil presentere. Antall krevde operasjoner er jo, som jeg har forklart i kapittelet om analyseverktøyet, hvor mange algoritmer og verktøy som må brukes for å løse oppgavene. Deloppgavene er analysert hver for seg, og er det noe som må gjøres før oppgave a, så er det regnet som en egen deloppgave, men det forekommer bare et par ganger i opplæringsmateriellet. Det jeg ser er at 55% av oppgavene kan løses med få operasjoner, altså null eller en operasjon. Så er det 22% av oppgavene som kan løses med noen operasjoner, altså to til tre operasjoner. Til slutt er det 23% av oppgavene som krever mange operasjoner, altså fire eller flere operasjoner. Jeg legger også merke til at det er jevnt over ganske blanda hvor i opplæringsmateriellet det kreves få, noen eller mange operasjoner. Det er altså ingen tydelig opphopning av kategoriene noe sted, da mener jeg begynnelsen, midten eller slutten av opplæringsmateriellet, men dette er likevel ikke hele sannheten, og jeg sier mer om dette snart. Det jeg først legger merke til er at det ofte kreves flere operasjoner hos a-oppgavene enn de påfølgende deloppgavene. Dette har den naturlige forklaring at a-oppgavene ofte ber elevene om å tegne noe med programmet, som dermed krever flere operasjoner, og at de påfølgende oppgavene oftere ber elevene om å flytte på objekter med pila eller å svare på spørsmål. En annen ting jeg legger merke til når jeg ser nærmere på de oppgavene med mange operasjoner, altså fire eller flere, er at det er en økning av disse utover i opplæringsmateriellet. Det er fem slike deloppgaver blant den første tredelen av oppgavene og 12 slike deloppgaver blant den siste tredelen av oppgavene. I den første delen av opplæringsmateriellet der jeg finner fem slike oppgaver, så ser jeg også at fire av disse er av oppgavetypen «tegneoppgave» som jeg har presentert i kapittel 6.1.1. Det blir dermed brukt mange verktøy selv om oppgavene er ganske enkle.

Så ser jeg på vanskelighetsgrad i forhold til kognitive prosesser. Det jeg finner ut her er at det er 50% av oppgavene som kan løses på nederste trinn, 36% av oppgavene kan løses på mellomste trinn og 14% kan løses på øverste trinn. Det var mange oppgaver som var vanskelig å plassere entydig i en kategori, og som hadde mulige elementer fra flere kategorier. Men det som var tydelig i opplæringsmateriellet, var en tydelig progresjon i vanskelighetsgrad utover i opplæringsmateriellet. Opplæringsmateriellet begynner med flest oppgaver på lavt nivå i kognitiv vanskelighetsgrad, så blir det etter hvert flere som krever middels nivå i midten av opplæringsmateriellet og på slutten av opplæringsmateriellet er det noen som har det høyeste nivået av vanskelighetsgrad. Dette passer godt med oppgavetypene jeg har beskrevet tidligere. Oppgavetypen «tegn figur - bruk pil - hva skjer» er gjerne av de enklere oppgavene i begynnelsen av opplæringsmateriellet, så overtar oppgavetypen «presentasjon –

bruk – oppdag» som gjerne er litt mer utfordrende, og mot slutten av opplæringsmateriellet kommer de oppgavene som er vanskeligst. Selv om oppgavene blir mer utfordrende etter hvert i opplæringsmateriellet, er det likevel oppgaver som er lettere innimellom.

Det jeg har sett her er at det ikke er noen tydelig sammenheng mellom antall operasjoner og kognitiv vanskelighetsgrad på oppgavene. Likevel er det tydelig at det blir vanskeligere utover i opplæringsmateriellet med flest av oppgavene med mange operasjoner og høyt kognitivt nivå på slutten av opplæringsmateriellet.

6.1.7.2 Læreren

Nå vil jeg se litt på hva læreren må tenke på under forberedelsen av opplæringsmateriellet. Jeg vil svare på spørsmålene jeg har stilt i analyseverktøyet, men ikke nødvendigvis i samme rekkefølge. Jeg har funnet lærerveiledning til boka, men ikke til selve kursheftet, eller verktøyopplæringen som opplæringsmateriellet kalles. Opplæringsmateriellet ligger fritt ute på internett slik at det er lett tilgjengelig for elevene både på skolen og hjemme. Man finner det på lokus.no/open/nummer og så velger man klassetrinn og så GeoGebra. Her må læreren vurdere hva som er mest hensiktsmessig for sine egne elever, med tanke på å skrive ut opplæringsmateriellet til elevene eller å kun ha opplæringsmateriellet digitalt. Verktøyopplæringen er detaljert slik at det vil være enkelt også for lærere som ikke kjenner GeoGebra så godt fra før av eller som har glemt en del siden sist. Disse kan dermed få god oversikt ved å bruke opplæringsmateriellet for sin egen del før de presenterer det for elevene. Innholdsfortegnelsen kan også være grei å bruke dersom man leter etter hvordan man bruker et spesifikt verktøy eller lignende. Opplæringsmateriellet er stort og vil kreve god tid for å gjennomføre hele opplæringsmateriellet. Det vil derfor være opp til læreren å velge ut det viktigste å gjøre på skolen. Siden opplæringsmateriellet er såpass detaljert er det mulig for læreren å gi elevene deler av det som hjemmelekse. Det er variasjon i oppgavene da noen er enkle og korte og lett å gjennomføre, andre er utforskende og undrende og tar lenger tid. Det er noe lett og noe vanskelig. Det er oppgaver som har fokus på å oppdage og utforske sammenhenger i matematikk, gjerne ved å be elevene dra i hjørner for å se hvordan ting henger sammen.

Det er ingen ekstra filer å forberede eller annet tilleggsutstyr utenom oppgave 13, der elevene skal øve på å skrive ut det de har tegnet og dermed trenger en printer. Elevene trenger altså, utenom denne ene oppgaven, bare opplæringsmateriellet enten på papir eller digitalt og programmet GeoGebra. I tillegg til oppgavene som er i opplæringsmateriellet så er det henvisninger til oppgaver i læreboka Nummer 8. Dette kan være nyttig for de som bruker dette læreverket, men er ikke nødvendig med tanke på godt utbytte av kurset.

Siste oppgave i opplæringsmateriellet er annerledes enn de andre og ganske vanskelig å få til. Det er lurt at læreren er klar over dette og kan tilpasse og forklare. Det er også andre oppgaver i opplæringsmateriellet som er såpass vanskelige at det vil være lurt om læreren har prøvd oppgaven selv på forhånd.

Ordet tegning blir brukt i opplæringsmateriellet, og ordet konstruksjon blir ikke brukt annet enn i sammenhengen konstruksjonskryss. Opplæringsmateriellet legger altså opp til å tegne, og at alle verktøy dermed alltid er tillatt. Det blir ikke forklart i opplæringsmateriellet forskjellen på å tegne og å konstruere, så det er viktig at læreren selv forklarer dette og er klar på den forskjellen i samtalene med elevene.

Mange av oppgavene gir fine muligheter for å snakke om ulike egenskaper til for eksempel midtnormaler, halveringslinjer, vinkelsum i trekanter og mer. Det er også mange oppgaver der det vil være lurt å ha en oppsummering av hva elevene har funnet ut og oppdaget. Dersom elevene er nysgjerrige og læreren gjerne stiller oppfølgingsspørsmål, så kan elevene jobbe lenge og grundig med flere av oppgavene.

6.1.7.3 Læringsmiljø

Nå vil jeg presentere det jeg har funnet ut om oppgavene i forhold til hvor de kan plasseres i Skovsmoses læringsmiljøtabell. Jeg har prøvd å se etter om oppgavene er tradisjonelle med entydig fasitsvar eller om noen kan kategoriseres som undersøkelseslandskap. Jeg har også sett om oppgavene bruker reelle anvendelser av matematikken eller om det er ren matematikk eller mellomtingen «semi»- anvendelser. Jeg har skrevet mer om dette i teorikapittelet, men har tatt med læringsmiljøtabellen her for å lette lesinga.

	Tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar	Undersøkelseslandskaper
"Ren" matematikk, uten noen praktisk anvendelse	(1)	(2)
"Semi"-anvendelser av matematikken	(3)	(4)
Ekte, reelle anvendelser av matematikken	(5)	(6)

Tabell 8: Seks typer matematisk læringsmiljø

Kategori 1 inneholder de oppgavene som er tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar og som inneholder «ren» matematikk uten noen praktisk anvendelse. De aller fleste oppgavene i kursheftet til Nummer 8 kan plasseres i denne kategorien. Likevel er det mange som ikke passer helt inn her likevel. De er nemlig ikke helt tradisjonelle selv om de fleste kan sies å ha et tydelig fasitsvar. Det er tydelig hva oppgavene vil at elevene skal finne ut, og det er gjerne detaljert forklart. Likevel er det en utforsking i oppgavene når de ber elevene bruke pila for å se hva som skjer. En styrt utforsking kan man gjerne kalle det. Kanskje «semi»-undersøkelseslandskap kunne vært et ord som hadde passet? Veldig mange av oppgavene har en slik styrt utforskning. Det er på en måte som om oppgavene ligger og vipper og bare venter på å bli jobbet med for å se i hvilken kategori de faller. Læreren vil kunne være med og påvirke utfallet her. Det er en god del potensiale her, men jeg ser at det er en fare for å ikke ta seg tid til det når det er så mange oppgaver i opplæringsmateriellet. Det vil være fristende for elevene å gjøre oppgavene fort, for så å gå videre til neste oppgave uten å tenke så mye på hva man egentlig finner ut.

I den første analysen av oppgavene kategoriserte jeg 22 deloppgaver i kategorien 1+. Dette var oppgaver jeg var litt usikker på om jeg skulle plassere i kategori en eller to. De passet ikke helt i noen av disse. Det var oppgaver som har potensiale til begge kategorier alt ettersom hva elever og lærere gjør i praksis. Dette var gjerne oppgaver der man må bruke pila for å svare på spørsmål eller oppgaver med annet potensial for utforsking eller utviding av oppgaven. Disse 22 deloppgavene utgjør 19% av deloppgavene, og på oppgavenivå blir det 43% av oppgavene. Ved analysen av opplæringsmateriellet til Maximum går jeg gjennom oppgavene med en «snill» bedømming av om de har et potensiale til å være litt mer åpne eller å bli et undersøkelseslandskap. Oppgavene i disse to opplæringsmateriellene er lagd på ulike måter med ulik stil, men jeg gjør en «snill» vurdering av oppgavene til Nummer også. I denne «snille» gjennomgangen finner jeg potensiale i 34 av 47 oppgaver som utgjør 72% av oppgavene.

Det som er tydelig med oppgavene i opplæringsmateriellet er at de vil at elevene skal få en sterk vane med å bruke pila for å dra i punkter og linjer i figurene de lager. De vil at elevene skal gjøre dette for å undersøke figurene. Det kan være for å undersøke egenskaper til figurer, hvordan den henger sammen, om den beholder egenskapene den opprinnelig hadde eller endrer disse og mer. Selv om oppgavene i opplæringsmateriellet for det meste er ganske styrt i utforskingen, så vil elevene forhåpentligvis få en vane med å bruke pila og kan bruke dette på andre oppgaver de får på et senere tidspunkt.

Oppgave 24 som jeg har presentert tidligere har jeg funnet to måter å løse på. Dette kan være ei oppgave som kan åpne opp for mer enn bare det som oppgaveteksten spør om. Hvor mange løsningsmetoder klarer elevene å finne? Hvilke trekanter kan løses ved hjelp av disse metodene? Dette er noen tilleggsspørsmål som kan stilles for å gå dypere inn i oppgaven og inn i et undersøkelseslandskap.

Oppgavene inneholder ren matematikk eller ren programopplæring. Men det er to oppgaver som inneholder «semi»-anvendelser av matematikken. Dette er to oppgaver der elevene skal tegne et hus og snømann. I tillegg i disse oppgavene er målet programopplæring med forstørring og forminskning og i tillegg øve på å skrive ut. Denne oppgaven der elevene skal skrive ut er det mest reelle elevene skal gjøre, men dette har lite med matematikk å gjøre.

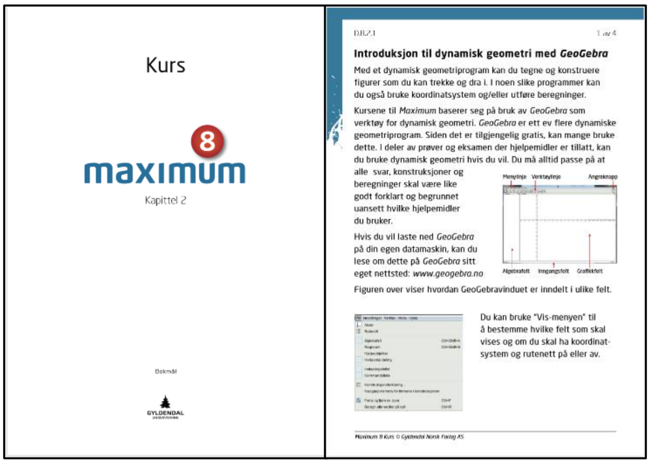
6.1.7.4 Syn på læring

Dersom jeg ser på opplæringsmateriellet fra et sosiokulturelt læringsperspektiv så virker det ganske fraværende i seg selv. Jeg ser at det er ingen samarbeidsoppgaver i opplæringsmateriellet, og det er heller ikke «bruk for» læreren, i den forstand at opplæringsmateriellet er så detaljert og selvforklarende at elevene fint kan jobbe selvstendig med det. Det vil likevel være lett for læreren å be elevene samarbeide om oppgaver, sammenligne svar og ha en felles dialog i klasserommet. Ser jeg derimot på opplæringsmateriellet fra et konstruktivistisk perspektiv så ser jeg flere ting. Det er laget oppgaver som skal få elevene til å være aktive med pila for å undersøke figurene, og som prøver å vekke elevenes nysgjerrighet og undring. Opplæringsmateriellet kan også jobbes med selvstendig slik at eleven kan få fordype seg i eget tempo og lære av å gjøre tingene selv, men med tydelig veiledning fra opplæringsmateriellet. For meg virker det dermed som at opplæringsmateriellet er mest laget ut fra et konstruktivistisk perspektiv, men at læreren enkelt kan tilpasse undervisningen til et sosiokulturelt læringsperspektiv.

Når jeg ser på om det er lagt opp til induktiv eller deduktiv metode i opplæringsmateriellet legger jeg merke til at det gjerne er brukt begge deler i oppgavene, men med ulikt formål. Her tar jeg som et eksempel utgangspunkt i oppgavene 6, 7 og 8 som handler om linjer, der oppgave 6 er presentert tidligere. Det blir brukt deduktiv metode i forhold til selve verktøyopplæringen. Gjennom først å presentere verktøyet og hvordan dette brukes, så skal elevene bruke det selv etterpå, slik som i oppgave 6a. Etterpå går oppgavens fokus over på at elevene skal få erfare hvordan programmet henger sammen, og programmets reaksjon på elevenes interaksjon. For elevene er programmet som en black-box, de vet ikke hva som skjer og hvordan det oppfører seg, men gjennom disse oppgavene får elevene erfaring og observerer ting som gjør at det blir litt mer white-box. Her prøver oppgavene å legge opp til en induktiv metode der elevene skal få erfaring med hvordan programmet oppfører seg med ulike eksempler fra denne og de neste oppgavene. Det legges opp til at elevene skal se og observere og svare på enkle spørsmål om dette. Det er likevel ikke slik at elevene skal finne en generell regel eller formulere hvorfor ting skjer sånn som de gjør. Det kan være en ide at læreren ber elevene samarbeide og forklare til hverandre, eller felles har en oppsummering og gjennomgang i klassen etter at elevene har jobbet med oppgavene 6, 7 og 8. Det er også brukt induktiv metode på å finne ut matematiske regler. Oppgave 17 er ei slik oppgave. Den begynner med oppgave a, der elevene skal tegne en figur. Så i oppgave b, c og d får elevene konkrete erfaringer med sammenhenger på denne dynamiske figuren, og til slutt i oppgave e skal elevene formulere en generell regel for matematikken som de nettopp har observert.

6.2 Maximum 8

Dette er et kurshefte som hører til læreverket Maximum 8. Det er et kurshefte på 18 sider fordelt på fem tema. De fem temaene er introduksjon til dynamisk geometri, tegne og måle, konstruksjon, symmetri og koordinatsystemet. Disse fem temaene finner man også igjen i kapittel 2 om geometri i grunnboka. I grunnboka og i oppgaveboka i læreverket finner man også flere oppgaver som skal gjøres med dynamisk geometriprogram.



Figur 22: De to første sidene i kursheftet til Maximum 8

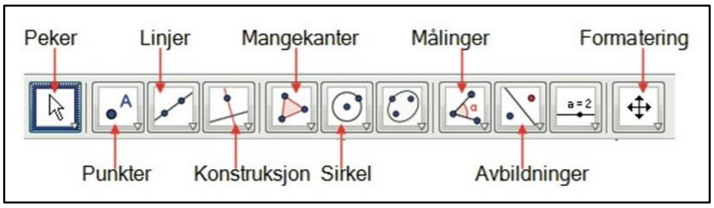
Opplæringsmateriellet forutsetter matematisk kunnskap hos elevene, det vil si at de kan konstruere og tegne trekanter og firkanter på papir. Læreren kan gjerne hjelpe til ved å tegne hjelpetrekanter på tavla sammen med elevene før konstruksjonen på GeoGebra. Dette kan hjelpe elever som fortsatt er usikre på konstruksjon på papir til å konsentrere seg om å lære programmet i denne omgang. Det er også klart at opplæringsmateriellet forutsetter at læreren kan programmet selv og ikke er usikker på dette, men har nok kunnskap selv til å kunne veilede elevene.

En ting som jeg legger merke til, er at jeg har en nyere variant av GeoGebra enn hva opplæringsmateriellet presenterer. Det står ikke hvilken variant av GeoGebra som opplæringsmateriellet er basert på, men jeg vil tro det kan være GeoGebra 4 (4.0, 4.2 eller 4.4). Jeg har selv brukt GeoGebra Classic 5 som er mest lik denne av de to variantene man nå kan laste ned på geogebra.org (GeoGebra Classic 5 og GeoGebra Classic 6). Det er ikke store forskjeller, men noen menyer og plassering av noen ting er endret. For eksempel hvor man skrur av og på akser og rutenett.

Først presenterer jeg interessante funn og oppgaver under hver av de fem temaene. Etterpå presenterer jeg funn jeg har gjort ved bruk av analyseverktøyet.

6.2.1 Introduksjon til dynamisk geometri med GeoGebra

Elevene blir bedt om å bruke spesifikke verktøy for å lage figurene i de to oppgavene. Det er heller ikke mer enn ett verktøy per deloppgave. Dermed er det ikke noe spesielt vanskelig med oppgavene. Men det jeg legger merke til, og som potensielt kan være en utfordring for noen elever, er at det er ingen forklaring på hvor



Figur 23: Bilde av verktøyene

man finner de spesifikke verktøyene. Det legges opp til at elevene selv må lete litt etter verktøyene i de ulike verktøylistene, og på den måten også bli litt kjent med programmet. Det er et bilde i introduksjonsteksten som elevene kan benytte som tips til hvor de kan finne verktøyene. I figur 23 ser man bildet av verktøyene som elevene ser i opplæringsmateriellet, og som kan brukes som et hint til å finne fram. Så når elevene blir bedt om å bruke verktøyet «Regulær mangekant» kan de se at det kan være lurt å se etter dette verktøyet under verktøylista til «Mangekanter», og når de blir bedt om å bruke verktøyet «Midtpunkt» vil det tilsvarende være naturlig å lete under verktøylista til «Punkter». Dette er altså en rimelig kort introduksjon som legger opp til at elevene skal lete seg litt fram selv og at det ikke blir veldig detaljerte beskrivelser for hvert verktøy som skal brukes.

6.2.2 Tegne og måle med GeoGebra

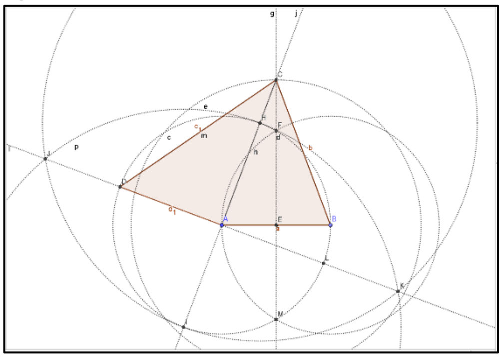
Her blir det først lagt vekt på at det er forskjell på å tegne og å konstruere. Så blir elevene presentert for ei liste med verktøy som er aktuelle å bruke ved tegning av figurer. Det blir også sagt at det kan være lurt å endre navn på punkter for å få riktige navn på figuren til slutt, men det blir ikke forklart hvordan elevene skal gjøre det. Dette må læreren være forberedt på at elevene lurer på. De fleste oppgavene her er oppgaver som elevene vil kjenne igjen fra vanlig undervisning med papir og blyant. Det er ikke noe spesielt som tilsier bruk av dynamisk geometriprogram før de to siste oppgavene her. I de to siste oppgavene blir man nemlig på slutten av oppgaven bedt om å endre på figuren man har laget for å finne svar på et oppdagelsesspørsmål. I introduksjonsoppgaven og oppgave G.2.4 kan det være en fordel om læreren oppmuntrer elevene til å dra i punkter på figurene for å se om de fortsatt er riktig laget.

6.2.3 Konstruksjon med GeoGebra

Det blir igjen forklart at det er forskjell på å tegne og å konstruere, og at det er mange verktøy i GeoGebra som bare er lov å bruke ved tegning, men ikke konstruksjon. Så blir det presentert ei liste med verktøy som er lov å bruke ved konstruksjon, basert på punkter, linjer og sirkler. Det blir foreslått og vist hvordan man kan endre utseende på hjelpelinjer og hjelpesirkler ved å endre farge eller linjestil på disse, for å få en bedre oversikt når man konstruerer. Konstruksjonsforklaring blir også forklart hvordan man finner.

Jeg følger beskrivelsen til eksempeloppgaven og finner en feil (med sentrum i A står det, men det må være B) i det andre punktet, som gjør at konstruksjonen blir feil. Jeg retter feilen og prøver på nytt, og nå går det greit. Det som jeg legger merke til er at det er slike småfeil flere steder i opplæringsmateriellet, dette er altså ikke første feilen, men en viktig feil siden det påvirker hele konstruksjonen og ikke bare er en bokstav i et ord som mangler. På slutten av eksempeloppgaven er det forklart hvordan man gir nytt navn til punkt. Det skulle jo elevene gjøre i «tegne og måle»-delen av opplæringsmateriellet også, men der var det ingen forklaring. Dette, i tillegg til nummereringen av oppgavene, kan tyde på at det har blitt byttet om på rekkefølgen av de to delene uten at det har blitt endret noe i teksten etterpå.

Eksempeloppgaven og oppgaven G.2.3 som hører til dette temaet, er begge oppgaver som krever at eleven kan en del om konstruksjon fra før av, og at eleven kan konstruere trekanter og firkanter og er trygg på det på papir. Elever som er usikre kan gjerne konstruere oppgavene på papir først, slik at det bare blir bruken av programmet som blir hovedutfordringen etterpå. Det blir mange konstruksjonssirkler som kan være forvirrende for elevene, da elevene gjerne bare er vant til konstruksjonskryss på papir, og ikke hele sirkler. På slutten av oppgaven blir elevene bedt om å gjøre alle hjelpelinjer stiplet, men kanskje kan det være lettere om de blir gjort stiplet underveis etter bruk. I figuren til høyre er min løsning av oppgaven, og man kan se alle sirklene som er brukt i konstruksjonen. Noen er også brukt flere ganger, slik at en del elever vil ende opp med mange flere sirkler enn meg, og det kan bli ganske forvirrende.



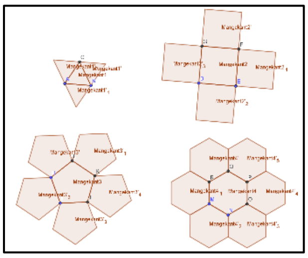
Figur 24: Løsning oppgave G.2.3

6.2.4 Symmetri med GeoGebra

Innledningsvis for dette temaet blir de tre hovedtypene for symmetri presentert, nemlig speilsymmetri, rotasjon og parallellforskyvning. Alle tre blir hver for seg presentert videre med verktøyforklaring, eksempler og oppgaver.

Den første oppgava om speilsymmetri (oppgave G.2.7) er ei oppgave som oppmuntrer til at elevene skal få prøve å forandre på figuren for å se hva som skjer. Det er ei dynamisk oppgave siden elevene må bruke pekeverktøyet for å endre på figuren. Spørsmålene gjør også at elevene får prøvd ut litt hvordan programmet virker, de får oppdage ting ved GeoGebra. Det går nemlig an å endre på den opprinnelige figuren og avbildningen endres tilsvarende, men dersom man prøver å endre på avbildningen, så er programmet slik at det ikke går an å gjøre det. Avbildningen er altså fast, og endres kun ved å endre på originalen.

Den andre oppgava om speilsymmetri (oppgave G.2.8) utnytter programmets effektivitet til å utforske matematikken. Den første deloppgaven brukes til å tegne fire regulære mangekanter som speiles om sine egne sidekanter. Dette går fort, nøyaktig og effektivt med programmet, i motsetning til om man skulle gjort det på papir. I de to neste deloppgavene er det spørsmål til figurene som er laget og som legger opp til at elevene skal få oppdage og tenke på matematikken. Her er matematikken i fokus og den siste deloppgava kan også være en inngang til et undersøkelseslandskap. Oppgaven er undersøkende, ved at elevene skal finne en forklaring, og kan enkelt utvides til å ønske å finne ut enda mer med for eksempel spørsmål som «hva med en sjukant?».



Figur 25: Oppgave G.2.8

De to neste oppgavene om rotasjon har et litt preg av å «øve på programmet og gå videre». Dette er oppgaver uten noen form for spørsmål eller refleksjon. Den andre av disse (oppgave G.2.10) har potensiale til å være litt dynamisk. Det står at elevene skal bruke rotasjon "til å lage et mønster". Dette kan elevene tolke ulikt. Noen vil være ferdige med en gang, og det er altså ingenting dynamisk med oppgaven. Andre vil dra i hjørner for å lage en fin eller spennende figur, og oppgaven har dermed blitt tolket til å være dynamisk.

Oppgava om parallellforskyvning (oppgave G.2.11) synest jeg at har en fin balanse mellom å lære og øve på å bruke GeoGebra, men også å lære eller utforske matematikk. De første deloppgavene er mest for programmet sin del og så kommer to deloppgaver med fokus på matematikken. Den siste deloppgaven bruker også det dynamiske med programmet. Denne oppgaven synest jeg dermed klarer å kombinere de ulike tingene på en god måte.

6.2.5 GeoGebra og koordinatsystemet

Elevene blir forklart hvordan man skrur av og på akser og rutenett, og at dette er lurt å ha på når de skal jobbe med koordinatsystemet. Så blir elevene forklart to måter å sette punkter inn på, ved å manuelt klikke der man vil ha det eller å skrive i inntastingsfeltet. Det blir også forklart innstillinger for punktstyring (plassering av punkt) og punkttype (utseende). Til slutt blir det forklart hvordan man kan skalere aksene dersom man vil ha ulik skala på x-akse og y-akse.

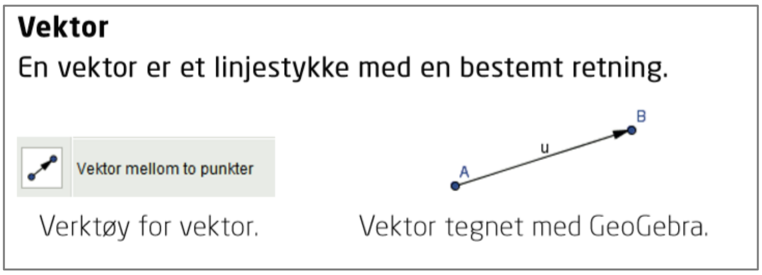
Den siste deloppgava i kursheftet er ei samarbeidsoppgave. Elevene har laget en figur og brukt symmetri på denne til et mønster. Så skal elevene bruke koordinater og beskrivelser av symmetri til å få den andre eleven til å lage samme mønster som seg selv. Dette er ei oppgave som får elevene til å øve på blant annet samarbeid, koordinater, programmet GeoGebra og på symmetri. Det blir en fin repetisjon og avslutning av kurset.

6.2.6 Design av oppgavene

Denne delen av analysen til Maximum 8 består av de to delene «bilder» og «tekst».

6.2.6.1 Bilder

Det er ingen bilder direkte knyttet til oppgavene i opplæringsmateriellet. Det betyr ikke at opplæringsmateriellet er uten bilder. Det er en del bilder knyttet til teksten som er før oppgavene. Dette er bilder utelukkende fra programmet, men de kan likevel deles i to kategorier. En del bilder er bilder av verktøy eller menyer eller lignende programbilder. Den andre delen er bilder av figurer som er laget med programmet. Det kan være løsninger på eksempeloppgaver for eksempel. I figuren til høyre kan man se eksempler på begge typer bilder. Til venstre er et eksempel på et bilde fra programmet, og til høyre et eksempel på at programmet er brukt til å tegne en vektor.



Figur 26: Vektor

6.2.6.2 Tekst

Opplæringsmateriellet er bygd opp på den måten at det er tekst med forklaringer, informasjon og opplæring av programmet først. Etterpå er det oppgaver som er knyttet til det samme temaet. Noen steder er det eksempeloppgaver før elevoppgavene. Ved noen temaer veksler det også flere ganger mellom opplæringstekst og oppgaver.

Utformingen av oppgavene varierer litt. Tre fjerdedeler av oppgavene er delt inn i flere deloppgaver, mens en fjerdedel ikke er det. De oppgavene som er delt i flere deloppgaver er også variert i lengde fra to deloppgaver til hele seks deloppgaver hos de lengste. Hos noen av oppgavene begynner oppgaven med en figur som elevene må tegne før de nummererte deloppgavene begynner. Deloppgavene er nummerert med bokstaver, fra a og opp til f (hos de lengste).

Verbet å tegne forekommer ti ganger i oppgavene og er det enkeltordet jeg har sett på som forekommer oftest i oppgavene. Etter dette er ordet figur som jeg finner sju ganger i oppgavene. Verbet konstruere finner jeg tre ganger i oppgavene. Ordene tegning eller konstruksjon er ikke blitt brukt blant oppgavene. Under temaet konstruksjon blir det lagt vekt på at det er forskjell på tegning og konstruksjon. Det er under dette temaet, naturlig nok, at verbet konstruer blir brukt i en tradisjonell konstruksjonsoppgave. De to andre gangene dette verbet blir brukt er i den andre introduksjonsoppgaven i begynnelsen av opplæringsmateriellet. Her tenker jeg forfatteren kanskje er litt upresis i bruken av ordet siden elevene skal bruke flere tegneverktøy og ikke bare konstruksjonsverktøy når de løser oppgavene.

Dersom man ser på hvor ofte disse ordene forekommer i hele opplæringsmateriellet og ikke bare i selve oppgavene vil man få Tabell 9. Variantene i kursiv er med i totalsummen for ordet, men har også fått sin egen sum i kursiv, for å lettere se hvor stor del av variantene disse utgjør.

Ord	Antall ganger i opplæringsmateriellet
Tegn(e)(er)(es)(et)*(everktøy)(eflaten)*	36 *(3)*
Konstruer(e)(er)(t)	11
Figur(en)(er)(ene)	21
Tegning	0
Konstruksjon(en)(er)*(sverktøy)(sforklaring)*	14 *(6)*

Tabell 9: Hvor ofte ulike ord forekommer i opplæringsmateriellet til Maximum 8

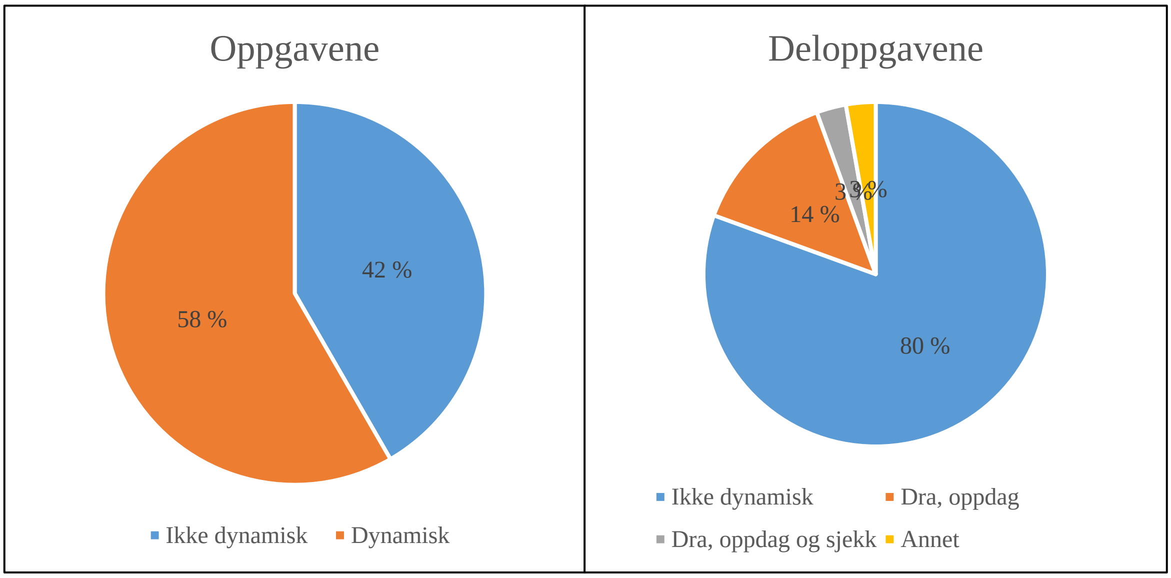
Igjen kan man se at verbet å tegne er mest brukt, men at også de andre ordene er brukt en god del, utenom ordet tegning som ikke er brukt i det hele tatt. Selv om ordet konstruksjon ikke ble brukt blant oppgavene, så er det likevel brukt i forklaringer i opplæringsmateriellet.

6.2.7 Dynamisk geometriprogram

I denne delen kommer analysen av Maximum 8 til de fire delene «dynamisk», «annerledes passer og linjal», «guide og begrensninger til verktøybruk» og til slutt «opplæring i hva?»

6.2.7.1 Dynamisk

Jeg har merket av åtte ganger som oppgavene utnytter og ber elevene bruke det dynamiske aspektet ved programmet. Disse åtte er fordelt på sju deloppgaver. Det er dermed noe dynamisk med 19% av deloppgavene i opplæringsmateriellet. Dersom man ser det på oppgavenivå og ikke deloppgaver, så er det noe dynamisk med 7 av 12 oppgaver, altså hele 58% av oppgavene. I mange av oppgavene er det den siste av deloppgavene som inneholder noe dynamisk. Ofte har den også et spørsmål som hører til, som man kan finne svar på ved å endre på noe på figuren man har lagd tidligere. Dette er oppgaver der elevene blir bedt om å dra i noe for å oppdage noe. Hele seks av de åtte funnene jeg fant er av denne typen. En av disse gangene blir elevene i tillegg bedt om å dra i punktene for å sjekke om de har konstruert riktig. Så er det også ei oppgave som er potensielt dynamisk ved at elevene blir bedt om å bruke rotasjon «til å lage et mønster». Den ble presentert litt tidligere, men her er det veldig opp til elevene om de tolker det dynamisk eller ikke.



Figur 27: Fordeling av dynamiske oppgaver og deloppgaver hos Maximum 8

6.2.7.2 Annerledes passer og linjal

Nå ser jeg på hvordan oppgavene skiller seg fra vanlig bruk av passer og linjal, eller på en annen måte, fra bruk av papir og blyant. Jeg ser at jeg kan dele oppgavene i tre like store kategorier.

Den første tredjedelen av oppgavene kan ikke bli gjort på papir, men man må bruke GeoGebra. Halvparten av disse igjen er fordi det er direkte opplæring i bruk av programmet og det er henvisninger til programmet i teksten, for eksempel henvisninger til spesielle verktøy som skal brukes. Den andre halvparten her har også en del henvisninger til verktøy som skal bli brukt, men disse oppgavene skiller seg sterkest fra bruk av papir og blyant ved at det er veldig mye å gjøre (deler av oppgavene er ikke umulig å gjøre på papir). Da er det en stor fordel å kunne bruke GeoGebra som gjør at tegneprosessen blir både nøyaktig og effektiv. Noen av deloppgavene har spørsmål som gjør at det er viktig å ha gjort tegningen nøyaktig for å kunne svare godt på spørsmålene. Det er også dynamiske elementer med noen av deloppgavene.

Den andre tredelen av oppgavene er oppgaver som kan bli gjort helt direkte på papir. Bruk av den samme teksten og bruk av verktøyene passer, linjal og gradskive.

Den siste tredelen er oppgaver der noen av deloppgavene kan bli gjort på papir, mens andre deloppgaver må bli gjort ved hjelp av dynamisk geometriprogram. De fleste oppgavene her er det ingenting i veien for at størstedelen av deloppgavene kan bli gjort like godt på papir. Det kan virke som om helt vanlige oppgaver som elevene også skal øve på å gjøre på pc, men med små justeringer også kunne blitt gjort på papir.

Noen oppgaver eller deloppgaver skiller seg ut fra tradisjonell bruk av papir ved at de kan gjøres med en større grad av effektivitet eller nøyaktighet om de blir gjort på pc. Skal man gjøre tilsvarende oppgaver på papir må man gjerne tegne mange flere lignende figurer eller man får større måleusikkerhet. Så er det ei oppgave som skiller seg ut andre vegen igjen med at det kan bli vanskeligere å gjøre på pc. Dette er ei konstruksjonsoppgave (se Figur 24: Løsning oppgave G.2.3) der man skal unngå bruk av mange av verktøyene man har på GeoGebra og bare bruke verktøyene som tilsvarer passer og linjal. Det blir dermed mange sirkler (i stedet for konstruksjonskryss som på papir) som kan virke forstyrrende og gjøre det lett å bomme på sirkler og ta feil. Det kan også hende at noen elever vil få en aha-opplevelse når de ser at konstruksjonskryss egentlig er sirkler. Så dette er ei oppgave som både kan være forvirrende, men også endre og utvide elevene sin forståelse.

6.2.7.3 Guide og begrensninger til verktøybruk

Hvilke verktøy som elevene skal bruke er i de fleste oppgaver beskrevet på den måten at det er tydelig hva elevene skal gjøre, men at elevene gjerne må lete litt for å finne det riktige verktøyet. Det kan være så tydelig som at elevene skal velge verktøyet «midtpunkt» i den første oppgaven, men at de må lete selv for å finne hvor det verktøyet er gjemt. Senere i opplæringsmateriellet kan elevene bli bedt om å rotere en trekant. Det er ganske tydelig at det må bli brukt rotasjonsverktøyet selv om navnet på verktøyet ikke blir direkte brukt. Elevene trenger altså ikke å vurdere hvilke verktøy som er hensiktsmessige å bruke, det er beskrevet, men må selv huske eller lete for å finne riktig verktøy.

Det er noen unntak til dette, hvor elevene må vurdere selv hvordan de skal gå fram for å klare oppgaven. Ved temaet konstruksjon så er det tydelig opp til elevene å vurdere selv hvilke verktøy som må brukes og i hvilken rekkefølge. Ved det temaet er det beskrevet hvilke verktøy elevene får lov å bruke og hvilke (de andre verktøyene) som ikke er lov. Men det er stort sett opp til elevene å velge selv blant de lovlige.

Jeg har funnet 13 direkte henvisninger til verktøy i oppgavene. Da er navnet på verktøyet brukt slik som for eksempel dette: *Velg verktøyet «linjestykke» og …* Det er alltid med ord at det er brukt verktøyhenvisninger. Det er 12 oppgaver, så gjennomsnittet blir over 1 henvisning på hver oppgave. Men det er fortetta i starten, på de to første oppgavene så er det sju henvisninger, altså rett over halvparten av henvisningene.

Jeg har laget en tabell som viser fordelingen av deloppgaver og oppgaver i hvor detaljert elevene blir ledet gjennom oppgavene.

	Direkte guide	Hull i guiden	Spørsmål
Antall deloppgaver	26 (63%)	11 (27%)	4 (10%)
	Direkte guide	Hull i guiden	Blanding
Antall oppgaver	5 (42%)	1 (8%)	6 (50%)

Tabell 10: Guide i oppgavene og deloppgavene i Maximum kurset

Som man kan se i tabellen så er størstedelen av deloppgavene oppgaver med «direkte guide». Det er altså for det meste tydelig hva elevene skal gjøre. Det var noen av disse deloppgavene jeg var litt usikker på hvor jeg skulle plassere. Det var ikke helt lett å se at de var «direkte guide», men det var heller ingen tydelige hull som gjør at de passer inn i «hull i guiden», men de er heller av den typen som må leses helt igjennom et par ganger før man begynner å tegne og så ser at alt egentlig er beskrevet. Så kan man se på oppgavenivå at halvparten av oppgavene er i kategorien «blanding». Det er ganske jevnt blanda i opplæringsmateriellet mellom «direkte guide» og «blanding» og det er bare et punkt som skiller seg ut her. Det er de to første oppgavene som er rene «direkte guide» oppgaver med så mange som 12 deloppgaver (tre er spørsmål), som gir elevene en guidet start på kurset.

6.2.7.4 Opplæring i hva?

Opplæring i bruk av programmet er i fokus. Matematikken skal elevene kunne fra før, og nå er fokuset på å lære å gjøre det på GeoGebra også og ikke bare kunne det på papir. Men så er det innslag av matematikk som elevene ikke kan fra før av innimellom. Innslag der elevene ved hjelp av programmet og spørsmål som dulter i riktig retning, klarer å oppdage noen matematiske sammenhenger. Da får elevene tenkt og reflektert litt over matematikken også.

Opplæringen er for det meste knyttet til programmet GeoGebra på den måten at det er bilder i teksten fra programmet og henvisninger til spesifikke verktøy i programmet som elevene skal bruke. Men mange av selve oppgavene er likevel ganske generelt formulert slik at det vil være lett å bruke et annet dynamisk geometriprogram også dersom de har tilsvarende verktøy. Dette blir illustrert i tabellen der de fleste oppgavene bare krever et dynamisk geometriprogram og ikke spesifikt GeoGebra. De tre oppgavene som er tilknyttet GeoGebra i tabellen er også så vagt tilknyttet at det er sannsynlig at det vil gå helt fint å bruke et annet program her også. Og så er det også, som sagt tidligere, noen oppgaver som ikke er avhengig av å bli gjort med et dynamisk geometriprogram utfra oppgaveformuleringen, men som altså også kan bli gjort på papir.

	Tilknyttet GeoGebra	Må bruke et passende dataprogram	Kan gjøres på papir
Antall oppgaver	3	6	3

Tabell 11:Fordeling av oppgaver: GeoGebra, dataprogram eller papir

6.2.8 Læringspotensial

I denne delen kommer analysen av Maximum 8 til de fire delene «vanskelighetsgrad», «læreren», «læringsmiljø» og «syn på læring».

6.2.8.1 Vanskelighetsgrad

Når jeg har sett på vanskelighetsgrad har jeg først sett på antall krevde operasjoner. Altså hvor mange algoritmer og verktøy som må brukes for å løse oppgaven. Jeg har sett på hver deloppgave for seg og tolket de stedene elevene må gjøre noe (for eksempel tegne en trekant) før oppgave a som en egen deloppgave, og at deloppgave a dermed blir andre deloppgave i den oppgaven. Det jeg ser er at det er 71% av deloppgavene som krever få operasjoner, altså null eller en operasjon, altså at det kan tyde på at det er ganske enkle oppgaver. Det er 17% av oppgavene som er oppgaver med noen operasjoner, altså to til tre operasjoner. Disse er da litt mer sammensatte og følgelig litt vanskeligere. I den siste kategorien er oppgaver med mange operasjoner, det vil si fire eller flere operasjoner, og her er 12% av oppgavene. Den enkeltoppgaven med flest operasjoner som må gjennomføres er oppgave G.2.3, altså konstruksjonsoppgaven. De første to deloppgavene i denne oppgaven krever seks og sju operasjoner eller flere, som jo er ganske mange.

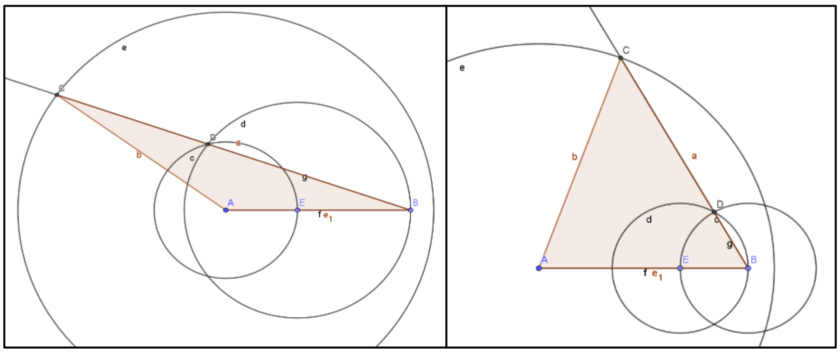
Så er det vanskelighetsgrad i forhold til kognitive prosesser. Opplæringsmateriellet begynner på nederste trinn. For at elevene skal klare den første delen, om introduksjon til GeoGebra, må elevene kunne følge beskrivelsen og observere og beskrive det man ser. Andre delen om tegning har oppgaver som havner på nederste trinn og også oppgaver på mellomste trinn. Vanskelighetsgraden er dermed blitt litt høyere. Elevene må ha kompetanse på nederste trinn til å følge instruks og observere og beskrive slik som i introduksjonen, men må også ha kompetanse på mellomste trinn til å velge metode, velge verktøy, fortolke observasjoner og utføre tegninger av trekanter. Så kommer det tredje temaet, konstruksjon, og her må elevene planlegge og beherske konstruksjon av trekanter og firkanter, og de må ha utholdenhet til å klare å bli ferdige selv om det er krevende med mange konstruksjonssirkler. Dette er kompetanse på øverste trinn. Resten av opplæringsmateriellet har oppgaver fra alle kategorier. I hele opplæringsmateriellet er det 76% av deloppgavene som kan løses på nederste trinn. Mye er å følge en instruks. På mellomste trinn er 17% av oppgavene, og på øverste trinn er 7% av oppgavene. En del av oppgavene var vanskelig å plassere i kategori fordi de kunne løses på flere trinn alt ettersom hvor mye innsats elevene legger i oppgavene. Noen elever vil bare svare overflatisk på oppgavene og andre vil gå mer i dybden på å forklare hva de ser for eksempel.

Min egen opplevelse av vanskelighetsgrad er ganske lik begge kategoriene over. Disse er også ganske enige i fordelingen av oppgaver. De fleste oppgavene er altså ganske lette, oppgaver der eleven må følge instruksen. Opplæringsmateriellet er ganske lett i starten og blir litt mer utfordrende etter hvert. Det topper seg tenker jeg på midten med konstruksjonsoppgaven og er ellers ganske lett videre, men med noen utfordringer innimellom.

6.2.8.2 Læreren

Først vil jeg se litt på hva læreren må tenke på under forberedelsen av opplæringsmateriellet. Jeg prøver å svare på spørsmålene jeg har stilt i analyseverktøyet. Det er ingen egen lærerveiledning til selve opplæringsmateriellet, GeoGebra kurset, men det er veiledning til boka og kurset inneholder de samme temaene som i boka. Dersom elevene bruker denne boka, vil det dermed være naturlig å bruke kurset i tilknytning til de ulike temaene. Det vil være lurt å skrive ut kursheftene til elevene slik at de har hvert sitt hefte. Enten et tema om gangen eller hele opplæringsmateriellet på en gang. Det kunne vært en mulighet å ha det kun på nett, siden jeg fant kurset på nettet i 2016, men når jeg fortsatte skrivingen i 2019 finner jeg ikke kurset lenger på den nettadressen som jeg fant det i 2016. Kurset har dermed enten blitt flyttet eller fjernet.

Når man ser på oppgavene så er det noen oppgaver som skiller seg ut som litt mer krevende enn andre. Slik jeg skrev om tidligere om vanskelighetsgrad, så er det spesielt oppgave G.2.3 som skiller seg ut som ei litt krevende oppgave. Andre ting læreren må være oppmerksom på er noen skrivefeil som kan gjøre eksempler og oppgaver litt mer krevende enn nødvendig. I eksempel 1 ved konstruksjonstemaet så er det byttet om på to bokstaver. Det står en A, men det skal være en B i punkt 2 i løsningsforslaget til denne eksempeloppgaven. Man vil få to ulike resultater, som man kan se av Figur 28, ettersom hvilken bokstav man bruker, det vil si hvilket punkt man bruker. Det kan kanskje være en like god ide å gjøre oppgaven uten å bruke løsningsforslaget. En annen mulighet er at dersom man først gjør oppgaven med feil kan man få en mulighet til å snakke om 60 graders vinkler og egenskapene deres, og hvordan man kan dra i punkter i GeoGebra for å se om figuren forandres. Og så kan man jo gjøre det riktig etterpå. For at elevene skal få et godt utbytte av kurset er det viktig at læreren viser og forklarer til å begynne med. Kurset er nemlig ikke helt selvforklarende for elevene, men er til gjengjeld ikke kjempestort og fint for elevene å bruke til repetisjon. Det vil nok oppleves som at det er introduksjonstemaet som kan gå litt for fort for noen elever. Det blir i liten grad forklart hvor man finner ulike verktøy, så læreren kan nok forklare dette på en god måte muntlig og ved å vise på storskjerm for elevene. Læreren kan også hjelpe elevene til å skjønne hvor det vil være logisk å lete etter ulike verktøy på. Ellers blir det lagt opp til at elevene skal få prøve seg fram litt selv og lete etter de verktøyene som blir spurt om. I den neste delen om tegne og måle, så blir det nevnt at det er lurt å endre navn på punkter underveis, men dette blir ikke forklart hvordan elevene skal gjøre før i den tredje delen om konstruksjon, så det er lurt om læreren forklarer og viser dette for elevene. Så det ender opp med at læreren bør kjenne programmet selv, vite hvor man finner de ulike verktøyene, og tenke gjennom hva elevene vil lure på og presentere dette for elevene.



Figur 28: To resultater

Siden opplæringsmateriellet inneholder både tegning og konstruksjon bør læreren være oppmerksom på forskjellen mellom disse og tydeliggjøre denne forskjellen for elevene. Opplæringsmateriellet sier noe om denne forskjellen flere ganger, men er likevel litt utydelig i ei av de første oppgavene i introduksjonstemaet. Senere er opplæringsmateriellet tydelig på forskjellen.

Det er ingenting som læreren må lage av filer på forhånd. Alt elevene skal gjøre begynner fra tomme GeoGebra vindu. Det er heller ikke annet tilleggsutstyr som man trenger. Det eneste man trenger er at elevene har tilgang på programmet GeoGebra.

Kurset består av fem deler og man kan gjøre en del hver samling. Det kan likevel være litt lurt å ha tid til å bruke to samlinger på temaet om symmetri som er en del lengre enn de andre temaene og spesielt om elevene blir engasjerte og utforskende og går inn i et undersøkelseslandskap ved oppgave 8 og kanskje 11.

Læreren kjenner sine egne elever og kan tilpasse oppfølging, forklaringer og oppsummeringer etter egne elever og eget ønske. Det kan likevel være en ide å trekke fram ulike resultater fra ulike elever og dele med klassen dersom noen av elevene har gått inn i et undersøkelseslandskap og funnet ut noe litt spennende og kanskje dele dette med resten av klassen. Eller noen har lagd noen fine mønster som man kan dele med flere.

6.2.8.3 Læringsmiljø

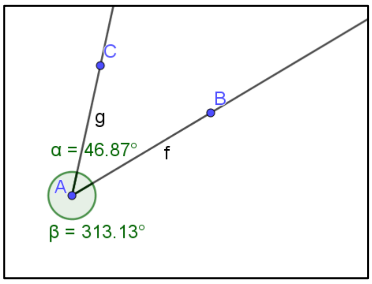
Det jeg har funnet ut om læringsmiljø og hvor oppgavene kan plasseres i Skovsmoses læringsmiljøtabell vil jeg presentere nå, og jeg gjentar først tabellen.

	Tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar	Undersøkelseslandskaper
"Ren" matematikk, uten noen praktisk anvendelse	(1)	(2)
"Semi"-anvendelser av matematikken	(3)	(4)
Ekte, reelle anvendelser av matematikken	(5)	(6)

Tabell 12: Seks typer matematisk læringsmiljø

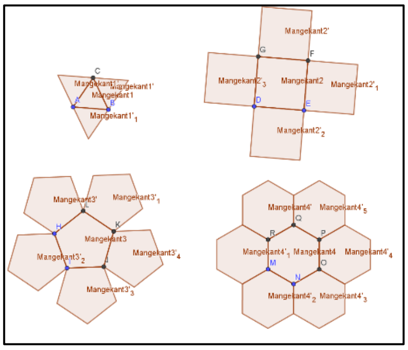
Jeg har altså vært opptatt av å plassere oppgavene i kategoriene tradisjonelle matematikkoppgaver med et entydig fasitsvar eller i kategorien undersøkelseslandskaper. Dette er hovedsorteringa. Jeg har også sett på om det blir brukt reelle anvendelser av matematikken eller om det kun er ren matematikk i oppgavene. Her er det også en kategori med "semi"-anvendelser av matematikken, som blir en slags kombinasjon av de to andre. Dette er mer forklart tidligere i oppgaven under teorikapittelet. Det jeg har funnet ut om opplæringsmateriellet til maximum er at alle oppgavene kan plasseres i kategori én. Noen oppgaver er derimot i grenseland mellom kategori en og to, og noen få så nært kategori to at de kanskje kan høre til der. Det enkleste her var å se på om oppgavene var ren matematikk eller reelle anvendelser av matematikken. Det var ingen oppgaver som var reelle anvendelser av matematikken, og heller ingen oppgaver som var «semi»-anvendelser av matematikken. Alle oppgavene var helt rene anvendelser av matematikk. Her inkluderer jeg også ren opplæring i dataprogrammet der matematikken er i bakgrunnen og programopplæringen i fokus (det er ei oppgave som kan være i grenseland som blir presentert i slutten av dette delkapittelet). Når jeg så på om oppgavene var tradisjonelle eller undersøkelseslandskap så jeg at man kan skrive en fasit til alle oppgavene utenom de to siste deloppgavene som er samarbeidsoppgaver. Disse to deloppgavene er dermed mer åpne enn resten av oppgavene, men det er likevel veldig styrt hva elevene skal gjøre. Jeg kommer tilbake til dette senere. Av de oppgavene det går an å skrive en fasit til så er det noen som har potensiale til å være litt mer åpne og utforskende enn resten. Jeg vil si at noen oppgaver er i grenseland mellom kategori en og to. Det vil være lettest for disse å ramle ned i kategori en, men det er også mulig for disse å ramle ned i kategori to. Dette vil avhenge både av lærer og av elever. Hvordan disse griper fatt i oppgavene og tolker disse og en god slump nysgjerrighet. Dersom jeg går igjennom oppgavene med en "snill" bedømming av om de har potensiale til å bli undersøkelseslandskap eller bare å være litt mer åpne enn helt lukkede, så er det 14 deloppgaver fordelt på 8 oppgaver som jeg kan si det om. Altså har 70% av oppgavene og 34% av deloppgavene dette potensialet. Dette er altså bare et potensial. Noen av oppgavene er med her fordi det er en styrt utforsking med oppdagelsesspørsmål. Mange av oppgavene vil det være vanskelig å oppdage noe mer enn det som det styres mot at man skal oppdage. Det vil dermed være enkelt å skrive en fasit til disse oppgavene også. Jeg vil nå trekke fram eksempler på slike vippeoppgaver som lettest havner i kategori en og oppgaver som har størst potensiale til å havne i kategori to.

Ei oppgave som ble med i den «snille» vurderingen av oppgavene er oppgave G.2.5 med deloppgave c. Det er ei oppgave som går ut på å tegne to ståler ut fra samme endepunkt og måle vinkelen mellom disse både med og mot klokka. Så i deloppgave c skal elevene endre på vinkelåpningen for å se hva som skjer og svare på «hva er alltid summen av de to målte vinklene?» Illustrasjon til høyre. Dette er ei enkel og styrt oppgave som nesten alltid vil havne i kategori én. Summen vil jo alltid være 360 grader, det kan man skrive i en fasit. Men dersom vinkler og måling er ganske nytt for elevene så kan dette være en fin oppdagelse. Noen vil kanskje endre vinklene og sjekke flere ganger med ulike mål for å være helt sikre. Og vil kanskje undre seg litt. Andre vil tenke at ok sånn er det og gå videre til neste oppgave med en gang. Dette hvordan elevene reagerer på oppgaven vil ha en stor del å si på om oppgaven entydig havner i kategori én eller kanskje nærmer seg kategori to. Men her er det altså en mulighet for å kunne prøve ut og undre seg litt.



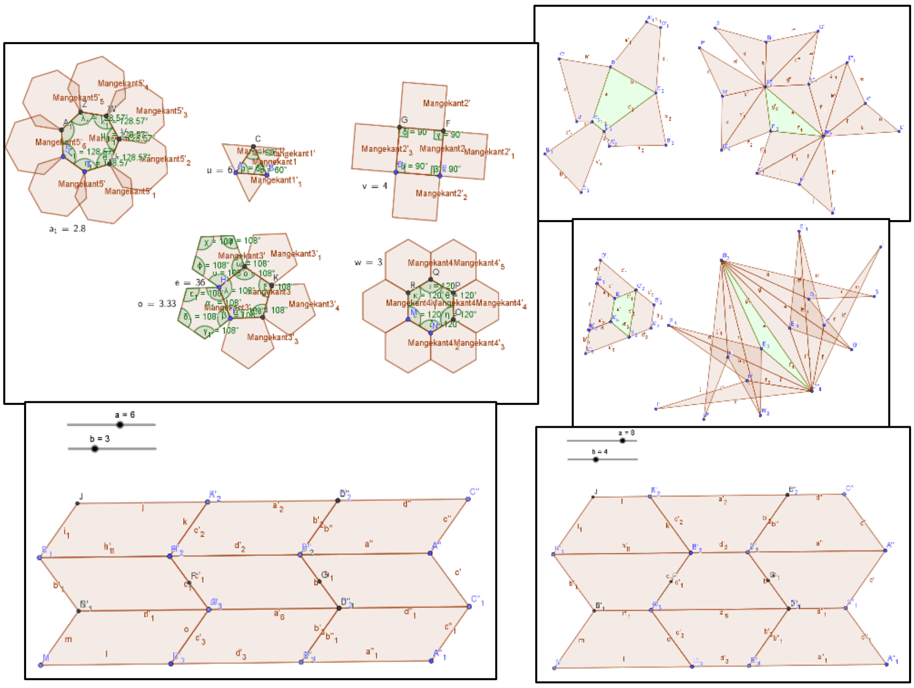
Figur 29: Oppgave G.2.5

Så til den oppgava som er mest i andre enden av skalaen, det vil si størst potensiale for å bli et undersøkelseslandskap, som er oppgave G.2.8c. Oppgaven er godt laget ved at elevene først utnytter effektiviteten i programmet for å lage figurer som man kan utforske matematikken i. Elevene lager figurene som man kan se på bildet til høyre. Her vil elevene bruke speiling for å få fram figurene. I oppgave b spørres det om hvilke man kan bruke til å «fliselegge» tegneflaten uten at det oppstår åpninger eller hull mellom flisene. Dette er rimelig greit å svare på, og så kommer oppgave c som spør om hvorfor det er slik, og ber elevene finne en forklaring for hver av figurene. Det er nå potensialet til oppgava vil vise seg i praksis. Vil elevene gå inn i et undersøkelseslandskap eller ikke? Elevene kan velge å holde seg innenfor det som er strengt nødvendig i oppgava, nemlig å svare på spørsmålet for disse fire figurene. Det vil dermed ikke bli noe undersøkelseslandskap. Elevene vil gjøre oppgaven og gå videre til neste. Men så kan vi se for oss at vi har noen litt mer nysgjerrige elever og oppmuntring fra læreren til å utvide oppgava og stille seg tilleggsspørsmål. Slike spørsmål som «Hva med en sjukant?» eller «kan vi finne andre figurer som vi kan fliselegge med?» og «hva må til for at vi skal kunne fliselegge med en figur?». Elever og lærere som våger å gå litt utover grensene til oppgava og våger å stille nye spørsmål vil gå inn i et undersøkelseslandskap som kan være spennende å utforske. Det går an å utforske med andre figurer, og også utvide med rotasjon og parallellforskyving i tillegg til speiling for å få til å fliselegge tegneflaten. En annen mulighet er å finne eksempler på fliselegging i kunsten. Her er det mange muligheter. Man kan utnytte det dynamiske med programmet GeoGebra til å dra i punkter for å teste ulike trekanter, firkanter og andre figurer på hvordan de fungerer. Man kan også bruke glider for å endre sidelengder dersom man vil det også. I så fall må læreren lære seg hvordan man lager og bruker det, da det ikke er forklart i kurset.



Figur 30: Oppgave G.2.8

Illustrasjonene til høyre viser hvordan jeg har utforsket oppgaven. Først med en sjukant, som man lett ser at man ikke kan fliselegge med, og vinkelmåling på figurene. Så med trekant og firkant i grønt som er speilet flere ganger og så dratt i hjørner for å se hvordan de oppfører seg og i tillegg få fram noen fine mønster. Til slutt prøvde jeg å bruke glidere til å endre sidelengdene på trapeser og parallellogrammer (ikke nødvendig å bruke glider, men det var det første jeg tenkte på da jeg gjorde det). Her brukte jeg også rotasjon for å kunne fliselegge tegneflaten.



Figur 31: Hvordan jeg utforsket oppgave G.2.8

En annen oppgave som skilte seg ut, er oppgave G.2.12 c og d. Dette er til sammen ei samarbeidsoppgave. Deloppgavene a og b er uavhengige og hører ikke direkte til c og d. I introduksjonen til oppgaven står at elevene skal bruke rutenett og koordinatsystem. Elevene skal i oppgaven lage to ulike geometriske mønster og bruke verktøy for speiling, rotasjon og parallellforskyvning. Det er ikke flere føringer enn dette for elevene. Elevene står dermed veldig fritt i designprosessen. Etterpå skal elevene beskrive sine egne mønster med ord, slik at en annen elev kan lage tilsvarende. Her ser man tydelig at det er ei samarbeidsoppgave. Det er også ei veldig fin oppgave å ha på slutten av opplæringsmateriellet fordi den i bunn og grunn kombinerer store deler av det elevene har lært gjennom kurset. Den kombinerer ting som koordinatsystem, symmetri, GeoGebra, ulike verktøy, formulere seg og bruke ord, samarbeid, lytte og forstå matematiske begreper og andre personer. Dette er en god del som blir kombinert iallfall, og det er sikkert enda mer en jeg har nevnt her. Oppgaven er åpen, men ikke utforskende i den forstand at elevene har noe de skal finne ut. (Men heller et mål om noe de skal gjøre). Men elevene kan viss de vil lage sine egne mål. Det kan hende de har et bilde i hodet av noe som de ønsker å lage og så prøver å få til dette. Da kan oppgaven også bli utforskende ved at de får prøve å finne ut hvordan de kan kombinere og bruke de ulike symmetriene til å lage det mønsteret de ønsker. Her lager elevene noe etter eget ønske og prøver å bruke symmetriene til dette. Elevene vil til en viss grad få bruke programmet og matematikken til å nå et egendefinert mål. Det er iallfall det nærmeste man kommer ekte eller semi-anvendelser av matematikken i dette opplæringsmateriellet. Man kan heller ikke lage noen entydig fasit til denne oppgaven og som sagt tidligere er den åpen, og det kan tyde på at elevene kan nærme seg et undersøkelseslandskap. Her er det stort potensiale for å vippe mellom boksene til de ulike læringsmiljøene.

6.2.8.4 Syn på læring

For å se opplæringsmateriellet fra et konstruktivistisk perspektiv så ser jeg at elevene må være aktive og gjøre ting selv. De må lete litt selv for å finne hvor de ulike verktøyene er og hvordan de brukes, og dette er med på å bygge erfaring hos elevene. Det er derimot noen skrivefeil og litt utydelige forklaringer som gjør at det nok vil være mer frustrerende enn lærerikt å sitte å fordype seg på egenhånd. Dermed går jeg mer over til å tro at dette vil passe bedre i en sosiokulturell sammenheng der elevene kan hjelpe hverandre og få hjelp av læreren, og der læreren kan stille gode spørsmål og veilede elevene. Det er også ei samarbeidsoppgave på slutten av opplæringsmateriellet som også peker mot et sosiokulturelt perspektiv.

Når jeg ser på om det legges tydelig opp til en spesiell metode, slik som induktiv eller deduktiv metode, så er det litt blanda. Men for det meste kan det tyde på en deduktiv metode. Det er for det meste en presentasjon av et tema og noen verktøy innen dette temaet (for eksempel symmetri, og verktøy for speiling) noen ganger er det eksempler (konstruksjon) og så følger oppgaver etterpå. Det jeg legger merke til er at alt ikke er like detaljert presentert, så det blir også litt let og finn i forhold til verktøy (elevene blir matet med «spiseskje» og ikke «teskje»). Ser man på oppgavene i forhold til matematikk og ikke så direkte på programopplæring, så er det en del induktiv tilnærming i noen av oppgavene, da ser jeg spesielt de oppgavene som også har potensiale til å bli undersøkelseslandskaper (oppgave G.2.8 som ble presentert tidligere).

7 Diskusjon

I kapittel 6 gir analysen av de to opplæringsmateriellene en karakterisering av hvert av dem. I en videre diskusjon i dette kapitlet, foretar jeg en sammenligning av de to opplæringsmateriellene Nummer 8 og Maximum 8. For å gjøre dette har jeg valgt å lage en tabell siden det da blir oversiktlig og lett å se hva som blir sammenlignet og forskjeller og likheter mellom de to opplæringsmateriellene. Den første kolonnen presenterer hva som blir sammenlignet og gjerne noen likheter mellom opplæringsmateriellene. Utvalgte nøkkelord er i fet skrift for å lettere se hva som blir sammenlignet.

Tabell 13: Sammenligningstabell for Nummer 8 og Maximum 8

	Nummer 8	**Maximum 8**
Begge bruker **funksjonelle bilder** som viser deler av programmet eller resultatet man skal få. Nummer går enda lenger.	Bruker bilder både i oppgaver og forklaringer. Overrasker med å bruke bilder av verktøy i teksten istedenfor ord. Det gjør at det blir lett å finne riktig verktøy, men vanskelig å lese høyt.	Bruker ikke bilder direkte i oppgavene, men i tilknytning til tekst og forklaringer før oppgavene.
Det er ulik **størrelse** på opplæringsmateriellene. Vil Nummer være for stort? Er Maximum for lite?	Stort og omfattende. 35 sider og 47 oppgaver. Tidkrevende å jobbe gjennom hele.	Kort og dermed gjennomførbart på relativt kort tid. 19 sider og 12 oppgaver, fordelt på fem tema.
Det er noen **feil** jeg har lagt merke til	Oppgave 45 er tom/mangler	Skrivefeil i ei eksempeloppgave (se 6.2.8.2) og andre småfeil
Begge er bevisste og enige på bruken av ordene **tegne og konstruksjon**. Det er ulikt fokus på hva som blir brukt.	Fokuserer bare på tegning. Skriver ingenting om konstruksjon. Alle verktøy er dermed alltid tillatt.	Omtaler både tegning og konstruksjon og forskjellen på disse. Ved konstruksjon blir det forklart hvilke verktøy som kan brukes.
Begge har et fokus på å få fram det **dynamiske,** men i ulik grad. **Pila** blir oftest utnyttet i denne sammenheng.	72% av oppgavene har noe dynamisk ved seg. Ber ofte detaljert om at elevene skal bruke pila til å dra i spesifikke punkt eller linjer. «Bruk pil …»	58% av oppgavene har noe dynamisk ved seg. Det er variasjon i hvordan elevene blir oppmuntret til å bruke pila, og elevene må gjerne tenke selv at det er pila som må brukes. «Gjør endringer på …»
De fleste oppgavene egner seg ikke til å bli gjort **på papir**, men det er litt forskjell på de to	Bare noen få oppgaver kan gjøres på papir. De fleste er dynamiske eller på andre måter uegnet	En litt større andel oppgaver kan bli gjort på papir hos Maximum 8 enn hos Nummer 8.

	Nummer 8	**Maximum 8**
Det er forskjell på hvor detaljerte **verktøyforklaringene** er	Detaljerte verktøyforklaringer der alt er forklart av verktøy som brukes. Dermed trenger ikke elevene å lete så mye, men bare gjøre det som står.	Verktøyene blir ikke detaljert presentert, så man må gjerne lete selv for å finne de. Dermed blir elevene gjerne kjent med programmet på egenhånd av å lete etter verktøy som trengs. (Ved temaet symmetri blir symmetri-verktøyene nøyere presentert)
Verktøyhenvisninger i oppgavene	Det henvises til verktøy med bilder av verktøyene.	Det henvises til verktøy med navnet til verktøyene.
Hos begge havner omtrent 2/3 av deloppgavene i kategorien **«direkte guide»**. Men oppsummert på oppgavenivå er det store forskjeller	Bare 15% av oppgavene kategoriseres som en blanding av «direkte guide» og «hull i guiden»	Halvparten av oppgavene kategoriseres som en blanding av «direkte guide» og «hull i guiden»
Det er en del ulikhet i hvilke **temaer** som er med. Det er stor forskjell på hvor detaljert hvert tema blir omtalt.	Symmetri er ikke med som tema (er med i 10. klasse heftet). Konstruksjon er ikke med. Koordinatsystemet er så vidt nevnt.	Symmetri er med som et tema. Konstruksjon og koordinatsystemet er egne tema.
	Detaljert oppdelt med punkt, sirkler, vinkler, normaler, halvering, parallelle linjer, trekanter, mangekanter, måling osv, og disse er også enda mer detaljert inndelt. Variabel ved bruk av glider og å bruke programmet til beregning er kun med her.	Introduksjon, og tegning og måling er temaer.
Det er ikke bare **opplæring** i GeoGebra	Begge integrerer matematikken inn i oppgavene slik at det ikke bare blir dataopplæring, men får fram interessant matematikk også. Det kan være matematiske sammenhenger eller egenskaper til geometriske figurer.	
Generell formulering og tilknytning til GeoGebra	Sterk tilknytning til GeoGebra gjør at kun 2/5 av oppgavene kan gjøres med et annet program eller på papir	Generell formulering gjør at ¾ av oppgavene ikke er avhengig av å bruke GeoGebra, men kan bruke et annet dynamisk geometriprogram eller papir
Vanskelighetsgrad. Begge har flest lette, noen middels og færrest vanskelige oppgaver	Det er en progresjon i vanskelighetsgraden utover i opplæringsmateriellet med flest lette i begynnelsen og vanskeligere mot slutten.	Opplæringsmateriellet har en lett start, er vanskeligst på midten og lettere igjen mot slutten med noen utfordringer innimellom.

	Nummer 8	Maximum 8
Det er forskjell på hvor godt **læreren** må kunne GeoGebra før start	Læreren trenger ikke kunne alt før start. Dersom elevene lurer på noe om programmet, finnes svaret antakelig i opplæringsmateriellet. Det vil være lett å finne riktig side ved å bruke innholdslista.	Læreren bør kunne programmet godt, for elevene trenger gjerne hjelp til å finne fram til verktøy og navneendring av punkter og lignende. Alt er ikke detaljert forklart i opplæringsmateriellet.
Oppgavene inneholder **«ren» matematikk**	Man kan skrive fasit til så godt som alle oppgavene, men flere har likevel en styrt utforsking. Oppgavene tilhører boks 1, men noen ligger på vippen mellom boks 1 og 2 i Skovsmoses læringsmiljøtabell, og med en «snill» bedømming kan opptil 70% av oppgavene ha et potensiale til å vippe over med litt ekstra nysgjerrighet fra lærer og elever.	
Samarbeid	Ingen samarbeidsoppgaver	1 samarbeidsoppgave

På grunnlag av dette vil jeg si noe om styrker og svakheter mellom opplæringsmateriellene, og litt om hvordan jeg kan tenke meg å bruke dem.

Bruker man Nummer 8 vil det være enkelt for både svake og sterke elever å komme i gang, fordi det er så detaljerte forklaringer og det begynner enkelt og de fleste vil nok klare å få til mye. Det er en økende vanskelighetsgrad utover i opplæringsmateriellet. For de sterkeste elevene vil det kanskje være litt for enkelt og repeterende i starten og at det kanskje tar litt for lang tid før det kommer noen skikkelige utfordringer. Her må læreren tilpasse undervisningen. Samtidig er det mye interessant matematikk sammen med verktøyopplæringen, som kan hjelpe på motivasjonen slik at det ikke trenger å bli kjedelig. Noe som kan være litt negativt er at opplæringsmateriellet er stort og omfattende, og man må prioritere fordi det vil være vanskelig å rekke å gjøre alt på skolen. Dersom jeg skal bruke det vil jeg nok vurdere å gi mye i lekse og velge utvalgte oppgaver å gjøre på skolen og der gjerne samarbeide og diskutere svarene. Nummer 8 er så godt og tydelig forklart at det vil være greit for både elever, og eventuelle foreldre som skal hjelpe, å ha det som lekse. Å bruke det som lekse vil være god mengdetrening hjemme med oppgaver som er litt annerledes enn «vanlige» oppgaver på papir. Å bruke det i eget tempo som lekse eller alene fremheves også av at bildebruken inni teksten gjør at det ikke er egnet som høytlesing, men heller stillelesing da det blir vanskelig å lese et bilde høyt.

En fordel med Maximum 8 er at det er kort og dermed gjennomførbart på skolen uten å bruke alt for lang tid. Det er også mulig å gjøre de fem ulike temaene i andre rekkefølger enn det som er beskrevet, dersom man for eksempel bruker et annet læreverk med en annen rekkefølge til vanlig. Det første temaet om introduksjon bør selvsagt brukes før de andre temaene, men det gjør ikke noe om man bytter om på for eksempel konstruksjon og symmetri. Noe som kan være både en styrke og en svakhet er at elevene må lete selv for å finne verktøy som skal brukes. Det er heller ikke alltid like selvforklarende, og dette gjør også at Maximum 8 ikke egner seg som lekse. Det blir viktig å ha en lærer tilstede som kan GeoGebra og som kan veilede og forklare for elevene. Samtidig vil det at elevene må lete etter verktøyene gjøre at de vil bygge en egen kjennskap til hvor de finner de ulike verktøyene. Dersom jeg skal bruke Maximum 8 vil jeg gjøre det i klassen og samtidig stille spørsmål som kan lede elevene inn i undersøkelseslandskap.

Jeg kan tenke meg at det kan være lettere å gå inn i et undersøkelseslandskap (Skovsmose, 2001) med bruk av Maximum 8 enn med Nummer 8. Nettopp fordi Maximum 8 er litt mer «rotete» vil det kanskje være mer åpenhet for slike påfunn som å komme med egne spørsmål og ideer som fører til undersøkelseslandskap. Nummer 8 virker mer strukturert og fast i utformingen at det vil kreve litt mer å gå utenfor grensene.

Begge opplæringsmateriellene kan brukes i en sosiokulturell kontekst i en klasse. Hos Maximum 8 er det også ei oppgave der elevene skal samarbeide, og jeg har tidligere sagt hvor viktig det er med en lærer tilstede, og å bruke det i klassen og ikke alene i lekse. Hos Nummer 8 er det ingen samarbeidsoppgaver i utgangspunktet, men jeg har tidligere skrevet om at det vil være fordeler med å la elevene samarbeide om oppgaver. Etterpå kan elevene diskutere svarene sine sammen og prøve å formulere regler for matematikken de oppdager, og med det komme «i mål» med den induktive metode, som jeg skrev om i 6.1.7.4.

Jeg har lagt merke til at de to opplæringsmateriellene tar for seg ulike tema. Dermed kan det være en mulighet å kombinere de to i undervisningen, og supplere med hverandre. Jeg kan se for meg muligheten for å bruke Nummer 8 som basis med utvalgte deler på skolen og i lekse, og så bruke temaene konstruksjon, symmetri og koordinatsystemet fra Maximum 8.

8 Avslutning

Avslutningen begynner med en konklusjon der jeg svarer på forskningsspørsmålene. Etterpå har jeg et delkapittel der jeg kommer med noen tanker om analyseverktøyet og om veien videre.

8.1 Konklusjon

I løpet av masteroppgaven har jeg analysert de to opplæringsmateriellene i bruk av GeoGebra tilknyttet læreverkene Nummer 8 og Maximum 8. Jeg har undersøkt potensialet for læring for elever i ungdomsskolen, og jeg har også analysert det matematiske innholdet som behandles, hvilke komponenter i GeoGebra det jobbes med og hvordan det legges opp til at elevene skal jobbe med det. Her i konklusjonen vil jeg dermed først begynne med å gjenta forskningsspørsmålene som jeg presenterte innledningsvis i masteroppgaven, først hovedspørsmålet og så de to underspørsmålene.

Hvordan gir opplæringsmateriellet i dynamisk geometriprogram utfordringer som har potensiale til å stimulere læring i matematikk for elever i ungdomsskolen?

1. Hvilke verktøymessige valg og matematiske begreper vektlegger opplæringsmateriellene?
2. Hvordan er opplæringsmateriellene tilrettelagt slik at de gir utfordringer til både sterke og svake elever i ungdomsskolen?

Med tanke på opplæringen av programmet vil jeg si at det som kjennetegner Nummer 8 er at det er grundig og detaljert. Det tar ikke for gitt at elevene klarer å finne fram selv, men forklarer alt grundig. Alle verktøy som elevene skal bruke blir presentert og forklart med tilhørende oppgaver som lar elevene bruke verktøyene selv. Det blir lagt stor vekt på at elevene skal bruke pila til å dra i punkter og linjer. Dette får fram det dynamiske med programmet. Det gir også elevene erfaring med hvordan programmet oppfører seg og reagerer i lignende og ulike situasjoner, og gjør det litt mindre «black-box» for elevene.

Det som kjennetegner Maximum 8 med tanke på opplæringen av programmet, er at det er kortfattet. Hovedlinjene blir kort forklart og så blir det mye opp til elevene å utforske, lete og prøve og feile selv. Elevene kan få beskjed om å finne et spesifikt verktøy, men må selv finne ut hvor verktøyet er og hvordan det brukes. Dette gjør at elevene får erfaring med å lete etter verktøy og bygger en intuisjon på hvor det vil være logisk å lete. Samtidig er denne letingen noe som gjerne kan føre til at elevene naturlig føler behov for å samarbeide med medelever og hjelpe hverandre, og samtidig setter krav til at læreren kan programmet godt. Her er det også oppgaver som bruker det dynamiske med GeoGebra og utnytter mulighetene dette gir.

Med tanke på matematikken har det blitt gjort ulike valg med tanke på tegning og konstruksjon, og på hvilke matematiske tema som er med. Nummer 8 har valgt å bare la elevene tegne. Maximum 8 har derimot valgt å lære elevene begge deler og å forklare forskjellen og hvilke verktøy som kan brukes eller ikke brukes. Begge opplæringsmateriellene har oppgaver som ikke bare er dataopplæring, men som også integrerer matematikk på en god måte, med for eksempel egenskaper til geometriske figurer.

Begge opplæringsmateriellene begynner med enkle oppgaver i starten for å få alle med, og øker vanskelighetsgraden etter hvert. Nummer 8 begynner nok enklest av de to, og bruker lang tid på det grunnleggende. Maximum 8 går fortere fram og har den største utfordringen på midten av kurset, mens Nummer 8 har en mer jevn økning i vanskelighetsgrad. Jeg har funnet flere interessante oppgaver hos begge opplæringsmateriellene, noen med tanke på at de kan gi litt ekstra utfordringer til elevene, og andre med tanke på at det er muligheter for å gå inn i et undersøkelseslandskap.

Det jeg har sett er altså at de to opplæringsmateriellene er ulike og vektlegger ulike ting. De har hver sine ting i fokus, både med tanke på opplæringen av programmet GeoGebra og på matematikken som blir presentert. Det er også noen likheter mellom dem. Jeg vurderer at det er fordeler og ulemper med begge opplæringsmateriellene. Samtidig kan ofte det som er ulikt mellom dem, slik som ulikt omfang, være både en fordel og ulempe på samme tid, alt ettersom hvordan man ser på det. Dette skrev jeg mer om i diskusjonen og kan påvirke mulighetene for utforskning, ha betydning for arbeidsform og lærerens rolle i undervisningen.

8.2 Kritisk blikk på analyseverktøyet og veien videre

Her vil jeg skrive litt, med et kritisk blikk, på hvordan det var å bruke analyseverktøyet og hvordan det var å jobbe med, og litt hva jeg tenker kan undersøkes videre.

Det var lite hensiktsmessig å bruke bildeverktøyet med den inndelingen som var tenkt. Det var lettere å bruke det som et utgangspunkt. Her var det også forskjell på opplæringsmateriellene. Maximum brukte ikke bilder i oppgavene (men i forklaringer før) og Nummer brukte verktøybilder i selve oppgaveteksten.

Punktet om «Guide og begrensninger til verktøybruk» med underkategorier var vanskelig å jobbe med i starten. Det har gjennomgått mange revideringer for å få til å lage spørsmål og kategorier som er målbare og ikke glir inn i hverandre. Etter hvert ble det lettere å jobbe med, og den siste varianten som nå er i oppgaven, var gøy å bruke.

Noen oppgaver har vært vanskelige å kategorisere. Jeg ser at jeg har 7 oppgaver i kategorien «på papir» i «opplæring i hva?» for Nummer 8 og bare 5-6 i kategorien «på papir» i «annerledes passer og linjal» for Nummer 8. Jeg ser at også for Maximum 8, har jeg fått ei oppgave i forskjell, altså 3 og 4 oppgaver i kategoriene «på papir». Jeg må ha tenkt litt ulikt, selv om det er vanskelig etterpå å se hva denne ulikheten består i. De er laget for å måle ulike ting, «annerledes passer og linjal» ser på hva som må til for å kunne gjøre oppgaven på papir eller ikke og «opplæring i hva?» ser mer på hvor mye oppgaven er knyttet til programmet GeoGebra eller om den er mer generell i ordbruken. Dersom jeg skulle valgt å bruke et slikt analyseverktøy på nytt igjen ville jeg ha prøvd å kombinere disse, eller droppet et av disse to verktøyene til å bli bare ett å forholde seg til.

Å analysere med tanke på vanskelighetsgrad i forhold til kognitive prosesser var noe Brändström (2005) syntes var vanskelig i sin studie og dermed reduserte jeg fra seks til tre kategorier i denne oppgaven. Det gjorde nok at det ble litt lettere enn å analysere i seks kategorier, men likevel var det vanskelig. Mye av grunnen var nok fordi oppgavene som ble analysert var så knyttet til dataopplæringen at de framsto annerledes og brukte andre ord og spørsmål enn «vanlige» oppgaver, og det ble vanskelig å bruke tabellen jeg hadde satt sammen. Å analysere vanskelighetsgraden med tanke på «antall krevde operasjoner» var derimot mye enklere. Det at jeg her utvidet fra to til tre kategorier var også interessant syntes jeg, med tanke på at det var spesielt de med mange operasjoner (fire eller flere) som økte i antall utover i opplæringsmateriellet til Nummer 8, samtidig som jeg merket at vanskelighetsgraden økte.

Ved analysen av matematisk læringsmiljø og hvilke bokser i Skovsmose (2001) læringsmiljøtabell oppgavene kunne plasseres inn i, så syntes jeg det var litt kjedelig å plassere omtrent alle inn i boks 1, for jeg håpet sånn på å finne oppgaver i alle boksene. Jeg fant en del oppgaver med et potensiale til å havne i boks 2, men det kan hende jeg var for «snill» i den «snille» bedømmingen av dette. Likevel er dette mye opp til lærere og elever som bruker opplæringsmateriellene hvordan undervisningen foregår. Skulle jeg ha forsket videre på noe tenker jeg det ville vært interessant og valgt noen oppgaver med potensiale til å bli undersøkelseslandskap, og så gitt disse til en virkelig klasse med elever for å se hva som da skjer. Jeg tenker også det ville vært interessant å sett på lærebøkene til Nummer 8 og Maximum 8, for å se om det der er flere oppgaver som kan plasseres i alle de seks boksene for matematisk læringsmiljø. Har de i lærebøkene et fokus på å lage oppgaver som er tilknyttet virkeligheten, slik Pierce og Stacey (2011) fokuserer på, og oppgaver som kan lede til undersøkelseslandskap?

9 Kildeliste

Aschehoug. (2016). Nummer 8 - Geometri i GeoGebra 5.0 - Verktøyopplæring til elever. Hentet 23. februar 2016 fra https://www.lokus.no/open/nummer/Nummer-8

Aubert, K. E. (2009, 14. februar). Konstruksjon: matematikk. Hentet 1. mars 2016 fra https://snl.no/konstruksjon%2Fmatematikk

Botten, G. (2009). *Meningsfylt matematikk: nærhet og engasjement i læringen* (3. utg.). Bergen: Caspar forlag.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th edition. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: an analysis of the levels of difficulty*, Luleå: Luleå tekniska universitet. (Licentiate thesis / Luleå University of Technology; No. 2005:18).

Bueie, H. (2011). *GeoGebra for lærere*. Oslo: Universitetsforlaget.

Dynamisk. (2009, 14. februar). Hentet 29. februar 2016 fra https://snl.no/dynamisk

geogebra.org. Hentet 2016

Goldenberg, E. P., Scher, D. & Feurzeig, N. (2008). What lies behind dynamic interactive geometry software? I G. Blume & M. Heid (Red.), *Research on thechnology in the learning and teaching of mathematics: Cases and perspectives* (bd. 2, s. 53-87). Greenwich, CT: Information Age.

Gyldendal. (2016). Maximum 8 - Kurs i GeoGebra. Hentet 23. februar 2016 fra http://www.gyldendal.no/grs/Maximum/Dette-er-Maximum/Kurs-i-GeoGebra

Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2011). The Strength of the Community. I L. Bu & R. Schoen (Red.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra* (s. 7-12). Rotterdam: SensePublishers.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (4. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Interaktivitet. (2009, 14. februar). Hentet 29. februar 2016 fra https://snl.no/interaktivitet

Jopperud, R. (2015). *To læreverks presentasjon av algebra på 8. trinn En analyse og sammenligning* (Masteroppgave, Universitetet i Agder). Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/300790

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of Cas use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205-263. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0006-7

Laborde, C. & Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry environment: Cabri-géomètre. I G. Blume & M. Heid (Red.), *Research on thechnology in the learning and teaching of mathematics: Cases and perspectives* (bd. 2, s. 31-52). Greenwich, CT: Information Age.

Ma, A. (2008, 22. november). Sosiokulturell læringsteori [Blogginnlegg]. Hentet fra http://annamaronnevik.blogspot.com/2008/11/sosiokulturell-lringsteori.html

Mackrell, K. (2011). Design decisions in interactive geometry software. *ZDM, 43*(3), 373-387. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0327-4

Pierce, R. & Stacey, K. (2011). Using Dynamic Geometry to Bring the Real World Into the Classroom. I L. Bu & R. Schoen (Red.), *Model-Centered Learning* (bd. 6, s. 41-55). SensePublishers.

Repstad, K. & Tallaksen, I. M. (2011). *Variert undervisning - mer læring : lærerens metodebok* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of Investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(4), 123-132. https://doi.org/10.1007/bf02652747
Strässer, R. (2007). Everyday Instruments: On the Use of Mathematics. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (s. 171-178). Boston, MA: Springer US.
Svenning, L. (2013). *Algebra i lærebøker 8.-trinn: En komparativ studie av lærebøkers introduksjon til algebra* (Masteroppgave, Universitetet i Agder). Hentet fra https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/194880
Taksonomier. Hentet 9. mars 2016 fra https://www.fylkesmannen.no/Documents/Dokument%20FMVE/Barnehage%20og%20oppl%C3%A6ring/Skole/Arbeidslivsfag/Arbeidslivsfag160413_Taksonomier.pdf
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf
Utdanningsdirektoratet. (2019). *Forslag - læreplan i matematikk fellesfag 1.-10. trinn*. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/filer/lareplan/fagfornyelsen/lareplanutkast/mat1-05---lareplan-i-matematikk-fellesfag-1.-10.-trinn.pdf

10 Vedlegg

Vedlegg A: Kompetanse på nederste, mellomste og øverste trinn (1 side)

Vedlegg B: Opplæringsmateriellet Maximum 8 (19 sider)

Vedlegg C: Opplæringsmateriellet Nummer 8 (35 sider)

Kompetanse på nederste trinn: Å huske og gjengi – Reprodusere og oppfatte			
Forklaring:	**Ord:**		**Eksempelspørsmål:**
Reprodusere. Eleven har mottatt og oppfattet. Eleven gjengir, beskriver og lister opp det han/hun har lært. **Følge.** I en aktuell arbeidssituasjon benytter eleven en metode som er foreslått av andre, eller som eleven har lært seg å bruke. Eleven følger metoden og har vansker med å finne alternative metoder.	Reprodusere Oppdage Beskrive Føle Iaktta Lytte Oppfatte Observere Motta inntrykk Følge med Sanse	Merke Gjenta Gjenkjenne Gjengi Angi Navngi Definere Liste opp Beskrive Skjelne Streke under	Hva skjedde…? Hvor mange..? Hva er …? Hvem var det som…? Kan du navnet på…? Hva menes med…? Beskriv hva som hendte da….? Hvilket svar er riktig..?
Kompetanse på mellomste trinn: Å forstå og anvende – Anvende og imitere			
Forklaring:	**Ord:**		**Eksempelspørsmål:**
Anvende. Eleven har forstått og kan tillempe kunnskap. Eleven kan forklare med egne ord, og bruke kunnskapen i ulike situasjoner. **Velge**. Mellom ulike metoder velger eleven den/de som han/hun mener er mest egnet for formålet. Eleven kan gi relevant begrunnelse for valget. Eleven viser vilje til å forsøke å løse oppgaven på en annen måte, dersom han/hun får det dårlig til på den første.	Påvise Forklare Fortelle Forberede Ta initiativ Formulere Gjøre rede for Bruke Imitere Forstå Ta ansvar for Løse	Sammenlikne Anvende Verdsette Velge Tolerere Beregne Kommunisere Organisere Tilpasse Utføre Fortolke	Hvordan kan du forklare…. Oppklar hvorfor… Forklar/ belys… Vet du om et annet tilfelle der…? Grupper i forhold til følgende egenskaper… Hva ville endres hvis… Hvilke spørsmål ville du stille om..
Kompetanse på øverste trinn: Å analysere og vurdere – Vurdere og utvikle			
Forklaring:	**Ord:**		**Eksempelspørsmål:**
Vurdere. Eleven har integrert kunnskap og kan analysere. Eleven kan sammenlikne, rangere og trekke konklusjoner med begrunnet vurdering og kritisk sans. **Utvikle**. Eleven løser oppgaver der han/hun må bruke ulike metoder for å nå målet. Eleven viser evne og utholdenhet til å komme i mål, selv om oppgaven er krevende.	Vurdere Kritisere Planlegge Videreutvikle Presisere Produsere Utvikle Drøfte Utlede Realisere Styre Justere Utvide	Integrere verdier Diskutere Dokumentere Improvisere Kombinere Integrere Forme Generalisere Trekke slutninger Beherske Beslutte Påvirke Fornye	Hvordan er … sammenlignet med…? Hva ser du som andre mulige resultater? Hvorfor skjedde forandringene? Hva er noen av årsakene til disse problemene? Hvordan skiller du mellom..og…? Er det en bedre løsning å..? Hvordan ville du ha håndtert…? Hvilke endringer på … vil du anbefale? Hvordan ville du like det hvis… hvorfor? Finn en annen løsning på.. Utvikle et forslag til noe som kan…

Tabell 14: Kompetanse på øverste, mellomste og nederste trinn

Kurs

maximum 8

Kapittel 2

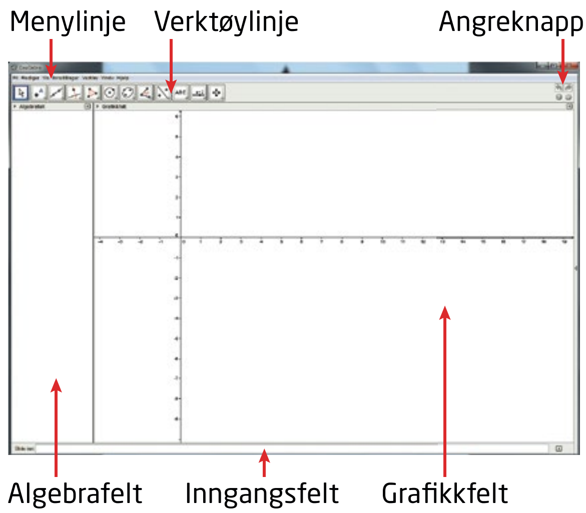
Bokmål

GYLDENDAL
UNDERVISNING

Introduksjon til dynamisk geometri med *GeoGebra*

Med et dynamisk geometriprogram kan du tegne og konstruere figurer som du kan trekke og dra i. I noen slike programmer kan du også bruke koordinatsystem og/eller utføre beregninger.

Kursene til *Maximum* baserer seg på bruk av *GeoGebra* som verktøy for dynamisk geometri. *GeoGebra* er ett av flere dynamiske geometriprogram. Siden det er tilgjengelig gratis, kan mange bruke dette. I deler av prøver og eksamen der hjelpemidler er tillatt, kan du bruke dynamisk geometri hvis du vil. Du må alltid passe på at alle svar, konstruksjoner og beregninger skal være like godt forklart og begrunnet uansett hvilke hjelpemidler du bruker.

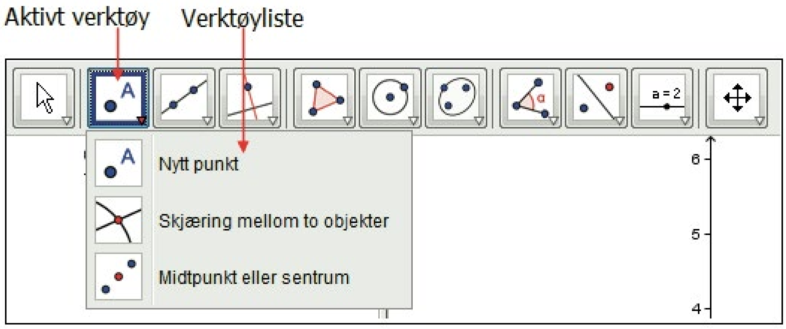


Hvis du vil laste ned *GeoGebra* på din egen datamaskin, kan du lese om dette på *GeoGebra* sitt eget nettsted: *www.geogebra.no*

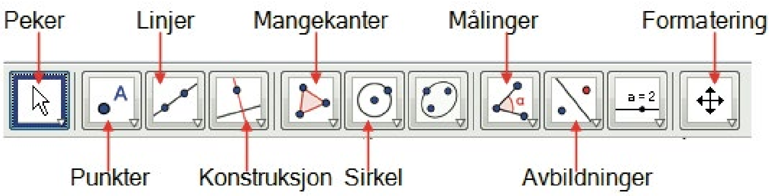
Figuren over viser hvordan GeoGebravinduet er inndelt i ulike felt.

Du kan bruke "Vis-menyen" til å bestemme hvilke felt som skal vises og om du skal ha koordinatsystem og rutenett på eller av.

Verktøylinja består av en rekke funksjonsknapper. En blå ramme viser hvilket verktøy som er aktivt. På hver knapp er det en liten pil i nedre, høyre hjørne.



Når du peker på denne, og den blir rød, kan du klikke på den slik at det vises en hel liste med verktøy. I denne listen kan du velge verktøy.



Verktøyene er gruppert slik at liknende verktøy finnes på samme liste. Alt du lager, enten det er punkter, linjer, sirkler eller noe annet, kalles for "objekter".

G.2.1 Får du det til?

a Skru av og på rutenett og koordinatsystem.
Avslutt med et helt blankt grafikkfelt.

b Velg verktøyet "linjestykke" og klikk to ulike steder i grafikkfeltet.

c Hva ser du i algebrafeltet nå?

d Velg verktøyet "midtpunkt", pek på linjestykket AB og klikk når dette er uthevet.

e Velg pekepila (hurtigknapp er Esc). Pek på punktet B. Klikk, hold inne museknappen og trekk i punktet.

Hva skjer med midtpunktet?

f Se i algebrafeltet. Hvordan vises de tre punktene A, B og C?

Forklar likheter og forskjeller mellom de tre punktene.

G.2.2 Hva heter hva?

a Bruk verktøyknappen "Regulær mangekant". Klikk to steder i grafikkfeltet og endre antall sidekanter til 5.

b Bruk linjestykkeverktøyet til å konstruere alle de fem diagonalene i figuren.
Hva slags figur avgrenses av de fem diagonalene?

c Bruk verktøyet "Skjæringspunkt" til å definere skjæringspunktene mellom diagonalene.

d Se i algebrafeltet. Hva er forskjellen på navnsetting av punkter og linjestykker?

e Bruk verktøyknappen "Regulær mangekant". Klikk på to av skjæringspunktene mellom diagonalene. Bruk to punkter ved siden av hverandre i rekkefølge mot klokka.

Markeres den inneste figuren?

f Hvilke punkter er det mulig å trekke og dra i?
Hvis du har konstruert rett skal hele figuren bare forandre størrelse, ellers ikke bli endret.

Tegne og måle med *GeoGebra*

Ved hjelp av tegne- og måleverktøyene i *GeoGebra* kan du undersøke mange geometriske sammenhenger. Et tegneverktøy kalles også for en "makro". Det vil si en ferdig programmert konstruksjon. Disse verktøyene kan du ikke bruke når du skal vise at det er du som kan konstruere, fordi det er programmererens konstruksjon som vises.

Aktuelle tegneverktøy:

Det er lurt å endre noen navn på punkter underveis, slik at figuren får rett nevnsetting til slutt.

Tegn en firkant ABCD der AC = CD = 4, ∠A = 45°,
AB || CD og BC ⊥ AB.

1 Tegner en linje a, grunnline. Ender B til W.

2 Tegner ∠A = 45° med verktøyet vinkel med fast størrelse.

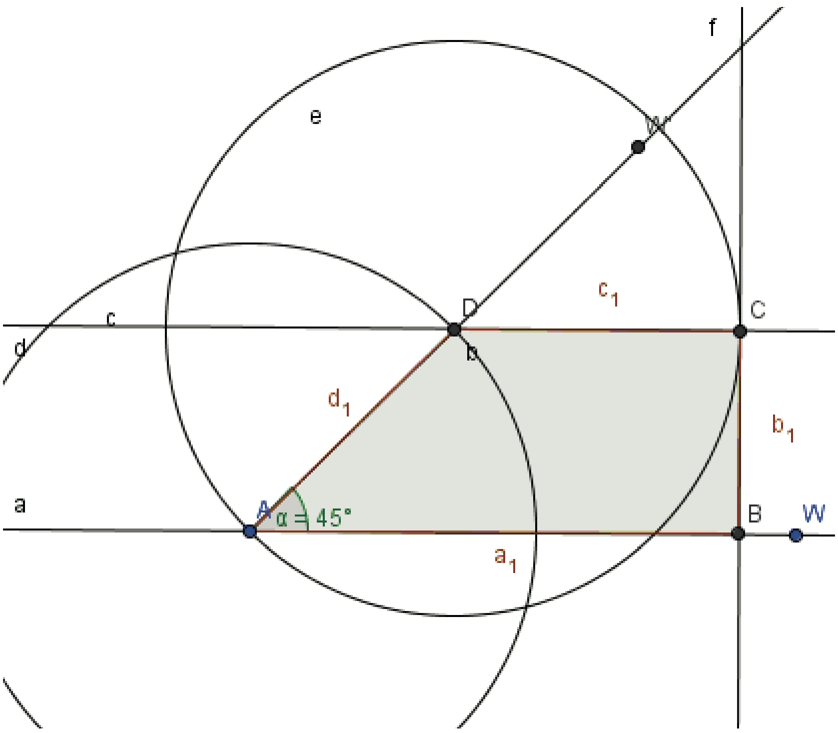
3 Tegner sirkel med sentrum A og lengde 4,
finner punkt D på linje c.

4 Tegner parallell med AB gjennom D.

5 Tegner sirkel med sentrum D og lengde 4, finner punkt C.

6 Tegner normal til AB gjennom C, finner punkt B.

7 Markerer mangekant ABCD.



Husk at vinkler kan defineres både med og mot klokka!

G.2.4

Tegn en trekant ABC der $AC \perp AB$, $AB = 5$ og $\angle B = 35°$.

Måleverktøyene kan brukes til å måle vinkler, avstander og arealer.

Når du måler en vinkel må du alltid ha tre punkter; toppunktet og ett punkt på hvert vinkelbein. Klikk på alle tre i rekkefølge slik at toppunktet er det midterste. Det er forskjell på rekkefølge med eller mot klokka.

G.2.5

Tegn to stråler ut fra samme endepunkt.

a Mål vinkelen mellom strålene med klokka.

b Mål vinkelen mellom strålene mot klokka.

c Endre på vinkelåpningen.

Hva er alltid summen av de to målte vinklene?

G.2.6

Tegn en trekant ABC der $\angle A = 30°$ og $\angle B = 90°$.

a Bruk måleverktøyet til å måle lengden av den korteste og den lengste siden i trekanten.

b Endre på lengden av AB og følg med på målene.

Hvor lang er den lengste siden i forhold til den korteste?

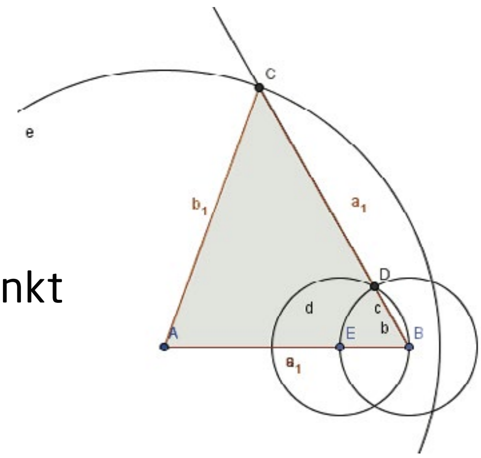
Konstruksjon med *GeoGebra*

I matematikken skiller vi mellom å tegne og å konstruere. Når vi konstruerer er alt basert på punkter, linjer og sirkler som er avhengig av hverandre. I *GeoGebra* finnes det mange ferdige konstruksjonsverktøy som for eksempel midtnormal og parallell. Hvis du bruker slike verktøy viser du ikke at du kan konstruere. Disse verktøyene er fine når vi skal tegne eller lage skisser, men er ikke godkjent i en konstruksjon.

Eksempel 1

Konstruer en trekant ABC der AB = 8, ∠B = 60° og AC = 9

Løsningsforslag



1 Bruker "Linjestykke med fast lengde". Klikker en gang for å sette av A, velger lengde 8.

2 Lager en sirkel med sentrum i A og et punkt på AB på sirkelperiferien. Foreløpig heter dette punktet C.

3 Lager en ny sirkel med sentrum i C og B på sirkelperiferien.

4 Tegner strålen fra B gjennom skjæringspunkt for sirklene. ∠B er nå 60°.

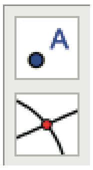
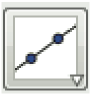
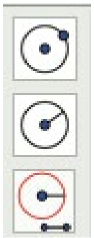
5 Bruker "Sirkel definert ved sentrum og radius". Sentrum i A og radius = 9.

6 Definerer skjæringspunkt mellom sirkelen fra A og strålen fra B.

7 Bruker "Mangekant" og klikker i rekkefølge A → B → E

8 Skifter navn på C og E ved å høyreklikke på punktet og velge "Gi nytt navn".

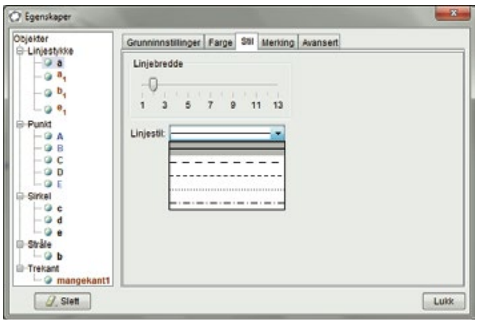
Dette er tillatt i konstruksjoner:

	• Nytt punkt • Skjæring mellom to objekter
	Alle linjeverktøy
	• Sirkel • Sirkel definert ved sentrum og radius • Passer

I tillegg kan du bruke verktøy for mangekant til å markere tydelig den endelige figuren.

Endre utseende

Det kan fort bli mange hjelpelinjer og sirkler før en konstruksjon er ferdig. Det er viktig at du ikke skjuler disse. For å få bedre oversikt kan det likevel være lurt å endre utseende ved hjelp av stiplede linjer, ulike farger, linjebredder med mer.



Høyreklikk på et objekt du vil endre og velg Egenskaper… Dette kan du gjøre enten i Algebrafeltet eller i Grafikk-feltet. Du får opp et hjelpevindu der alle objektene dine er listet til venstre.

Det objektet du er i ferd med å endre er markert som grått. Det er de to arkfanene "Farge" og "Stil" som er mest aktuelle å bruke.

Vis konstruksjonsforklaring

GeoGebra lager en egen konstruksjonsforklaring som viser punkt for punkt hvordan konstruksjonen er laget. Du finner dette på Vis-menyen: Vis → Konstruksjonsforklaring...

Du kan skrive ut konstruksjonsforklaringen som et eget dokument. Når du skal vise andre hvordan du har konstruert i *GeoGebra* bør du legge ved en konstruksjonsforklaring

G.2.3

Konstruer

a En trekant ABC der AB = 6, C ligger like langt fra A som fra B og avstanden fra C til AB = 8.

b Fortsett på den samme figuren.
Punktet D ligger slik at CAD = 90 og AD = 5.

c Endre alle hjelpelinjer til stiplet.
Tegn opp firkanten ABCD som en mangekant.

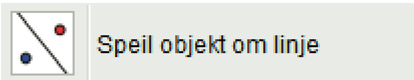
Symmetri med *GeoGebra*

En symmetrisk figur har samme form og mål som originalen, men er plassert på et annet sted. En symmetrisk figur kalles også en avbildning. Vi har tre hovedtyper av symmetri:

- Speilsymmetri
- Rotasjon
- Parallellforskyving

Å lage en speilsymmetrisk figur

Vi bruker verktøyet:



Speilingslinja kan være en linje, stråle eller et linjestykke, for eksempel en side i en mangekant.
Du kan speile alle typer objekter; punkt, linje, sirkel, mangekant.

G.2.7

Tegn en trekant (mangekant med tre hjørmer).
Tegn en speilingslinje utenfor trekanten.

a Speil trekanten om speilingslinja.

b Bruk pekeverktøyet.

Kan du endre på originalen?

Kan du endre på avbildningen?

G.2.8

Bruk verktøyet "regulær mangekant". Tegn en trekant, en firkant, en femkant og en sekskant. Bruk god avstand.

a For hver av figurene; bruk "Speil objekt om linje" til å speile figurene om sin egen sidekant.
Gjenta for alle sidekantene til figuren.

b For hvilke av disse figurene kan du bruke denne metoden til å "flislegge" hele tegneflaten slik at det ikke oppstår åpninger mellom "flisene"?

c For hver av figurene; finn en forklaring på hvorfor det er mulig eller ikke mulig.

Å lage en rotasjonssymmetrisk figur

For å rotere et objekt bruker vi verktøyet "Roter objekt om punkt med fast vinkel." Verktøyet ligger under "Speil objekt om linje".

Eksempel

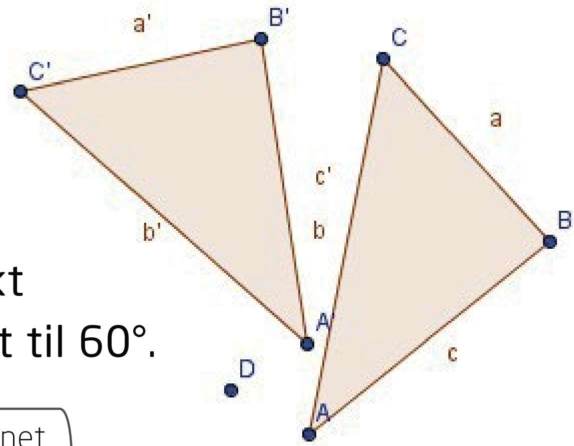
Tegn en tilfeldig trekant ABC. Sett av et tilfeldig punkt D utenfor trekanten. Roter trekant ABC 60° om D.

Løsningsforslag

Forklaring:

1 Tegner trekant ABC og punkt D.

2 Velger verktøy "Roter objekt om punkt med fast vinkel" og endrer gradetallet til 60°.



Pass på at ikke gradtegnet blir slettet.

G.2.9

Tegn en tilfeldig trekant ABC. Roter trekanten 90 om C.
Gjenta to ganger.

G.2.10

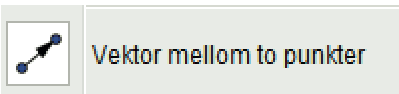
Tegn en tilfeldig mangekant. Sett av et rotasjonssentrum utenfor mangekanten. Bruk rotasjon til å lage et mønster med 45 graders rotasjonssymmetri.

Å lage en parallellforskjøvet figur

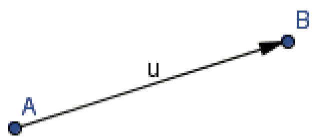
En figur kan parallellforskyves ved at hvert punkt på figuren flyttes like langt langs parallelle linjer. Det betyr at alle punkter i originalen flytter seg like langt og i samme retning. For å bestemme hvor langt og i hvilken retning, bruker vi en vektor. En vektor tegnes som en pil.

Vektor

En vektor er et linjestykke med en bestemt retning.



Verktøy for vektor.



Vektor tegnet med GeoGebra.

Eksempel

Tegn en tilfeldig trekant ABC. Parallellforskyv trekanten i en retning normalt på AB og med avstand 2 til originalen.

Løsningsforslag

Forklaring:

1 Tegner trekant ABC

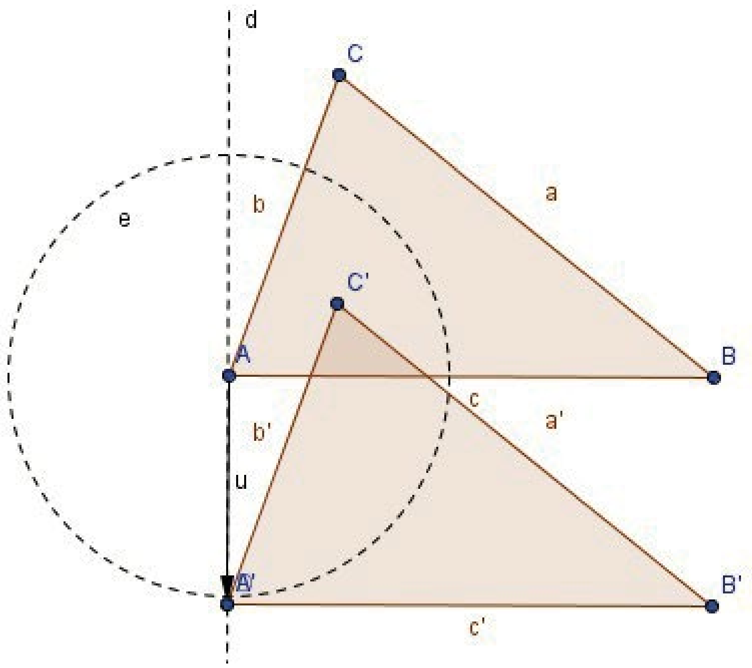
2 Tegner normalen til ABC i A.

4 Konstruerer en sirkel med sentrum i A og radius 2.

5 Setter av vektor fra A til skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen.

6 Bruker verktøyet "Flytt objekt med vektor" til å forskyve ABC langs vektor u.

"Flytt objekt med vektor" ligger under "Speil objekt om linje".



G.2.11

Tegn en tilfeldig vektor AB. Tegn også en vektor AC som danner ca. 60° med AB og er ca halve lengden av AB.
Tegn en tilfeldig trekant DEF.

a Parallellforskyv trekanten med både AB og AC.

b Parallellforskyv begge avbildningene på nytt med både AB og AC.

c Hvor mange ulike trekanter får du?
Kan du forklare det du ser?

d Gjør endringer på originalen og på vektorene, og studer hvordan mønsteret endrer seg.

GeoGebra og koordinatsystemet

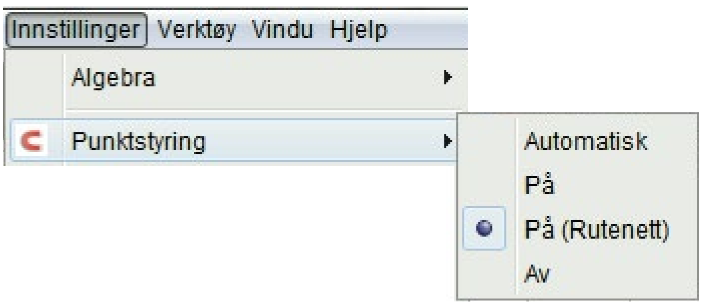
Når vi bruker koordinatsystemet i *GeoGebra*, er det som regel lurt å ha på rutenett i bakgrunnen også. Du finner av/på for rutenett under Vis-menyen. Hvis du har rullehjul eller tilsvarende på datamusa, kan du forstørre eller forminske koordinatsystemet ved å rulle på dette mens du peker i grafikkfeltet.

Punkter kan settes inn på ulike måter:

1 Bruk punktverktøyet, pek og klikk. Koordinatene til punktet vises mens du flytter musepekeren rundt i koordinatsystemet. Punktene nevngis alfabetisk etter hvert som du klikker dem inn i koordinatsystemet.

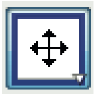
2 Du kan skrive i inntastingsfeltet. Hvis du skriver P=(2,1)+ enter, navngir du selv punktet ditt, og du er sikker på at det blir presist plassert.

3 Hvis du vet at alle punkter skal plasseres i skjæringspunktene mellom støttelinjene i rutenettet, kan du gjøre denne innstillingen:



Standard innstilling for punktstyring er "Automatisk".
Du kan også endre utseendet til punktene under Innstillinger → Punkttype.

Å endre skala på aksene:
Noen ganger er det upraktisk eller feil å bruke samme skala på *x*-aksen og *y*-aksen. Når du skal endre disse kaller vi det "å skalere" aksene.

Bruk Flytt-vektøyet: 

Pek på aksen du vil endre, klikk og dra i aksen. Se hvordan skalaen endrer seg. Du kan også bruke Flytt-verktøyet til å skyve på hele koordinatsystemet, for eksempel hvis du bare vil vise første kvadrant.

G.2.12

Du trenger et koordinatsystem med rutenett.

a Sett inn punktene A=(-2,-2), B=(3,0) og C=(1,3).
Tegn opp trekanten ABC som en mangekant.

b Speil trekant ABC om *y*-aksen. Speil avbildningen om *x*-aksen.
Speil den nye avbildningen om *y*-aksen.

c Åpne et nytt vindu. Bruk verktøy for speiling, rotasjon og parallellforskyving til å lage to ulike geometriske mønstre.

d Beskriv dine egne mønstre med ord, slik at en annen elev kan klare å lage tilsvarende.

NUMMER 8

Geometri i GeoGebra 5.0

Verktøyopplæring til elever

Innhold

Dynamisk geometriprogram

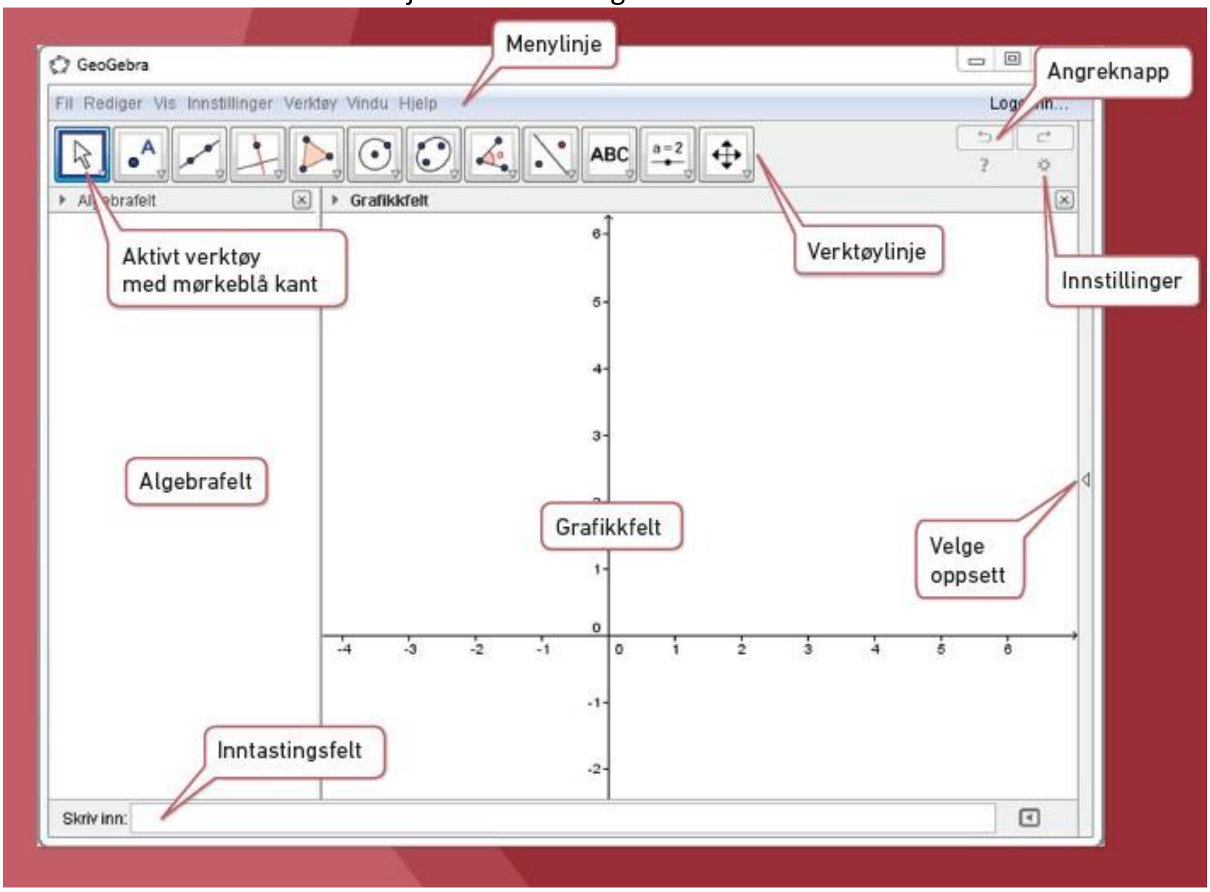
GeoGebra er et dynamisk geometriprogram. Det vil si at vi kan gjøre en del endringer på figuren vi tegner uten å måtte tegne den på nytt, figuren endres dynamisk. Dette gir oss mange muligheter til å utforske de geometriske figurene. Om vi konstruerer med passer og linjal vil slik utforsking være mer arbeidskrevende. Når vi arbeider med GeoGebra kan vi velge å arbeide på samme måten som med passer og linjal, å konstruere figurene. Imidlertid har vi en del verktøy å hjelpe oss med som gjør at vi kan tegne vinkler og en del former uten å konstruere. Vi sier derfor at vi tegner når vi bruker GeoGebra med alle verktøyene. I det som følger her, bruker vi de tilgjengelige verktøyene og vi sier derfor at vi tegner, ikke konstruerer.

Ordet GeoGebra er sammensatt av to deler: Geo som kommer fra geometri og Gebra som kommer fra algebra. GeoGebra kan også brukes til arbeid med algebra og funksjoner. Nå er det imidlertid geometri som er i fokus.

I opplæringen leser du beskrivelser av hvordan noe skal gjøres og løser en eller flere oppgaver for å øve selv. Skjermbildene som vises her er fra GeoGebra 5.0 eller senere. Du kan laste ned GeoGebra fra www.GeoGebra.no. Programmet er gratis.

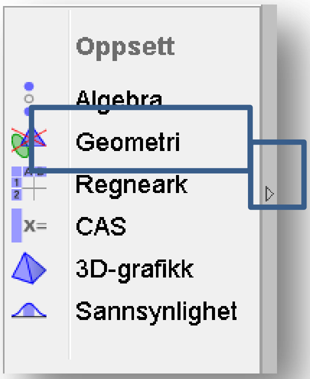
Skjermbildet i GeoGebra

Når du starter GeoGebra ser skjermbildet vanligvis slik ut:



Oppsett av skjermbildet

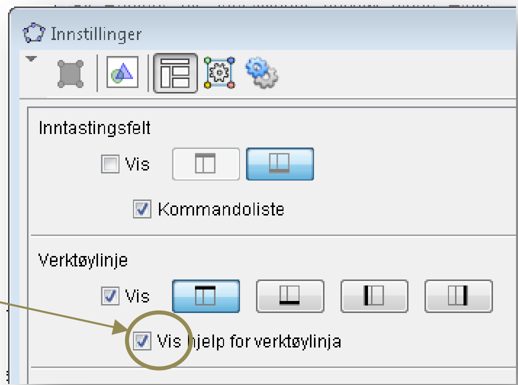
Når vi bruker GeoGebra i geometri, er det som oftest smart å velge oppsettet **Geometri.** Da har vi de funksjonene vi trenger lett tilgjengelig, nemlig verktøylinja og grafikkfeltet. Vinduet for valg av oppsett vises på nytt om du klikker på den lille pilen i høyre kant av grafikkfeltet.



Verktøylinja

Verktøylinja inneholder verktøyikoner utformet som knapper. Under hver knapp er det flere verktøy. Hvis vi klikker på den lille pilen i nederste høyre hjørne av en knapp, vises en liste med de verktøyene som finnes under knappen. Vi kan da velge hvilket verktøy knappen skal representere. Legg også merke til at når du holder musepekeren over et verktøy, vises en forklaring på hvordan verktøyet brukes.

Det kan være lurt å vise verktøytipsene til høyre på verktøylinja. Velg **Innstillinger, Utforming,** og huk av for **Vis hjelp for verktøylinja**



Punkt og sirkler

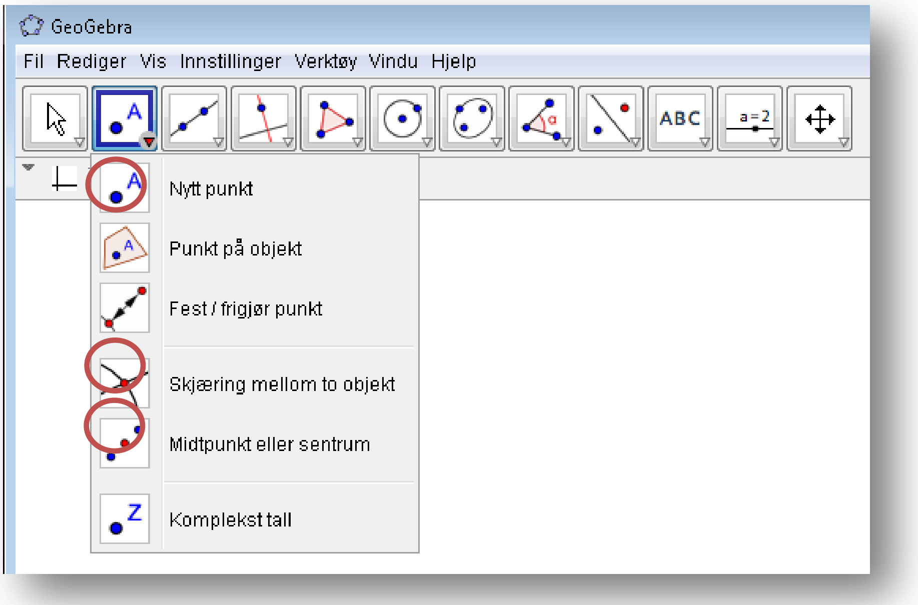
Punkt

Vi kan enten plassere punkt fritt, eller vi kan plassere dem på et objekt (en linje eller en sirkel) eller der to objekt skjærer hverandre. Når vi skal tegne punkt, bruker vi hovedsakelig tre verktøy:

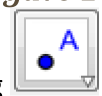
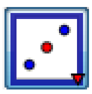
•verktøy til å avsette nytt **Punkt**

•verktøy som markerer **Skjæring mellom to objekt,** for eksempel mellom en sirkel og en linje

•verktøy som markerer **Midtpunktet** på et linjestykke eller mellom to punkt



Oppgave 1

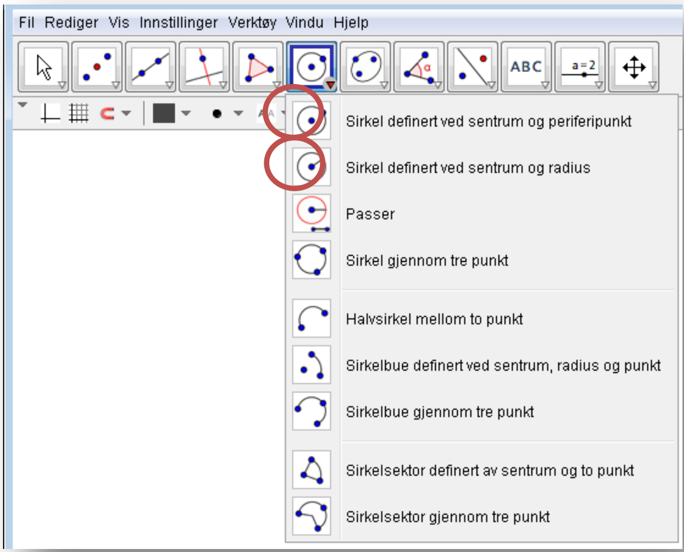
Velg  og tegn et punkt. Punktet får navnet *A*. Tegn et nytt punkt, *B*. Velg  Tegn et punkt midt mellom *A* og *B* ved å klikke først i *A*, deretter i *B*. Midtpunktet får navnet *C*.

Sirkel

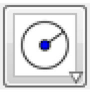
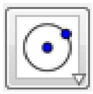
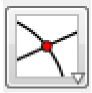
Vi skal i første omgang bruke to ulike framgangsmåter for å tegne en sirkel:

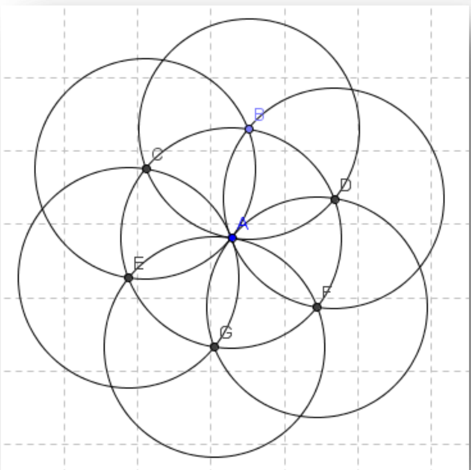
- sirkel der vi kjenner sentrum og radien
- sirkel der vi kjenner sentrum og et punkt på periferien

Disse verktøyene ligger under den samme knappen.



Oppgave 2

Tegn ved hjelp av  en sirkel med sentrum i *A* og radius lik 2. Bruk  og tegn en ny sirkel med sentrum på sirkelperiferien og med *A* som periferipunkt. Bruk  og marker de to punktene der de to sirklene skjærer hverandre. Tegn to nye sirkler med sentrum i disse skjæringspunktene og *A* på sirkelperiferien. Fortsett til du har tegnet denne figuren:

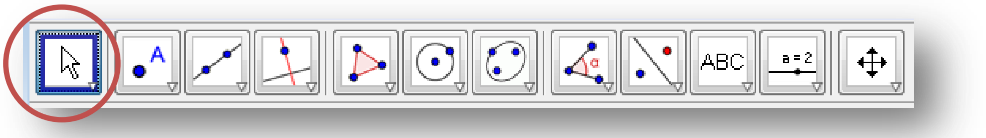


Lagre

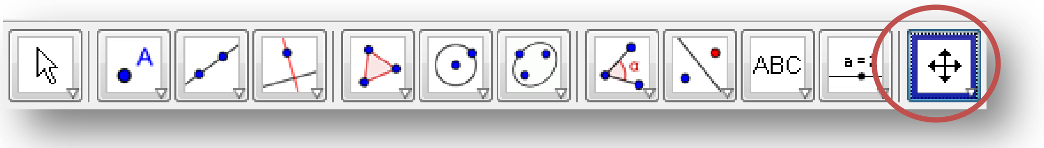
På filmenyen finner vi valget for å **Lagre** GeoGebra-filen vi har jobbet med. Den lagres med filtypen ggb, for eksempel oppgave2.ggb

To nyttige verktøy: «Flytt eller velg objekt» og «Flytt grafikkfeltet»

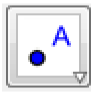
Med verktøyet **Flytt eller velg objekt** kan vi endre plasseringen av objekt i tegneflaten. Vi bruker også dette verktøyet for å velge hvilket objekt som skal være det aktive objektet. Det kan være smart å ha dette verktøyet som det valgte verktøyet når vi ikke er i ferd med å tegne noe. Å trykke på escape-tasten (esc) er det samme som å velge dette verktøyet.

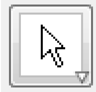


Med verktøyet **Flytt grafikkfelt** kan vi flytte tegneflaten, og dermed flytte alt vi har tegnet.



Oppgave 3

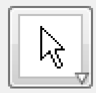
a Tegn en sirkel med radius lik 4. Bruk  og plasser punktet *B* på sirkelperiferien.

b Bruk verktøyet  og flytt på sirkelen ved å dra i sirkelbuen eller sentrum. Markøren er en pil når du kan flytte sirkelen. Følger *B* med?

c Flytt *B*. Hvis du har plassert *B* på sirkelbuen skal du nå bare kunne flytte *B* rundt på denne.

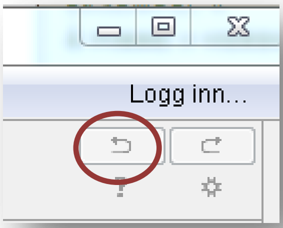
Oppgave 4

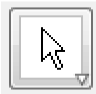
a Avsett to punkt, *A* og *B*. Tegn en sirkel med sentrum i *A* og med *B* på sirkelperiferien.

b Velg verktøyet  ved å trykke esc. Prøv å flytte sirkelen ved å dra i sirkelperiferien. Flytt punktene *A* og *B*. Hva skjer?

Slette og angre

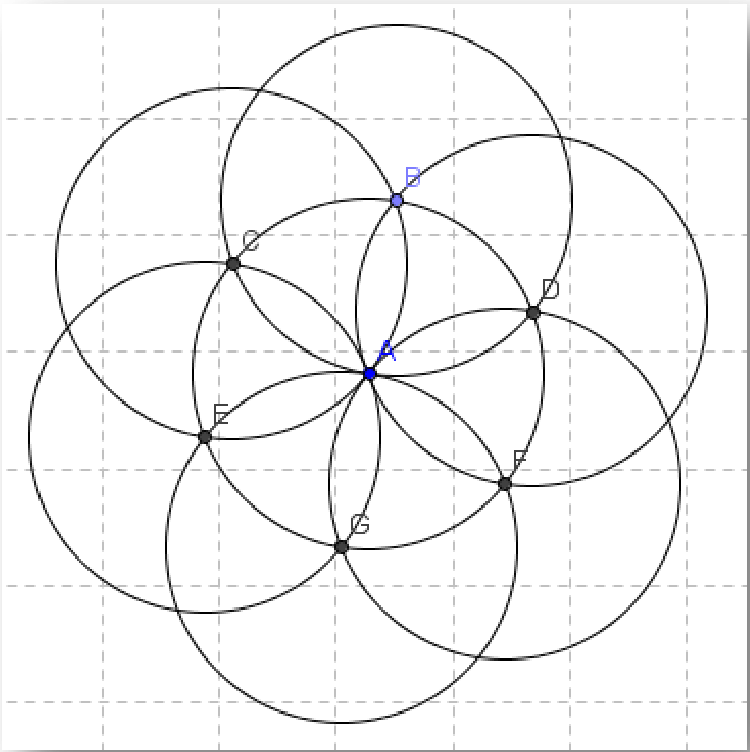
Når vi tar i bruk et nytt verktøy med mange muligheter må vi regne med at vi ikke alltid lykkes i første forsøk. Det er derfor viktig å kunne angre og slette når vi har gjort noe feil.
I GeoGebra kan du **angre** med **Ctrl + Z**. Alternativt kan du bruke knapp for å angre. Den finner du helt til høyre på verktøylinja.



For å **slette** et objekt, velger du objektet med  og trykker **Delete**. Hvis du sletter en sirkel, slettes bare sirkelen og ikke de punktene som bestemmer sirkelen. Når du sletter et objekt, vil alle andre objektene som er avhengige av det objektet du sletter også forsvinne.

Oppgave 5

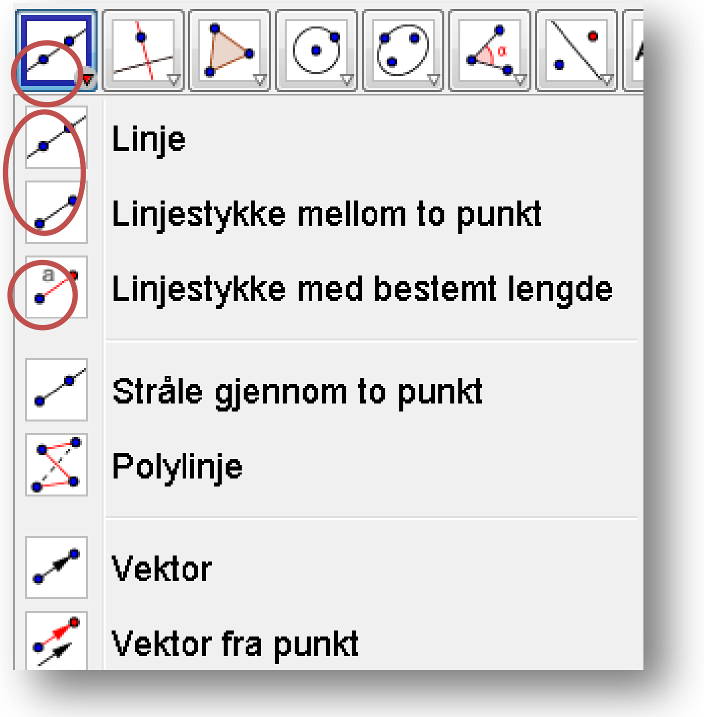
Tegn figuren under. Slett sirkelen med sentrum i *G*. Slett deretter sirkelen med sentrum i *C*. Hvor mye forsvinner? Slett nå sirkelen med sentrum i *A*. Kan du forklare hva som skjer?



Linjer

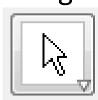
I GeoGebra kan du tegne
- en linje
- et linjestykke
- en stråle

Alle disse verktøyene ligger under den samme knappen.



Oppgave 6

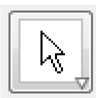
a Avsett to punkt *A* og *B*. Tegn ei linje som går gjennom de to punktene.

b Velg verktøyet  og flytt på linja ved å dra i streken, ikke et av de to punktene. Hvordan beveger den seg?

c Flytt på punktet *A*. Hva skjer nå med linja? Flytt punkt *B*. Hva skjer med linja?

Oppgave 7

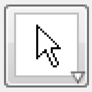
a Avsett tre punkt *A*, *B* og *C* som ikke ligger på samme linje. Tegn en stråle fra *A* gjennom *B* og en stråle fra *A* gjennom *C*. Tegn et linjestykke mellom *B* og C.

b Bruk  og se hva som skjer når du drar i linjene. Ikke dra i punkt som er markert på linjene, bare i selve streken som markerer linja. Prøv med alle tre linjene.

c Nå flytter du på punktene og observerer hvordan figuren endrer seg. Prøv med alle tre punktene.

Oppgave 8

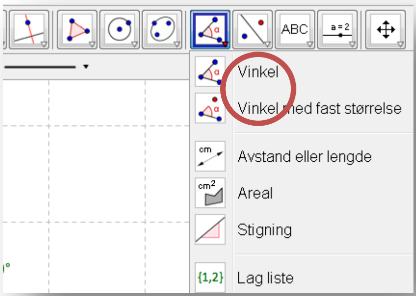
a Tegn et linjestykke *AB* som har lengde 8. Et lite stykke over plasserer du et nytt linjestykke *CD* som har lengde 5. Tegn linjestykket *AC* og *BD*. Hva slags figur har du nå fått?

b Bruk  og prøv å flytte på de fire linjestykkene ved å dra i selve linjene.

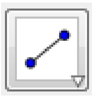
c Prøv å flytte på hvert av de fire punktene og observer hva som skjer. Når du har eksperimentert litt med flytting, kan du da si at du fremdeles har en figur som oppfyller kravene du startet opp med? Forklar.

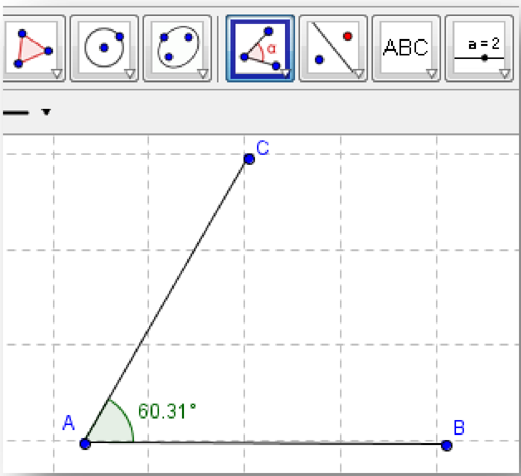
Måle og markere størrelsen av en vinkel

Vi tegner vinkler ved å tegne to stråler eller to linjestykker som starter i sammepunkt. Dersom vi tegner to linjer som skjærer hverandre vil vi få flere vinkler.
GeoGebra har et verktøy som vi bruker når vi vil måle og markere vinkler. Verktøyet heter **Vinkel**.



Vinkelen mellom to linjestykker

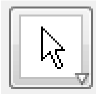
1 Tegn en vinkel ved å tegne to linjestykker med 
Begge skal starte i det punktet som blir vinkelens toppunkt.
2 Velg verktøyet **Vinkel.**
3 Klikk på vinkelbeina, rekkefølgen skal være mot klokka.



Oppgave 9

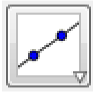
a Tegn to linjestykker slik at de danner en vinkel med toppunkt i enden av de to linjestykkene.

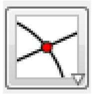
b Mål vinkelen mellom dem.

c Bruk verktøyet  og flytt på linjestykkenes endepunkt. Prøv med alle tre punktene. Følg med på hvordan vinkelen endres. Kan du lage en vinkel som er 90°? En som er 120°? 180°? 275°? 354°?

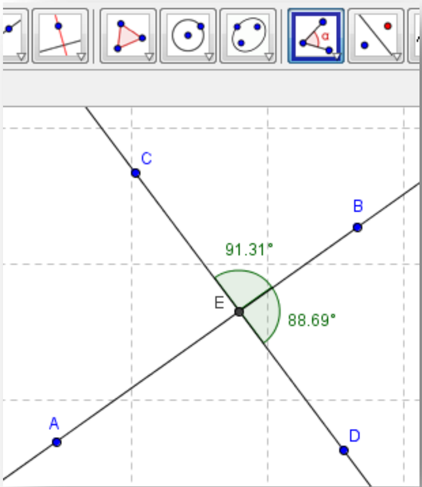
Vinkler som dannes av to linjer som skjærer hverandre

Når vi skal måle en av vinklene som dannes av to linjer som skjærer hverandre, må vi bruke tre punkt (et i toppunktet og et på hvert vinkelbein) for å markere hvilken vinkel vi skal måle.

1 Tegn to linjer som skjærer hverandre ved hjelp av 

2 Marker skjæringspunktet mellom linjene med  Dette blir vinklenes toppunkt.

3 Mål vinkelen ved å klikke i et avsatt punkt på første vinkelbein, deretter toppunktet og til slutt i et avsatt punkt på andre vinkelbein. Rekkefølgen på vinkelbeina skal være mot klokka.



Oppgave 10

a Tegn to linjer somkrysser hverandre. Marker punktet der de to linjene skjærer hverandre. Mål alle fire vinklene som dannes av de to linjene.

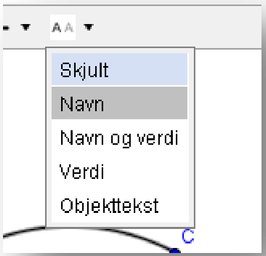
b Endre vinklene ved å flytte på punktene som linjene går gjennom. Kan du se noen sammenheng mellom størrelsen på vinklene?

Oppgaver i NUMMER 8: 3.4, 3.8

Å endre linjestil eller farge, og vise navn på objekt

Vi kan endre farge og stil på hjelpelinjer for å framheve det objektet vi egentlig skal lage.

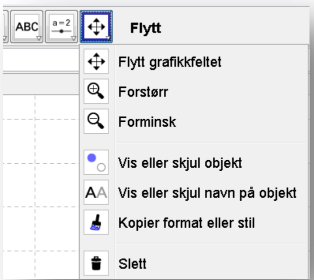
Bruk verktøyet **Flytt eller velg objekt** (Esc) og klikk på objektet du vil endre på. Velg **farge** eller **linjestil/punktstil/linjetykkelse** som vist over. Vi kan også velge om vi vil vise navnet på eller verdien til et objekt, eller ingen av delene.



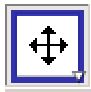
Ved å høyreklikke på et objekt og klikke på **Egenskaper** fra menyen som dukker opp, får vi enda flere muligheter.

Oppgave 11

Bruk sirkler, linjer og punkt og tegn en snømann og et hus.Forstørre og forminske tegningen
Vi kan forstørre eller forminske tegningen ved å holde ctrl-tasten nede mens vi klikker på henholdsvis + eller −. Det fins også verktøy til å forstørre eller forminske.



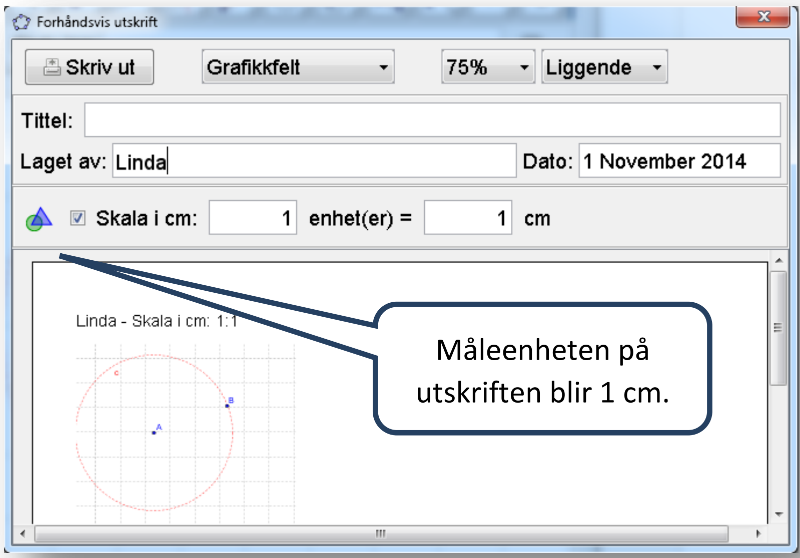
Oppgave 12

Tegn en sirkel med radius lik 3. Forstørr og forminsk figuren. Flytt på arket ved hjelp av 

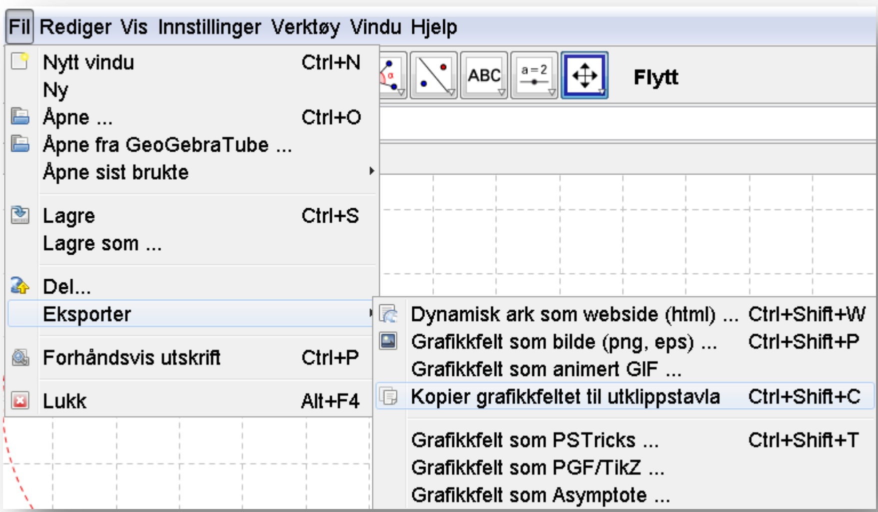
Lagre og skrive ut

På filmenyen finner vi valget for å **Lagre** GeoGebra-filen vi har jobbet med. Den lagres med filtypen ggb, for eksempel oppgave8.ggb

Utskrift finner vi også på fil-menyen, det heter **Forhåndsvis utskrift**. Du kan også bruke **ctrl+p**.



Vi kan skrive ut på mange måter. Det lureste er ofte å **lime inn bildet i et tekstdokument** slik at vi kan skrive forklaring til tegningen. Hvis vi har Windows 7 er det greit å bruke utklippsverktøyet. En annen mulighet er å velge **Eksporter** og **Kopier grafikkfeltet til utklippstavla** fra filmenyen. Du kan da lime bildet inn i tekstdokumentet med **ctrl + v**.

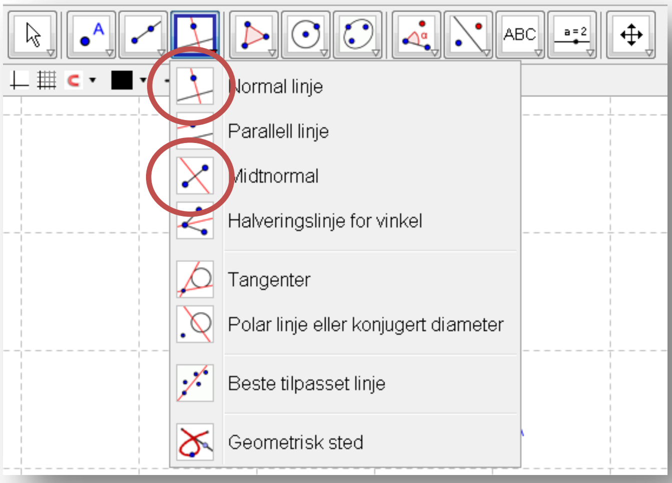


Oppgave 13

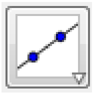
Tegn et hus, lagre tegningen og skriv den ut dersom du har tilgang til skriver.

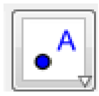
Å tegne normaler

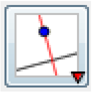
To verktøy er aktuelle når vi skal tegne normaler: **Normal linje** og **Midtnormal**.

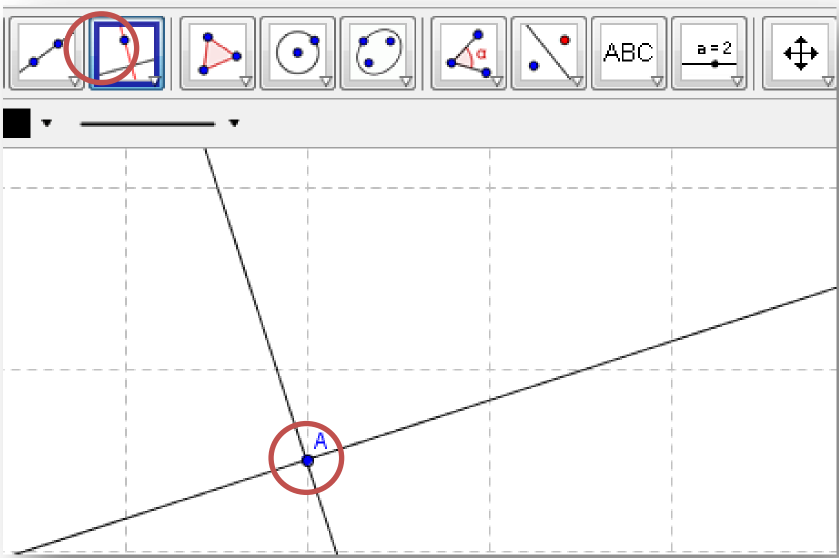


Å oppreise en normal

1 Tegn linja normalen skal oppreises på ved hjelp av 

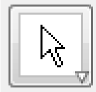
2 Marker det punktet på linja som normalen skal oppreises i ved hjelp av 

3 Velg verktøyet **Normal linje** , klikk på linja og deretter i det punktet normalen skal oppreises i.



Oppgave 14

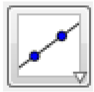
a Tegn en linje og et punkt *C* på linja. Tegn normalen til linja gjennom punktet *C*.

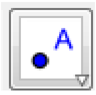
b Bruk  og flytt på linja både ved å dra streken og ved å dra i de to punktene linja går gjennom. Hva skjer med normalen?

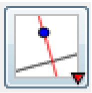
c Prøv å flytte på normalen ved å dra i selve normallinja.

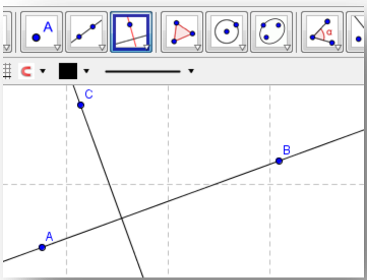
d Prøv å flytte normalen ved å flytte punktet *C* som den er oppreist i.

Å nedfelle en normal

1 Tegn linja du skal nedfelle normalen på med 

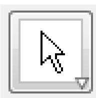
2 Avsett punktet normalen skal nedfelles fra med 

3 Velg verktøyet **Normal linje** , klikk i punktet og deretter på linja.



Oppgave 15

a Tegn en rett linje. Merk av et punkt *C* som ikke ligger på linja. Tegn normalen fra punktet *C* til linja.

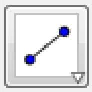
b Bruk  og flytt på linja både ved å dra i selve linjestykket og ved å dra i de to punktene linja går gjennom. Hva skjer med normalen?

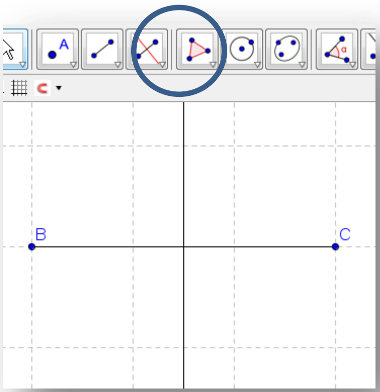
c Prøv å flytte på normalen ved å dra i selve normallinja.

d Prøv å flytte normalen ved å flytte punktet den er nedfelt fra.

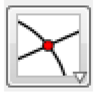
Oppgaver i NUMMER 8: 3.13, 3.14

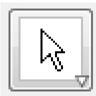
Midtnormal

1 Tegn et linjestykke med .
2 Velg verktøyet **Midtnormal.**
3 Klikk på linjestykket.



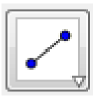
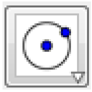
Oppgave 16

a Tegn et linjestykke. La det være omtrent 7 ruter langt. Tegn midtnormalen på dette linjestykket. Marker skjæringspunktet mellom linjestykket og normalen med .

b Bruk  og flytt på linjestykket, både ved å dra i selve linja og ved å flytte på endepunktene. Hva skjer med normalen?

c Kan du flytte på midtnormalen uten å flytte på linja?

Oppgave 17

a Tegn et linjestykke *AB* med . Tegn midtnormalen på linjestykket. Plasser et punkt *C* på midtnormalen, et lite stykke over *AB*. Bruk  og tegn en sirkel med sentrum i *C* og med *A* på sirkelperiferien.

b Hvor ligger *B* i forhold til sirkelen?

c Tegn linjestykkene *AC* og *BC*. Hva kan du si om lengden til disse to linjestykkene?

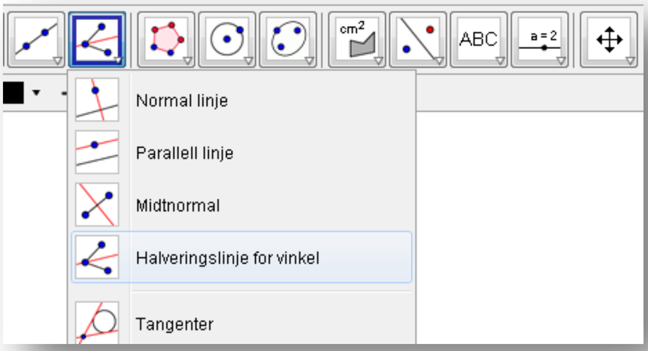
d Bruk  og flytt *C*. Hva skjer med *AC* og *BC*?

e Hva kan du si er felles for alle punkt som ligger på denne midtnormalen?

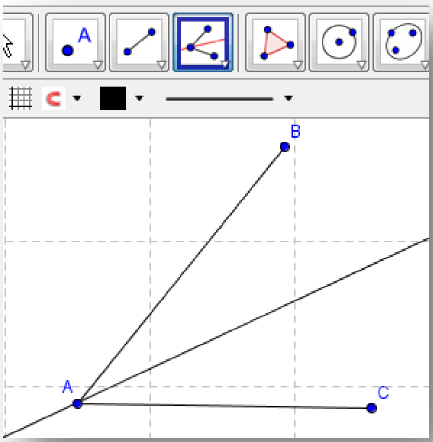
Oppgave 3.17 og 3.18 i NUMMER 8

Å halvere en vinkel

Vi har et eget verktøy som kan brukes til å halvere vinkler.

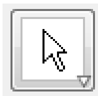


1 Tegn en vinkel ved hjelp av to linjestykker.
2 Halver vinkelen ved å klikke i tre punkt, først et avsatt punkt på det ene vinkelbeinet, deretter i toppunktet, og til slutt i et avsatt punkt på det andre vinkelbeinet.



Oppgave 18

a Tegn en vinkel ved å tegne to stråler som starter i punkt *A*. Tegn deretter halveringslinja for denne vinkelen.

b Bruk  og flytt på strålene og de punktene de går gjennom. Hva skjer med halveringslinja?

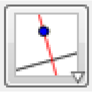
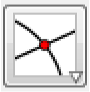
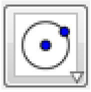
Oppgave 19

a Tegn en vinkel ved å tegne to stråler som starter i punktet *A*. Halver vinkelen. Mål de to vinklene du nå har fått. (Tips: Før du måler vinkelen må du avsette et punkt på halveringslinjen, slik at du har et punkt å klikke i når du bruker verktøyet **Vinkel**.)

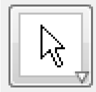
b Flytt på vinkelbeina. Hva skjer med halveringslinjen og størrelsen på de to vinklene?

c Flytt på vinkelbeina slik at vinkelen blir over 180°. Hva skjer med halveringslinja og de to vinklene?

Oppgave 20

a Tegn en vinkel ved å tegne to stråler som starter i *A*. Tegn deretter halveringslinja til vinkelen. Plasser et punkt *D* på halveringslinja. Bruk  og nedfell en normal fra *D* på hver av de to strålene som danner vinkelen. Marker skjæringspunktet mellom normalen og vinkelbeinet med . De to skjæringspunktene blir *E* og *F*. Tegn en sirkel med sentrum i *D* og med *E* på sirkelperiferien ved hjelp av .

b Hva kan du si om lengden av *DE* og *DF*?

c Flytt på punktet *D* med . Hvordan går det med *DE* og *DF*?

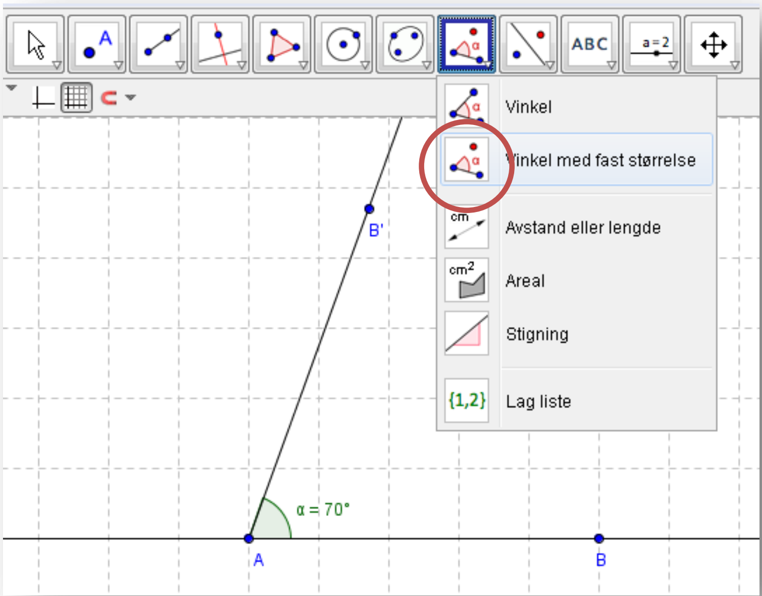
d *DE* og *DF* er avstanden fra *D* til vinkelbeina. Hva er felles for alle punkt som ligger på halveringslinja til vinkelen?

Oppgaver i NUMMER 8: 3.23

Å tegne en vinkel med oppgitt størrelse

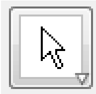
Vi tegner en vinkel med oppgitt størrelse slik:

1. Tegn det ene vinkelbeinet som en linje, et linjestykke eller en stråle.
2. Velg verktøyet **Vinkel med fast størrelse.**
3. Klikk i et avsatt punkt på første vinkelbein (*B*), deretter i vinkelens toppunkt (*A*). Oppgi vinkelens størrelse. Det avsettes da et punkt (*B'*) som vil ligge på det andre vinkelbeinet.
4. Tegn det andre vinkelbeinet som en stråle, et linjestykke eller en linjegjennom *A* og *B'*.



Oppgave 21

a Tegn et linjestykke *AB* lik 6. Tegn $\angle A = 50°$. Tegn $\angle B = 30°$. På den siste vinkelen må du huske å huke av for at vinkelen går med klokka.

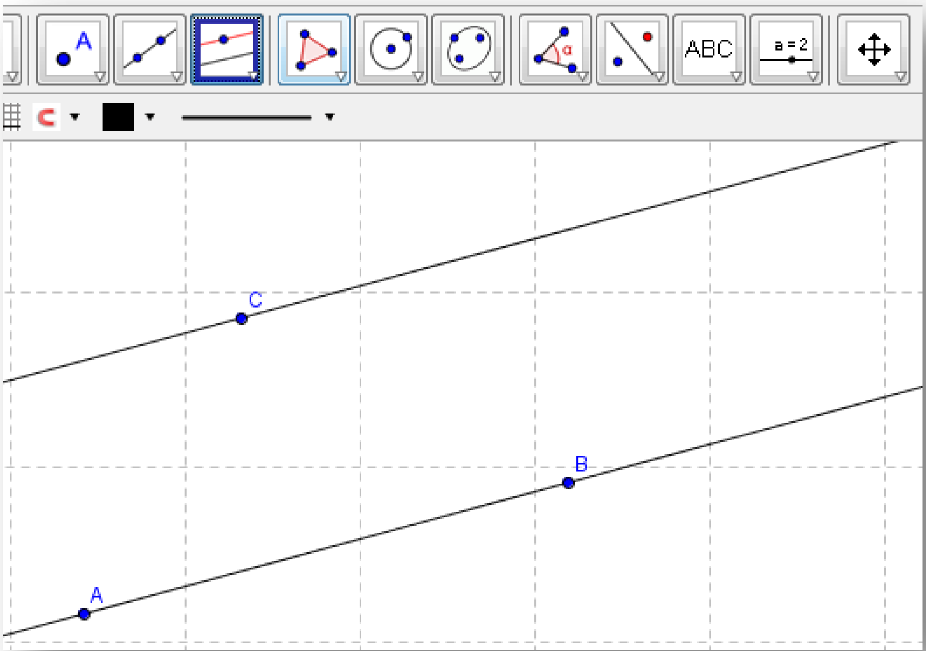
b Bruk  og flytt på de objektene som er flyttbare. Hva skjer med figuren?

Oppgaver i NUMMER 8: 3.22, 3.24,3.25

Parallell linje

Verktøyet **Parallell linje** finner du under den samme knappen som der du fant **Nedfell normal**.

1. Tegn linja som du etterpå skal tegne en parallell til.
2. Merk av et punkt *C* som parallellen skal gå gjennom.
3. Velg verktøyet **Parallell linje**, klikk i punktet parallellen skal gå gjennom, *C*, og deretter på linja den skal være parallell med.



Oppgave 22

a Tegn et linjestykke *AB* med lengde 10. Avsett et punkt *C* som har avstand ca. 5 til linja. Tegn en linje som er parallell med *AB* og som går gjennom *C*.

b Avsett et punkt *D* på parallellen. Tegn mangekanten *ABCD*.

c Hva heter den figuren du nå har tegnet?

d Hva skjer med den når du flytter på punktene?

Oppgave 23

Avsett to punkt *A* og *B*. Tegn ei linje gjennom *A* og *B*. Du skal tegne ei ny linje som er parallell med *AB* med avstand 5 fra *AB*.

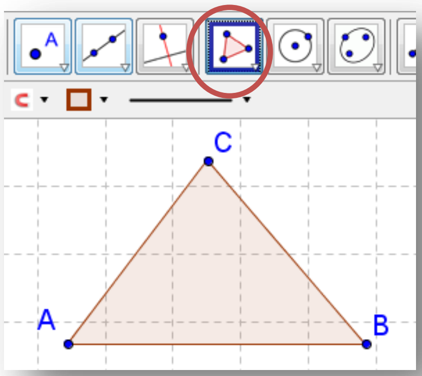
Tips: Start med å oppreise en normal i *A*. Tegn deretter en sirkel med radius 5 og sentrum i *A*. Da får du riktig avstand mellom linjene.

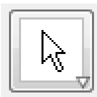
Oppgave 24
Tegn trekanten *ABC* der $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$ og $BC = 5$.

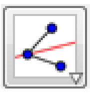
Oppgaver i NUMMER 8: 3.30

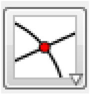
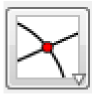
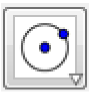
Trekant
GeoGebra er godt egnet til å tegne trekanter og eksperimentere med dem. Vi skal nå se på hvordan vi kan tegne trekanter når vi kjenner en eller flere sider eller vinkler. Vi skal også se på hvordan vi tegner likesidede og rettvinklede trekanter.
Trekanter er mangekanter med tre sider. Vi skal starte med å bli kjent med verktøyet som brukes til å tegne mangekanter. Avsett tre punkt, *A*, *B* og *C*.

1. Bruk verktøyet **Mangekant** til å tegne en trekant med de tre punktene i hvert sitt hjørne. Du ferdigstiller trekanten ved å klikke i hjørnet der du startet.



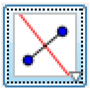
Oppgave 25
Tegn en trekant *ABC*. Bruk  og flytt på punktene. Kan *C* ligge til høyre for *A*? Til høyre for *B*? Kan *C* ligge under *AB*? Kan du plassere *C* slik at vi ikke har en trekant lenger?

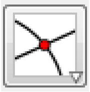
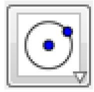
Oppgave 26
a Tegn en tilfeldig trekant *ABC*. Bruk  og halver alle de tre vinklene i trekanten. Kan du si noe om de tre halveringslinjene?

b Marker med  det punktet der halveringslinjene skjærer hverandre, *D*. Nedfell en normal fra *D* på en av sidene i trekanten. Marker skjæringspunktet *E* med . Tegn med  en sirkel med sentrum i *D* og med *E* på sirkelperiferien. Hva ser du?

c Flytt på punktene *A*, B og *C*. Hva ser du? Kan du flytte på hjørnene i trekanten slik at ikke alle trekantsidene berører sirkelen?

Oppgave 27

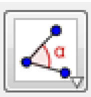
a Tegn en vilkårlig trekant *ABC*. Bruk  og tegn midtnormalen på alle de tre sidene i trekanten. Hva kan du si om midtnormalene?

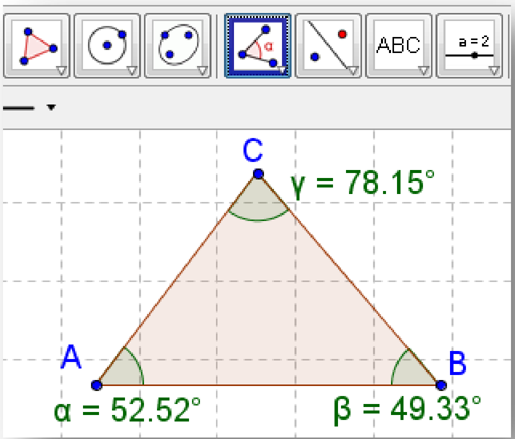
b Bruk  og marker punktet *D* der midtnormalene skjærer hverandre. Bruk  til å tegne en sirkel med sentrum i *D* og med *A* på sirkelperiferien. Hva kan du si om plasseringen av *B* og *C*?

c Flytt på punktene *A*, *B* og *C*. Hva ser du? Kan du flytte på hjørnene i trekanten slik at ikke alle hjørnene ligger på sirkelen?

Å måle vinklene i trekanter

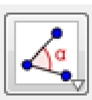
Når vi har tegnet en trekant kan vi måle alle vinklene samtidig slik:

1. Tegn trekanten
2. Velg verktøyet . Klikk deretter inne i trekanten. Størrelsen på vinklene vises. De får de greske bokstavene alfa (α), beta (β) og gamma (γ) som navn.

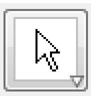


Oppgave 28

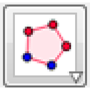
a Tegn en trekant.

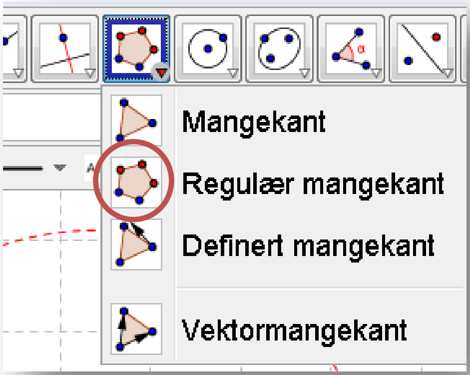
b Bruk  og mål vinklene i trekanten.

c Regn ut hva summen av de tre vinklene blir, bruk gjerne kalkulator.

d Bruk  og flytt ett eller flere av hjørnene i trekanten. Hvordan blir summen av de tre vinklene nå?

Likesidet trekant

1. Avsett et linjestykke. Dette linjestykket skal bli en av sidene i trekanten.
2. Velg verktøyet 
3. Klikk i de to endepunktene på linjestykket og skriv 3 i vinduet som dukker opp etter at du har klikket i punkt nummer to.



Oppgave 29

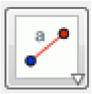
a Tegn en likesidet trekant. Sett på mål på alle de tre vinklene. Hvor store er de?

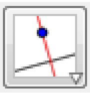
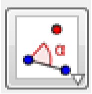
b Gjør trekanten større eller mindre ved å flytte et hjørne. Hvor store er vinklene nå? Hva blir summen av vinklene?

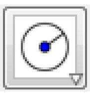
EKSEMPEL

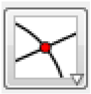
Å Tegne trekant

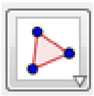
Vi skal tegne en trekant *ABC* der *AB* = 4, *AC* = 7 og $\angle A = 90°$.

1 Tegn et linjestykke *AB* lik 4 med .

2 Bruk  og oppreis en normal i *A*. Å oppreise en normal er det samme som å tegne en vinkel som er 90°. Det er dermed et alternativ her å bruke  og tegne en vinkel som er 90°.

3 Bruk  og tegn en sirkel med sentrum i *A* og radius lik 7.

4 Marker skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen med .

5 Nå har du alle hjørnene i trekanten og kan markere den med .

Oppgave 30
Tegn en trekant *ABC* der *AB* er 6, $\angle A$ er 22,5° og $\angle B$ er 90°.

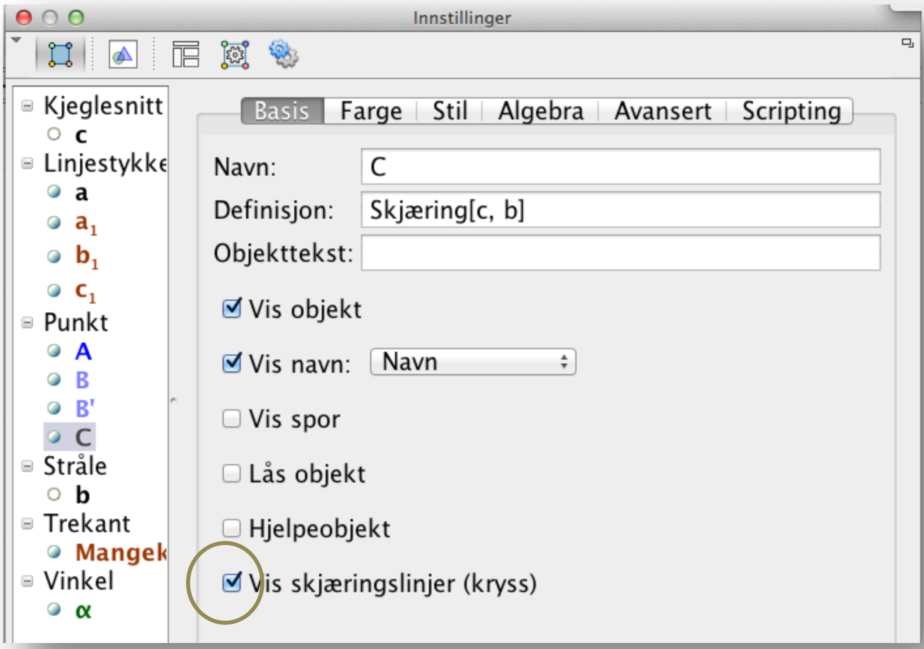
Oppgave 31
a Tegn en trekant *ABC* der *BC* = *AC* = 8, *AB* kan ha en vilkårlig lengde.
b Flytt på *B*. Hvordan endrer trekanten seg?
c Hva er den største lengden *AB* kan ha?

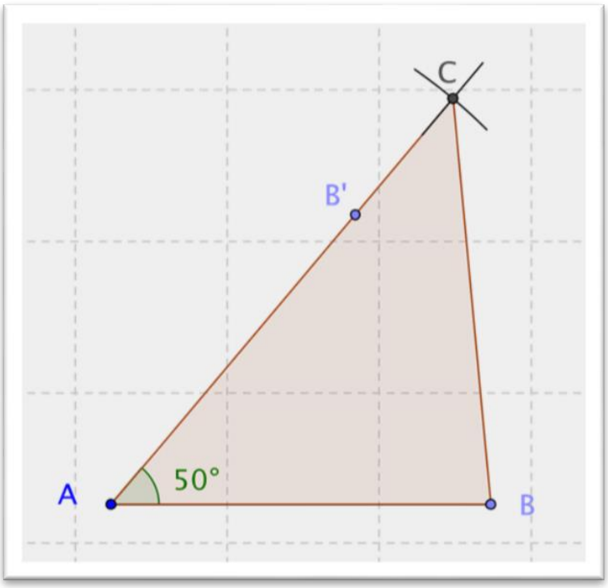
Oppgave 32
Tegn en trekant *ABC* der *AB* = 8, $\angle A$ = 27° og *BC* = 7.
Klarer du å tegne to ulike trekanter som oppfyller kravene?

Oppgave 33
Tegn et linjestykke *AB* = 9. Tegn en sirkel med sentrum i midtpunktet på *AB* (*C*), og *AB* som diameter. Plasser et punkt *D* på sirkelbuen. Tegn trekanten *ABD*. Mål $\angle D$. Hvilken type trekant har du tegnet? Flytt *D* til andre steder på sirkelbuen. Hva skjer med $\angle D$?

Hjelpelinjer, konstruksjonskryss
Når vi bruker GeoGebra til geometri vil vi ofte få en del hjelpeobjekt som vi ønsker enten å skjule eller å gjøre mindre framtredende i tegningen.
Vi må ikke slette hjelpeobjektet, da forsvinner alle andre objekt som er avhengig av dette objektet. Vi kan imidlertid gjøre objektet usynlig.
En annen mulighet er å gjøre hjelpelinjene mindre framtredende ved å velge en annen linjestil, for eksempel stiplet linje eller tynnere linje. Vi kan også endre fargen på hjelpeobjektene.
Av og til bruker vi linjer eller sirkler for å finne for eksempel et hjørne i en trekant. Hjørnet ligger der en sirkel og en linje skjærer hverandre. Vi markerer skjæringspunktet med verktøyet Skjæring mellom objekt, og kan deretter velge Vis konstruksjonskryss.

Eksempel
Vi skal tegne en trekant der *AB* = 5, $\angle A$ = 50° og *AC* = 7.
a Avsett linjestykket AB
b Tegn $\angle A$ = 50°. Tegn en stråle med start i *A* gjennom *B*’.
c Tegn en sirkel med sentrum i *A* og radius lik 7.
d Marker skjæringspunktet mellom strålen og sirkelen med verktøyet **Skjæring mellom objekt.**
f Marker trekanten *ABD* med verktøyet **Mangekant**.
g Høyreklikk i punktet *C* og velg **Egenskaper.** Huk deretter av for **Vis skjæringslinjer (kryss).**





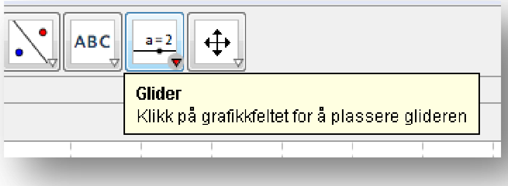
Oppgaver i NUMMER 8: 3.35-3.39

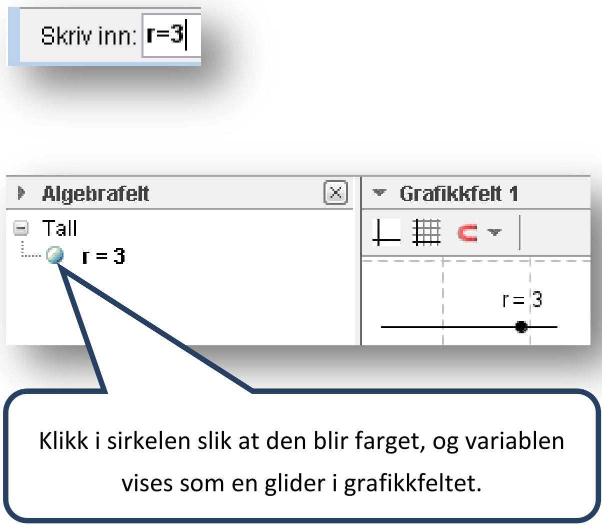
Lengder som varierer

Vi har muligheten til å opprette variabler som kan brukes til å angi lengder. Ved å bruke en variabel som lengde på en side i en trekant eller som radius i en sirkel kan vi endre lengdene som vi vil.

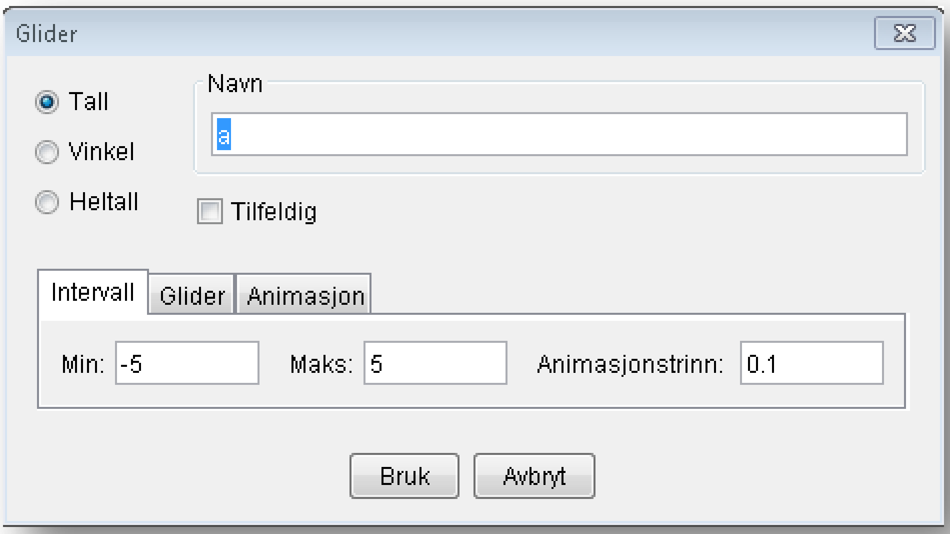
Opprette variabel

Vi oppretter variabelen enten ved å sette inn en **Glider** fra verktøylinja eller ved å skrive variabelnavnet og verdien den skal ha i inntastingsfeltet og deretter gjøre variabelen synlig i grafikkfeltet.





Du kan endre gliderens egenskaper ved å høyreklikke i glideren, velge menypunktet **Egenskaper** og fanen **Glider**. Du kan bestemme hva variabelen skal hete, mellom hvilke verdier den skal variere, og hvor store trinn den skal kunne variere med.



Oppgave 34

Tegn en sirkel med radius *r*. Varier deretter radius i sirkelen ved hjelp av glideren..

Oppgave 35

Lag en glider *r*. Tegn en trekant ABC der $\angle A = 22{,}5°$, $AB = 5{,}0$ og $BC = r$.

a Hvor stor må *r* være for at det skal bli én trekant?

b Kan du velge *r* slik at det blir mer enn en trekant som oppfyller kravene?

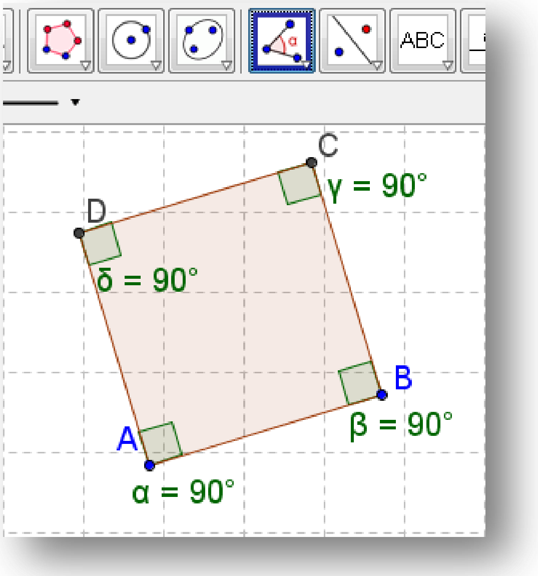
c Kan du velge *r* slik at det ikke blir noen trekant?

Mangekanter

Nå skal du tegne parallelle linjer og bruke de parallelle linjene når du tegner parallellogram, rektangel, trapes og rombe. Du skal dessuten lære å tegne et kvadrat, som er en regulær mangekant.

Kvadrat

Et kvadrat er en regulær firkant. Vi bruker verktøyet **Regulær mangekant**, på samme måte som når vi tegnet en likesidet trekant. Vi kan måle alle vinklene i alle typer mangekanter på samme måte som vi målte vinklene i trekanter.



Oppgave 36

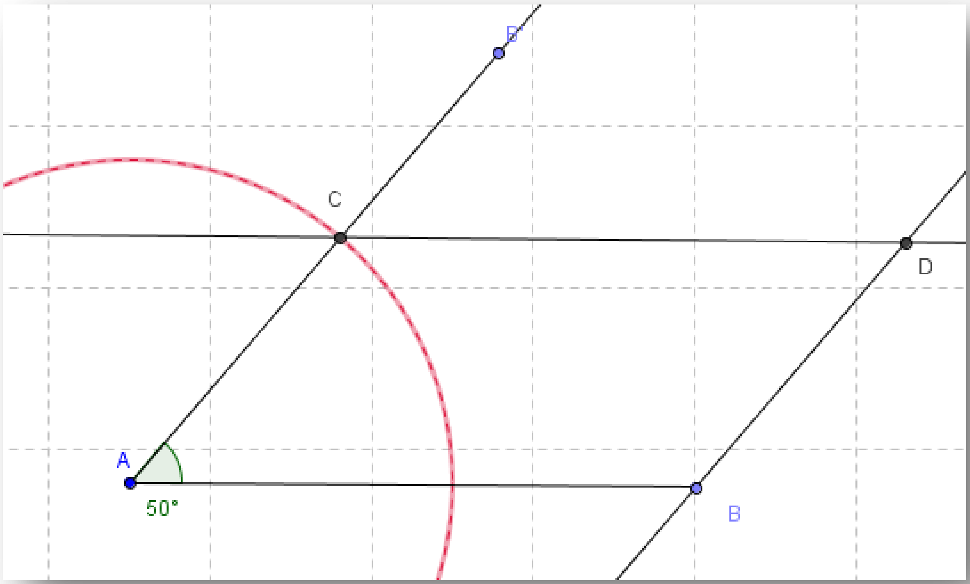
a Tegn et linjestykke *AB* og tegn en sirkel med radius i *A* og med *B* på sirkelperiferien. Tegn fire kvadrat med sirkelens radius som side. De fire kvadratene skal sammen danne et stort kvadrat som omskriver sirkelen.

b Hvordan går det med kvadratene og sirkelen når du flytter på *A* eller *B*?

Parallellogram

Hvis vi kjenner sidelengdene og vinkelen mellom to av sidene i et parallellogram kan det tegnes slik:

1. Avsett linjestykket *AB* som skal være en av sidene i parallellogrammet.
2. Avsett vinkelen *BAB*′ ved hjelp av verktøyet **Vinkel med fast størrelse**.
3. Tegn en stråle gjennom *A* og B′. Dette er det andre vinkelbeinet.
4. Tegn en sirkel med radius lik lengden til den andre siden og med sentrum i *A*.
5. Marker skjæringspunktet *C* mellomsirkelen og strålen.
6. Tegn en linje parallell med *AB* gjennom *C*.
7. Tegn en linje parallell med *AC* gjennom *B*.
8. Marker punktet *D* der de to linjene skjærer hverandre.



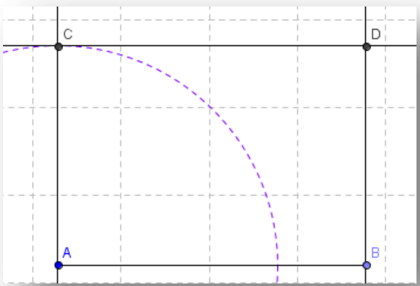
Oppgave 37
Tegn et parallellogram der den ene vinkelen er 62°, to sider er 5 og de to andre sidene er 7.

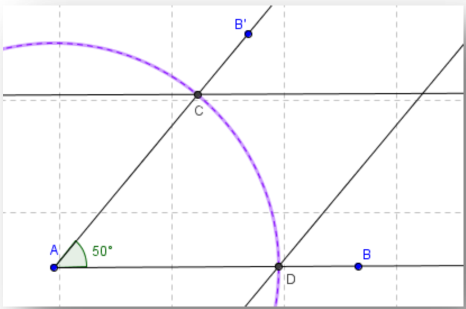
Oppgave 38
a Tegn et parallellogram der de to sidelengdene er 4 og 9 og avstanden mellom de lengste sidene er 3.

b Tegn i samme vindu et parallellogram der sidene også er 4 og 9 og avstanden mellom de korteste sidene er 3.

Rektangel og rombe

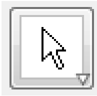
Et **rektangel** lager vi som et parallellogram der vinkelen mellom to sider er 90°. Da kan vi velge om vi vil oppreise en normal eller avsette vinkel.





En **rombe** lager vi som et parallellogram der alle sidene er like lange.

Oppgave 39
a Tegn et rektangel som har lengde 7 og bredde 4.

b Bruk  og se på hvilke muligheter du har for å flytte eller endre rektangelet. Er det etter flytteforsøkene fremdeles et rektangel med riktig lengde på sidene?

Oppgave 40

a Tegn to romber som har én side felles. Kan dette gjøres på flere måter, slik at du får ulike figurer?

b Undersøk hva som skjer med rombene om du prøver å flytte på sider og hjørner.

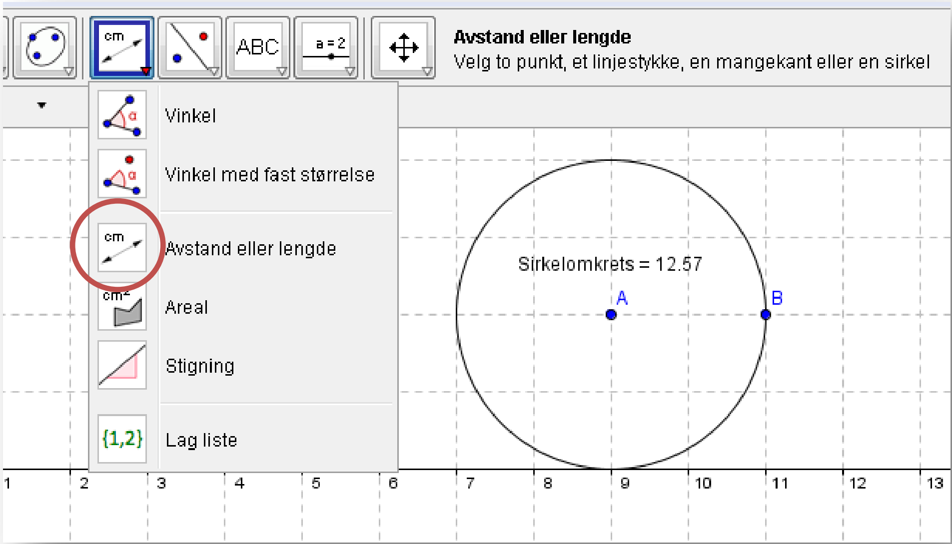
Oppgaver i NUMMER 8 3.44

Måling

Med GeoGebra kan vi måle både lengder, omkrets, areal og vinkler. Det er måling av lengder, omkrets og areal vi skal se på nå. Når vi skal måle areal eller lengder, er det lurt å vise et koordinatsystem slik at vi ser hva enheten er. Koordinatsystemet vises eller tas bort ved å klikke på ikonet for akser i stilmenyen i overkanten av grafikkfeltet.

Måle lengde og omkrets

Vi kan måle avstanden mellom to punkt, lengden av et linjestykke, omkretsen av en mangekant eller omkretsen av en sirkel.
Velg verktøyet **Avstand eller lengde** og klikk på det objektet som skal måles.



Oppgave 41

a Tegn en rettvinklet trekant *ABC* der $\angle A$ er 90°.

b Mål *AB*, *AC* og *BC*.

c Mål deretter hele omkretsen av trekanten.

d Mål arealet av trekanten.

e Flytt *A*, *B* og *C* slik at du ved å se på rutene kan sjekke om GeoGebra måler omkretsen og arealet riktig.

f Flytt hjørnene i trekanten slik at begge katetene (vinkelbeina i den rette vinkelen) blir dobbelt så lange som de var i utgangspunktet. Følg med på hva som skjer med de målte lengdene og arealet.

g Forleng katetene slik at de er tre ganger så lange som det du startet med. Hvor stort er arealet blitt nå?

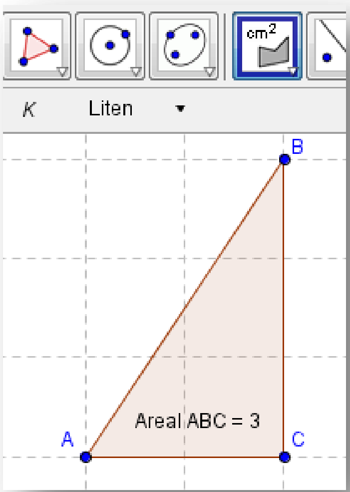
Oppgave 42

Tegn en sirkel med radius lik 0,5. Mål omkretsen. Ble svaret som forventet?

Oppgaver i NUMMER 8: 3.23, 3.75, 3.112

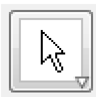
Måle areal av mangekant

Vi kan måle arealet av mangekanter ved hjelp av verktøyet **Areal**. Velg verktøyet **Areal** og klikk deretter inne i den mangekanten du skal måle arealet av.



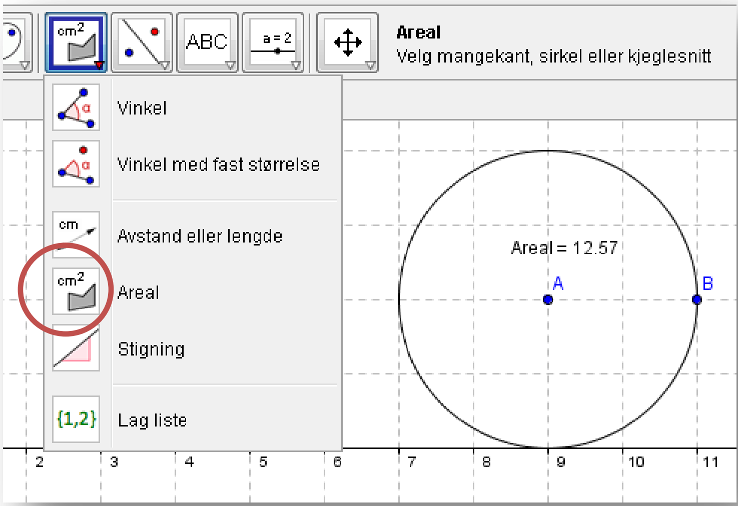
Oppgave 43

a Avsett to punkt *A* og *B*. Tegn en regulær sekskant med *AB* som en av sidene. Mål arealet av sekskanten.

b Bruk  og se hva som skjer med arealet når du flytter *A* eller *B*.

Måle areal av sirkel

Vi kan måle arealet av sirkler ved hjelp av verktøyet **Areal**.



Velg verktøyet **Areal** og klikk deretter i sirkelperiferien.

Oppgave 44

a Tegn en sirkel med radius lik 1 og mål arealet.

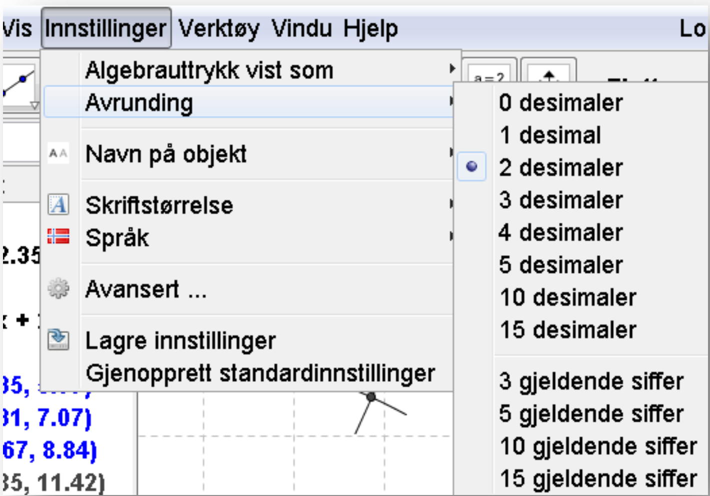
b Hva fikk du?

Oppgave 45

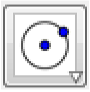
Oppgave 3.90 fra NUMMER 8. Tegn rektanglene og mål arealet.

Avrunding

Vi kan velge hvor mange desimaler eller gjeldende sifre som skal vises.



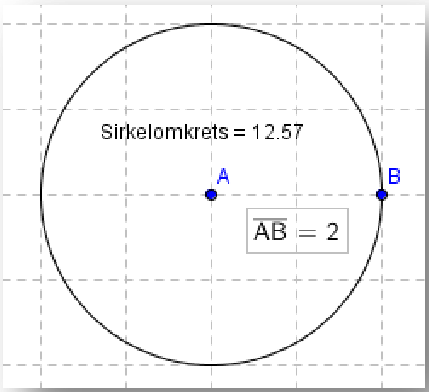
Oppgave 46

a Bruk  og tegn tre sirkler med ulik størrelse.

b Mål radius (avstanden mellom sentrum og periferipunktet) i alle sirklene.

c Mål omkretsen i alle sirklene.

d Hva blir sirkleomkretsene hvis du viser 0 desimaler? Hva blir de hvis du viser 4 desimaler?

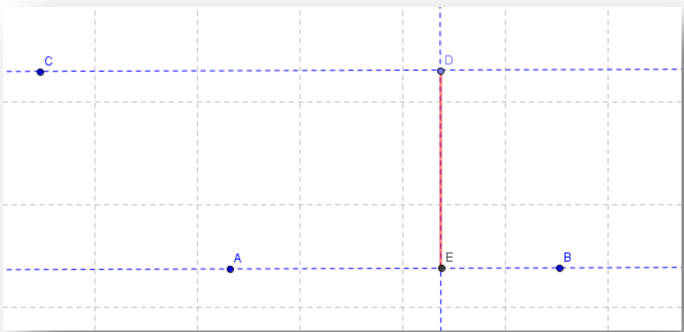


e Hvordan vil du gå fram for å måle diameteren i en sirkel? Mål diameteren i alle sirklene. Ta med 4 desimaler.

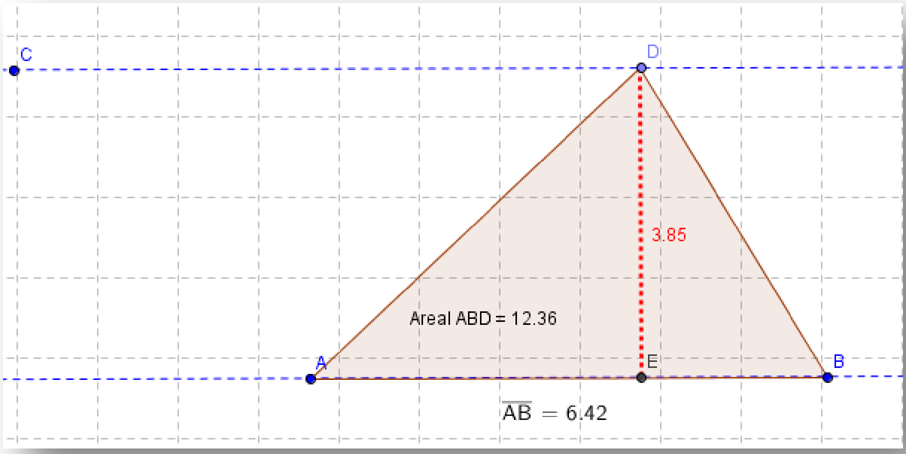
f Bruk kalkulator og regn ut omkrets/diameter for hver av sirklene. Hva finner du?

Oppgave 47 Areal av trekant

1. Tegn en linje gjennom to punkt, *A* og *B*. Vis linja som blå stiplet.
2. Avsett et punkt *C* litt over linja og et stykke til venstre for *A*.
3. Tegn ei linje parallell med *AB* gjennom *C*. Vis også denne linja som blå stiplet.
4. Avsett et punkt *D* på linja gjennom *C*. (Pass på at den stiplede linja er markert i det du avsetter punktet).
5. Nedfell en normal fra *D* på linja gjennom *A* og *B*.
6. Marker skjæringspunktet mellom normalen og linja gjennom *A* og *B*. Punktet får navnet *E*.
7. Avsett et linjestykke fra *D* til *E*. Vis dette linjestykket som stiplet rødt.



8. Tegn trekanten *ABD*.
9. Mål lengden av linjestykket *DE* og avstanden fra *A* til *B*.
10. Mål arealet av trekanten *ABD*.
11. Gjør normalen gjennom *D* og *E* usynlig.



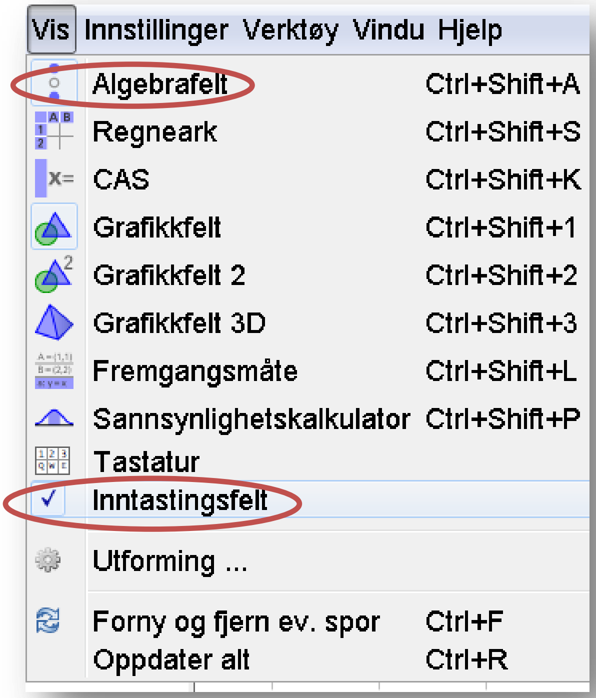
Flytt punktet *D* fram og tilbake.

- a Endrer trekanten form?
- b Endrer grunnlinja seg?
- c Endrer høyden seg?
- d Endrer arealet seg?
- e Stemmer arealet GeoGebra beregner med det du regner ut?
- f Hva skjer når du flytter *D* til venstre for *A* eller til høyre for *B*?
- g Hva er høyden i trekanten nå?

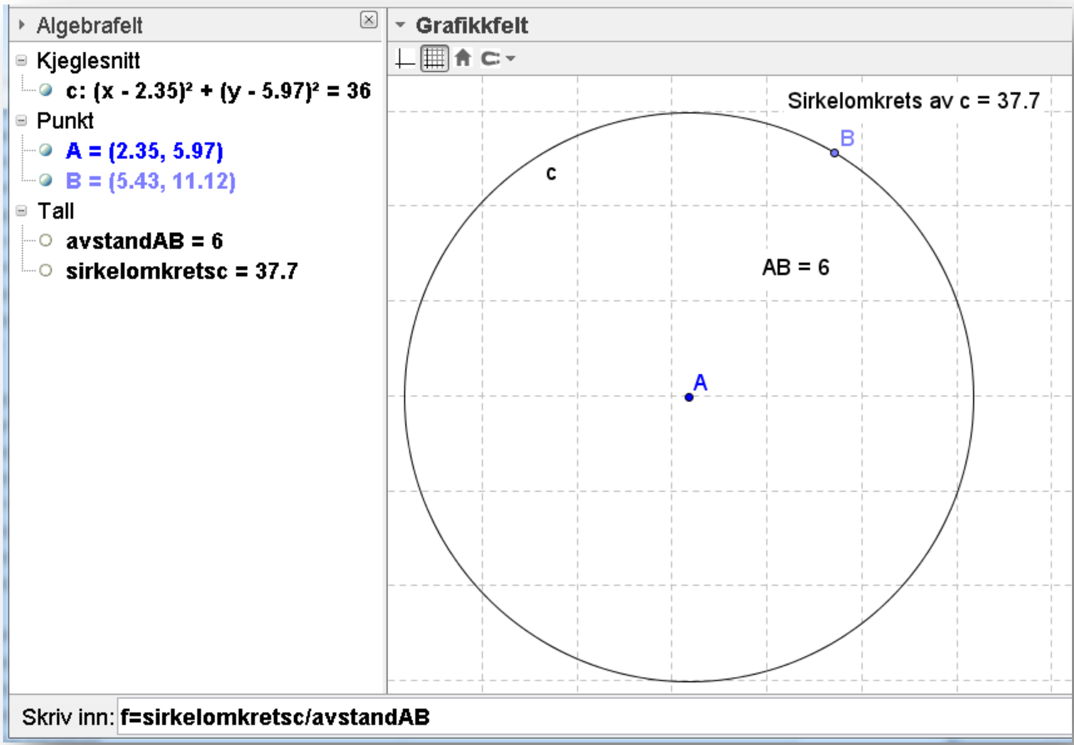
Oppgaver i NUMMER 8: 3.104

Regning

Det er mulig å gjøre utregninger og vise svaret i geometrifeltet. Når vi skal gjøre beregninger må vi vise algebrafeltet og inntastingsfeltet.



De målte verdiene har fått navn som vi finner igjen i algebrafeltet. Vi skal nå regne ut forholdet mellom sirkelomkretsen og radien. Svaret skal lagres i en variabel. Variabelnavnet velger vi selv.

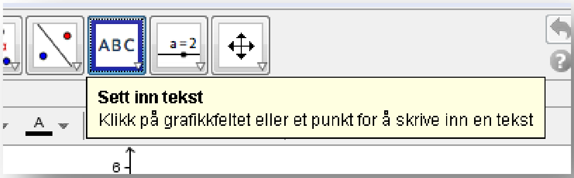


For å regne ut forholdet mellom omkrets og radius av sirkelen i eksemplet over skriver vi i inntastingsfeltet som vist på figuren over. Svaret vises da i algebrafeltet. Velg variabelen i algebrafeltet og dra den over i grafikkfeltet. Da vises variabelnavn og svar i grafikkfeltet.
Du kan endre navn på objektene i algebrafeltet ved å høyreklikke på dem og velge **Gi nytt navn.**

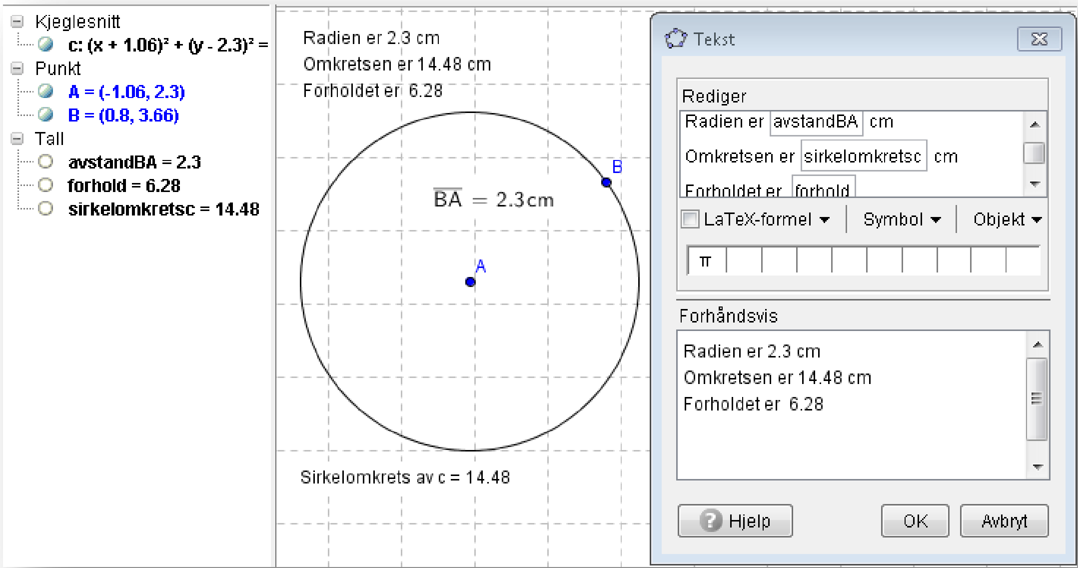
Oppgave 48
Tegn en rettvinklet trekant. Tegn deretter et kvadrat på hver av de tre sidene slik at siden i kvadratet er lik siden i trekanten. Mål arealet av alle kvadratene.
Bruk beregning til å sjekke om det er noen sammenheng mellom størrelsene på kvadratene.
Endre størrelsen på trekanten. Hva skjer med den sammenhengen du fant?

Tekst i grafikkfeltet

Ofte ønsker vi å skrive tekst på de teningene vi har laget i grafikkfeltet. Vi kan da legge inn en tekstboks. Velg verktøyet **Sett inn tekst**, og klikk der du vil ha teksten.



Du kan nå i **Rediger**-feltet skrive den teksten som skal vises i tekstboksen. Teksten blir da statisk. Dersom du vil vise verdien til noen av de variablene som finnes i algebrafeltet kalles dette dynamisk tekst. Velg i så fall variabelnavnet fra lista under **Objekt**. Da vises variabelnavnet i et grått rektangel. Du kan også hente en del spesialtegn, for eksempel regneoperatorene, fra lista under **Symbol**. Du kan åpne en tekst for redigering ved å dobbeltklikke på den.



Måleenhet på avstander i geometritegninger

Når du bruker verktøyet avstand, og måler avstanden mellom punkt *A* og *B* ved å klikke i de to punktene vil avstanden *AB* bli skrevet i et tekstfelt. Dobbeltklikk på tekstfeltet for å endre teksten.